

ANTONIO MARIA GARCIA TOMMASELLI
ENGENHEIRO CARTÓGRAFO

Um Modelo Alternativo à Equação de Colinearidade Utilizando Feições Retas

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-
Graduação em Ciências Geodésicas para
obtenção do Grau de Mestre em Ciências
pela Universidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1988

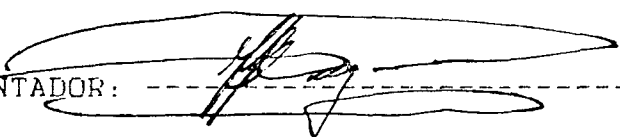
UM MODELO ALTERNATIVO A EQUAÇÃO DE COLINEARIDADE
UTILIZANDO FEIÇÕES RETAS

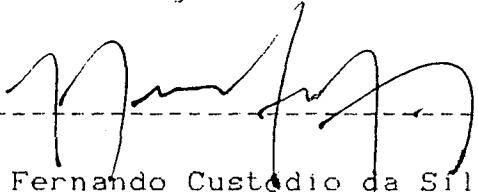
por

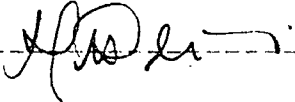
ANTONIO MARIA GARCIA TOMMASELLI

Dissertação aprovada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação
em Ciências Geodésicas, pela Comissão formada pelos
professores:

ORIENTADOR: _____


Prof. João Bosco Lugnani


Prof. João Fernando Custódio da Silva


Profa. Mary Angélica de Azevedo Olivas

Curitiba, 11 de janeiro de 1988

Este trabalho é dedicado à meus pais, Idelfonso e Idalina, e à Giselle, estímulos permanentes à continuação de meus esforços.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja externar seus agradecimentos às pessoas e entidades abaixo relacionadas:

. Ao professor João Bosco Lugnani, pela orientação precisa e dedicada;

. Ao professor Camil Gemael pela dedicação pessoal ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;

. Aos colegas João Fernando Custódio da Silva e João Francisco Galera Mônico, interlocutores constantes durante a elaboração do trabalho;

. A Akemi Shimasaki, pela execução das figuras;

. A todos os demais companheiros da UNESP, campus de Presidente Prudente, professores e funcionários, que de todos os modos procuraram viabilizar a execução deste trabalho;

A Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior (CAPES), pela concessão de bolsa de estudo, durante a realização do curso.

SUMARIO

	PAG.
TITULO	i
TERMO DE APROVAÇÃO	ii
DEDICATORIA	iii
AGRADECIMENTOS	iv
SUMARIO	v
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi

CAPITULO I

1. INTRODUÇÃO	01
1.1. Situação Atual	01
1.2. As soluções já existentes	03
1.3. Objetivos do Estudo	06

CAPITULO II

2. DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMATICO	08
2.1. Considerações preliminares	08
2.2. A equação do plano em função da feição reta no espaço imagem	12

2.3. A equação do plano em função da feição reta no espaço objeto e das coordenadas do C.P. .	16
2.4. O modelo matemático dos "planos-equivalentes"	18

CAPÍTULO III

3. APLICAÇÃO DO MODELO DOS PLANOS EQUIVALENTES A RESSEÇÃO ESPACIAL	22
3.1. Introdução	22
3.2. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados ..	22
3.2.1. O vetor dos parâmetros ajustados	24
3.2.2. A matriz das derivadas parciais A	24
3.2.3. A matriz peso P	33
3.2.4. A matriz normal N	38
3.2.5. Iteração e parâmetros aproximados	39
3.3. O modelo dos planos equivalentes combinado à equação de colinearidade	41
3.4. Injunções Relativas	46
3.4.1. Injunções no caso da Resseção Espacial ...	50

CAPÍTULO IV

4. APLICAÇÃO DO MODELO DOS PLANOS EQUIVALENTES NA CONSTRUÇÃO ANALÍTICA DE MODELOS	51
4.1. Introdução	51
4.2. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados ..	53
4.3. Injunções mínimas	56

CAPITULO V

5. ESTUDO PRÁTICO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	57
5.1. Objetivos e características do estudo	57
5.2. Geração de dados simulados	58
5.3. Programas FORTRAN	60
5.4. Análise estatística dos resultados	64
5.5. Resultados	67
5.5.1. Resseção Espacial	67
5.5.2. Formação de Modelos	78
5.6. Discussão dos Resultados	87

CAPITULO VI

6. CONCLUSOES E RECOMENDAÇÕES	91
6.1. Conclusões	91
6.2. Recomendações	92
APENDICE	94
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	97

LISTA DE TABELAS

TABELA	PAG.
5.5.1.1. Valores obtidos com a mesma foto com três grupos diferentes de injunções	68
5.5.1.2. Resseção Espacial com pontos simples ...	72
5.5.1.3. Resseção Espacial com quatro feições ...	72
5.5.1.4. Resseção Espacial com quatro feições ...	73
5.5.1.5. Resseção Espacial com sete feições	73
5.5.1.6. Resultados dos testes efetuados com a Resseção Espacial	75
5.5.2.1. Orientação Relativa usando feições e pontos simples	80
5.5.2.2. Formação de Modelos usando feições e pontos	83
5.5.2.3. Erros nos parâmetros de orientação usando feições e pontos de controle	85

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PAG.
2.1. A feição reta no espaço	09
2.2. O plano determinado pela feição no espaço imagem e no espaço objeto	11
3.2.2.1. O padrão da matriz A	31
3.2.3.1. O padrão da matriz peso considerando as pseudo-observações correlacionadas	37
3.2.4.1. O padrão da matriz normal N	39
3.3.1. O padrão da matriz A , aumentada	44
3.3.2. A matriz normal N	44
3.3.3. A matriz peso completa	45
4.1.1. Intersecção de planos equivalentes	52
4.2.1. Padrão da matriz A	54
4.2.2. O padrão da matriz N	55
5.2.1. Pontos no espaço objeto usados para a simulação de fotocoordenadas	59
5.5.1.1. Esquema das injunções	70

RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático que estabeleça uma relação funcional entre feições retas no espaço objeto e espaço imagem, prescindindo da correspondência ponto a ponto.

Este modelo matemático baseia-se na equivalência entre parâmetros do plano determinado pela feição-imagem e pelo C.P., no espaço imagem, e parâmetros do plano determinado pela feição e pelo C.P. no espaço objeto.

É apresentado o desenvolvimento da metodologia visando a aplicação do modelo nos problemas de Resseção Espacial e Formação Analítica de Modelos.

Os resultados práticos obtidos, usando dados simulados, são apresentados e discutidos, mostrando que o modelo dos "planos equivalentes" funciona plenamente.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to suggest a mathematical model in order to establish a functional relationship between straight features in object and image space, without necessity of point to point correspondence.

This mathematical model is based on the equivalence between definition parameters from the planes determined by each straight feature - either in the image and in the object space - and the Perspective Center (P.C.).

It is presented the development of the methodology aiming the application of this mathematical model to the resection and analytical stereomodel formation problems.

The obtained practical results, using simulate data, are presented and discussed, showing that the "equivalent planes mathematical model" works successfully.

CAPITULO I

1. INTRODUÇÃO

1.1. Situação atual

O problema fotogramétrico consiste, basicamente, na determinação dos parâmetros de orientação exterior de uma ou mais fotografias (feixes de raios) no espaço. Estes parâmetros são as coordenadas do centro perspectivo e os ângulos de orientação do sistema fotogramétrico de coordenadas em relação ao sistema referencial do espaço objeto.

Até recentemente, esta correspondência entre espaço imagem e espaço objeto era obtida unicamente através de pontos de apoio simples, cujas coordenadas eram conhecidas em ambos os espaços. Estes pontos simples, também chamados de pontos de controle, podiam ser alvos pré-sinalizados, alvos naturais ou artificiais (perfurados no diapositivo). Suas coordenadas são determinadas por processos de campo ou por processos fotogramétricos (fototriangulação). Em qualquer situação, permanece a relação discreta entre ponto no espaço imagem e o mesmo ponto no espaço objeto, através da equação de uma reta.

O desenvolvimento dos computadores propiciou novo alento à ciência fotogramétrica. Permitiu um considerável aumento na precisão através de incrementos no

processo de fototriangulação e da implementação efetiva dos restituidores analíticos. Com os restituidores analíticos diminuíram drasticamente as limitações instrumentais impostas, como a de distância focal, e a depuração de erros grosseiros tornou-se um procedimento prático, através da fototriangulação "on-line". Os recursos computacionais desenvolvidos tornaram possível a implementação prática da fototriangulação por feixes perspectivos, oferecendo a possibilidade de pré-correção de grande parte dos erros sistemáticos e mesmo a parametrização dos resíduos destes erros.

Se o desenvolvimento computacional permitiu considerável avanço nos modelos matemáticos, os pontos de apoio continuavam a ser a parte problemática e onerosa do aerolevanteamento. A identificação destes pontos em regiões adequadas do bloco ou modelo fotogramétrico requer um trabalho criterioso. Uma vez implantado o apoio, torna-se muito difícil mantê-lo, já que o índice de destruição dos marcos, no Brasil, é acentuado (em alguns casos mais de 50%). Quando se utilizar de apoio pré-sinalizado, prática pouco difundida no Brasil, os problemas aumentam e os custos tornam-se ainda maiores.

O advento da informática permitiu a criação dos bancos de dados digitais, que permitem o armazenamento e acesso rápido a grandes quantidades de informações. Estes bancos de dados, associados a trabalhos de mapeamento,

propiciaram o desenvolvimento de técnicas que minimizassem a necessidade de apoio convencional.

MASRY (1980) propõe o uso de entidades digitais contínuas como forma de controle. Estas entidades são feições naturais presentes no espaço e encontram-se em grande abundância em regiões ocupadas pelo homem. São arestas de edificações, rodovias ou seu eixo, dependendo da escala, limites de propriedades ou culturas, etc..., que serão armazenadas em um banco de dados por meio de uma sequência de pontos com coordenadas conhecidas. Estas feições são encontradas em abundância principalmente em regiões urbanas, tornando-se uma fonte de controle praticamente perene.

1.2. As soluções já existentes

O uso de feições digitalizadas, como alternativa à forma de controle convencional, é fato recente na literatura especializada, tendo sido proposta originalmente por MASRY (1980), mostrando o grande potencial desta forma de controle.

Alguns desenvolvimentos posteriores mostraram que este conceito possui atrativos práticos sem perda de precisão .

LUGNANI (1980) desenvolveu e testou modelos e metodologias para o caso da resseção espacial, além de propor modelos para a transformação de similaridade. A

abordagem proposta parte do princípio de que não há correspondência entre pontos discretos que definem uma feição no espaço objeto e os pontos observados na mesma feição na fotografia (espaço imagem). A feição no espaço objeto, definida pelas coordenadas tridimensionais de uma sequência de pontos, é tornada contínua pelo uso de "splines" paramétricos. O modelo matemático que liga pontos no espaço objeto com seus homólogos no espaço imagem é a equação de colinearidade. Através da colinearidade e de parâmetros de orientação exterior aproximados, calculam-se as coordenadas de foto homólogas aos pontos no espaço objeto que definem a feição. Esta foto aproximada serve como referência para o cálculo de uma transformação projetiva, que tem como domínio os pontos observados. Aplica-se então a injunção de que os pontos lidos transformados pertençam à feição homóloga na foto referência (aproximado) sendo obtidos por interpolação por "splines".

Aplicando-se a transformação projetiva inversa aos pontos de terreno obtém-se pontos na foto real correspondentes aos de terreno, pertencentes à feição em particular. Calculam-se os parâmetros de orientação exterior repetindo-se o procedimento até que haja convergência da solução .

Os testes efetuados por LUGNANI com este modelo mostraram que a precisão é comparável aos métodos clássicos, embora haja aumento no dispêndio

computacional. A identificação de erros grosseiros é mais simples neste procedimento.

SOUZA (1982), estudando a orientação absoluta usando a transformação de similaridade, desenvolveu procedimentos distintos para feições retas e feições curvas, obtendo bons resultados em ambos os casos. Sugeriu que se desenvolvesse um modelo matemático que processasse, sem distinção, pontos de controle e feições retas e curvas .

Nos modelos propostos não há possibilidade de determinação de uma feição por intersecção fotogramétrica, a menos que haja correspondência entre os pontos observados em todas as fotos, o que é difícil de se obter, especialmente se for processada uma faixa ou bloco.

A obtenção de uma feição por processos fotogramétricos está sujeita, até o presente, à orientação prévia do modelo e posterior digitalização das coordenadas de pontos contidos na mesma, em quantidade e distribuição adequados.

Uma outra maneira de determinar uma feição seria a utilização de métodos de campo para a obtenção das coordenadas de pontos que a compõem.

A orientação de um modelo utilizando feições pode ser feita através da ressecção de duas fotografias isoladas, com o procedimento desenvolvido por

LUGNANI. Posteriormente, após a orientação do modelo em um restituidor analítico, poderão ser digitalizadas novas feições. Estas feições, então digitalizadas, serão afetadas pela propagação de erros do processo de orientação.

O ideal seria o desenvolvimento de um modelo matemático que permitisse a introdução de feições como incógnitas em um ajustamento, sem a necessidade de correspondência entre os pontos observados em fotos adjacentes. Desta maneira seria possível processar simultaneamente feições conhecidas e feições a determinar, num ajustamento clássico. A possibilidade de processar juntamente pontos de controle simples tornaria o procedimento ainda mais atrativo.

Em regiões urbanas nota-se a forte presença de feições retas. Os arruamentos e as edificações apresentam, em sua maioria, um padrão retilíneo. Embora algumas feições que pareçam retas à primeira vista apresentem variações, especialmente de altitude, pode-se afirmar que a maioria é passível de utilização como forma de controle.

Em fotogrametria à curta distância é comum o aparecimento de objetos que apresentam abundância de feições retas, como edifícios históricos, obras de arte, estruturas de concreto e mesmo pequenos objetos.

1.3. Objetivos do estudo

O presente estudo tem por objetivo desenvolver um modelo matemático alternativo à equação de colinearidade usando feições retas.

Este modelo matemático deve atender aos seguintes propósitos:

-Permitir a relação funcional entre feições no espaço imagem e espaço objeto, prescindindo da correspondência ponto a ponto;

-Permitir a orientação de uma foto isolada (resseção espacial), com o uso de feições retas cujas equações sejam conhecidas ;

-Permitir a formação de modelo estereoscópico analiticamente usando simultaneamente feições retas conhecidas e incógnitas. As feições retas incógnitas terão suas equações determinadas por intersecção fotogramétrica no espaço objeto, a partir de valores observados nas feições no espaço imagem em um par de fotografias ;

-Permitir a combinação com o modelo de colinearidade, para o processamento simultâneo de pontos simples e feições retas, conhecidas ou incógnitas.

O modelo matemático desenvolvido será testado com dados simulados para os casos de resseção espacial e formação analítica de modelos.

Serão delineadas e propostas formas práticas de aplicação dos procedimentos desenvolvidos como por exemplo, fototriangulação e fotogrametria à curta distância.

CAPITULO II

2. DESENVOLVIMENTO DO MODELO MATEMATICO

2.1 Considerações preliminares

Neste capítulo procurar-se-á desenvolver um modelo matemático que relacione feições retas no espaço imagem e espaço objeto. Esta especificidade deve-se aos motivos arrolados do Capítulo I, ou seja, grande quantidade de feições retas nas imagens comumente utilizadas em aplicações práticas.

Seja E_1 uma feição reta no espaço objeto. Esta entidade pode ser definida por dois de seus pontos com coordenadas conhecidas: $A(X_1, Y_1, Z_1)$ e $B(X_2, Y_2, Z_2)$. Estas são coordenadas em um sistema cartesiano tridimensional local, estabelecido a partir do sistema geodésico e com origem arbitrária.

Esta feição pode ser considerada como uma reta no espaço e, portanto, representada por sua equação paramétrica:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + l.t \\ Y &= Y_1 + m.t \\ Z &= Z_1 + n.t \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

onde:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (X_2 - X_1) \\ (Y_2 - Y_1) \\ (Z_2 - Z_1) \end{bmatrix}$$

X_1, Y_1, Z_1 é um ponto pertencente à reta;

t é o parâmetro da reta;

X, Y, Z é um ponto genérico.

A feição E_1 passa pelo ponto com coordenadas X_1, Y_1, Z_1 e é paralela ao vetor diretor \vec{r} .

Os cossenos diretores da reta são:

$$\lambda = l/d \quad \mu = m/d \quad \nu = n/d$$

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

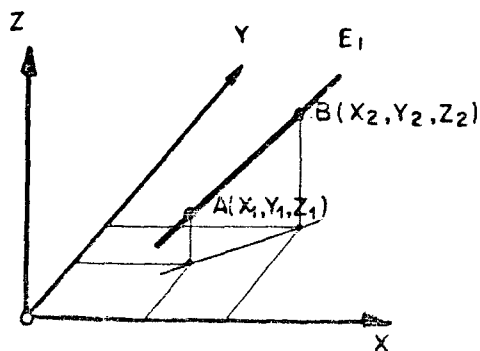


Figura 2.1. A feição reta no espaço

Considerando agora uma fotografia em que foram eliminados os erros sistemáticos (refração fotogramétrica, distorção das lentes, trabalho do filme, etc...) e erros grosseiros, a imagem da feição reta será também uma reta. A equação desta reta no plano da fotografia (negativo ou diapositivo) pode ser determinada em relação ao sistema fotogramétrico de coordenadas, desde que sejam conhecidas as coordenadas bidimensionais de dois de seus pontos.

Estas coordenadas serão, na prática, obtidas a partir da leitura em um comparador e refinadas, corrigindo-se o trabalho do filme e demais erros sistemáticos. As fotocoordenadas estarão, portanto, livres apenas dos erros acidentais de leitura.

A feição no espaço objeto e a feição no espaço imagem determinam um plano. Pode-se estabelecer a equação deste plano a partir do espaço imagem e a partir do espaço objeto, tendo em comum o centro perspectivo.

Lembrando que a equação geral do plano é:

$$A.X + B.Y + C.Z + D = 0$$

onde A, B, C, D são os parâmetros desta superfície.

A figura 2.2. ilustra a situação descrita. Não existe a necessidade de correspondência ponto a ponto entre A e a e entre B e b.

A equação de um plano no espaço pode ser obtida a

partir das coordenadas de três pontos não colineares através do cálculo do determinante:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

onde x_0, y_0, z_0 ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 são as coordenadas destes pontos.

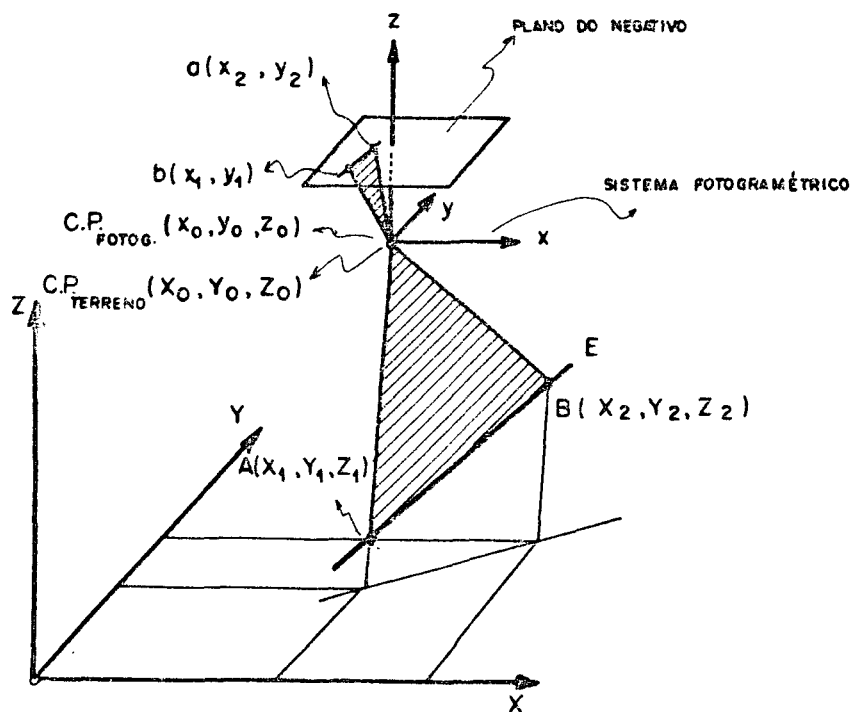


Figura 2.2. O plano determinado pela feição no espaço imagem e no espaço objeto.

2.2. A equação do plano em função da feição reta no espaço imagem

A equação do plano definido pela feição no espaço imagem e pelo centro perspectivo será obtida em função das fotocoordenadas de dois pontos que pertençam a esta feição e pelas coordenadas do centro perspectivo no sistema fotogramétrico.

Lembrando o modo de determinação da equação do plano em função das coordenadas:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.1)$$

As coordenadas do centro perspectivo (origem) no sistema fotogramétrico são:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os pontos a e b pertencentes à feição terão respectivamente coordenadas x_1, y_1, f e x_2, y_2, f , no sistema fotogramétrico.

Substituindo os valores acima na (2.2.1) vem:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & f \\ x_2 & y_2 & f \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.2)$$

Desenvolvendo o determinante:

$$x.y_1.f + y.x_2.f + z.x_1.y_2 - z.x_2.y_1 - x.y_2.f - y.x_1.f = 0$$

$$(f.y_1 - f.y_2)x + (f.x_2 - f.x_1)y + (x_1.y_2 - x_2.y_1)z = 0 \quad (2.2.3)$$

A equação (2.2.3) representa o plano gerado pela feição reta no espaço imagem e pelo C.P., no sistema de coordenadas fotogramétricas.

Para simplificar o desenvolvimento do modelo matemático far-se-á o agrupamento das observações:

$$A = f.y_1 - f.y_2$$

$$B = f.x_2 - f.x_1 \quad (2.2.4)$$

$$C = x_1.y_2 - x_2.y_1$$

As quantidades A, B, C, apresentadas nas expressões (2.2.4) serão denominadas pseudo-observações. Ressalte-se que o termo aqui empregado para denominar um agrupamento de observações, com a finalidade de simplificar o modelo matemático, tem significado diferente daquele apresentado por alguns autores.

Utilizando as (2.2.4) a expressão (2.2.3) toma a

seguinte forma:

$$A.x + B.y + C.z = 0 \quad (2.2.5)$$

Deve-se agora, transformar esta equação de plano para o referencial de terreno.

Sabe-se que a transformação do referencial de terreno para o sistema fotogramétrico pode ser efetuada utilizando-se a transformação isogonal no espaço, ou de similaridade (Apêndice), cujo modelo matemático é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

onde:

λ - Fator de escala;

M - Matriz de rotação $M = M(k) \cdot M(\phi) \cdot M(\omega)$;

X_0, Y_0, Z_0 - Coordenadas do centro perspectivo no referencial de terreno ;

x, y, z - Coordenadas fotogramétricas correspondentes a X, Y, Z ;

Desenvolvendo a expressão (2.2.6):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Aplicando esta transformação de coordenadas à equação (2.2.5), transforma-se a equação do plano para o referencial de terreno:

A equação (2.2.5) pode ser expressa matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.8)$$

Aplicando a transformação (2.2.7) em (2.2.8) vem:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \cdot \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \cdot \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = 0$$

Desenvolvendo a expressão acima:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (A \cdot m_{11} + B \cdot m_{21} + C \cdot m_{31}) \cdot X + \lambda \cdot (A \cdot m_{12} + B \cdot m_{22} + C \cdot m_{32}) \cdot Y + \\ & \lambda \cdot (A \cdot m_{13} + B \cdot m_{23} + C \cdot m_{33}) \cdot Z - \lambda \cdot [(A \cdot m_{11} + B \cdot m_{21} + C \cdot m_{31}) \cdot X_0 + \\ & (A \cdot m_{12} + B \cdot m_{22} + C \cdot m_{32}) \cdot Y_0 + (A \cdot m_{13} + B \cdot m_{23} + C \cdot m_{33}) \cdot Z_0] = 0 \quad (2.2.9) \end{aligned}$$

Chamando os coeficientes de X, Y, Z e o termo

independente, respectivamente de A_1, B_1, C_1 e D_1 :

$$A_1.X + B_1.Y + C_1.Z + D_1 = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\text{Onde } A_1, B_1, C_1, D_1 = F(k, \phi, w, X_0, Y_0, Z_0, f, x_1, y_1, x_2, y_2)$$

A expressão (2.2.10) é a equação do plano gerado pela feição reta, no referencial de terreno, em função das fotocoordenadas.

2.3. Equação do plano em função da feição reta no espaço objeto e das coordenadas do C.P.

Considerando o determinante (2.2.1), subtraindo-se da 3ª linha a 2ª e colocando-a novamente na 3ª linha, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \\ X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 & Z_2 - Z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Considerando a equação paramétrica da reta no espaço, a equação do plano no espaço objeto toma a seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 & Z_1 - Z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.1)$$

onde:

X_0, Y_0, Z_0 - Coordenadas do C.P. no referencial de terreno;

X_1, Y_1, Z_1 - Ponto pertencente à feição reta no espaço objeto;

(l, m, n) - Vetor diretor da feição reta.

Desenvolvendo o determinante acima:

$$(X-X_0)(Y_1-Y_0).n + (Y-Y_0)(Z_1-Z_0).l + (X_1-X_0)(Z-Z_0).m - (Y_1-Y_0)(Z-Z_0).l - (X-X_0)(Z_1-Z_0).m - (X_1-X_0)(Y-Y_0).n = 0$$

$$\begin{aligned} n.(X.Y_1 - X.Y_0 - X_0.Y_1 + X_0.Y_0) &+ l.(Y.Z_1 - Y.Z_0 - Y_0.Z_1 + Y_0.Z_0) + \\ m.(X_1.Z - X_1.Z_0 - X_0.Z + X_0.Z_0) &- l.(Y_1.Z - Y_1.Z_0 - Y_0.Z + Y_0.Z_0) - \\ m.(X.Z_1 - X.Z_0 - X_0.Z_1 + X_0.Z_0) &- n.(X_1.Y - X_1.Y_0 - X_0.Y + X_0.Y_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [n.(Y_1-Y_0) - m.(Z_1-Z_0)].X &+ [l.(Z_1-Z_0) - n.(X_1-X_0)].Y + \\ [m.(X_1-X_0) - l.(Y_1-Y_0)].Z &+ [(m.Z_1 - n.Y_1).X_0 + (n.X_1 - l.Z_1).Y_0 + \\ (l.Y_1 - m.X_1).Z_0] &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Chamando os coeficientes da equação acima, respectivamente de A^* , B^* , C^* , D^* vem que:

$$A^* \cdot X + B^* \cdot Y + C^* \cdot Z + D^* = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\text{Onde } A^*, B^*, C^*, D^* = F(X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, l, m, n)$$

A expressão (2.3.3) representa a equação do plano gerado pela feição reta (espaço objeto) no referencial de terreno, em função dos elementos de sua equação paramétrica.

2.4. O modelo matemático dos "planos equivalentes"

Considerando as duas equações do plano definidas nos itens anteriores, verifica-se que estas representam um mesmo plano em espaços diferentes. Os coeficientes destas equações serão, conseqüentemente, múltiplos escalares, gerando as equações do modelo proposto:

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda_1 \cdot A^* &= 0 \\ B_1 - \lambda_1 \cdot B^* &= 0 \\ C_1 - \lambda_1 \cdot C^* &= 0 \\ D_1 - \lambda_1 \cdot D^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Dividindo as equações por λ obtém-se um fator de proporcionalidade, definido por λ_1/λ que é denominado finalmente de λ .

Desenvolvendo as equações de acordo com as

considerações acima obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 A.m_{11}+B.m_{21}+C.m_{31}-\lambda.n(Y_1-Y_0)+\lambda.m(Z_1-Z_0) &= 0 \\
 A.m_{12}+B.m_{22}+C.m_{32}-\lambda.l(Z_1-Z_0)+\lambda.n(X_1-X_0) &= 0 \\
 A.m_{13}+B.m_{23}+C.m_{33}-\lambda.m(X_1-X_0)+\lambda.l(Y_1-Y_0) &= 0 \\
 -(A.m_{11}+B.m_{21}+C.m_{31})X_0-(A.m_{12}+B.m_{22}+C.m_{32})Y_0- \\
 (A.m_{13}+B.m_{23}+C.m_{33})Z_0-\lambda(m.Z_1-n.Y_1)X_0-\lambda(n.X_1-l.Z_1)Y_0-\lambda(l.Y_1- \\
 m.X_1)Z_0 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Analisando a quarta equação do grupo acima verifica-se que se trata de uma combinação linear das três primeiras, multiplicando-as respectivamente por X_0, Y_0, Z_0 . Esta equação é, portanto, eliminada do modelo matemático que passa a ser:

$$\begin{aligned}
 A.m_{11}+B.m_{21}+C.m_{31}-\lambda.n(Y_1-Y_0)+\lambda.m(Z_1-Z_0) &= 0 \\
 A.m_{12}+B.m_{22}+C.m_{32}-\lambda.l(Z_1-Z_0)+\lambda.n(X_1-X_0) &= 0 \tag{2.4.3} \\
 A.m_{13}+B.m_{23}+C.m_{33}-\lambda.m(X_1-X_0)+\lambda.l(Y_1-Y_0) &= 0
 \end{aligned}$$

Seja F uma matriz anti-simétrica, correspondente ao vetor diretor da feição reta; define-se F como:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & n & -m \\ -n & 0 & l \\ m & -l & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.4}$$

Não há aproximações na matriz F . Embora assemelhe-

se à matriz de Rodrigues, a matriz F é obtida a partir dos elementos do vetor diretor que define a orientação da feição reta.

As equações (2.4.3), usando notação matricial, podem ser escritas da forma:

$$([A \ B \ C] \cdot M)^T + \lambda \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.5)$$

Aplicando a propriedade de transposição de matrizes pode-se fazer:

$$([A \ B \ C] \cdot M)^T = M^T \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Lembrando ainda que a matriz de rotação M é uma matriz ortogonal pode-se afirmar que:

$$M^T = M^{-1} \quad (2.4.7)$$

Combinando as (2.4.7), (2.4.6) e (2.4.5) obtém-se:

$$M^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda.F. \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

Pré multiplicando por M:

$$M.M^{-1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -M.\lambda.F \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.4.9)$$

Lembrando que λ é um escalar e que o produto $M.M^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade, obtém-se a forma final do modelo matemático, ora denominado **modelo dos planos equivalentes**.

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda.M.F. \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

CAPITULO III

3. APLICAÇÃO DO MODELO DOS PLANOS EQUIVALENTES A RESSEÇÃO ESPACIAL

3.1. Introdução

A resseção espacial é o problema fotogramétrico básico e consiste em determinar os parâmetros de orientação exterior de uma fotografia isolada.

Os parâmetros de orientação exterior são as coordenadas do centro perspectivo (X_0, Y_0, Z_0) e a orientação do sistema fotogramétrico em relação ao referencial de terreno (k, ϕ, ω).

No procedimento clássico estes parâmetros são obtidos a partir das coordenadas de terreno de pontos de apoio, suas respectivas fotocoordenadas, distância focal calibrada e valores aproximados para os parâmetros incógnitos. O modelo matemático utilizado com pontos de apoio simples é a equação de colinearidade.

Neste capítulo o problema de resseção espacial será resolvido utilizando-se do modelo dos planos equivalentes e combinando-o com a equação de colinearidade.

3.2. Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados

O modelo matemático dos planos equivalentes (2.4.10)

apresenta as pseudo-observações como uma função explícita dos parâmetros, ou seja:

$$L_a = F(X_a) \quad (3.2.1)$$

A expressão acima permite a aplicação do método dos mínimos quadrados usando o método das equações de observação ou paramétrico.

A forma linearizada da equação (3.2.1) é:

$$A.X + L = V \quad (3.2.2)$$

onde:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_0}$$

$X = X_a - X_0$ $X_0 =$ Vetor dos parâmetros aproximados

$L = L_0 - L_b$ $L_0 = F(X_0)$

$L_b =$ Vetor das observações (Pseudo-observações)

$V =$ Vetor dos resíduos

A solução será dada por:

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.2.3)$$

onde P é a matriz peso.

A matriz variância-covariância dos parâmetros

ajustados será dada por:

$$\sum X^2 = \hat{\sigma}_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (3.2.4)$$

onde $\hat{\sigma}_0^2$ é a variância da observação de peso unitário.

3.2.1. O vetor dos parâmetros ajustados

Considerando o caso de resseção espacial tem-se como parâmetros:

- 6 parâmetros de orientação ($k, \phi, w, X_0, Y_0, Z_0$)
- 7 parâmetros por feição ($\lambda, X_1, Y_1, Z_1, l, m, n$)

Existem, portanto, para NF feições, $6 + 7.NF$ parâmetros:

$$X_a^T = [k, \phi, w, X_0, Y_0, Z_0, \lambda, X_1, Y_1, Z_1, l, m, n, \lambda_1, X_1, Y_1, \dots]$$

3.2.2. A matriz das derivadas parciais A

A matriz A é definida por:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_0}$$

Cada feição gerará 3 linhas na matriz, que terá $3.NF$ linhas e $6 + 7.NF$ colunas.

As derivadas parciais das funções explícitas do modelo matemático serão obtidas através de operações e propriedades matriciais.

Seguindo a ordem dos parâmetros estabelecida no item 3.2.1 e lembrando que o modelo matemático é:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ X_1 - X_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

onde $M = M(k) \cdot M(\phi) \cdot M(\omega)$;

Derivando:

$$\frac{\partial}{\partial k} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \cdot \frac{\partial M}{\partial k} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial k} = \frac{\partial M(k)}{\partial k} \cdot M(\phi) \cdot M(\omega)$$

$$\frac{\partial M(k)}{\partial k} = \begin{bmatrix} -\text{sen}k & \text{cos}k & 0 \\ -\text{cos}k & -\text{sen}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M(k)$$

$$\frac{\partial M}{\partial k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M(k) \cdot M(\varphi) \cdot M(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M$$

Finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial k} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = M(k) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot M(w)$$

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\varphi & 0 & -\text{cos}\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{cos}\varphi & 0 & -\text{sen}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos}\varphi & 0 & -\text{sen}\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\varphi & 0 & \text{cos}\varphi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = M(k) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M(\varphi) \cdot M(w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{cos}k \\ 0 & 0 & \text{sen}k \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M(\varphi) \cdot M(w)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos k \\ 0 & 0 & \sin k \\ \cos k & -\sin k & 0 \end{bmatrix} M(k) \cdot M(\phi) \cdot M(w)$$

Finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos k \\ 0 & 0 & \sin k \\ \cos k & -\sin k & 0 \end{bmatrix} \cdot M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \cdot \frac{\partial M}{\partial w} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial w} = M(k) \cdot M(\phi) \cdot \frac{\partial M(w)}{\partial w}$$

$$\frac{\partial M(w)}{\partial w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin w & \cos w \\ 0 & -\cos w & -\sin w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & -\sin w & \cos w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial M(w)}{\partial w} = M(w) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = M(k) \cdot M(\phi) \cdot M(u) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial w} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_0} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) \cdot M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial X_0} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\lambda) M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-\lambda) M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ -m \end{bmatrix} \quad (3.2.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_0} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial Y_0} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\lambda) M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-\lambda) M \cdot \begin{bmatrix} -n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_0} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial Z_0} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\lambda) M \cdot F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-\lambda) M \begin{bmatrix} m \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -M \cdot F \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Y_0 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = (-\lambda) M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-\lambda) M \cdot F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ -m \end{bmatrix} \quad (3.2.2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial Y_1} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} -n \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot F \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} m \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.2.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ Z_1 - Z_0 \\ -Y_1 + Y_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_m} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot \frac{\partial F}{\partial x_m} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot M \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \begin{bmatrix} -Z_1 - Z_0 \\ 0 \\ X_1 - X_0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot M \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix} = -\lambda \cdot M \begin{bmatrix} Y_1 - Y_0 \\ -X_1 + X_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O padrão da matriz A , das derivadas parciais, obtida acima, é mostrado na figura 3.2.2.1.

As derivadas parciais desenvolvidas podem ser resumidas no quadro 3.2.2.1.

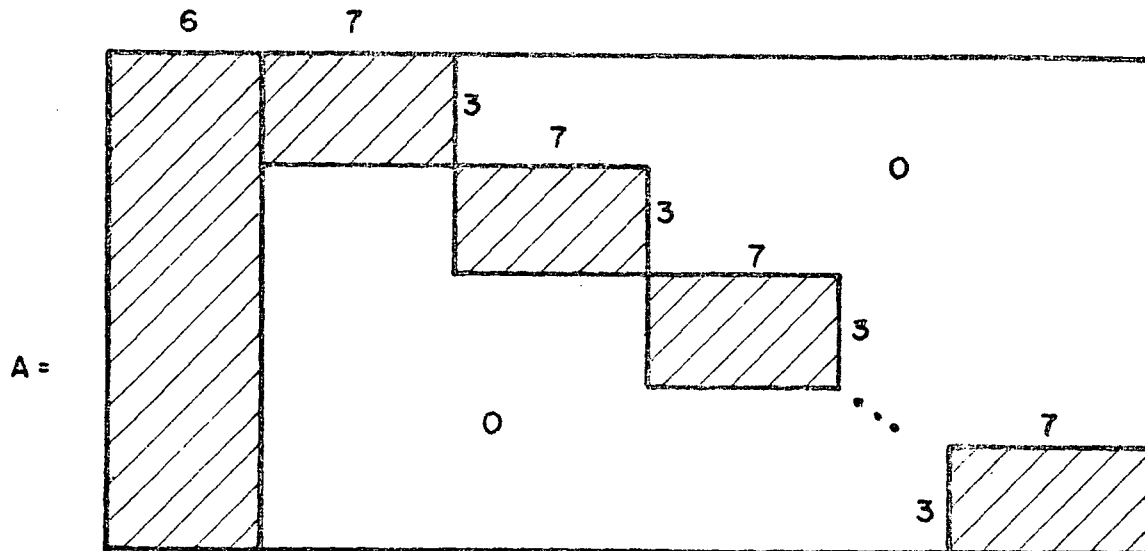


Figura 3.2.2.1. O padrão da matriz A .

3.2.3. A matriz peso P

Para a definição de uma matriz peso deve ser conhecida a matriz variância-covariância das quantidades observadas.

No modelo matemático desenvolvido neste trabalho (planos equivalentes), é usado o artifício de agrupar quantidades observadas (fotocoordenadas refinadas) obtendo valores que foram denominados pseudo-observações. Contudo, somente a variância das fotocoordenadas é conhecida.

Torna-se necessário, portanto, aplicar o procedimento de propagação das covariâncias, e obter a matriz variância-covariância das pseudo-observações em função das fotocoordenadas.

As pseudo-observações são dadas por:

$$A = (f.y1 - f.y2)$$

$$B = (f.x2 - f.x1)$$

$$C = (x1.y2 - x2.y1)$$

Na lei de propagação das covariâncias:

$$\Sigma Y = D \Sigma x D^T \quad (3.2.3.1)$$

onde:

$$\Sigma x = \text{Matriz variância-covariância das}$$

fotocoordenadas:

ΣY = Matriz variância-covariância das pseudo-observações (a ser obtida);

$$D = \frac{\partial F}{\partial X}$$

X = Vetor das fotocoordenadas.

$$X^T = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2]$$

$$D = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 & f & 0 & -f \\ -f & 0 & f & 0 \\ y_2 & -x_2 & -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3.2)$$

Supondo as quantidades observadas sem correlação e com a mesma variância:

$$\Sigma X = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.3.3)$$

onde σ_x^2 é a variância das fotocoordenadas refinadas.

Aplicando a lei de propagação das covariâncias:

$$\Sigma \times D^T = \begin{bmatrix} 0 & -f \cdot \delta x^2 & y_2 \cdot \delta x^2 \\ f \cdot \delta x^2 & 0 & -x_2 \cdot \delta x^2 \\ 0 & f \cdot \delta x^2 & -y_1 \cdot \delta x^2 \\ -f \cdot \delta x^2 & 0 & x_1 \cdot \delta x^2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma Y = \begin{bmatrix} f \cdot \delta x^2 + f \cdot \delta x^2 & 0 & -f \cdot x_2 \delta x^2 - f \cdot x_1 \delta x^2 \\ 0 & f \cdot \delta x^2 + f \cdot \delta x^2 & -f \cdot y_2 \delta x^2 - f \cdot y_1 \delta x^2 \\ -f \cdot x_2 \delta x^2 - f \cdot x_1 \delta x^2 & -f \cdot y_2 \delta x^2 - f \cdot y_1 \delta x^2 & (y_2^2 + x_2^2 + y_1^2 + x_1^2) \delta x^2 \end{bmatrix}$$

A matriz peso será dada por:

$$P = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot (\Sigma Y)^{-1}$$

onde ΣY é a matriz variância-covariância de todas as pseudo-observações envolvidas no problema e σ_0^2 é a variância da observação de peso unitário.

Observando os elementos da matriz variância-covariância, verifica-se que as covariâncias (exceto as nulas) possuem a mesma ordem de grandeza das variâncias (elementos da diagonal da matriz).

Na maioria dos problemas práticos em fotogrametria consideram-se as observações não-correlacionadas (covariâncias nulas), gerando uma matriz peso diagonal. Este

particularidade é extremamente benéfica em termos de otimização dos recursos computacionais, visto que só serão armazenados os elementos da diagonal da matriz.

A obtenção da matriz peso, no caso de M.V.C. diagonal, torna-se mais simples, pois a inversa desta matriz será dada pelo inverso dos elementos diagonais (variâncias) multiplicados pela variância da observação de peso unitário.

No modelo dos planos equivalentes, ora proposto, a M.V.C. das pseudo-observações é resultante de uma propagação de covariâncias. Fica claro que estas pseudo-observações são correlacionadas, e que o coeficiente de correlação pode ter ordem de grandeza próximo à unidade.

Coloca-se em questão a hipótese de negligência pura e simples desta correlação real, em benefício de uma otimização computacional.

Neste caso considerar-se-iam apenas as variâncias na definição da matriz peso. Seria gerada uma matriz peso diagonal onde os pesos das pseudo-observações relativas à i -ésima feição seriam:

$$\begin{aligned}
 p(i) &= \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot f} \cdot \sigma_x^2 \\
 p(i+1) &= \frac{\sigma_0^2}{2 \cdot f} \cdot \sigma_x^2 \\
 p(i+2) &= \frac{\sigma_0^2}{(y_2^2 + x_2^2 + y_1^2 + x_1^2)} \cdot \sigma_x^2
 \end{aligned} \tag{3.2.3.5}$$

Se, entretanto, for considerada a matriz peso a

partir da M.V.C. original obter-se-á:

$$P(1) = \sigma_0^{-2} [\Sigma Y(1)]^{-1}$$

onde $P(1)$ e $\Sigma Y(1)$ são submatrizes de ordem 3, correspondentes à 1-ésima feição.

O padrão da matriz peso, neste caso, será bloco diagonal, como mostrado na figura 3.2.3.1.

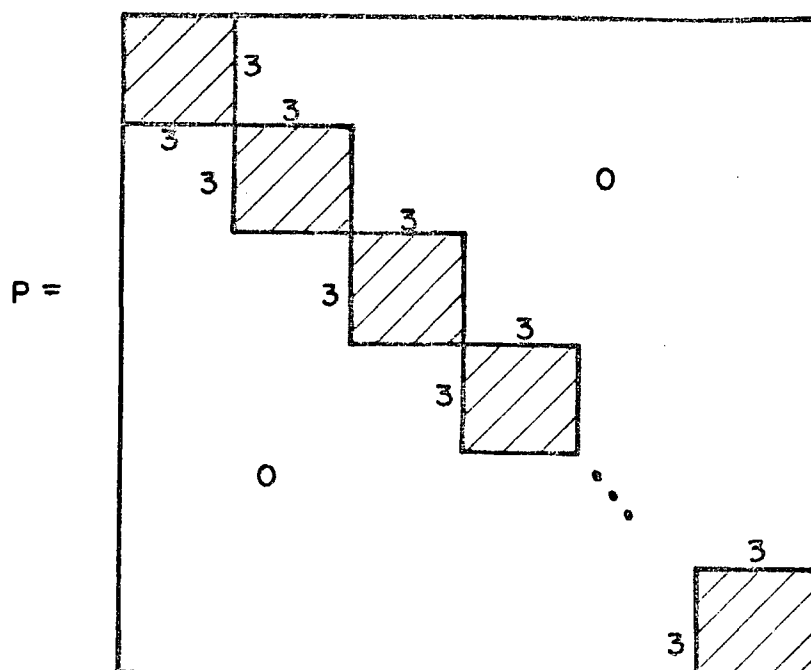


Figura 3.2.3.1 - O padrão da matriz peso, considerando as pseudo-observações correlacionadas.

Estas duas configurações da matriz peso são testadas e apresentadas no capítulo V, permitindo uma avaliação das

vantagens e perdas de cada escolha.

3.2.4. A matriz normal N

No método paramétrico o vetor das correções aos parâmetros aproximados é dado por:

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L$$

A matriz $A^T P A$ é chamada de matriz normal. A obtenção da inversa desta matriz, além de possibilitar o cálculo dos parâmetros ajustados, permitirá a avaliação da precisão interna do ajustamento através da M.V.C. dos parâmetros ajustados dada por:

$$\sum X^2 = 60 \cdot N^{-1}$$

Na maioria dos problemas fotogramétricos esta matriz possui dimensões consideráveis, que tornam a sua inversão um trabalho oneroso computacionalmente. O estudo do padrão das matrizes é uma ferramenta muito útil nos trabalhos de otimização. Na figura 3.2.4.1 é apresentado o padrão da matriz normal.

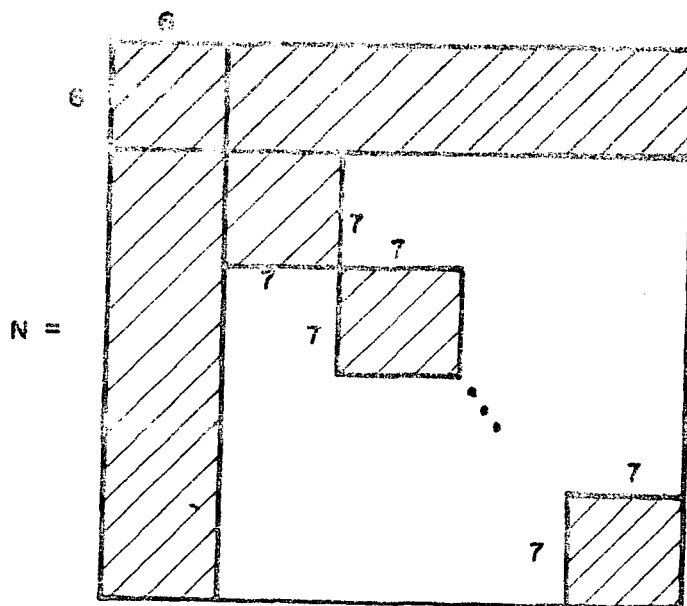


Figura 3.2.4.1 - O padrão da matriz normal N

3.2.5. Iteração e parâmetros aproximados

Ao ser estabelecido o modelo matemático dos planos equivalentes verifica-se sua não-linearidade. Para a aplicação do método dos mínimos quadrados adota-se um modelo linearizado a partir do original. Esta linearização é feita através de uma expansão em série pelo método de Taylor. A obtenção do valor final para os parâmetros está condicionada a um processo iterativo, onde são inicialmente avaliados valores aproximados que serão refinados várias vezes, até que a convergência seja satisfatória.

No caso da resseção espacial a avaliação dos parâmetros aproximados dar-se-á sem problemas. Considerando fotografias aéreas verticais, podemos avaliar w e ϕ aproximados como nulos e k dependerá da orientação planimétrica do sistema fotogramétrico em relação ao sistema referencial do espaço objeto.

As coordenadas planimétricas aproximadas do centro perspectivo (X_0, Y_0) podem ser extraídas de uma carta e a altitude aproximada do C.P. (Z_0) pode ser avaliada somando-se a altitude média da região à altura de vôo.

O valor aproximado para o fator de proporcionalidade entre os parâmetros do plano no espaço objeto e os parâmetros equivalentes no espaço imagem (λ) não pode ser avaliado facilmente devido à dificuldade de interpretação geométrica do modelo matemático. A melhor maneira é utilizar uma das equações do modelo matemático, substituindo-se nesta os valores aproximados dos demais parâmetros. Supondo-se ϕ e w como nulos e os demais valores conhecidos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n & -m \\ -n & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \\ Z_1 - Z_0 \end{bmatrix}$$

Isolando a última equação:

$$C = -\lambda \cdot [m(X_1 - X_0) - 1(Y_1 - Y_0)] \quad (3.2.5.2)$$

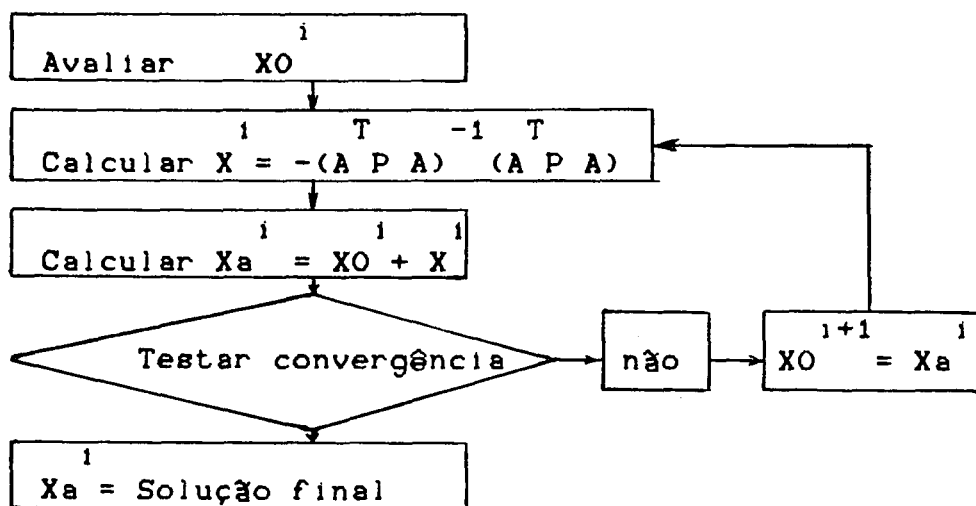
Lembrando que $C = (x_1.y_2 - x_2.y_1)$ e substituindo na (3.2.5.2) :

$$\lambda_0 = \frac{-(x_1.y_2 - x_2.y_1)}{[m(X_1 - X_0) - l(Y_1 - Y_0)]} \quad (3.2.5.3)$$

O fator de proporcionalidade λ deve ser avaliado para cada feição.

Os parâmetros da feição (X_1, Y_1, Z_1, l, m, n) são conhecidos no caso da resseção espacial e serão usados como injunção.

O processo iterativo dar-se-á do modo descrito no fluxo abaixo:



3.3. O modelo dos planos equivalentes combinado à equação de colinearidade

Até o presente ítem foi desenvolvido o modelo

matemático dos planos equivalentes e sua aplicação na resseção espacial. Tal modelo, utiliza como controle de campo (entidade no espaço objeto cujos parâmetros são conhecidos) feições retas cujos valores são introduzidos por meio de injunções relativas (item 3.4).

Nas aplicações práticas, contudo, estarão disponíveis pontos simples e feições curvas, estas com menor frequência. Em áreas urbanas é fácil perceber que estarão presentes, em maior quantidade, feições retas e pontos simples. O procedimento de maior eficiência, portanto, será aquele que conseguir aproveitar ao máximo todos os recursos existentes.

O modelo dos planos equivalentes pressupõe a existência de uma feição reta no espaço objeto. Para o aproveitamento dos pontos simples, eventualmente existentes, introduz-se o modelo de colinearidade ao procedimento proposto.

O modelo matemático até o momento era do tipo:

$$L_a = F (X_a) \quad (3.3.1)$$

A introdução do modelo de colinearidade implicará em adicionar equações de observação às (3.3.1), ficando:

$$L_a = F (X_a) \quad (3.3.2)$$

$$L'_a = G (X'_a)$$

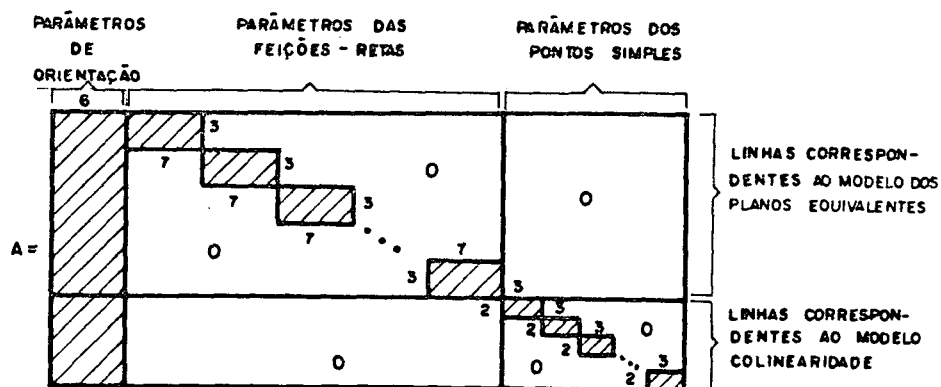


Figura 3.3.1 O padrão da matriz A , aumentada

A matriz normal N apresentará o padrão da figura

3.3.2.

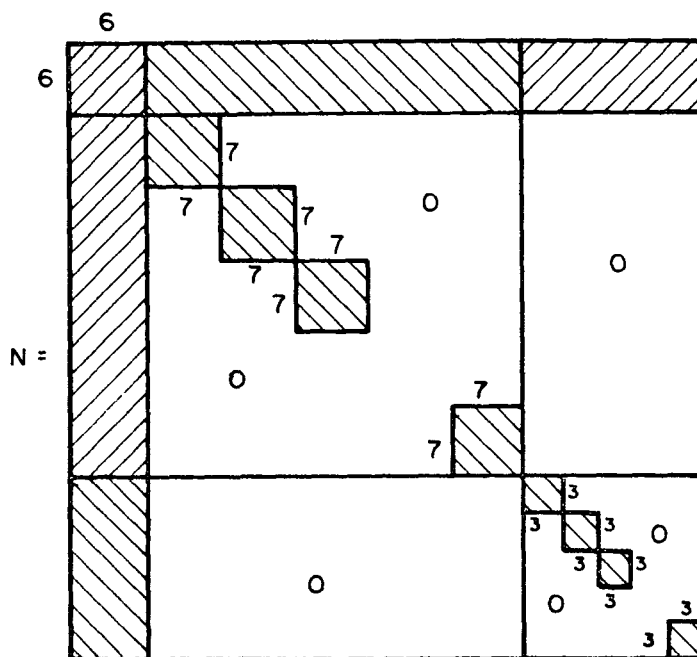


Figura 3.3.2 A matriz normal N

Caso seja considerada a matriz peso completa para as observações relativas às feições (pseudo-observações), ao ser introduzido o modelo de colinearidade será obtida uma matriz peso com o padrão mostrado na figura 3.3.3.

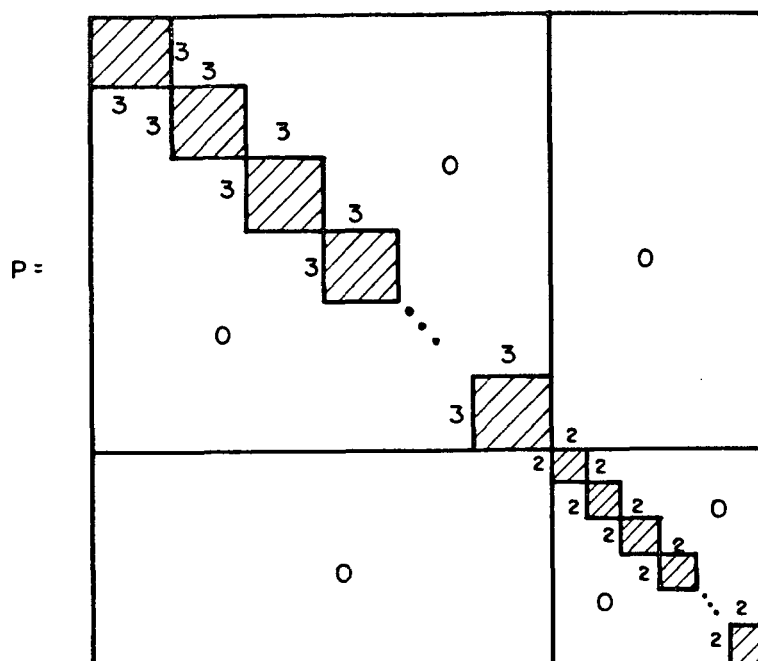


Figura 3.3.3 Matriz peso completa

É importante frisar que as observações referentes a pontos simples, que são as fotocoordenadas, são, via de regra, consideradas isentas de correlação, mesmo após sofrerem as correções no pré-refinamento. Sob esta hipótese a submatriz peso correspondente a essas observações será diagonal.

3.4. Injunções relativas

Uma injunção relativa é uma restrição imposta a um parâmetro, fazendo-o atender, além do modelo matemático, à variação controlada por um peso proporcional à confiança no valor fixado.

O modelo matemático original era do tipo:

$$L_a = F (X_a) \quad (3.4.1)$$

As equações referentes às injunções, envolvendo o mesmo grupo de parâmetros serão:

$$L_x = G (X_a) \quad (3.4.2)$$

Linearizando ambos os modelos:

$$A.X + L = V \quad (3.4.3)$$

$$C.X + L_c = V_c$$

onde:

$$L_c = L_0 - L_é$$

$$L_0 = G(X_0)$$

$$L_é = \text{Valor fixo para o parâmetro;}$$

As equações (3.4.3) formam um hipersistema:

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} L \\ Lc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Vc \end{bmatrix}$$

A forma quadrática fundamental tomará a forma :

$$\varnothing = V^T P V = [V \quad Vc] \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Pc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ Vc \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

Na (3.4.4) Pc é a matriz dos pesos das injunções.

Os pesos das injunções serão dados por:

$$Pc = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_c^2} \quad (3.4.5)$$

Onde σ_1^2 é a variância da injunção imposta ao parâmetro X_1 .

Desenvolvendo as (3.4.4) obtém-se:

$$V^T P V = V^T P V + Vc^T Pc Vc \quad (3.4.6)$$

Considerando as (3.4.3) e minimizando a forma quadrática fundamental:

$$\varnothing = V^T P V = (A.X+L)^T P (A.X+L) + (C.X+Lc)^T Pc (C.X+Lc) = \text{Min}$$

$$V^T P V = (X^T A^T + L^T) (P.A.X + P.L) + (X^T C^T + Lc^T) (Pc.C.X + Pc.Lc) =$$

$$\begin{aligned}
&= X^T A^T P A X + X^T A^T P L + L^T P A X + L^T P L + X^T C^T P c C X + \\
&+ X^T C^T P c L c + L c P c C X + L c P c L c = \text{mínimo}
\end{aligned}$$

$$\text{Se } V^T P V = \text{Mínimo então } \frac{\partial \phi}{\partial X} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial X} &= 2 A^T P A X + A^T P L + A^T P L + 2 C^T P c C X + C^T P c L c + \\
&+ C^T P c L c = 0
\end{aligned}$$

$$(A^T P A + C^T P c C) X + (A^T P L + C^T P c L c) = 0$$

$$X = -(A^T P A + C^T P c C)^{-1} (A^T P L + C^T P c L c) \quad (3.4.7)$$

A expressão (3.4.7) corresponde ao vetor das correções aos parâmetros aproximados com as restrições impostas aos parâmetros.

Na prática as injunções relativas permitirão a introdução do controle existente e, portanto, a definição do referencial do espaço objeto, eliminando a deficiência de característica da matriz normal.

Este controle pode ser o conjunto das equações de feições conhecidas, coordenadas dos pontos de apoio simples ou dados auxiliares a respeito dos parâmetros de orientação exterior.

Neste tipo de injunção é estabelecido um valor fixo para o parâmetro:

$$Lx = Xa \quad (3.4.8)$$

$$Lc + Vc = X0 + X$$

$$\text{A matriz } C = \frac{\partial G}{\partial Xa} \Big|_{X0}$$

será bloco identidade e portanto:

$$X = -(A^T P A + P_c)^{-1} A^T P L + P_c L_c \quad (3.4.9)$$

Para fixar determinado parâmetro basta somar na diagonal da matriz normal, na posição do parâmetro, o peso da injeção e no vetor $A^T P L$, na mesma posição, o produto $P_c L_c$.

A variância da observação de peso unitário (σ_0^2) a posteriori é obtida a partir do valor de $V P V$ com as injeções:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V + V_c^T P_c V_c}{(M - N + N_c)} \quad (3.4.10)$$

onde:

M é o número de equações de observação;

N é o número de parâmetros;

N_c é o número de injeções.

Este valor obtido "a posteriori" deve ser

confrontado com o valor atribuído "a priori" através do teste de χ^2 para verificar a qualidade do ajustamento.

3.4.1. Injunções no caso da ressecção espacial

Observando o vetor dos parâmetros ajustados verifica-se que todos são tratados como incógnitas, para serem fixados por meio de injunção. No caso da ressecção espacial o usual é serem conhecidas as coordenadas dos pontos de controle e das feições, determinando-se pelo M.M.Q. os valores dos parâmetros de orientação e dos fatores de proporcionalidade.

Caso o objetivo fosse determinar as coordenadas de um ponto no espaço objeto ao menos uma coordenada deve ser conhecida (usualmente Z).

Para as feições são conhecidos os valores da origem (X_1, Y_1, Z_1) e do vetor diretor (l, m, n) , restando o fator de proporcionalidade (λ) como incógnita por feição.

Portanto, além dos 6 parâmetros de orientação, cada feição introduz uma incógnita adicional, que é o fator de proporcionalidade, já que os planos equivalentes no espaço imagem e espaço objeto são múltiplos escalares.

CAPÍTULO IV

4. APLICAÇÃO DO MODELO DOS PLANOS EQUIVALENTES NA CONSTRUÇÃO ANALÍTICA DE MODELOS

4.1 Introdução

A definição do procedimento para construção analítica de modelos é idêntica à de fototriangulação, uma vez que este problema é uma generalização do primeiro, para várias fotos.

Mais especificamente, o processo de construção analítica de modelos refere-se à determinação de parâmetros de orientação exterior de um par de fotografias com superposição e de coordenadas de pontos no espaço objeto por intersecção fotogramétrica (via equação de colinearidade) e sua respectiva variância.

Com a introdução do conceito dos planos equivalentes torna-se possível determinar a equação de uma feição reta no espaço objeto por intersecção dos planos gerados em duas fotos distintas, como ilustrado na figura 4.1.1.

A feição el aparece em ambas as fotos, sendo definida pela determinação das fotocoordenadas de dois de seus pontos não havendo necessidade de correspondência com pontos em particular no espaço objeto.

O modelo utilizado é o dos planos equivalentes.

Quando a feição é considerada como incógnita algumas injunções mínimas deverão ser impostas, como será mostrado adiante.

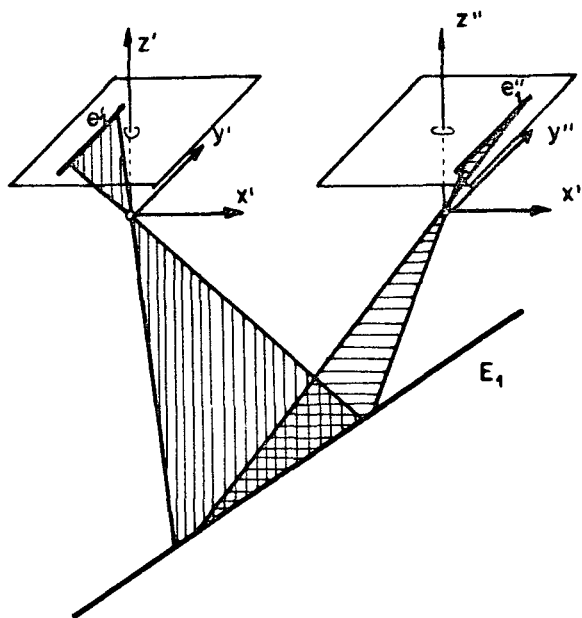
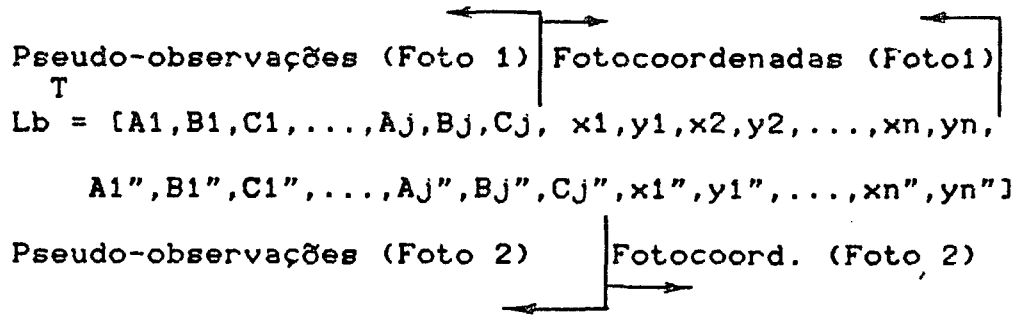


Figura 4.1.1 Intersecção de planos equivalentes

Como foi dito no ítem 3.2 um procedimento será mais eficiente na medida em que procurar utilizar o máximo de recursos disponíveis. Nesse ítem procurou-se combinar o modelo dos planos equivalentes à equação de colinearidade, tendo em vista o princípio acima. No desenvolvimento que será feito neste capítulo, para a construção analítica de modelos, será considerada, desde o início, a combinação destes modelos matemáticos. As experiências práticas a serem apresentadas no capítulo V também deverão observar este princípio.



A matriz A, das derivadas parciais apresentará o padrão mostrado na figura 4.2.1.

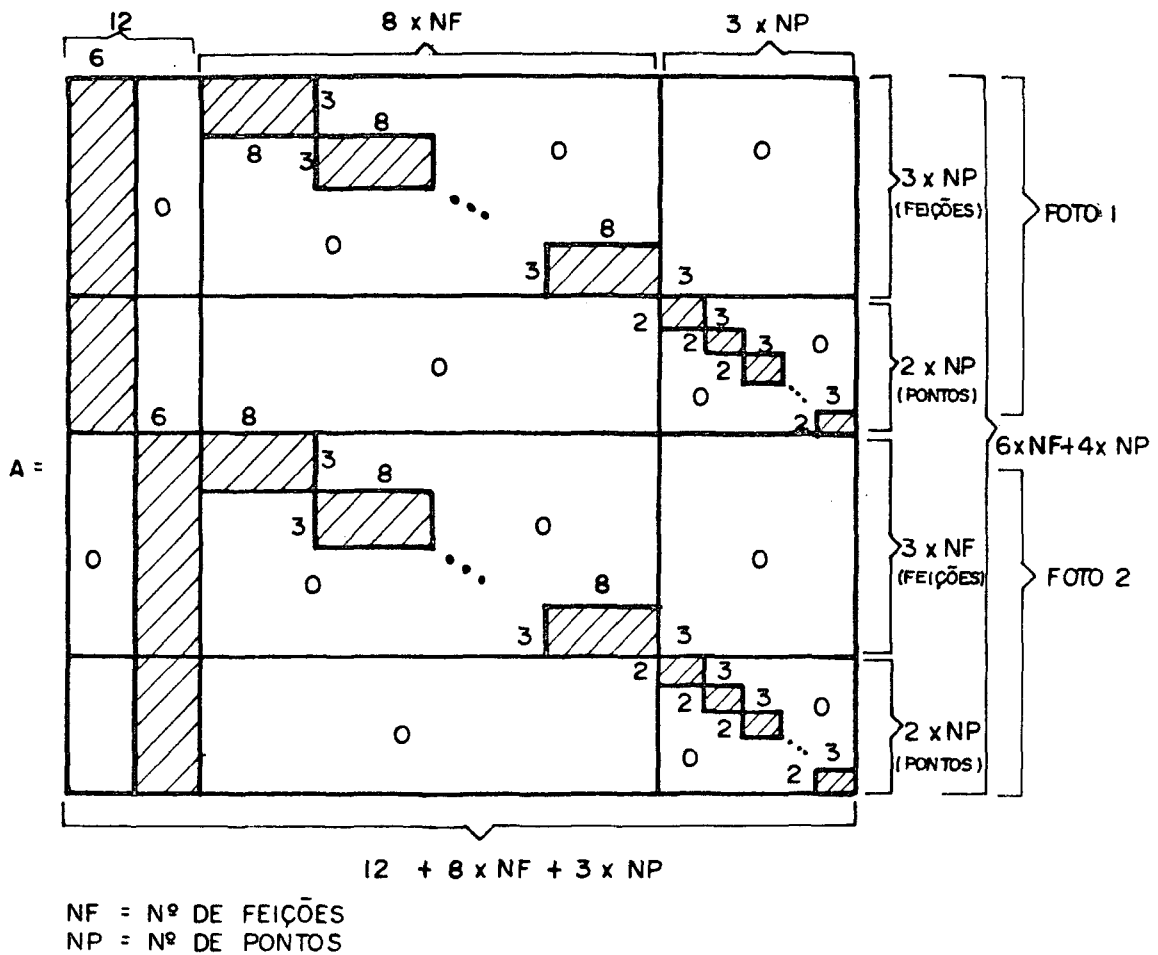


Figura 4.2.1 Padrão da matriz A

A matriz peso está sujeita às mesmas considerações abordadas no item 3.1.3. Os testes práticos a serem apresentados no capítulo V mostram que a correlação entre as pseudo-observações pode ser negligenciada e, neste caso, a matriz peso torna-se diagonal.

Para ambas as situações a matriz normal apresenta o mesmo padrão, mostrado na figura 4.2.2.

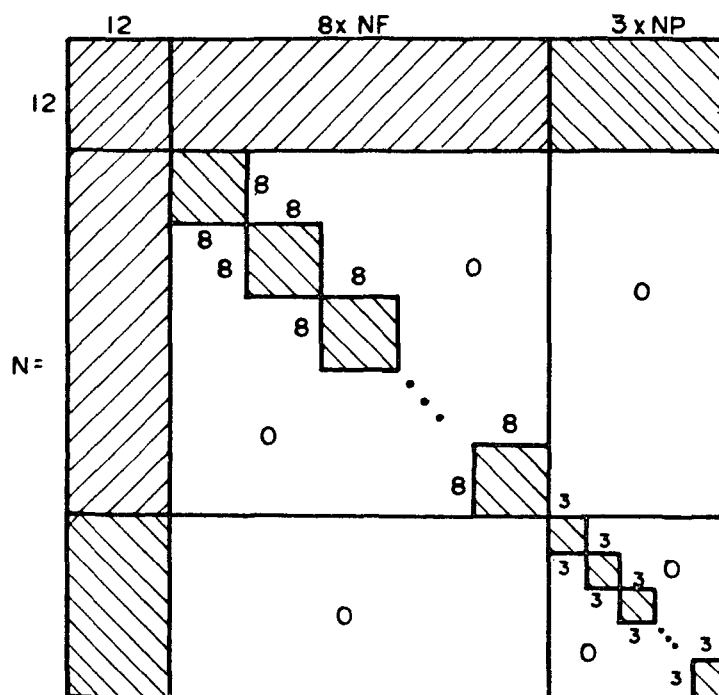


Figura 4.2.2 O padrão da matriz N

O vetor dos parâmetros ajustados será obtido através da solução pelo método dos mínimos quadrados. Algumas

injunções devem ser aplicadas para definir o referencial e remover a singularidade da matriz normal.

4.3 Injunções mínimas

O número de injunções mínimas depende da quantidade de feições e pontos simples existentes. No capítulo V serão mostradas várias situações e os respectivos resultados.

Quando forem conhecidos os parâmetros de uma feição no espaço objeto, isto é, os valores de X_1, Y_1, Z_1, l, m, n , os parâmetros λ_1 e λ_2 permanecem como incógnitas.

Ao contrário, quando os parâmetros da feição são desconhecidos e o objetivo é determiná-los por intersecção de planos, são fixados, com injunções de peso infinito (absoluta), os parâmetros λ_1 (ou λ_2) e X_1 (ou Y_1 ou Z_1), com valores arbitrários. O plano coordenado a ser fixado não deve formar um ângulo agudo com a feição.

CAPITULO V

5. ESTUDO PRATICO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1. Objetivos e características do estudo

Esta fase do trabalho, em que serão realizados testes com o modelo matemático desenvolvido, tem por objetivos principais:

- Verificar o funcionamento do modelo matemático proposto;
- Estudar múltiplas situações, observar e analisar a qualidade dos resultados;
- Estudar as possibilidades de aplicações do modelo proposto;

Dentro destes objetivos procurou-se viabilizar um estudo onde o modelo matemático pudesse ser analisado sem a influência dos erros sistemáticos nas observações. A utilização de valores numéricos obtidos por simulação matemática é o caminho natural para este tipo de estudo.

Devido à limitação dos recursos computacionais disponíveis (microcomputadores EGO-PC) o número de experiências e a quantidade de feições presentes em cada caso, foram restritas. O tempo médio de uso da C.P.U. para cada execução dos programas é de cerca de 50 minutos.

Várias distribuições de feições e combinações com pontos de controle simples são estudadas e os resultados tabelados e analisados.

5.2. Geração de dados simulados

A geração de dados é baseada na utilização de um modelo matemático suficientemente conhecido usando valores arbitrários para os parâmetros de orientação exterior e pontos de controle ou feições retas no espaço objeto.

Um modelo matemático que pode ser considerado confiável é a equação de colinearidade, que liga pontos discretos no espaço imagem e espaço objeto. A tarefa de gerar dados consiste, basicamente, em impor valores arbitrários para os parâmetros e calcular os valores das fotocoordenadas usando a equação de colinearidade. A estes valores obtidos (x,y) , para um conjunto de pontos, são adicionados erros randômicos. Para este estudo recorreu-se a um programa já existente que simula fotocoordenadas, introduzindo erros randômicos nunca superiores a três vezes o desvio padrão atribuído arbitrariamente.

Considerando a ênfase dada às regiões urbanas, procurou-se simular uma situação comum em levantamentos cadastrais urbanos, com parâmetros usuais, quais sejam:

- Escala das fotos : 1:8.000

- Constante da câmara : 150 mm
- $|\theta|$ e $|\omega| < 3^\circ$

Foram geradas fotocoordenadas para um par de fotografias com superposição longitudinal de 60%, visando testar inicialmente a resseção espacial e, posteriormente a construção analítica de modelos.

Supondo a existência de uma malha viária urbana regular, foram criados grupos de pontos que pudessem ser combinados entre si gerando feições retas em várias posições e tamanhos.

A figura 5.2.1. representa a configuração usada para simular os pontos no espaço objeto.

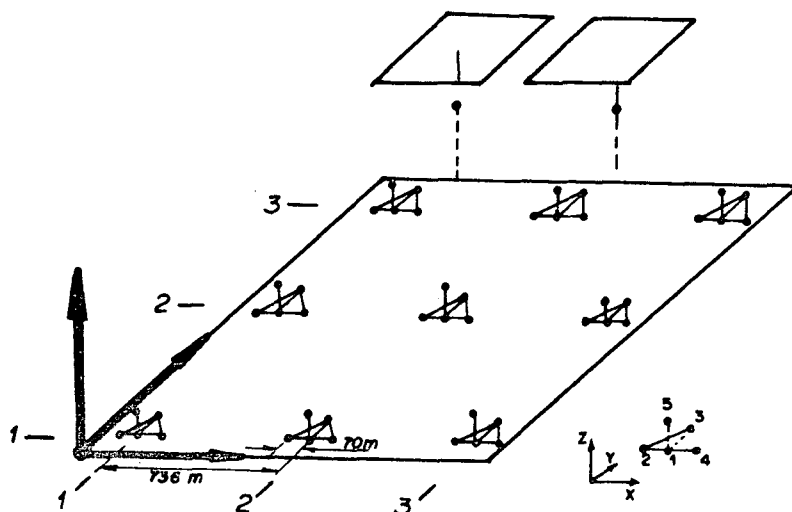


Figura 5.2.1. Pontos no espaço objeto usados para a simulação de fotocoordenadas

As coordenadas dos pontos no espaço objeto foram obtidas supondo-se um referencial cartesiano arbitrário onde o eixo X é aproximadamente paralelo à linha de v̄o. A origem do sistema referencial situa-se no canto inferior esquerdo da figura 5.2.1. e o plano coordenado XOY é horizontal.

Admitiu-se que as coordenadas destes pontos foram medidas com desvio padrão de 0.010 m.

Na simulação de fotocoordenadas foi adotado o valor de 5 μm para o desvio padrão dos erros randômicos a serem adicionados aos valores calculados através da equação de colinearidade. Deste modo, o maior erro randômico introduzido foi de $\pm 15 \mu\text{m}$.

5.3. Programas FORTRAN

O trabalho de implementação computacional consistiu na construção de programas FORTRAN, para o cálculo da resseção espacial (RESF), cálculo da resseção espacial considerando a matriz peso completa (RESF2) e formação de modelos (MODEL).

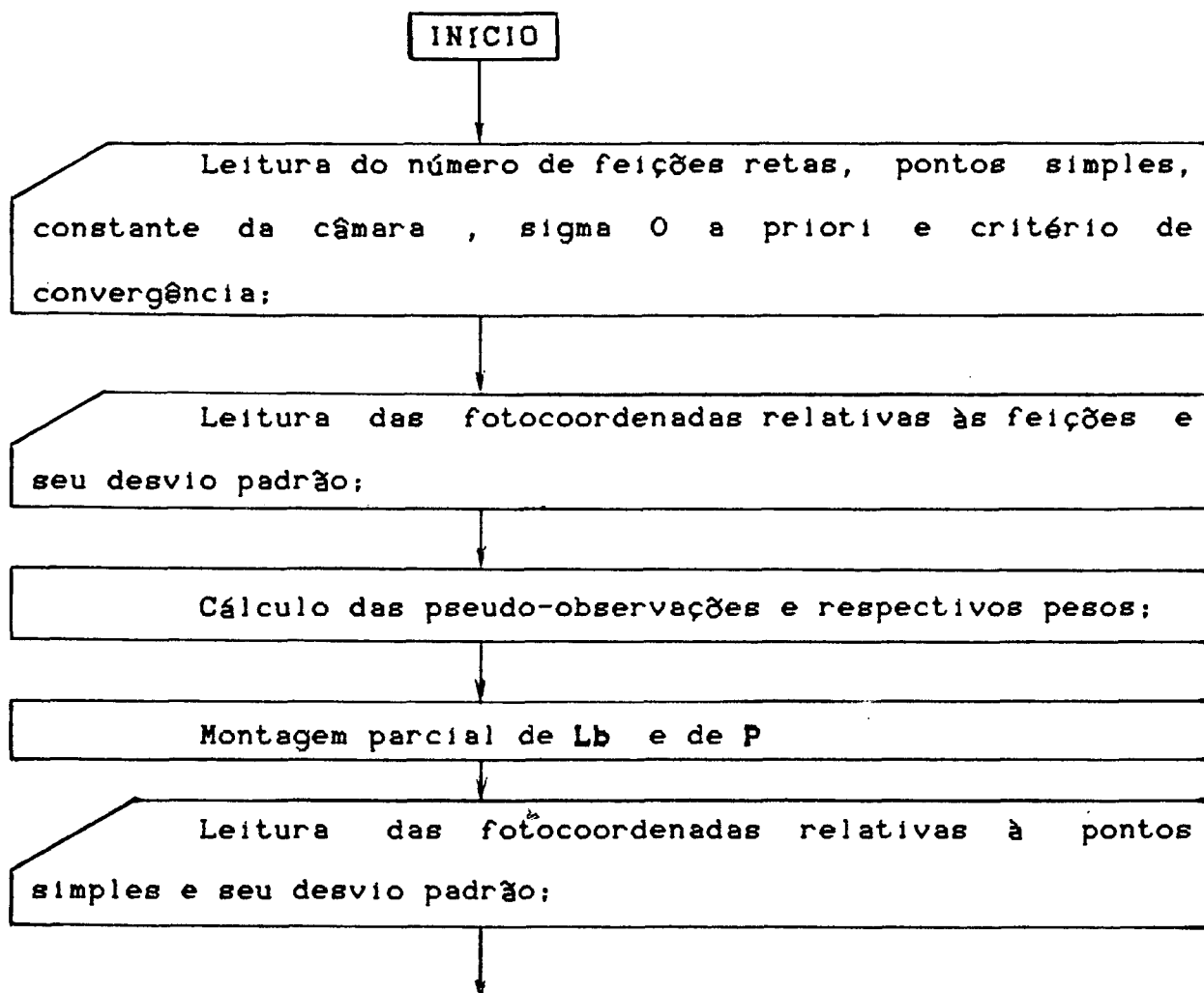
A estrutura dos três programas é a mesma, com pequenas alterações para cada caso. O programa básico é o de resseção espacial, descrito no fluxograma apresentado adiante. No programa RESF2 foram introduzidas modificações para permitir o uso da matriz peso completa. Para isto foi elaborada uma subrotina para o triplo produto matricial e

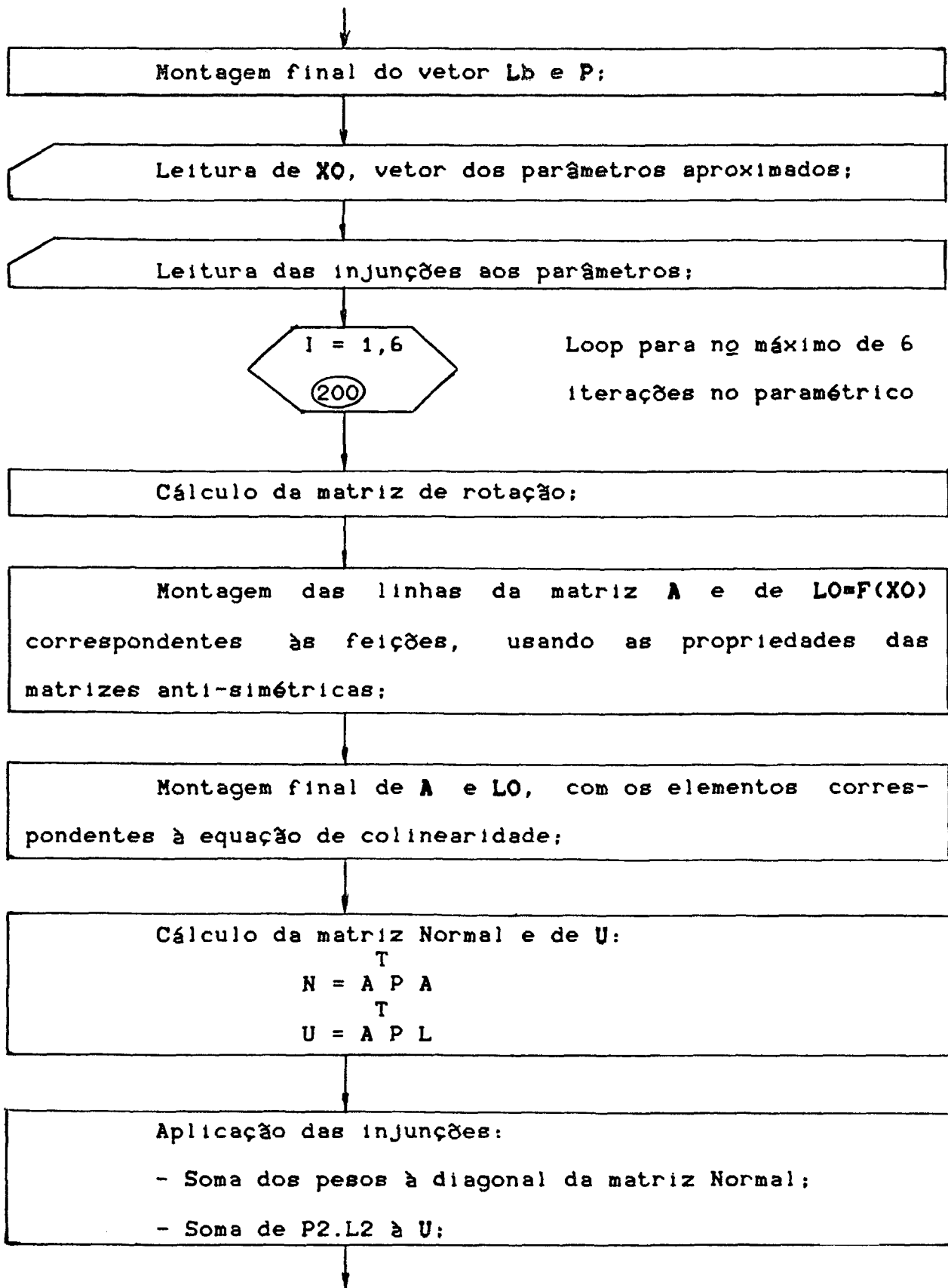
introduzidas modificações na montagem da matriz peso.

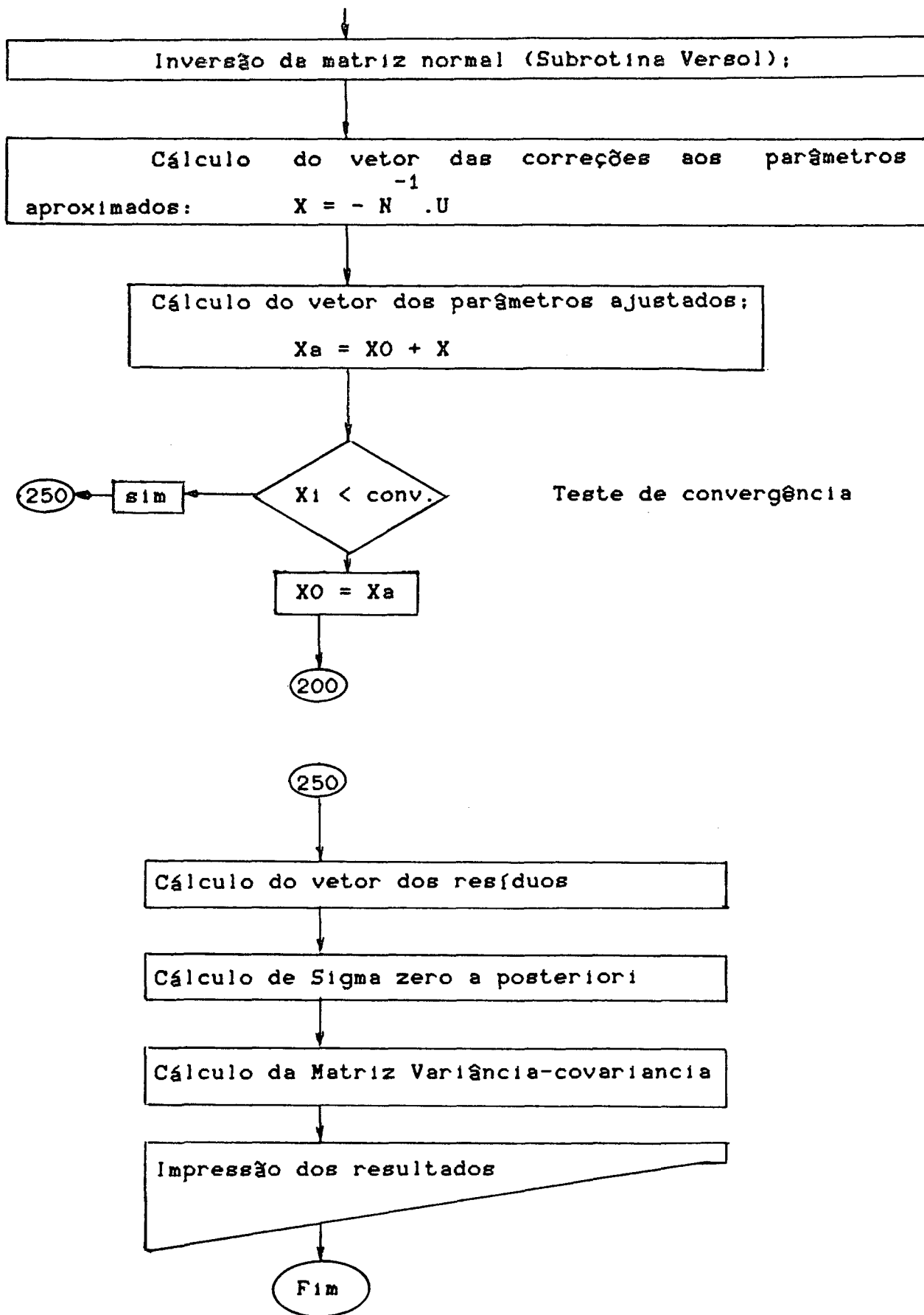
O programa MODEL diferencia-se dos anteriores por ajustar duas fotos usando, porém, a mesma estrutura do programa RESF e considerando a matriz peso diagonal. Em todos os programas foi considerado o método de combinação do modelo proposto com o modelo de colinearidade.

Os programas foram implantados e testados no computador "COBRA 480", sendo posteriormente adaptados para o microcomputador "EGO-PC", compatível com o "IBM-PC".

FLUXOGRAMA







5.4. Análise Estatística dos resultados

Os resultados obtidos com as situações simuladas, tanto para a resseção espacial, quanto para a formação de modelos, devem ser analisados e comparados através de critérios estatísticos, usando os testes de hipótese.

O primeiro tipo de teste a ser aplicado é o teste de χ^2 , confrontando o sigma zero "a posteriori" ($\hat{\sigma}_0$) com o sigma zero "a priori". O sigma zero "a priori" não tem efeito sobre o valor dos parâmetros ajustados, sendo denominado variância da observação de peso unitário.

Aplica-se este teste porque a forma quadrática $V^{-1} \sum Lb$ tem distribuição χ^2 com S graus de liberdade:

$$V^{-1} \sum Lb > \chi^2(S) \quad (5.4.1)$$

Portanto:

$$\frac{V^{-1} \sum Lb}{60} = \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot S}{60} > \chi^2(S) \text{ (Calculado)} \quad (5.4.2)$$

Basta testar a hipótese básica:

$$H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad (5.4.3)$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1 : \sigma_0^2 \neq \sigma_0^2 \quad (5.4.4)$$

O valor calculado com a (5.4.2) deve ser confrontado com os valores teóricos:

$$X_{s, \frac{\alpha}{2}}^2 \quad \text{e} \quad X_{s, 1 - \frac{\alpha}{2}}^2 \quad (5.4.5)$$

que são calculados teoricamente, ou extraídos de tabelas estatísticas.

A hipótese básica será aceita, ao nível de significância α , se:

$$X_{s, \frac{\alpha}{2}}^2 < X_c^2 < X_{s, 1 - \frac{\alpha}{2}}^2 \quad (5.4.6)$$

Para testar a qualidade dos parâmetros ajustados pode-se compará-los aos seus valores reais, que são conhecidos, uma vez que os dados foram simulados. Nestas condições pode-se calcular o erro verdadeiro $(X_a^i - X_r^i)$ e compará-lo ao valor do desvio padrão estimado pela matriz variância-covariância, usando o sigma zero "a posteriori".

O quociente:

$$\frac{(X_a^i - X_r^i)}{\sigma_1} = t(s) \quad (5.4.7)$$

segue uma distribuição t com S graus de liberdade, onde:

X_a^i é o valor ajustado do i -ésimo parâmetro;
 X_r^i é o valor real do i -ésimo parâmetro;
 δ_i é o desvio padrão do i -ésimo parâmetro.

A hipótese básica será:

$$H_0: X_a^i = X_r^i \quad (5.4.8)$$

contra a hipótese alternativa:

$$H_1: X_a^i \neq X_r^i \quad (5.4.9)$$

O valor teórico de $t(s)$ é também obtido através de cálculos usando a lei da distribuição ou usando tabelas pré-cálculadas.

A análise da correlação eventualmente existente entre os parâmetros ajustados é feita mediante o cálculo do coeficiente de correlação a partir dos dados da M.V.C.:

$$\rho_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{\delta_i \cdot \delta_j} \quad (5.4.10)$$

onde:

$\delta_{i,j}$ é a covariância entre os parâmetros i e j ;
 δ_i e δ_j são os desvios-padrão dos parâmetros i e j .




5.5. Resultados

5.5.1. Resseção Espacial

Os testes com a resseção espacial tiveram como objetivo estudar o comportamento do modelo matemático quando são conhecidos os parâmetros de várias feições presentes em uma fotografia isolada. Os parâmetros das feições (X_1, Y_1, Z_1, l, m, n) são introduzidos como injunção, servindo como controle. O fator de proporcionalidade (λ) entre parâmetros do plano no espaço imagem e parâmetros do plano no espaço objeto é o responsável pela absorção do efeito causado pela "não necessidade" de correspondência ponto a ponto entre imagem e objeto. Essa incógnita adicional permite esta liberdade, exigindo, entretanto, maior número de observações. Com efeito, são necessárias, no mínimo, quatro feições para resolver o problema de resseção espacial, ou então, três feições e um ponto de controle simples entre outras combinações.

A tabela 5.5.1.1 mostra resultados de testes efetuados com uma mesma foto, com as mesmas observações e com três grupos distintos de injunções. No primeiro caso os parâmetros das feições foram calculados diretamente da simulação, o que equivale a dizer que há correspondência entre os pontos no espaço imagem (observados) e os pontos no espaço objeto, usados para calcular a equação paramétrica da

Tabela 5.5.1.1. VALORES OBTIDOS COM A MESMA FOTO COM 3 GRUPOS DIFERENTES DE INJUNÇÕES

Nº	PARÂM.	SITUAÇÃO			
		VALOR REAL	CASO I 	CASO II 	CASO III 
1	κ	0	0,000008	0,000008	0,000008
2	ϕ	-0,01745342	-0,0175284	-0,0175284	-0,0175287
3	ω	0,01745392	0,0174492	0,0174492	0,0174492
4	x_0	920	919,8693	919,8693	919,8687
5	y_0	920	919,9957	919,9958	919,9958
6	z_0	1216	1216,0090	1216,0090	1216,0090
7	λ'	-	-0,0155385	-0,0155385	-0,0217850
8	x'_1	184	183,9995*	183,9995*	183,9995*
9	y'_1	254	254,0000*	250,0000*	250,0000*
10	z'_1	0	0,0003*	0,0003*	0,0003*
11	l'	0	-0,0009*	-0,0009*	-0,0012*
12	m'	1402	1402,0000*	1402,0000*	1000,0000*
13	n'	0	0,0006*	0,0006*	0,0007*
14	λ''	-	-0,0149096	-0,0149096	-0,0198596
15	x''_1	254	254,0000*	260,0000*	260,0000*
16	y''_1	1656	1656,0000*	1656,0000*	1656,0000*
17	z''_1	0	-0,0003*	-0,0003*	-0,0003*
18	l''	1332	1332,0000*	1332,0000*	1000,0000*
19	m''	0	-0,0009*	-0,0009*	-0,0012*
20	n''	0	-0,0006*	-0,0006*	-0,0007*
21	λ'''	-	-0,0148947	-0,0148947	-0,0208824
22	x'''_1	1656	1656,0000*	1656,0000*	1656,0000*
23	y'''_1	1656	1656,0000*	1650,0000*	1650,0000*
24	z'''_1	0	0,0003*	0,0003*	0,0003*
25	l'''	0	0,0009*	0,0009*	0,0012*
26	m'''	-1402	-1402,0000*	-1402,0000*	-1000,0000*
27	n'''	0	0,0006*	0,0006*	0,0007*
28	λ^{\sim}	-	-0,0155549	-0,0155549	-0,0228968
29	x^{\sim}_1	1656	1656,0000*	1660,0000*	1660,0000*
30	y^{\sim}_1	184	184,0005*	184,0005*	184,0005*
31	z^{\sim}_1	0	0,0002947*	-0,0003*	-0,0003*
32	l^{\sim}	-1472	-1472,0000*	-1472,0000*	-1000,0000*
33	m^{\sim}	0	0,0009*	0,0009*	0,0012*
34	n^{\sim}	0	-0,0006*	0,0006*	-0,0007*

Obs.: Ângulos de orientação em radianos.

Coordenadas do C.P. e parâmetros das feições em metros.

feição.

No segundo caso a origem das feições foi deslocada, permanecendo, entretanto, os mesmos vetores diretores do primeiro caso.

No terceiro caso, além da origem, também os vetores diretores foram alterados, com valores que são, por força da equação paramétrica, proporcionais aos primeiros.

Na tabela 5.5.1.1 são apresentados os parâmetros ajustados obtidos em cada um dos três casos. Os valores assinalados com * foram usados como injunções.

Em todas as situações testadas neste trabalho adotou-se o desvio padrão de 0,01 m para a origem das feições e desvio-padrão de 0,014 m para os valores dos vetores diretores. O desvio padrão é maior nos vetores diretores pois supõe-se que tenham sido calculados como diferença de coordenadas, sofrendo, portanto, o efeito da propagação de erros.

Nos três casos apresentados na tabela 5.5.1.1 o teste χ^2 foi aceito ao nível de significância de 5%. Os testes da distribuição t aplicados aos parâmetros também foram aceitos, ao nível de significância de 5%.

Analisando a tabela 5.5.1.1 pode-se notar que, para três grupos diferentes de injunções, foram obtidos quase os mesmos valores para os parâmetros de orientação, como também para o sigma zero a posteriori.

A figura 5.5.1.1 mostra, esquematicamente, o tipo de injunção aplicada em cada um dos três casos.

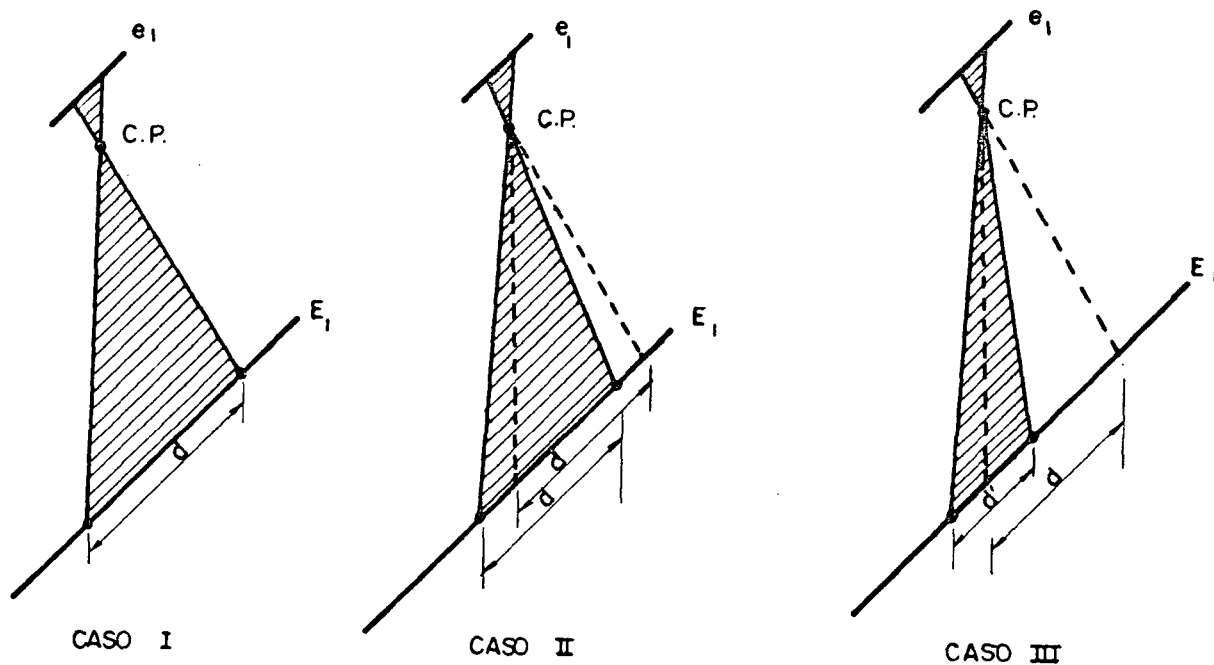


Figura 5.5.1.1 Esquema das injunções

A análise dos fatores de proporcionalidade obtidos em cada um dos três casos valida as afirmações anteriores sobre a sua capacidade de absorver os efeitos causados pela "não necessidade" de correspondência ponto a ponto. Pode-se verificar, ainda da tabela 5.5.1.1, que os fatores de proporcionalidade e os vetores diretores guardam uma

proporção. É fato que, ao multiplicar-se λ pelos elementos dos vetores diretores em cada um dos casos, obtém-se um mesmo valor, o que indica que o parâmetro λ cumpre a função do parâmetro t da equação paramétrica da reta no espaço.

Os resultados apresentados na tabela 5.5.1.1 provam que o modelo é eficiente quanto ao relaxamento da necessidade de correspondência ponto a ponto.

O próximo passo é analisar a qualidade dos parâmetros em função da configuração geométrica e do número de feições. Esta análise será feita por meio de alguns casos que resumem todas as situações estudadas. Estes casos, com a análise estatística dos testes de hipótese, são apresentados nas tabelas 5.5.1.2, 5.5.1.3, 5.5.1.4 e 5.5.1.5.

As tabelas mostram que a qualidade dos parâmetros obtidos é dependente da configuração geométrica das feições e do número destas.

A tabela 5.5.1.2 mostra uma resseção convencional, usando quatro pontos de apoio. Este caso serve como referência para os demais.

Na tabela 5.5.1.3 é apresentado um caso em que a dimensão das feições é de cerca de 70 m (comprimento de uma quadra urbana) e distribuídas de acordo com o esquema. Nota-se que as feições são paralelas duas a duas, o que equivale a dizer que seus vetores diretores são iguais. Os testes de hipótese de χ^2 e t foram aceitos, com excessão do parâmetro w que apresentou t (calculado) superior ao teórico. Nota-se que

Tabela 5.5.1.2 Resseção Espacial com pontos simples

Par.	Valor Real	Valor Ajustado	Erro (Xa - Xr)	Desvio Padrão	t Calc.	t Teor.
k	0	-0,0000082	-0,000008	0,0001	0,082	4,30
ϕ	-0,01745329	-0,0174762	-0,000022	0,0001	-0,22	
w	0,01745329	0,0174812	0,000027	0,0001	0,27	
Xo	920	919,9589	-0,0411	0,1069	-0,38	
Yo	920	919,9553	-0,0447	0,1069	-0,41	
Zo	1216	1216,0090	0,0090	0,0329	0,27	

Tabela 5.5.1.3 Resseção Espacial com 4 feições

Par.	Valor Real	Valor Ajustado	Erro (Xa - Xr)	Desvio Padrão	t Calc.	t Teor.
k	0	-0,0001143	-0,000114	0,0001	-1,14	4,30
ϕ	-0,01745329	-0,0171788	0,000274	0,0001	2,74	
w	0,01745329	0,0182408	0,000787	0,0001	7,87	
Xo	920	920,5714	0,5714	0,4036	1,41	
Yo	920	918,3549	-1,6451	0,4052	-4,05	
Zo	1216	1215,9260	-0,0740	0,1667	-0,44	

Tabela 5.5.1.4 Resseção Espacial com 4 feições

Par.	Valor Real	Valor Ajustado	Erro (Xa - Xr)	Desvio Padrão	t Calc.	t Teor.
k	0	0,0000080	0,000008	0,0000	0,86	4,30
ϕ	-0,01745329	-0,0175284	-0,000075	0,0000	-3,49	
w	0,01745329	0,0174492	-0,000004	0,0000	-0,19	
Xo	920	919,8693	-0,1307	0,0392	-3,33	
Yo	920	919,9957	-0,0043	0,0392	-0,10	
Zo	1216	1216,0090	0,0090	0,0190	0,47	

Tabela 5.5.1.5 Resseção Espacial com 7 feições

Par.	Valor Real	Valor Ajustado	Erro (Xa - Xr)	Desvio Padrão	t Calc.	t Teor.
k	0	-0,0002297	-0,000229	0,0001	-2,30	2,38
ϕ	-0,01745329	-0,0173138	0,000139	0,0003	0,44	
w	0,01745329	0,0179145	0,000461	0,0002	2,30	
Xo	920	920,0839	0,0839	0,4589	0,18	
Yo	920	919,4287	-0,5713	0,2432	-2,34	
Zo	1216	1215,9660	-0,0340	0,2627	-0,12	

esta configuração é deficiente.

Na tabela 5.5.1.4 uma situação diferente é apresentada, mostrando feições que ocupam quase toda a dimensão da foto. Os vetores são também paralelos entre si. O teste de X^2 é aceito, bem como o teste t para todos os parâmetros. Os parâmetros que apresentam maiores problemas são ϕ e X_0 , embora aceitos no teste de hipótese.

Na tabela 5.5.1.5 é apresentada a situação que mais se aproxima da realidade prática, com a presença de sete feições de dimensões correspondentes a uma quadra urbana. Persiste o paralelismo entre algumas feições. Os resultados agora obtidos são melhores, com a aceitação de todos os testes de hipótese. Os parâmetros ϕ e X_0 continuam sendo os que apresentam maiores discrepâncias.

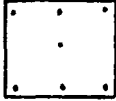

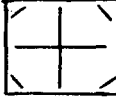

A tabela 5.5.1.6 apresenta um resumo de todas as situações estudadas. Nela são apresentados os erros verdadeiros, o valor de sigma a posteriori, os graus de liberdade e observações sobre a aceitação ou não dos testes de hipótese. Algumas situações que apresentam deficiência de característica na matriz normal não foram tabuladas mas serão objeto de algumas considerações, bem como sobre a forma de remoção desta deficiência.

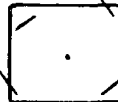

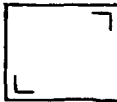


Os nove casos apresentados na tabela 5.5.1.6 procuram sintetizar configurações que possam ocorrer na prática.

No caso I é apresentada uma situação ideal, com sete pontos simples. Os resultados são de alta qualidade, podendo ser tomados como padrão para comparação.

Tabela 5.5.1.6 Resultados dos testes efetuados com a
resseção espacial;

Erros Verdadeiros ($X_a - X_r$)

		I	II	III	IV
Par	Valor Real				
k	0	-0,0000036	-0,0003257	0,0000221	-0,0003439
ϕ	-0,0174532	-0,0000037	0,0000096	0,0001613	0,0000906
w	0,0174532	0,0000320	0,0009285	0,0005146	0,0003969
Xo	920	0,0077	-0,0520	0,1447	0,0568
Yo	920	-0,0537	-1,3713	-0,6339	-0,4869
Zo	1216	-0,0030	0,0040	-0,0330	0,0680
S		8	10	6	3
X		7,06	4,06	1,38	2,56

		V	VI	VII	VIII	IX
Par						
k	-0,0003081	-0,0002220	-0,0004562	0,0002662	0,0000080	
ϕ	0,0000498	-0,0003334	0,00053289	-0,0003943	-0,0000750	
w	0,0005780	0,0004289	0,0014751	0,0006458	-0,00000469	
Xo	0,0100	-0,3712	0,2676	-0,5254	-0,1315	
Yo	-0,7001	-0,5812	-2,2074	-0,7681	-0,0035	
Zo	-0,0470	-0,2770	0,2820	-0,1020	0,0090	
S	2	2	2	2	2	
X	1,62	0,18	0,64	0,70	0,07	

No caso II foram empregadas oito feições de dimensão pequena e nos cantos da foto. Seria de se esperar que os resultados fossem semelhantes aos da resseção com quatro pontos simples, apresentado na tabela 5.5.1.2, o que não ocorreu. Embora só tenha havido grande discrepância no parâmetro Y_0 , eram esperados resultados melhores. Isto não ocorreu, pois a configuração geométrica das feições é tal que elas estão paralelas entre si e alinhadas. Nestas condições, fruto de uma simulação, as feições não realizam o trabalho esperado na melhoria da qualidade dos parâmetros.

No caso III foram combinadas feições de pequena dimensão nos cantos da foto e feições de grande dimensão, paralelas aos eixos coordenados. Em relação aos resultados apresentados na tabela 5.5.1.3 nota-se que a introdução das duas feições de grande dimensão promove significativa melhoria na qualidade dos parâmetros.

O caso IV procura mostrar a resolução de um problema deficiente. Ao utilizar-se somente as quatro feições, sem o ponto simples, não haverá solução. Isto é explicável, pois é possível rotacionar a foto em torno do eixo Y e mesmo assim a equação dos planos equivalentes será satisfeita. A deficiência existe porque as feições são paralelas e alinhadas. As feições alinhadas no sentido das abscissas tem força geométrica de uma única. A quebra da deficiência pode ser feita introduzindo-se uma feição perpendicular às demais ou um ponto simples, como apresentado. Esta solução permite a obtenção de bons

resultados, como pode ser observado na tabela 5.5.1.6, caso IV.

No caso V, do mesmo modo, é apresentada uma situação em que houve quebra de deficiência com a introdução de um ponto de controle simples. Neste caso estão presentes duas feições verticais nos cantos do modelo, que acabam representando um único plano. As duas feições horizontais são paralelas e a introdução do ponto de controle permitiu a resolução do problema e a obtenção de bons resultados.

Os casos VI e VII são equivalentes em termos quantitativos e geométricos. Foram utilizadas quatro feições concentradas em dois dos cantos da fotografia. Embora pudesse parecer, à primeira vista, que estas configurações são equivalentes a dois pontos simples e, portanto, sem solução, os resultados mostraram que a solução existe e que pode ser utilizada. Embora os erros tenham sido grandes, os testes estatísticos efetuados foram aceitos, o que indica que a Matriz Variância-covariância estimou corretamente os desvios-padrão para os parâmetros.

No caso VIII uma configuração combinando feições com um ponto de controle simples é apresentada. Os resultados são de boa qualidade e todos os testes aplicados foram aceitos.

No caso IX é apresentado o teste conduzido com o programa RESF2, utilizando a Matriz Peso completa. Analisando a qualidade dos parâmetros e comparando-os com os apresentados na tabela 5.5.1.4, onde a matriz peso foi considerada diagonal, verifica-se que há pouca discrepância. Por este

motivo, em benefício da otimização computacional, em todas as demais situações foi adotada a Matriz Peso diagonal.

A estimativa dos parâmetros aproximados deve ser feita com certo cuidado. Embora não tenha sido feito um estudo específico, verificou-se que a estimativa de λ deve ser feita de acordo com a expressão apresentada em (3.2.5.3).

5.5.2. Formação de modelos

Os testes com a formação de modelos tiveram por objetivo estudar a eficiência do modelo matemático na determinação de equações de feições no espaço objeto por intersecção de planos equivalentes, e na obtenção dos parâmetros de orientação.

Foram realizados testes fixando-se os parâmetros de orientação da foto esquerda e a abscissa do C.P. da foto da direita, caracterizando uma orientação relativa. Também foram realizados testes considerando os parâmetros de orientação incógnitos e usando feições e pontos de controle como injunções, caracterizando uma fototriangulação com somente duas fotos.

A utilização de feições na formação de modelos tem peculiaridades que a distinguem da ressecção espacial.

Inicialmente deve-se lembrar que a intersecção de dois planos não paralelos sempre determinará uma única reta no espaço. No princípio da orientação relativa, usando a equação



de colinearidade, utiliza-se da propriedade de que duas retas no espaço só determinam, por intersecção, um ponto, se pertecerem a um mesmo plano. Retas reversas não se interceptam, o que garante o uso da equação de colinearidade na orientação relativa.

O modelo dos planos equivalentes apresenta esta deficiência. Como dois planos projetados no espaço objeto sempre determinarão uma reta, não é possível realizar orientação relativa usando somente feições. Com efeito, considerando um par de fotos, cada feição introduz 6 pseudo-observações (3 por foto) e 8 parâmetros, dos quais 2 serão arbitrados e fixados por meio de injunções. Numericamente, portanto, percebe-se que uma feição incógnita não introduz nenhuma equação de observação redundante, simplesmente porque não há redundância na intersecção de dois planos no espaço.

Deste modo, a orientação relativa deve ser feita usando, como auxílio, pontos simples, que não possuam necessariamente, coordenadas conhecidas. Mesmo na orientação relativa, as equações de feições incógnitas podem ser determinadas por intersecção de planos.

Na tabela 5.5.2.1 são apresentados dois casos de orientação relativa, em que seis pontos simples e duas feições foram usados. Foram fixados os parâmetros de orientação da foto esquerda e X_0 da foto da direita, além das duas injunções mínimas para cada feição. Os valores usados como injunção são os valores reais, para que pudesse haver uma comparação dos

Tabela 5.5.2.1. Orientação Relativa usando feições e pontos simples

Par	Valor Real		$\lambda.X_{ai}$	Valor Real		$\lambda.X_{ai}$
k"	-0,0349065	-0,0348747			-0,0348747	
ϕ "	0,0174532	0,0175822			0,0175883	
w"	0,0349065	0,0349772			0,0349772	
Xo"	1656	1656 *			1656 *	
Yo"	920	919,9117			919,9116	
Zo"	1216	1215,9190			1215,9180	
λ_1	-0,01	-0,015 *		-0,015	-0,015 *	
λ_2	-0,01	-0,0150273		-0,01	-0,0146747	
X1	920	920,00 *		920	920,00 *	
Y1	254	254,0715		1656	1655,6030	
Z1	0	0,1537		0	0,6081	
l	70	72,5143		736	723,4670	
m	70	-72,4979		70	69,8758	
n	0	0,0099		0	-1,6384	
λ_1	-0,01	-0,015 *		0,013	0,0130 *	
λ_2	-0,01	-0,0149438		0,010	0,0132915	
X1	1656	1656,00 *		1656	1656,00 *	
Y1	1726	1726,1210		184	184,1561	
Z1	0	-0,0015		40	40,2637	
l	70	-68,2519		730	900,0914	
m	-70	-68,3787		70	-85,6012	
n	0	0,2225		40	48,9632	

Obs. Os valores dos parâmetros de orientação da foto esquerda foram omitidos por terem sido usados como injunções.

valores ajustados com os demais valores simulados. Na tabela 5.5.2.1 os valores fixados por meio de injunções estão assinalados com * . Os valores ajustados dos pontos simples não foram tabelados porque não interessam à análise em questão.

A comparação entre valores reais e valores ajustados deve ser encarada com certas ressalvas. Uma vez que não há redundância na determinação dos parâmetros de feições por intersecção, um erro grosseiro nas observações não será detectado. A comparação com os valores reais das feições indicam apenas se há proporcionalidade entre o grupo de parâmetros reais e os ajustados, uma vez que os valores reais de λ_1 e λ_2 são desconhecidos.

Como no caso da ressecção espacial, observou-se que os parâmetros λ_1 e λ_2 devem ser estimados com certo cuidado. Em situações onde foi usado um valor aproximado dez vezes maior que o real, não houve convergência da solução. Novamente verificou-se que a expressão (3.2.5.3) estima com boa qualidade o valor dos parâmetros λ_1 e λ_2 .

Na tabela 5.5.2.1 são apresentados os valores dos parâmetros ajustados dos vetores diretores das feições, multiplicados pelo fator $\lambda_{1a}/\lambda_{1r}$, com a finalidade de se comparar os valores ajustados com os valores reais. Deve-se lembrar que :

$$\lambda_{1r} \cdot X_r^{f \quad i,f} = \lambda_{1a} \cdot X_a^{f \quad i,f} \quad (5.5.2.1)$$

O valor para λ_r foi obtido a partir do parâmetro λ do vetor diretor. Como foi ressaltado anteriormente, este procedimento visa verificar se há proporcionalidade entre X_a e X_r , relativos aos vetores diretores das feições.

Nos resultados apresentados na tabela 5.5.2.1 admitiu-se que não havia controle disponível.

Nos próximos experimentos, a serem apresentados, levou-se em consideração a existência de controle, tanto de pontos de apoio simples como de feições cujos parâmetros sejam conhecidos a priori.

Quando são conhecidos os parâmetros de um conjunto de feições, a determinação simultânea dos parâmetros de orientação de um par de fotos pode ser feita sem a necessidade de seis pontos simples, pois este problema pode ser encarado como a resseção simultânea de duas fotos.

Nesta situação, pode-se utilizar feições como apoio e feições como incógnitas.

Na tabela 5.5.2.2 são apresentados casos em que feições são usadas como injunção e como incógnitas.

Na tabela 5.5.2.3 são apresentados os erros nos parâmetros de orientação quando utilizadas feições como injunção.

Na tabela 5.5.2.2 as feições representadas em negrito foram consideradas como incógnitas e as demais foram usadas como injunção. Os dois pontos utilizados tiveram suas coordenadas também usadas como injunção.

Tabela 5.5.2.2. Formação de modelos usando feições e pontos

Par	Valor Real	I	II	III	IV
k	0	-0,0000055	0,00002860	0,0000739	-0,0000012
ø	-0,0174532	-0,0173632	-0,0174586	-0,0175067	-0,0173603
w	0,0174532	0,0174400	0,0174952	0,0175636	0,0174321
Xo	920	920,0884	919,9567	919,8973	920,0907
Yo	920	920,0223	919,9421	919,8405	920,0311
Zo	1216	1216,0700	1216,0400	1216,0120	1216,0680
k"	-0,0349065	-0,0349438	-0,0349789	-0,0349919	-0,0348865
ø"	0,0174532	0,0175800	0,0177230	0,0177886	0,0175714
w"	0,0349065	0,0349270	0,0349532	0,0347217	0,0348721
Xo"	1656	1656,1830	1656,3590	1656,4330	1656,1530
Yo"	920	920,0116	919,9645	920,2488	920,0991
Zo"	1216	1215,9460	1215,8490	1215,7920	1215,9290
λ1	-0,0152118	0,015 *		-0,015 *	0,015 *
λ2	-0,0149000	0,0146913		-0,0146916	0,0146926
X1	920	920,0170		920,0436	920,0041
Y1	184	184,00 *		184,00 *	184,00 *
Z1	0	-0,0144		0,2958	-0,0059
l	0	-0,0281		-0,0885	-0,0248
m	1542	-1564,0700		1563,9000	-1563,8500
n	0	-0,4872		-0,5571	-0,1208
λ.l	0	-0,0004		-0,0013	-0,0003
λ.m	-23,4565	-23,4610		-23,4585	-23,4577
λ.n	0	-0,0073		0,0083	-0,0018

continua

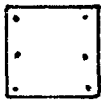

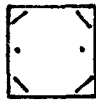
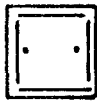
Continuação da tabela 5.5.2.2.

X1	-0,0147364		0,015 *	-0,015 *	
X2	-0,0144376		0,0146417	-0,0146218	
X1	920		920,00 *	920,00 *	
Y1	1656		1655,2480	1656,3600	
Z1	0		1,2617	-0,5796	
l	736		-723,8127	722,7012	
m	70		-71,6719	72,7681	
n	0		4,5095	-6,4009	
X.l	-10,8459		-10,8571	-10,8405	
X.m	-1,0315		-1,0750	-1,0915	
X.n	0		0,0676	0,096	
X1	-0,0148952				0,015 *
X2	-0,0152154				0,0153224
X1	1656				1655,9050
Y1	1656				1656,00 *
Z1	0				0,1299
l	0				-0,1316
m	-1402				1392,2590
n	0				0,1917
X.l	0				-0,0019
X.m	20,8830				20,8838
X.n	0				0,0028

Obs: Os valores em branco correspondem a injeções;

Os parâmetros da quarta feição foram usados como injeção em todos os casos.

Tabela 5.5.2.3. Erros nos parâmetros de orientação usando feiçoes e pontos de controle.

Par	Valor Real				
k	0	-0,0000320	0,0000043	0,0000570	0,0000066
ϕ	-0,0174532	-0,0000332	-0,0000869	-0,0002029	0,0000848
w	0,0174532	-0,0000570	0,0000015	0,0006949	0,00000440
Xo	920	0,0214	0,0726	-0,0212	0,0715
Yo	920	0,1199	-0,0013	-0,8807	-0,0038
Zo	1216	-0,0170	0,0760	-0,2280	0,0810
k''	-0,0349065	-0,0000172	-0,0000399	-0,0000728	-0,00003711
ϕ''	0,0174532	0,0000937	0,0001341	0,0003621	0,00012429
w''	0,0349065	0,0000014	0,0000153	-0,0004232	0,0000108
Xo''	1656	0,1280	0,2040	0,4330	0,1790
Yo''	920	0,0217	0,0156	0,5077	0,0243
Zo''	1216	-0,0640	-0,0560	-0,2890	-0,0620
S		3	6	12	12
X		0,85	6,48	4,52	7,19

Os resultados mostram que a qualidade da intersecção é melhor nos casos I e IV, porque o ângulo entre os planos que definem a reta é maior que no caso II. No caso II a reta é definida por intersecção de planos que formam um ângulo demasiadamente agudo. Nestas condições, a qualidade da intersecção é baixa, embora não haja deterioração na qualidade dos parâmetros de orientação exterior.

Como na tabela 5.5.2.1 a comparação entre parâmetros de feições reais e ajustadas exigiu a multiplicação dos vetores diretores pelo fator $\lambda_{1a}/\lambda_{1r}$.

Nesta tabela é possível visualizar os tipos de injunções a serem aplicadas às feições, como foi observado no Capítulo IV. Quando os parâmetros das feições são conhecidos, apenas os fatores λ_1 e λ_2 permanecem incógnitos. Quando os parâmetros são desconhecidos, são fixados, por meio de injunções de peso infinito, no mínimo, dois parâmetros por feição, de preferência λ_1 e X_1 (ou Y_1 ou Z_1) conforme a posição das feições no espaço.

Na tabela 5.5.2.3 estão tabelados os erros nos parâmetros ajustados para quatro casos.

O caso I trata-se de uma formação de modelos somente com pontos simples, usando as coordenadas de três pontos nos cantos, como injunção de controle.

No caso II somente os parâmetros das feições foram usadas como injunções, tendo permanecido como incógnitas, além dos parâmetros de orientação, as coordenadas dos dois pontos de controle.

Nos casos III e IV os parâmetros de feições e as coordenadas dos pontos de controle foram usados como injunção.

Tomando o caso I como padrão para comparação, verifica-se que o uso de feições na formação de modelos possibilita a obtenção de parâmetros de orientação de boa qualidade. Comparando os casos III e IV verifica-se que as condições geométricas válidas para a resseção espacial também se aplicam neste caso. Os resultados obtidos com a configuração apresentada em IV são superiores aos obtidos com a configuração I.

Em todos os casos estudados verificou-se que o coeficiente de correlação entre os parâmetros ϕ e X_0 , w e Y_0 , para ambas as fotos, foram superiores a 0,9, ou seja, próximo à correlação linear perfeita.

Estes coeficientes com valores altos ocorrem também com a utilização do modelo de colinearidade, com coeficientes girando em torno de 0,7. Isto mostra que os parâmetros são de fato correlacionados. A utilização do modelo dos planos equivalentes, dada a sua característica geométrica, provocou um aumento no valor numérico dos coeficientes.

5.6. Discussão dos resultados

Os resultados apresentados, tanto para o problema da resseção espacial, quanto para a formação analítica de modelos, indicam, com clareza, que o modelo matemático

funciona de acordo com o esperado e com características geométricas próprias, que devem merecer, no futuro, um estudo mais aprofundado.

O objetivo primeiro do trabalho, que era relaxar a correspondência ponto a ponto, foi atingido, embora esta liberdade adicional, introduzida através do fator de proporcionalidade λ , cause algumas deficiências no modelo, especialmente no caso de orientação relativa, em que nenhum controle é disponível.

O objetivo de determinar feições no espaço por intersecção de planos no espaço objeto foi atingido, embora com as duas injunções mínimas, não haja redundância neste procedimento.

Alguns problemas com configurações de feições deficientes, raramente ocorrem na prática. A existência de feições perfeitamente paralelas e alinhadas, como ocorreu neste estudo, é pouco provável em um trabalho usando dados reais. Deste modo, a correlação entre vetores diretores será de difícil ocorrência. Entretanto, pode ocorrer que, na prática, as feições não sejam exatamente retilíneas, introduzindo erros adicionais.

A ocorrência de feições de grandes dimensões em levantamentos aerofotogramétricos também é improvável. O incremento da precisão, nestes casos, deve ser feito usando-se um número maior de feições não alinhadas e não paralelas entre si.

A excelente resposta do modelo matemático face à

presença de feições de grandes dimensões pode ter grandes aplicações em fotogrametria à curta distância. Nestas aplicações, geralmente são conhecidas algumas características das feições, como a verticalidade ou horizontalidade destas, que devem ser aproveitadas como informações sob forma de injunções, atribuindo-se pesos adequados.

A deficiência do modelo no caso de orientação relativa não é preocupante, uma vez que os pontos adicionais a serem usados não são pontos de controle. Estes pontos, que em Fotogrametria Analógica são denominados pontos de Grubber, não necessitam sequer de materialização na foto.

O estudo mostrou que o procedimento é mais eficiente se combinado à equação de colinearidade. Os pontos simples, então utilizados, não necessitam, obrigatoriamente, ser pontos de controle, nem terem materialização no terreno.

O estudo dos problemas de correlação entre os parâmetros mostrou que, em relação ao modelo de colinearidade, o modelo matemático desenvolvido causa aumentos nos valores numéricos dos coeficientes de correlação. Este aumento deve ser estudado com maior profundidade, recuperando-se a discussão quanto ao uso da Matriz Peso completa e seus efeitos nestes coeficientes de correlação.

Outro ponto que deve merecer estudo é o uso de injunções arbitrárias nos parâmetros das feições e suas aplicações na remoção da deficiência do modelo no problema de orientação relativa.

Em todos os casos estudados, com raras exceções, os testes da distribuição t aplicados foram aceitos, o que indica que a M.V.C. estima corretamente o erro verdadeiro dos parâmetros.

A intersecção da reta no espaço por somente dois planos mostrou-se não redundante (zero graus de liberdade), o que significa que erros grosseiros nas observações não serão detectados, quando os parâmetros das feições forem incógnitos. Entre as propriedades dos planos, há uma que indica que os parâmetros dos demais planos que interceptarem a reta serão combinação linear dos parâmetros dos dois primeiros.

Esta propriedade pode ser particularmente útil em fototriangulação, uma vez que, neste caso, a feição no espaço objeto será determinada pela intersecção de vários planos gerados a partir de fotos diferentes.

Considerando que a situação simula a obtenção de uma planta na escala 1:2000 (fotos na escala 1:8000) verifica-se que o uso de feições como controle permite a obtenção de coordenadas cujos desvios-padrão estão de acordo com o Padrão de Exatidão Cartográfica. Isto pode ser confirmado observando-se os erros nos parâmetros das feições, mostrados nas tabelas 5.5.2.1., 5.5.2.2. e 5.5.2.3..

CAPÍTULO VI

6. CONCLUSOES E RECOMENDAÇÕES

6.1. Conclusões

As conclusões a serem apresentadas tem o objetivo de condensar conclusões preliminares e observações que foram feitas no decorrer de todo o trabalho.

Os objetivos propostos no Capítulo I foram cumpridos na sua totalidade. O modelo matemático proposto funciona de modo pleno e cumpre todos os requisitos especificados previamente.

A análise dos desenvolvimentos teóricos e dos testes práticos efetuados permitem concluir que:

- O modelo matemático funciona adequadamente no caso da resseção espacial e da formação analítica de modelos, sendo que a extensão do procedimento para a fototriangulação poderá acarretar benefícios na precisão e na rigidez da conexão geométrica entre fotos;

- A configuração das feições é fator decisivo na obtenção da precisão esperada para os parâmetros. O número de feições e o tamanho destas contribuem significativamente para a melhoria da qualidade dos resultados. Entretanto, a correlação entre os parâmetros das feições, especialmente os vetores diretores, pode deteriorar ou inviabilizar a solução do problema;

- A Matriz Variância-covariância estima corretamente, em quase todos os casos, os erros assumidos pelos parâmetros ajustados;

- A necessidade de correspondência ponto a ponto foi eliminada introduzindo-se o fator de proporcionalidade λ . Com a introdução deste parâmetro adicional são necessárias mais observações para a resolução do problema;

- O modelo matemático, dadas as suas características geométricas, possui aplicações imediatas em fotogrametria à curta distância;

- A utilização do modelo matemático dos planos equivalentes, nos casos estudados, provocou um aumento no valor numérico do coeficiente de correlação entre os parâmetros de orientação exterior. Não foram estudadas profundamente as causas deste aumento, por não representar o ponto central do trabalho.

6.2. Recomendações

A luz dos resultados obtidos, e considerando-se as expectativas criadas com o desenvolvimento de trabalhos nesta área, recomenda-se:

- Difundir o uso de feições como forma de controle, em organismos de produção e usuários de cartas, através do desenvolvimento de programas e metodologias voltadas para a produção ;

- Estudar com maior ênfase as características geométricas do modelo matemático desenvolvido neste trabalho;
- Estudar a aplicação deste modelo matemático aos problemas fotogramétricos mais complexos, como fototriangulação e calibração de câmaras, considerando a sua maior eficiência nos casos em que exista "multi-intersecção".

APENDICE

A EQUAÇÃO DE COLINEARIDADE

Sejam dois referenciais cartesianos tridimensionais, como os considerados no Capítulo II. Considerando estes referenciais destrógiros e definindo as transformações como passivas, a transformação de similaridade (isogonal) no espaço é dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \cdot M(k) \cdot M(\vartheta) \cdot M(w) \cdot \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação $M = M(k) \cdot M(\vartheta) \cdot M(w)$ será:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos k & \cos w \cdot \text{sen} k & \text{sen} w \cdot \text{sen} k \\ & + \text{sen} w \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos k & - \cos w \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos k \\ - \cos\vartheta \cdot \text{sen} k & \cos w \cdot \cos k & \text{sen} w \cdot \cos k \\ & - \text{sen} w \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \text{sen} k & + \cos w \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \text{sen} k \\ \text{sen}\vartheta & - \text{sen} w \cdot \cos\vartheta & \cos w \cdot \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

A equação de colinearidade é dada por:

$$x = \frac{f \cdot m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} = f \cdot \frac{m}{q}$$

$$y = \frac{f \cdot m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} = f \cdot \frac{n}{q}$$

onde:

f é a distância focal ou constante da câmara;

m_{ij} são os elementos da matriz de rotação R ;

X_o, Y_o, Z_o são as coordenadas do Centro Perspectivo;

X, Y, Z são as coordenadas do ponto no espaço objeto;

x, y são as fotocoordenadas.

As derivadas parciais do modelo de colinearidade são:

$$\frac{\partial F_x}{\partial k} = \frac{f}{q} (X.m_{21} + Y.m_{22} + Z.m_{23}) = \frac{f.n}{q}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \phi} = -\frac{f}{q} [q (X.\text{sen}\phi.\text{cos}\kappa - Y.\text{sen}\omega.\text{cos}\phi.\text{cos}\kappa + \\ + Z.\text{cos}\omega.\text{cos}\phi.\text{cos}\kappa) + m (X.\text{cos}\phi + \\ Y.\text{sen}\omega.\text{sen}\phi - Z.\text{cos}\omega.\text{sen}\phi)]$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \omega} = -\frac{f}{q} [q (Y.m_{13} - Z.m_{12}) - m (Y.m_{33} - Z.m_{32})]$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial X_o} = -\frac{f}{q} (q.m_{11} - m.m_{31})$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial Y_1} = - \frac{\partial F_x}{\partial X_o}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial Y_o} = -\frac{f}{q} (q.m_{12} - m.m_{32})$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial Y_1} = - \frac{\partial F_x}{\partial Y_o}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial Z_o} = -\frac{f}{q} (q.m_{13} - m.m_{33})$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial Z_1} = - \frac{\partial F_x}{\partial Z_o}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial k} = -\frac{f}{q} (X.m_{11} + Y.m_{12} + Z.m_{13}) = -\frac{c.m}{q}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \theta} = -\frac{f}{q.q} [-q (X.\text{sen}\theta.\text{sen}\kappa - Y.\text{sen}\omega.\text{cos}\theta.\text{sen}\kappa + Z.\text{cos}\omega.\text{cos}\theta.\text{sen}\kappa) + n (X.\text{cos}\theta + Y.\text{sen}\omega.\text{sen}\theta - Z.\text{cos}\omega.\text{sen}\theta)]$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial \omega} = -\frac{f}{q.q} [q (Y.m_{23} - Z.m_{22}) - n (Y.m_{33} - Z.m_{32})]$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial X_0} = -\frac{f}{q.q} (q.m_{21} - n.m_{31}) \quad \frac{\partial F_y}{\partial X_1} = -\frac{\partial F_y}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial Y_0} = -\frac{f}{q.q} (q.m_{22} - n.m_{32}) \quad \frac{\partial F_y}{\partial Y_1} = -\frac{\partial F_y}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial Z_0} = -\frac{f}{q.q} (q.m_{23} - n.m_{33}) \quad \frac{\partial F_y}{\partial Z_1} = -\frac{\partial F_y}{\partial Z_0}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

111. BRASIL. MINISTERIO DA CIENCIA E TECNOLOGIA. COMISSÃO DE CARTOGRAFIA- Cartografia e Aerolevramento: Legislação. Brasília, 1986. cap.2. p. 26-7.
121. EISENHART, L.P. Coordinate Geometry. 2.ed. New York, Dover Publications, 1960. 298 p.
131. LUGNANI, J.B. "Using Digital Entities as Control". Ph D. Thesis, Department of Surveying Engineering, UNB, 1980.
141. ----- Introdução à Fototriangulação. 1. ed. Curitiba, UFPR, 1987, 134 p.
151. MASRY, S.E. "Digital Mapping Using Entities: A New Concept". Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. Falls Church, vol 48(11),1561,5,1981.
161. MOFFIT, Francis H. & MIKHAIL, Edward N. Photogrammetry. 3. ed. New York, Harper & Row, 1980. 648 p.
171. SOUZA, F.C.B. "Orientação Absoluta de Modelos utilizando feições digitalizadas como controle". Tese de Mestrado Departamento de Geociências, UFPR, Curitiba, Pr, 1982.