

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS

TESE DE GRAU DE  
"MESTRE EM CIÊNCIAS"

"MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO  
INVERSO MEDIANTE A REPRESENTAÇÃO ESFÉRICA DO ELIPSÓIDE".

ANTONIO MOCHON COSTA  
LICENCIADO EM MATEMÁTICA

CURITIBA, FEVEREIRO DE 1976.

ANTONIO MOCHON COSTA

LIC. MATEMÁTICA

"MÉTODOS PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO INVERSO MEDIANTE A REPRESENTAÇÃO ESFÉRICA DO ELIPSÓIDE".

TESE DE GRAU DE "MESTRE EM CIÊNCIAS" APRESENTADA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS DO DEPARTAMENTO DE GEOCIÊNCIAS, SETOR DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ.

CURITIBA - PARANÁ - 1976.

AGRADEÇO SINCERAMENTE

Ao Dr. CAMIL GEMAEEL, Coordenador Geral do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, meu orientador, pela colaboração cedendo todo material disponível do Centro de Estudos e Pesquisas de Geodésia para elaboração deste trabalho.

À direção do Instituto de Pesquisas Espaciais pela concessão de bolsa de estudo durante a obtenção de créditos e realização deste trabalho.

A todos os COLEGAS pelo convívio, entusiasmo e amizade recebidos.

## S I N O P S E

Este trabalho tem como objetivo a apresentação do desenvolvimento de algumas fórmulas para a solução do problema geodésico inverso utilizando a representação esférica do elipsóide de revolução. Em primeiro lugar é efetuado um estudo sistemático e pormenorizado do elipsóide de revolução focalizando os seus elementos e as propriedades que eles possuem entre si; dando sequência são apresentadas a linha geodésica no elipsóide de revolução e suas particularidades; a expressão diferencial da diferença de longitude de dois pontos sobre o elipsóide de revolução; a solução algébrica do problema geodésico inverso e finalmente a solução numérica do mesmo.

## S U M M A R Y

The goal of this paper is the presentation of the development of some formulae for the solution of the inverse geodetic problem, by means of the spheric representation of the ellipsoid of revolution.

First of all, a systematic and detailed study of the ellipsoid of revolution is done, emphasizing its elements, and the properties which they have among themselves. Then, facts coming successively, are presented: the geodetic line on the ellipsoid of revolution and its particularities ; the differential expression of the longitude difference of two points on the ellipsoid of revolution; the algebraical solution of the inverse geodetic problem and finally its numerical solution.

## C O N T E Ú D O

TÍTULO.....	I
AGRADECIMENTOS.....	III
SINOPSE.....	IV
SUMMARY.....	V
CONTEÚDO.....	VI
 <u>CAPÍTULO 1</u>	
INTRODUÇÃO.....	1
 <u>CAPÍTULO 2</u>	
2. O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	3
2.1 A EQUAÇÃO DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	4
2.2 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	5
2.3 COORDENADAS DE UM PONTO DA ELIPSE MERIDIANA EM FUNÇÃO DE UMA DAS LATITUDES. RELAÇÕES ENTRE AS LATITUDES.....	9
2.4 SEÇÕES NORMAIS PRINCIPAIS E OS SEUS RESPECTIVOS RAIOS DE CURVATURA.....	11
2.5 RETIFICAÇÃO DO ARCO DE MERIDIANO EM FUNÇÃO DA LATITUDE ELIPSÓIDICA, REDUZIDA OU GEOCÊNTRICA.....	14
2.6 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE UM ARCO ELIPSÓIDICO QUE FORMA ÂNGULO $\alpha$ COM O MERIDIANO, CONSIDERANDO A LATITUDE ELIPSÓIDICA OU A LATITUDE REDUZIDA....	17
2.7 FÓRMULA PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO DO MERIDIANO UTILIZANDO A LATITUDE REDUZIDA.....	20
 <u>CAPÍTULO 3</u>	
3. A LINHA GEODÉSICA NO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	23
3.1 O DESENVOLVIMENTO DA LINHA GEODÉSICA SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO....	23
3.2 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DO COMPRIMENTO DA LINHA GEODÉSICA EM FUNÇÃO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA.....	25
3.3 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DO COMPRIMENTO DA LINHA GEODÉSICA EM FUNÇÃO DO AZIMUTE DA MESMA NUM PONTO SOBRE O EQUADOR.....	29
3.4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA GEODÉSICA UTILIZANDO COMO VARIÁVEL A LATITUDE GEODÉSICA TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE DA LINHA DO EQUADOR.....	32

#### CAPÍTULO 4

4.	EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO .....	34
4.1	EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE EM FUNÇÃO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA .....	35
4.2	EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE EM FUNÇÃO DO AZIMUTE EQUATORIAL .....	38

#### CAPÍTULO 5

5.	SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO INVERSO. ....	41
5.1	MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE <u>E</u> QUATORIAL DA GEODÉSICA .....	41
5.2	MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA .....	57
5.3	MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, UTILIZANDO O ALGORÍTMO DE BESSEL, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA .....	68

#### CAPÍTULO 6

6.	SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA GEODÉSICO INVERSO .....	74
6.1	PROGRAMA PRINCIPAL PARA O PROCESSAMENTO DOS DADOS .....	74
6.2	SUBPROGRAMA PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE UM ARCO DE MERIDIANO DE <u>FINIDO</u> POR DOIS PONTOS SITUADOS NO MESMO QUADRANTE .....	77
6.3	SUBPROGRAMAS PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEODÉSICA, AZIMUTE E <u>CONTRA</u> AZIMUTE .....	79
6.3.1	SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE EQUATORIAL .....	79
6.3.2	SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA .....	83
6.3.3	SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, USANDO O ALGORÍTMO DE BESSEL .....	86

#### CAPÍTULO 7

7.	CONCLUSÃO .....	90
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	91



## CAPÍTULO 1

### 1. INTRODUÇÃO

De modo geral, todos os métodos utilizados para a solução do problema geodésico direto e inverso consistem em fazer uma representação do elipsóide de revolução sobre uma outra superfície afim de que haja uma simplificação nos cálculos e nas correções que devem ser efetuadas. As superfícies mais utilizadas para o propósito acima descrito são :

a. PLANA : adotando-se um sistema de projeções conforme, tais como : Mercator, Estereográfica, U.T.M. e outras, sendo realizadas as correções necessárias.

b. ESFÉRICA : tem a vantagem de permitir uma representação bastante ampla. As latitudes, longitudes, distâncias e ângulos não podem ser todos simultaneamente conservados o que faz necessário determinar correções para calcular os verdadeiros valores de alguns dos elementos acima citados. A representação do elipsóide de revolução sobre a esfera é conforme, isto é, conserva os ângulos, mas pode ser usada nas representações não conformes. Podem ser utilizados as seguintes representações do elipsóide sobre a esfera :

1. Representação conforme sobre a esfera isométrica representação esta que conserva unicamente as longitudes. Este método é denominado método da esfera conforme.

2. Representação não conforme sobre a esfera de GAUSS, representação esta que conserva somente as latitudes e longitudes.

3. Representação sobre a esfera de curvatura média em um ponto de latitude  $\phi_0$ . Esta representação modifica latitudes e longitudes mas conserva azimutes e distâncias entre uma faixa de extensão variável paralela à latitude  $\phi_0$ .

4. Representação sobre a esfera circunscrita ao paralelo de latitude média.

5. Representação sobre a esfera de JACOBI. Esta representação conserva os azimutes e modifica as latitudes e as longitudes. Foi introduzida

inicialmente por LEGENDRE e estudada mais tarde por BESSEL e HELMERT. É uma representação especial pelo fato das duas superfícies não se corresponderem ponto por ponto, havendo unicamente uma correspondência biunívoca entre os pontos da linha geodésica sobre o elipsóide e os pontos correspondentes da mesma sobre a esfera. Este método é denominado método da esfera reduzida. Ela possibilita uma formulação exata para a solução do problema em questão, mesmo no caso de grandes distâncias.

Com o advento da geodésia celeste o problema geodésico inverso adquiriu uma grande importância devido ao fato das coordenadas geodésicas poderem ser obtidas via satélite. Sendo conhecidas as coordenadas geodésicas de dois pontos é importante saber qual é o comprimento da geodésica por eles definida e os azimutes da mesma nos referidos pontos. Os pontos cujas coordenadas geodésicas são determinadas por satélites podem estar muito distantes um dos outros, o que exige um método bastante preciso e aplicável a grandes distâncias.

Pelos motivos do problema em questão ser resolvido de maneira eficaz e ser muito interessante na sua formulação matemática nos dedicamos neste trabalho à solução do problema geodésico inverso mediante a representação do elipsóide sobre a esfera.

Com esta finalidade desenvolvemos uma parte que consiste em : caracterizar os elementos e as propriedades do elipsóide de revolução; desenvolver a linha geodésica no elipsóide de revolução e a sua formulação matemática; apresentar de maneira bastante minudente o desenvolvimento teórico de algumas fórmulas que solucionam o problema em questão.

Numa segunda parte, nos preocupamos com a solução numérica do problema fazendo o empenho de elaborar alguns programas codificados em Linguagem FORTRAN IV que poderão ser utilizados ou mesmo aperfeiçoados.

## CAPÍTULO 2

### 2. O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Para a solução do problema geodésico direto e inverso é necessário que adotemos uma superfície que represente a forma da Terra. As medidas geodésicas são efetuadas sobre a superfície física da Terra, ou superfície topográfica. Sendo esta superfície extremamente complexa torna-se impossível obter relações matemáticas simples entre os elementos geodésicos tais como entre as coordenadas de dois pontos e a distância entre os mesmos, devido a infinidade de parâmetros envolvidos. Uma possível superfície seria aquela que se caracteriza por ser, em todos os seus pontos, normal à direção da gravidade e que coincidisse com o nível médio dos mares prolongado através dos continentes. Esta superfície é uma superfície equipotencial terrestre, mais conhecida por geóide. Por causa das deficiências e dos excessos de massa no interior terrestre a forma do geóide é irregular podendo ser determinada aproximadamente. Como acontece com a superfície física o geóide é um modelo matemático inconveniente para o cálculo, pelo fato de necessitar de infinitos parâmetros para ser bem definido. Se o achatamento terrestre ( $f$ ) fosse suficientemente pequeno, uma superfície esférica seria o modelo matemático ideal para representar a forma da Terra, devido ser definida por um único parâmetro, seu raio. Como isto não acontece, abandonamos tal superfície. Portanto um modelo a ser adotado deve ser o bastante simples afim de que os cálculos possam ser conduzidos sem muita dificuldade, mas deve ser o mais representativo possível da superfície em questão. NEWTON fazendo um estudo científico da forma que deve ter a Terra levando em consideração o campo gravífico, concluiu que a forma mais adequada seria a de um esferóide definido por uma massa fluida homogênea que gira com velocidade angular uniforme, isto é, o elipsóide de revolução. Sendo assim, o modelo adotado para representar a forma terrestre é o elipsóide de revolução, apresentando as vantagens de não produzir desvios muito grandes da realidade em consideração com o tamanho da Terra e ao mesmo tempo ser definido por dois parâmetros, semi-eixo maior e excentricidade. Mais recentemente fala-se na representação da superfície terrestre por meio da utilização de

um elipsóide triaxial, isto é, um elipsóide com três eixos desiguais, o que implica na necessidade de três parâmetros afim de defini-lo matematicamente e um quarto parâmetro para definir a direção do eixo maior.

## 2.1 A EQUAÇÃO DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

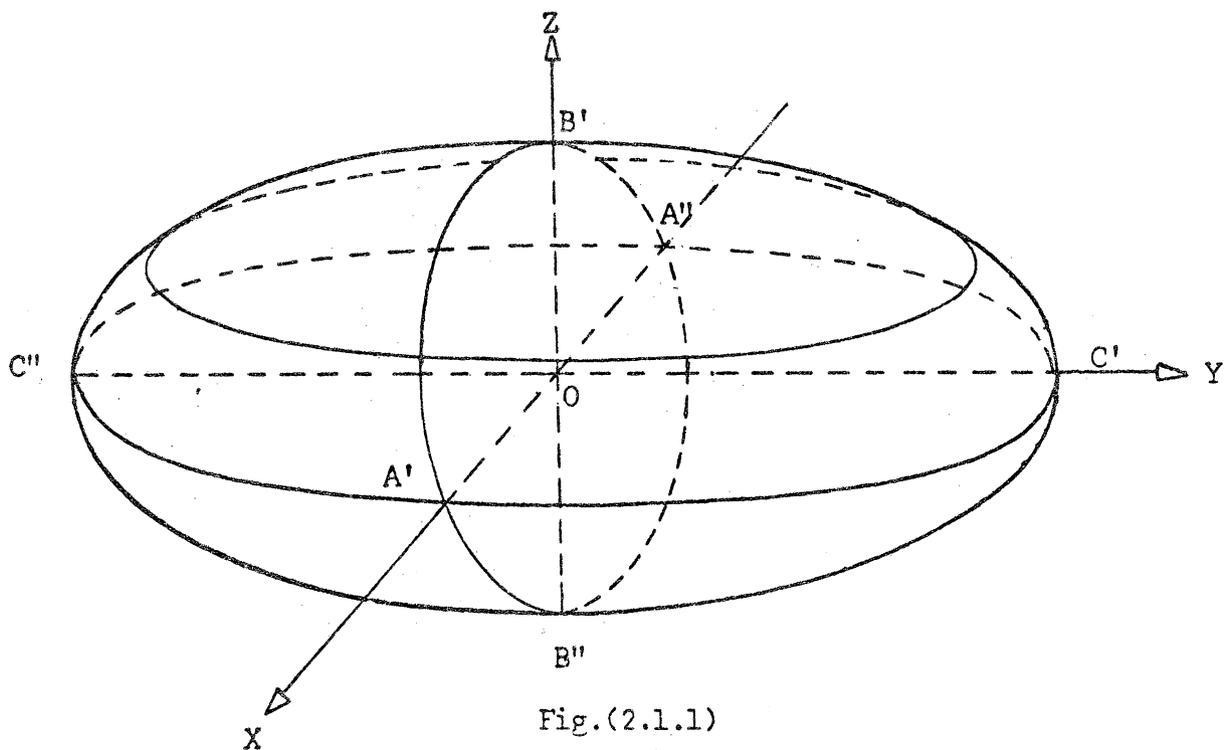
Consideremos a quádrlica cêntrica dada pela equação

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{c^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.1)$$

Quando todos os sinais forem positivos; a eq.(2.1.1) toma a seguinte forma

$$+ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.2)$$

a qual é a equação de um elipsóide escaleno com centro na origem do sistema cartesiano considerado, fig.(2.1.1).



A análise da eq. (2.1.2) nos mostra que:

- a) as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem assumir os valores dos intervalos  $-a \leq x \leq a$ ,  $-c \leq y \leq c$  e  $-b \leq z \leq b$ .
- b) as seções determinadas pelos planos coordenados  $Z = 0$ ,  $Y = 0$  e  $X = 0$  são

elipses dadas pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

c) A superfície é simétrica em relação a cada um dos planos coordenados, a cada eixo e à origem.

d) A seção produzida por um plano paralelo ao plano  $Z = 0$ , por  $Z = d$  é dada pela equação

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{b^2 - d^2} + \frac{\frac{y^2}{c^2}}{b^2 - d^2} = 1 \quad (2.1.3)$$

a qual representa uma elipse. De maneira análoga, verificamos que as seções produzidas por planos paralelos aos demais planos coordenados também são elipses. Quando fizermos na eq.(2.1.2)  $a = c$ , a seção será uma circunferência para todos os valores de  $d$  que satisfaçam a condição  $-b < d < b$ : teremos então um elipsóide de revolução. Impondo a condição  $a > b$ , podemos dizer que o elipsóide de revolução achatado é a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno do eixo  $Z$ , e matematicamente é definida pela equação

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1.4)$$

sendo  $a$  e  $b$  respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor.

## 2.2 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Sendo o elipsóide o modelo utilizado para representar a forma da Terra, devemos saber quais são os seus elementos geométricos e as relações que possuem entre si. Decorre da eq.(2.1.4) que toda a seção produzida por plano que passe pelo eixo  $Z$  será uma elipse de semi-eixo maior  $a$  e semi

eixo menor  $b$ . Deste modo, qualquer relação válida para uma seção assim obtida será válida para as demais e portanto válida para o elipsóide de revolução. Por conseguinte podemos tomar qualquer seção e estudá-la. A seção produzida pelo plano  $X = 0$  na superfície representada pela eq. (2.1.4) é uma elipse, fig. (2.2.1), dada pela equação

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.2.1)$$

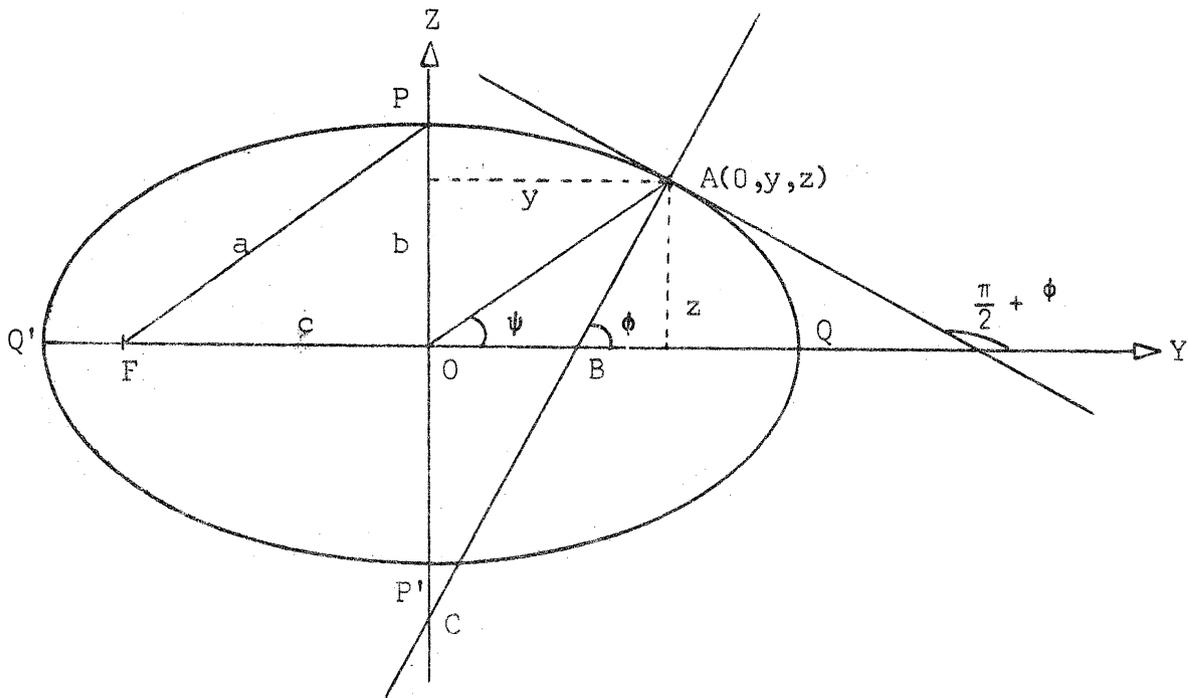


Fig. (2.2.1)

sendo, na fig. (2.2.1),  $c$  a semi-distância focal e  $O$  o centro da elipse.

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

a) Primeira excentricidade ( $e$ ) - é a razão entre a distância focal e o eixo maior da elipse.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a} \quad (2.2.2)$$

Da identidade acima segue

$$b = a(1 - e^2)^{1/2} \quad (2.2.3)$$

b) Segunda excentricidade ( $\epsilon$ ) - é a razão entre a distância focal e o eixo menor da elipse

$$\epsilon = \frac{c}{b} = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{b} \quad (2.2.4)$$

A partir da identidade (2.2.4) podemos escrever

$$b = \frac{a}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}} \quad (2.2.5)$$

Comparando a eq.(2.2.5) com a eq.(2.2.3) temos as seguintes relações entre a primeira excentricidade e segunda excentricidade:

$$(1 - e^2)(1 + \epsilon^2) = 1 \quad (2.2.6a)$$

$$e^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \quad (2.2.6b)$$

$$\epsilon^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (2.2.6c)$$

c) Achatamento (f) - é a razão entre a diferença dos eixos em módulo e o eixo maior.

$$f = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.2.7)$$

Da identidade (2.2.7) obtemos

$$b = a(1 - f) \quad (2.2.8)$$

Mediante a comparação da eq.(2.2.8) com a eq.(2.2.3) e eq.(2.2.5) segue

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (2.2.9a)$$

$$\epsilon^2 = \frac{2f - f^2}{(1 - f)^2} \quad (2.2.9b)$$

Existe a seguinte relação entre o achatamento e as excentricidades

$$f = \frac{e^2 \epsilon}{e + \epsilon} \quad (2.2.10)$$

Podemos obter a equação do elipsóide em função das excentricidades ou mesmo do achatamento desde que substituamos b na eq.(2.1.4) pelo seu valor dado pela eq.(2.2.3), eq.(2.2.5) ou eq.(2.2.8).

$$(x^2 + y^2)(1 - e^2) + z^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.2.11a)$$

$$x^2 + y^2 + z^2(1 + \epsilon^2) = a^2 \quad (2.2.11b)$$

$$(x^2 + y^2)(1 - f)^2 + z^2 = a^2(1 - f)^2 \quad (2.2.11c)$$

d) Latitude Elipsóidica, Geocêntrica e Reduzida

Seja  $A$  um ponto pertencente ao elipsóide de revolução, fig.(2.2.1). A normal ao elipsóide em  $A$  é a bissetriz do ângulo formado pelos raios focais deste ponto. Os segmentos  $\overline{AB} = N'$  e  $\overline{AC} = N$  determinados sobre a normal pelo plano  $Z = 0$  e pela intersecção da normal com o eixo  $Z$  são denominados respectivamente pequena normal e grande normal.

Latitude elipsóidica ( $\phi$ ), mais comumente conhecida por latitude geodésica, é o ângulo que a normal ao elipsóide no ponto  $A$  forma com a sua projeção sobre o plano equatorial ( $Z = 0$ ). Se a projeção da normal ao elipsóide sobre o plano  $Z = 0$  for um ponto, então  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

A tangente ao elipsóide em  $A$  é a bissetriz do ângulo formado por um raio focal e o prolongamento do outro no referido ponto. Se a normal à superfície elipsóidica, num ponto  $A$ , forma com o plano equatorial um ângulo  $\phi$ , então a tangente no mesmo ponto formará um ângulo igual a  $\frac{\pi}{2} + \phi$  com o mesmo plano.

Latitude geocêntrica ( $\psi$ ) do ponto  $A$  é o complemento do ângulo que o raio vetor deste ponto forma com o eixo  $Z$ .

Consideremos a fig.(2.2.2). Denomina-se circunferência principal de uma elipse de semi-eixo maior  $a$ , a circunferência cujo centro é o centro da elipse e cujo raio é o semi-eixo maior.

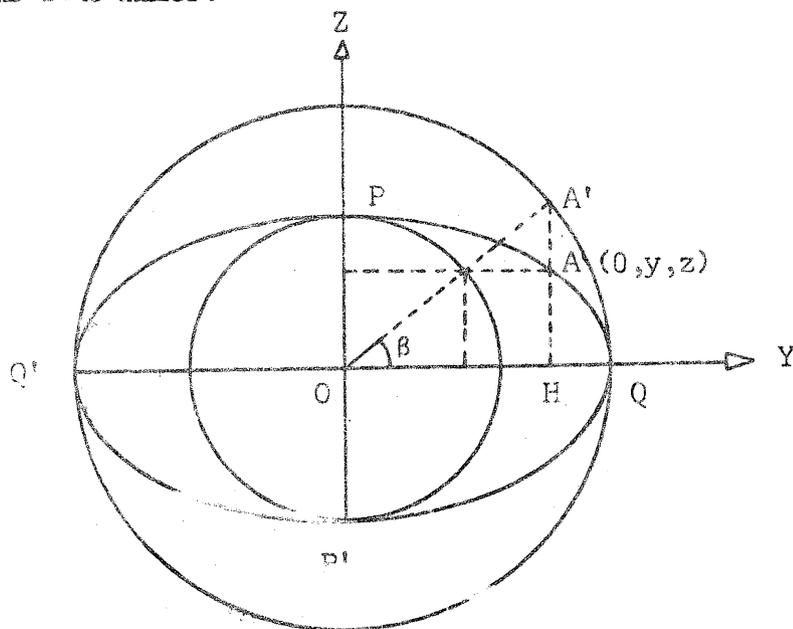


Fig.(2.2.2)

A revolução deste circunferência em torno do eixo Z, nos dá uma superfície esférica tangente ao elipsóide ao longo da linha equatorial. Tal superfície recebe a denominação particular "esfera reduzida" ou "esfera de JACOBI". Fazemos corresponder a cada ponto A da superfície elipsóidica um ponto A' da esfera reduzida mediante o prolongamento da ordenada de A. Verifica-se de imediato que existe entre os pontos das duas superfícies em questão uma razão de afinidade:

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HA'}} = \frac{b}{a} = (1 - e^2)^{1/2} \quad (2.2.12)$$

Latitude reduzida ( $\beta$ ) é o complemento do ângulo formado pela reta suporte do segmento  $\overline{OA'}$  e o eixo Z.

### 2.3 COORDENADAS DE UM PONTO DA ELIPSE MERIDIANA EM FUNÇÃO DE UMA DAS LATITUDES. RELAÇÕES ENTRE AS LATITUDES

As coordenadas do ponto A, fig.(2.2.1), em função da latitude geocêntrica são:

$$y = \overline{OA} \cdot \cos\psi \quad (2.3.1a)$$

$$z = \overline{OA} \cdot \sen\psi \quad (2.3.1b)$$

Observando a fig.(2.2.2), obtemos as coordenadas do ponto A em função da latitude reduzida:

$$y = a \cdot \cos\beta \quad (2.3.2a)$$

$$z = b \cdot \sen\beta \quad (2.3.2b)$$

Das equações (2.3.1) e (2.3.2) obtemos a relação entre as latitudes reduzida e geocêntrica:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg}\beta = \frac{z}{y} \quad (2.3.3)$$

Para a obtenção das coordenadas considerando a latitude elipsóidica, derivemos a eq.(2.2.1) :

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{y}{z} \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad (2.3.4)$$

sendo  $\frac{dz}{dy}$  a tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica

à curva no ponto A e o eixo Y temos

$$z = y \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.5)$$

Substituindo a eq.(2.3.5) na eq.(2.2.1) e lembrando que  $b^2 = a^2(1 - e^2)$  segue

$$y^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi} = \frac{a^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}$$

de onde concluímos que

$$y = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3.6)$$

Substituindo na eq.(2.2.1) o valor de y dado pela eq.(2.3.6), e fazendo algumas simplificações obtemos

$$z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.3.7)$$

Dividindo membro a membro a eq.(2.3.7) e eq.(2.3.6)

$$\frac{z}{y} = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.8)$$

Comparando a eq.(2.3.8) e eq.(2.3.3) temos

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi \quad (2.3.9)$$

A partir da expressão (2.3.9) podemos obter as relações abaixo

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2) \operatorname{tg} \phi = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \beta \quad (2.3.10a)$$

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{(1 - e^2) \operatorname{sen} \phi}{[1 + (e^4 - 2e^2) \operatorname{sen}^2 \phi]^{1/2}} = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} \beta}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \beta)^{1/2}} \quad (2.3.10b)$$

$$\operatorname{cos} \psi = \frac{\operatorname{sen} \phi}{[1 + (e^4 - 2e^2) \operatorname{sen}^2 \phi]^{1/2}} = \frac{\operatorname{cos} \beta}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \beta)^{1/2}} \quad (2.3.10c)$$

$$\operatorname{tg}\beta = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\phi \quad (2.3.11a)$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (2.3.11b)$$

$$\operatorname{cos}\beta = \frac{\operatorname{cos}\phi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (2.3.11c)$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{tg}\beta}{(1 - e^2)^{1/2}} = (1 + e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\beta \quad (2.3.12a)$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{sen}\beta}{(1 - e^2 \operatorname{cos}^2\beta)^{1/2}} = \frac{(1 + e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\beta}{(1 + e^2 \operatorname{sen}^2\beta)^{1/2}} \quad (2.3.12b)$$

$$\operatorname{cos}\phi = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{cos}\beta}{(1 - e^2 \operatorname{cos}^2\beta)^{1/2}} = \frac{\operatorname{cos}\beta}{(1 + e^2 \operatorname{sen}^2\beta)^{1/2}} \quad (2.3.12c)$$

Com os elementos já definidos podem ser obtidos em função das coordenadas do ponto A, os comprimentos  $\overline{AC} = N$  e  $\overline{AB} = N'$  fig.(2.2.1).

$$y = N \operatorname{cos}\phi$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (2.3.13)$$

$$z = N' \operatorname{sen}\phi$$

$$N' = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (2.3.14)$$

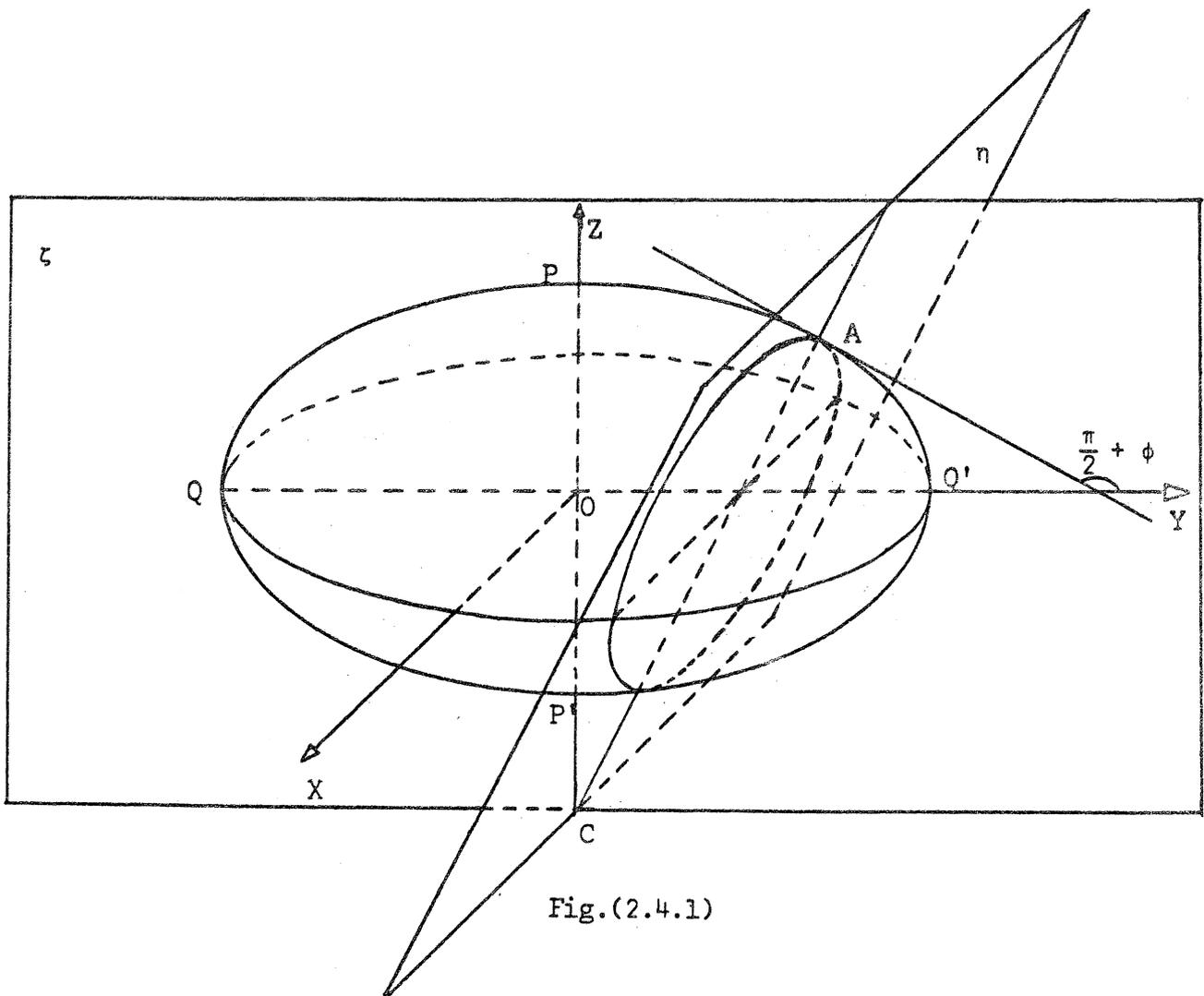
Comparando estas expressões temos  $N' = N(1 - e^2)$ .

#### 2.4 SEÇÕES NORMAIS PRINCIPAIS E OS SEUS RESPECTIVOS RAIOS DE CURVATURA

Podemos traçar infinitos planos que contenham a reta normal à superfície do elipsóide num ponto A da mesma. Estes planos por conterem a reta normal à superfície em questão são conhecidos por pla-

nos normais. As curvas resultantes da intersecção dos planos normais com a superfície do elipsóide de revolução são chamadas de seções normais. Em cada ponto existem duas seções normais que são mutuamente perpendiculares e cujas curvaturas são máxima e mínima. Estas seções são conhecidas por seções normais principais. Demonstra-se que estas seções são a seção meridiana e a seção primeiro vertical [5].

A fig.(2.4.1) é a representação das seções normais principais produzidas por dois planos perpendiculares  $\zeta$  e  $\eta$  que passam pela normal à superfície do elipsóide de revolução definido pela eq.(2.1.4). A seção produzida pelo plano  $X = 0$ , particularmente  $\zeta$ , é denominada seção normal principal meridiana. A seção produzida pelo plano  $Ay + Bz + C = 0$ , particularmente  $\eta$ , é denominada seção normal principal primeiro vertical.



A curvatura da seção meridiana, quando a equação da mesma é dada em coordenadas retangulares é obtida através da fórmula geral da curvatura dada por :

$$K = \frac{\frac{d^2z}{dy^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.4.1)$$

A equação da elipse meridiana em coordenadas retangulares é dada pela eq.(2.2.1)

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2. \quad (2.4.2)$$

As derivadas de primeira e segunda ordem da eq.(2.4.2) são

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{y}{z} \quad (2.4.3a)$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = - \frac{b^4}{a^2z^3} \quad (2.4.3b)$$

Substituindo estas equações na fórmula (2.4.1), e lembrando que  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , obtemos a expressão da curvatura do meridiano em função das coordenadas retangulares:

$$K = - \frac{a^2(1 - e^2)^2}{\left[z^2 + (1 - e^2)^2y^2\right]^{3/2}} \quad (2.4.4)$$

Substituindo na fórmula (2.4.4) os valores de  $y$  e  $z$  dados pela eq.(2.3.5) e eq.(2.3.6) obtemos a curvatura em função da latitude elipsoidal:

$$K = - \frac{(1 - e^2\text{sen}^2\phi)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \quad (2.4.5)$$

sendo que o único significado do sinal é indicar a direção da curvatura.

Sabemos que o raio de curvatura num ponto de uma curva é igual ao recíproco da curvatura nesse ponto; portanto o raio de curvatura da seção meridiana é

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\text{sen}^2\phi)^{3/2}} \quad (2.4.6)$$

Afim de determinar o raio de curvatura no primeiro vertical notemos que se a se

ção é normal, então a seção produzida por um plano paralelo a  $XY$  que passa por  $A$  está inclinada em relação à primeira, uma vez que a reta normal à 1a. seção não está no plano da 2a. seção. No ponto  $A$ , demonstra-se, que ambas as seções tem uma tangente comum, a bi-normal [14]. Assim sendo, podemos fazer uso do teorema de MEUSNIER : Se por um ponto  $A$  sobre uma superfície são traçadas duas seções, uma delas normal e a outra inclinada e se ambas as seções tem uma tangente comum neste ponto, então o raio de curvatura da seção inclinada será igual ao raio de curvatura da seção normal multiplicada pelo co-seno do ângulo formado pelas seções.

O ângulo formado pelo plano  $z = Z$ , paralelo a  $XY$  que passa por  $A$ , com o primeiro vertical é igual a latitude elipsóidica  $\phi$ . Como consequência o raio de curvatura  $r$  do paralelo de latitude  $\phi$  é determinado a partir do raio de curvatura  $\rho$  do primeiro vertical e expresso mediante a fórmula

$$r = \rho \cos \phi \quad (2.4.7)$$

Mas o raio de curvatura  $r$  do paralelo de latitude  $\phi$  que passa por  $A$  é igual à coordenada  $y$  do ponto  $A$ , fig.(2.2.1), e é dado pela eq.(2.3.6), logo

$$r = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.4.8)$$

A partir da eq.(2.4.8) e eq.(2.4.7) conclui-se que

$$\rho = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.4.9)$$

Comparando a eq.(2.4.9) com a eq.(2.3.13), verifica-se de pronto que o raio de curvatura da seção principal primeiro vertical  $\rho$  é igual à grande normal  $N$  e assim escrevemos a fórmula geral para o raio de curvatura da seção primeiro vertical [7] :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.4.10)$$

## 2.5 RETIFICAÇÃO DO ARCO DE MERIDIANO EM FUNÇÃO DA LATITUDE ELIPSÓIDICA, REDUZIDA OU GEOCÊNTRICA

O comprimento de uma curva qualquer é definido como o limite da soma dos comprimentos dos segmentos de reta quando o número de pontos de divisão tende ao infinito de modo tal que o comprimento de cada segmento tende a zero.

Exprimindo o conceito acima analiticamente obtemos o comprimento diferencial do arco de meridiano desde que seja conhecida a equação da curva. Para uma curva dada em coordenadas retangulares, o comprimento diferencial  $dm$  de um arco será

$$dm = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} dy \quad (2.5.1)$$

Caso a curva seja dada por equações paramétricas tais como  $y = y(\phi)$  e  $z = z(\phi)$  podemos escrever a eq.(2.5.1) assim

$$dm = (dy^2 + dz^2)^{1/2} \quad (2.5.2)$$

Se considerarmos a elipse meridiana produzida pela seção do plano  $X = 0$  na superfície representada pela eq.(2.1.4), então temos a eq.(2.2.1) para representar a curva. A forma paramétrica desta curva em função da latitude elipsóidica é

$$y = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.5.3a)$$

$$z = \frac{a \sin \phi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (2.5.3b)$$

Diferenciando estas equações em relação a variável  $\phi$  temos :

$$dy = - \frac{a \sin \phi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \quad (2.5.4a)$$

$$dz = \frac{a \cos \phi (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \quad (2.5.4b)$$

Substituindo a eq.(2.5.4) na eq.(2.5.2) obtemos para o comprimento diferencial do meridiano a equação

$$dm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi = M d\phi \quad (2.5.5)$$

Deste modo a retificação do arco de meridiano reduz-se a avaliação de uma integral elíptica de primeira espécie.

Para expressar  $dm$  em função da latitude reduzida consideremos a eq.(2.3.12a).

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1}{(1 - e^2)^{1/2}} \operatorname{tg} \beta$$

cuja diferencial é

$$d\phi = (1 - e^2)^{-1/2} \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \beta} d\beta$$

mas de acordo com a eq.(2.3.12c)

$$\cos^2 \phi = \frac{(1 - e^2) \cos^2 \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta}$$

por esta razão

$$d\phi = (1 - e^2)^{-1/2} \cdot \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta \quad (2.5.6)$$

Mediante substituição da eq.(2.5.6) e eq.(2.3.12b) na eq.(2.5.5) temos :

$$dm = \frac{a(1 - e^2)}{\left[1 - \frac{e^2 \sin^2 \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta}\right]^{3/2}} \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta$$

que simplificada resulta

$$dm = a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\beta \quad (2.5.7)$$

que é a equação da retificação do arco de meridiano na variável latitude reduzida. Novamente, a retificação do arco de meridiano consiste em avaliar uma integral elíptica de primeira espécie. Um outro método de obtenção da eq.(2.5.7)

consiste em tomar as variáveis na forma paramétrica em função da latitude reduzida

$$y = a \cos\beta \quad (2.5.8a)$$

$$z = b \operatorname{sen}\beta \quad (2.5.8b)$$

cujas diferenciais são

$$dy = -a \operatorname{sen}\beta \, d\beta \quad (2.5.9a)$$

$$dz = b \cos\beta \, d\beta \quad (2.5.9b)$$

e introduzir na eq.(2.5.2).

Analogamente podemos retificar o arco de meridiano considerando como variável a latitude geocêntrica

$$dm = a(1 - e^2)^2 \frac{[1 + (e^4 - 2e^2) \cos^2\psi]^{1/2}}{[1 - e^2 + (e^4 - e^2) \cos^2\psi]^{3/2}} d\psi \quad (2.5.10)$$

Para retificar o arco de meridiano basta integrar a eq.(2.5.5) , eq. (2.5.7) ou mesmo a eq.(2.5.10). A integração é realizada após o desenvolvimento destas equações em séries de potências, devido ao fato que estas diferenciais não dão origem a integrais imediatas.

## 2.6 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE UM ARCO ELIPSÓIDICO

QUE FORMA ÂNGULO  $\alpha$  COM O MERIDIANO; CONSIDERANDO A LATITUDE ELIPSÓIDICA OU A LATITUDE REDUZIDA

A retificação de arco de uma curva reversa, quando as coordenadas retangulares da mesma são dadas por equações paramétricas  $x = x(\phi, L)$  ;  $y = y(\phi, L)$  e  $z = z(\phi, L)$  , é realizada através da fórmula diferencial

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.6.1)$$

Para determinarmos uma expressão geral de  $ds$ , relativa à superfície elipsóidica, consideremos um sistema cartesiano  $XYZ$  de origem coincidente com o ponto de simetria da superfície em questão e tomemos um ponto  $A(x, y, z)$  sobre a superfície, de acordo com a fig.(2.6.1).

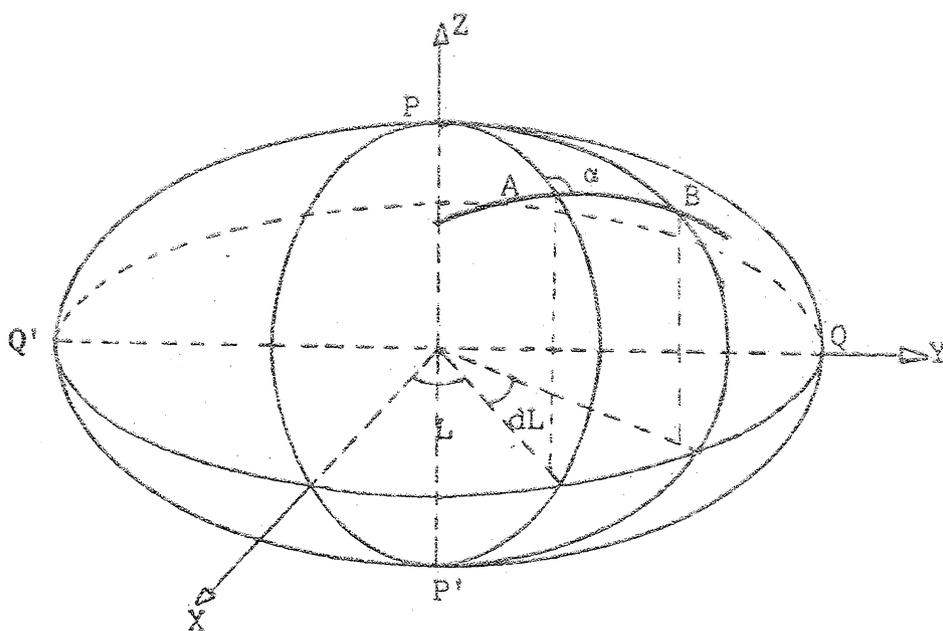


Fig.(2.6.1)

A projeção ortogonal da normal sobre o plano equatorial XY forma com o eixo X um ângulo  $L$ , que se chamará longitude caso o meridiano que contém o eixo X seja o de GREENWICH.

Expressemos as coordenadas do ponto A na forma paramétrica em função da latitude elipsoidal  $\phi$  e do ângulo  $L$ .

$$x = \frac{a \cos\phi \cos L}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2}}$$

$$y = \frac{a \cos\phi \sin L}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2}} \tag{2.6.2}$$

$$z = \frac{a(1 - e^2) \sin\phi}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2}}$$

substituindo as diferenciais totais da eq.(2.6.2) na fórmula diferencial (2.6.1) obtemos

$$ds^2 = M^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2\phi dL^2 \tag{2.6.3}$$

A eq.(2.6.3) nos mostra que o quadrado do comprimento de um arco elementar sobre o elipsóide é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos arcos elementares

de meridiano e de paralelo.

As coordenadas paramétricas do ponto A em função da latitude reduzida são

$$\begin{aligned}x &= a \cos\beta \cos L \\y &= a \cos\beta \sin L \\z &= b \sin\beta\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

Substituindo as diferenciais totais da eq.(2.6.4) na fórmula diferencial da eq. (2.6.1) obtemos

$$ds^2 = a^2(1 - e^2 \cos^2\beta) d\beta^2 + a^2 \cos^2\beta dL^2\tag{2.6.5}$$

A eq.(2.6.3) e eq.(2.6.5) nos dão o comprimento de um arco elementar sobre o elipsóide de revolução. Por intermédio destas equações podemos relacionar o comprimento  $ds$  com o ângulo que a curva forma com o meridiano. Para isto nos valemos da propriedade : Se  $x = x(\phi, L)$ ,  $y = y(\phi, L)$  e  $z = z(\phi, L)$  são equações paramétricas de uma superfície, então o elemento linear da curva plana é dado pela fórmula fundamental [1].

$$ds^2 = E d\phi^2 + 2F d\phi dL + G dL^2\tag{2.6.6}$$

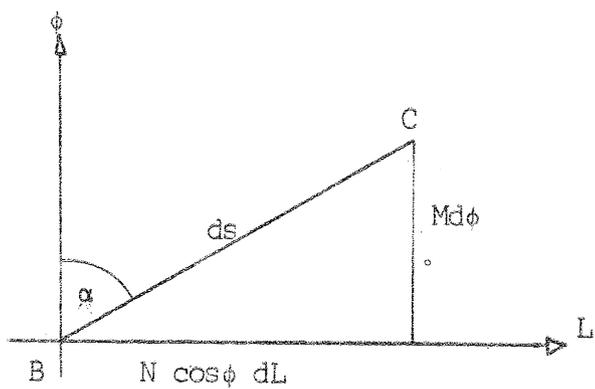
onde  $\phi$  e  $L$  são os eixos cartesianos do plano em que o elemento linear da curva está definido,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são as grandezas fundamentais obtidas a partir das diferenciais totais de cada variável em função dos seus parâmetros.

Caso a grandeza fundamental  $F$  seja identicamente nula os eixos cartesianos  $\phi$  e  $L$  serão ortogonais. Para que este sistema cartesiano não seja somente um ponto deve satisfazer a condição  $EG - F^2 > 0$ .

Comparando os coeficientes da eq.(2.6.3) com os coeficientes da eq. (2.6.6) obtemos as grandezas fundamentais

$$\begin{aligned}E &= M^2 \\F &= 0 \\G &= N^2 \cos^2\phi\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

verificamos assim que os eixos  $\phi$  e  $L$  são ortogonais; desta maneira podemos, a partir do triângulo diferencial fig.(2.6.2), obter para uma curva qualquer sobre o elipsóide de revolução as relações:



$$\cos \alpha \, ds = M d\phi \quad (2.6.8)$$

$$\sin \alpha \, ds = N \cos \phi \, dL \quad (2.6.9)$$

Fig. (2.6.2)

De maneira análoga concluímos que os eixos  $\beta$  e  $L$  são ortogonais, sendo que o triângulo diferencial fig. (2.6.3) nos dá as relações:

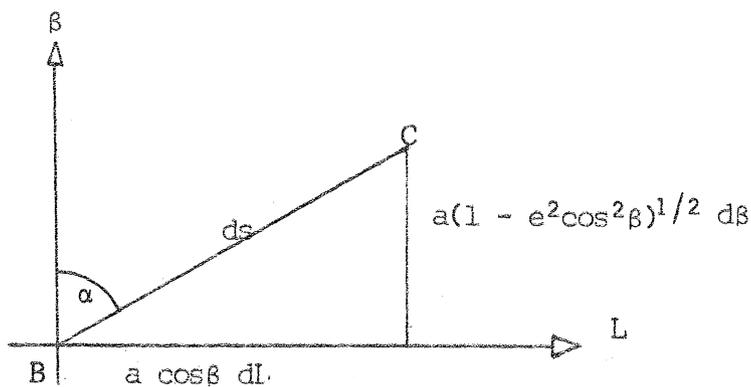


Fig. (2.6.3)

$$\cos \alpha \, ds = a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} \, d\beta \quad (2.6.10)$$

$$\sin \alpha \, ds = a \cos \beta \, dL \quad (2.6.11)$$

## 2.7 FÓRMULA PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO

### DO MERIDIANO UTILIZANDO A LATITUDE REDUZIDA

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  dois pontos pertencentes a uma mesma elipse meridiana e definidos respectivamente por suas latitudes elispóidicas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , fig. (2.7.1).

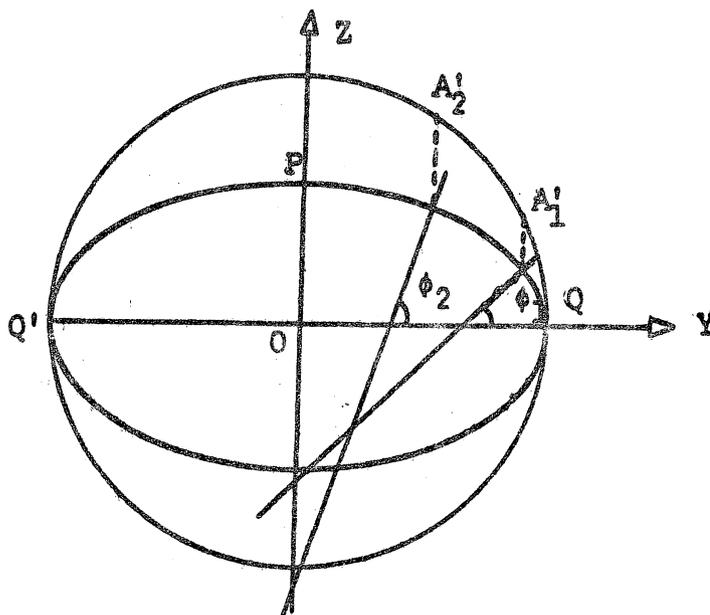


Fig.(2.7.1)

Os pontos acima citados determinam um arco de meridiano. A fim de calcular o comprimento deste arco utilizando as latitudes reduzidas,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , correspondentes as respectivas latitudes elipsóidicas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , utilizemos a eq.(2.5.7):

$$dm = a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\beta \quad (2.7.1)$$

O comprimento do arco de meridiano será dado mediante a integração da eq.(2.7.1) no intervalo  $[\beta_1, \beta_2]$ . Assim sendo temos :

$$m = a \int (1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\beta \quad (2.7.2)$$

Como a eq.(2.7.2) é uma integral elíptica fortemente convergente, para calculá-la desenvolvemos o integrando em série de potências, do seguinte modo :

$$m = a \left\{ W_0 - \frac{e^2}{2} W_2 - \frac{e^4}{8} W_4 - \frac{e^6}{16} W_6 - \frac{5e^8}{128} W_8 - \frac{7e^{10}}{256} W_{10} \dots \right\} \quad (2.7.3)$$

onde  $W_{2p}$  são as integrais de WALLIS, assim definidas:

$$W_{2p} = \int \cos^{2p} \beta d\beta$$

Calculando as integrais do tipo  $W_{2p}$  obtemos:

$$m = a \left\{ A_0 \beta + A_1 \sin \beta \cos \beta_m + A_2 \sin 2\beta \cos 2\beta_m + A_3 \sin 3\beta \cos 3\beta_m + \dots \right\} \quad (2.7.4)$$

onde

$$\beta = \beta_2 - \beta_1$$

$$\beta_m = \beta_2 + \beta_1$$

sendo os coeficientes  $A_{2p}$ ,  $p = 0,1,2,\dots$  expressos em função da primeira excentricidade e dados a seguir :

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \frac{175}{16384} e^8 - \frac{441}{65536} e^{10} - \dots$$

$$A_1 = -\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{16} e^4 - \frac{15}{512} e^6 - \frac{35}{2048} e^8 - \frac{735}{65536} e^{10} - \dots$$

$$A_2 = -\frac{1}{128} e^4 - \frac{3}{512} e^6 - \frac{35}{8192} e^8 - \frac{105}{32768} e^{10} - \dots$$

$$A_3 = -\frac{1}{96} e^6 - \frac{5}{6144} e^8 - \frac{105}{131072} e^{10} - \dots \quad (2.7.4a)$$

$$A_4 = -\frac{5}{65536} e^8 - \frac{35}{262144} e^{10} - \dots$$

$$A_5 = -\frac{7}{655360} e^{10} - \dots$$

.....

## CAPÍTULO 3

### 3. A LINHA GEODÉSICA NO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

A solução do problema geodésico direto e inverso requer o desenvolvimento da linha geodésica sobre o elipsóide de revolução na forma diferencial em função de ângulos e distâncias que podem ser determinados preliminarmente. As expressões necessárias para este desenvolvimento são obtidas mediante um relacionamento dos elementos definidores da superfície de revolução considerada.

Nas superfícies de curvatura positiva, tal como o elipsóide de revolução, a linha geodésica caracteriza-se pela coincidência de sua normal principal com a normal de superfície [1]. Baseada nesta propriedade, resultou para a linha geodésica uma equação diferencial de segunda ordem para a qual, nas superfícies de revolução corresponde uma integral elíptica de primeira espécie, expressa mediante o teorema de CLAIRAUT [14] :

$$r \operatorname{sen} \alpha = \text{const} \quad (3.1)$$

onde  $r$  é o raio do paralelo e  $\alpha$  é o azimute do elemento linear no ponto considerado. Na eq.(3.1) está contido tudo aquilo que se pode dizer sobre a linha geodésica numa superfície de revolução.

#### 3.1 O DESENVOLVIMENTO DA LINHA GEODÉSICA SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Examinemos as consequências do teorema de CLAIRAUT

$$r \operatorname{sen} \alpha = \text{const} \quad (3.1.1)$$

De acordo com a eq.(2.4.8) temos :

$$r = a \cos \beta = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} \cos \phi \quad (3.1.2)$$

então de acordo com a eq.(3.1.1) segue :

$$a \cdot \cos \beta \operatorname{sen} \alpha = \text{const} \quad (3.1.3)$$

ou

$$\frac{a \cdot \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \cdot \operatorname{sen} \alpha = \text{const}$$

Para dois pontos quaisquer  $A_i$  e  $A_{i+1}$  da linha geodésica podemos escrever

$$\cos \beta_i \operatorname{sen} \alpha_i = \cos \beta_{i+1} \operatorname{sen} \alpha_{i+1}$$

ou

(3.1.4)

$$\frac{\cos \phi_i}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_i)^{1/2}} \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{\cos \phi_{i+1}}{(1 - e^2 \sin^2 \phi_{i+1})^{1/2}} \operatorname{sen} \alpha_{i+1}$$

A diferencial de (3.1.3) em relação a  $s$  é dada por

$$\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \frac{d\beta}{ds} - \cos \beta \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds} = 0 \quad (3.1.5)$$

Mas sabemos que :

$$\cos \alpha ds = a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\beta$$

Deste modo obtemos a seguinte relação entre o elemento de arco  $d\beta$  e o elemento linear  $ds$  :

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\cos \alpha}{a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}} \quad (3.1.6)$$

Substituindo a eq.(3.1.6) na eq.(3.1.5) vem

$$\frac{d\alpha}{ds} = \operatorname{tg} \beta \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}} \quad (3.1.7)$$

A eq.(3.1.3) dá-nos em conexão com a eq.(3.1.7) o desenvolvimento da linha geodésica sobre o elipsóide de revolução. Suponhamos uma linha geodésica de azimute ( $0 < \alpha < \pi / 2$ ) que parta de um ponto no equador. Para este ponto a latitude reduzida  $\beta$  é nula, logo o azimute  $\alpha$  da geodésica no equador será :

$$\cos \beta \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \text{const} \quad (3.1.8)$$

seguindo o percurso da mesma, a latitude reduzida aumentará, do mesmo modo o azimute  $\alpha$ , como indica a eq.(3.1.3).

Portanto  $\text{sen}\alpha$  aumenta até  $\text{sen}\alpha_0$  ser igual a unidade num determinado ponto  $A_0$ , sendo que neste ponto a linha geodésica possui latitude reduzida  $\beta_0$  sendo a mesma dada por

$$\cos\beta_0 \text{sen}\frac{\pi}{2} = \cos\beta_0 = \text{const} \quad (3.1.9)$$

Comparando a eq.(3.1.9) com a eq.(3.1.8) concluímos que  $\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$  é a relação entre a latitude reduzida máxima e o azimute equatorial da geodésica. Assim sendo a latitude reduzida alcança em  $A_0$  um máximo. Mas  $\alpha$  continua aumentando, o que leva a linha geodésica a voltar-se para o sul. Da eq.(3.1.3) reconhece-se que ela é simétrica em relação ao meridiano de  $A_0$ ; portanto cruza o equador novamente sob azimute  $\pi - \alpha$ . Ela passa agora para o hemisfério sul;  $\beta$  torna-se negativo; continua desenvolvendo-se até a latitude reduzida ser  $\beta = -\beta_0$  sendo seu azimute  $\alpha$  igual a  $\frac{3\pi}{2}$ . Deste ponto volta-se outra vez para o norte para cruzar outra vez o equador com azimute  $\alpha$ . Agora o desenvolvimento inicia novamente, desenvolvendo-se indefinidamente entre os dois paralelos de latitude reduzida  $\beta_0$  e  $-\beta_0$ , sem jamais coincidir com a linha geodésica anterior. Nas superfícies de revolução, que possuem curvatura positiva, a linha geodésica é a mais curta distância entre dois pontos.

### 3.2 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DO COMPRIMENTO DA LINHA GEODÉSICA EM FUNÇÃO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

Para uma linha geodésica sobre uma superfície de revolução é válida conforme a eq.(3.1.4), a relação

$$\cos\beta \text{sen}\alpha = \cos\beta_1 \text{sen}\alpha_1 \quad (3.2.1)$$

onde  $(\beta, \alpha)$  e  $(\beta_1, \alpha_1)$  são as latitudes reduzidas e os azimutes da mesma para dois pontos D e C, fig.(3.2.1), parte de uma superfície elipsóidica.

Sobre ela destacamos o ponto  $A_0$ , mencionado no parágrafo (3.1), no qual  $\beta$  alcança o seu máximo. Neste ponto temos  $\text{sen}\alpha = 1$  isto é,  $\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  e a latitude reduzida será então  $\beta = \beta_0$ . Podemos escrever :

$$\cos\beta \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\beta_0 = \cos\beta_0 \quad (3.2.2)$$

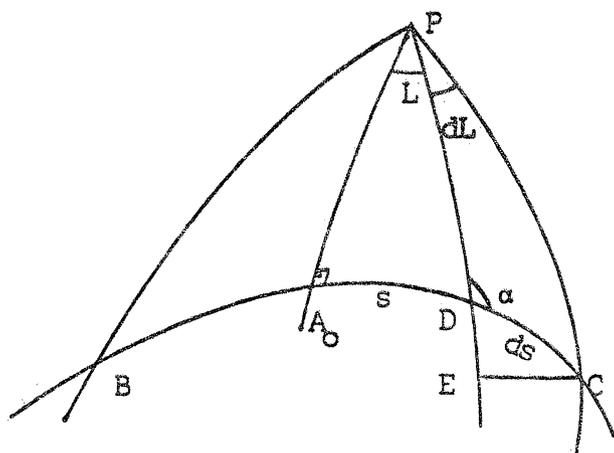


Fig.(3.2.1)

Chamemos de  $s$  o comprimento da linha geodésica de  $A_0$  até  $D$ , de  $L$  a longitude, sendo a mesma positiva à leste de  $A_0$ , e negativa à oeste.

Seja  $C$  um ponto sobre a mesma linha. O comprimento de  $A_0$  até  $C$  é dado por  $(s + ds)$ , a latitude reduzida de  $C$  igual a  $(\beta + d\beta)$  e o azimute de  $DC$  em  $D$  é  $\alpha$ . Do triângulo retângulo elementar  $CDE$ , temos :

$$ds = \frac{DE}{\cos\alpha} \quad (3.2.3)$$

mas o elemento de arco de meridiano é dado por (2.5.7) :

$$dm = a(1 - e^2 \cos^2\beta)^{1/2} d\beta \quad (3.2.4)$$

se substituirmos  $DE$  por  $dm$ , observarmos que  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  e que  $d\beta$  é negativo, obtemos :

$$ds = \frac{a(1 - e^2 \cos^2\beta)^{1/2}}{\cos\alpha} d\beta \quad (3.2.5)$$

Para resolver esta equação diferencial expressemos-la em termos de uma única variável, isto é, expressemos  $\cos\alpha$  em função de  $\cos\beta$  e  $\cos\beta_0$  mediante a eq. (3.2.2).

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= - (1 - \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2} \\ &= \frac{- (\cos^2\beta - \cos^2\beta_0)^{1/2}}{\cos\beta} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

sendo esta expressão sempre real, pois  $\beta < \beta_0$ .

Deste modo obtemos :

$$ds = -a \left( \frac{1 - e^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_0} \right)^{1/2} \cos \beta \, d\beta \quad (3.2.7)$$

Se fizermos em (3.2.7)  $e^2 = 0$ , então obtemos o caso da esfera de raio  $a$ . Observando que na esfera as latitudes geodésicas reduzida e geocêntrica são iguais e que em razão disto o arco de meridiano  $DE$  é igual a  $a d\beta$ , concluímos que para a esfera de raio  $a$ :

$$ds = \frac{-a \cos \beta}{(\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_0)^{1/2}} d\beta \quad (3.2.8)$$

Escolhamos uma esfera auxiliar de raio unitário, esfera de JACOBI, sobre a mesma um ponto  $P$  como polo norte, e sobre um meridiano um ponto  $A$  com latitude  $\beta_0$ . Por  $A$  traçamos em ângulo reto para com o meridiano um círculo máximo  $AD$ .

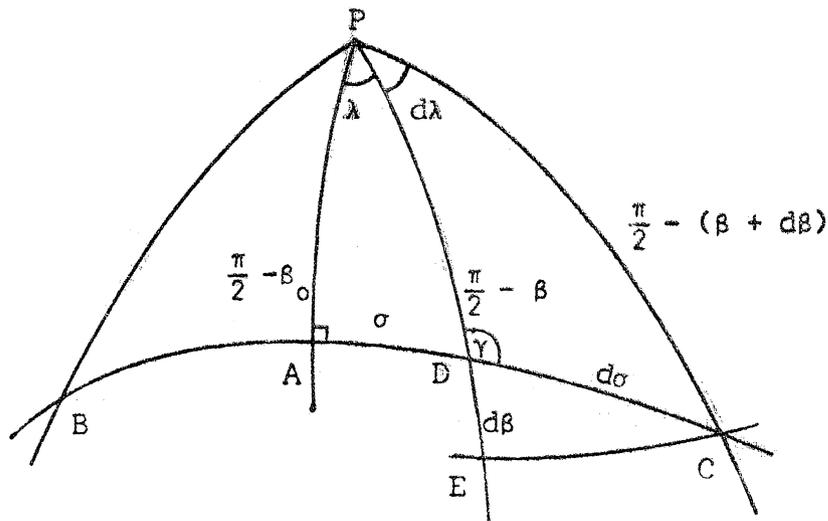


Fig.(3.2.2)

Aplicando a lei dos senos da trigonometria esférica ao triângulo  $ADP$ , temos:

$$\text{sen } \gamma \cos \beta = \cos \beta_0 \quad (3.2.9)$$

Comparando a eq.(3.2.9) com a eq.(3.2.2) concluímos que para  $\beta$  e  $\beta_0$  iguais teremos  $\text{sen } \gamma = \text{sen } \alpha$ , isto é  $\gamma = \alpha$ .

Por meio disto conseguiremos imagem esférica da linha geodésica, a qual se caracteriza pela constante  $\cos \beta_0$ , sendo as latitudes dos pontos idênticas às latitudes reduzidas sobre o elipsóide de revolução, do mesmo modo são os azimutes sobre a esfera iguais aos azimutes sobre o elipsóide conclusão esta que está de acordo com o teorema de DALBY. Como para qualquer superfície de revolução é válida, a equação de CLAIRAUT, para esta imagem esférica também é válida a equação

geral de CLAIRAUT.

Do triângulo esférico elementar DCE obtemos :

$$d\sigma = \frac{d\beta}{\cos\alpha} \quad (3.2.10)$$

que substituído na eq.(3.2.5) resulta

$$ds = a(1 - e^2 \cos^2\beta)^{1/2} d\sigma \quad (3.2.11)$$

Para a solução da eq.(3.2.11) expressemos  $\beta$  em função de  $\beta_0$  e  $\sigma$ , mediante a aplicação da fórmula dos quatro elementos no triângulo esférico ADP

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta_0 \cos\sigma \quad (3.2.12)$$

que substituído na eq.(3.2.11) dá-nos a equação procurada.

$$ds = a \left[ 1 - e^2(1 - \operatorname{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma) \right]^{1/2} d\sigma \quad (3.2.13)$$

Podemos escrever a eq.(3.2.13) de outras maneiras : por exemplo; lembrando que

$$a = \frac{b}{(1 - e^2)^{1/2}}$$

$$1 + e^2 = \frac{1}{1 - e^2}$$

temos

$$ds = b \left[ \frac{1 - e^2(1 - \operatorname{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma)}{1 - e^2} \right]^{1/2} d\sigma$$

ou

$$ds = b(1 + e^2 \operatorname{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma)^{1/2} d\sigma \quad (3.2.14)$$

A eq.(3.2.13) pode tomar a seguinte forma

$$ds = a(1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2} \left[ 1 - \frac{e^2 \operatorname{sen}^2\beta_0 \operatorname{sen}^2\sigma}{1 - e^2 \cos^2\beta_0} \right]^{1/2} d\sigma \quad (3.2.15)$$

A fórmula (3.2.15) torna-se mais simples quando se introduz em lugar da latitude reduzida  $\beta_0$  a latitude geodésica  $\phi_0$  do ponto A.

Sabemos que

$$\operatorname{tg}\phi_0 = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\beta_0 \quad (3.2.16)$$

mediante transformações trigonométricas, encontramos

$$\operatorname{sen}^2 \phi_0 = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} \quad (3.2.17)$$

$$\cos^2 \beta_0 = \frac{\cos^2 \phi_0}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_0}$$

Substituindo a eq.(3.2.17) na eq.(3.2.15) obtemos

$$ds = a \left[ \frac{1 - e^2}{1 - k^2} \right]^{1/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (3.2.18)$$

onde  $k^2 = e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_0$ .

### 3.3 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DO COMPRIMENTO DA LINHA GEODÉSICA EM FUNÇÃO DO AZIMUTE DA MESMA NUM PONTO SOBRE O EQUADOR

Seja o elipsóide de revolução e sua esfera reduzida, circunscrita ao mesmo ao longo do equador. De um ponto A no equador, tracemos duas linhas geodésicas de azimute  $\alpha$ , sendo uma pertencente ao elipsóide e a outra a esfera reduzida. É válida a expressão

$$r \operatorname{sen} \alpha_1 = a \operatorname{sen} \alpha \quad (3.3.1)$$

portanto os azimutes das duas linhas geodésicas pertencentes respectivamente a cada uma das superfícies são iguais quando os raios dos paralelos o são, o que quer dizer que o azimute  $\alpha_1$  da geodésica do elipsóide sobre o paralelo de raio  $r$  é igual ao azimute do círculo máximo da esfera reduzida, sobre o paralelo de raio  $r$ . Portanto os paralelos de mesmo raio de uma e de outra superfície se correspondem pela razão de afinidade entre a circunferência e a elipse que é  $\frac{b}{a}$ , e podemos escrever tanto para o elipsóide quanto para a esfera reduzida:

$$r = a \cos \beta \quad (3.3.2)$$

Portanto, a equação de CLAIRAUT para ambas as superfícies é :

$$\cos \beta \operatorname{sen} \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha \quad (3.3.3)$$

Por conseguinte, se adotarmos como variável descritiva do elipsóide a latitude reduzida  $\beta$ , podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos das geodésicas das duas superfícies, isto é, podemos calcular o comprimento da linha geodésica mediante a sua imagem esférica, já que podemos a priori determinar o azimute  $\alpha$  no equador.

Consideremos a fig.(3.3.1), parte de uma superfície elipsóidica :

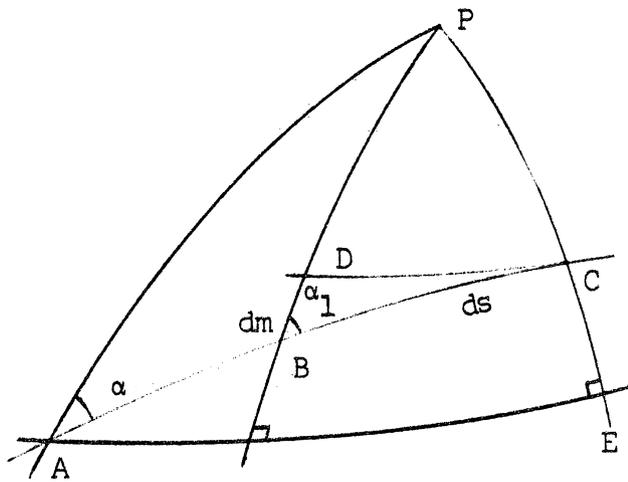


Fig.(3.3.1)

O comprimento da linha geodésica BC é dada por

$$ds = \frac{BD}{\cos\alpha_1} \quad (3.3.4)$$

sendo que a distância BD nada mais é que o comprimento do arco de meridiano.

Evidentemente, o arco BD é igual a  $Md\phi$ ; temos portanto ;

$$ds = \frac{Md\phi}{\cos\alpha_1} \quad (3.3.5)$$

O arco da elipse meridiana  $dm$  é igual a

$$dm = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\phi)^{3/2}} d\phi \quad (3.3.6)$$

fazendo na eq.(3.3.6)  $e^2 = 0$ , verificamos que  $dm$  é igual a  $ad\phi$ , isto é, é o arco contado sobre um círculo máximo da esfera reduzida de raio  $a$ .

Como na esfera as latitudes geodésica e reduzida são idênticas, podemos expressar o elemento do arco de meridiano  $dm$  em função da latitude reduzida  $\beta$ .

$$\begin{aligned} y &= a \cos\beta \\ &= b \sin\beta \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} dm^2 &= dy^2 + dz^2 \\ &= (b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \beta) d\beta^2 \end{aligned}$$

concluimos que

$$dm = b(1 + \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta)^{1/2} d\beta \quad (3.3.8)$$

é o arco de meridiano sobre a esfera correspondente ao arco de meridiano sobre o elipsóide de revolução.

Deste modo, para calcular o comprimento de qualquer linha geodésica teremos

$$ds = \frac{dm}{\cos \alpha_1} = \frac{dm}{(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha_1)^{1/2}} \quad (3.3.9)$$

Façamos agora nossas considerações sobre a esfera reduzida de raio  $a$ , fig.(3.3.2). Mediante a aplicação do teorema de CLAIRAUT na linha geodésica ABC obtemos :

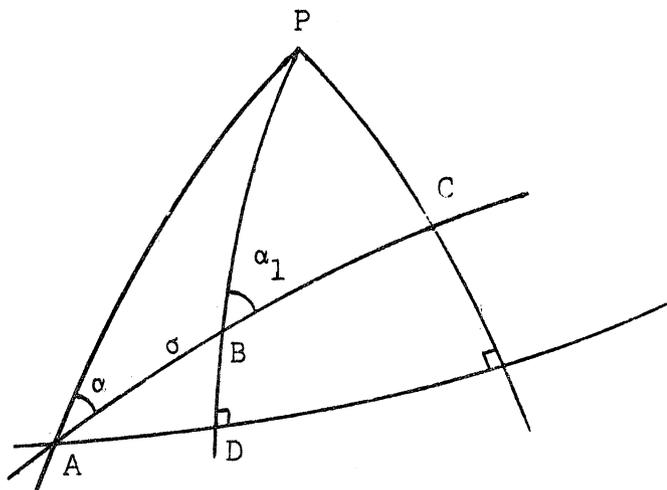


Fig.(3.3.2)

$$\begin{aligned} \cos \beta \operatorname{sen} \alpha_1 &= \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha_1 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Substituindo a eq.(3.3.10) na eq.(3.3.9) segue :

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dm}{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \beta}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{b(1 + \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta)^{1/2} \cos \beta}{(\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha)^{1/2}} d\beta \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo esférico ABD da fig.(3.3.2)

$$\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha \text{ sen}\sigma \quad (3.3.12)$$

sendo  $\alpha$  constante, a diferencial da eq.(3.3.12) é dada por

$$\text{cos}\beta d\beta = \text{cos}\alpha \text{ cos}\sigma d\sigma \quad (3.3.13)$$

mediante substituição da eq.(3.3.13) e eq.(3.3.12) na eq.(3.3.11), encontramos a equação diferencial para o elemento de arco em função do azimute equatorial  $\alpha$  e do arco  $\sigma$ .

$$ds = b(1 + e^2 \text{cos}^2\alpha \text{sen}^2\sigma)^{1/2} d\sigma \quad (3.3.14)$$

ou

$$ds = a(1 - e^2 + e^2 \text{cos}^2\alpha \text{sen}^2\sigma)^{1/2} d\sigma \quad (3.3.15)$$

### 3.4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA GEODÉSICA

UTILIZANDO COMO VARIÁVEL A LATITUDE GEODÉSICA TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE DA LINHA NO EQUADOR

Sabemos que uma linha geodésica sobre o elipsóide de revolução é perfeitamente definida pelo sistema de equações |9|.

$$\text{cos}\alpha_1 ds = M d\phi \quad (3.4.1)$$

$$r \text{sen}\alpha_1 = a \text{sen}\alpha \quad (3.4.2)$$

onde  $\alpha$  é o azimute no equador.

Da eq(3.4.1) temos

$$ds = \frac{M d\phi}{(1 - \text{sen}^2\alpha_1)^{1/2}} \quad (3.4.3)$$

Considerando o valor de  $\text{sen}\alpha_1$  da eq.(3.4.2) podemos escrever a eq.(3.4.3) da seguinte maneira

$$ds = \frac{M d\phi}{\left(1 - \frac{a^2 \text{sen}^2\alpha}{r^2}\right)^{1/2}} \quad (3.4.4)$$

Lembrando que  $M$  é o raio de curvatura da seção meridiana e  $r$  é o raio do paralelo de latitude  $\phi$  e que ambos são dados respectivamente por

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{3/2}} \quad (3.4.5)$$

$$r = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{1/2}} \quad (3.4.6)$$

encontramos que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2 \text{sen}^2 \alpha}{r^2} &= (1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha) \left[ 1 - \frac{(1 - e^2) \text{sen}^2 \alpha}{1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi} \right] \\ &= (1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha) \left( 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \phi} \right) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

onde

$$k^2 = \frac{(1 - e^2) \text{sen}^2 \alpha}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha)}$$

Substituindo a eq.(3.4.5) e eq.(3.4.7) na eq.(3.4.4) obtemos

$$ds = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha)^{1/2}} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{-3/2}}{\left( 1 - \frac{k^2}{\cos^2 \phi} \right)^{1/2}} d\phi \quad (3.4.8)$$

Esta equação diferencial elíptica pode ser escrita assim

$$ds = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \alpha)^{1/2}} \cdot \frac{(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)^{-3/2} \cos \phi}{(1 - k^2 - \text{sen}^2 \phi)^{1/2}} d\phi \quad (3.4.9)$$

que é a equação diferencial da linha geodésica na variável  $\phi$ .



## CAPÍTULO 4

### 4. EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

Quando adotamos como variável descritiva do elipsóide de revolução a latitude reduzida  $\beta$ , estamos então estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os pontos da linha geodésica sobre o elipsóide de revolução e os de sua imagem esférica sobre a esfera reduzida. Esta correspondência pontual conserva os azimutes e as latitudes reduzidas. Vamos agora verificar o que estará acontecendo com as longitudes dos mesmos pontos. Consideremos um par de pontos infinitamente próximos sobre a linha geodésica do elipsóide de revolução e os seus correspondentes sobre a mesma, mas pertencente à esfera reduzida.

A equação de LAPLACE é uma relação infinitesimal entre a variação infinitesimal da longitude de uma linha geodésica qualquer e a variação do seu azimute  $|\delta|$ . Ela é válida igualmente para qualquer superfície de revolução e é expressa de maneira geral pela seguinte equação

$$d\alpha = \operatorname{sen}\phi \, dL \quad (4.1)$$

De acordo com a equação de LAPLACE podemos escrever para a esfera reduzida e para o elipsóide de revolução as seguintes equações diferenciais

$$d\alpha' = \operatorname{sen}\beta \, d\lambda \quad (4.1a)$$

$$d\alpha = \operatorname{sen}\phi \, dL \quad (4.1b)$$

Em virtude da correspondência estabelecida há uma igualdade dos azimutes nos pontos correspondentes, isto é,  $d\alpha = d\alpha'$  e como consequência concluímos pela seguinte igualdade :

$$\operatorname{sen}\beta \, d\lambda = \operatorname{sen}\phi \, dL \quad (4.2)$$

Após algumas transformações a eq.(4.2) toma a forma

$$d\lambda - dL = \left( \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\beta} - 1 \right) dL \quad (4.3)$$

Integrando a eq.(4.3) obtemos

$$\lambda - L = \int_0^L \left( \frac{\text{sen}\phi}{\text{sen}\beta} - 1 \right) dL \quad (4.4)$$

que é a equação diferencial da diferença de longitude de dois pontos correspondentes.

Uma vez que a latitude geodésica  $\phi$  é maior ou igual a latitude reduzida  $\beta$ , o integrando será sempre positivo, portanto a diferença de longitude de dois pontos sobre a esfera reduzida é sempre maior que a diferença de longitude dos dois pontos correspondentes sobre o elipsóide de revolução. Deste modo, a todo ponto de uma linha geodésica do elipsóide fazemos corresponder um ponto imagem sobre o círculo máximo de uma esfera que satisfaça as propriedades :

- a. As duas geodésicas conservam os azimutes.
- b. A latitude do ponto imagem é igual a latitude reduzida do seu correspondente sobre o elipsóide.
- c. A longitude do ponto imagem da esfera é maior que a longitude do seu correspondente sobre o elipsóide, sendo a diferença dada pela eq.(4.4).

#### 4.1 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE EM FUNÇÃO DA LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

Do triângulo retângulo elementar CDE , fig.(4.1.1) temos

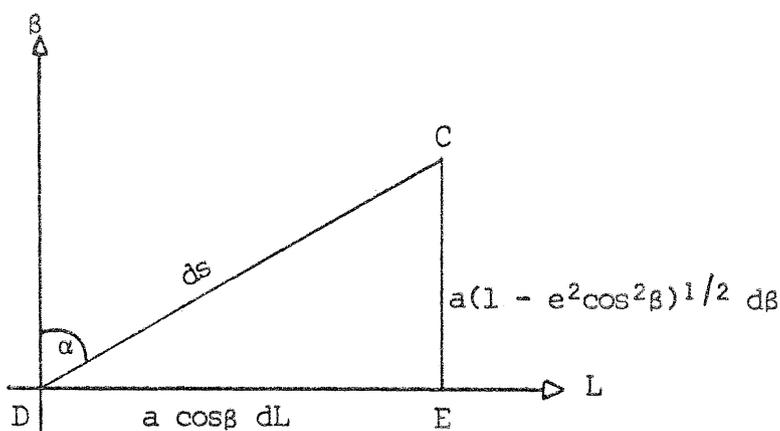


Fig.(4.1.1)

$$ds \operatorname{sen} \alpha = a \cos \beta \, dL \quad (4.1.1)$$

dando então

$$dL = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a \cos \beta} ds \quad (4.1.2)$$

mas  $ds$  é dado pela eq.(3.2.14), logo

$$dL = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a \cos \beta} \cdot b(1 + \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (4.1.3)$$

mediante a aplicação do teorema de CLAIRAUT na linha BC fig.(4.1.2), temos

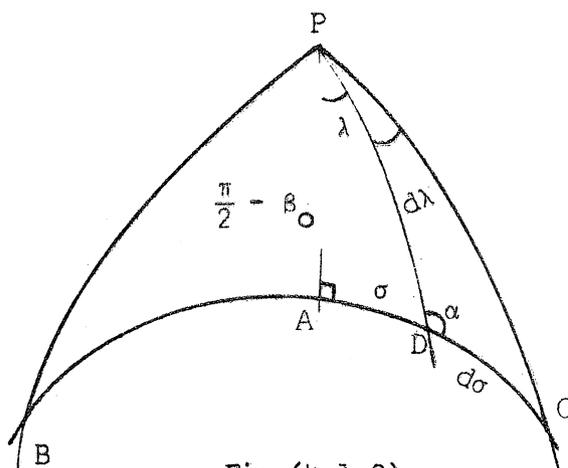


Fig.(4.1.2)

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \cos \beta_0$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \quad (4.1.4)$$

que substituído na eq.(4.1.3) dá-nos

$$dL = \frac{b}{a} \frac{\cos \beta_0}{\cos^2 \beta} (1 + \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (4.1.5)$$

Aplicando a fórmula dos quatro elementos no triângulo esférico ADP

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \beta_0 \cos \sigma$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \operatorname{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma \quad (4.1.6)$$

Assim a eq.(4.1.5) toma a forma

$$dL = \frac{b}{a} \cos \beta_0 \frac{(1 + \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma)^{1/2}}{1 - \operatorname{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} d\sigma \quad (4.1.7)$$

que é a expressão procurada.

Podemos obter uma equação diferencial equivalente a eq.(4.1.7) substituindo a eq.(3.2.11) na eq.(4.1.2), com o auxílio de algumas operações adicionais

$$dL = \operatorname{sen} \alpha \frac{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}{\cos \beta} d\sigma \quad (4.1.8)$$

Sobre a esfera auxiliar vale relação análoga à eq.(4.1.1) que é

$$\operatorname{sen} \alpha d\sigma = \cos \beta d\lambda$$

Resulta então

$$dL = (1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\lambda \quad (4.1.9)$$

Para a avaliação da eq.(4.1.9) é necessário apresentá-la numa forma adequada, isto é, em função de uma só variável. Sabemos que

$$\operatorname{sen} \alpha d\sigma = \cos \beta d\lambda \quad (4.1.10)$$

Mediante substituição da eq.(4.1.4) na eq.(4.1.10) obtemos

$$d\lambda = \frac{\cos \beta_0}{\cos^2 \beta} d\sigma \quad (4.1.11)$$

e assim

$$dL = \cos \beta_0 \frac{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}{\cos^2 \beta} d\sigma$$

subtraindo desta a eq.(4.1.11) segue

$$dL = d\lambda - \cos \beta_0 \left[ \frac{1 - (1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}{\cos^2 \beta} \right] d\sigma \quad (4.1.12)$$

Expressemos a eq.(4.1.12) em função de uma única variável, no caso  $\sigma$ . Comparando a eq.(3.2.11) com a eq.(3.2.15) obtemos

$$(1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} = (1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2}$$

sendo

$$k^2 = e^2 \operatorname{sen}^2 \phi_0 = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} \quad (4.1.13)$$

Fazendo

$$\Omega = (1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}$$

a expressão

$$1 - (1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2}$$

pode ser escrita assim

$$1 - (1 - e^2 \cos^2 \beta)^{1/2} = \Omega \left[ \frac{1}{(1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}} - (1 - k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2} \right] \quad (4.1.14)$$

Explicitemos  $e^2$  na eq.(4.1.13)

$$e^2 = \frac{k^2}{\sin^2 \beta_0 + k^2 \cos^2 \beta_0} \quad (4.1.15)$$

Introduzindo  $e^2$  dado pela eq.(4.1.15) em  $(1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}$  resulta

$$\frac{1}{(1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}} = (1 + k^2 \cotg^2 \beta_0)^{1/2} \quad (4.1.16)$$

Através da substituição da expressão (4.1.16) na eq.(4.1.14) obtemos uma expressão que substituída juntamente com (4.1.6) na eq.(4.1.12) resulta :

$$dL = d\lambda - \Omega \cos \beta_0 \frac{(1 + k^2 \cotg^2 \beta_0)^{1/2} - (1 - k^2 \sin^2 \sigma)^{1/2}}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} d\sigma \quad (4.1.17)$$

#### 4.2 EXPRESSÃO DIFERENCIAL DA DIFERENÇA DE LONGITUDE DE DOIS PONTOS SOBRE O ELIPSÓIDE EM FUNÇÃO DO AZIMUTE EQUATORIAL

Seja o elipsóide e sua esfera reduzida, circunscrita ao mesmo ao longo do equador. De um ponto A, sobre o equador, traçamos duas linhas geodésicas de azimute  $\alpha$ , sendo uma pertencente ao elipsóide e outra à esfera em questão. Deste modo, além das linhas geodésicas satisfazerem as propriedades citadas no parágrafo 4, satisfarão a propriedade de possuírem o mesmo azimute equatorial  $\alpha$ . Utilizando esta propriedade, podemos estabelecer uma expressão para a diferença de longitude de dois pontos sobre o elipsóide. Consideremos a fig.(4.2.1), uma superfície elipsóidica pertencente a um elipsóide de revolução de semi-eixos de finidos previamente, sendo CD um arco de paralelo definido por dois pontos com diferença de longitude dL.

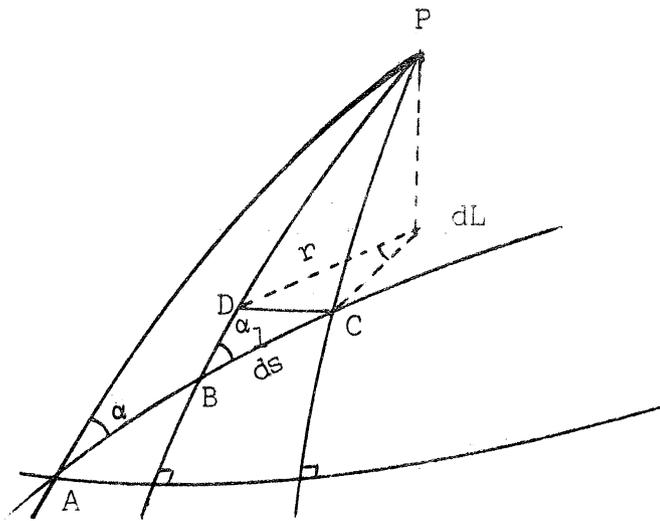


Fig.(4.2.1)

$$CD = r dL \quad (4.2.1)$$

$$CD = \text{sen} \alpha_1 ds \quad (4.2.2)$$

concluimos então que

$$dL = \frac{\text{sen} \alpha_1 ds}{r} \quad (4.2.3)$$

Mas o teorema de CLAIRAUT afirma que

$$\text{sen} \alpha = \cos \beta \text{sen} \alpha_1$$

então

$$\text{sen} \alpha_1 = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \beta} \quad (4.2.4)$$

sendo o raio do paralelo  $r = a \cos \beta$ , então

$$dL = \frac{\text{sen} \alpha}{a \cos^2 \beta} ds \quad (4.2.5)$$

Seja a fig.(4.2.2) a imagem esférica da fig.(4.2.1)

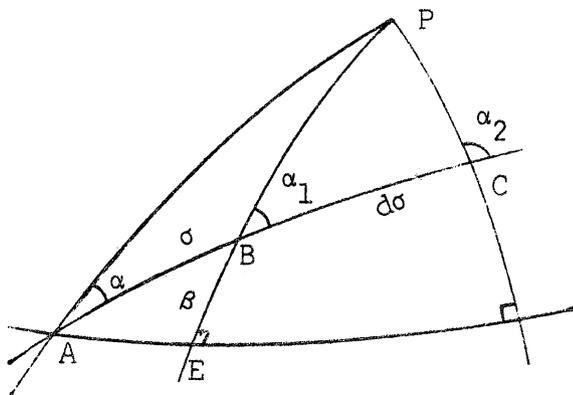


Fig.(4.2.2)

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABE

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \operatorname{sen}\sigma$$

$$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\sigma \quad (4.2.6)$$

Substituindo a identidade (4.2.6) e a eq.(3.3.14) na igualdade (4.2.5) obtemos a fórmula procurada

$$dL = \frac{b}{a} \operatorname{sen}\alpha \frac{(1 + \epsilon^2 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\sigma)^{1/2}}{1 - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\sigma} d\sigma \quad (4.2.7)$$

lembrando que  $\frac{b}{a} = (1 - e^2)^{1/2}$  segue

$$dL = \operatorname{sen}\alpha (1 - e^2)^{1/2} \frac{(1 + \epsilon^2 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\sigma)^{1/2}}{1 - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\sigma} d\sigma \quad (4.2.7a)$$

Estas equações diferenciais dão origem a integrais elípticas de segunda espécie.



## CAPÍTULO 5

### 5. SOLUÇÃO DO PROBLEMA GEODÉSICO INVERSO

Os problemas geodésicos direto e inverso podem ser resolvidos mediante o relacionamento dos elementos de um triângulo elipsoidal com os respectivos elementos de um triângulo esférico auxiliar, onde é usada a latitude reduzida ao invés da latitude geodésica. Deste modo obtemos uma solução com o auxílio da trigonometria esférica. Todavia, deve ser aplicado o método das aproximações sucessivas para determinarmos o ângulo formado pelas diferenças de longitude do triângulo esférico utilizado e o triângulo elipsoidal. Este método utilizado para a solução do problema geodésico, pode ser usado para obter com precisão as coordenadas geodésicas para qualquer distância geodésica.

#### 5.1 MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE EQUATORIAL DA GEODÉSICA

A fig.(5.1.1) ilustra o triângulo esférico auxiliar usado para solucionar o problema geodésico inverso.

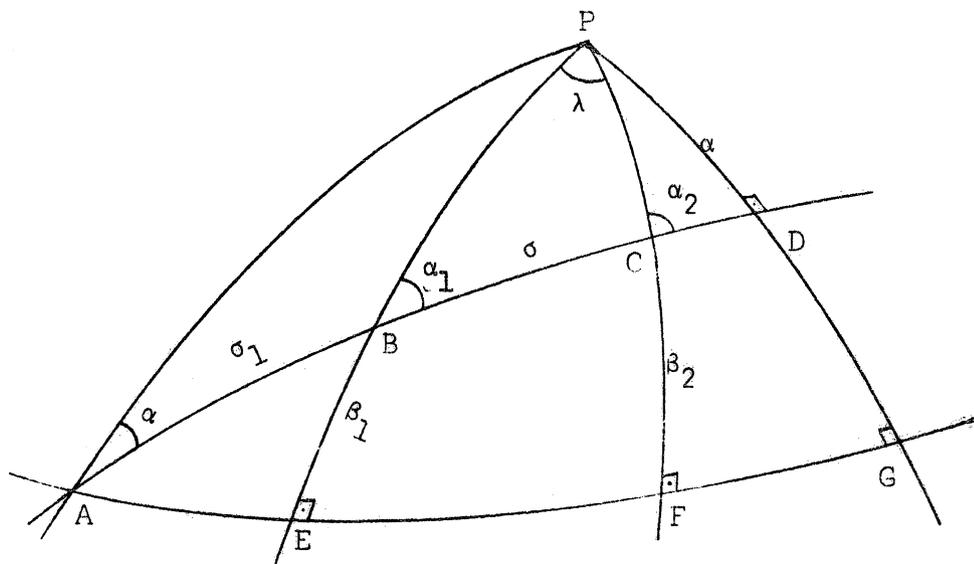


Fig.(5.1.1)

A linha equatorial está definida pelo arco AG, e o polo pelo ponto P. Os pontos B e C são pontos sobre a esfera reduzida correspondente a dois pontos dados sobre o elipsóide.

A linha geodésica que contém os pontos B e C intercepta a linha do equador em A e tem seu ponto de máxima latitude reduzida em D. Os arcos de círculo máximo BE e CF são respectivamente as latitudes reduzidas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  correspondentes às latitudes geodésicas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Os azimutes esféricos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os mesmos azimutes elipsoidais. O azimute do círculo máximo AD na linha equatorial é  $\alpha$ . Os arcos  $\sigma_1 = AB$  e  $\sigma_2 = AC$  são contados a partir do equador. O arco BC é igual a  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  e o arco  $2\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2$ .

Sendo a e e respectivamente o semi-eixo maior e a excentricidade do elipsóide, podemos obter os demais parâmetros, de acordo com o parágrafo (2.2) :

$$f = 1 - (1 - e^2)^{1/2}$$

$$b = a(1 - f)$$

$$e = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a}$$

Sendo desconhecido  $\lambda$ , a diferença de longitude sobre a esfera reduzida, resolvemos o triângulo esférico numa primeira aproximação fazendo  $\lambda = L = L_2 - L_1$  a fim de determinar a correção  $(\lambda - L)$ . Por um método iterativo continuamos o processo para a determinação de  $(\lambda - L)$ , até o último valor não diferir do penúltimo. Na prática fazemos iterações até a diferença entre a última iteração e a penúltima ser igual a uma determinada quantidade pré-estabelecida, a fim de que possamos obter a precisão desejada. Se a diferença entre a última e penúltima iteração for igual a  $10^{-12}$  radianos, teremos uma precisão da ordem de 0,00001'' em direção e 0,001m em distância [12].

Afim de resolvermos este problema devemos proceder do seguinte modo :

a) As latitudes reduzidas são obtidas pelas fórmulas já conhecidas

$$\operatorname{tg}\beta_1 = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\phi_1 \quad (5.1.1)$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\phi_2$$

$$\cotg\beta_1 = (1 - e^2)^{1/2} \cotg\phi_1 \quad (5.1.2)$$

$$\cotg\beta_2 = (1 - e^2)^{1/2} \cotg\phi_2$$

sendo que as fórmulas (5.1.1) devem ser usadas para latitudes geodésicas não superiores a  $\frac{\pi}{4}$ , caso contrário devem ser utilizadas as fórmulas (5.1.2) o que trará maior precisão aos cálculos.

b) Para calcular o arco esférico  $\sigma$ , apliquemos a fórmula dos quatro elementos relativa a lados no triângulo esférico auxiliar PBC, fig.(5.1.2).

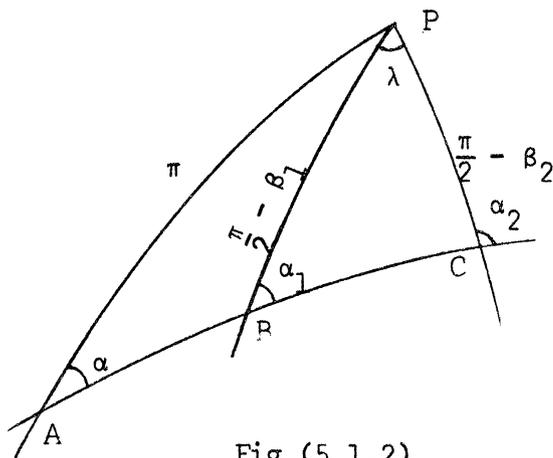


Fig.(5.1.2)

$$\cos\sigma = \sen\beta_1 \sen\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\lambda \quad (5.1.3)$$

c) Considerando os triângulos esféricos PAB e PBC podemos calcular o azimute equatorial  $\alpha$  mediante a aplicação da lei dos senos.

A partir do triângulo esférico PAB temos

$$\sen\alpha = \cos\beta_1 \sen\alpha_1 \quad (5.1.4)$$

Do triângulo esférico PBC segue

$$\sen\alpha_1 = \frac{\cos\beta_2 \sen\lambda}{\sen\sigma} \quad (5.1.5)$$

Substituindo na eq.(5.1.4)  $\sen\alpha_1$  pelo seu valor dado pela eq.(5.1.5) obtemos o valor do azimute  $\alpha$ :

$$\sen\alpha = \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2 \sen\lambda}{\sen\sigma} \quad (5.1.6)$$

d) Mediante a aplicação do teorema de CLAIRAUT com relação a uma linha geodésica

sobre uma superfície de revolução obtemos uma relação geral entre o seno do azimute equatorial e o seno do azimute em qualquer outro ponto, particularmente para os pontos B e C, fig.(5.1.2) temos

$$\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta_1 \text{sen}\alpha_1 = \text{cos}\beta_2 \text{sen}\alpha_2 \quad (5.1.7)$$

e) Para a obtenção do arco esférico  $2\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2$ , procedemos do modo seguinte

$$\text{cos } 2\sigma_m = \text{cos } (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.1.8)$$

Da trigonometria plana sabemos que

$$\text{cos } (\sigma_1 + \sigma_2) = \text{cos}\sigma_1 \text{cos}\sigma_2 - \text{sen}\sigma_1 \text{sen}\sigma_2 \quad (5.1.9)$$

e que

$$\text{cos}\sigma_1 \text{cos}\sigma_2 = \frac{1}{2} \text{cos } (\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{1}{2} \text{cos } (\sigma_2 + \sigma_1)$$

lembrando que  $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$  e  $\sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma_m$

temos

$$\text{cos}\sigma_1 \text{cos}\sigma_2 = \frac{1}{2} \text{cos}\sigma + \frac{1}{2} \text{cos } 2\sigma_m \quad (5.1.10)$$

Substituindo o valor de  $\text{cos}\sigma_1 \text{cos}\sigma_2$  dado pela eq.(5.1.10) na eq.(5.1.9)obtemos

$$\text{cos } 2\sigma_m = \frac{1}{2} \text{cos}\sigma + \frac{1}{2} \text{cos } 2\sigma_m - \text{sen}\sigma_1 \text{sen}\sigma_2 \quad (5.1.11)$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo esférico ABE e ACF, fig.(5.1.3),obtemos  $\text{sen}\sigma_1$  e  $\text{sen}\sigma_2$  em função de quantidades já conhecidas.

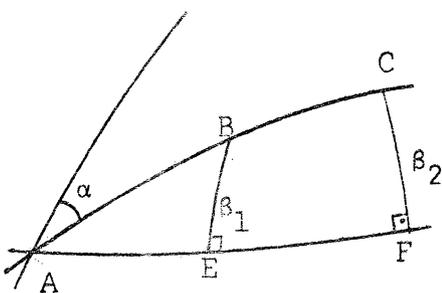


Fig.(5.1.3)

$$\text{sen}\sigma_1 = \frac{\text{sen}\beta_1}{\text{cos}\alpha}$$

$$\text{sen}\sigma_2 = \frac{\text{sen}\beta_2}{\text{cos}\alpha}$$

$$\text{sen}\sigma_1 \text{sen}\sigma_2 = \frac{\text{sen}\beta_1 \text{sen}\beta_2}{\text{cos}^2\alpha} \quad (5.1.12)$$

Substituindo a eq.(5.1.12) na eq.(5.1.11) concluímos que

$$\cos 2\sigma_m = \cos\sigma - 2 \frac{\text{sen}\beta_1 \text{sen}\beta_2}{\cos^2\alpha} \quad (5.1.13)$$

Em função dos valores calculados através da eq.(5.1.3) e eq.(5.1.13) podemos calcular utilizando relações trigonométricas

$$\text{sen } 2\sigma = 2 \text{sen}\sigma \cos\sigma$$

$$\text{sen } 3\sigma = 3 \text{sen}\sigma - 4 \text{sen}^3\sigma$$

$$\cos 4\sigma = 4 \text{sen}\sigma \cos\sigma - 8 \text{sen}^3\sigma \cos\sigma \quad (5.1.14)$$

$$\dots\dots\dots \quad (5.1.14)$$

$$\cos 4\sigma_m = 2 \cos^2 2\sigma_m - 1$$

$$\cos 6\sigma_m = 4 \cos^3 2\sigma_m - 3 \cos 2\sigma_m$$

$$\cos 8\sigma_m = 2 \cos^2 4\sigma_m - 1$$

$$\dots\dots\dots$$

f) Para calcular a diferença  $(\lambda - L)$ , vamos utilizar a expressão diferencial da diferença de longitude de dois pontos sobre o elipsóide dada pela eq.(4.2.7).

$$dL = (1 - e^2)^{1/2} \text{sen}\alpha \frac{(1 + \epsilon^2 \cos^2\alpha \text{sen}^2\sigma)^{1/2}}{1 - \cos^2\sigma \text{sen}^2\sigma} d\sigma \quad (5.1.15)$$

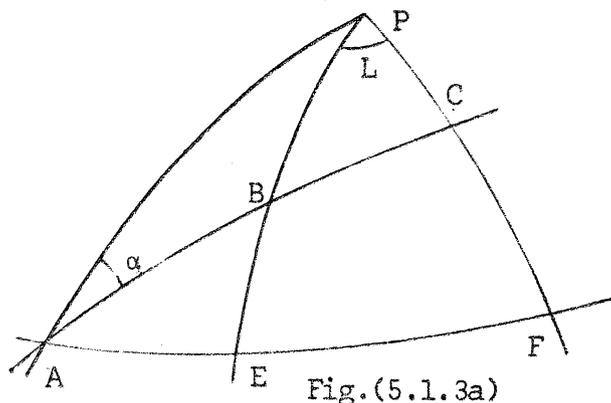


Fig.(5.1.3a)

Integrando a eq.(5.1.15) no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  obtemos a diferença de longi

tude  $L$  entre os pontos  $B$  e  $C$  fig.(5.1.3a) :

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} \alpha \int \frac{(1 + e^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2}}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma \quad (5.1.16)$$

O método mais simples para resolver esta integral elíptica, consiste em desenvolver o numerador do integrando em série binomial.

Fazendo  $e^2 \cos^2 \alpha = u^2$ , podemos desenvolver (5.1.16)

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} \alpha \int \frac{1 + \frac{u^2}{2} \operatorname{sen}^2 \sigma - \frac{u^4}{8} \operatorname{sen}^4 \sigma + \frac{u^6}{16} \operatorname{sen}^6 \sigma - \frac{5u^8}{128} \operatorname{sen}^8 \sigma + \dots}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma$$

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} \alpha \left[ \int \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma + \frac{u^2}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma + \right. \\ \left. - \frac{u^4}{8} \int \frac{\operatorname{sen}^4 \sigma}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma + \frac{u^6}{16} \int \frac{\operatorname{sen}^6 \sigma}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma + \right. \\ \left. - \frac{5u^8}{128} \int \frac{\operatorname{sen}^8 \sigma}{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma} d\sigma + \dots \right] \quad (5.1.17)$$

Para resolver a eq.(5.1.17) empreguemos as integrais do tipo  $W_{2p}$  e  $I_{2p}$ , integrais de WALLIS. A integral do tipo  $W_{2p}$  é definida do seguinte modo :

$$W_{2p} = \int \operatorname{sen}^{2p} \sigma d\sigma \quad (5.1.18)$$

Existe a seguinte relação de recorrência entre estas integrais

$$W_n = \int \operatorname{sen}^n \sigma d\sigma \\ = \int \operatorname{sen}^{n-2} \sigma d\sigma - \int \operatorname{sen}^{n-2} \sigma \cos^2 \sigma d\sigma \\ = W_{n-2} - \int \operatorname{sen}^{n-2} \sigma \cos^2 \sigma d\sigma$$

Integrando por partes a segunda parcela encontramos a relação de recorrência

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} - \frac{1}{n} \text{sen}^{2n} \alpha \cos \alpha$$

A integral do tipo  $I_{2p}$  é definida assim

$$I_{2p} = \int \frac{\text{sen}^{2p} \sigma}{1 - \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \sigma} d\sigma \quad (5.1.19)$$

Podemos estabelecer uma relação entre a integral  $I_{2p}$  e a integral  $W_{2p}$ , procedendo da maneira abaixo

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \int \text{sen}^{2p} \sigma \frac{(1 - \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \sigma + \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \sigma)}{1 - \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \sigma} d\sigma \\ &= \int \text{sen}^{2p} \sigma d\sigma + \cos^2 \alpha \int \frac{\text{sen}^{2p+2} \sigma d\sigma}{1 - \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \sigma} \\ &= W_{2p} + \cos^2 \alpha I_{2p+2} \end{aligned}$$

De onde tiramos

$$I_{2p+2} = \frac{I_{2p} - W_{2p}}{\cos^2 \alpha}$$

A seguinte relação de recorrência pode ser estabelecida com facilidade

$$I_0 = I_0$$

$$I_2 = \frac{I_0 - W_0}{\cos^2 \alpha}$$

$$I_4 = \frac{I_0 - W_0}{\cos^4 \alpha} - \frac{W_2}{\cos^2 \alpha}$$

$$I_6 = \frac{I_0 - W_0}{\cos^6 \alpha} - \frac{W_2}{\cos^4 \alpha} - \frac{W_4}{\cos^2 \alpha}$$

.....

$$I_{2p} = \frac{I_0 - W_0}{\cos^{2p}\alpha} - \frac{W_2}{\cos^{2p-2}\alpha} - \frac{W_4}{\cos^{2p-4}\alpha} - \dots - \frac{W_{2p-2}}{\cos^2\alpha} \quad (5.1.20)$$

Com o auxílio da eq.(5.1.19) podemos escrever a eq.(5.1.17)

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\alpha \left( I_0 + \frac{u^2}{2} I_2 - \frac{u^4}{8} I_4 + \frac{u^6}{16} I_6 - \frac{5u^8}{128} I_8 + \dots \right)$$

Considerando a relação de recorrência (5.1.20)

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\alpha \left[ I_0 + \frac{u^2}{2} \left( \frac{I_0 - W_0}{\cos^2\alpha} \right) - \frac{u^4}{8} \left( \frac{I_0 - W_0}{\cos^4\alpha} - \frac{W_2}{\cos^2\alpha} \right) + \right. \\ \left. \frac{u^6}{16} \left( \frac{I_0 - W_0}{\cos^6\alpha} - \frac{W_2}{\cos^4\alpha} - \frac{W_4}{\cos^2\alpha} \right) + \right. \\ \left. - \frac{5u^8}{128} \left( \frac{I_0 - W_0}{\cos^8\alpha} - \frac{W_2}{\cos^6\alpha} - \frac{W_4}{\cos^4\alpha} - \frac{W_6}{\cos^2\alpha} \right) + \dots \right] \quad (5.1.21)$$

Substituindo na eq.(5.1.21)  $u^2$  pelo seu respectivo valor  $\epsilon^2 \cos^2\alpha$  e agrupando os termos semelhantes

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen}\alpha \left[ \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots \right) I_0 + \right. \\ \left( -\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots \right) W_0 + \\ \left( -\frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots \right) W_2 \cos^2\alpha + \\ \left( -\frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots \right) W_4 \cos^4\alpha + \\ \left( \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots \right) W_6 \cos^6\alpha + \dots \right] \quad (5.1.22)$$

Considerando que

$$1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots = (1 + \epsilon^2)^{1/2} \\ - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots = 1 - (1 + \epsilon^2)^{1/2}$$

$$\frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - (1 + \epsilon^2)^{1/2}$$

$$- \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} + \dots = 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} - (1 + \epsilon^2)^{1/2}$$

.....

e lembrando que

$$(1 - e^2)(1 + \epsilon^2) = 1$$

A equação (5.1.22) é escrita

$$L = I_0 \operatorname{sen} \alpha +$$

$$\operatorname{sen} \alpha \left[ (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right] W_0 + \right. \\ (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right] W_2 \cos^2 \alpha + \\ (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right] W_4 \cos^4 \alpha + \\ \left. (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right] W_6 \cos^6 \alpha + \dots \right] \quad (5.1.23)$$

Fazendo

$$A_0 = (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right]$$

$$A_2 = (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right]$$

$$A_4 = (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right] \quad (5.1.24a)$$

$$A_6 = (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right]$$

$$A_8 = (1 - e^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\epsilon^2}{2} \dots - (1 + \epsilon^2)^{1/2} \right]$$

Os coeficientes  $A_{2i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  podem ser escritos em função do achatamento do elipsóide, da seguinte maneira

$$A_0 = -f$$

$$A_2 = \frac{f^2}{2(1-f)}$$

$$A_4 = \frac{f^3(3f-4)}{8(1-f)^3} \tag{5.1.24b}$$

$$A_6 = \frac{f^4(10-14f+5f^2)}{16(1-f)^5}$$

$$A_8 = \frac{8(1-f)^2(10f^4-14f^5+5f^6)-5(2f-f^2)^4}{128(1-f)^7}$$

.....

Utilizando as identidades (5.1.24), a eq.(5.1.23) toma uma forma bastante simples

$$L = I_0 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos^{2p} \alpha \tag{5.1.25}$$

A primeira parcela da eq.(5.1.25), após ser integrada no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  nos dá

$$I_0 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_1)$$

valor este que substituído na eq.(5.1.25) resulta

$$L = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_1) + \operatorname{sen} \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos^{2p} \alpha$$

Consideremos os triângulos esféricos ABE e ACF, representados na fig.(5.1.4)

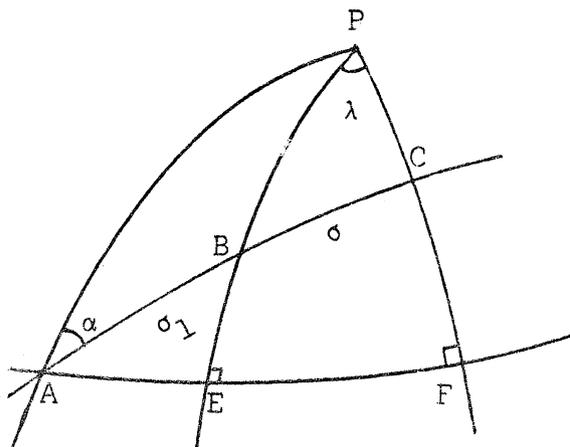


Fig.(5.1.4)

Aplicando a regra de MAUDUITT [6] obtemos :

$$\operatorname{tg} \lambda_B = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_1$$

$$\operatorname{tg} \lambda_C = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_2$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_C - \lambda_B \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \sigma_1) \end{aligned}$$

Desta maneira podemos escrever

$$L = \lambda + \operatorname{sen} \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos^{2p} \alpha \quad (5.1.26)$$

A eq.(4.4) garante-nos que a diferença de longitude de dois pontos imagens sobre a esfera reduzida é maior ou igual à diferença de longitude de dois pontos sobre a superfície elipsóidica.

Sendo assim,  $\operatorname{sen} \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos^{2p} \alpha$  é a quantidade que deve ser subtraída da diferença de longitude esférica  $\lambda$  para obtermos a diferença de longitude elipsóidica  $L$ .

$$(\lambda - L) = - \operatorname{sen} \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos^{2p} \alpha \quad (5.1.27)$$

Deste modo obtivemos a expressão que fornece a diferença das diferenças de longitudes.

Avaliemos tal quantidade

$$\frac{(\lambda - L)}{- \operatorname{sen} \alpha} = A_0 W_0 + A_2 \cos^2 \alpha W_2 + A_4 \cos^4 \alpha W_4 + \dots \quad (5.1.28)$$

Lembrando as identidades trigonométricas

$$\cos \sigma_1 \cos \sigma_2 = \frac{1}{2} [\cos(\sigma_2 - \sigma_1) + \cos(\sigma_2 + \sigma_1)]$$

$$\operatorname{sen} \sigma_2 - \operatorname{sen} \sigma_1 = 2 \operatorname{sen} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \cdot \cos \frac{(\sigma_2 + \sigma_1)}{2}$$

podemos calcular  $W_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  em função de arcos múltiplos

$$W_0 = \int d\sigma = \sigma$$

$$W_2 = \int \text{sen}^2 \sigma d\sigma = \frac{\sigma}{2} - \frac{\text{sen} \sigma \cos 2\sigma_m}{2}$$

$$W_4 = \int \text{sen}^4 \sigma d\sigma = \frac{3}{8} \sigma - \frac{\text{sen} \sigma \cos 2\sigma_m}{2} + \frac{\text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m}{16} \quad (5.1.29)$$

$$W_6 = \int \text{sen}^6 \sigma d\sigma = \frac{5}{16} \sigma - \frac{15}{32} \text{sen} \sigma \cos 2\sigma_m + \frac{3}{32} \text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m - \frac{\text{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m}{96}$$

$$W_8 = \int \text{sen}^8 \sigma d\sigma = \frac{35}{128} \sigma - \frac{7}{16} \text{sen} \sigma \cos 2\sigma_m + \frac{7}{64} \text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m - \frac{1}{48} \text{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m + \frac{\text{sen} 4\sigma \cos 8\sigma_m}{512}$$

Substituindo a eq.(5.1.29) na eq.(5.1.28) e agrupando os termos semelhantes obtêm-se

$$(\lambda - L) = \text{sen} \alpha \left\{ B_0 \sigma + B_2 \text{sen} \sigma \cos 2\sigma_m + B_4 \text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m + B_6 \text{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m + B_8 \text{sen} 4\sigma \cos 8\sigma_m + \dots \right\} \quad (5.1.30)$$

onde os coeficientes  $B_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  são expressos em função dos coeficientes  $A_{2p}$ , eq.(5.1.24), assim

$$B_0 = -A_0 - \frac{A_2}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{8} A_4 \cos^4 \alpha - \frac{5}{16} A_6 \cos^6 \alpha - \frac{35}{128} A_8 \cos^8 \alpha \dots$$

$$B_2 = + \frac{A_2}{2} \cos^2 \alpha + \frac{A_4}{2} \cos^4 \alpha + \frac{15}{32} A_6 \cos^6 \alpha + \frac{7}{16} A_8 \cos^8 \alpha + \dots$$

$$B_4 = - \frac{A_4}{16} \cos^4 \alpha - \frac{3}{32} A_6 \cos^6 \alpha - \frac{7}{64} A_8 \cos^8 \alpha \dots \quad (5.1.31)$$

$$B_6 = \frac{1}{96} A_6 \cos^6 \alpha + \frac{A_8}{48} \cos^8 \alpha + \dots$$

$$B_8 = - \frac{A_8}{512} \cos^8 \alpha + \dots$$

.....

Substituindo  $A_{2p}$ ,  $p = 0,1,2, \dots$  pelos respectivos valores, em função do a chatamento  $f$ , negligenciando os termos em  $f$  superiores à quarta ordem, obtemos os seguintes valores para os coeficientes  $B_{2p}$ ,  $p = 0,1,2, \dots$

$$B_0 = f \left[ 1 - \frac{f}{4} (1 + f + f^2) \cos^2 \alpha + \frac{3f^2}{16} \left( 1 + \frac{9}{4} f \right) \cos^4 \alpha - \frac{25}{128} f^3 \cos^6 \alpha \right]$$

$$B_2 = f \left[ \frac{f}{4} (1 + f + f^2) \cos^2 \alpha - \frac{f^2}{4} \left( 1 + \frac{9}{4} f \right) \cos^4 \alpha + \frac{75}{256} f^3 \cos^6 \alpha \right]$$

$$B_4 = f \left[ \frac{f^2}{32} \left( 1 + \frac{9f}{4} \right) \cos^4 \alpha - \frac{15}{256} f^3 \cos^6 \alpha \right] \quad (5.1.31a)$$

$$B_6 = f \left[ \frac{5}{768} f^3 \cos^6 \alpha \right]$$

Obtido o valor de  $(\lambda - L)$  devemos calcular  $\lambda = L + (\lambda - L)$  e repetir as etapas anteriores tantas vezes quanto necessário for afim de que obtenhamos um valor definitivo para  $\lambda$ .

g) Obtido o valor definitivo de  $\lambda$ , podemos calcular o azimute e o contra azimute da linha geodésica mediante a aplicação da trigonometria esférica no triângulo esférico PBC fig.(5.1.5).

Chamemos o azimute da linha geodésica de B para C de  $\alpha_{12}$  e o azimute de C para B de  $\alpha_{21}$ .

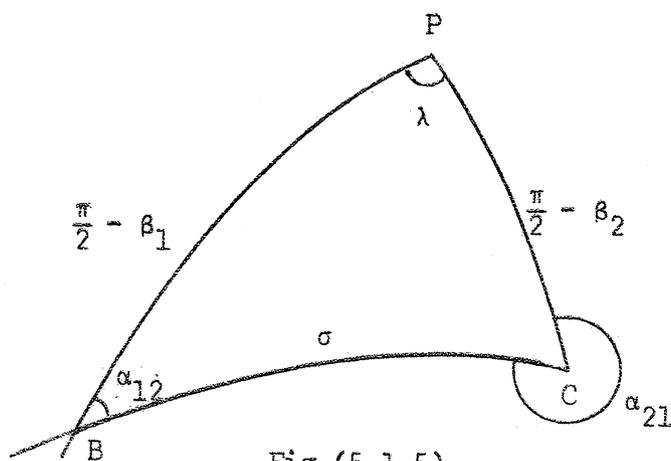


Fig.(5.1.5)

Aplicando a analogia dos senos e a fórmula dos cinco elementos, temos :

$$\operatorname{sen}\alpha_{12} \operatorname{sen}\sigma = \cos\beta_2 \operatorname{sen}\lambda$$

$$\cos\alpha_{12} \operatorname{sen}\sigma = \cos\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1 \cos\beta_2 \cos\lambda$$

$$\operatorname{sen}\alpha_{21} \operatorname{sen}\sigma = -\cos\beta_1 \operatorname{sen}\lambda$$

$$\cos\alpha_{21} \operatorname{sen}\sigma = \cos\beta_2 \operatorname{sen}\beta_1 - \operatorname{sen}\beta_2 \cos\beta_1 \cos\lambda$$

Dividindo membro a membro a primeira pela segunda e a terceira pela quarta equação, obtemos os valores dos arcos

$$\operatorname{tg}\alpha_{12} = \frac{\cos\beta_2 \operatorname{sen}\lambda}{\cos\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1 \cos\beta_2 \cos\lambda} \quad (5.1.32)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{21} = \frac{\cos\beta_1 \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\beta_2 \cos\beta_1 \cos\lambda - \cos\beta_2 \operatorname{sen}\beta_1} \quad (5.1.33)$$

O quadrante é determinado de maneira bastante simples se convencionarmos que o ponto B está a oeste do ponto C. Neste caso  $0 < \alpha_{12} < \pi$  e  $\pi < \alpha_{21} < 2\pi$ , sendo o azimute e o contra-azimute contados a partir do norte no sentido horário.

O azimute e o contra-azimute contados a partir do sul no sentido horário serão dados em função dos azimutes contados a partir do norte no sentido horário pelas equações :

$$\alpha_{S12} = \alpha_{N12} + \pi$$

$$\alpha_{S21} = \alpha_{N21} - \pi$$

h) O cálculo da distância geodésica  $s$  é direto, uma vez que o triângulo esférico auxiliar pode ser resolvido com precisão suficiente.

Sabemos que  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ ,  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$  e que o infinitésimo da distância geodésica  $s$  é dado em função do infinitésimo do arco  $\sigma$  pela eq.(3.3.14).

$$ds = b(1 + e^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.1.34)$$

Para obtermos a distância geodésica  $s$ , basta integrarmos a eq.(5.1.34) no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$

$$s = b \int (1 + \epsilon^2 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.1.35)$$

fazendo  $\epsilon^2 \cos^2 \alpha = u^2$ , escrevemos a eq.(5.1.35) assim

$$s = b \int (1 + u^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.1.36)$$

Para a avaliação dessa integral, desenvolvemos o integrando segundo uma série binomial.

$$s = b \int \left( 1 + \frac{u^2}{2} \operatorname{sen}^2 \sigma - \frac{u^4}{8} \operatorname{sen}^4 \sigma + \frac{u^6}{16} \operatorname{sen}^6 \sigma - \frac{5u^8}{128} \operatorname{sen}^8 \sigma + \dots \right) d\sigma$$

Lembrando as integrais de WALLIS, dadas na forma geral pela eq.(5.1.18), esta série é escrita numa forma bem simples.

$$s = b \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} W_{2p} \quad (5.1.37)$$

Mas  $W_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  são dadas pela eq.(5.1.29), que substituída na eq. (5.1.37) e agrupados os termos semelhantes obtemos

$$s = b \left[ \left( 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3}{64} u^4 + \frac{5}{256} u^6 - \frac{175}{16384} u^8 + \dots \right) \sigma \right. \\ \left. \left( -\frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{16} - \frac{15}{512} u^6 + \frac{35}{2048} u^8 + \dots \right) \operatorname{sen} \sigma \cos 2\sigma_m + \right. \\ \left. \left( -\frac{u^4}{128} + \frac{3}{512} u^6 - \frac{35}{8192} u^8 + \dots \right) \operatorname{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m + \right. \\ \left. \left( -\frac{u^6}{1536} + \frac{5}{6144} u^8 + \dots \right) \operatorname{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m + \right. \\ \left. \left( -\frac{5}{65536} u^8 + \dots \right) \operatorname{sen} 4\sigma \cos 8\sigma_m + \dots \right] \quad (5.1.38)$$

Fazendo  $C_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  iguais a :

$$C_0 = 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3}{64} u^4 + \frac{5}{256} u^6 - \frac{175}{16384} u^8 + \dots$$

$$C_2 = -\frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{16} - \frac{15}{512} u^6 + \frac{35}{2048} u^8 + \dots$$

$$C_4 = -\frac{u^4}{128} + \frac{3}{512} u^6 - \frac{35}{8192} u^8 + \dots \quad (5.1.39)$$

$$C_6 = -\frac{u^6}{1536} + \frac{5}{6144} u^8 + \dots$$

$$C_8 = -\frac{5}{65536} u^8 + \dots$$

Obtemos, finalmente a seguinte expressão para o cálculo da distância geodésica

$$s = b (C_0 \sigma + C_2 \operatorname{sen} \sigma \cos 2\sigma_m + C_4 \operatorname{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m + C_6 \operatorname{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m + \\ (C_8 \operatorname{sen} 4\sigma \cos 8\sigma_m + \dots)) \quad (5.1.40)$$

ou

$$s = b \left\{ C_0 \sigma + \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} \operatorname{sen}(p\sigma) \cos(2p\sigma_m) \right\} \quad (5.1.40a)$$

O máximo efeito de  $u^8$  sobre a distância  $s$ , é menor que cinco décimos do milímetro, podendo portanto ser desprezado. Por esta razão os coeficientes  $C_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  assumem a forma

$$C_0 = 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3}{64} u^4 + \frac{5}{256} u^6$$

$$C_2 = -\frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{16} - \frac{15}{512} u^6 \quad (5.1.39a)$$

$$C_4 = -\frac{u^4}{128} + \frac{3}{512} u^6$$

$$C_6 = -\frac{u^6}{1536}$$

O máximo efeito sobre  $s$  do termo  $C_6$  é somente de treze décimos do milímetro.

5.2 MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

Mediante um relacionamento adequado dos elementos de um triângulo elipsoidal com os elementos correspondentes de um triângulo esférico pertencente a uma esfera tangente ao elipsóide ao longo da linha equatorial solucionamos o problema geodésico inverso.

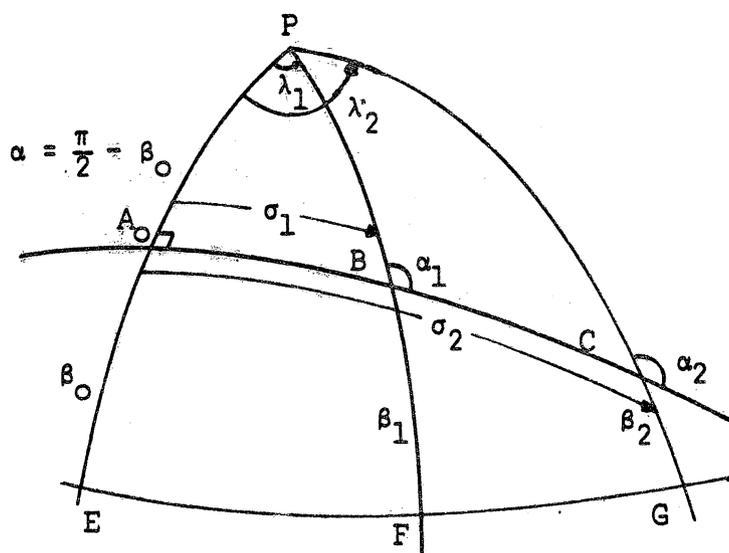


Fig.(5.2.1)

Consideremos o triângulo esférico BCP, fig.(5.2.1). Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os azimutes da linha geodésica BC em B e C, iguais aos correspondentes azimutes elipsoidais;  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  a diferença de longitude dos pontos B e C;  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  e  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$  sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  considerados positivos ou negativos caso estejam a leste ou a oeste do arco  $(\frac{\pi}{2} - \beta_0)$  perpendicular à linha geodésica e considerado de longitude nula;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as latitudes reduzidas das extremidades da linha geodésica.

Sendo desconhecido  $\lambda$ , a diferença de longitude sobre a esfera reduzida, resolvemos o triângulo esférico numa primeira aproximação fazendo  $\lambda = L = L_2 - L_1$  a fim de determinar a correção  $(\lambda - L)$ .

As latitudes reduzidas são obtidas através das fórmulas :

$$\text{sen}\beta = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \text{sen}\phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (5.2.1)$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (5.2.2)$$

a) Aplicando a fórmula dos quatro elementos no triângulo BCP, obtemos em primeira aproximação o valor do arco BC.

$$\cos \sigma = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda \quad (5.2.3)$$

$$\operatorname{sen} \sigma = \left[ (\operatorname{sen} \lambda \cos \beta_2)^2 + (\operatorname{sen} \beta_2 \cos \beta_1 - \operatorname{sen} \beta_1 \cos \beta_2 \cos \lambda)^2 \right]^{1/2}$$

sendo que  $\operatorname{sen} \sigma$  é positivo ou negativo caso seja  $\lambda$  positivo ou negativo respectivamente.

b) Aplicando a lei dos senos nos triângulos esféricos ABP e BCP, fig.(5.2.1) obtemos :

$$\cos \beta_0 = \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \beta_1$$

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{\cos \beta_2 \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \sigma}$$

$$\cos \beta_0 = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \sigma} \quad (5.2.4)$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta_0 = 1 - \cos^2 \beta_0 \quad (5.2.4a)$$

c) Mediante o emprego da regra de MAUDUIT nos mesmos triângulos citados acima temos :

$$\cos \sigma_2 = \frac{\operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos \sigma_1 = \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\operatorname{sen} \beta_0}$$

$$\cos 2\sigma_m = \frac{2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen}^2 \beta_0} - \cos \sigma \quad (5.2.5)$$

A partir da eq.(5.2.3) e eq.(5.2.5), através de relações trigonométricas segue

$$\operatorname{sen} 2\sigma = 2 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma$$

$$\operatorname{sen} 3\sigma = 3 \operatorname{sen} \sigma - 4 \operatorname{sen}^3 \sigma$$

$$\operatorname{sen} 4\sigma = 4 \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma - 8 \operatorname{sen}^3 \sigma \cos \sigma$$

.....

(5.2.6)

$$\cos 4\sigma_m = 2 \cos^2 2\sigma_m - 1$$

$$\cos 6\sigma_m = 4 \cos^3 2\sigma_m - 3 \cos 2\sigma_m$$

$$\cos 8\sigma_m = 2 \cos^2 4\sigma_m - 1$$

.....

d) Para obtermos a diferença  $(\lambda - L)$  na primeira aproximação, utilizemos a expressão da diferença de longitude sobre o elipsóide na forma diferencial dada pela eq.(4.1.7)

$$dL = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \frac{(1 + \epsilon^2 \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma)^{1/2}}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} d\sigma \quad (5.2.7)$$

Integrando a eq.(5.2.7) no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  temos

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \int \frac{(1 + u^2 \cos^2 \sigma)^{1/2}}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} d\sigma \quad (5.2.8)$$

onde

$$u^2 = \epsilon^2 \sin^2 \beta_0$$

O método mais simples para resolver esta integral, consiste em desenvolver o numerador do integrando em série de potências.

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \int \frac{\left( 1 + \frac{u^2}{2} \cos^2 \sigma - \frac{u^4}{8} \cos^4 \sigma + \frac{u^6}{16} \cos^6 \sigma + \dots \right)}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} d\sigma$$

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \left[ \int \frac{d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \frac{u^2}{2} \int \frac{\cos^2 \sigma d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \right. \\ \left. - \frac{u^4}{8} \int \frac{\cos^4 \sigma d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \frac{u^6}{16} \int \frac{\cos^6 \sigma d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \right. \\ \left. - \frac{5u^8}{128} \int \frac{\cos^8 \sigma d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \frac{7u^{16}}{256} \int \frac{\cos^{10} \sigma d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} + \dots \right] \quad (5.2.9)$$

Para resolver a eq.(5.2.9) , vamos empregar as integrais do tipo  $W_{2p}$  e  $I_{2p}$  .

Neste caso a integral do  $W_{2p}$  é definida do seguinte modo

$$W_{2p} = \int \cos^{2p} \sigma \, d\sigma \quad (5.2.10)$$

existindo a seguinte relação de recorrência

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} + \frac{\cos^{n-1} \sigma \, \text{sen} \sigma}{n} \quad (5.2.11)$$

A integral do tipo  $I_{2p}$  é assim definida

$$I_{2p} = \int \frac{\cos^{2p} \sigma \, d\sigma}{1 - \text{sen}^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} \quad (5.2.12)$$

existindo a seguinte relação entre a integral do tipo  $I_{2p}$  e a integral do tipo  $W_{2p}$  .

$$I_{2p+2} = \frac{I_{2p} - W_{2p}}{\text{sen}^2 \beta_0} \quad (5.2.13)$$

Relação de recorrência

$$I_0 = I_0$$

$$I_2 = \frac{I_0 - W_0}{\text{sen}^2 \beta_0} -$$

$$I_4 = \frac{I_0 - W_0}{\text{sen}^4 \beta_0} - \frac{W_2}{\text{sen}^2 \beta_0} \quad (5.2.14)$$

$$I_6 = \frac{I_0 - W_0}{\text{sen}^6 \beta_0} - \frac{W_2}{\text{sen}^4 \beta_0} - \frac{W_4}{\text{sen}^2 \beta_0}$$

$$I_8 = \frac{I_0 - W_0}{\text{sen}^8 \beta_0} - \frac{W_2}{\text{sen}^6 \beta_0} - \frac{W_4}{\text{sen}^4 \beta_0} - \frac{W_6}{\text{sen}^2 \beta_0}$$

.....

$$I_{2p} = \frac{I_0 - W_0}{\text{sen}^{2p} \beta_0} - \frac{W_2}{\text{sen}^{2p-2} \beta_0} - \frac{W_4}{\text{sen}^{2p-4} \beta_0} - \dots - \frac{W_{2p-2}}{\text{sen}^2 \beta_0}$$

Empregando as integrais do tipo  $I_{2p}$ , podemos escrever a eq.(5.2.9) numa forma mais simples

$$L = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \left[ I_0 + \frac{u^2}{2} I_2 - \frac{u^4}{8} I_4 + \frac{u^6}{16} I_6 - \frac{5u^8}{128} I_8 + \frac{7u^{10}}{256} I_{10} + \dots \right] \quad (5.2.15)$$

Substituindo na eq.(5.2.15)  $I_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  pelos seus respectivos valores dado pela relação de recorrência (5.2.14) obtemos

$$\begin{aligned} L = (1 - e^2)^{1/2} \cos^2 \beta_0 \left[ I_0 + \frac{u^2}{2} \left( \frac{I_0 - W_0}{\sin^2 \beta_0} \right) - \frac{u^4}{8} \left( \frac{I_0 - W_0}{\sin^4 \beta_0} - \frac{W_2}{\sin^2 \beta_0} \right) + \right. \\ \frac{u^6}{16} \left( \frac{I_0 - W_0}{\sin^6 \beta_0} - \frac{W_2}{\sin^4 \beta_0} - \frac{W_4}{\sin^2 \beta_0} \right) + \\ \left. - \frac{5u^8}{128} \left( \frac{I_0 - W_0}{\sin^8 \beta_0} - \frac{W_2}{\sin^6 \beta_0} - \frac{W_4}{\sin^4 \beta_0} - \frac{W_6}{\sin^2 \beta_0} \right) + \right. \\ \left. \frac{7u^{10}}{256} \left( \frac{I_0 - W_0}{\sin^{10} \beta_0} - \dots - \frac{W_8}{\sin^2 \beta_0} \right) + \dots \right] \quad (5.2.16) \end{aligned}$$

Substituindo na eq.(5.2.16)  $u^2$  pelo seu valor  $\epsilon^2 \sin^2 \beta_0$ , fazendo as simplificações possíveis e agrupando os termos semelhantes obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} L = (1 - e^2)^{1/2} \cos \beta_0 \left[ \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \frac{\epsilon^6}{16} - \frac{5\epsilon^8}{128} + \frac{7\epsilon^{10}}{256} + \dots \right) I_0 + \right. \\ \left( -\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} - \frac{7\epsilon^{10}}{256} + \dots \right) W_0 + \\ \left( \frac{\epsilon^4}{8} - \frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} - \frac{7\epsilon^{10}}{256} + \dots \right) W_2 \sin^2 \beta_0 + \\ \left( -\frac{\epsilon^6}{16} + \frac{5\epsilon^8}{128} - \frac{7\epsilon^{10}}{256} + \dots \right) W_4 \sin^4 \beta_0 + \\ \left( \frac{5\epsilon^8}{128} - \frac{7\epsilon^{10}}{256} + \dots \right) W_6 \sin^6 \beta_0 + \\ \left( \frac{7}{256} \epsilon^{10} + \dots \right) W_8 \sin^8 \beta_0 + \dots \right] \quad (5.2.17) \end{aligned}$$

Multiplicando os coeficientes que estão entre parênteses por  $(1 - e^2)^{1/2}$ , notamos que o coeficiente de  $I_0$  é a unidade, sendo os demais coeficientes dados por (5.1.24). Deste modo podemos escrever a eq.(5.2.17) numa forma mais simples

$$L = I_0 \cos \beta_0 + \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos \beta_0 \sin^{2p} \beta_0 \quad (5.2.18)$$

Calculemos agora o valor da primeira parcela da eq.(5.2.18) no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$

$$\begin{aligned} \cos \beta_0 I_0 &= \cos \beta_0 \int \frac{d\sigma}{1 - \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma} \\ &= \int - \frac{d(-\cos \beta_0 \operatorname{cosec}^2 \sigma)}{1 + (\cos \beta_0 \cotg \sigma)^2} = \operatorname{arc} \cotg (\cos \beta_0 \cotg \sigma) \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} \end{aligned}$$

$$\cos \beta_0 I_0 = \operatorname{arc} \cotg (\cos \beta_0 \cotg \sigma_2) - \operatorname{arc} \cotg (\cos \beta_0 \cotg \sigma_1) \quad (5.2.19)$$

Estudemos o triângulo esférico, fig.(5.2.2), levando em conta as convenções já estabelecidas.

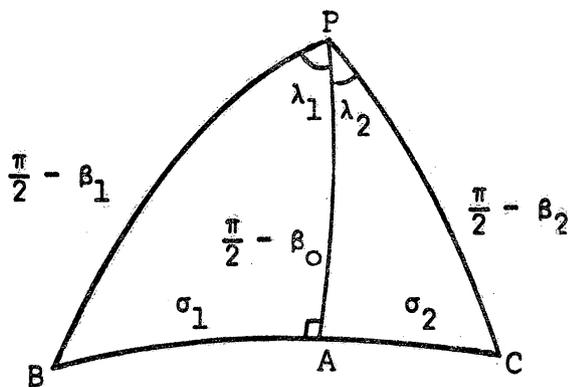


Fig.(5.2.2)

Mediante a aplicação da regra de MAUDUIT, obtemos as equações

$$\cotg \lambda_1 = \cos \beta_0 \cotg \sigma_1$$

$$\cotg \lambda_2 = \cos \beta_0 \cotg \sigma_2$$

$$\lambda_1 = \operatorname{arc} \cotg (\cos \beta_0 \cotg \sigma_1)$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arc} \cotg (\cos \beta_0 \cotg \sigma_2)$$

mas sabemos que  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ , logo

$$\lambda = \text{arc cotg} (\cos\beta_0 \cotg\sigma_2) - \text{arc cotg} (\cos\beta_0 \cotg\sigma_1) \quad (5.2.20)$$

Comparando a eq.(5.2.20) com a eq.(5.2.19) concluímos que  $\cos\beta_0 I_0 = \lambda$

portanto, a parcela  $\cos\beta_0 I_0$  nada mais é que a diferença de longitude de dois pontos sobre a esfera correspondente a dois pontos sobre o elispóide de revolução. Sendo assim, podemos escrever a eq.(5.2.18) do seguinte modo

$$L = \lambda + \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos\beta_0 \text{sen}^{2p}\beta_0 \quad (5.2.21)$$

A quantidade  $\sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \cos\beta_0 \text{sen}^{2p}\beta_0 = (\lambda - L)$  deve ser subtraída da diferença da longitude esférica  $\lambda$  para obtermos a diferença de longitude elipsoidal  $L$ .

$$L = \lambda - (\lambda - L)$$

$$(\lambda - L) = -\cos\beta_0 ( A_0 W_0 + A_2 W_2 \text{sen}^2\beta_0 + A_4 W_4 \text{sen}^4\beta_0 + A_6 W_6 \text{sen}^6\beta_0 + A_8 W_8 \text{sen}^8\beta_0 + \dots ) \quad (5.2.22)$$

As integrais  $W_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  têm o seguinte valor

$$W_0 = \int d\sigma = \sigma$$

$$W_2 = \int \cos^2\sigma d\sigma = \frac{\sigma}{2} + \frac{\text{sen}\sigma \cos 2\sigma_m}{2} \quad (5.2.23)$$

$$W_4 = \int \cos^4\sigma d\sigma = \frac{3\sigma}{8} + \frac{\text{sen}\sigma \cos 2\sigma_m}{2} + \frac{\text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m}{16}$$

$$W_6 = \int \cos^6\sigma d\sigma = \frac{5\sigma}{16} + \frac{15}{32} \text{sen}\sigma \cos 2\sigma_m + \frac{3}{32} \text{sen} 2\sigma \cos 4\sigma_m + \frac{\text{sen} 3\sigma \cos 6\sigma_m}{8}$$

.....

Substituindo as eq.(5.2.23) na eq.(5.2.22) obtemos

$$(\lambda - L) = \cos \beta_0 (B_0 \sigma + B_2 \sin \sigma \cos 2\sigma_m + B_4 \sin 2\sigma \cos 4\sigma_m + B_6 \sin 3\sigma \cos 6\sigma_m + B_8 \sin 4\sigma \cos 8\sigma_m + \dots) \quad (5.2.24)$$

onde os coeficientes  $B_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  são expressos em função dos coeficientes  $A_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$

$$B_0 = - \left( A_0 + \frac{A_2}{2} \sin^2 \beta_0 + \frac{3}{8} A_4 \sin^4 \beta_0 + \frac{5}{16} A_6 \sin^6 \beta_0 + \frac{35}{128} A_8 \sin^8 \beta_0 + \dots \right)$$

$$B_2 = - \left( \frac{A_2}{2} \sin^2 \beta_0 + \frac{A_4}{2} \sin^4 \beta_0 + \frac{15}{32} A_6 \sin^6 \beta_0 + \frac{7}{16} A_8 \sin^8 \beta_0 + \dots \right)$$

$$B_4 = - \left( \frac{A_4}{16} \sin^4 \beta_0 + \frac{3}{32} A_6 \sin^6 \beta_0 + \frac{7}{64} A_8 \sin^8 \beta_0 + \dots \right) \quad (5.2.25)$$

$$B_6 = - \left( \frac{A_6}{96} \sin^6 \beta_0 + \frac{A_8}{48} \sin^8 \beta_0 + \dots \right)$$

$$B_8 = - \left( \frac{A_8}{512} \sin^8 \beta_0 + \dots \right)$$

Sabemos que

$$A_0 = -f$$

$$A_2 = \frac{f^2}{2(1-f)} \quad (5.2.26)$$

$$A_4 = \frac{f^3(3f-4)}{8(1-f)^3}$$

$$A_6 = \frac{f^4(10-14f+5f^2)}{16(1-f)^5}$$

$$A_8 = \frac{8(1-f)^2(10f^4-14f^5+5f^6)-5(2f-f^2)^4}{128(1-f)^7}$$

.....

Substituindo os coeficientes  $A_{2p}$ ,  $p = 1, 2, \dots$  nas fórmulas (5.2.25) obtemos fórmulas semelhantes à (5.1.31a), desde que desprezemos os termos em  $f$  superiores à quarta ordem.

Obtido o valor de  $(\lambda - L)$  devemos calcular  $\lambda = L + (\lambda - L)$  e repetir as etapas anteriores tantas vezes quantas forem necessárias a fim de que obtenhamos um valor previamente estipulado, valor este que nos forneça uma determinada precisão.

e) Obtido o valor definitivo de  $\lambda$ , podemos calcular o azimute e o contra-azimute da linha geodésica, mediante a aplicação da trigonometria esférica no triângulo esférico BCP fig.(5.2.3).

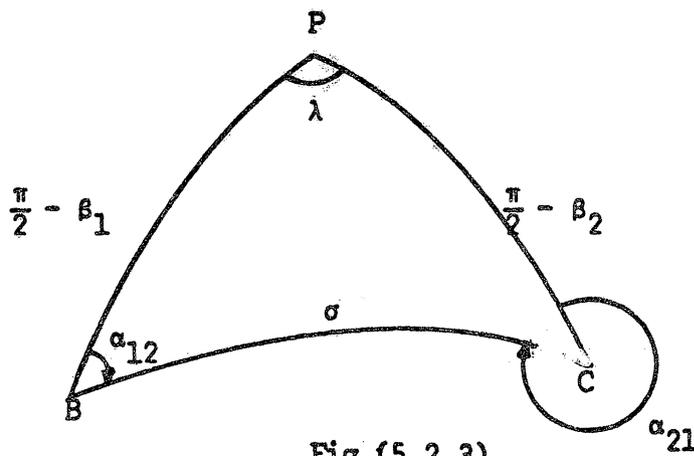


Fig.(5.2.3)

Chamemos o azimute de  $\alpha_{12}$  e o contra-azimute de  $\alpha_{21}$ . Para calculá-los, apliquemos a fórmula das cotangentes duas vezes ao triângulo BCP.

$$\cot \alpha_{12} = \frac{\cos \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{sen} \beta_1 \cos \lambda}{\operatorname{sen} \lambda} \quad (5.2.27)$$

$$\cot \alpha_{21} = \frac{\operatorname{sen} \beta_2 \cos \lambda - \cos \beta_2 \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{sen} \lambda} \quad (5.2.28)$$

sendo que  $\alpha_{12}$  e  $\alpha_{21}$  são contados a partir do norte, variam de  $0^\circ$  a  $\pi$  rad e  $\pi$  a  $2\pi$  rad respectivamente, desde que B esteja situado a oeste do ponto C.

Por outro lado, podemos obter o azimute e o contra-azimute mediante a utilização da lei dos senos e da fórmula dos cinco elementos, como foi feito no parâ-

grafo 5.1.

f) O cálculo da distância geodésica  $s$  é levado a efeito através da utilização da eq.(3.2.14).

$$ds = b(1 + \varepsilon^2 \sin^2 \beta_0 \cos^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.2.29)$$

Fazendo nesta equação  $\varepsilon^2 \sin^2 \beta_0 = u^2$ , e desenvolvendo-a mediante a utilização da série binomial, temos :

$$s = b \int \left( 1 + \frac{u^2}{2} \cos^2 \sigma - \frac{u^4}{8} \cos^4 \sigma + \frac{u^6}{16} \cos^6 \sigma - \frac{5u^8}{128} \cos^8 \sigma + \dots \right) d\sigma$$

Lembrando as integrais de WALLIS, dadas na forma geral pela eq.(5.2.10), a série acima assume a forma :

$$s = b \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} W_{2p} \quad (5.2.30)$$

Mas  $W_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  são dadas pelas fórmulas (5.2.23), que substituídas na fórmula (5.2.30) e agrupando os termos semelhantes, obtemos :

$$s = b \left[ \left( 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{64} + \frac{5u^6}{256} - \frac{175u^8}{16384} + \dots \right) \sigma + \right. \\ \left. \left( \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + \frac{15u^6}{512} - \frac{35u^8}{2048} + \dots \right) \sin \sigma \cos 2\sigma_m + \right. \\ \left. \left( -\frac{u^4}{128} + \frac{3u^6}{512} - \frac{35u^8}{8192} + \dots \right) \sin 2\sigma \cos 4\sigma_m + \right. \\ \left. \left( \frac{u^6}{1536} - \frac{5u^8}{6144} + \dots \right) \sin 3\sigma \cos 6\sigma_m + \right. \\ \left. \left( -\frac{5u^8}{65536} + \dots \right) \sin 4\sigma \cos 8\sigma_m + \dots \right] \quad (5.2.31)$$

A fórmula (5.2.31) pode ser escrita da seguinte forma :

$$s = b \left\{ C_0 \sigma + \sum_{p=1}^{\infty} C_{2p} \operatorname{sen}(p\sigma) \cos(2p\sigma_m) \right\} \quad (5.2.32)$$

sendo

$$C_0 = 1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{64} + \frac{5u^6}{256} - \frac{175u^8}{16384} + \dots$$

$$C_2 = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + \frac{15u^6}{512} - \frac{35u^8}{2048} + \dots$$

$$C_4 = \frac{u^4}{128} + \frac{3u^6}{512} - \frac{35u^8}{8192} + \dots$$

$$C_6 = \frac{u^6}{1536} - \frac{5u^8}{6144} + \dots$$

$$C_8 = -\frac{5u^8}{65536} + \dots$$

.....

onde

$$u^2 = \epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0$$

5.3 MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, UTILIZANDO O ALGORÍTMO DE BESSEL, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

A solução do problema geodésico inverso é dada através de relações entre os elementos de um triângulo elipsoidal com os elementos de um triângulo esférico pertencente a esfera reduzida.

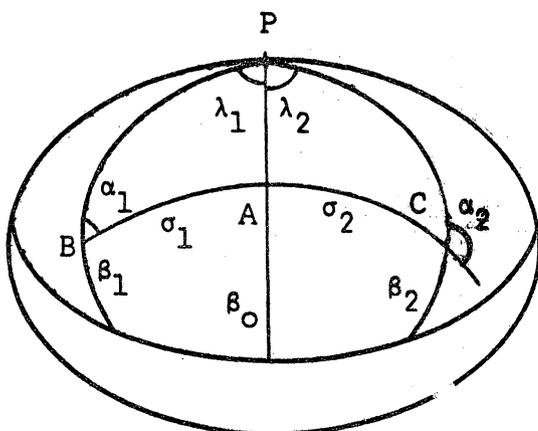


Fig.(5.3.1)

Consideremos o triângulo esférico BCP, fig.(5.3.1). Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os azimutes da linha geodésica BC nos pontos B e C, iguais aos correspondentes azimutes elipsoidais,  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  a diferença de longitude dos pontos B e C;  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  e  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$  sendo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  considerados positivos ou negativos caso estejam a leste ou a oeste do meridiano sobre o qual a linha geodésica tem seu ponto de máxima latitude reduzida  $\beta_0$ ;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as latitudes reduzidas das extremidades da linha geodésica e obtidas através das equações

$$\text{sen}\beta = \frac{(1 - e^2) \text{sen}\phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi)^{1/2}} \quad (5.3.1)$$

$$\text{cos}\beta = \frac{\text{cos}\phi}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi)^{1/2}}$$

As convenções estabelecidas aqui são idênticas às do parágrafo 5.3, assim sendo são verdadeiras as seguintes equações:

$$\cos\sigma = \text{sen}\beta_1 \text{sen}\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\lambda \quad (5.3.2)$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2 \text{sen}\lambda}{\text{sen}\sigma} \quad (5.3.3)$$

$$\text{sen}^2\beta_0 = 1 - \cos^2\beta_0$$

$$\cos 2\sigma_m = \frac{2 \text{sen}\beta_1 \text{sen}\beta_2}{\text{sen}^2\beta_0} - \cos\sigma \quad (5.3.4)$$

Devemos obter a diferença de  $\lambda$  dos pontos B e C sobre a esfera reduzida para ser possível resolver o triângulo BCP.

Para a obtenção da diferença de longitude  $\lambda$ , determinemos a quantidade  $(\lambda - L)$  a partir da eq.(4.1.17).

$$dL = d\lambda - \cos\beta_0 (1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2} \frac{(1 + k^2 \cotg^2\beta_0)^{1/2} - (1 - k^2 \text{sen}^2\sigma)^{1/2}}{1 - \text{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma} d\sigma \quad (5.3.5)$$

$$\text{onde } k^2 = \frac{e^2 \text{sen}^2\beta_0}{1 - e^2 \cos^2\beta_0}$$

Integrando a eq.(5.3.5) no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  temos

$$(\lambda - L) = \cos\beta_0 (1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2} \int \frac{(1 + k^2 \cotg^2\beta_0)^{1/2} - (1 - k^2 \text{sen}^2\sigma)^{1/2}}{1 - \text{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma} d\sigma \quad (5.3.6)$$

Para efetuarmos esta integração fazemos uso dos seguintes artifícios: Depois de um desenvolvimento em série do numerador obtemos

$$\begin{aligned} (1 + k^2 \cotg^2\beta_0)^{1/2} - (1 - k^2 \text{sen}^2\sigma)^{1/2} = & \frac{k^2}{2} \left[ (\text{sen}^2\sigma + \cotg^2\beta_0) + \frac{k^2}{4} (\text{sen}^4\sigma - \cotg^4\beta_0) \right. \\ & + \frac{k^4}{8} (\text{sen}^6\sigma + \cotg^6\beta_0) + \frac{5k^6}{64} (\text{sen}^8\sigma - \cotg^8\beta_0) + \\ & \left. \frac{7k^8}{128} (\text{sen}^{10}\sigma + \cotg^{10}\beta_0) + \frac{63k^{10}}{1536} (\text{sen}^{12}\sigma - \cotg^{12}\beta_0) + \dots \right] \quad (5.3.7) \end{aligned}$$

O denominador pode ser escrito assim

$$1 - \text{sen}^2\beta_0 \cos^2\sigma = \text{sen}^2\beta_0 (\text{sen}^2\sigma + \cotg^2\beta_0) \quad (5.3.8)$$

Substituindo as identidades (5.3.7) e (5.3.8) na eq.(5.3.6)

$$\begin{aligned}
 (\lambda-L) = & \frac{\cos\beta_0 (1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2}}{2 \operatorname{sen}^2\beta_0} k^2 \int \left[ 1 + \frac{k^2}{4} \left( \frac{\operatorname{sen}^4\sigma - \operatorname{cotg}^4\beta_0}{\operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{cotg}^2\beta_0} \right) + \right. \\
 & \frac{k^4}{8} \left( \frac{\operatorname{sen}^6\sigma + \operatorname{cotg}^6\beta_0}{\operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{cotg}^2\beta_0} \right) + \frac{5k^6}{64} \left( \frac{\operatorname{sen}^8\sigma - \operatorname{cotg}^8\beta_0}{\operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{cotg}^2\beta_0} \right) + \\
 & \left. \frac{7k^8}{256} \left( \frac{\operatorname{sen}^{10}\sigma + \operatorname{cotg}^{10}\beta_0}{\operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{cotg}^2\beta_0} \right) + \frac{63k^{10}}{1536} \left( \frac{\operatorname{sen}^{12}\sigma - \operatorname{cotg}^{12}\beta_0}{\operatorname{sen}^2\sigma + \operatorname{cotg}^2\beta_0} \right) + \dots \right] d\sigma \quad (5.3.9)
 \end{aligned}$$

Sabemos que  $k^2 = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2\beta_0}{(1 - e^2 \cos^2\beta_0)}$ , assim o fator multiplicativo da eq.(5.3.9)

pode ser escrito

$$\frac{\cos\beta_0 (1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2}}{2 \operatorname{sen}^2\beta_0} \cdot k^2 = \frac{e^2 \cos\beta_0}{2(1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2}} \quad (5.3.10)$$

Para calcular esta série de integrais, consideremos a divisão de  $x^{np} \pm a^{np}$  por  $x^p + a^p$  onde  $n$  e  $p$  são números inteiros e positivos. Através da álgebra demonstramos que  $x^{np} - a^{np}$  é divisível por  $x^p + a^p$  quando  $n$  é par e  $x^{np} + a^{np}$  é divisível por  $x^p + a^p$  quando  $n$  é ímpar. Pois bem, quando estas condições são preenchidas, temos as seguintes fórmulas para as divisões citadas acima.

$$\frac{x^{np} - a^{np}}{x^p + a^p} = x^{np-p} - a^p x^{np-2p} + a^{2p} x^{np-3p} - a^{3p} x^{np-4p} + \dots - a^{np-p}$$

sendo  $n$  par ; e

$$\frac{x^{np} + a^{np}}{x^p + a^p} = x^{np-p} - a^p x^{np-2p} + a^{2p} x^{np-3p} - a^{3p} x^{np-4p} + \dots + a^{np-p}$$

sendo  $n$  ímpar.

Fazendo  $x = \text{sen } \sigma$  ,  $a = \text{cotg } \beta_0$  e  $p = 2$  obtemos as identidades

$$\frac{\text{sen}^4 \sigma - \text{cotg}^4 \beta_0}{\text{sen}^2 \sigma + \text{cotg}^2 \beta_0} = \text{sen}^2 \sigma - \text{cotg}^2 \beta_0$$

$$\frac{\text{sen}^6 \sigma + \text{cotg}^6 \beta_0}{\text{sen}^2 \sigma + \text{cotg}^2 \beta_0} = \text{sen}^4 \sigma - \text{sen}^2 \sigma \text{cotg}^2 \beta_0 + \text{cotg}^4 \beta_0 \quad (5.3.11)$$

$$\frac{\text{sen}^8 \sigma - \text{cotg}^8 \beta_0}{\text{sen}^2 \sigma + \text{cotg}^2 \beta_0} = \text{sen}^6 \sigma - \text{sen}^4 \sigma \text{cotg}^2 \beta_0 + \text{sen}^2 \sigma \text{cotg}^4 \beta_0 - \text{cotg}^6 \beta_0$$

.....

Substituindo as identidades (5.3.10)e(5.3.11) na eq.(5.3.9) , obtemos

$$(\lambda - L) = \frac{e^{2 \cos \beta_0}}{2(1 - e^{2 \cos^2 \beta_0})^{1/2}} \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} W_{2p} \quad (5.3.12)$$

onde  $W_{2p}$  são as integrais de WALLIS e os primeiros coeficientes  $A_{2p}$  ,  $p = 0,1,2$

... são

$$A_0 = 1 - \frac{k^2}{4} \text{cotg}^2 \beta_0 + \frac{k^4}{8} \text{cotg}^4 \beta_0 - \frac{5k^6}{64} \text{cotg}^6 \beta_0 + \frac{7k^8}{256} \text{cotg}^8 \beta_0 - \frac{63k^{10}}{1536} \text{cotg}^{10} \beta_0 + \dots$$

$$A_2 = \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{8} \text{cotg}^2 \beta_0 + \frac{5k^6}{64} \text{cotg}^4 \beta_0 - \frac{7k^8}{256} \text{cotg}^6 \beta_0 + \frac{63k^{10}}{1536} \text{cotg}^8 \beta_0 + \dots$$

$$A_4 = \frac{k^4}{8} - \frac{5k^6}{64} \text{cotg}^2 \beta_0 + \frac{7k^8}{256} \text{cotg}^4 \beta_0 - \frac{63k^{10}}{1536} \text{cotg}^6 \beta_0 + \dots$$

$$A_6 = \frac{5k^6}{64} - \frac{7k^8}{256} \text{cotg}^2 \beta_0 + \frac{63k^{10}}{1536} \text{cotg}^4 \beta_0 + \dots$$

$$A_8 = \frac{7k^8}{256} - \frac{63k^{10}}{1536} \text{cotg}^2 \beta_0 + \dots \quad (5.3.13)$$

.....

Lembrando que  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ ,  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$  é

$$\text{sen } 2\sigma_2 + \text{sen } 2\sigma_1 = 2 \text{sen} \left( \frac{2\sigma_2 + 2\sigma_1}{2} \right) \cos \left( \frac{2\sigma_2 - 2\sigma_1}{2} \right)$$

Obtemos a seguinte expressão para a integração da eq.(5.3.12).

$$(\lambda-L) = \frac{e^2 \cos \beta_0}{2(1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2}} \left( B_0 \sigma + \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p} \text{sen } p\sigma \cdot \cos 2 p\sigma_m \right) \quad (5.3.14)$$

Os coeficientes  $B_{2p}$ ,  $p = 0,1,2, \dots$  são obtidos em função dos coeficientes

$A_{2p}$ ,  $p = 0,1,2, \dots$ , sendo os primeiros dados a seguir :

$$B_0 = A_0 + \frac{A_2}{2} + \frac{3}{8} A_4 + \frac{5}{16} A_6 + \frac{35}{128} A_8 + \dots$$

$$B_2 = -\frac{A_2}{2} - \frac{A_4}{4} - \frac{15}{32} A_6 - \frac{7}{16} A_8 + \dots$$

$$B_4 = \frac{A_4}{16} + \frac{3}{32} A_6 + \frac{7}{64} A_8 + \dots \quad (5.3.15)$$

$$B_6 = -\frac{A_6}{96} - \frac{5}{48} A_8 - \dots$$

$$B_8 = \frac{A_8}{512} + \dots$$

.....

Encontramos a primeira diferença  $(\lambda - L)$ , fazendo na eq.(5.3.14) numa primeira aproximação  $\lambda = L$ . A seguir obtemos  $\lambda = L + (\lambda - L)$  e encontramos num processo iterativo até obter definitivamente  $\lambda$ . Obtido o valor definitivo de  $\lambda$ , podemos resolver o triângulo esférico BCP, fig.(5.3.1), calculando os valores finais de  $\sigma$ ,  $\sigma_m$  e  $\beta_0$  e assim calcular tanto o azimute quanto o contra-azimute mediante a utilização das fórmulas (5.2.27), (5.2.28) ou (5.1.32) e (5.1.33).

O comprimento  $s$  da linha geodésica é dado pela eq.(3.2.18)

$$ds = a \left( \frac{1 - e^2}{1 - k^2} \right)^{1/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.3.16)$$

Lembrando que  $k^2 = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}$  temos

$$ds = a (1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.3.17)$$

Integrando no intervalo  $[\sigma_1, \sigma_2]$  obtemos

$$s = a (1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2} \int (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \sigma)^{1/2} d\sigma \quad (5.3.18)$$

Desenvolvendo o integrando em série de potências e integrando cada parcela da série resultante obtemos o comprimento da linha geodésica

$$s = a(1 - e^2 \cos^2 \beta_0)^{1/2} \left( C_0 \sigma + \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right) \quad (5.3.19)$$

sendo os coeficientes  $C_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$  iguais a

$$C_0 = 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} + \frac{5k^6}{256} - \frac{175k^8}{16384} + \frac{441k^{10}}{65536} - \dots$$

$$C_2 = \frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{16} - \frac{15k^6}{512} + \frac{35k^8}{2048} - \frac{735k^{10}}{65536} + \dots \quad (5.3.20)$$

$$C_4 = -\frac{k^4}{128} + \frac{3k^6}{512} - \frac{35k^8}{8192} + \frac{105k^{10}}{32768} - \dots$$

$$C_6 = -\frac{k^6}{1536} + \frac{5k^8}{6144} - \frac{105k^{10}}{131072} + \dots$$

$$C_8 = -\frac{5k^8}{65536} - \frac{35k^{10}}{262144} + \dots$$

.....



## CAPÍTULO 6

### 6. SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA GEODÉSICO INVERSO

Conhecidas as coordenadas elipsóidicas  $(\phi, L)$  de dois pontos podemos resolver o problema geodésico inverso mediante a utilização das fórmulas desenvolvidas anteriormente. Devido estas fórmulas necessitarem de processo iterativo afim de que o problema geodésico inverso seja solucionado é necessário utilizar u'a máquina que efetue tantas iterações quantas forem necessárias no menor tempo possível. Com esta finalidade vamos apresentar resumidamente as fórmulas com os seus respectivos programas. Procuramos desenvolver programas em linguagem FORTRAN IV que solucionem o problema em quaisquer situações possíveis, isto é, os dois pontos podem pertencer a um mesmo meridiano, ou a uma linha geodésica qualquer que o problema será solucionado, sendo que a única preocupação do usuário será o fornecimento dos dados.

#### 6.1 PROGRAMA PRINCIPAL PARA O PROCESSAMENTO DOS DADOS

O problema em questão pode ser definido da seguinte maneira :

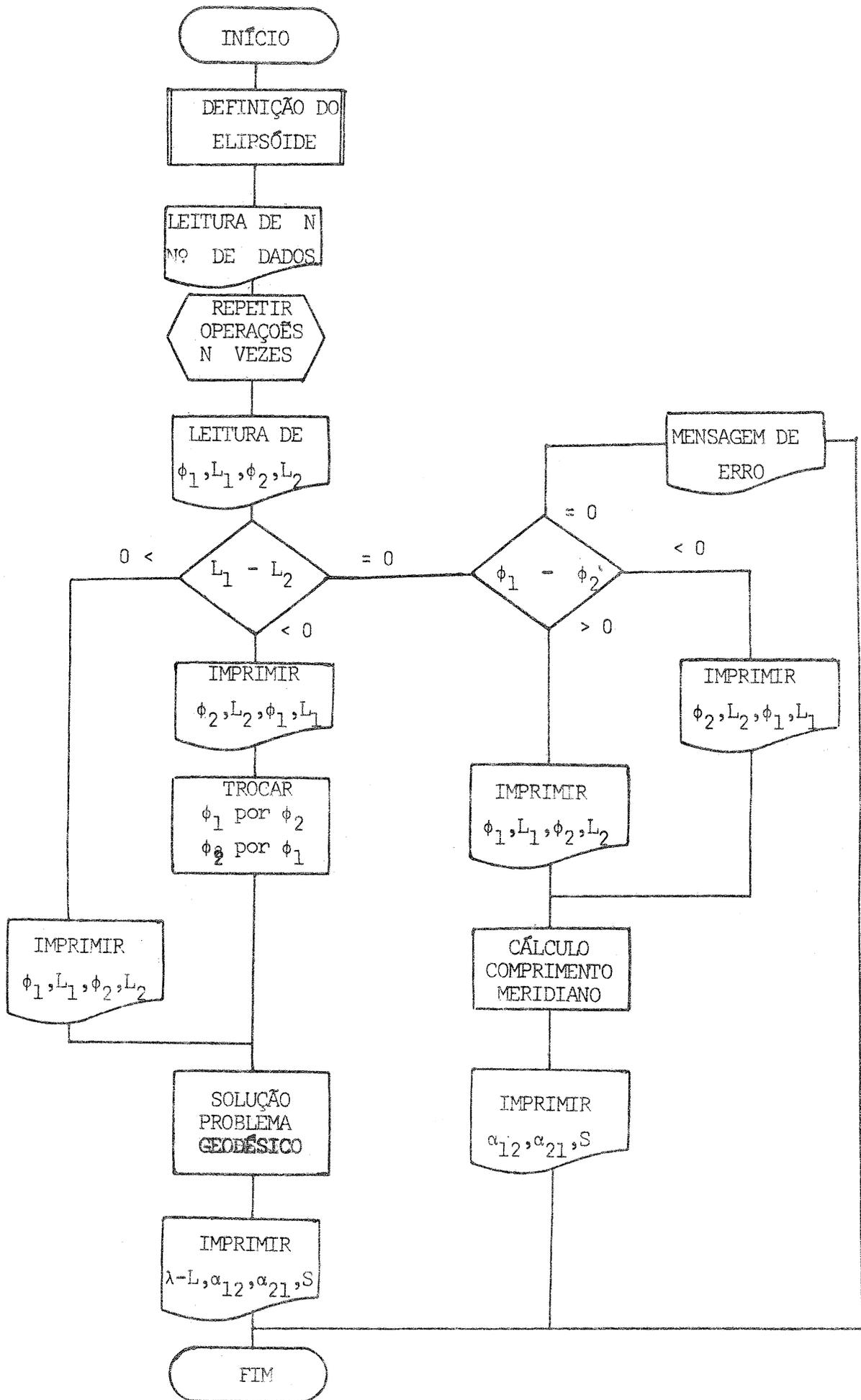
Dados dois pontos  $A_1$  e  $A_2$  definidos respectivamente pelas suas coordenadas elipsóidicas  $(\phi_1, L_1)$  e  $(\phi_2, L_2)$  determinar :

- a. O comprimento  $S$  da geodésica definida pelos pontos  $A_1$  e  $A_2$  ;
- b. O azimute  $\alpha_{12}$  contado a partir do norte no sentido horário;
- c. O contra-azimute  $\alpha_{21}$  contado a partir do norte no sentido horário.

O PROGRAMA PRINCIPAL TEM AS SEGUINTE FINALIDADES :

- a. Definir através do comando DATA o elipsóide que está sendo utilizado;
- b. Leitura do número de dados através de um cartão utilizando duas colunas;
- c. Leitura dos dados, isto é, latitude, longitude do ponto  $A_1$  e latitude, longitude do ponto  $A_2$  num mesmo cartão, sendo reservados um campo de quatro colunas para os graus, um campo de três colunas para os minutos e um campo de sete colunas para os segundos, num total de 56 colunas por cartão;
- d. Verificar se os pontos pertencem a um mesmo meridiano, ou a uma linha geodésica qualquer e em cada caso fazer o devido processamento;
- e. Imprimir os resultados.

FLUXOGRAMA



PROGRAMA PRINCIPAL

```
DATA A, E, C, EPS/.6378388E+7, .819918899E-1, .31415926536E+1, 1.E-12/
F=1.-SQRT(1.-E)+SQRT(1.+E)
B=A*(1.-F)
E1=((A-B)/B)*(A/B+1.)
READ(2,9)N
DO 15 I=1,N,1
READ(2,10)GL,GM1,S1,G11,GM11,S11,GM,GM2,S2,G22,GM22,S22
G1=(GL+GM1/60.+S1/3600.)*C/180.
G2=(GM+GM2/60.+S2/3600.)*C/180.
GLON1=(G11+GM11/60.+S11/3600.)*C/180.
GLON2=(G22+GM22/60.+S22/3600.)*C/180.
IF(GLON1-GLON2)6,1,7
1 IF(G1-G2)3,5,2
2 WRITE(5,11)GL,GM1,S1,G11,GM11,S11,GM,GM2,S2,G22,GM22,S22
GO TO 4
3 WRITE(5,11)GM,GM2,S2,G22,GM22,S22,GL,GM1,S1,G11,GM11,S11
4 CALL MERID(G1,G2,E,A,S,IAZ,ICZ)
WRITE(5,12)IAZ,ICZ,S
GO TO 15
5 WRITE(5,11)GM,GM2,S2,G22,GM22,S22,GL,GM1,S1,G11,GM11,S11
WRITE(5,14)
GO TO 15
6 WRITE(5,11)GM,GM2,S2,G22,GM22,S22,GL,GM1,S1,G11,GM11,S11
TD=G1
G1=G2
G2=TD
GO TO 8
7 WRITE(5,11)GL,GM1,S1,G11,GM11,S11,GM,GM2,S2,G22,GM22,S22
8 DLONG=GLON2-GLON1
CALL INVER(E1,DLONG,E,G1,G2,EPS,F,B,S,C,MD,SD,I1,M1,S11,I2,M2,S22)
WRITE(5,13)MD,SD,I1,M1,S11,I2,M2,S22,S
9 FORMAT(12)
10 FORMAT(4(F4.0,F3.0,F7.4))
11 FORMAT(//22X'LATITUDE'14X'LONGITUDE'/5X'PONTO 1'F7.0,F6.0,F9.4,F9
1.0,F6.0,F9.4/5X'PONTO 2'F7.0,F6.0,F9.4,F9.0,F6.0,F9.4//)
12 FORMAT( 9X'AZIMUTE'9X'CONTRA-AZIMUTE'9X'DISTANCIA'/9X,16,16X,13,1
10X,E17.9,' M',//)
13 FORMAT(5X'DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DI
1FERENCA'/5X'DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO'
2//21X,I2' MIN 'F8.5' S'//9X'AZIMUTE'9X'CONTRA-AZIMUTE'9X'DISTANCIA
3A'/4X,14,14,F9.4,16,14,F9.4,4X,E17.9' M'//)
14 FORMAT(//5X'PONTOS COINCIDENTES'//)
15 CONTINUE
CALL EXIT
END
```

## 6.2 SUBPROGRAMA PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE UM ARCO DE

MERIDIANO DEFINIDO POR DOIS PONTOS SITUADOS NO MESMO QUADRANTE

FÓRMULAS NECESSÁRIAS :

1. Determinação da latitude reduzida para cada ponto

$$\text{sen}\beta_i = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \text{sen}\phi_i}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_i)^{1/2}}$$

$$\text{cos}\beta_i = \frac{\text{cos}\phi_i}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_i)^{1/2}}$$

2. Determinação do  $\text{sen}\beta$  e do  $\text{cos}\beta_m$

$$\beta = \beta_{i+1} - \beta_i$$

$$\beta_m = \beta_{i+1} + \beta_i$$

$$\text{sen}\beta = \text{sen}\beta_{i+1} \text{cos}\beta_i - \text{sen}\beta_i \text{cos}\beta_{i+1}$$

$$\text{sen } 2\beta = 2 \text{sen}\beta \text{cos}\beta$$

$$\text{sen } 3\beta = 3 \text{sen}\beta - 4 \text{sen}^3\beta$$

$$\text{sen } 4\beta = 2 \text{sen}^2\beta \text{cos}^2\beta$$

$$\text{cos}\beta_m = \text{cos}\beta_{i+1} \text{cos}\beta_i - \text{sen}\beta_i \text{sen}\beta_{i+1}$$

$$\text{cos } 2\beta_m = 2 \text{cos}^2\beta_{m-1}$$

$$\text{cos } 3\beta_m = 4 \text{cos}^3\beta_m - 3 \text{cos}\beta_m$$

$$\text{cos } 4\beta_m = 2 \text{cos}^2 2\beta_{m-1}$$

3. Cálculo do comprimento

$$m = a \left\{ A_0 \beta - \sum_{p=1}^4 A_p \text{sen } p\beta \text{cos } p\beta_m \right\}$$

sendo  $A_p$ ,  $p = 0, \dots, 4$  dados pelas fórmulas (2.7.4a.).

SUBPROGRAMA

```

SUBROUTINE MERID(G1,G2,E,A,S,IAZ,ICZ)
IF(G1-G2)2,1,1
1 GT=G1
  G1=G2
  G2=GT
2 S1=SQRT(1.-E*E)*SIN(G1)/(SQRT(1.-E*SIN(G1))*SQRT(1.+E*SIN(G1)))
  S2=SQRT(1.-E*E)*SIN(G2)/(SQRT(1.-E*SIN(G2))*SQRT(1.+E*SIN(G2)))
  C1=COS(G1)/(SQRT(1.-E*SIN(G1))*SQRT(1.+E*SIN(G1)))
  C2=COS(G2)/(SQRT(1.-E*SIN(G2))*SQRT(1.+E*SIN(G2)))
  X1=S2*C1-S1*C2
  Y1=C1*C2-S1*S2
  X2=2.*X1*SQRT(1.-X1*X1)
  Y2=2.*Y1*Y1-1.
  X3=3.*X1-4.*X1**3
  Y3=4.*Y1**3-3.*Y1
  X4=(4.*X1-8.*X1**3)*SQRT(1.-X1*X1)
  Y4=2.*X2*X2-1.
  XO=ATAN(X1/SQRT(1.-X1*X1))
  A0=1.-E*E/4.-3.*E**4/64.-5.*E**6/256.-175.*E**8/16384.
  A1=-E*E/4.-E**4/16.-15.*E**6/512.-35.*E**8/2048.
  A2=-E**4/128.-3.*E**6/512.-35.*E**8/8192.
  A3=-E**6/96.-5.*E**8/6144.
  A4=-5.*E**8/65536.
  S=A*(A0*X0+A1*X1*Y1+A2*X2*Y2+A3*X3*Y3+A4*X4*Y4)
  IAZ=180
  ICZ=360
  RETURN
  END

```

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	0.	10.	45.6789	48.	58.	38.3300
PONTO 2	0.	0.	0.0000	48.	58.	38.3300

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
180	360	0.198322931E 05 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	24.	30.	0.0000	45.	45.	40.0000
PONTO 2	24.	0.	0.0000	45.	45.	40.0000

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
180	360	0.553819249E 05 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	25.	50.	5.0000	25.	35.	35.0000
PONTO 2	25.	40.	5.0000	25.	35.	35.0000

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
180	360	0.184643864E 05 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	45.	25.	55.4400	30.	30.	30.0000
PONTO 2	15.	20.	40.3300	30.	30.	30.0000

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
180	360	0.333592408E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	90.	0.	0.0000	0.	0.	0.0000
PONTO 2	0.	0.	0.0000	0.	0.	0.0000

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
180	360	0.100016151E 08 M

6.3 SUBPROGRAMAS PARA O CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEODÉSICA, AZIMUTE E CONTRA-AZIMUTE

Como foram desenvolvidos anteriormente métodos diferentes para a solução do problema geodésico inverso, vamos colocar nesta parte alguns subprogramas, sendo que qualquer um deles que for utilizado resolverá o problema em questão.

6.3.1 SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR O AZIMUTE EQUATORIAL DA GEODÉSICA

1. Latitude reduzida  $\beta_i$  para cada ponto

$$\text{sen}\beta_i = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \text{sen}\phi_i}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_i)^{1/2}}$$

$$\text{cos}\beta_i = \frac{\text{cos}\phi_i}{(1 - e^2 \text{sen}^2\phi_i)^{1/2}}$$

2. Arco esférico  $\sigma = \sigma_{i+1} - \sigma_i$  entre os dois pontos

$$\text{cos}\sigma = \text{sen}\beta_i \text{sen}\beta_{i+1} + \text{cos}\beta_i \text{cos}\beta_{i+1} \text{cos}\lambda$$

sendo  $\lambda = L = L_{i+1} - L_i$  na primeira iteração

3. Azimute equatorial  $\alpha$

$$\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta_i \text{cos}\beta_{i+1} \text{sen}\lambda / \text{sen}\sigma$$

4. Arco esférico  $2\sigma_m = \sigma_i + \sigma_{i+1}$

$$\text{cos } 2\sigma_m = \text{cos}\sigma - 2 \text{sen}\beta_i \text{sen}\beta_{i+1} / \text{cos}^2\alpha$$

5. Obtenção de  $(\lambda - L)$  por processo iterativo

$$(\lambda - L) = \{ B_0\sigma + \sum_{p=1}^4 B_{2p} \text{sen } p\sigma \text{cos } 2p\sigma_m \} \text{sen}\alpha$$

onde

$$B_0 = -A_0 - \frac{A_2}{2} \cos^2 \alpha - \frac{3}{8} A_4 \cos^4 \alpha - \frac{5}{16} A_6 \cos^6 \alpha - \frac{35}{128} A_8 \cos^8 \alpha$$

$$B_2 = \frac{A_2}{2} \cos^2 \alpha + \frac{A_4}{2} \cos^4 \alpha + \frac{15}{32} A_6 \cos^6 \alpha + \frac{7}{16} A_8 \cos^8 \alpha$$

$$B_4 = -\frac{A_4}{16} \cos^4 \alpha - \frac{3}{32} A_6 \cos^6 \alpha - \frac{7}{64} A_8 \cos^8 \alpha$$

$$B_6 = \frac{1}{96} A_6 \cos^6 \alpha + \frac{100}{48} A_8 \cos^8 \alpha$$

$$B_8 = -\frac{A_8}{512} \cos^8 \alpha$$

sendo  $A_{2p}$ ,  $p = 0, 1, 2, 3, 4$  dados pela eq.(5.1.24b)

#### 6. Obtenção do azimute e contra-azimute

$$\cot \alpha_{12} = (\cos \beta_i \operatorname{tg} \beta_{i+1} - \operatorname{sen} \beta_i \cos \lambda) / \operatorname{sen} \lambda$$

$$\cot \alpha_{21} = (\operatorname{sen} \beta_{i+1} \cos \lambda - \cos \beta_{i+1} \operatorname{tg} \beta_i) / \operatorname{sen} \lambda$$

sendo  $\lambda = L + (\lambda - L)$ ,  $0 < \alpha_{12} < \pi$  e  $\pi < \alpha_{21} < 2\pi$

#### 7. Obtenção do comprimento da geodésica

$$s = b \left( C_0 \sigma + \sum_{p=1}^4 C_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right)$$

sendo os coeficientes  $C_{2p}$ ,  $p = 0, 1, \dots, 4$  dados pela eq.(5.1.39):

SUBPROGRAMA

```

SUBROUTINE INVER(E1,DLONG,E,G1,G2,EP S,F,B,S,C,MD,SD,I1,M1,S11,I2,M
12,S22)
A0=-F
A2=F*F/(2.*(1.-F))
A4=F**3*(3.*F-4.)/(8.*(1.-F)**3)
A6=(10.-14.*F+5.*F*F)*F**4/(16.*(1.-F)**5)
A8=(8.*(1.-F)**2*(10.-14.*F+5.*F*F)*F**4-5.*(2.*F-F*F)**4)/(128.*(
11.-F)**7)
S1=SIN(G1)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
S2=SIN(G2)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
CS1=COS(G1)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
CS2=COS(G2)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
XL=ABS(DLONG)
D=0.0
1 CS=S1*S2+CS1*CS2*COS(XL)
SS=SQRT(1.-CS)*SQRT(1.+CS)
SG=ATAN(SS/CS)
IF(SG)2,2,3
2 SG=C+SG
3 SA=CS1*CS2*SIN(XL)/SS
X=(1.-SA)*(1.+SA)
X0=2.*SS*CS
X1=3.*SS-4.*SS**3
X2=4.*SS*CS-8.*SS**3*CS
X3=CS-2.*S1*S2/X
X4=2.*X3**2-1.
X5=4.*X3**3-3.*X3
X6=2.*X4**2-1.
IF(ABS(D-XL)-EPS)5,4,4
4 B0=-A0-A2*X/2.-3.*A4*X*X/8.-5.*A6*X**3/16.-35.*A8*X**4/128.
B2=(A2*X+A4*X*X)/2.+15.*A6*X**3/32.+7.*A8*X**4/16.
B4=-A4/16.-3.*A6*X**3/32.-7.*A8*X**4/64.
B6=(A6/96.)*X**3+A8*X**4/48.
B8=-A8*X**4/512.
D=XL
XL=SA*ABS(B0*SG+B2*SS*X3+B4*X0*X4+B6*X1*X5+B8*X2*X6)+ABS(DLONG)
GO TO 1
5 U=E1*X
C0=1.+U/4.-3.*U**2/64.+5.*U**3/256.-175.*U**4/16384.
C2=-U/4.+U**2/16.-15.*U**3/512.+35.*U**4/2048.
C4=-U**2/128.+3.*U**3/512.-35.*U**4/8192.
C6=-U**3/1536.+5.*U**4/6144.
C8=-9.*U**4/65536.
S=B*ABS(C0*SG+C2*SS*X3+C4*X0*X4+C6*X1*X5+C8*X2*X6)
B1=((S2/CS2)*CS1-COS(XL)+S1)/SIN(XL)
B2=(S2*COS(XL)-CS2*S1/CS1)/SIN(XL)
DE=(XL-ABS(DLONG))*10800./C
MD=IFIX(DE)
SD=(DE-MD)*60.
A1=ABS(1./B1)
IF(B1)6,6,7
6 A1=(C-ATAN(A1))*180./C
GO TO 8
7 A1=(ATAN(A1))*180./C
8 I1=IFIX(A1)
XM=(A1-I1)*60.
M1=IFIX(XM)
S11=(XM-M1)*60.
A2=ABS(1./B2)
IF(B2)10,10,9
9 A2=(ATAN(A2)+C)*180./C
GO TO 11
10 A2=(C+ATAN(A2))*180./C
11 I2=IFIX(A2)
XM=(A2-I2)*60.
M2=IFIX(XM)
S22=(XM-M2)*60.
RETURN
END

```

RESULTADOS OBTIDOS PARA OS SEGUINTE PARES DE PONTOS

		LATITUDE		LONGITUDE	
PONTO 1	35.	16.	11.2486	148.	58. 39.4254
PONTO 2	67.	22.	14.7763	11.	11. 11.1111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

3 MIN 15.08313 S

AZIMUTE			CONTRA-AZIMUTE			DISTANCIA		
15	44	23.7491	324	55	39.9201	0.808482385E 07 M		

		LATITUDE		LONGITUDE	
PONTO 1	25.	30.	45.3000	75.	25. 51.4300
PONTO 2	25.	30.	45.3000	45.	25. 51.4300

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

4 MIN 54.66076 S

AZIMUTE			CONTRA-AZIMUTE			DISTANCIA		
83	24	57.7324	276	35	2.2673	0.300941060E 07 M		

		LATITUDE		LONGITUDE	
PONTO 1	20.	0.	0.0000	126.	28. 30.5111
PONTO 2	45.	0.	0.0000	20.	28. 30.5111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

11 MIN 13.61940 S

AZIMUTE			CONTRA-AZIMUTE			DISTANCIA		
42	56	30.0370	295	17	18.5959	0.964941280E 07 M		

		LATITUDE		LONGITUDE	
PONTO 1	23.	26.	45.0000	49.	27. 0.0000
PONTO 2	23.	25.	55.0000	49.	26. 0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

0 MIN 0.17067 S

AZIMUTE			CONTRA-AZIMUTE			DISTANCIA		
132	4	58.6277	312	5	22.2933	0.223004857E 04 M		

		LATITUDE		LONGITUDE	
PONTO 1	37.	19.	54.9536	81.	28. 35.5072
PONTO 2	26.	7.	42.8394	40.	0. 0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

5 MIN 53.23772 S

AZIMUTE			CONTRA-AZIMUTE			DISTANCIA		
95	27	59.6316	298	5	58.9602	0.408596665E 07 M		

6.3.2 SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, TENDO COMO PARÂMETRO AUXILIAR A LATITUDE REDUZIDA MÁXIMA

1. Latitude reduzida  $\beta_i$  para cada ponto

$$\operatorname{tg}\beta_i = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\phi_i$$

2. Arco esférico  $\sigma = \sigma_{i+1} - \sigma_i$

$$\cos\sigma = \operatorname{sen}\beta_i \operatorname{sen}\beta_{i+1} + \cos\beta_i \cos\beta_{i+1} \cos\lambda$$

sendo que para a primeira iteração  $\lambda = L = L_{i+1} - L_i$

3. Máxima latitude reduzida  $\beta_0$

$$\cos\beta_0 = \cos\beta_i \cos\beta_{i+1} \operatorname{sen}\lambda / \operatorname{sen}\sigma$$

4. Arco esférico  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$

$$\cos 2\sigma_m = \frac{2 \operatorname{sen}\beta_i \operatorname{sen}\beta_{i+1}}{\operatorname{sen}^2\beta_0} - \cos\sigma$$

5. Obtenção de  $(\lambda - L)$

$$(\lambda - L) = - \left\{ B_0\sigma + \sum_{p=1}^4 B_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right\} \cos \beta_0$$

sendo os coeficientes  $B_{2p}$ ,  $p = 0, \dots, 4$  dados pelas fórmulas (5.2.25).

6. Fazer iterações até  $(\lambda - L)$  não diferir do penúltimo valor de uma quantidade pré-fixada.

7. Cálculo do âzimute e contra-âzimute através das fórmulas (5.2.27) e (5.2.28).

8. Obtenção do comprimento da geodésica

$$s = b \left\{ C_0\sigma + \sum_{p=1}^4 C_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right\}$$

sendo a coeficiente  $C_{2p}$ ,  $p = 0, \dots, 4$  dados pelas fórmulas (5.2.32).

SUBPROGRAMA

```

SUBROUTINE INVER(E1, DLONG, E, G1, G2, EPS, F, B, S, C, MD, SD, I1, M1, S11, I2, M
12, S22)
  A0=-F
  A2=F*F/(2.*(1.-F))
  A4=F**3*(3.*F-4.)/(8.*(1.-F)**3)
  A6=(10.-14.*F+5.*F**2)*F**4/(16.*(1.-F)**5)
  A8=(8.*(1.-F)**2*(10.-14.*F+5.*F**2)*F**4-5.*(2.*F-F**2)**4)/(128.*(
11.-F)**7)
  S1=SIN(G1)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
  S2=SIN(G2)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
  CS1=COS(G1)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
  CS2=COS(G2)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
  XL=ABS(DLONG)
  D=0.0
1  CS=CS1*CS2*COS(XL)+S1*S2
  SS=SQRT((SIN(XL)*CS2)**2+(S2*CS1-S1*CS2*COS(XL))**2)
  SG=ATAN(SS/CS)
  IF(SG)2,2,3
2  SG=C+SG
3  CO=CS1*CS2*SIN(XL)/SS
  X=(1.-CO)*(1.+CO)
  X0=2.*SS*CS
  X1=3.*SS-1.*SS**3
  X2=4.*SS*CS-8.*SS**3*CS
  X3=2.*S1*S2/X-CS
  X4=2.*X3*X3-1.
  X5=4.*X3**3-3.*X3
  X6=2.*X4**2-1.
  IF(ABS(D-XL)-EPS)5,4,4
4  d0=-(A0+A2*X/2.+3.*A4*X**2/8.+5.*A6*X**3/16.+35.*A8*X**4/128.)
  B2=-(A2*X/2.+A4*X**2/2.+15.*A6*X**3/32.-7.*A8*X**4/16.)
  B4=-1/4*X**2/16.-13.*A6*X**3/32.-7.*A8*X**4/64.
  B6=-A6*X**3/96.-A8*X**4/49.
  B8=-A8*X**4/512.
  U=XL
  XL=CO*ABS(B0*SG+B2*SS*X3+B4*X0*X4+B6*X1*X5+B8*X2*X6)+ABS(DLONG)
  GO TO 1
5  U=E1*X
  C0=1.+U/4.-3.*U*U/64.+5.*U**3/256.-175.*U**4/16384.
  C2=U/4.-U*U/16.+15.*U**3/512.-35.*U**4/2048.
  C4=-U**2/128.+3.*U**3/512.-35.*U**4/8192.
  C6=U**3/1536.-5.*U**4/6144.
  C8=-5.*U**4/65536.
  S=8*ABS(C0*SG+C2*SS*X3+(C4*X0*X4+C6*X1*X5+C8*X2*X6)
  B1=((S2/CS2)*CS1-COS(XL)*S1)/SIN(XL)
  B2=(S2*COS(XL)-CS2*S1/CS1)/SIN(XL)
  DE=(XL-ABS(DLONG))*10800./C
  MD=FIX(DE)
  SD=(DE-MD)*60.
  A1=ABS(1./B1)
  IF(B1)6,6,7
6  A1=(C-ATAN(A1))*180./C
  GO TO 8
7  A1=(ATAN(A1))*180./C
8  I1=FIX(A1)
  XM=(A1-I1)*60.
  M1=FIX(XM)
  S11=(XM-M1)*60.
  A2=ABS(1./B2)
  IF(B2)10,10,9
9  A2=(ATAN(A2)+C)*180./C
  GO TO 11
10 A2=(C+C-ATAN(A2))*180./C
11 I2=FIX(A2)
  XM=(A2-I2)*60.
  M2=FIX(XM)
  S22=(XM-M2)*60.
  RETURN
  END

```

RESULTADOS OBTIDOS PARA OS SEGUINTE PARES DE PONTOS

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	35.	16.	11.2486	148.	58.	39.4254
PONTO 2	67.	22.	14.7763	11.	11.	11.1111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

3 MIN 15.08313 S

	AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE		DISTANCIA	
15	44	23.7491	324 55	39.9201	0.808482385E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	25.	30.	45.3000	75.	25.	51.4300
PONTO 2	25.	30.	45.3000	45.	25.	51.4300

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

4 MIN 54.66057 S

	AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE		DISTANCIA	
83	24	57.7328	276 35	2.2673	0.300941062E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	20.	0.	0.0000	126.	28.	30.5111
PONTO 2	45.	0.	0.0000	20.	28.	30.5111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

11 MIN 13.61940 S

	AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE		DISTANCIA	
42	56	30.0370	295 17	18.5959	0.964941280E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	23.	26.	45.0000	49.	27.	0.0000
PONTO 2	23.	25.	55.0000	49.	26.	0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

0 MIN 0.17067 S

	AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE		DISTANCIA	
132	4	58.6277	312 5	22.2933	0.229500319E 04 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	37.	19.	54.9536	81.	28.	35.5072
PONTO 2	26.	7.	42.8394	40.	0.	0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

5 MIN 53.23772 S

	AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE		DISTANCIA	
95	27	59.6316	298 5	58.9602	0.408596667E 07 M

6.3.3 SUBPROGRAMA PARA O MÉTODO DA ESFERA REDUZIDA, USANDO O ALGORÍTIMO DE BESSEL

1. Latitude reduzida para cada ponto

$$\operatorname{tg}\beta_i = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg}\phi_i$$

2. Arco esférico  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$

$$\cos\sigma = \operatorname{sen}\beta_i \operatorname{sen}\beta_{i+1} + \cos\beta_i \cos\beta_{i+1} \cos\lambda$$

3. Máxima latitude reduzida  $\beta_0$

$$\cos\beta_0 = \cos\beta_i \cos\beta_{i+1} \operatorname{sen}\lambda / \operatorname{sen}\sigma$$

4. Arco esférico  $2\sigma_m = \sigma_2 + \sigma_1$

$$\cos 2\sigma_m = \frac{2 \operatorname{sen}\beta_i \operatorname{sen}\beta_{i+1}}{\operatorname{sen}^2\beta_0} - \cos\sigma$$

5. Diferença entre a diferença de longitude esférica e a diferença de longitude elipsoidal.

$$(\lambda - L) = \frac{e^2 \cos^2\beta_0}{2(1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2}} \cdot \left[ B_0 \sigma + \sum_{p=1}^4 B_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right]$$

sendo  $B_{2p}$ ,  $p = 0, \dots, 4$  dados pelas fórmulas (5.3.15).

6. Obtenção do comprimento da geodésica

$$s = a (1 - e^2 \cos^2\beta_0)^{1/2} \cdot \left[ C_0 \sigma + \sum_{p=1}^3 C_{2p} \operatorname{sen} p\sigma \cos 2p\sigma_m \right]$$

sendo  $C_{2p}$ ,  $p = 0, \dots, 4$  dados pelas fórmulas (5.3.20).

7. Azimute e contra-azimute calculados pelas fórmulas (5.2.27) e (5.2.28).

SUBPROGRAMA

```

SUBROUTINE INVER(E1,DLONG,E,G1,G2,EPS,F,B,S,C,MD,SD,I1,M1,S11,I2,M
12,S22)
A=B/(1.-F)
S1=SIN(G1)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
S2=SIN(G2)*SQRT(1.-E*E)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
CS1=COS(G1)/(SQRT(1.+E*SIN(G1))*SQRT(1.-E*SIN(G1)))
CS2=COS(G2)/(SQRT(1.+E*SIN(G2))*SQRT(1.-E*SIN(G2)))
XL=ABS(DLONG)
D=0.0
2 CS=S1*S2+CS1*CS2*COS(XL)
SS=SQRT(1.-CS)*SQRT(1.+CS)
SG=ATAN(SS/CS)
IF(SG)2,2,3
2 SG=C+SG
3 CO=CS1*CS2*SIN(XL)/SS
X=(1.-CO)*(1.+CO)
X0=2.*SS*CS
X1=3.*SS-4.*SS**3
X2=2.*X0*(1.-SS)*(1.+SS)
X3=2.*S1*S2/X-CS
X4=2.*X3*X3-1.
X5=4.*X3**3-3.*X3
X6=2.*X4*X4-1.
Y=E*E*X/((1.-E*CO)*(1.+E*CO))
IF(ABS(D-XL)-EPS)5,4,4
4 Z=CO*CO/X
A0=1.-Y**2/4.+(Y**2)**2/8.-5.*(Y**2)**3/64.+7.*(Y**2)**4/256.
A2=Y/4.-Y*Y**2/8.+5.*Y**3*Z**2/64.-7.*Y**4*Z**3/256.
A4=Y*Y/8.-5.*Y**3*Z/64.+7.*Y**4*Z**2/256.
A6=5.*Y**3/64.-7.*Y**4*Z/256.
A8=7.*Y**4/256.
B0=A0+A2/2.+3.*A4/8.+5.*A6/16.+35.*A8/128.
B2=-(A2/2.+A4/4.+15.*A6/32.+7.*A8/16.)
B4=A4/16.+3.*A6/32.+7.*A8/64.
B6=-A6/96.-5.*A8/48.
B8=A8/512.
D=XL
XL=E*E*CO*(B0*SG+B2*SS*X3+B4*X0*X4+B6*X1*X5+B8*X2*X6)/(2.*(SQRT(1.
1-E*CO)*SQRT(1.+E*CO)))+ABS(DLONG)
GO TO 1
5 C0=1.-Y/4-3.*Y*Y/64.+5.*Y**3/256.-175.*Y**4/16384.
C2=Y/4.+Y*Y/16.-15.*Y**3/512.+35.*Y**4/2048.
C4=-Y*Y/128.+3.*Y**3/512.-35.*Y**4/8192.
C6=-Y**3/1536.+5.*Y**4/6144.
C8=-5.*Y**4/65536.
S=A*SQRT(1.-E*CO)**2*(C0*SG+C2*SS*X3+C4*X0*X4+C6*X1*X5+C8*X2*X6)
B1=((S2/CS2)*CS1-COS(XL)*S1)/SIN(XL)
B2=(S2*COS(XL)-CS2*S1/CS1)/SIN(XL)
DE=(XL-ABS(DLONG))*10800./C
MD=IFIX(DE)
SD=(DE-MD)*60.
A1=ABS(1./B1)
IF(B1)6,6,7
6 A1=(C-ATAN(A1))*180./C
GO TO 8
7 A1=(ATAN(A1))*180./C
8 I1=IFIX(A1)
XM=(A1-I1)*60.
M1=IFIX(XM)
S11=(XM-M1)*60.
A2=ABS(1./B2)
IF(B2)10,10,9
9 A2=(ATAN(A2)+C)*180./C
GO TO 11
10 A2=(C+C-ATAN(A2))*180./C
11 I2=IFIX(A2)
XM=(A2-I2)*60.
M2=IFIX(XM)
S22=(XM-M2)*60.
RETURN
END

```

RESULTADOS OBTIDOS PARA OS SEGUINTE PARES DE PONTOS

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	35.	16.	11.2486	148.	58.	39.4254
PONTO 2	67.	22.	14.7763	11.	11.	11.1111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

3 MIN 15.08313 S

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
15 44 23.7491	324 55 39.9201	0.208482387E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	25.	30.	45.3000	75.	25.	51.4300
PONTO 2	25.	30.	45.3000	45.	25.	51.4300

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

4 MIN 54.66057 S

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
83 24 57.7328	276 35 2.2673	0.300941058E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	20.	0.	0.0000	126.	28.	30.5111
PONTO 2	45.	0.	0.0000	20.	28.	30.5111

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

11 MIN 13.61959 S

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
42 56 30.0370	295 17 18.5959	0.964941282E 07 M

		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	23.	26.	45.0000	49.	27.	0.0000
PONTO 2	23.	25.	55.0000	49.	26.	0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

0 MIN 0.17057 S

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
132 04 58.6277	312 05 22.2933	0.223004858E 04 M

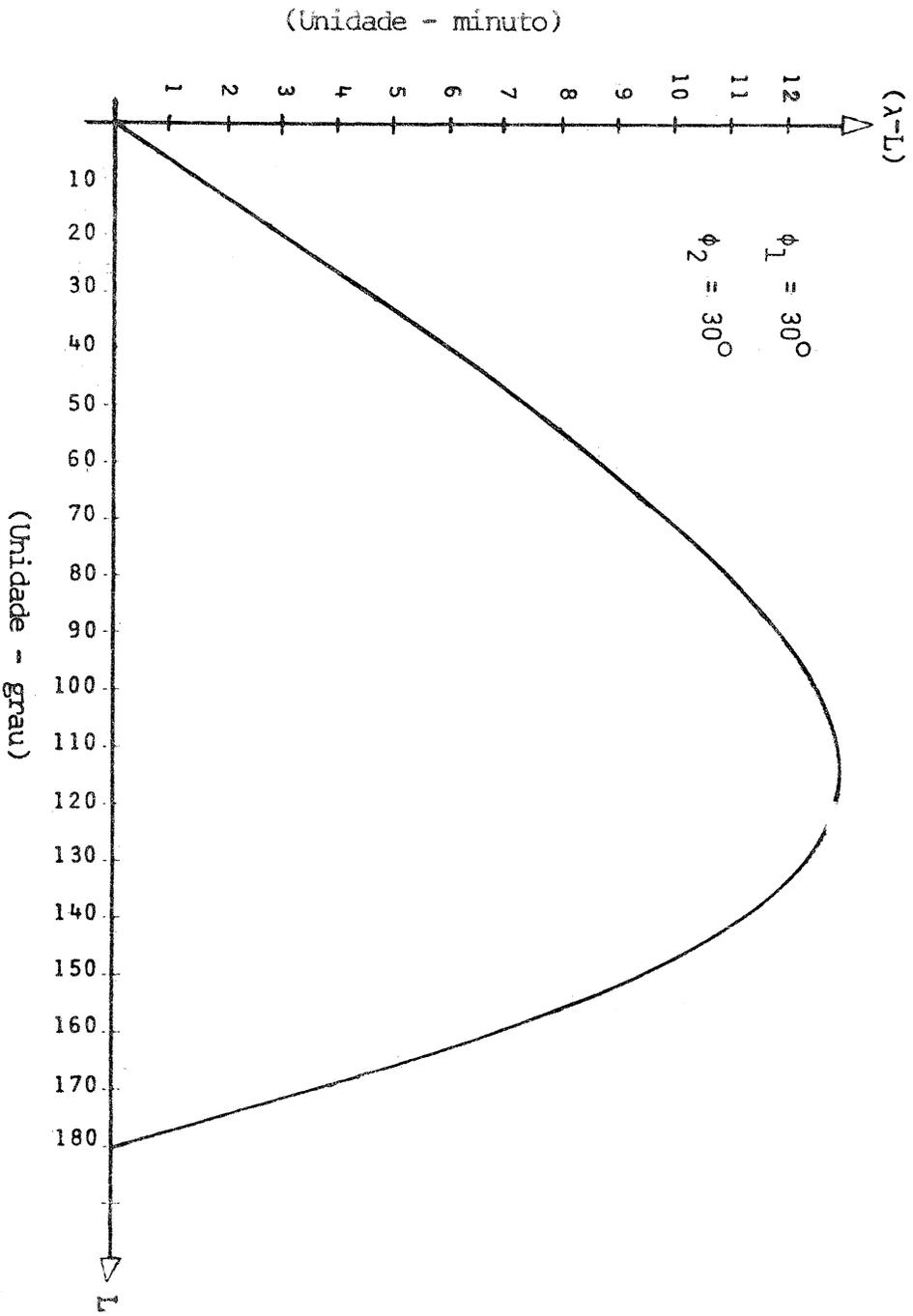
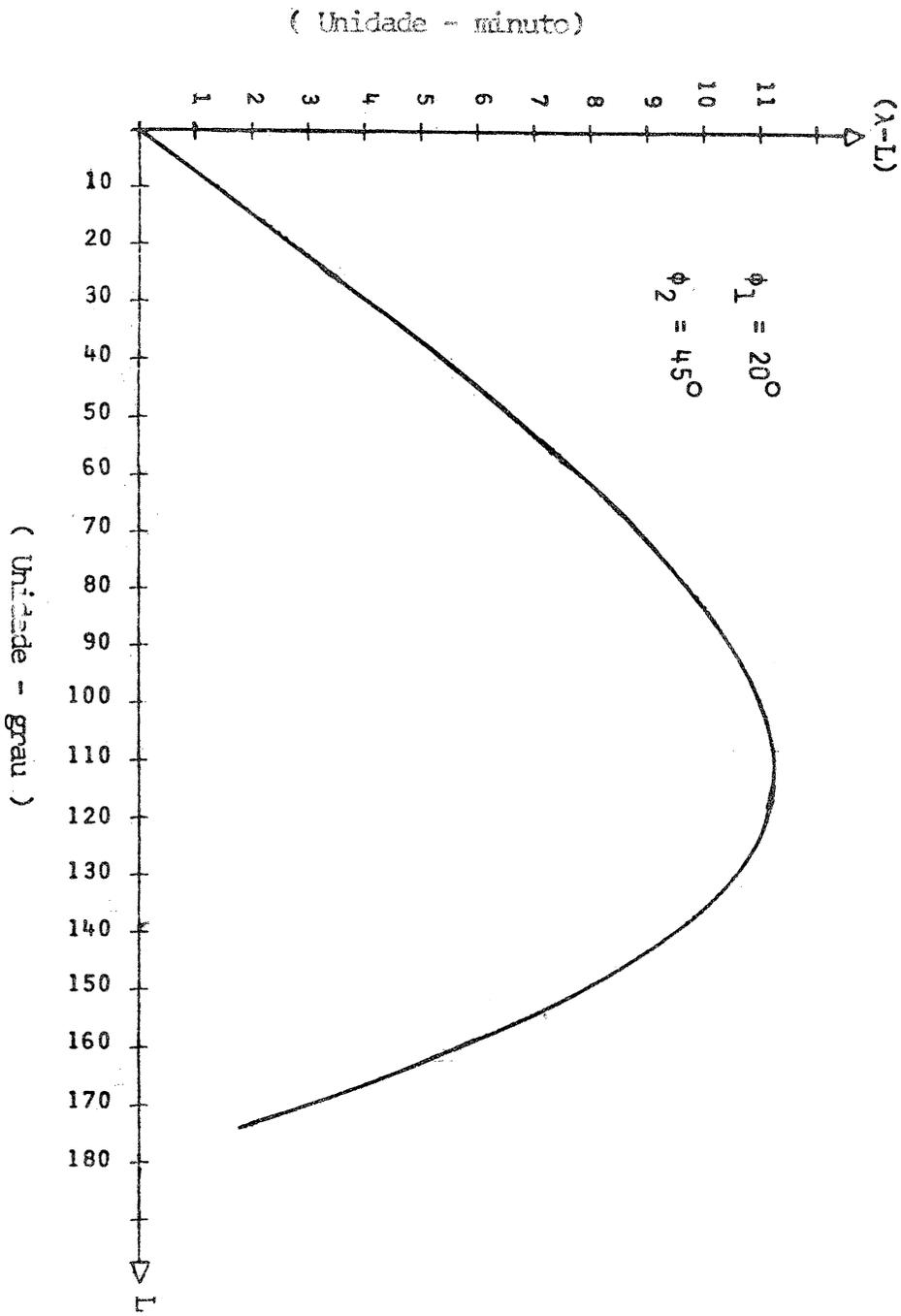
		LATITUDE		LONGITUDE		
PONTO 1	37.	19.	54.9536	81.	28.	35.5072
PONTO 2	26.	7.	42.8394	40.	0.	0.0000

DIFERENCA ENTRE A DIFERENCA DE LONGITUDE ESFERICA E A DIFERENCA DE LONGITUDE ELIPSOIDAL EM MINUTOS E SEGUNDOS DE ARCO

5 MIN 53.23772 S

AZIMUTE	CONTRA-AZIMUTE	DISTANCIA
95 27 52.6316	298 05 58.9602	0.408596666E 07 M

REPRESENTAÇÃO DE  $(\lambda-L)=F(L)$  PARA OS SEGUINTES PARES DE PONTOS :



## CAPÍTULO 7

### 7. CONCLUSÃO

Pela exposição apresentada neste trabalho, verificamos que todos os procedimentos que utilizam a esfera reduzida para a solução do problema geodésico inverso conduzem a integrações, sobre uma esfera imagem, de termos corretivos. Uma integração rigorosa é realizada mediante a utilização do argumento  $\sigma$ , arco esférico representado sobre a esfera imagem, e exprimindo todos os demais termos em função desta grandeza. Este procedimento conduz quase sempre ao desenvolvimento em função das potências de  $f$ ,  $e^2$  ou mesmo  $\epsilon^2$  e às integrais de WALLIS as quais podem ser calculadas em função dos ângulos múltiplos do arco  $\sigma$ . Notamos através dos métodos enfatizados anteriormente que a maior dificuldade consiste em determinar o valor da correção ( $\lambda - L$ ). Determinada esta correção o problema é solucionado de modo bastante simples mediante a utilização da trigonometria esférica.

Utilizando os processos iterativos apresentados podemos obter uma precisão da ordem da quinta casa decimal para os segundos em azimute e contra-azimute e da ordem do milímetro para distâncias, desde que possamos realizar as nossas operações com calculadoras que deem precisão até a décima sexta casa decimal. Além disto se desejarmos uma maior precisão podemos acrescentar termos às fórmulas apresentadas, uma vez que conhecemos agora a lei de formação dos mesmos. Com a elaboração deste trabalho verificamos que o problema em questão pode ser solucionado através dos polinômios de LEGENDRE ou mesmo através das integrais elípticas de JACOBI.

Para um futuro trabalho pretendemos estudar o problema geodésico direto utilizando o método da esfera reduzida e a solução do problema geodésico inverso através das integrais elípticas de JACOBI.

Finalizando concluímos que este trabalho será de grande utilidade a todos aqueles que estiverem interessados no estudo da linha geodésica sobre a superfície do elipsóide de revolução. Nós cremos ser muito interessante um estudo como este num elipsóide escaleno, quem o fará ?

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |1| . BAESCHLIN, C. F. Lehrbuch Der Geodäsie. Zurich, Art. Institut Publi AG., 1948, 892 p.
- |2| . BOMFORD, G. Geodesy. 3th ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1971, 731 p.
- |3| . CLARKE, A. R. Tratado de Geodésia. 2a. ed. Madrid, Casa Editorial Bailly - Bailliere, 1910, 539 p.
- |4| . EWING, E & MITCHELL, M.M. Introduction to Geodesy. New York American Elsevier Publishing Company, 1970, 304 p.
- |5| . GEMAEL, C. Introdução a Geodésia Geométrica. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, U.F.P. , 1975, 264 p.
- |6| . GEMAEL, C. Elementos de Trigonometria Esférica. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, D.L.T. 1960. 92 p.
- |7| . HOSMER, G. L. Geodesy. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1929, 461 p.
- |8| . LEVALLOIS, J. J. Géodésie Générale. PARIS, Éditions Eyrolles 1970, v. 2 (Collection Scientifique de l'Institut Géographique National).
- |9| . LEVALLOIS, J. J. & DUPUY, M. Note seu le Calcule des Grandes Géodésiques. PARIS. l'Institut Géographique National, 1952, 91 p. (Publications techniques de l'Institut Géographique).

- |10| . LEVALLOIS, J. J. & DUPUY, M. Sur le calcul des Grandes geodesiques. Bull Geodesique. PARIS. (16) : 105-117, June, 1950.
- |11| . PACITTI, T. Fortran-monitor; principios. 2a. ed. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1972, 347 p.
- |12| . RAINSFORD, D. F. Long Geodesics on the elipsoid. Bull Geodesique, PARIS. (37) : 12-22, sep, 1955.
- |13| . SODANO, E. M. A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics. Bull Geodesique. PARIS. (48) : 13-117 , June, 1958.
- |14| . ZAKATOV, P. S. A course in higher geodesy; spheroidal Geodesy and fundamentals of Gravimetry and practical astronomy. 2nd ed. Jerusalém, Israel Program for Scientific Translations, c. 1962. 389 p.