

Universidade Federal do Paraná  
Curso de Pós-graduação em Física  
Dissertação de Mestrado

Lucas Gardai Collodel

Campos taquiônicos não-minimamente acoplados,  
abordagem de Palatini e simetrias de Noether

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador:** *Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer*

Curitiba - PR

2014

---

C714c

Collodel, Lucas Gardai

Campos taquiônicos não-minimamente acoplados, abordagem de Palatini e simetrias de Noether [manuscrito] / Lucas Gardai Collodel. – Curitiba, 2014.

111f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Física, 2014.

Orientador: Gilberto Medeiros Kremer

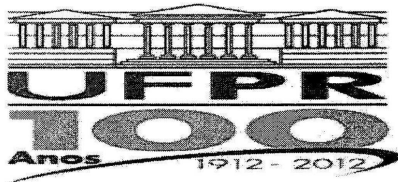
Bibliografia: p. 107-111.

1. Cosmologia. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kremer, Gilberto Medeiros. III. Título.

CDD:

530.11

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

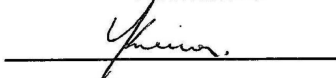
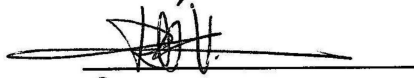
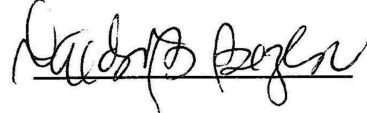
## DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

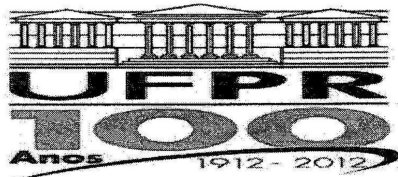
**Campos taquiónicos não-minimamente acoplados,  
Abordagem de Palatini e Simetrias de Noether.**

**ALUNO**

**LUCAS GARDAI COLLODEL**

Em sessão pública iniciada às 14 horas do dia 25 de julho de 2014, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu Aprovar o candidato com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)		<u>A</u>
Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB)		<u>A</u>



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418  
E-mail: [posgrad@fisica.ufpr.br](mailto:posgrad@fisica.ufpr.br)

## PARECER

Os abaixo-assinados membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do aluno **LUCAS GARDAI COLLODEL**, consideram aprovada a redação final da dissertação, cujo título é: “*Campos taquiónicos não-minimamente acoplados, Abordagem de Palatini e Simetrias de Noether*”.

Curitiba, 25 de julho de 2014.

### Banca Examinadora

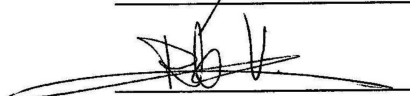
**Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer**  
(UFPR)

**Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana**  
(UFPR)

**Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra**  
(UFPB)

### Assinatura

  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

---

## Agradecimentos

---

- Aos meus pais e irmãos pelo apoio constante;
- Aos amigos e colegas pelas produtivas conversas e momentos de distração;
- Aos professores que abriram suas portas e disponibilizaram seu tempo para discutir tópicos variados;
- Ao CNPq pelo suporte financeiro;
- Ao Grupo FISUX pelo código de formatação dessa dissertação;
- Ao Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer pelos seis anos de paciente orientação desde o início de minha iniciação científica, em meados da minha graduação.

---

## Resumo

---

Neste trabalho, analisamos três modelos cosmológicos com uma ação primária em comum. A energia-escura é interpretada como um campo taquiônico não-minimamente acoplado à gravidade. Em todos os casos, consideramos um Universo composto por energia-escura e matéria, e em um deles, admitimos também a radiação. A conexão afim não é previamente assumida como compatível com a métrica, mas encontrada independentemente através da variação da ação com seu respeito: abordagem de Palatini. As funções que definem o acoplamento não-mínimo e o potencial de auto-interação são obtidas por um gerador de simetria, que restringe a ação à uma que possui determinadas invariâncias sob transformações pontuais. Os resultados obtidos são confrontados com recentes dados observacionais.

---

## Abstract

---

In this work, three models described by a common general action are analyzed. Dark energy is interpreted as a tachyon field non-minimally coupled to gravity. We consider a Universe composed by matter and dark energy in all of the three cases, plus a radiation field in one of them. The affine connection is taken to be metric independent and we find it by the Palatini approach. The functions that define the non-minimally coupling and the self-interaction potential are not set by an *ad-hoc* manner, but by imposing the system to present any Noether symmetry instead. The systems' behavior and the results obtained from them are then compared to recent observational data.

---

## Sumário

---

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Sumário	iv
Introdução	1
<b>1 Relatividade Restrita Revisitada</b>	<b>5</b>
1.1 Eventos . . . . .	6
1.2 Intervalo . . . . .	6
1.3 Transformações de Lorentz . . . . .	9
1.4 Tempo Próprio . . . . .	10
1.5 Contração Espacial . . . . .	11

1.6	Formalismo Covariante . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>13</b>
2.1	Princípio de Equivalência . . . . .	13
2.2	Equações de Movimento . . . . .	16
2.3	Considerações Sobre a Métrica e Conexão Afim . . . . .	18
2.4	Transporte Paralelo . . . . .	20
2.5	Curvatura . . . . .	20
2.5.1	Propriedades do Tensor de Riemann . . . . .	22
2.5.2	Identidades de Bianchi . . . . .	22
2.6	Tensor Energia-Momento . . . . .	23
2.7	Equações de Campo . . . . .	25
2.7.1	Limite de Campo Fraco e a Constante de Einstein $k$ . . . . .	25
2.8	Equações de Campo pelo Princípio Variacional . . . . .	27
2.8.1	Abordagem de Palatini . . . . .	29
2.9	Constante Cosmológica . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Cosmologia</b>	<b>31</b>
3.1	O Princípio Cosmológico . . . . .	32
3.2	Universo em Expansão . . . . .	32
3.2.1	Coordenadas Comoveis . . . . .	33
3.2.2	Desvio para o Vermelho . . . . .	35
3.3	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	36
3.3.1	Geometria Espacial do Universo . . . . .	39
3.4	Equações de Campo . . . . .	40

3.5	Modelos Cosmológicos Simples . . . . .	42
3.6	Parâmetros Observacionais . . . . .	43
3.6.1	Parâmetros de Densidade . . . . .	44
3.6.2	Parâmetro de Desaceleração . . . . .	45
3.6.3	Distância de Luminosidade . . . . .	45
3.7	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	47
3.8	Matéria Escura . . . . .	49
3.9	Energia Escura . . . . .	51
3.10	Inflação . . . . .	52
3.11	Modelo Padrão ou $\Lambda$ CDM . . . . .	55
3.12	Teorias Alternativas . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Simetrias de Noether</b>	<b>58</b>
4.1	Gerador de Transformações Pontuais Infinitesimais e Contínuas . . . . .	59
4.2	Constante de Movimento e o Teorema de Noether . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Campos Taquiônicos não-Minimamente Acoplados</b>	<b>64</b>
5.1	Ação, Conexão e Lagrangiana Pontual . . . . .	66
5.2	Equações de Movimento . . . . .	70
5.2.1	Equação de Friedmann . . . . .	70
5.2.2	Equação da Aceleração . . . . .	71
5.2.3	Equação de Klein-Gordon . . . . .	72
5.3	Transferência de Energia . . . . .	73
5.4	Variação da Constante Gravitacional . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Modelo Cosmológico para Energia-Escura e Matéria</b>	<b>75</b>

6.1	Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação .	76
6.2	Soluções Numéricas . . . . .	78
6.3	Parâmetros Observacionais . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Modelo Cosmológico para Energia-Escura, Matéria e Radiação</b>	<b>84</b>
7.1	Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação .	85
7.2	Soluções Numéricas . . . . .	87
7.3	Parâmetros Observacionais . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Modelo Cosmológico para Energia-Escura e Matéria II</b>	<b>92</b>
8.1	Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação .	92
8.2	Soluções Numéricas . . . . .	96
8.3	Parâmetros Observacionais . . . . .	98
8.4	O Fator de Escala em Perspectiva . . . . .	101
	<b>Conclusão</b>	<b>103</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

---

## Introdução

---

A cosmologia moderna, ciência relativamente nova, ganha cada vez maior atenção por ser capaz de, finalmente, propor um método de investigação à algumas das questões mais antigas e fundamentais tecidas pelo homem. A relatividade geral de Einstein, um dos pilares da física moderna, providenciou o ferramental necessário para tanto, com uma nova e mais apurada interpretação das interações gravitacionais. Ademais, o desenvolvimento de telescópios cada vez mais precisos e aptos a captar radiação nos mais variados intervalos do espectro eletromagnético abriu o horizonte para descobrirmos estruturas antes desconhecidas do Universo, e observarmos eventos distantes no espaço-tempo. A combinação entre observação e um formalismo teórico acerca de uma das interações fundamentais abriu portas para que a ciência começasse a contar uma história para a evolução do Universo como um todo. Os primeiros modelos cosmológicos previram que os aglomerados de galáxia estariam se afastando[1, 2], sugerindo que o espaço-tempo estaria se expandindo, e as observações logo os confirmaram[3]. Então, imaginamos que, no passado, o Universo era muito mais quente e denso, quando o livre caminho médio dos fótons era tão curto que estes estavam aprisionados entre colisões com núcleos e que, conforme a expansão foi progredindo, estes passaram a fluir livremente dando origem à *radiação cósmica de fundo*[4], verificada observacionalmente por acidente, anos depois[5]. Desta forma, foi sendo construída, pouco a pouco, a teoria do *Big-Bang*, que descreve a evolução de tudo aquilo que compõe o cosmos desde seus primeiros instantes. Conforme surgem problemas teóricos ou

observacionais com esta teoria, algumas emendas são feitas, como é o caso da inclusão do período inflacionário[6]. Hoje, acredita-se que o Universo primordial sofreu uma expansão violentamente acelerada, que justifica dentre algumas aparentes inconsistências, a diluição de algumas partículas como os monopolos magnéticos, o alto grau de equilíbrio térmico de radiações provindas de lados opostos do céu e a planaridade em nossa geometria espacial.

Durante a década de 30, algumas observações[7, 8] indicaram que a correlação entre a velocidade de rotação em galáxias espirais e seus raios estava em desacordo com a quantidade de matéria observada, utilizando-se a gravitação universal de Newton. A relatividade geral não oferece nenhuma explicação para o fenômeno, uma vez que esta engloba a gravitação newtoniana em seus limites de campo fraco (em quatro dimensões). No final da década de 90, descobriu-se que a expansão espacial que experimentamos atualmente é acelerada[9, 10]. O modelo do *Big-Bang* até então proposto era incapaz de descrever o porquê. Três são as possibilidades a serem consideradas então: ou existem outras entidades desconhecidas no Universo, que corroboram para tais efeitos; ou a relatividade geral e a gravitação newtonianas tem validade em limites mais estreitos; ou ambas as hipóteses. Os modelos cosmológicos baseados na gravitação de Einstein passaram a admitir dois novos componentes: a matéria-escura, material que não interage pelas forças eletromagnéticas e nucleares, que se comporta como poeira e engloba esfericamente as galáxias, de forma que a curva de rotação das mesmas permaneça constante com o aumento do raio; e a energia-escura, que permeia todo o espaço-tempo e exerce uma pressão negativa capaz de acelerar a expansão. Dentre as teorias que descartam a existência da matéria-escura, a MOND[11] merece atenção especial, por oferecer correções fenomenológicas à gravitação newtoniana aparentemente de acordo com as observações, mas ainda longe de ser bem aceita por pesquisadores.

A natureza da energia-escura permanece especulativa, cuja interpretação abre um leque para uma gama enorme de possibilidades. O chamado *modelo padrão* da cosmologia a interpreta como uma constante cosmológica, sua forma mais simples. Campos escalares, motivados a partir da teoria quântica de campos, são amplamente contemplados na literatura como possíveis agentes responsáveis pela presente expansão acelerada. Outros candidatos extensamente avaliados são campos vetoriais, como o campo Einstein-aether e campos fermiônicos.

Um dos maiores empecilhos das últimas décadas tem sido conciliar a gravitação

com a mecânica quântica, outro pilar da física moderna. A relatividade geral é não-renormalizável, o que gera forte motivação para investigar modificações na ação de *Einstein-Hilbert*. Ao invés de se trabalhar com uma densidade lagrangiana dada simplesmente pelo escalar de curvatura, as teorias conhecidas por  $f(R)$  sugerem que esta seja dada por funções mais gerais deste objeto, sendo por vezes renormalizáveis e podendo descrever a aceleração atual sem a necessidade de inclusão de um ente como a energia-escura.

Teorias *escalares-tensoriais* compõe uma outra forma muito abordada de se generalizar a relatividade geral. Elas assumem a existência de um campo escalar, não somente como fonte de campo gravitacional, mas como um próprio grau de liberdade do mesmo. Isso dá-se por um processo conhecido por acoplamento não-mínimo, quando o campo está acoplado à gravidade não apenas pelo tensor métrico, mas pelo escalar de curvatura também. Tais teorias, conhecidas também por  $f(\phi)$ , são motivadas em teorias quânticas da gravidade por serem passíveis de renormalização. O campo escalar canônico tem sido o mais explorado na construção de modelos enraizados em teorias escalares-tensoriais, embora haja um crescente interesse em campos escalares cujas lagrangianas tenham seus termos cinético e potencial acoplados, como o campo taquiônico por exemplo. Dentro destas teorias, diferentes modelos cosmológicos a fim de descrever a inflação e o comportamento atual do Universo foram vastamente estudados[12–15], assim como interações gravitacionais de curta escala como a dinâmica de buracos-negros[16].

Esta dissertação é intencionada não somente à apresentação dos trabalhos desenvolvidos durante o programa de Mestrado, mas também a servir como guia aqueles estudantes que desejam se iniciar nos estudos da cosmologia. Os dois primeiros capítulos são, por tal motivo, destinados a uma breve revisão da teoria da relatividade (restrita e geral), enquanto o terceiro capítulo aborda os conceitos base da cosmologia moderna e apresenta o cenário atual onde encontra-se nosso conhecimento com base nas mais recentes observações. Na medida do possível, tentamos demonstrar detalhadamente como obtemos as formulações matemáticas que regem as teorias trabalhadas. Devido a necessidade de balancear a profundidade com que os tópicos são abordados com o restrito número de páginas, alguns assuntos foram deixados de fora. Subentendemos que o leitor esteja familiarizado com o cálculo tensorial, introduzido e desenvolvido extensivamente em [17, 18]. Diversas fontes foram utilizadas para a elaboração dos textos destes capítulos. Para um aprofundamento em relatividade restrita, sugerimos o excelente trabalho de Rindler[19].

A maioria dos livros-texto de relatividade geral trazem consigo uma revisão de relatividade especial, e as seções aqui trabalhadas podem ser encontradas com maior completude em [20–27].

O leitor que possui conhecimento prévio de relatividade e cosmologia pode, se assim preferir, ir direto ao capítulo 4. Nele, descrevemos a relação que há entre invariâncias sob transformações pontuais e constantes de movimento. Estas relações foram descobertas e demonstradas sob forma de um teorema por Emmy Noether e publicadas em 1918[28], cunhando ao longo do século XX o termo *simetrias de Noether*. Com grande aplicabilidade em física, este assunto é abordado com diferentes níveis de profundidade em livros de mecânica clássica e física-matemática [29–32]. Alguns artigos de revisão elucidam a importância do teorema em teoria de campos [33, 34], e apresentam o instrumental necessário para se encontrar tais transformações, quando estas não são óbvias [35, 36]. A noção, de que transformações pontuais temporais não implicam somente em conservação de energia, não é clara, e pouco abordada em livros-texto. O trabalho [37] sobre simetrias do oscilador harmônico unidimensional expressa a aplicação do teorema em um nível mais fundamental, porém, muito esclarecedor, apontando como a coleção de transformações invariantes forma, junto com o parenteses de Poisson, um grupo de Lie.

Nos trabalhos a serem apresentados nesta dissertação, consideramos teorias  $f(\phi)$  para o campo taquiônico. No capítulo 5, apresentaremos a ação primária, comum aos três modelos posteriormente apresentados. A partir dela, iremos encontrar, de forma geral, as equações de movimento que regem nossos sistemas. A ação será variada em relação à ambas, métrica e conexão, procurando generalizar a teoria, uma vez que a segunda não necessita ser compatível com a primeira. Este formalismo recebe o nome de *abordagem de Palatini*. Nos capítulos 6, 7 e 8, iremos dar sequência a cada um dos modelos, particularmente. As variadas formas possíveis para a função de acoplamento não-mínimo e para o potencial de auto-interação do campo, que dão origem a tantas obras encontradas na literatura, são estabelecidas através da imposição de que o sistema apresente invariância sob alguma transformação pontual, munindo-os com uma simetria de Noether. Os modelos diferenciam-se entre si pela forma dessas funções, e pela composição que cada um assume para o Universo.

# CAPÍTULO 1

---

## Relatividade Restrita Revisitada

---

O trabalho intitulado "Zur Elektrodynamik bewegten Körper"[38] (Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento) publicado por Albert Einstein (1879-1955) em 1905, relaciona as equações de Maxwell com as leis da mecânica através de um mecanismo que, mais tarde, viria a ser conhecido como a teoria da relatividade restrita.

Trabalhos anteriores, em particular os de Hendrik Lorentz (1853-1928) e Henri Poincaré (1854-1913), já propunham uma relação intrínseca entre espaço e tempo. Einstein, entretanto, teve grande êxito em construir uma teoria sólida sobre uma base formada por dois postulados, por ele aventados. O primeiro postulado, de acordo com as ideias envolvidas em mudanças de referenciais propostas por Galileo Galilei (1564-1642),

- As leis da natureza são idênticas em todos os referenciais inerciais.

O segundo postulado, sobre a constância da velocidade da luz:

- A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores.

Como consequência, espaço e tempo deixam de ser interpretados como entidades in-

dependentes, e formam um meio contínuo chamado espaço-tempo: uma variedade quadridimensional formada por uma coleção de pontos chamados *eventos*.

## 1.1 Eventos

Evento é um ponto no espaço-tempo e refere-se ao acontecimento de absolutamente qualquer fenômeno (a emissão de um fóton por uma fonte, a colisão entre dois corpos, etc). Ele é representado por quatro coordenadas, sendo três espaciais e uma temporal. Por isso, adotamos um espaço de quatro dimensões. Tal conceito é bastante intuitivo, rotineiramente fazemos menção à acontecimentos, e para tanto, especificamos seus locais e datas. A trajetória de uma partícula no espaço-tempo é denominada linha de mundo, ela informa a posição da partícula para cada instante de tempo. Estamos habituados a medir distâncias entre pontos no espaço. No espaço-tempo, a distância entre eventos é denominada *intervalo*.

## 1.2 Intervalo

A distância entre dois pontos no espaço, em mecânica não relativística, independe do referencial. Diferentes geometrias requerem diferentes formas de medir o comprimento. A primeira forma fundamental da geometria diferencial fornece uma definição geral de elemento de linha (que se integrado, entre dois pontos, dá a distância entre os mesmos), aplicável à todo tipo de variedade. Em relatividade, chamamos o elemento de linha (distância entre eventos) de intervalo, e sua forma específica (macroscópica):

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (1.1)$$

A expressão acima aplica-se apenas à relatividade restrita. Percebemos três possibilidades para o intervalo:

- Nulo - Partículas que se movem à velocidade da luz. Suas linhas de mundo são ditas "lightlike".

- Negativo - Partículas que se movem acima da velocidade da luz. Suas linhas de mundo são ditas "spacelike".
- Positivo - Partículas que se movem abaixo da velocidade da luz. Suas linhas de mundo são ditas "timelike".

Compreenderemos melhor estes conceitos analisando o referencial de um observador no espaço-tempo. Ele deve ser munido de um relógio e uma régua, pois observadores movendo-se com diferentes velocidades obtém diferentes medidas de tempo e comprimento. Por simplicidade, consideremos apenas duas dimensões, uma temporal e uma espacial. Para que elas tenham mesma unidade dimensional, multiplicamos todos os pontos do eixo temporal pela velocidade da luz, sem perda de generalidade.

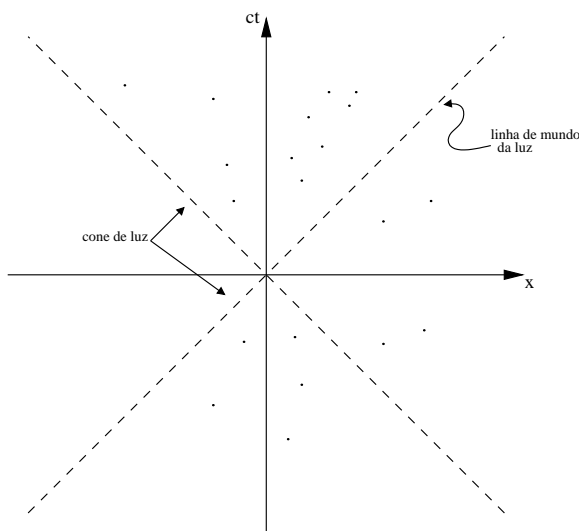


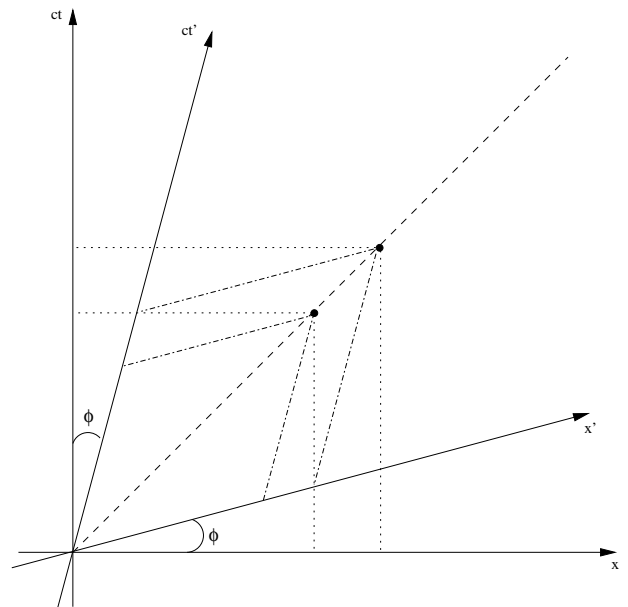
Figura 1.1: Referencial do observador  $\mathcal{O}$ . A linha pontilhada representa a linha de mundo da luz, como vista pelo observador. A junção de todas as trajetórias possíveis para a luz forma uma superfície cônica denominada cone de luz. Cada ponto na figura representa um evento. Os eventos dentro do cone de luz são acessíveis ao observador, ao contrário dos eventos situados fora. A linha de mundo da luz tem sempre, no referencial do observador, uma inclinação de  $\pi/4$ . Se considerarmos dois eventos sobre a linha pontilhada, podemos escrever seu intervalo:  $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$ , como esperado.

O observador  $\mathcal{O}$  situa-se na origem do referencial descrito pela fig. (1.1). Eventos contidos dentro do cone de luz futuro são acessíveis ao observador, significando que ele pode mover-se pelo espaço, enquanto o tempo flui, de forma que a origem do referencial coincida com o evento em questão. Similarmente, eventos presentes no cone de luz do passado podem ter estado em contato com o observador. Contrariamente, eventos fora do cone de luz são inalcançáveis, pois, para acessá-los, o observador teria que viajar a uma velocidade superior à da luz, o que não é possível.

Uma vez que todos os observadores estão imersos no mesmo espaço-tempo, e percebem os mesmos eventos, deve ser possível representar as coordenadas referenciais de

um determinado observador no diagrama de outro. Com isto, conseguimos obter uma relação quantitativa, entre as medições de tempo e comprimento, feitas por observadores com velocidade relativa não nula. Consideremos dois observadores,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$ . O segundo se move com velocidade  $v$  ao longo do eixo  $x$  do primeiro. A imagem será representada, para maior clareza, com as origens dos referenciais sobrepostas. Isto quer dizer que, não somente estão os observadores sobre o mesmo evento no espaço-tempo, mas também, seus relógios estão sincronizados. O eixo  $ct'$  do observador  $\mathcal{O}'$  contém todos os eventos que acontecem para este observador, já que ele não se move em relação a si mesmo. Em outras palavras, este eixo é a linha de mundo do observado. Como ele está em movimento no diagrama de  $\mathcal{O}$ , este eixo deve ter certa inclinação em relação ao eixo  $ct$ . Analogamente, o eixo  $x'$  também deve se inclinar em relação à  $x$ , mas não como imaginamos intuitivamente, quando fazemos rotações no plano cartesiano. O diagrama abaixo representa uma rotação no plano hiperbólico, uma propriedade de espaços pseudo-euclidianos. De acordo com o segundo postulando enunciado no início do capítulo, a velocidade da luz deve ser a mesma para todos os observadores e assim, sua linha de mundo deve ter a mesma inclinação em relação ao eixo espacial que tem em relação ao temporal; sempre, em qualquer referencial. Assim, a inclinação de  $x'$  se dá em mesma magnitude, mas em sentido contrário à de  $ct'$ .

Figura 1.2: Referencial do observador  $\mathcal{O}'$  representado no diagrama de espaço-tempo do observador  $\mathcal{O}$ . A linha pontilhada representa a linha de mundo da luz, como se um fóton fosse emitido na direção positiva de  $x$  no instante em que os observadores se cruzam. Dois eventos estão destacados sobre esta linha de mundo. Os valores de variação temporal e espacial, como visto por ambos observadores, também estão representados pelas linhas pontilhadas ( $\mathcal{O}$ ) e ponto-linha ( $\mathcal{O}'$ ), que conectam os eventos aos eixos dos referenciais. Embora o observador em movimento meça valores menores para as distâncias espaciais e temporais, o intervalo medido continua sendo nulo.



Os eixos do referencial  $S'$  estão inclinados por um ângulo  $\phi$  em relação à  $S$ . Este ângulo nada tem a ver com rotações no espaço-euclidiano, mas com a velocidade relativa dos observadores. Ele é denominado parâmetro de rapidez, e é definido no intervalo

$[0, \pi/4]$ . A tangente hiperbólica da rapidez é igual à velocidade relativa sobre a velocidade da luz ( $\tanh \phi = v/c$ ).

O intervalo entre quaisquer par de eventos no espaço-tempo é invariante sob uma mudança de referenciais. Os exemplos trabalhados acima, embora utilizaram eventos situados sobre a linha de mundo da luz, se aplicam da mesma forma à outros casos. Assim, é fácil compreender que simultaneidade perde o sentido em relatividade: eventos que ocorrem ao mesmo tempo em um determinado referencial, podem acontecer em instantes de tempo sucessivos em outro, mas não arbitrariamente. Nenhum corpo pode viajar acima da velocidade da luz, e acessar eventos fora do seu cone de luz, assim, causa e consequência nunca são invertidas. Este conceito chama-se *causalidade*, e pode ser facilmente verificado através de diagramas como o da fig. (1.2).

### 1.3 Transformações de Lorentz

Na secção anterior, mostramos por meio de um diagrama que observadores em movimento relativo medem diferentes valores para variações temporais e espaciais. Queremos, agora, encontrar as relações matemáticas que regem as transformações de coordenadas. Consideremos, novamente, os dois observadores da fig. (1.2). A rotação no plano hiperbólico relaciona os eixos dos referenciais da seguinte forma:

$$x = x' \cosh \phi + ct' \sinh \phi; \quad ct = x' \sinh \phi + ct' \cosh \phi. \quad (1.2)$$

A intenção é encontrar uma relação independente da rapidez  $\phi$ . Se utilizarmos as transformações acima para uma partícula fixa na origem do referencial  $S'$  (no caso, o próprio observador  $\mathcal{O}'$ ), então,  $x' = 0$  e as relações se reduzem,

$$x = ct' \sinh \phi; \quad ct = ct' \cosh \phi. \quad (1.3)$$

Dividindo a relação da esquerda pela da direita, obtemos o resultado já dado na secção anterior,

$$\tanh \phi = \frac{v}{c}; \quad (1.4)$$

onde  $v$  é a velocidade com que se move o observador  $\mathcal{O}'$  em relação ao  $\mathcal{O}$ . De acordo com as propriedades das funções hiperbólicas, sabemos que:  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ . Substituindo a (1.4) nas relações da (1.2) e, fazendo uso desta propriedade, obtemos,

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x' + vt'); \quad ct = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( x' \frac{v}{c} + ct' \right). \quad (1.5)$$

As relações acima são chamadas *transformações de Lorentz*. Dado o movimento de uma partícula no referencial  $S'$ , necessitamos apenas utilizar as transformações para saber como será o movimento da mesma partícula no referencial  $S$ . As transformações inversas, ou seja, de  $S$  para  $S'$  surgem naturalmente ao trocar as coordenadas com linha pelas sem linha, e, alterando o sinal da velocidade ( $v \rightarrow -v$ ). Perceba que para baixas velocidades, quando  $v/c \rightarrow 0$ , as transformações de Lorentz tomam a forma das de Galileo.

## 1.4 Tempo Próprio

O tempo próprio (representado pela letra grega  $\tau$ ) é o tempo que cada observador mede no seu próprio referencial. Assim,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (1.6)$$

Admitindo que este é o observador  $\mathcal{O}'$  mais uma vez ( $d\tau = dt'$ ), este é o tempo que ele mede enquanto percorre uma distância de  $dx$  no referencial  $S$  do observador  $\mathcal{O}$ . O intervalo, dado em termos das grandezas medidas por  $\mathcal{O}$ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (1.7)$$

Igualando a (1.7) com a (1.6) e manipulando as variáveis,

$$\Delta\tau = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (1.8)$$

Concluimos que o tempo, medido pelo observador em movimento, é sempre menor em

relação ao medido pelo observador em repouso. Devemos salientar que o observador não nota nada de estranho com seu relógio. Ele sente o tempo fluir normalmente, pois, tudo que se move junto com ele experimenta o mesmo fenômeno de *dilatação temporal*.

## 1.5 Contração Espacial

Assim como o tempo é dilatado em um referencial em movimento, as dimensões espaciais nele são contraídas; o que é esperado de acordo com a invariância do intervalo. Considere dois eventos que acontecem simultaneamente no referencial  $S'$  ( $t' = 0$ ). A transformação de Lorentz nos diz:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.9)$$

como queríamos demonstrar.

## 1.6 Formalismo Covariante

A relatividade restrita pode ser elegantemente formulada através de equações tensoriais, o que também torna mais fácil a transição para a relatividade geral. A primeira coisa a se fazer é definir os componentes do quadri vetor posição. No decorrer deste capítulo, trabalhamos com o tempo como sendo uma dimensão a mais em nossa variedade. Assim, os vetores passam a ser quadri vetores, por necessitarem de quatro coordenadas para serem definidos no espaço-tempo. O quadri vetor posição é definido como:

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad (1.10)$$

onde o índice  $\mu$  corre de zero à três, sendo  $x^0 = ct$ . Mencionamos, anteriormente, que a primeira forma fundamental da geometria diferencial fornece, de forma geral, o elemento de linha e que se aplica à todas as variedades.

Ela se escreve:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.11)$$

onde adotamos a *convenção de soma de Einstein*<sup>1</sup>. Aqui,  $ds$  é o intervalo infinitesimal,  $dx^\mu$  o elemento  $\mu$  do quadrivetor infinitesimal das coordenadas, e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico. Em relatividade restrita, existe apenas uma métrica independente, representada por  $\eta_{\mu\nu}$ . Assim, de acordo com a (1.1),

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

O tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  é conhecido como *métrica de Minkowski*<sup>2</sup>. O símbolo  $g_{\mu\nu}$  será usado para representar métricas gerais, enquanto  $\eta_{\mu\nu}$  deve ser, sempre, entendido como a métrica de Minkowski. As transformações de Lorentz são dadas por:

$$dx^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx'^\nu, \quad (1.13)$$

onde  $\Lambda_\nu^\mu$  é o tensor de Lorentz, facilmente obtido ao comparar a equação acima com as transformações dadas pela (1.5). Assim,

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

onde definimos  $\beta = v/c$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

---

<sup>1</sup>Sempre que houver um par de índices iguais, subentende-se uma soma sob todas as dimensões:  $dx^\mu dx_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 dx^\mu dx_\mu$ .

<sup>2</sup>Em homenagem ao matemático Hermann Minkowski (1864-1909), quem unificou espaço e tempo através desta métrica em 1907.

## CAPÍTULO 2

---

### Relatividade Geral

---

Este capítulo é destinado aos princípios básicos que regem a teoria de gravitação mais bem sucedida até o momento. A relatividade geral não é apenas uma teoria elegante e bem aplicável, sua formulação representa uma quebra de paradigma na forma como compreendemos a gravidade. Nesta teoria, o espaço-tempo é descrito pela métrica global  $g_{\mu\nu}$ , um campo dinâmico. Assim, a relatividade geral é a primeira teoria a apresentar independência de fundo. Em outras palavras, ao contrário do que ocorre em todas as formulações teóricas da física que a precederam, o espaço-tempo deixa de ser o palco onde atuam as interações elementares, e passa a ser objeto atuante também. A gravidade manifesta-se por curvaturas no espaço-tempo, e tem como fontes não somente componentes que apresentam massa diferente de zero, mas qualquer entidade dotada de energia.

### 2.1 Princípio de Equivalência

Impossível seria discorrer sobre a relatividade geral sem antes enunciar o princípio de equivalência. Suas consequências formam a base conceitual para compreender a estrutura do espaço-tempo curvo, e sua intrínseca relação com as fontes de campo gravitacional.

Existem de fato, três princípios de equivalência, denominados Princípio Fraco, Princípio de Equivalência de Einstein e Princípio Forte. As formas de enuncia-los variam bastante, sem perda de generalidade. Abaixo, as apresentamos como descritas por Weinberg [26].

- Princípio Fraco: Todos os corpos aceleram igualmente sob a ação de um campo gravitacional, independentemente de suas massas, formas ou composições.
- Princípio de Einstein: Em todos os pontos do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas local, que seja inercial, tal que em uma região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis de movimento tomam a forma daquelas, em um sistema cartesiano não acelerado, na ausência de qualquer campo gravitacional.
- Princípio Forte: Em todos os pontos do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas local, que seja inercial, tal que em uma região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis da natureza tomam a forma daquelas, em um sistema cartesiano não acelerado, na ausência de qualquer campo gravitacional.

O princípio forte é, então, o mais geral. Ele assume que os dois princípios anteriores são válidos, acrescentando a afirmativa de que todas as leis da física são as mesmas para qualquer observador, em qualquer ponto do espaço-tempo. Em geral, ele diferencia-se do princípio de Einstein incluindo experiências gravitacionais no referencial do observador. Isto é, as leis da física ficam inalteradas mesmo quando o corpo teste produz campo gravitacional não negligenciável. Este princípio se aplica à fenômenos que ocorrem em corpos muito massivos, como estrelas e buracos negros; ou à sistemas onde as dimensões dos corpos envolvidos são comparáveis às dimensões dos campos gerados, como em sistemas binários e em interações entre planetas e satélites naturais. Não iremos nos aprofundar mais sobre este princípio.

O princípio fraco tem origem nas discussões apresentadas por Isaac Newton (1642-1727) no *Principia*<sup>1</sup>. Estas, por sua vez, foram inspiradas pelas observações feitas por Galileo, descritas em seu livro *Two New Sciences*<sup>2</sup>. Ao rolar esferas de diferentes massas

<sup>1</sup>Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687.

<sup>2</sup>Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno à Due Nuovo Scienze, 1638.

e composições sobre um plano inclinado, Galileo percebeu que a aceleração experimentada pelos corpos dependia unicamente da inclinação do plano. Newton foi o primeiro a discernir entre massa inercial e massa gravitacional. A primeira refere-se a resistência que um corpo apresenta ao movimento, quando lhe é aplicado uma força de caráter genérico; é a entidade que aparece na segunda lei de Newton. A segunda é a responsável pelas interações gravitacionais descritas pelas leis de Kepler. A massa gravitacional ainda subdivide-se em duas: a ativa, responsável pela criação de um campo gravitacional, e a passiva, que reage às ações do campo. Uma série de experimentos com pêndulos foi feita por Newton, a fim de identificar possíveis variações - na razão entre a massa inercial e gravitacional - entre diferentes compostos materiais. Nenhuma diferença foi observada. Anos mais tarde, Loránd Eötvös (1848-1919), utilizando uma balança de torção, objetos de madeira e platina, estabeleceu que caso exista alguma diferença na razão de massas entre materiais diferentes, ela deve ser menor que uma parte em um bilhão. Durante o século XX, outras experiências[39] foram realizadas, e hoje sabemos que se tal variação existe, ela deve ser inferior à  $10^{-13}$ .

Einstein, em posse destas observações, teve uma epifania em 1907, quando já buscava uma teoria da gravitação que fosse compatível com a relatividade restrita. O pensamento (que segundo ele mesmo teria sido o mais feliz de sua vida) que lhe ocorreu, foi que um corpo em queda livre não sente seu próprio peso. Apresentamos, a seguir, dois famosos experimentos mentais muito similares, em que um observador encontra-se dentro de uma caixa fechada, e sujeito à diferentes situações. No primeiro experimento, a caixa (contendo nosso observador) está em queda livre sob a ação de um campo gravitacional. Em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo, onde o campo é homogêneo, o observador interno não pode realizar nenhum tipo de experiência que detecte tal campo. Em outras palavras, ele não consegue afirmar se está, de fato, em queda livre, ou se está longe da ação de qualquer campo gravitacional, como nas profundezas do vazio. No segundo experimento, a caixa está sobre a superfície de um corpo massivo, fonte de campo gravitacional, como a Terra por exemplo. Dentro da caixa, o observador não pode dizer se está, de fato, sobre a superfície do planeta, ou se há propulsores na face inferior da caixa, acelerando-a com mesma intensidade que a aceleração gravitacional da Terra.

As conclusões acima foram, então, compactadas no princípio de equivalência de Einstein, anteriormente enunciado. De acordo com este princípio, em uma região suficiente-

mente pequena do espaço-tempo munido de campo gravitacional, a ação deste campo não é detectada, de forma que a força gravitacional assume a característica de força inercial. Nesta região, a dinâmica do sistema retorna àquela da relatividade restrita, na qual o espaço-tempo é representado pela métrica de Minkowski.

Em geometria diferencial, segundo o axioma formulado por Gauss: dado um ponto em uma superfície curva qualquer, é sempre possível encontrar uma região suficientemente pequena em torno deste ponto, onde a superfície apresenta propriedades euclidianas. A semelhança entre o princípio de equivalência de Einstein e o axioma de Gauss é inconteste.

Einstein inferiu que a interação gravitacional, por seu carácter universal, deve ser interpretada como curvatura no espaço-tempo, descrito por uma métrica global  $g_{\mu\nu}$ . Essa métrica, localmente plana, é compreendida como um campo na relatividade geral, assim como suas derivadas, em analogia ao potencial e campo gravitacional newtoniano. Todas as coisas que permeiam o Universo devem estar acopladas à ele. Não se pode coexistir com a métrica e não interagir com ela. O conceito de força gravitacional perde seu sentido, e com isto, a ideia de partícula livre também se altera. Em relatividade geral, uma partícula livre é aquela que não está sob a ação de nenhuma força externa. Uma vez que a gravidade é um efeito geométrico, uma partícula sob a ação de um campo gravitacional permanece livre.

Uma vez que não há referenciais privilegiados, em relatividade geral, e as leis da natureza são as mesmas para todos eles; as equações que regem essa teoria devem ser escritas de uma só forma para todos os observadores, fazendo uso do formalismo tensorial. Esta consequência do princípio de equivalência chama-se *princípio de covariância geral*. Segundo ele, as equações são invariantes sob mudanças de referenciais e, ainda, se uma equação é válida em relatividade restrita, ela deve permanecer válida em relatividade geral, fazendo-se as devidas transformações ( $\partial \rightarrow \nabla; \eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ ).

## 2.2 Equações de Movimento

Uma partícula livre, em relatividade geral, move-se pelo espaço-tempo sem estar sujeita à ação de nenhuma força, embora interaja gravitacionalmente. No referencial  $\chi^\alpha$  da

partícula, sua linha de mundo deve ser uma linha reta no espaço-tempo:

$$\frac{d^2\chi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde o tempo próprio  $\tau$  é dado pelo elemento de linha de mundo da partícula (no sistema referencial próprio),

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}d\chi^\mu d\chi^\nu. \quad (2.2)$$

O elemento de linha é invariante e podemos reescrever a equação acima em um sistema de coordenadas qualquer,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu}d\chi^\mu d\chi^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial\chi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d\chi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

indicando a útil relação que iremos utilizar mais tarde,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d\chi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.4)$$

Reescrevendo a (2.1) em um sistema referencial genérico,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial^2\chi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \\ &= \frac{\partial^2\chi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \\ &= \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde contraímos de acordo com a relação,

$$\frac{\partial\chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda. \quad (2.6)$$

A (2.5) é chamada *equação da geodésica*, e rege as leis de movimento para corpos livres, em relatividade geral. Note que para o espaço-tempo plano ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ), recaímos

na equação da partícula livre na relatividade restrita  $d^2x^\lambda/d\tau^2 = 0$ . Nos passos feitos para chegarmos à equação da geodésica, definimos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \chi^\alpha}, \quad (2.7)$$

intitulado *símbolo de Christoffel de segundo tipo*, ou *conexão afim*. Note que a conexão, assim definida, é simétrica nos índices covariantes; isto não acontece em variedades munidas de torção. Existe também o símbolo de Christoffel de primeiro tipo  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ . Os dois tipos são relacionados subindo ou baixando o índice que não pertence à simetria ( $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\lambda} \Gamma_{\mu\nu\lambda}$ ). Devemos lembrar que esta conexão não é um tensor, pois não se transforma como tal. Assim, não é possível subir ou baixar os outros índices, o símbolo existe apenas nestas duas formas enunciadas. Veremos que esta conexão desempenha papel singular em relatividade geral. Multiplicando a equação acima por  $\frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\lambda}$  e contraindo, obtemos

$$\frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \chi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.8)$$

## 2.3 Considerações Sobre a Métrica e Conexão Afim

Antes de discorrer sobre as características e propriedades físicas e matemáticas da métrica e da conexão, é interessante demonstrar a relação entre essas duas quantidades. Tomando a derivada parcial da (2.4) com relação à coordenada  $x^\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \chi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \chi^\beta}{\partial x^\rho} \\ &= g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\ &= \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\nu\mu}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde utilizamos a (2.8). Permutando os índices do termo ao lado esquerdo da igualdade na equação acima, obtemos mais duas relações:

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\nu\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda}. \quad (2.11)$$

Somando as duas equações acima, subtraindo a (2.9) e fazendo uma pequena manipulação das variáveis, obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right). \quad (2.12)$$

Por vezes, chamamos a quantidade acima de *conexão métrica*, por sua intrínseca relação com a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Veremos, ao longo desta dissertação, que em teorias alternativas à relatividade geral, a conexão afim pode diferir da conexão métrica. Ambas têm profundo significado físico em relatividade geral. Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável, dotada de produto interno. A métrica é o objeto que dá a estrutura deste produto interno, como vimos pela (2.4); ela também é necessária para definir ângulos e comprimentos, vide a (1.11). Essa variedade diferenciável é um conjunto formado ao unir diversos mapas, localmente planos, gerando um atlas<sup>3</sup>. A conexão afim, como o próprio nome elucida, conecta estas cartas, que nada mais são do que espaços tangentes definidos em diferentes pontos da variedade. Assim, a conexão é quem garante a diferenciabilidade da variedade; define a derivada covariante e conseqüentemente o transporte paralelo de vetores, como veremos a seguir. Tais noções estão fortemente relacionadas com a curvatura da variedade, no nosso caso o espaço-tempo. Fisicamente, interpretamos o campo métrico como o potencial do campo gravitacional, sendo constante longe das fontes. Similarmente, as derivadas do potencial, que fornecem a conexão, representam o próprio campo. Isto pode ser facilmente compreendido se refletirmos sobre a construção da relatividade geral. Se assumirmos válido o princípio de equivalência, então devemos interpretar a interação gravitacional como sendo inercial, isto é, podemos anular os efeitos gravitacionais, localmente, fazendo uma simples mudança de referencial, assim como na (2.1). Portanto, o campo gravitacional deve ser representado por um objeto matemático que não seja um tensor, pois se este é nulo em algum referencial qualquer, então será nulo em todos. A conexão afim não tem caráter tensorial, podendo valer zero em um determinado referencial mas não em qualquer referencial.

<sup>3</sup>Estas quantidades são objetos de estudo da topologia e da geometria diferencial. Para maior detalhamento, o livro do senhor Carroll[21] introduz, no segundo capítulo, o cálculo em variedades de forma bastante rigorosa.

## 2.4 Transporte Paralelo

Vetores em coordenadas cartesianas tem suas bases fixas, porém, sabemos que ao tomar a derivada de um vetor escrito em coordenadas genéricas, devemos derivar não apenas as componentes do vetor como também os versores. O mesmo princípio se aplica no cálculo tensorial. A variação de um vetor em relação à coordenada  $x^\alpha$  é dada pela derivada covariante, a saber,

$$\nabla_\alpha V^\beta = \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta V^\gamma. \quad (2.13)$$

A derivada covariante de um tensor de ordem  $(p, q)$  gera outro tensor de ordem  $(p, q + 1)$ , ao contrário da derivada parcial, cuja transformação só é tensorial em espaços planos. A conexão tem a função de corrigir a variação do sistema de coordenadas ao longo de uma curva. Tomemos um vetor genérico  $V^\alpha$  no ponto  $x^\alpha$  e o deslizemos infinitesimalmente até o ponto  $x^i + dx^i$  de uma geodésica, tal que seu ângulo em relação à tangente da curva permaneça constante. Este processo é chamado *transporte paralelo*. Ao juntarmos a origem do vetor original e do vetor deslizado e medirmos sua diferença, o resultado é dado em termos da conexão afim:  $\delta V^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma dx^\beta$ . A derivada covariante da métrica é nula,

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.14)$$

podendo ser facilmente verificada através da (2.12).

## 2.5 Curvatura

O transporte paralelo é bastante útil tanto para visualizar o que é a *curvatura* de uma variedade, quanto para medi-la quantitativamente. Tomemos como exemplo uma hiper-superfície  $\mathcal{S}$  qualquer. Uma pequena região desta superfície é limitada por curvas geodésicas, tal que a hiper-área definida dentro do contorno seja  $\Delta A^{\beta\lambda}$ . Dado um vetor  $V^\alpha$  definido na intersecções de duas destas curvas, vamos transporta-lo paralelamente ao longo de todo o circuito até que ele retorne ao ponto de origem. O vetor deslizado e o

vetor original não coincidem, como vimos acima. A diferença será dada por

$$\begin{aligned}
\Delta V^\alpha &= - \oint_{\partial S} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma dx^\beta \\
&= \frac{1}{2} \int_S \left[ \frac{\partial (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha V^\gamma)}{\partial x^\beta} \right] dA^{\beta\lambda} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha V^\gamma)}{\partial x^\beta} \right] \Delta A^{\beta\lambda}, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o teorema de Stokes. Como a região da hiper-superfície contornada pelas geodésicas é muito pequena, consideramos que os termos dentro dos colchetes permanecem constantes na integração. Ademais, como o vetor foi transportado paralelamente durante todo o percurso, sua derivada covariante é nula, tal que

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma = - \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{2.16}$$

Substituindo a relação acima na equação (2.15), encontramos

$$\Delta V^\alpha = - \frac{1}{2} R_{\gamma\lambda\beta}^\alpha V^\gamma \Delta A^{\beta\lambda}, \tag{2.17}$$

onde definimos o *tensor de curvatura de Riemann*,

$$R_{\gamma\lambda\beta}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\beta\tau}^\alpha \Gamma_{\lambda\gamma}^\tau - \Gamma_{\lambda\tau}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\tau. \tag{2.18}$$

Concluimos que o vetor original e o vetor transportado só serão idênticos caso o tensor de curvatura seja nulo. Este é o tensor mais geral que pode ser construído a partir da métrica e suas derivadas de primeira e segunda ordem, sendo linear nestas últimas. Entretanto, é possível gerar outros tensores a partir deste, fazendo uma contração com a métrica. O *tensor de Ricci*,

$$R_{\gamma\beta} = R_{\gamma\lambda\beta}^\lambda, \tag{2.19}$$

e o *escalar de curvatura*,

$$R = g^{\gamma\beta} R_{\gamma\beta}. \tag{2.20}$$

### 2.5.1 Propriedades do Tensor de Riemann

Vamos listar, a seguir, três importantes propriedades de simetria do tensor de curvatura, os quais aplicaremos logo mais. Para tanto, vamos fazê-lo com o tensor escrito em sua forma totalmente covariante:  $R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = g_{\sigma\alpha}R^{\alpha}_{\gamma\lambda\beta}$ . Expresso abertamente,

$$R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\sigma \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \right) + g_{\mu\nu} (\Gamma_{\beta\sigma}^\mu \Gamma_{\gamma\lambda}^\nu - \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\gamma\beta}^\nu), \quad (2.21)$$

sendo mais fácil a verificação das propriedades citadas abaixo:

- Simetria:  $R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = R_{\lambda\beta\sigma\gamma}$ .
- Anti-Simetria:  $R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = -R_{\gamma\sigma\lambda\beta} = -R_{\sigma\gamma\beta\lambda} = R_{\gamma\sigma\beta\lambda}$ .
- Ciclicidade:  $R_{\sigma\gamma\lambda\beta} + R_{\sigma\beta\gamma\lambda} + R_{\sigma\lambda\beta\gamma} = 0$ .

### 2.5.2 Identidades de Bianchi

Continuamos a investigação acerca do tensor de curvatura mostrando que este obedece as identidades de Bianchi. Essa qualidade se mostrará muito valiosa nas seções seguintes, quando falarmos sobre as equações de campo de Einstein. A derivada covariante do tensor de curvatura (2.21), tomada em um ponto onde possamos adotar um referencial inercial tal que as conexões, porém não suas derivadas, sejam nulas, se escreve

$$\nabla_\tau R_{\sigma\gamma\lambda\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \left( \frac{\partial^2 g_{\gamma\lambda}}{\partial x^\sigma \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\gamma\beta}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \right). \quad (2.22)$$

As identidades são obtidas permutando-se o índice da derivada com os dois últimos índices do tensor de curvatura, tal que:

$$\nabla_\tau R_{\sigma\gamma\lambda\beta} + \nabla_\beta R_{\sigma\gamma\tau\lambda} + \nabla_\lambda R_{\sigma\gamma\beta\tau} = 0. \quad (2.23)$$

A importância desta relação se fará clara à seguir. Fazemos uma contração com  $g^{\sigma\lambda}$ , tal qual fizemos para obter o tensor de Ricci. No segundo termo, aplicamos a propriedade de anti-simetria em seus terceiro e quatro índices, e então contraímos. À respeito do

terceiro termo, lembramos que a derivada covariante da métrica é nula.

$$\nabla_\tau R_{\gamma\beta} - \nabla_\beta R_{\gamma\tau} + \nabla_\lambda R_{\gamma\beta\tau}^\lambda = 0. \quad (2.24)$$

Contraindo com  $g^{\gamma\beta}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\tau R - \nabla_\beta R_\tau^\beta - \nabla_\lambda R_\tau^\lambda \\ 0 &= \nabla_\mu R_\tau^\mu - \frac{1}{2} \nabla_\tau R \\ 0 &= \nabla_\mu \left( R_\tau^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\tau^\mu \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Multiplicando os termos por  $g^{\tau\nu}$ , obtemos por fim:

$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.26)$$

A quantidade dentro dos parênteses é denominada *tensor de Einstein*,

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Embora o quadri-divergente do tensor de curvatura não seja nulo, através das identidades de Bianchi, pudemos encontrar um outro tensor que o seja. Na seção seguinte veremos que esta relação está intrinsecamente ligada com a ideia de Einstein de que a deformação geométrica do espaço-tempo é originada pelas fontes de energia.

## 2.6 Tensor Energia-Momento

O tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ , em relatividade, é um tensor simétrico que descreve o fluxo da componente  $\mu$  do quadri-momento  $p^\mu$  através da hiper-superfície com  $x^\nu$  constante. Este tensor é de grande utilidade pois pode ser escrito para qualquer objeto físico que contenha energia, seja este descrito por um sistema de partículas ou campos. As componentes do tensor energia-momento são,

- $T^{00}$ : Densidade de energia.

- $T^{i0}$ : Densidade de momento linear.
- $T^{ii}$ : Tensão normal na direção  $i$ , pressão.
- $T^{ik} (i \neq k)$ : Tensão de cisalhamento.

Abaixo, citamos a forma do tensor energia-momento para três tipos de sistemas.

- Campo Eletromagnético  $F^{\mu\nu}$ :

$$T^{\mu\nu} = F_{\tau}^{\mu} F^{\nu\tau} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}, \quad (2.28)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  é o tensor do campo eletromagnético.

- Sistema de Partículas Pontuais:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_n m_n \int \delta^4(x - x_n) \frac{dx_n^{\mu}}{d\tau} dx_n^{\nu}, \quad (2.29)$$

onde  $m_n$  indica a massa da  $n$ -ésima partícula, assim como  $x_n^{\nu}$  representa a componente  $\nu$  do vetor de posição da  $n$ -ésima partícula.

- Fluido Perfeito:

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

onde  $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$  é a quadri-velocidade do fluido.

O quadri-divergente do tensor energia-momento é igual a densidade da quadri-força externa que atua no sistema. Em um sistema isolado,  $T^{\mu\nu}$  é uma quantidade covariantemente conservada:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.31)$$

Esta relação já era conhecida para sistemas em variedades planas ( $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^{\mu} = 0$ ). Einstein sabia que este deveria ser o tensor que representaria as fontes do campo gravitacional. Por tal motivo, ele buscou um tensor simétrico, com base no tensor de curvatura, que fosse uma quantidade conservada.

## 2.7 Equações de Campo

O tensor energia-momento é tido como a fonte de campo gravitacional, deformando a geometria do espaço-tempo. O desenvolvimento do texto até agora foi direcionado à este ponto crucial da teoria. Igualando (2.26) e (2.31), e integrando, obtemos as famosas *equações de campo de Einstein*,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

um conjunto de 10 equações diferenciais de segunda ordem.

As equações de campo, nesta forma tensorial, tem uma estrutura intencional; os termos ao lado esquerdo da igualdade representam a geometria, enquanto ao lado direito temos as fontes do campo. John Wheeler (1911-2008) sintetizou em uma única frase as ideias por trás desta equação: "*Espaço-tempo diz à matéria como se mover; matéria diz ao espaço-tempo como se curvar*"[40].

### 2.7.1 Limite de Campo Fraco e a Constante de Einstein $k$

A relatividade geral (em quatro dimensões) deve recair na mecânica newtoniana, dentro dos limites de campo fraco. Dada uma partícula que se move lentamente em um campo gravitacional fraco e estático; reescrevemos a (2.5) como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (2.33)$$

onde desprezamos os termos espaciais da quadri-velocidade, uma vez que a partícula se move lentamente. Como o campo é estático, a conexão fica

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}. \quad (2.34)$$

A métrica que representa o campo fraco é dada por uma perturbação na métrica de Minkowski:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

tal que  $|\epsilon^{\mu\nu}| \ll 1$ . Substituindo na (2.34) e esta na (2.33), obtemos em primeira ordem

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \epsilon_{00}}{\partial x^\nu} \left( \frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (2.36)$$

Uma vez mais, utilizando o argumento de campo estático, e que  $dt/d\tau$  é constante,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \nabla \epsilon_{00}, \quad (2.37)$$

onde  $\nabla$  é o gradiente tridimensional e não deve ser confundido com a derivada covariante. Em mecânica newtoniana, o gradiente do potencial gravitacional é

$$\nabla \phi = -\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}, \quad (2.38)$$

de forma que a (2.37) fornece a relação

$$\epsilon_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + b, \quad (2.39)$$

onde  $b$  é uma constante. O potencial gravitacional newtoniano é dado por:

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (2.40)$$

e tende à zero quando a distância tende ao infinito. Exigimos que a métrica se torne a de Minkowski para grandes valores de  $r$ , sendo que para isso  $b = 0$ . Assim, concluímos que  $g_{00} \simeq 1 + 2\phi/c^2$ . De acordo com a equação de Poisson gravitacional, inferimos:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho \rightarrow \nabla^2 g_{00} = -\frac{8\pi G\rho}{c^2}. \quad (2.41)$$

onde  $G$  é a constante universal da gravitação e  $\rho$  é a densidade de matéria não relativística que produz este campo fraco. Sabemos que, de acordo com a (2.30),  $T_{00} = c^2\rho$ . Assim, para que as equações de campo sejam válidas para campos fracos, exigimos que, neste limite,  $G_{00} = \nabla^2 g_{00}$ . A constante de Einstein é dada, então, por  $k = -8\pi G/c^4$ . As equações de campo, tornam-se

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

## 2.8 Equações de Campo pelo Princípio Variacional

O princípio variacional é amplamente usado nos estudos envolvendo relatividade geral e cosmologia. Este fato deve-se à simplicidade de se obter as equações de movimento a partir da variação da ação, uma vez que tenha se fixado uma lagrangiana. Visando obter as equações de campo, vamos considerar uma ação  $S_g$  para o campo gravitacional e uma  $S_f$  para as fontes deste campo, tal que  $\delta S_g + \delta S_f = 0$ . A ação é dada pela integral no tempo da lagrangiana do sistema. Exigimos que esta lagrangiana seja uma função escalar e invariante de Lorentz, para que esteja de acordo com os postulados da relatividade geral. A ação,

$$S = S_g + S_f = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_f, \quad (2.43)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci,  $g$  é o determinante da métrica e  $\mathcal{L}_f$  é a densidade lagrangiana das fontes de campo, um escalar de peso zero. A quantidade  $\sqrt{-g} d^4x$  representa o elemento invariante de hiper-volume, sendo  $\sqrt{-g}$  uma densidade escalar de peso  $-1$  e  $d^4x$  uma densidade de peso  $1$ . A variação de  $S_g$  em relação à  $g^{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R) \\ &= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os dois primeiros termos já estão escritos em termos de  $\delta g^{\mu\nu}$ , como desejamos. A variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma + \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.45)$$

Embora a conexão afim não seja um tensor, sua variação  $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  o é; sendo possível definir sua derivada covariante. A (2.45) se reduz à

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma. \quad (2.46)$$

Retomando a integral (2.44), o terceiro termo ao lado direito da igualdade, que cha-

maremos de  $\mathcal{I}_3$ , fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\sigma \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\sigma) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu) \\
&= \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \sqrt{-g} g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu) \\
&= \oint dS_\sigma (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \sqrt{-g} g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde aplicamos o teorema de Gauss, transformando a integral volumétrica em uma integral de superfície na qual  $dS_\sigma$  é o elemento de hiper-superfície. A variação, porém, é nula nesta hiper-superfície (extremidades fixas), zerando o termo  $\mathcal{I}_3$  na integral (2.44). Este tratamento é bastante comum e o utilizaremos diversas vezes ao longo do texto. A variação da ação do campo fica

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \tag{2.48}$$

O tensor energia-momento é definido,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_f)}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{2.49}$$

tal que a variação da ação total se torna:

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \tag{2.50}$$

A variação  $\delta g^{\mu\nu}$  é arbitrária, tornando nula a quantidade dentro dos parênteses. Assim, obtemos as equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{2.51}$$

### 2.8.1 Abordagem de Palatini

A variação da ação de Einstein-Hilbert, da forma realizada acima, assume, a priori, que a conexão afim é, de fato, a conexão de Levi-Civita. Esta não é, entretanto, a abordagem mais geral que podemos fazer para obter as equações de campo a partir de primeiros princípios. A abordagem de Palatini<sup>4</sup> consiste em tratar a conexão afim como quantidade, a priori, independente da métrica. A ação para o campo gravitacional é função destas duas quantidades e deve ser variada em relação à elas separadamente. A variação da ação (2.43) em relação à conexão se dá apenas pelo tensor de Ricci, de acordo com a (2.46) temos,

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} [\delta_{\sigma}^{\nu}\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}) - \nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})] = 0, \quad (2.52)$$

onde descartamos previamente os termos de superfície, de acordo com o teorema de Gauss.

A variação da conexão é arbitrária, mas devido a simetria em seus índices covariantes (não há torção) devemos simetrizar a quantidade dentro dos colchetes,

$$\frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\nu}\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}) + \frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\mu}\nabla_{\lambda}(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}) - \nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.53)$$

A contração da equação acima com  $\delta_{\mu}^{\sigma}$  ou  $\delta_{\nu}^{\sigma}$  gera

$$\nabla_{\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0; \quad (2.54)$$

enquanto a contração com  $g_{\mu\nu}$ , junto com o resultado acima apresentado, provê

$$\nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0 \rightarrow \nabla_{\sigma}g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.55)$$

indicando que o tensor métrico é transportado paralelamente. Na relatividade geral, mesmo quando abordada como quantidade independente, a conexão afim é dada pela conexão métrica (vide seção 2.3). Veremos, posteriormente, que ações alternativas podem gerar diferentes resultados.

<sup>4</sup>Erroneamente atribuída à Attilio Palatini (1889-1949), foi desenvolvida por Einstein em 1925[41].

## 2.9 Constante Cosmológica

Einstein havia chegado neste sistema de equações diferenciais em 1915, época em que, devido à falta de dados observacionais, acreditava-se que o Universo era estático. Acreditando que a gravidade implicaria na contração do Universo (pelo seu caráter atrativo), Einstein introduziu um termo extra às equações de campo, em 1917. Este termo deveria acarretar uma distribuição quasi-estática de matéria.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

A *constante cosmológica de Einstein*  $\Lambda$  deve ser extremamente pequena ou a relatividade não recairia na mecânica newtoniana na aproximação de campo fraco. Ainda há conservação do tensor de Einstein  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ , porém, a geometria não depende mais apenas das derivadas da métrica.

## CAPÍTULO 3

---

### Cosmologia

---

A cosmologia é, possivelmente, uma das mais antigas ciências praticadas pela humanidade, havendo registro de ideias babilônicas que datam de três mil anos antes de Cristo[42]. Embora a abordagem feita pelos povos do passado não tenha sido estritamente científica, da forma como concebemos, é interessante notar que questões a respeito de nossa origem e evolução, enquanto natureza, sempre estiveram presentes no pensamento humano.

O berço da cosmologia moderna está no advento da relatividade geral, assim como no desenvolvimento de telescópios que permitem observar o Universo em um largo intervalo do espectro eletromagnético - de ondas de rádio aos raios-gamma. O primeiro instrumento a detectar fontes astronômicas de ondas de rádio, em 1931, era uma antena construída por Karl Guthe Jansky (1905-1950), o que inspirou a criação pioneira de Grote Reber (1911-2002): um radiotelescópio instalado no quintal de sua casa, em 1937. Este tipo de aparato foi fundamental para o descobrimento de estruturas astronômicas como as estrelas de nêutrons e galáxias distantes, por exemplo. Outros tipos de telescópios (infra-vermelho, raio-x), desenvolvidos mais tarde, permitiram uma melhor compreensão quanto a formação estelar, e também de maiores estruturas como galáxias. As observações astronômicas são fundamentais para a formulação de uma teoria de evolução consistente do Universo.

## 3.1 O Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico estabelece um ponto de partida para o estudo do Universo, afirmando que este, em larga escala, é homogêneo e isotrópico. Como consequência, não assumimos uma posição privilegiada no espaço, como se acreditou por tanto tempo. Este princípio foi proposto por Edward Milne (1896-1950) durante os anos trinta e, posteriormente, reforçado pelas observações de Walter Baade (1893-1960), as quais indicavam que a Via Láctea é uma galáxia típica, sem propriedades especiais quando comparada às suas semelhantes. Em outras palavras, o princípio indica que dois observadores, mesmo que localizados em galáxias distantes entre si, terão a mesma interpretação do Universo. Isto não significa, porém, que observadores experimentam as mesmas coisas em qualquer ponto espacial do Universo. A superfície de Vênus continua sendo muito mais quente que a da Terra, e certamente os arredores de um buraco-negro são munidos de um campo gravitacional muito mais forte que os arredores do Sol. Entretanto, em larga escala, as propriedades físicas de todos os pontos do Universo são idênticas. Quão larga deve ser esta escala? Evidentemente muito maior do que as maiores estruturas presentes no Universo. Assim, tal conceito ainda é subjetivo, uma vez que enormes objetos ainda são identificados por astrônomos<sup>1</sup>. Estabelecemos, então, que o princípio cosmológico pode ser admitido a partir de algumas centenas de megaparsecs. Um parsec (pc) é definido como sendo o cateto adjacente de um segundo de arco quando o cateto oposto vale uma unidade astronômica; mais especificamente  $1\text{pc} \sim 3261$  anos-luz.

## 3.2 Universo em Expansão

Anteriormente às revelações fornecidas pela relatividade geral, acreditava-se que o Universo era estático (em larga escala); isto é, pensávamos que, exceto pelos movimentos peculiares do astros, as distâncias inter-galácticas permaneciam constantes. As equações de campo de Einstein, entretanto, mostram o contrário. Em 1922, Alexander Friedmann (1888-1925) demonstrou, a partir destas equações, que um Universo composto por matéria deveria sofrer uma expansão desacelerada[1]. Em 1927, Georges Lemaître (1894-1966)

---

<sup>1</sup>Em 2012, o grupo liderado por Roger Clowes descobriu o Huge-LQG, um sistema formado por 73 quasares medindo 4 bilhões de anos-luz de comprimento - a maior estrutura já identificada no Universo observável - colocando em xeque o princípio cosmológico [43].

apresentou, de forma independente, resultados similares[2]. Na seção 2.9 do capítulo anterior, mencionamos que Einstein introduziu a constante cosmológica por acreditar que sem ela, suas equações de campo implicariam em um Universo em contração. Por tais motivos, Einstein foi bastante cético em relação aos resultados apresentados por Friedmann e Lemaître. Edwin Hubble (1889-1953) confirmou[3], em 1929, através de diversas medições observacionais, que o Universo estaria, sim, se expandindo e que a velocidade de recessão dos astros era diretamente proporcional às respectivas distâncias, assim como previsto por Lemaître. Esta ficou conhecida como a *lei de Hubble*,

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade de recessão (ou afastamento) entre dois objetos separados por uma distância  $\mathbf{r}$ . A chamada *constante de Hubble* vale  $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , onde a constante adimensional  $h = 0.67 \pm 0.012$ [44]. Após essa constatação observacional, Einstein referiu-se à sua constante cosmológica como sendo o "maior erro" de sua vida. Não apenas pelo seu trabalho original ser capaz de prever a observada expansão do Universo, como pelo fato de que a adição da constante cosmológica não levaria ao equilíbrio.

Esta lei não é absoluta, como mencionamos anteriormente, ela é válida apenas para larga escala, quando as velocidades peculiares dos astros e, conseqüentemente, suas interações, forem desprezíveis. O leitor não deve confundir a "larga escala" aqui citada com a mesma enunciada para o princípio cosmológico. A expansão já é observada para pares de galáxias sem um poço de potencial gravitacional em comum; dezenas de megaparsecs cabem perfeitamente nessa noção de escala.

### 3.2.1 Coordenadas Comoveis

No âmbito da relatividade geral compreendemos esse efeito de afastamento das galáxias como expansão do próprio espaço. Se aplicarmos a (3.1) para um par de galáxias suficientemente distantes entre si, concluímos que estes se afastam com uma velocidade superior a da luz. Entretanto, isto não implica em uma violação da relatividade restrita se admitirmos que estes objetos não estão, de fato, se movendo ultra-relativisticamente no espaço, mas que este está se expandindo. Metaforicamente, podemos visualizar o espaço

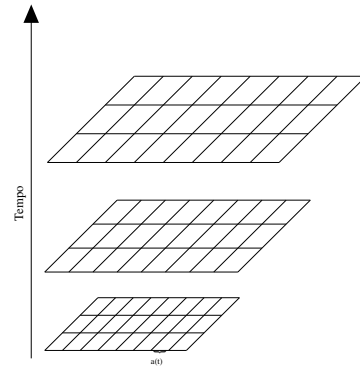
como a superfície de um balão contendo inúmeros pontos representando galáxias; ao ser inflado, o balão se expande e, conseqüentemente, a distância entre cada par destes pontos aumenta.

A adoção de um sistema de coordenadas que acompanha a expansão se faz muito útil, à este damos o nome de *sistema de coordenadas comóveis*. Neste sistema, a posição dos astros é fixa; o vetor posição que conecta um par de galáxias fica

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

onde  $a(t)$  é chamado *fator de escala* e  $\mathbf{x}$  é a posição fixa objeto no novo sistema de coordenadas.

Figura 3.1: A representação de um sistema de coordenadas comóvel é dada ao lado por uma grade. Ela se expande junto com o Universo, mantendo fixa a posição dos objetos neste sistema. Cada sub-aresta tem valor  $a(t)$  que, de acordo com princípio cosmológico, depende apenas do tempo. Convencionamos que o valor do fator de escala atual é igual a unidade.



A derivada temporal da (3.2),

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{a}\mathbf{x} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  e  $\mathbf{x}$  é constante, pois é a coordenada do sistema comóvel. O ponto sobre-escrito representa a derivada temporal. Definimos, então, de acordo com a (3.1), o *parâmetro de Hubble*

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; \quad (3.4)$$

tal que este equivalha a constante de Hubble no presente:  $H(0) = H_0$ . Por convenção, estabelecemos que, atualmente, o fator de escala é igual a unidade  $a(0) = 1$ ; assim  $H_0 = \dot{a}(0)$ .

### 3.2.2 Desvio para o Vermelho

O afastamento das galáxias é percebido graças às medições do efeito Doppler. A radiação eletromagnética emitida por objetos que estão se afastando sofrem um desvio para o vermelho (o comprimento de onda é alargado). Ao longo de todo o texto, usaremos a terminologia em inglês *redshift* para designar este desvio para o vermelho. Sabemos que uma onda eletromagnética que chega à Terra sofreu um *redshift* aplicando a técnica de espectroscopia para analisar a fonte emissora, já que esta é composta por elementos químicos que emitem radiação em uma sequência bem definida. O *redshift*  $z$  é definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.5)$$

onde  $\lambda_o$  é o comprimento de onda observado, enquanto  $\lambda_e$  representa o comprimento de onda emitido. Vamos, agora, encontrar uma relação entre o *redshift* e o fator de escala; esta se fará bastante útil quando necessitarmos de soluções numéricas para modelos cosmológicos. Consideremos um raio de luz que se propaga radialmente, o intervalo espaço-temporal deste raio é nulo  $ds^2 = 0$ . Assim, para um observador aqui na Terra

$$0 = d\tau^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (3.6)$$

em coordenadas comóveis. A métrica assim é intitulada *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, ou simplesmente FLRW; a constante  $k$  mede a curvatura do espaço. Na seção a seguir, discorreremos sobre esta métrica e a geometria do Universo. Assumindo que este raio de luz deixa sua galáxia de origem ( $r = 0$ ) no instante  $t_e$  e atinge a Terra ( $r = r_t$ ) em  $t_o$ ,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c}{a(t)} dt = \int_0^{r_t} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.7)$$

Consideremos, agora, outro raio de luz que deixa a mesma galáxia, propaga-se radialmente e é observado na Terra assim como o primeiro, porém, alguns instantes depois. Este raio é emitido no instante  $t_e + dt_e$  e observado em  $t_o + dt_o$ . Como a distância comóvel, aqui representada por  $r$ , não varia entre estes dois casos; igualamos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_e + dt_e}^{t_o + dt_o} \frac{c}{a(t)} dt. \quad (3.8)$$

Geometricamente, as integrais acima resultam na área abaixo da curva dada por  $c/a(t)$ . Como grande partes destas áreas está sobreposta, a relação (3.8) equivale a dizer que as áreas fora da intersecção são idênticas,

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_o}^{t_o+dt_o} \frac{c}{a(t)} dt. \quad (3.9)$$

Admitindo que os intervalos de tempo são suficientemente pequenos, de forma que a variação do fator de escala seja desprezível, a integral acima resulta

$$\frac{c}{a(t_e)} dt_e = \frac{c}{a(t_o)} dt_o \rightarrow \frac{dt_e}{dt_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (3.10)$$

A expressão acima nos diz que, em um Universo em expansão, o intervalo entre a emissão e a observação de um quanta de luz aumenta na mesma proporção que o fator de escala. Se pensarmos nos raios de luz do exemplo acima como cristas sucessivas de uma mesma onda eletromagnética, a razão entre os comprimentos de onda emitido e observado será dada por:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_o} = \frac{a(t_e)}{a(t_o)}. \quad (3.11)$$

Combinando a equação acima com a definição (3.5), o *redshift* em função do fator de escala

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1, \quad (3.12)$$

onde já reescalamos  $a(0) = 1$ .

### 3.3 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

A criação de um modelo baseado na relatividade geral, seja para descrever movimentos planetários, um buraco negro, um sistema binário ou o Universo como um todo, tem como ponto central a construção da métrica que descreve o sistema. Esta tarefa não é trivial; requer a assunção de alguns princípios conceituais e o talento de transcreverlos matematicamente. Simplificadamente, vamos encontrar a métrica que descreve um Universo em expansão de acordo com o princípio cosmológico.

Em 1923, Hermann Weyl (1885-1955) introduziu a ideia de que haveria uma classe de referenciais privilegiados no Universo: aqueles que acompanham o movimento médio das galáxias[45]. Seu postulado, que introduziremos a seguir, nos conduz naturalmente à adoção do referencial comóvel, o qual discutimos na seção 3.2.1. Weyl assumiu que as galáxias, ou aglomerados de galáxias como consideramos hoje, tem velocidades peculiares desprezíveis em relação à velocidade média entre elas (expansão). Neste referencial comóvel, então, os aglomerados estão fixos. Ele ainda acrescentou que os aglomerados, sem interagir entre si, assumem um movimento especial no espaço-tempo e comportam-se como um partículas de um fluido perfeito. Formalmente, o *postulado de Weyl*:

- As linhas de mundo das partículas do fluido formam uma congruência de geodésicas do tipo *timelike*, divergindo em um ponto no infinito passado ou futuro.

Em outras palavras, uma vez que os aglomerados estão fixos no sistema comóvel, suas trajetórias no espaço-tempo cruzam perpendicularmente a hiper-superfície do tipo *space-like* ( $t$  constante) e não se cruzam, exceto por um ponto localizado em um tempo infinito no passado ou no futuro. Para construir este referencial, escolhemos uma destas hiper-superfícies. Cada ponto dela é atravessado por uma única linha de mundo correspondente à uma partícula do fluido. As coordenadas espaciais são constantes e moram no espaço tangente  $\mathbf{T}$  à essa hiper-superfície, então para qualquer vetor  $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$ , seu quadri-vetor correspondente será  $v^\mu = (0, \mathbf{v})$ . A quadri-velocidade de cada uma dessas partículas tem apenas a componente temporal como não nula,  $u^\nu = c\delta_0^\nu$ . Assim, o produto interno entre estas quantidades deve ser igualmente nulo,

$$0 = u_\mu v^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu v^\mu = cg_{0\mu} v^\mu. \quad (3.13)$$

Nenhuma consideração foi imposta à  $v^\mu$ , exceto que ele more no espaço tangente à hiper-superfície. Concluimos então que  $g_{0\mu} = 0$ , ou seja, a métrica de nosso espaço não deve conter termos cruzados com a parte temporal. Para que a coordenada temporal esteja de acordo com o tempo próprio de cada um desses observadores privilegiados, fazemos  $g_{00} = 1$ . O elemento de linha, então,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2 = c^2 dt^2 - h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.14)$$

A condição de homogeneidade exige que a dependência temporal de  $h_{ij}$  seja dado por um fator comum a todas as coordenadas, sendo este o fator de escala  $a(t)$ , tal que

$$d\sigma^2 = a(t)^2 g_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.15)$$

Ademais, a condição de que esta hiper-superfície seja isotrópica sobre todos os pontos requer que o o quadrado do elemento de linha espacial  $d\sigma$  dependa de  $\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}$  apenas pelos invariantes rotacionais  $d\mathbf{x}^2$ ,  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^2$ . Em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j &= A(r)r^2 dr^2 + B(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= [A(r)r^2 + B(r)] dr^2 + B(r)r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= \tilde{A}(r) dr^2 + B(r)r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Podemos reescalonar a variável radial, tal que  $r^2 \rightarrow B(r)r^2$  e também a função radial  $\tilde{A}(r) \rightarrow A(r)$ . O elemento de linha fica

$$g_{ij} dx^i dx^j = A(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.17)$$

Agora, precisamos encontrar a função radial  $A(r)$ . O espaço em que estamos trabalhando é dito *maximamente simétrico*; isto pois espaços que são isotrópicos sobre todos os pontos (implicando também em homogeneidade) admitem o número máximo possível de vetores de Killing<sup>2</sup>. Claramente, estes espaços devem ser munidos de uma curvatura constante  $K$ , a qual define unicamente o espaço simétrico. O tensor de Riemann de um espaço maximamente simétrico é dado por<sup>3</sup>

$$R_{ijkl} = -K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (3.18)$$

A contração com a métrica resulta no tensor de curvatura,  $R_{ij} = -2K g_{ij}$ . Calculando as componentes não nulas deste tensor, através das conexões, e igualando com este

<sup>2</sup>Vetores de Killing  $\zeta^i$  obedecem a relação  $\nabla_i \zeta^j + \nabla_j \zeta^i = 0$ . Eles definem as isometria infinitesimais da variedade, isto é, qualquer movimento feito sobre um vetor de Killing, na hiper-superfície, deixa inalterada a geometria.

<sup>3</sup>A demonstração é longa e foge ao escopo deste texto, sendo possível encontra-la claramente em Weinberg, seção 13.2[26].

resultado, obtemos a função  $A(r) = (1 - Kr^2)^{-1}$ . Por fim, a métrica mais geral para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.19)$$

onde a constante de curvatura  $K$  pode, a priori, assumir qualquer valor. Para análise geral, o módulo da constante de curvatura nenhuma importância tem, e sim, se ela assume valores negativos, positivos ou nulo. Para tanto, definimos a constante  $k = K/|K|$  que pode valer  $+1$ ,  $-1$  ou  $0$ ; e reescalamos a variáveis  $r \rightarrow r\sqrt{|K|}$  e  $a(t) \rightarrow a(t)/\sqrt{|K|}$ . Assim, a métrica intitulada *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* define o elemento de linha,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (3.20)$$

### 3.3.1 Geometria Espacial do Universo

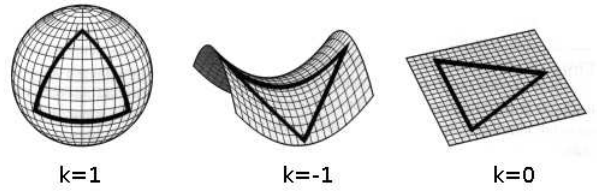
A métrica de FLRW admite três tipos de geometria espacial para o nosso Universo, a saber: hiper-esférica, hiper-hiperbólica e plana; correspondendo aos três possíveis valores de  $k$ :  $+1$ ,  $-1$  e  $0$ , respectivamente. A fig. (3.2) ilustra cada uma delas de acordo com triângulos traçados em suas superfícies. Trata-se de uma analogia; as imagens ali representadas são superfícies 2D imersas em um espaço 3D, ao passo que nossa real geometria espacial é dada por uma superfície 3D imersa em uma variedade 4D. Essas três possibilidades têm suas particularidades.

- Hiper-Esférica: Geometria não-Euclidiana; a soma dos ângulos internos de um triângulo é superior à  $180^\circ$  e a circunferência de raio  $r$  é inferior à  $2\pi r$ . A distância entre retas inicialmente paralelas não é mais constante ao longo da superfície; elas aproximam-se, eventualmente se cruzando. Apesar de não conter contornos, este espaço é finito. Um Universo com geometria hiper-esférica é dito *Universo fechado*.
- Hiper-Hiperbólica: Outro caso de geometria não-Euclidiana, porém, quase oposto ao caso hiper-esférico. Na hipérbole, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior à  $180^\circ$  e a circunferência de raio  $r$  é maior que  $2\pi r$ . Quanto às linhas paralelas, estas sempre se afastam, aumentando continuamente a distância entre si.

Assim, o espaço deve ser infinito. Um Universo com geometria hiper-hiperbólica é dito *Universo aberto*.

- Plana: Geometria Euclidiana. Esta é a forma com a qual mais estamos habituados, admitindo os cinco postulados de Euclides. Este espaço também deve ser infinito<sup>4</sup>, uma vez que retas paralelas nunca se cruzam. Este é chamado *Universo plano*.

Figura 3.2: As três geometrias possíveis para um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, de acordo com a métrica de FLRW. Para  $k = 1$ , a geometria espacial é hiper-esférica, tornando o Universo fechado. Para  $k = -1$ , a geometria é hiper-hiperbólica. Para  $k = 0$ , plana.



### 3.4 Equações de Campo

Uma vez definida a métrica do nosso sistema, desejamos obter as equações de movimento. Calculamos, primeiramente, as conexões através da (2.12) e, utilizando-as, encontramos o tensor de Ricci através da (2.18) e (2.19), e por fim, o escalar de curvatura, com a contração da (2.20).

$$R = \frac{6}{c^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right). \quad (3.21)$$

A equação de campo, na forma tensorial (2.42), fornece, a priori, dez equações diferenciais linearmente independentes. Entretanto, para a métrica de FLRW, obtemos apenas duas. A componente tempo-tempo,

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{00}, \quad (3.22)$$

provê a seguinte equação diferencial,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.23)$$

<sup>4</sup>Desde que a topologia seja trivial. É possível que o Universo admita topologias não-triviais, como cilíndrica ou toroidal. Entretanto, se este for o caso, a escala da topologia deve ser muito maior que o Universo observável, sendo impossível de detectá-la. A geometria hiperbólica também admite topologias não-triviais.

onde  $\rho$  é a densidade de energia total do sistema, contemplando todos os componentes envolvidos. Qualquer outra componente da diagonal,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad i = j = 1, 2, 3; \quad (3.24)$$

resulta na mesma equação diferencial, a saber

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -8\pi G\frac{p}{c^2}, \quad (3.25)$$

onde  $p$  representa a pressão total dos constituintes. Subtraindo a (3.23) da equação acima,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right). \quad (3.26)$$

A equação (3.23) é chamada *equação de Friedmann* e relaciona o parâmetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$  com as densidades de energia. A equação (3.26) é chamada *equação da aceleração*, pois relaciona a segunda derivada temporal do fator de escala com a densidade de energia e pressão dos componentes do Universo.

A conservação do tensor energia momento,

$$\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}T_{\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu} = 0, \quad (3.27)$$

rende apenas uma equação com solução não trivial, para  $\nu = 0$  temos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (3.28)$$

A relação acima é também conhecida por *equação do fluido*, pois assume a mesma forma da equação da continuidade para um fluido em um sistema comóvel. De acordo com ela, contribuem com a variação da densidade de energia, a mudança no volume espacial, bem como o trabalho realizado pela pressão com a expansão<sup>5</sup>. Esta equação não é

<sup>5</sup>Devemos observar que, embora a pressão realize trabalho *devido* à expansão, ela não contribui com a mesma. O princípio cosmológico, sendo válido, estabelece que não deve haver gradientes de pressão e, portanto, nenhuma força resultante colaborando com a expansão. Na verdade, as pressões positivas apenas acrescentam às densidades de energia, intensificando as interações gravitacionais e, assim, desacelerando a expansão.

linearmente independente das anteriores, podendo ser obtida através da derivada temporal da (3.23), combinada com a (3.25). Admite-se que a pressão depende exclusivamente das características de seu componente,  $p = p(\rho)$ . Geralmente, assume-se uma equação de estado barotrópica para os componentes,

$$p = c^2 \omega \rho, \quad (3.29)$$

onde o parâmetro  $\omega$  pode ser constante ou variar com o tempo. Combinando as equações (3.23), (3.26), (3.28) e (3.29), e integrando, obtemos a solução completa do sistema, isto é, a função (ou curva) que descreve a evolução do fator de escala  $a(t)$  assim como das densidades de energia  $\rho(t)$ .

### 3.5 Modelos Cosmológicos Simples

Na seção anterior, encontramos as equações de campo que regem a cosmologia para a métrica de FLRW, no âmbito da relatividade geral. O único ingrediente que falta para que possamos encontrar soluções para o fator de escala e para as densidades de energia é, justamente, definir o que compõe o Universo. Até o final do século XX, acreditava-se que o Universo era composto por matéria<sup>6</sup> e radiação, afinal, é tudo que conseguimos observar diretamente até agora. A densidade de matéria é inversamente proporcional ao cubo do fator de escala,  $\rho_m \propto 1/a^3$ ; como é esperado. A densidade de energia da radiação, por sofrer o *redshift*, decresce com uma potência a mais no fator de escala,  $\rho_r \propto 1/a^4$ . Ademais, a matéria é tratada como poeira, pois, em larga escala, seus elementos não interagem; assim sua pressão é nula,  $p_m = 0$ . A equação de estado da radiação é dada pela usual relação  $p_r = \rho_r c^2/3$ . Admitindo que estes dois componentes não interagem entre si, a conservação do tensor energia-momento leva à duas equações independentes.

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0; \quad \dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0. \quad (3.30)$$

<sup>6</sup>Aqui, enquadram-se tanto a matéria bariônica como a escura. Introduziremos estes conceitos mais tarde, pois, não serão necessários nestes primeiros cálculos, já que suas equações de estado são idênticas.

Integrando as equações acima, obtemos as relações descritas no parágrafo anterior

$$\rho_m = \frac{\rho_m^0}{a^3}; \quad \rho_r = \frac{\rho_r^0}{a^4}, \quad (3.31)$$

onde as quantidades  $\rho_m^0$  e  $\rho_r^0$  representam as densidades de energia atuais dos constituintes. Estas relações devem ser substituídas na equação de Friedmann (3.23); porém, por simplicidade, investigaremos a evolução de cada constituinte separadamente. Como o Universo está se expandindo, esperamos que no passado ele tenha assumido volumes bem inferiores. Para pequenos valores do fator de escala, a radiação é o termo predominante. Assim, dizemos que nesta época o Universo era dominado pela radiação. Desprezando os outros termos, temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_r^0}{a^4}, \quad (3.32)$$

cuja integração é direta e leva à relação  $a(t) \propto \sqrt{t}$ . De acordo com a lei de Stephen-Boltzmann,  $c^2 \rho_r = \sigma T^4$ ; onde  $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ , concluímos que na era da radiação, a temperatura era inversamente proporcional ao fator de escala,  $T \propto 1/a$ .

Conforme se dá a expansão, o fato de escala cresce e temos um Universo dominado pela matéria. Neste caso,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_m^0}{a^3}, \quad (3.33)$$

a integração, neste caso, também é direta e nos fornece a relação  $a(t) \propto t^{2/3}$ . A expansão é mais acentuada no domínio de matéria, do que no da radiação, sendo a pressão de radiação o ente responsável por desacelerar, ainda mais, a expansão; como mencionamos anteriormente.

## 3.6 Parâmetros Observacionais

A abordagem teórica das ciências naturais nos fornece uma interpretação dos fenômenos com base em conceitos físicos sólidos e formalismos matemáticos elaborados. Entretanto, é sempre necessário confrontar modelos e teorias com a própria natureza, de forma a confirmá-los ou descartá-los, através de experiências. O desenvolvimento de experimentos relacionados à cosmologia é bastante limitado, restringindo-se às áreas correlacionadas

como a física de partículas e a relatividade geral, por exemplo. A experiência não é, felizmente, a única forma de questionar empiricamente a natureza. Com o crescente desenvolvimento de telescópios terrestres e satélites desde meados do século XX, podemos explorar os céus em um enorme intervalo do espectro eletromagnético. Estabelecemos valores à parâmetros que, inicialmente, seriam livres em nossos modelos, de forma a estreitar a quantidade de possíveis soluções. Estes parâmetros são calculados ano após ano, a fim de diminuir suas incertezas e deixa-los (o máximo possível) independente de modelos. No início do capítulo, apresentamos o parâmetro de Hubble; veremos agora que outras quantidades podemos estimar a partir de observações.

### 3.6.1 Parâmetros de Densidade

Existe, de acordo com a (3.23), uma forma especial para a densidade de energia de todos os componentes, intitulada *densidade crítica*,  $\rho_c$ . Esta é definida para a geometria plana do Universo ( $k = 0$ ),

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.34)$$

O parâmetro de densidade  $\Omega_i$ , do  $i$ -ésimo componente do Universo, é definido como a razão entre sua densidade de energia  $\rho_i$  e a densidade crítica  $\rho_c$ ,

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (3.35)$$

Reescrevendo a equação de Friedmann (3.23) em função do parâmetro de densidade,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c\Omega - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.36)$$

onde  $\Omega = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c}$ . A definição (3.34) da densidade crítica, substituída na equação acima, leva à seguinte relação,

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{H^2a^2}. \quad (3.37)$$

Podemos associar um parâmetro de densidade para a curvatura do Universo,

$$\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{H^2a^2}, \quad (3.38)$$

tal que  $\Omega + \Omega_k = 1$ . Assim, para uma geometria plana  $\Omega_k = 0$ , para uma geometria hiper-hiperbólica  $\Omega_k > 0$  e, para o caso hiper-esférico  $\Omega_k < 0$ .

### 3.6.2 Parâmetro de Desaceleração

Anteriormente, vimos que a constante de Hubble representa o valor atual de um parâmetro que varia com o tempo: a taxa de expansão. O parâmetro de Hubble, porém, não é constante. Definimos, assim, uma parâmetro adimensional,  $q(t)$ , que mede quão rapidamente varia a expansão. A escolha mais simples,

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (3.39)$$

é chamada *parâmetro de desaceleração*. Isto porque as soluções das equações de Friedmann e da aceleração, para um Universo composto por matéria e radiação, mostram um crescimento desacelerado do fator de escala  $a(t)$ . Para uma geometria plana, a (3.39) pode ser reescrita de uma forma mais facilmente visualizável,

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (3.40)$$

### 3.6.3 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade é, simplesmente, a distância aparente de um objeto astronômico quando assumimos que a intensidade da luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Esta difere-se da distância real entre os objetos por conta da expansão do Universo, e também se a geometria não for plana. Dada a luminosidade absoluta  $L$  do objeto fonte e, a densidade de fluxo  $S$  recebida, a distância de luminosidade  $d_l$  é definida,

$$d_l \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}. \quad (3.41)$$

A expansão afeta nossa percepção sobre os fótons incidentes de duas formas: eles sofrem o efeito Doppler, perdendo energia; e a frequência com que estes atingem a superfície da Terra é reduzida. Ambos os efeitos são inversamente proporcionais ao fator de escala.

Se a fonte está a uma distância  $r = r_0^7$  de nós, a densidade de fluxo de radiação será

$$S = \frac{L}{4\pi r_0^2(1+z)^2}, \quad (3.42)$$

de onde concluímos que

$$d_l = r_0(1+z). \quad (3.43)$$

Em um Universo plano,  $r_0$  é dado em uma linha reta e representa a distância real entre nós e a fonte. Assim, quanto mais longe um objeto está, mais distante ainda ele aparenta. Nossa intenção é encontrar uma expressão mais geral para a distância de luminosidade, em termos do *redshift*, quantidade mensurável. Sabemos que a luz não percorre distância alguma no espaço-tempo,  $ds = 0$ . Assim, a distância real, em um Universo plano, é dada por

$$r_0 = \int_0^{t_0} \frac{c}{a} dt. \quad (3.44)$$

Reescrevemos os diferencial  $dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz$ . Os limites de integração devem ser invertidos, uma vez que maiores valores de  $z$  representam tempos mais remotos. Assim, com a distância sendo  $r_0 = \int_0^z \frac{c}{H(z)} dz$ , a distância de luminosidade é expressa,

$$d_l = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (3.45)$$

A distância de luminosidade é bastante útil para restringir modelos, pois pode ser encontrada a partir de um parâmetro observacional conhecido por *distância de módulo*, ou *diferença de magnitude*  $\mu_0$ , dada em unidade de parsec (pc). Este parâmetro é definido pela diferença entre a magnitude de brilho aparente  $m$  e absoluta  $M$  da fonte,

$$\mu_0 = m - M = 5 \log_{10} d_l + 25, \quad (3.46)$$

onde a distância de luminosidade  $d_l$  é dada em Mpc.

---

<sup>7</sup>Os efeitos causados por diferentes geometrias são levados em conta ao calcular  $r_0$ . Novamente, fizemos  $a(0) = 1$ .

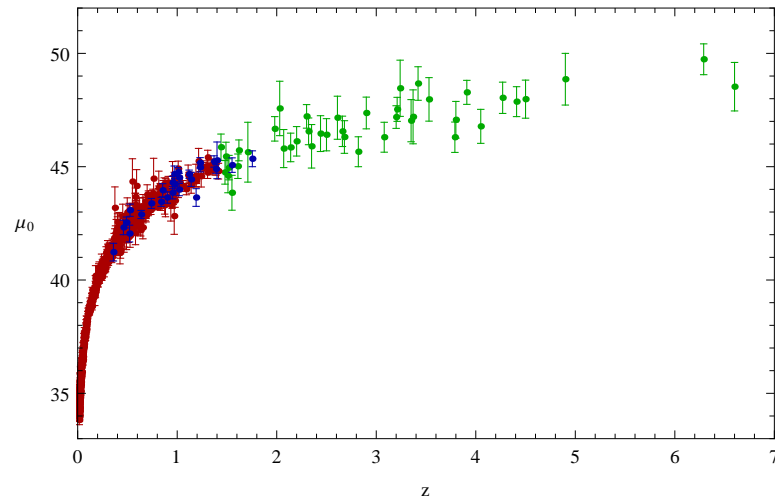


Figura 3.3: Valores observacionais para a diferença de magnitude. Em vermelho[46] e em azul[47], a distância de módulo para diversas supernovas. Em verde[48], para erupções de raios-gamma. A distância de módulo cresce rapidamente para pequenos valores de  $z$ , mas tende a um crescimento desacelerado conforme avançamos para eras mais remotas do Universo.

No gráfico acima, temos (em vermelho) 580 diferenças de magnitude de supernovas, fornecidas pelo SPCUnion[46], outras 27 mais recentes (em azul) dadas pelo HST<sup>8</sup>[47], e 42 distâncias de magnitude de erupções de raios-gamma[48], em verde. Supernovas do tipo Ia são objetos extremamente úteis para a cosmologia observacional, uma vez que funcionam como velas-padrão. Isto é, sua magnitude de brilho absoluta é, praticamente, constante. Erupções de raio-gamma, por sua vez, permitem-nos acessar dados de um tempo mais longínquo de nosso Universo.

## 3.7 Radiação Cósmica de Fundo

Na seção 3.2, mencionamos que conforme o Universo se expande, sua temperatura decresce. Assim, em tempos remotos, a temperatura e a densidade do cosmos devem ter sido extraordinariamente altas. Como consequência, a interação entre partículas elementares era tão forte que estas não conseguiam combinar-se para formar objetos mais complexos. Até que o Universo resfriou a uns 100MeV, este era formado por um denso

<sup>8</sup>*Hubble Space Telescope.*

mar de quarks, léptons e bósons; os quais se espalhavam mutuamente a uma taxa muito superior à de expansão, mantendo um equilíbrio térmico entre si. A partir deste ponto, os primeiros hádrons lograram se formar; logo depois, bárions e antibárions passaram a se aniquilar, aumentando consideravelmente a densidade de fótons. Quando a energia de radiação reduziu à ordem de 1MeV, bárions passaram a se combinar formando os núcleos dos elementos leves. Este processo é chamado de *nucleossíntese*. Entretanto, não foi até o Universo resfriar a aproximadamente 0.26eV ( $\sim 3 \times 10^3 K$ ), que a radiação deixou de interagir com a matéria. Durante o período que precede, o Universo era permeado por um plasma, formado por núcleos, elétrons livres e radiação. Dizemos, por conseguinte, que neste período o Universo era opaco. Isto porque o livre caminho médio dos fótons era tão pequeno, que estes não conseguiam viajar livremente, permanentemente colidindo com núcleos. Chamamos este evento particular de *desacoplamento*; o ponto em que o Universo torna-se transparente e a radiação passa a propagar-se livremente, permeando o céu até os dias de hoje, e para sempre, a menos que soframos uma futura contração. Esta radiação, intitulada *radiação cósmica de fundo*, vem sofrendo *redshift* desde então, encontrando-se, hoje, na forma de micro-ondas a uma temperatura de  $T_{cmb} \sim 2.725K$ . Ela nos serve como uma fotografia do desacoplamento e através dela podemos inferir a validade do princípio cosmológico, assim como qual a forma de nossa geometria.

A ideia de que o Universo era inicialmente super quente e denso; esfriando-se e tornando-se mais "diluído" conforme se expande, recebe o nome de teoria do *Big-Bang*; podendo, mas não sendo estritamente necessário, conter uma singularidade inicial. A detecção da radiação cósmica de fundo favorece tal teoria. Na verdade, esta radiação foi primariamente prevista, como consequência do *Big-Bang*, por Ralph Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1914-1997), em 1948 [4]. A primeira detecção aconteceu, acidentalmente, em 1965, quando Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) faziam medições em seu recém construído radiômetro [5].

Atualmente, duas sondas (WMAP e Planck) mapeiam a radiação cósmica de fundo de todo o céu, obtendo suas temperaturas, como visto na fig. (3.4). As flutuações térmicas, como podemos ver, são bastante pequenas, sustentando o princípio cosmológico. Entretanto, as pequenas anisotropias são fundamentais para que as grandes estruturas pudessem ter sido formadas. As cores quentes que vemos no mapa, representando temperaturas suavemente maiores, indicam pontos espaciais de maior densidade, na época

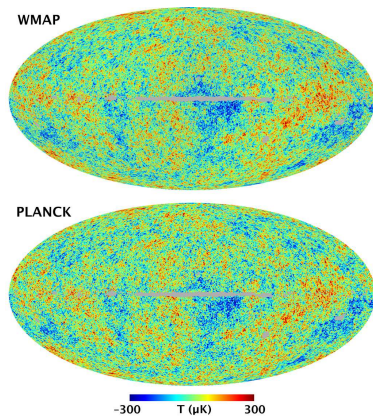


Figura 3.4: Mapeamento da radiação cósmica de fundo feita pela sonda WMAP[49] (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) acima e, abaixo, pela sonda espacial Planck[44]. A legenda informa as variações térmicas, fortemente destacadas no mapa, em  $\mu\text{K}$ ; sendo que a variação nula corresponde à  $T_{cmb} = 2.725\text{K}$ , definida como *temperatura da radiação cósmica de fundo*.

do desacoplamento. Com a expansão, essas anisotropias aumentaram consideravelmente de volume, formando poços de potenciais onde a matéria pôde se aglomerar. Caso estas pequenas flutuações não existissem, matéria e anti-matéria teriam se aniquilado mutuamente por completo, gerando apenas um mar de fótons, impossibilitando a formação de estruturas.

Observações cautelosas do mapeamento da radiação cósmica de fundo permitem-nos inferir a respeito da geometria do Universo e dos parâmetros observacionais. Por exemplo, o tamanho real das flutuações térmicas pode ser computado e comparado com as observações. Em uma geometria hiper-esférica, estes pontos apareceriam maiores do que realmente são. Analogamente, em uma geometria hiper-hiperbólica, estes seriam inferiores ao tamanho computado. De fato, as observações indicam que vivemos em um Universo espacialmente plano,  $k = 0$ ; não havendo diferenças entre os valores observados e computados.

### 3.8 Matéria Escura

Em 1932, Jan Oort (1900-1992) inferiu que a matéria observada na Via-Láctea era insuficiente para descrever a velocidade orbital de suas estrelas[7]. No ano seguinte, Fritz Zwicky (1898-1974) fez a mesma observação, desta vez em relação às velocidades orbitais de galáxias em aglomerados[8]. Vera Rubin (1928-) obteve, nas décadas de 60 e 70,

diversas curvas de rotação de galáxias e inferiu que a matéria ali presente deveria ser cerca de dez vezes maior do que a observada. Em uma simples estimativa, a força gravitacional<sup>9</sup> exercida pelo centro de uma galáxia em uma de suas estrelas equivale à força centrípeta.

$$G \frac{M(r)}{r^2} = \frac{v(r)^2}{r}, \quad (3.47)$$

onde  $M(r)$  é a massa total presente entre o centro da galáxia e a estrela em questão, que tem velocidade tangencial  $v(r)$ . Assim,  $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ . Entretanto, o que observamos é uma curva plana: para grandes distâncias do centro galáctico, a velocidade de rotação é constante. Isso só seria possível se houvesse um termo do tipo  $\rho \propto 1/r^2$  adicionado à distribuição de matéria. *Matéria escura* é essa estranha forma de matéria que engloba esfericamente as galáxias, recebendo este nome por não ser observada em nenhum intervalo do espectro eletromagnético. Interagindo apenas gravitacionalmente, a matéria escura simplesmente atravessa a matéria ordinária, e vice e versa, sem deixar rastros; sendo inimaginável uma detecção direta dessa entidade.

Nenhuma detecção foi feita a respeito da matéria escura<sup>10</sup>, embora outras observações fomentem sua existência. Uma delas, conhecida por *lentes gravitacionais*, sugere sua presença pela distorção e multiplicação de imagens de galáxias e aglomerados observados no céu. Sua existência também suporta fortemente a teoria do Big-Bang, uma vez que a matéria escura se aglomera mais rapidamente que a matéria ordinária, formando os poços de potencial necessários para a evolução das grandes estruturas. A maior evidência de sua existência, entretanto, está nas observações do *bullet cluster*<sup>11</sup>, dois aglomerados em colisão. A suposta matéria escura de cada aglomerado, por não interagir eletromagneticamente, atravessa a região de colisão, separando-se da matéria ordinária[51]. Muitos são os candidatos para representar esse tipo exótico de matéria, sendo a matéria escura fria (do inglês *cold dark matter*) a mais promissora, pois seria formada por partículas massivas não-relativísticas, que interagem apenas gravitacionalmente.

<sup>9</sup>Neste caso utilizamos a dinâmica newtoniana sem perda de generalidade, uma vez que o campo gravitacional é suficientemente fraco.

<sup>10</sup>Atualmente, experimentos estão sendo realizados com o *Large Hadron Collider*, no CERN; designados para verificar a existência de super-simetrias, dimensões extras e, também, matéria escura[50]. Esse último não seria detectado diretamente, por não interagir com os detectores. Porém, sua existência pode ser inferida através de violações na conservação de energia e momento após as colisões.

<sup>11</sup>*Aglomerado Projétil, em português.*

## 3.9 Energia Escura

No final da década de 90, dois grupos independentes, liderados por Andam Riess (1969-) e Saul Perlmutter (1959-), publicaram diversos dados observacionais a respeito de supernovas do tipo Ia[9, 10]. Destes, dois importantes resultados não estavam de acordo com o esperado de um Universo composto por matéria e radiação. A distância de luminosidade observada assumia valores superiores aos estimados (em grandes valores do *redshift*). A (3.45) pode ser reescrita, para um Universo contendo matéria (bariônica e escura) e radiação,

$$d_l = (1+z) \frac{c}{H_0} \int^z \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{\Omega_m^0 (1+\tilde{z})^3 + \Omega_r^0 (1+\tilde{z})^4}}, \quad (3.48)$$

onde  $\Omega_m^0$  e  $\Omega_r^0$  representam os parâmetros de densidade atuais da matéria (bariônica e escura) e radiação, respectivamente. A relação acima sugere a existência de um constituinte extra, de forma a reproduzir corretamente a relação observada entre a distância de luminosidade e o *redshift*.

O parâmetro de desaceleração atual,  $q_0$ , também foi medido, revelando-se negativo. Novos dados são continuamente coletados e, novas parametrizações feitas com o intuito de melhor estimar o valor deste parâmetro, diminuindo sua dependência de modelos. Observações recentes[52] fornecem  $q_0 = -0.56_{-0.22}^{+0.35}$ . Logo, o Universo experimenta, atualmente, uma expansão acelerada. Vemos da (3.40) que para um parâmetro de desaceleração com valor negativo, a pressão total dos componentes deve ser negativa - mais especificadamente  $p < -1/3$ . Para tanto, não só necessitamos de um novo componente - uma vez que nem a radiação, nem as matérias apresentam pressão abaixo de zero - como este deve ser mais abundante do que o resto.

Este novo componente recebe o nome de *energia escura* e muitas são as entidades passíveis de representá-lo. De início, essas constatações reviveram a constante cosmológica de Einstein,  $\Lambda$ ; sua densidade de energia seria a densidade de energia do vácuo e, a equação de estado para este componente  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ . No trabalho publicado pela equipe do Perlmutter, as observações indicavam que  $\Omega_m \sim 0.28$ , enquanto  $\Omega_\Lambda \sim 0.72$ . Estes valores são, também, suportados pelas observações da radiação cósmica de fundo, feitas pelo WMAP[49].

A existência da energia escura, independente de sua natureza, é também suportada pela comparação entre a estimada idade do Universo e a idade de objetos astronômicos conhecidos. Novamente, admitindo um Universo plano, composto por matéria (bariônica e escura) e radiação; sua idade é dada por

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_r^0(1+z)^4}}. \quad (3.49)$$

A radiação só contribui nesta integral para *redshifts* muito altos. Assim, podemos despreza-la em uma primeira estimativa. Neste caso, temos  $\Omega_m \sim 1$ , e a integral resulta em

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 9.1_{-0.6}^{+0.4} \times 10^9 \text{anos}, \quad (3.50)$$

a incerteza sendo consequência da constante de Hubble. Em suma, o Universo não teria 10 bilhões de anos. Conhecemos, porém, aglomerados globulares na própria Via Láctea com idades superiores à 12 bilhões de anos[53, 54]. Nenhuma estrutura presente no Universo pode ser mais antiga que este, evidentemente. A energia escura, ao ser levada em conta nesta estimativa, aumenta este valor em alguns bilhões de anos, como veremos posteriormente, dependendo da natureza de sua existência.

## 3.10 Inflação

A teoria inflacionária sugere que a taxa de expansão do Universo primordial tenha sido constante, resultando em uma ríspida expansão exponencial. Embora diversos autores tenham contribuído independentemente com a teoria inflacionária, foi Alan Guth (1947-) quem, em 1980, revelou como a teoria do *Big-Bang* suporta e, de certa forma, necessita da inflação[6]. A relatividade geral, sendo incompatível com a mecânica quântica, não é capaz de descrever acontecimentos na era de Planck,  $0 \leq t \leq 10^{-43}\text{s}$ , quando a densidade de energia era tão alta (superior a densidade de Planck,  $\rho_{pl} \equiv 5 \times 10^{96}\text{kg/m}^3$ ), que as flutuações quânticas do espaço-tempo tornavam-se importantes. Independente do que possa ter ocorrido até o fim da era de Planck, a inflação deve ter tido seu fim em torno de  $t_f \sim 10^{-33}\text{s}$ , de forma que flutuações nas densidades de energia pudessem ocorrer para que, posteriormente, os núcleos atômicos fossem formados. A inflação, caso tenha

de fato ocorrido, é capaz de explicar três grandes problemas enfrentados pela cosmologia moderna, os quais veremos agora.

- **Problema da Planaridade**

Na seção 3.7, vimos que a densidade do Universo é bastante próxima da densidade crítica. Se a constante de curvatura  $k$  for identicamente nula, então a densidade do Universo será igual a densidade crítica durante toda a evolução. Entretanto, não há motivos para admitirmos que a curvatura seja exatamente zero. Mesmo que  $|k|$  tenha valor irrisório, como a densidade de curvatura cai com  $1/a^2$ , depois de um tempo suficiente, esta densidade torna-se dominante em relação as outras, afastando cada vez mais a densidade total da densidade crítica.

- **Problema do Horizonte**

O problema do horizonte tem origem no excelente grau de isotropia do fundo de radiação cósmica. As micro-ondas que detectamos, provenientes de todas as direções do céu com temperatura  $T_{cmb}$ , estão percorrendo o espaço desde o desacoplamento. Radiações vindas de lados opostos no céu, as quais detectamos em nossas antenas na Terra, não estiveram em contato por bilhões de anos. O fato de estarem em equilíbrio térmico é extraordinário e um tanto suspeito.

- **Monopolos Magnéticos**

Teorias de unificação de forças elementares, chamadas *Grand Unified Theories*, preveem a existência de outras entidades, além das descritas pelo modelo padrão de partículas. Dentre elas, os monopolos magnéticos. Se tais teorias estiverem corretas, no Universo primordial, muito antes do desacoplamento, tais partículas devem ter sido criadas em abundância. Ademais, essas devem ser bastante massivas e, assim, não-relativísticas. Deste modo, com a expansão do Universo, os monopolos magnéticos viriam a dominar sobre os demais componentes. Isto, como sabemos, não é observado.

A entidade responsável pela inflação é intitulada *inflaton*. O inflaton não deve ser representado por uma constante, como a constante cosmológica, pois neste caso a inflação não teria fim. Dentre as possibilidades mais estudadas, campos escalares reproduzem

melhores resultados. Como espera-se uma expansão exponencial, estes campos devem variar muito lentamente. Se o inflaton é dado por um campo escalar  $\phi(t)$ , sua densidade de energia é

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.51)$$

onde o ponto denomina a derivada temporal do campo e  $V(\phi)$  é o potencial de auto-interação. Admite-se que o potencial assuma valores bastante altos durante a inflação e que seja quase plano, dominando sobre o termo cinético  $\dot{\phi}^2$ . Assim, o campo sofre o processo chamado de *slow roll* até o mínimo do potencial. Com o intuito de ilustrar como a inflação pode resolver os problemas citados acima, vamos considerar que  $V \gg \dot{\phi}^2$ ; tratando o potencial como uma constante. A equação de Friedmann para este sistema, assumindo que a densidade de energia do inflaton é então, dominante,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}V}, \quad (3.52)$$

e como solução pro fator de escala,

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V}t\right). \quad (3.53)$$

O parâmetro de densidade de curvatura, dado pela (3.38),

$$\Omega_k \propto \exp\left(-\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V}t\right), \quad (3.54)$$

aproximando-se de zero rapidamente. Então, mesmo após a inflação, como o parâmetro de densidade continua caindo com  $1/a^2$ , seu valor continua a decrescer. Durante o curto período da inflação, o fator de escala aumenta por um fator de  $10^{27}$ , no mínimo. Antes da inflação, o Universo era suficientemente pequeno para atingir o equilíbrio térmico. A violenta expansão o tornou muito maior que o Universo observável e, por isso, radiação provindas de regiões tão distantes permanecem a mesma temperatura.

Monopolos magnéticos e outras partículas previstas pelas teorias de unificação teriam sido diluídas em uma expansão tão abrupta. A temperatura do Universo decresce tão rapidamente que estas partículas deixam de ser criadas antes mesmo de serem tão abundantes.

### 3.11 Modelo Padrão ou $\Lambda$ CDM

O modelo cosmológico padrão, conhecido por  $\Lambda$ CDM, reproduz corretamente muitos dos dados observacionais que atualmente possuímos. Neste modelo, o Universo seria constituído por matéria ordinária, radiação, matéria escura fria e uma constante cosmológica, representando a energia escura<sup>12</sup>. A inflação é incorporada ao modelo padrão, admitindo a existência do inflaton nos primeiros instantes do Universo, cuja densidade de energia decai nos campos de matéria posteriormente. Este modelo prevê a existência da radiação cósmica de fundo e a formação das grandes estruturas. A ação para o modelo  $\Lambda$ CDM é dada por

$$S = S_g + S_\Lambda + S_f = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_f, \quad (3.55)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica e  $\mathcal{L}_f$  representa a densidade lagrangiana das demais fontes de campo gravitacional. A variação desta ação resulta nas equações de campo de Einstein modificadas pela presença da energia escura, como na (2.56),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.56)$$

A equação de Friedmann e a da aceleração, provindas da relação acima, em um Universo dado pela métrica de FLRW e geometria plana, são

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_f + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (3.57)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_f + 3\frac{p_f}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.58)$$

A interpretação física da constante cosmológica nos guia à um dos maiores problemas presentes no modelo padrão, encorajando os cosmólogos a buscarem modelos alternativos. A energia escura, sendo responsável pela atual evolução acelerada do fator de escala, deve ser o constituinte dominante no Universo, ou seja, da ordem de  $H_0^2$ . Assim, para a

---

<sup>12</sup>O que justifica seu nome,  $\Lambda$  é o símbolo usual dado à constante cosmológica, enquanto CDM significa *cold dark matter*.

constante cosmológica,  $\Lambda c^2 \sim H_0^2$ . Sua densidade de energia, portanto, fica

$$\rho_\Lambda = \frac{H_0^2}{8\pi G} \sim 3.1 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \quad (3.59)$$

onde usamos  $h = 0.7$ , na constante de Hubble. Essa seria a densidade atual da energia de vácuo,  $\langle \rho_{\text{vác}} \rangle$ , do espaço vazio. O problema surge quando este valor é confrontado com o obtido pela teoria quântica de campos, que fornece a densidade de energia do vácuo para a escala de Planck - até onde supõe-se que a relatividade geral seja válida - como sendo  $\rho_{\text{vác}} \sim 10^{96} \text{kg/m}^3$ . A discrepância de valores é gritante, a razão entre a energia de vácuo do Universo primordial e o atual é da ordem de  $\rho_{\text{vác}}/\rho_\Lambda \sim 10^{123}$ ; um tanto embaraçoso para uma entidade cuja densidade de energia é suposta constante!

## 3.12 Teorias Alternativas

O modelo padrão admite válida a relatividade geral, embora haja a adição da constante cosmológica às equações de campo, a ação para o campo gravitacional permanece inalterada. Existem, entretanto, diversas teorias alternativas à relatividade geral nas quais são mantidos os princípios, mas a ação do campo alterada. Dentre elas, citamos duas classes das mais investigadas. A primeira delas, conhecida por  $f(R)$ , sugere que a lagrangiana do campo gravitacional não precisa ser exatamente linear no escalar de curvatura, mas pode ser dada por uma função do mesmo. A ação do campo é dada por

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (3.60)$$

onde a função  $f(R)$  pode ser discriminada inicialmente, de forma *ad hoc*, por argumentos físicos; ou encontrada posteriormente por condições de simetria.

A segunda classe de teorias é chamada *escalar-tensorial*. Nessas teorias, trabalha-se com um campo escalar acoplado não-minimamente ao escalar de curvatura. Na relatividade geral, assumimos que tudo aquilo que contém energia deve gravitar. Portanto, todos os constituintes devem, necessariamente, estar acoplados minimamente ao campo gravitacional, através do tensor métrico. Caso contrário, sua ação seria transparente à variação em relação à métrica e, eles não seriam fontes do campo gravitacional. O aco-

plamento não-mínimo está relacionado à constante gravitacional que, neste caso, passa a variar com a evolução do Universo. Dado um Universo composto por um campo escalar  $\phi$ , não-minimamente acoplado ao escalar de curvatura, a ação do sistema é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{c^3}{16\pi G_0} f(\phi) R + \frac{1}{c} L_\phi \right), \quad (3.61)$$

onde  $f(\phi)$  representa a função de acoplamento não-mínimo entre o campo escalar e o escalar de curvatura. A lagrangiana minimamente acoplada do campo é dada por  $L_\phi$ . A "constante" gravitacional vale, atualmente,  $G_0$ . Assim, inferimos que  $G = G_0/f(\phi)$ . Se  $\phi_0 \equiv \phi(t_0)$  é valor atual do campo, fica claro que  $f(\phi_0) = 1$ . Estudos recentes[55–57] indicam que a "constante" gravitacional, se representada por uma função, deve ser quase plana, variando lentamente desde o início do Universo, ou elementos como o  ${}^4\text{He}^{13}$  não seriam formados com a necessária abundância durante a nucleossínteses. Isso restringe a forma da função de acoplamento, que como no caso anterior, pode ser dada de forma *ad hoc*, ou encontrada por condições de simetria.

---

<sup>13</sup>Os isótopos do Hélio compreendem cerca de 25% de toda a matéria bariônica presente no Universo. Tamaña abundância não se obtém apenas com a fusão de Hidrogênio em estrelas. Logo, estes tem que ter sido formados em grande quantidade durante a nucleossíntese.

## CAPÍTULO 4

---

### Simetrias de Noether

---

Simetrias desempenham um importante papel em física, sendo encontradas em todas suas grandes áreas. Grupos de simetria fornecem informações necessárias para descrever desde propriedades de sólidos e moléculas, até as interações fundamentais descritas pelo modelo padrão de partículas. Ademais, existe uma classe especial denominada *simetrias de Noether*<sup>1</sup>, um caso particular das simetrias de Lie às quais estão associadas constantes de movimento. Em uma descrição breve, simetrias de Lie são dadas por transformações pontuais de coordenadas sob as quais uma determinada equação diferencial é invariante; enquanto para as simetrias de Noether, essas transformações atuam diretamente na ação, mantendo esta invariante e, conseqüentemente, as equações de Euler-Lagrange associadas.

Existem transformações invariantes que podem ser ligeiramente inferidas a partir da lagrangiana, como por exemplo translações em uma coordenada cíclica. Entretanto, é sempre possível que haja outras simetrias escondidas sob combinações mais complexas de transformações. Neste capítulo, vamos estabelecer uma abordagem para se conhecer todas as transformações pontuais sob as quais o produto  $Ldt$  é invariante a menos de um termo de superfície. Essas transformações, ou isometrias, formam um conjunto que, munido de

---

<sup>1</sup>Em homenagem à Emmy Noether (1882-1935).

uma lei de composição, define um grupo de simetria. Em seguida, demonstraremos que à cada um dos elementos deste grupo está associado uma constante de movimento.

## 4.1 Gerador de Transformações Pontuais Infinitesimais e Contínuas

Consideremos uma variedade genérica,  $\mathcal{M}$ . A coleção de todos os campos vetoriais, que nesta variedade moram, forma o espaço vetorial  $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ . Transformações pontuais infinitesimais de funções definidas na variedade podem ser descritas por um campo vetorial  $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ . Se  $\mathcal{M} = Q$ , o espaço de configurações de  $n$  dimensões; então  $\partial/\partial q^i$  representa uma translação infinitesimal na direção  $i$ , assim como  $x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$  uma rotação em  $z$  (quando  $n = 3$ ). Transformações pontuais gerais em  $Q$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned} q'^i &= q^i + \delta q^i; & \delta q^i &= \epsilon \alpha^i(\mathbf{q}, t), \\ t' &= t + \delta t; & \delta t &= \epsilon \tau(\mathbf{q}, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\alpha^i$  e  $\tau$  são funções das coordenadas e do tempo. Aqui,  $\epsilon$  é um parâmetro variacional arbitrário, cuja natureza será elucidada logo mais. A variação de uma função escalar  $f(\mathbf{q}, t)$  fica

$$\begin{aligned} \delta f(\mathbf{q}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta q^i \\ &= \epsilon \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \epsilon \frac{\partial f}{\partial q^i} \alpha^i \\ &= \epsilon X f, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde definimos o campo vetorial  $X = \tau \partial/\partial t + \alpha^i \partial/\partial q^i$ , que descrever as transformações pontuais dadas por (4.1). Aqui, fica claro que  $\alpha^i$  representa a  $i$ -ésima componente do campo vetorial, assim como  $\tau$  a componente temporal de  $X$ . Logo,  $\partial/\partial q^i$  é também um campo vetorial e a junção destes  $n$  elementos forma uma base para o espaço  $\mathcal{V}(Q)$  parametrizado por  $t$ . Em analogia com a álgebra linear, dizemos que este campo vetorial atua como um operador na variedade, isto é, mapeando funções definidas em  $Q$  em outras, no mesmo espaço;  $X : \mathcal{F}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ . A operação de  $X$  em uma função  $f$  define a

*derivada de Lie* de  $f$  na direção de  $X$ ,

$$X(f) \equiv \mathbf{L}_X f. \quad (4.3)$$

Campos vetoriais estabelecem curvas integrais (trajetórias) na variedade. Assim, quando atuados em funções, estas são mapeadas ao longo destas curvas através de seus argumentos, tal que se  $f = f(\mathbf{q}, t)$ , então podemos reescrever as transformações pontuais (4.1) como

$$\begin{aligned} q'^i &= \varphi_\varepsilon^X q^i, \\ t' &= \varphi_\varepsilon^X t, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $\varphi_\varepsilon^X$  representa a família de mapas estabelecida pelo campo  $X$ , parametrizadas por  $\varepsilon$ . Se o mapeamento composto for

$$\varphi_\varepsilon^X \circ \varphi_\sigma^X = \varphi_{\varepsilon+\sigma}^X, \quad (4.5)$$

de forma que  $\varphi_\varepsilon^X (\varphi_\sigma^X q^i) = q^i(\varepsilon+\sigma)$ , e  $\varphi_\varepsilon^X (\varphi_\sigma^X t) = t(\varepsilon+\sigma)$ , então dizemos que a família de mapas  $\varphi_\varepsilon^X$  constitui um *grupo de um parâmetro*, de acordo com a propriedade associativa da lei de composição de grupos. Essa é a classe de mapeamentos que configura os elementos dos grupos de simetria de Noether. Se uma função  $f(\mathbf{q}, t)$  sob a ação de  $X$  permanece imutável,

$$f(\mathbf{q}, t) = f(\mathbf{q}(\varepsilon), t(\varepsilon)), \quad (4.6)$$

então a função  $f(\mathbf{q}, t)$  é *invariante* sob  $\varphi_\varepsilon^X$  e

$$\mathbf{L}_X f = 0. \quad (4.7)$$

O campo vetorial  $X$  é então chamado *gerador infinitesimal de simetria*. Em outras palavras, ele representa uma simetria variacional da família de mapas  $\varphi_\varepsilon^X$ .

As ideias desenvolvidas acima podem ser estendidas para a ação de campos vetoriais sobre funcionais. A lagrangiana, em particular, mora no fibrado tangente  $\mathbf{T}Q$  do espaço de configurações  $Q$ . Este espaço, de  $2n$  dimensões, é constituído pela união disjunta de todos os espaços tangentes ao espaço de configurações. Se  $\mathbf{T}_x Q$  é o espaço tangente à

$Q$  no ponto  $x$ , então  $\mathbf{T}Q = \bigcup_{x \in Q} \{x\} \times \mathbf{T}_x Q$ . Assim, qualquer ponto dessa variedade é representado por dois números  $(q, \dot{q})$ , sendo  $q \in Q$  e  $\dot{q} \in \mathbf{T}_q Q$ .

Antes de construirmos o gerador de simetria que atua em  $\mathbf{T}Q$ , devemos compreender como se transformam as velocidades generalizadas como uma extensão da (4.1).

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i + \epsilon d\alpha^i}{dt + \epsilon d\tau} = \frac{\dot{q}^i + \epsilon \dot{\alpha}^i}{1 + \epsilon \dot{\tau}} = \dot{q}^i + \epsilon(\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i \dot{\tau}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.8)$$

de forma que a variação nas velocidades generalizadas é dada por

$$\delta \dot{q}^i = \epsilon(\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i \dot{\tau}), \quad (4.9)$$

em primeira ordem em  $\epsilon$ . Assim, a variação de um funcional que mora no fibrado tangente é dada por

$$\begin{aligned} \delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \\ &= \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} \tau + \epsilon \frac{\partial L}{\partial q^i} \alpha^i + \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i \dot{\tau}) \\ &= \epsilon \tilde{X} L, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde definimos um novo gerador  $\tilde{X} = \tau \partial / \partial t + \alpha^i \partial / \partial q^i + (\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i \dot{\tau}) \partial / \partial \dot{q}^i$ . Este pode ser escrito como uma composição de dois campos vetoriais atuantes em diferentes espaços:  $\tilde{X} = X + Y$ . Como vimos,  $X$  é o campo vetorial que atua no espaço de configurações, enquanto  $Y = (\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i \dot{\tau}) \partial / \partial \dot{q}^i$  opera no espaço tangente. Assim, existe uma nova família de mapas geradas por  $Y$ , tal que reescrevemos a (4.8) como

$$\dot{q}^i = \varphi_\epsilon^Y \dot{q}^i. \quad (4.11)$$

O campo  $\tilde{X}$  é chamado de *levantamento*, pois ele levanta o deslocamento originado em  $Q$  para o fibrado tangente  $\mathbf{T}Q$ . Este campo genérico pertence ao espaço vetorial  $\mathcal{V}(\mathbf{T}Q)$ , no qual os  $2n$  elementos  $\partial / \partial q^i, \partial / \partial \dot{q}^i$  formam uma base. Similarmente ao caso anterior, quando o campo vetorial atua na lagrangiana, a família de mapas correspondente desloca os argumentos do funcional. Esta nova família, que agora iremos denotar por  $\theta_\epsilon^{\tilde{X}}$  constitui um *grupo de um parâmetro*, e compreende tanto a família de mapas que atua no espaço

de configurações quanto no espaço tangente. Assim, quando  $\theta_\varepsilon^{\tilde{X}}$  atua em  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ ,

$$\theta_\varepsilon^{\tilde{X}} \circ L = L(q'^i, \dot{q}'^i, t'). \quad (4.12)$$

A condição para que  $\tilde{X}$  seja um gerador de simetria variacional é que a variação de  $Ldt$  seja dada por uma derivada total (uma vez que as equações de movimento são inalteradas por termos de superfície embutidos na ação), tal que

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')dt' = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt + \epsilon \frac{df}{dt}dt, \quad (4.13)$$

onde a lagrangiana transformada é dada por  $L' = L + \epsilon \tilde{X}L$ , de acordo com a (4.10). A substituição desta relação na equação acima fornece

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{df}{dt} &= L \frac{dt' - dt}{dt} - \epsilon \tilde{X}L \frac{dt'}{dt} \\ &= \epsilon L\dot{\tau} + \epsilon \tilde{X}L(1 + \epsilon\dot{\tau}) \\ &= \epsilon L\dot{\tau} + \epsilon \tilde{X}L, \end{aligned} \quad (4.14)$$

em primeira ordem em  $\epsilon$ . Assim, a exigência de que  $\tilde{X}$  seja uma simetria variacional é dada por

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\alpha^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i\dot{\tau}) + L\dot{\tau} - \frac{df}{dt} = 0. \quad (4.15)$$

A equação acima desenrola-se em equações polinômiais nas velocidades generalizadas, permitindo-nos resolvê-las para os coeficientes  $\alpha^i$  e  $\tau$ , que são dados em termos de constantes arbitrárias. Para conhecer as transformações em si, o que não é necessário para se obter as constantes de movimento que nos interessam, é necessário que

$$q'^\mu(\epsilon = 0) = q^\mu; \quad \left( \frac{\partial q'^\mu}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \alpha^\mu, \quad (4.16)$$

onde utilizamos o índice grego  $\mu$  para denotar componentes de 0 à 3, sendo que a componente  $\mu = 0$  corresponde às transformações temporais, tal que  $q^0 = t$  e  $\alpha^0 = \tau$ . Essas são as condições para que o parâmetro  $\varepsilon$  seja um *parâmetro de um grupo de Lie* [58].

## 4.2 Constante de Movimento e o Teorema de Noether

Cada transformação infinitesimal contínua que deixa a forma  $Ldt$  invariante (a menos de um termo de superfície), existe uma quantidade conservada, denominada *constante de movimento* ou *carga de Noether*.

**Teorema 4.2.1** (Teorema de Noether) *Se  $\tilde{X}$  é uma simetria variacional de um sistema lagrangiano  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ , então*

$$\Sigma_0 = L\tau - f + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\alpha^i - \tau \dot{q}^i), \quad (4.17)$$

*é uma constante de movimento.*

**Prova:** De acordo com a (4.15),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^i}\alpha^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i\dot{\tau}) + L\dot{\tau} - \frac{df}{dt} \\ &= \tau \frac{dL}{dt} - \tau \frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i - \tau \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \alpha^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i\dot{\tau}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + L\dot{\tau} - \dot{f} \\ &= \frac{d}{dt}(L\tau - f) + \frac{\partial L}{\partial q^i}(\alpha^i - \tau \dot{q}^i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\alpha}^i - \dot{\tau} \dot{q}^i - \tau \ddot{q}^i) \\ &= \frac{d}{dt} \left[ L\tau - f + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\alpha^i - \tau \dot{q}^i) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

■

Conforme dito anteriormente, os coeficientes  $\alpha^\mu$  são funções de  $q^\mu$  dados em termos de constantes arbitrárias. Para cada uma que houver, encontra-se uma carga de Noether zerando-se todas as outras constantes arbitrárias em  $\Sigma_0$ . Dessa forma, o gerador  $\tilde{X}$  é formado pela soma de todos os elementos do grupo de simetria de Noether, dados separadamente por cada uma das constantes arbitrárias.

---

### Campos Taquiônicos não-Minimamente Acoplados

---

Este capítulo é destinado à apresentação das equações que regem os modelos que desenvolvemos, a serem abordados nos capítulos seguintes. Temos como objetivo modelar um sistema capaz de descrever a presente aceleração do Universo, que forneça parâmetros em acordo com as observações. Como vimos no capítulo 3, a existência de um fluido dominante, com pressão negativa, se faz necessária para promover uma expansão acelerada. Diversos tipos de componentes são abordados na literatura, em contraste com o modelo  $\Lambda$ CDM, na busca de descrições que não apresentem os problemas anteriormente citados. Em nossa modelagem, optamos por abordar campos taquiônicos não-minimamente acoplados ao escalar de curvatura, sob o formalismo de Palatini.

Campos taquiônicos são campos escalares não-canônicos. Campos escalares canônicos possuem uma lagrangiana do tipo  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$ , onde o primeiro termo representa a contribuição cinética e o segundo é o potencial. Esse é o caso mais estudado em cosmologia quando interpreta-se a energia escura, e o inflaton (entidade responsável pela inflação) como um campo escalar.

O problema é que nesses modelos, exige-se um enorme *fine tuning* de forma a contornar o problema da coincidência<sup>1</sup> apresentados pelo  $\Lambda$ CDM. Por outro lado, não existe restrição para que a lagrangiana de um campo escalar seja dada de forma mais geral, como  $\mathcal{L} = f(\phi, X)$ , onde  $X = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ . Campos taquiônicos originaram-se em estudos de algumas teorias de cordas e em teoria quântica de campos. Inicialmente, tratava-se de um campo escalar com massa imaginária, cuja partícula associada seria supraluminal. Novos estudos mostraram que o tachyon não teria tal propriedade, mas que campos escalares poderiam apresentar uma massa imaginária em seu potencial máximo (em equilíbrio instável), sendo indutor à *condensação* por qualquer flutuação quântica. Isto é, o campo logo evoluiria para o ponto mínimo de seu potencial, onde o quadrado de sua massa seria positivo. Estes campos ganharam apreciação em cosmologia por serem capazes de implementar modelos que reproduzam o comportamento observado do Universo sem uma escolha tão precisa de parâmetros.

Acoplamentos não-mínimos, como vimos brevemente na seção 3.12, generalizam a relatividade geral ao permitir que exista um grau de liberdade a mais para a gravidade. Na literatura, a primeira proposta feita nessa direção foi publicada por Brans-Dicke[59], na qual os autores sugeriam a existência de um campo escalar acoplado ao escalar de curvatura na busca de uma teoria de gravitação consistente com os princípios de Mach. Teorias quânticas da gravitação também fomentam tal acoplamento, o qual pode surgir naturalmente com a renormalização[60]. Ademais, adotamos o formalismo de Palatini, com a intenção de construir um modelo mais geral, admitindo que a conexão é um ente dinâmico, independente da métrica.

## Notação

A partir deste capítulo, adotaremos a seguinte notação de forma a simplificar os cálculos e deixar o texto mais limpo e conciso. Igualamos à unidade as constantes naturais  $8\pi G_0 = c = 1$ , sendo  $G_0$  o valor da constante gravitacional medido atualmente. O campo taquiônico será representado pela letra grega  $\phi$ . Derivadas serão realizadas com respeito ao objeto indicado subscrito ao símbolo  $\partial$ , tal que  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . As entidades definidas

---

<sup>1</sup>O problema da coincidência consiste em explicar por que estaríamos vivenciando uma época tão peculiar do Universo quando as densidades de energia-escura e matéria encontram-se em mesma ordem de grandeza.

pela relatividade geral (tensor de Riemann, escalar de curvatura, conexão métrica) serão identificadas por um acento til:  $\tilde{R}$ .

## 5.1 Ação, Conexão e Lagrangiana Pontual

A ação para os modelos a serem propostos a seguir toma a seguinte forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ F(\phi)R - V(\phi)\sqrt{1 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi} - \mathcal{L}_f \right], \quad (5.1)$$

onde  $F(\phi)$  é uma função do campo taquiônico e fornece o acoplamento não-mínimo,  $R$  é o escalar de curvatura,  $V(\phi)$  é o potencial de auto-interação e  $\mathcal{L}_f$  é a densidade lagrangiana das demais fontes (radiação, matéria). Nos próximos passos iremos omitir o argumento nas funções de acoplamento e potencial.

A variação desta ação com relação ao tensor métrico e à conexão, de acordo com a seção 2.8, resulta em

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[ F R_{\mu\nu} + \frac{V}{2} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{\sqrt{1 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( F R - V \sqrt{1 - \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} F g^{\mu\nu} (\nabla_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma). \end{aligned} \quad (5.2)$$

A primeira integral acima fornece as equações de campo dos nossos modelos, dadas em função de quantidades definidas através da conexão independente, que encontramos nos cálculos da segunda integral. A variação com respeito à conexão procede

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} F g^{\mu\nu} (\nabla_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) \\ = & \int d^4x \left[ \nabla_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \nabla_\sigma (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right] \\ = & \int d^4x \left[ \nabla_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) \delta_\sigma^\tau - \nabla_\sigma (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) \delta_\nu^\tau \right] \delta \Gamma_{\mu\tau}^\sigma. \end{aligned} \quad (5.3)$$

O integrando na equação acima deve ser nulo, pois a variação é arbitrária. Ao correr os

índices, obtemos duas relações

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma_{\mu\tau}^{\sigma}} = 0 \rightarrow \nabla_{\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) = 0; \quad \nabla_{\sigma} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) = 0, \quad (5.4)$$

sendo que a segunda implica na primeira. Definimos uma nova métrica

$$h_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} = \frac{1}{F} g^{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

cujo determinante é dado por

$$\begin{aligned} Det(h_{\mu\nu}) &= \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon^{\lambda\rho\gamma\omega} h_{\mu\lambda} h_{\nu\rho} h_{\sigma\gamma} h_{\tau\omega} \\ &= \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \varepsilon^{\lambda\rho\gamma\omega} (F g_{\mu\lambda}) (F g_{\nu\rho}) (F g_{\sigma\gamma}) (F g_{\tau\omega}) \\ &= F^4 Det(g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Logo, pelas relações dada pela (5.4)

$$\nabla_{\sigma} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} F) = \nabla_{\sigma} (\sqrt{-h} h^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.7)$$

A equação acima nos diz que a métrica  $h_{\mu\nu}$  é transportada paralelamente na variedade. E então, a conexão afim toma a forma (vide as seções 2.3 e 2.4)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} h_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} h_{\mu\nu}) \\ &= \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2F} g^{\rho\sigma} (g_{\nu\sigma} \partial_{\mu} F + g_{\sigma\mu} \partial_{\nu} F - g_{\mu\nu} \partial_{\sigma} F) \\ &= \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2F} (\delta_{\nu}^{\rho} \partial_{\mu} F + \delta_{\mu}^{\rho} \partial_{\nu} F - g_{\mu\nu} \partial^{\rho} F). \end{aligned} \quad (5.8)$$

A conexão afim nos permite encontrar as demais quantidades que definem nosso sis-

tema, a começar pelo tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} &= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\nu\tau}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \\
&= \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^{\rho} + \partial_{\nu} \left[ \frac{1}{2F} (\delta_{\sigma}^{\rho}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\rho}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\mu}\partial^{\rho}F) \right] - \partial_{\sigma} \left[ \frac{1}{2F} (\delta_{\mu}^{\rho}\partial_{\nu}F + \delta_{\nu}^{\rho}\partial_{\mu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\rho}F) \right] + \\
&+ \frac{1}{2F} (\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F) \tilde{\Gamma}_{\nu\tau}^{\rho} + \frac{1}{2F} (\delta_{\nu}^{\rho}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\rho}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\rho}F) \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} + \\
&+ \frac{1}{4F^2} (\delta_{\nu}^{\rho}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\rho}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\rho}F) (\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F) - \\
&- \frac{1}{2F} (\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F) \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} - \frac{1}{2F} (\delta_{\sigma}^{\rho}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\rho}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\tau}\partial^{\rho}F) \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\tau} - \\
&- \frac{1}{4F^2} (\delta_{\sigma}^{\rho}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\rho}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\tau}\partial^{\rho}F) (\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

O tensor de Ricci é obtido ao se tomar o traço do tensor de Riemann,

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \delta_{\rho}^{\sigma}R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \\
&= \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} + \partial_{\nu} \left[ \frac{1}{2F} (\delta_{\sigma}^{\sigma}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\sigma}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\mu}\partial^{\sigma}F) \right] - \partial_{\sigma} \left[ \frac{1}{2F} (\delta_{\mu}^{\sigma}\partial_{\nu}F + \delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\mu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}F) \right] + \\
&+ \frac{1}{2F} (\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F) \tilde{\Gamma}_{\nu\tau}^{\sigma} + \frac{1}{2F} (\delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\sigma}F) \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} + \\
&+ \frac{1}{4F^2} (\delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\sigma}F) (\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F) - \\
&- \frac{1}{2F} (\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F) \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\sigma} - \frac{1}{2F} (\delta_{\sigma}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\tau}\partial^{\sigma}F) \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\tau} - \\
&- \frac{1}{4F^2} (\delta_{\sigma}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\sigma}F - g_{\sigma\tau}\partial^{\sigma}F) (\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Efetuando as derivadas e somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2F^2} [\partial_{\sigma}F (\delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\sigma}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}F) - 4\partial_{\nu}F\partial_{\mu}F] + \\
&+ \frac{1}{2F} \left\{ 2\partial_{\nu}\partial_{\mu}F + \partial^{\sigma}F\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\partial^{\sigma}F + (\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F)\tilde{\Gamma}_{\nu\tau}^{\sigma} + \right. \\
&+ (\delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\sigma}F)\tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} - (\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F)\tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\sigma} - \\
&\left. - 4\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\tau}\partial_{\tau}F \right\} + \frac{1}{4F^2} \left\{ (\delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\tau}F + \delta_{\tau}^{\sigma}\partial_{\nu}F - g_{\nu\tau}\partial^{\sigma}F)(\delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\sigma}F + \delta_{\sigma}^{\tau}\partial_{\mu}F - g_{\mu\sigma}\partial^{\tau}F) - \right. \\
&\left. - 4\partial_{\tau}(\delta_{\nu}^{\tau}\partial_{\mu}F + \delta_{\mu}^{\tau}\partial_{\nu}F - g_{\mu\nu}\partial^{\tau}F) \right\} \\
&= \tilde{R}_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} - \frac{3}{2F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F + \frac{1}{2F}(2\partial_{\mu}\partial_{\nu}F + \partial^{\sigma}F\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\partial^{\sigma}F - \\
&- 2\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\tau}\partial_{\tau}F + g_{\mu\nu}\tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\sigma}\partial^{\tau}F - \tilde{\Gamma}_{\nu\tau\mu}\partial^{\tau}F - \tilde{\Gamma}_{\mu\tau\nu}\partial^{\tau}F). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Observando que

$$\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma\nu} - \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma\nu} = 0, \tag{5.12}$$

a forma final do tensor de Ricci é dada por

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2F^2}\partial_{\mu}F\partial_{\nu}F + \frac{1}{F}\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{\nabla}_{\mu}F + \frac{1}{2F}g_{\mu\nu}\tilde{\nabla}^2F. \tag{5.13}$$

Por fim, o escalar de curvatura é dado pela contração do tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \tilde{R} - \frac{3}{2F^2}\partial^{\mu}F\partial_{\mu}F + \frac{3}{F}\tilde{\nabla}^2F. \tag{5.14}$$

Nos capítulos que se seguem, iremos restringir nossos modelos aqueles munidos de invariâncias de Noether. Para tanto, precisamos reescrever nossa densidade lagrangiana na forma pontual, isto é, sob uma métrica específica. Com isto, abrimos mão do formalismo covariante, o que não necessariamente confronta a versabilidade da teoria gravitacional, já que os modelos carecem da especificação de uma métrica para cada sistema investigado. Nosso objetivo inicial será obter formas concretas para a função de acoplamento e o potencial de auto-interação, sendo que após isso, o formalismo covariante pode ser recuperado caso exista intenção de investigar outros sistemas gravitacionais em menor escala, como por exemplo corpos compactos. Adotamos a métrica de FLRW, definida na seção 3.3. A densidade lagrangiana, apresentada na ação (5.1), torna-se, então

$$L = 6F(\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2a) - \frac{3a^3}{2F}(\partial_\phi F \dot{\phi})^2 + 3a^3 \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2 + 3a^3 \partial_\phi F \ddot{\phi} + 9\dot{a}a^2 \partial_\phi F \dot{\phi} - a^3 V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - a^3 \rho_f, \quad (5.15)$$

onde  $\rho_f$  é a densidade de energia das demais fontes, de acordo com a lagrangiana de um fluido perfeito[61]. Queremos, entretanto, uma Lagrangiana contendo apenas termos de derivadas primeiras (no tempo). Uma vez que a ação representa uma integral no tempo da lagrangiana pontual, podemos integrar por partes os termos de segunda ordem.

$$\int_{t_1}^{t_2} F \ddot{a} a^2 dt = F \dot{a} a^2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (2F \dot{a}^2 a + \partial_\phi F \dot{\phi} \dot{a} a^2) dt, \quad (5.16)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a^3 \partial_\phi F \ddot{\phi} dt = a^3 \partial_\phi F \dot{\phi} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (a^3 \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2 + 3a^2 \dot{a} \partial_\phi F \dot{\phi}) dt. \quad (5.17)$$

Como o funcional de uma ação é definido entre dois pontos  $(t_1, t_2)$ , ele deve conter implicitamente as condições iniciais do sistema e assim não deve haver variação dos campos dinâmicos nestes dois pontos. Por tal motivo, o primeiro termo ao lado direito da igualdade de cada uma das integrais acima deve ser nulo. Substituindo os valores acima, obtemos a Lagrangiana pontual de primeira ordem

$$L = -6F \dot{a}^2 a - 6a^2 \dot{a} \partial_\phi F \dot{\phi} - a^3 V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - \frac{3a^3}{2F} (\partial_\phi F \dot{\phi})^2 - a^3 \rho_f. \quad (5.18)$$

## 5.2 Equações de Movimento

Nesta seção, iremos obter a partir da lagrangiana, as equações de movimento que irão reger nossos modelos.

### 5.2.1 Equação de Friedmann

A equação de energia

$$E_L = \dot{a} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = 0, \quad (5.19)$$

verificada através dos componentes  $\mu = \nu = 0$  das equações de campo, desenrola-se em

$$\begin{aligned}
0 &= -12F\dot{a}^2a - 12a^2\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} + a^3 \frac{V\dot{\phi}^2}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} - 3a^3 \frac{(\partial_\phi F)^2}{F}\dot{\phi}^2 + 6F\dot{a}^2a + 6a^2\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} + \\
&+ a^3V\sqrt{1-\dot{\phi}^2} + \frac{3a^3}{2F}(\partial_\phi F\dot{\phi})^2 + a^3\rho_f \\
&= -6F\dot{a}^2a - 6a^2\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} + a^3 \left[ V \left( \frac{\dot{\phi}^2}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} + \sqrt{1-\dot{\phi}^2} \right) - \frac{3(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}^2}{2F} \right] + a^3\rho_f \\
&= -6FH^2 - 6H\partial_\phi F\dot{\phi} + \frac{V}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} - \frac{3(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}^2}{2F} + \rho_f, \tag{5.20}
\end{aligned}$$

de onde segue a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{6F}\rho, \tag{5.21}$$

onde  $\rho = \rho_\phi + \rho_f$  e

$$\rho_\phi = \frac{V}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} - 6H\partial_\phi F\dot{\phi} - \frac{3(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}^2}{2F}. \tag{5.22}$$

### 5.2.2 Equação da Aceleração

A densidade lagrangiana na sua forma pontual, permite-nos aplicar diretamente as equações de Euler-Lagrange para obter as equações de movimento dos campos dinâmicos. Aplicando para o fator de escala,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a} = 0. \tag{5.23}$$

Explicitamente, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -12F\dot{a}a - 6a^2\partial_\phi F\dot{\phi}, \tag{5.24}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) = -12(\partial_\phi F\dot{\phi}\dot{a}a + F\ddot{a}a + F\dot{a}^2) - 6(2a\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} + a^2\partial_\phi^2 F\dot{\phi}^2 + a^2\partial_\phi F\ddot{\phi}), \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -6F\dot{a}^2 - 12a\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} - 3a^2 \left( V\sqrt{1-\dot{\phi}^2} + \frac{3(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}^2}{2F} \right) - 3a^2\rho_f - a^3\partial_a\rho_f. \tag{5.26}$$

Substituindo as relações acima na (5.23) e rearranjando os termos,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12F}(\rho + 3p), \quad (5.27)$$

onde definimos  $p = p_\phi + p_f$ , sendo

$$p_\phi = -V\sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - \frac{3\partial_\phi F^2 \dot{\phi}^2}{2F} + 2\partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2 + 2\partial_\phi F \ddot{\phi} + 4H\partial_\phi F \dot{\phi}, \quad (5.28)$$

$$p_f = -\rho_f - \frac{a}{3}\partial_a \rho_f. \quad (5.29)$$

### 5.2.3 Equação de Klein-Gordon

A equação de Euler-Lagrange, aplicada ao campo taquiônico,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (5.30)$$

Calculando termo a termo, temos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -6a^2 \dot{a} \partial_\phi F + a^3 \frac{V \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - 3a^3 \frac{(\partial_\phi F)^2}{F} \dot{\phi}, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= -6(2a\dot{a}^2 \partial_\phi F + a^2 \ddot{a} \partial_\phi F + a^2 \dot{a} \partial_\phi^2 F \dot{\phi}) + \frac{3a^2 \dot{a} V \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + \frac{a^3 \partial_\phi V \dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + \frac{a^3 V \ddot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + \\ &+ \frac{a^3 V \dot{\phi}^2 \ddot{\phi}}{(1 - \dot{\phi}^2)^{3/2}} - 9a^2 \dot{a} \frac{(\partial_\phi F)^2 \dot{\phi}}{F} + 3a^3 \frac{(\partial_\phi F)^3 \dot{\phi}^2}{F^2} - 6a^3 \frac{\partial_\phi F \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2}{F} - 3a^3 \frac{(\partial_\phi F)^2 \ddot{\phi}}{F}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -6\partial_\phi F \dot{a}^2 a - 6a^2 \dot{a} \partial_\phi^2 F \dot{\phi} - a^3 \partial_\phi V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + \frac{3a^3 (\partial_\phi F)^3 \dot{\phi}^2}{2F^2} - \frac{3a^3 \partial_\phi F \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2}{F}. \quad (5.33)$$

A equação (5.30) fica

$$0 = \ddot{\phi} \left( \frac{V}{(1 - \dot{\phi}^2)^{3/2}} - 3 \frac{(\partial_\phi F)^2}{F} \right) + \dot{\phi}^2 \left( \frac{3}{2} \frac{(\partial_\phi F)^3}{F^2} - 3 \frac{\partial_\phi F \partial_\phi^2 F}{F} \right) + \dot{\phi} \frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{3V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - 9 \frac{(\partial_\phi F)^2}{F} \right) - 6 \partial_\phi F \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{\partial_\phi V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (5.34)$$

A equação acima é chamada *equação de Klein-Gordon*<sup>2</sup>, termo cunhado na teoria quântica de campos, referindo-se à equação de movimento que se origina na variação de uma ação com respeito ao campo escalar.

### 5.3 Transferência de Energia

A derivada temporal da (5.21), combinada com ela mesma e a (5.27), resulta

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 6H^2 \partial_\phi F \dot{\phi}, \quad (5.35)$$

que é simplesmente a derivada covariante do tensor energia-momento. Quando há o acoplamento não-mínimo, este não se conserva. Como as demais fontes (matéria e a radiação) são não interagentes e apenas minimamente acopladas, a (3.28) permanece válida e a equação acima se reduz a

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 6H^2 \partial_\phi F \dot{\phi}. \quad (5.36)$$

Anteriormente, dissemos que o acoplamento não-mínimo gera um novo grau de liberdade à gravidade, e que esta carrega energia. A equação acima nos mostra que, nestes casos, existe uma transferência de energia entre o campo taquiónico e o campo gravitacional. Quanto mais intensa for a variação da função de acoplamento, maior será a transferência. Assim, essa transação determina quão forte são as interações gravitacionais.

<sup>2</sup>Uma generalização, na verdade. Originalmente, a equação de Klein-Gordon é a equação da onda para uma partícula escalar (sem spin): a versão relativística da equação de Schrödinger[62].

## 5.4 Variação da Constante Gravitacional

Por simplicidade, adotamos uma notação onde  $8\pi G_0 = 1$ . No entanto, é necessário manter em mente que estas quantidades estão presentes nas equações, dentro da função de acoplamento não-mínimo  $F(\phi)$ , tal que  $F \propto G^{-1}$ . A taxa de variação da constante gravitacional é, portanto,

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{\dot{F}}{F} = -\frac{\dot{\phi}\partial_{\phi}F}{F}. \quad (5.37)$$

---

### Modelo Cosmológico para Energia-Escura e Matéria

---

Apresentamos, agora, o primeiro de nossos modelos, onde consideramos um Universo composto por energia-escura e matéria (bariônica e escura). Conforme vimos na seção 3.5, a densidade de energia da matéria decresce com o cubo do fator de escala e sua pressão é nula. Admitimos que a matéria escura se comporte da mesma forma, representando as duas entidades por um único termo na ação,  $\mathcal{L}_m$ , representando a densidade lagrangiana da matéria, sem distinção entre a bariônica e a escura. A lagrangiana pontual do nosso sistema, de acordo com a (5.1) fica

$$L = -6F\dot{a}^2a - 6a^2\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} - a^3V\sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - \frac{3a^3}{2F}(\partial_\phi F\dot{\phi})^2 - \rho_m^0, \quad (6.1)$$

onde  $\rho_m^0$  é uma constante e representa o valor atual da densidade de energia da matéria.

## 6.1 Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação

Ao invés de impor um potencial de auto-interação e uma função de acoplamento de forma *ad-hoc*, vamos restringir o modelo àquele que admita uma lagrangiana invariante sob transformações pontuais, apresentando simetrias de Noether. Investigamos, porém, uma classe particular de transformações em que a coordenada independente (o tempo) é preservada, ou, operado pela identidade. Neste caso, o coeficiente respectivo ( $\tau$ ) do gerador de simetrias é nulo, e este campo vetorial toma a forma

$$\tilde{X} = \alpha^i \partial_{q^i} + \dot{\alpha}^i \partial_{\dot{q}^i}. \quad (6.2)$$

Neste caso, a exigência (4.15) para que o campo acima seja uma simetria variacional é simplesmente

$$\tilde{X}L = 0, \quad (6.3)$$

e a constante de movimento associada (4.17)

$$\Sigma_0 = \alpha^i \partial_{\dot{q}^i} L, \quad (6.4)$$

pois não há necessidade de considerarmos termos de superfície na variação da lagrangiana. Aplicando a (6.3), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \partial_a L + \beta \partial_\phi L + \left( \dot{\alpha} \partial_a \alpha + \dot{\phi} \partial_\phi \alpha \right) \partial_{\dot{a}} L + \left( \dot{\alpha} \partial_a \beta + \dot{\phi} \partial_\phi \beta \right) \partial_{\dot{\phi}} L \\ &= \alpha \left( -6F \dot{a}^2 - 12a \dot{a} \partial_\phi F \dot{\phi} - 3a^2 V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - \frac{9a^2 (\partial_\phi F)^2 \dot{\phi}^2}{2F} \right) + \\ &+ \beta \left( -6 \partial_\phi F \dot{a}^2 a - 6a^2 \dot{a} \partial_\phi^2 F \dot{\phi} - a^3 \partial_\phi V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + \frac{3a^3 (\partial_\phi F)^3 \dot{\phi}^2}{2F^2} - \frac{3a^3 \partial_\phi F \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2}{F} \right) + \\ &+ \left( \partial_a \alpha \dot{a} + \partial_\phi \alpha \dot{\phi} \right) \left( -12F \dot{a} a - 6a^2 \partial_\phi F \dot{\phi} \right) + \\ &+ \left( \partial_a \beta \dot{a} + \partial_\phi \beta \dot{\phi} \right) \left( -6a^2 \dot{a} \partial_\phi F + \frac{a^3 V \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} - 3a^3 \frac{(\partial_\phi F)^2 \dot{\phi}}{F} \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $\alpha$  é a componente  $\alpha^1$  do campo  $\tilde{X}$ , correspondendo à coordenada generalizada  $q^1 = a$ ; por sua vez,  $\beta$  é a componente  $\alpha^2$  correspondendo à  $q^2 = \phi$ . A igualdade vale para todos os valores de  $\dot{a}$  e  $\dot{\phi}$ . Portanto, a equação acima desdobra-se em seis equações diferenciais parciais, a saber

$$0 = 6\alpha F + 6a\partial_\phi F\beta + 12aF\partial_a\alpha + 6a^2\partial_\phi F\partial_a\beta, \quad (6.6)$$

$$0 = \frac{9a^2(\partial_\phi F)^2}{2F}\alpha - \frac{3a^3(\partial_\phi F)^3}{2F^2}\beta + \frac{3a^3\partial_\phi F\partial_\phi^2 F}{F}\beta + 6\partial_\phi F a^2\partial_\phi\alpha + \frac{3a^3(\partial_\phi F)^2}{F}\partial_\phi\beta, \quad (6.7)$$

$$0 = 12a\partial_\phi F\alpha + 6a^2\partial_\phi^2 F\beta + 6a^2\partial_\phi F\partial_a\alpha + 12aF\partial_\phi\alpha + 3a^3\frac{(\partial_\phi F)^2}{F}\partial_a\beta + 6a^2\partial_\phi F\partial_\phi\beta, \quad (6.8)$$

$$0 = 3a^2V\alpha + a^3\partial_\phi V\beta, \quad (6.9)$$

$$0 = a^3V\partial_\phi\beta, \quad (6.10)$$

$$0 = a^3V\partial_a\beta. \quad (6.11)$$

As relações (6.10) e (6.11) implicam em  $\beta = \beta_0$  ser constante. Substituindo  $\alpha$  dado pela (6.9) na (6.6), obtemos

$$\frac{\partial_\phi V}{V} = \frac{\partial_\phi F}{F}, \quad (6.12)$$

e a função de acoplamento e o potencial são linearmente dependentes,  $F \propto V$ . A equação (6.8) reescrita com os resultados obtidos acima, após manipulada, fornece

$$\partial_\phi^2 V - \frac{(\partial_\phi V)^2}{V} = 0, \quad (6.13)$$

que com a seguinte mudança de variável,

$$u(V) = \partial_\phi V \rightarrow \partial_\phi^2 V = u\partial_V u, \quad (6.14)$$

torna-se

$$u\partial_V u - \frac{u^2}{V} = 0. \quad (6.15)$$

Resolvendo a equação acima, obtemos  $u(V) = kV$ , e com a transformação inversa descobrimos que

$$V(\phi) = V_0 e^{k\phi}, \quad F(\phi) = F_0 e^{k\phi}, \quad (6.16)$$

onde  $V_0$  e  $F_0$  são constantes.

## 6.2 Soluções Numéricas

As equações de movimento (5.27), (5.34), junto com a equação de Friedmann (5.21) determinam a dinâmica do sistema. Entretanto, para obtermos uma solução numérica consistente, é necessário estabelecer condições iniciais coerentes; tarefa impossível quando se lida com campos nunca medidos que evoluem com o tempo cosmológico. Existem, porém, parâmetros observacionais como os vistos na seção 3.6, conhecidos para diferentes valores do *redshift*, cujas medições servem perfeitamente para definirmos as condições iniciais. Fazendo a mudança de variável do tempo para o *redshift*, com a ajuda da (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= -H(1+z)\frac{d}{dz}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= H^2(1+z)^2\frac{d^2}{dz^2} + H^2(1+z)\frac{d}{dz} + HH'(1+z)^2\frac{d}{dz},\end{aligned}\quad (6.17)$$

onde a linha representa a derivada com relação ao *redshift*,  $z$ . Não buscamos mais soluções para o fator de escala, mas para o parâmetro de Hubble, juntamente com o campo taquiônico. Assim, fazemos uso da (5.21) com a (5.27) para formar

$$4F_0e^{k\phi}HH'(1+z) = \rho_\phi + \rho_m + p_\phi. \quad (6.18)$$

A densidade de energia,  $\rho_\phi$ , e pressão,  $p_\phi$ , do campo taquiônico são expressas pelas (5.22) e (5.28), respectivamente. Estas são funções explícitas do campo e não agregam variáveis adicionais às equações.

A equação de Klein-Gordon (5.34) torna-se

$$\begin{aligned} & (H^2(1+z)^2\phi'' + HH'(1+z)^2\phi') \left( \frac{V_0}{[1 - H^2(1+z)^2\phi'^2]^{3/2}} - 3F_0k^2 \right) - \\ & - \frac{3}{2}F_0k^3H^2(1+z)^2\phi'^2 + \frac{V_0k}{\sqrt{1 - H^2(1+z)^2\phi'^2}} - H^2(1+z) \left( \frac{3V_0}{\sqrt{1 - H^2(1+z)^2\phi'^2}} - 9F_0k^2 \right) - \\ & - 6F_0k [2H^2 - HH'(1+z)] = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Estas duas equações diferenciais, com as condições iniciais apropriadas, fornecem o comportamento das densidades de energia e pressão dos componentes, bem como o parâmetro de Hubble e de desaceleração. Antes de fixar as condições, deixemos as variáveis em uma forma adimensional:

$$H \rightarrow \bar{H} = \frac{H}{\sqrt{\rho^0}}, \quad V \rightarrow \bar{V} = \frac{V}{\rho^0}, \quad \phi \rightarrow \bar{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{\rho^0}}, \quad k \rightarrow \bar{k} = k\sqrt{\rho^0}, \quad (6.20)$$

onde  $\rho^0 = \rho_\phi^0 + \rho_m^0$  é a densidade total de energia para o presente momento ( $z = 0$ ). Com essas mudanças, estamos interessados na evolução dos parâmetros de densidade, definidos como  $\Omega_\phi = \rho_\phi/\rho$  para a energia escura e  $\Omega_m = \rho_m/\rho$  para os campos de matéria.

Algumas considerações a respeito das condições iniciais  $\bar{\phi}'(0)$ ,  $\bar{\phi}(0)$  e  $\bar{H}(0)$  devem ser tomadas. Primeiramente, para que o campo taquiônico exiba uma pressão negativa real no momento, representando a energia escura, é necessário que  $\dot{\phi}(0) \ll 1$ , de acordo com a (5.28). Assim, nos parece razoável estabelecer  $\bar{\phi}'(0) = 10^{-3}$ . Logo, temos que  $\rho_\phi(0) \sim V(0)$ , que é o mesmo que  $\Omega_\phi(0) = \bar{V}(0) = 0,72$ . A partir da (6.16), segue-se que  $\bar{\phi}(0) = \bar{k}^{-1} \ln(0,72/\bar{V}_0)$ . Ademais, a função de acoplamento deve ser igual à 1/2 atualmente, considerando a forma que construímos nossa ação, para que a constante gravitacional tenha o seu valor observado. Logo,  $F_0 = \bar{V}_0/1,44$  e temos apenas dois parâmetros livres,  $\bar{V}_0$  e  $\bar{k}$ . Finalmente, pela equação de Friedmann (5.21), estabelecemos  $\bar{H}(0) = 1/\sqrt{3}$ . Fixando  $\bar{V}_0 = 1$ , plotamos as solução para três valores diferentes para a constante de acoplamento:  $\bar{k} = 0,1$ ,  $\bar{k} = 0,05$  e  $\bar{k} = 0,01$ . Acoplamentos mais fortes geram instabilidades desinteressantes e não as consideramos aqui.

A evolução dos parâmetros de densidade é mostrada na Fig. 6.1. Quanto menor a constante de acoplamento,  $\bar{k}$ , mais rapidamente a densidade da energia escura aumenta

enquanto a dos campos de matéria decresce. Opostamente, para o acoplamento mais forte,  $\bar{k} = 0,1$ , vemos que a energia escura apresenta uma densidade significativa mesmo em tempos mais remotos. Na Fig. 6.2, apresentamos a razão entre a pressão e a densidade de energia ( $\omega_\phi$ ) para o campo taquiônico. No acoplamento mais fraco,  $\bar{k} = 0,01$ , o campo tende assintoticamente a se comportar como a constante cosmológica.

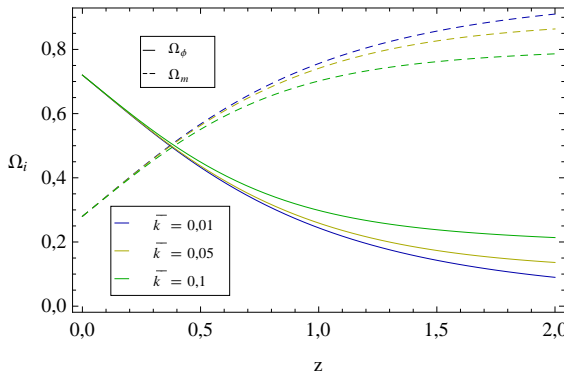


Figura 6.1: Evolução dos parâmetros de densidade. Quanto menor o acoplamento, mais rapidamente a densidade de energia-escura decresce com o *redshift*.

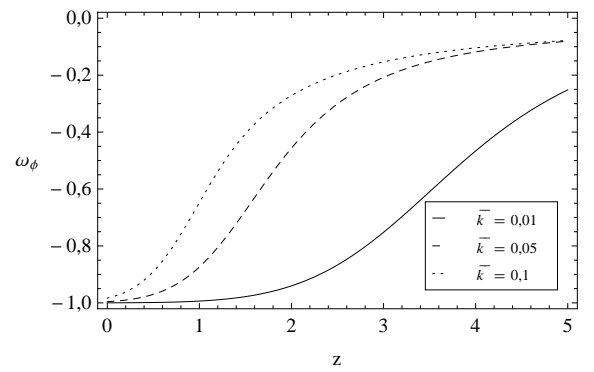


Figura 6.2: A razão entre a pressão e a densidade de energia-escura assume valores capazes de realizar uma expansão acelerada,  $\omega_\phi < -1/3$ , para *redshifts* cada vez mais baixos conforme o acoplamento seja mais forte.

A taxa de variação da constante gravitacional,  $\dot{G}/G$ , é apresentada na Fig. 6.3. Observamos, pela sua variação positiva, que as interações gravitacionais eram mais fracas no passado. Experimentos realizados pelo Lunar Laser Range estabelecem um limite máximo para a taxa de variação atual anual,  $|\dot{G}_0/G_0| < 0,7 \pm 3,8 \times 10^{-13}$  [39], ou seja, se a variação existir, esta deve ser mais sutil do que a precisão dos experimentos realizados até agora. Em nosso modelo, obtivemos

$$\frac{\dot{G}_0}{G_0} = \begin{cases} 7,15 \times 10^{-16} \text{ano}^{-1}, & \bar{k} = 0,01 \\ 3,58 \times 10^{-15} \text{ano}^{-1}, & \bar{k} = 0,05 \\ 7,15 \times 10^{-15} \text{ano}^{-1}, & \bar{k} = 0,1 \end{cases}$$

sem confronto com as observações, portanto.

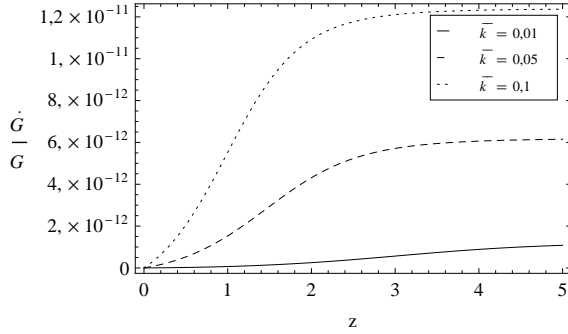


Figura 6.3: Taxa de variação da constante gravitacional (em  $\text{ano}^{-1}$ ). A constante gravitacional varia muito pouco ao longo de toda a história e, quanto menor o acoplamento não-mínimo, menor é a transferência de energia entre o campo taquiônico e a gravidade, atenuando a taxa de variação. Observamos que no início do Universo a taxa de variação era praticamente constante, tendo uma queda acentuada para  $z < 3$ , tendendo assintoticamente à zero. Embora esta taxa esteja decrescendo, ela é positiva, e a constante gravitacional cresce com o tempo.

## 6.3 Parâmetros Observacionais

Os parâmetros observacionais introduzidos na seção 3.6 foram usados para contrastar nosso modelo com o comportamento do Universo. Na Fig. 6.4, vemos o parâmetro de desaceleração,  $q = 1/2 + 3p/2\rho$ , e concluímos que conforme o acoplamento se torna mais forte, o *redshift* de transição entre o período desacelerado e acelerado diminui, ou seja, ocorrendo mais tarde no tempo cosmológico. Isto já é esperado pela Fig. 6.2: quanto maior for o valor de  $\bar{k}$ , mais drasticamente cai a razão entre a pressão e a densidade de energia escura, que assume valores  $\omega_\phi < -1/3$  apenas recentemente, atrasando a transição. Na tabela 6.1, encontram-se os valores obtidos por essas curvas, onde  $z_{eq}$  é o *redshift* de equivalência entre as densidades de energia escura e matéria ( $\Omega_\phi(z_{eq}) = \Omega_m(z_{eq})$ ),  $z_t$  é o *redshift* de transição e  $q(0)$  é o valor atual do parâmetro de desaceleração.

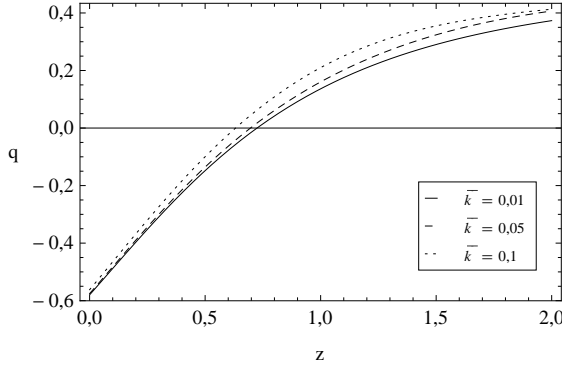


Figura 6.4: Parâmetro de desaceleração. O acoplamento não-mínimo atrasa a transição entre os períodos de expansão desacelerada e acelerada.

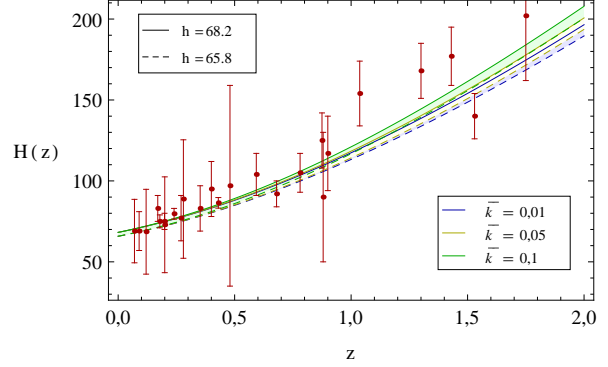


Figura 6.5: O parâmetro de Hubble em função do *redshift* dado pelo modelo proposto e pelos dados observacionais[63]. O parâmetro está decrescendo desde os tempos mais remotos. A diminuição da inclinação da curva para pequenos valores de  $z$  indica a transição para um período de expansão acelerada. Acoplamentos mais intensos geram maior variação da taxa de expansão.

	$k = 0,1$	$k = 0,05$	$k = 0,01$
$z_{eq}$	0,3900	0,3748	0,3702
$q(0)$	-0,5619	-0,5754	-0,5798
$z_t$	0,6316	0,6963	0,7247

Tabela 6.1: Valores fornecidos pelo modelo.

O parâmetro de Hubble, mostrado na Fig. 6.5, contém dados de 25 supernovas[63]. Lembrando da seção 3.2 que  $h = 0,67 \pm 0,012$ , as curvas foram plotadas dentro desses limites. Para os três valores de  $\bar{k}$ , o comportamento de  $H$  é muito similar em pequenos *redshift*, apresentando maior diferença apenas em tempos remotos. Notemos que as incertezas são muito altas e os dados poucos, dificultando favorecer alguma das curvas.

A distância de módulo, cujos dados observacionais já apresentamos, também na seção 3.6, é reintroduzida na Fig. 6.6 onde as três curvas, referentes aos três valores da constante de acoplamento investigados, se sobrepõem. Na realidade, por se tratar de uma grandeza que evolui com o logaritmo da distância de luminosidade, nenhuma diferença é notada entre curvas pertencentes a modelos minimamente coerentes com a realidade. Serve, entretanto, para descartar modelos que não apresentem o mesmo comportamento.

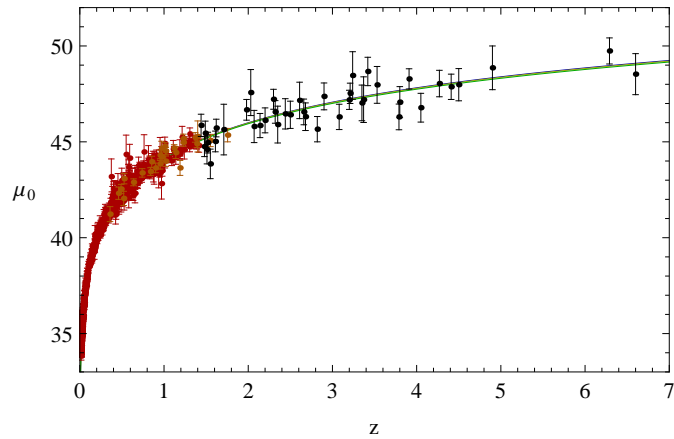


Figura 6.6: A distância de módulo traçada para os três casos analisados. A distância entre as curvas é muito menor do que as barras de erro dos dados disponíveis, tal que nenhuma delas é favorecida. Os dados observacionais da análise de supernovas estão em vermelho[46] e em laranja[47]. Em preto temos os dados de erupção de raios-gamma[48].

---

### Modelo Cosmológico para Energia-Escura, Matéria e Radiação

---

O modelo proposto no capítulo anterior nos permitiu estudar alguns aspectos evolutivos do Universo ao longo últimos 12 bilhões de anos. Considerando que a idade do Universo é ligeiramente menor que 14 bilhões de anos, modelos que contemplam a existência de matéria e energia escura são capazes de descrever a maior parte de sua história. Existem, porém, outras fontes de campo gravitacional que foram dominantes no início de toda história, e que portanto devem ser levadas em conta se quisermos compreender o que se passou em eras mais remotas. Neste capítulo vamos investigar um Universo composto por matéria-escura, bárions, energia-escura e matéria relativística (radiação e neutrinos). Vamos partir do mesmo modelo introduzido no capítulo 5, restringindo a função de acoplamento não-mínimo e o potencial de auto-interação aqueles que permitem transformações invariantes na lagrangiana. Novamente, recorreremos a seção 3.5 para lembrar que a radiação (e no nosso caso, os neutrinos também) evoluem com  $a^{-4}$ . Assim, reescrevemos a lagrangiana pontual dada pela (5.1), na forma

$$L = -6F\dot{a}^2a - 6a^2\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} - a^3V\sqrt{1-\dot{\phi}^2} - \frac{3a^3}{2F}(\partial_\phi F\dot{\phi})^2 - \rho_m^0 - \frac{\rho_r^0}{a}, \quad (7.1)$$

onde  $\rho_r^0$  é uma constante e representa o valor atual da densidade de energia da matéria relativística.

## 7.1 Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação

Similarmente ao que fizemos no capítulo 6, vamos buscar soluções que admitem simetrias de Noether, ainda nos focando nas transformações particulares que não envolvem a coordenada temporal. A operação (6.3) para a (7.1) resulta

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha \partial_a L + \beta \partial_\phi L + \left( \dot{a} \partial_a \alpha + \dot{\phi} \partial_\phi \alpha \right) \partial_{\dot{a}} L + \left( \dot{a} \partial_a \beta + \dot{\phi} \partial_\phi \beta \right) \partial_{\dot{\phi}} L \\
&= \alpha \left( -6F\dot{a}^2 - 12a\dot{a}\partial_\phi F\dot{\phi} - 3a^2V\sqrt{1-\dot{\phi}^2} - \frac{9a^2(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}^2}{2F} + \frac{\rho_r^0}{a^2} \right) + \\
&+ \beta \left( -6\partial_\phi F\dot{a}^2 a - 6a^2\dot{a}\partial_\phi^2 F\dot{\phi} - a^3\partial_\phi V\sqrt{1-\dot{\phi}^2} + \frac{3a^3(\partial_\phi F)^3\dot{\phi}^2}{2F^2} - \frac{3a^3\partial_\phi F\partial_\phi^2 F\dot{\phi}^2}{F} \right) + \\
&+ \left( \partial_a \alpha \dot{a} + \partial_\phi \alpha \dot{\phi} \right) \left( -12F\dot{a}a - 6a^2\partial_\phi F\dot{\phi} \right) + \\
&+ \left( \partial_a \beta \dot{a} + \partial_\phi \beta \dot{\phi} \right) \left( -6a^2\dot{a}\partial_\phi F + \frac{a^3V\dot{\phi}}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}} - 3a^3\frac{(\partial_\phi F)^2\dot{\phi}}{F} \right), \tag{7.2}
\end{aligned}$$

onde, novamente,  $\alpha$  e  $\beta$  são as componentes  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$  do gerador  $\tilde{X}$ , correspondentes às coordenadas  $a$  e  $\phi$ , respectivamente. A igualdade vale para todos os valores de  $\dot{a}$  e  $\dot{\phi}$ . Para  $\dot{\phi} = \dot{a} = 0$ , temos

$$3\alpha a^2 V - \alpha \frac{\rho_r^0}{a^2} + \beta a^3 \partial_\phi V = 0. \tag{7.3}$$

Derivando a (7.2) uma vez com relação à  $\dot{a}$  e duas vezes com relação à  $\dot{\phi}$ , temos que  $\partial_a \beta = 0$ . A derivada terceira com relação à  $\dot{\phi}$  fornece  $\partial_\phi \beta = 0$  e

$$9\alpha a^2 V + 3\beta a^3 \partial_\phi V = 0, \tag{7.4}$$

que junto com a (7.3) resulta em  $\alpha = 0$ . Como esse resultado na (7.2) e  $\beta = \beta_0$  constante,

concluimos que  $\partial_\phi V = \partial_\phi F = 0$  e

$$V = V_0, \quad F = \frac{1}{2}. \quad (7.5)$$

O acoplamento não-mínimo some, e o potencial de auto-interação é constante. A densidade de energia (5.22) e pressão (5.28) para o campo taquiônico, são dadas então

$$\rho_\phi = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad p_\phi = -V_0 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}, \quad (7.6)$$

respectivamente. Existe uma classe especial de fluido cosmológico, obedecendo a seguinte equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho^\gamma}, \quad (7.7)$$

onde  $A$  é uma constante positiva e  $0 < \gamma \leq 1$ , chamada *gás de Chaplygin*<sup>1</sup>. Muitos são os fluidos que podem satisfazer a igualdade acima, comportando-se como um tal gás. O campo taquiônico de potencial constante é um gás de Chaplygin com  $\gamma = 1$  e  $A = V_0^2$ . A constante de Noether, neste caso, usando a (6.4)

$$\Sigma_0 = \frac{a^3 V_0 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (7.8)$$

é a primeira integral da equação do fluido (3.28). Atentamos que, uma vez que o acoplamento não-mínimo não acontece nesse modelo, pela (5.36), o tensor energia-momento associado ao campo taquiônico é conservado. Reescrevendo a equação do fluido com a ajuda da (7.6), obtemos

$$\dot{\rho}_\phi + 3H \left( \rho_\phi - \frac{V_0^2}{\rho_\phi} \right) = 0, \quad (7.9)$$

uma EDO exata, a menos de uma simples manipulação, cuja primeira integral provê

$$\rho_\phi = \sqrt{\frac{\Sigma_0^2}{a^6} + V_0^2}, \quad (7.10)$$

que é equivalente à (7.8).

---

<sup>1</sup>A equação de estado recebe este nome por ter sido introduzida por Chaplygin no início do século XX, para descrever as forças que atuavam sob as asas de aeronaves[64].

A equação acima nos fornece como a densidade de energia-escura evolui com o fator de escala. Vemos que para  $a \ll 1$ , o primeiro termo dentro da raiz ao lado direito da igualdade é dominante, e  $\rho_\phi \sim \Sigma_0/a^3$ . Conforme o Universo se expande, este termo decresce rapidamente e a energia-escura se comporta como uma constante cosmológica  $\rho_\phi \sim V$ . Conhecemos um outro tipo de fluido que evolui com  $a^{-3}$ : a matéria. Assim, inferimos que para  $z \gg 1$ , o campo taquiônico se encontra na forma de matéria, e é incapaz de contribuir para uma expansão acelerada. Observemos sua pressão

$$p = -\frac{V_0^2}{\sqrt{\frac{\Sigma_0^2}{a^6} + V_0^2}}, \quad (7.11)$$

concluimos que para  $a \ll 1$ ,  $p \sim 0$ , novamente como exercido pelos campos de matéria. Visto de outra forma, conforme a expansão progride, parte do fluido de matéria, dado por um gás de Chaplygin de natureza taquiônica, evolui para aquilo que chamamos de energia-escura.

## 7.2 Soluções Numéricas

Embora não tenha sido possível encontrar soluções analíticas para  $a(t)$  e  $\phi(t)$  pelas equações de movimento (5.21), (5.27) e (5.34), conhecemos como cada densidade de energia evolui com o fator de escala, e conseqüentemente,  $H(z)$  e  $\phi(z)$ . A equação de Friedmann, escrita em termos do *redshift*

$$H^2 = \frac{1}{3} \left( \sqrt{\Sigma_0^2(1+z)^6 + V_0^2} + \rho_m^0(1+z)^3 + \rho_r^0(1+z)^4 \right), \quad (7.12)$$

já nos dá informações suficientes para traçar nossas curvas e obter o comportamento do sistema. Precisamente como no capítulo anterior, deixamos as quantidades em sua forma adimensional, tal que

$$H \rightarrow \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \Sigma_0 \rightarrow \bar{\Sigma}_0 = \frac{\Sigma_0}{\rho_0}, \quad V_0 \rightarrow \bar{V}_0 = \frac{V_0}{\rho_0}. \quad (7.13)$$

O valor atual para o parâmetro de densidade da energia escura  $\Omega_\phi^0 = 0,72$ , cria um vínculo com a equação acima, tal que  $\bar{\Sigma}_0^2 = (0,72)^2 - \bar{V}_0^2$ , e temos somente o potencial

como parâmetro livre. Analisamos o comportamento das densidades para quatro valores de  $\bar{V}_0$ : 0,675, 0,69, 0,705 e 0,72. O último caso corresponde à constante cosmológica, uma vez que  $\bar{V}_0 = 0,72 \rightarrow \bar{\Sigma}_0 = 0$ . Ademais, os valores atuais para as densidades de energia da matéria e radiação (com neutrinos) foram estabelecidos em  $\Omega_m^0 = 0,279915$  e  $\Omega_r^0 = 8,5 \times 10^{-5}$ [44, 49].

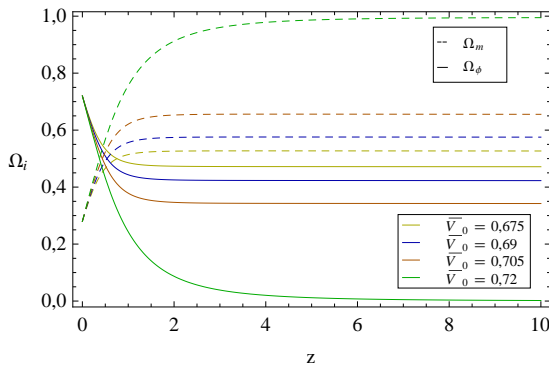


Figura 7.1: A densidade de energia da radiação é negligenciável para pequenos *redshifts*, quando comparada aos demais componentes. A densidade de energia-escura decresce rapidamente apenas para o caso da constante cosmológica,  $\bar{V}_0 = 0,72$ . Quando o campo taquiônico apresenta dinâmica ( $\phi$  não constante), a energia-escura decai em campos de matéria.

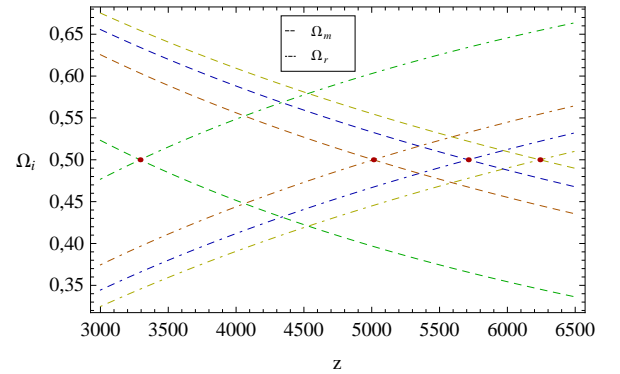


Figura 7.2: A transição entre as eras de domínio da radiação e da matéria estão destacadas pelo ponto vermelho, que indica o *redshift* de transição, para todos os modelos. Quanto mais dinâmico for o campo taquiônico, mais cedo ocorre tal transição. Isto porque nesta época do Universo, o gás de Chaplygin há muito já contribui como matéria, e não mais energia-escura.

As figuras acima contém a evolução das densidades de energia em diferentes escalas de  $z$ . Na Fig. 7.1, a densidade de energia da radiação é pequena demais para ser observada. Quanto maior o valor de  $\bar{V}_0$ , maior é o decaimento da densidade de energia-escura, com o aumento do *redshift*. Vemos, entretanto, que exceto pelo caso da constante cosmológica, as densidades do campo taquiônico não decrescem até um determinado valor, o qual mantém quase constantemente. Isso ocorre pelo comportamento dual do gás de Chaplygin, no qual o fluido ora se comporta como matéria, ora como energia-escura. A Fig. 7.2 segue a mesma legenda de cores que a anterior, e apresenta a evolução das densidades de matéria e radiação em grandes *redshifts*. Aqui, o gás de Chaplygin já é levado em consideração ao se calcular  $\Omega_m$ . Os pontos em vermelho representam as interseções das curvas, ou seja, o momento de transição entre a era dominante da radiação e a era dominante da

matéria. Observamos que quanto mais dinâmico é o campo - menor valor de  $\bar{V}_0$  - maior é o *redshift* de equivalência. Embora o desacoplamento e a recombinação (vide capítulo 3) não estejam intrinsecamente ligados com a época em que ocorreu essa transição, pois dependem fundamentalmente da temperatura do Universo, e não da densidade de radiação; se a matéria passa a dominar o Universo mais cedo, há mais tempo para que a matéria escura (que não sofre com as colisões de fótons) formar seus poços de potencial de forma que grandes estruturas possam ser formadas logo após a recombinação. Isso ajudaria a explicar por que detectamos galáxias e quasares enormes em grandes valores de  $z$ .

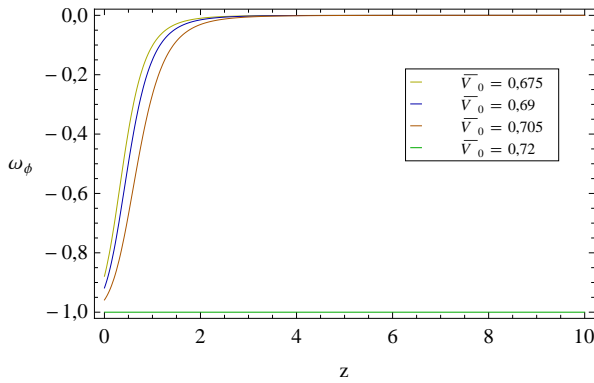


Figura 7.3: A razão entre a pressão e a densidade do campo taquiônico enfatiza o comportamento dual (matéria/energia-escura) deste componente. Em todos os casos onde há dinâmica,  $\omega_\phi < -1/3$  em pequenos *redshifts*, sendo capaz de efetuar uma expansão acelerada, mas conforme avançamos em  $z$ , rapidamente sobe e assume valor nulo, devido a pressão zero exercida pelos campos de matéria. O caso  $\bar{V}_0 = 0,72$  apresenta valor constante, por se tratar da constante cosmológica ( $p = -\rho$ ).

A razão,  $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$  é traçada na Fig. 7.3. Enquanto a constante cosmológica mantém  $\omega_\phi = -1$  durante toda a história do Universo, o campo dinâmico faz com que essa razão cresça rapidamente para zero, a medida o que o *redshift* aumenta, decaindo em campos de matéria e desacelerando a expansão.

## 7.3 Parâmetros Observacionais

O parâmetro de desaceleração, bem como o parâmetro de Hubble, foi calculado para os quatro diferentes valores do potencial.

Como era de se esperar, quanto maior for a dinâmica deste sistema dual que permite a evolução de matéria para energia-escura, menor é o *redshift* de transição entre os períodos desacelerados e acelerados do Universo, visto da Fig. 7.4. As curvas que fornecem o comportamento do parâmetro de Hubble ao longo de  $z$ , Fig. 7.5, tem espessura correspondente à incerteza  $h = 0,67 \pm 0,012$ . Dos valores analisados para o potencial, aquele que melhor

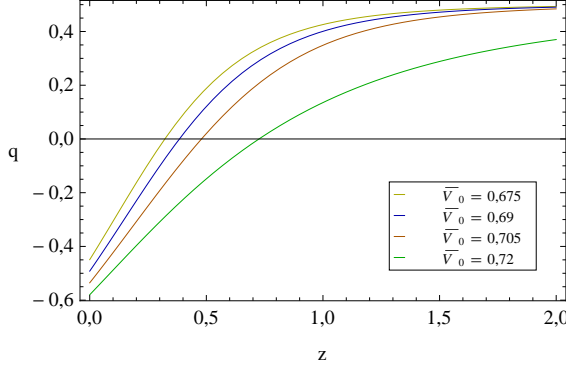


Figura 7.4: O parâmetro de desaceleração ilustra a transição entre os períodos de expansão desacelerada-acelerada. Quanto mais dinâmico o campo, mais tarde ocorre a transição, pois por mais tempo o gás de Chaplygin comporta-se como matéria, exercendo pressão nula.

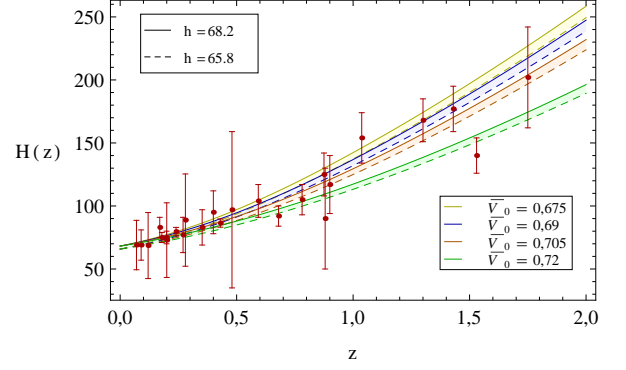


Figura 7.5: Os dados observacionais para o parâmetro de Hubble[63] favorecem um campo dinâmico a constante cosmológica. Vemos que para menores valores de  $\bar{V}_0$ , maior e a inclinação da curva. O caso  $\bar{V}_0 = 0,69$  é o que abrange o maior número de pontos observados.

concorda com os dados observacionais é  $\bar{V}_0 = 0,69$ , favorecendo o campo taquiônico sobre a constante cosmológica.

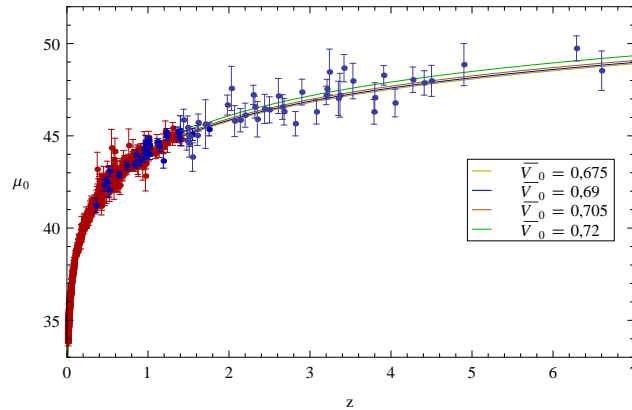


Figura 7.6: A distância de módulo calculada está de acordo com as observações em todos os casos, embora exista uma distância acentuada entre a curva representado o caso da constante cosmológica e as demais. Os dados de supernovas estão em vermelho[46] e em azul escuro[47], enquanto os de erupções de raios-gamma estão apresentados em azul claro[48].

A distância de módulo dos modelos está em excelente acordo com as observações, como indicado na Fig. 7.6. Algumas quantidades valem ser apreciadas neste modelo. Escolhendo  $\bar{V}_0 = 0,69$ , através dos dados fornecidos pelas medições do parâmetro de

---

Hubble, o parâmetro de desaceleração vale, atualmente,  $q_0 = -0,4918$ , enquanto o *redshift* de transição do período desacelerado para o acelerado está em  $z_t = 0,3845$ . Estes valores são significativamente diferentes do que os encontrados usualmente em demais modelos. Comparado com estes, estaríamos experimentando um tempo mais recente na história do Universo acelerado. Infelizmente, as observações ainda não são capazes de descartar ou favorecer uma teoria sobre a outra, havendo bastante discordância a respeito das incertezas nas medições do parâmetro de desaceleração. Anteriormente, dissemos que neste modelo o *redshift* de equivalência da matéria e radiação é bastante maior do que no modelo  $\Lambda$ CDM. De fato, para este valor do potencial temos  $z_{eq} = 5712$ . Nesta época, o Universo tinha apenas 18mil anos, contra os 47mil preditos pelo modelo de constante cosmológica.

---

Modelo Cosmológico para Energia-Escura e Matéria II

---

Anteriormente, no capítulo 6, investigamos um modelo de Universo composto por matéria e energia-escura que fosse restrito por uma lagrangiana que apresentasse invariâncias sob transformações pontuais particulares, sem envolver o tempo. Neste capítulo, iremos abordar um modelo similar, cuja lagrangiana deve ser invariante sob transformações gerais, como as introduzidas no capítulo 4. Assim, neste sistema,  $\rho_f = \rho_m$  e a lagrangiana inicial é dada pela equação (6.1).

### 8.1 Determinando a Função de Acoplamento e o Potencial de Auto-Interação

A operação do gerador de simetria,  $\tilde{X}$ , em  $L$ , resulta na (4.15), lembrando:

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^i}\alpha^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\dot{\alpha}^i - \dot{q}^i\dot{\tau}) + L\dot{\tau} - \frac{df}{dt} = 0. \quad (8.1)$$

Ao executar a operação acima em nossa lagrangiana (6.1), obtemos

$$\begin{aligned}
0 = & \left( 6Fa\dot{a}^2 + 6\partial_\phi F a^2 \dot{a}\dot{\phi} + a^3 V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + \frac{3a^3}{2F} (\partial_\phi F)^2 \dot{\phi}^2 + \rho_m^0 \right) \left( \partial_t \tau + \dot{a} \partial_a \tau + \dot{\phi} \partial_\phi \tau \right) + \\
& + \alpha \left( 6F\dot{a}^2 + 12\partial_\phi F a \dot{a}\dot{\phi} + 3a^2 V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + \frac{9a^2}{2F} (\partial_\phi F)^2 \dot{\phi}^2 \right) + \\
& + \beta \left( 6\partial_\phi F a \dot{a}^2 + 6\partial_\phi^2 F a^2 \dot{a}\dot{\phi} + a^3 \partial_\phi V \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} - \frac{3a^3}{2F^2} (\partial_\phi F)^3 \dot{\phi}^2 + \frac{3a^3}{F} \partial_\phi F \partial_\phi^2 F \dot{\phi}^2 \right) + \\
& + \left( \partial_t \alpha + \dot{a} \partial_a \alpha + \dot{\phi} \partial_\phi \alpha - \dot{a} \partial_t \tau - \dot{a}^2 \partial_a \tau - \dot{a} \dot{\phi} \partial_\phi \tau \right) \left( 12Fa\dot{a} + 6\partial_\phi F a^2 \dot{\phi} \right) + \\
& + \left( \partial_t \beta + \dot{a} \partial_a \beta + \dot{\phi} \partial_\phi \beta - \dot{\phi} \partial_t \tau - \dot{a} \dot{\phi} \partial_a \tau - \dot{\phi}^2 \partial_\phi \tau \right) \left( 6\partial_\phi F a^2 \dot{a} - \frac{a^3 V \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + \frac{3a^3}{F} (\partial_\phi F)^2 \dot{\phi} \right) - \\
& - \partial_t f - \dot{a} \partial_a f - \dot{\phi} \partial_\phi f. \tag{8.2}
\end{aligned}$$

Uma vez que  $\dot{a}$  e  $\dot{\phi}$  são arbitrários, poderíamos reescrever a equação acima na forma polinomial destas duas quantidades, e em seguida, zerar os termos independentemente. Infelizmente, como nos modelos anteriores, a equação contém termos envolvendo  $\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}$ , tanto no numerador quanto no denominador. Este termo não pode ser escrito como uma potência de  $\dot{\phi}$  de modo a zerar seus coeficientes. Para obter as equações diferenciais parciais referentes à equação acima, iremos deriva-la em relação à  $\dot{a}$  e  $\dot{\phi}$  e avalia-la no ponto onde estas quantidades são nulas. Por fim, obtemos 10 equações diferenciais parciais:

$$0 = 3\alpha a^2 V + a^3 \partial_\phi V \beta + (\rho_m^0 + a^3 V) \partial_t \tau - \partial_t f, \tag{8.3}$$

$$0 = \partial_a \tau, \tag{8.4}$$

$$0 = \alpha F - aF \partial_t \tau + a\beta \partial_\phi F + 2aF \partial_a \alpha + a^2 \partial_\phi F \partial_a \beta, \tag{8.5}$$

$$0 = 12aF \partial_t \alpha + 6a^2 \partial_\phi F \partial_t \beta - \partial_a f + (\rho_m^0 + a^3 V) \partial_a \tau, \tag{8.6}$$

$$0 = 3a^2 V \alpha + a^3 \beta \partial_\phi V - 3a^3 V \partial_t \tau + 4a^3 V \partial_\phi \beta, \tag{8.7}$$

$$0 = \partial_a \beta, \tag{8.8}$$

$$0 = a^3 V \partial_t \beta - a^3 V \partial_\phi \tau + \frac{3a^3 (\partial_\phi F)^2}{F} \partial_\phi \tau, \tag{8.9}$$

$$0 = 12a^2 \partial_\phi F \partial_\phi \tau - a^3 V \partial_a \tau + \frac{3a^3 (\partial_\phi F)^2}{F} \partial_a \tau, \tag{8.10}$$

$$0 = 12a\alpha\partial_\phi F + 6a^2\beta\partial_\phi^2 F + 12aF\partial_\phi\alpha + 6a^2\partial_\phi F\partial_\phi\beta - 6a^2\partial_\phi F\partial_t\tau + 6a^2\partial_\phi F\partial_a\alpha - a^3V\partial_a\beta + \frac{3a^3(\partial_\phi F)^2}{F}\partial_a\beta, \quad (8.11)$$

$$0 = 6a^2\partial_\phi F\partial_t\alpha - a^3V\partial_t\beta + \frac{3a^3(\partial_\phi F)^2}{F}\partial_t\beta - \partial_\phi f + (\rho_m^0 + a^3V)\partial_\phi\tau. \quad (8.12)$$

A combinação das equações (8.4), (8.8), (8.9) e (8.10) indica diretamente que  $\beta = \beta(\phi)$  e  $\tau = \tau(t)$ . A partir destes resultados, carregando uma extensa manipulação, é possível concluir que

$$\alpha = \alpha_0 a; \quad \beta = k\phi + \beta_0; \quad \tau = kt + \tau_0; \quad f = k\rho_m^0 t + f_0; \quad (8.13)$$

onde  $\alpha_0$ ,  $k$ ,  $\beta_0$ ,  $\tau_0$  e  $f_0$  são constantes arbitrárias<sup>1</sup>. A substituição destes resultados nas equações acima, retorna apenas 2 relações não triviais independentes:

$$0 = 3\alpha_0 V + (k\phi + \beta_0)\partial_\phi V + kV, \quad (8.14)$$

$$0 = 3\alpha_0 F - kF + (k\phi + \beta_0)\partial_\phi F, \quad (8.15)$$

A equação (8.14) corresponde às (8.3) e (8.7), enquanto a relação (8.15) provém das (8.5) e (8.11). Ambas podem ser facilmente integradas, mas devemos ter cuidado ao analisar o valor da constante  $k$ . O caso trivial,  $k = 0$ , nos retorna ao modelo estudado no capítulo 6; note que este valor deve ser considerado antes de se efetuar a integração. Para os demais casos,  $k \neq 0$ , o potencial e a função de acoplamento não-mínimo tomam as formas

$$V(\phi) = V_0 (k\phi + \beta_0)^{-3\frac{\alpha_0}{k}-1}; \quad F(\phi) = F_0 (k\phi + \beta_0)^{1-3\frac{\alpha_0}{k}}; \quad (8.16)$$

onde  $V_0$  e  $F_0$  são constantes. Como as constantes antes estimadas são arbitrárias, existe uma infinita classe de pares de potencial e acoplamento que estão restritos às transformações pontuais associadas. Escolhemos trabalhar com  $\alpha_0 = k = 1$  e  $\beta_0 = 0$ , de tal forma que

$$V(\phi) = \frac{V_0}{\phi^4}; \quad F(\phi) = \frac{F_0}{\phi^2}. \quad (8.17)$$

Uma vez que as constantes  $k$  e  $\beta_0$  apareceram explicitamente nas funções obtidas

<sup>1</sup>Arbitrárias no sentido que existe uma simetria independente do valor adotado por tais constantes.

para o potencial de auto-interação e acoplamento não-mínimo, é interessante substituir na lagrangiana as funções encontradas e refazer todos os cálculos, a fim de estabelecer uma possível conexão entre as constantes dos coeficientes. A lagrangiana (6.1) fica

$$L = 6a \frac{F_0}{\phi^2} \dot{a}^2 - 12a^2 \frac{F_0}{\phi^3} \dot{a} \dot{\phi} + a^3 \frac{V_0}{\phi^2} \sqrt{1 - \dot{\phi}^2} + 6a^3 \frac{F_0}{\phi^4} \dot{\phi}^2 + \rho_m^0. \quad (8.18)$$

Ao efetuar todos os passos seguidos anteriormente, através da (4.15), e resolvendo para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$  e  $f$ , obtemos:

$$\alpha = ka; \quad \beta = k\phi; \quad \tau = kt + \tau_0; \quad f = k\rho_m^0 t + f_0; \quad (8.19)$$

onde  $k$  é também uma constante, que apesar de arbitrária, é comum em todos os coeficientes. Esses resultados são identicamente obtidos com a substituição da solução geral (8.16) na lagrangiana. Isso é importante para analisarmos a constante de movimento de Noether, dada pela (4.17). Como dissemos no capítulo 4, a constante  $\Sigma_0$  é, na verdade, uma composição de diferentes constantes de movimento, cada uma associada à uma constante diferente presente nos coeficientes. Antes de prosseguir, vamos enunciar a equação de Friedmann (5.21):

$$H^2 = \frac{\phi^2}{6F_0} \rho, \quad (8.20)$$

onde  $\rho = \rho_\phi + \rho_m$  e

$$\rho_\phi = \frac{V_0}{\phi^4 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} + 12 \frac{HF_0 \dot{\phi}}{\phi^3} - 6 \frac{F_0 \dot{\phi}^2}{\phi^4}; \quad \rho_m = \frac{\rho_m^0}{a^3}. \quad (8.21)$$

A constante de movimento, ou carga de Noether:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \tau_0 \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) + \\ &+ k \left[ t \left( -6 \frac{F_0 a \dot{a}^2}{\phi^2} + 12 \frac{F_0 a^2 \dot{a} \dot{\phi}}{\phi^3} - 6 \frac{F_0 a^3 \dot{\phi}^2}{\phi^4} + \frac{V_0 a^3}{\phi^4 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right) - \frac{V_0 a^3 \dot{\phi}}{\phi^3 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right] \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (8.22)$$

A existência de duas constantes independentes nos coeficientes do gerador de simetria implica na existência de duas constantes de movimento:  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . A primeira constante é simplesmente a energia total do sistema, multiplicada pelo fator  $\tau_0$ . Como sabemos, sempre que a lagrangiana não depender explicitamente do tempo haverá conservação de energia. A segunda carga de Noether é

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= k \left[ t \left( -6 \frac{F_0 a \dot{a}^2}{\phi^2} + 12 \frac{F_0 a^2 \dot{a} \dot{\phi}}{\phi^3} - 6 \frac{F_0 a^3 \dot{\phi}^2}{\phi^4} + \frac{V_0 a^3}{\phi^4 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right) - \frac{V_0 a^3 \dot{\phi}}{\phi^3 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right] \\ &= -k \left( \rho_m^0 t + \frac{V_0 a^3 \dot{\phi}}{\phi^3 \sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \right),\end{aligned}\quad (8.23)$$

de acordo com a (8.20).

## 8.2 Soluções Numéricas

A obtenção das equações de movimento com o *redshift* como variável independente acontece da mesma maneira que fizemos no capítulo 6. Primeiramente, utilizamos as transformações de derivadas (6.17), e reescrevemos as equações de movimento para  $\phi(z)$  e  $H(z)$ . A equação de Friedmann (5.21) e a da aceleração (5.27) combinam-se em

$$4 \frac{F_0}{\phi^2} H H' (1+z) - \rho - p = 0, \quad (8.24)$$

onde, novamente, as linhas indicam derivadas com respeito ao *redshift*. Aqui,  $\rho = \rho_\phi + \rho_m$  e  $p = p_\phi$ , pois a matéria não exerce pressão. Escritas em função de  $z$ , estas equações tornam-se

$$\rho_\phi = \frac{V_0}{\phi^4 \sqrt{1 - H^2 (1+z)^2 \dot{\phi}^2}} - 12 F_0 H^2 (1+z)^2 \frac{\phi'}{\phi^3} - 6 F_0 H^2 (1+z)^2 \frac{\phi'^2}{\phi^4}, \quad (8.25)$$

$$\rho_m = \rho_m^0 (1+z)^3, \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned}
p_\phi = & -\frac{V_0}{\phi^4} \sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \phi'^2} + 6F_0 H^2(1+z)^2 \frac{\phi'^2}{\phi^4} + 8H^2 \frac{F_0}{\phi^3} (1+z) \phi' - \\
& - 4 \frac{F_0}{\phi^3} [H^2(1+z)^2 \phi'' + H^2(1+z) \phi' + HH'(1+z)^2 \phi']. \quad (8.27)
\end{aligned}$$

A equação de Klein-Gordon (5.34), reescrita em função do *redshift*, fica

$$\begin{aligned}
0 = & [H^2(1+z)^2 \phi'' + H^2(1+z) \phi' + HH'(1+z)^2 \phi'] \left( \frac{V_0}{\phi^4 (1 - H^2(1+z)^2 \phi'^2)^{3/2}} - 12 \frac{F_0}{\phi^4} \right) + \\
& + 24H^2(1+z)^2 \phi'^2 \frac{F_0}{\phi^5} - H^2(1+z) \phi' \left( \frac{3V_0}{\phi^4 \sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \phi'^2}} - 36 \frac{F_0}{\phi^4} \right) + \\
& + 12 \frac{F_0}{\phi^3} (2H^2 - HH'(1+z)) - \frac{4V_0}{\phi^5 \sqrt{1 - H^2(1+z)^2 \phi'^2}}. \quad (8.28)
\end{aligned}$$

Os valores a serem estabelecidos para as condições iniciais, fornecidos pelos métodos observacionais, são dados para as variáveis adimensionais, como vimos antes. Para tanto, reescalamos nossas quantidades sem alterar as equações diferenciais acima.

$$H \rightarrow \bar{H} = \frac{H}{\sqrt{\rho^0}}; \quad \phi \rightarrow \bar{\phi} = \phi \sqrt{\rho^0}; \quad V_0 \rightarrow \bar{V}_0 = V_0 \rho^0; \quad F_0 \rightarrow \bar{F}_0 = F_0 \rho^0. \quad (8.29)$$

As condições iniciais são estabelecidas a partir das transformações feitas acima e algumas considerações. De acordo com a equação de Friedmann (8.20),  $\bar{H}(0) = 1/\sqrt{3}$ . A pressão atual exercida pela energia-escura deve ser garantida como negativa, o que implica numa dinâmica bastante suave para o campo taquiônico, como indicada pela (8.27), então estipulamos  $\bar{\phi}' = 10^{-3}$ . A função de acoplamento não-mínimo deve valer 1/2, em  $z = 0$ , para que a constante gravitacional apresente seu valor observado nos dias de hoje, então  $\bar{\phi}(0) = \sqrt{2\bar{F}_0}$ . A densidade de energia-escura é atualmente dominada pelo primeiro termo ao lado direito da igualdade na (8.25), tal que  $\bar{V}_0 = 2,88\bar{F}_0^2 \rightarrow \Omega_\phi^0 = 0,72$ . O parâmetro de densidade da matéria para  $z = 0$  é, novamente,  $\Omega_m^0 = 0,28$ . Nosso modelo contém um parâmetro livre, e escolhemos  $F_0 = 10^5$  para garantir estabilidade e para que a variação da constante gravitacional seja sutil.

A evolução dos parâmetros de densidade, Fig. 8.1, se dá na forma muito semelhante ao que ocorre no modelo  $\Lambda$ CDM. A densidade de energia-escura cresce rapidamente de zero e passa a dominar sobre os demais componentes, aqui em  $z_{eq} = 0,37$ . A razão entre

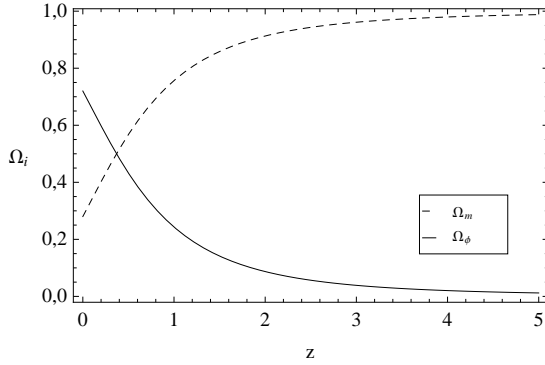


Figura 8.1: A energia-escura passa a dominar sobre a matéria em  $z = 0,37$ . Conforme aumenta o *redshift*, ela cai rapidamente à zero.

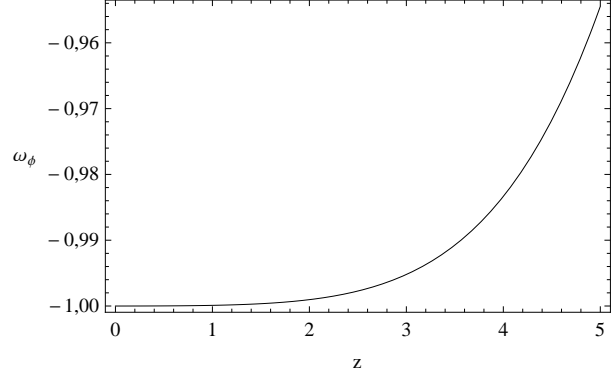


Figura 8.2: A razão entre a pressão e a densidade de energia-escura evolui muito suavemente, tendendo à  $\omega_\phi \rightarrow -1$  assintoticamente, aproximando-se de uma constante cosmológica.

a pressão e a densidade de energia-escura tende assintoticamente para  $-1$ , assumindo valores muito próximos à este durante toda a evolução do Universo, o que contribui para uma atuação deste campo taquiônico bastante parecida com a da constante cosmológica.

A taxa de variação da constante gravitacional é apresentada na Fig. 8.3. Vemos que, embora decrescente, a taxa é positiva ao longo do *redshift*, e as interações gravitacionais são, portanto, mais intensas atualmente do que em tempos remotos. Em  $z = 0$ , temos  $\dot{G}_0/G_0 = -1,6 \times 10^{-16} \text{ano}^{-1}$ , valor bastante abaixo da precisão dos experimentos em andamento. Neste gráfico, fizemos uma extrapolação até  $z = -0,9$ , lembrando que o tempo tende ao infinito conforme  $z \rightarrow 0$ . Assim, mesmo que o valor da taxa seja negativo hoje, percebemos que a variação tende assintoticamente à zero e a gravitação deve interagir na mesma escala de força que agora mesmo em muitos bilhões de anos.

## 8.3 Parâmetros Observacionais

O parâmetro de desaceleração, Fig. 8.4, também foi extrapolado para tempos futuros e tende assintoticamente à  $-1$ . Sabemos que  $q = 1/2 + 3p/2\rho$ , então a densidade de energia da matéria deve continuar decrescendo, tendendo à zero futuramente, enquanto a pressão do campo taquiônico se iguala à menos a sua densidade de energia,  $p_\phi \rightarrow -\rho_\phi$  e o Universo passa a ser dominado por uma constante cosmológica efetiva. O *redshift* de

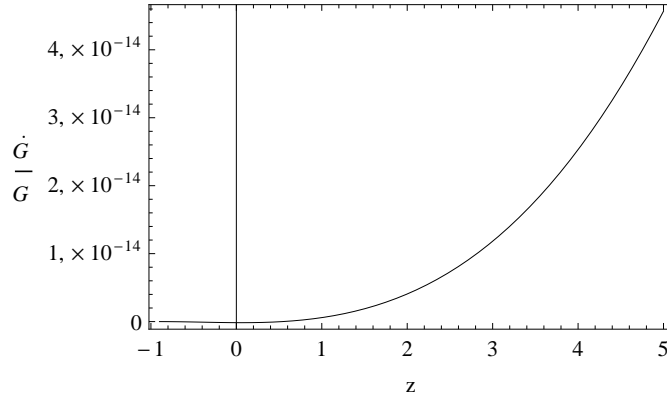


Figura 8.3: A taxa de variação da constante gravitacional (em ano<sup>-1</sup>) é extrapolada até  $z = -0,9$ . Ela varia suavemente desde de o início, tendendo à zero ( $G$  constante) assintoticamente. Embora decrescente, a taxa de variação é positiva, e as interações gravitacionais eram, portanto, mais fortes no passado.

transição entre o período desacelerado e o acelerado está em  $z = 0,73$  e, o parâmetro de desaceleração vale, atualmente,  $q_0 = -0,58$ . O parâmetro de Hubble é apresentado na Fig. 8.5, onde calculamos a evolução de  $H(z)$  para  $h = 0,67 \pm 0,012$ . Existem três pontos observacionais que fogem completamente à curva traçada, semelhante ao que é observado na curva que compete à constante cosmológica, na Fig. 7.5. A distância de módulo aparece na Fig. 8.6, e a curva está em excelente acordo com as observações.

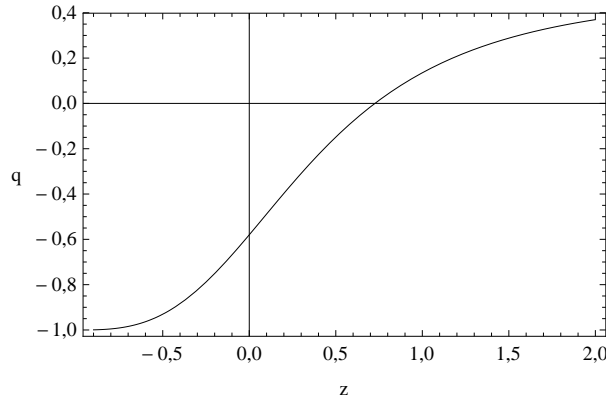


Figura 8.4: A transição entre a expansão desacelerada e acelerada ocorre em  $z = 0,73$ . A extrapolação do parâmetro até  $z = 0,9$  e sua aproximação assintótica  $q \rightarrow -1$ , indica que o domínio de energia-escura não-somente continuará até que  $\Omega_\phi \sim 1$  e  $\Omega_m \sim 0$ , como também o campo taquiónico terá sua dinâmica cada vez mais suavizada, tendendo a se comportar como uma constante cosmológica.

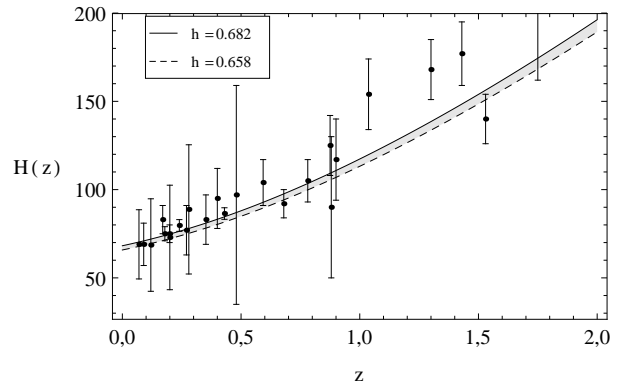


Figura 8.5: O parâmetro de Hubble traçado pelo modelo, em comparação aos dados observacionais[63], está de acordo durante a metade mais recente da história evolutiva do Universo, deixando a desejar para  $z > 1$  (aproximadamente 7,8 bilhões de anos atrás).

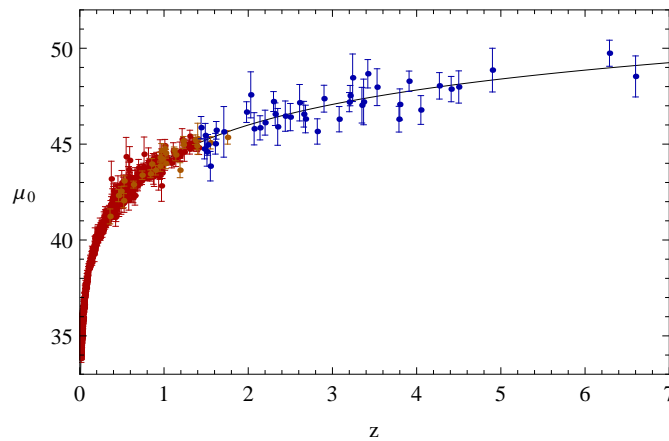


Figura 8.6: Os dados observacionais da distância de módulo de diversas supernovas - em vermelho[46] e em laranja[47] - e erupções de raios-gamma, em azul[48], sugerem boa aceitação deste modelo, cuja curva calculada passa sobre a maioria deles.

## 8.4 O Fator de Escala em Perspectiva

A relação diferencial entre o tempo e o *redshift* é dada pela regra da cadeia que rege as igualdades da (6.17), ou seja

$$dt = \frac{dt}{da} \frac{da}{dz} dz = -\frac{1+z}{H(z)} dz. \quad (8.30)$$

Ao integrarmos a equação acima nos limites  $z = 0$  e  $z = \infty$ , obtemos a idade do Universo, como na (3.49). Assim, podemos resolver numericamente a (8.30), e criar uma tabela  $(t, a(t))$  para cada valor de  $z$ . Desta forma, podemos traçar uma curva para o fator de escala em função do tempo.

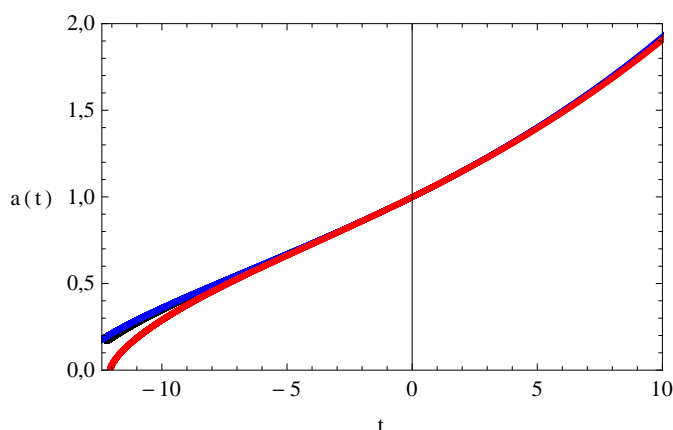


Figura 8.7: O fator de escala em função do tempo para: modelo com matéria I (preto), modelo com radiação (vermelho), modelo com matéria II (azul). O tempo é medido em bilhões de anos e transposto tal que  $t_0 = 0$  esteja situado nos dias de hoje. Observamos a expansão desacelerada que ocorria até cerca de 10 bilhões de anos atrás, devido ao domínio de matéria, passando então para um período de expansão linear até que, enfim, o domínio de energia-escura dê início à expansão acelerada, aproximadamente 6 bilhões de anos atrás.

A Fig. 8.7 apresenta a evolução temporal do fator de escala como prevista pelos três modelos aqui analisados. A necessidade de se construir uma tabela muito densa, com base em integrais numéricas, torna as curvas bastante espessas, de tal forma que as sutis diferenças entre os modelos é quase toda suprimida com a sobreposição das curvas, exceto pela evolução inicial. Em tempos bastante remotos, notamos que a desaceleração na expansão é muito mais expressiva no caso em que há radiação (curva vermelha). Este fato não se dá pela presença da radiação em si, como vimos no capítulo 7, sua era dura

---

cerca de 18 mil anos apenas. Neste modelo específico, não há acoplamento não-mínimo, e é justamente a transferência de energia entre o campo taquiônico e o campo gravitacional que ameniza a desaceleração. As observações, entretanto, sugerem que tal período de desaceleração mais acentuada, tenha existido, como mostra a Fig. 7.5, em contraste com as figuras Fig. 6.5 e Fig. 8.5. Em todos os modelos, notamos que a era da energia-escura será mantida para sempre, intensificando seu domínio a medida que  $\Omega_\phi$  cresce e  $\Omega_m$  decresce. Com isto, a expansão deve permanecer acelerada, como vemos na figura acima, e o Universo deve dobrar de tamanho nos próximo 10 bilhões de anos.

---

## Conclusão

---

Nesta dissertação de mestrado, apresentamos três diferentes modelos cosmológicos construídos a partir de uma mesma ação. A energia-escura foi interpretada como uma entidade que se comporta de acordo com a dinâmica de um campo taquiônico, acoplado não-minimamente ao escalar de curvatura, suplementando a gravidade com um grau de liberdade a mais. A função que define tal acoplamento, bem como o potencial de auto-interação do campo, foram restringidos aqueles para os quais existe alguma transformação pontual que mantém a lagrangiana invariante. Embora esse tipo de simetria não seja uma exigência da natureza, está constantemente presente na descrição das interações elementares. Uma vez que é necessário escolher a forma dessas funções, nos parece mais interessante atribuir o vínculo de invariância ao invés de escreve-las de forma *ad-hoc*.

As simetrias que ignoram qualquer transformação temporal foram abordadas em dois modelos: Universo composto por energia-escura e matéria, e outro preenchido também por radiação. Ademais, um terceiro modelo foi analisado, com a mesma proposta de composição do primeiro, onde consideramos invariâncias mais gerais. Soluções numéricas foram obtidas para cada sistema, a partir de condições iniciais adotadas de acordo com recentes valores observacionais encontrados na literatura e um parâmetro livre. Assim, pudemos descrever a evolução dos componentes e dos parâmetros cosmológicos ao longo da história do Universo e compara-los com as observações atuais.

## Modelo I

O primeiro modelo proposto, Capítulo 6, considera que o Universo é formado por energia-escura e matéria, uma condição bastante razoável considerando que a densidade de material relativístico é desprezível ao longo da maior parte da história universal. A exigência de que a lagrangiana deste sistema fosse invariante sob alguma transformação pontual implicou nas formas exponenciais da função de acoplamento não-mínimo e do potencial de interação, que são proporcionais. A constante de acoplamento,  $k$ , definiu quão forte é a transferência de energia entre o campo taquiônico e a gravidade. Três valores diferentes foram analisados. O comportamento do parâmetro de desaceleração está em pleno acordo com as observações para os três casos. A razão entre a pressão e a densidade de energia-escura,  $\omega_\phi$  tem uma queda mais abrupta quanto maior for o acoplamento. Assim, seu valor é maior para tempos mais remotos e isso reflete em um decaimento mais lento da sua densidade de energia, lembrando que quanto maior o acoplamento neste caso, mais a entidade se distancia do comportamento de constante cosmológica. A evolução do parâmetro de Hubble, em comparação com as observações de supernovas, sugere que se esta for a ação que descreve o Universo, então o acoplamento não-mínimo deve ser forte.

## Modelo II

Materiais relativísticos, como radiação e neutrinos, foram incluídos num segundo tratamento, descrito no Capítulo 7. A aplicação do gerador de simetrias retornou uma função de acoplamento não-mínimo e potencial de auto-interação constantes. Ou seja, a energia-escura é acoplada apenas minimamente (através da métrica  $g_{\mu\nu}$ ) como os outros componentes, e se comporta como um gás de Chaplygin. O potencial constante é o único parâmetro livre presente neste sistema, e traçamos as curvas de evolução para quatro diferentes valores dele, sendo um desses correspondente à constante cosmológica. Os três demais casos mostraram uma energia-escura que evolui a partir de campos de matéria, com uma transição mais abrupta para valores mais distantes do caso  $\Lambda$ CDM. Similarmente, quanto mais dinâmico o campo, maior o *redshift* de equivalência entre matéria e radiação. Se a matéria passa a dominar o Universo mais cedo, mesmo que as interações fóton-núcleo permaneçam, a matéria-escura tem mais tempo de se agrupar e formar os

poços de potencial que dão origem às grandes estruturas do Universo. Além disto, observamos nas curvas do parâmetro de Hubble que a constante cosmológica é desfavorecida em relação à campos dinâmicos quando comparados com os dados observacionais.

## Modelo III

No Capítulo 8, retomamos um modelo para um Universo composto apenas por matéria e energia-escura, porém restringimos a ação, e não apenas a lagrangiana, aquela que apresenta invariância, ou seja, levando em conta transformações temporais. Assim, obtivemos uma família de soluções em forma de potencias do campo, para a função de acoplamento não-mínimo e para o potencial de auto-interação. Escolhemos trabalhar com  $F = F_0\phi^{-2}$  e  $V = V_0\phi^{-4}$ . Como solução, obtivemos um campo que tende assintoticamente à uma constante cosmológica, em um modelo cujos parâmetros se comportam muito similarmente ao modelo  $\Lambda$ CDM, mesmo havendo acoplamento não-mínimo. A taxa de variação da constante gravitacional é positiva ao longo de todo tempo decorrido, desde o primeiro par de bilhões de anos (regime contemplado pelo modelo), do Universo. Entretanto, esta taxa vem decrescendo e tende a zero assintoticamente. Assim, concluímos que as interações gravitacionais eram mais intensas no passado, e que tendem a variar muito pouco em tempos futuros. Pudemos observar que durante a época dominada pela matéria, o crescimento de  $a(t)$  se dá desaceleradamente, passando por uma transição com o acréscimo do parâmetro de densidade da energia-escura. Nossa expansão atual experimenta uma leve aceleração, a qual tende a aumentar cada vez mais com o declínio do parâmetro de densidade dos campos de matéria.

## Trabalhos Futuros

Todos os modelos aqui apresentados, compreendem quase toda a história evolutiva do Universo. No entanto, entender o que ocorreu nas primeiras centenas de milhares de anos é fundamental para se obter uma descrição consistente das dinâmicas hoje observadas. Futuramente, pretendemos realizar uma análise perturbativa da cosmologia  $f(\phi)$ , afim de investigar sob quais condições tais modelos são capazes de imitar a formação de estruturas estáveis que percebemos atualmente.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] A. Friedman. *Z. Phys.* **10**, 1, 377–386 (1922).
- [2] G. Lemaître. *Ann. Soc. Sci. Brux. A* **47**, 49–59 (1927).
- [3] E. Hubble. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **15**, 168–173 (1929).
- [4] R. A. Alpher. *Phys. Rev.* **74**, 1577–1589 (1948).
- [5] A. A. Penzias e R. W. Wilson. *Astrophys. J.* **142**, 419–421 (1965).
- [6] A. H. Guth. *Phys. Rev. D* **23**, 347–356 (1981).
- [7] J. H. Oort. *Bull. Astron. Inst. Neth.* **6**, 249 (1932).
- [8] F. Zwicky. *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
- [9] A. G. Riess et al.. *Astron. J.* **116**, 3, 1009 (1998).
- [10] S. Perlmutter et al.. *Astrophys. J.* **517**, 2, 565 (1999).
- [11] M. Milgrom. *Astrophys. J.* **270**, 365–370 (1983).
- [12] Y.-S. Piao, Q.-G. Huang, X. Zhang e Y.-Z. Zhang. *Phys. Lett. B* **570**, 1 (2003).
- [13] S. K. Srivastava. [arXiv:arXiv:gr-qc/0409074](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0409074).

- 
- [14] R. C. de Souza e G. M. Kremer. *Classical Quant. Grav.* **26**, 135008 (2009).
- [15] R. C. de Souza e G. M. Kremer. *Classical Quant. Grav.* **25**, 225006 (2008).
- [16] V. Cardoso, I. P. Carucci, P. Pani e T. P. Sotiriou. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 111101 (2013).
- [17] J. L. Synge e A. Schild. *Tensor Calculus*. Dover Books on Mathematics (Dover Publications, 1978).
- [18] D. Kay. *Schaums Outline of Tensor Calculus*. Schaum's Outline Series (McGraw-Hill, 2011).
- [19] W. Rindler. *Introduction to special relativity*. Oxford science publications (Clarendon Press, 1991).
- [20] R. Wald. *General Relativity* (University of Chicago Press, 2010).
- [21] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: Introduction to General Relativity* (Pearson Education, Limited, 2014).
- [22] R. D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity* (Clarendon Press, 1992).
- [23] B. Schutz. *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
- [24] J. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison-Wesley, 2003).
- [25] C. Misner, K. Thorne e J. Wheeler. *Gravitation*. Número pt. 3 em Gravitation (W. H. Freeman, 1973).
- [26] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, 1972).
- [27] P. Dirac. *General Theory of Relativity*. Physics notes (Princeton University Press, 1996).
- [28] E. Noether. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* **1918**, 235–257 (1918).
- [29] J. José e E. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, 1998).

- [30] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko. *Classical Mechanics* (Pearson Education, Limited, 2013).
- [31] V. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics (Springer, 1989).
- [32] N. Doughty. *Lagrangian Interaction: An Introduction to Relativistic Symmetry in Electrodynamics and Gravitation*. Advanced book program (Addison-Wesley, 1990).
- [33] H. Fleming. *Braz. J. Phys.* **17**, 236–252 (1987).
- [34] L. Fatibene, M. Francaviglia e S. Mercadante. *Symmetry* **2**, 2, 970–998 (2010).
- [35] J. Butterfield. On Symmetry and Conserved Quantities in Classical Mechanics. Em W. Demopoulos e I. Pitowsky, editores, *Physical Theory and its Interpretation*, volume 72 de *The Western Ontario Series in Philosophy of Science*, páginas 43–100 (Springer Netherlands, 2006). URL [http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-4876-9\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-4876-9_3).
- [36] N. Duignan. The Calculus of Variations Noether's Theorem.
- [37] M. Lutzky. *J. Phy. A-Math. Gen.* **11**, 2, 249 (1978).
- [38] A. Einstein. *Ann.Phys.* **322**, 891–921 (1905).
- [39] J. G. Williams, S. G. Turyshev e D. H. Boggs. *Classical Quant. Grav.* **29**, 18, 184004 (2012).
- [40] K. Ford e J. Wheeler. *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics* (W. W. Norton, 2010).
- [41] M. Ferraris, M. Francaviglia e C. Reina. *Gen. Relat. Gravit.* **14**, 3, 243–254 (1982).
- [42] N. Hetherington. *Cosmology: Historical, Literary, Philosophical, Religious and Scientific Perspectives*. Garland reference library of the humanities (Taylor & Francis, 1993).
- [43] R. G. Clowes, K. A. Harris, S. Raghunathan, L. E. Campusano, I. K. Söchting e M. J. Graham. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* (2013). doi: 10.1093/mnras/sts497.

- [44] P. C. I. Planck 2013 results: Overview of Planck Products and Scientific Results (p01). In preparation (2013).
- [45] H. Weyl. *Raum-Zeit-Materie* (1923).
- [46] URL <http://supernova.lbl.gov/Union/>.
- [47] A. G. Riess et al.. *Astrophys. J.* **659**, 1, 98 (2007).
- [48] N. Liang e S. N. Zhang. Cosmology-Independent Distance Moduli of 42 Gamma-Ray Bursts between Redshift of 1.44 and 6.60. Technical Report arXiv:0808.2655 (2008). To appear in the proceedings of "2008 Nanjing GRB conference", Nanjing, 23-27 June 2008.
- [49] C. L. Bennett et al.. *Astrophys. J. S.* **208**, 2, 20 (2013).
- [50] S. C. Eno (ATLAS and CMS Collaborations). Searches for dark matter and extra dimensions at the LHC. Technical Report CMS-CR-2014-052, CERN, Geneva (2014).
- [51] W. Tucker, P. Blanco, S. Rappoport, L. David, D. Fabricant, E. E. Falco, W. Forman, A. Dressler e M. Ramella. *Astrophys. J. L.* **496**, L5–L8 (1998).
- [52] S. del Campo, I. Duran, R. Herrera e D. Pavón. *Phys. Rev. D* **86**, 083509 (2012).
- [53] R. Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald e B. Pagel. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **282**, 926–942 (1996).
- [54] E. Carretta, R. G. Gratton, G. Clementini e F. Fusi Pecci. *Astrophys. J.* **533**, 215–235 (2000).
- [55] D. Santiago, D. Kalligas e R. Wagoner. *Phys.Rev.* **D56**, 7627–7637 (1997).
- [56] X. Chen. The Helium Abundance Problem and Non-Minimally Coupled Quintessence. Em *COSMO-2000*, páginas 393–399 (2001).
- [57] F. Alvarenga, J. Fabris, S. Gonçalves e J. Marinho. *Braz. J. Phys.* **31**, 546 – 551 (2001).

- 
- [58] G. W. Bluman e S. C. Anco. *Symmetry and integration methods for differential equations*. Applied mathematical sciences, ISSN 0066-5452 (Springer, New York, 2002).
- [59] C. Brans e R. H. Dicke. Phys. Rev. **124**, 925–935 (1961).
- [60] C. G. C. Jr., S. Coleman e R. Jackiw. Annals of Physics **59**, 1, 42 – 73 (1970). doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916\(70\)90394-5](http://dx.doi.org/10.1016/0003-4916(70)90394-5).
- [61] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge University Press, 1975).
- [62] L. Ryder. *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).
- [63] C. Zhang, H. Zhang, S. Yuan, T.-J. Zhang e Y.-C. Sun (2012). arXiv:1207.4541.
- [64] S. Chaplygin. Sci. Mem. Moscow Univ. Math. Phys. **21**, 1–121 (1902).