

ANA PAULA KELM SOARES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO JATO PLANO
TURBULENTO COM O EMPREGO DO MÉTODO
DE FILTRAGEM LAGRANGEANA.**

Curitiba

2013

ANA PAULA KELM SOARES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO JATO PLANO
TURBULENTO COM O EMPREGO DO MÉTODO
DE FILTRAGEM LAGRANGEANA.**

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Ricardo Carvalho de Almeida

Curitiba

2013

S676s

Soares, Ana Paula Kelm

Simulação numérica do jato plano turbulento com emprego do método de filtragem lagrangeana [manuscrito] / Ana Paula Kelm Soares. – Curitiba, 2013.

85f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2013.

Orientador: Ricardo Carvalho de Almeida.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Métodos de Filtragem Lagrangeana . I. Universidade Federal do Paraná. II. Almeida, Ricardo Carvalho de. III. Título.

CDD: 515.35


TERMO DE APROVAÇÃO

ANA PAULA KELM SOARES

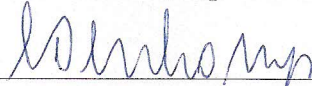
SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO JATO PLANO TURBULENTO COM O EMPREGO DO MÉTODO DE FILTRAGEM LAGRANGEANA.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

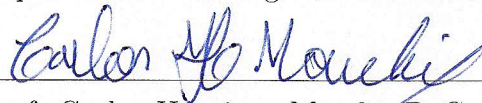
Orientador:



Prof. Ricardo Carvalho de Almeida, DsC.
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR



Prof. César José Deschamps, PhD.
Departamento de Engenharia Mecânica., UFSC



Prof. Carlos Henrique Marchi, DsC.
Departamento de Engenharia Mecânica, UFPR

Curitiba, 21 de Junho de 2013

“To my mind there are two great unexplained mysteries in our understanding of the universe. One is the nature of a unified general field theory to explain both gravitation and electromagnetism. The other is an understanding of the nature of turbulence. After I die I expect God to clarify general field theory for me.

I have no such hopes about turbulence.”

- Theodore von Kármán

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, pela confiança depositada e pelo apoio inquestionável a todas as minhas decisões.

Agradeço à minha irmã, Denise Kelm Soares, por me dizer as coisas certas nas horas certas, e por ser minha maior confidente.

Agradeço ao meu orientador Prof. Ricardo Almeida, pela orientação, pela paciência, pela dedicação a este trabalho, e por me apresentar esse tema.

Agradeço também aos demais professores do Departamento de Engenharia Ambiental da UFPR, em especial àqueles com quem tive maior proximidade, e que foram importantíssimos na minha formação: Prof^a Cynara Cunha, Prof. Nelson Dias, e Prof. Mauricio Gobbi.

Agradeço também aos meus colegas do LEMMA - Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental, em especial as minhas amigas Lívia Freire e Liége Wosiacki, com quem posso conversar sobre sapatos e mecânica dos fluidos ao mesmo tempo!

E finalmente agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período desta pesquisa.

Resumo

O Método de Filtragem Lagrangeana (MFL) é um método destinado à simulação numérica de escoamentos turbulentos baseado na filtragem espacial das equações de Navier-Stokes escritas no referencial Lagrangeano. A filtragem se dá implicitamente através da discretização das equações em diferenças finitas. A grande vantagem da utilização do referencial Lagrangeano é que, neste referencial, as não-linearidades das equações não são explicitadas. Com isso, é possível filtrar as equações sem que haja necessidade de se utilizarem parametrizações de processos subgrade. No presente trabalho, o MFL foi utilizado na simulação do jato plano turbulento, com o objetivo de mostrar a capacidade deste método em simular este tipo de escoamento turbulento. Foram realizadas simulações com número de Reynolds entre 2.970 e 10.000. Os resultados se mostraram, de forma geral, satisfatórios quando comparados com resultados teóricos e experimentais. Além disso, o modelo foi capaz de simular adequadamente o espectro de energia. O MFL também se mostrou computacionalmente eficiente e competitivo com outros métodos de simulação de escoamentos turbulentos usualmente utilizados.

Palavras-chave: Método de Filtragem Lagrangeana; turbulência; jato plano turbulento.

Abstract

The Method of Lagrangian Filtering (MLF) is a numerical method for simulation of turbulent flows based on spatial filtering of the Navier-Stokes equations in the Lagrangian frame of reference. The filtering is done implicitly, using the discretization of the equations by finite differences. The great advantage of using the Lagrangian frame of reference is that the nonlinearities of the equations are not explicitized. Therefore, it is possible to filter the equations without the need of using parameterization of subgrid processes. In the present work, the MLF was used to simulate the turbulent plane jet, in order to illustrate the ability of this method on simulating this type of turbulent flow. Simulations were performed with Reynolds number between 2.970 and 10.000. The results were, in general, satisfactory when compared with theoretical and experimental results, and the model was able to simulate properly the energy spectrum. The MFL was also computationally efficient and competitive when compared with other methods of turbulent flow simulation.

Keywords: Method of Lagrangian Filtering; turbulence; turbulent plane jet.

Lista de Figuras

3.1	O jato plano turbulento	20
3.2	Ilustração do Método Semi-Lagrangeano em cinco passos.	31
4.1	Esquema do perfil trapezoidal utilizado como condição de contorno na entrada do jato.	41
4.2	Condições de contorno e domínio de modelagem.	42
5.1	Evolução temporal da energia cinética e da vorticidade.	51
5.2	Evolução temporal da energia cinética média e da vorticidade no centro do domínio para o experimento <i>testvisc</i>	52
5.3	Perfil vertical do erro GCI da simulação <i>simjato1</i> em coordenadas normalizadas em $x = 4,5$ m, e a velocidade horizontal normalizada.	55
5.4	Perfil vertical do erro GCI para a simulação <i>simjato4</i> em coordenadas normalizadas em $x = 4,5$ m, e a velocidade horizontal normalizada.	56
5.5	Perfil longitudinal do erro GCI no centro do jato para a simulação <i>simjato1</i>	57
5.6	Perfil longitudinal do erro GCI no centro do jato para a simulação <i>simjato4</i>	57
5.7	Perfil longitudinal $U_c^2 \delta$ (equação 3.2).	60
5.8	Perfil longitudinal de δ (equação 3.3).	61
5.9	Variação de U_c com $x^{-\frac{1}{2}}$ (equação 3.4).	62
5.10	Perfis verticais da velocidade horizontal u em $x = 4m$	62
5.11	Perfis verticais da velocidade vertical w em $x = 4m$	63
5.12	Perfis verticais da pressão p em $x = 4m$	63
5.13	Isolinhas de velocidade horizontal u da simulação <i>simjato1</i>	64
5.14	Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da <i>simjato1</i>	65
5.15	Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da <i>simjato2</i>	65
5.16	Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da <i>simjato3</i>	66
5.17	Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da <i>simjato4</i>	66

5.18	Comparação entre os perfis normalizados das simulações de grade fina em $x = 4,8m$ e o perfil semi-empírico de Bradbury (1965).	67
5.19	Série temporal da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato5</i> no ponto B.	68
5.20	Serie temporal da velocidade horizontal w , obtido pela simulação <i>simjato2</i> no ponto B.	68
5.21	Séries temporais da pressão p obtidas pelas simulações <i>simjato2</i> (grade fina) e <i>simjato6</i> (grade grossa) no ponto B.	69
5.22	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato1</i>	71
5.23	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato2</i>	71
5.24	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato3</i>	72
5.25	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato4</i>	72
5.26	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato5</i>	73
5.27	Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação <i>simjato6</i>	73
5.28	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato1</i>	74
5.29	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato2</i>	75
5.30	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato3</i>	75
5.31	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato4</i>	76
5.32	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato5</i>	76
5.33	Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação <i>simjato6</i>	77
5.34	Espectro de energia da pressão p , obtido pela simulação <i>simjato2</i>	78

Lista de Tabelas

4.1	Descrição das simulações	44
4.2	Localização dos pontos de registro das séries temporais.....	45
4.3	Comparação entre grades de trabalhos publicados na literatura	47
5.1	Erro relativo entre as simulações <i>simjato5</i> e <i>testdomi</i>	53
5.2	Erros GCI e relativo calculados para a velocidade horizontal u no centro do jato.	54
5.3	Erro GCI calculado para a velocidade horizontal u no centro do jato, entre as simulações de grade fina, intermediária e grossa.	58
5.4	Ordem aparente calculada.....	59

Sumário

1	Introdução	11
2	Objetivos	18
2.1	Objetivo geral.....	18
2.2	Objetivos específicos	18
3	Revisão Bibliográfica	19
3.1	O jato plano turbulento	19
3.2	O Método Semi-Lagrangeano.....	25
3.3	O Método da Filtragem Lagrangeana.....	33
4	Metodologia	36
4.1	Modelo matemático	36
4.2	Modelo numérico	36
4.3	Condições iniciais e de contorno	39
4.4	Descrição dos experimentos	42
4.4.1	Simulações adicionais	48
5	Resultados	50

5.1	Evolução temporal da energia cinética e da vorticidade, e avaliação da espessura do domínio	50
5.2	Análise de erro e ordem aparente	53
5.3	Verificação das propriedades de auto-preservação do escoamento	59
5.4	Perfis e contornos médios	62
5.5	Séries temporais e espectros de energia	68
6	Conclusão	79
7	Recomendações e sugestões para trabalhos futuros	83
	Referências Bibliográficas	85

1 Introdução

A turbulência está presente na maioria dos escoamentos da natureza, assim como em diversos escoamentos de interesse da engenharia. Observa-se o fenômeno da turbulência nos escoamentos em rios, na atmosfera, nos oceanos, em problemas de aerodinâmica, no funcionamento de máquinas e motores à combustão. Por esse motivo, o entendimento e a simulação adequada da turbulência é de interesse de diversas áreas do conhecimento.

A turbulência está associada, principalmente, à mistura de propriedades e à dissipação de energia. Por esse motivo, a turbulência modifica drasticamente o escoamento, o que torna sua representação essencial na adequada modelagem dos escoamentos.

Entretanto, sua representação é até hoje um desafio. A maioria das soluções utilizadas, sejam elas analíticas ou numéricas, exigem uma grande parcela de empirismo, e muitas vezes servem apenas para aplicações *ad hoc*. Ainda assim, para se conseguir algumas destas soluções, muitas vezes é necessário introduzir simplificações, algumas vezes inadequadas para aplicações reais.

Simulações numéricas são utilizadas quando soluções analíticas não estão disponíveis, ou ainda quando se deseja incluir menos simplificações que aquelas consideradas nas soluções analíticas, como por exemplo, a inclusão de mais dimensões espaciais, ou a utilização de condições de contorno que variem no tempo e no espaço. Entretanto, simulações numéricas de escoamentos turbulentos são geralmente muito custosas computacionalmente, e normalmente exigem um longo tempo de simulação.

Embora seja difícil definir a turbulência precisamente, Tennekes e Lumley (1972) ci-

tam as seguintes características como sendo as principais: irregularidade ou aleatoriedade, o que torna impossível uma aproximação determinística; difusividade, responsável pela rápida mistura e aumento das taxas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa; ocorrência em altos números de Reynolds; presença de flutuações de vorticidade tridimensionais; dissipação, o que faz com que a turbulência necessite de constante alimentação para se manter; continuidade; e a dependência da configuração do escoamento.

É possível identificar um escoamento turbulento pela sua aparência desordenada. Este fenômeno é normalmente associado à presença de pequenos vórtices, ou estruturas de movimento turbulento, os quais causam interferência no escoamento como um todo. Entretanto, na maioria das vezes, estamos interessados em conhecer apenas os efeitos causados por esses vórtices sobre o escoamento de maior escala, e não na descrição dos mesmos. Além disso, a descrição matemática destes vórtices seria muito complexa, e a simulação computacional destas estruturas muito custosa.

Foi com a ideia de se obter o escoamento médio que Osborne Reynolds introduziu a separação do escoamento médio do turbulento. Ele assumiu que as componentes média e a de flutuação são separáveis da seguinte forma:

$$u(x, y, z, t) = \overline{u(x, y, z, t)} + u'(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

onde \bar{u} é a velocidade média e u' é a flutuação em torno da média.

Esta mesma separação é aplicada a todas as componentes da velocidade, à pressão e à densidade. Em seguida, são substituídas nas equações de Navier-Stokes e da continuidade, e posteriormente, é feita a média das equações.

Ao se obter a média das equações, os termos médios não se alteram, e as flutuações são anuladas. Entretanto, devido à presença dos termos não-lineares das equação de Navier-Stokes, surgem termos com multiplicação entre flutuações. Estes termos não podem ser anulados na promediação, e tornam-se novas variáveis. Estas novas variáveis

são organizadas no chamado Tensor de Tensões de Reynolds.

A determinação do Tensor de Tensões de Reynolds se tornou fundamental para resolução do problema da turbulência. Entretanto, não há solução analítica disponível para obtenção deste tensor. Este é o conhecido problema do fechamento, em que há mais incógnitas do que equações.

A fim de se obter o Tensor de Tensões de Reynolds, Boussinesq introduziu uma teoria desenvolvida em analogia à teoria cinética dos gases, onde a tensão é proporcional ao gradiente de velocidade. Analogamente à viscosidade molecular, criou-se o conceito de viscosidade turbulenta, à qual seriam atribuídos os efeitos da turbulência. Particularmente em regiões afastadas e superfícies sólidas, a ordem de grandeza da viscosidade turbulenta é muito maior que a da viscosidade molecular, e por isso, esta última é, normalmente, desprezada na presença da viscosidade turbulenta.

Entretanto, o problema do fechamento ainda persiste. Ao contrário da viscosidade molecular, que depende das características do fluido, a viscosidade turbulenta é função do escoamento, ou seja, seu valor varia com a geometria do problema, o campo velocidade, etc. Desta forma, torna-se necessário encontrar formulações para a viscosidade turbulenta que sejam função das características do problema.

A fim de se resolver o problema do fechamento, diversos modelos de turbulência, ou modelos de fechamento, foram desenvolvidos para estimar a viscosidade turbulenta. Estes modelos são classificados, em função da sua complexidade, em modelos de primeira ordem, de segunda ordem, e assim por diante. Esta classificação está relacionada com o número de equações considerado, o que não necessariamente influencia a acurácia destes modelos.

Nos modelos de comprimento de mistura, ou de primeira ordem, a viscosidade turbulenta depende da estimativa do tamanho do comprimento de mistura, que é proporcional ao tamanho dos grandes vórtices, e portanto, fortemente dependente do escoamento (TENNEKES; LUMLEY, 1972). Assim, a viscosidade turbulenta não é generalizada, e sua obtenção se restringe a estudos empíricos, sendo aplicável apenas a casos específicos.

Posteriormente ao modelo de comprimento de mistura, foram desenvolvidos os modelos de segunda ordem, ou de energia cinética da turbulência. Estes modelos consideram mais conceitos da física da turbulência, pois a viscosidade turbulenta é obtida através da equação da energia cinética da turbulência. Entretanto, o problema do fechamento persiste, pois surgem termos nas equações de segunda ordem que precisam ser parametrizados. Além disso, a necessidade de se resolver a equação de segunda ordem faz com que mais recursos computacionais sejam necessários. Exemplos de modelos de segunda ordem são os bem conhecidos $k-l$ e $k-\epsilon$.

Holt e Raman (1988) revisam alguns modelos de primeira e de segunda ordem para a camada limite atmosférica. Eles foram testados e comparados com um modelo barotrópico unidimensional da camada limite planetária, e também com dados observados. Os autores concluem que a estrutura principal da camada limite obtida é pouco influenciada pelo tipo de modelo de fechamento utilizado, mas que os modelos de energia cinética da turbulência ainda são preferíveis aos de primeira ordem. Porém, em geral, nenhum dos esquemas testados foi capaz de reproduzir adequadamente os dados observados.

Posteriormente, foram desenvolvidos modelos de ordem mais alta (terceira ordem, quarta ordem, etc), onde equações de ordem mais alta são incluídas no sistema e utilizadas para estimar os termos das equações de ordem mais baixa. Entretanto, o problema do fechamento ainda permanece, pois, quanto maior a ordem do modelo, maior o número de equações, e maior ainda é a quantidade de parâmetros necessários para o seu fechamento. Outro problema destes modelos é o grande número de equações presentes, tornando necessário cada vez mais recursos computacionais para resolvê-las.

Modelos de Simulação Numérica Direta (DNS - *Direct Numerical Simulation*) também são utilizados na modelagem da turbulência. Em DNS, ao contrário dos demais modelos, as equações de Navier-Stokes são utilizadas para resolver explicitamente todas as escalas de tempo e comprimento do escoamento. Assim, estes modelos são capazes de representar escalas de movimento turbulento de todos os tamanhos, inclusive aqueles próximos à

escala viscosa.

Entretanto, a representação destes pequenos vórtices exige um custo computacional muito elevado, inviável para algumas aplicações. Pope (2000) avaliou a distribuição do esforço computacional ao longo das escalas da turbulência em uma simulação em DNS. Ele estimou que 99,98% dos nós de uma grade tridimensional são utilizados para representar os vórtices com números de onda referentes à região dissipativa, e apenas 0,02% é usado para representar a sub-região inercial e a região do espectro com maior energia.

A grande vantagem dos modelos em DNS é que estes são aplicáveis a qualquer escoamento, por não ser necessário utilizar parametrizações. Modelos em DNS são muito utilizados no estudo da turbulência, e muitas vezes substituem experimentos físicos, por serem capazes de representar a turbulência por completo. Mas devido ao alto custo computacional necessário, as simulações são normalmente restritas a baixos números de Reynolds e a domínios menores.

Uma alternativa aos modelos em DNS e aos de promediação de Reynolds, são os modelos de Simulação de Grandes Vórtices (LES - *Large Eddy Simulation*). Em LES, ao invés de se separar explicitamente o escoamento médio das flutuações, as equações são filtradas através de um filtro espacial. Estes modelos resolvem explicitamente o escoamento de grande escala, cujo número de onda não é filtrado pelo filtro espacial. Porém, ainda é necessário parametrizar as pequenas escalas, que não são representadas no modelo. Acredita-se que a pequena escala contribua muito menos com o transporte de calor e quantidade de movimento, assim, os modelos em LES seriam muito menos sensíveis à parametrização que os demais modelos, e por isso, os resultados devem ser menos afetados por ela (MOENG, 1984).

Com o objetivo de parametrizar as pequenas escalas nas simulações em LES, diversos modelos de sub-grade foram desenvolvidos. O modelo de Smagorinsky é um dos mais conhecidos, e foi utilizado na primeira simulação em LES realizada por Deardorff (1970). Este modelo incorpora o conceito de viscosidade turbulenta para fazer a parametrização,

analogamente ao conceito adotado nos modelos de promediação de Reynolds.

Modelos em LES vêm sendo extensivamente utilizados na simulação numérica de escoamentos turbulentos. Os casos vão desde a simulação numérica de camada limite planetária neutra e instável (DEARDORFF, 1972; MOENG, 1984; DING; ARYA; LIN, 2001a, 2001b), até problemas de combustão (PITSCH, 2006) e de acústica (WAGNER; HÜTTTL; SAGAUT, 2007).

De acordo com Pope (2000), em termos de custo computacional, modelos em LES se encontram entre os modelos de promediação de Reynolds e os modelos em DNS. Entretanto, por serem capazes de representar explicitamente os movimentos de grande escala, os modelos em LES são mais confiáveis que os modelos de promediação de Reynolds, ao mesmo tempo que exigem menos recursos computacionais que DNS.

Como se pode observar, todos os modelos, sejam eles baseados na promediação de Reynolds ou LES, necessitam de parametrização. Isso inevitavelmente insere na solução um certo grau de empirismo. Os valores destes parâmetros podem variar muito de caso para caso, e ainda assim podem não oferecer resultados satisfatórios. A única exceção são os modelos em DNS. Entretanto, estes modelos são inviáveis para a maioria das aplicações por requererem um esforço computacional extremo.

Neste contexto, o Método da Filtragem Lagrangeana (MFL) surge como uma alternativa para simulação numérica de escoamentos turbulentos. A ideia deste método é aplicar um filtro espacial implícito nas equações de transporte, porém, utilizando-se as equações expressas no referencial Lagrangeano. A vantagem do uso deste referencial é que as não-linearidades das equações não são explicitadas. Desta forma, todos os termos podem ser filtrados, e conseqüentemente, não é necessário utilizar parametrização. Como não há necessidade de se utilizar a viscosidade turbulenta, o surgimento da turbulência se deve à viscosidade molecular e aos gradientes de velocidade que deformam e instabilizam o escoamento. No MFL utiliza-se um filtro do tipo *box*, que é resultante da discretização das equações em diferenças finitas.

O MFL foi apresentado por Almeida (2005), onde foi aplicado aos escoamentos em altos números de Reynolds para os casos da placa plana, da esteira, do jato plano turbulento, da camada de mistura, e do canal, utilizando um modelo bidimensional. Posteriormente o método foi aplicado novamente ao caso da esteira, onde foram realizados mais testes, e a análise dos erros cometidos pelo modelo foi mais aprofundada (ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011). Em geral, os resultados obtidos nestes dois trabalhos reproduziram soluções semi-empíricas específicas para cada caso, assim como o espectro de energia.

Neste trabalho, o MFL será aplicado ao caso do jato plano bidimensional. Este caso foi selecionado por possuir diversos estudos numéricos e experimentais publicados na literatura, os quais serão utilizados para comparação dos resultados. Por se tratar de um escoamento turbulento essencialmente bidimensional, o modelo utilizado neste trabalho resolverá as equações de Navier-Stokes na sua versão bidimensional, o que facilitará a implementação numérica por utilizar menos pontos de grade.

Entretanto, deve-se levar em conta as restrições que o uso do modelo bidimensional impõe, principalmente no que diz respeito às características da turbulência bidimensional, que são distintas da turbulência tridimensional. Por esse motivo, não são esperadas soluções com grande acurácia para todos os resultados. Porém, ainda assim espera-se que o modelo seja capaz de representar as principais características do escoamento turbulento.

Atualmente, existe apenas um artigo com aplicação do MFL publicado na literatura, citado anteriormente. Portanto, existe a necessidade de explorar outras aplicações do método. O principal objetivo deste trabalho é mostrar que o MFL é aplicável a outros tipos de escoamento turbulento, e assim, auxiliar a validação do método.

Este trabalho obedecerá a seguinte estrutura: no capítulo 2, os objetivos serão definidos; no capítulo 3, será apresentada uma revisão bibliográfica sobre o jato plano turbulento e o MFL; no capítulo 4, a metodologia utilizada neste trabalho será mostrada; no capítulo 5, os resultados serão apresentados; as conclusões serão apresentadas no capítulo 6; e, finalmente, no capítulo 7 serão dadas recomendações para trabalhos futuros.

2 Objetivos

A seguir serão apresentados os objetivos deste trabalho:

2.1 Objetivo geral

Simular o jato plano turbulento através do Método da Filtragem Lagrangeana.

2.2 Objetivos específicos

- i) Desenvolver um modelo bidimensional para simulação do jato plano turbulento com o emprego do Método da Filtragem Lagrangeana.
- ii) Comparar os resultados obtidos com soluções semi-empíricas a fim de verificar os resultados obtidos pelo Método da Filtragem Lagrangeana.
- iii) Investigar se o Método reproduz adequadamente características de escoamentos turbulentos.
- iv) Estender o número de experimentos e aprofundar a análise realizada por Almeida (2005).

3 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será primeiramente apresentada uma revisão do jato plano turbulento, mostrada na seção 3.1. Serão apresentadas algumas definições, assim como resultados de estudos experimentais e numéricos.

Em seguida, o Método Semi-Lagrangeano e o Método da Filtragem Lagrangeana serão apresentados, respectivamente nas seções 3.2 e 3.3. Como o Método Semi-Lagrangeano é utilizado no Método da Filtragem Lagrangeana, optou-se por apresentar os métodos nesta sequência.

3.1 O jato plano turbulento

O jato plano idealizado é simétrico em relação ao eixo $z = 0$, e a coordenada x é a direção dominante do escoamento médio. As estatísticas são independentes da direção transversal y , o que indica que o jato plano é estatisticamente bidimensional (POPE, 2000). Este jato pode ser obtido experimentalmente a partir da inserção de fluido em alta velocidade por uma pequena entrada em um escoamento quiescente, ou com velocidade muito menor do que a velocidade de entrada do jato. A figura 3.1 mostra um esquema do jato plano turbulento.

O jato plano é um tipo de escoamento livre. Estes escoamentos são assim denominados por não serem delimitados por uma superfície rígida, e sim, pelo escoamento ambiente, que é não-turbulento e normalmente irrotacional. Desta forma, a turbulência nestes escoamentos é resultante da diferença entre a velocidade do jato e a velocidade do escoamento

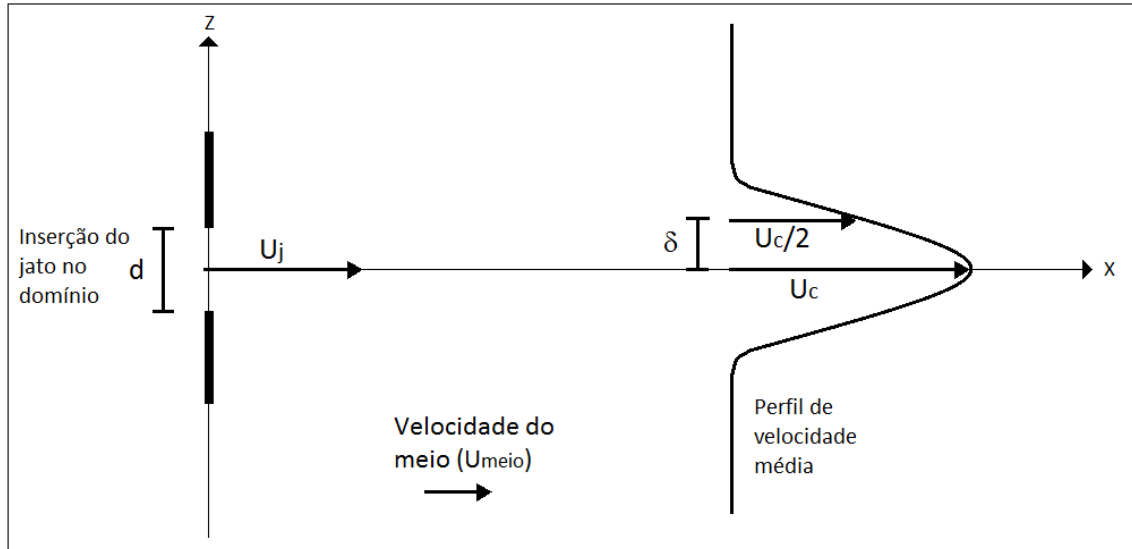


Figura 3.1: O jato plano turbulento

ambiente. Outros escoamentos livres típicos são a esteira e a camada de mistura.

Uma característica importante dos escoamentos livres é que o fluido que se encontra em estado turbulento é separado do escoamento irrotacional por uma superfície de intermitência bem definida. Sobre essa superfície, as flutuações da velocidade são altas, e apresentam alternância de períodos com sinal turbulento e não-turbulento. No interior da região delimitada pela superfície de intermitência a turbulência é relativamente homogênea. (TOWNSEND, 1976).

Nos escoamentos livres, auto-similaridade e auto-preservação são observados a uma certa distância da entrada do jato, onde o escoamento está mais desenvolvido. Quando uma variável normalizada não depende de x , diz-se que ela é auto-similar (POPE, 2000). Auto-preservação significa que ambos os escoamentos médio e turbulento são determinados pelas escalas de comprimento e velocidade locais (KUNDU; COHEN, 2008).

No estado de auto-similaridade, a velocidade média U para várias distâncias na direção x a partir da inserção do jato é dada por (KUNDU; COHEN, 2008):

$$\frac{U}{U_c} = f(\eta) \quad (3.1)$$

onde U_c é a velocidade no centro do jato, $\eta = z/\delta$, e $\delta(x)$ é a espessura característica do escoamento. No jato, a espessura δ é definida como sendo a metade da espessura onde $U = U_c/2$, como mostrado na figura 3.1.

Os escoamentos autopreservantes apresentam a forma mais simples de turbulência. A condição para auto-preservação é que a velocidade no centro no jato deve ser muito maior que a velocidade do escoamento do ambiente (BRADBURY, 1965). As consequências da auto-preservação em um jato, usando a hipótese de auto-similaridade dada pela equação 3.1, é que (KUNDU; COHEN, 2008):

$$U_c^2 \delta = \text{constante} \quad (3.2)$$

e

$$\delta \propto x \quad (3.3)$$

Combinando as equações 3.2 e 3.3 obtemos que:

$$U_c \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Na literatura, estão disponíveis diversos estudos experimentais do jato plano turbulento (BRADBURY, 1965; HESKESTAD, 1965; GUTMARK; WYGNANSKI, 1976; GORDEYEV; THOMAS, 2000, 2002). Os valores do número de Reynolds destes experimentos estão entre 4.700 e 36.900. O número de Reynolds em um jato plano Re_d é definido com base na espessura da saída do jato no ponto de inserção d da seguinte forma:

$$Re_d = \frac{(U_j - U_{meio})d}{\nu} \quad (3.5)$$

onde U_j é a velocidade de saída do jato, U_{meio} é a velocidade do meio, ou velocidade do

escoamento livre, e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Em experimentos de laboratório, a reprodução de um escoamento ambiente estacionário causa grandes erros de medição. Assim, a velocidade do jato é usualmente comparada com uma velocidade ambiente U_{meio} muito baixa. Embora este escoamento não seja exatamente auto-preservante, o desvio da auto-preservação é insignificante longe do início do jato. Para Bradbury (1965), o jato passa a ser auto-preservante em $x/d \geq 30$, e para Gutmark e Wygnanski (1976), isto ocorre em $x/d \geq 40$.

Bradbury (1965) estudou experimentalmente o jato plano turbulento, e o comparou com o escoamento em esteira. O autor utilizou a hipótese de auto-similaridade 3.1 e dados experimentais para propor a seguinte equação semi-empírica para o perfil de velocidade horizontal normalizado:

$$f(\eta) = \exp[-0,6749\eta^2(1 + 0,0269\eta^4)] \quad (3.6)$$

Gutmark e Wygnanski (1976) realizaram um estudo experimental do jato plano turbulento, no qual o perfil de velocidade horizontal normalizado foi comparado com os resultados experimentais de Knystautas (1964) e Heskestad (1965), e com a solução semi-empírica de Bradbury (1965). Houve uma boa concordância entre os resultados para $\eta < 0,1$. Em $\eta = 0,1$, o perfil afastou-se daquele medido por Heskestad, o qual encontrou-se mais afastado do eixo central do jato do que os demais resultados. Já para valores de η próximos de 0,2, os perfis medidos por Gutmark e Wygnanski aproximaram-se do perfil de Heskestad, e apresentaram valores maiores do que os dos perfis de Knystautas e Bradbury. É possível observar que há diferenças entre os resultados obtidos por cada autor. Além disso, a solução semi-empírica de Bradbury representa apenas valores próximos aos obtidos por experimentos físicos.

Estudos experimentais do jato plano mais recentes foram apresentados por Gordeyev e Thomas (2000) e Gordeyev e Thomas (2002). Nestes trabalhos, os dados experimen-

tais foram utilizados para realização de um estudo mais aprofundado do jato plano. Foi concluído que, embora o escoamento seja essencialmente tridimensional, este pode ser considerado aproximadamente plano. Isso porque, as estruturas tridimensionais encontradas no jato plano são muito menos relevantes do que as estruturas planares.

Ao contrário dos trabalhos experimentais, o número de estudos de simulações numéricas do jato plano turbulento disponível na literatura é pequeno. A maioria dos estudos simulam o jato circular, ou avaliam a variação temporal do jato. O número de simulações da evolução espacial do jato é menor devido ao alto custo computacional requerido (RIBAUT; SARKAR; STANLEY, 1999).

No estudo realizado por Stanley e Sarkar (1997), foi desenvolvido um modelo bidimensional em DNS para resolução das equações de Navier-Stokes compressíveis, a fim de simular dois tipos de escoamentos livres turbulentos: o jato plano e a camada de mistura. Inspirados no fato destes escoamentos serem considerados bidimensionais, o objetivo do estudo foi avaliar a capacidade dos modelos bidimensionais em prever, de maneira geral, os escoamentos reais tridimensionais correspondentes.

Tratando-se especificamente do jato plano, foram avaliados o jato “fraco”, onde a velocidade do escoamento livre é próxima à velocidade do jato, e o jato “forte”, onde a velocidade do escoamento livre é muito menor que a velocidade do jato. Para simular o jato forte, foram realizadas simulações com $Re_d = 6.000$. A razão entre a velocidade do escoamento livre e a do jato foi de $U_{meio}/U_j = 0,83$. Foi utilizada uma grade com 244×317 pontos, com domínio de tamanho $L_x/d = 48$ e $L_y/d = 20$, onde y é a coordenada perpendicular à inserção do jato. Foi utilizada uma grade uniforme com espaçamento de grade de $\Delta x/d = 0,16$ e $\Delta y/d = 0,06$. De acordo com os autores, o estudo concluiu que os perfis de velocidade média e a taxa de crescimento do jato obtidos foram comparáveis com observações experimentais tridimensionais. Entretanto, as simulações bidimensionais superestimaram significativamente as intensidades das flutuações e as tensões de Reynolds quando comparado com valores obtidos experimentalmente.

Com exceção do estudo citado anteriormente, as demais simulações numéricas apresentadas na literatura são tridimensionais. Nas simulações tridimensionais descritas a seguir, o plano $y-z$ está localizado perpendicularmente à injeção do jato, a velocidade do escoamento ocorre na direção da coordenada x , e a coordenada y é aquela na qual o perfil de velocidade é desenvolvido. Além disso, L_x , L_y e L_z representam, respectivamente, o tamanho do domínio nas direções x , y e z .

Stanley, Sarkar e Mellado (2002) desenvolveram um modelo tridimensional em DNS para simulação do jato plano turbulento, que resolve as equações de Navier-Stokes compressíveis. Foi realizada uma simulação para número de Reynolds igual a 3.000. Utilizou-se uma grade de $390 \times 390 \times 130$ pontos, com domínio de tamanho $L_x/d = 15$; $L_y/d = 16$; e $L_z/d = 4,3$. Os espaçamentos de grade utilizados foram $\Delta x/d = \Delta y/d = \Delta z/d = 0,033$. Os resultados obtidos concordaram com resultados experimentais anteriores, incluindo a taxa de crescimento do jato e os perfis de velocidade média e de tensão. O espectro de energia das componentes das velocidades mostrou claramente a sub-região inercial, onde a inclinação da curva em escala log-log foi de $-5/3$, e a região dissipativa, localizada na região de altas frequências e com inclinação maior.

Simulações em LES foram utilizadas para estudar o jato plano turbulento por Dai, Kobayashi e Taniguchi (1994). As simulações foram realizadas para $Re_d = 6.000$, com o modelo Smagorinsky padrão. Foi utilizada uma grade não-uniforme com $196 \times 156 \times 10$ pontos de grade, e domínio com tamanho adimensionalizado por d de tamanho $40 \times 40 \times 2$. O menor espaçamento de grade utilizado na direção y foi de $\Delta y/d = 0,04$, e de $\Delta x/d = 0,1$ na direção x . O modelo foi capaz de reproduzir as principais características do jato plano turbulento, assim como o perfil normalizado de velocidade, a evolução espacial da meia espessura do jato, e a distribuição da intensidade da flutuação da velocidade. O espectro de energia não foi apresentado.

Simulações do jato plano utilizando LES também foram realizadas por Ribault, Sarkar e Stanley (1999), para $Re_d = 3.000$ e $Re_d = 30.000$. Foram utilizados e comparados os

modelos de Smagorinsky padrão, a versão dinâmica do modelo de Smagorinsky, e o modelo dinâmico misto. Para $Re_d = 3.000$ foi utilizada uma grade com $61 \times 105 \times 16$ pontos, com domínio de tamanho $Lx/d = 12$, $Ly/d = 15$, e $Lz/d = 4$. Utilizou-se uma grade não-uniforme cujo espaçamento de grade foi de $\Delta x = 0,1d$ a $\Delta x/d = 0,25$, $\Delta y/d = 0,06666$ no centro do jato, e $\Delta z/d = 0,25$. Para $Re_d = 30.000$ utilizou-se uma grade com $93 \times 137 \times 16$ pontos, com domínio de tamanho $Lx/d = 20$, $Ly/d = 32$, e $Lz/d = 6$, sendo que o espaçamento de grade utilizado foi mantido igual ao utilizado com $Re_d = 3.000$. Os resultados para $Re_d = 3.000$ foram comparados com a simulação em DNS realizada por Stanley, Sarkar e Mellado (2002). Já os resultados para $Re_d = 30.000$ foram comparados com estudos experimentais. As simulações foram avaliadas com base na evolução da meia espessura do jato, a velocidade do centro do jato, o perfil médio de velocidade, e os perfis de intensidade da turbulência. O modelo padrão de Smagorinsky se mostrou muito dissipativo, e por isso foi o que mostrou os maiores erros. Os demais modelos obtiveram os melhores resultados na representação das características do jato obtidas experimentalmente. O espectro de energia obtido utilizando-se o modelo dinâmico misto para a componente horizontal da velocidade no centro do jato também foi apresentado. Este espectro representou a sub-região inercial em um intervalo de frequência de quase uma década, com inclinação de aproximadamente $-5/3$.

3.2 O Método Semi-Lagrangeano

O Método Semi-Lagrangeano (MSL) é um método numérico utilizado para resolver a parte advectiva das equações de transporte, ou seja, a derivada material. A grande vantagem do MSL é que ele resolve as equações no referencial Lagrangeano, sendo mais rápido e estável que os métodos Eulerianos. Ao mesmo tempo, o método utiliza uma grade fixa, sendo mais fácil de se calcular as derivadas do que em métodos puramente Lagrangeanos, além de manter os limites do domínio fixos.

O MSL é frequentemente associado à modelagem atmosférica. Desde sua concepção,

com os trabalhos de Sawyer (1963) e posteriormente de Robert (1981), o método vem sendo utilizado para resolver equações que descrevam a dinâmica da atmosfera. Por exemplo, para a resolução da equação de água rasa como um referencial para modelos atmosféricos (TODA; OGATA; YABE, 2009; PURSER; LESLIE, 1988), e a equação de Burgers como um protótipo de formação de frentes (KUO; WILLIAMS, 1989). O método também é utilizado operacionalmente desde 1991 em um dos modelos de previsão atmosférica do *European Centre for Medium-Range Weather Forecasts* (ECMWF) (HORTAL, 2002).

Sawyer (1963) mostrou pela primeira vez o MSL, utilizando-o para resolver a equação de conservação da vorticidade, em um modelo de atmosfera barotrópica. Neste esquema, a trajetória da partícula é calculada partindo-se do ponto de grade. Robert (1981) aprimorou o método anterior, fazendo com que o ponto de chegada da partícula de fluido coincida com um ponto de grade, sendo portanto necessário determinar o seu ponto de partida. Este é o esquema normalmente utilizado, e o que será descrito aqui.

A equação de transporte de um escalar genérico $\phi(\vec{x}(t), t)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{D\phi(\vec{x}(t), t)}{Dt} = S(\vec{x}(t), t) \quad (3.7)$$

onde $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é o vetor posição da partícula, t é o tempo, e $S(\vec{x}(t), t)$ são as fontes e sumidouros aos quais o escalar ϕ está submetido.

Segundo o método proposto por Robert (1981), a derivada total é aproximada pela seguinte equação:

$$\frac{D\phi(\vec{x}(t), t)}{Dt} \approx \frac{\phi(\vec{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \phi(\vec{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (3.8)$$

onde Δt é o intervalo de tempo.

A posição $\vec{x}(t + \Delta t)$ corresponde ao ponto de grade, e $\phi(\vec{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ é o valor da

variável no ponto de grade, e, portanto, o que queremos prever. A posição $\vec{x}(t - \Delta t)$ é a posição que a partícula ocupava a dois passos de tempo anteriores, chamado de ponto de partida da partícula. Este é um esquema de três níveis de tempo, no qual a derivada material é integrada em $2\Delta t$.

O esquema proposto por Hortal (2002) é um exemplo de um esquema de dois níveis de tempo, mostrado na equação 3.9. Neste esquema, a derivada material é integrada em apenas um passo de tempo, e $\vec{x}(t)$ é a posição de partida da partícula.

$$\frac{D\phi(\vec{x}(t), t)}{Dt} \approx \frac{\phi(\vec{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \phi(\vec{x}(t), t)}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Utilizando o método de três níveis de tempo de Robert, a previsão da variável ϕ é dada pela seguinte equação, substituindo 3.8 em 3.7:

$$\phi(\vec{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = \phi(\vec{x}(t - \Delta t), t - \Delta t) + (2\Delta t)S(\vec{x}(t), t) \quad (3.10)$$

Entretanto, para se fazer a previsão, ainda é necessário estimar a posição do ponto de partida da partícula. A estimativa do ponto de partida é feita integrando-se a equação $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. A seguir será descrito o método de três níveis de tempo proposto por Robert (1981).

Seja x a coordenada do ponto de grade, a o deslocamento da partícula em Δt , e assumindo que a velocidade é constante num intervalo de $2\Delta t$ e igual a $u(x - a, t)$, podemos integrar a equação $u = \frac{dx}{dt}$ da seguinte maneira:

$$\int_{x-2a}^x dx = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} u(x - a, t) dt \quad (3.11)$$

Resolvendo a integral temos que:

$$a = \Delta t u(x - a, t) \quad (3.12)$$

O ponto de partida é estimado por $x(t - \Delta t) \approx x - 2a$, onde a é obtido iterativamente pela equação 3.12.

Analogamente, é possível se obter o ponto de partida nas outras dimensões, usando as equações

$$b = \Delta t v(x - b, t) \quad (3.13)$$

e

$$c = \Delta t w(x - c, t) \quad (3.14)$$

Assim, da mesma maneira, as demais coordenadas do ponto de partida podem ser estimadas como sendo $y(t - \Delta t) \approx y - 2b$ e $z(t - \Delta t) \approx z - 2c$.

Almeida et al. (2009) propuseram um método iterativo de cálculo da posição de partida em dois passos, o que permite que os vetores velocidade e aceleração variem entre os dois passos de tempo. Este método mostrou-se vantajoso em situações nas quais a curvatura da trajetória da partícula é muito acentuada. Neste método, em um problema bidimensional, a posição de partida da partícula $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$ é obtida através dos seguintes passos:

- Primeiro passo

$$a^{*(m+1)} = \frac{\Delta t}{2} u(x_i - a^{*(m)}, y_j - b^{*(m)}, t) \quad (3.15a)$$

$$b^{*(m+1)} = \frac{\Delta t}{2} u(x_i - a^{*(m)}, y_j - b^{*(m)}, t) \quad (3.15b)$$

$$x' = x_i - 2a^* \quad (3.15c)$$

$$y' = y_j - 2b^* \quad (3.15d)$$

- Segundo passo

$$a^{**(m+1)} = \frac{\Delta t}{2} u(x' - a^{**(m)}, y' - b^{**(m)}, t) \quad (3.16a)$$

$$b^{**(m+1)} = \frac{\Delta t}{2} u(x' - a^{**(m)}, y' - b^{**(m)}, t) \quad (3.16b)$$

$$\tilde{x}_i = x' - 2a^{**} \quad (3.16c)$$

$$\tilde{y}_j = y' - 2b^{**} \quad (3.16d)$$

onde $a^{*(m+1)}$ e $b^{*(m+1)}$ são os deslocamentos da partícula nas direções x e y , respectivamente, na iteração $(m+1)$, entre os instantes t e $(t + \Delta t)$; $a^{**(m+1)}$ e $b^{**(m+1)}$ são os deslocamentos da partícula nas direções x e y , respectivamente, na iteração $(m+1)$, entre os instantes $(t - \Delta t)$ e t ; x' e y' são as coordenadas da posição da partícula no instante t ; e x_i e y_j as coordenadas do ponto de grade.

Após ser determinada a posição do ponto de partida, é necessário obter o valor da variável ϕ nesse ponto. Porém, esse ponto não necessariamente coincide com algum ponto de grade. Sendo assim, é necessário utilizar-se algum método para interpolar os valores nos pontos de grade próximos ao ponto de partida, e assim, estimar o valor de ϕ no ponto de partida.

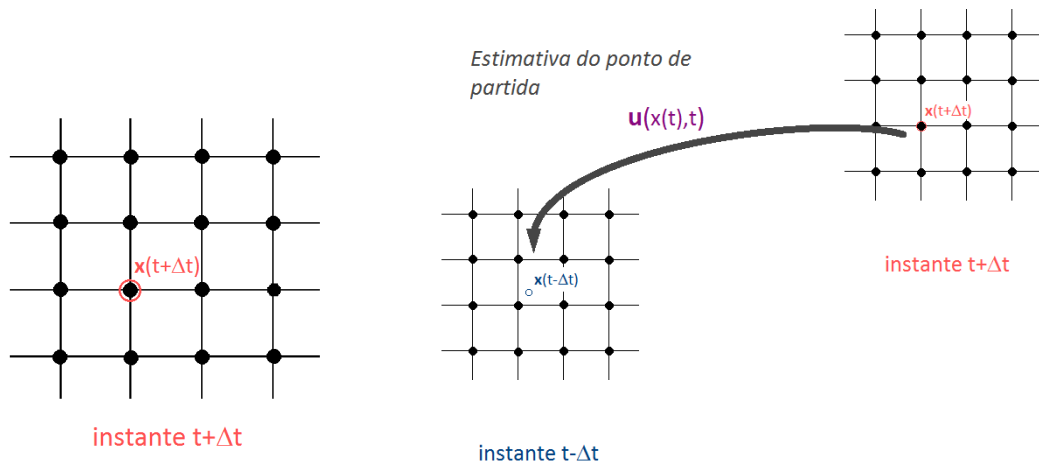
Diversos tipos de interpolação podem ser utilizadas, por exemplo, interpolação linear, de Lagrange, ou Splines. Em geral os erros diminuem com o aumento do grau de interpolação, porém o custo computacional também se eleva. Robert (1981) utilizou interpolações bicúbicas, porém, o autor cita que o uso deste tipo de interpolação se mostrou custoso computacionalmente. Purser e Leslie (apud STANIFORTH; CÔTÉ, 1991) recomendam o uso de interpolação de pelo menos terceira ordem para que os erros sejam toleráveis (por exemplo, interpolação cúbica).

A figura 3.2 mostra, de maneira ilustrativa, o MSL em cinco passos:

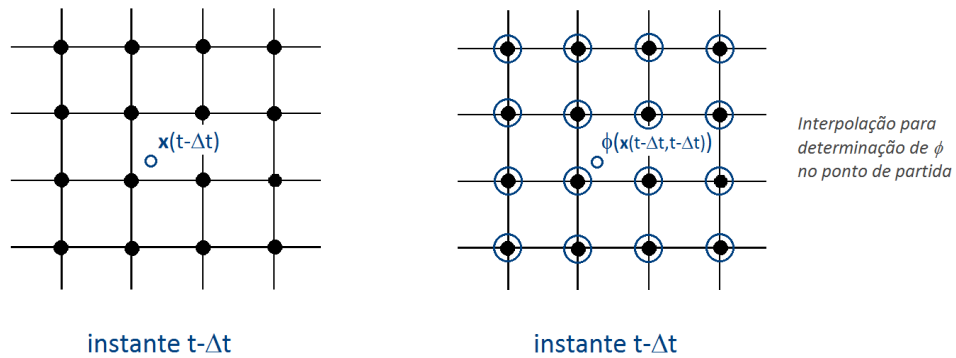
1. Primeiramente tem-se um ponto de grade qualquer, onde se deseja prever o valor de

ϕ (figura 3.2(a)).

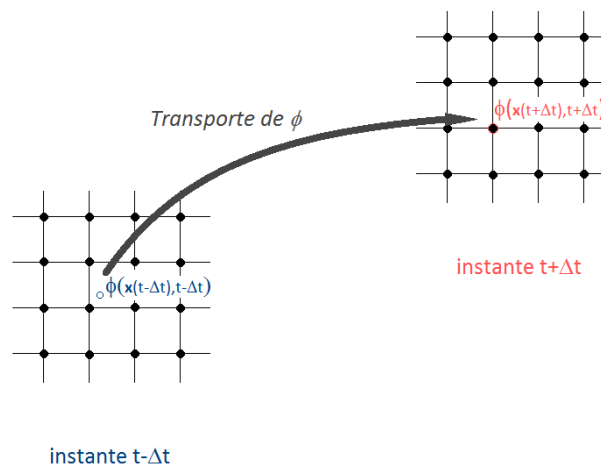
2. De acordo com a equação 3.10, o valor de ϕ previsto no ponto de grade é função do somatório de fontes e sumidouros S e do valor de ϕ na posição que a partícula ocupou no instante $t - \Delta t$, também chamada posição de partida da partícula. Esta posição é estimada utilizando a velocidade no instante intermediário t (figura 3.2(b)).
3. A posição de partida não necessariamente coincide com algum ponto de grade (figura 3.2(c)).
4. O valor de ϕ nesta posição é obtido interpolando-se os valores de ϕ nos pontos de grade localizados ao redor do ponto de partida (figura 3.2(d)).
5. Finalmente, ϕ é transportado para o instante $t + \Delta t$, contabilizando os ganhos e perdas sofridos entre $t - \Delta t$ e $t + \Delta t$, representados pelo termo da equação 3.10 que contém S (figura 3.2(e)).



- (a) Passo 1 - Ponto de grade qualquer (b) Passo 2 - Utilizando a velocidade da partícula no instante t , estima-se a posição da partícula em $t - \Delta t$. (ponto de lado ϕ em $t + \Delta t$. (ponto de partida))



- (c) Passo 3 - O ponto de partida (d) Passo 4 - O valor de ϕ no ponto de partida é não necessariamente coincide com um obtido através de interpolação. ponto de grade.



- (e) Passo 5 - A partícula é transportada do ponto de partida até o ponto de grade, computando perdas e ganhos ocorridas no trajeto.

Figura 3.2: Ilustração do Método Semi-Lagrangeano em cinco passos.

Robert (1981) mostrou que o esquema apresentado por ele é incondicionalmente estável para a equação da advecção. Entretanto, ao se incluir o termo difusivo, o esquema passa a ter o critério de estabilidade mostrado na equação 3.17, referente à discretização em diferenças finitas, uma vez que a estabilidade incondicional aplica-se apenas à parte advectiva da equação (FORTUNA, 2000).

$$\mu \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq \frac{1}{4} \quad (3.17)$$

Staniforth e Côté (1991) apresentam uma revisão do uso do MSL em modelos de previsão numérica do tempo e dos esquemas numéricos disponíveis até então. Os autores apontam a possibilidade de se manter longos passos de tempo como uma vantagem desse método quando comparado com métodos Eulerianos, cujos passos de tempo são muitas vezes limitados por critérios de estabilidade numérica. Porém, o autor admite que o MSL não supera os demais em alguns aspectos, como a conservação de massa e energia. Entretanto, o estudo apresentado por Almeida et al. (2009) mostrou que, embora não seja formalmente conservativo, o esquema de dois passos e três níveis de tempo mostrou uma aceitável conservação das propriedades, sendo melhor ou igual a outros esquemas adotados no MSL.

Mais recentemente, Rancic (1992) introduziu uma versão do MSL que possui propriedades conservativas. Este esquema foi baseado em *Piecewise Parabolic Method*, um tipo de esquema numérico em volumes finitos. Mais recentemente, o método passou a ser utilizado em problemas de transporte passivo (HARRIS; LAURITZEN; MITTAL, 2010). O MSL também é atualmente muito utilizado na resolução das equações de Vlasov para simulação de plasma (ROSSMANITH; SEAL, 2011; BESSE; SONNENDRÜCKER, 2003; BEGUE et al., 1999).

3.3 O Método da Filtragem Lagrangeana

O Método da Filtragem Lagrangeana (MFL) é um método numérico criado com o objetivo de simular escoamentos viscosos através do uso das equações de Navier-Stokes filtradas. Este método é baseado na hipótese de que os movimentos turbulentos são responsáveis pela homogeneização das propriedades físicas nas parcelas de fluidos através do processo de mistura. Este processo de homogeneização é expresso através de um filtro espacial. A seguir o MFL será apresentado, com base no trabalho publicado por Almeida, Alves e Tanajura (2011).

Discretizando a derivada material de um escalar genérico $\phi(\vec{x}(t), t)$, dada pela equação 3.7, pelo Método Semi-Lagrangeano em três níveis de tempo temos que:

$$\frac{\phi^+ - \phi^-}{2\Delta t} = S(\vec{x}(t), t) \quad (3.18)$$

Na equação 3.18 utilizou-se a seguinte notação auxiliar: ϕ^+ é o valor de ϕ no ponto de grade; ϕ^- é o valor de ϕ no ponto de partida da partícula.

O filtro espacial aplicado no MFL, indicado por $\langle \cdot \rangle$, tem a seguinte forma (SORBJAN, 1989 apud ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011):

$$\langle q(x) \rangle = \frac{1}{2\lambda} \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} q(\zeta) B_\lambda(x-\zeta) d\zeta \quad (3.19)$$

onde q é a variável dependente, $B_\lambda = 1$ é a função do filtro, 2λ é o tamanho do filtro, e ζ é a variável auxiliar.

O filtro mostrado na equação 3.19 é do tipo *box*, e possui propriedades de um filtro linear. Se aplicamos este filtro na equação 3.18 obtemos:

$$\frac{\langle \phi^+ \rangle - \langle \phi^- \rangle}{2\Delta t} = \langle S(\vec{x}(t), t) \rangle \quad (3.20)$$

De acordo com Wilcox (apud ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011), a aproximação por diferenças finitas centrada para a derivada de ordem primeira equivale ao filtro *box* mostrado na equação 3.19. Este operador filtra quase todas as escalas menores que o dobro do espaçamento de grade usado. Desta forma, no MFL não é necessário aplicar explicitamente o filtro da equação 3.19, pois sua aplicação se dá implicitamente pela discretização em diferenças finitas.

Observa-se que, ao se aplicar o filtro, a forma funcional da equação original se mantém, sem a necessidade da utilização de parametrização ou sub-grade. Entretanto, observa-se que todos os termos de $\langle S(\vec{x}(t), t) \rangle$ devem ser lineares para que o método possa ser aplicado, ou seja, no caso da equação de Navier-Stokes, deve-se considerar densidade e viscosidade constantes.

Outro ponto a ser observado é o fato de, assim como em simulações em DNS, não haver necessidade de se normalizar as equações a fim de simplificá-las. Desta forma, os parâmetros físicos e as dimensões do domínio podem ser diretamente associados a casos reais.

O MFL foi apresentado, inicialmente, no trabalho de Almeida (2005). Neste trabalho, o método foi aplicado à uma série de diferentes casos de escoamentos turbulentos em altos números de Reynolds, utilizando um modelo bidimensional. Os casos simulados foram: a placa plana, a esteira, o jato plano turbulento, a camada de mistura, e o canal. Os resultados concordaram com soluções semi-empíricas, e os espectros de energia foram adequadamente simulados, e o método se mostrou eficiente computacionalmente.

Posteriormente, no trabalho publicado por Almeida, Alves e Tanajura (2011), este método foi aplicado novamente ao caso de uma esteira plana em altos números de Reynolds, onde foi realizado uma análise mais completa das simulações. Utilizou-se novamente as versões bidimensionais das equações de Navier-Stokes. Os valores do número de Reynolds da esteira variaram entre $Re_\theta = 1.537$ e $Re_\theta = 7.937$, onde $Re_\theta = (U_\infty \theta) / \nu$, U_∞ é a velocidade do escoamento livre, θ é a espessura de quantidade de movimento da esteira, e ν é a

viscosidade cinemática do fluido. Estes valores são iguais ou maiores que os encontrados em experimentos mostrados na literatura. Os resultados mostraram que o modelo foi capaz de reproduzir adequadamente o perfil de velocidade normalizado tal como previsto pela teoria, assim como o espectro de energia.

4 Metodologia

4.1 Modelo matemático

O modelo matemático utilizado é composto pela equação de conservação de massa (equação 4.1), e pelas equações de Navier-Stokes em duas dimensões escritas no referencial Lagrangeano (equações 4.2 e 4.3).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (4.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (4.3)$$

onde u e w são respectivamente as velocidades horizontal e vertical, e p é a pressão. A densidade ρ e a viscosidade ν são consideradas constantes.

4.2 Modelo numérico

As equações de Navier-Stokes e da continuidade foram discretizadas pelo MFL como mostrado na seção 3.3. A seguir será mostrado em detalhes a obtenção do modelo numérico.

Discretizando a componente horizontal da equação de Navier-Stokes 4.2 pelo MSL em

três níveis de tempo, como proposto por Robert (1981) (equação 3.8) temos que:

$$\frac{u^+ - u^-}{2\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x} + \nu \nabla^2 u^- \quad (4.4)$$

Na equação 4.4 utilizou-se novamente a notação auxiliar, na qual o sobrescrito (+) representa o valor da variável no instante $t + \Delta t$ na posição $\vec{x}(t + \Delta t)$ (ponto de grade), (0) representa o valor da variável no instante t na posição $\vec{x}(t)$, e (-) representa o valor da variável no instante $t - \Delta t$ na posição $\vec{x}(t - \Delta t)$.

Para se estimar o termo de gradiente pressão, optou-se por um tratamento implícito, a fim de evitar instabilidade numérica provocado pelo eventual surgimento de ondas de pressão rápidas. Assim, o termo $\frac{\partial p^0}{\partial x}$ foi substituído pela média entre os gradientes nos instantes (+) e (-) da seguinte maneira:

$$\frac{u^+ - u^-}{2\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial p^+}{\partial x} + \frac{\partial p^-}{\partial x} \right) + \nu \nabla^2 u^- \quad (4.5)$$

Aplicando-se o filtro obtém-se, finalmente, a seguinte equação:

$$\frac{\langle u^+ \rangle - \langle u^- \rangle}{2\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial \langle p^+ \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle p^- \rangle}{\partial x} \right) + \nu \nabla^2 \langle u^- \rangle \quad (4.6)$$

Fazendo-se o mesmo procedimento com a componente vertical da equação de Navier-Stokes 4.3 obtém-se que:

$$\frac{\langle w^+ \rangle - \langle w^- \rangle}{2\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial \langle p^+ \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle p^- \rangle}{\partial z} \right) + \nu \nabla^2 \langle w^- \rangle \quad (4.7)$$

Nota-se que o termo da viscosidade refere-se ao instante (-), de forma a evitar a ocorrência de instabilidade numérica incondicional. O laplaciano presente neste termo foi calculado utilizando a fórmula dos cinco pontos (FORTUNA, 2000).

A equação da continuidade é válida para todos os instantes. Aplicando-se o filtro

espacial na equação 4.1, pode-se dizer que as seguintes equações são válidas:

$$\frac{\partial \langle u^+ \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle w^+ \rangle}{\partial z} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{\partial \langle u^- \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle w^- \rangle}{\partial z} = 0 \quad (4.8b)$$

Derivando-se as equações 4.6 em relação a x e 4.7 em relação a z , somando-as e substituindo-se na equação 4.8, obtém-se a seguinte equação elíptica para a pressão (ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011):

$$\nabla^2 \langle p^+ \rangle = -\nabla^2 \langle p^- \rangle + 2\rho v \left[\frac{\partial \nabla^2 \langle u^- \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \nabla^2 \langle w^- \rangle}{\partial z} \right] \quad (4.9)$$

A equação 4.9 foi resolvida iterativamente pelo método SOR (*Successive Over Relaxation*). Foram realizadas iterações sucessivas até que o máximo erro relativo obtido entre uma iteração e outra, como definido na equação 4.10, fosse menor ou igual a 10^{-6} .

$$\epsilon_{SOR} = \frac{\max[|p^{(k+1)} - p^{(k)}|]}{\max[|p^{(k+1)}|]} \quad (4.10)$$

onde $\max[|p^{(k+1)} - p^{(k)}|]$ é a máxima diferença entre a pressão na atual iteração $p^{(k+1)}$ e a pressão na iteração anterior $p^{(k)}$ em módulo, e $\max[|p^{(k+1)}|]$ é o máximo valor em módulo da pressão na atual iteração em todo o domínio.

O sistema de equações foi resolvido através dos seguintes passos. O sinal do operador do filtro $\langle \cdot \rangle$ foi retirado por conveniência:

1. Estima-se $\vec{x}(t)$ e $\vec{x}(t - \Delta t)$ utilizando u^0 e w^0 (equações 3.15 e 3.16)
2. Calcula $\nabla^2 p^+$ a partir de u^- , w^- e p^- (equação 4.9)
3. Resolve a equação elíptica e prevê p^+

4. Prevê u^+ e w^+ utilizando u^- , w^- , p^- e p^+ (equações 4.6 e 4.7)
5. u^- recebe u^0 , w^- recebe w^0 , e p^- recebe p^0
6. u^0 recebe u^+ , w^0 recebe w^+ , e p^0 recebe p^+
7. Reinicia a sequência e avança para o próximo passo de tempo

A estimativa da posição do ponto de partida foi feita através do método em dois passos e três níveis de tempo proposto por Almeida et al. (2009). O esquema de interpolação utilizado no MSL foi a interpolação polinomial de Lagrange de terceira ordem (cúbica). No MSL, é necessário conhecer os campos de gradientes e laplacianos dos termos ao lado direito das equações 4.6 e 4.7, assim como os do lado direito da equação 4.9. Estes campos foram calculados por diferenças finitas centradas ao longo da simulação. Desta forma, o erro de truncamento do esquema como um todo foi de segunda ordem.

Para resolução do sistema de equações, foi escrito um programa em linguagem FORTRAN 90 utilizando precisão simples. O programa foi executado em um computador com 15,6 GB de memória, e um processador Intel[®] Xeon(R) CPU X5650, com 2,67GHz de frequência. Os tempos reais de simulação dos experimentos realizados neste trabalho variaram entre cinco e seis horas.

4.3 Condições iniciais e de contorno

Na entrada do domínio, a velocidade horizontal u foi prescrita como sendo igual à velocidade do meio U_{meio} , exceto nos pontos centrais que representam a entrada do jato. A velocidade horizontal w foi fixada como sendo nula na entrada. Estas também foram as condições iniciais de velocidade.

Como será mostrado a seguir, foram realizados pares de simulações com configurações idênticas, porém uma com o dobro do espaçamento de grade da outra. Nas simulações de grade grossa, a velocidade prescrita nos nós que representam a entrada do jato foi U_j ,

e nos demais pontos da fronteira de entrada, a velocidade prescrita foi U_{meio} . Como a grade grossa possui o dobro do espaçamento de grade presente na grade fina, esta última possui dois pontos de grade nos limites da representação da entrada do jato que não estão presentes na grade grossa, como mostra a figura 4.1. Assim, a simples substituição da velocidade nestes ponto por U_j resultaria em diferentes espessuras d , e conseqüentemente, diferentes números de Reynolds.

Para que não houvesse discrepância na representação da entrada do jato entre simulações de grade fina e grossa, utilizou-se como condição de contorno um perfil de velocidade trapezoidal, ou seja, nestes pontos limites da representação do jato da grade fina prescreveu-se a velocidade como sendo a média entre as velocidades U_j e U_{meio} . A figura 4.1 mostra um esquema deste perfil.

Na saída do domínio não foi necessário incluir condição de contorno de u e w , pois, já que o fluxo segue na direção crescente de x , espera-se que não haja fluxo no sentido contrário. Assim, foi possível calcular a velocidade no contorno de saída utilizando as equações 4.6 e 4.7.

A velocidade horizontal u foi prescrita nas fronteiras superior e inferior como sendo igual a velocidade do meio U_{meio} . As velocidades vertical w nas fronteiras superior e inferior foram calculadas a partir das seguintes equações, a fim de reduzir eventuais efeitos de reflexão de ondas para o interior do domínio (MASON; SYKES, 1979 apud PIELKE, 1984).

$$w_{i,kmax}^{t+1} = 1,5w_{i,kmax-1}^t - 0,5w_{i,kmax-3}^t \quad (4.11)$$

$$w_{i,kmin}^{t+1} = 1,5w_{i,kmin+1}^t - 0,5w_{i,kmin+3}^t \quad (4.12)$$

onde i é o índice do ponto de grade na direção x e $kmax$ e $kmin$ são respectivamente os índices na direção z das fronteiras superior e inferior. Estas equações representam uma

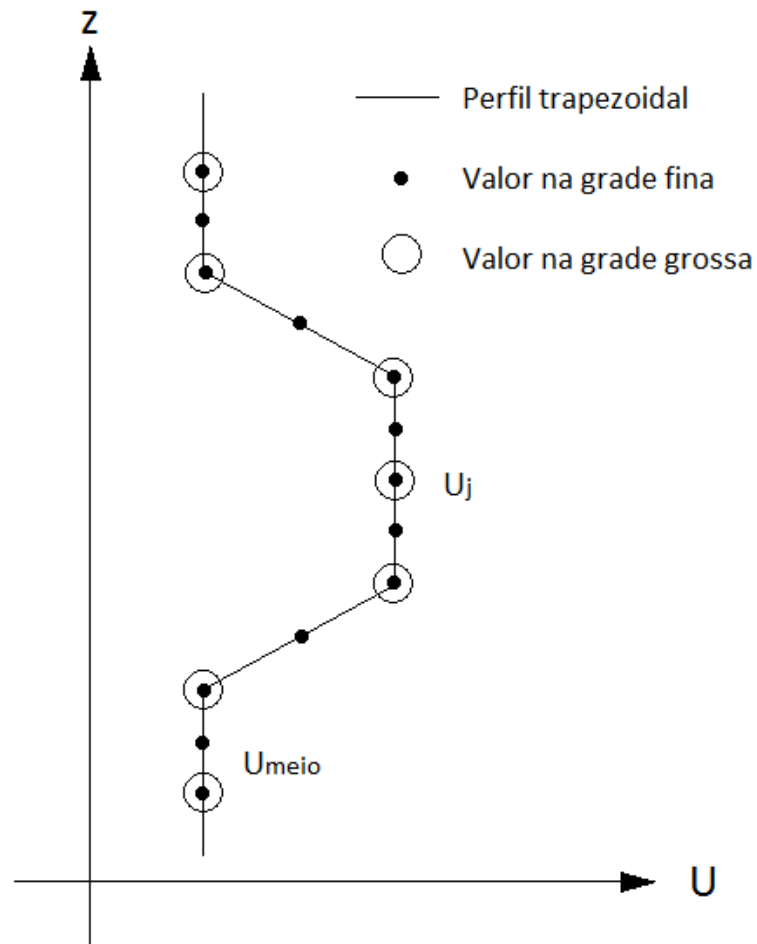


Figura 4.1: Esquema do perfil trapezoidal utilizado como condição de contorno na entrada do jato.

extrapolação temporal da velocidade vertical nas fronteiras superior e inferior.

Para resolver a equação elíptica 4.9 prescreveu-se $p = 0$ em todas as fronteiras. Os valores de gradientes e laplacianos foram arbitrados como nulos no início da simulação em todo o domínio. Também arbitraram-se valores nulos para os gradientes e laplacianos em todas as fronteiras ao longo de toda a simulação.

A figura 4.2 mostra, esquematicamente, o domínio de modelagem, e as condições de contorno adotadas nas simulações.

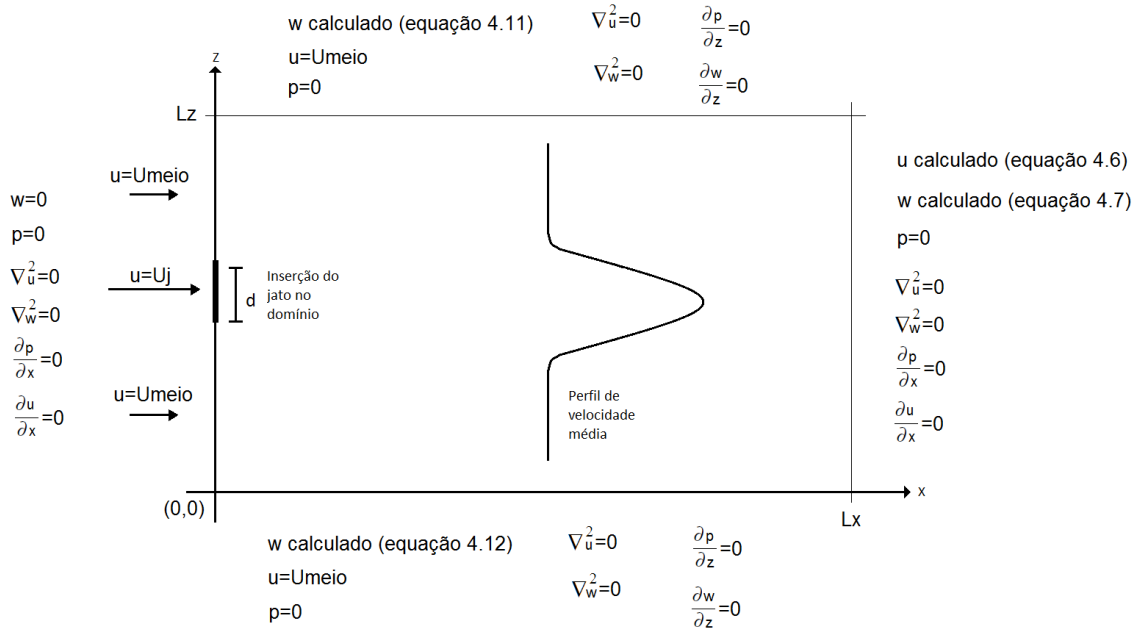


Figura 4.2: Condições de contorno e domínio de modelagem.

4.4 Descrição dos experimentos

Foram realizados, inicialmente, quatro experimentos com grade fina: *simjato1*, *simjato2*, *simjato3* e *simjato4*. O número de Reynolds dos experimentos variou de 2.970 a 10.000. Estes experimentos foram repetidos com o dobro do espaçamento de grade dos anteriores, e denominados *simjato5*, *simjato6*, *simjato7* e *simjato8*. Isso foi feito a fim de se estimar o erro cometido nas simulações através do Índice de Convergência de Grade, o GCI, como será explicado na seção 5.2. Já que o espaçamento de grade tem relação direta com o tamanho do filtro do MFL, também pretende-se mostrar o efeito do seu aumento sobre os resultados.

O domínio de modelagem foi definido no plano $x-z$, sendo que a inserção do jato foi colocada paralelamente ao eixo x . Para confecção das grades, adotou-se um espaçamento de grade na horizontal Δx aproximadamente duas ordens de grandeza maior do que o espaçamento de grade na vertical Δz , uma vez que são esperados gradientes de propriedades muito mais acentuados ao longo da coordenada z .

O passo de tempo foi ajustado de forma a satisfazer o critério de estabilidade mostrado

na equação 3.17, imposto pela discretização explícita do termo de viscosidade. Todas as simulações foram feitas de modo que $U_{meio}/U_j = 0,1$, a fim de manter o valor da velocidade do meio U_{meio} uma ordem de grandeza menor do que a velocidade de saída do jato U_j , e assim, satisfazer a condição de auto-preservação. Não foi possível utilizar valores de U_{meio}/U_j menores do que $0,1$, pois foi observado que, quanto menor a razão entre U_{meio} e U_{meio} , mais afastado da solução empírica de Bradbury (1965) (equação 3.6) o perfil obtido ficava. A tabela 4.1 resume os parâmetros utilizados nas simulações.

Após o início da simulação, espera-se que o modelo demore algum tempo até perder suas condições iniciais e se tornar estatisticamente estacionário, ou seja, até que as variações das propriedades sejam muito pequenas. Com isso, foram armazenadas as séries temporais e calculadas as médias apenas após o modelo se estabilizar. Foram armazenadas as séries temporais completas e calculadas as médias de u , w e p por um período de 15s a 30s dependendo da simulação, como mostrado na tabela 4.1. As médias foram utilizadas na obtenção do perfil normalizado, e as séries temporais, na obtenção do espectro de energia.

Tabela 4.1: Descrição das simulações

Simulação	Grade fina				Grade grossa			
	simjato1	simjato2	simjato3	simjato4	simjato5	simjato6	simjato7	simjato8
Comprimento do domínio (Lx)	5,0	4,8	5,0	4,8	5,0	4,8	5,0	4,8
Altura do domínio (Lz)	0,16	0,10	0,16	0,10	0,16	0,10	0,16	0,10
Espaçamento de grade longitudinal (Δx)	0,1	0,06	0,1	0,06	0,2	0,12	0,2	0,12
Espaçamento de grade transversal (Δz)	0,001	0,000625	0,001	0,000625	0,002	0,00125	0,002	0,00125
Número de pontos de grade na direção x	51	81	51	81	26	41	26	41
Número de pontos de grade na direção z	161	161	161	161	81	81	81	81
Velocidade do escoamento livre (U_{meio})	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0	2,0	1,0	2,0
Velocidade de saída do jato (U_j)	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0	10,0	20,0
Espessura do jato (d)	0,008	0,005	0,008	0,005	0,008	0,005	0,008	0,005
Passo de tempo (Δt)	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
Tempo total de simulação	30,0	15,0	15,0	12,0	30,0	15,0	15,0	12,0
Tempo para registrar a série temporal e calcular a média	20,0	10,0	10,0	10,0	20,0	10,0	10,0	10,0
Viscosidade dinâmica do fluido (μ)	2,88E-05	1,70E-05	1,82E-05	1,07E-05	2,88E-05	1,70E-05	1,82E-05	1,07E-05
Densidade do Fluido (ρ)	1,188	1,188	1,188	1,188	1,188	1,188	1,188	1,188
Viscosidade cinemática do fluido (ν)	2,42E-05	1,43E-05	1,53E-05	9,00E-06	2,42E-05	1,43E-05	1,53E-05	9,00E-06
Número de Reynolds [$Re = (U_j - U_{meio})d/\nu$]	2.970	6.290	4.710	10.000	2.970	6.290	4.710	10.000

Foram definidos três pontos onde as séries temporais foram registradas: os pontos A, B, C. Estes pontos estão localizados no eixo central do jato, e suas posições no eixo x são, respectivamente, iguais a $1/4$, $1/2$ e $3/4$ da largura do domínio. Já que as simulações utilizam grades diferentes, a localização destes pontos é ligeiramente distinta. A tabela 4.2 mostra a localização dos pontos onde foram registradas as séries temporais.

Tabela 4.2: Localização dos pontos de registro das séries temporais.

Ponto		A	B	C
Índice	i	$\frac{1}{4}in^a$	$\frac{1}{2}in$	$\frac{3}{4}in$
	k	$\frac{kn^b + 1}{2}$	$\frac{kn + 1}{2}$	$\frac{kn + 1}{2}$
simjato1 e	x(m)	1,1	2,4	3,7
simjato3	z(m)	0,08	0,08	0,08
simjato2 e	x(m)	1,14	2,34	3,54
simjato4	z(m)	0,05	0,05	0,05
simjato5 e	x(m)	1,0	2,4	3,6
simjato7	z(m)	0,08	0,08	0,08
simjato6 e	x(m)	1,08	2,28	3,48
simjato8	z(m)	0,05	0,05	0,05

Para verificar que o período em que foram armazenadas as séries temporais e obtidas as médias é estatisticamente estacionário, calculou-se a máxima diferença relativa da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{max} = \frac{|u_{max} - u_{min}|}{\min(|u_{max}|, |u_{min}|)} 100\% \quad (4.13)$$

onde u_{max} e u_{min} são, respectivamente, as velocidades máximas e mínimas registradas durante todo o intervalo em que as séries foram registradas. Se, de fato, o período selecionado for estatisticamente estacionário, espera-se que o valor de ε_{max} encontrado seja muito pequeno.

O objetivo da equação 4.13 é obter o maior valor para o erro possível, minimizando o

^ain = Índice do último ponto de grade na horizontal.

^bkn = Índice do último ponto de grade na vertical.

valor do denominador. Se, mesmo assim, o erro for pequeno, é possível concluir com mais segurança que o período selecionado é estatisticamente estacionário. Note que, se u_{max} for positivo, e u_{min} for negativo, pode ocorrer de $|u_{max}| < |u_{min}|$, mesmo sendo $u_{max} > u_{min}$ sempre. Isso justifica a escolha do menor valor entre $|u_{max}|$ e $|u_{min}|$ no denominador.

A tabela 4.3 compara as grades utilizadas no presente trabalho com as grades utilizadas em outros trabalhos da literatura que tratam de simulações numéricas do jato plano turbulento. As dimensões espaciais foram normalizadas pela espessura do jato d .

Observa-se que o espaçamento de grade na direção vertical utilizada com o MFL é o dobro que a utilizada na simulação em DNS bidimensional de Stanley e Sarkar (1997), e quase quatro vezes mais grossa que a utilizada na simulação em DNS tridimensional realizada por Stanley, Sarkar e Mellado (2002). Comparando-se com as simulações em LES, a grade do presente trabalho é quase duas vezes mais grossa que a simulação realizada por Ribault, Sarkar e Stanley (1999), e três vezes mais grossa que a simulação realizada por Dai, Kobayashi e Taniguchi (1994), para números de Reynolds semelhantes.

Além disso, foi possível utilizar um espaçamento e grade na direção x muito maior, o que possibilitou mais velocidade na realização dos cálculos. O Δx nas simulações que utilizaram o MFL é 75 vezes maior que na simulação em DNS 2D, mais de 300 vezes maior que o utilizado na simulação em DNS 3D, e mais de 100 vezes maior nas simulações em LES.

Comparando-se o número de Reynolds e a discretização espacial necessária, observa-se que o MFL é um método bastante competitivo, equiparando-se com LES, podendo até ser mais econômico. O fato de o espaçamento de grade utilizado no MFL ser muito maior que o utilizado em DNS para números de Reynolds semelhantes mostra que o MFL não irá simular todas as escalas do escoamento.

Tabela 4.3: Comparação entre grades de trabalhos publicados na literatura

Método	DNS 2D	DNS 3D	LES	LES	MFL
Autor	Stanley e Sarkar (1997)	Stanley, Sarkar e Mellado (2002)	Ribault, Sarkar e Stanley (1999)	Dai, Kobayashi e Taniguchi (1994)	Presente trabalho
Re_d	6.000	3.000	3.000	6.000	2.970
Lx/d	48	15	12	40	625
Ly/d	20	16	15	40	-
Lz/d	-	4,3	4	2	20
$\Delta x/d$ mín.	0,16	0,033	0,1	0,1	12,5
$\Delta y/d$ mín.	0,06	0,033	0,066666	0,04	-
$\Delta z/d$ mín.	-	0,033	0,25	0,2	0,125
Nº de pontos em x	244	390	61	196	51
Nº de pontos em y	317	390	105	156	-
Nº de pontos em z	-	130	16	10	161

4.4.1 Simulações adicionais

Além das simulações mostradas na tabela 4.1, foram realizadas três simulações adicionais: *testvisc*, *testdomi* e *simjextr*. Estas simulações serviram para complementar a análise do modelo, conforme descrito a seguir.

A simulação denominada *testvisc* foi realizada para demonstrar que a difusão gerada pelo modelo é resultante dos processos físicos descritos pelas equações de Navier-Stokes, e não de algum processo de difusão numérica. Esta simulação teve as mesmas configurações da simulação *simjato5*. Porém, na metade da simulação, após 7,5 segundos, o valor da viscosidade dinâmica foi substituído por $1,0E - 10$, ou seja, a viscosidade foi aproximadamente zerada. Com isso, espera-se que o escoamento responda a alteração da viscosidade e se torne invíscido. Para evitar que ocorresse instabilidade no período invíscido, utilizou-se um perfil de velocidade triangular na entrada do jato, ao invés do perfil trapezoidal da simulação *simjato5*. Desta maneira, evitou-se que o gradiente de velocidade fosse muito acentuado, e assim, a simulação se instabilizasse devido ao critério de estabilidade mostrado na equação 3.17.

A simulação *testdomi* serviu para verificar se as fronteiras superior e inferior das simulações *simjato1* à *simjato8* estão suficientemente afastadas do centro do jato, de modo a não influenciar significativamente nos resultados. Esta simulação teve as mesmas configurações utilizadas na simulação *simjato5*, porém, com a espessura do domínio 30 % maior, ou seja, com $Lz = 0,208$ m. Se as diferenças entre as velocidades no jato obtidos com as simulações *simjato5* e *testdomi* forem pequenas, a conclusão será que os resultados não estão sendo influenciados pela presença das fronteiras superior e inferior.

A última simulação adicional, denominada *simjextr*, foi realizada para complementar a análise do GCI. Essa simulação foi configurada com um espaçamento de grade intermediário aos das simulações *simjato1* (grade fina) e *simjato5* (grade grossa), ou seja, a razão entre o espaçamento de grade da *simjato1* e da *simjextr*, assim como da *simjextr* e da

simjato5, foi de $\sqrt{2}$. Esta simulação foi feita com o intuito de verificar se o erro cometido pelo modelo tende a diminuir com o refinamento da grade, e também, para calcular a ordem aparente do modelo, que será descrita na seção 5.2.

5 Resultados

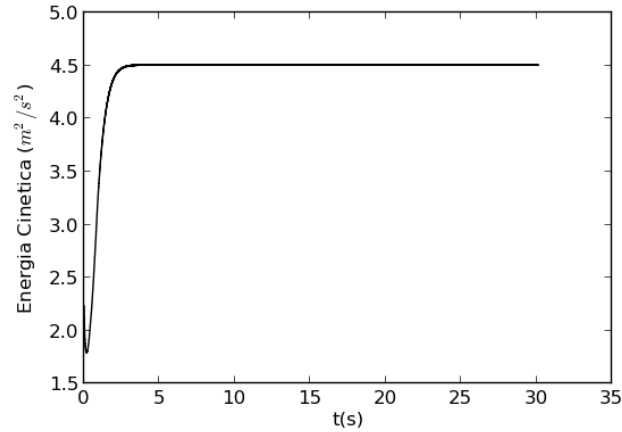
Neste capítulo, os resultados serão apresentados da seguinte forma. Na seção 5.1, serão mostrados os gráficos das evoluções temporais da energia cinética e da vorticidade, as máximas diferenças relativas obtidas ao longo das séries temporais, e a comparação entre as simulações *testdomi* e *simjato5*. Também serão mostrados os resultados da simulação *testvisc*. Na seção 5.2 será mostrada a análise do erro cometido pelas simulações, estimado através do método GCI - *Grid Convergence Index*. Na seção 5.3 as propriedades de auto-preservação dos resultados serão verificadas. Na seção 5.4, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos através das médias, como os perfis verticais de u , w e p , e os perfis normalizados de u . E finalmente, na seção 5.5, serão apresentados os gráficos das flutuações e os espectros de energia obtidos.

5.1 Evolução temporal da energia cinética e da vorticidade, e avaliação da espessura do domínio

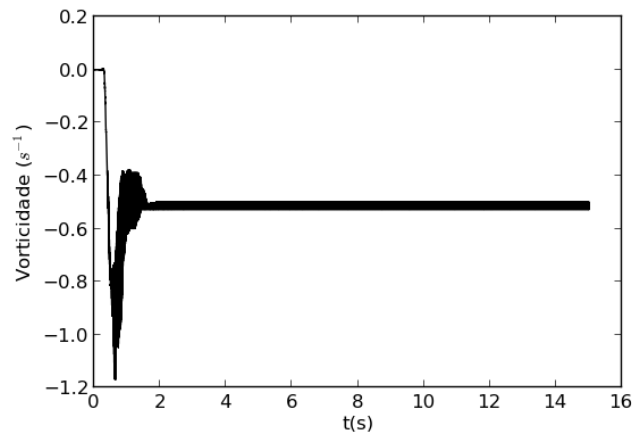
Partindo-se do primeiro passo de tempo, espera-se que a velocidade horizontal aumente rapidamente, até que a simulação atinja um estado estatisticamente estacionário. Para verificar que as simulações atingiram este estado, calculou-se a máxima diferença relativa ϵ_{max} no período em que foram armazenadas as séries temporais e calculadas as médias, como descrito anteriormente na seção 4.4.

Para a simulação *simjato1*, encontraram-se os seguintes valores de ϵ_{max} , respectivamente, nos pontos A, B e C: $4,94E - 04\%$, $1,74E - 03\%$ e $3,63E - 03\%$. Para a simulação

simjato2, encontraram-se os seguintes valores: $2,0E - 05\%$, $2,31E - 04\%$, $1,55E - 04\%$. Para a simulação *simjato3*, encontraram-se os seguintes valores: $2,839\%$, $2,132\%$, $2,817\%$. Para a simulação *simjato4*, encontraram-se os seguintes valores: $0,0212\%$, $0,0213\%$, $0,0215\%$. Com base nestes resultados, pode-se afirmar que a série obtida é estatisticamente estacionária.



(a) Evolução temporal da energia cinética média no domínio para o experimento *simjato1*.



(b) Evolução temporal da vorticidade média no domínio para o experimento *simjato3*.

Figura 5.1: Evolução temporal da energia cinética e da vorticidade.

Para exemplificar a evolução temporal das simulações, a figura 5.1(a) mostra a evolução da energia cinética média no domínio para a simulação *simjato1*, e a figura 5.1(b) mostra a evolução da vorticidade média no domínio para a simulação *simjato3*. Observa-se que houve tempo suficiente para que as simulações se estabilizassem. Destaca-se também

a estabilidade numérica do modelo, sendo este capaz de simular um longo período de tempo sem que houvesse instabilização das simulações. A evolução temporal da energia cinética e da vorticidade para as demais simulações foram semelhantes a estas.

A figura 5.2 mostra a evolução temporal da energia cinética média e da vorticidade no centro do domínio para a simulação *testvisc*. Observa-se que o modelo respondeu à alteração na viscosidade como esperado, ou seja, após anulado o termo de viscosidade, e mantendo-se todas as demais configurações da simulação inalteradas, a vorticidade e a energia cinética retornaram a estado inicial, e o escoamento se tornou aproximadamente invíscido. Isso mostra a resposta física que o modelo dá à viscosidade, ou seja, a difusão de quantidade de movimento observada deve-se ao efeito físico da turbulência, e não é resultante simplesmente da difusão numérica do Método Semi-Lagrangiano.

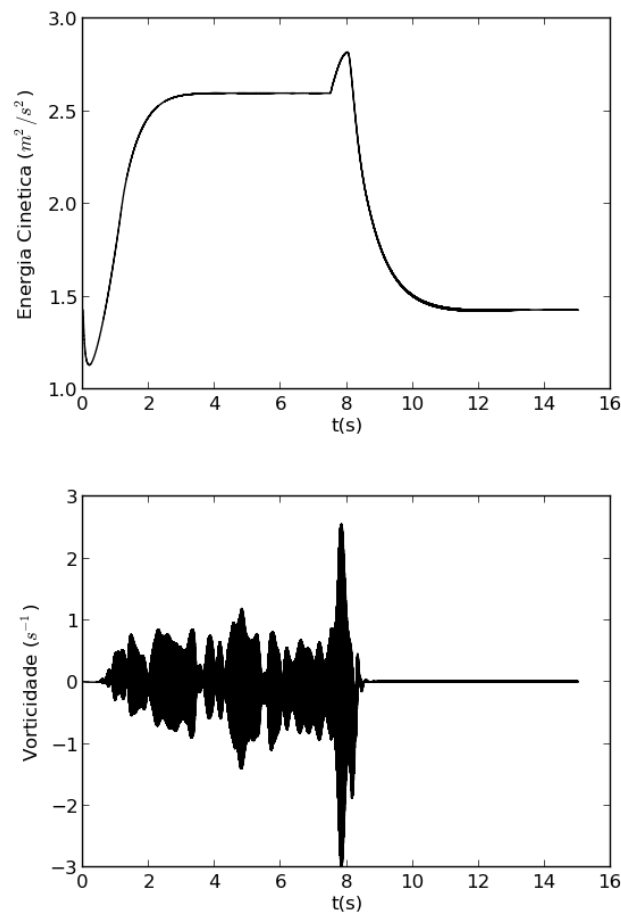


Figura 5.2: Evolução temporal da energia cinética média e da vorticidade no centro do domínio para o experimento *testvisc*.

A tabela 5.1 mostra o erro relativo obtido entre as simulações *simjato5* e *testdomi* no centro do jato, para $x = 1,0$ m, $x = 2,4$ m e $x = 3,6$ m (pontos A, B e C da tabela 4.2). O erro relativo foi calculado com o objetivo de demonstrar que a espessura L_z do domínio é suficientemente grande para que a presença das fronteiras superior e inferior não influencie os resultados.

Observa-se que o maior erro relativo obtido foi de 0,13% em $x = 3,6$ m, e o menor, de 0,08% em $x = 1,0$ m. Isso mostra que ambos os resultados são muito próximos, mesmo a simulação *testdomi* tendo um domínio 30% maior do que o a *simjato5*. Isso mostra que a presença das fronteiras superior e inferior não influenciam significativamente nos resultados.

Tabela 5.1: Erro relativo entre as simulações *simjato5* e *testdomi*.

x (m)	$u_{testdomi}$	$u_{simjato5}$	E_{rel} (%)
1,0	9,134	9,127	0,08
2,4	8,21	8,22	0,10
3,6	7,80	7,79	0,13

5.2 Análise de erro e ordem aparente

A estimativa de erro do modelo numérico foi realizada por meio do Índice de Convergência de Grade (GCI - *Grid Convergence Index*), como apresentado por Roache (1994). O GCI é utilizado para estimar o erro cometido em uma solução de grade fina f_1 , comparando esta solução com uma de grade grossa f_2 . O erro é estimado através da equação 5.1:

$$E_{GCI} = F_s \left| \frac{f_2 - f_1}{1 - r^p} \right| \quad (5.1)$$

onde r é a razão entre os espaçamentos da grade grossa e da grade fina, p é a ordem de acurácia formal do algoritmo, e F_s é um fator de segurança, cujo valor mais conservador

recomendado é $F_s = 3$. Neste trabalho, $r = 2$ e $p = 2$.

Além do erro calculado pelo GCI, também foi calculado o erro relativo através da equação 5.2.

$$E_{rel} = \left| \frac{f_2 - f_1}{f_1} \right| \quad (5.2)$$

A tabela 5.2 mostra os erros obtidos para a velocidade horizontal u em pontos localizados no centro do jato. Observa-se que, em geral, os erros aumentam com o número de Reynolds, e com o aumento da distância da saída do jato. Dentre os valores mostrados na tabela, o erro máximo cometido foi de 0,594 m/s, ou de 3,487%. Este valor foi encontrado em $x = 3,6$ m, na simulação *simjato4*, aquela com maior número de Reynolds. O menor erro cometido foi de 0,074 m/s, ou 0,958%, obtido em $x = 3,6$ m na simulação *simjato1*.

Tabela 5.2: Erros GCI e relativo calculados para a velocidade horizontal u no centro do jato.

Simulação	x (m)	u_1 (m/s)	u_2 (m/s)	E_{GCI} (m/s)	E_{rel} (%)
simjato1/simjato5	1,0	8,97	9,13	0,16	1,73
	2,4	8,04	8,22	0,18	2,21
	3,6	7,72	7,79	0,074	0,96
simjato2/simjato6	1,0	18,62	18,91	0,29	1,57
	2,4	16,84	17,37	0,52	3,10
	3,6	16,12	16,59	0,46	2,88
simjato3/simjato7	1,0	9,42	9,52	0,094	0,99
	2,4	8,58	8,80	0,22	2,58
	3,6	8,19	8,38	0,19	2,31
simjato4/simjato8	1,0	19,28	19,47	0,19	0,99
	2,4	17,78	18,34	0,56	3,13
	3,6	17,03	17,62	0,59	3,49

Entende-se que a acurácia da simulação da velocidade horizontal no centro do jato é a mais importante, pois este é o valor utilizado para normalizar o perfil de velocidade horizontal através da hipótese de similaridade mostrada na equação 3.1. Como pode-se observar na tabela 5.2, os erros encontrados no centro do jato foram muito pequenos.

Também é interessante avaliar as variações dos erros no domínio. As figuras 5.3 e 5.4 mostram, respectivamente, o perfil vertical do erro GCI obtido para as simulações *simjato1* e *simjato4*, em coordenadas normalizadas, juntamente com a velocidade horizontal normalizada da simulação de grade fina.

Observa-se nas figuras 5.3 e 5.4 que os menores erros foram cometidos na região central do jato, onde há um máximo local. Os maiores erros estão localizados próximos às bordas do jato, onde os valores absolutos de η estão em torno de 1,5. Isso mostra que o modelo mostrou maior imprecisão na representação da posição da região de transição entre o escoamento altamente turbulento, decorrente dos altos gradientes de velocidades presentes na região central do jato, e o escoamento laminar, com velocidades próximas à velocidade do meio. Os maiores erros foram cometidos na simulação *simjato4*, cujo valor encontrado na borda do jato ficou em torno de 1,0 m/s.

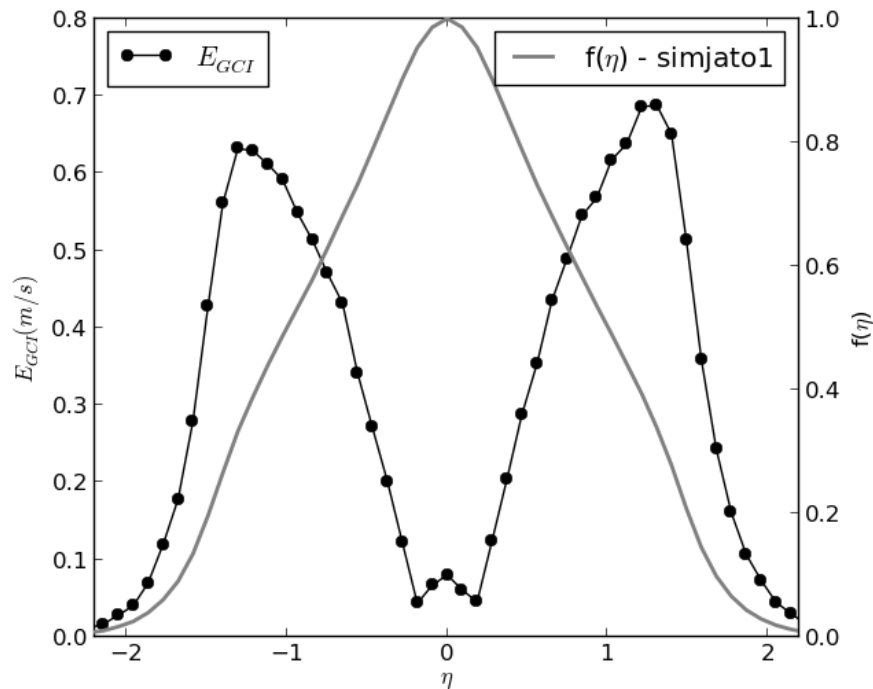


Figura 5.3: Perfil vertical do erro GCI da simulação *simjato1* em coordenadas normalizadas em $x = 4,5$ m, e a velocidade horizontal normalizada.

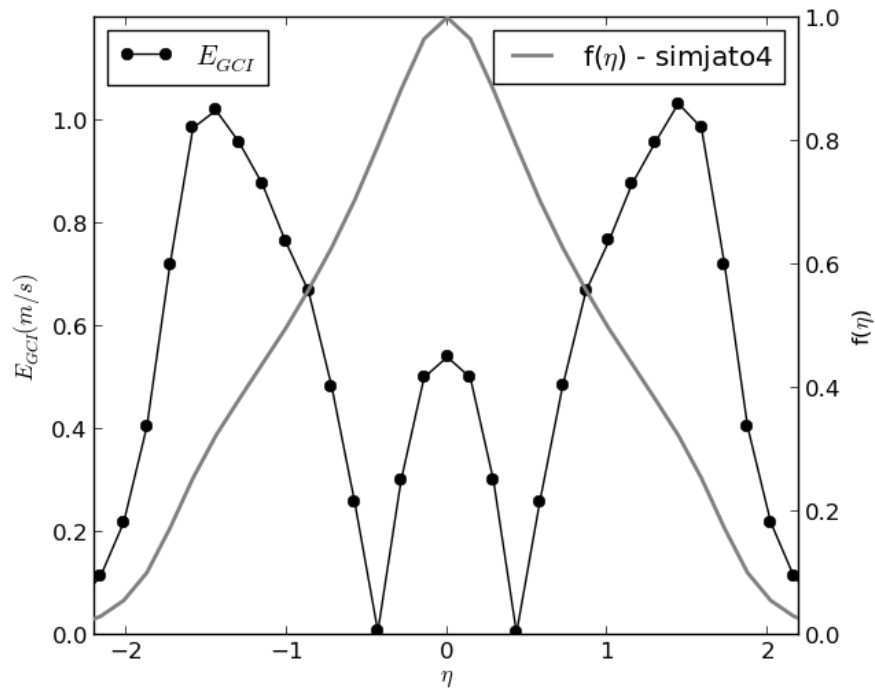


Figura 5.4: Perfil vertical do erro GCI para a simulação *simjato4* em coordenadas normalizadas em $x = 4,5$ m, e a velocidade horizontal normalizada.

As figuras 5.5 e 5.6 mostram o erro GCI no centro do jato ao longo da coordenada x , para as simulações *simjato1* e *simjato4* respectivamente. Observa-se que os erros na simulação *simjato1* no centro do jato inicialmente aumentam com x , chegando a 0,21 m/s, e depois, começam a diminuir. Já na simulação *simjato4*, o erro aumenta com x até que se estabiliza em cerca de 0,55 m/s, como mostrado na figura 5.6.

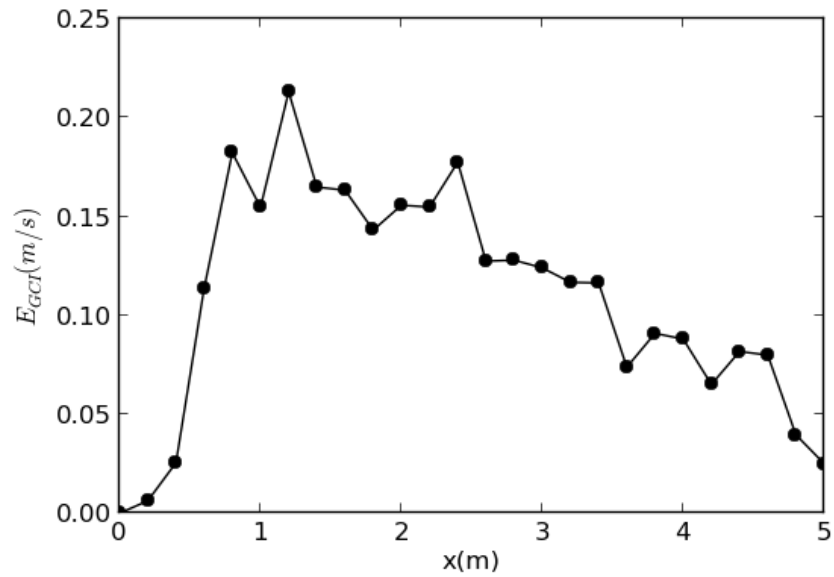


Figura 5.5: Perfil longitudinal do erro GCI no centro do jato para a simulação *simjato1*.

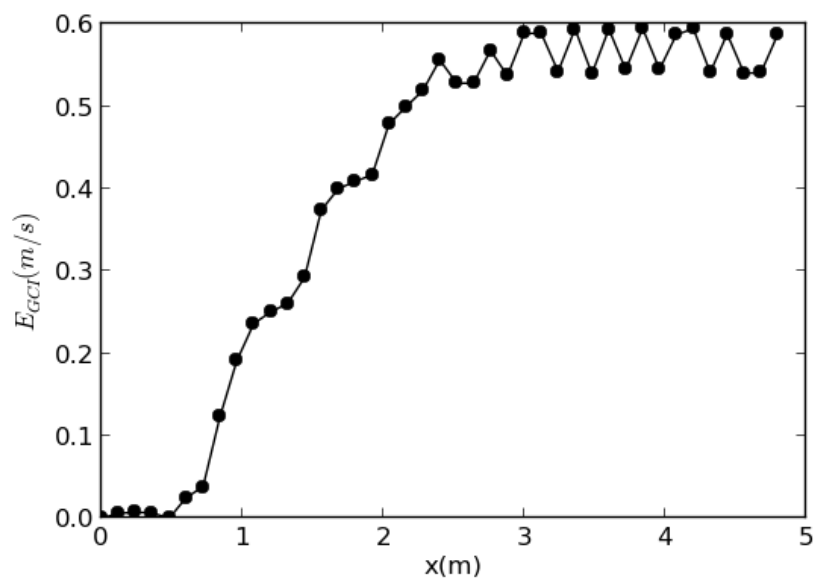


Figura 5.6: Perfil longitudinal do erro GCI no centro do jato para a simulação *simjato4*.

A fim de verificar se o erro cometido diminui com o refinamento da grade, foram calculados e comparados os erros *GCI* obtidos entre as simulações *simjato1* e *simjextr* (grade fina e grade intermediária, respectivamente), e *simjextr* e *simjato5* (grade intermediária e grade grossa, respectivamente). Os erros foram calculados para a velocidade horizontal no centro do jato, em $x = 2,4$ m, $x = 3,4$ m e $x = 4,8$ m, onde os pontos de grade das três simulações coincidem. A tabela 5.3 mostra os valores obtidos, onde u_1 refere-se a *simjato1*, u_2 a *simjextr* e u_3 a *simjato5*.

Tabela 5.3: Erro GCI calculado para a velocidade horizontal u no centro do jato, entre as simulações de grade fina, intermediária e grossa.

x	u_1 (m/s)	u_2 (m/s)	u_3 (m/s)	E_{12} (m/s)	E_{23} (m/s)
2,4	8,04	8,12	8,22	0,23	0,30
3,4	7,75	7,80	7,87	0,14	0,21
4,8	7,50	7,51	7,54	0,04	0,08

Observa-se que o erro calculado entre as simulações *simjato1* e *simjextr* (E_{12}) foi menor que o erro calculado entre *simjextr* e *simjato5* (E_{23}), o que indica que o erro tende a diminuir com o refinamento da grade. Além disso, observa-se que, assim como o mostrado na tabela 5.2, quanto mais afastado da inserção do jato, menor o erro obtido.

Embora seja possível definir teoricamente a ordem do erro de discretização de um esquema numérico, pode ser desejável calcular a ordem do erro para um problema em específico a fim de se verificar o código. A ordem do erro obtido pode diferir da ordem teórica (ou formal) por uma variedade de razões (por exemplo, o alcance da zona assintótica) (ROACHE, 1994). Como citado anteriormente, o erro de discretização teórico do esquema numérico utilizado no presente trabalho é de segunda ordem.

Para calcular a ordem aparente p , é preciso obter pelo menos três simulações, cada uma obtida com uma grade fina, uma grade intermediária, e uma grade grossa. Usando razões entre os espaçamentos de grade r constantes, a ordem aparente pode ser calculada da seguinte maneira (ROACHE, 1994):

$$p = \ln \left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1} \right) / \ln(r) \quad (5.3)$$

onde r é a razão entre os espaçamentos de grade (neste caso, $\sqrt{2}$), e f_1 , f_2 e f_3 são, respectivamente, os resultados da grade fina, intermediária e grossa. A ordem aparente foi calculada utilizando como soluções de grades fina, intermediária e grossa, respectivamente, as simulações *simjato1*, *simjextr* e *simjato5*.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 5.4. Observa-se que a ordem aparente tende a aumentar com o afastamento da inserção do jato, chegando a 2,17 no ponto mais afastado.

Tabela 5.4: Ordem aparente calculada.

x	u_1 (m/s)	u_2 (m/s)	u_3 (m/s)	p
2,4	8,04	8,12	8,22	0,84
3,4	7,75	7,80	7,87	1,03
4,8	7,50	7,51	7,54	2,17

5.3 Verificação das propriedades de auto-preservação do escoamento

Na seção 3.1, foi citado que os escoamentos auto-similares e auto-preservantes possuem as propriedades mostradas nas equações 3.2, 3.3 e 3.4. Nesta seção, será verificada a ocorrência destas propriedades nos resultados obtidos pelos experimentos numéricos.

Como citado anteriormente, as simulações aqui mostradas foram realizadas considerando a hipótese bidimensional. Por esse motivo, não é esperada concordância plena entre os resultados obtidos e as propriedades de auto-preservação, já que estas foram obtidas a partir de experimentos com escoamentos tridimensionais. Entretanto, é esperado que algumas características da turbulência sejam bem representadas.

A figura 5.7 mostra o perfil longitudinal de $U_c^2 \delta$, onde U_c é a velocidade no centro do

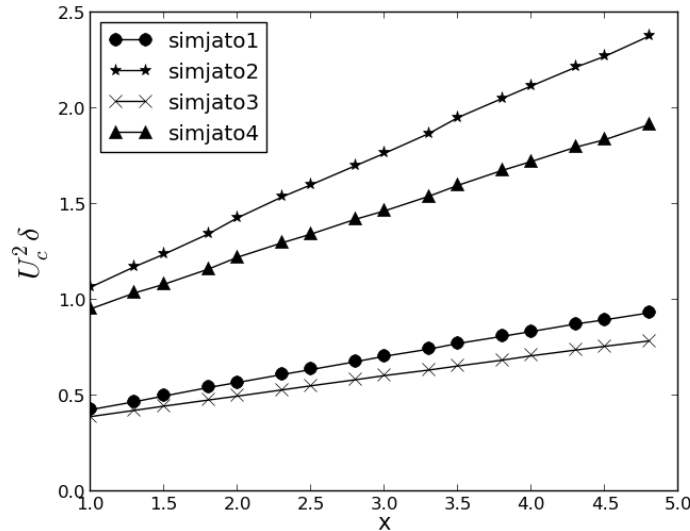


Figura 5.7: Perfil longitudinal $U_c^2 \delta$ (equação 3.2).

jato, e δ é a metade da espessura do jato onde $U = U_c/2$. De acordo com a propriedade mostrada na equação 3.2, o valor de $U_c^2 \delta$ deve ser constante ao longo da coordenada x . Observa-se que, embora os valores obtidos não sejam rigorosamente constantes, as inclinações das retas obtidas são pequenas. A simulação *simjato3* obteve uma curva com inclinação 0,1039, a menor dentre todas. A maior inclinação foi obtida na simulação *simjato2*, cujo valor obtido foi 0,3449.

A propriedade mostrada na equação 3.3 diz que δ é linearmente proporcional à coordenada x . A figura 5.8 mostra o perfil longitudinal de δ . As retas obtidas mostram que esta propriedade pôde ser observada em todas as simulações.

A figura 5.9 mostra a variação de U_c com $x^{-1/2}$. De acordo com a propriedade mostrada na equação 3.4, U_c é linearmente proporcional a $x^{-1/2}$. Já que, neste gráfico, o eixo das abscissas contém valores de x elevado a uma potência negativa, o sentido crescente do eixo das abscissas representa o sentido decrescente do eixo x do domínio de simulação. Observa-se uma variação aproximadamente linear para $x^{-1/2} < 0,7453$, o que equivale ao intervalo $x > 1,8$ m. Isso mostra que a auto-preservação pôde ser observada nesta região, que encontra-se suficientemente afastada da saída do jato.

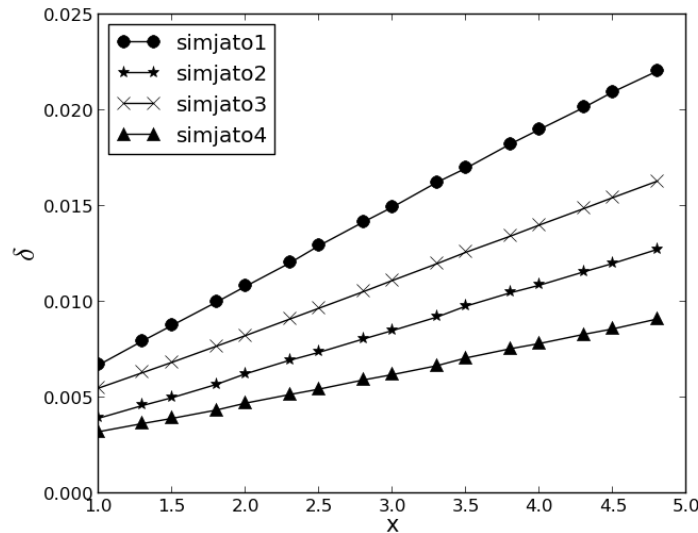


Figura 5.8: Perfil longitudinal de δ (equação 3.3).

Deve-se ressaltar que a equação 3.4 é resultado da combinação das equações 3.2 e 3.3. Com isso, pode-se afirmar que os resultados mostrados na figura 5.9 também validam as propriedades dadas pelas equações 3.2 e 3.3.

De acordo com estudos experimentais, o jato passa a ser auto-preservante em $x/d > 30$ ou $x/d > 40$ (BRADBURY, 1965; GUTMARK; WYGNANSKI, 1976). As regiões de auto-preservação obtidas no presente estudo foram de $x/d > 225$ ou $x/d > 360$ (lembrando que $d = 0,008$ m nas simulações *simjato1* e *simjato3*, e $d = 0,005$ m nas simulações *simjato2* e *simjato4*). Estes valores são uma ordem de grandeza maiores do que os obtidos pelos experimentos físicos publicados na literatura. Entretanto, deve-se levar em consideração o fato do modelo utilizado neste trabalho ser bidimensional. Desta maneira, a turbulência simulada é muito mais fraca do que a real, que é tridimensional, principalmente pela impossibilidade que o modelo bidimensional tem de simular o termo de esticamento dos vórtices (*stretching*). Com isso, é esperado que, no modelo, seja necessária uma distância muito maior para que o escoamento se torne auto-preservante. Embora a distâncias maiores, pode-se afirmar que as propriedades de auto-preservação e auto-similaridade foram reproduzidas adequadamente pelo modelo, como esperado.

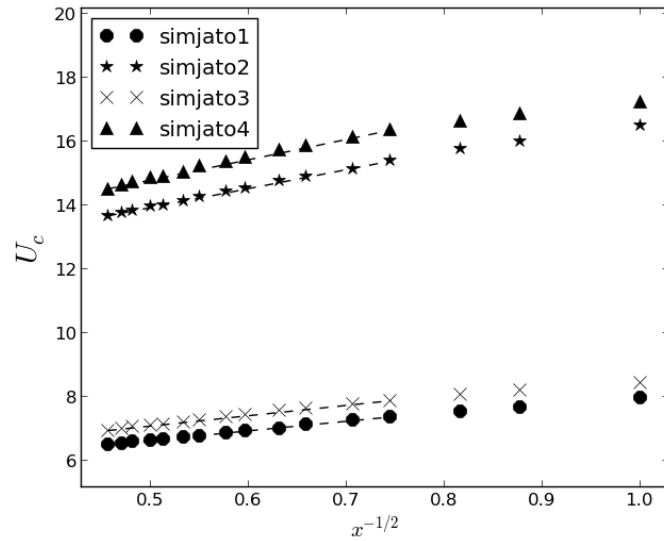


Figura 5.9: Variação de U_c com $x^{-1/2}$ (equação 3.4).

5.4 Perfis e contornos médios

As figuras 5.10, 5.11 e 5.12 mostram, respectivamente, os perfis verticais das velocidades horizontal, vertical, e da pressão de todas as simulações, tanto de grade fina quanto de grade grossa.

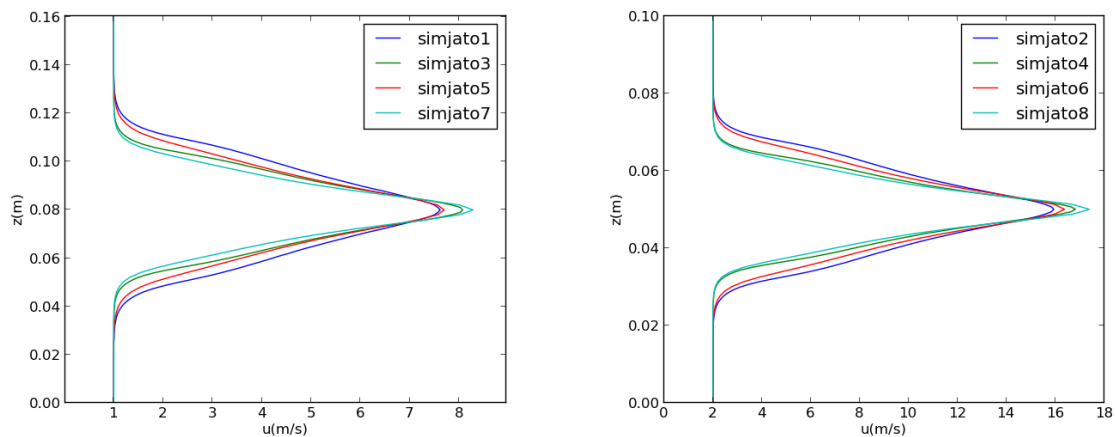


Figura 5.10: Perfis verticais da velocidade horizontal u em $x = 4m$.

Comparando-se os perfis de velocidade horizontal u das simulações *simjato1* com *simjato3*, e *simjato2* com *simjato4* (figura 5.10), pode-se observar que o jato diminuiu de espessura com o aumento do número de Reynolds. Também observa-se que a espessura

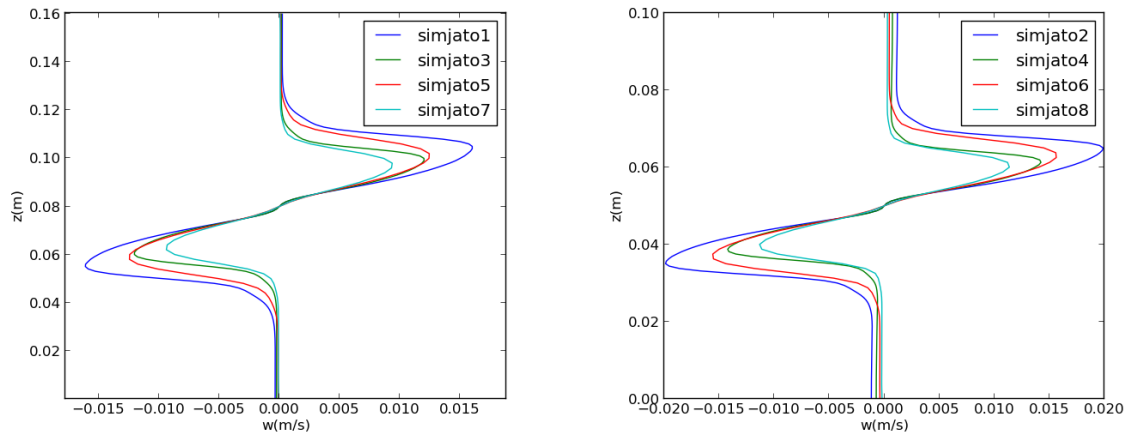


Figura 5.11: Perfis verticais da velocidade vertical w em $x = 4m$.

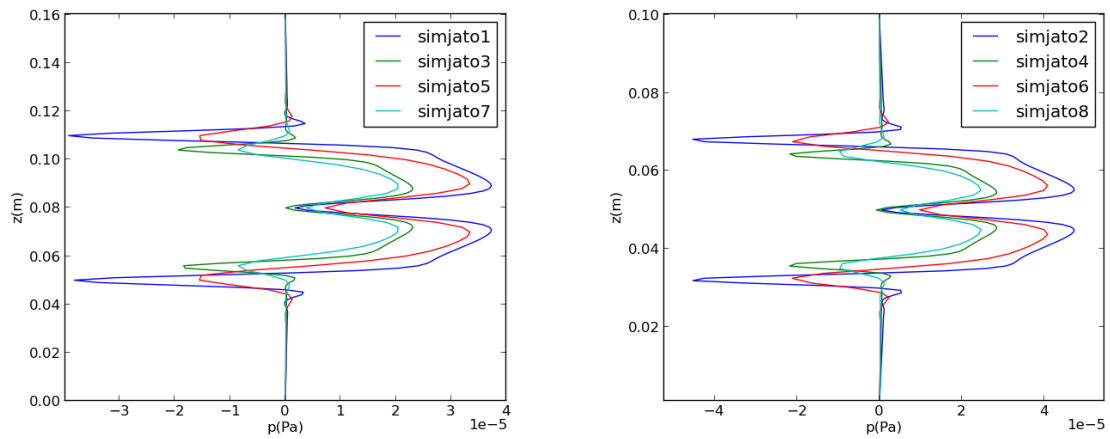


Figura 5.12: Perfis verticais da pressão p em $x = 4m$.

do jato foi menor para as simulações de grade grossa.

Os perfis de velocidade vertical w (figura 5.11) mostram uma estrutura simétrica: acima do centro do jato, a velocidade vertical teve valores positivos; abaixo, a velocidade vertical teve valores negativos. Isso mostrou que o escoamento seguiu no sentido de afastamento do centro do jato. As velocidades verticais foram maiores em módulo para simulações com número Reynolds menores, e para as grades mais finas.

Observa-se que ocorreu também uma estrutura simétrica em relação ao centro do jato nos perfis de pressão (figura 5.12). No centro do jato a pressão foi menor, aproximando-se de zero. Ao se afastar do centro, a pressão aumentou, e logo em seguida voltou a diminuir.

Essa estrutura explica o surgimento dos valores negativos de w abaixo do centro do jato, e positivos acima do centro do jato, já que o movimento tende a seguir no sentido contrário ao do gradiente da pressão. O aumento no número de Reynolds se refletiu na diminuição da amplitude de variação de pressão média ao longo da direção do perfil. As grades mais grossas também mostraram menores valores absolutos de pressão.

A figura 5.13 mostra as isolinhas de velocidade da simulação *simjato1*, no plano $x-z$. Nessa figura, é possível visualizar o aumento da espessura do jato ao longo da coordenada x .

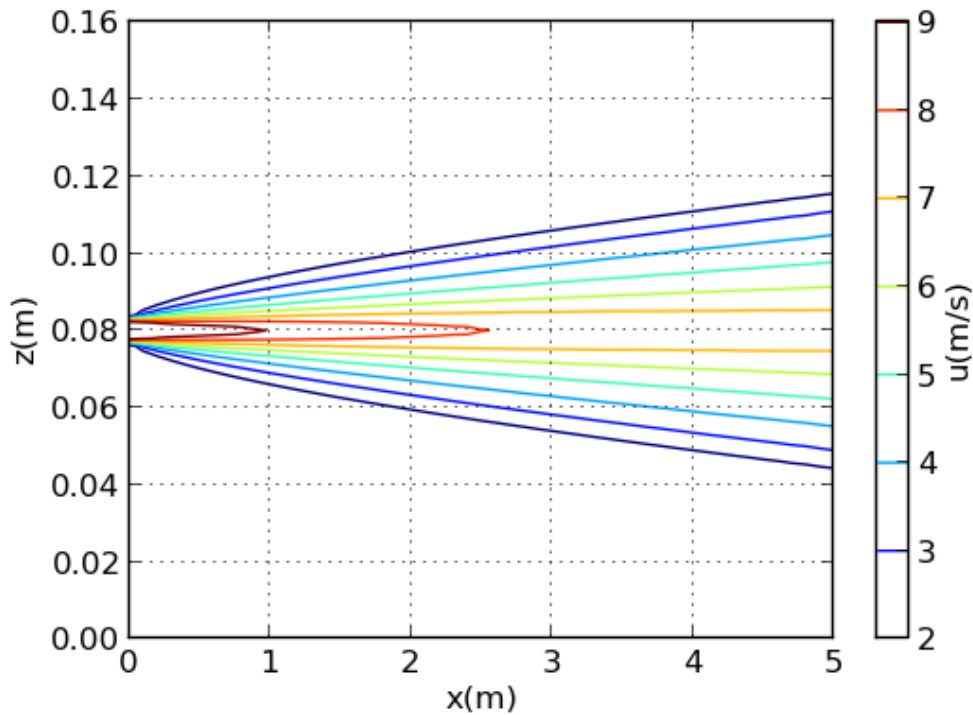


Figura 5.13: Isolinhas de velocidade horizontal u da simulação *simjato1*.

As figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 mostram a evolução do perfil de velocidade normalizado pela hipótese de similaridade 3.1 ao longo da coordenada horizontal, respectivamente para as simulações *simjato1*, *simjato2*, *simjato3* e *simjato4*. Pode-se observar que os perfis tenderam ao perfil de Bradbury (1965) ao longo do eixo x . Isso indica que os escoamentos tenderam a se aproximar da condição de auto-similaridade e auto-preservação ao longo deste eixo, como prevê a teoria.

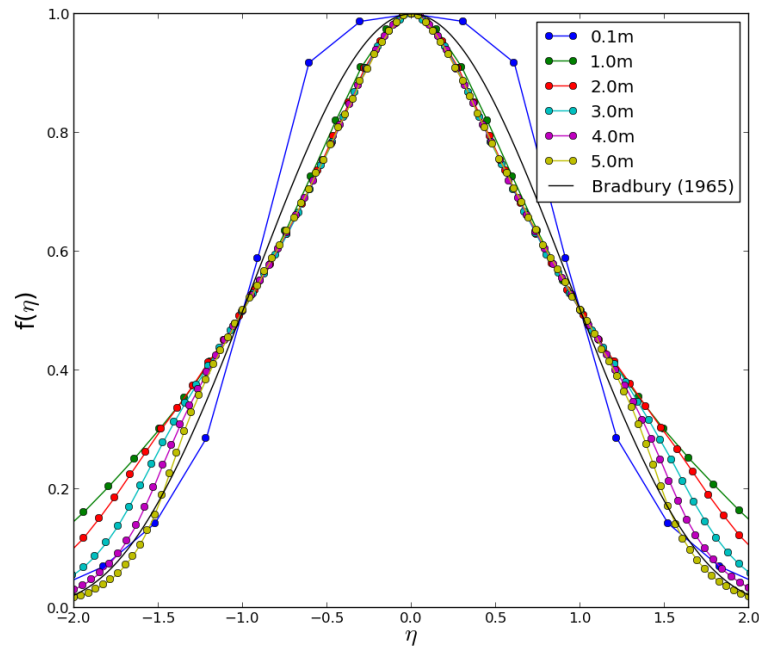


Figura 5.14: Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da *simjato1*

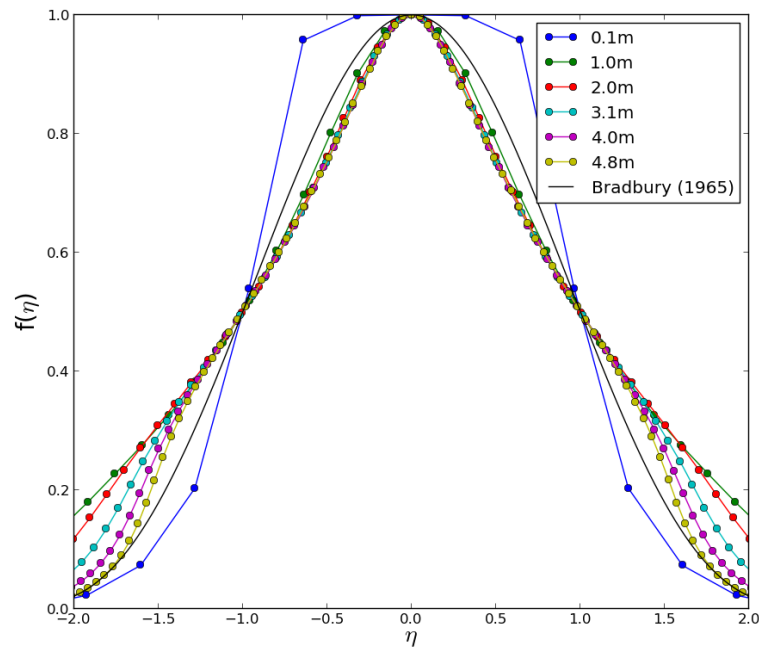


Figura 5.15: Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da *simjato2*

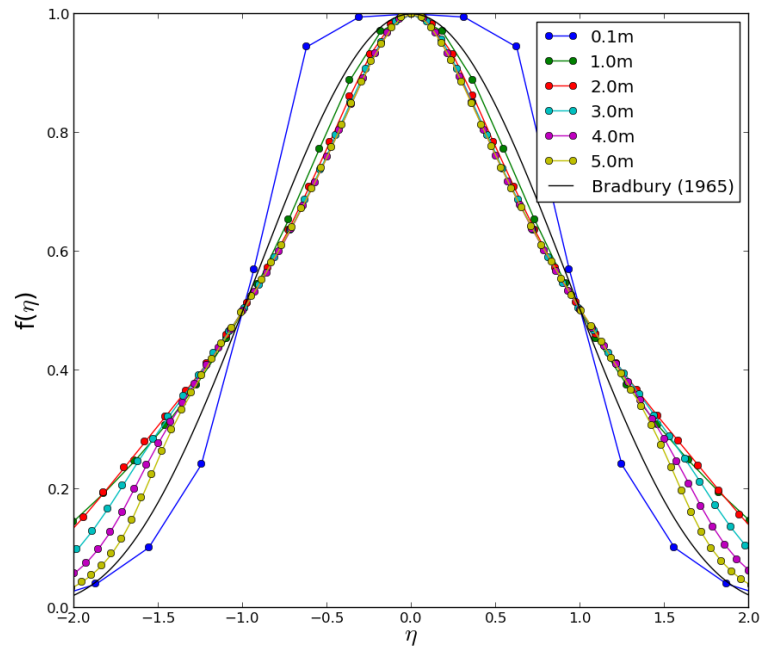


Figura 5.16: Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da *simjato3*

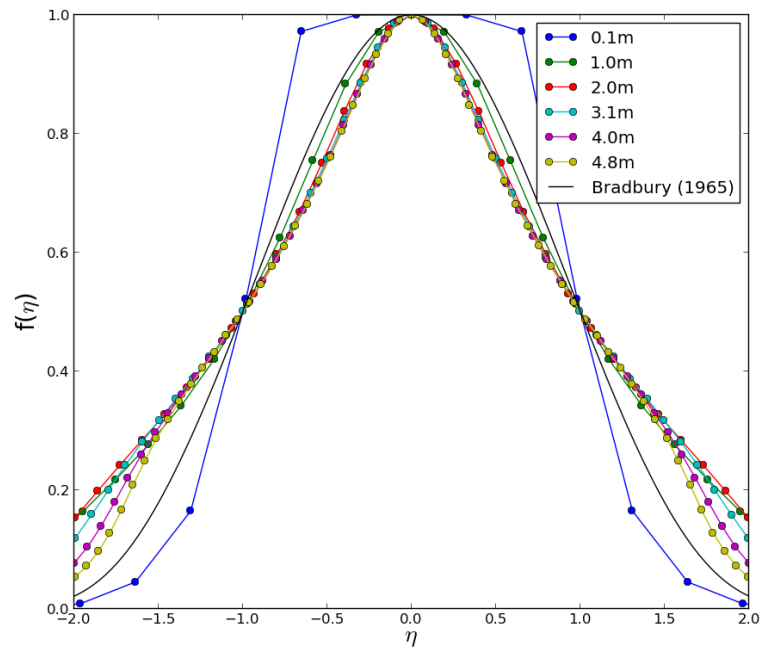


Figura 5.17: Evolução ao longo da coordenada x do perfil de velocidade normalizado da *simjato4*

A figura 5.18 mostra o perfil semi-empírico de Bradbury (1965), juntamente com os perfis normalizados obtidos pelas simulações *simjato1*, *simjato2*, *simjato3* e *simjato4* próximo ao final do domínio, em $x = 4,8m$, onde os escoamentos encontraram-se mais próximos da auto-similaridade. Observa-se que os perfis simulados, em geral, encontraram-se em conformidade com o perfil semi-empírico. A região central do jato, onde $-1,2 \leq \eta \leq 1,2$, é aquela na qual os perfis foram virtualmente coincidentes, e mais próximos à solução semi-empírica. Observa-se, entretanto, que a região mais afastada do centro do jato foi aquela onde os perfis estiveram mais afastados do perfil semi-empírico. Além disso, quanto maior foi o valor do número de Reynolds, mais afastados os perfis estiveram do perfil semi-empírico nesta região.

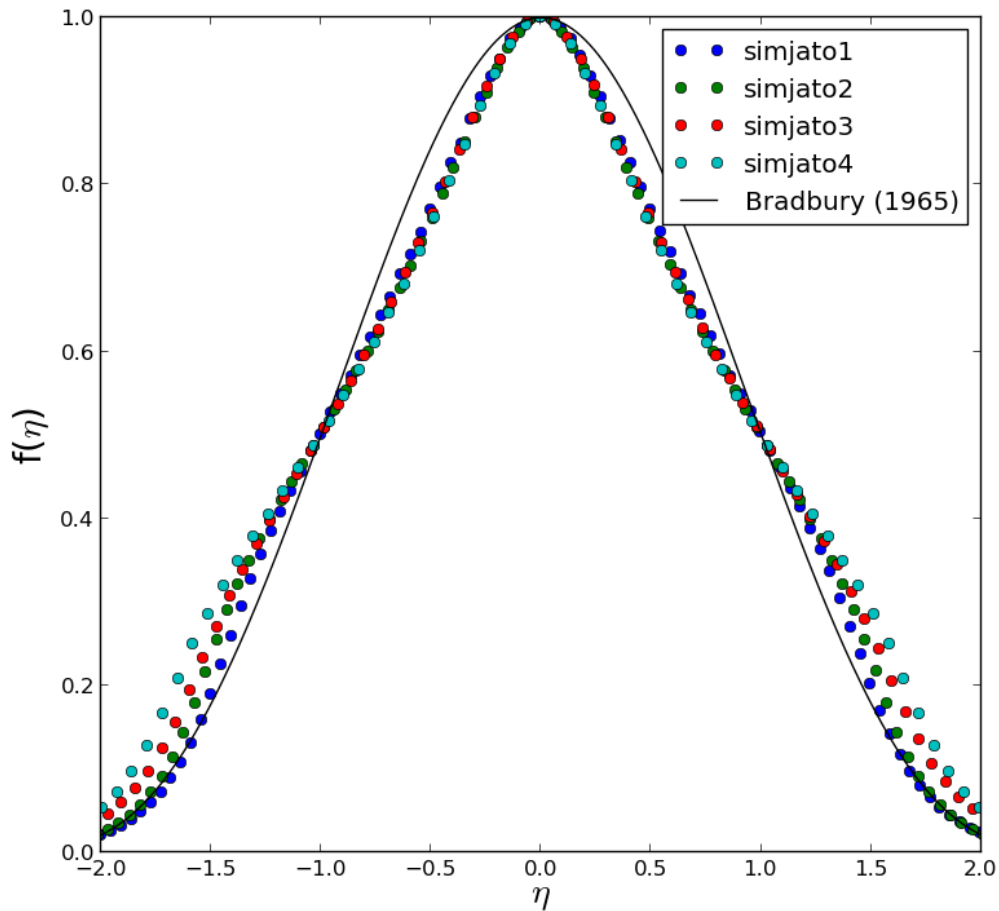


Figura 5.18: Comparação entre os perfis normalizados das simulações de grade fina em $x = 4,8m$ e o perfil semi-empírico de Bradbury (1965).

5.5 Séries temporais e espectros de energia

A figura 5.19 mostra a série temporal de u obtida pela simulação *simjato5*, e a figura 5.20, mostra a série temporal de w obtida pela simulação *simjato2*. Estas séries temporais foram obtidas no ponto B, o ponto central do domínio, e exemplificam o comportamento das demais simulações. Pode-se observar que ocorreram flutuações de alta frequência destas variáveis ao longo do tempo, o que indica que, apesar da existência do mecanismo de filtragem, as oscilações de menores escalas ainda são representadas.

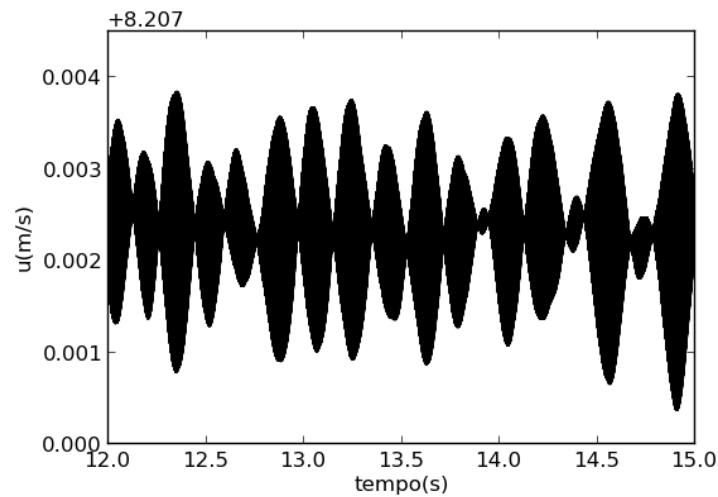


Figura 5.19: Série temporal da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *simjato5* no ponto B.

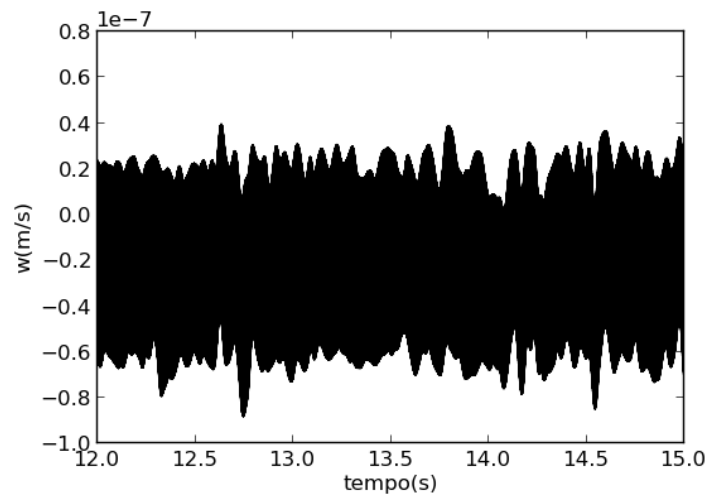
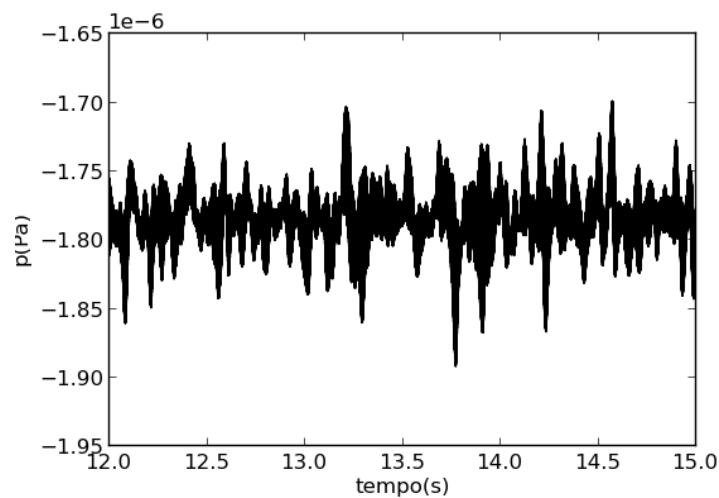
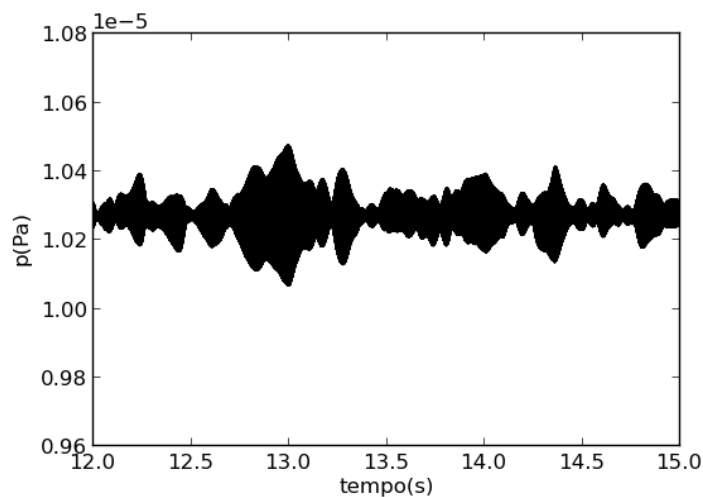


Figura 5.20: Serie temporal da velocidade horizontal w , obtido pela simulação *simjato2* no ponto B.

As figuras 5.21(a) e 5.21(b) mostram as séries temporais de pressão obtidas, respectivamente, pelas simulações *simjato2* e *simjato6*. A primeira, refere-se a uma simulação de grade fina, e a segunda, a sua respectiva simulação de grade grossa. Visualmente pode-se observar que a simulação de grade grossa apresentou um aspecto mais atenuado que a de grade fina, ou seja, não são visíveis variações temporais de frequência tão alta quanto as observadas na grade fina. Isso ilustra o efeito da filtragem, dado pela discretização do domínio.



(a) Grade fina.



(b) Grade grossa.

Figura 5.21: Séries temporais da pressão p obtidas pelas simulações *simjato2* (grade fina) e *simjato6* (grade grossa) no ponto B.

A partir das séries temporais, foram obtidos os espectros de energia. Para confeccionar

os gráficos a seguir, a série do espectro foi dividida em 50 trechos consecutivos e de igual duração, e posteriormente foi feita a média destes trechos.

A importância em se representar o espectro de energia adequadamente está no fato de que este representa o processo de transferência de energia no sentido das maiores para as menores escalas, também conhecido como cascata direta de energia, uma das principais características de escoamentos turbulentos. De acordo com Kraichnan (apud ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011), em turbulência bidimensional, o gráfico do espectro de energia em escala log-log apresenta duas diferentes inclinações: $-5/3$ na região representativa das grandes escalas; e -3 na sub-região inercial, ao contrário da inclinação típica de $-5/3$ na sub-região inercial obtida por Kolmogorov. A seguir serão apresentados todos os espectros de energia obtidos pelas simulações de grade fina. Para as simulações de grade grossa, serão apresentados apenas os espectros das simulações *simjato5* e *simjato6*

Da figura 5.22 a figura 5.27 são apresentados os espectros de energia de u , obtidos pelas simulações *simjato1* a *simjato5*, respectivamente. Observa-se nas figuras 5.22, 5.23, 5.24 e 5.25 que não foi possível obter o espectro de energia para as simulações de grade fina (*simjato1*, *simjato2*, *simjato3* e *simjato4*). Uma possível explicação para isso é o fato de se haver utilizado um espaçamento de grade na horizontal duas ordens de grandeza maior do que o espaçamento de grade na vertical. Entretanto, as figuras 5.26 e 5.33 mostram que as simulações de grade grossa simularam razoavelmente o espectro de energia, com inclinação aproximadamente -3 na sub-região inercial, como prevê a teoria. Não foi possível, entretanto, identificar a razão para que os resultados das simulações de grade grossa representassem melhor o espectro de energia da componente u da velocidade.

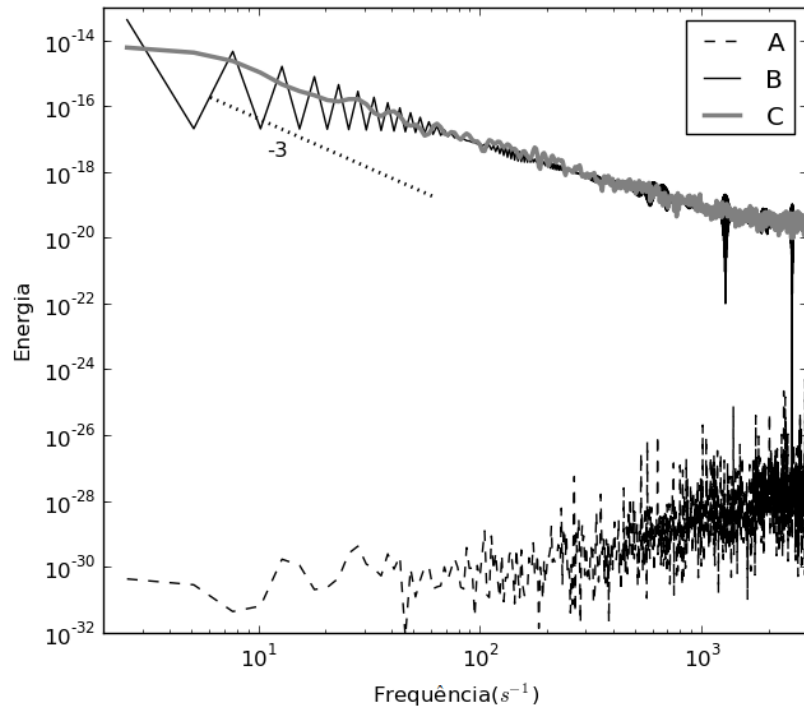


Figura 5.22: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato1*.

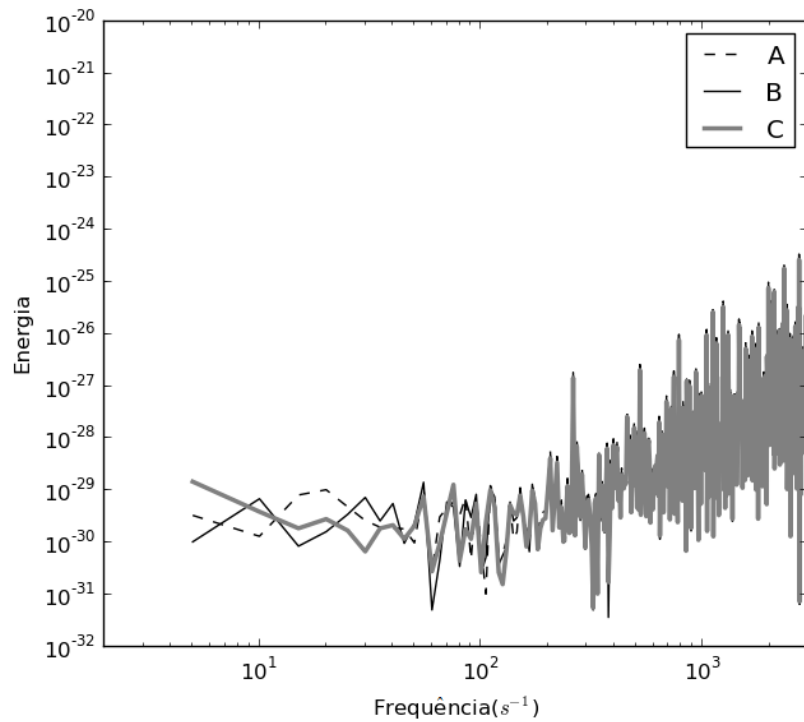


Figura 5.23: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato2*.

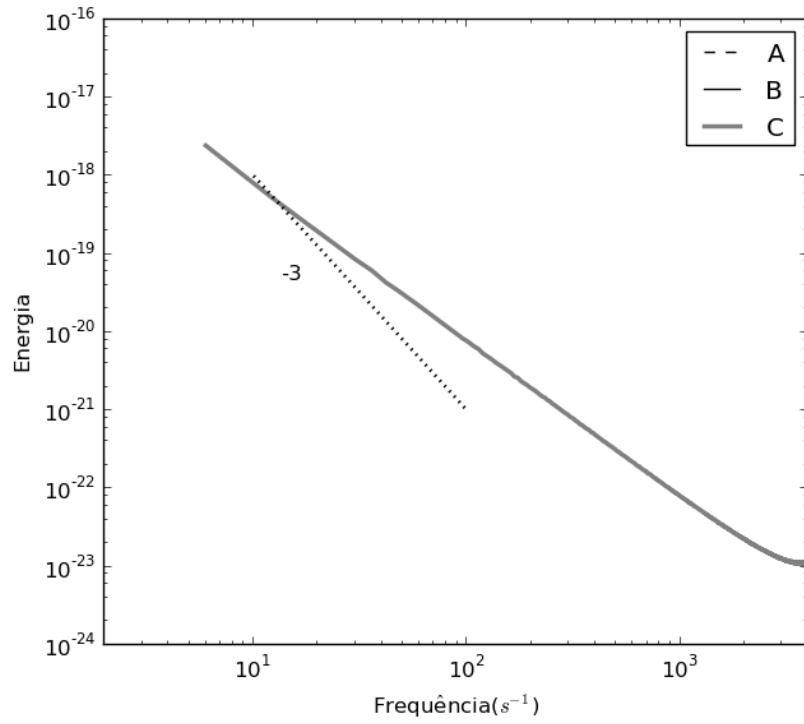


Figura 5.24: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato3*.

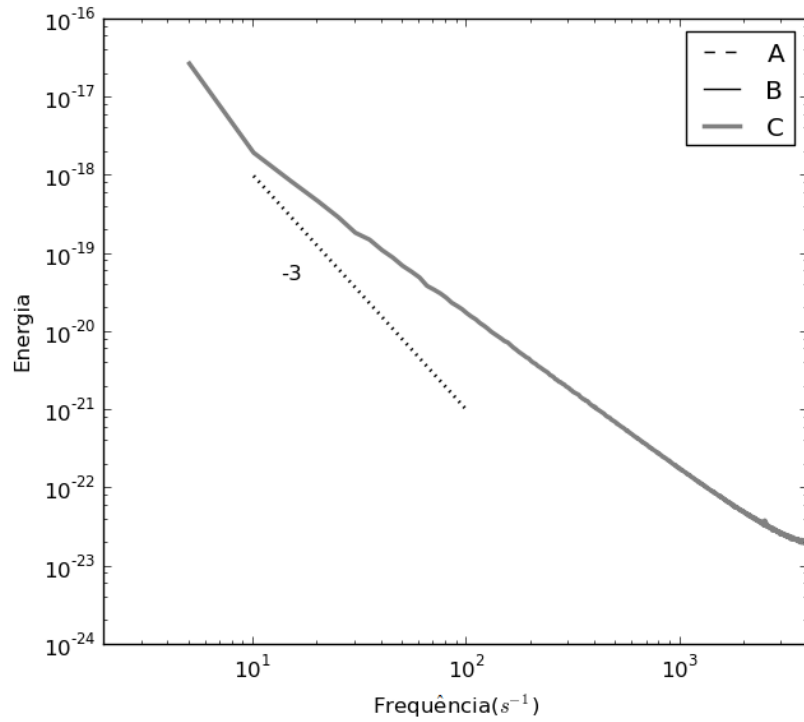


Figura 5.25: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato4*.

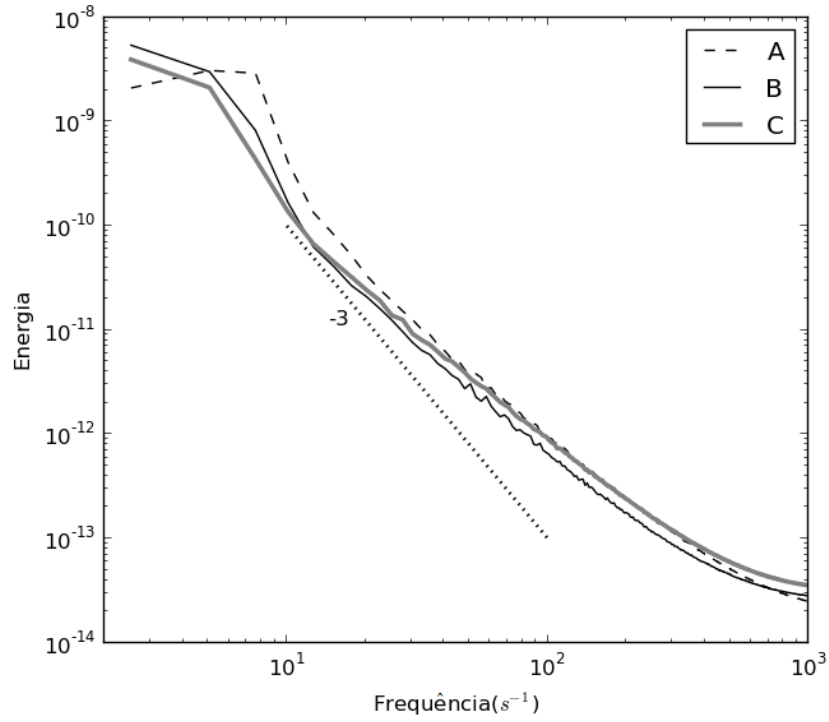


Figura 5.26: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato5*.

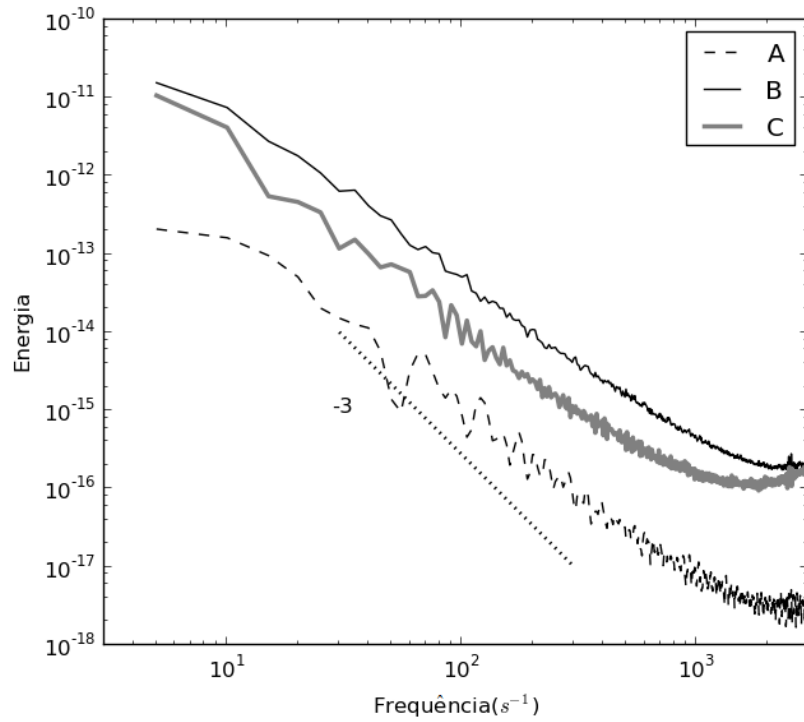


Figura 5.27: Espectro de energia da velocidade horizontal u , obtido pela simulação *sim-jato6*.

Os espectros de energia da componente w da velocidade obtidos são mostrados da figura 5.28 a figura 5.33. Observa-se que, em geral, os espectros foram reproduzidos com inclinação próxima a -3 , indicando a presença de uma sub-região inercial, onde há cascata direta de energia. As exceções foram os espectros obtidos pelas simulações *simjato3* e *simjato4*, mostrados respectivamente nas figuras 5.30 e 5.31. A discretização mais refinada utilizada na direção z pode ser uma explicação para que fossem obtidos melhores resultados para os espectros obtidos pela velocidade vertical.

Observa-se que as simulações de grade grossa também foram capazes de simular o espectro de energia. Comparando-se as simulações de grade fina (*simjato1* e *simjato2*, respectivamente nas figuras 5.28 e 5.29) com as correspondentes de grade grossa (*simjato5* e *simjato6*, respectivamente nas figuras 5.32 e 5.33), observa-se que as simulações de grade grossa obtiveram maiores energias que as de grade fina para a mesma frequência. No entanto, os espectros apresentam, de forma geral, aspectos semelhantes.

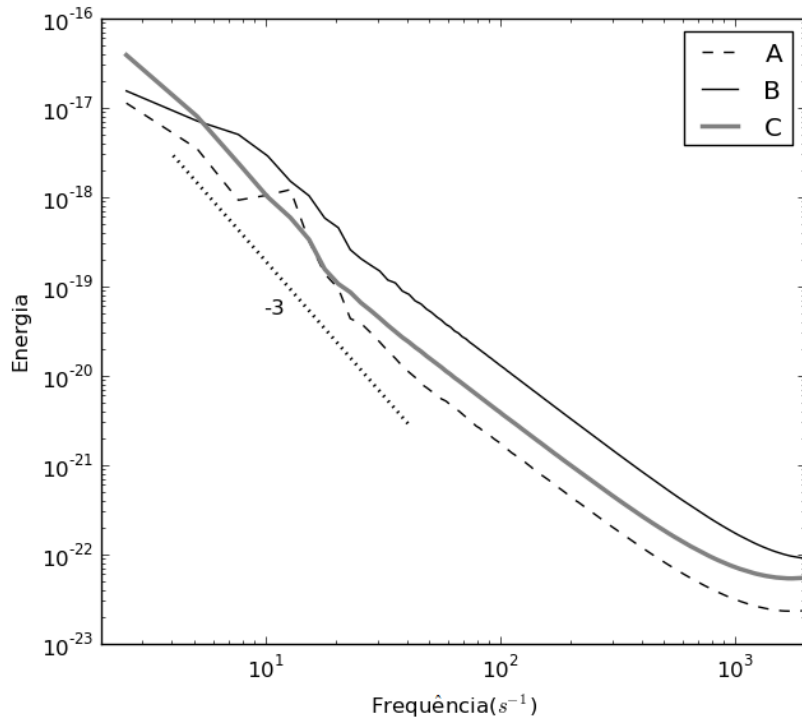


Figura 5.28: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato1*.

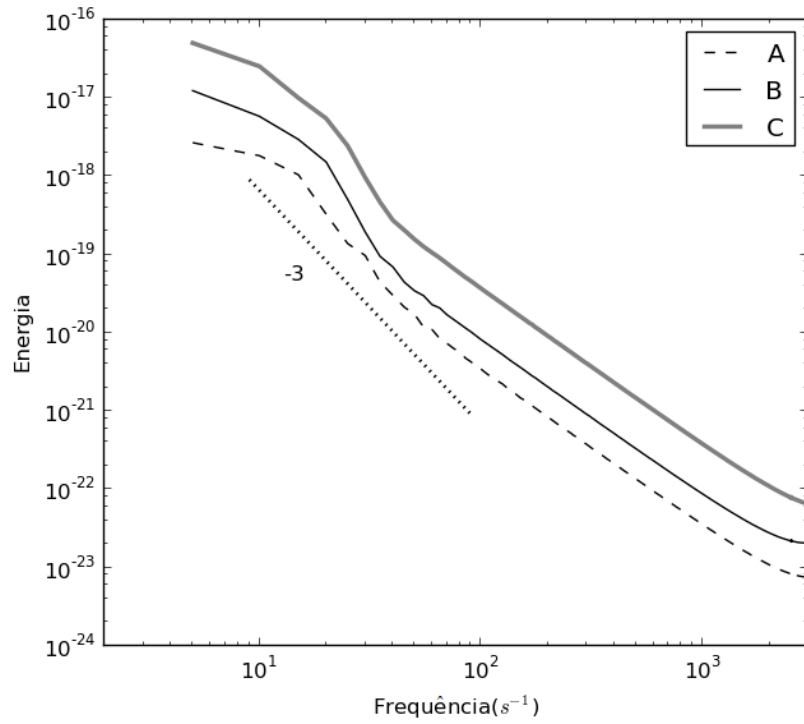


Figura 5.29: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato2*.

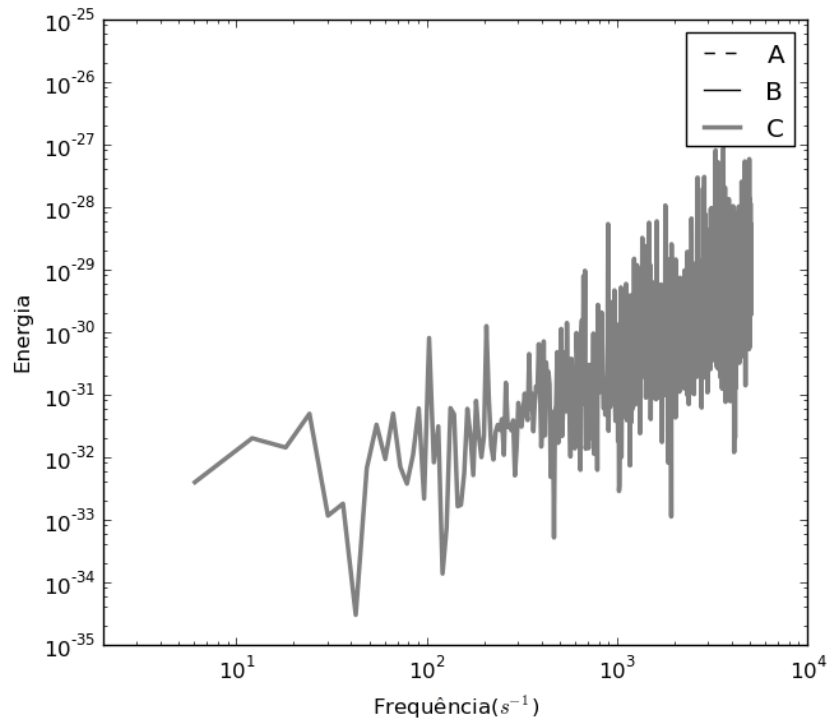


Figura 5.30: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato3*.

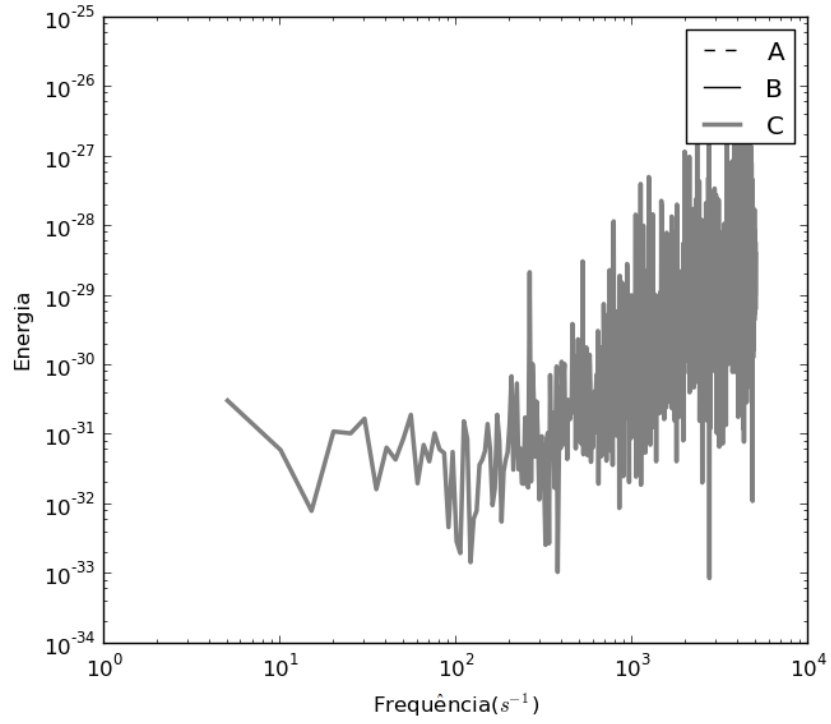


Figura 5.31: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato4*.

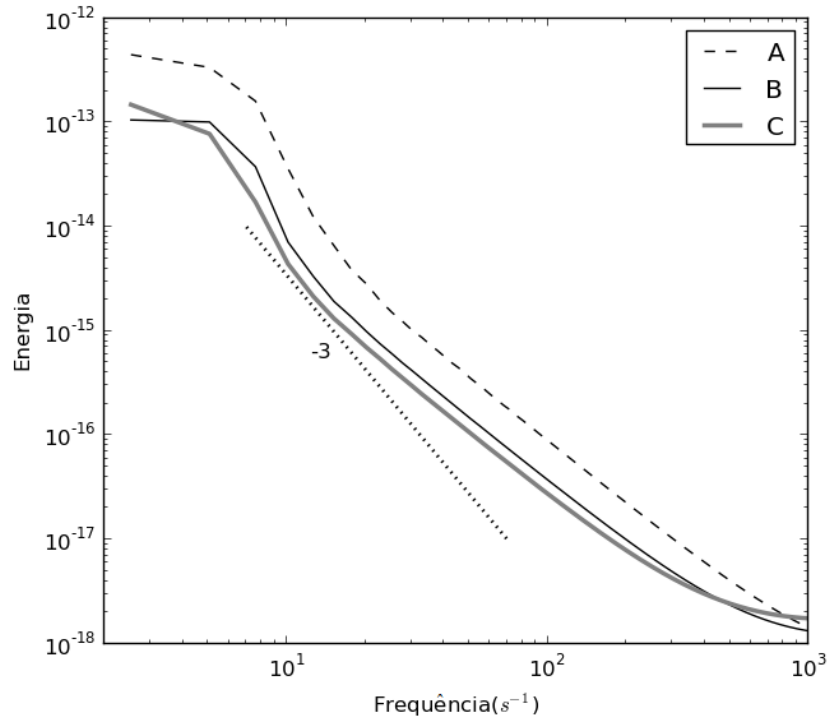


Figura 5.32: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato5*.

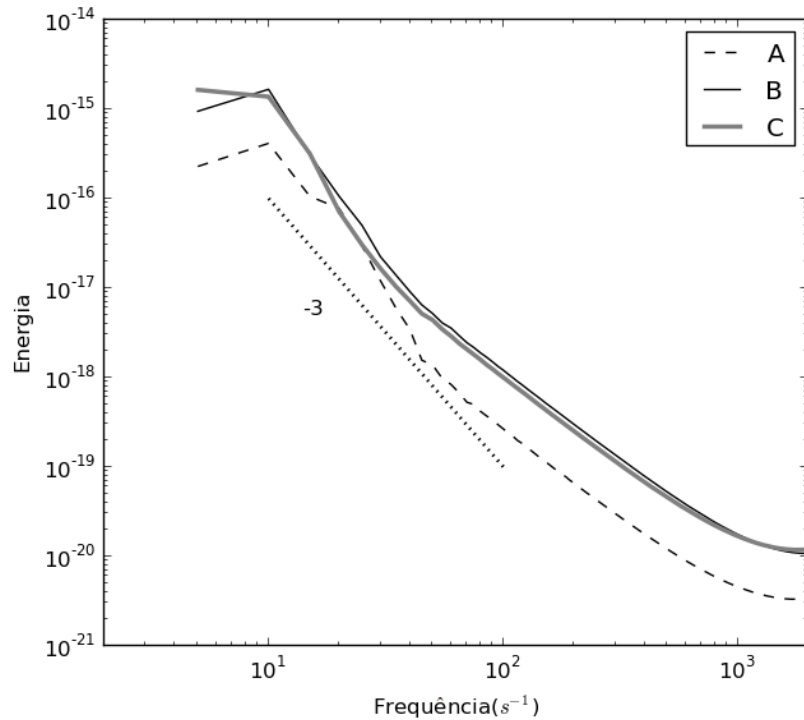


Figura 5.33: Espectro de energia da velocidade vertical w , obtido pela simulação *simjato6*.

A figura 5.34 mostra o espectro de p obtido pela simulação *simjato2*. É interessante notar que, embora a análise do espectro de energia feita por Kolmogorov refira-se apenas a distribuição de energia contida na quantidade de movimento, o que se traduz nas variáveis u e w , a inclinação -3 também foi observada no espectro da pressão. Sabe-se que existe uma estreita relação entre pressão e velocidade, afinal, a pressão é uma das forçantes do movimento. Entretanto, neste trabalho, não se pretende dar uma explicação para este resultado, pretende-se apenas apresentá-lo.

Deve-se notar que o modelo não simulou o espectro completo. Os resultados obtidos tiveram frequências máximas na ordem de $10^3 s^{-1}$, ou seja, a região de dissipação viscosa não foi representada no espectro de energia. Isso mostra que, de fato, houve filtragem das menores escalas, e que os resultados aqui apresentados não se tratam de simulações em DNS.

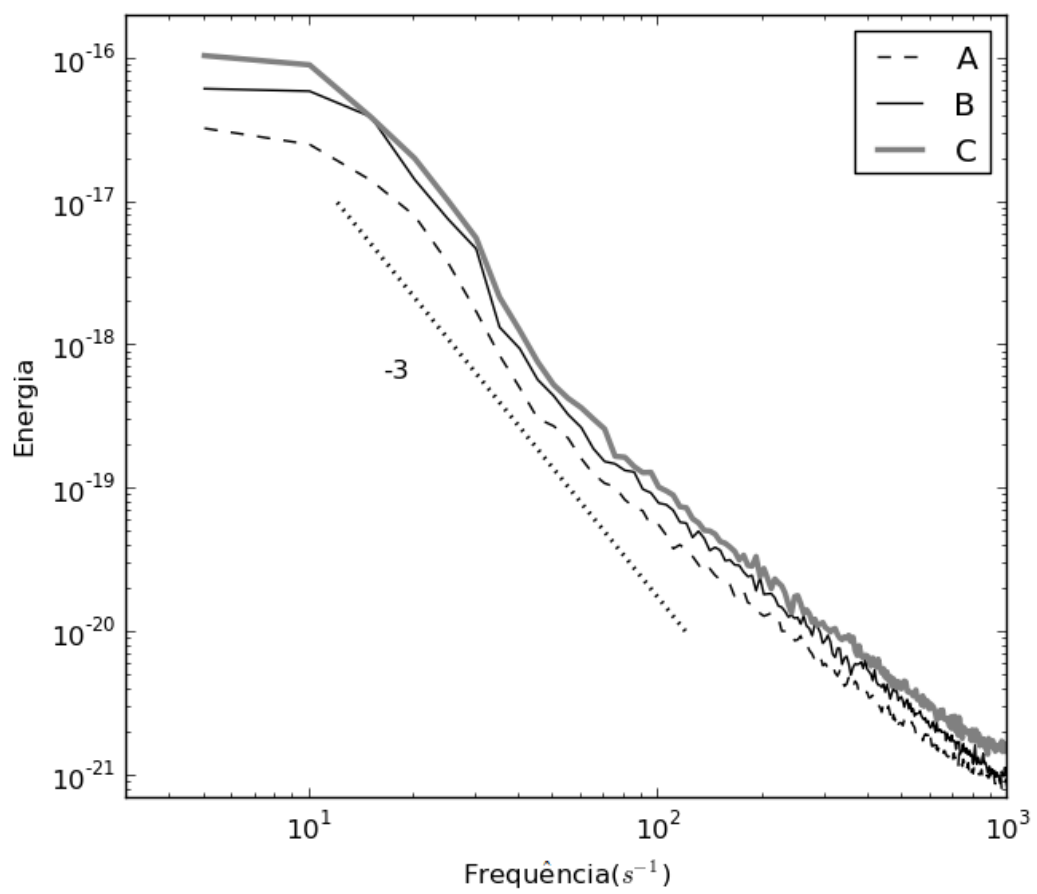


Figura 5.34: Espectro de energia da pressão p , obtido pela simulação *simjato2*.

6 Conclusão

Escoamentos turbulentos estão presentes em rios, oceanos, na atmosfera, e em diversos escoamentos de interesse da engenharia. Entretanto, a obtenção de soluções analíticas e de simulações numéricas para estes escoamentos é, ainda hoje, um grande desafio. Isso porque, a obtenção de soluções analíticas só é possível após se considerar diversas simplificações, as quais muitas vezes não são aplicáveis a casos reais.

Na falta de soluções analíticas, recorre-se as soluções numéricas, ou modelos numéricos. Estes modelos parametrizam os processos de pequena escala para que não seja preciso representá-los explicitamente, o que seria muito custoso computacionalmente. Isso insere uma grande parcela de empirismo na determinação dos parâmetros, cujos valores são definidos *ad hoc*.

Dentre os modelos que utilizam parametrização, podem-se citar aqueles baseados na promediação de Reynolds, e os modelos de Simulação de Grandes Vórtices. A única exceção são os modelos que utilizam Simulação Numérica Direta, que não necessitam de parametrização por serem capazes de simular todas as escalas do escoamento, porém, às custas de um esforço computacional extremo e inviável para a maioria das aplicações.

O Método da Filtragem Lagrangeana (MFL) é um método numérico voltado à simulação de escoamentos turbulentos. A ideia deste método é aplicar um filtro espacial implícito nas equações de transporte escritas no referencial Lagrangeano. O uso deste referencial permite que todos os termos sejam filtrados sem que haja necessidade de se utilizar parametrização. O filtro utilizado é do tipo *box*, e é resultante da discretização

das equações em diferenças finitas.

O presente trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de um modelo bidimensional para simulação do jato plano turbulento, com a utilização do MFL. Com isso, pretendeu-se demonstrar a capacidade do MFL em simular escoamentos turbulentos, através da comparação dos resultados obtidos pelo modelo com resultados teóricos. Foram realizados oito experimentos, com número de Reynolds entre 2.970 e 10.000.

Apesar do jato plano turbulento ser essencialmente bidimensional, sabe-se que este tipo de escoamento possui estruturas tridimensionais (GORDEYEV; THOMAS, 2000, 2002), as quais o modelo bidimensional não é capaz de reproduzir. Apesar disso, espera-se que o modelo seja capaz de reproduzir as principais características deste escoamento turbulento.

Fazendo-se uma comparação com outros trabalhos presentes na literatura, observou-se que o espaçamento de grade utilizado no presente trabalho foi maior do que o utilizado em simulações em DNS (STANLEY; SARKAR, 1997; STANLEY; SARKAR; MELLADO, 2002) e LES (RIBAUT; SARKAR; STANLEY, 1999; DAI; KOBAYASHI; TANIGUCHI, 1994), para números de Reynolds semelhantes ou maiores. Mesmo utilizando-se uma grade mais grossa, o MFL foi capaz de simular as principais características do jato plano turbulento.

Os resultados apresentados neste trabalho mostraram que o MFL é estável e competitivo computacionalmente com outros métodos numéricos de simulação de escoamentos turbulentos. Todos os experimentos foram realizados com o mesmo conjunto de equações, sem que houvesse necessidade de utilizar modelos de fechamento ou parametrizações do escoamento de pequena escala. A simulação *testvisc* mostrou que o modelo responde fisicamente à viscosidade, ou seja, caso haja algum efeito de viscosidade numérica no modelo, ela é desprezível em comparação à viscosidade física, sendo esta a grande responsável pelo surgimento da turbulência nas simulações.

Os resultados mostraram que o perfil normalizado de velocidade horizontal simulado

está de acordo com o perfil semi-empírico proposto por Bradbury (1965). As propriedades de auto-preservação e auto-similaridade, mostradas nas equações 3.2, 3.3 e 3.4 também foram verificadas nos resultados, o que indica que os escoamentos simulados atingiram este estado a partir de uma certa distância da injeção do jato. A distância normalizada encontrada para que a simulação se tornasse auto-preservante foi muito maior do que a obtida por experimentos. Isso se justifica pelo fato de se ter utilizado um modelo bidimensional, cuja turbulência é muito mais fraca que a tridimensional, principalmente devido à incapacidade que o modelo bidimensional tem de representar o termo de esticamento de vórtice.

Os erros cometidos pelas simulações foram estimados pelo método GCI (*Grid Convergence Index*). Foram encontrados valores muito baixos, o que mostrou que o modelo é bastante acurado. A região central do jato foi aquela onde foram encontrados os menores erros, na ordem de 1%. O maior erro encontrado no eixo central foi de $0,59m/s$, o que representa um erro relativo de 3,487%. A acurácia nesta região é considerada mais importante, pois a velocidade no centro do jato é utilizada na normalização do perfil de velocidade horizontal. Os maiores erros foram encontrados nas bordas do jato, onde ocorre a transição do escoamento turbulento para o escoamento laminar. Em geral, os erros aumentaram com o número de Reynolds e com a distância da saída do jato. Além disso, verificou-se também que o erro tende a diminuir com o refinamento da grade.

Ao se comparar as séries temporais obtidas pelas simulações de grade fina e de grade grossa, foi possível visualizar o efeito do espaçamento de grade sobre os resultados. Observou-se que os resultados da grade grossa tinham uma aparência “mais filtrada” que os da grade fina, um reflexo do mecanismo de filtragem do MFL através da própria grade de diferenças finitas.

Os resultados do modelo foram capazes de gerar o espectro de energia em parte das simulações. Os melhores espectros foram obtidos através da velocidade vertical, provavelmente devido à discretização mais refinada na direção vertical do que na direção horizontal

utilizada. Os resultados obtidos com o uso da grade grossa representaram melhor o espectro de energia da velocidade horizontal. Estes espectros mostraram adequadamente curvas com inclinação -3 , valor previsto na teoria como sendo característico da sub-região inercial para escoamentos bidimensionais (KRAICHNAN, 1967 apud ALMEIDA; ALVES; TANAJURA, 2011).

Considerando, portanto, o conjunto geral de resultados, conclui-se que o objetivo geral deste trabalho, de reproduzir numericamente as características do jato plano turbulento, foi atingido, indicando que o MFL pode servir como uma alternativa para simulação de escoamentos turbulentos.

7 Recomendações e sugestões para trabalhos futuros

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi observado que boa parte do tempo de processamento foi utilizado para resolver iterativamente a equação elíptica da pressão. Notou-se que, quanto menor a diferença entre os espaçamentos de grade horizontal e vertical, e quanto menos relaxado o critério de parada, melhor era a solução, porém, maior esforço computacional era necessário. Com isso, foi preciso encontrar uma configuração de espaçamento de grade e um critério de parada que, ao mesmo tempo que não tomasse muito tempo de simulação, não prejudicasse os resultados.

Por isso, recomenda-se que, em trabalhos futuros, a utilização de outros métodos para resolução da equação elíptica seja avaliada, levando-se em consideração a otimização do algoritmo e a acurácia dos resultados. Outras opções de métodos para resolução da equação elíptica são os métodos multigrid e os métodos diretos.

Até este momento, apenas simulações de turbulência bidimensional foram realizados. Entretanto, a turbulência em problemas reais é, em geral, tridimensional, sendo que a turbulência bidimensional pode ser assumida em apenas alguns casos específicos. Assim, um passo fundamental para a validação do MFL é a sua aplicação em um caso tridimensional.

Entretanto, estas simulações podem exigir recursos computacionais maiores dos que os utilizados até o momento. Um próximo passo é a introdução de processos termodinâmicos e da umidade, assim, o MFL poderia ser utilizado na simulação de escoamentos que reproduzam a camada limite atmosférica.

Futuramente, também seria interessante estudar o efeito de outros tipos de discretização sobre o filtro do MFL. Por exemplo, discretizações em diferenças finitas com erros de truncamento de mais alta ordem podem ser equivalentes a filtros com formatos diferentes do filtro *box*, utilizado até o momento.

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, R.; ALVES, J.; TANAJURA, C. Simulation of two-dimensional high Reynolds number wake flows with the use of filtered Lagrangian Navier-Stokes equations. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 33, n. 1, p. 86–98, 2011.
- ALMEIDA, R. C. *Simulação numérica de escoamentos bidimensionais em camadas limites com o uso do Método da Média Amostral Lagrangeana*. 211 p. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.
- ALMEIDA, R. C. et al. Particle trajectory calculations with a two-step three-time level semi-Lagrangian scheme well suited for curved flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 61, p. 995–1028, 2009.
- BEGUE, M. et al. Two-dimensional semi-Lagrangian Vlasov simulations of laser-plasma interaction in the relativistic regime. *Journal of plasma physics*, Cambridge Univ Press, v. 62, n. 4, p. 367–388, 1999.
- BESSE, N.; SONNENDRÜCKER, E. Semi-lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 191, n. 2, p. 341–376, 2003.
- BRADBURY, L. The structure of a self-preserving turbulent plane jet. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 23, n. 01, p. 31–64, 1965.
- DAI, Y.; KOBAYASHI, T.; TANIGUCHI, N. Large eddy simulation of plane turbulent jet flow using a new outflow velocity boundary condition. *JSME international journal. Series B, fluids and thermal engineering*, Japan Society of Mechanical Engineers, v. 37, n. 2, p. 242–253, 1994.
- DEARDORFF, J. Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 29, p. 91–115, 1972.
- DEARDORFF, J. W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech*, Cambridge Univ Press, v. 41, n. 2, p. 453–480, 1970.
- DING, F.; ARYA, S. P.; LIN, Y. Large-eddy simulations of the atmospheric boundary layer using a new subgrid-scale model— i. slightly unstable and neutral cases. *Environmental fluid mechanics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 29–47, 2001.
- DING, F.; ARYA, S. P.; LIN, Y. Large-eddy simulations of the atmospheric boundary layer using a new subgrid-scale model—ii. weakly and moderately stable cases. *Environmental fluid mechanics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 49–69, 2001.

- FORTUNA, A. de O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: Edusp, 2000.
- GORDEYEV, S.; THOMAS, F. Coherent structure in the turbulent planar jet. part 1. extraction of proper orthogonal decomposition eigenmodes and their self-similarity. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 414, n. 1, p. 145–194, 2000.
- GORDEYEV, S.; THOMAS, F. Coherent structure in the turbulent planar jet. part 2. structural topology via pod eigenmode projection. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 460, n. 1, p. 349–380, 2002.
- GUTMARK, E.; WYGNANSKI, I. The planar turbulent jet. *Journal of Fluid mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 73, n. 03, p. 465–495, 1976.
- HARRIS, L.; LAURITZEN, P.; MITTAL, R. A flux-form version of the conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed sphere grid. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, 2010.
- HESKESTAD, G. Hot-wire measurements in a plane turbulent jet. *Journal of Applied Mechanics*, v. 32, p. 721, 1965.
- HOLT, T.; RAMAN, S. A review and comparative evaluation of multilevel boundary layer parameterizations for first-order and turbulent kinetic energy closure schemes. *Reviews of geophysics*, v. 26, n. 4, p. 761–780, 1988.
- HORTAL, M. The development and testing of a new two-time-level semi-lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Wiley Online Library, v. 128, n. 583, p. 1671–1687, 2002.
- KNYSTAUTAS, R. The turbulent jet from a series of holes in line (two-dimensional turbulent jet flow obtained from closely-spaced uniform holes in line). *Aeronautical Quarterly*, v. 15, p. 1–28, 1964.
- KRAICHNAN, R. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Physics of fluids*, The American Institute of Physics, v. 10, n. 7, p. 1417–1423, 1967.
- KUNDU, P.; COHEN, I. *Fluid Mechanics*. 4. ed. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2008.
- KUO, H. C.; WILLIAMS, R. T. Semi-lagrangian solutions to the inviscid Burgers equation. *Monthly weather review*, v. 118, p. 1278–1288, 1989.
- MASON, P.; SYKES, R. Three-dimensional numerical integrations of the navier-stokes equations for flow over surface-mounted obstacles. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 91, p. 433–450, 1979.
- MOENG, C. A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, American Meteorological Society, v. 41, n. 13, p. 2052–2062, 1984.
- PIELKE, R. *Mesoscale meteorological modeling*. Orlando, Florida: Academic Press Inc., 1984.

- PITSCH, H. Large-eddy simulation of turbulent combustion. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Annual Reviews, v. 38, p. 453–482, 2006.
- POPE, S. *Turbulent flows*. [S.l.]: Cambridge university press, 2000.
- PURSER, R. J.; LESLIE, L. M. A semi-implicit, semi-Lagrangian finite-difference scheme using high-order spatial differencing on a nonstaggered grid. *Monthly Weather Review*, v. 116, p. 2069–2080, October 1988.
- RANCIC, M. Semi-lagrangian piecewise bi-parabolic scheme for two-dimensional horizontal advection of a passive scalar. *Monthly weather review*, American Meteorological Society, v. 120, n. 7, p. 1394–1406, 1992.
- RIBAULT, C. L.; SARKAR, S.; STANLEY, S. Large eddy simulation of a plane jet. *Physics of fluids*, American Institute of Physics, v. 11, n. 10, p. 3069–3083, 1999.
- ROACHE, P. Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies. *ASME Journal of Fluids Engineering*, AMERICAN SOCIETY MECHANICAL ENGINEERS, v. 116, p. 405–405, 1994.
- ROBERT, A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere-Ocean*, Taylor & Francis, v. 19, n. 1, p. 35–46, 1981.
- ROSSMANITH, J.; SEAL, D. A positivity-preserving high-order semi-Lagrangian discontinuous Galerkin scheme for the Vlasov-Poisson equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, 2011.
- SAWYER, J. A semi-Lagrangian method of solving the vorticity advection equation. *Tellus*, Wiley Online Library, v. 15, n. 4, p. 336–342, 1963.
- SORBJAN, Z. *Structure of the atmospheric boundary layer*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989. (Prentice Hall advanced reference series: Physical and life sciences). ISBN 9780138535575.
- STANFORTH, A.; CÔTÉ, J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models - a review. *Monthly Weather Review*, v. 119, n. 9, p. 2206–2223, 1991.
- STANLEY, S.; SARKAR, S. Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Springer, v. 9, n. 2, p. 121–147, 1997.
- STANLEY, S.; SARKAR, S.; MELLADO, J. A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 450, p. 377–407, 2002.
- TENNEKES, H.; LUMLEY, J. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972.
- TODA, K.; OGATA, Y.; YABE, T. Multi-dimensional conservative semi-Lagrangian method of characteristics CIP for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 13, p. 4917–4944, 2009.
- TOWNSEND, A. A. *The structure of turbulent shear flow*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1976.

WAGNER, C.; HÜTTL, T.; SAGAUT, P. *Large-eddy simulation for acoustics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

WILCOX, D. *Turbulence modeling for CFD*. 2. ed. [S.l.]: DCW Industries, Inc., 2000. ISBN 9780963605108.