

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MATEUS RAUEN

ANÁLISE ISOGOMÉTRICA APLICADA AOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE NA
MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

CURITIBA

2014

MATEUS RAUEN

ANÁLISE ISOGOMÉTRICA APLICADA AOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE NA
MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção de Mestre em Ciências, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone
Machado

Coorientador: Prof. Marcos Arndt

CURITIBA

2014

R243a

Rauen, Mateus

Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas / Mateus Rauen. – Curitiba, 2014.
128f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2014.

Orientador: Roberto Dalledone Machado -- Coorientador: Marcos Arndt.
Bibliografia: p. 120-123.

1. Vibração. 2. Método dos elementos finitos. 3. Engenharia auxiliada por computador. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone III. Arndt, Marcos. IV. Título.

CDD: 531.32

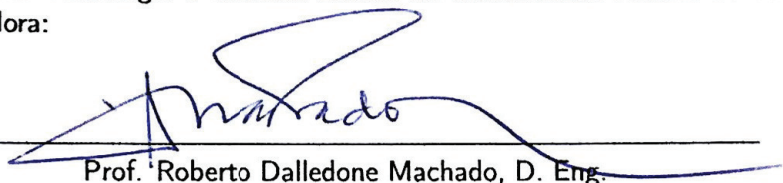
TERMO DE APROVAÇÃO

MATEUS RAUEN

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA APLICADA AOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE NA MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau do mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.

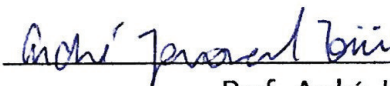
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Departamento de Construção Civil - UFPR

Coorientador:



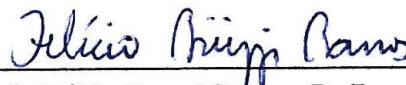
Prof. Marcos Arndt, D. Sc.

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Departamento de Construção Civil - UFPR



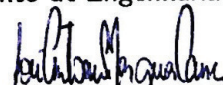
Prof. André Jacomel Torii, D. Sc.

Departamento de Computação Científica - UFPB



Prof. Felício Bruzzi Barros, D. Eng.

Departamento de Engenharia de Estruturas - UFMG



Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Departamento de Matemática - UFPR

CURITIBA

27 de Março de 2014

Dedicado em memória de Élcio Constantino Rauen, patrono e semeador da bondade, da cultura e do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Prof. Roberto Dalledone Machado e Prof. Marcos Arndt por me ajudarem a trilhar este caminho de conhecimento.

Aos meus pais Luiz Antonio Rauen e Siomara Preisler Rauen e aos meus irmãos Ramon Rauen e Jordana Rauen pelo carinho e apoio.

A minha amada Brunah Wagner por estar sempre do meu lado.

A todo o pessoal do CESEC, em especial ao Jair Anjos e ao Prof. Raphael Scuciato pelo apoio.

Ao Prof. Orestes Hacke pelo companheirismo.

A Associação de Estudos Filosóficos (AEF) por proporcionar as chaves do auto-conhecimento.

A todos os amigos.

“... e por essas coisas fazem-se os milagres, de uma coisa só.

E como todas estas coisas são e provêm de um,

pela mediação do um,

assim todas as coisas são nascidas desta única coisa,

por adaptação.” (Hermes Trismegistus)

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma das ferramentas mais utilizadas na determinação dos modos e frequências naturais de vibração de uma estrutura, porém apresenta um problema de precisão com relação às frequências naturais de vibração mais altas de uma amostragem. Os Métodos de Enriquecimento do campo de funções do MEF surgiram com o intuito de melhorar os resultados originais. Se destacam o Método dos Modos Admissíveis (MMA), o Método Composto (MC), o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEFF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Recentemente surgiu um novo método numérico para resolução de equações diferenciais parciais denominado Análise Isogeométrica, a qual utiliza funções base do tipo NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) como aproximadoras para a geometria do objeto em estudo e também como ponderação do problema analisado. Desde sua concepção algumas aplicações foram desenvolvidas para a análise dinâmica de estruturas e apresentaram resultados satisfatórios. O fenômeno de vibração livre de estruturas é definido e desenvolvido como um problema para múltiplos graus de liberdade. O MEF e os Métodos Enriquecidos são definidos e a Análise Isogeométrica (AIG) é apresentada em detalhes, com enfoque às funções do tipo NURBS. A formulação variacional dos problemas de vibração livre para elementos de barra, viga de Euler-Bernoulli, treliças e estado plano de tensões é desenvolvida e a AIG é aplicada a exemplos práticos com solução analítica conhecida, ou com resultados numéricos com baixo erro estimado. A precisão da AIG é comparada com o MEF, os Métodos Enriquecidos e o MEFG em termos de desvios percentuais, espectro de frequências e taxas de convergência. Com base nos experimentos comparativos, a AIG se mostra uma promissora ferramenta, gerando resultados precisos e altas taxas de convergência quando comparada com os métodos enriquecidos, sobretudo com o MEFG.

Palavras-chave: Vibração Livre. Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. Métodos Enriquecidos. Método dos Elementos Finitos Generalizados.

ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) is a standard tool to find natural vibration modes and frequencies of a structure, but the main problem is related with the inaccurate higher frequencies of a sample. The Enriched Methods appeared with the goal of improving the original results. The most common methods are: the Assumed Mode Method, the Composite Element Method, the Finite Elements p-Fourier and the Generalized Finite Element Method (GFEM). Recently appeared a new numerical method to solve partial differential equations, called Isogeometric Analysis (IGA), which uses NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) as weighting functions to the solution of the problem and also as approach to the object geometry. Since its conception, some applications have been developed to dynamical analysis of structures and presented good results. The free vibration problem of structures is defined and developed as a multi-degree of freedom system. The FEM and the Enriched Methods are defined and the Isogeometric Analysis is minutely presented, focusing the NURBS basis functions. The variational formulation of the free vibration problem to bar and Euler-Bernoulli beam elements, trusses and plane stress are developed. Practical examples are developed for IGA and compared with analytical solutions or numerical results with low estimated errors. The accuracy of the IGA is compared with the FEM, the Enriched Methods and GFEM considering percentual errors, frequency spectra and convergence rates. Based on the results, IGA is a promising tool, giving accurate results and high convergence rates when compared with the Enriched Methods, mostly GFEM.

Keywords: Free Vibration. Isogeometric Analysis. Finite Element Method. Enriched Methods. Generalized Finite Elements Method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – MECANISMOS DAS FUNÇÕES NURBS	38
FIGURA 2 – A) EXEMPLO DE UM MAPEAMENTO PADRÃO NO MEF B) MAPEAMENTO UTILIZANDO AS FUNÇÕES DE BASE DA AIG	39
FIGURA 3 – EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES B-SPLINES ATÉ GRAU 2 APARTIR DE UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE UNIFORME	42
FIGURA 4 – EXEMPLO DE UMA CURVA FORMADA A PARTIR DA INTERPOLAÇÃO DE UM CONJUNTO DE FUNÇÕES NURBS. A) COM OS PONTOS DE CONTROLE E B) COM OS ELEMENTOS ISOGEOMÉTRICOS	44
FIGURA 5 – SUPERFÍCIES BASE B-SPLINES	46
FIGURA 6 – FUNÇÕES NURBS COM GRAU $P = 2$ PARA UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$	47
FIGURA 7 – FUNÇÕES NURBS COM GRAU $P = 2$ PARA UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$	47
FIGURA 8 – CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES NURBS	48
FIGURA 9 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO h ISOGEOMÉTRICO .	50
FIGURA 10 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO p ISOGEOMÉTRICO	51
FIGURA 11 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO k	53
FIGURA 12 – a) REFINAMENTO p ISOGEOMÉTRICO b) REFINAMENTO k	54
FIGURA 13 – ELEMENTO DE BARRA COM VIBRAÇÃO AXIAL	55
FIGURA 14 – a) ELEMENTO LINEAR DE BARRA b) ELEMENTO CÚBICO DE BARRA	60
FIGURA 15 – TRANSFORMAÇÃO DE UM ELEMENTO DE TRELIÇA	63

FIGURA 16 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI COM VIBRAÇÃO TRANSVERSAL	64
FIGURA 17 – ELEMENTO DE VIGA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ .	67
FIGURA 18 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI COM ROTAÇÃO LIVRE	69
FIGURA 19 – a) ELEMENTO TRIANGULAR BIDIMENSIONAL b) ELEMENTO RETANGULAR BIDIMENSIONAL	75
FIGURA 20 – BARRA FIXA-LIVRE	77
FIGURA 21 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE DESENVOLVIDA EM MEF POLINOMIAL	78
FIGURA 22 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE DESENVOLVIDA EM AIG	79
FIGURA 23 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE EM MEF E AIG PARA $P = 5$	80
FIGURA 24 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS PARA BARRA FIXA-LIVRE DO MEF LINEAR, MEFG E MEF COM POLINÔMIOS DE LOBATTO ATÉ ORDEM 5	80
FIGURA 25 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	81
FIGURA 26 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	82
FIGURA 27 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	82
FIGURA 28 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	83
FIGURA 29 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUINTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	83
FIGURA 30 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEXTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE	84

FIGURA 31 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG ...	85
FIGURA 32 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG ...	85
FIGURA 33 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG ...	86
FIGURA 34 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG ...	86
FIGURA 35 – BARRA FIXA-FIXA	87
FIGURA 36 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG ...	89
FIGURA 37 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG ...	89
FIGURA 38 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG ...	90
FIGURA 39 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG	90
FIGURA 40 – BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO ABRUPTA DE SEÇÃO E MATERIAL	91
FIGURA 41 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG	93
FIGURA 42 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG	93
FIGURA 43 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG	94
FIGURA 44 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG	94
FIGURA 45 – VIGA ENGASTADA-LIVRE	95
FIGURA 46 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA ENGASTADA-LIVRE PARA A AIG E O MEF	96
FIGURA 47 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA ENGASTADA-LIVRE PARA MEF E MEFG	97
FIGURA 48 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	98
FIGURA 49 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	98

FIGURA 50 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	99
FIGURA 51 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	99
FIGURA 52 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUINTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	100
FIGURA 53 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEXTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE	100
FIGURA 54 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG	101
FIGURA 55 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG	101
FIGURA 56 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG	102
FIGURA 57 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG	102
FIGURA 58 – VIGA BIAPOIADA	103
FIGURA 59 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA SIMPLEMENTE APOIADA PARA A AIG E O MEF	104
FIGURA 60 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	105
FIGURA 61 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	105
FIGURA 62 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	106
FIGURA 63 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	106
FIGURA 64 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA EM AIG	107

FIGURA 65 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE	
APOIADA EM AIG	107
FIGURA 66 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE	
APOIADA EM AIG	108
FIGURA 67 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE	
APOIADA EM AIG	108
FIGURA 68 – TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS	109
FIGURA 69 – CHAPA QUADRADA FIXA EM UMA EXTREMIDADE	112
FIGURA 70 – ERROS RELATIVOS DAS PRIMEIRAS 20 FREQUÊNCIAS	
NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA	114
FIGURA 71 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG .	114
FIGURA 72 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG .	115
FIGURA 73 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG .	115
FIGURA 74 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG ..	116
FIGURA 75 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU	
$P = 0$	125
FIGURA 76 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU	
$P = 1$	126
FIGURA 77 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU	
$P = 2$	128

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – ALGUMAS APLICAÇÕES DO MEF EM DISTINTAS ÁREAS DA ENGENHARIA	30
TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA DESENVOLVIDAS EM AIG EM COMPARAÇÃO COM A SOLUÇÕES ANALÍTICAS	88
TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO ABRUPTA DE SEÇÃO E MATERIAL DESENVOLVIDAS EM AIG EM COMPARAÇÃO COM AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS	92
TABELA 4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS PARA O MEF E OS MÉTODOS ENRIQUECIDOS	110
TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS PARA A AIG	111
TABELA 6 – ERROS PERCENTUAIS RELATIVOS PARA O PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE TENSÕES EM COMPARAÇÃO COM O MEF E O MEFH	113

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

AIG - Análise Isogeométrica

CAD - *Computer Aided Design*

FEA - *Finite Element Analysis*

MC - Método Composto

MEF - Método dos Elementos Finitos

MEFF - Método dos Elementos Finitos p-Fourier

MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizado

MEFH - Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

MMA - Método dos Modos Admissíveis

MPU - Método da Parto da Unidade

NURBS - *Non Uniform Rational B-Splines*

LISTA DE SÍMBOLOS

A_n, B_n	–	Constantes de integração
A	–	Área da seção Transversal
a_i, b_i, c_i	–	Parâmetros das funções de base bidimensionais
a, b	–	Dimensões do elemento retangular de estado plano
b_1, b_2, b_3, b_4	–	Constantes
B_i	–	i-ésimo ponto de controle
$B(u, w), F(u, w)$	–	Formas bilineares
B	–	Matriz de derivadas das funções de forma, Matriz de Pontos
$C(\xi)$	–	Curva B-Spline
C	–	Matriz de relações constitutivas
C	–	Número de graus de liberdade de campo
E	–	Módulo de elasticidade do Material
H_{ji}^r	–	Polinômio de Hermite
H	–	Matriz de funções de forma
h	–	Espessura
I	–	Momento de inércia da seção transversal
i, j	–	Índices matriciais
K	–	Matriz de rigidez da estrutura
k_{ij}^e	–	Elemento da matriz de rigidez local
L	–	Comprimento
Le	–	Comprimento de um elemento
$L_i(x)$	–	Polinômio de Lagrange
M	–	Matriz de massa da estrutura
m_{ij}^e	–	Elemento da matriz de massa local
m_i	–	Multiplicidade do i-ésimo nó de controle
N	–	Número total de graus de liberdade

n	–	Número de funções, número do modo
$N_{i,p}$	–	i -ésima função B-Spline de ordem p
\mathbf{N}_p^T	–	Vetor de funções base B-Splines
$\tilde{N}_{i,j;p,q}$	–	Superfície base B-Spline
\mathbf{N}	–	Vetor de funções de forma locais
n_{gl}	–	Número de graus de liberdade
$nnos$	–	Número de nós de um elemento
p, q	–	Grau polinomial
\mathbf{q}	–	Vetor de deslocamentos
r	–	Número do modo
\mathfrak{R}^d	–	Espaço vetorial dos números reais com dimensão d
$\mathbf{S}(\xi, \eta)$	–	Superfície B-Spline
T_n	–	Período natural de vibração
\mathbf{T}	–	Matriz de transformação linear, matriz de operadores derivada
t	–	Variável tempo
u, \bar{u}	–	Deslocamento referente a um grau de liberdade
\ddot{u}	–	Aceleração referente a um grau de liberdade
\dot{u}	–	Velocidade referente a um grau de liberdade
$u_h(x)$	–	Solução aproximada para o deslocamento
u_h	–	Autovetor aproximado
\mathbf{U}	–	Matriz de coordenadas locais
$\bar{\mathbf{U}}$	–	Matriz de coordenadas globais
\bar{u}, \bar{v}	–	Funções de deslocamento
(u_i, v_i)	–	Coordenadas de deslocamento no sistema global
α	–	Parâmetro adimensional
β	–	Vetor de pontos de controle
β_1	–	Parâmetro relacionado às funções do MEFG
γ	–	Ângulo de rotação
δ_{ij}	–	Delta de Kronecker

Δ_h	–	Vetor de deslocamentos aproximados
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	–	Deformações
η, ξ	–	Coordenadas no Espaço Paramétrico
η_i, ξ_i	–	i-ésimo nó de controle
$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_r$	–	Parâmetros de frequência
λ_n	–	n-ésimo Autovalor
λ_h	–	Autovalor aproximado
ν	–	Coefficiente de Poisson
Ξ, H	–	Vetor de nós de controle
ρ	–	Massa específica do material
σ_x, σ_y	–	Tensões normais em x e y
τ_{xy}	–	Tensão de cisalhamento
ϕ_n	–	n-ésimo Autovetor, Modo natural de vibração
ϕ_i, ϕ_j	–	Funções base do problema discreto
ψ_i, ψ_j	–	Funções de base locais
ω_n	–	n-ésima Frequência natural de vibração
ω_h	–	Frequencia natural de vibração aproximada
Ω	–	Domínio do problema
Ω_e	–	Domínio de um elemento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
1.1 OBJETIVO GERAL	23
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
1.3 JUSTIFICATIVA	24
2 ESTADO DA ARTE	25
2.1 VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS	25
2.1.1 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade	26
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	28
2.3 MÉTODOS ENRIQUECIDOS	32
3 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	34
3.1 PRINCIPAIS DIFERENÇAS ENTRE AIG E MEF	35
3.2 FUNÇÕES BASE	39
3.2.1 Vetor de Nós de Controle	40
3.2.2 B-Splines	40
3.2.3 Derivadas das Funções B-Splines	42
3.3 CURVAS B-SPLINES	43
3.4 SUPERFÍCIES B-SPLINES	45
3.5 NURBS	46
3.6 REFINAMENTOS DA ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	49
3.6.1 Refinamento h Isogeométrico	49
3.6.2 Refinamento p Isogeométrico	51
3.6.3 Refinamento k	52

4 FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE	55
4.1 ELEMENTO DE BARRA	55
4.1.1 Resolução via MEF	57
4.1.1.1 Elemento Linear	58
4.1.1.2 Elemento Cúbico	59
4.1.2 Resolução via AIG	60
4.2 TRELIÇAS	61
4.2.1 Solução via MEF	61
4.2.2 Solução via AIG	62
4.3 ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI	64
4.3.1 Resolução via MEF	66
4.3.2 Resolução via AIG	68
4.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES	69
4.4.1 Resolução via MEF	73
4.4.1.1 Elemento Triangular	74
4.4.1.2 Elemento Retangular	75
4.4.2 Resolução via AIG	76
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS	77
5.1 ELEMENTOS DE BARRA	77
5.1.1 Barra Fixa-Livre	77
5.1.1.1 Espectro de Frequências	78
5.1.1.2 Taxas de Convergência	81
5.1.1.3 Modos de Vibração	84
5.1.2 Barra Fixa-Fixa	86
5.1.2.1 Frequências Naturais de Vibração	87
5.1.2.2 Modos de Vibração	88
5.1.3 Barra Fixa-Livre com Variação Abrupta de Seção e Material	90
5.1.3.1 Frequências Naturais de Vibração	92
5.1.3.2 Modos Naturais de Vibração	93

5.2 ELEMENTOS DE VIGA	95
5.2.1 Viga Engastada	95
5.2.1.1 Espectro de Frequências	96
5.2.1.2 Taxas de Convergência	97
5.2.1.3 Modos de Vibração	101
5.2.2 Viga Simplesmente Apoiada	103
5.2.2.1 Espectro de Frequências	103
5.2.2.2 Taxas de Convergência	104
5.2.2.3 Modos de Vibração	106
5.3 TRELIÇA	108
5.3.1 Frequências Naturais de Vibração	109
5.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES	112
5.4.1 Frequências Naturais de Vibração	112
5.4.2 Modos Naturais de Vibração	114
6 CONCLUSÃO	117
REFERÊNCIAS	120
APÊNDICE A - EXEMPLO NUMÉRICO DE CONSTRUÇÃO DE UM CONJUNTO DE FUNÇÕES DO TIPO NURBS A PARTIR DA FÓRMULA RECURSIVA DE COX-DE BOOR	124

1 INTRODUÇÃO

O surgimento de novas tecnologias e o aprimoramento dos computadores abrem novos horizontes para os pesquisadores e engenheiros adquirirem informações sobre os problemas estudados de maneira mais precisa e coerente com a realidade. Este cenário abre horizontes para o advento de novos métodos que se adequam às condições necessárias para sua implementação e às necessidades do mercado e da sociedade. Estas necessidades, de âmbito ambiental, social e econômico, estão relacionadas com a utilização otimizada dos recursos materiais.

Para esta otimização de recursos no ambiente da construção civil, a tecnologia no desenvolvimento de projetos e controle das estruturas tende a ser aprimorada, visto que as atuais normas de projetos de estruturas utilizam coeficientes estatísticos de segurança devido à incerteza dos fenômenos atuantes relacionados às cargas acidentais de projeto, que podem ser elevados com o aumento desta incerteza.

Devido aos fenômenos naturais que atuam nestas estruturas, seu comportamento dinâmico deve ser precisamente conhecido para um dimensionamento adequado. Porém o conhecimento prévio do comportamento dinâmico de uma estrutura constitui um problema encontrado pelos projetistas. O comportamento dinâmico de elementos isolados com características simplificadas possui solução analítica conhecida, contudo à medida que a estrutura torna-se complexa as dificuldades na determinação de soluções analíticas para o seu comportamento dinâmico aumentam consideravelmente, sendo o desenvolvimento de um método aproximado uma alternativa viável na resolução destes problemas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é largamente utilizado na resolução de problemas de engenharia (BATHE, 1996; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) e tem sido uma alternativa bem sucedida na determinação dos modos e frequências naturais de vibração de uma estrutura. Porém os resultados para as frequências mais elevadas são imprecisos e o aumento no número de graus de liberdade melhora o resultado da amostragem anterior, mas gera novas frequências elevadas com valores discrepantes.

Diversos estudos de aprimoramento do MEF foram feitos com o intuito de aumentar a precisão do método e reduzir os esforços computacionais. Os métodos de enriquecimento das funções de forma do MEF com a adição de funções relacionadas às soluções analíticas da equação diferencial governante obtiveram melhores resultados e menores esforços computacionais se comparados com o MEF (ARNDT, 2009). São considerados os métodos enriquecidos mais conhecidos: o Método dos Modos Admissíveis (MMA) (ENGELS, 1992; GANESAN; ENGELS, 1992), o Método Composto (MC) (ZENG, 1998 a, b e c) e o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEFF) (LEUNG; CHAN, 1998).

Com o surgimento do Método da Partição da Unidade (MPU) (MELENK; BABUSKA, 1996) os procedimentos de enriquecimento das funções de forma foram otimizados. O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001), formulado a partir do MPU, obteve resultados superiores aos demais métodos enriquecidos para o problema de estruturas em vibração livre. Os trabalhos desenvolvidos por Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2007 e 2009) para a análise da vibração livre de estruturas reticuladas e recentemente por Torii (2012) para estruturas reticuladas e estruturas bidimensionais comprovam a eficiência do MEFG comparado com os métodos enriquecidos e com o refinamento hierárquico do MEF.

Em análises de objetos com geometria complexa, o desenvolvimento de um modelo em elementos finitos encontra alguns obstáculos relacionados com a questão da malha. Em geral a malha de um objeto é construída a partir de um preliminar desenvolvido em CAD (*Computer Aided Design*), que é, em geral, utilizado como referência. A partir deste modelo a malha é definida por um conjunto finito de pontos, geralmente inteconectados por segmentos de reta no plano ou no espaço. Atualmente os softwares padrões de análise FEA (*Finite Elements Analysis*) não apresentam uma conexão eficiente entre o desenvolvimento CAD e FEA, gerando desvantagens relacionadas à criação e ao refinamento da malha. Segundo Rogers (2001), o motivo provável pelo qual os estudos entre o desenvolvimento CAD e o Método dos Elementos Finitos não obtiveram uma relação direta se deve ao fato de que a indústria de FEA e CAD se desenvolveram em épocas diferentes, sendo que os softwares de FEA se tornaram consolidados no tempo em que os primeiros ambientes CAD estavam se

desenvolvendo. Recentemente surgiu um novo método numérico que procura consolidar o ambiente de desenvolvimento e análise.

A Análise Isogeométrica (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005) é um método de resolução numérica de equações diferenciais de aplicação similar ao MEF, o qual propõe a utilização das funções desenvolvidas no ambiente CAD como funções aproximadoras para a geometria do elemento e para a solução da equação diferencial governante do problema analisado. Estas funções denominadas NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) trazem vantagens sobre a descrição geométrica de um problema no ambiente FEA, visto que as funções utilizadas no desenvolvimento CAD e FEA agora são comuns: o objeto importado de um ambiente CAD tem sua geometria descrita de maneira exata e não há necessidade de remalhamento, ou seja, de reaccessar informações sobre o objeto para realizar refinamento de malha.

Desde sua concepção várias pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de verificar a eficiência das funções NURBS como funções aproximadoras do método. Algumas aplicações da análise isogeométrica para o problema dinâmico de estruturas já foram desenvolvidas como: vibração livre de estruturas unidimensionais e bi-dimensionais (COTTRELL et al., 2006) e vibração livre de placas (SCHOJAEE et al., 2012).

Com base em aplicações numéricas para barras, vigas, estado plano de tensões e treliças, este trabalho consiste em verificar a eficiência da análise isogeométrica através da comparação com o MEF e com os modelos desenvolvidos por Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2007, 2009 e 2011) e Torii (2012) para os métodos enriquecidos e o MEFG.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é aplicar a análise isogeométrica para o problema de barras, vigas, estado plano de tensões e treliças em vibração livre.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Revisar os conceitos de análise dinâmica para múltiplos graus de liberdade, do MEF polinomial e dos métodos enriquecidos.

Estudar os conceitos da análise isogeométrica e das funções do tipo NURBS.

Aplicar a análise isogeométrica para exemplos numéricos de barras, vigas, estado plano e treliças de maneira comparativa com o MEF, os métodos enriquecidos e o MEFG.

1.3 JUSTIFICATIVA

Visto a crescente escassez dos recursos materiais e o impacto ambiental proveniente da atividade humana, é dever do homem aprimorar suas atividades de modo a possibilitar qualidade de vida para todos os seres vivos do planeta e para as futuras gerações. Desta maneira, pesquisadores têm se dedicado a estudar e desenvolver técnicas enxutas e menos danosas ao meio ambiente.

Do ponto de vista estrutural, um conhecimento mais preciso do comportamento dinâmico das estruturas permite a redução dos coeficientes de incerteza de projeto, possibilitando estruturas mais esbeltas, econômicas e seguras.

2 ESTADO DA ARTE

2.1 VIBRAÇÃO LIVRE DE ESTRUTURAS

O fenômeno da vibração livre (RAO, 2007; CHOPRA, 1995; CLOUGH; PENZIEN, 1995; CHENG, 2001) é um movimento no qual um sistema descreve de maneira periódica em torno de sua posição estática, invertendo o sentido do movimento a cada vez que alcança um máximo deslocamento, também chamado de amplitude. Quando este sistema é formado por um único grau de liberdade, ou seja, um único ponto com possibilidade de se deslocar em apenas uma direção, o movimento que este sistema descreve em função do tempo é denominado movimento harmônico, cuja solução é dada por uma cossenóide na forma:

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega t) \quad (1)$$

onde $x(t)$ é a posição do ponto em relação à sua posição de equilíbrio, X é a máxima amplitude do movimento e ω é a frequência de oscilação, a qual mede a quantidade de ciclos que o sistema realiza por unidade de tempo. O movimento descrito através da equação 1 é uma solução particular da equação diferencial que rege o problema de vibração de um sistema com um grau de liberdade, formulada a partir das condições de equilíbrio dinâmico. Desprezando o efeito de amortecimento, a equação que rege o movimento para um sistema com um grau de liberdade é dada por:

$$m\ddot{x} + kx = p(t) \quad (2)$$

onde m é massa do corpo em movimento; \ddot{x} sua aceleração; k a constante elástica do aparato responsável por colocar o corpo em movimento harmônico e $p(t)$ uma força de excitação atuante no corpo e dependente do tempo.

Quando há ausência de uma força de excitação no corpo, ou seja, $p(t) = 0$ o corpo encontra-se em vibração livre. Neste caso, para sistemas com amortecimento, este movimento tem sua amplitude decrescendo em determinada taxa em função do tempo até cessar. No

caso de uma oscilação não amortecida, o movimento se repete ao longo do tempo, mantendo sua amplitude máxima sem cessar. O exemplo clássico de oscilação de sistemas com um grau de liberdade é o sistema massa-mola descrito por Chopra (1995) e Rao (2007).

2.1.1 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

Estruturas civis são consideradas um meio contínuo. Os problemas que envolvem a descrição do comportamento dinâmico de estruturas são quase em sua totalidade resolvidos através de métodos baseados na discretização deste meio contínuo, a qual consiste na aproximação do comportamento real, através da caracterização matemática de um conjunto de pontos pertencente a este meio. A discretização do meio contínuo gera uma quantidade finita de pontos onde a solução dada pela equação 2 mostra-se insuficiente. Estes sistemas são chamados de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

O fenômeno de vibração livre com múltiplos graus de liberdade ocorre quando uma estrutura encontra-se em movimento oscilatório em torno de sua posição de equilíbrio com ausência de excitações periódicas externas. Este movimento se inicia quando a estrutura recebe uma excitação que altera seu estado de equilíbrio e/ou impõe uma velocidade inicial ao sistema (CHOPRA, 1995).

Do ponto de vista prático, o movimento harmônico de vibração livre é do tipo amortecido, ou seja, a amplitude do movimento diminui em determinada taxa em função do tempo t até o movimento cessar. Porém as taxas de amortecimento das estruturas civis são muito pequenas e podem ser desconsideradas para uma análise em um tempo de curta ou média duração (CHOPRA, 1995).

Em análise dinâmica de estruturas o problema de vibração livre não amortecida com múltiplos graus de liberdade é um problema de valores de contorno. A discretização do problema para a solução utilizando MEF resulta no sistema de equações (BATHE, 1996):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3)$$

com condições iniciais:

$$\dot{u} = \dot{u}(0) \quad u = u(0) \quad (4)$$

onde $\ddot{\mathbf{u}}$ e \mathbf{u} são, respectivamente, os vetores de aceleração e deslocamento relacionados com cada grau de liberdade do problema, \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes de rigidez e massa da estrutura, respectivamente.

Uma estrutura em vibração livre sem amortecimento sofre movimento harmônico simples, mantendo sua característica deformada. Cada ponto da estrutura alcança sua máxima deformação e também passa pela posição de equilíbrio no mesmo intervalo de tempo. A solução para a equação 3 é da forma:

$$\mathbf{u}(t) = (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \cdot \phi_n \quad (5)$$

Se uma estrutura possui N graus de liberdade, a equação 3 formará um sistema com N equações diferenciais que irá descrever a resposta de cada grau de liberdade para N diferentes formas de vibrar. Estas formas são chamadas de modos naturais de vibração, representadas pelo vetor ϕ_n , o qual descreve a deflexão relativa da estrutura para cada forma. O número n representa o número do modo de vibração. O vetor ϕ_n não varia com o tempo.

Os parâmetros A_n e B_n são constantes de integração, determinadas a partir da imposição de condições de contorno para o sistema, e ω_n é a frequência natural de vibração correspondente ao modo n . Esta frequência natural de vibração está ligada com o período natural de vibração T_n , o qual indica o tempo que um ponto da estrutura leva para completar um ciclo. Por sua vez a frequência ω_n é do tipo angular, a qual mede uma taxa de variação angular no tempo. No caso da vibração de estruturas, ela mede a quantidade de ciclos completos que a estrutura realiza por segundo.

Substituindo a equação 5 na equação 3, o problema de vibração livre transforma-se em um problema de autovalores generalizados: encontrar um par (λ_n, ϕ_n) tal que:

$$\mathbf{K}\phi_n = \lambda_n \mathbf{M}\phi_n \quad (6)$$

O autovetor ϕ_n está relacionado com o n-ésimo modo de vibração da estrutura e o autovalor λ_n está relacionado com a frequência natural de vibração pela relação:

$$\lambda_n = \omega_n^2. \quad (7)$$

O problema de vibração livre pode apresentar soluções analíticas ou aproximadas. Dentre os principais métodos aproximados para solução de vibração livre de estruturas se destaca o Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (BATHE, 1996; RAO, 2005; HUGHES, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) é um método numérico de resolução de equações diferenciais parciais, baseado na discretização do meio contínuo e aproximação da solução por funções polinomiais interpoladoras, decorrente da forma fraca de um problema de valor de contorno. Surgiu em 1955 para solucionar o problema da distribuição de tensões em chapa em asas de aviões, tratado pioneiramente por Argyris e Kelsey (1960) e por Turner, Clough, Martin e Topp (1956).

No MEF, corpos contínuos são representados como um acoplamento de subdivisões chamadas de elementos finitos. Estes elementos são interconectados em determinados pontos ou nós, que se encontram nas extremidades dos elementos. Como a variação da incógnita do problema no interior de um elemento finito em geral não é conhecida, este a considera como a aproximação de uma função local, definida pela contribuição interpolatória da incógnita do problema nos nós do elemento. Quando as equações são montadas para o problema como um todo, as variáveis estão localizadas no nós, acoplados de uma forma global. Com a resolução desta equação, geralmente em forma matricial, o problema de aproximação é resolvido.

Com relação ao tempo de processamento computacional, o MEF apresenta características vantajosas. As matrizes decorrentes das formulações dos problemas no método são simétricas e esparsas. Atualmente os algoritmos de resolução de sistemas formados por

matrizes esparsas são consolidados e existem diversos pacotes e rotinas otimizadas para este cálculo. Um detalhamento sobre a lógica do desenvolvimento destes algoritmos é feito por Gould, Hu e Scott (2005).

Apesar de idealizado com o intuito da análise de estruturas de aviões, o MEF possui aplicabilidade para muitos problemas, englobando diversas áreas. A tabela 1 mostra algumas aplicações em diferentes áreas para os três principais problemas de valores de contorno. Problemas de equilíbrio consistem em encontrar incógnitas do problema em estado estacionário, ou seja, independente do tempo. Problemas de autovalores não são explicitamente dependentes do tempo, e podem ser considerados uma extensão do problema de equilíbrio, resultando em soluções dinâmicas (frequências e modos de vibração). Já os problemas de propagação consistem em encontrar a resposta de variáveis dependentes do tempo.

TABELA 1 – ALGUMAS APLICAÇÕES DO MEF EM DISTINTAS ÁREAS DA ENGENHARIA

Área de Conhecimento	Problemas de Equilíbrio (Equações Elípticas)	Problemas de Autovalores	Problemas de Propagação (Equações Hiperbólicas)
1. Estruturas Cíveis	Análise Estática de treliças, vigas, barras, pórticos, e outros elementos estruturais	Frequência e modos naturais de vibração, estabilidade	Propagação de ondas, resposta a cargas não periódicas
2. Estruturas de Aviões	Análise estática de asas, fuselagem, foguetes	Frequência natural de vibração e estabilidade de componentes aéreos	Resposta no tempo para cargas randômicas
3. Condução de Calor	Distribuição da temperatura em sólidos sob regime permanente	–	Fluxo de calor transiente em foguetes, combustão de motores, hélices de turbinas e estruturas cíveis
4. Geomecânica	Análise de escavações, cortinas, escavações, análise de tensões, interação solo-estrutura, fundações de máquinas	Frequências naturais de vibração de reservatórios, problemas de interação solo-estrutura	Interação solo estrutura dependentes do tempo, propagação de ondas em solo e rochas
5. Hidráulica	Análise de vazão, camada limite, fluídos viscosos, análise aerodinâmica, estruturas hidráulicas	Períodos e modos naturais de bases rasas, lagos e portos, espalhamento de líquidos em containers	Análise de vazões fora de regime permanente, propagação de ondas, infiltrações em meios porosos

Adaptado de: RAO (2005)

Os resultados obtidos por uma solução via MEF podem ser melhorados por procedimentos de reformulação do problema, denominados refinamentos, os quais podem proceder sob três maneiras diferentes. O primeiro e mais simples procedimento, denominado refinamento h , consiste em aumentar o número de elementos na malha do problema. O segundo tipo de refinamento, denominado refinamento p , consiste em manter o número de elementos e aumentar a ordem do polinômio interpolador definido no elemento base. E a terceira maneira, chamada de refinamento hp , consiste em aumentar o número de elementos e também a ordem polinomial p . Apesar do refinamento p apresentar uma maior dificuldade de implementação, sua taxa de convergência é maior do que o refinamento h , ou seja, o refinamento p se aproxima mais rapidamente da solução ideal do problema (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Uma desvantagem do MEF está relacionada com a criação e refinamento da malha do objeto em análise, a qual necessita de uma referência para efetuar as aproximações geométricas, gerando uma quantidade finita de pontos interconectados, geralmente por segmentos lineares. Em geral os algoritmos para geração da malha de elementos finitos requerem elevado esforço computacional, o que pode gerar possíveis problemas de eficiência para problemas que envolvam domínios variáveis. Uma possível solução para este problema é sugerida por Bathe (1996) como aspectos futuros no estudo do MEF, onde um sistema automático gerador de malhas para elementos finitos pode ser proposto através de uma melhor conexão entre o sistema CAD e FEA.

As aplicações do MEF na resolução de problemas de dinâmica das estruturas são largamente discutidas na literatura. O MEF como alternativa para a resolução de tais problemas se apresenta muito eficiente, porém sua formulação polinomial clássica e seus procedimentos de refinamento geram erros elevados para as frequências de vibração mais altas. Os refinamentos h e p melhoram os resultados das frequências e modos existentes anteriores ao refinamento, contudo com o aumento do número de graus de liberdade, novas frequências mais altas são geradas na amostragem, atribuindo erros semelhantes para o refinamento h e erros maiores para o refinamento p no espectro de frequências (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

2.3 MÉTODOS ENRIQUECIDOS

Na tentativa de solucionar os erros ocasionados pelo MEF clássico e os elevados custos computacionais do processo, surgiram métodos baseados na adição de novas funções na sentença clássica do MEF. Estes métodos foram classificados e chamados de Métodos Enriquecidos por Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2010). Dentre estes métodos se destacam: o Método dos Modos Admissíveis (MMA), o Método Composto (MC), o Método dos Elementos Finitos p -Fourier (MEFF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG).

O Método dos Modos Admissíveis (MMA) foi apresentado por Engels (1992) e Ganesan e Engels (1992), partindo da idéia de que o campo de deslocamento pode ser escrito como uma combinação linear de funções que expressam modos admissíveis de vibrar. O campo de deslocamento deste método é formado pela soma de uma parcela de deslocamentos estáticos e uma parcela de deslocamentos dinâmicos, onde a parte estática pode ser tomada pelo próprio campo de deslocamentos do MEF. Para o problema de vibração livre da viga de Euler-Bernoulli, o MMA utilizando funções trigonométricas e funções que representam os modos de uma viga engastada, apresentou taxas de convergência superiores comparadas com as desenvolvidas com o MEF.

O Método dos Elementos Compostos ou Método Composto (MC) proposto por Zeng (1998a, b e c) consiste em adicionar ao campo de deslocamentos do MEF termos relacionados à solução analítica do problema em questão. Estes termos adicionais decorrem da solução de um elemento isolado que garante a nulidade de deslocamentos nos limites do elemento, permitindo assim a imposição das condições de contorno diretamente na sentença do MEF. Os resultados obtidos por Zeng (1998a) para elementos de barra, Zeng (1998b) para elemento de viga de Euler-Bernoulli e Arndt, Machado e Scremin (2003) para treliças e vigas mostraram precisão e taxas de convergência superiores às desenvolvidas pelo MEF. Arndt (2009) classificou o MC como uma versão do MMA, visto que as soluções analíticas dos problemas de vibração são, na realidade, modos admissíveis.

Outro método considerado enriquecido é o Método dos Elementos Finitos p -Fourier

(MEFF), apresentado por Leung e Chan (1998). Este método consiste na adição de termos trigonométricos ao campo de deslocamentos do MEF. Para que estes termos trigonométricos não interfiram na imposição das condições de contorno pelos procedimentos padrões do MEF, estas funções devem ser nulas nas interfaces do elemento para a formulação de barra. Para o elemento de viga além da nulidade das funções nos pontos de extremidade, as derivadas primeiras das funções nestes pontos devem também ser nulas. O MEFF apresentou bons resultados para elementos de barras e vigas de Euler-Bernoulli.

O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) é também considerado um método enriquecido. Este método foi proposto por Strouboulis et al. (2001) e surgiu com o advento do Método da Partição da Unidade (MPU) proposto por Melenk e Babuska (1996a e 1996b) e Babuska e Melenk (1997). O MPU consiste em gerar espaços de aproximação a partir de funções quaisquer, pelo processo de multiplicação deste conjunto de funções por uma partição da unidade. O MEFG é então proposto como uma união do espaço de aproximação do MPU e do MEF, sendo considerado uma extensão do MPU.

Aplicações do MEFG e dos métodos baseados no MPU para análise dinâmica foram desenvolvidas por De Bel, Villon e Bouillard (2005), Hazard e Bouillard (2007), Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2010) e Torii (2012). Arndt (2009) aplicou o MEFG para análise de barras, vigas de Euler-Bernoulli, treliças e pórticos planos em vibração livre adquirindo resultados superiores ao MC, além de apresentar a versão adaptativa do MEFG, obtendo altas taxas de convergência para os autovalores mais altos. Recentemente a eficiência do MEFG foi comprovada por Torii (2012) para estruturas reticuladas, estado plano de tensões e equação da onda bidimensional.

3 ANÁLISE ISOGOMÉTRICA

No ambiente do desenvolvimento de um modelo em elementos finitos existem gargalos relacionados com a geração de malha e geometria do objeto em análise. O procedimento padrão de desenvolvimento consiste em aproximar a malha de elementos finitos a partir de uma geometria CAD a qual é referenciada como exata. O tempo necessário para o desenvolvimento de uma malha coerente com a geometria exata é em torno de 80% do tempo total de trabalho no desenvolvimento de um modelo, enquanto apenas 20% do tempo é efetivamente gasto em sua análise e pós-processamento (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

Esta aproximação referenciada por uma modelagem pode gerar erros. A influência da geometria na precisão do problema de flambagem de estruturas de casca foi demonstrada por Stanley (1985), onde cascas cilíndricas com imperfeições de 1% apresentaram resultados com erros de até 20% na carga de flambagem final. Problemas numéricos de aerodinâmica e camada limite (BARTH, 1998) e de superfície de atrito entre corpos (LAURSEN, 2002) foram solucionados com uma melhor aproximação da geometria do elemento, utilizando polinômios quadráticos e cúbicos.

Os atuais sistemas mecânicos que necessitam de FEA ganham maior complexidade com o avanço da tecnologia. Segundo Hughes (2005) e Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009), o número de peças separadas e o tempo de manufatura destes equipamentos aumenta de acordo com esta complexidade. Um automóvel pode chegar a 3000 peças separadas, enquanto um submarino nuclear possui aproximadamente 1 milhão de partes. Alterações de projeto podem ser limitantes e até inviáveis devido à ausência de uma comunicação entre desenvolvimento e modelagem.

Outro problema decorrente de tal ausência é a necessidade do refinamento de malha acessar dados sobre a geometria exata do objeto, gerando novos pontos aproximados com base nas informações coletadas. Procedimentos de refinamentos automáticos adaptativos para a geometria são limitados (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

Além de apresentar uma solução para os problemas mencionados anteriormente, a

comunicação direta entre os ambientes CAD e FEA visa também melhorar o desempenho computacional do modelo, com a utilização mais eficiente de processamentos paralelos, atribuir otimizações no desenvolvimento e melhorar os procedimentos de verificação e validação do modelo e quantificação de incertezas.

O cenário que envolve os procedimentos da modelagem em FEA torna claro a necessidade de estabelecer uma conexão entre os ambientes de desenvolvimento CAD e modelagem FEA, com o intuito de melhorar o desempenho e precisão das análises computacionais. Este procedimento requer alterações na formulação básica do Método dos Elementos Finitos, a qual passará a se basear também em representações provenientes do CAD. Este conceito foi chamado de Análise Isogeométrica (AIG).

A Análise Isogeométrica, introduzida por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), é um método numérico de resolução de equações diferenciais parciais, que utiliza discretização do domínio do problema e funções do tipo NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) como funções de ponderação. Estas funções são também utilizadas como aproximadoras para a geometria do objeto. Esta utilidade dual das funções NURBS fez os autores utilizarem o termo “isogeométrico” para o nome deste método.

Sua aplicabilidade é similar ao MEF, porém o uso das funções NURBS como aproximadoras para a geometria do objeto apresenta vantagens sobre o MEF: a não necessidade de reaccessar o modelo para estabelecer os nós durante um refino de malha, e a descrição exata da geometria de um objeto previamente desenvolvido em ambiente CAD.

A seguir são apresentadas as características da Análise Isogeométrica que diferem do MEF clássico, as funções do tipo NURBS e os principais tipos de refinamento.

3.1 PRINCIPAIS DIFERENÇAS ENTRE AIG E MEF

No Método dos Elementos Finitos, os conceitos de malha e elemento são bem definidos. Um elemento possui uma representação no espaço paramétrico e outra representação no espaço físico. Elementos são formados por uma quantidade finita de nós no espaço

paramétrico e os graus de liberdade destes nós são definidos através do comportamento das funções de forma nestes pontos. As funções de forma do MEF geralmente são interpolatórias e podem apresentar valores negativos. Um conjunto de elementos acoplados no espaço físico constitui uma malha.

As funções NURBS geralmente não apresentam graus de liberdade nodais, com exceção dos pontos de extremidade de um elemento. Em Análise Isogeométrica existem dois conceitos de malha: a malha de controle e a malha física. A malha de controle é formada por um conjunto de pontos, chamados de pontos de controle, que irá servir de referência para a construção da malha física através das funções NURBS. Estes pontos de controle são conectados entre si, através de entidades lineares, formando um conjunto de elementos retangulares para o espaço bidimensional e um conjunto de elementos hexaédricos no espaço tridimensional. Apesar da malha de controle apresentar um conjunto de pontos no espaço físico e se parecer com uma malha de elementos finitos, não há relação direta entre a malha de controle e a malha de elementos finitos. Os graus de liberdade do problema analisado estão nos pontos de controle.

As funções NURBS são construídas a partir de um conjunto de pontos no espaço paramétrico, denominado vetor de nós de controle, onde estes pontos são ordenados de maneira não decrescente. Apesar destes nós de controle não necessariamente atribuírem graus de liberdade nodais para o problema, é necessária uma distinção entre o conceito de elemento para AIG e MEF. No espaço unidimensional, o Método dos Elementos Finitos toma como definição de elemento o domínio entre dois nós de extremidade em um espaço delimitado que permite acoplamento entre os graus de liberdade referentes aos nós de extremidade. A Análise Isogeométrica define elemento como o domínio entre dois nós de controle distintos. Como as funções do tipo NURBS definem graus de liberdade nodais nas extremidades de um espaço delimitado, o conceito de elemento isoparamétrico utilizado no MEF deve ser mantido. Portanto, o espaço entre dois nós de controle distintos será referenciado neste trabalho como elemento isogeométrico. A mesma distinção entre estes dois conceitos pode ser generalizada para espaços bidimensionais e tridimensionais.

Um elemento isogeométrico assume formas diferentes no espaço paramétrico e no

espaço físico. Pelo fato das funções NURBS serem paramétricas, com comportamentos diferentes em cada elemento isogeométrico, as integrações numéricas por quadratura são realizadas em cada elemento isogeométrico em separado, no espaço da integração gaussiana este elemento é denominado elemento principal.

Os nós de controle dentro de um vetor podem aparecer mais de uma vez. Chama-se multiplicidade de um número à quantidade de vezes em que ele aparece em um espaço fechado. O espaço índice é o espaço que contém todos os nós de controle em ordem crescente. Neste espaço é possível delimitar cada elemento isogeométrico, assim como os nós de controle que possuem multiplicidade maior do que 1.

A figura 1 mostra de uma maneira esquemática os conceitos que envolvem as NURBS e a AIG, exemplificando uma malha física que descreve uma superfície no espaço tridimensional. O espaço índice, o espaço paramétrico são mostrados, bem como as indicações de malha de controle, ponto de controle, e malha física.

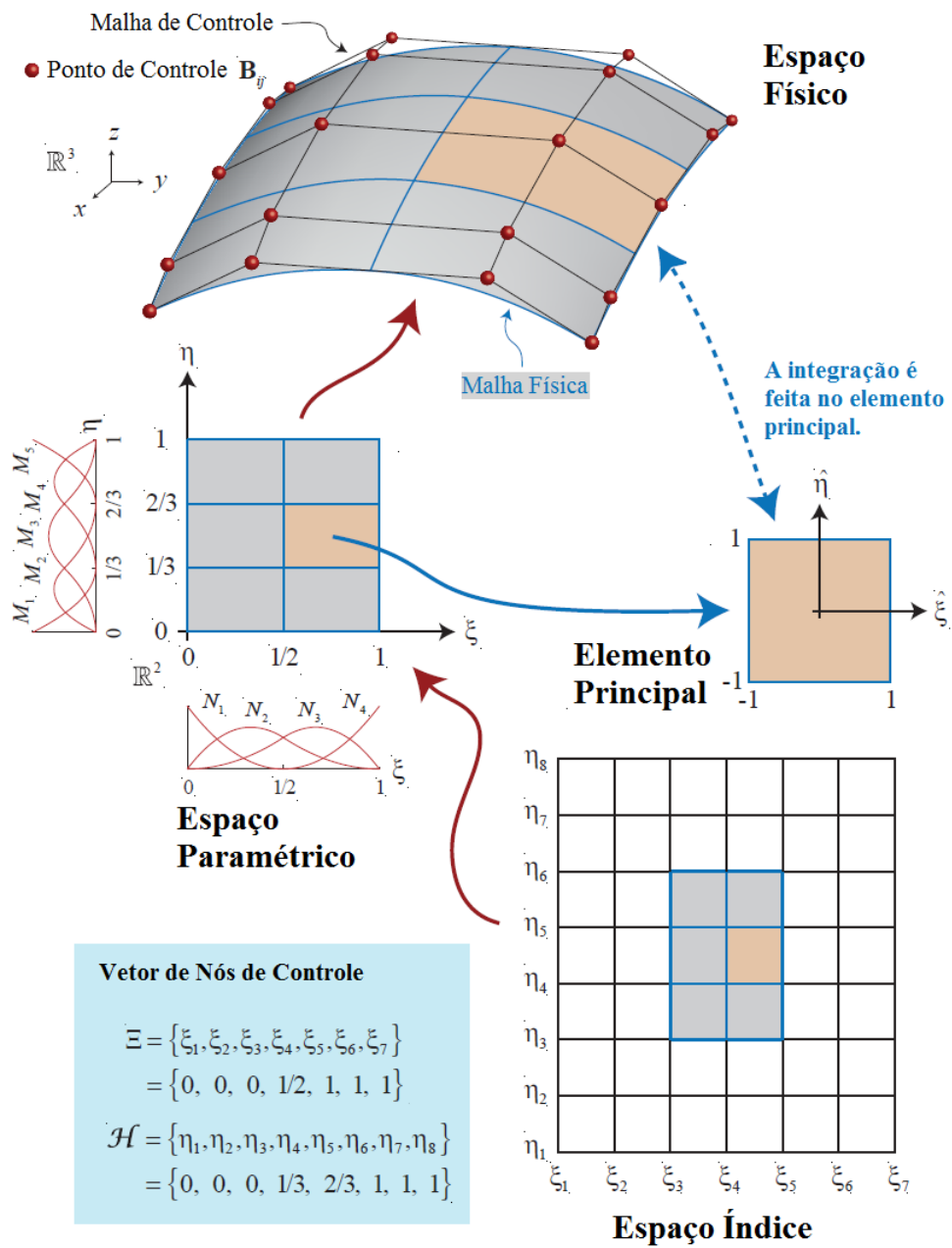


FIGURA 1 – MECANISMOS DAS FUNÇÕES NURBS

Adaptado de: COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES (2009)

Com relação ao mapeamento do objeto, o espaço paramétrico do MEF é mapeado a partir de um único elemento, onde no espaço físico o objeto é formado pelo acoplamento de vários elementos, cada qual com seu próprio mapeamento. Alternativamente, o mapeamento das funções NURBS é feito a partir de um grande elemento com diversos elementos isogeométricos, onde no espaço físico o mapeamento é realizado utilizando a referência da malha de controle. A figura 2a mostra um exemplo de mapeamento utilizado no MEF onde um objeto tridimensional é formado a partir de um único elemento isoparamétrico. A figura 2b mostra o mapeamento de um objeto utilizando as funções NURBS via malha de controle no espaço físico.

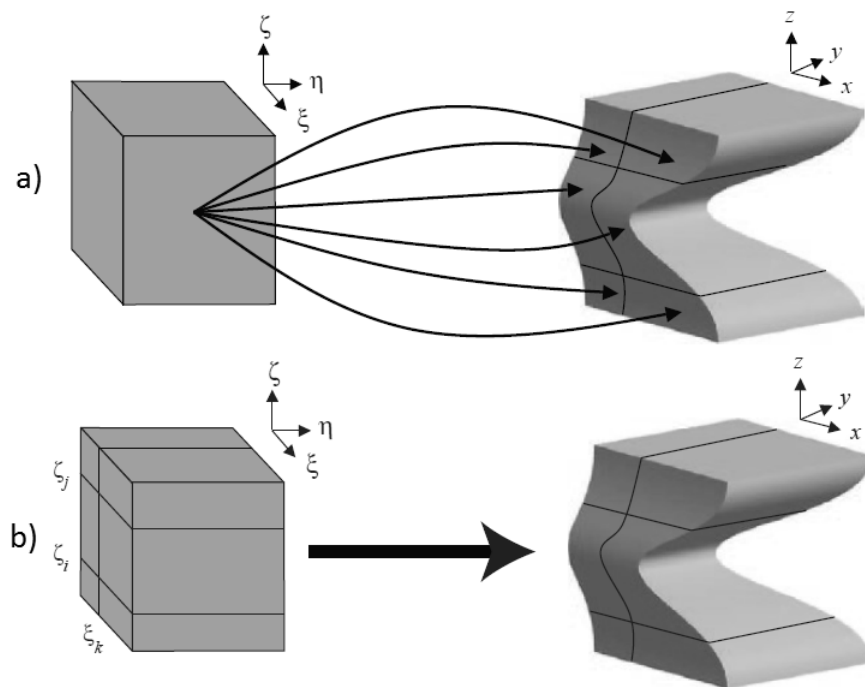


FIGURA 2 – A) EXEMPLO DE UM MAPEAMENTO PADRÃO NO MEF
B) MAPEAMENTO UTILIZANDO AS FUNÇÕES DE BASE DA AIG

Fonte: COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES (2009)

3.2 FUNÇÕES BASE

As funções NURBS, utilizadas como funções base na AIG são um grupo de funções B-Splines. Portanto as definições apresentadas a seguir são generalizadas para um grupo

genérico de funções B-Splines, sendo as funções NURBS diferenciadas no item 3.4.1 deste trabalho.

3.2.1 Vetor de Nós de Controle

O vetor de nós de controle é um conjunto não decrescente de coordenadas no espaço paramétrico, dado por $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, onde ξ_i é o i -ésimo nó de controle. O índice i varia de 1 a $n + p + 1$ onde n é o número de funções NURBS e p o grau polinomial da função.

Vetores de nós de controle são chamados de uniformes se os nós de controle estão igualmente espaçados, e não uniformes em caso contrário. Uma mesma coordenada de um nó de controle pode aparecer mais de uma vez dentro do vetor de nós de controle. É chamado de vetor aberto o vetor de nós de controle cujas primeiras e últimas coordenadas aparecem $p + 1$ vezes. O uso de vetores abertos é um padrão utilizado na literatura do desenvolvimento CAD, além de permitir funções que definem graus de liberdade nodais nas extremidades de um elemento (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

3.2.2 B-Splines

Dado um vetor de nós de controle, as funções B-Splines são construídas de maneira recursiva, iniciando com um grau polinomial $p = 0$ até o grau polinomial p desejado. A interação inicial para o polinômio $p=0$ é dada por (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

As próximas interações para $p = 1, 2, 3, \dots$ são dadas por (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009):

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (9)$$

As equações 8 e 9 são conhecidas como fórmula recursiva de Cox-de Boor (COX, 1971; DE BOOR, 1972). A notação $N_{i,p}$ indica a i -ésima função de ordem p . A figura 3 mostra um exemplo gráfico de construção das B-Splines para um vetor uniforme $\Xi = \{1, 2, 3, \dots\}$ iniciando em $p = 0$ até $p = 2$. Os polinômios de grau $p = 0$ e $p = 1$ das B-Splines são idênticos aos polinômios do MEF clássico. Os polinômios de ordem maior que dois mantêm a homogeneidade das funções. Um exemplo numérico de construção de funções B-Splines é mostrado em detalhes no apêndice A deste trabalho.

Decorrem das funções B-Splines importantes propriedades. Primeiramente, as funções B-Splines obedecem a partição da unidade, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1. \quad (10)$$

Ao contrário das funções polinomiais do MEF, as B-Splines são positivas em todo o domínio, fazendo com que todos os termos da matriz de massa sejam também positivos.

Outra propriedade notável no desenvolvimento das funções B-Splines é o número de derivadas contínuas para cada função. Dada a ordem polinomial p , uma função B-Spline possui $p - 1$ derivadas contínuas no domínio da função (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

O suporte das funções B-Splines está relacionado também com a ordem polinomial p . Dada uma função de ordem p o tamanho do suporte será $p + 1$ elementos isogeométricos. Através da figura 3 é possível notar as propriedades relacionadas com os valores positivos e a dimensão do suporte das funções B-Splines.

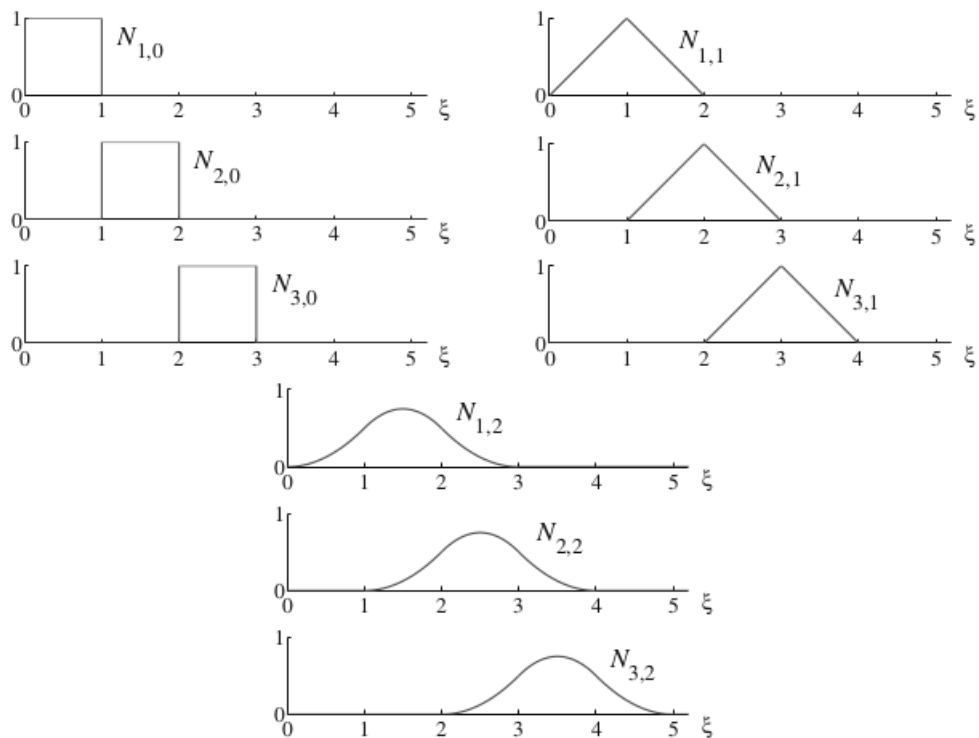


FIGURA 3 – EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES B-SPLINES ATÉ GRAU 2 APARTIR DE UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE UNIFORME

Fonte: HUGHES *et al.* (2005)

3.2.3 Derivadas das Funções B-Splines

As relações analíticas para as derivadas das funções B-Splines são também recursivas para dado vetor de nós de controle Ξ e ordem polinomial última p . A derivada primeira da i -ésima função B-Spline é dada pela expressão (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009):

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi). \quad (11)$$

Uma expressão generalizada para a k -ésima derivada da i -ésima função B-Spline é definida pela equação (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES,

2009):

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right). \quad (12)$$

Algoritmos eficientes para a determinação das derivadas B-Splines são propostos por Farin (1999).

3.3 CURVAS B-SPLINES

Curvas B-Splines são construídas em um espaço \mathfrak{R}^d a partir da combinação linear entre funções B-Splines e um vetor de pontos de controle. Dadas n funções base B-Splines com n correspondentes pontos de controle $\mathbf{B}_i \in \mathfrak{R}^d$, a equação polinomial de uma curva B-Spline é dada por:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (13)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbf{N}_p^T \mathbf{B} \quad (14)$$

onde \mathbf{B} é a matriz contendo as coordenadas dos pontos de controle, dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

e \mathbf{N}_p^T o vetor de funções base B-Splines:

$$\mathbf{N}_p^T = \begin{bmatrix} N_{1,p} \\ N_{2,p} \\ \vdots \\ N_{n,p} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

O índice i do ponto de controle \mathbf{B}^i identifica o ponto, mas não se refere a uma coordenada específica deste. A interpolação linear dos pontos de controle no espaço \mathbb{R}^d para uma curva forma o polígono de controle.

A figura 4 mostra uma curva formada a partir do conjunto de funções NURBS ilustradas na figura 7. A figura 4a mostra a curva controlada pelo polígono de controle e a 4b, a mesma curva contendo os nós de controle, separando os elementos isogeométricos no espaço físico. Os pontos de controle, primeiro e último, possuem comportamento interpolatório de extremidade, fazendo com que a curva seja tangente a estes pontos. O sexto ponto também possui comportamento interpolatório interno ao domínio, fazendo com que a curva também seja tangente neste ponto.

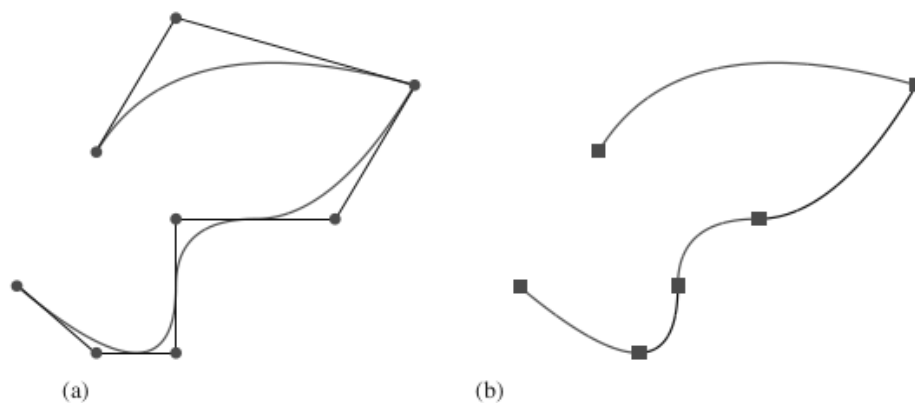


FIGURA 4 – EXEMPLO DE UMA CURVA FORMADA A PARTIR DA INTERPOLAÇÃO DE UM CONJUNTO DE FUNÇÕES NURBS. A) COM OS PONTOS DE CONTROLE E B) COM OS ELEMENTOS ISOGEOMÉTRICOS

Fonte: COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES (2009)

3.4 SUPERFÍCIES B-SPLINES

Dada a malha de controle $\mathbf{B}^{i,j}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, ordens polinomiais p e q , e vetores de nós de controle $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, uma superfície B-Spline é construída através do produto tensorial (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009):

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}^{i,j}. \quad (17)$$

onde $N_{i,p}(\xi)$ e $M_{j,q}(\eta)$ são funções B-Splines de ordem p e q provenientes, respectivamente, dos vetores de nós de controle Ξ e H . Uma superfície base $\tilde{N}_{i,j;p,q}(\xi, \eta)$ B-Spline é formada pelo produto $N_{i,p}(\xi)$ com $M_{j,q}(\eta)$.

Os índices i, j na malha $\mathbf{B}^{i,j}$ não referem-se às coordenadas de um tensor, e sim a um conjunto de coordenadas específicas.

$$\tilde{N}_{i,j;p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta). \quad (18)$$

O comportamento positivo e a partição da unidade para as superfícies B-Splines são válidos, pois:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) = \left(\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \right) \left(\sum_{j=1}^m M_{j,q}(\eta) \right) = 1. \quad (19)$$

O suporte de uma superfície base B-Spline $\tilde{N}_{i,j;p,q}$ é $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ e nas extremidades de um domínio bidimensional delimitado, as superfícies base B-Splines adquirem comportamento interpolatório. A figura 5 mostra a representação gráfica das superfícies base B-Splines para $p = q = 2$ e $\Xi = H = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ com i avançando da direita para a esquerda, e j de cima para baixo.

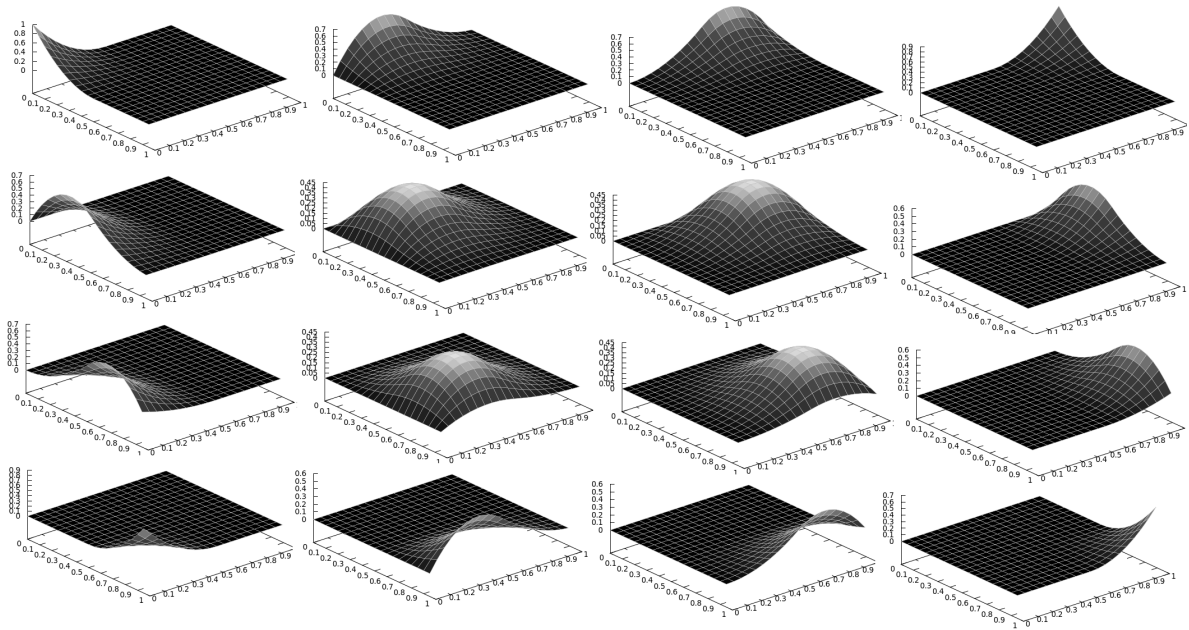


FIGURA 5 – SUPERFÍCIES BASE B-SPLINES

3.5 NURBS

O uso de um vetor de nós de controle não uniforme permite a formação de funções com melhor comportamento para aplicações numéricas. As funções do tipo NURBS são uma família de funções B-Splines que utilizam o vetor de nós de controle não uniforme. Segundo Farin (1999) as funções do tipo NURBS não necessariamente utilizam vetor de nós de controle abertos, onde para uma ordem p os nós de controle das extremidades do domínio do elemento aparecem $p + 1$ vezes. Porém segundo Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009) há a necessidade do uso de funções NURBS com vetor de nós de controle aberto para gerar os graus de liberdade nodais de extremidade.

A seguir são apresentados dois exemplos gráficos de funções do tipo NURBS. A figura 6 mostra um conjunto de funções do tipo NURBS de grau $p = 2$ para um vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ e a figura 7 mostra um conjunto de funções NURBS construídas a partir do vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ com $p = 2$.

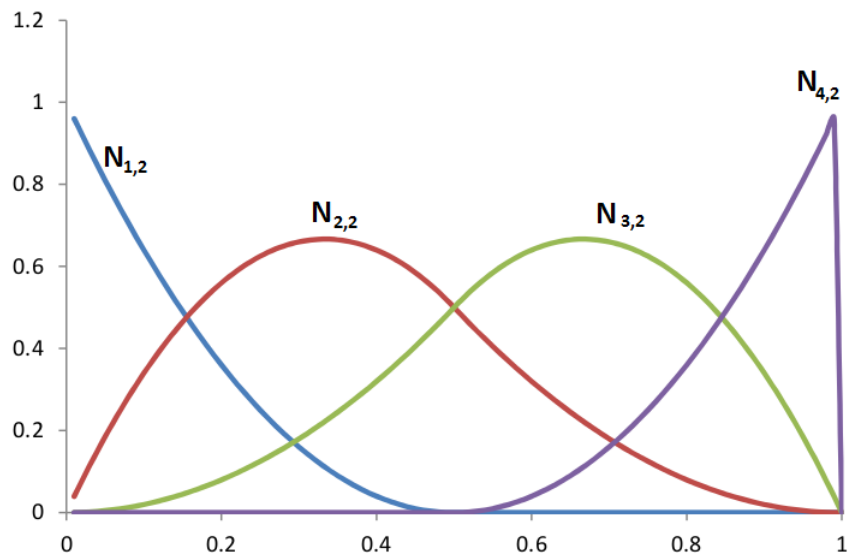


FIGURA 6 – FUNÇÕES NURBS COM GRAU $P = 2$ PARA UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$

Fonte: RAUEN; MACHADO; ARNDT (2013a)

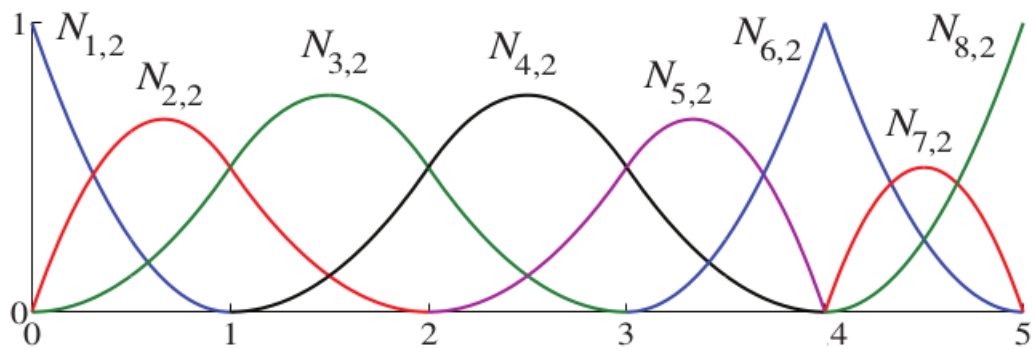


FIGURA 7 – FUNÇÕES NURBS COM GRAU $P = 2$ PARA UM VETOR DE NÓS DE CONTROLE $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$

Fonte: COTTRELL *ET AL.* (2007)

As figuras 6 e 7 mostram a atribuição de graus de liberdade nodais nas extremidades, onde os nós de controle aparecem $p + 1$ vezes. Grau de liberdade nodal interno ao elemento é atribuído em ξ_i quando este nó de controle aparece p vezes no vetor de nós de controle. A figura 7 mostra este comportamento em $\xi = 4$ onde este nó de controle aparece duas vezes no vetor de nós de controle. A possibilidade de gerar graus de liberdade interpolatórios em qualquer nó de controle ξ_i permite a formação de malhas deformadas.

Segundo Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009), o espaço de continuidade das funções NURBS através de um nó de controle ξ_i é C^{p-m_i} , onde m_i é a multiplicidade do i -ésimo nó de controle. As funções definidas no intervalo delimitado pelos nós de controle de extremidade são descontínuas devido à característica $C^{p-p-1} = C^{-1}$, porém com o acoplamento de elementos estas tornam-se C^0 : condição necessária para a resolução de problemas de segunda ordem. E as funções que definem grau de liberdade nodal no interior do domínio delimitado possuem continuidade $C^{p-p} = C^0$. A relação entre multiplicidade, ordem polinomial e continuidade das funções NURBS é mostrada na figura 8 onde as continuidades são delimitadas em função da multiplicidade dos nós de controle, para um conjunto de funções definidas por um vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$ e $p = 4$. O espaço que possui o maior número de derivadas contínuas se dá na região delimitada pelo nó de controle $\xi = 1$. Os espaços C^{-1} nas extremidades e C^0 na região da função interpolatória interna são mostrados. O número de derivadas contínuas em todas as regiões obedece a relação $p - m_i$.

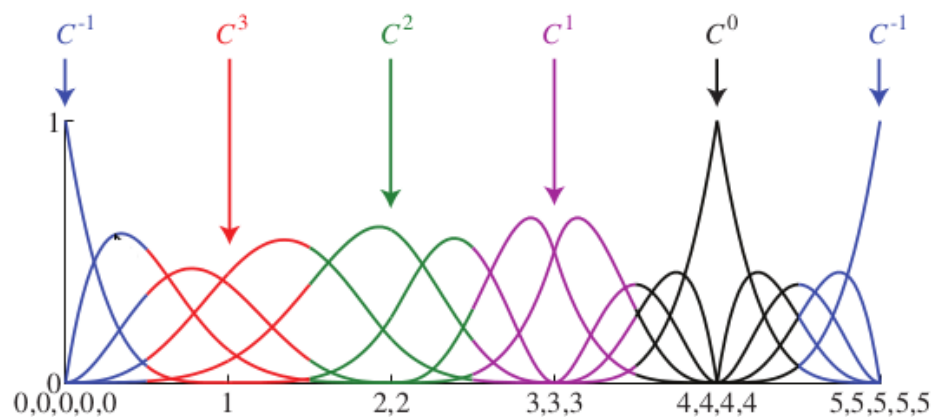


FIGURA 8 – CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES NURBS

Fonte: COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES (2009)

O suporte de uma função do tipo NURBS $N_{i,p}$ é definido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$. Intuitivamente há uma contradição com relação ao suporte das curvas B-Splines que são formadas por $p + 1$ elementos isogeométricos. De fato, o suporte de $p + 1$ elementos isogeométricos ainda é válido para as funções NURBS, porém o valor das funções em alguns elementos isogeométricos é igual a zero devido à repetição dos nós de controle (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

3.6 REFINAMENTOS DA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

O procedimento de refinamento das curvas B-Splines (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL et al., 2006, 2007 e 2009) consiste em reescrever as funções com novos parâmetros de entrada. Estes parâmetros estão relacionados com a ordem polinomial p e/ou o vetor de nós de controle Ξ .

3.6.1 Refinamento h Isogeométrico

O refinamento h isogeométrico está relacionado com a inserção de novos nós de controle sem alterar a ordem polinomial p . Dado um vetor de nós de controle $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, em um refino do tipo h , m novos nós de controle são inseridos no vetor Ξ gerando $n + m$ funções de forma. Surge o vetor de nós de controle estendido $\bar{\Xi} = \{\bar{\xi}_1 = \xi_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}\}$, onde $\Xi \subset \bar{\Xi}$. As novas funções são geradas aplicando as equações 8 e 9 a partir do vetor de nós de controle estendido $\bar{\Xi}$.

Com relação à curva B-Spline, novos pontos de controle $\bar{\beta} = \{\bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{B}}_2, \dots, \bar{\mathbf{B}}_{n+m}\}^T$ são formados a partir da combinação linear dos pontos de controle anteriores ao refino $\beta = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n\}^T$ pela expressão:

$$\bar{\beta} = \mathbf{T}^p \beta. \quad (20)$$

onde

$$T_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (21)$$

$$T_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^q \quad \text{para } q = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (22)$$

Um exemplo de refinamento h é mostrado através da figura 9, onde novos nós de controle $\bar{\xi} = 1/3$ e $\bar{\xi} = 2/3$ são inseridos no vetor $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ e o grau polinomial $p = 2$ é mantido.

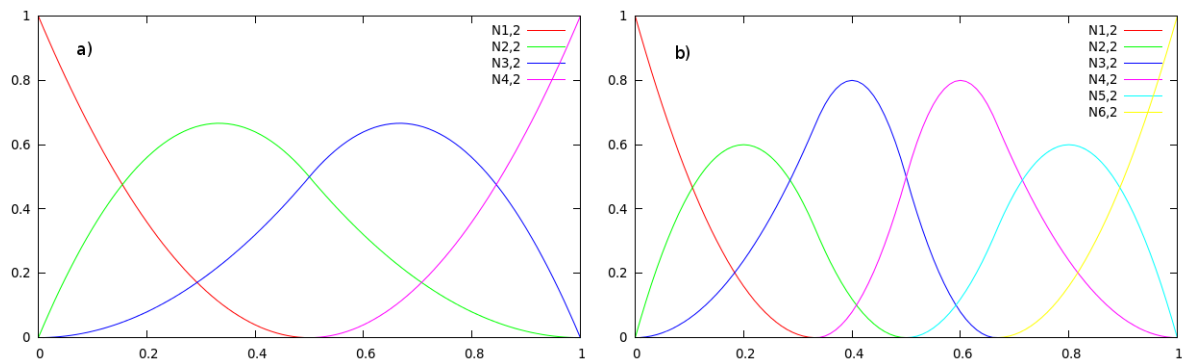


FIGURA 9 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO h ISOGOMÉTRICO

A principal similaridade entre os refinamentos h isogeométrico e do MEF é o fato da inserção de pontos dividir o elemento principal em novos elementos isogeométricos. Contudo, novas funções B-Splines geradas por este refinamento não necessariamente criam graus de liberdade interpolatórios nestes novos nós, ao contrário do refinamento h do MEF, que divide um domínio através da junção de elementos isoparamétricos. Um refinamento h mais próximo do refinamento do MEF seria gerar novos nós de controle cada um com multiplicidade p a fim de criar comportamentos interpolatórios nestes pontos.

3.6.2 Refinamento p Isogeométrico

Outra maneira de refinamento das funções NURBS está relacionada com a elevação da ordem polinomial. Como o número de derivadas contínuas das funções B-Splines segue a relação $p - m_i$, com o aumento de p as multiplicidades m_i devem também aumentar a fim de preservar o número de derivadas contínuas das funções. O processo do aumento da ordem polinomial faz com que cada nó de controle distinto existente no vetor antes do refinamento seja repetido uma vez para que haja um vetor de nós de controle suficiente para o refinamento. Novos nós de controle não são adicionados ao novo vetor para este tipo de refinamento.

Um exemplo de refinamento p isogeométrico é mostrado na figura 10, onde a partir de um conjunto de funções NURBS de grau $p = 2$ e vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ o aumento da ordem polinomial é realizado criando um novo conjunto de funções geradas com grau polinomial $p = 3$ e vetor de nós de controle $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1\}$. A continuidade em todas as regiões delimitadas pelos nós de controle permanecem as mesmas.

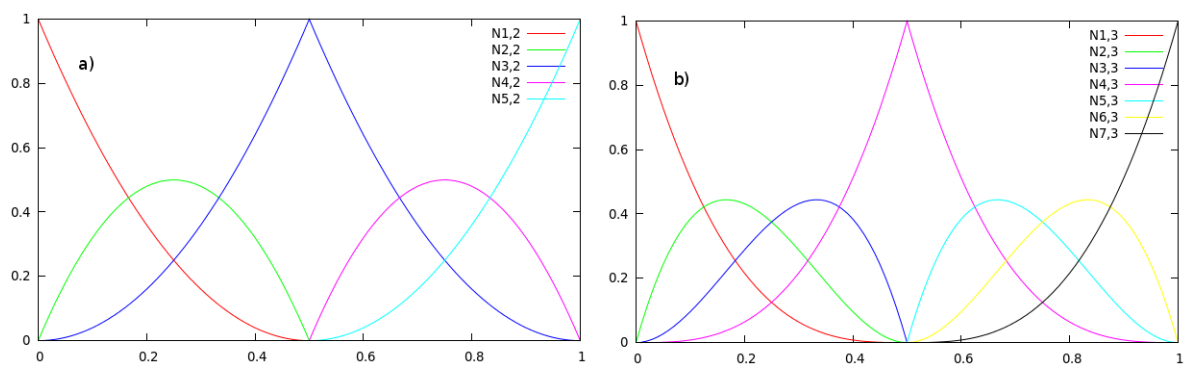


FIGURA 10 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO p ISOGOMÉTRICO

O procedimento de refinamento p isogeométrico é semelhante ao refinamento p do MEF clássico, sendo que ambos os conceitos envolvem a questão do aumento da ordem polinomial. Porém, as novas funções NURBS geradas através deste refinamento não necessariamente possuem comportamento interpolatório e continuidade C^0 . O refinamento p isogeométrico fica mais próximo do conceito de refinamento p do MEF quando as funções

anteriores ao processo possuem comportamento interpolatório e continuidade C^0 no interior do domínio, ou seja, os nós de controle internos são repetidos p vezes (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

Do ponto de vista da continuidade das funções NURBS, há uma vantagem da AIG em relação ao MEF, que é controlar o número de derivadas contínuas através da multiplicidade dos nós de controle. Este fato leva a um novo processo de refinamento exclusivo da AIG, denominado refinamento k .

3.6.3 Refinamento k

Nos procedimentos de refinamento utilizando funções NURBS, o processo de inserção de pontos e elevação da ordem polinomial não possuem relação direta. A inserção de um único novo nó de controle pode ser realizada para qualquer grau polinomial p gerando um novo elemento isogeométrico e funções com continuidade $p - 1$ na vizinhança deste ponto. Se agora o elemento passar por um refinamento p isogeométrico para uma ordem q , a continuidade em torno deste nó de controle inserido anteriormente continua sendo $p - 1$. Se ao invés deste procedimento, o elemento passar pelo refino p isogeométrico para grau q antes da inserção deste novo ponto, sendo este inserido após a elevação de ordem, a continuidade nesta vizinhança será $q - 1$. O procedimento de elevação de ordem seguido de inserção de um novo nó de controle é chamado de refinamento k (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009).

Além da vantagem sobre o refinamento p com relação à continuidade das funções, o refinamento do tipo k apresenta um menor acréscimo no número total de funções base. Considerando, por exemplo, um domínio formado por apenas um elemento, ordem polinomial inicial p e n funções base, aplicando um nível de refinamento p isogeométrico, o número de funções base aumenta para $2n - p$. Depois de um número r de refinamentos, o número total de funções base é $(r + 1)n - rp$, onde os parâmetros n e p são os parâmetros iniciais. Considerando um refinamento k com as mesmas condições iniciais, depois de um número r de refinamentos, o número de funções base é $n + r$ com continuidade $r + p + 1$. O refinamento

k não sofre acréscimo de elementos isogeométricos com comportamentos interpolatórios no interior do domínio (COTTRELL ET AL., 2007).

A figura 11 mostra um exemplo gráfico de um refinamento k . A figura 12 mostra uma comparação entre refinamentos p e k de $p = 2$ até $p = 5$. As funções provenientes do refinamento p possuem continuidade C^0 em $\xi = 1/3$ e $\xi = 2/3$ as quais são mantidas no decorrer do aumento da ordem polinomial. O refinamento k apresenta funções com maior suavidade, maior número de derivadas contínuas e um menor número de funções base.

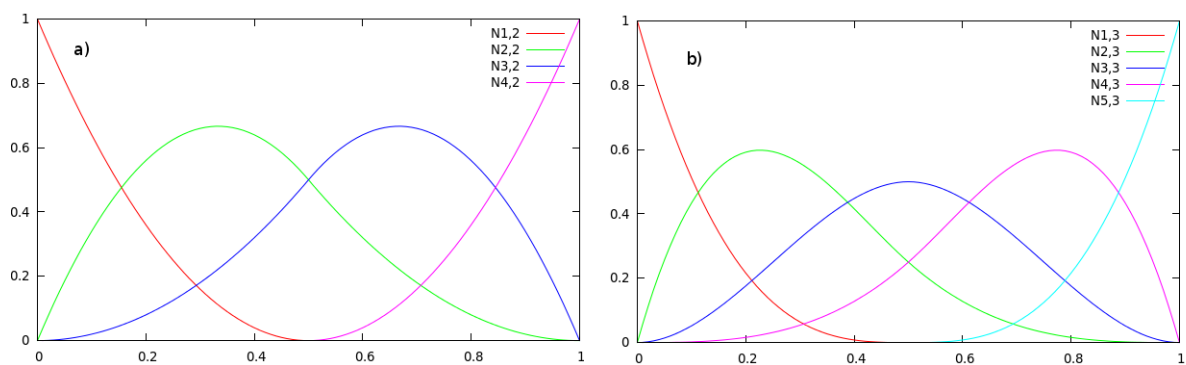


FIGURA 11 – a) FUNÇÕES BASE INICIAIS b) REFINAMENTO k

O refinamento do tipo k diverge do conceito tradicional de refinamento. O espaço das funções é enriquecido com novas funções sem comportamento interpolatório, enquanto os procedimentos de refino clássicos consistem na adição de novas funções de comportamentos interpolatórios e/ou acoplamentos entre elementos.

O procedimento de reescrever funções base a partir de novos parâmetros p e Ξ pela fórmula de recursão de Cox-De Boor não gera funções hierárquicas, ou seja, o conjunto das funções anteriores a qualquer refinamento isogeométrico não está contido no conjunto das novas funções posteriores ao refinamento.

Para dada ordem polinomial k , a base das funções polinomiais deve apresentar dimensão $\dim p^k = k + 1$. Porém as funções NURBS podem gerar um conjunto de funções maior do que $k + 1$. A independência linear das funções NURBS é garantida com a parametrização de uma mesma função nos elementos isogeométricos, sendo que em cada $\xi \in \Omega$ haverão $k + 1$ funções, garantindo tal condição.

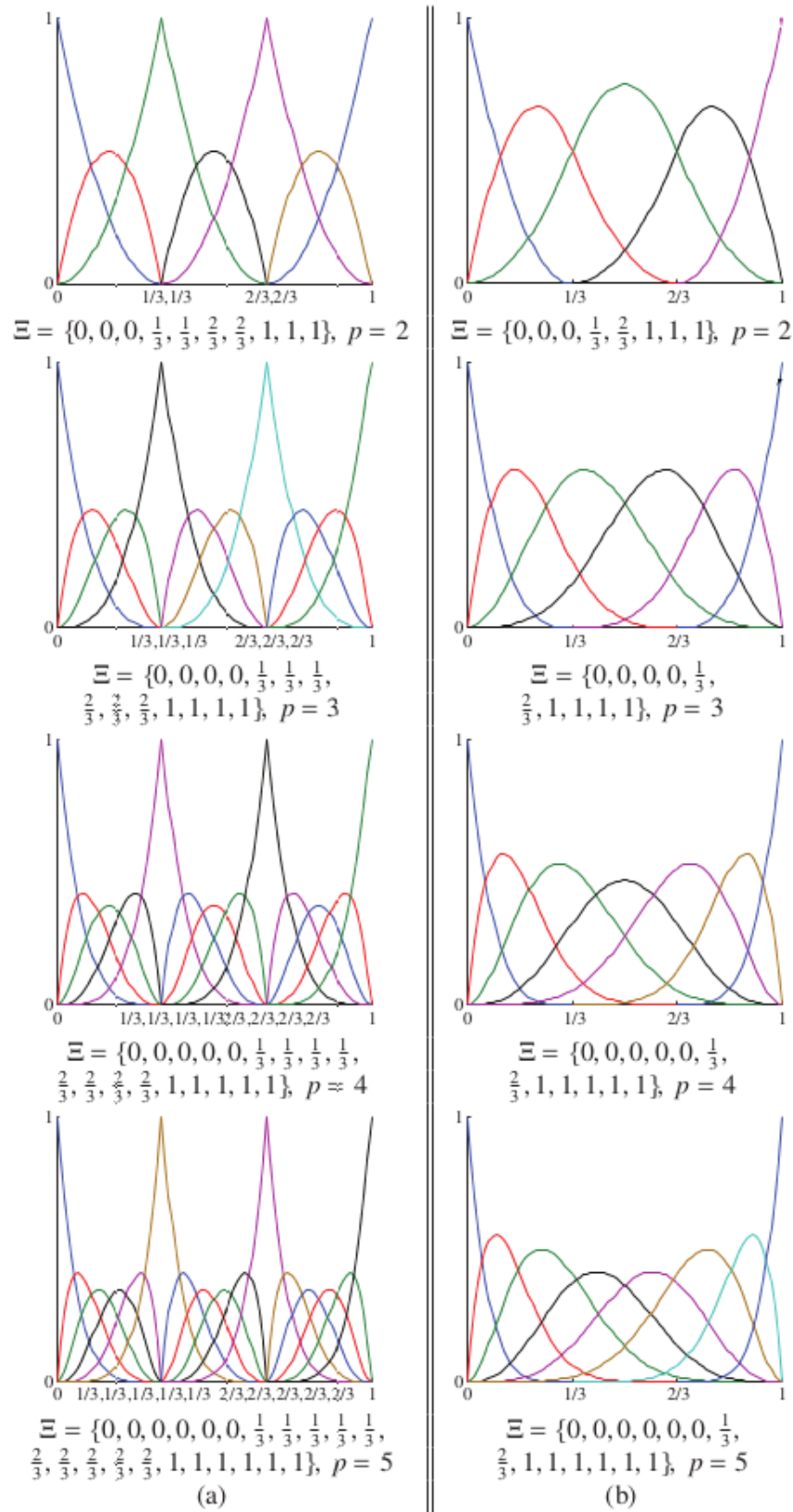


FIGURA 12 – a) REFINAMENTO p ISOGOMÉTRICO b) REFINAMENTO k
 Fonte: COTTRELL et al. (2007)

4 FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE

4.1 ELEMENTO DE BARRA

O problema de vibração axial de um elemento de barra (HUGHES, 1987; PETYT, 2010; ARNDT, 2009), mostrado na figura 13, apresenta hipóteses simplificadoras relacionadas ao material da barra e sua geometria. O material deve ser elástico linear e homogêneo e as seções transversais são normais ao eixo antes e após a deformação do material. A deformação da barra \bar{u} se dá ao longo do seu eixo e o problema consiste em encontrar \bar{u} de modo que satisfaça a equação diferencial:

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 0 \quad (23)$$

onde ρ é a massa específica do material, A a área da seção transversal da barra e E o módulo de elasticidade do material, ou módulo de Young.

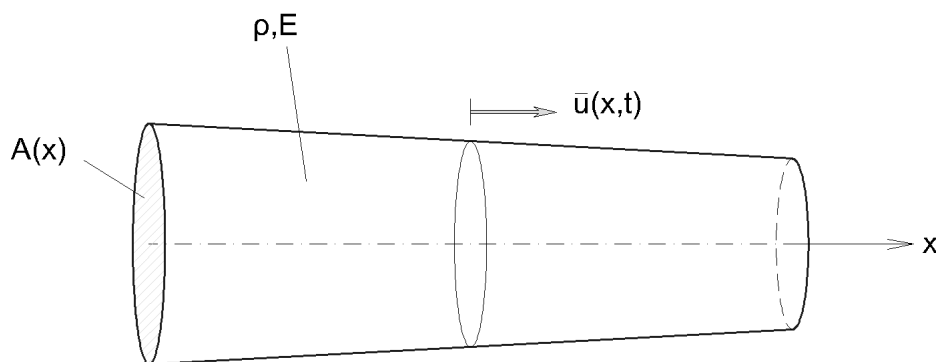


FIGURA 13 – ELEMENTO DE BARRA COM VIBRAÇÃO AXIAL

A formulação variacional deste problema é desenvolvida considerando o parâmetro tempo como variável independente e aplicando o método dos resíduos ponderados, onde uma função de ponderação w , independente do tempo, é inserida na equação diferencial. Os graus de liberdade são considerados desconhecidos, variam de acordo com o tempo e são determinados como solução de um sistema de equações diferenciais (CAREY; ODEN, 1984).

Aplicando o método dos resíduos ponderados na equação 23, tem-se:

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) w dx = 0. \quad (24)$$

Considerando os parâmetros ρ e E constantes e que a área da seção transversal A não varia ao longo da barra, integrando o segundo termo por partes, a equação 24 se transforma em:

$$\rho A \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx + EA \int_0^L \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - EA \left[w \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_0^L = 0. \quad (25)$$

O problema de vibração livre de um elemento de barra se transforma em um problema de autovalores com a substituição da solução analítica geral. Segundo Carey e Oden (1984) um problema de vibração livre apresenta solução analítica na forma:

$$\bar{u}(x, t) = e^{i\omega t} u(x) = ((\cos(\omega t) + i \cdot \text{sen}(\omega t)) u(x)). \quad (26)$$

Substituindo a equação 26 na equação 25, tem-se:

$$EA \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - EA \left[w \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_0^L - \lambda \rho A \int_0^L u w dx = 0. \quad (27)$$

Sob quaisquer imposições de condições de contorno o segundo termo da equação 27 se anula. O problema de autovalores é então dado por:

$$B(u, w) = \lambda F(u, w) \quad (28)$$

onde λ é o autovalor do problema e as $B(u, w)$ e $F(u, w)$ são formas bilineares dadas por:

$$B(u, w) = EA \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx, \quad (29)$$

$$F(u, w) = \rho A \int_0^L u w dx. \quad (30)$$

Quando é aplicado um método aproximado, o problema de vibração livre de barras

se transforma em um problema não exato. A equação 28 é então formada por funções aproximadoras para o deslocamento axial e para a ponderação da sentença.

Na forma discreta, a solução aproximada $u^h(x)$ é escrita da seguinte maneira:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j u_j \quad (31)$$

onde N é o número total de graus de liberdade, ϕ_j as funções de base globais utilizadas na aproximação e u_j são os graus de liberdade do problema. Admitindo que a função de ponderação e o deslocamento axial são dados pelas funções base de aproximação, a forma discreta do problema, para $i = 1, 2, \dots, N$ pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N \left(EA \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \right) u_j = \lambda^h \sum_{j=1}^N \left(\rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right) u_j. \quad (32)$$

A equação 32 pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{K}\phi^h = \lambda^h \mathbf{M}\phi^h \quad (33)$$

a qual representa o problema de autovalores generalizados. A resolução destes autovalores fornece as frequências naturais de vibração pela relação:

$$\omega^h = \sqrt{\lambda^h}. \quad (34)$$

Os modos de vibração relacionados com cada frequência são obtidos aplicando as coordenadas do autovetor ϕ^h na equação 31.

4.1.1 Resolução via MEF

As diferentes funções base utilizadas na aproximação do problema definem uma gama de métodos aproximados distintos. O elemento de barra com comprimento L é discretizado em elementos mestres de comprimento L_e . As matrizes de massa e rigidez locais são definidas

pela aplicação de funções de forma ψ^e no elemento mestre. Um elemento k_{ij}^e da matriz de rigidez e m_{ij}^e da matriz de massa no domínio do elemento mestre Ω_e é dado por:

$$k_{ij}^e = B(\psi_i, \psi_j) = EA \int_{\Omega_e} \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} dx, \quad (35)$$

$$m_{ij}^e = F(\psi_i, \psi_j) = \rho A \int_{\Omega_e} \psi_i^e \psi_j^e dx \quad (36)$$

onde ψ_i e ψ_j são as funções base definidas no elemento local.

4.1.1.1 Elemento Linear

Para um elemento de barra com dois nós, um em cada extremidade, e um grau de liberdade por nó, as funções base locais são lineares. A solução aproximada local para os deslocamentos é dada por:

$$u_{MEF}(\xi) = \psi_1^e(\xi) u_1 + \psi_2^e(\xi) u_2. \quad (37)$$

A equação 37 pode também ser escrita na forma matricial:

$$u_{MEF}(\xi) = \mathbf{N}^T \mathbf{q} \quad (38)$$

onde:

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1^e \quad \psi_2^e] \quad (39)$$

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2]. \quad (40)$$

Os parâmetros u_1 e u_2 são os deslocamentos axiais referentes a cada extremidade do elemento mestre. Considerando o domínio deste elemento $\Omega_e[0, 1]$ as funções ψ_1 e ψ_2 são polinômios de Lagrange de ordem 1, definidas por:

$$\psi_1(\xi) = 1 - \xi \quad \psi_2(\xi) = \xi \quad (41)$$

onde:

$$\xi = \frac{x}{L_e} \quad (42)$$

A precisão da solução pode ser melhorada através do aumento no número de elementos mestre (refinamento h) ou pelo aumento do grau polinomial das funções locais. As funções lineares ψ_1 e ψ_2 são idênticas às funções NURBS de grau 1 formadas do vetor $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$.

4.1.1.2 Elemento Cúbico

O aumento do grau polinomial em um elemento mestre de barra gera graus de liberdade nodais no interior do elemento. Além dos dois graus de liberdade de extremidade, as funções cúbicas geram mais dois nós no interior do elemento, cada qual com um grau de liberdade. A solução local aproximada para o elemento cúbico de barra é dada pela equação 38, onde os vetores \mathbf{N} e \mathbf{q} são dados por:

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \quad (43)$$

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1^e \quad \psi_2^e \quad \psi_3^e \quad \psi_4^e] \quad (44)$$

$$\psi_1^e = \frac{-9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \quad (45)$$

$$\psi_2^e = \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \quad (46)$$

$$\psi_3^e = \frac{-27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \quad (47)$$

$$\psi_4^e = \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \quad (48)$$

As funções ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 e ψ_4 são polinômios de Lagrange de grau 3. A figura 14 mostra a representação gráfica dos elementos mestre de barra linear e cúbico. O refinamento h para o elemento cúbico também se dá com o aumento do número de nós.

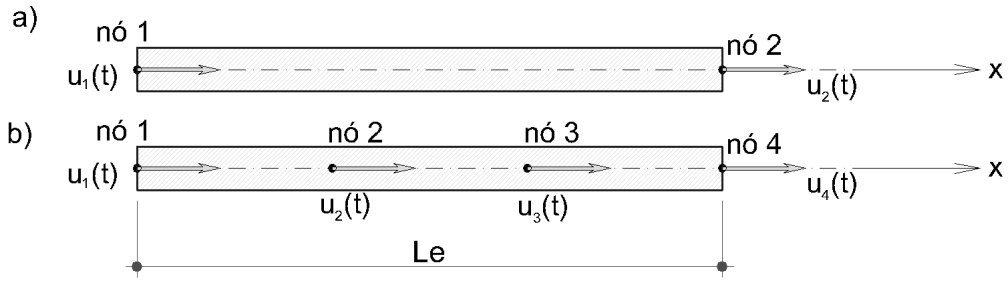


FIGURA 14 – a) ELEMENTO LINEAR DE BARRA b) ELEMENTO CÚBICO DE BARRA

4.1.2 Resolução via AIG

As funções NURBS que definem a AIG são aplicadas diretamente no elemento de barra com ausência de um elemento mestre. Se o domínio do elemento for definido $\Omega[0, L]$ e um conjunto de M funções NURBS de ordem p for construído a partir de um vetor de nós de controle aberto $\Xi = \{0, \dots, L\}$, a solução aproximada para os deslocamentos da barra é dada por:

$$u_{AIG}(x) = N_{1,p} u_1 + \sum_{i=2}^{M-2} N_{i,p} c_{i-1} + N_{M,p} u_M \quad (49)$$

onde $N_{1,p}, \dots, N_{M,p}$ são as funções NURBS geradas, u_1 e u_M os graus de liberdade nodais de extremidade e c_i são graus de liberdade de campo utilizados para enriquecer o espaço de funções de aproximação, porém sem valor nodal e sem significado físico.

A aproximação dada pela equação 49 só é válida quando não existem graus de liberdade nodais no interior do elemento de barra, ou seja, nenhum nó de controle interno é repetido p vezes. Supondo a existência de R nós de controle internos repetidos p vezes, deslocamentos u_1, \dots, u_R surgem na sentença da equação 49. Se existem C graus de liberdade de campo igualmente distribuídos entre os elementos isogeométricos, a solução aproximada para os deslocamentos é dada por:

$$u_{AIG}(x) = N_{1,p} u_1 + \sum_{i=2}^C N_{i,p} c_{i-1} + N_{C+1,p} u_2 + \dots + N_{i,p} u_R + \sum_{i=R+1+RC}^{R+1+(R+1)C} N_{i,p} c_{i-1} + N_{M,p} u_M \quad (50)$$

onde neste caso $M = R + 2 + (R + 1)C$.

Um elemento de barra unidimensional possui geometria simples. Portanto as formulações de aproximação geométrica exata gerada pela AIG são aqui desconsideradas e as funções NURBS são utilizadas apenas como funções base para aproximação numérica.

4.2 TRELIÇAS

Treliças são formadas pelo acoplamento entre diversos elementos de barra sujeitos apenas a esforços axiais. Portanto são válidas as formulações para elementos de barra anteriormente descritos.

Para o MEF e a AIG a solução aproximada de uma treliça é composta pelo acoplamento de matrizes globais provenientes da transformação de coordenadas de um sistema local em cada elemento de barra.

4.2.1 Solução via MEF

As barras de uma treliça são dispostas em ângulos diferentes onde os nós de extremidade de cada elemento são acoplados no sistema global. As matrizes locais de cada elemento de barra são idênticas à formulação de barra isolada descrita anteriormente. Dado um determinado ângulo γ o qual representa a rotação da barra com relação à horizontal, as coordenadas globais do elemento são projeções ortogonais dos vetores de deslocamento locais, as quais surgem de uma transformação linear \mathbf{T} , dada por:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}} \quad (51)$$

onde \mathbf{U} é o vetor de coordenadas locais, $\bar{\mathbf{U}}$ o vetor de coordenadas globais e \mathbf{T} é a transformação linear da rotação do elemento.

A figura 15 mostra uma barra rotacionada em γ com as respectivas coordenadas locais e globais, sendo que as coordenadas globais são projeções trigonométricas das coordenadas

locais. A equação 51 é expandida para:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (52)$$

onde

$$\cos(\gamma) = \frac{u_j - u_i}{Le} \quad (53)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{v_j - v_i}{Le} \quad (54)$$

$$Le = \sqrt{(u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2} \quad (55)$$

onde u_i, v_i são as coordenadas do nó global i e u_j, v_j são as coordenadas do nó global j . As matrizes de massa e rigidez globais de cada elemento são definidas por:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (56)$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad (57)$$

onde \mathbf{K}_G e \mathbf{M}_G são as matrizes de massa e rigidez globais do elemento, respectivamente, e \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes locais (BATHE, 1996).

4.2.2 Solução via AIG

Na formulação de estruturas de treliça são utilizados apenas os elementos de barra com nós nas extremidades. Como as funções NURBS podem formar funções de enriquecimento com graus de liberdade de campo, os graus de liberdade nodais são separados com o intuito de facilitar a imposição das condições de contorno na matriz de rigidez global. Os graus de liberdade de campo devem manter suas coordenadas originais no sistema global. A

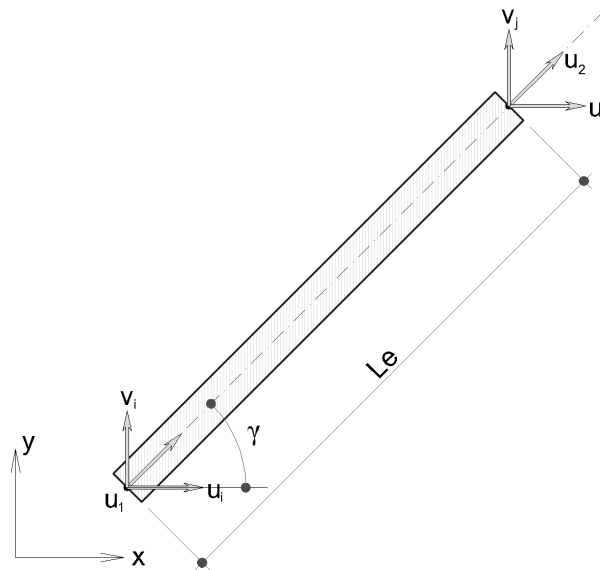


FIGURA 15 – TRANSFORMAÇÃO DE UM ELEMENTO DE TRELIÇA

transformação de coordenadas \mathbf{T} para a AIG é então dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (58)$$

onde u_1 e u_2 são os deslocamentos dos graus de liberdade nodais de extremidade, c_1, c_2, \dots são as contribuições provenientes dos graus de liberdade de campo e os pares (u_i, v_i) e (u_j, v_j) são as coordenadas referentes aos nós de extremidade no sistema global.

As matrizes de massa e rigidez globais da treliça aproximada pela AIG são também definidas pelas equações 56 e 57, respectivamente.

4.3 ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Viga de Euler-Bernoulli consiste em um elemento cujos deslocamentos se dão em sentido transversal ao eixo longitudinal da viga. Partindo das hipóteses segundo as quais a viga possui uma linha neutra, a seção transversal é plana e perpendicular ao eixo antes e depois da deformação, as tensões σ_y e σ_z não são consideradas, a inércia torcional da viga é desconsiderada e o material é linear, elástico e homogêneo, a equação diferencial que rege o fenômeno de vibração livre de um elemento de viga de Euler-Bernoulli é dada por (BATHE, 1996; PETYT, 2010):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

onde A é a área da seção transversal da viga, ρ a massa específica do material, E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal da viga. A figura 16 mostra um elemento de viga de maneira esquemática.

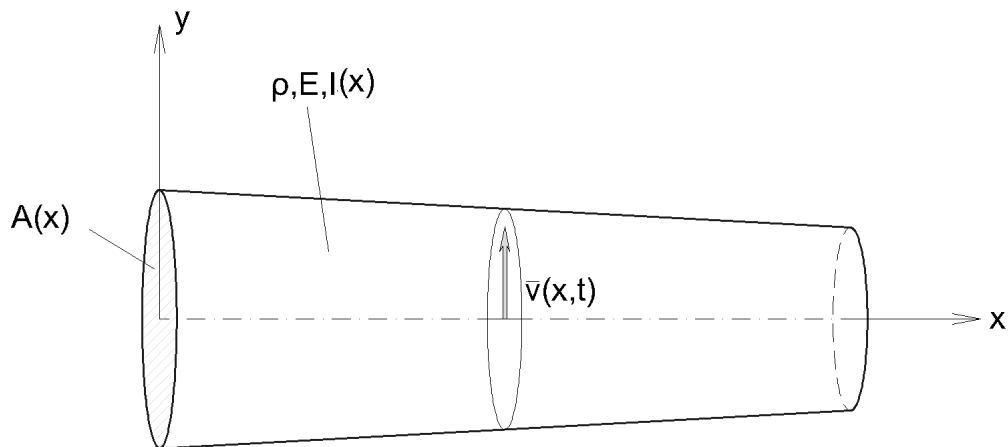


FIGURA 16 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI COM VIBRAÇÃO TRANSVERSAL

Assim como a formulação variacional do elemento de barra, o mesmo método é aplicado na equação 59 para a formulação do elemento de viga. Considerando a função de ponderação w independente do tempo, a sentença de resíduos ponderados é dada por:

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) w dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} w dx = 0. \quad (60)$$

Considerando que o módulo de elasticidade E , o momento de inércia I , a massa específica ρ e a área da seção transversal A não variam ao longo da viga e integrando o primeiro termo da equação 60 duas vezes, tem-se:

$$EI \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \rho A \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} w dx + \left[w EI \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} \right]_0^L - \left[EI \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right]_0^L = 0 \quad (61)$$

Os problemas de vibração livre admitem solução na forma:

$$\bar{v}(x, t) = e^{i\omega t} v(x) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) v(x) \quad (62)$$

transformando o problema de vibração livre da viga de Euler-Bernoulli em um problema de autovalores dado por:

$$EI \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \lambda \rho A \int_0^L v w dx + \left[w EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right]_0^L - \left[EI \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_0^L = 0. \quad (63)$$

O terceiro e o quarto termo da equação 63 se anulam devido às condições de contorno essenciais do problema, o qual pode ser simplificado para um problema de autovalores com formas bilineares dado por:

$$B(v, w) = \lambda F(v, w) \quad (64)$$

onde

$$B(v, w) = EI \int_0^L \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (65)$$

$$F(v, w) = \rho A \int_0^L v w dx. \quad (66)$$

A solução aproximada para os deslocamentos transversais da viga pode ser escrita na forma discreta como:

$$v^h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) v_j \quad (67)$$

onde ϕ_j são funções de base globais e v_j os deslocamentos transversais referentes aos graus de liberdade do problema. Substituindo a equação 67 na equação 64, para N graus de liberdade e utilizando as mesmas funções aproximadoras para v e w , tem-se:

$$\sum_{j=1}^N \left[EI \int_0^L \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \right] v_j = \lambda^h \sum_{j=1}^N \left[\rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right] v_j. \quad (68)$$

Matricialmente a equação 68 pode ser escrita sob a forma:

$$\mathbf{K} \phi^h = \lambda^h \mathbf{M} \phi^h \quad (69)$$

que é o problema de autovalores generalizados, com os mesmos significados físicos do elemento de barra.

4.3.1 Resolução via MEF

Uma viga com comprimento L a ser resolvido via MEF é dividido em elementos locais de comprimento L_e com dois graus de liberdade em cada nó de extremidade (figura 17). As matrizes de massa e rigidez locais são definidas pela aplicação das funções locais na equação 68:

$$k_{ij}^e = EI \int_{\Omega_e} \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} dx, \quad (70)$$

$$m_{ij}^e = \rho A \int_{\Omega_e} \psi_i \psi_j dx. \quad (71)$$

A família de funções que é capaz de expressar os graus de liberdade de deslocamento e rotação em um nó de um elemento de viga é a família dos polinômios de Hermite. Um método para gerar os polinômios de Hermite em um elemento de viga a partir dos polinômios

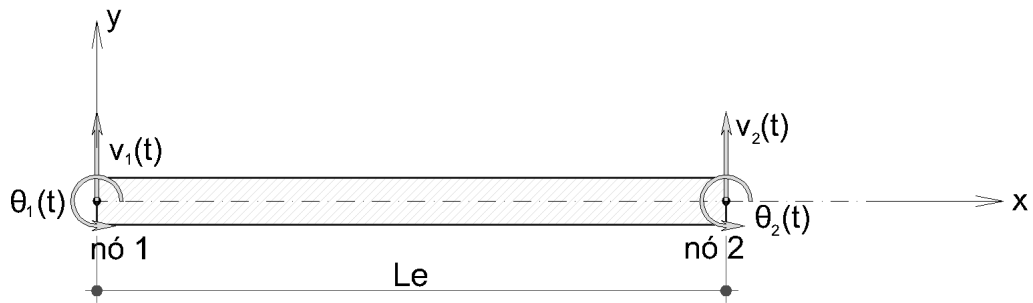


FIGURA 17 – ELEMENTO DE VIGA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE POR NÓ

de Lagrange foi apresentado por Augarde (1998), onde a interpolação das funções locais em um elemento é dada por:

$$v_{MEF} = \sum_{i=1}^{nnos} \left[H_{0i}^r v_i + H_{1i}^r \left(\frac{dv}{dx} \right)_i + \dots + H_{ri}^r \left(\frac{d^r v}{dx^r} \right)_i \right] \quad (72)$$

onde H_{ji}^r é um polinômio de Hermite de nível r relacionado ao i -ésimo nó e à j -ésima derivada de v . O índice r indica a ordem da maior derivada de v . O somatório é realizado no número total de nós, $nnos$.

Os polinômios de Hermite de nível $r = 1$ são construídos a partir dos polinômios de Lagrange L da seguinte forma:

$$H_{0i}^1 = [1 - 2(\xi - \xi_i L'_i(\xi_i))] [L_i(x)]^2 \quad (73)$$

$$H_{1i}^1 = (\xi - \xi_i) [L_i(x)]^2 \quad (74)$$

onde $L_i(\xi)$ é o polinômio de Lagrange de grau $(nnos - 1)$ definido no nó i , dado por:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{nnos} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (75)$$

e L'_i sua derivada primeira.

Para um elemento de viga com dois nós, um em cada extremidade, comprimento L_e

definido no domínio $\Omega_e(-1, 1)$, a solução aproximada para o elemento local é dada por:

$$v_{MEF} = \mathbf{N}^T \mathbf{q} \quad (76)$$

onde

$$\mathbf{q}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (77)$$

$$\mathbf{N}^T = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4] \quad (78)$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (79)$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{L_e}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (80)$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \quad (81)$$

$$\psi_4(\xi) = \frac{L_e}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3). \quad (82)$$

O elemento de viga local definido no intervalo $\Omega_e(-1, 1)$ tem coordenadas paramétricas definidas por:

$$\xi = \frac{2x}{L_e} - 1 \quad (83)$$

4.3.2 Resolução via AIG

As funções do tipo NURBS são incapazes de impor graus de liberdade de rotação para os nós de um elemento de viga. A aproximação do elemento de viga de Euler-Bernoulli via AIG é realizada com o elemento de viga com ausência de rotação, sendo que apenas os deslocamentos transversais são graus de liberdade (figura 18). Métodos para resolução do elemento de viga de Euler-Bernoulli com rotação livre foram desenvolvidos por Phaal e Calladine (1992a) e Engel et al. (2002), que comprovaram a não necessidade da inserção de graus de liberdade de rotação na formulação clássica do elemento de viga de Euler-Bernoulli, onde a imposição das condições de contorno restringe apenas os deslocamentos transversais. O elemento de viga com rotação livre tem a vantagem de descrever grandes deslocamentos. A utilização deste elemento considerando grandes deslocamentos foi feita por Zhou e Sze

(2013) para simular análise de cabos. Métodos para a resolução de elementos bidimensionais e tridimensionais com rotação livre foram desenvolvidas por Oñate e Zárate (2000) e Phaal e Calladine (1992b). As principais desvantagens da utilização do elemento de viga com rotação livre é a dificuldade na imposição das condições de contorno de rotação e a necessidade de uma aproximação para o campo de rotações baseada no campo de deslocamentos.

A solução aproximada para o elemento de viga pela AIG é portanto similar à solução apresentada na equação 46:

$$v_{AIG}(x) = N_{1,p} v_1 + \sum_{i=2}^{M-2} N_{i,p} c_{i-1} + N_{M,p} v_2 \quad (84)$$

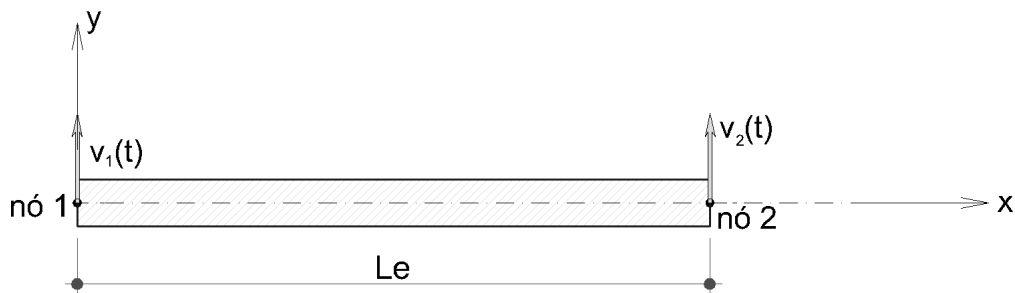


FIGURA 18 – ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI COM ROTAÇÃO LIVRE

4.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

A teoria do estado plano de tensões (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; REDDY, 1993) provém de uma simplificação do problema de elasticidade tridimensional. Este sistema estrutural pode ser um domínio bidimensional Ω quando sua espessura h é muito pequena se comparada com a dimensão de Ω . Esta simplificação admite que as forças que atuam neste sistema estrutural se aplicam no mesmo plano de Ω e não variam em função da espessura h . Considerando Ω definido no plano xy , o estado plano de tensões considera que:

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0. \quad (85)$$

A relação que rege o movimento de um elemento em estado plano de tensões em vibração livre é governada por um sistema de equações diferenciais, definidas por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (86)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \quad (87)$$

onde σ_x , σ_y são as tensões normais nas direções x e y, respectivamente, τ_{xy} é a tensão cisalhante no plano, ρ a massa específica do material e u e v são os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente (REDDY, 1993).

Segundo Bathe (1996), no estado plano de tensões, o vetor de tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} para um material isotrópico pode ser escrito em função das deformações ϵ_x , ϵ_y e ϵ_{xy} :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (88)$$

ou na forma matricial:

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon \quad (89)$$

onde a matriz \mathbf{C} é chamada de matriz de relações constitutivas do estado plano de tensões, E é o módulo de elasticidade do material e ν , o coeficiente de Poisson do material. As deformações são escritas em função dos deslocamentos \bar{u} e \bar{v} :

$$\epsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad (90)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; \quad (91)$$

$$2\epsilon_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (92)$$

Com as equações 90-92 o sistema de equações diferenciais governantes do problema pode ser reescrito em termos de u e v :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] = -\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \quad (93)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] = -\rho \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2}. \quad (94)$$

A forma fraca das equações 93 e 94 é obtida pela multiplicação de uma função de ponderação e pela integração por partes:

$$h \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial y} c_{33} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \rho w_1 \ddot{\bar{u}} \right] dx dy = 0, \quad (95)$$

$$h \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_2}{\partial x} c_{33} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \rho w_2 \ddot{\bar{v}} \right] dx dy = 0, \quad (96)$$

onde w_1 e w_2 são funções de ponderação e c_{11} , c_{12} e c_{33} são elementos da matriz \mathbf{C} , definidos por:

$$c_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (97)$$

$$c_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (98)$$

$$c_{33} = \frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)}. \quad (99)$$

Destaca-se que o método utilizado para encontrar a formulação fraca do problema dinâmico do estado plano de tensões é uma alternativa que utiliza apenas manipulações das equações diferenciais governantes e aplicação do método dos resíduos ponderados (REDDY, 1993). A formulação fraca deste problema é também desenvolvida por Bathe (1996) baseada no princípio dos trabalhos virtuais. Ambas formulações fornecem os mesmos resultados.

Aplicando às equações 95 e 96 a solução geral do problema de vibração livre dada por:

$$\bar{u}(x, y, t) = e^{i\omega t} u(x, y) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) u(x, y) \quad (100)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = e^{i\omega t} v(x, y) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) v(x, y) \quad (101)$$

o problema dinâmico do estado plano de tensões se transforma em um problema de autovalores dado por:

$$h \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_1}{\partial y} c_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy - \rho \lambda \int_{\Omega} w_1 u \, dx \, dy = 0, \quad (102)$$

$$h \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_2}{\partial x} c_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_2}{\partial y} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy - \rho \lambda \int_{\Omega} w_2 v \, dx \, dy = 0. \quad (103)$$

A solução aproximada para o deslocamento horizontal e vertical de um ponto no domínio Ω apresenta a seguinte forma discreta:

$$u^h = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j \quad (104)$$

$$v^h = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j \quad (105)$$

Considerando que os deslocamentos e as funções de ponderação são aproximados por um conjunto de funções ϕ_j com $j = 1, 2, \dots, N$, as equações 99 e 100 tomam a forma discreta dada por:

$$\sum_{j=1}^N \left[h \int_{\Omega} \left(c_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] u_j + \quad (106)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[h \int_{\Omega} \left(c_{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) dx dy \right] v_j - \sum_{j=1}^N \left[\rho \lambda h \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx dy \right] u_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N \left[h \int_{\Omega} \left(c_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + c_{12} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) dx dy \right] u_j + \quad (107)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[h \int_{\Omega} \left(c_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \right] v_j - \sum_{j=1}^N \left[\rho \lambda h \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx dy \right] v_j = 0.$$

O problema então se transforma no problema de autovalores generalizados dado por:

$$\mathbf{K} \Delta^h = \lambda^h \mathbf{M} \Delta^h \quad (108)$$

onde

$$\Delta^h = \begin{Bmatrix} u^h \\ v^h \end{Bmatrix}. \quad (109)$$

As matrizes de rigidez e massa do estado plano de tensões podem ser escritas na seguinte forma:

$$\mathbf{K} = h \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dx \, dy \quad (110)$$

$$\mathbf{M} = \rho h \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dx \, dy \quad (111)$$

onde a matriz \mathbf{H} contém as funções de forma do método considerado e a matriz \mathbf{B} as suas derivadas. As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{B} são definidas como:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_N & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_N \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{H} \quad (113)$$

onde a matriz \mathbf{T} é uma matriz de operadores derivada dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (114)$$

4.4.1 Resolução via MEF

A solução para o problema dinâmico de estado plano com o MEF é obtida com a utilização de elementos triangulares ou retangulares definidos em um domínio local Ω_e . Os graus de liberdade são definidos nos vértices das figuras, sendo que cada ponto possui dois graus de liberdade: um grau de translação horizontal e um grau de translação vertical. A figura 19 mostra o exemplo gráfico de um elemento local triangular e retangular.

4.4.1.1 Elemento Triangular

As funções de forma para o elemento triangular são desenvolvidas por Reddy (1993), definindo planos cujas equações são dadas por:

$$\psi_i = \frac{1}{2A_e}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (115)$$

onde:

$$a_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad (116)$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad (117)$$

$$c_1 = -x_2 + x_3 \quad (118)$$

$$a_2 = -x_1 y_3 + y_1 x_3 \quad (119)$$

$$b_2 = -y_1 - y_3 \quad (120)$$

$$c_1 = x_1 - x_3 \quad (121)$$

$$a_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad (122)$$

$$b_3 = y_1 - y_2 \quad (123)$$

$$c_3 = -x_1 + x_2 \quad (124)$$

e A_e é a área do elemento triangular.

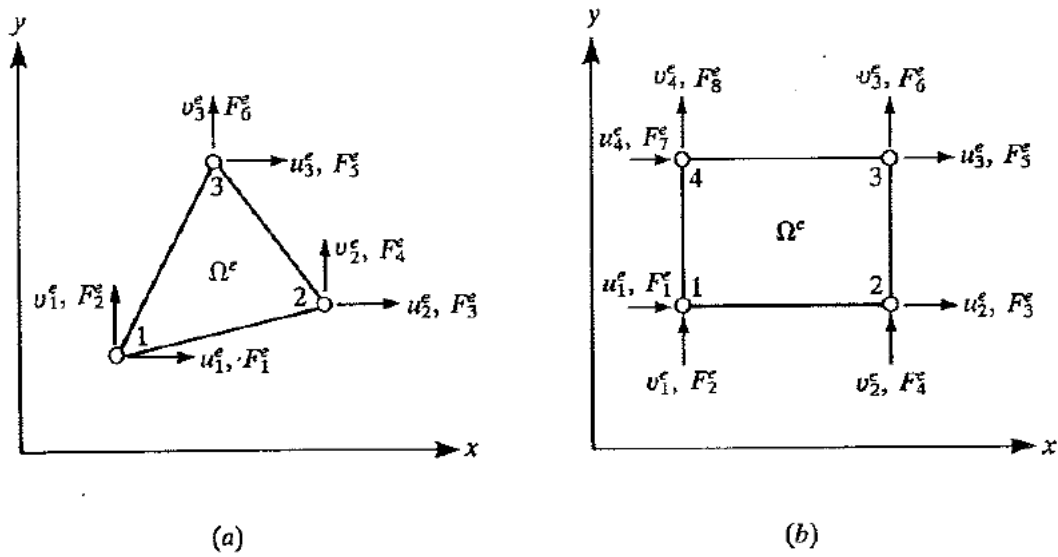


FIGURA 19 – a) ELEMENTO TRIANGULAR BIDIMENSIONAL b) ELEMENTO RETANGULAR BIDIMENSIONAL

Adaptado de: REDDY (1993)

O conjunto de funções de forma definidas pela equação 115 definem planos onde são válidas as propriedades do delta de Kronecker, ou seja:

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3 \quad (125)$$

gerando graus de liberdade nodais em cada vértice.

4.4.1.2 Elemento Retangular

As funções de forma definidas em um elemento retangular são bilineares, possuem comportamento quadrático no domínio do elemento e comportamento linear no seu contorno. O conjunto das funções de forma para o elemento retangular de base a e altura b é dado por:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} \\ \frac{xy}{ab} \\ \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \\ 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \quad (126)$$

As funções definidas pela equação 126 garantem graus de liberdade nodais em cada

vértice do retângulo.

4.4.2 Resolução via AIG

As matrizes de massa e rigidez do problema de estado plano de tensões via AIG são definidas diretamente de maneira global, e as funções de forma delimitadas no domínio físico do problema. Dado os vetores de nós de controle abertos relativos a cada eixo coordenado $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{N+p+1}\}$ e $H = \{\eta_1, \dots, \eta_{M+p+1}\}$ e grau polinomial p , a matriz de funções de forma \mathbf{H} é dada por:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} N_{1,1:p}^{\sim} & 0 & N_{1,2:p}^{\sim} & 0 & \dots & N_{N,M:p}^{\sim} & 0 \\ 0 & N_{1,1:p}^{\sim} & 0 & N_{1,2:p}^{\sim} & \dots & 0 & N_{N,M:p}^{\sim} \end{bmatrix}. \quad (127)$$

onde $N_{i,j:p}^{\sim}$ é a equação da superfície B-Spline dada pela equação 18.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos apresentados a seguir foram desenvolvidos com a utilização da linguagem FORTRAN 95, utilizando integração por quadratura gaussiana com $p + 1$ pontos aplicados em cada elemento isogeométrico. Os autovalores e autovetores foram determinados com a utilização da rotina DGEGV do pacote LAPack (*Linear Algebra Pack*).

5.1 ELEMENTOS DE BARRA

5.1.1 Barra Fixa-Livre

A solução analítica do elemento de barra fixa-livre (figura 20) foi desenvolvida por Petyt (2010). As frequências naturais de vibração e seus respectivos modos para uma barra com comprimento L , módulo de elasticidade E , área da seção transversal A e massa específica ρ são dadas por:

$$\omega_r = \frac{(2r-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (128)$$

$$u_r(x) = a \operatorname{sen} \left(\frac{(2r-1)\pi x}{2L} \right). \quad (129)$$

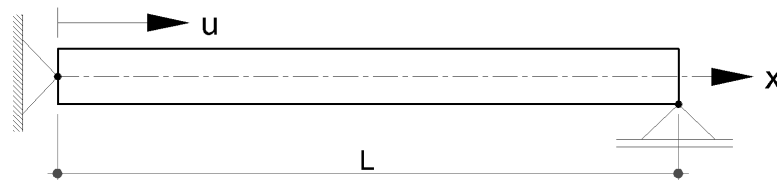


FIGURA 20 – BARRA FIXA-LIVRE

5.1.1.1 Espectro de Frequências

Análises comparativas do MEF com a AIG foram desenvolvidas por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) e Cottrell, Bazilevs e Hughes (2009), demonstrando a precisão da AIG sobre o MEF utilizando polinômios quadráticos para elementos de barra. Resultados idênticos foram desenvolvidos por Rauen, Machado e Arndt (2013a) que também compararam as taxas de convergência da AIG com o refinamento h do MEF para elemento linear e cúbico e com o refinamento p do MEF.

A expansão destes resultados foi desenvolvida por Rauen, Machado e Arndt (2013b) que determinaram o espectro de frequências para a AIG e para o MEF polinomial até grau $p = 10$ e compararam as taxas de convergência da AIG com os métodos enriquecidos. A figura 21 mostra o espectro de frequências do MEF polinomial e a figura 22 mostra o espectro para o refinamento k da AIG, ambas com grau $p = 1$ até $p = 10$. Neste espectro, a frequência natural de vibração aproximada ω^h , normalizada com a respectiva frequência analítica ω , é plotada em função do número do modo n correspondente normalizado com o número total de graus de liberdade N . Os modelos consideram todos os parâmetros unitários, isto é, $E = 1N/m^2$, $A = 1m^2$, $\rho = 1kg/m^3$ e $L = 1m$.

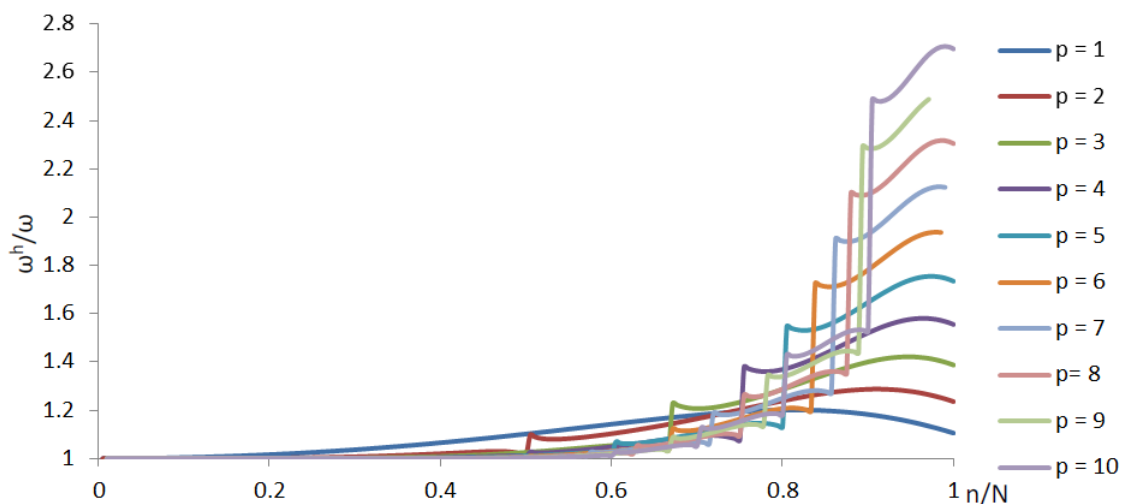


FIGURA 21 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE DESENVOLVIDA EM MEF POLINOMIAL

Fonte: RAUEN; MACHADO; ARNDT (2013b)

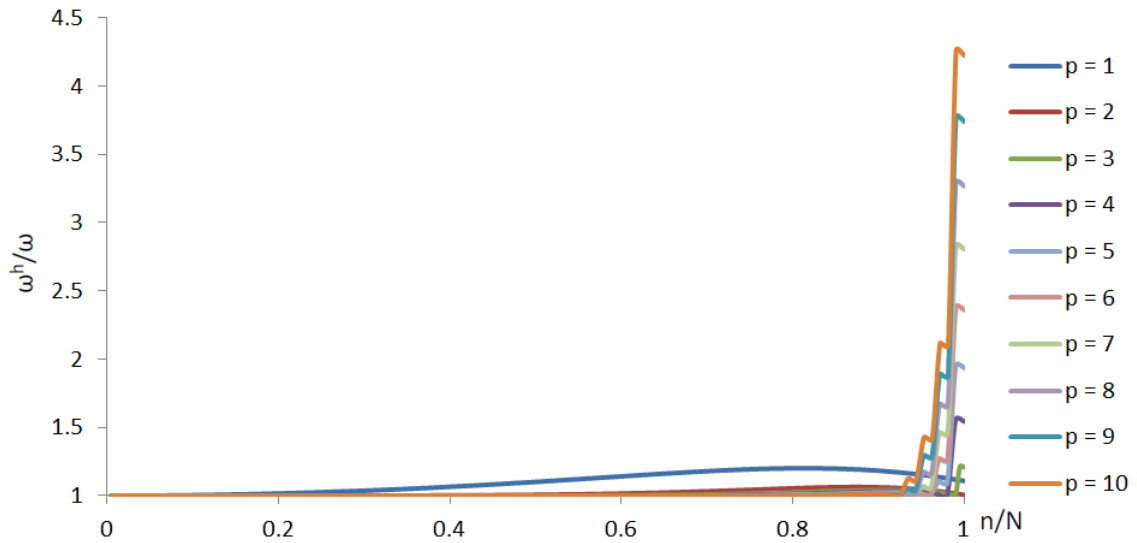


FIGURA 22 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE DESENVOLVIDA EM AIG
 Fonte: RAUEN; MACHADO; ARNDT (2013b)

A figura 21 mostra uma descontinuidade no espectro de frequências do MEF que delimita um ramo acústico para $\frac{n}{N} < 0.5$ e um ramo óptico para $\frac{n}{N} > 0.5$ na curva referente ao MEF quadrático (COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009). Estas descontinuidades se deslocam em função do grau polinomial e o erro na região óptica também aumenta em função do grau polinomial. O espectro da AIG apresenta descontinuidades apenas na região das últimas frequências, sendo que aproximadamente 95% da amostra apresenta a razão de frequências muito próxima da ideal. Ambos os problemas foram desenvolvidos para um número total de 100 graus de liberdade, porém o comportamento das curvas no espectro não depende do número de graus de liberdade (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL ET AL., 2007; COTTRELL; BAZILEVS; HUGHES, 2009). Uma comparação mais clara entre os espectros do MEF e da AIG para grau polinomial $p = 5$ é mostrada na figura 23.

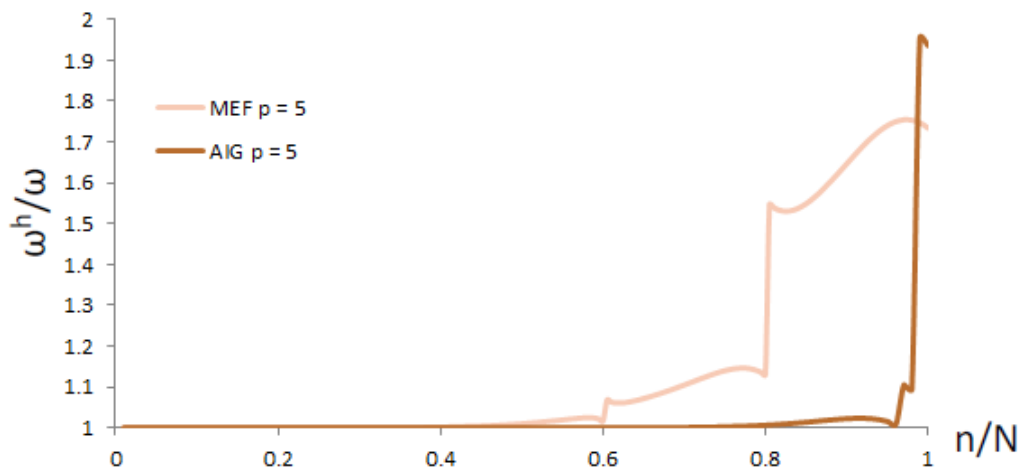


FIGURA 23 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA BARRA FIXA-LIVRE EM MEF E AIG PARA $P = 5$

Recentemente Arndt e Machado (2013) desenvolveram a análise do elemento de barra fixa-livre com a utilização do MEFG e do refinamento p do MEF utilizando polinômios k -ortogonais (figura 24). Os espectros do MEF linear e do MEFG foram comparados com os do MEF utilizando polinômios de Lobatto até ordem 5. Com excessão do MEF linear todos os espectros apresentaram descontinuidades com aumento do erro relativo. Houve uma coincidência nas curvas do espectro do MEFG e do MEF com polinômio de Lobatto de ordem 5.

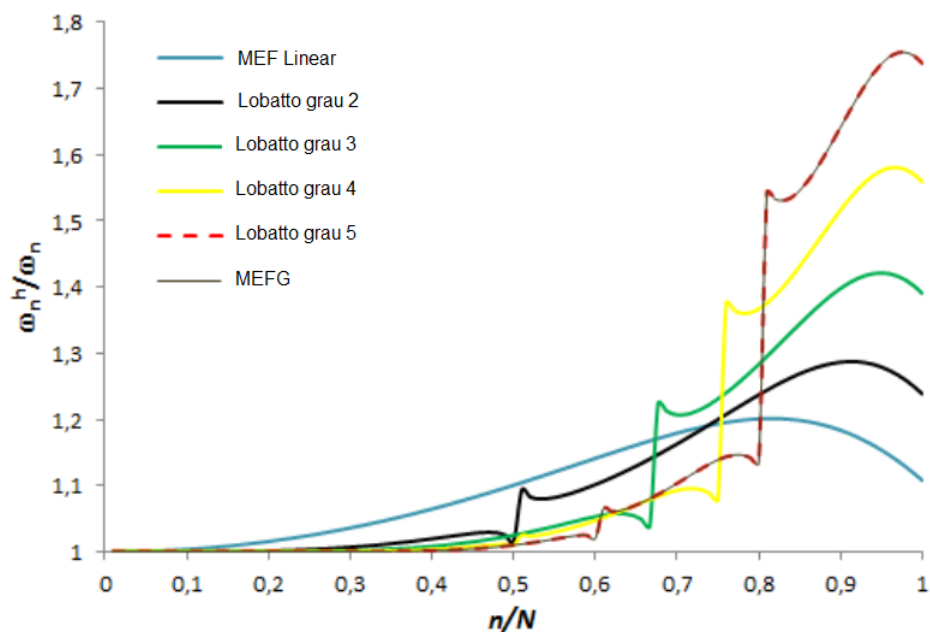


FIGURA 24 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS PARA BARRA FIXA-LIVRE DO MEF LINEAR, MEFG E MEF COM POLINÔMIOS DE LOBATTO ATÉ ORDEM 5

Adaptado de: ARNDT E MACHADO (2013)

5.1.1.2 Taxas de Convergência

As taxas de convergência da AIG foram testadas no elemento de barra fixa-livre para os refinamentos p e k e comparadas com os resultados obtidos por Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2011) para o MEF e os métodos enriquecidos. As figuras 25,26,27,28,29 e 30 mostram as taxas de convergência dos 6 primeiros autovalores, respectivamente, da versão p e k da AIG em comparação com os resultados de Arndt (2009) para o refinamento h do MEF com elemento linear e cúbico, refinamento p do MEF, Método Composto (MC), Método dos Modos Admissíveis (MMA) e o Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG). O erro percentual dos autovalores é plotado em função do número total de graus de liberdade.

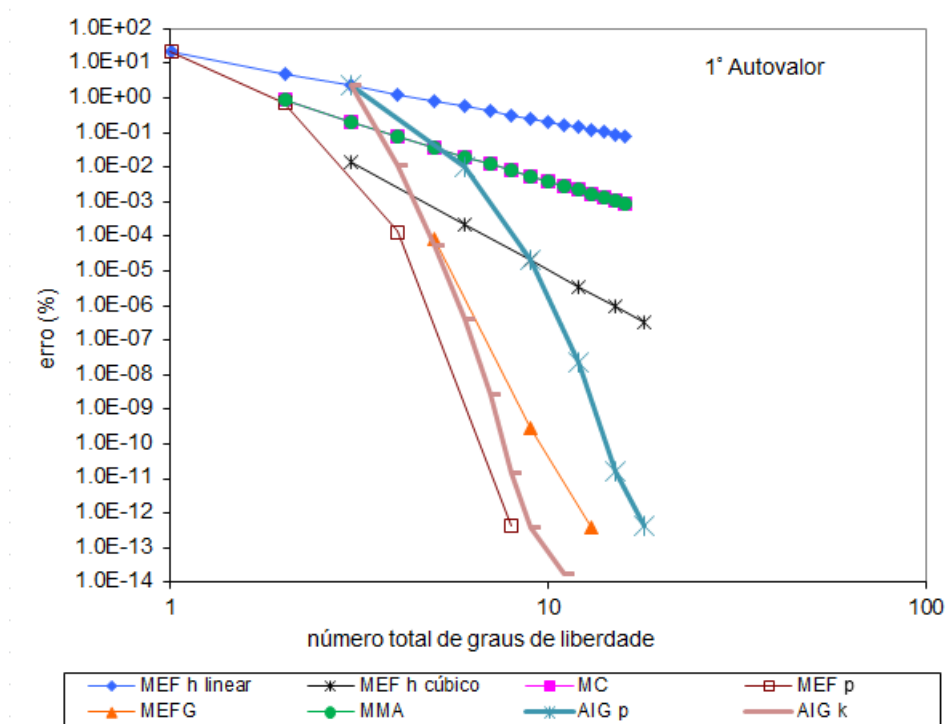


FIGURA 25 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

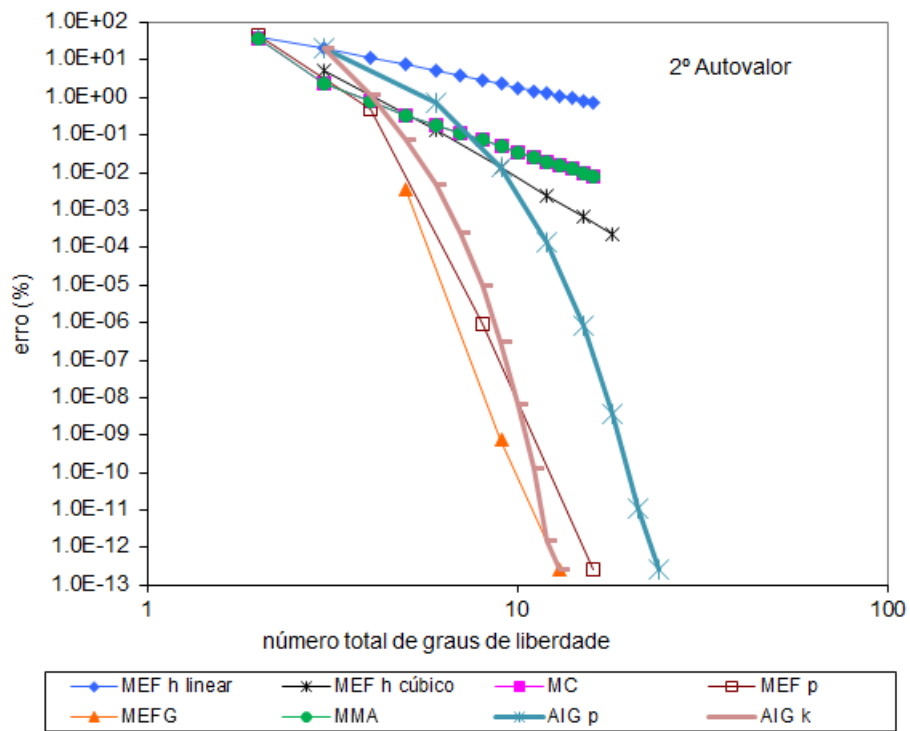


FIGURA 26 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

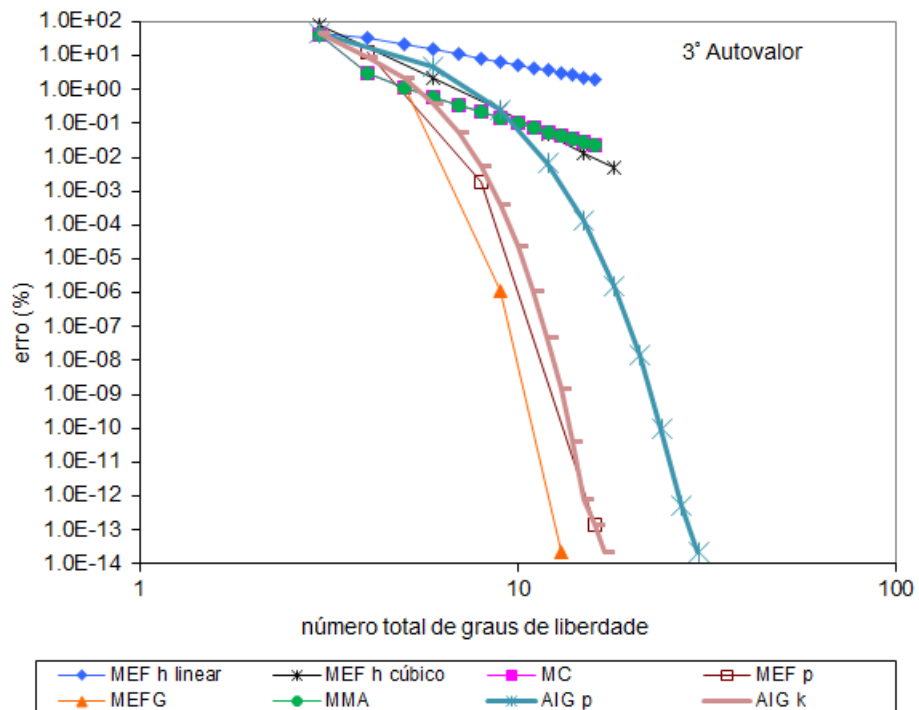


FIGURA 27 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

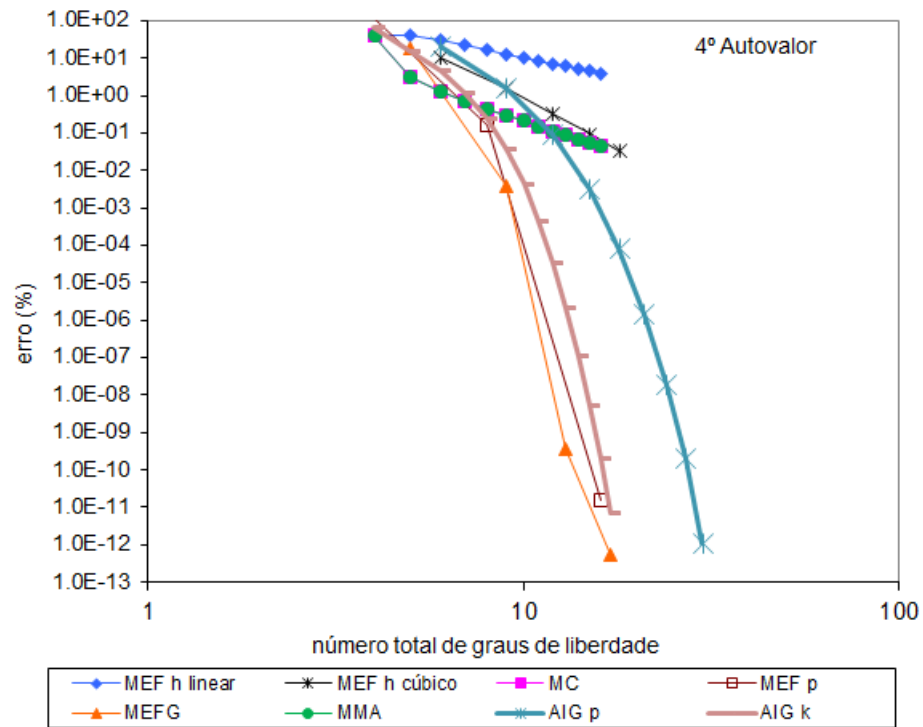


FIGURA 28 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

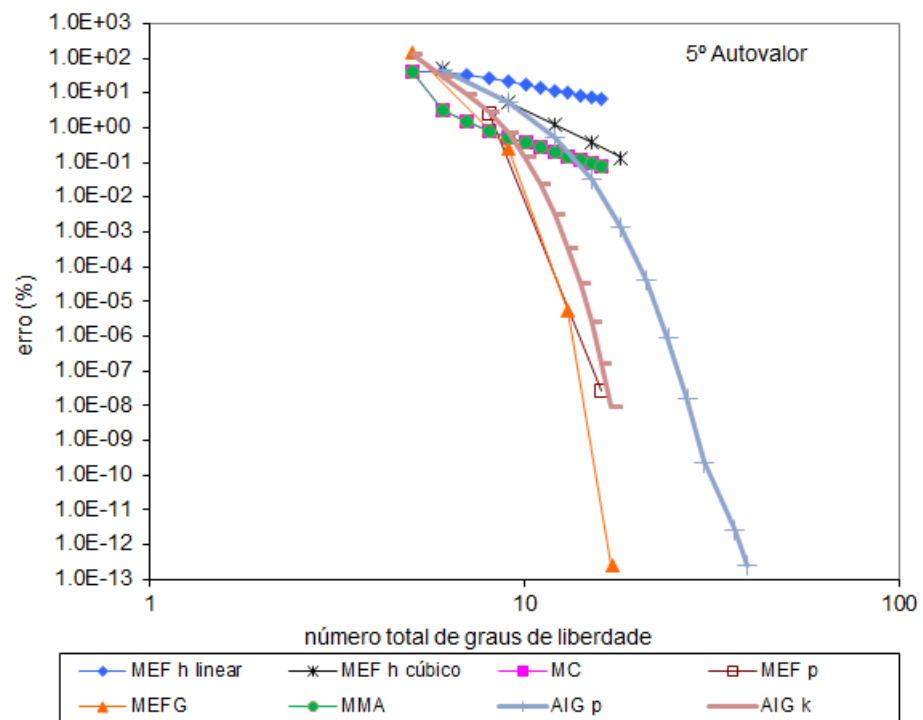


FIGURA 29 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUINTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

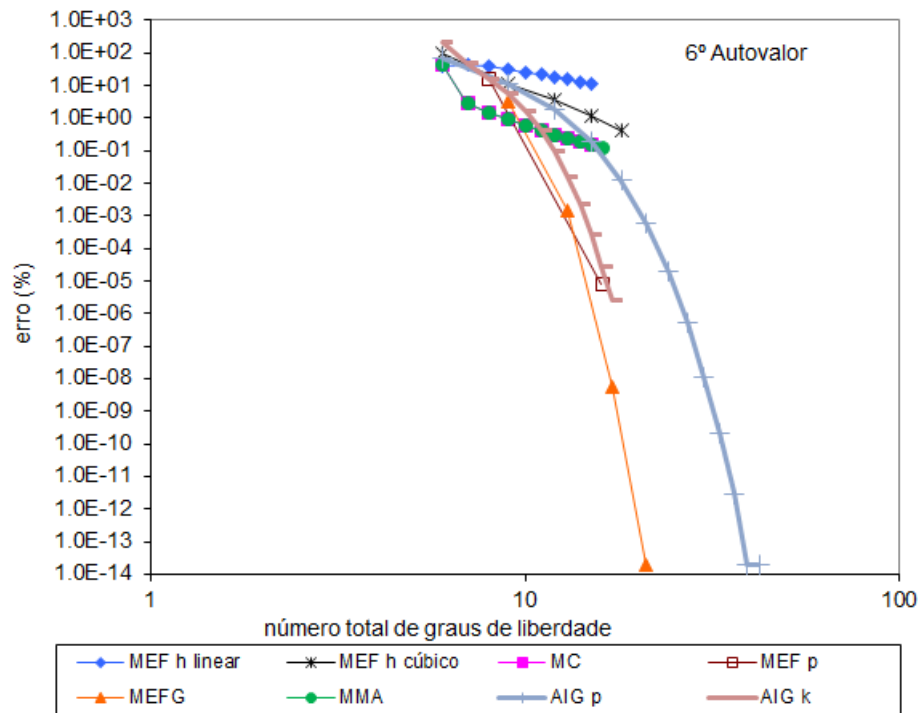


FIGURA 30 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEXTO AUTOVALOR DA BARRA FIXA-LIVRE

A AIG se mostra superior ao MEF h, ao MC e ao MMA em termos de taxa de convergência e precisão para todos os autovalores apresentados. Apesar de manter uma taxa estável no decorrer dos autovalores e muito próxima aos resultados do MEF p e do MEFG, os resultados da AIG para ambos os refinamentos mostram-se menos precisos do que do MEF p e os do MEFG.

5.1.1.3 Modos de Vibração

Os 4 primeiros modos de vibração da barra fixa-livre desenvolvidos pela Análise Isogeométrica com grau polinomial $p = 5$ e 40 graus de liberdade, são mostrados nas figuras 31,32,33 e 34. Os deslocamentos axiais relativos são normalizados entre $u = 1$ e $u = -1$. Para este número de graus de liberdade os modos determinados numericamente coincidem com a solução analítica dos modos de vibração.

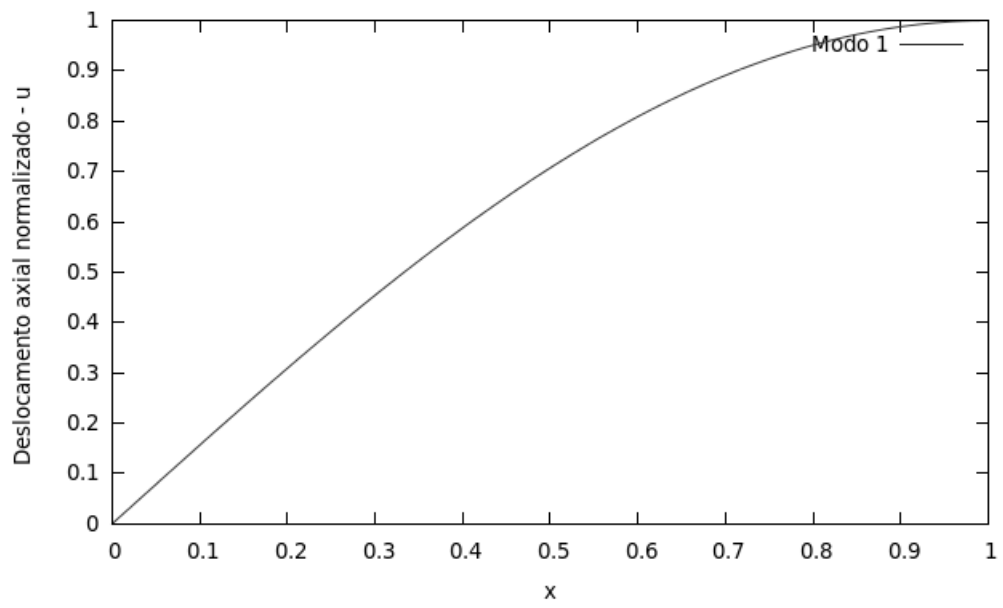


FIGURA 31 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG

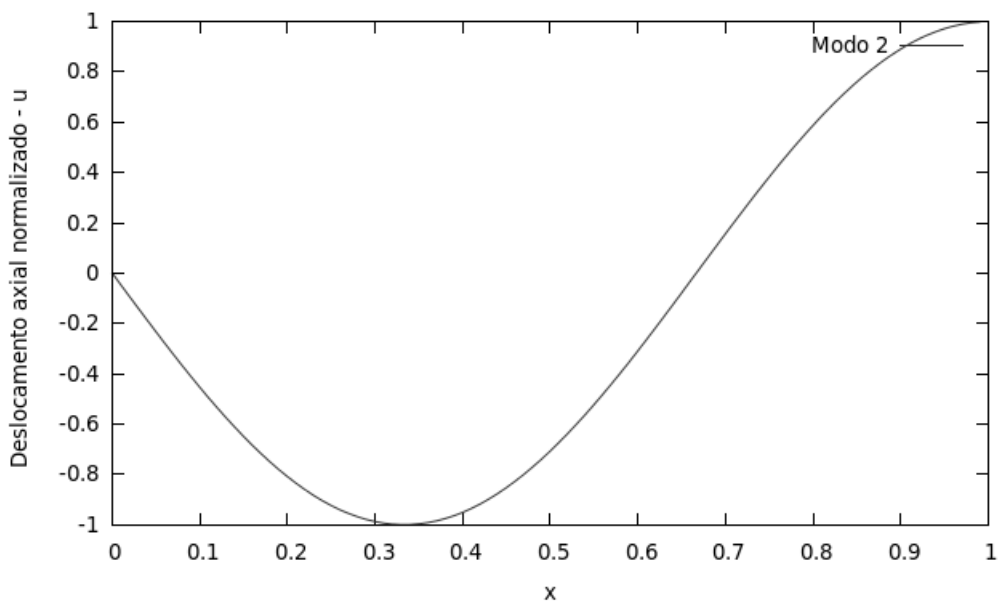


FIGURA 32 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG

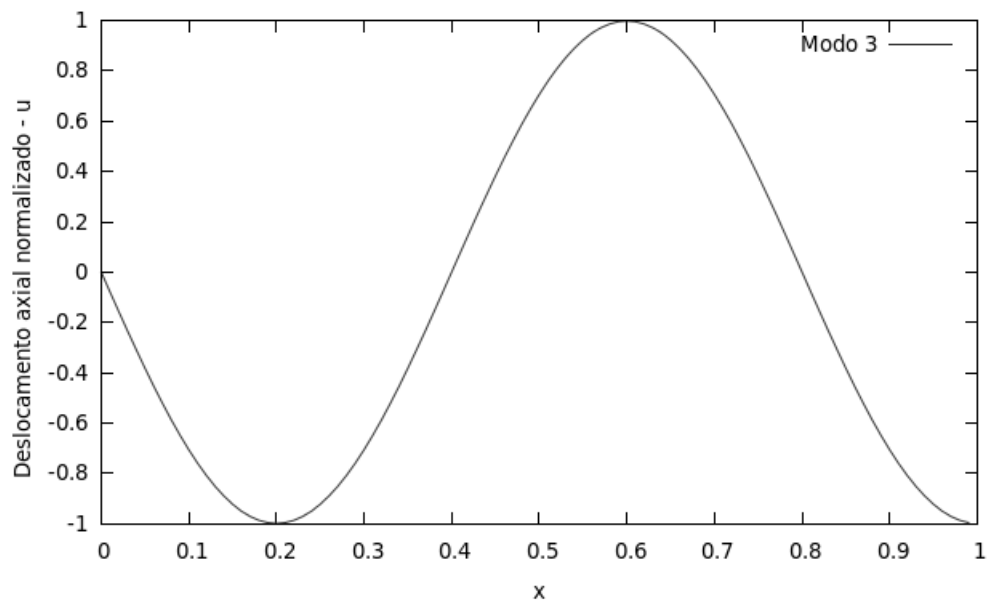


FIGURA 33 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG

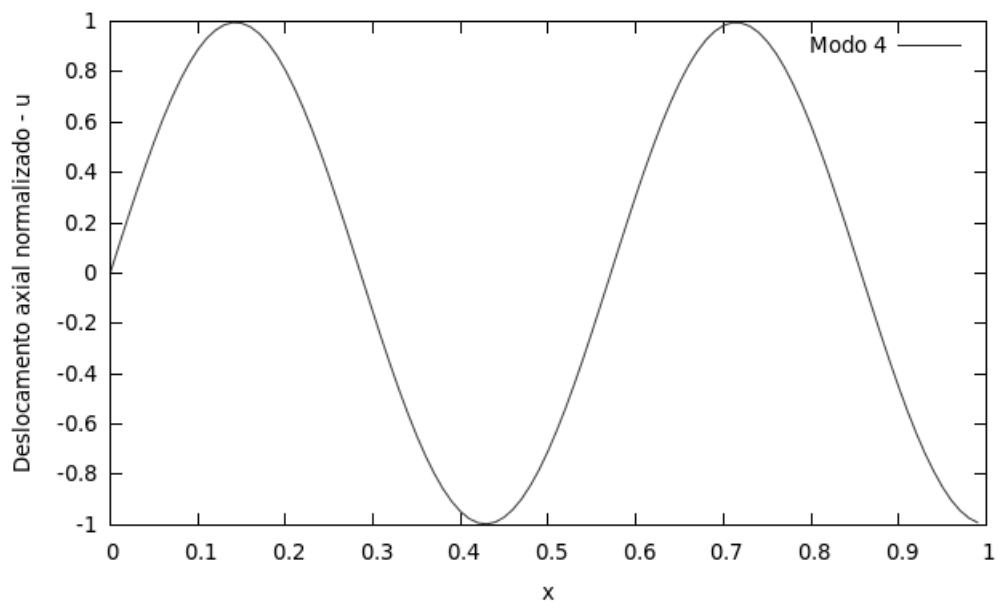


FIGURA 34 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE EM AIG

5.1.2 Barra Fixa-Fixa

A barra fixa em duas extremidades (figura 35) com comprimento L , massa específica ρ , módulo de elasticidade E e área da seção transversal A possui solução analítica dada por:

$$\omega_r = \frac{r\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (130)$$

$$u_r(x) = a \operatorname{sen} \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \quad (131)$$

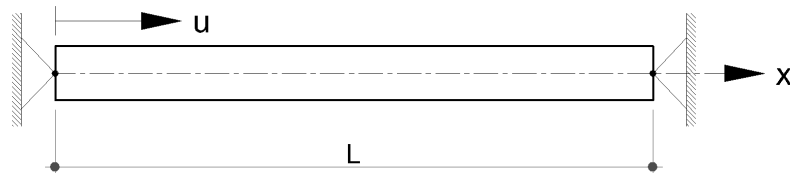


FIGURA 35 – BARRA FIXA-FIXA

Os resultados tanto do espectro de frequências quanto das taxas de convergência são idênticos aos resultados da barra fixa-livre. Os resultados das taxas de convergência da barra fixa-fixa para os métodos enriquecidos e o MEFG também são idênticos aos da barra fixa-livre (ARNDT, 2009).

5.1.2.1 Frequências Naturais de Vibração

A tabela 2 mostra os resultados das frequências naturais de vibração da barra fixa-fixa em comparação com a solução analítica, utilizando o refinamento k da AIG para polinômios de grau 3,5 e 7. Os parâmetros E, A, ρ e L são novamente considerados todos unitários. O número total de graus de liberdade (ngl) é respectivamente 10,11 e 12.

TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA DESENVOLVIDAS EM AIG EM COMPARAÇÃO COM A SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Sol. Analítica	AIG $p=3$ (ngl=10)	AIG $p=5$ (ngl=11)	AIG $p=7$ (ngl=12)
3.14159265	3.14159275	3.14159265	3.14159265
6.28318531	6.28320015	6.28318548	6.28318531
9.42477796	9.42509624	9.42478771	9.42477838
12.5663706	12.569479932	12.56657257	12.56638899
15.7079633	15.727253888	15.71038212	15.70837267
18.8495559	18.934062081	18.87043465	18.85515812
21.9911485	22.254313109	22.13306448	22.03413635
25.1327412	25.729889079	25.77150517	25.22368751
28.2743339	33.993441128	28.27624204	30.28206566
31.4159265	34.658933605	44.21390430	32.15295802

Os resultados mostram a convergência ocorrendo nas primeiras frequências enquanto as últimas passam por uma oscilação no erro relativo. Esta oscilação ocorre em função da posição do número do modo no espectro de frequências mostrado na figura 22. A décima frequência, por exemplo, encontra-se com o maior erro no desenvolvimento em $p = 3$, em $p = 5$ os erros nesta região aumentam ainda mais e em $p = 7$ esta frequência já encontra-se fora da região com os maiores erros.

5.1.2.2 Modos de Vibração

Os 4 primeiros modos de vibração da barra fixa-fixa são mostrados através das figuras 36,37,38 e 39.

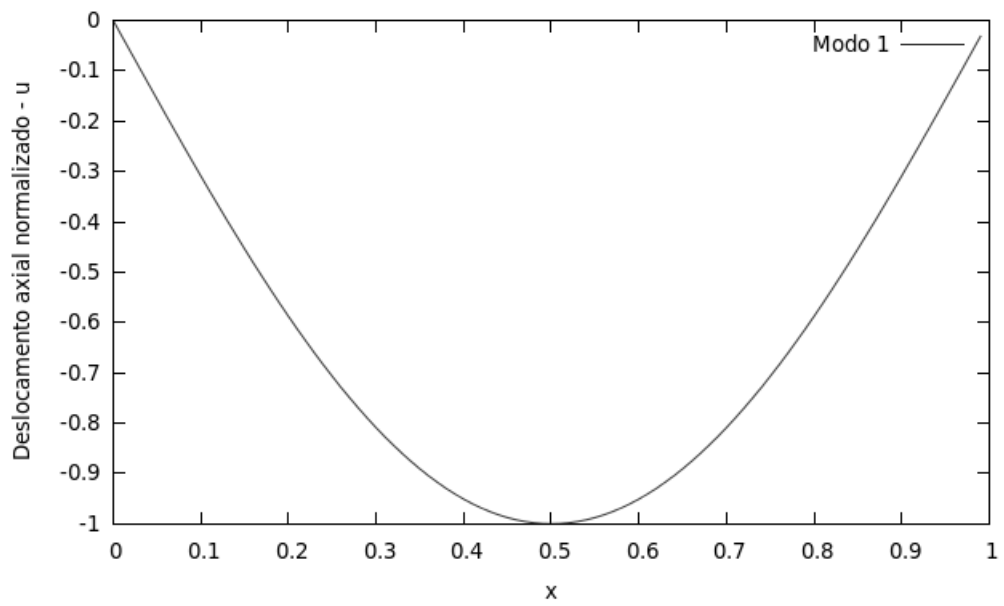


FIGURA 36 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG

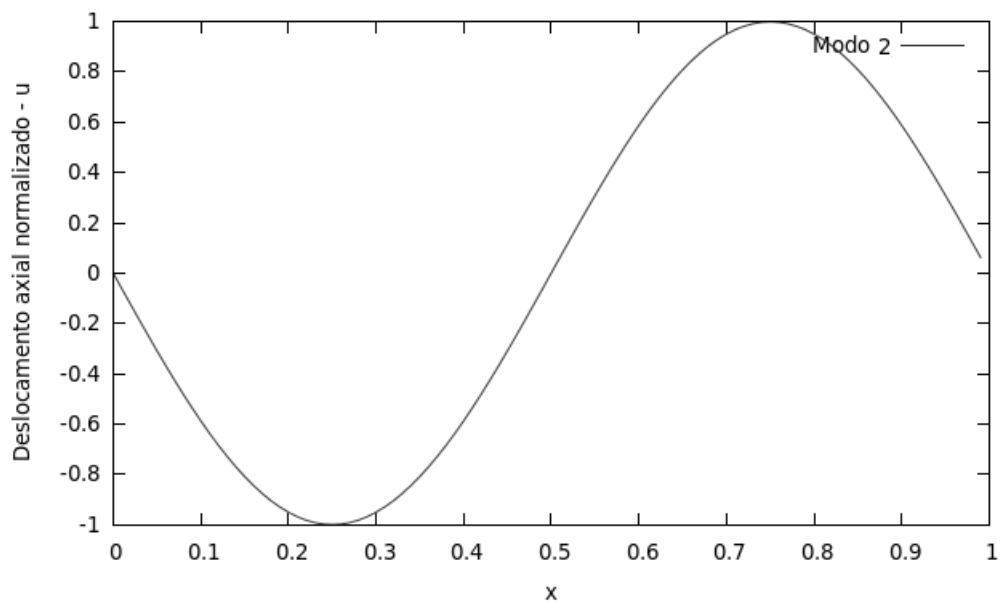


FIGURA 37 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG

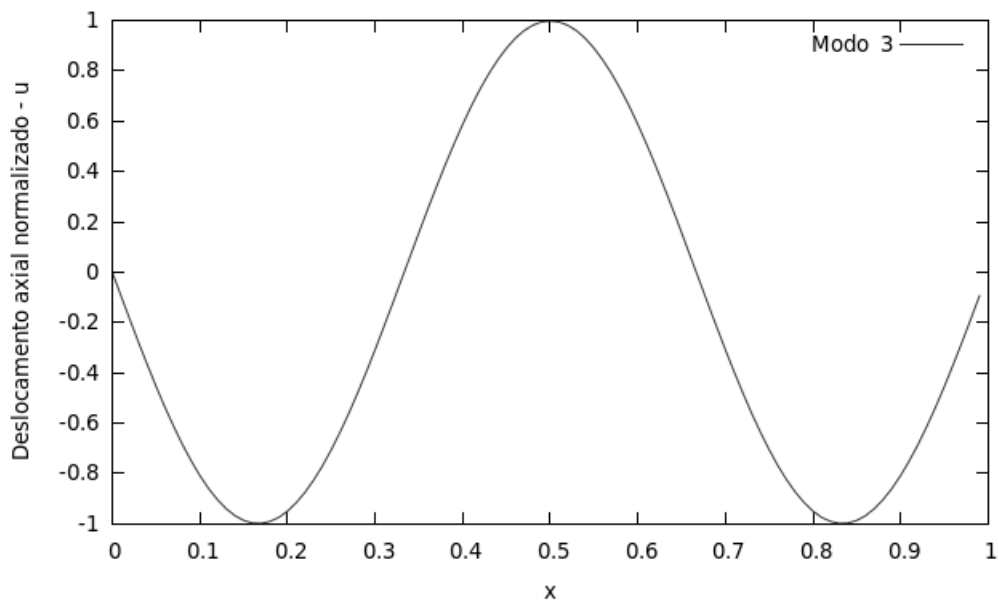


FIGURA 38 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG

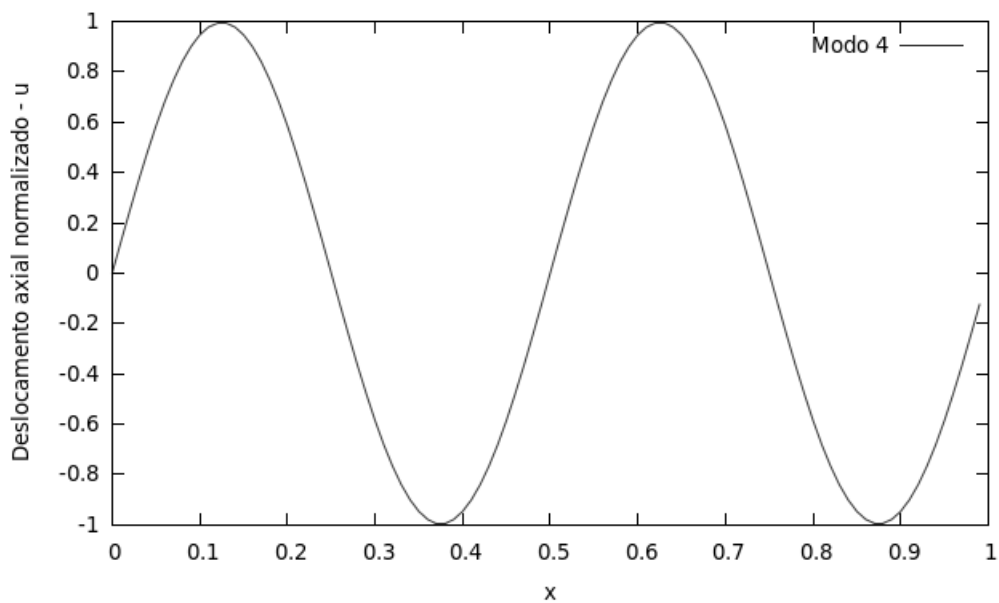


FIGURA 39 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-FIXA EM AIG

5.1.3 Barra Fixa-Livre com Variação Abrupta de Seção e Material

O elemento considerado de barra fixa-livre com variação abrupta de seção e material (figura 40) possui comprimentos $L_1 = L_2$, módulos de elasticidade $E_1 = 2E_2$, área da seção transversal $A_1 = 2A_2$ e massa específica $\rho_1 = 8\rho_2$. Neste problema cada parte diferente da

barra é dividida em sistemas de coordenadas locais x_1 e x_2 , cada qual com seu deslocamento axial u_1 e u_2 . O problema possui solução geral na forma:

$$u_1(x_1) = b_1 \text{sen}(\kappa_1 x_1) + b_2 \text{cos}(\kappa_1 x_1) \quad (132)$$

$$u_2(x_2) = b_3 \text{sen}(\kappa_2 x_2) + b_4 \text{cos}(\kappa_2 x_2) \quad (133)$$

$$\kappa_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \quad (134)$$

$$\kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \quad (135)$$

com condições de contorno:

$$u_1(0) = 0 \quad (136)$$

$$u_1(L_1) = u_2(0) \quad (137)$$

$$E_2 A_2 \frac{du_2(L_2)}{dx_2} = 0 \quad (138)$$

$$E_1 A_1 \frac{du_1(L_1)}{dx_1} = E_2 A_2 \frac{du_2(0)}{dx_2}. \quad (139)$$

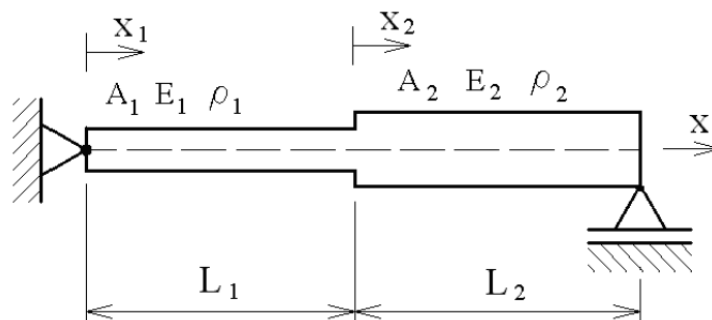


FIGURA 40 – BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO ABRUPTA DE SEÇÃO E MATERIAL

Fonte: ARNDT (2009)

As condições de contorno aplicadas às soluções gerais do problema, fornecem a equação das frequências definida como:

$$\frac{E_1 A_1 \kappa_1 \cos(\kappa_1 L_1) \cos(\alpha \kappa_1 L_2) - \alpha E_2 A_2 \kappa_1 \operatorname{sen}(\kappa_1 L_1) \operatorname{sen}(\alpha \kappa_1 L_2)}{\cos(\alpha \kappa_1 L_2)} = 0 \quad (140)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_1 E_1}{\rho_2 E_2}}. \quad (141)$$

A equação 140 foi resolvida por Arndt (2009) para os primeiros 10 autovalores analíticos, que são mostrados a seguir em forma de frequências naturais de vibração.

5.1.3.1 Frequências Naturais de Vibração

As frequências naturais de vibração analíticas e aproximadas pelo refinamento k da AIG com $p = 2$, $p = 3$ e $p = 4$ são mostradas na tabela 3.

TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO ABRUPTA DE SEÇÃO E MATERIAL DESENVOLVIDAS EM AIG EM COMPARAÇÃO COM AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Sol. Analítica	AIG p=2 (ngl=10)	AIG p=3 (ngl=12)	AIG p=4 (ngl=14)
0.23794112	0.23794113	0.23794112	0.23794112
1.57079633	1.57121992	1.57080121	1.57079646
2.90365153	2.91007213	2.90405161	2.90369044
3.37953378	3.39282575	3.38082527	3.37973900
4.71238898	4.82939670	4.76716285	4.71404773
6.04524418	6.26238043	6.05999113	6.10791972
6.52112643	8.60115601	6.54148169	6.69877441
7.85398163	9.42195625	9.35017260	7.96233999
9.18683684	10.58073119	12.5342883	9.4954538
9.66271908	12.92740842	13.9031793	12.472135

Assim como na barra homogênea fixa-fixa verifica-se a convergência nas primeiras frequências e o mesmo fenômeno de oscilação nos resultados das frequências mais elevadas pelo fato do número pequeno de graus de liberdade utilizados no exemplo.

5.1.3.2 Modos Naturais de Vibração

Devido ao fato da barra apresentar dois materiais e seções diferentes, os modos de vibração em cada parte da barra se comportam de maneira distinta. As figuras 41, 42, 43 e 44 mostram os 4 primeiros modos da barra fixa-livre com variação abrupta de seção.

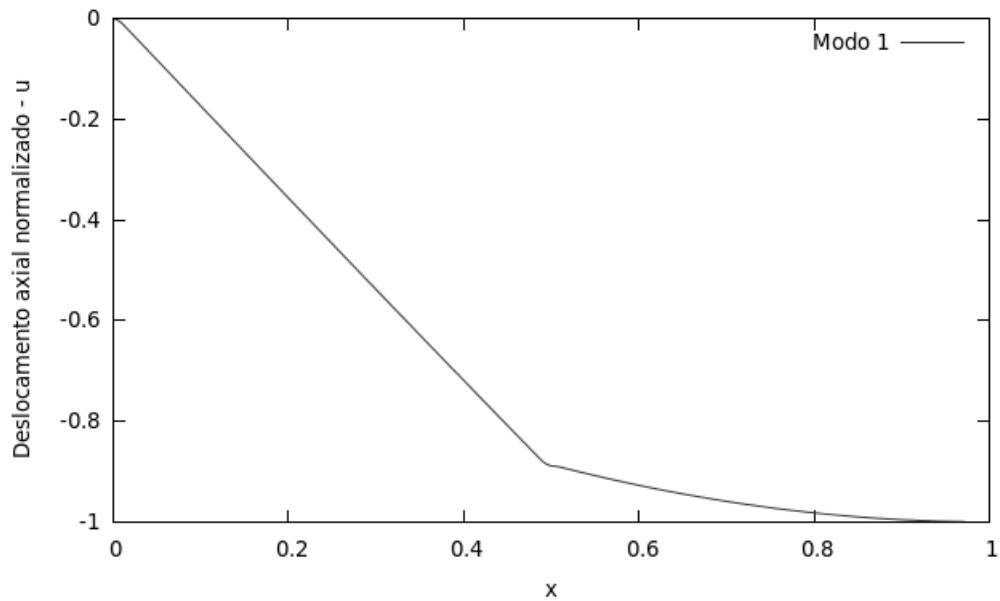


FIGURA 41 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG

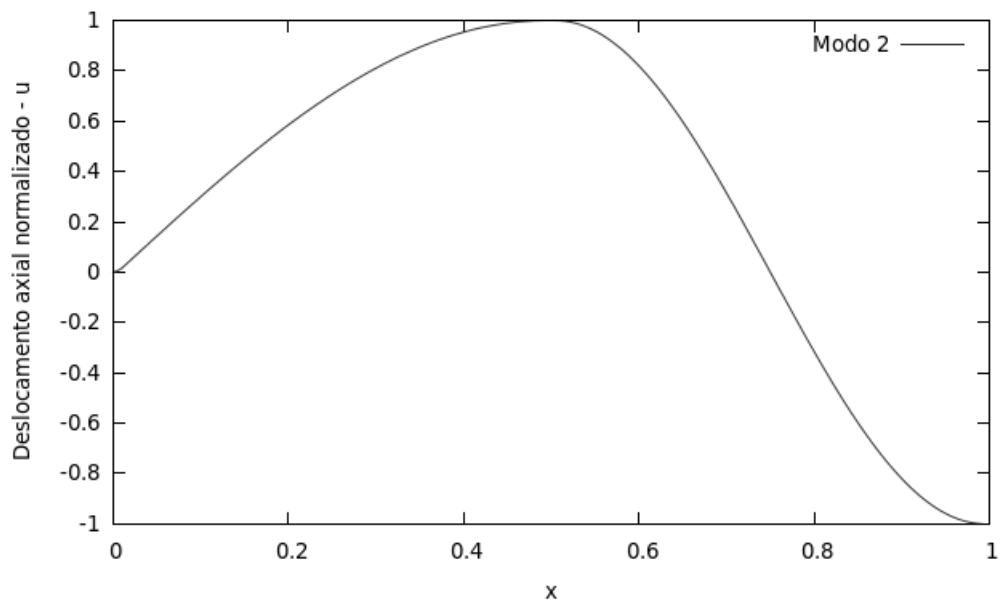


FIGURA 42 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG

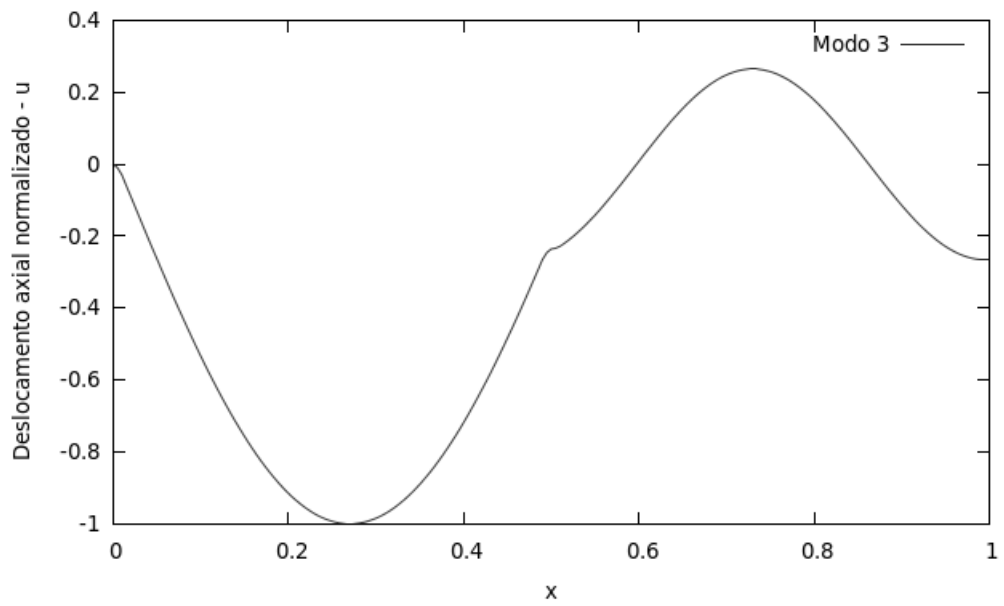


FIGURA 43 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG

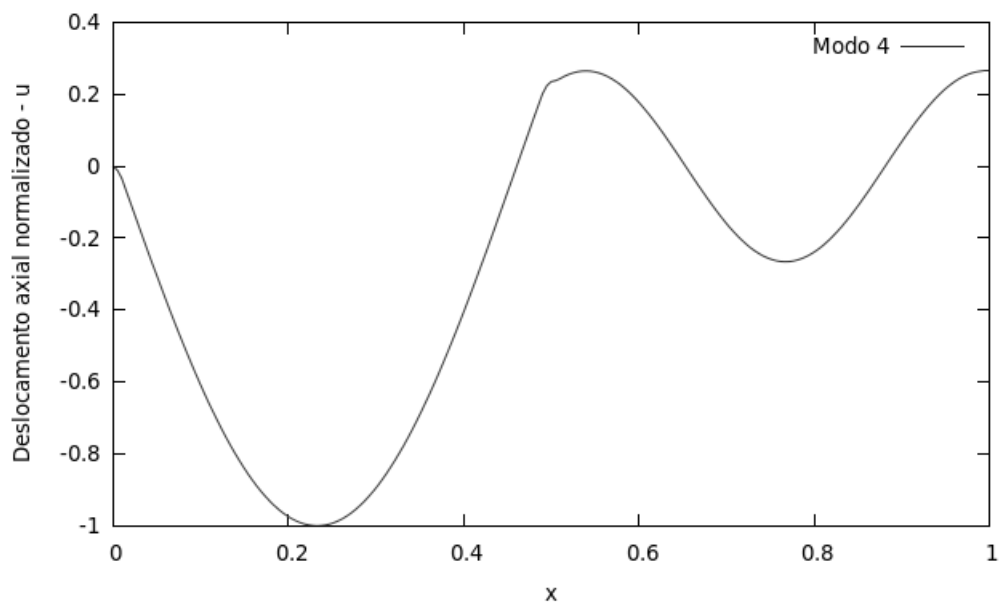


FIGURA 44 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA BARRA FIXA-LIVRE COM VARIAÇÃO DE SEÇÃO E MATERIAL EM AIG

5.2 ELEMENTOS DE VIGA

5.2.1 Viga Engastada

A relação que define as frequências naturais de vibração analíticas de uma viga engastada-livre com comprimento L , módulo de elasticidade E , massa específica ρ , momento de inércia I e área da seção transversal A é dada por Zeng (1998b), pela expressão:

$$\cos(\kappa_r L) \cosh(\kappa_r L) + 1 = 0 \quad , r = 1, 2, 3, \dots \quad (142)$$

$$\kappa_r = \sqrt[4]{\frac{\omega_r^2 \rho A}{EI}} \quad (143)$$

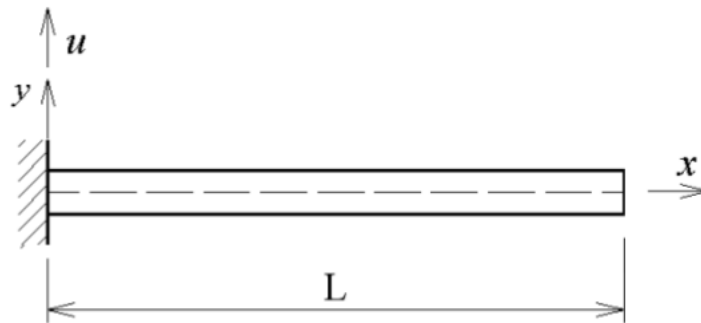


FIGURA 45 – VIGA ENGASTADA-LIVRE

Fonte: ARNDT (2009)

A solução da equação 142 para os autovalores é a seguinte (ZENG, 1998b):

$$\lambda_1 = 1.87510407 \quad (144)$$

$$\lambda_2 = 4.69409113 \quad (145)$$

$$\lambda_3 = 7.85475744 \quad (146)$$

$$\lambda_4 = 10.9955407 \quad (147)$$

$$\lambda_r = (r - 0.5)\pi \quad , r > 4. \quad (148)$$

5.2.1.1 Espectro de Frequências

Como a formulação do elemento de viga de Euler-Bernoulli para AIG não utiliza graus de liberdade de rotação, as condições de contorno para a restrição da rotação podem ser impostas diretamente na equação diferencial governante do problema ou, de maneira direta, através da restrição de deslocamento de dois nós muito próximos da extremidade. Este último método consiste em uma simulação de restrição que facilita o desenvolvimento do modelo para elementos de viga isolados sem acoplamentos e será adotado para o desenvolvimento da viga engastada-livre em AIG cujos resultados são apresentados a seguir. A figura 46 mostra o espectro de frequências comparativo entre o desenvolvimento da viga engastada-livre para Análise Isogeométrica de grau 3 e MEF utilizando polinômios cúbicos de Hermite, ambos com 100 graus de liberdade.

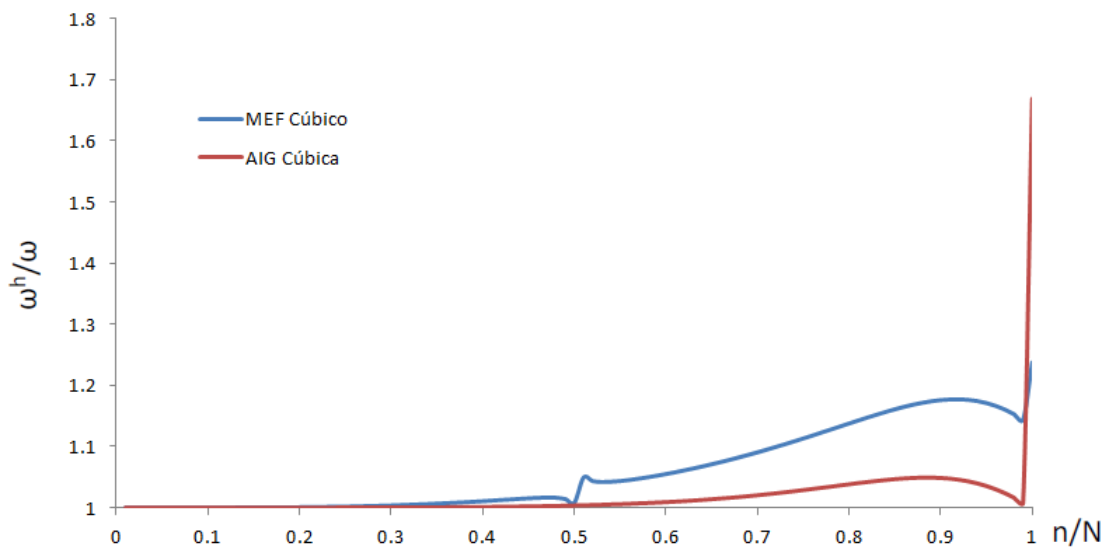


FIGURA 46 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA ENGASTADA-LIVRE PARA A AIG E O MEF

Assim como os espectros mostrados para o elemento de barra, os resultados para viga engastada-livre mostram uma descontinuidade no espectro do MEF na metade da amostragem de frequências gerando um aumento dos erros relativos para $n/N > 0.5$. O salto do espectro da AIG ocorre apenas nas duas últimas frequências, porém o erro nestas aumenta consideravelmente quando comparado com a mesma região do MEF.

A análise de espectro de frequências para a viga engastada-livre foi também

desenvolvida por Arndt e Machado (2013), que compararam o MEF cúbico com MEF utilizando polinômios de Bardell de grau 5 e 7 e o MEFG. Os resultados para estas análises foram também feitos com a utilização de 100 graus de liberdade e são mostrados na figura 47. Todos os métodos analisados por Arndt e Machado (2013) mostraram descontinuidades que separam as regiões de ramo acústico e ramo óptico, apresentado maiores erros na região óptica.

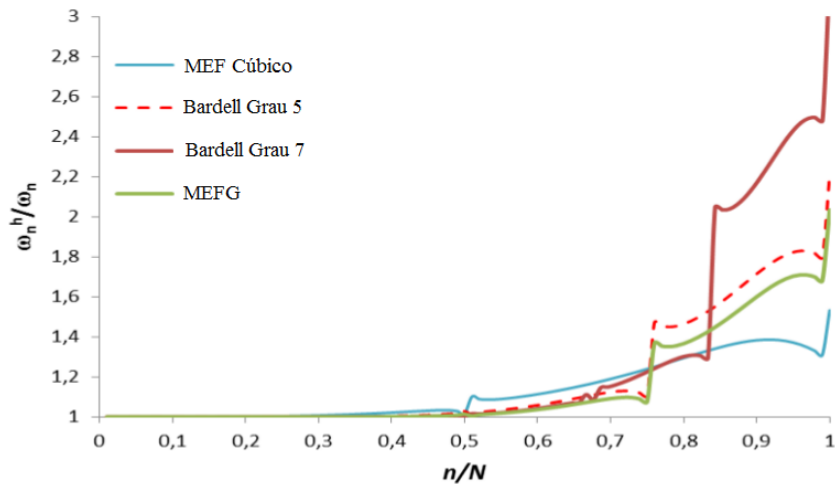


FIGURA 47 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA ENGASTADA-LIVRE PARA MEF E MEFG

Adaptado de: ARNDT E MACHADO (2013)

5.2.1.2 Taxas de Convergência

As taxas de convergência do refinamento p e k da AIG, apresentadas através das figuras 48, 49, 50, 51, 52 e 53 para o 6 primeiros autovalores são comparadas com os resultados desenvolvidos por Arndt, Machado e Scremin (2011), os quais analisaram as convergências para a viga engastada-livre para uma gama de métodos enriquecidos e diferentes funções enriquecedoras: o MMA utilizando funções trigonométricas, exponenciais e hiperbólicas, o MC, o MEFF utilizando funções enriquecedoras seno e cosseno, o MEFG, o MEF com refinamento p e refinamento h utilizando funções cúbicas.

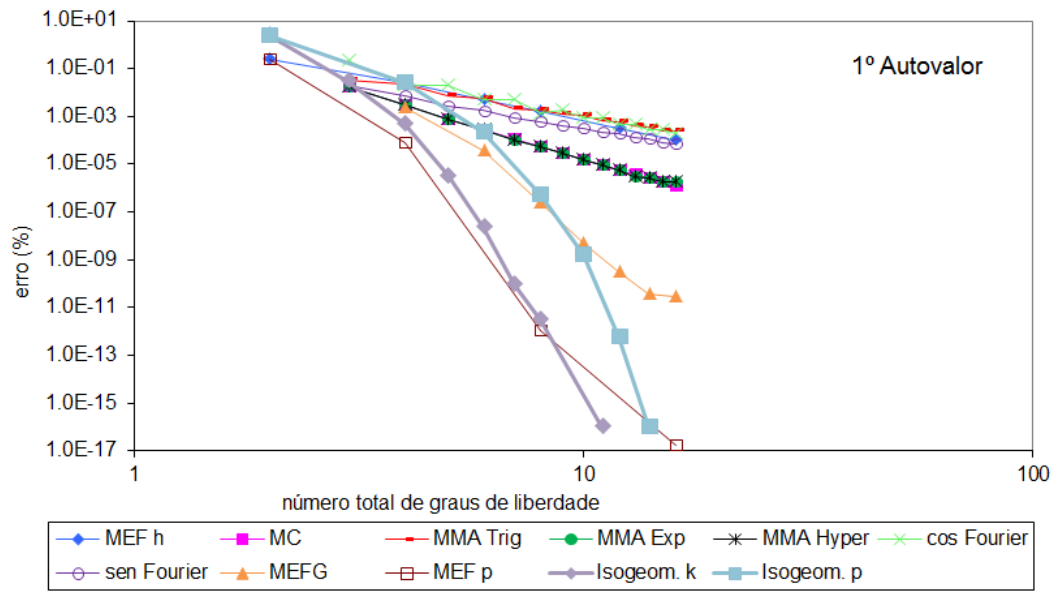


FIGURA 48 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

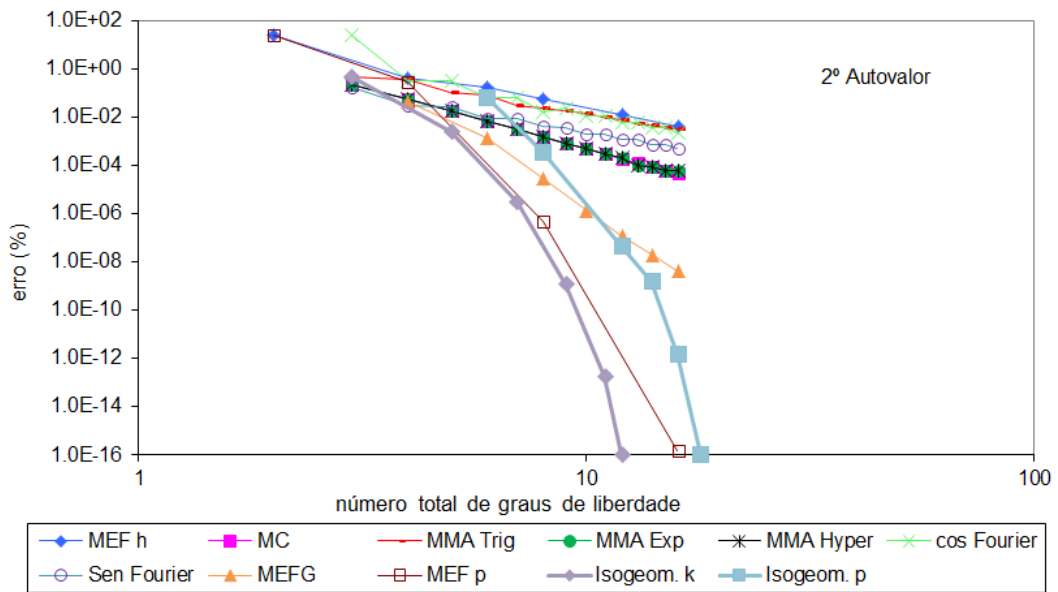


FIGURA 49 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

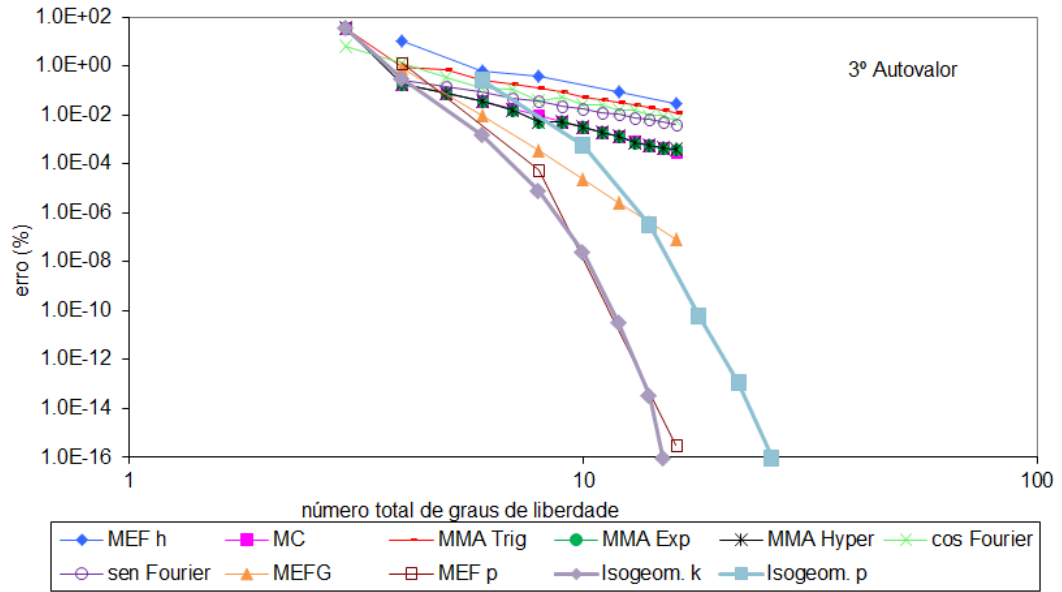


FIGURA 50 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

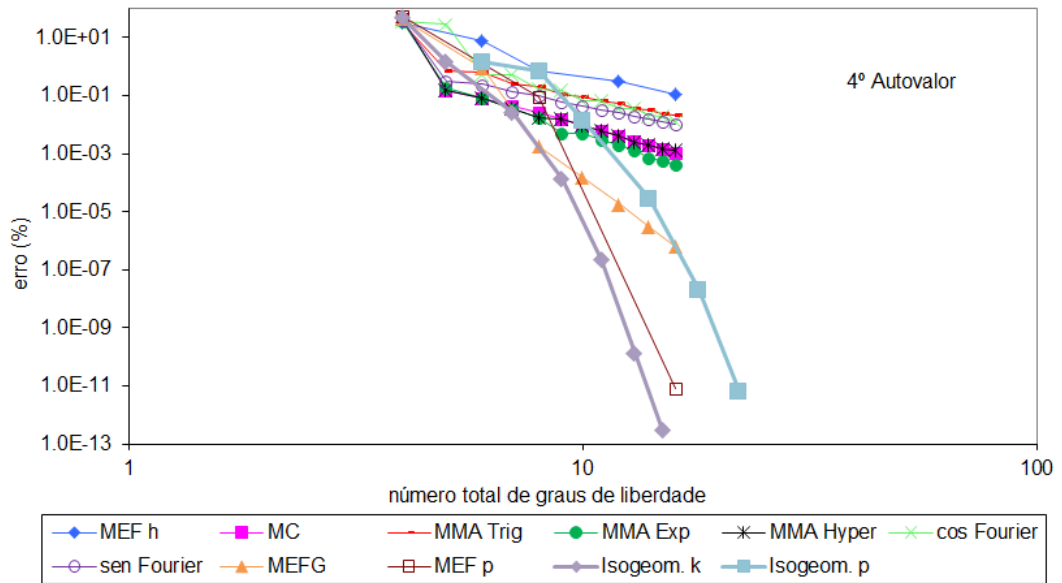


FIGURA 51 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

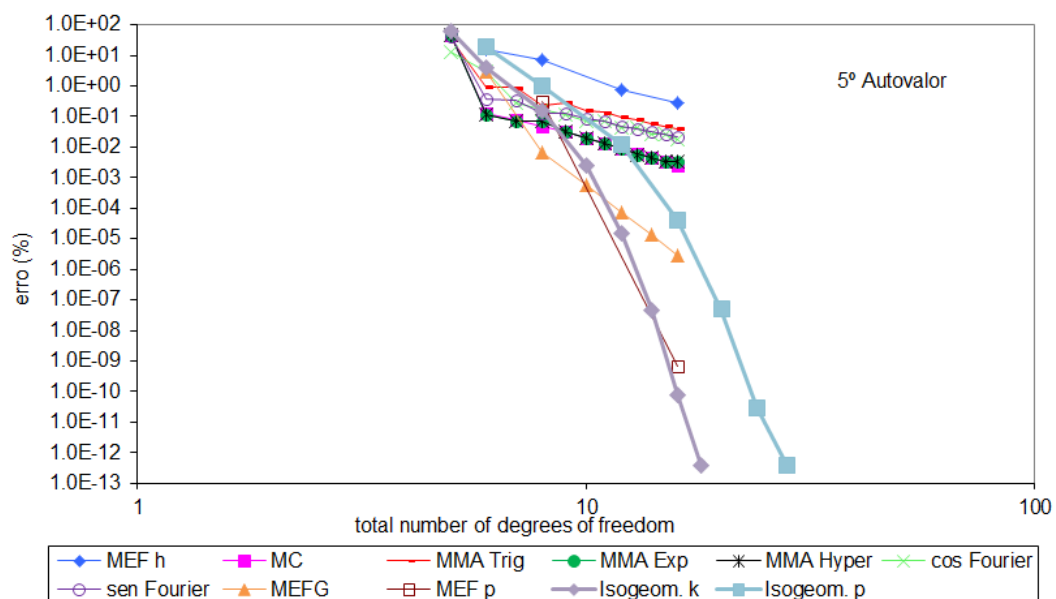


FIGURA 52 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUINTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

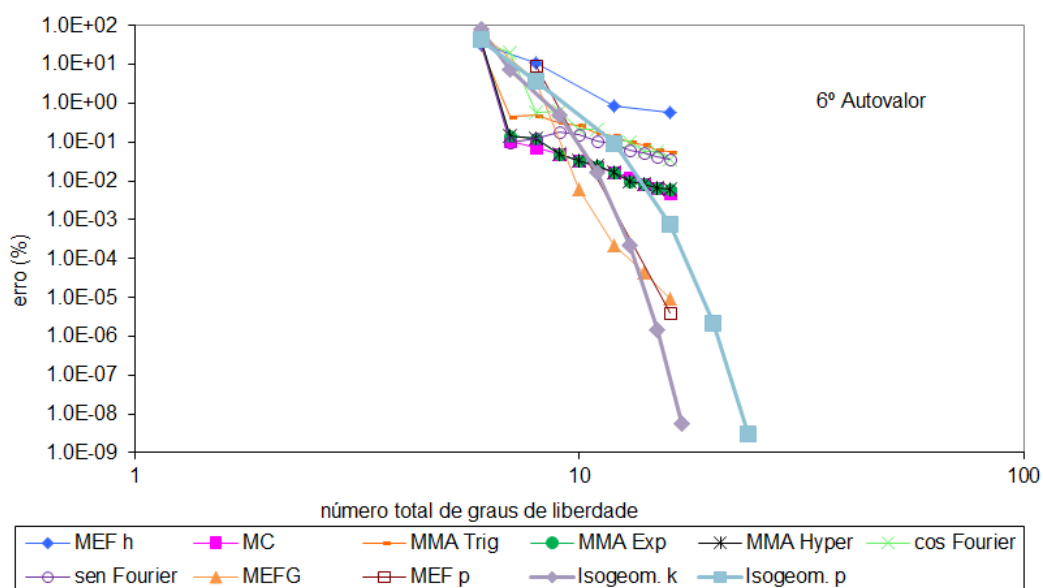


FIGURA 53 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEXTO AUTOVALOR DA VIGA ENGASTADA-LIVRE

A versão k da AIG apresenta altas taxas de convergências e resultados mais precisos para os 6 autovalores. Os gráficos mostram a vantagem do refinamento k sobre o p, onde este último apresenta-se menos preciso que o refinamento p do MEF.

5.2.1.3 Modos de Vibração

Os 4 primeiros modos de vibração da viga engastada-livre desenvolvida em AIG com funções cúbicas e 30 graus de liberdade são mostrados nas figuras 54,55,56 e 57.

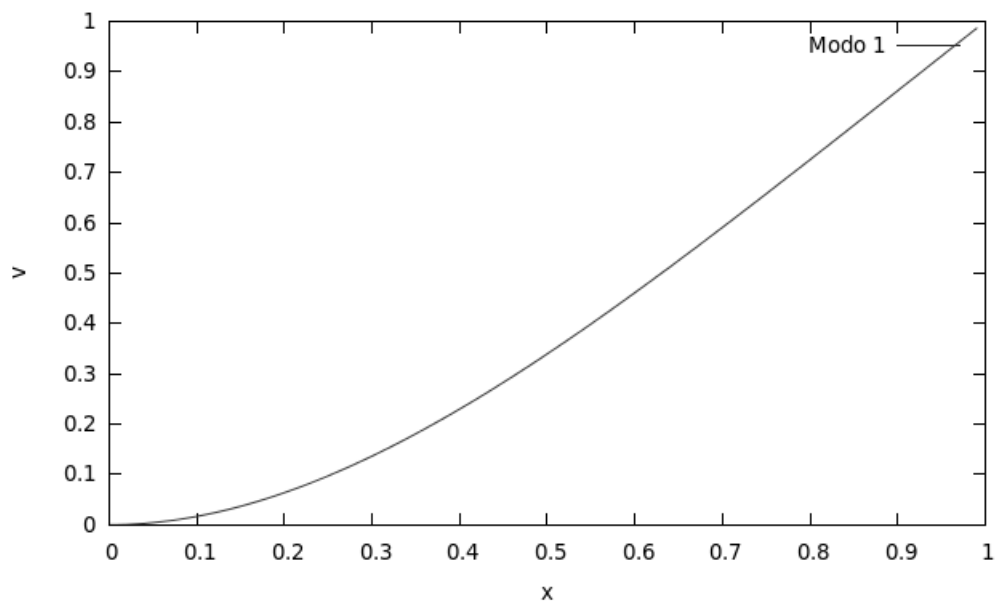


FIGURA 54 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG

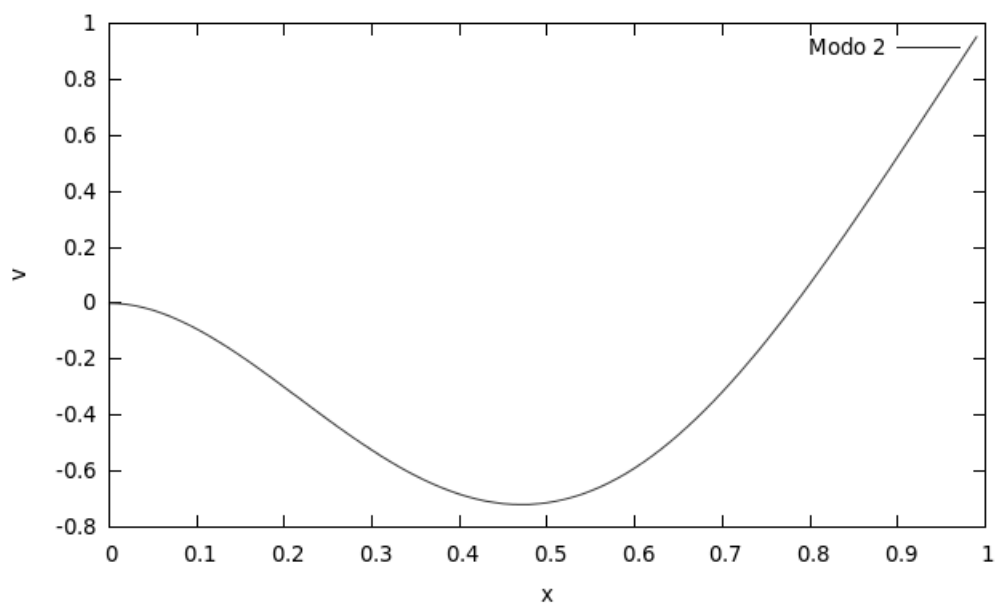


FIGURA 55 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG

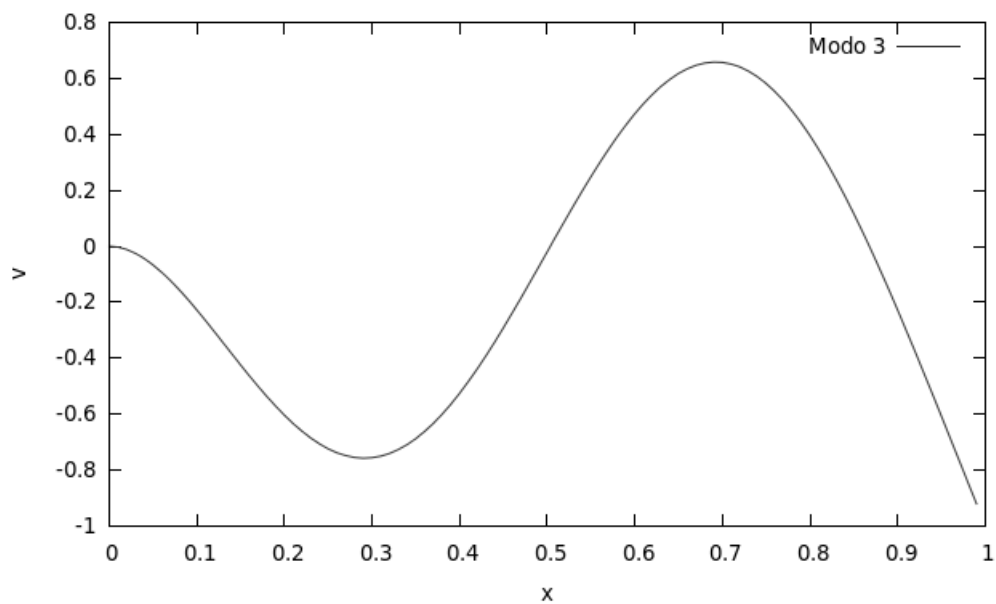


FIGURA 56 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG

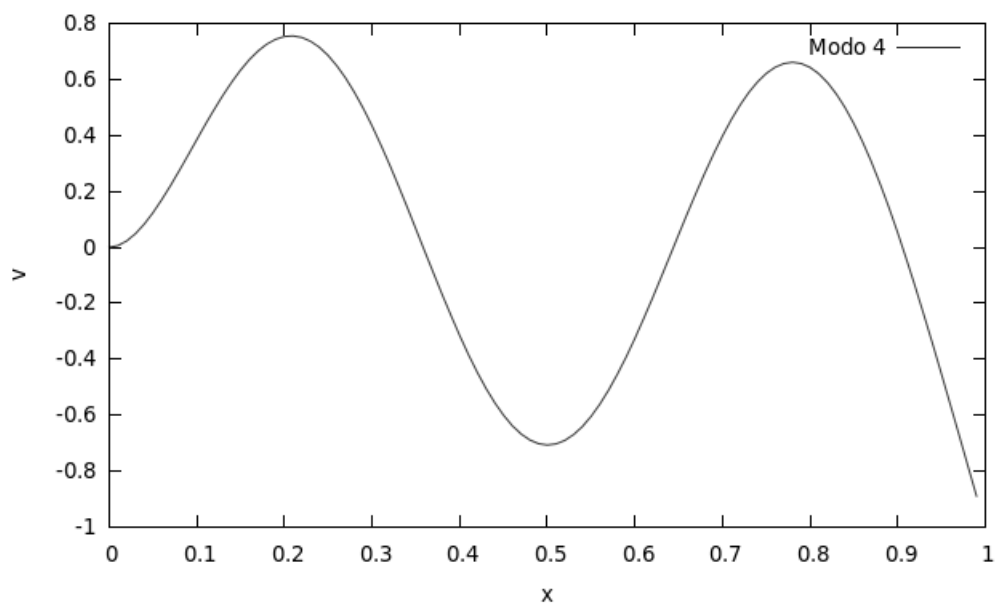


FIGURA 57 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA ENGASTADA-LIVRE EM AIG

5.2.2 Viga Simplesmente Apoiada

Segundo Cottrell et al. (2007), a solução analítica da viga simplesmente apoiada (figura 58) é dada por:

$$\omega_r = (r\pi)^2, r = 1, 2, 3, \dots \quad (149)$$

onde os parâmetros relacionados com as propriedades da viga são considerados unitários, ou seja, $E = 1N/m^2$, $\rho = 1Kg/m^3$, $L = 1m$, $I = 1m^4$ e $A = 1m^2$.

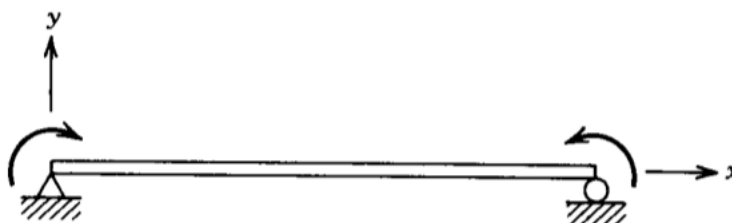


FIGURA 58 – VIGA BIAPOIADA

Fonte: SEGERLIND (1984)

5.2.2.1 Espectro de Frequências

A figura 59 mostra os espectros de frequências da Análise Isogeométrica com funções cúbicas e do MEF utilizando polinômios cúbicos de Hermite.

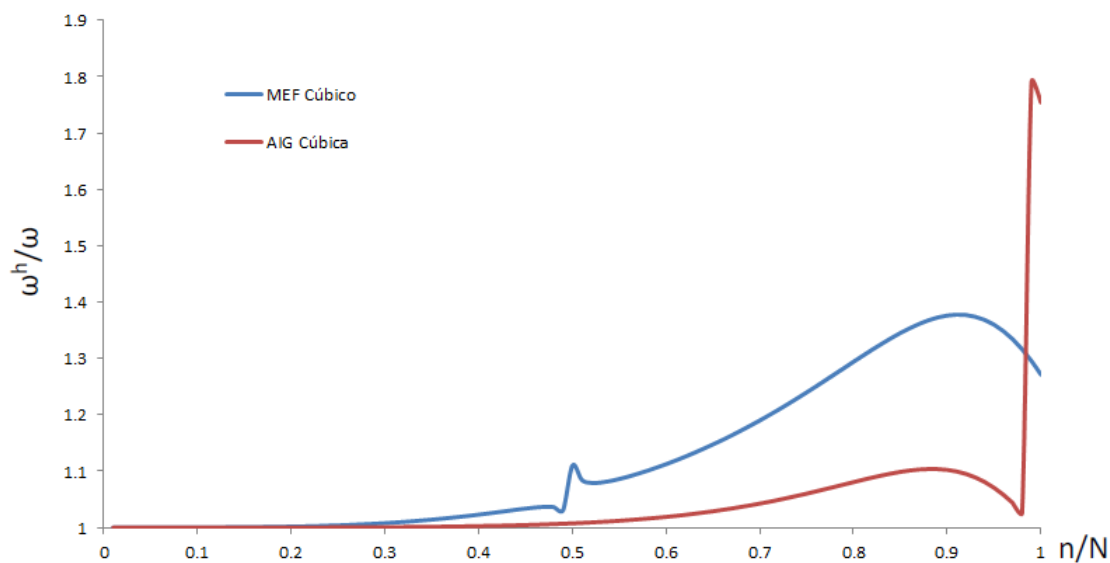


FIGURA 59 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DO ELEMENTO DE VIGA SIMPLEMENTE APOIADA PARA A AIG E O MEF

A descontinuidade na curva de frequências do MEF também ocorre no problema da viga simplesmente apoiada. O comportamento do espectro da AIG para a viga simplesmente apoiada mostra-se ligeiramente inferior se comparado com o resultado da viga engastada-livre, pois abrange uma maior faixa de frequências com erros mais elevados. A mesma comparação pode ser feita para o MEF que, apesar de apresentar a descontinuidade na mesma região, possui curva de erro mais acentuada no problema da viga simplesmente apoiada. Assim como nos problemas anteriores o espectro de frequências da AIG mostra-se mais preciso em toda a amostragem, apresentando uma maior faixa de frequências precisas.

5.2.2.2 Taxas de Convergência

As taxas de convergência dos 4 primeiros autovalores da viga simplesmente apoiada são mostradas nas figuras 60, 61, 62 e 63 onde as convergências do refinamento k e p da AIG são comparadas. Os modos de vibração numéricos coincidem com as soluções analíticas.

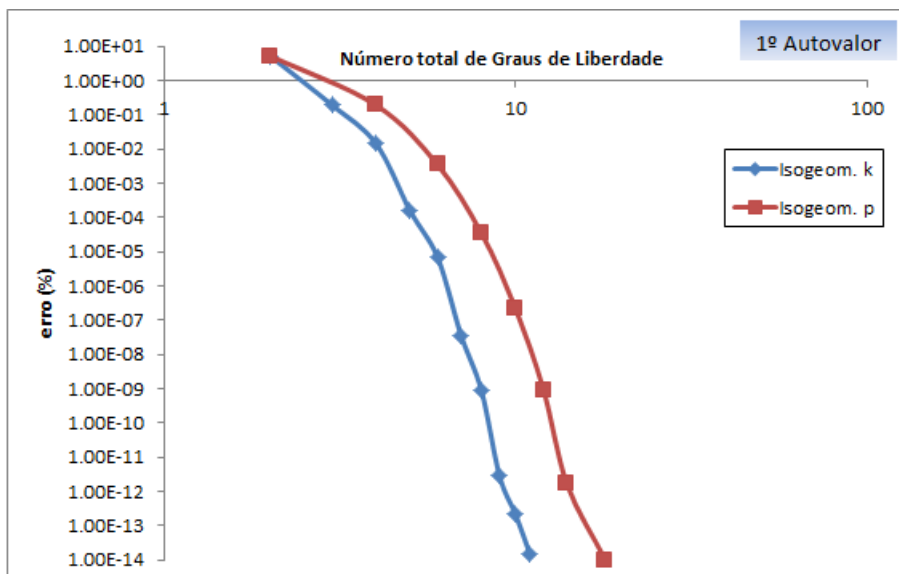


FIGURA 60 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

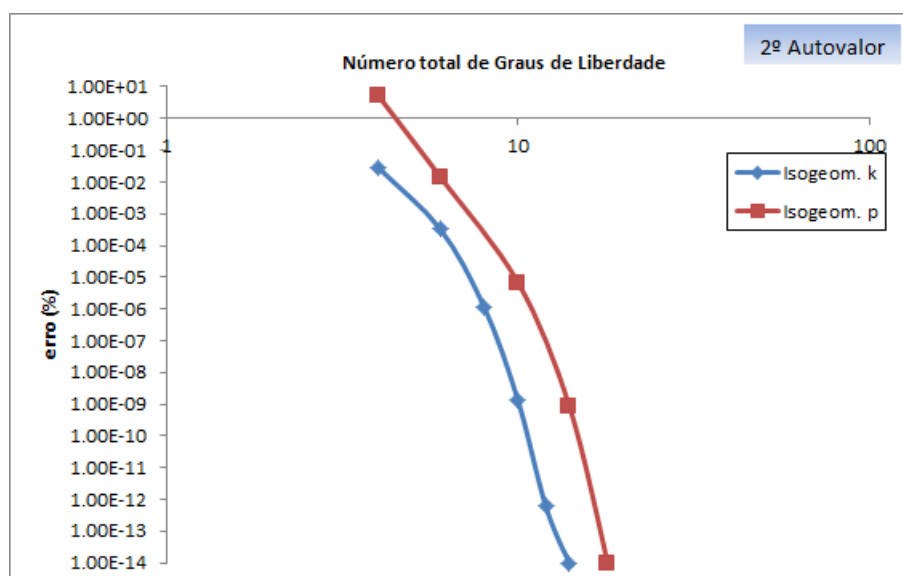


FIGURA 61 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O SEGUNDO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

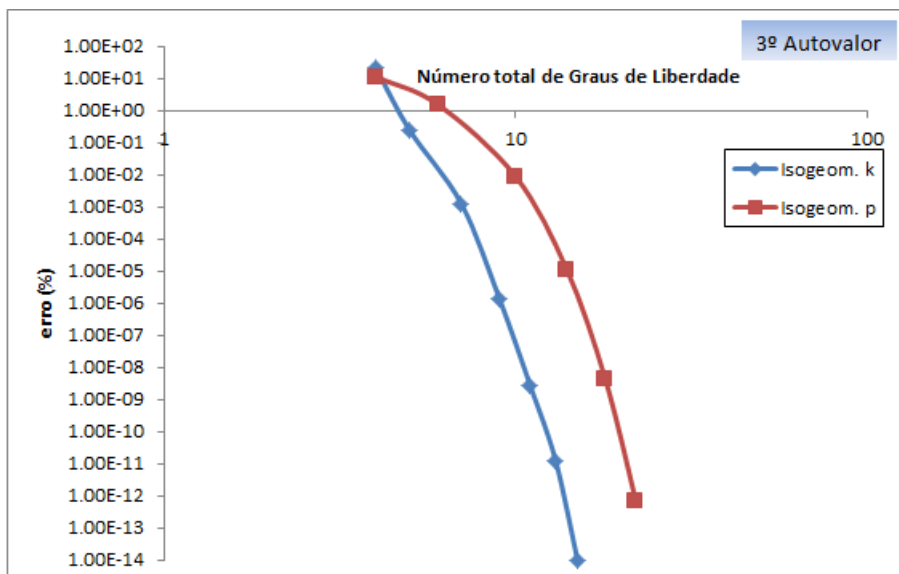


FIGURA 62 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O TERCEIRO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

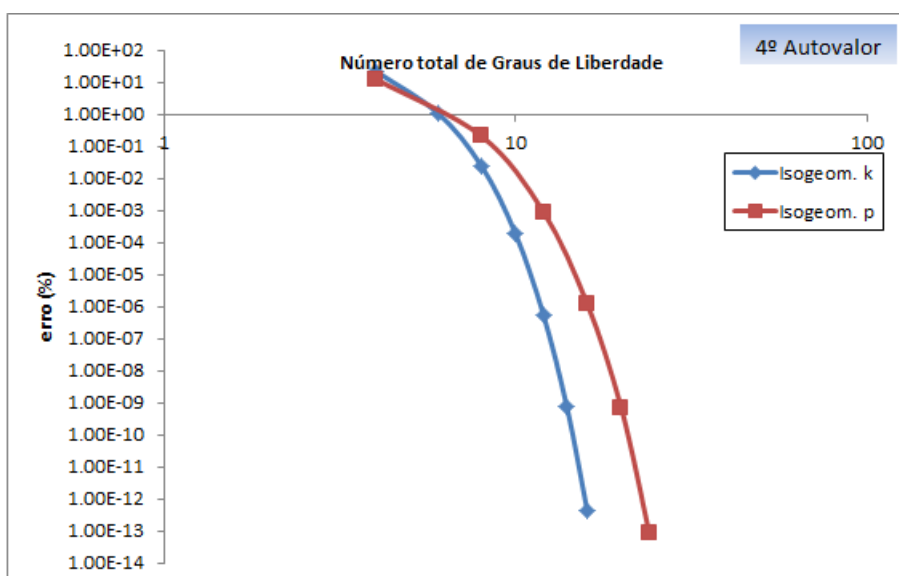


FIGURA 63 – TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA O QUARTO AUTOVALOR DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Os resultados do refinamento k da AIG mostram-se mais precisos em todos os autovalores analisados.

5.2.2.3 Modos de Vibração

Os 4 primeiros modos de vibração da viga simplesmente apoiada são mostrados através das figuras 64, 65, 66 e 67. Apesar de apresentarem significados físicos diferentes, os modos

da viga simplesmente apoiada são semelhantes aos modos da barra fixa-fixa.

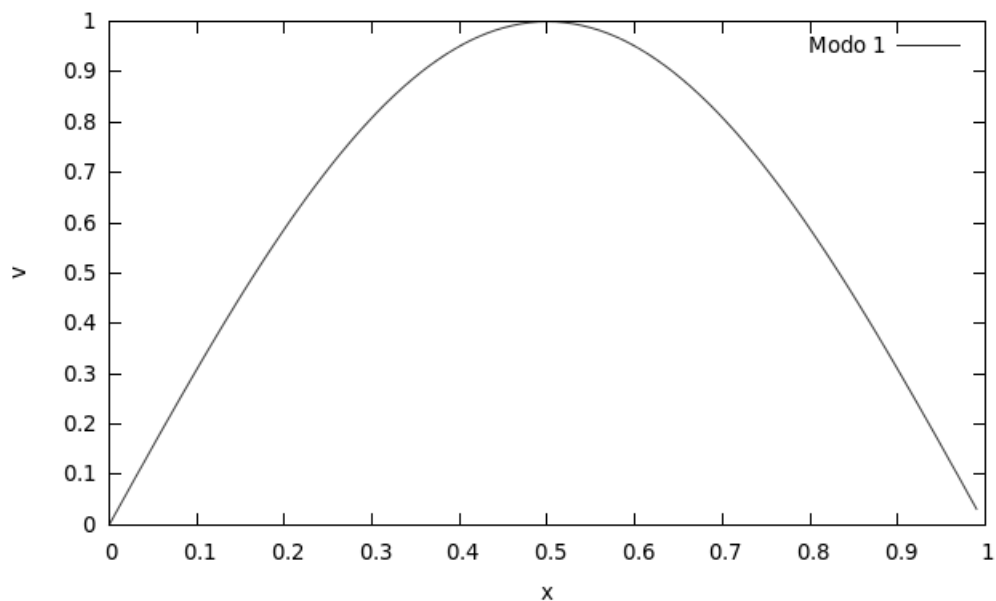


FIGURA 64 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA EM AIG

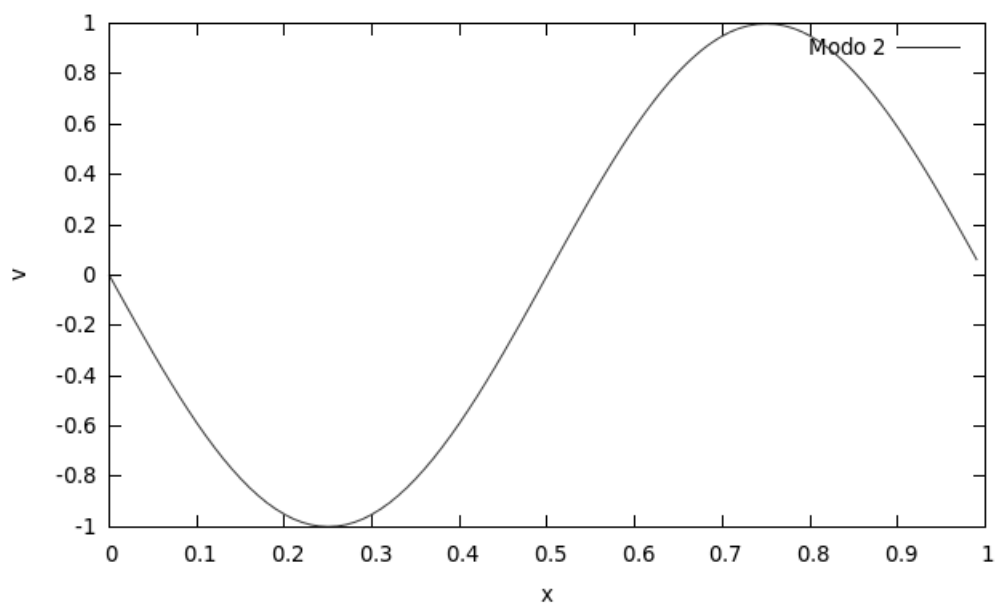


FIGURA 65 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA EM AIG

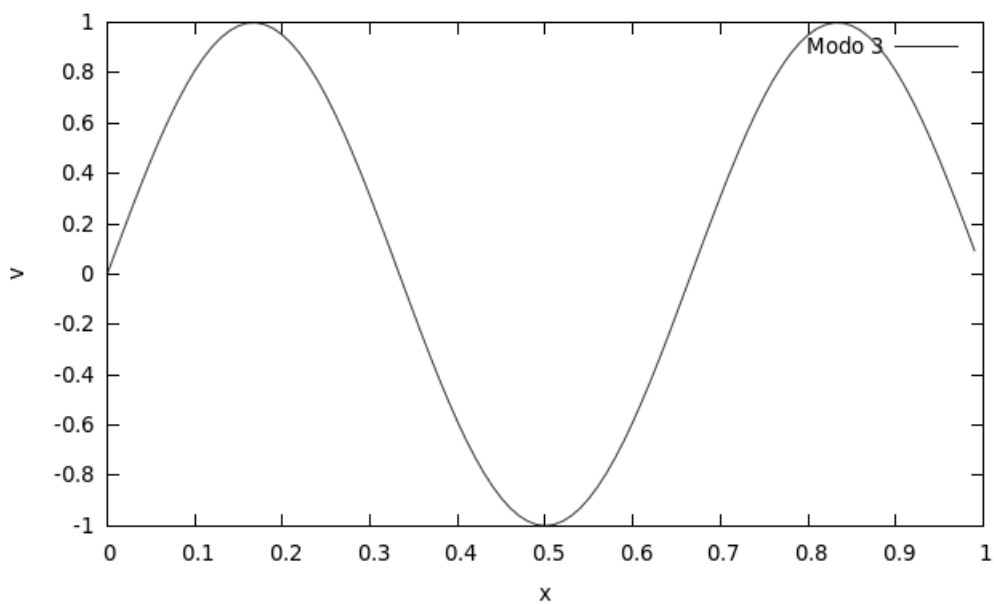


FIGURA 66 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA EM AIG

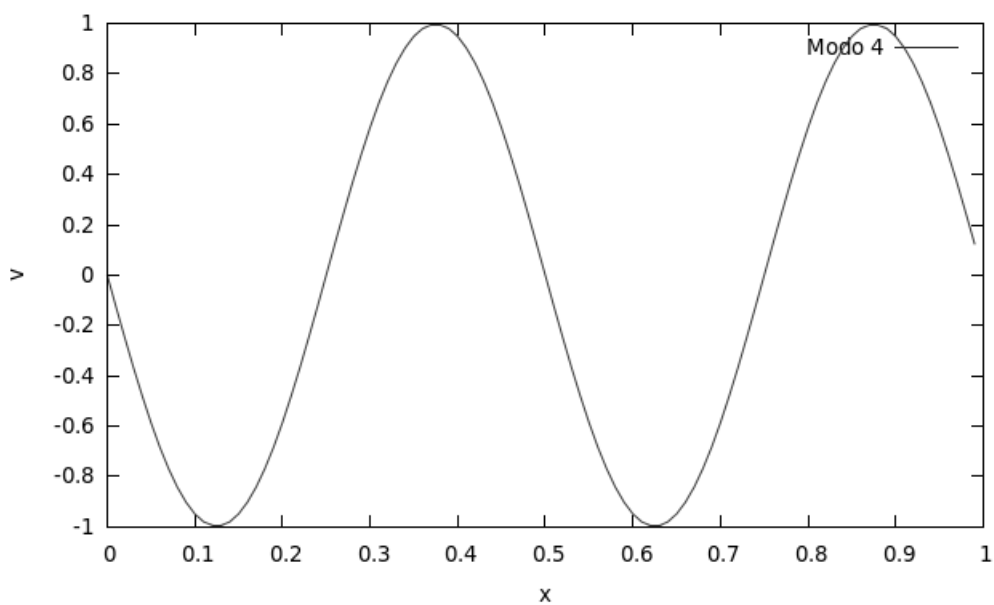


FIGURA 67 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA VIGA SIMPLEMENTE APOIADA EM AIG

5.3 TRELIÇA

O exemplo utilizado para testar a AIG em uma estrutura de treliça é o modelo utilizado por Zeng (1998a) que consiste em uma treliça composta por 7 barras, conforme a figura 68.

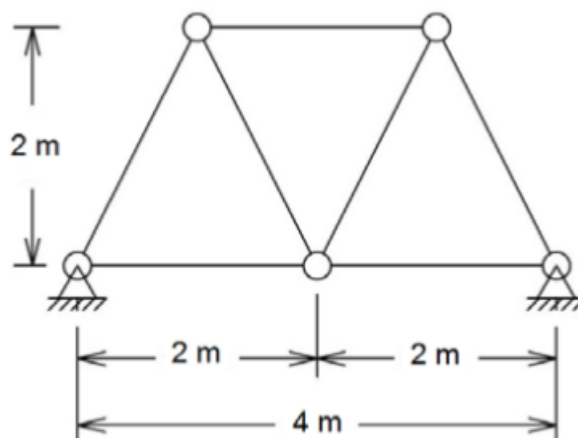


FIGURA 68 – TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS

Na modelagem desta estrutura as propriedades consideradas para todas as barras são: área da seção transversal $A = 0.001m^2$, massa específica $\rho = 8000kg/m^3$ e módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^{11}N/m^2$.

5.3.1 Frequências Naturais de Vibração

Resultados comparativos entre o MEF linear, o MC e o MEFG foram desenvolvidos por Arndt (2009) que utilizou o MC com 5 funções enriquecedoras, o MEFG com um nível de enriquecimento e também o MEFG adaptativo, confrontando com os resultados desenvolvidos por Zeng (1998a) para o MC com 1 e 2 funções enriquecedoras. A tabela 4 mostra o resultado das frequências naturais de vibração obtidas por Arndt (2009) e Zeng (1998a).

TABELA 4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS PARA O MEF E OS MÉTODOS ENRIQUECIDOS

i	MEF (7e) 6 gl	MC (7e 1c) 13 gl	MC (7e 2c) 20 gl	MC (7e 5c) 41 gl	MEFG (7e) 34 gl	MEFG Adap. $1 \times 6gl + 2 \times 34gl$
	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)
1	1683.521413	1648.516148	1648.258910	1647.811939	1647.785439	1647.784428
2	1776.278483	1741.661466	1741.319206	1740.868779	1740.840343	1740.839797
3	3341.375203	3119.123132	3113.835167	3111.525066	3111.326191	3111.322715
4	5174.353866	4600.595156	4567.688849	4562.562379	4561.819768	4561.817307
5	5678.184561	4870.575795	4829.702095	4824.125665	4823.253509	4823.248678
6	8315.400602	7380.832845	7379.960217	7379.515018	7379.482416	7379.482322
7		8047.936309	7532.305498	7506.784243	7499.144049	
8		8272.611818	8047.936313	8047.936297	8047.936312	
9		11167.56472	9997.484917	9931.261415	9922.385851	
10		12051.89683	10567.42895	10486.44819	10477.44344	
11		14359.30988	12282.63058	12118.30422	12107.26233	
12		15525.68547	13296.29795	12931.67085	12917.98188	
13		16792.68173	13654.89423	13434.73984	13425.57943	
14			16095.87264	16095.87265	16097.57146	
15			18281.60096	16215.20892	16217.70415	
16			19409.95615	17011.97237	17010.41930	
17			20931.20029	17874.69663	17915.51967	
18			23672.43634	19518, 49699	19666.59599	
19			23970.81621	20218.68373	20301.26709	
20			26787.52793	22187.81649	22732.50666	

Fonte: ARNDT (2009)

A solução analítica deste problema é desconhecida, porém as frequências resultantes de uma modelagem numérica apresentam valores superiores à solução exata. Com base nesta afirmação, Arndt (2009) concluiu que o MEFG adaptativo apresenta os resultados mais precisos.

A tabela 5 apresenta os resultados da versão k da AIG para o problema da treliça de 7 barras utilizando funções NURBS de grau 2,3 e 4 para as 13 primeiras frequências.

TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA COMPOSTA POR 7 BARRAS PARA A AIG

i	AIG $p = 2$	AIG $p = 3$	AIG $p = 4$
	13 gl	20 gl	34 gl
	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)	ω_i (rad/s)
1	1648.06320092	1647.78555214	1647.78444027
2	1741.21025463	1740.84082235	1740.83980945
3	3117.08579405	3111.40375945	3111.32274788
4	4597.86055319	4562.60137052	4561.81765304
5	4869.00145652	4825.08885595	4823.24943613
6	7430.30350284	7429.37528256	7379.54133569
7	8100.92593226	7502.19348783	7499.17033141
8	8273.78472987	8100.92593226	8047.99557886
9	11364.16244158	10086.2045829	9923.15407939
10	12324.4038809	10687.2869857	10478.5519054
11	14897.1739596	12498.1639289	12110.0962248
12	16451.2954192	13659.4022145	12926.6834189
13	17768.6585284	14001.2111386	13430.4853305

Os resultados da AIG para polinômio quadrático e cúbico mostram-se mais precisos aos do MC com 1 e 2 funções enriquecedoras apenas nas 5 primeiras frequências, gerando erros significativos para as últimas frequências mostradas. Já a AIG com funções NURBS de quarto grau mostra resultados mais precisos se comparados com o MC utilizando 5 funções enriquecedoras, mesmo com um número superior de graus de liberdade, e menos precisos se comparados com o MEFG. Os resultados do MEFG adaptativo continuam sendo os mais precisos.

5.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

O problema utilizado para exemplificar o estado plano de tensões é a chapa quadrada presa em uma extremidade, inicialmente desenvolvida por Torii (2012) para o MEFG e o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH). As propriedades da chapa consideradas são: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, massa específica $\rho = 8000\text{kg}/\text{m}^3$, módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9\text{Pa}$, espessura $h = 0,05\text{m}$ e comprimentos $L_x = L_y = 1$.

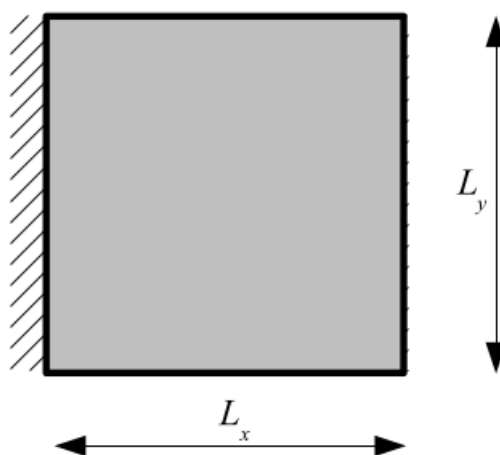


FIGURA 69 – CHAPA QUADRADA FIXA EM UMA EXTREMIDADE

Fonte: TORII (2012)

5.4.1 Frequências Naturais de Vibração

As frequências de referência utilizadas para este problema foram desenvolvidas com o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) de grau polinomial $p = 9$ por Torii (2012), que comparou os erros do MEFH e do MEFG com parâmetros $\beta_1 = \pi$, $\beta_1 = 3\pi/2$, $\beta_1 = 2\pi$ e $\beta_1 = 5\pi/2$ e obteve melhores resultados com o MEFG para as frequências mais elevadas.

A tabela 6 mostra os desvios percentuais das frequências naturais de vibração obtidos por Torii (2012) para o MEFH com polinômios de quinto grau e o MEFG com parâmetro $\beta_1 = \pi$ em comparação com os desvios percentuais obtidos com a AIG utilizando polinômios

de grau $p = 3$ e $p = 5$ com 10 nós de controle distintos.

TABELA 6 – ERROS PERCENTUAIS RELATIVOS PARA O PROBLEMA DE ESTADO PLANO DE TENSÕES EM COMPARAÇÃO OM O MEFG E O MEFH

i	ω_i (rad/s)	MEFH	MEFG π	AIG $p = 3$	AIG $p = 5$
1	3372,13	0,057055	0,063529	0,035073	0,010609
2	8092,72	0,018804	0,020749	0,011647	0,003539
3	9079,09	0,010432	0,013191	0,005292	0,001138
4	14427,23	0,002301	0,002959	0,001192	0,000260
5	15558,23	0,030022	0,034655	0,017811	0,005016
6	16511,96	0,000493	0,000658	0,000291	0,000067
7	20812,77	0,015192	0,017391	0,006618	0,000988
8	21911,61	0,036135	0,042266	0,020378	0,005238
9	24194,74	0,012133	0,013001	0,005003	0,000499
10	24349,42	0,014774	0,014303	0,008209	0,002265
11	25319,90	0,011125	0,011875	0,006815	0,002093
12	26790,31	0,038921	0,034790	0,016314	0,003030
13	30891,78	0,058661	0,040537	0,019617	0,003355
14	31068,55	0,089772	0,050397	0,022668	0,002277
15	31740,80	0,051334	0,036241	0,017925	0,003647
16	32970,53	0,049527	0,030049	0,013559	0,000375
17	33517,49	0,023377	0,008956	0,005378	0,000349
18	34374,53	0,013482	0,008268	0,004164	0,000467
19	36566,79	0,237711	0,128078	0,047181	0,002140
20	39182,66	0,045343	0,027088	0,016109	0,003377

Os resultados da AIG se mostraram mais precisos do que os resultados do MEFG e do MEFH no problema do estado plano. Os erros relativos resultantes da AIG acompanham a oscilação dos erros determinados pelo MEFG e MEFH. A figura 70 mostra uma visualização gráfica dos resultados mostrados na tabela 6.

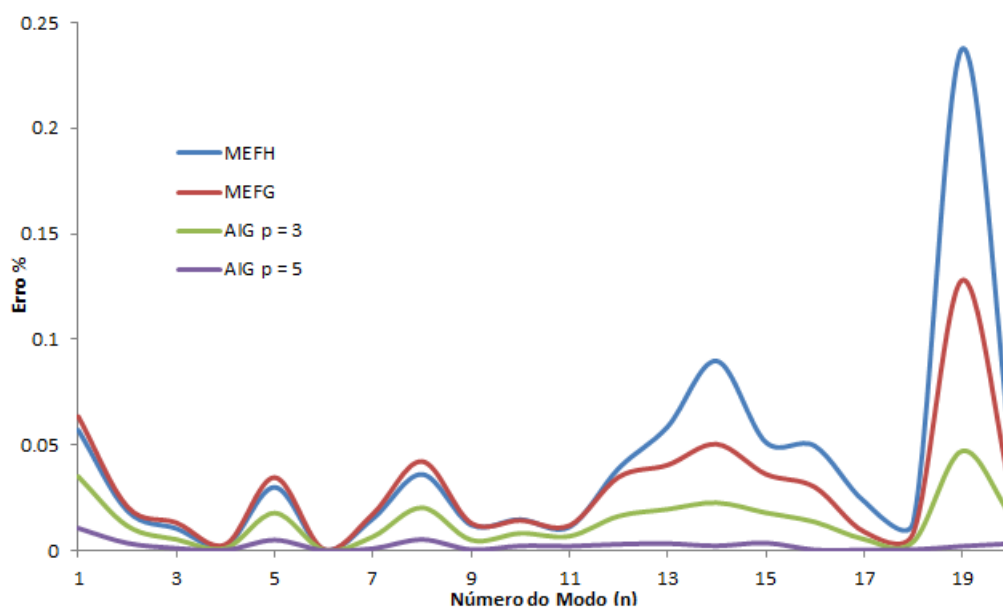


FIGURA 70 – ERROS RELATIVOS DAS PRIMEIRAS 20 FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA

5.4.2 Modos Naturais de Vibração

Os 4 primeiros modos naturais de vibração para o problema do estado plano utilizando AIG com $p = 3$ e 10 nós de controle distintos são mostrados através das figuras 71,72,73 e 74.

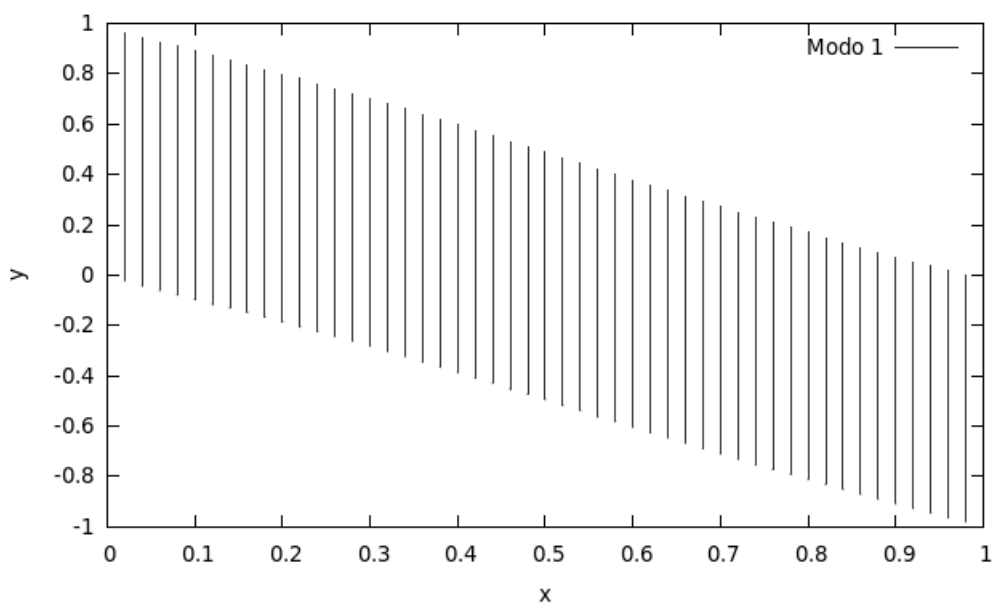


FIGURA 71 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG

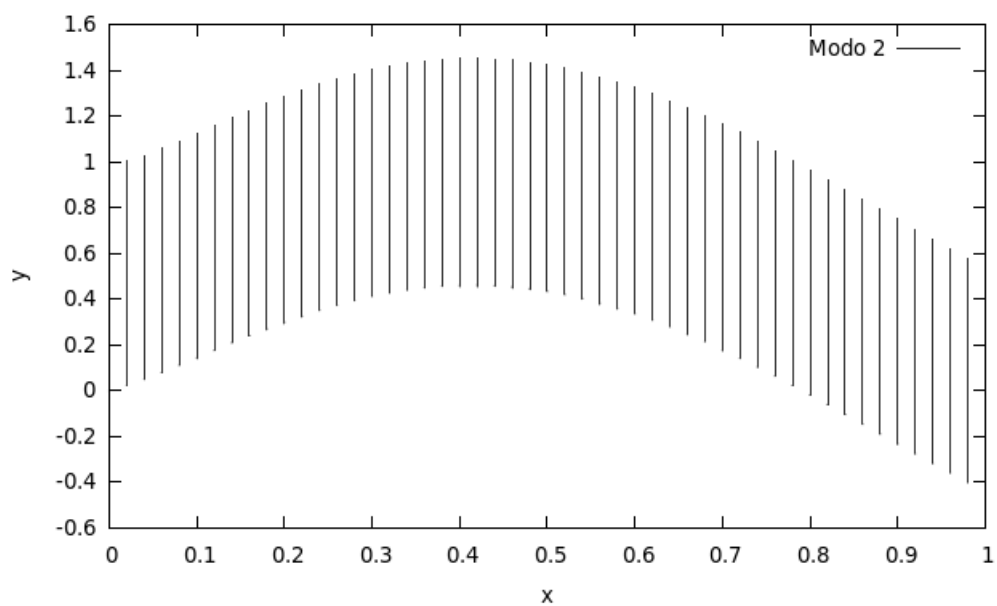


FIGURA 72 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG

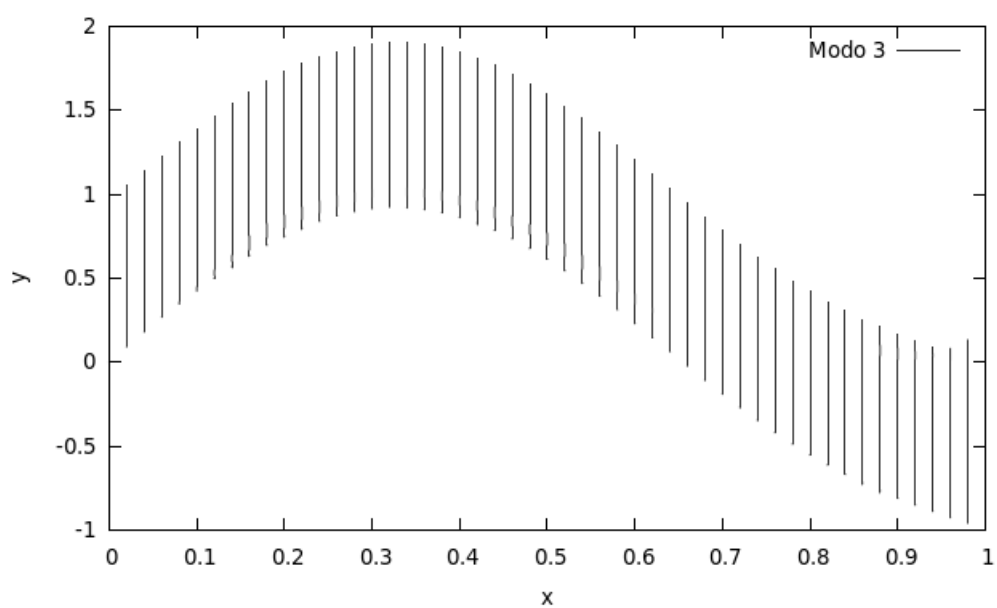


FIGURA 73 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG

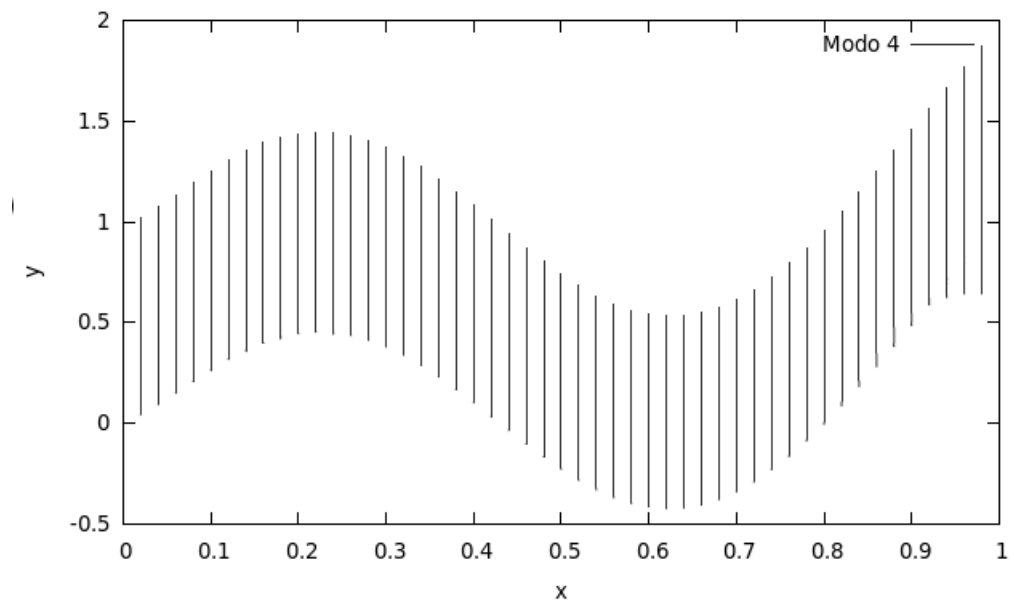


FIGURA 74 – QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO DA CHAPA QUADRADA EM AIG

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento da AIG para o fenômeno de vibração livre de estruturas através de exemplos desenvolvidos para barras, vigas, treliças e estado plano de tensões. A precisão do método utilizado foi comparada com o MEF clássico, os métodos enriquecidos, o MEFG e o MEFH.

Os resultados obtidos mostram que a AIG apresentou uma maior porcentagem de frequências precisas para o problema de barras e vigas em comparação com o MEF e os métodos enriquecidos, apresentando erros mais elevados apenas nas últimas frequências da amostragem. As taxas de convergência da AIG para os refinamentos p e k do problema de barras se mostraram maiores, porém, menos precisas que as taxas obtidas com o refinamento p do MEF e com o MEFG. Já no problema de vigas, a AIG apresentou taxas de convergência e precisão mais altas para o refinamento k em comparação com o Método dos Elementos Finitos Generalizados. O fato do refinamento k apresentar precisão superior ao refinamento p da AIG deve-se ao aumento na suavidade das funções de forma com um menor número de graus de liberdade.

Mesmo não apresentando comparação com soluções analíticas, os resultados das frequências naturais de vibração para o problema da treliça mostraram comportamento similar aos problemas de barras e vigas, onde as frequências mais altas apresentaram erros mais elevados. A AIG com grau polinomial $p = 5$ apresentou frequências mais precisas do que o MC com o mesmo número de graus de liberdade e menos precisas do que o MEFG. Os resultados para o estado plano de tensões desenvolvidos via AIG obtiveram as melhores precisões, comparados com o MEFG e o MEFH.

O fato do espectro de frequências para uma dada ordem polinomial independe do número total de graus de liberdade gera uma restrição na questão do refinamento do tipo h : apenas uma parcela bem definida de resultados apresenta melhoria, visto que a curva permanece exatamente a mesma quando não há variação no grau polinomial da função base. Por outro lado, com um conhecimento prévio do comportamento do espectro é possível

delimitar com antecedência a quantidade de frequências precisas para um dado conjunto de funções com grau polinomial determinado. A maior vantagem da AIG com relação aos demais métodos comparados está na superioridade do seu espectro de frequências, pois apresenta um número maior de resultados precisos na amostra.

No aspecto de implementação para os problemas estudados a AIG apresentou como vantagem a não necessidade de acoplamento entre elementos, não havendo a necessidade de determinar matrizes locais para os problemas de barras, com excessão da barra com variação abrupta de seção, vigas e estado plano de tensões. Outra vantagem que decorre da AIG é a fácil implementação das funções base NURBS a partir dos dados de entrada, além de possuir uma expressão analítica para as derivadas com recursão similar às próprias funções. Por outro lado caracteriza-se como desvantagem da AIG a necessidade de integração das funções separadas por subdomínios, ou elementos isogeométricos, a qual demanda um tempo computacional muito superior ao tempo de uma rotina similar em MEF, onde as integrações dos polinômios se dão em apenas um domínio. Outra desvantagem da AIG está relacionada com o elemento de viga de rotação livre, o qual apresenta dificuldades na imposição das condições de contorno de rotação do problema.

Neste trabalho não foram verificados todos os problemas de estruturas reticuladas e bi-dimensionais testadas por Arndt (2009), Arndt, Machado e Scremin (2009, 2011) e Torii (2012), como o problema de pórticos e o problema da equação da onda bi-dimensional. A expansão destes desenvolvimentos em AIG de forma comparativa com os demais métodos é uma sugestão para pesquisas futuras na área da análise dinâmica, assim como verificações numéricas para elementos de placa, sólidos tridimensionais e outros fenômenos como os problemas de vibração forçada.

Como os espectros de frequências desenvolvidos podem gerar um número conhecido de valores mais precisos, uma outra sugestão para trabalhos futuros é aplicar a Análise Transiente apenas na região onde o espectro se comporta de maneira precisa, descartando os resultados imprecisos, e verificar o seu impacto. Investigações sobre o comportamento dos espectros, com enfoque na questão relacionada às descontinuidades das curvas, são também sugestões para desenvolvimentos futuros.

Por fim, nos problemas estudados, a AIG se mostrou uma ferramenta promissora na determinação do comportamento dinâmico de estruturas em vibração livre, abrindo caminhos para inúmeras pesquisas no campo das estruturas e áreas correlatas.

REFERÊNCIAS

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. **Energy Theorems and Structural Analysis**. Butterworth & Co., 1960.

ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Comparative Analysis of the Generalized Finite Element Method and the K-Orthogonal Hierarchical Finite Element Method For Free Vibration Analysis. In: XXXIV IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, **Proceedings of the XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, Brazil, 2013b.

ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. The Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration of Uniform Straight Bar. In: 19TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, **Proceedings of the 19th International Congress of Mechanical Engineering**. Brasília, Brazil, 2007.

ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. The Generalized Finite Element Method Applied to Free Vibration of Beams. In: PROCEEDINGS OF THE 20TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, **Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering**. Gramado, Brazil, 2009.

ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Enriched Methods for Vibration Analysis of Framed Structures. **21st International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2011**. Natal, Brazil, 2011.

ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado À Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese (Doutorado em Método Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

AUGARDE, C. E. Generation of shape functions for straight beam elements. **Computers and Structures**, v. 68, p. 555-560, 1998.

BARTH, T. J. **Simplified numerical methods for gas dynamics systems on triangulated domains**. Tese (Department of Aeronautics and Astronautics) - Stanford University, 1998.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. 1st Edition. ed. USA: John Wiley & Sons, 2009.

CHENG, F. Y. **Matrix Analysis of Structural Dynamics**. New York: Marcel Dekker, 2001.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, A. T. J. R.; REALI, A. Studies of Refinement and Continuity in Isogeometric Structural Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 4160-4183, 2007.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1989.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Element: Computational Aspects**. New Jersey: Prentice Hall, 1984.

COX, M. G. The Numerical Evaluation of B-Splines. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 10, p. 134-149, 1972.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3. ed. Berkeley: Computers & Structures, 1995.

COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric Analysis of Structural Vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5257-5196, 2006.

DE-BOOR, C. On Calculation of B-Splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, p. 50-62, 1972.

DE-BEL, E.; VILLON, P.; BOUILLARD, P. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, p. 1105-1126, 2005.

ENGEL, G.; GARIKIPATI, K.; HUGHES, T. J. R.; LARSON, M. G.; MAZZEI, L. ET AL. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, p. 3669-3750, 2002.

ENGELS, C. Finite Element Modeling of dynamic behavior of some basic structural members. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 114, p. 3-9, 1992.

FARIN, G. E. **NURBS: from projective geometry to practical use**. 2. ed. Natick: A K Peters, 1999.

GANESAN, N.; ENGELS, C. Hierarchical Bernoulli-Euler Beam Finite Elements. **Computer & Structures**, v. 43, p. 297-304, 1992.

GOULD, N. I. M.; HU, Y.; SCOTT, J. A. **A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse, symmetric linear systems of equations**. Oxfordshire: CCLRC Rutherford Appleton Laboratory, 2005. 35p. Relatório Técnico.

HAZARD, L.; BOUILLARD, P. Structural dynamics of viscoelastic sandwich plates by the partition of unity finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 4101-4116, 2007.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135-4195, 2005.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Mineola: Dover Publications, 1987.

LAURSEN, T. A. **Computational Contact and Impact Mechanics**. Springer-Verlag, 2002.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. Fourier p-Element for the Analysis of Beams and Plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 212, p. 179-185, 1998.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 289-314, 1996.

OÑATE, E.; ZÁRATE, F. Rotation-free triangular plate and shell elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 47, p. 557-603, 2000.

PHAAL, R.; CALLADINE, C. R. A simple class of finite elements for plate and shell problems. I: Elements for beams and thin flat plates. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 35, p. 955-977, 1992a.

PHAAL, R.; CALLADINE, C. R. A simple class of finite elements for plate and shell problems. II: an element for thin shells, with only translational degrees of freedom. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 35, p. 979-966, 1992b.

PETTYT, M. **Finite Element Vibration Analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 4. ed. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill, 1993.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. Isogeometric Analysis of Free Vibration of Bars. In: 22ND INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2013, **Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2013**. Ribeirão Preto, Brazil, 2013a.

RAUEN, M.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. Comparison Between the Isogeometric Analysis

and The Enriched Methods to the Problem of Free Vibration of Bars. In: XXXIV IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, **Proceedings of the XXXIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, Brazil, 2013b.

ROGERS, D. F. **Introduction to NURBS: With a historical perspective**. London: Academic Press, 2001.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081-4193, 2001.

SEGERLIND, L. J. **Applied Finite Element Analysis**. New York: John Willey & Sons, 1984.

SCHOJAE, S.; IZADPANAH, E.; VALIZADEH, N.; KIENDL, J. Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 61, p. 23-34, 2012.

STANLEY, G. M. **Continuum-based Shell Elements**. Tese (Divison of Applied Mechanics) - Stanford University, 1985.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. J.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of Aeronautic Society**, v. 23, p. 805-823, 1956.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado em Método Numéricos em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, p. 619-658, 1998a.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II: C1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, p. 659-696, 1998b.

ZENG, P. Introduction to Composite Element Method for Structural Analysis in Engineering. **Key Engineering Materials**, v. 145-149, p. 185-190, 1998c.

ZHOU, Y. X.; SZE, K. Y. A rotation-free beam element for beam and cable analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 64, p. 79-89, 2013.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Volume 1**. 5. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.

**APÊNDICE A - EXEMPLO NUMÉRICO DE CONSTRUÇÃO DE UM
CONJUNTO DE FUNÇÕES DO TIPO NURBS A PARTIR DA FÓRMULA
RECURSIVA DE COX-DE BOOR**

Seja um vetor de nós de controle aberto e não uniforme $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$. Para um número de quatro funções de forma e ordem polinomial última $p = 2$, o número de elementos no vetor de nós de controle deve ser $n + p + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

Iniciando o processo recursivo em $p = 0$ pela equação 8, tem-se:

$$\begin{aligned}
 N_{1,0}(\xi) &= 0. \\
 N_{2,0}(\xi) &= 0. \\
 N_{3,0}(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
 N_{4,0}(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
 N_{5,0}(\xi) &= 0. \\
 N_{6,0}(\xi) &= 0.
 \end{aligned}$$

As funções $N_{1,0}$, $N_{2,0}$, $N_{5,0}$ e $N_{6,0}$ são nulas em todo o domínio pelo fato dos nós de controle ξ_i e ξ_{i+1} referentes a cada função serem idênticos. A figura 75 mostra a representação gráfica das funções de grau $p = 0$.

A partir das funções de ordem $p = 0$ definidas acima, a equação 9 é utilizada para definir as funções de ordem $p = 1$.

$$N_{1,1} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{1,0} + \frac{0 - \xi}{0 - 0} N_{2,0} = 0$$

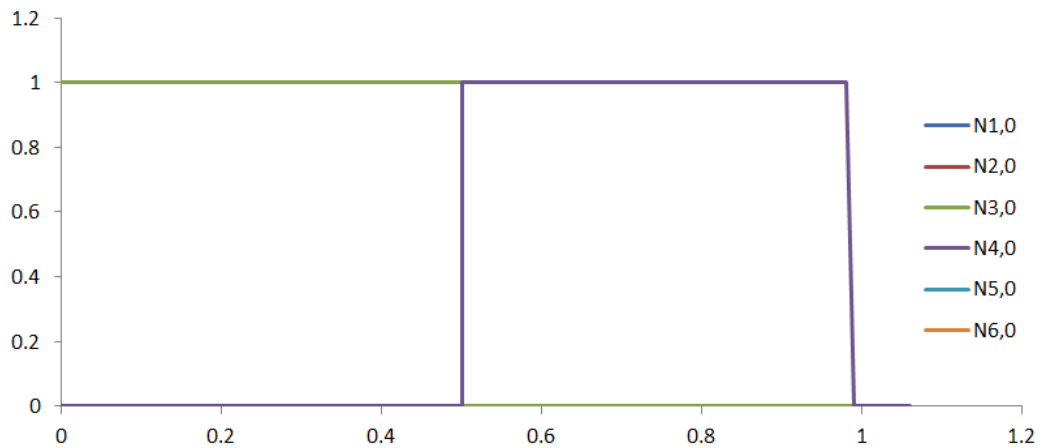


FIGURA 75 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU $P = 0$

$$N_{2,1} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{2,0} + \frac{0.5 - \xi}{0.5 - 0} N_{3,0},$$

$$N_{2,1} = \begin{cases} 1 - 2\xi & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{\xi - 0}{0.5 - 0} N_{3,0} + \frac{1 - \xi}{1 - 0.5} N_{4,0},$$

$$N_{3,1} = \begin{cases} 2\xi & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5, \\ 2 - 2\xi & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{4,1} = \frac{\xi - 0.5}{1 - 0.5} N_{4,0} + \frac{1 - \xi}{1 - 1} N_{4,0},$$

$$N_{4,1} = \begin{cases} 2\xi - 1 & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{5,1} = \frac{\xi - 1}{1 - 1} N_{5,0} + \frac{1 - \xi}{1 - 1} N_{6,0} = 0.$$

No algoritmo de construção das funções B-Splines a indeterminação $\frac{0}{0}$ é considerada equivalente a 0. As representações gráficas das funções NURBS de ordem $p = 1$ são dadas

pela figura 76. A interação para os polinômios de ordem $p = 2$ é feita a partir dos polinômios de ordem $p = 1$ através da mesma equação 9.

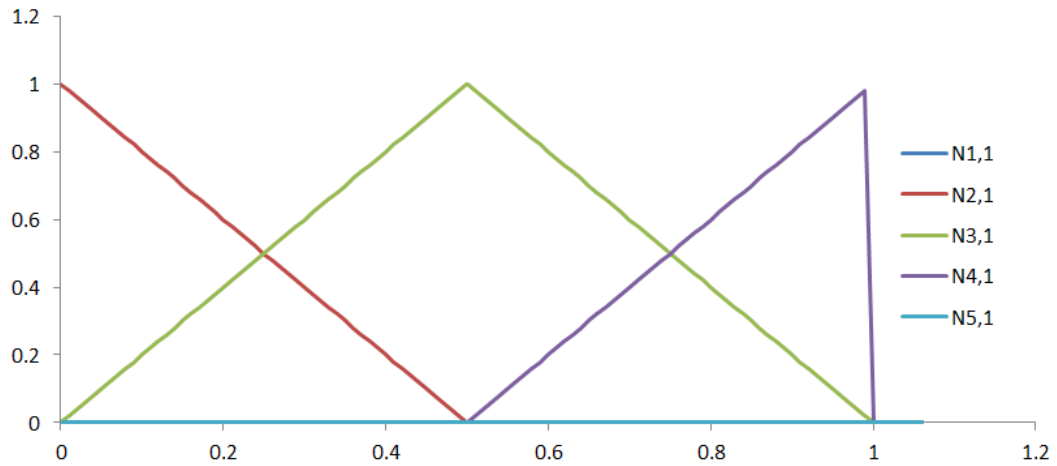


FIGURA 76 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU $P = 1$

$$N_{1,2} = \frac{\xi - 0}{0 - 0} N_{1,1} + \frac{0.5 - \xi}{0.5 - 0} N_{2,1},$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} (1 - 2\xi)^2 & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{\xi - 0}{0.5 - 0} N_{2,1} + \frac{1 - \xi}{1 - 0} N_{3,1},$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} 2\xi(2 - 3\xi) & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5 \\ (1 - \xi)(2 - 2\xi) & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \frac{\xi - 0}{1 - 0} N_{3,1} + \frac{1 - \xi}{1 - 0.5} N_{4,1},$$

$$N_{3,2} = \begin{cases} 2\xi^2 & \text{para } 0 \leq \xi < 0.5 \\ (2 - 2\xi)(3\xi - 1) & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$N_{4,2} = \frac{\xi - 0.5}{1 - 0.5} N_{4,1} + \frac{1 - \xi}{1 - 1} N_{5,1},$$

$$N_{4,2} = \begin{cases} (2\xi - 1)^2 & \text{para } 0.5 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como o vetor de nós de controle foi calculado para $p = 2$, o algoritmo cessa nas funções $N_{1,2}$, $N_{2,2}$, $N_{3,2}$ e $N_{4,2}$. As funções quadráticas calculadas de fato constituem a partição da unidade, pois para o subdomínio $[0, 0.5[$ a soma das funções é dada por:

$$N_{1,2} + N_{2,2} + N_{3,2} + N_{4,2} = (1 - 2\xi)^2 + 2\xi(2 - 3\xi) + 2\xi^2 + 0,$$

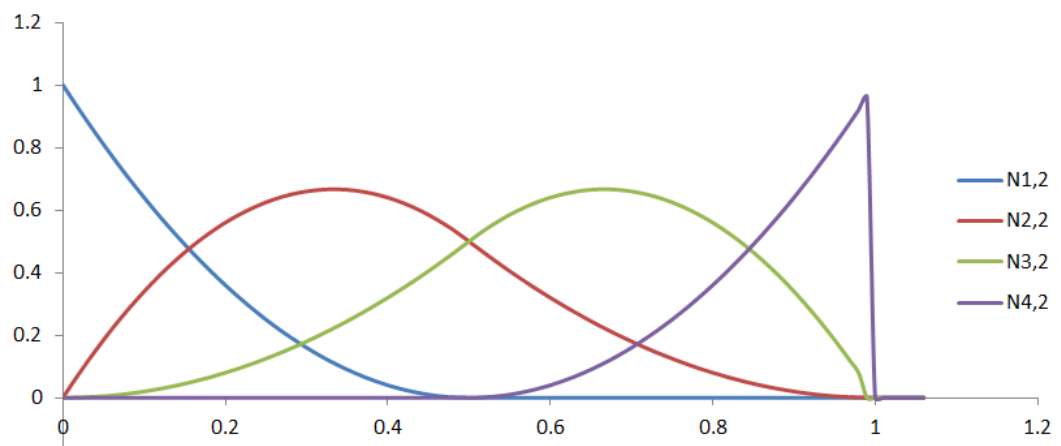
$$N_{1,2} + N_{2,2} + N_{3,2} + N_{4,2} = 1 - 4\xi + 4\xi^2 + 4\xi - 6\xi^2 + 2\xi^2 = 1.$$

Para o subdomínio $[0.5, 1[$ a soma das funções é dada por:

$$N_{1,2} + N_{2,2} + N_{3,2} + N_{4,2} = 0 + (1 - \xi)(2 - 2\xi) + (2 - 2\xi)(3\xi - 1) + (2\xi - 1)^2,$$

$$N_{1,2} + N_{2,2} + N_{3,2} + N_{4,2} = 2 - 2\xi - 2\xi + 2\xi^2 + 6\xi - 2 - 6\xi^2 + 2\xi + 4\xi^2 - 4\xi + 1 = 1.$$

A determinação numérica das funções do tipo NURBS demonstra o fato da parametrização separada por subdomínios delimitados pelos nós de controle distintos. Ou seja, cada função é definida em um elemento isogeométrico. A figura 77 mostra a representação gráfica das funções NURBS de grau $p = 2$ calculadas anteriormente.

FIGURA 77 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES NURBS DE GRAU $P = 2$