

DÁFNI FERNANDA ZENEDIN MARCHIORO

**GRAVITAÇÃO BIDIMENSIONAL CLÁSSICA:
DINÂMICA NO ESPAÇO DE FASE REDUZIDO
E SIMETRIAS RESIDUAIS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências. Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Fernando Pablo Devecchi

CURITIBA

2001

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Mestrado da estudante Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação de Mestrado cujo título é “*Gravitação Bidimensional Clássica: Dinâmica no Espaço de Fase Reduzido e Simetrias Residuais*”.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2001

Prof. FERNANDO PABLO DEVECCHI
(Orientador Presidente)
(UFPR)

Prof. FERNANDO KOKUBUN
(FURG)

Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER
(UFPR)



Agradecimentos

- Ao meu orientador, Fernando Pablo Devecchi, pela competência e dedicação que dedicou à minha orientação nestes quatro anos;
- a minha família, Valéria, Maurício, Cárile, Helena, avós, primos e tios, pelo apoio, carinho e presença nos momentos difíceis;
- a Jahyr de Freitas Neto, pela paciência, apoio, carinho e compreensão;
- aos amigos Sandro, Adriano Doff, Adriano Benvenho, Angela, José Carlos, Cristina, Ana Amelia, Mario Sergio e Giselle, pelas conversas, as cervejas no Rê Bordosa e o apoio;
- aos amigos Anna Gabriella, Marcelo e Alicia, pelo apoio, conversas, artigos e hospedagem em São Paulo;
- aos membros da banca de pré-defesa, professores Felice Pisano e José Arruda Freire, pelas sugestões e correções;
- aos membros da banca de defesa, professores Gilberto Medeiros Kremer e Fernando Kokubun, pelas sugestões e correções;
- a Capes pelo apoio financeiro;
- a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e eu esqueci de agradecer.

Resumo

Nesta dissertação, partindo do modelo de Polyakov (modelo de gravitação bidimensional induzida), calculamos a extensão de sua ação utilizando o método de Henneaux *et al*, com a finalidade de tratar a invariância por transformações gerais de coordenadas como uma invariância de gauge usual. Encontramos uma Hamiltoniana não nula para o modelo aplicando o método de Fulop *et al*, após fixação de gauge completa.

Novamente, a partir do modelo original, construímos a versão auto-dual do modelo de Polyakov e exploramos suas simetrias residuais, calculando seus geradores através do teorema de Noether.

Abstract

In this dissertation, from Polyakov's model we calculated the action's extension using the method of Henneaux *et al*, to treat general covariance as an usual gauge invariance. We found a non-zero Hamiltonian for the model applying the method of Fulop *et al*, after complete gauge fixing.

Again, from the original model we built the self dual version of Polyakov's model (two dimensional induced gravity) and explored its residual symmetries, computing their generators through Noether's theorem.

Conteúdo

Agradecimentos	1
Resumo	2
Abstract	2
Introdução	1
1 Sistemas Vinculados - Tratamento Clássico	4
1.1 Formalismo Lagrangeano: sistemas regulares e singulares	5
1.2 Formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares - o método de Dirac	8
1.3 Simetrias	12
1.3.1 Invariância da ação e transformações de simetria	12
1.3.2 Teorema de Noether	13
1.3.3 Vínculos de primeira classe e invariância de gauge	14
1.4 Formalismo Hamiltoniano estendido	15
1.5 O problema da Hamiltoniana nula em teorias invariantes por reparametrização	16
1.5.1 Método de Henneaux <i>et al</i>	17
1.5.2 Método de Fulop <i>et al</i> para o cálculo da Hamiltoniana efetiva	20
2 Relatividade Geral	24
2.1 Princípio da Equivalência e Princípio da Covariância Geral	24
2.2 Vetores e tensores. Álgebra tensorial.	27
2.3 Derivada covariante	29
2.4 Curvatura	33
2.4.1 Definição do tensor de curvatura. Propriedades.	33
2.4.2 Gravitação e Coordenadas Curvilíneas	36
2.4.3 Descrição da curvatura em N dimensões	37

2.5	Equações de Einstein via Princípio de Hamilton	38
3	Gravitação induzida bidimensional - modelo de Polyakov	41
3.1	Gravitação de Einstein em duas dimensões	41
3.2	Origem da ação de Polyakov	42
3.3	Análise clássica independente de gauge	44
3.4	Análise clássica no gauge de cone de luz	46
3.4.1	Formulação Lagrangeana	46
3.4.2	Simetrias locais	47
4	Gravitação induzida bidimensional: modelo auto-dual e problema da Hamiltoniana nula	52
4.1	Gravitação induzida bidimensional: modelo auto-dual	53
4.1.1	Análise Lagrangeana e Hamiltoniana	53
4.1.2	Simetrias residuais	56
4.2	Gravitação bidimensional induzida - o problema da Hamiltoniana nula	58
4.2.1	Aplicação do método de Henneaux <i>et al</i> ao modelo da gravitação induzida bidimensional	59
4.2.2	Aplicação do método de Fulop <i>et al</i> ao modelo de gravitação induzida bidimensional	61
	Conclusões	66
A	Transformação da conexão afim	68
B	Algoritmo de Anderson e Bergman	71

Introdução

Um dos objetivos da teoria quântica de campos foi a construção de modelos consistentes para as quatro interações fundamentais (eletromagnetismo, forças nucleares e gravitação) [1]. No entanto, é necessário, primeiro, construir as versões clássicas de tais teorias. Elas se caracterizam por apresentarem invariância de gauge, uma possibilidade em sistemas vinculados [2].

Os sistemas vinculados apresentam ambigüidades nas soluções das equações de movimento. A presença de quantidades indeterminadas impossibilita a passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano de forma unívoca. Para tratá-los no formalismo Hamiltoniano, usa-se o método de Dirac [3], técnica útil na identificação dos observáveis da teoria.

O conhecimento das simetrias de uma teoria é importante, pois elas estão ligadas a leis de conservação em física. Existem dois tipos de simetrias: rígidas e locais. Para encontrar o gerador das simetrias rígidas, usa-se o teorema de Noether [1]; já no caso das simetrias locais, usa-se o algoritmo de Anderson e Bergman, dentro do formalismo Hamiltoniano [4].

Cada uma das quatro interações fundamentais está ligada a um grupo que caracteriza sua simetria de gauge. As invariâncias de gauge presentes no eletromagnetismo e nas forças nucleares se comportam de forma análoga. No caso da gravitação há uma diferença: seu grupo de simetria de gauge é o grupo das transformações gerais de coordenadas que, de modo geral, implica numa Hamiltoniana nula para a teoria. Há duas maneiras de se resolver este problema: uma é estender a ação de tal forma que se possa tratar a invariância das transformações gerais de coordenadas como uma invariância de gauge ordinária (método de Henneaux *et al*) [5]. Outra forma é, após fixação de gauge com vínculos fixadores dependentes do tempo, fazer uma transformação canônica cujo gerador terá a forma determinada por tal fixação (método de Fulop *et al*) [6]; desta maneira, obtém-se uma Hamiltoniana não nula para tais sistemas.

A gravitação em quatro dimensões espaço-temporais foi formulada por Einstein, a chamada Teoria da Relatividade Geral [7]. Tem como princípio fundamental o Princípio da Equivalência, do qual se deriva o Princípio da Covariância Geral. A partir destes dois princípios fundamentais e utilizando a chamada álgebra

tensorial, obtém-se a dinâmica do campo gravitacional: reconhece-se o campo fundamental, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e constrói-se o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$. As equações de movimento da gravitação, as equações de Einstein, são derivadas a partir de uma ação pelo princípio variacional, como é usual em teoria de campos.

No entanto, a gravitação não é uma teoria de campos quantizável como no caso das outras três teorias [8]. Uma abordagem para tentar resolver este problema é trabalhar em dimensões menores do que quatro. Em duas dimensões, a ação de Einstein não fornece informação dinâmica [9]. Por este fato, surgiram modelos alternativos de gravitação em duas dimensões espaço-temporais, entre eles: teoria de Liouville, gravitação dilatônica e o modelo de Polyakov.

O modelo de Polyakov tem sua origem ligada à teoria de cordas [10]. É um modelo de gravitação bidimensional que pode ser quantizado. Apresenta simetrias residuais rígidas, cujos geradores formam uma álgebra bem conhecida (Kac-Moody $SL(2, \mathbf{R})$) [10]. Possui, como todas as teorias de gravitação em qualquer dimensão, Hamiltoniana nula.

A partir do modelo de Polyakov, construímos sua versão auto-dual. Analisamos classicamente a ação deste modelo: calculamos suas equações de movimento Lagrangeanas e seus momentos canônicos; obtivemos sua Hamiltoniana canônica e suas equações de movimento Hamiltonianas. Exploramos suas simetrias residuais: calculamos seus geradores através do teorema de Noether [11], de acordo com o que foi feito para o modelo original [12].

Novamente, partindo da ação de Polyakov, utilizamos o método de Henneaux *et al* para calcular a extensão da ação. Este cálculo requer o conhecimento do gerador das simetrias de gauge, que é uma combinação linear dos vínculos de primeira classe do modelo [3]. Calculado o gerador, é necessário impor novas condições de contorno para os parâmetros da transformação de gauge, de tal forma que eles não se anulem nos extremos. Desta forma, obtivemos o termo de extensão do modelo [13].

Para calcular uma Hamiltoniana não nula para o modelo de Polyakov, utilizamos o método de Fulop *et al*. Após fixação de gauge completa (na qual foi introduzido um vínculo fixador dependente do tempo), fizemos uma transformação canônica. De acordo com a teoria das transformações canônicas [14], obtivemos uma nova Hamiltoniana, que será o gerador da evolução temporal do modelo. A equação de movimento para o campo fundamental (g_{11}) está de acordo com as expressões dos

momentos canônicos [13].

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos os sistemas vinculados e seu tratamento clássico; no capítulo 2, fazemos um resumo da teoria da Relatividade Geral, de acordo com o propósito do trabalho; no capítulo 3, apresentamos uma descrição do modelo de Polyakov, de acordo com a literatura existente; no capítulo 4, apresentamos de forma sucinta nossos resultados originais: a versão auto-dual do modelo de Polyakov, a obtenção da extensão da ação do modelo original via método de Henneaux *et al* e o cálculo da Hamiltoniana no espaço de fase reduzido (através do método de Fulop *et al*).

Capítulo 1

Sistemas Vinculados - Tratamento Clássico

Este capítulo é dedicado ao tratamento de sistemas vinculados.

Os sistemas vinculados ou singulares se caracterizam por apresentarem ambigüidades nas soluções das equações de movimento [2]. São muito freqüentes em Física; como exemplos de teorias singulares tem-se a gravitação, as teorias das interações nucleares, o eletromagnetismo e as teorias de cordas. Estes sistemas podem apresentar invariância de gauge.

O tratamento clássico destes sistemas não pode ser feito utilizando os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano usuais. No caso do formalismo Hamiltoniano, utiliza-se o método de Dirac [3], que ensina como obter a dinâmica de tais sistemas, sem ambigüidades.

Obviamente, há interesse em explorar suas simetrias. No formalismo Lagrangeano, pode-se utilizar o teorema de Noether para identificar as simetrias rígidas de uma teoria [1]. Já no formalismo Hamiltoniano, identifica-se os geradores das simetrias de gauge dentro do método de Dirac, utilizando o algoritmo de Anderson e Bergman [4].

Com o objetivo de explorar toda a liberdade de gauge que um sistema proporciona, trabalha-se com o formalismo Hamiltoniano estendido, proposto por Dirac [3]. Este formalismo foi utilizado por Henneaux *et al* [5], com o objetivo de tratar os sistemas invariantes por reparametrização como sistemas que apresentam invariância de gauge ordinária (do tipo “Yang-Mills”).

Uma característica dos sistemas invariantes por reparametrização é que eles apresentam Hamiltoniana total nula [15]. Com o objetivo de resolver este

problema, Fulop *et al* [6] desenvolveram um método que permite encontrar uma Hamiltoniana não nula no espaço de fase reduzido (introduzindo vínculos fixadores dependentes do tempo).

Portanto, o objetivo deste capítulo é apresentar, sucintamente, cada um dos métodos citados acima, os quais foram utilizados neste trabalho para uma análise clássica consistente do modelo de Polyakov (ver capítulo 3).

1.1 Formalismo Lagrangeano: sistemas regulares e singulares

Seja um conjunto de M campos independentes, denotados por $\{\varphi_a(x), a = 1, \dots, M\}$, e definidos num espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional de coordenadas $\{x^\mu, \mu = 0, \dots, D\}$.¹ O objetivo é descrever a evolução espaço-temporal dos campos φ_a ; para isto, assume-se que suas equações de campo (equações de movimento) podem ser derivadas a partir de uma ação

$$S = \int_V \mathcal{L}(\varphi) dV = \int L dt \quad , \quad dV \equiv d^{D+1}x, \quad (1.2)$$

sendo \mathcal{L} o que se chama de **densidade de Lagrangeana**, e dV é o elemento de volume no espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional. Obtém-se as equações de movimento quando se seleciona, dentre todas as histórias possíveis $\{\varphi_a(x)\}$, aquelas que obedecem

$$\delta S = 0, \quad (1.3)$$

dadas as condições iniciais e de contorno. A equação (1.3) resume o **Princípio de Hamilton** [14], e as histórias que obedecem (1.3) são chamadas de **histórias físicas** ou **trajetórias** da teoria.

¹A convenção que adotamos neste capítulo e nos restantes é

$$\begin{aligned} x^0 = t &= \text{coordenada temporal,} \\ \{x^i, i = 1, \dots, D\} &= \text{coordenadas espaciais,} \\ \partial_\mu \varphi_a &\equiv \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

A convenção de soma para índices repetidos é utilizada em todo o texto.

A fim de simplificar a análise, considera-se que o conjunto $\{\varphi_a\}$ de campos independentes seja bosônico e que a densidade de Lagrangeana dependa no máximo de derivadas primeiras nos campos $(\partial_\mu\varphi_a)$. Voltando a (1.3), e usando (1.2), tem-se

$$\delta S = \int_V \delta \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x^\mu) dV = \int_V L_a(\varphi) \delta\varphi_a dV = 0, \quad (1.4)$$

sendo

$$L_a(\varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right), \quad (1.5)$$

as derivadas de Euler de \mathcal{L} em relação a φ_a [1].

Como as variações $\delta\varphi_a$ são arbitrárias, conclui-se que

$$L_a(\varphi) = 0, \quad (1.6)$$

e estas são as equações de movimento Lagrangeanas para os campos φ_a , chamadas **equações de Euler-Lagrange** [14]. Pode-se escrever (1.5) de outra forma, explicitando as acelerações, a fim de classificar as soluções das equações de Euler-Lagrange [15]:

$$L_a = V_a(\varphi, \partial_\alpha\varphi, x^\alpha) - W_{ab}^{\mu\nu}(\varphi, \partial_\alpha\varphi, x^\alpha) \partial_\mu \partial_\nu \varphi^b, \quad (1.7)$$

sendo

$$V_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a) \partial \varphi^b} \partial_\mu \varphi^b - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a) \partial x^\mu}, \quad (1.8a)$$

$$W_{ab}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a) \partial (\partial_\nu \varphi^b)}. \quad (1.8b)$$

O objetivo é resolver as equações de Euler-Lagrange para as acelerações e obter a evolução temporal dos campos. Isolando à esquerda os termos que contém as acelerações em (1.7), obtém-se [16]

$$-W_{ab}^{00} \partial_0 \partial_0 \varphi^b + \dots = 0. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) pode ser resolvida para as acelerações se (e somente se) o determinante da matriz

$$W_{ab}^{00} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^a) \partial(\partial_0 \varphi^b)}, \quad (1.10)$$

for diferente de zero [34]; caso contrário, não há soluções únicas para (1.10), dadas as condições de contorno. A matriz W_{ab}^{00} é conhecida como **matriz Hessiana**. Dentro do formalismo Lagrangeano, ela classifica a densidade de Lagrangeana em duas categorias:

- **regular**, para o caso de $\det |W_{ab}^{00}| \neq 0$. As equações de movimento podem ser resolvidas para as acelerações e não há ambigüidade nas soluções.
- **singular**, para o caso de $\det |W_{ab}^{00}| = 0$. Não existem soluções únicas para as equações de movimento, dadas as condições de contorno, e as soluções podem conter funções arbitrárias [17].

Neste trabalho, os modelos que analisamos apresentam densidade de Lagrangeana singular. De modo geral, isto caracteriza uma teoria de gauge (ver introdução deste capítulo).

O caráter singular de uma teoria se manifesta, também, quando se quer passar do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano. Para tal, define-se os momentos canonicamente conjugados aos campos φ_a :

$$\pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_a)}. \quad (1.11)$$

Eles são necessários para se fazer uma transformação de Legendre

$$H(\varphi_a, \pi^a, x^\mu) = \int \pi^a \partial_0 \varphi_a d^D x - L(\varphi_a, \partial_0 \varphi_a, x^\mu), \quad (1.12)$$

e relacionar os dois formalismos. No caso de Lagrangeanas singulares, as relações (1.11) ficam comprometidas, pelo fato de que

$$|W_{ab}^{00}| = \left| \frac{\partial \pi^b}{\partial(\partial_0 \varphi_a)} \right| = 0. \quad (1.13)$$

Isto implica que não se pode utilizar os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano usuais. Na próxima seção será apresentado, dentro do formalismo Hamiltoniano, o tratamento deste problema.

1.2 Formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares - o método de Dirac

Esta seção será dedicada ao tratamento de sistemas singulares no formalismo Hamiltoniano, o chamado **método de Dirac** [3].

A passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano é feita através de uma transformação de Legendre, como foi visto na seção (1.1). Para isto, os momentos canônicos foram definidos na equação (1.11); eles devem incluir velocidades em suas expressões para que a passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano se dê de forma unívoca. Mas, como se vê da expressão (1.13), isto não acontece; aparecem expressões que dependem exclusivamente de variáveis do espaço de fase, como abaixo:

$$\Omega^k = \pi^k - f(\varphi_a, \partial_i \varphi_a, \pi^l) = 0, \quad k = 1, \dots, P, \quad (1.14)$$

sendo P ($P < M$) o número de momentos canônicos que não dependem de velocidades. A expressão acima é o que se chama de **vínculo primário**. A denominação “primário” vem do fato destas expressões serem obtidas a partir da definição dos momentos canônicos, sem usar as equações de movimento [2]. Como consequência de (1.13) e (1.14), apenas $(M - P)$ velocidades podem ser expressas em termos dos momentos canônicos [12].

Em sistemas singulares precisamos fazer distinção entre dois tipos de **Hamiltoniana**. A **Hamiltoniana canônica** H_C e sua densidade \mathcal{H}_C estão relacionadas pela expressão

$$H_C = \int \mathcal{H}_C d^D x, \quad (1.15a)$$

$$\mathcal{H}_C = (\partial_0 \varphi_l) \pi^l - \mathcal{L}. \quad (1.15b)$$

No caso de sistemas regulares, esta Hamiltoniana é o gerador da evolução temporal. Porém, em sistemas singulares isto não é verdade, pois as equações de movimento Hamiltonianas derivadas de H_C não reproduzem as equações de movimento Lagrangeanas. O verdadeiro gerador da evolução temporal do sistema é a chamada **Hamiltoniana total** H_T que inclui as relações (1.14) em sua expressão:

$$H_T = H_C + \int \mu_k \Omega^k d^D x. \quad (1.16)$$

Na equação acima, μ_k são multiplicadores de Lagrange que estão relacionados às velocidades indeterminadas.

As equações de movimento Hamiltonianas podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton [3]:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int (\pi^l \partial_0 \varphi_l - \mu_k \Omega^k) d^D x - H_C \right] dt. \quad (1.17)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_l} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_l)} \right) = 0,$$

tem-se

$$\partial_0 \varphi^l(x) = \frac{\partial \mathcal{H}_C}{\partial \pi_l} + \mu^k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \pi_l}, \quad (1.18a)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) = -\frac{\partial \mathcal{H}_C}{\partial \varphi^l} - \mu^k \frac{\partial \Omega_k}{\partial \varphi^l}. \quad (1.18b)$$

Escrevendo (1.18a) e (1.18b) na forma de parênteses de Poisson

$$\partial_0 \varphi^l(x) = \{ \varphi^l(x), \int \mathcal{H}_C(y) d^D y \} + \int \mu^k \{ \varphi^l(x), \Omega_k(y) \} d^D y, \quad (1.19a)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) = \{ \pi_l(x), \int \mathcal{H}_C(y) d^D y \} + \int \mu^k \{ \pi_l(x), \Omega_k(y) \} d^D y, \quad (1.19b)$$

e substituindo (1.15a) e (1.16), tem-se:

$$\partial_0 \varphi^l(x) = \{ \varphi^l(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^D y \}, \quad (1.20a)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) = \{ \pi_l(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^D y \}. \quad (1.20b)$$

Pela presença das relações de vínculo na teoria, as variáveis do espaço de fase não são independentes; como consequência, a operação de parênteses de Poisson fica comprometida.

Para se trabalhar com sistemas singulares usando parênteses de Poisson é necessário calculá-los primeiro e depois usar as relações de vínculo [3]. Dirac incorporou este procedimento definindo o que se chama de **igualdade fraca** (\approx). A

igualdade fraca permite escrever as equações de movimento em forma de parênteses de Poisson, sem ambigüidades:

$$\partial_0 \varphi^l(x) \approx \{ \varphi^l(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^D y \}, \quad (1.21a)$$

$$\partial_0 \pi_l(x) \approx \{ \pi_l(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^D y \}. \quad (1.21b)$$

Escrevem-se também os vínculos como igualdades fracas:

$$\Omega_k \approx 0. \quad (1.22)$$

As equações (1.22) devem satisfazer condições de consistência temporal, ou seja, devem se preservar ao longo do tempo [3]:

$$\partial_0 \Omega_k(x) \approx \{ \Omega_k(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^3 y \} \approx 0. \quad (1.23)$$

Desta imposição podem surgir três tipos de resultado [16]:

1. a expressão se anula identicamente;
2. aparecem expressões que são funções das variáveis do espaço de fase;
3. aparecem expressões que impõem restrições sobre os multiplicadores de Lagrange μ_k .

No segundo caso, o que se obtém é uma nova geração de vínculos, os quais são chamados de **secundários**. Esta denominação vem do fato das equações de movimento terem sido usadas para obtê-los.

Os vínculos secundários (θ_m) devem também satisfazer condições de consistência:

$$\partial_0 \theta_m \approx 0. \quad (1.24)$$

Este processo deve repetir-se até que não apareça mais nenhuma geração de vínculos na teoria.

Existe outro critério importante de classificação de vínculos, de acordo com o papel que desempenham dentro da teoria. Tal critério está baseado na

definição de **função de primeira classe**. Uma função A é dita de primeira classe se, e somente se, ela satisfizer a condição

$$\{A(x), \vartheta_m(y)\} \approx 0, \quad (1.25)$$

sendo ϑ_m todos os vínculos que aparecem na teoria. Caso contrário, a função A é de **segunda classe**.

Os vínculos de primeira e segunda classe têm papéis distintos dentro da teoria: enquanto que os de primeira classe estão relacionados com as simetrias de gauge do modelo, os de segunda classe são graus de liberdade espúrios.²

Um mecanismo com a finalidade de eliminar os graus de liberdade espúrios presentes no modelo foi proposto por Dirac [3], cuja estrutura fundamental é chamada de **parênteses de Dirac** :

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int dz dw \{A(x), \beta_i(z)\} \Delta_{ij}^{-1}(z, w) \{\beta_j(w), B(y)\}, \quad (1.26)$$

sendo Δ_{ij}^{-1} a matriz inversa dos vínculos de segunda classe, conhecida como **matriz de Dirac**, cujas componentes são dadas abaixo:

$$\Delta_{ij} \equiv \{\beta_i(x), \beta_j(y)\}, \quad (1.27)$$

sendo β_i os vínculos de segunda classe e $A(x)$, $B(y)$ quaisquer funções do espaço de fase. Os parênteses de Dirac permitem escrever as equações de movimento e as relações de vínculo novamente como igualdades fortes. Eles apresentam as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson [2].

Na identificação dos observáveis numa teoria de campos, precisa-se de um processo que transforme os vínculos de primeira classe em funções de segunda classe. Este processo é conhecido como **fixação de gauge**. A fixação de gauge consiste em introduzir no modelo, para cada vínculo de primeira classe, uma nova função do espaço de fase chamada de **vínculo externo**.

Após a fixação de gauge, pode-se, portanto, construir a matriz de Dirac e calcular as equações de movimento na forma de parênteses de Dirac:

²Não são observáveis da teoria.

$$\partial_0 \varphi_a(x) = \left\{ \varphi_a(x), \int_D \mathcal{H}_T(y) d^D y \right\}_D, \quad (1.28a)$$

$$\partial_0 \pi^a(x) = \left\{ \pi^a(x), \int_D \mathcal{H}_T(y) d^D y \right\}_D. \quad (1.28b)$$

Calculados os parênteses de Dirac, restaram apenas os graus de liberdade físicos do modelo, os **observáveis**. Observáveis são as funções do espaço de fase que não dependem do processo de fixação de gauge. São quantidades que, portanto, podem ser medidas por um experimento [15]. No formalismo Hamiltoniano de sistemas singulares, os observáveis formam o chamado **espaço de fase reduzido**.

1.3 Simetrias

O conceito de simetria é fundamental em física. Por estar ligada à leis de conservação em física, é uma ferramenta importante tanto na descrição clássica ou quântica de um sistema físico.

É usual em teoria de campos fazer a seguinte distinção, de acordo com o parâmetro infinitesimal $\epsilon(x)$ da transformação de simetria:

1. **simetrias locais:** quando $\epsilon(x)$ é uma função arbitrária das coordenadas espaço-temporais;
2. **simetrias rígidas:** quando $\epsilon(x)$ sofre alguma restrição. Em particular, quando $\epsilon(x)$ é constante ($\partial_\mu \epsilon = 0$), então a simetria será **global**.

Para se trabalhar com simetrias rígidas, o Teorema de Noether é uma ferramenta poderosa: através dele é possível encontrar os geradores destas simetrias. Na abordagem Hamiltoniana, mostra-se que os vínculos de primeira classe são os geradores das simetrias locais, também conhecidas como **simetrias de gauge**.

Por se tratarem de assuntos distintos, esta seção está separada em três subseções: Invariância da ação e transformações de simetria, Teorema de Noether e Vínculos de primeira classe e invariância de gauge.

1.3.1 Invariância da ação e transformações de simetria

Suponha as seguintes transformações nos campos e nas coordenadas espaço-temporais:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.29a)$$

$$\varphi_a(x) \rightarrow \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \Delta\varphi_a(x), \quad (1.29b)$$

sendo $\Delta\varphi_a(x)$ e δx^μ infinitésimos. Com estas transformações, toma-se a ação original (1.2) e calcula-se o novo funcional $S(\varphi'_a(x'))$. Comparando com a ação original:

$$S(\varphi'_a(x), x'^\mu) - S(\varphi_a(x), x^\mu) = \delta S = \int_V \partial_\mu \Lambda^\mu dV. \quad (1.30)$$

sendo Λ^μ um quadrivetor arbitrário. As transformações (1.29a) e (1.29b) junto com a condição (1.30) definem uma **transformação de simetria** da ação original.

1.3.2 Teorema de Noether

Define-se a **variação total** do campo φ_a ($\Delta\varphi_a$), que aparece em (1.29b), como

$$\Delta\varphi_a = \delta\varphi_a + (\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu, \quad (1.31)$$

sendo $\delta\varphi_a$ a chamada **variação de forma dos campos**, pois esta variação não interfere no argumento:

$$\delta\varphi_a = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x). \quad (1.32)$$

O segundo termo à direita na equação (1.31) corresponde à **variação de argumento**, cuja expressão é

$$(\partial_\mu\varphi_a)\delta x^\mu = \varphi_a(x') - \varphi_a(x). \quad (1.33)$$

Existe uma maneira alternativa de se definir uma transformação de simetria trabalhando com a variação de forma dos campos [12]. Isolando $\delta\varphi_a$ em (1.31), e utilizando as transformações (1.29a) e (1.29b), tem-se

$$\delta S = \int_V \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} \delta\varphi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right] dV + \int_V L_a \delta\varphi_a dV. \quad (1.34)$$

sendo L_a dada pela equação (1.5).

Para que (1.29a) e (1.29b) sejam transformações de simetria, é necessário que exista um quadrivetor J^μ de modo que, comparando com (1.30),

$$L_a \delta \varphi_a = \partial_\mu J^\mu, \quad (1.35)$$

para todas as histórias $\{\varphi_a(x)\}$. Chama-se J^μ de **quadrivetor corrente de Noether**. Para as histórias físicas da teoria ($\hat{\varphi}_a$), tem-se que

$$\partial_\mu J^\mu(\hat{\varphi}_a) = 0, \quad \text{pois } L_a(\hat{\varphi}_a) = 0, \quad (1.36)$$

e este resultado é interpretado como segue: para as soluções das equações de movimento, a corrente de Noether J^μ é conservada.

Toda a análise acima faz parte do que é chamado de **Teorema de Noether**. Resumindo, o teorema diz que se uma ação satisfaz (1.30) sob transformações nos campos e nas coordenadas, então há quantidade(s) conservada(s) no modelo, que são os geradores destas transformações.

1.3.3 Vínculos de primeira classe e invariância de gauge

Nesta seção, queremos investigar a relação entre vínculos de primeira classe e invariância de gauge. Para ilustrar tal situação, suponha uma variável dinâmica da teoria, a , com valor inicial a_0 . O valor da variável dinâmica a será calculado num instante infinitesimal δt . Fazendo uma expansão de Taylor até primeira ordem, tem-se

$$\begin{aligned} a(\delta t) &= a_0 + \partial_0 a \delta t \\ &= a_0 + \delta t \{a(x), \int \mathcal{H}_T(y) d^D y\} \\ &= a_0 + \delta t \left[\{a(x), \int \mathcal{H}_C(y) d^D y\} + \int \mu_\alpha d^D y \{a(x), \Omega^\alpha(y)\} \right], \quad (1.37) \end{aligned}$$

sendo Ω^α os vínculos primários de primeira classe³ e os multiplicadores μ_α são totalmente arbitrários. O próximo passo é pegar outros valores μ'_α para estes coeficientes, o que fornecerá um $a(\delta t)$ diferente, e a diferença entre os dois será

³Os vínculos de segunda classe já foram eliminados da teoria através dos parênteses de Dirac (seção(1.2)). Os únicos multiplicadores realmente arbitrários estão relacionados aos vínculos de primeira classe.

$$\Delta a(\delta t) = \delta t \left[\int (\mu_\alpha - \mu'_\alpha) d^D y \{a(x), \Omega^\alpha(y)\} \right]. \quad (1.38)$$

Chamando

$$\delta t(\mu_\alpha - \mu'_\alpha) = \epsilon_\alpha, \quad (1.39)$$

tem-se

$$\Delta a(\delta t) = \int \epsilon_\alpha(y) \{a(x), \Omega^\alpha(y)\} d^D y, \quad (1.40)$$

sendo ϵ_α um infinitésimo. A expressão (1.40) diz que pode-se fazer uma transformação infinitesimal numa variável dinâmica a utilizando como geradores os vínculos primários de primeira classe. Em particular, para um observável, esta transformação não afetará o estado físico, pois observáveis são funções de primeira classe [16]. Tal transformação é chamada de **transformação de gauge**, e os geradores desta transformação, *a priori*, são os vínculos primários de primeira classe.

Esta análise mostra apenas que os vínculos primários de primeira classe são os geradores das transformações de gauge. Na verdade, os secundários de primeira classe também o são, afirmação que pode ser confirmada em [16]. A forma funcional dos geradores pode ser obtida utilizando-se o chamado **método de Anderson-Bergman** [4].

1.4 Formalismo Hamiltoniano estendido

Como visto na seção anterior, os vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de gauge. No entanto, a expressão da Hamiltoniana total só admite vínculos primários, sem fazer distinção se eles são de primeira classe ou de segunda classe. P. A. M. Dirac [3] propôs utilizar no lugar da Hamiltoniana total a chamada **Hamiltoniana estendida** (H_E), que contém todos os vínculos de primeira classe do sistema considerado:

$$H_E = H_T + u^a \gamma_a, \quad (1.41)$$

sendo γ_a os vínculos secundários de primeira classe, e u^a seus multiplicadores de Lagrange. Escrevem-se as equações de movimento em termos da Hamiltoniana estendida como em (1.21a) e (1.21b), na forma de parênteses de Poisson.

Para os observáveis da teoria, as equações de movimento previstas por H_T , H_C ou H_E serão as mesmas. Significa dizer que trabalhar com H_E é fisicamente equivalente a trabalhar com H_T [16].

Como será visto na próxima seção, este formalismo permite resolver alguns problemas relacionados ao formalismo Hamiltoniano, como o problema da Hamiltoniana ser nula em sistemas invariantes por reparametrização.

1.5 O problema da Hamiltoniana nula em teorias invariantes por reparametrização

Sistemas que são invariantes por reparametrização apresentam uma Hamiltoniana que é combinação linear de vínculos, ou seja, é fracamente nula. Quando se quer fazer uma análise destas teorias no espaço de fase reduzido, a Hamiltoniana será fortemente nula, e não se sabe como obter as informações dinâmicas destes sistemas. Este é o chamado “problema da Hamiltoniana nula” [17].

Com o objetivo de tratar tal problema, Henneaux, Teitelboim e Vergara [5] desenvolveram um método que consiste em tratar teorias invariantes por reparametrização como sistemas que apresentam invariância de gauge ordinária (como teorias de Yang-Mills), pois estas apresentam uma Hamiltoniana não nula, a energia total.

O problema da Hamiltoniana nula também pode ser tratado usando outro método, desenvolvido por Fulop, Gitman e Tyutin [6]. O método consiste em trabalhar no espaço de fase reduzido, realizando uma transformação canônica dependente do tempo. O gerador desta transformação canônica terá a forma determinada pela fixação de gauge escolhida.

Estes dois métodos são apresentados nas subseções que se seguem. É apresentado o modelo da partícula relativística como exemplo de aplicação dos dois métodos.

1.5.1 Método de Henneaux *et al*

Considere um sistema cujas coordenadas são q^i e seus momentos conjugados p_i .⁴ Suponha-se que este sistema apresenta apenas vínculos de primeira classe $G_a(q, p) \approx 0$ e uma Hamiltoniana de primeira classe, $H_0(q, p)$, que satisfazem as seguintes relações:

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c(q, p)G_c, \quad (1.42a)$$

$$\{H_0, G_a\} = V_a^b(q, p)G_b. \quad (1.42b)$$

O objetivo é construir uma ação que inclua a liberdade de gauge do sistema nos extremos. Para isto, tem-se duas etapas:

1. faz-se uma transformação canônica cujo gerador é B , tal que

$$p_i \delta q^i = P_i \delta Q^i + \delta B. \quad (1.43)$$

As novas variáveis Q^i têm as seguintes propriedades:

$$Q^i(q(\tau_1), p(\tau_1), \tau_1) = Q_1^i, \quad (1.44a)$$

$$Q^i(q(\tau_2), p(\tau_2), \tau_2) = Q_2^i, \quad (1.44b)$$

$$\{Q^i, Q^j\} = 0, \quad (\text{a tempos iguais}), \quad (1.44c)$$

e os P_i são os momentos conjugados às variáveis Q^i . A ação que obedece às condições (1.44a), (1.44b) e (1.44c) será

$$S[q^i, p_i, \lambda^a] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(p_i \frac{dq^i}{d\tau} - H_0 - \lambda^a G_a \right) d\tau - B(\tau_2) + B(\tau_1), \quad (1.45)$$

de acordo com a teoria das transformações canônicas [14]; λ^a são multiplicadores de Lagrange. A ação é invariante sob esta transformação canônica:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} (p_i \delta q^i) - [\delta B]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0. \quad (1.46)$$

⁴A notação utilizada nesta seção é de sistema discreto.

2. faz-se uma transformação de gauge infinitesimal. As variáveis canônicas e o multiplicador de Lagrange se transformam como

$$\delta_\epsilon Q^i = \{Q^i, \epsilon^a G_a\}, \quad (1.47a)$$

$$\delta_\epsilon P_i = \{P_i, \epsilon^a G_a\}, \quad (1.47b)$$

$$\delta_\epsilon \lambda^a = \frac{\partial \epsilon^a}{\partial \tau} + \{\epsilon^a, (H_0 + \lambda^b G_b)\} + \lambda^c \epsilon^b C_{bc}^a - \epsilon^b V_b^a. \quad (1.47c)$$

De fato, qualquer função F se transforma por gauge da seguinte forma:

$$\delta_\epsilon F = \{F, \epsilon^a G_a\}. \quad (1.48)$$

No entanto, o que se quer não é uma transformação de gauge qualquer, mas uma com parâmetros ϵ^a fixos e que, nos extremos, $\epsilon^a(\tau_1) \neq 0$ e $\epsilon^a(\tau_2) \neq 0$. Pode-se impor esta restrição, pois as condições de contorno nos extremos não são invariantes de gauge: a escolha é arbitrária. As coordenadas Q^i se transformam por gauge em \bar{Q}^i e as novas condições nos extremos serão

$$\bar{Q}^i(\tau_1) \equiv (Q^i - \{Q^i, G\})(\tau_1) = \bar{Q}_1^i, \quad (1.49a)$$

$$\bar{Q}^i(\tau_2) \equiv (Q^i - \{Q^i, G\})(\tau_2) = \bar{Q}_2^i, \quad (1.49b)$$

sendo

$$G = \epsilon^a G_a. \quad (1.50)$$

De acordo com as novas condições de contorno, a nova ação diferirá de (1.45) por um termo de superfície

$$[D]_{\tau_1}^{\tau_2} = \left[P_i \frac{\partial G}{\partial P_i} - G \right]_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (1.51)$$

tal que

$$P_i \delta Q^i = \bar{P}_i \delta \bar{Q}^i + \delta D, \quad (1.52)$$

com

$$\bar{P}_i = P_i - \{P_i, G\}. \quad (1.53)$$

Portanto,

$$S[q^i(\tau), p_i(\tau), \lambda^a(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(p_i \frac{dq^i}{d\tau} - H_0 - \lambda^a G_a \right) d\tau - \left[B + P_i \frac{\partial G}{\partial P_i} - G \right]_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (1.54)$$

e esta ação é invariante sob esta transformação:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S &= S[q'(\tau), p'(\tau), \lambda'(\tau)] - S[q(\tau), p(\tau), \lambda(\tau)] \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p'_i \frac{dq'^i}{d\tau} - H'_0 - \lambda'^a G'_a \right] d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_i \frac{dq^i}{d\tau} - H_0 - \lambda^a G_a \right] d\tau \\ &\quad - [B']_{\tau_1}^{\tau_2} + [B]_{\tau_1}^{\tau_2} - [D']_{\tau_1}^{\tau_2} + [D]_{\tau_1}^{\tau_2} = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Portanto, obtém-se uma ação que incorpora invariância de gauge nos extremos temporais da evolução do sistema.

Pode-se aplicar este método, como exemplo, ao caso da partícula livre relativística. A ação para a partícula relativística é dada por

$$S = -m \int ds, \quad (1.56)$$

de onde segue a Lagrangeana

$$L = -m(-U^\nu U_\nu)^{1/2}, \quad (1.57)$$

onde os U 's são as quadrivelocidades ($U^\nu \equiv dx^\nu/d\tau$).

A Hamiltoniana total é dada por

$$H_T = H_C + \xi_1(p^\mu p_\mu + m^2) = \xi_1 \theta_1, \quad (1.58)$$

pois a Hamiltoniana canônica é fortemente nula; θ_1 é um vínculo de primeira classe e ξ_1 é um multiplicador de Lagrange. As equações de Hamilton-Jacobi são dadas por

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \approx \{x^\mu, H_T\} = 2\xi_1 p^\mu, \quad (1.59a)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \approx \{p_\mu, H_T\} = 0. \quad (1.59b)$$

Seguindo a seqüência apresentada acima, precisa-se encontrar B . Neste caso, não é necessário fazer uma transformação canônica [5]; então $B = 0$. O segundo passo é encontrar D . Para isto, precisamos saber como se transformam x^μ e p_μ :

$$\delta_\epsilon x^\mu = \{x^\mu, G\} = \{x^\mu, \epsilon\theta_1\} = 2\epsilon p^\mu, \quad (1.60a)$$

$$\delta_\epsilon p_\mu = \{p_\mu, G\} = 0, \quad (1.60b)$$

sendo G o gerador da transformação de gauge, e ϵ o parâmetro da transformação. Pode-se, portanto, calcular a função D :

$$\left[p_\mu \frac{\partial G}{\partial p_\mu} - G \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = \epsilon (p^2 - m^2) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (1.61)$$

Assim, a ação estendida é dada por (ver (1.54))

$$\bar{S} = S + \frac{\delta x^0}{2p^0} (p^2 - m^2) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \quad (1.62)$$

com as novas condições de contorno

$$X^\mu(\tau_i) = \left[x^\mu - \frac{\delta x^0}{p^0} p^\mu \right] (\tau_i), \quad i = 1, 2. \quad (1.63)$$

1.5.2 Método de Fulop *et al* para o cálculo da Hamiltoniana efetiva

Considere um sistema invariante por reparametrização; a Hamiltoniana deste sistema será uma combinação linear de vínculos [15], ou seja,

$$H_T \approx 0. \quad (1.64)$$

O sistema apresenta vínculos de primeira classe (Ω_α):

$$\Omega_\alpha \approx 0, \quad (1.65a)$$

$$\{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} \approx 0. \quad (1.65b)$$

Visando uma análise da teoria no espaço de fase reduzido, faz-se uma fixação de gauge na qual o(s) vínculo(s) fixador(es) depende(m) do tempo explicitamente, ou seja,

$$\theta(p, q) = f(\tau). \quad (1.66)$$

Fixando completamente a teoria, a Hamiltoniana total será uma quantidade fortemente nula:

$$H_T = 0.$$

Para resolver o problema, faz-se uma transformação canônica na qual o gerador da transformação é determinado pela forma do(s) vínculo(s) fixador(es). Desta forma, obtemos uma Hamiltoniana não nula:

$$\bar{H} = \left[H_T + \frac{\partial F}{\partial \tau} \right]_{\text{gauge fixo}} = \frac{\partial F}{\partial \tau}. \quad (1.67)$$

Em termos das novas variáveis Q e seus momentos conjugados P , os vínculos são escritos como

$$\bar{\Omega}_\alpha(P, Q) \equiv \Omega_\alpha[p(P, Q), q(P, Q)], \quad (1.68)$$

e as equações de movimento para as novas variáveis são escritas em termos de parênteses de Dirac:

$$\frac{dQ}{d\tau} = \{Q, \bar{H}\}_D, \quad (1.69a)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \{P, \bar{H}\}_D. \quad (1.69b)$$

Para ilustrar o método, novamente tem-se o exemplo da partícula relativística. Lembrando da subseção passada, o modelo apresenta um único vínculo

(de primeira classe), θ_1 . Usaremos como vínculo fixador o chamado gauge de tempo próprio:

$$\theta_2 = x^0 - \frac{p^0}{m}\tau. \quad (1.70)$$

Os parênteses de Dirac do setor espacial correspondentes aos graus de liberdade físicos da teoria são dados por

$$\{x^i, x^j\}_D = \{p_i, p_j\}_D = 0, \quad (1.71a)$$

$$\{x^i, p_j\}_D = \delta_j^i, \quad (1.71b)$$

sendo a matriz de Dirac dada por

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -2p^0 \\ 2p^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

O vínculo fixador fornece a forma da transformação canônica a ser efetuada:

$$P_\mu = p_\mu, \quad (1.73a)$$

$$X_i = x_i, \quad (1.73b)$$

$$X_0 = x_0 - \frac{p_0}{m}\tau. \quad (1.73c)$$

Conseqüentemente, os vínculos terão a forma

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1, \quad (1.74a)$$

$$\bar{\theta}_2 \equiv X_0, \quad (1.74b)$$

e a matriz de Dirac passa a ser

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

O gerador para esta transformação canônica dependerá das novas coordenadas X^μ , e dos momentos canônicos das velhas coordenadas (p_μ). O tipo de gerador que satisfaz estas condições será $F_3 = F_3(Q, p, \tau)$ [14]:

$$F_3 = -X^\mu p_\mu + \frac{(p^0)^2}{2m} \tau, \quad (1.76)$$

e, de acordo com (1.67), a Hamiltoniana no espaço de fase reduzido será

$$\bar{H} = H_T + \frac{\partial F_3}{\partial \tau} = \frac{(p^0)^2}{2m}, \quad (1.77)$$

a qual fornece as seguintes equações de movimento:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \{x^i, \bar{H}\}_D = \frac{p^i}{m}, \quad (1.78a)$$

$$\frac{dp^i}{d\tau} = \{p^i, \bar{H}\}_D = 0. \quad (1.78b)$$

Portanto, os observáveis da teoria foram identificados (x^i, p_i) , e as equações de movimento encontradas são as esperadas para a descrição deste sistema no gauge de tempo próprio. A contagem dos graus de liberdade verdadeiros também é a esperada (três coordenadas para posição (x^i) e três momentos conjugados (p_i)).

Capítulo 2

Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral foi desenvolvida pela necessidade de estender a descrição dos fenômenos físicos aos referenciais não-inerciais. Como ponto de partida para seu desenvolvimento, o Princípio da Equivalência fornece toda a informação necessária para tal objetivo. Sua consequência mais direta, o Princípio da Covariância Geral, é uma ferramenta poderosa para a construção de equações covariantes.

A partir desses dois princípios, uma álgebra tensorial é desenvolvida, analogamente ao que acontece com a Relatividade Especial. Reconhece-se as quantidades importantes da teoria (conexão afim, tensor métrico, curvatura escalar) e algumas operações precisam ser definidas ou modificadas (derivada covariante, divergente, rotacional...).

Sendo uma teoria de campos, suas equações de movimento (as equações de Einstein) podem ser obtidas de forma elegante através do Princípio Variacional. Olhando para estas equações pode-se ver a relação entre as fontes (a matéria) e o campo gravitacional.

Este capítulo tem por objetivo apresentar de forma sucinta as propriedades e ferramentas citadas acima, que são suficientes para este trabalho.

2.1 Princípio da Equivalência e Princípio da Covariância Geral

Nesta seção, serão apresentados dois princípios fundamentais da Relatividade Geral: o Princípio da Equivalência e sua consequência mais direta, o Princípio da Covariância Geral.

O **Princípio da Equivalência** afirma que, para cada ponto de um campo gravitacional arbitrário, pode-se escolher um **referencial localmente inercial** no qual as leis da física são relativisticamente invariantes no sentido da Relatividade Especial [18]. De forma geral, um campo gravitacional pode ser localmente compensado escolhendo-se um referencial apropriado. Um referencial que satisfaz esta condição é, por exemplo, um laboratório em queda livre.

Suponha um corpo em queda livre. Para descrever sua trajetória, escolhe-se um referencial localmente inercial ξ^α . A equação de movimento que este corpo obedece no referencial ξ^α é

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

sendo

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.2)$$

o intervalo de tempo próprio no espaço-tempo de Minkowski¹ (espaço-tempo de Minkowski). Pode-se relacionar o referencial ξ^α com um referencial não-inercial arbitrário x^μ da seguinte forma

$$\begin{aligned} & (\xi^\alpha \rightarrow x^\mu) \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assim, obtém-se as equações de movimento do corpo em queda livre no referencial arbitrário x^μ . Multiplicando (2.3) por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, e usando

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda, \quad (2.4)$$

tem-se

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

¹Nossa convenção de métrica é $[\eta_{\alpha\beta}] = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Definindo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} , \quad (2.6)$$

que é a chamada **conexão afim**, pode-se escrever (2.5) como

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 . \quad (2.7)$$

Esta é a equação de movimento do corpo em queda livre num sistema de coordenadas arbitrário x^{μ} . Fazendo uma comparação com (2.1), observa-se que a conexão afim deve conter a informação sobre o campo gravitacional que atua sobre o corpo. É desta maneira que se procede para encontrar as equações de movimento e as leis físicas de fenômenos gravitacionais.

O intervalo de tempo próprio expresso em coordenadas arbitrárias x^{μ} será

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} , \quad (2.8)$$

e definindo

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} , \quad (2.9)$$

que é chamado de **tensor métrico**, a equação (2.8) fica na forma

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (2.10)$$

O tensor métrico é a quantidade que carrega as propriedades da geometria do espaço-tempo.

Como conseqüência do Princípio da Equivalência, tem-se o **Princípio da Covariância Geral**: uma equação física é válida num campo gravitacional arbitrário se

1. a equação é relativisticamente invariante na ausência de gravitação, ou seja, quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$;

2. a equação é covariante sob transformações gerais de coordenadas, ou seja, ela preserva sua forma sob uma transformação do tipo $x \rightarrow x'$.

O Princípio da Covariância Geral só faz sentido quando está relacionado aos efeitos da gravidade; uma equação física, em virtude de sua covariância geral, será verdadeira num campo gravitacional se ela é verdadeira na ausência de gravitação.

2.2 Vetores e tensores. Álgebra tensorial.

Com o objetivo de construir equações covariantes por **transformações gerais de coordenadas** (TGC), é necessário saber como se transformam vetores, tensores e escalares.

Os escalares não alteram sua forma funcional sob uma TGC. Exemplos de escalares são o intervalo de tempo próprio ($d\tau^2$) e a ação para o campo gravitacional (S_G).

Como na Relatividade Especial, em Relatividade Geral temos vetores **contravariantes** e **covariantes**. Um vetor covariante se transforma como

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu. \quad (2.11)$$

Como exemplo de vetor covariante tem-se o gradiente de um escalar φ ($\partial_\mu \varphi$). Já um vetor contravariante se transforma por TGC da seguinte forma:

$$B'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} B^\nu. \quad (2.12)$$

Exemplo de vetor contravariante é uma diferencial (dx^μ).

Pode-se generalizar estes procedimentos para tensores de ordem maior que um. Como exemplo de tensor de segunda ordem tem-se o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, definido em (2.9). Para verificar que ele é realmente um tensor por TGC, faz-se uma transformação para um sistema de coordenadas arbitrário (x'^μ):

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e usando novamente (2.9):

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}, \quad (2.14)$$

está verificado que ele é um tensor por TGC. O tensor métrico tem uma versão contravariante ($g^{\mu\nu}$):

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad (2.15)$$

sendo δ_λ^μ o **tensor de Kronecker** ($\mu = \lambda \rightarrow \delta_\lambda^\mu = 1$; $\mu \neq \lambda \rightarrow \delta_\lambda^\mu = 0$).

Uma equação será covariante por TGC se ela for uma igualdade entre tensores do mesmo tipo:

$$F^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = G^{\mu\nu}_{\lambda\kappa}. \quad (2.16)$$

Fazendo-se uma transformação geral de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$:

$$F'^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\kappa} F^{\alpha\beta}_{\gamma\delta},$$

e por (2.16):

$$F'^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\kappa} G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = G'^{\mu\nu}_{\lambda\kappa}. \quad (2.17)$$

Um caso particular é quando o tensor é nulo num dado referencial; pelo que foi visto acima, ele será ser nulo em todos os referenciais.

Pode-se construir tensores de várias formas:

1. como combinação linear:

$$A^{\alpha\beta} \equiv aB^{\alpha\beta} + bC^{\alpha\beta}, \quad (2.18)$$

sendo a e b escalares.

2. por produto direto:

$$D^{\alpha\beta}_{\gamma} \equiv E^{\alpha\beta} F_{\gamma}. \quad (2.19)$$

3. por contração de índices:

$$V^{\alpha\beta\gamma}_{\beta} \equiv V^{\alpha\gamma}. \quad (2.20)$$

4. levantando e abaixando índices usando $g_{\mu\nu}$:

$$T^{\lambda}_{\mu\kappa} = g_{\mu\nu} T^{\nu\lambda}_{\kappa}. \quad (2.21)$$

2.3 Derivada covariante

A operação de derivação de um tensor em Relatividade Geral nem sempre leva a um outro tensor. Por exemplo, considere-se o vetor contravariante A^{μ} , cuja lei de transformação é dada pela equação (2.12). Fazendo derivação de (2.12) com relação a x'^{λ} , tem-se

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} A^{\nu}. \quad (2.22)$$

O primeiro termo é o que se esperaria se $\partial A^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ fosse um tensor; o segundo termo é que mostra que, na realidade, $\partial A^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ não é um tensor por TGC. Portanto, há a necessidade de se definir uma operação de derivação que seja covariante por TGC, a fim de que se possa construir equações que sejam válidas em qualquer referencial.

Da equação (A.7), e multiplicando por A'^{κ} , tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\lambda\kappa}{}^{\mu} A'^{\kappa} &= \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \right] \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} A^{\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu} A^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} A^{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Somando (2.22) e (2.23), tem-se

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\kappa}{}^{\mu} A'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left[\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} A^{\sigma} \right]. \quad (2.24)$$

Define-se

$$A^{\mu}{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} A^{\kappa}, \quad (2.25)$$

como a **derivada covariante de um vetor contravariante** A^{μ} , que, olhando para (2.24), é covariante por TGC. De forma análoga, tem-se a **derivada covariante de um vetor covariante** B_{μ} :

$$B_{\mu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} B_{\lambda}. \quad (2.26)$$

A derivada covariante apresenta as seguintes propriedades:

1. linearidade:

$$(\alpha T_{\nu}^{\mu} + \beta B_{\nu}^{\mu})_{;\lambda} = \alpha T_{\nu;\lambda}^{\mu} + \beta B_{\nu;\lambda}^{\mu}, \quad (2.27)$$

sendo α e β constantes.

2. regra de Leibniz:

$$(T_{\nu}^{\mu} B^{\lambda})_{;\rho} = T_{\nu;\rho}^{\mu} B^{\lambda} + B^{\lambda}{}_{;\rho} T_{\nu}^{\mu}. \quad (2.28)$$

3. a derivada covariante de um tensor contraído é a contração da derivada covariante:

$$B^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial B^{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} B^{\nu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} B^{\mu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} B^{\mu\lambda}{}_{\beta},$$

e como $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ é simétrico nos índices ν e λ , então os dois últimos termos se anulam, sobrando

$$B^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial B^{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} B^{\nu\lambda}. \quad (2.29)$$

4. o tensor métrico é constante sob derivação covariante [7, 19]:

$$g_{\mu\nu};\lambda = 0. \quad (2.30)$$

Esta afirmação pode ser verificada pelo seguinte exemplo: como $g_{\mu\nu};\lambda$ é um tensor, pode-se escolher qualquer sistema de coordenadas para verificar se ele é um tensor nulo ou não num dado ponto. Escolhendo um referencial inercial neste ponto, tem-se que $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ e as derivadas parciais de $g_{\mu\nu}$ são nulas. Se o tensor $g_{\mu\nu};\lambda$ é nulo neste referencial, por ser um tensor por TGC, ele será nulo em todos os outros referenciais [20].

5. a derivada covariante comuta com as operações de levantamento e abaixamento de índices:

$$(g^{\mu\nu}T_{\nu});\lambda = g^{\mu\nu}T_{\nu};\lambda, \quad (2.31)$$

conseqüência de (2.30).

O fato da derivada covariante mapear tensores em tensores e se reduzir à derivação ordinária em sistemas localmente inerciais sugere outra forma de obter equações que sejam covariantes por TGC, e que satisfazem o Princípio da Covariância Geral:

1. escrever as equações invariantes por transformações de Lorentz da Relatividade Especial;
2. onde aparecer $\eta_{\mu\nu}$ trocar por $g_{\mu\nu}$;
3. onde aparecer uma derivada ordinária, trocá-la por uma derivada covariante.

Os três passos acima garantem a validade destas equações na presença de campo gravitacional [20].

Como casos especiais da derivada covariante existem, por exemplo:

1. o gradiente de um escalar pode ser escrito em termos da derivada covariante:

$$F_{;\mu} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.32)$$

2. o rotacional de um vetor:

$$G_{\mu;\nu} - G_{\nu;\mu} = \frac{\partial G_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial G_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.33)$$

3. o divergente de um vetor:

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} A^{\lambda}. \quad (2.34)$$

Usando a relação para a contração da conexão afim [20]

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{g}), \quad (2.35)$$

tem-se

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} A^{\mu}), \quad (2.36)$$

que exige apenas o cálculo de g (determinante de $g_{\mu\nu}$) e suas derivadas.

4. a expressão do D'Alambertiano de um escalar, que segue de (2.36):

$$\begin{aligned} \square\phi &= g^{\mu\nu}(\phi)_{;\mu;\nu} \\ &= (g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi)_{;\mu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Até o momento, foi definida a diferenciação covariante para tensores definidos em todo o espaço. No entanto, existem tensores que são definidos ao longo de curvas, como, por exemplo, o momento de uma partícula (que só é definido ao longo de sua linha de mundo) [20]. Portanto, é necessário definir a diferenciação covariante ao longo de uma curva.

Como $x^{\nu} = x^{\nu}(\tau)$, derivando (2.12) em relação a τ , tem-se

$$\frac{dA'^{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dA^{\nu}(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}(\tau). \quad (2.38)$$

Analogamente ao que acontece em (2.22), define-se a derivada covariante ao longo da curva $x^{\mu}(\tau)$:

$$\frac{\mathcal{D}A^{\mu}}{\mathcal{D}\tau} \equiv \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}. \quad (2.39)$$

Lembrando da lei de transformação da conexão afim (A.7), e usando (2.12) e (2.38), tem-se que $\mathcal{D}A^{\mu}/\mathcal{D}\tau$ é um vetor:

$$\frac{\mathcal{D}A'^{\mu}}{\mathcal{D}\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\mathcal{D}A^{\nu}}{\mathcal{D}\tau}. \quad (2.40)$$

2.4 Curvatura

O conceito de curvatura é um dos tópicos mais importantes da Relatividade Geral. Entre outras propriedades, a curvatura permite verificar sem ambigüidades se uma dada métrica é a métrica do espaço-tempo chato ou de um espaço-tempo genuinamente curvo. Além disto, as equações de movimento do campo gravitacional (equações de Einstein) são escritas de forma simples usando o tensor de Ricci e o escalar de curvatura.

O tensor de curvatura de Riemann e suas contrações são os únicos tensores que podem ser construídos a partir do tensor métrico e de suas derivadas primeiras e segundas [7]. Portanto, desempenham um papel central na teoria da Relatividade Geral.

2.4.1 Definição do tensor de curvatura. Propriedades.

Para construir o tensor de curvatura, toma-se a equação (A.3) (regra de transformação de $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$) e inverte-se a transformação de x'^{μ} para x^{μ} :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (2.41)$$

Como visto no apêndice A, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ seria um tensor por TGC se não houvesse o termo em derivada segunda em (A.3). Isolando este termo (chamado de não-homogêneo), tem-se

$$\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} = \frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.42)$$

O passo seguinte é derivar (2.42) em relação a x^κ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\kappa} &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left[\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \right] - \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\nu}^\eta - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\nu} \Gamma_{\eta\xi}^{\prime\sigma} \right] \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\mu}^\eta - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\mu} \Gamma_{\eta\xi}^{\prime\rho} \right] + \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} \\ &- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

e então, após relacionar os termos iguais, trocar ν por κ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\kappa} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right] - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\rho}^\lambda \right] \\ &- \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left[\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Subtraindo (2.44) de (2.43)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right] \\ &- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left[\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\prime\tau}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\prime\tau} \Gamma_{\eta\rho}^\lambda + \Gamma_{\lambda\eta}^{\prime\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

e definindo o **tensor de curvatura de Riemann - Christoffel** como

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda, \quad (2.46)$$

tem-se, olhando para (2.45), que ele é um tensor por TGC:

$$R_{\rho\sigma\eta}^{\prime\tau} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda. \quad (2.47)$$

A partir de (2.46), pode-se construir outros tensores. Por exemplo, contraindo índices da seguinte forma

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}, \quad (2.48)$$

obtém-se o **tensor de Ricci**. Por outro lado, contraindo índices de $R_{\mu\kappa}$, obtém-se a **curvatura escalar** R :

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.49)$$

Para facilitar a visualização das propriedades algébricas do tensor de curvatura, escreve-se

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma}, \quad (2.50)$$

que, explicitamente, é [7, 19]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right] + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}]. \quad (2.51)$$

As propriedades algébricas mais importantes de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ são:

1. **simetria:**

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}. \quad (2.52)$$

Como consequência desta propriedade, o tensor de Ricci (2.48) é simétrico por troca de índices:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}. \quad (2.53)$$

2. **antisimetria:**

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}. \quad (2.54)$$

3. **ciclicidade:**

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (2.55)$$

2.4.2 Gravitação e Coordenadas Curvilíneas

Como mencionado na introdução, pode-se verificar, usando-se o tensor de curvatura de Riemann, se uma dada métrica $g_{\mu\nu}$ representa um espaço curvo genuíno ou se é apenas a métrica de Minkowski escrita de forma inconveniente. Para ilustrar este fato, um exemplo será apresentado.

Fazendo a transformação inversa de (2.9), tem-se

$$\eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.56)$$

Suponha que a métrica $g_{\mu\nu}$ de um dado ponto do espaço-tempo tenha as seguintes componentes

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{tt} = -1. \quad (2.57)$$

Pode-se verificar que, com estas componentes de $g_{\mu\nu}$, encontra-se um conjunto de ξ^α 's que satisfaz (2.56) *em qualquer ponto do espaço-tempo*. São eles

$$\xi^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi^3 = r \cos \theta, \quad \xi^0 = t. \quad (2.58)$$

Portanto, conclui-se que, na verdade, (2.57) são apenas as componentes de $\eta_{\alpha\beta}$ escritas em coordenadas esféricas polares.

Existe uma maneira de verificar se $g_{\mu\nu}$ é equivalente à métrica de Minkowski, sem precisar resolver (2.56) para os ξ^α 's. As condições necessárias e suficientes para que a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ seja equivalente a $\eta_{\alpha\beta}$ (no sentido que há uma transformação $x \rightarrow \xi$ que satisfaz (2.56)) são:

1. que o tensor de curvatura deve se anular em todos os pontos, ou seja,

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = 0. \quad (2.59)$$

Se é possível encontrar um referencial ξ^α que satisfaz (2.56), então neste referencial a métrica é $\eta_{\alpha\beta}$, a conexão afim é nula e, de (2.51), $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ será nulo. Como a equação (2.59) deve respeitar o Princípio da Covariância Geral, então o tensor de curvatura deve ser nulo em todos os referenciais.

2. que em algum ponto X a matriz $g_{\mu\nu}(X)$ tenha três autovalores positivos e um negativo.

Esta condição vem do fato de que uma transformação do tipo (2.56) precisa ter determinante não nulo (visto que $\eta_{\alpha\beta}$ e $g_{\mu\nu}$ podem ser representados por matrizes), e este tipo de transformação é chamada de congruência [7]. Esta transformação requer que $\eta_{\alpha\beta}$ e $g_{\mu\nu}$ tenham o mesmo número de autovalores positivos, negativos e nulos.

Portanto, pelo que foi visto acima, o fato do tensor de curvatura ser não-nulo representa a presença de um campo gravitacional.

2.4.3 Descrição da curvatura em N dimensões

Esta subseção tem como objetivo apresentar a expressão geral do número de componentes independentes de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ em N dimensões e algumas propriedades.

Usando as propriedades algébricas do tensor de Riemann e tomando $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ como uma matriz de índices $(\lambda\mu)$ e $(\nu\kappa)$ [7], obtém-se a expressão geral para o número de componentes:

$$C_N = \frac{1}{12}N^2(N^2 - 1). \quad (2.60)$$

Como exemplo, será apresentado o caso em que $N = 2$, de acordo com o propósito deste trabalho. Portanto, usando a expressão acima, tem-se

$$C_N = \frac{2^2}{12}(2^2 - 1) = 1, \quad (2.61)$$

que mostra que em duas dimensões só existe uma componente independente, R_{0101} . As outras componentes estão relacionadas com R_{0101} da seguinte forma (usando as propriedades (2.52) a (2.55)):

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -R_{0110} = -R_{1001} = R_{0101}, \\ R_{1111} &= R_{1100} = R_{0011} = R_{0000} = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

As equações (2.62) podem ser escritas de uma maneira mais compacta:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}) \frac{R_{0101}}{g}, \quad (2.63)$$

sendo

$$g = g_{11} g_{00} - g_{01}^2. \quad (2.64)$$

Contraindo $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ com o tensor métrico, obtém-se o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g_{\mu\kappa} \frac{R_{0101}}{g}, \quad (2.65)$$

e repetindo a operação para $R_{\mu\kappa}$, tem-se a curvatura escalar:

$$R = \frac{2R_{0101}}{g}. \quad (2.66)$$

Substituindo (2.66) em (2.63), obtém-se $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ em função de R :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2} R (g_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} g_{\mu\nu}). \quad (2.67)$$

2.5 Equações de Einstein via Princípio de Hamilton

As equações de Einstein podem ser obtidas de forma elegante a partir de uma ação usando o Princípio de Hamilton, como é feito em teoria de campos. Para tanto, é necessário conhecer a forma da ação neste caso.

A ação total da qual surgem as equações de Einstein consiste de dois termos: uma parte do campo gravitacional (S_G) e uma parte da matéria² (S_M):

$$S = S_M + S_G, \quad (2.68)$$

sendo

²Este termo, na verdade, contém em sua expressão a ação da matéria e de interação com o campo gravitacional.

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g(x)} R(x) d^4x, \quad (2.69)$$

$R(x)$ o escalar de curvatura e G a constante de gravitação de Newton. Aplicando o Princípio de Hamilton a (2.68), tem-se

$$\delta S = \delta S_M + \delta S_G = 0. \quad (2.70)$$

A expressão de δS_M é [7, 19]

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu} d^4x, \quad (2.71)$$

sendo $T^{\mu\nu}$ o que se chama de **tensor de energia - momento**.

Para encontrar δS_G , faz-se a variação de (2.69):

$$\delta S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int [R(x) \delta \sqrt{g(x)} + \sqrt{g(x)} \delta R(x)] d^4x. \quad (2.72)$$

Lembrando de (2.49), tem-se

$$\delta S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int [g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{g} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] d^4x. \quad (2.73)$$

Usando a expressão (2.46), calcula-se a variação de $R_{\mu\nu}$:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \delta \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \delta \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}. \quad (2.74)$$

A variação de $\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda}$ é [7]:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta g_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial \delta g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \delta g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right], \quad (2.75)$$

a qual pode ser expressa como

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}]. \quad (2.76)$$

A quantidade $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é um tensor por TGC, o que permite expressar (2.74) como uma soma de derivadas covariantes (ver (2.25) e (2.26)):

$$\delta R_{\mu\kappa} = (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\kappa} - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{;\lambda}. \quad (2.77)$$

Portanto, o segundo termo de (2.73) tem a forma

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}], \quad (2.78)$$

usando o fato de que a derivada covariante de $g_{\mu\nu}$ é nula. Utilizando (2.36), tem-se

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} [\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}], \quad (2.79)$$

e este termo se anulará nos extremos pelo teorema de Gauss e pela hipótese de que no infinito os campos são nulos.

Resta saber a variação do determinante de $g_{\mu\nu}$. A expressão para $\delta\sqrt{g}$ vem do cálculo do divergente [7, 19]:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.80)$$

Como [7]

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad (2.81)$$

a expressão (2.73) toma a forma

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g} [R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R] \delta g_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.82)$$

Substituindo (2.82) e (2.71) em (2.70), obtém-se, finalmente

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g} [R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R] \delta g_{\mu\nu} d^4x + \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) d^4x = 0. \quad (2.83)$$

Para satisfazer (2.83) é necessário que

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + 8\pi G T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.84)$$

visto que $\delta g_{\mu\nu}$ é arbitrária. Estas são as **equações de campo de Einstein**. Elas relacionam o campo gravitacional $g^{\mu\nu}$ com a matéria $T^{\mu\nu}$; dadas as fontes, a solução destas equações fornece a dinâmica do campo gravitacional.

Capítulo 3

Gravitação induzida bidimensional - modelo de Polyakov

Dentro do contexto de teoria de campos, a fim de obter a tão sonhada unificação das quatro interações fundamentais, é preciso construir a teoria quântica de campos correspondente a cada uma delas (eletromagnetismo, forças nucleares e gravitação). As teorias das forças nucleares e o eletromagnetismo foram quantizadas com sucesso [1]. No entanto, com a gravitação não se obteve o mesmo êxito, por ela ser uma teoria de campos não-renormalizável [8].

Com o objetivo de solucionar este problema, surgiram modelos alternativos¹ em duas dimensões espaço-temporais [9]. Um deles é o chamado modelo de Polyakov [10], que é a base deste trabalho.

Esta seção é dedicada a apresentar o modelo de Polyakov e sua análise clássica.

3.1 Gravitação de Einstein em duas dimensões

As equações de movimento do campo gravitacional em quatro dimensões espaço-temporais (teoria de Einstein) são escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

sendo G a constante da gravitação de Newton e $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento

¹À gravitação de Einstein.

da matéria, como foi visto no capítulo 2. No entanto, em duas dimensões espaço-temporais, tem-se a identidade

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.2)$$

que implica que não há informação dinâmica sobre o campo gravitacional. Esta relação é consequência do teorema de Gauss - Bonnet [9], que confirma que a Lagrangeana de Einstein em duas dimensões é uma derivada total.

Este fato tornou necessária a procura de uma teoria alternativa para a gravitação em duas dimensões. Uma destas teorias alternativas foi proposta por Polyakov [10], a qual fornece uma dinâmica não-trivial para o campo gravitacional. Vale destacar que esta teoria é quantizável, fato que não ocorre na gravitação quadridimensional de Einstein.

3.2 Origem da ação de Polyakov

Parte-se da ação para a corda bosônica [21]:

$$S_P = \int d^2x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X_i, \quad (3.3)$$

sendo $X^i (i = 1, \dots, d)$ as d coordenadas da corda e $g^{\mu\nu}$ a métrica de folha de mundo descrita pela corda². Existe uma interpretação alternativa para esta ação [21], que é olhar para as variáveis X_i como campos de matéria imersos numa métrica bidimensional $g_{\mu\nu}$. Proceda-se, então, ao processo de quantização funcional [10].

A ação clássica (3.3) é invariante por difeomorfismos e por transformações de Weyl [21]. No entanto, a nível quântico, apenas uma destas simetrias será preservada; no caso, restará a invariância por difeomorfismos [9]. Este fato dá origem à chamada anomalia de Weyl, que deve ser removida a fim de se obter uma teoria quântica de campos consistente. Este é um processo bem conhecido em teorias de gauge [1].

Prosseguindo com a quantização funcional da teoria, calcula-se a função de partição, com o objetivo de encontrar as funções de Green:

$$Z = \int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}X^i \exp\{-S_P\}. \quad (3.4)$$

²A convenção deste capítulo é $\det g = -g$.

Após a regularização e renormalização da teoria [10], processos conhecidos em quantização de teoria de campos, obtém-se a ação efetiva

$$S_{eff} = \int d^2x \kappa \sqrt{-g} \left(R \frac{1}{\square} R + \mu \right), \quad (3.5)$$

sendo \square o d'Alambertiano bidimensional, R é a curvatura escalar, μ é a constante cosmológica e κ faz o papel de constante de acoplamento. Esta é a chamada ação da gravitação bidimensional induzida (ou simplesmente ação efetiva), e é a partir dela que se obtém as equações de movimento (a dinâmica) do campo gravitacional em duas dimensões.

Por ser uma ação não-local (por causa do operador \square^{-1}), a análise Hamiltoniana da teoria é dificultada. A fim de contornar este problema, define-se um campo auxiliar φ , que satisfaz [22]

$$\varphi + \frac{\alpha}{2} \square^{-1} R = 0, \quad (3.6)$$

sendo

$$\alpha^2 \equiv 8\kappa, \quad (3.7)$$

e a ação se torna local:

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \varphi \square \varphi - \frac{\alpha}{2} R \varphi + \frac{\alpha^2}{2} \beta \right), \quad (3.8)$$

sendo

$$\beta = \frac{\mu}{4}. \quad (3.9)$$

Esta ação é o ponto de partida de análise em nosso trabalho.

Encontram-se usualmente, na literatura, trabalhos sobre a gravitação induzida no gauge de cone de luz [23], que foi usado originalmente por Polyakov em seu trabalho pioneiro [10]. Há também trabalhos que analisam classicamente a teoria sem escolher um gauge [13, 24], e no gauge conforme [23, 25]. Nas próximas seções será apresentado o modelo de Polyakov no gauge de cone de luz e numa análise clássica independente de gauge.

3.3 Análise clássica independente de gauge

Partindo da ação (3.8), e fazendo algumas integrações por partes, obtém-se a densidade de Lagrangeana seguinte:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi] + \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}(\epsilon^{\mu\alpha}\partial_\alpha\varphi\epsilon^{\nu\beta}\partial_\beta g_{\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2\beta\sqrt{-g} - \frac{\alpha}{8}\frac{\varphi}{\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\epsilon^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu g_{\alpha\rho}\partial_\nu g_{\beta\sigma},\end{aligned}\quad (3.10)$$

sendo $\epsilon^{\mu\nu}$ o pseudo-tensor de Levi-Civita em duas dimensões. Para simplificar a formulação Hamiltoniana, acrescenta-se a (3.10) um termo de superfície [22]:

$$\mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} + \partial_\mu \left[\frac{\varphi}{2\sqrt{-g}} \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{g_{11}} \epsilon^{\alpha\beta} g_{1\alpha} \partial_\nu g_{1\beta} \right]. \quad (3.11)$$

A forma explícita da ação será

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}[-g_{11}(\partial_0\varphi)^2 + 2g_{01}\partial_0\varphi\partial_1\varphi - g_{00}(\partial_1\varphi)^2 + \alpha(\partial_0g_{11}\partial_0\varphi - 2\partial_1g_{01}\partial_0\varphi + \partial_1g_{00}\partial_1\varphi)] \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{\alpha}{g_{11}}g_{01}(\partial_1g_{11}\partial_0\varphi - \partial_0g_{11}\partial_1\varphi) - \alpha^2\beta g \right].\end{aligned}\quad (3.12)$$

A partir de (3.12) pode-se calcular as equações de Euler-Lagrange para os campos da teoria:

$$\begin{aligned}L_\varphi &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_0[2g_{11}\partial_0\varphi - 2g_{01}\partial_1\varphi - \alpha\partial_0g_{11} + 2\alpha\partial_1g_{01}] + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_1[-2g_{01}\partial_0\varphi + 2g_{00}\partial_1\varphi - \alpha\partial_1g_{00}] \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\alpha}{g_{11}}(\partial_1g_{01}\partial_0g_{11} - \partial_0g_{01}\partial_1g_{11}),\end{aligned}\quad (3.13a)$$

$$L_{g_{11}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[-(\partial_0\varphi)^2 - \alpha\partial_0^2\varphi + \alpha\frac{\partial_0g_{01}}{g_{11}}\partial_1\varphi - \alpha\frac{\partial_1g_{01}}{g_{11}}\partial_0\varphi \right], \quad (3.13b)$$

$$L_{g_{01}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[2\partial_0\varphi\partial_1\varphi + \frac{\alpha}{g_{11}}(\partial_1g_{11}\partial_0\varphi - \partial_0g_{11}\partial_1\varphi) + 2\alpha\partial_0(\partial_1\varphi) \right], \quad (3.13c)$$

$$L_{g_{00}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-(\partial_1\varphi)^2 - \alpha\partial_1^2\varphi). \quad (3.13d)$$

Tem-se, também, as expressões para os momentos conjugados aos campos:

$$\begin{aligned}\pi_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(g_{01}\partial_1\varphi - g_{11}\partial_0\varphi) \\ &+ \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}\left(\partial_0g_{11} - 2\partial_1g_{01} + \frac{g_{01}}{g_{11}}\partial_1g_{11}\right),\end{aligned}\quad (3.14a)$$

$$\pi^{11} = \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}}\left(\partial_0\varphi - \frac{g_{01}}{g_{11}}\partial_1\varphi\right), \quad (3.14b)$$

$$\pi^{01} = 0 = \omega_1, \quad (3.14c)$$

$$\pi^{00} = 0 = \omega_2. \quad (3.14d)$$

As relações (3.14c) e (3.14d) definem dois vínculos primários da teoria, de acordo com o que foi descrito no capítulo 1. Com as expressões dos momentos canônicos, constrói-se a densidade de Hamiltoniana canônica:

$$\mathcal{H} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}\phi_1 + \frac{g_{01}}{g_{11}}\phi_2, \quad (3.15)$$

sendo

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}\left[(\partial_1\varphi)^2 - \frac{4}{\alpha^2}(g_{11}\pi^{11})^2 - \frac{4}{\alpha}(g_{11}\pi^{11})\pi_\varphi\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[\alpha\frac{\partial_1g_{11}}{g_{11}}\partial_1\varphi + 2\alpha\partial_1^2\varphi + \alpha^2\beta g_{11}\right],\end{aligned}\quad (3.16a)$$

$$\phi_2 = \pi_\varphi\partial_1\varphi - 2g_{11}\partial_1\pi^{11} - \pi^{11}\partial_1g_{11}. \quad (3.16b)$$

Impondo a condição de consistência temporal dos vínculos primários ω_1 e ω_2 , obtem-se dois vínculos secundários

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx 0, \\ \phi_2 &\approx 0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Estes dois vínculos, juntamente com ω_1 e ω_2 , são vínculos de primeira classe (ver capítulo 1). Eles são os geradores das simetrias residuais presentes no modelo (ver subseção (3.4.2)).

Olhando para (3.15), (3.16a) e (3.16b) fica evidente que a Hamiltoniana canônica é uma combinação linear de vínculos, ou seja, é uma quantidade fracamente nula. Com a fixação de gauge, ela se torna uma quantidade fortemente

nula, característica dos sistemas invariantes por TGC [5]. Este problema da Hamiltoniana ser nula neste modelo foi tratado por nós [13], e será apresentado no capítulo 4.

3.4 Análise clássica no gauge de cone de luz

3.4.1 Formulação Lagrangeana

Define-se as variáveis de cone de luz da seguinte maneira:

$$x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1), \quad (3.18a)$$

$$\partial_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 \pm \partial_1). \quad (3.18b)$$

De acordo com estas definições, faz-se a seguinte escolha de métrica:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Já as condições do gauge de cone de luz são dadas por

$$g_{++} = \frac{1}{2}g_{00} + g_{01} + \frac{1}{2}g_{11} = 2(g_{11} + 1), \quad (3.20a)$$

$$g_{--} = \frac{1}{2}g_{00} - g_{01} + \frac{1}{2}g_{11} = 0, \quad (3.20b)$$

$$g_{+-} = \frac{1}{2}g_{00} - \frac{1}{2}g_{11} = 1, \quad (3.20c)$$

e impondo as equações acima em (3.19), tem-se

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2h_{++} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{-g} = 1, \quad (3.21)$$

sendo h_{++} uma função arbitrária das coordenadas do espaço-tempo bidimensional, a qual carrega toda a informação do campo gravitacional. Com esta fixação de gauge, a Lagrangeana (3.12) se reduz a

$$\mathcal{L} = \partial_+ \varphi \partial_- \varphi + h_{++} (\partial_- \varphi)^2 - \alpha \partial_- h_{++} \partial_- \varphi + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta. \quad (3.22)$$

As equações de Euler-Lagrange provenientes desta densidade de Lagrangeana são

$$L_\varphi = \partial_- \left(\partial_+ \varphi + h_{++} \partial_- \varphi - \frac{\alpha}{2} \partial_- h_{++} \right) = 0, \quad (3.23a)$$

$$L_{h_{++}} = (\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi = 0. \quad (3.23b)$$

Os momentos canônicos conjugados aos campos h_{++} e φ são

$$\pi_\varphi = (1 + h_{++})(\partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi) + \partial_1 \varphi - \frac{\alpha}{2}(\partial_0 h_{++} - \partial_1 h_{++}), \quad (3.24a)$$

$$\pi_{h_{++}} = -\frac{\alpha}{2}(\partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi). \quad (3.24b)$$

Estas informações serão utilizadas na próxima seção e no capítulo 4.

3.4.2 Simetrias locais

O modelo de Polyakov é invariante sob as seguintes transformações:

- a. Transformação geral de coordenadas (TGC)

Olhando para a expressão que define φ (eq. (3.6)), vê-se que ele é um campo escalar por TGC, e $g_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem (ver capítulo 2). A variação de forma destes campos é dada pelas expressões [9]

$$\delta\varphi = \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi, \quad (3.25a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \epsilon^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \epsilon^\nu - g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \epsilon^\mu, \quad (3.25b)$$

sendo $\epsilon^\mu(x)$ os parâmetros (arbitrários) da transformação.

- b. Transformação de Weyl

A métrica $g^{\mu\nu}$ se transforma por Weyl da seguinte forma:

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \Lambda(x) g^{\mu\nu}(x), \quad (3.26)$$

sendo $\Lambda(x)$ um parâmetro arbitrário. Contudo, o modelo de Polyakov não apresenta invariância de Weyl (ver seção 3.2). O que acontece, de fato, é que

existem certas restrições sobre $\Lambda(x)$. De (3.6) e (3.26), segue que os campos φ e $g_{\mu\nu}$ se transformam por Weyl da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \frac{\alpha}{2}\Lambda, \\ \delta g^{\mu\nu} &= \Lambda g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Para que as expressões acima sejam transformações de simetria da ação efetiva, $\Lambda(x)$ deve satisfazer a seguinte condição

$$(2R - \mu)\Lambda = \partial_\nu \xi^\nu,\tag{3.28}$$

para algum vetor ξ^ν . Isto quer dizer que não há invariância de Weyl local, mas sim uma invariância rígida.

Reunindo as expressões dos itens a) e b), tem-se

$$\delta\varphi = \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{\alpha}{2}\Lambda,\tag{3.29a}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \epsilon^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \epsilon^\nu - g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \epsilon^\mu + \Lambda g^{\mu\nu},\tag{3.29b}$$

com a restrição

$$(2R - \mu)\Lambda = \partial_\nu \xi^\nu,\tag{3.30}$$

que são as simetrias da ação (3.8).

Para se obter as simetrias da Lagrangeana no gauge de cone de luz, impõem-se as condições (3.21) em (3.29a) e (3.29b). Portanto, as componentes g^{++} e g^{+-} , neste gauge, devem ser invariantes (olhando para (3.21)):

$$\delta g^{++} = -\partial_- \epsilon^+ = 0,\tag{3.31a}$$

$$\delta g^{+-} = -(\partial_- \epsilon^- + \partial_+ \epsilon^+ + \Lambda) = 0.\tag{3.31b}$$

As equações acima impõem uma restrição sobre o parâmetro ϵ^+ , e vinculam $\Lambda(x)$ (parâmetro da transformação de Weyl) aos parâmetros ϵ^+ e ϵ^- :

$$\Lambda = -(\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-) = -\partial_\mu \epsilon^\mu . \quad (3.32)$$

De (3.30), tem-se que

$$\partial_+(\mu\epsilon^+) + \partial_-[\mu\epsilon^- + 4\partial_-h_{++}(\partial_+\epsilon^+ + \partial_-\epsilon^-) - 4h_{++}\partial_-^2\epsilon^-] + 4h_{++}\partial_-^3\epsilon^- = \partial_\nu \xi^\nu , \quad (3.33)$$

a qual só é satisfeita se

$$\partial_-^3\epsilon^- = 0 . \quad (3.34)$$

Portanto, os únicos parâmetros independentes são ϵ^+ e ϵ^- , que estão condicionados às restrições (3.31a), (3.31b) e (3.34). Pelo fato dos parâmetros ϵ^μ sofrerem restrições, estas simetrias são também classificadas como rígidas (ver capítulo 1).

Finalmente, as simetrias residuais relevantes são (para ϵ^-)

$$\delta\varphi = \epsilon^- \partial_- \varphi - \frac{\alpha}{2} \partial_- \epsilon^- , \quad (3.35a)$$

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \epsilon^- , \quad (3.35b)$$

com

$$\partial_-^3 \epsilon^- = 0 ,$$

e para ϵ^+

$$\delta\varphi = -\epsilon^+ h_{++} \partial_- \varphi + \frac{\alpha}{2} \epsilon^+ \partial_- h_{++} , \quad (3.36a)$$

$$\delta h_{++} = \epsilon^+ \partial_+ h_{++} + h_{++} \partial_+ \epsilon^+ , \quad (3.36b)$$

com

$$\partial_- \epsilon^+ = 0 .$$

O próximo passo é encontrar os geradores correspondentes às simetrias (3.35a), (3.35b), (3.36a) e (3.36b). Usando (1.35):

$$L_\varphi \delta\varphi + L_{h_{++}} \delta h_{++} = \partial_\mu J^\mu, \quad (3.37)$$

encontram-se as correntes que formam o gerador das simetrias residuais. Para as transformações (3.35a) e (3.35b), correspondentes ao parâmetro ϵ^- , tem-se

$$\begin{aligned} J^- &= -\epsilon^- \left[h_{++} [(\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi] - \frac{\alpha^2}{2} \partial_-^2 h_{++} \right] \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} (\partial_- \epsilon^-) \partial_- h_{++} + \frac{\alpha^2}{2} h_{++} \partial_-^2 \epsilon^- \end{aligned} \quad (3.38a)$$

$$J^+ = -\epsilon^- [(\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi], \quad (3.38b)$$

e o gerador é escrito como

$$G_{\epsilon^-} = \int dx J^0, \quad (3.39)$$

sendo J^0 uma combinação linear de J^+ e J^- :

$$J^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (J^+ + J^-). \quad (3.40)$$

Repetimos o procedimento para as simetrias residuais correspondentes ao parâmetro ϵ^+ . Para as transformações (3.36a) e (3.36b), tem-se

$$L_\varphi \delta\varphi + L_{h_{++}} \delta h_{++} = \partial_\mu j^\mu, \quad (3.41a)$$

$$j^+ = \epsilon^+ h_{++} [(\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi], \quad (3.41b)$$

$$\begin{aligned} j^- &= \epsilon^+ \left[h_{++}^2 [(\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi] - \frac{\alpha^2}{2} h_{++} \partial_-^2 h_{++} + \frac{\alpha^2}{4} (\partial_- h_{++})^2 \right] \\ &\quad + c_{++}(x^+), \end{aligned} \quad (3.41c)$$

sendo $c_{++}(x^+)$ uma função indeterminada, que obedece à restrição $\partial_- c_{++} = 0$ [12]. O gerador é escrito como

$$G_{\epsilon^+} = \int dx j^0, \quad (3.42)$$

sendo

$$j^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^+ + j^-). \quad (3.43)$$

Após calculados os geradores (3.39) e (3.42), pode-se usar as definições dos momentos canônicos para obter as correntes em termos das variáveis do espaço de fase, a fim de encontrar a álgebra que elas satisfazem [12, 26]. Esta álgebra é a chamada álgebra de Kac-Moody $SL(2, \mathbf{R})$ [10]:

$$\{J^a(x), J^b(y)\} = \kappa \eta^{ab} \delta'(x - y) + \varepsilon^{abc} \eta_{cd} J^d(x) \delta(x - y), \quad (3.44)$$

sendo

$$\eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45a)$$

$$\eta_{ab} = (\eta^{ab})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45b)$$

o tensor métrico de Killing [12, 26], e ε^{abc} o pseudo-tensor de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{-0+} = 1. \quad (3.46)$$

Ressaltamos que a álgebra de Kac-Moody tem um papel fundamental na teoria de Polyakov, no sentido que a sua quantização depende fortemente da validade desta álgebra [10]. Para elucidar a sua origem, trabalharemos no espaço de fase reduzido, o que será feito no capítulo 4.

Capítulo 4

Gravitação induzida bidimensional: modelo auto-dual e problema da Hamiltoniana nula

Neste capítulo, apresentamos as aplicações das técnicas que estudamos (capítulo 1) ao modelo de Polyakov (capítulo 3).

Como primeira aplicação, temos a versão auto-dual do modelo de Polyakov. Nosso objetivo é explorar suas simetrias residuais, calculando seus geradores via Teorema de Noether [11].

A segunda parte do nosso trabalho é a utilização das técnicas apresentadas na seção (1.5) ao modelo de Polyakov [13].

Com o objetivo de tratar a invariância por reparametrização do modelo como uma simetria de gauge usual, utilizamos o método de Henneaux *et al* (subseção (1.5.1)) para calcular a extensão da ação (3.8). Os resultados são apresentados na subseção (4.2.1).

De acordo com o que foi mencionado anteriormente (capítulo 1), o modelo de Polyakov, como todas as teorias invariantes por TGC, apresenta Hamiltoniana total nula. Resolvemos este problema no espaço de fase reduzido utilizando o método de Fulop *et al* (subseção 1.5.2), o que pode ser visto na subseção (4.2.2).

4.1 Gravitação induzida bidimensional: modelo auto-dual

Dizer que um sistema físico apresenta **dualidade** significa que existem duas perspectivas, formulações ou construções da teoria [27]. Também significa dizer que existem duas descrições equivalentes de um modelo usando campos diferentes [28]. Por estas características, dualidade tem sido destaque de muitos trabalhos, principalmente em teorias de cordas, pois ela permite conectar os vários tipos de formulações existentes [29]. Podemos usá-la para observar as novas características que surgem da sua aplicação a modelos conhecidos na literatura, como fizemos com o modelo de Polyakov.

Partindo da ação auto-dual gravitacional, faremos uma análise clássica do modelo nos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano, focalizando a construção dos geradores de suas simetrias residuais.

4.1.1 Análise Lagrangeana e Hamiltoniana

A construção da gravitação auto-dual bidimensional é feita adicionando um termo de auto-dualidade à ação de Polyakov (3.8). A condição de auto-dualidade é¹

$$R^* = R, \quad (4.1)$$

sendo R^* o escalar associado ao tensor de Riemann dual em duas dimensões [11]:

$$R^* = \frac{2R_{1010}^*}{g}, \quad (4.2a)$$

$$R_{\mu\nu\kappa}^{*\lambda} = \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\alpha} R_{\alpha\mu\nu\kappa}, \quad (4.2b)$$

e $\epsilon^{\lambda\alpha}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita ($\epsilon^{01} = 1$). Com a expressão do tensor de Riemann em termos da conexão afim (2.46), podemos construir a única componente independente, R_{1010} , como visto no capítulo 2:

$$R_{1010} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} \right] g_{11}. \quad (4.3)$$

¹Vamos considerar constante cosmológica nula, ou seja, $\beta = 0$.

Na expressão acima usamos o gauge de cone de luz (vide capítulo 3):

$$g_{00} = g_{11} + 2, \quad (4.4a)$$

$$g_{01} = g_{11} + 1, \quad (4.4b)$$

$$g = g_{00}g_{11} - g_{01}^2 \rightarrow \sqrt{-g} = 1. \quad (4.4c)$$

Nas variáveis de cone de luz, escrevemos as expressões (4.4a) e (4.4b) da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_{++} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Portanto, a ação (3.22) se torna

$$S = \int d^2x [\partial_+\varphi\partial_-\varphi + h_{++}(\partial_-\varphi)^2 - \alpha\partial_-h_{++}\partial_-\varphi + \lambda(R - R^*)], \quad (4.6)$$

sendo

$$R - R^* = -\partial_1^2 h_{++} + 2\partial_0\partial_1 h_{++} - \partial_0^2 h_{++} = \partial_-^2 h_{++}, \quad (4.7)$$

o termo de auto-dualidade (equação (4.1)), e λ é um multiplicador de Lagrange. Portanto, a densidade de Lagrangeana do modelo auto-dual da gravitação bidimensional induzida é

$$\mathcal{L} = \partial_+\varphi\partial_-\varphi + h_{++}(\partial_-\varphi)^2 - \alpha\partial_-h_{++}\partial_-\varphi + \lambda\partial_-^2 h_{++}. \quad (4.8)$$

Com a finalidade de evitar o termo de aceleração em h_{++} , vamos introduzir um outro campo auxiliar, ψ :

$$\psi - \partial_-^2 h_{++} = 0, \quad (4.9)$$

e passamos a escrever a densidade de Lagrangeana como se segue:

$$\mathcal{L} = \partial_+\varphi\partial_-\varphi + h_{++}(\partial_-\varphi)^2 - \alpha\partial_-h_{++}\partial_-\varphi + \lambda\psi. \quad (4.10)$$

Derivamos as equações de Euler-Lagrange a partir da Lagrangeana acima:

$$L_{h_{++}} = (\partial_- \varphi)^2 + \alpha \partial_-^2 \varphi = 0, \quad (4.11a)$$

$$L_\varphi = -2\partial_- \partial_+ \varphi - 2\partial_- [h_{++} \partial_- \varphi] + \alpha \partial_-^2 h_{++} = 0, \quad (4.11b)$$

$$L_\psi = \lambda = 0, \quad (4.11c)$$

$$L_\lambda = \psi = 0, \quad (4.11d)$$

tomando x^0 como a variável temporal. Calculamos, também, os momentos canônicos conjugados aos campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = 0 = \pi_\psi, \quad (4.12a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \lambda)} = 0 = \pi_\lambda, \quad (4.12b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h_{++})} = \pi_{h_{++}} = \frac{\alpha}{2} (\partial_1 \varphi \partial_0 \varphi), \quad (4.12c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \pi_\varphi = \partial_0 \varphi (1 + h_{++}) - h_{++} \partial_1 \varphi + \frac{\alpha}{2} \partial_1 h_{++} - \frac{\alpha}{2} \partial_0 h_{++}, \quad (4.12d)$$

de onde surgem dois vínculos primários

$$\pi_\psi = 0 = \alpha_1, \quad (4.13a)$$

$$\pi_\lambda = 0 = \alpha_2. \quad (4.13b)$$

Usando (4.12c) e (4.12d), construímos a densidade de Hamiltoniana canônica:

$$\mathcal{H}_C = -\frac{2}{\alpha} \pi_\varphi \pi_{h_{++}} + \pi_\varphi \partial_1 \varphi + \pi_{h_{++}} \partial_1 h_{++} + \frac{2}{\alpha} \pi_{h_{++}} \partial_1 \varphi - \frac{2}{\alpha^2} \pi_{h_{++}}^2 (h_{++} + 1) - \psi \lambda, \quad (4.14)$$

e calculamos as equações de Hamilton-Jacobi para os campos e seus momentos canônicos:

$$\partial_0 h_{++} \approx \{h_{++}, H_C\} = -\frac{2}{\alpha}\pi_\varphi + \partial_1 h_{++} + \frac{2}{\alpha}\partial_1 \varphi - \frac{4}{\alpha^2}\pi_{h_{++}}(h_{++} + 1) \quad (4.15a)$$

$$\partial_0 \varphi \approx \{\varphi, H_C\} = -\frac{2}{\alpha}\pi_{h_{++}} + \partial_1 \varphi, \quad (4.15b)$$

$$\partial_0 \lambda \approx \{\lambda, H_C\} = 0, \quad (4.15c)$$

$$\partial_0 \psi \approx \{\psi, H_C\} = 0 \rightarrow \partial_-^2 h_{++} = 0, \quad (4.15d)$$

$$\partial_0 \pi_\psi \approx \{\pi_\psi, H_C\} = \lambda, \quad (4.15e)$$

$$\partial_0 \pi_\lambda \approx \{\pi_\lambda, H_C\} = \psi, \quad (4.15f)$$

$$\partial_0 \pi_{h_{++}} \approx \{\pi_{h_{++}}, H_C\} = \partial_1 \pi_{h_{++}} + \frac{2}{\alpha^2}\pi_{h_{++}}^2, \quad (4.15g)$$

$$\partial_0 \pi_\varphi \approx \{\pi_\varphi, H_C\} = \partial_1 \pi_\varphi + \frac{2}{\alpha}\partial_1 \pi_{h_{++}}, \quad (4.15h)$$

mostrando que as equações de Euler-Lagrange são respeitadas e a condição de auto-dualidade é preservada.

Na próxima subseção, veremos como obter o gerador das simetrias residuais da gravitação auto-dual bidimensional.

4.1.2 Simetrias residuais

Como no modelo de Polyakov, a gravitação bidimensional auto-dual possui simetrias residuais rígidas, devido à invariância por TGC. Podemos encontrar os geradores destas simetrias utilizando o teorema de Noether na forma apresentada no capítulo 1. Para isto, precisamos saber como se transformam por TGC os campos auxiliares (φ , ψ) e o campo gravitacional (h_{++}):

$$\delta_+ h_{++} = \epsilon^+ \partial_+ h_{++} + h_{++} \partial_+ \epsilon^+ \quad \text{com } \partial_- \epsilon^+ = 0, \quad (4.16a)$$

$$\delta_- h_{++} = \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- - \partial_+ \epsilon^- \quad \text{com } \partial_-^2 \epsilon^- = 0, \quad (4.16b)$$

$$\delta \varphi = \epsilon^- \partial_- \varphi + \epsilon^+ \partial_+ \varphi, \quad (4.16c)$$

$$\delta \psi = \epsilon^+ \partial_+ \psi + \psi \partial_+ \epsilon^+ + \epsilon^- \partial_- \psi + \psi \partial_- \epsilon^-, \quad (4.16d)$$

sendo δ_+ e δ_- as variações relativas aos parâmetros ϵ^+ e ϵ^- , respectivamente. As condições nos parâmetros ϵ^\pm nas equações (4.16a) e (4.16b) são obtidas quando utilizamos o gauge de cone de luz (4.5) nas variações das componentes da métrica, analogamente ao que foi visto no capítulo 3:

$$\delta_- g_{--} = 0 \rightarrow \partial_- \epsilon^+ = 0, \quad (4.17a)$$

$$\delta_+ g_{+-} = 0 \rightarrow \partial_-^2 \epsilon^- = 0. \quad (4.17b)$$

Após calculadas as variações de forma, obtemos os geradores das simetrias residuais usando o teorema de Noether (1.35):

$$L_{h_{++}} \delta h_{++} + L_\varphi \delta \varphi + L_\psi \delta \psi + L_\lambda \delta \lambda = \partial_\mu J^\mu, \quad (4.18)$$

sendo J^μ as correntes de Noether associadas ao gerador G da seguinte forma:

$$G = \int J(x) dx = G_{\epsilon^+} + G_{\epsilon^-}. \quad (4.19)$$

Separando de acordo com os parâmetros:

$$J_{\epsilon^-} = J_{\epsilon^-}^+ + J_{\epsilon^-}^-, \quad (4.20a)$$

$$J_{\epsilon^+} = J_{\epsilon^+}^+ + J_{\epsilon^+}^-, \quad (4.20b)$$

sendo

$$J_{\epsilon^+}^+ = J_\alpha^+ + J_0^+, \quad (4.21a)$$

$$J_{\epsilon^-}^- = J_\alpha^- + J_0^-, \quad (4.21b)$$

$$J_{\epsilon^-}^+ = j, \quad (4.21c)$$

$$J_{\epsilon^+}^- = 0. \quad (4.21d)$$

A forma explícita destas correntes é

$$J_\alpha^+ = \epsilon^+ \alpha (\partial_-^2 \varphi) h_{++}, \quad (4.22a)$$

$$J_0^+ = \epsilon^+ (\partial_- \varphi)^2 h_{++}, \quad (4.22b)$$

$$J_\alpha^- = \epsilon^- \alpha (\partial_- \varphi) \partial_- h_{++}, \quad (4.22c)$$

$$J_0^- = -\epsilon^- (\partial_- \varphi)^2 h_{++}, \quad (4.22d)$$

$$j = -\epsilon^- (\partial_- \varphi)^2. \quad (4.22e)$$

Usando as expressões dos momentos canônicos (4.12c) e (4.12d), escrevemos os geradores nas variáveis do espaço de fase:

$$J_\alpha^+ = -\frac{2}{\alpha}\epsilon^+\pi_{h_{++}} \left[\partial_1\varphi - \frac{2}{\alpha}\pi_{h_{++}} - \frac{2}{\alpha}h_{++}\pi_{h_{++}} - \pi_\varphi \right], \quad (4.23a)$$

$$J_0^+ = \frac{2}{\alpha^2}\epsilon^+h_{++}\pi_{h_{++}}^2, \quad (4.23b)$$

$$J_\alpha^- = \frac{2}{\alpha}\epsilon^-\pi_{h_{++}} \left[\partial_1\varphi - \frac{2}{\alpha}\pi_{h_{++}} - \frac{2}{\alpha}h_{++}\pi_{h_{++}} - \pi_\varphi \right], \quad (4.23c)$$

$$J_0^- = -\frac{2}{\alpha^2}\epsilon^-h_{++}\pi_{h_{++}}^2, \quad (4.23d)$$

$$j = -\frac{2}{\alpha^2}\epsilon^-\pi_{h_{++}}^2. \quad (4.23e)$$

A densidade do gerador ($J(x)$) satisfaz, como no caso de Polyakov [23], a álgebra Kac- Moody $SL(2,R)$ [11], via parênteses de Poisson:

$$\{J(x), J(y)\} = 2J(x)\partial_x\delta(x-y) - \partial_x J(x)\delta(x-y). \quad (4.24)$$

A verificação desta álgebra garante que a quantização canônica do modelo auto-dual é consistente, em analogia com o resultado de Polyakov [10].

4.2 Gravitação bidimensional induzida - o problema da Hamiltoniana nula

Sendo uma teoria invariante por TGC, o modelo da gravitação induzida bidimensional apresenta uma Hamiltoniana que é combinação linear de vínculos [5]. Por este motivo, no espaço de fase reduzido ela é uma quantidade fortemente nula, o que representa um problema, pois não sabemos quem é o gerador da evolução temporal das variáveis do espaço de fase.

Pensando neste problema, Henneaux, Teitelboim e Vergara [5] e independentemente Fulop, Gitman e Tyutin [6] desenvolveram técnicas diferentes para tratar o problema, as quais foram apresentadas no capítulo 1. Nesta seção, aplicaremos os dois métodos ao modelo de Polyakov.

4.2.1 Aplicação do método de Henneaux *et al* ao modelo da gravitação induzida bidimensional

Partindo da ação de Polyakov²

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g} (-\varphi \square \varphi - \alpha R \varphi), \quad (4.25)$$

calculamos os momentos dos campos φ e $g_{\mu\nu}$. Encontramos dois vínculos primários de primeira classe, ω_1 e ω_2 (ver (3.14c) e (3.14d)). Fazendo a consistência temporal dos primários, encontramos dois vínculos secundários, ϕ_1 e ϕ_2 (expressões (3.16a) e (3.16b)), que também são de primeira classe:

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)] \partial_1 \delta(x - y), \quad (4.26a)$$

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = [\phi_1(x) + \phi_1(y)] \partial_1 \delta(x - y), \quad (4.26b)$$

$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = [\phi_2(x) + \phi_2(y)] \partial_1 \delta(x - y), \quad (4.26c)$$

os outros parênteses de Poisson entre os vínculos são nulos. Fazendo novamente a consistência temporal (agora dos secundários), a teoria não nos fornece nova geração de vínculos.

Podemos escrever a densidade de Hamiltoniana canônica em função de ϕ_1 e ϕ_2 . Após algumas passagens, temos [22]

$$\mathcal{H}_c = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{11}} \phi_1 + \frac{g_{01}}{g_{11}} \phi_2, \quad (4.27)$$

confirmando que a densidade de Hamiltoniana é uma combinação linear de vínculos.

O método de Henneaux *et al* nos ensina que, se incluirmos uma extensão na ação do tipo (de acordo com a notação usada no capítulo 1 para sistemas discretos)

$$S' = S + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d(D + B)}{d\tau} d\tau, \quad (4.28)$$

sendo

²Novamente, $\beta = 0$.

$$D = P_i \frac{\partial G}{\partial P_i} - G, \quad (4.29)$$

e não fixarmos as condições de contorno nos extremos para os parâmetros ϵ^a da transformação de gauge, a invariância por TGC se comporta como uma invariância de gauge usual [5]. Para isto, precisamos construir o gerador das transformações de gauge (G) que, segundo Dirac [3], é uma combinação linear dos vínculos de primeira classe do modelo. Seguindo o algoritmo de Anderson e Bergman (ver apêndice) [4], podemos escrever o gerador

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & (A\partial_0\epsilon^1 + C\partial_0\epsilon^0 + L\epsilon^1 + N\epsilon^0 + R\partial_1\epsilon^0 + T\partial_1\epsilon^1)\omega_1 \\ & + (B\partial_0\epsilon^1 + D\partial_0\epsilon^0 + M\epsilon^1 + P\epsilon^0 + S\partial_1\epsilon^1 + U\partial_1\epsilon^0)\omega_2 \\ & + (H\epsilon^0 + E\epsilon^1)\phi_1 + (I\epsilon^0 + F\epsilon^1)\phi_2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

sendo \tilde{G} a densidade do gerador e os coeficientes $A, B, C, D, E, F, H, I, L, M, N, P, R, S, T$ e U quantidades a serem determinadas. Sabendo como os campos φ e $g_{\mu\nu}$ se transformam por TGC (expressões (3.25a) e (3.25b))

$$\delta\varphi = \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi,$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \epsilon^\sigma \partial_\sigma g^{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} \partial_\sigma \epsilon^\nu + g^{\nu\sigma} \partial_\sigma \epsilon^\mu,$$

podemos calcular os coeficientes da equação (4.30), usando também

$$\delta\varphi = \{\varphi(x), G\}. \quad (4.31)$$

Precisamos também das expressões dos momentos canônicos (ver (3.14a) e (3.14b)):

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (g_{01} \partial_1 \varphi - g_{11} \partial_0 \varphi) + \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}} \left(\partial_0 g_{11} - 2\partial_1 g_{01} + \frac{g_{01}}{g_{11}} \partial_1 g_{11} \right),$$

$$\pi^{11} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 g_{11}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{-g}} \left(\partial_0 \varphi - \frac{g_{01}}{g_{11}} \partial_1 \varphi \right).$$

Portanto, abrindo as expressões (3.25a) e (3.25b) explicitamente, temos

$$\delta\varphi = \epsilon^0 \partial_0 \varphi + \epsilon^1 \partial_1 \varphi = \epsilon^0 \left(\frac{2\sqrt{-g}}{\alpha} \pi^{11} + \frac{g_{01}}{g_{11}} \partial_1 \varphi \right) + \epsilon^1 \partial_1 \varphi, \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} \delta g_{11} &= \epsilon^0 \left[\frac{2\sqrt{-g}}{\alpha} \left(\pi_\varphi + \frac{2}{\alpha} g_{11} \pi^{11} \right) + 2\partial_1 g_{01} \right] + \partial_1 g_{11} \left[\epsilon^1 - \frac{g_{01}}{g_{11}} \epsilon^0 \right] \\ &+ 2g_{01} \partial_1 \epsilon^0 + 2g_{11} \partial_1 \epsilon^1, \end{aligned} \quad (4.32b)$$

e comparando estas expressões com (4.30)

$$\begin{aligned} A &= 2g_{01}, & D &= g_{01}, & H &= \frac{\sqrt{-g}}{g_{11}}, & L &= \partial_1 g_{00}, & P &= \partial_0 g_{01}, \\ B &= g_{11}, & E &= 0, & I &= \frac{g_{01}}{g_{11}}, & M &= \partial_1 g_{01}, & R &= 0, \\ C &= 2g_{00}, & F &= 1, & T &= 0, & N &= \partial_0 g_{00}, & S &= g_{01}, \\ U &= g_{00}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com o gerador das transformações de gauge, podemos construir a extensão da ação (4.28), sendo

$$D = \int \bar{D} dy = \int dy \left[P_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial P_i} - \bar{G} \right]. \quad (4.34)$$

Após alguns cálculos, encontramos que

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{\sqrt{-g}}{g_{11}} \epsilon^0 \left[\frac{(\partial_1 \varphi)^2}{2} + \frac{2}{\alpha^2} (g_{11} \pi^{11})^2 - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial_1 g_{11}}{g_{11}} \partial_1 \varphi + \alpha \partial_1^2 \varphi + \frac{2}{\alpha} g_{11} \pi^{11} \pi_\varphi \right] \\ &+ \left[\epsilon^1 + \frac{g_{01}}{g_{11}} \epsilon^0 \right] (-2g_{11} \pi^{11} - 2(\partial_1 g_{11}) \pi^{11}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

A extensão permite analisar a invariância por TGC como uma invariância de gauge usual (do tipo Yang-Mills).

4.2.2 Aplicação do método de Fulop *et al* ao modelo de gravitação induzida bidimensional

Como vimos, o modelo de Polyakov apresenta quatro vínculos de primeira classe (expressões (3.14c), (3.14d), (3.16a) e (3.16b)). Para trabalharmos no espaço de fase reduzido, é necessário que encontremos quatro condições que fixem o gauge, isto é (como visto no capítulo 1), quatro vínculos fixadores que transformam

os vínculos de primeira classe em segunda classe. Nós escolhemos para fixar ω_1 e ω_2 o gauge de cone de luz (capítulo 3):

$$\omega_3 = g_{11} + 2 - g_{00} \approx 0, \quad (4.36a)$$

$$\omega_4 = g_{11} + 1 - g_{01} \approx 0. \quad (4.36b)$$

Para fixar os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 , escolhemos as expressões abaixo:

$$\Gamma_5 = \pi^{11} - f(x^0), \quad (4.37a)$$

$$\Gamma_6 = \partial_1 \varphi - 1, \quad (4.37b)$$

sendo $f(x^0)$ uma função arbitrária do tempo. Substituindo Γ_5 e Γ_6 nos vínculos originais ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\bar{\phi}_1 = \frac{1}{2} \left[(1)^2 - \frac{4}{\alpha^2} (g_{11} f(t))^2 - \frac{4}{\alpha} (g_{11} f(t)) \pi_\varphi - \alpha \frac{\partial_1 g_{11}}{g_{11}} (1) + 2\alpha \partial_1 (1) \right] \quad (4.38a)$$

$$\bar{\phi}_2 = \pi_\varphi (1) - 2g_{11} \partial_1 (f(t)) - f(t) \partial_1 g_{11}, \quad (4.38b)$$

e obtemos sua forma final:

$$\bar{\phi}_1 = g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11}, \quad (4.39a)$$

$$\bar{\phi}_2 = \pi_\varphi. \quad (4.39b)$$

Para facilitar o cálculo dos parênteses de Dirac, vamos fazer uma combinação linear de $\bar{\phi}_1$ e Γ_5 :

$$\Lambda_1 = \bar{\phi}_1 + \Gamma_5, \quad (4.40a)$$

$$\Lambda_2 = \bar{\phi}_1 - \Gamma_5, \quad (4.40b)$$

que simplifica os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned}
\{\Lambda_1(x), \Lambda_1(y)\} &= \{(g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} + \pi^{11})(x), (g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} + \pi^{11})(y)\} \\
&= \{g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} - \alpha \{\partial_1 g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} \\
&+ \{\pi^{11}(x), g_{11}(y)\} - \alpha \{\pi^{11}(x), \partial_1 g_{11}(y)\} \\
&= -2\alpha \partial_x \delta(x - y), \tag{4.41a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\Lambda_1(x), \Lambda_2(y)\} &= \{(g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} + \pi^{11})(x), (g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} - \pi^{11})(y)\} \\
&= -\{g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} + \alpha \{\partial_1 g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} \\
&+ \{\pi^{11}(x), g_{11}(y)\} - \alpha \{\pi^{11}(x), \partial_1 g_{11}(y)\} \\
&= -2\delta(x - y), \tag{4.41b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\Lambda_2(x), \Lambda_2(y)\} &= \{(g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} - \pi^{11})(x), (g_{11} - \alpha \partial_1 g_{11} - \pi^{11})(y)\} \\
&= -\{g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} + \alpha \{\partial_1 g_{11}(x), \pi^{11}(y)\} \\
&- \{\pi^{11}(x), g_{11}(y)\} + \alpha \{\pi^{11}(x), \partial_1 g_{11}(y)\} \\
&= 2\alpha \partial_x \delta(x - y). \tag{4.41c}
\end{aligned}$$

A matriz de Dirac é, então,

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \delta(x - y) & 0 & 0 \\ -\delta(x - y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(x - y) \\ 0 & 0 & -\delta(x - y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

para o setor dos vínculos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e ω_4 . Para o outro setor (dos vínculos $\Lambda_1, \Lambda_2, \bar{\phi}_2$ e Γ_6), temos

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} -2\alpha \partial_x \delta(x - y) & -2\delta(x - y) & 0 & 0 \\ 2\delta(x - y) & 2\alpha \partial_x \delta(x - y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x \delta(x - y) \\ 0 & 0 & \partial_x \delta(x - y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Construindo os parênteses de Dirac (a tempos iguais) para os graus de liberdade físicos da teoria, temos:

$$\begin{aligned}
\{g_{11}(x), \pi^{11}(y)\}_D &= \delta(x-y) - \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{11}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{12}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{21}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{22}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), \pi^{11}(y)\} \\
&= \delta(x-y), \tag{4.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{g_{11}(x), g_{11}(y)\}_D &= - \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{11}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), g_{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{12}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), g_{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{21}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), g_{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{g_{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{22}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), g_{11}(y)\} \\
&= 0, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\pi^{11}(x), \pi^{11}(y)\}_D &= - \int dz dw \{\pi^{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{11}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{\pi^{11}(x), \Lambda_1(z)\} \Delta_{12}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{\pi^{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{21}^{-1}(z, w) \{\Lambda_1(w), \pi^{11}(y)\} \\
&- \int dz dw \{\pi^{11}(x), \Lambda_2(z)\} \Delta_{22}^{-1}(z, w) \{\Lambda_2(w), \pi^{11}(y)\} \\
&= 0. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Apesar de (4.40a) e (4.40b) (que mostram que g_{11} e π^{11} não são independentes), o espaço de fase do modelo é canônico [14]. Visando a quantização canônica, este resultado é muito bom, visto que reproduz as relações de comutação usuais.

Tendo os vínculos fixadores, vamos calcular a Hamiltoniana efetiva seguindo os passos do capítulo 1 (subseção (1.5.2)). Fazendo a seguinte transformação canônica,

$$\Pi^{11} = \pi^{11} - f(x^0), \quad (4.47a)$$

$$G_{11} = g_{11}, \quad (4.47b)$$

a nova densidade de Lagrangeana será dada por

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu, \quad (4.48)$$

sendo F^μ o gerador das transformações canônicas (4.47a) e (4.47b) (vide capítulo 1). As expressões das componentes de F^μ são

$$F^0 = \Pi^{11} g_{11}, \quad (4.49a)$$

$$F^1 = \alpha \left[1 - \frac{(1 + g_{11})}{2g_{11}} \right] (\partial_1 g_{11}) \Pi^{11}. \quad (4.49b)$$

Finalmente, temos que a densidade de Hamiltoniana efetiva do modelo é

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = g_{11} + \alpha \left[1 - \frac{(1 + g_{11})}{2g_{11}} \right] (\partial_1 g_{11}) \Pi^{11}, \quad (4.50)$$

que é o gerador da evolução temporal dos campos físicos do modelo. Com este resultado, podemos obter as equações de Hamilton-Jacobi:

$$\partial_0 g_{11} = \{g_{11}, H_{\text{eff}}\}_D = \left[4 \frac{g_{11}}{\alpha^2} + 2 \left[1 - \frac{(1 + g_{11})}{2g_{11}} \right] \partial_1 g_{11} \right], \quad (4.51)$$

verificando que este resultado está de acordo com as expressões que definem os momentos canônicos (3.14a) e (3.14b) e os vínculos fixadores. A expressão (4.51) determina a dinâmica do campo gravitacional no espaço de fase reduzido. Outro fato que deve ser mencionado é que, após a análise no espaço de fase reduzido, o único grau de liberdade relevante para a descrição do campo gravitacional é g_{11} .

Existe, na literatura, trabalhos anteriores que visavam obter a dinâmica do campo gravitacional no espaço de fase reduzido [30]. No entanto, o espaço de fase encontrado era muito intrincado; os parênteses de Dirac calculados para os campos físicos do modelo impossibilitavam uma quantização canônica consistente do modelo. Por este motivo é que nosso resultado é muito bom, em comparação com outros existentes.

Conclusões

Nesta dissertação, analisamos as técnicas de sistemas vinculados e sua aplicação em teoria clássica de campos. Aprendemos a construir geradores de simetria: no caso das simetrias rígidas, usamos o teorema de Noether, e no caso das simetrias locais, usamos o algoritmo de Anderson e Bergman. Estudamos o formalismo Hamiltoniano estendido e os métodos de Henneaux *et al* e Fulop *et al* para resolver o problema da Hamiltoniana nula. Aplicamos os dois métodos ao modelo da partícula livre relativística.

Fizemos um estudo da teoria da Relatividade Geral, dando ênfase aos Princípios da Equivalência e da Covariância Geral, à álgebra tensorial, à construção do tensor de curvatura e do tensor métrico em duas dimensões, e à obtenção das equações de Einstein via princípio variacional.

No caso do modelo de Polyakov, fizemos sua análise clássica, estudando-o primeiramente sem fixar gauge, e depois no gauge de cone de luz. Calculamos os geradores das simetrias residuais através do teorema de Noether, de acordo com a literatura existente [23].

Nossas contribuições originais foram:

1. construir uma versão auto-dual do modelo de Polyakov e utilizar o teorema de Noether para calcular os geradores das simetrias residuais, quando é feita fixação de gauge parcial utilizando o gauge de cone de luz [11]. A verificação da álgebra (4.24) garante a consistência da quantização canônica deste modelo;
2. utilizar o método de Henneaux *et al* para construir a extensão da ação do modelo de Polyakov, a fim de tratar a invariância por reparametrização como uma invariância de gauge usual [13]. O método foi aplicado pela primeira vez a um modelo com infinitos graus de liberdade;
3. utilizar o método de Fulop *et al* para calcular uma Hamiltoniana não nula para o modelo, após fixação de gauge completa, permitindo a obtenção da dinâmica Hamiltoniana do campo gravitacional no espaço de fase reduzido [13]. O fato da estrutura do espaço de fase reduzido ser canônica mostra a eficiência deste método na obtenção da dinâmica de sistemas invariantes por transformações

gerais de coordenadas. Novamente, este método foi aplicado pela primeira vez a um sistema com infinitos graus de liberdade.

Os dois métodos utilizados no modelo de Polyakov também foram aplicados ao caso da partícula relativística, analisando o modelo como uma teoria de gravitação unidimensional. Este trabalho está em processo de preparação [31].

Apêndice A

Transformação da conexão afim

A conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não é um tensor, afirmação que será provada agora. Lembrando da definição de $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (\text{A.1})$$

e passando do referencial x^{μ} para outro referencial x'^{μ} , tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Usando (A.1):

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho}. \quad (\text{A.3})$$

O segundo termo de (A.3) é o que se esperaria se $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ fosse um tensor; já o primeiro é exatamente o termo que mostra que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não é um tensor, o qual será chamado de termo inhomogêneo.

Apesar de $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não ser um tensor por TGC, a equação de movimento para a partícula em queda livre (seção (2.1)) é invariante por TGC, o que será mostrado a seguir. Antes, é necessário encontrar uma forma mais conveniente para o termo inhomogêneo em (A.3). Da equação

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

deriva-se em relação a x'^{μ} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \right] &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} (\delta_{\nu}^{\lambda}) = 0 \\ &= \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e então

$$\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \quad (\text{A.6})$$

Pode-se escrever (A.3) como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}}. \quad (\text{A.7})$$

Lembrando da equação de movimento para uma partícula em queda livre:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.8})$$

e fazendo uma transformação geral de coordenadas (TGC)

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Separa-se (A.9) em duas partes. Primeiro, calcula-se o primeiro termo:

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right] = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}, \quad (\text{A.10})$$

O segundo termo é (usando (A.7))

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} &= \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \right] \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\tau}}{d\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Troca-se λ por μ em (A.11):

$$\Gamma'_{\mu\nu} \frac{dx'^{\mu}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\tau}}{d\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau}, \quad (\text{A.12})$$

e soma-se (A.12) com (A.10):

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'_{\lambda\nu} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\tau\sigma}^{\nu} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\tau}}{d\tau} \right]. \quad (\text{A.13})$$

A equação (A.13) mostra que esta equação de movimento é invariante por TGC, ou seja, é válida em qualquer sistema de coordenadas se for válida em um sistema de coordenadas (Princípio da Covariância Geral).

Apêndice B

Algoritmo de Anderson e Bergman

Suponha que as variações dos campos devido à transformação de gauge sejam geradas da seguinte forma

$$\delta_\epsilon q = \left\{ q, \sum_{n=0}^k \epsilon^{(n)} G_n \right\} = \{q, G\}, \quad (\text{B.1a})$$

$$\delta_\epsilon p = \left\{ p, \sum_{n=0}^k \epsilon^{(n)} G_n \right\} = \{p, G\}, \quad (\text{B.1b})$$

sendo

$$G = \sum_{n=0}^k \epsilon^{(n)} G_n, \quad (\text{B.2})$$

o gerador da transformação de gauge, e

$$\epsilon^{(n)} \equiv \frac{d^n \epsilon}{dt^n}. \quad (\text{B.3})$$

É possível mostrar que estas expressões levam às seguintes relações [32]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_s} + \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial q_s} \frac{\partial}{\partial p_\rho} \right) [\{G_n, H_T\} + G_{n-1}] = 0, \quad (\text{B.4a})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\rho} \right) [\{G_n, H_T\} + G_{n-1}] = 0, \quad (\text{B.4b})$$

$$\{G_n, \text{qualquer vínculo}\} = \text{vínculo}, \quad (\text{B.4c})$$

sendo

$$p_\rho - \Psi_\rho(q_s, p_\alpha) = 0 = \phi_\rho(q_s, p_s), \quad (\text{B.5})$$

os vínculos primários. Explicitamente, estas relações são escritas como

$$\{G_0, H_T\} = \text{vínculo primário (VP)}, \quad (\text{B.6a})$$

$$G_0 + \{G_1, H_T\} = (\text{VP}), \quad (\text{B.6b})$$

$$G_1 + \{G_2, H_T\} = (\text{VP}), \quad (\text{B.6c})$$

$$\vdots \quad (\text{B.6d})$$

$$G_{k-1} + \{G_k, H_T\} = (\text{VP}), \quad (\text{B.6e})$$

$$G_k = \text{VP}. \quad (\text{B.6f})$$

Estas condições definem o procedimento para a construção do gerador G : inicia-se com um vínculo primário de primeira classe G_k , calcula-se o seu parênteses de Poisson com H_T e encontra-se G_{k-1} , e assim por diante. A repetição chega ao fim quando se obtém G_0 , cujo parênteses de Poisson com H_T é um vínculo primário de primeira classe. Assume-se que o número de repetições é finito, o que é equivalente a assumir que o número de gerações de vínculos secundários é finito [32].

Fazem parte de G todos os vínculos de primeira classe, exceto aqueles que tem a forma χ^n ($n > 1$), pois estes não geram simetria [33]. Portanto, a conjectura de Dirac pode ser substituída pela afirmação: *todos os vínculos de primeira classe, exceto aqueles que aparecem das condições de consistência na forma χ^n ($n > 1$) e que seguem de $\{\chi, H_T\} \approx 0$, fazem parte do gerador das simetrias de gauge [18].*

Bibliografia

- [1] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [2] E. D. G. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical Dynamics: a modern perspective*, Wiley, New York.
- [3] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
- [4] J. Anderson, P. Bergman, Phys. Rev. **83**, 1018 (1951).
- [5] M. Henneaux, C. Teitelboim, D. Vergara, Nucl. Phys. B **387**, 391 (1992).
- [6] G. Fulop, D. Gitman, I. Tyutin, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1941 (1999).
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, 1972.
- [8] J. Zinn Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, 1996.
- [9] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, K. Rothe, *Non perturbative methods in Two Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [10] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A **2**, 893 (1987).
- [11] F. P. Devecchi, D. Z. Marchioro, Il Nuovo Cimento B **115**, 403 (2000).
- [12] Ayrton Zadra, *Quantização de teorias de gauge anômalas: eletrodinâmica escalar quiral e gravitação induzida em duas dimensões*, tese de doutorado, IFT, 1990.
- [13] C. P. Constantinidis, F. P. Devecchi, D. F. Marchioro, Phys. Rev. D **62**, 025015 (2000).

- [14] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge, 1980.
- [15] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Hamburg, 1982.
- [16] Mario Costa, *Simetrias locais no formalismo Hamiltoniano*, tese de doutorado, UFRGS, 1988.
- [17] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [18] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, Belgrado, 1996. A versão em inglês será publicada pela IOP Publishing (Bristol, UK) no final de 2001.
- [19] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1975.
- [20] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, ICTP, Trieste, 2000.
- [21] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [22] E. Egorian, R. Manvelian, *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 2371 (1990).
- [23] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, J. Gamboa, A. Zadra, *Phys. Lett. B* **273**, 222 (1991).
- [24] F. P. Devecchi, *Phys. Rev. D* **58**, 045009 (1998).
- [25] J. Distler, H. Kawai, *Nucl. Phys. B* **321**, 509 (1989).
- [26] Fernando Pablo Devecchi, *Análise independente de gauge e redução Hamiltoniana completa da gravitação induzida em duas dimensões*, tese de doutorado, IFT, 1992.
- [27] J. A. Harvey, *Magnetic Monopoles, Duality and Supersymmetry*, hep-th/9603086.
- [28] S. E. Hjeltnel, U. Lindström, *Duality for the non-specialist*, hep-th/9705122.
- [29] E. Witten, *Duality, Spacetime and Quantum Mechanics*, *Physics Today*, maio de 1997.

- [30] M. C. B. Abdalla, F. P. Devecchi, E. Abdalla, *Europhys. Lett.*, **44** (4), 436-441 (1998).
- [31] D. Delfrate, F. P. Devecchi, J. França, D. F. Z. Marchioro, *Relativistic particle and one dimensional gravity*, em preparação.
- [32] L. Castellani, *Annals of Physics* **143**, 357 (1982).
- [33] R. Cawley, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 413 (1979).
- [34] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, 1953.