UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Diego das Neves de Souza

O Anel de Cohomologia de Uma Família de Álgebras de Hopf de Posto Um

Curitiba, 2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Diego das Neves de Souza

O Anel de Cohomologia de Uma Família de Álgebras de Hopf de Posto Um

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

Curitiba

Fevereiro de 2014

S729a Souza, Diego das Neves
O anel de cohomologia de uma família de álgebras de Hopf de posto um / Diego das Neves Souza. – Curitiba, 2014.
116f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2014.

Orientador: Marcelo Muniz Silva Alves.
Bibliografia: p. 15-116.

1. Teoria de Homologia. 2. Topologia algébrica. 3. Hopt, Álgebra de.. I. Universidade Federal do Paraná. II. Alves, Marcelo Muniz Silva. III. Título.

CDD: 514.23

TERMO DE APROVAÇÃO

"O ANEL DE COHOMOLOGIA DE UMA FAMÍLIA DE ÁLGEBRAS DE HOPF DE POSTO UM"

por

Diego das Neves de Souza

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,

pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: ______________________________
Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Dep. de Matemática – UFPR

____
Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Dep. de Matemática – UFPR

____
Profa. Dra. Maria Julia Redondo
Universidad de Buenos Aires

Curitiba, 19 de fevereiro de 2014.

ATA DA 57ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezenove dias do mês de fevereiro de 2014, no Anfiteatro B, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Marcelo Muniz Silva Alves, a Banca Examinadora para a quinquagésima sétima Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares, do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Profa. Dra. Maria Julia Redondo, da Universidad de Buenos Aires, e o Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dezessete horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **DIEGO DAS NEVES DE SOUZA** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "O ANEL DE COHOMOLOGIA DE UMA FAMÍLIA DE ÁLGEBRAS DE HOPF DE POSTO UM". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 19 de fevereiro de 2014.

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Presidente

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Titular

M J Redondo

Profa. Dra. Maria Julia Redondo
Titular

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **DIEGO DAS NEVES DE SOUZA** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 19 de fevereiro de 2014.

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Presidente

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Titular

M J Redondo

Profa. Dra. Maria Julia Redondo
Titular

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força e capacidade em conduzir meu trajeto de vida e por ter me colocado diante de pessoas maravilhosas que me ensinaram boas lições.

A todos os professores que tive, pelo conhecimento transmitido.

Aos meus pais e familiares que acreditaram, apoiaram e me ajudaram durante todos os anos de minha vida.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR por ter me proporcionado uma boa formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas da Pós-Graduação pela paciência, motivação, incentivo, companheirismo e por terem feito desses dois anos de curso de mestrado inesquecíveis.

Em especial ao professor Marcelo, pelo vínculo de amizade que fizemos durante estes últimos anos em que tem orientado na minha pesquisa; pela paciência e dedicação que teve com minha pessoa.

“ A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

Resumo

Sendo G um grupo, iremos abordar os grupos de cohomologia de G com coeficientes em um G-módulo e explicitaremos estes no caso em que G for um grupo cíclico finito. Sendo K um anel comutativo estudaremos também os K-módulos de cohomologia de uma K-álgebra A com coeficientes em um $(A-A)$-bimódulo e explicitaremos estes nos dois primeiros graus. Se f for um polinômio mônico em $K[x]$ calcularemos as cohomologias de Hochschild de $K[x]/\langle f\rangle$. No caso em que K é um corpo e tomamos o polinômio mônico em $K[x]$ como sendo x^n temos uma ação de G em $K[x]/\langle x^n\rangle$ dada através de um caractere de G no grupo multiplicativo de K e com isso formamos o produto smash $B = K[x]/\langle x^n\rangle\#KG$, onde KG é a álgebra do grupo G. Trabalhando com a álgebra B, explicitaremos as cohomologias de Hochschild desta em cada grau, e depois veremos que há um isomorfismo entre as cohomologias de Hochschild de B de graus $2i$ e $2i+1$. Através do produto cup, calcularemos a estrutura de anel de cohomologia de Hochschild de B sob a hipótese de que a ordem do caractere antes citado seja divisor de n.

Palavras-chave: Cohomologia de Álgebras; Cohomologia de Hochschild; Álgebras de Hopf.

Abstract

Let G be a group, we are going to discuss the cohomology groups of G with coefficients in a G-module and we will describe explicitly these in case where G is a finite cyclic group. Let K be a commutative ring, we also are going to study the cohomology K-modules of a K-algebra A with coefficients in a $(A-A)$-bimodule and we will describe these in the first two degrees. If f is a monic polynomial in $K[x]$ we are going to calculate the Hochschild cohomology of $K[x]/\langle f\rangle$. In the case where K is a field and we take the monic polynomial in $K[x]$ as x^n we have an action of G in $K[x]/\langle x^n\rangle$ given by a character of G in the multiplicative group of K and thus we can form the smash product $B = K[x]/\langle x^n\rangle\#KG$, where KG is the group algebra of G over K. Working with the algebra B, we are going to determine its Hochschild cohomology in each degree, and then we will see that there is an isomorphism between the Hochschild cohomology of B in degrees $2i$ and $2i+1$. Through the cup product, we are going to calculate the structure of the Hochschild cohomology of the ring B under the hypothesis that the order of the character previously cited divides n.

Keywords: Cohomology of Algebras; Hochschild Cohomology; Hopf Algebras.

Sumário

Introdução

O objetivo central do trabalho é descrever o anel de cohomologia de uma família de álgebras de Hopf de posto um. Estas álgebras foram introduzidas no trabalho [13], e são generalizações da álgebra de Taft, introduzidas por Taft em [14]. O posto, segundo apresentado em [13], pode ser visto como uma medida da complexidade de uma álgebra de Hopf. No caso de posto um, as álgebras de Hopf são extensões de álgebras de grupo por um gerador.

As álgebras de Hopf de posto um que abordaremos neste trabalho são produtos smash da álgebra $K[x]/\langle x^n \rangle$ pela álgebra de grupo KG onde isto ocorre da seguinte maneira: dado um grupo finito G e fixado um caracter $\chi : G \longrightarrow K^\times$, temos uma ação por automorfismos de G em $K[x]/\langle x^n \rangle$ definida por ${}^g x = \chi(g)x$ que permite formar o produto smash $K[x]/\langle x^n \rangle \# KG$ o qual neste caso também possui estrutura de álgebra de Hopf.

Cibils e Solotar em [15] deram uma interpretação para a estrutura de anel da cohomologia de Hochschild da álgebra de grupo KG do grupo abeliano finito G sobre um anel comutativo K, mostrando que

$$HH^*(KG) \simeq KG \otimes H^*(G, K)$$

Em [16] Cibils conjecturou uma fórmula para esta estrutura de anel no caso de um grupo finito G qualquer. Siegel e Witherspoon em [17] provaram esta conjectura. Linckelmann em [18] estendeu o resultado de [15] calculando o anel de cohomologia de Hochschild de álgebras de Hopf H, comutativa sobre o anel K tal que H é um K-módulo projetivo finitamente gerado, obtendo um isomorfismo de K-álgebras graduadas

$$HH^*(H) \simeq H \otimes_K \operatorname{Ext}^*_H(K, K)$$

No caso em que tem-se a álgebra de Hopf da forma $B = K[x]/\langle x^n \rangle \# KG$ onde G é um grupo finito e K um corpo com característica coprima com a ordem do grupo G, foi mostrado em [10] que o anel de cohomologia de Hochschild é dado por

$$HH^*(B) \simeq (KN)^G \otimes K[y, z]/\langle z^2 \rangle$$

onde N denota o núcleo do caracter χ. Com isso tem-se uma descrição explicíta do anel de cohomologia de uma família de álgebras de Hopf que não são comutativas.

O trabalho está descrito da seguinte forma: No primeiro capítulo estudaremos cohomologia de grupos segundo sua definição original, que diferente daquela dada através de funtores derivados, é um tanto quanto mais concreta. Para tal se faz necessária dentre outras coisas o conceito de módulo sobre um grupo, a qual é abordada em [6]. Veremos que há uma equivalencia entre as definições clássica e funtorial, no caso da definição original calcularemos os dois primeiros grupos de cohomologia de um dado grupo G com coeficientes em um G-módulo A, ambos arbitrários. Em grau zero veremos que este pode ser caracterizado com um subgrupo de A e em grau um através de homomorfismos cruzados, funções estas de G em A com uma certa propriedade. No que diz respeito ao caso funtorial, veremos um resultado obtido em [3] que permite através de um um grupo cíclico finito G construir de uma maneira particular uma resolução $\mathbb{Z}[G]$-livre para $\mathbb{Z}$, a qual nos permitirá calcular e explicitar todos os grupos de cohomologia de G.

No segundo capítulo estudaremos cohomologia de álgebras segundo resultados encontrados em [6]. Veremos que fixado uma álgebra A arbirária definida sobre um anel comutativo K é possível construir uma resolução livre para esta, dita resolução barra de A. Mediante esta resolução iremos definir os K-módulos de cohomologia de A com coeficientes em um $(A-A)$-bimódulo M. Assim como na cohomologia de grupos veremos que esta construção é também equivalente a definição clássica, isto é, aquela dada através das funções n-lineares de A em M. Novamente os dois primeiros módulos de cohomologia serão calculados. Veremos que o primeiro diz respeito à um submódulo de M e o segundo à um quociente das derivações de A em M pelas derivações internas de A em M. Neste capítulo encontraremos também a definição de cohomologia de Hochschild de uma álgebra.

No terceiro capítulo trataremos da cohomologia de Hochschild de álgebras do tipo $A = K[x]/\langle f \rangle$ onde K é um anel comutativo e $f \in K[x]$ um polinômio mônico. Estas álgebras incluem o caso de álgebras de grupo de grupos cíclicos finitos. Veremos como construir uma resolução A^e-projetiva de A diferente da resolução barra. Calcularemos todos os K-módulos de cohomologia de Hochschild de A e veremos que em todos os graus exceto o zero, esses se dão em termos da derivada de f. Esses resultados são encontrados em [8], porém alguns deles são sustentados por outros em [7], principalmente no que diz respeito à construção da resolução projetiva antes mencionada. Através de [7] veremos como definir duas sequências de funções entre as resoluções barra de A e a definida anteriormente, sendo estas funções de fundamental importância para os capítulos posteriores ao terceiro.

No quarto capítulo trabalharemos com a hipótese de que K é um corpo e G um grupo finito, e segundo resultados encontrados em [10] buscaremos calcular as cohomologias de Hochschild de álgebras do tipo $B = A\#KG$ onde A é uma álgebra quociente particular daquelas tratadas por [8] e [7] no capítulo 3, a saber, $A = K[x]/\langle x^n \rangle$. Usaremos o Lema de Eckmann-Shapiro e uma subálgebra D de B^e como ferramentas auxiliares no cálculo das cohomologias de Hochschild de B, a saber, o n-ésimo K-módulo de cohomologia de Hochschild de B definido por $\mathrm{Ext}^n_{B^e}(B, B)$ poderá ser calculado por $\mathrm{Ext}^n_D(A, B)$. Através da resolução A^e-projetiva de A abordada no capítulo três e da ação de G em $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)$ veremos que é possível induzir uma ação de G em B e com isso o cálculo das cohomologias de Hochschild de B se dão através do quociente de kernel e imagem de funções definidas com domínio e contradomínio nos G-invariantes de B. Por fim, calcularemos os G-invariantes de B e suas respectivas cohomologias, donde poderemos concluir um isomorfismo entre $HH^{2i}(B)$ e $HH^{2i+1}(B)$, o que implica dentre outras coisas que estas possuem as mesmas dimensões vistas como K-espaços vetoriais. Veremos que as cohomologias de B variam em cada grau e dependem de hipóteses sobre um caracter χ de G no grupo multiplicativo de K antes fixado.

No último capítulo teremos como objetivo principal calcular a estrutura de anel de cohomologia de B de acordo com teoria desenvolvida em [10] e sob a hipótese de que $\chi^n = 1$, pra entender do que se trata esta estrutura estudaremos o chamado produto cup, o qual é abordado em [9]. Usando duas funções de cadeias definidas em [7] e abordadas no capítulo três juntamente com o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_D(\_, B)$ teremos dois complexos e duas sequências de funções entre estes, sobre esta construção e em conjunto com mais alguns isomorfismos poderemos calcular o produto cup nos G-invariantes de B. Através do coproduto de álgebras comutativas abordadas em [2] veremos que a estrutura de anel de cohomologia de B é isomorfa à álgebra $(KN)^G \otimes K[y, z]/\langle z^2 \rangle$ onde grau de y é 2, de z é 1 e $N = \mathrm{Ker}\, \chi$.

Capítulo 1

Cohomologia de Grupos

Neste capítulo fixaremos um grupo G e definiremos estrutura de G-módulo sobre um outro grupo abeliano, veremos que esta induz uma estrutura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo no mesmo conjunto e que também vale a recíproca. Fixado um G-módulo A veremos como construir um complexo de grupos e como calcular os grupos de cohomologia de G com coeficientes em A ao qual denotaremos por $H^n(G, A)$. Construiremos também uma resolução $\mathbb{Z}[G]$-projetiva para $\mathbb{Z}$ e veremos que há um isomorfismo entre $H^n(G, A)$ e $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$, depois calcularemos os grupos de cohomologia $H^0(G, A)$ e $H^1(G, A)$. Por fim em caráter funtorial e tomando G como um grupo cíclico finito, calcularemos todos os grupos de cohomologia de G com coeficientes em A. Os principais referenciais teóricos deste capítulo provém de [3] e [6].

1.1 Grupos de cohomologia de um grupo G com coeficientes em um G-módulo A

Seja G um grupo multiplicativo. Um conjunto A é um G-módulo se $(A, +)$ é um grupo abeliano e G age em A por endomorfismos, isto é, temos uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \longrightarrow & A \\ (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

tal que

$$g(x + y) = gx + gy, \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) \quad \text{e} \quad 1x = x$$

Sendo $\mathbb{Z}[G]$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre[1] com base G, temos que $\mathbb{Z}[G]$ possui estrutura de anel com multiplicação definida por

$$\sum \alpha_g g \sum \beta_h h = \sum \alpha_g \beta_h gh$$

assim se A é G-módulo, então A é $\mathbb{Z}[G]$-módulo por $\sum(\alpha_g g)a := \sum \alpha_g(ga)$ e, reciprocamente, se A é $\mathbb{Z}[G]$-módulo então A é G-módulo por $ga := (1g)a$. Se A é um grupo abeliano e G um grupo, temos a ação trivial de G em A dada por $gx := x,\ \forall x \in A,\ \forall g \in G$; com isso A é um G-módulo. A ação trivial de G sobre A induz estrutura de $\mathbb{Z}[G]$-módulo sobre o mesmo como já havíamos discutido, neste caso dizemos que A é $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial.

Seja A um G-módulo. Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ consideremos $C^n(G, A)$ o conjunto das funções $f : G^n \longrightarrow A$ onde G^n é o produto cartesiano $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$ (para $n > 0$) e $C^0(G, A) = A$. Temos que $C^n(G, A)$ é um grupo abeliano com

$$\begin{aligned}(f + f')(g_1, \ldots, g_n) &= f(g_1, \ldots, g_n) + f'(g_1, \ldots, g_n)\\ 0(g_1, \ldots, g_n) &= 0_A\end{aligned}$$

No caso de $C^0(G, A)$ a estrutura é dada em A. Podemos definir funções $\delta(= \delta_n)$ de $C^n(G, A)$ em $C^{n+1}(G, A)$ como segue:

$$\begin{array}{rccc}\delta: & C^n(G, A) & \longrightarrow & C^{n+1}(G, A)\\ & f & \longmapsto & \delta f\end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta f(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1})\\ &\quad +(-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)\end{aligned}$$

Por exemplo, para $n = 0$ e $f \in A$ temos

$$\delta f(g_1) = g_1 f + (-1) f = g_1 f - f$$

para $n = 1$ e $f \in C^1(G, A)$,

$$\delta f(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) + (-1) f(g_1 g_2) + (-1)^2 f(g_1)$$

para $n = 2$ e $f \in C^2(G, A)$,

$$\delta f(g_1, g_2, g_3) = g_1 f(g_2, g_3) + (-1) f(g_1 g_2, g_3) + (-1)^2 f(g_1, g_2 g_3) + (-1)^3 f(g_1, g_2)$$

$\delta : C^n(G, A) \longrightarrow C^{n+1}(G, A)$ é homomorfismo de grupos, com isso denotemos $Z^n(G, A) = \operatorname{Ker} \delta$ e $B^{n+1}(G, A) = \operatorname{Im} \delta$.

---

[1] ver sobre módulos livres no apêndice

Proposição 1.1 *Considerando as funções* $\delta : C^n(G,A) \longrightarrow C^{n+1}(G,A)$, $\forall n \geq 0$ *temos que* $\delta^2 = 0$

Demonstração. Consideremos as funções

$$\begin{array}{rccl} \delta_i : & C^n(G,A) & \longrightarrow & C^{n+1}(G,A) \\ & f & \longmapsto & \delta_i f \end{array}$$

com $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Onde

$$\delta_0 f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1})$$

$$\delta_i f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}),\ i = 1, \ldots, n.$$

$$\delta_{n+1} f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_1, \ldots, g_n)$$

dessa forma podemos escrever

$$\delta = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_i$$

com efeito, dado $f \in C^n(G,A)$ e $(g_1, \ldots, g_{n+1}) \in G^{n+1}$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \delta f(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n) \\ &= \delta_0 f(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta_i f(g_1, \ldots, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \delta_{n+1} f(g_1, \ldots, g_{n+1}) \\ &= \left(\delta_0 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta_i + (-1)^{n+1} \delta_{n+1} \right) f(g_1, \ldots, g_{n+1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_i f \right) (g_1, \ldots, g_{n+1}) \end{aligned}$$

também vale a seguinte relação

$$\delta_i \delta_{j-1} = \delta_j \delta_i \quad \text{se} \quad i < j$$

com efeito, considerando essas composições definidas de $C^{n-1}(G,A)$ em $C^{n+1}(G,A)$, tomando $f \in C^{n-1}(G,A)$ e $(g_1, \ldots, g_{n+1}) \in G^{n+1}$ temos

$$\begin{aligned} \delta_j \delta_i f(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= \delta_i f(g_1, \ldots, g_j g_{j+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ &= \begin{cases} f(g_1, \ldots, g_i(g_{i+1} g_{i+2}), \ldots, g_{n+1}) & \text{se} \quad i = j-1 \\ f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_j g_{j+1}, \ldots, g_{n+1}) & \text{se} \quad i < j-1 \end{cases} \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
\delta_i\delta_{j-1}f(g_1,\ldots,g_{n+1}) &= \delta_{j-1}f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1}) \\
&= \begin{cases} f(g_1,\ldots,(g_ig_{i+1})g_{i+2},\ldots,g_{n+1}) & \text{se} \quad i=j-1 \\ f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_jg_{j+1},\ldots,g_{n+1}) & \text{se} \quad i<j-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora considerando a sequência de funções

$$C^0(G,A) \xrightarrow{\delta} C^1(G,A) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^{n-1}(G,A) \xrightarrow{\delta} C^n(G,A) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(G,A)\cdots$$

vejamos por indução em n, no conjunto das funções de n variáveis de G em A que vale $\delta^2=0$. Para $n=1$, tomamos $f\in C^0(G,A)=A$ e $(g_1,g_2)\in G^2$, com isso

$$\begin{aligned}
\delta\delta(f)(g_1,g_2) &= g_1\delta f(g_2)+(-1)\delta f(g_1g_2)+(-1)^2\delta f(g_1) \\
&= g_1(g_2f-f)+(-1)((g_1g_2)f-f)+(-1)^2(g_1f-f) \\
&= g_1(g_2f)-g_1f-(g_1g_2)f+f+g_1f-f \\
&= 0
\end{aligned}$$

suponhamos agora que vale a afirmação em grau n, isto é, $\delta^2=0\ \forall f\in C^{n-1}(G,A)$, ou reescrevendo em termos das funçõs $\delta_i's$ é o mesmo que dizer

$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\delta_j\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_i=0$$

e em grau $n+1$ temos

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= \sum_{j=0}^{n+2}(-1)^j\delta_j\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\delta_i \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\delta_j+(-1)^{n+2}\delta_{n+2}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_i+(-1)^{n+1}\delta_{n+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\delta_j\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_i+\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\delta_j(-1)^{n+1}\delta_{n+1} \\
&\quad +(-1)^{n+2}\delta_{n+2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_i+(-1)^{n+2}\delta_{n+2}(-1)^{n+1}\delta_{n+1} \\
&\overset{HI}{=} 0+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\delta_j(-1)^{n+1}\delta_{n+1}+(-1)^{(n+1)}\delta_{n+1}(-1)^{n+1}\delta_{n+1} \\
&\quad +(-1)^{n+2}\delta_{n+2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\delta_i+(-1)^{n+2}\delta_{n+2}(-1)^{n+1}\delta_{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+1}\delta_j\delta_{n+1}+(-1)^{2(n+1)}\delta_{n+1}\delta_{n+1}
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i+1}\delta_{n+2}\delta_i-(-1)^{2(n+1)}\delta_{n+2}\delta_{n+1}=\star$$

haja vista que o índice i no último somatório assume valores inteiros entre 0 e n então $i<n+2$, como também $n+1<n+2$, temos que $\delta_{n+2}\delta_i=\delta_i\delta_{n+2-1}=\delta_i\delta_{n+1}$ e também $\delta_{n+2}\delta_{n+1}=\delta_{n+1}\delta_{n+2-1}=\delta_{n+1}\delta_{n+1}$. Logo podemos reescrever

$$\star \;=\; \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+1}\delta_j\delta_{n+1}+\delta_{n+1}\delta_{n+1}-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i+1}\delta_i\delta_{n+1}-\delta_{n+1}\delta_{n+1}=0$$

□

Do fato de $\delta^2=0$, segue que $B^n(G,A)\subset Z^n(G,A)$, com isso podemos formar o quociente

$$H^n(G,A)=Z^n(G,A)/B^n(G,A)$$

chamado de n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A.

1.2 Uma resolução $\mathbb{Z}[G]$-projetiva para $\mathbb{Z}$

Podemos definir $H^n(G,A)$ em caráter funtorial, para tal consideramos $\mathbb{Z}$ como G-módulo trivial e consideramos $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ para um dado G-módulo A. Para tanto precisamos construir uma resolução $\mathbb{Z}[G]$-projetiva particular do $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial $\mathbb{Z}$

$$\cdots \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

obtendo assim um complexo de cocadeia

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_0,A) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_1,A) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

cujo n-ésimo grupo de cohomologia é $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$ e que nos permita identificar com $H^n(G,A)$ definido anteriormente. Definamos:

$$C_n=\mathbb{Z}[G]^{\otimes^{n+1}_{\mathbb{Z}}}$$

desde que $\mathbb{Z}[G]$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G, $\mathbb{Z}[G]=\mathbb{Z}^{(G)}=\bigoplus_G\mathbb{Z}$, temos que C_n é também $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $g_0\otimes\ldots\otimes g_n$ com $g_i\in G$, com efeito:

$$C_n=\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\ldots\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G]=\bigoplus_G\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\ldots\otimes_{\mathbb{Z}}\bigoplus_G\mathbb{Z}\simeq\bigoplus_{G^{n+1}}\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{(G^{n+1})}$$

Temos ação de G em C_n dado por

$$g(x_0 \otimes \ldots \otimes x_n) = gx_0 \otimes \ldots \otimes x_n$$

com isso C_n torna-se $\mathbb{Z}[G]$-módulo livre com base $1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n$, com efeito, dada a combinação $\mathbb{Z}[G]$-linear de elementos deste tipo, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{(g_1,\ldots,g_n)} \left(\sum_g \alpha_{(g,g_1\ldots,g_n)} g \right) (1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{(g,g_1,\ldots,g_n)} \alpha_{(g,g_1,\ldots,g_n)} (g \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_{(g,g_1\ldots,g_n)} = 0, \quad \forall (g, g_1, \ldots, g_n) \\
&\Rightarrow \sum_g \alpha_{(g,g_1,\ldots,g_n)} g = 0, \quad \forall (g, g_1, \ldots, g_n)
\end{aligned}$$

Identificando $[g_1, \ldots, g_n] \equiv 1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n$, definamos agora $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismos $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ pela ação sobre a base $[g_1, \ldots, g_n]$. Seja

$$d_n[g_1, \ldots, g_n] = g_1[g_2, \ldots, g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n] + (-1)^n [g_1, \ldots, g_{n-1}]$$

para $n = 1$, temos

$$\begin{array}{rccl} d_1 : & C_1(G, A) & \longrightarrow & C_0(G, A) \\ & [g_1] & \longmapsto & g_1 + (-1)^1 1 = g_1 - 1 \end{array}$$

observe que neste caso $[g_1] \equiv 1 \otimes g_1$. Consideremos também $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo $\epsilon : C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\epsilon(1) = 1$, com isso, $\epsilon(g) = \epsilon(g1) = g\epsilon(1) = g1 = 1$, na última passagem usamos ação trivial de G em $\mathbb{Z}$; de acordo com isso temos que $\epsilon(\sum \alpha_g g) = \sum \alpha_g \epsilon(g) = \sum \alpha_g$.

Para concluir que $\ldots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é uma $\mathbb{Z}[G]$-resolução projetiva é suficiente constatar a exatidão da sequência, haja vista que cada C_i é $\mathbb{Z}[G]$-projetivo (já que é livre sobre $\mathbb{Z}[G]$). Para tanto usamos a proposição que está na seção **Complexo de módulos** no apêndice. Definamos então sequência de homomorfismos (de grupos)

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{s_{-1}} C_0 \xrightarrow{s_0} C_1 \xrightarrow{s_1} \cdots$$

tal que satisfazem as relações

$$\epsilon s_{-1} = 1_{\mathbb{Z}}, \quad d_1 s_0 + s_{-1}\epsilon = 1_{C_0} \quad \text{e} \quad d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = 1_{C_n} \ \forall n \geq 1$$

Como $\{1\}$ é $\mathbb{Z}$-base para $\mathbb{Z}$, G é $\mathbb{Z}$-base para $\mathbb{Z}[G] = C_0$ e $\{g_0[g_1, \ldots, g_n] = g_0 \otimes \ldots \otimes g_n \mid g_i \in G\}$ é $\mathbb{Z}$-base para C_n, temos a partir dos diagramas universais de módulos livres, únicos homomorfismos (de grupos)

$$\begin{aligned} s_{-1}: \ \mathbb{Z} &\longrightarrow C_0 \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0: \ C_0 &\longrightarrow C_1 \\ g_0 &\longmapsto [g_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n: \qquad C_n &\longrightarrow C_{n+1} \\ g_0[g_1, \ldots, g_n] &\longmapsto [g_0, \ldots, g_n] \end{aligned}$$

Se $n > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{n+1}s_n g_0[g_1, \ldots, g_n] = d_{n+1}[g_0, \ldots, g_n] = g_0[g_1, \ldots, g_n] \\ + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}[g_0, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n] + (-1)^{n+1}[g_0, \ldots, g_{n-1}] \end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned} s_{n-1}d_n g_0[g_1, \ldots, g_n] = s_{n-1}g_0 d_n[g_1, \ldots, g_n] = s_{n-1}g_0 g_1[g_2, \ldots, g_n] \\ + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i s_{n-1}g_0[g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n] + (-1)^n[g_0, \ldots, g_{n-1}] \end{aligned}$$

somando as igualdades acima teremos

$$d_{n+1}s_n g_0[g_1, \ldots, g_n] + s_{n-1}d_n g_0[g_1, \ldots, g_n] = g_0[g_1, \ldots, g_n]$$

logo, $d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = 1_{C_n}$. Similarmente verifica-se as outras duas equações.

Como C_1 é livre com base $\{1 \otimes g \mid g \in G\}$ temos $\epsilon d_1 g = \epsilon(g-1) = 1 - 1 = 0$. Também $s_n C_n,\ n > 0$ contém os geradores $\{[g_0, \ldots, g_n]\}$ de C_{n+1} como $\mathbb{Z}[G]$-módulo (pois $s_n g_0[g_1, \ldots, g_n] = [g_0, \ldots, g_n]$). Portanto a sequência $\ldots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é exata e com isso temos o seguinte resultado

Teorema 1.2 *Seja $C_n = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \ldots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$, $(n+1)$-vezes $n \geq 0$, $\epsilon : C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo tal que $\epsilon(1) = 1$ e $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismos como definido anteriormente. Então $C = \{C_n\}$, d_n e ϵ constituem uma $\mathbb{Z}[G]$-resolução livre para $\mathbb{Z}$ sendo $\mathbb{Z}$ visto como G-módulo trivial.*

1.3 Isomorfismos entre os grupos de cohomologia funtorial e clássico

Desde que $\{[g_1, \ldots, g_n] \mid g_i \in G\}$ é $\mathbb{Z}[G]$-base para C_n, temos um isomorfismo de grupos entre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_n, A)$ com o conjunto $C^n(G, A)$ das funções de n-variáveis de G em A, a saber:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_n, A) & \longrightarrow & C^n(G, A) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f): & G^n & \longrightarrow & A \\ & (g_1, \ldots, g_n) & \longmapsto & f[g_1, \ldots, g_n] = f(1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n) \end{array}$$

segue disto que temos o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_n, A) \arrow[r, "d_{n+1}^*"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_{n+1}, A) \arrow[d, "\varphi"] \\ C^n(G, A) \arrow[r, "\delta"] & C^{n+1}(G, A) \end{tikzcd}$$

com efeito, dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_n, A)$ e $(g_1, \ldots, g_{n+1}) \in G^n$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \varphi d_{n+1}^*(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) & = & f d_{n+1}(1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_{n+1}) \\ & = & f(g_1(1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_{n+1}) \\ & + & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_i g_{i+1} \otimes \ldots \otimes g_{n+1}) \\ & + & (-1)^{n+1}(1 \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_n)) \\ & = & g_1 \varphi f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ & + & (-1)^{n+1} \varphi f(g_1, \ldots, g_n) \\ & = & \delta\varphi(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) \end{array}$$

segue que os complexos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_0, A) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_1, A) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

e

$$0 \longrightarrow C^0(G, A) \xrightarrow{\delta} C^1(G, A) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

possuem os grupos de cohomologia isomorfos. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 $H^n(G, A) = Z^n(G, A)/B^n(G, A) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$

1.4 Os grupos de cohomologia $H^0(G, A)$ e $H^1(G, A)$

Vamos analisar agora a cohomologia de grupos $H^n(G, A)$ para $n = 0, 1$. Para $n = 0$, $H^0(G, A) \simeq A^G$, o subgrupo de A de elementos x que satisfazem $gx = x, g \in G$. Também é verdade que $H^0(G,A) \simeq \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$, com efeito, $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = \mathrm{Ker}\, d_1^*/\,\mathrm{Im}\, 0 \simeq \mathrm{Ker}\, d_1^*$. Por outro lado, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\_,A)$ é exato à esquerda, e da resolução

$$\cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

que é exato temos que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_0,A) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_1,A)$$

é exato, com isso, $\mathrm{Ker}\, d_1^* = \mathrm{Im}\, \epsilon^*$ e $\mathrm{Ker}\, \epsilon^* = 0$, também, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)/\,\mathrm{Ker}\, \epsilon^* \simeq \mathrm{Im}\, \epsilon^*$. Segue então que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \simeq \mathrm{Im}\, \epsilon^* = \mathrm{Ker}\, d_1^*$.

Se $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$, η é determinado por $\eta(1)$ e se $\eta(1) = x \in A$ então $x = \eta(1) = \eta(g1) = g\eta(1) = gx,\ g \in G$. Reciprocamente se x satisfaz $gx = x, g \in G$ então a função $\eta(n) = nx$ é $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em A, pois:

$$\begin{aligned}\eta\left(\sum (a_g g)n\right) &= \eta\left(\sum a_g(gn)\right) = \eta\left(\sum a_g n\right) = \left(\sum a_g n\right)x \\ &= \left(\sum a_g g n\right)x = \sum a_g g(nx) = \left(\sum a_g g\right)\eta(n)\end{aligned}$$

Seja A um G-módulo, uma função $f : G \longrightarrow A$ é dito **homomorfismo cruzado** de G em A se $f(gh) = gf(h) + f(g),\ g,h \in G$. Se $x \in A$ então f_x definida por $f_x(g) = gx - x$ é homomorfismo cruzado de G em A, pois:

$$gf_x(h) + f_x(g) = g(hx - x) + gx - x = g(hx) - gx + gx - x = (gh)x - x = f_x(gh).$$

Estes homomorfismos cruzados são denominados principais. Os homomorfismos cruzados formam um grupo abeliano com a adição e os homomorfismos cruzados principais formam um subgrupo desse grupo. Sendo $Z^1(G,A) = \mathrm{Ker}\,\delta$ e $f \in \mathrm{Ker}\,\delta$, temos:

$$\delta(f)(g_1,g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1g_2) + f(g_1) = 0 \Rightarrow f(g_1,g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1)$$

logo f é um homomorfismo cruzado. Se $g \in B^1(G,A) = \mathrm{Im}\,\delta \Rightarrow g = \delta f$ para algum $f \in A$, com isso

$$g(g_1) = \delta f(g_1) = g_1 f - f$$

logo g é homomorfismo cruzado principal $(g = g_f)$. Segue desses resultados que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) \simeq Z^1(G,A)/B^1(G,A) = \frac{\text{Homomorfismos Cruzados}}{\text{Homomorfismos Cruzados Principais}}$$

1.5 Grupos de cohomologia de um grupo cíclico finito

Dado um grupo G qualquer e considerando a função

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sum\limits_{x \in G} m_x x & \longmapsto & \sum\limits_{x \in G} m_x \end{array}$$

temos que ϵ é homomorfismo de anéis, pois

- $\epsilon\left(\sum\limits_{x\in G} m_x x \cdot \sum\limits_{y\in G} n_y y\right) = \epsilon\left(\sum\limits_{x,y\in G} m_x n_y xy\right) = \sum\limits_{x,y\in G} m_x n_y = \sum\limits_{x\in G} m_x \cdot \sum\limits_{y\in G} n_y$
$= \epsilon\left(\sum\limits_{x\in G} m_x x\right) \epsilon\left(\sum\limits_{y\in G} n_y y\right)$;

- $\epsilon\left(\sum\limits_{x\in G} m_x x + \sum\limits_{y\in G} n_y y\right) = \epsilon\left(\sum\limits_{z\in G} (m_z + n_z) z\right) = \sum\limits_{z\in G} (m_z + n_z) = \sum\limits_{z\in G} m_z + \sum\limits_{z\in G} n_z =$
$\sum\limits_{x\in G} m_x + \sum\limits_{y\in G} n_y = \epsilon\left(\sum\limits_{x\in G} m_x x\right) + \left(\sum\limits_{y\in G} n_y y\right)$;

- $\epsilon(1_g) = 1_{\mathbb{Z}}$.

temos que $\operatorname{Ker}\epsilon$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $\{x - 1 \mid x \in G^\times\}$ onde $G^\times = \{x \in G \mid x \neq 1\}$ com efeito,

$$\begin{aligned} u = \sum_{x\in G} m_x x \in \operatorname{Ker}\epsilon \quad &\iff \quad \epsilon(u) = \epsilon\left(\sum_{x\in G} m_x x\right) = 0 \\ &\iff \quad \sum_{x\in G} m_x = 0 \end{aligned}$$

assim escrevemos

$$\begin{aligned} u &= u - 0 \cdot 1 = u - \left(\sum_{x\in G} m_x\right) 1 \\ &= \sum_{x\in G} m_x x - \sum_{x\in G} m_x 1 \\ &= \sum_{x\in G^\times} m_x (x-1) \end{aligned}$$

assim o conjunto $\{x - 1 \mid x \in G^\times\}$ gera $\operatorname{Ker}\epsilon$. Vejamos que é $\operatorname{Ker}\epsilon$ é livre com esta base, para tal consideremos a combinação linear

$$\sum_{x\in G^\times} m_x (x-1) = 0 \Rightarrow \sum_{x\in G^\times} m_x x - \left(\sum_{x\in G^\times} m_x\right) 1 = 0$$

como $\mathbb{Z}[G]$ é livre com base $\{x \in G\}$ então temos que $\sum_{x\in G^\times} m_x = 0$ e $m_x = 0,\ \forall x \in G^\times$. Em particular $m_x = 0\ \forall x \in G^\times$, como queríamos. Vale observar que se $G = \langle x \rangle$ fosse um grupo cíclico finito de ordem k, então $\operatorname{Ker}\epsilon$ seria o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $\{x^j - 1 \mid j = 1, \dots, k-1\}$. Vejamos agora o seguinte teorema

Teorema 1.4 *Seja $G = \langle x \rangle$ um grupo cíclico finito de ordem k, $D = x - 1$ e $N = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$ elementos de $\mathbb{Z}[G]$. Então*

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma $\mathbb{Z}[G]$-resolução livre de $\mathbb{Z}$. Onde as funções N e D representam as multiplicações por N e D respectivamente.

Demonstração. Como G é cíclico e portanto abeliano, temos que $\mathbb{Z}[G]$ é comutativo, assim

$$\begin{aligned} ND = DN &= (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) \\ &= (x + x^2 + \cdots + x^k) - (1 + x + \cdots + x^{k-1}) \\ &= x^k - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

tambem dado $u \in \mathbb{Z}[G]$ temos

$$\epsilon(Du) = \epsilon((x-1)u) = \epsilon(x-1)\epsilon(u) = (\epsilon(x) - \epsilon(1))\epsilon(u) = (1-1)\epsilon(u) = 0$$

desta forma temos um complexo. Falta agora verificar a exatidão da sequência. Primeiramente temos que ϵ é sobrejetor, pois dado $z \in \mathbb{Z}$ temos que $z = \epsilon(z1_G)$. Do fato da sequência ser um complexo já temos as inclusões $\operatorname{Im} D \subset \operatorname{Ker}\epsilon, \operatorname{Im} N \subset \operatorname{Ker} D$ e $\operatorname{Im} D \subset \operatorname{Ker} N$. Vejamos agora as inclusões contrárias. Seja $u \in \operatorname{Ker}\epsilon$ então

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{k-1} m_j(x^j - 1) = (x-1)\left(\sum_{j=1}^{k-1} m_j(1 + x + \cdots + x^{j-1})\right) \\ &= D\left(\sum_{j=1}^{k-1} m_j(1 + x + \cdots + x^{j-1})\right) \end{aligned}$$

logo $u \in \operatorname{Im} D$ e portanto temos $\operatorname{Im} D = \operatorname{Ker}\epsilon$. Consideremos agora $u = \sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i \in \operatorname{Ker} D$, então temos

$$\begin{aligned} D(u) &= (x-1)u = (x-1)\sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i \\ &= m_0 x + m_1 x^2 + \cdots + m_{k-1}x^k - m_0 - m_1 x^1 - \cdots - m_{k-1}x^{k-1} \\ &= (m_{k-1} - m_0) + (m_0 - m_1)x + \cdots + (m_{k-2} - m_{k-1})x^{k-1} = 0 \end{aligned}$$

assim temos que $m_{k-1} - m_0 = m_0 - m_1 = \cdots = m_{k-2} - m_{k-1} = 0$, ou seja, $m_{k-1} = m_0 = m_1 = \cdots = m_{k-2}$. Logo

$$u = \sum_{i=0}^{k-1} m_0 x^i = m_0 \sum_{i=0}^{k-1} x^i = N(m_0) \in \operatorname{Im} N$$

assim $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Im} N$. Por fim, seja $u = \sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i \in \operatorname{Ker} N$, então

$$0 = \epsilon(Nu) = \epsilon(N)\epsilon(u) = \epsilon\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i\right)\epsilon(u) = k\epsilon(u)$$

logo

$$\epsilon(u) = \epsilon\left(\sum_{i=0}^{k-1} m_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i = 0$$

desta forma reescrevemos

$$u = m_0 + m_1 x^1 + \cdots + m_{k-1} x^{k-1} = -(m_1 + \cdots + m_{k-1}) + m_1 x^1 + \cdots + m_{k-1} x^{k-1}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
&-D(m_0 + (m_0 + m_1)x + \cdots + (m_0 + \cdots + m_{k-1})x^{k-1}) \\
&\quad = -(x-1)(m_0 + (m_0 + m_1)x + \cdots + (m_0 + \cdots + m_{k-1})x^{k-1}) \\
&\quad = -(m_0 x + (m_0 + m_1)x^2 + \cdots + (m_0 + \cdots + m_{k-1})x^k \\
&\quad -m_0 - (m_0 + m_1)x - \cdots - (m_0 + \cdots + m_{k-1})x^{k-1}) \\
&\quad = -(-m_0 - (m_0 + m_1 - m_0)x - (m_0 + m_1 + m_2 - m_0 - m_1)x^2 - \cdots \\
&\quad -(m_0 + \cdots + m_{k-1} - m_0 - \cdots - m_{k-2})x^{k-1} + (m_0 + \cdots + m_{k-1})) \\
&\quad = -(m_1 + \cdots + m_{k-1}) + m_1 x^1 + \cdots + m_{k-1} x^{k-1}
\end{aligned}$$

logo temos que

$$u = -D(m_0 + (m_0 + m_1)x + \cdots + (m_0 + \cdots + m_{k-1})x^{k-1})$$

com isso $\operatorname{Ker} N = \operatorname{Im} D$ de onde podemos concluir que a sequência é exata. Como $\mathbb{Z}[G]$ é $\mathbb{Z}[G]$-livre com base 1 então a sequência exata em questão é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$. □

Mediante a resolução encontrada no teorema anterior, podemos caracterizar de maneira explícita os grupos de cohomologias de G com coeficientes em um G-módulo A. Vejamos isso através do seguinte teorema

Teorema 1.5 *Seja G um grupo cíclico finito e A um G-módulo. Definindo o conjunto* ${}_NA = \{a \in A \mid Na = 0\}$ *temos* $\forall n > 0$

$$\begin{cases} H^0(G,A) = A^G \\ H^{2n-1}(G,A) = {}_NA/DA \\ H^{2n}(G,A) = A^G/NA \end{cases}$$

Demonstração. Consideramos a resolução $\mathbb{Z}[G]$-livre de $\mathbb{Z}$

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{D} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e aplicamos nesta o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$ resultando no complexo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{D^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \xrightarrow{N^*} \cdots$$

haja vista o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) & \longrightarrow & A \\ & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \arrow[r, "D^*"] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \arrow[r, "N^*"] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) \arrow[r, "D^*"] \arrow[d, "\varphi", "\simeq"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "D"] & A \arrow[r, "N"] & A \arrow[r, "D"] & \cdots \end{tikzcd}$$

com efeito, dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A)$ temos

$$D\varphi(f) = (x-1)\varphi(f) = (x-1)f(1)$$

por outro lado, lembrando que f é $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo e $D \in \mathbb{Z}[G]$ temos

$$\varphi D^*(f) = (D^*(f))(1) = (fD)(1) = f(D(1)) = Df(1) = (x-1)f(1)$$

logo um dos quadrados comuta. O outro quadrado comuta de igual forma, e podemos verificar isso por contas similares ao trocarmos $D \in \mathbb{Z}[G]$ por N. Podemos então calcular os grupos de cohomologia $H^i(G,A)$ através do complexo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{D} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{D} A \xrightarrow{N} \cdots$$

como

$$\mathrm{Ker}\, D \;=\; \{a \in A \mid Da = 0\}$$

$$\begin{aligned} &= \{a \in A \mid (x-1)a = 0)\} \\ &= \{a \in A \mid xa = a\} = \star \end{aligned}$$

sendo G grupo cíclico finito de ordem k gerado por x, temos que todo elemento de G é da forma x^j com $0 \leq j \leq k-1$. Assim, dado $a \in \operatorname{Ker} D$ temos que $x^j a = x^{j-1}xa = x^{j-1}a = \cdots = a$. Logo podemos escrever

$$\star = \{a \in A \mid x^j a = a,\ \forall j = 0, \ldots, k-1\} = \{a \in A \mid ga = a,\ \forall g \in G\} = A^G$$

também

$$\operatorname{Ker} N = \{a \in A \mid Na = 0\} = {}_N A, \quad \operatorname{Im} N = NA \qquad \text{e} \quad \operatorname{Im} D = DA$$

com isso temos

$$H^0(G, A) = \operatorname{Ker} D / \operatorname{Im} 0 = \simeq \operatorname{Ker} D = A^G$$

$$H^{2n-1}(G, A) = \operatorname{Ker} N / \operatorname{Im} D = {}_N A / DA$$

$$H^{2n}(G, A) = \operatorname{Ker} D / \operatorname{Im} N = A^G / NA$$

$\square$

Capítulo 2

Cohomologia de Álgebras

Neste capítulo consideraremos K como sendo um anel comutativo. Num primeiro instante veremos que formando o produto tensorial $A \otimes_K B^{op}$ entre as K-álgebras A e B, temos uma equivalência entre a categoria dos $(A-B)$-bimódulos e $A \otimes_K B^{op}$-módulos. Tomando um $(A-A)$-bimódulo M iremos considerar o n-ésimo K-módulo de cohomologia de A com coeficientes em M, ao qual denotaremos por $H^n(A, M)$, como sendo $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$. Construiremos uma resolução livre para A de $A \otimes A^{op}$-módulos, dita resolução barra de A, tal que $H^n(A, M)$ calculado sobre a resolução barra de A, possa ser identificado com a resolução original dada por Hochschild, sendo essa última construída sobre um complexo formado por conjuntos $C^n(A, M)$ de funções n-lineares de A em M. Daremos um nome específico para o caso em que M for igual a A e por fim daremos uma interpretação para os módulos de cohomologia $H^0(A, M)$ e $H^1(A, M)$. O principal referencial teórico deste capítulo provém de [6].

2.1 Equivalência entre as categoria dos $(A - B)$-bimódulos e $(A \otimes B^{op})$-módulos

Consideremos A, B K-álgebras e B^{op} a álgebra oposta de B. Formamos a álgebra $A \otimes_K B^{op}$. Se M é um $(A-B)$-bimódulo e $x \in M$ temos a função K-bilinear $f : A \times B^{op} \to M$ com $f(a, b) = axb$. Também temos o diagrama comutativo proveniente do produto tensorial

$$\begin{tikzcd} & A \otimes B^{op} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ A \times B^{op} \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Com isso, $\varphi(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i x b_i$, logo dado $\sum a_i \otimes b_i \in A \otimes B^{op}$ temos produto bem definido $(\sum a_i \otimes b_i)x = \sum a_i x b_i$ que torna M um $A \otimes B^{op}$-módulo. Também se M é $A \otimes B^{op}$-módulo então

$$ax = (a \otimes 1)x, \quad xb = (1 \otimes b)x$$

torna M um $(A{-}B)$-bimódulo. Podemos passar livremente da categoria dos $(A{-}B)$-bimódulos para $A \otimes B^{op}$-módulos e vice-versa. Consideremos a K-álgebra A na categoria de $(A - A)$-bimódulos, equivalentemente temos a categoria de $A \otimes A^{op}$-módulos (denotamos $A \otimes A^{op}$ por A^e). Como A é sobre si mesmo $(A - A)$-bimódulo então A é A^e-módulo onde temos

$$(\sum a_i \otimes b_i)x = \sum a_i x b_i \quad a_i, x \in A \text{ e } b_i \in A^{op}$$

Observe que A é cíclico como A^e-módulo tendo 1 como gerador, com efeito, dado $a \in A$, temos: $(a \otimes 1)1 = a \cdot 1 \cdot 1 = a$. Também temos o A^e-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \epsilon : & A^e & \longrightarrow & A \\ & \sum a_i \otimes b_i & \longmapsto & \sum a_i b_i \end{array}$$

pois $\epsilon(a \otimes b \cdot c \otimes d) = \epsilon(ac \otimes db) = (ac)(db)$ e também $(a \otimes b)\epsilon(c \otimes d) = (a \otimes b)cd = a(cd)b$

2.2 A resolução barra de A

Seja M um $(A - A)$-bimódulo ($= A^e$-módulo), definimos o n-ésimo módulo de cohomologia $H^n(A, M)$ de A com coeficientes em M como sendo $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$. Vamos considerar A como A^e-módulo. Assumamos A livre sobre K. Devemos definir uma resolução livre de A como A^e-módulos tal que o cálculo de $H^n(A, M)$ para esta resolução possa ser identificada com a resolução original dada por Hochschild para álgebras sobre corpos. Sejam

$$X_0 = A \otimes_K A$$
$$X_1 = A \otimes_K A \otimes_K A$$
$$\vdots$$
$$X_n = A \otimes_K A \otimes_K \ldots \otimes_K A = A^{\otimes_K^{n+2}}$$

Obs: Se M, N são $(A - A)$-bimódulos então $M \otimes_K N$ é $(A - A)$-bimódulo onde $a(x \otimes y) = ax \otimes y$, $(x \otimes y)a = x \otimes ya, \quad a \in A, x \in M$ e $y \in N$.
Segue que X_n é $(A - A)$-bimódulo em que

$$a(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = ax_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}$$
$$(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})a = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}a$$

Também temos que

$$\begin{aligned} X_0 &= A \otimes A \simeq A^e \\ X_1 &= A \otimes A \otimes A \simeq A^e \otimes A \\ &\vdots \\ X_n &\simeq A^e \otimes X_{n-2} \end{aligned}$$

como A^e-módulos. O isomorfismo é dado por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A^e \otimes X_{n-2} & \longrightarrow & X_n \\ & (a \otimes b) \otimes x & \longmapsto & a \otimes x \otimes b \end{array}$$

Como A é livre sobre K então X_n também é livre sobre K, com efeito

$$A \otimes A = K^{(\Lambda)} \otimes K^{(\Lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K \otimes \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K \simeq \bigoplus_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Lambda} K \otimes_K K \simeq \bigoplus_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Lambda} K = K^{(\Lambda \times \Lambda)}$$

e indutivamente, $X_n = A \otimes \ldots \otimes A = K^{\Lambda} \otimes \ldots \otimes K^{\Lambda} \simeq K^{(\Lambda^{n+2})}$,com isso, $X_0 \simeq A^e, X_1 \simeq A^e \otimes A, \ldots, X_n \simeq A^e \otimes X_{n-2}$ são livres sobre A^e, pois

$$X_n \simeq A^e \otimes X_{n-2} \simeq A^e \otimes K^{(\Lambda^n)} = A^e \otimes \bigoplus_{\Lambda^n} K \simeq \bigoplus_{\Lambda^n} A^e \otimes_K K \simeq \bigoplus_{\Lambda^n} A^e$$

com argumento similar a do produto tensorial temos únicos K-homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} d_n : & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} \\ & x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \end{array}$$

com efeito, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f : & A^{n+2} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ & (x_0, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \end{array}$$

é K-multilinear, e com isso temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[d, dashed, "d_n"] \\ A^{n+2} \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "f"'] & X_{n-1} \end{tikzcd}$$

de onde surge d_n. Segue da ação à direita e à esquerda de A que d_n é A^e-homomorfismo, pois

$$\begin{aligned} d_n(a(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})) &= d_n(a x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \\ &= a d_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) \end{aligned}$$

análogo à direita, e junto com o A^e-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \epsilon : & X_0 & \longrightarrow & A \\ & \sum a_i \otimes b_i & \longmapsto & \sum a_i b_i \end{array}$$

temos a sequência de A^e-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

esta sequência é chamada de resolução barra de A. Vejamos que esta sequência é exata o que prova que temos uma resolução livre de A como A^e-módulos. Faremos isso definindo homomorfismos contrativos

$$A \xrightarrow{S_{-1}} X_0 \xrightarrow{S_0} X_1 \xrightarrow{S_1} \cdots$$

que é uma sequência de K-homomorfismos $S_i : X_i \to X_{i+1}$ tal que valem as igualdades

$$\epsilon S_{-1} = 1_A, \quad d_1 S_0 + S_{-1}\epsilon = 1_{X_0}, \quad d_{n+1}S_n + S_{n-1}d_n = 1_{X_n}\ \forall n \geq 1$$

Definimos $S_n, n \geq -1$ sendo o seguinte K-homomorfismo

$$S_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = 1 \otimes x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}$$

Denotando ϵ por d_0 e sendo $x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \in X_n$, temos $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} &(d_{n+1}S_n + S_{n-1}d_n)(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) \\ &\quad = d_{n+1}(S_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})) + S_{n-1}(d_n(x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})) \\ &\quad = d_{n+1}(1 \otimes x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) \\ &\quad + S_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_o \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}\right) \\ &\quad = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1} 1 \otimes \ldots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \\ &\quad + 1 \otimes \left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}\right) \\ &\quad = x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-1 \otimes \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j x_0 \otimes \ldots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \right) \\
&+1 \otimes \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_0 \otimes \ldots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_{n+1} \right) \\
&= x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que $\epsilon d_1 = 0$, pois, $\epsilon d_1(x_0 \otimes x_1 \otimes x_2) = \epsilon(x_0 x_1 \otimes x_2 - x_0 \otimes x_1 x_2) = (x_0 x_1)x_2 - x_0(x_1 x_2) = 0$ e da fórmula $d_{n+1}S_n + S_{n-1}d_n = 1_{X_n}$ vale

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} S_n &= d_n 1_{X_n} - d_n S_{n-1} d_n \\
&= (1_{X_{n-1}} - d_n S_{n-1}) d_n \\
&= S_{n-2} d_{n-1} d_n \quad \forall n \geq 1
\end{aligned}$$

onde por recorrência temos $d_n d_{n+1} S_n = 0 \ \forall n \geq 1$. Também $\langle \operatorname{Im} S_n \rangle = X_{n+1}$, pois dado $x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+2} \in X_{n+1}$ temos

$$x_0 \otimes \ldots \otimes x_{n+2} = x_0(1 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+2}) = a_0 S_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+2})$$

logo $d_n d_{n+1} = 0 \ \forall n \geq 1$. Lembrando que a aplicação $\epsilon : X_0 \longrightarrow A$ é a mutiplicação em A, isto é, $\epsilon(a \otimes b) = ab \ \forall a, b \in A$, tem-se que ϵ é sobrejetivo e com isso temos a sequência exata de A^e-módulos $\ldots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$ como queríamos.

Segue de [11] que se trocarmos $X_n = A^{\otimes^{n+2}}$ para $n \geq 1$ pela expressão $A \otimes \overline{A}^{\otimes^n} \otimes A$ onde $\overline{A} = A/K$, junto com os A^e-homomorfismos $d_n : A \otimes \overline{A}^{\otimes^n} \otimes A \longrightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1}} \otimes A$ definidos como antes, ainda assim, tem-se que

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_K \overline{A}^{\otimes^2} \otimes_K A \xrightarrow{d_2} A \otimes_K \overline{A} \otimes_K A \xrightarrow{d_1} A \otimes_K A \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

é ainda uma resolução livre de A como A^e-módulos. Pela analogia com a resolução barra de A, chamaremos esta de resolução barra de A normalizada.

2.3 Cohomologia para uma K-álgebra

Para um $(A - A)$-bimódulo M dado, temos o complexo de cocadeia

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A^e}(X_0, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A^e}(X_1, M) \longrightarrow \cdots$$

cujos módulos de cohomologia são os módulos de cohomologia de A com coeficientes em M. Temos também a sequência de isomorfismos de K-módulos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_K(X_{n-2}, M) &\simeq \operatorname{Hom}_K(X_{n-2}, \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, M)) \simeq \operatorname{Hom}_{A^e}(X_{n-2} \otimes A^e, M) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e \otimes X_{n-2}, M) \simeq \operatorname{Hom}_{A^e}(X_n, M)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(X_n, M) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array}$$

e

$$\varphi(f)(a \otimes x \otimes b) = a \otimes b \cdot f(x) \quad \forall x \in X_{n-2}, a, b \in A$$

com efeito, o isomorfismo φ é composta dos isomorfismos citados anteriormente, sendo estes dados por

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, M)) \\ & f & \longmapsto & \alpha f \end{array}$$

onde dado $x \in X_{n-2}$, temos:

$$\begin{array}{rccl} \alpha f(x): & A^e & \longrightarrow & M \\ & a & \longmapsto & a f(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, M)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(X_{n-2} \otimes A^e, M) \\ & g & \longmapsto & \beta g \end{array}$$

onde $\beta g(x \otimes y) = g(x)(y)$

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathrm{Hom}_{A^e}(X_{n-2} \otimes A^e, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e \otimes X_{n-2}, M) \\ & h & \longmapsto & \gamma h \end{array}$$

onde $\gamma h(y \otimes x) = h(x \otimes y)$

$$\begin{array}{rccl} \epsilon: & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e \otimes X_{n-2}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(X_n, M) \\ & t & \longmapsto & \epsilon t \end{array}$$

onde, $\epsilon t(a \otimes x \otimes b) = t(a \otimes b \otimes x)$ com $x \in X_{n-2}, a, b \in A$. Dessa forma dado $x \in X_{n-2}, a, b \in A$ e $f \in \mathrm{Hom}_K(X_{n+2}, M)$ podemos verificar de fato que

$$\begin{aligned} \varphi(f)(a \otimes x \otimes b) &= \epsilon\gamma\beta\alpha(f)(a \otimes x \otimes b) \\ &= \gamma\beta\alpha(f)(a \otimes b \otimes x) \\ &= \beta\alpha(f)(x \otimes a \otimes b) \\ &= \alpha(f)(x)(a \otimes b) \\ &= a \otimes b \cdot f(x) \end{aligned}$$

Segue da definição de produto tensorial que a cada função n-linear $f : A^n \longrightarrow M$ temos uma correspondente função K-linear $F : A^{\otimes^n} \longrightarrow M$ tal que $Fj = f$; reciprocamente, usando j, cada função K-linear $F : A^{\otimes^n} \longrightarrow M$ dá origem a uma função n-linear $f = Fj$. O diagrama do produto tensorial a seguir ilustra o que mencionamos

$$\begin{tikzcd} & A^{\otimes^n} \arrow[d, "F"] \\ A^n \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Dessa forma podemos identificar $\mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, M)$ com o K-módulo das funções n-lineares de A^n sobre M. Tais funções tendo A^n no domínio e M no contradomínio são K-homomorfismos de A em M se todos menos um dos argumentos ficarem fixados. Temos que o isomorfismo anterior implica em um isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_{A^e}(X_n, M)$ e o K-módulo $C^n(A, M)$ das funções K-lineares $f : A^n \longrightarrow M$. Definimos para $f \in C^n(A, M), \delta f \in C^{n+1}(A, M)$ dado por

$$\begin{aligned} &\delta f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \\ &\quad x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} \end{aligned}$$

com isso podemos verificar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{A^e}(X_n, M) \arrow[r, "d^*_{n+1}"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(X_{n+1}, M) \\ C^n(A, M) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\delta"] & C^{n+1}(A, M) \arrow[u, "\psi"] \end{tikzcd}$$

onde ψ é a composta dos isomorfismos θ e φ como segue

$$C^n(A, M) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{A^e}(X_n, M)$$

e θ é dado por

$$\begin{array}{rccc} \theta : & C^n(A, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(X_{n-2}, M) \\ & f & \longmapsto & \theta f \end{array}$$

onde $\theta f(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Vejamos a comutatividade

$$\begin{aligned} d^*_{n+1}\psi(f)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) &= \psi(f)d_{n+1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\ &= \varphi\theta(f)d_{n+1}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\ &= \varphi\theta(f)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}\right) \\ &= \varphi\theta(f)(a_0 a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \\ &\quad +(-1)^n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n a_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0a_1 \otimes a_{n+1})\theta(f)(a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) \\
&\quad +(a_0 \otimes a_{n+1})\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\theta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\
&\quad +(a_0 \otimes a_na_{n+1})(-1)^n\theta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) \\
&= a_0a_1\theta(f)(a_2 \otimes \ldots \otimes a_n)a_{n+1} \\
&\quad +a_0\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\theta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n)\right)a_{n+1} \\
&\quad +a_0(-1)^n\theta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1})a_na_{n+1} \\
&= (a_0 \otimes a_{n+1})[a_1f(a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^if(a_1, \ldots, a_ia_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&\quad +(-1)^nf(a_1, \ldots, a_{n-1})a_n]
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\psi\delta(f)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) &= \varphi\theta\delta(f)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= (a_0 \otimes a_{n+1})\theta\delta(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&= (a_0 \otimes a_{n+1})\delta(f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) \\
&= (a_0 \otimes a_{n+1})[a_1f(a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^if(a_1, \ldots, a_ia_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&\quad +(-1)^nf(a_1, \ldots, a_{n-1})a_n]
\end{aligned}$$

Segue que $C^\bullet(A, M)$ é um complexo de cocadeia isomorfo à $\mathrm{Hom}_{A^e}(X_\bullet, M)$e com isso temos os mesmos módulos de cohomologia e consequentemente o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Seja A uma K-álgebra (livre sobre K), M um $(A-A)$-bimódulo e $C^n(A, M)$, $n \geq 0$, o K-módulo das funções n-lineares de A^n em M. Sejam $\delta : C^n(A, M) \longrightarrow C^{n+1}(A, M)$, $Z^n(A, M) = \operatorname{Ker}\delta \subset C^n(A, M)$ e $B^n(A, M) = \operatorname{Im}\delta(C^{n-1}(A, M))$. Então $B^n(A, M)$ é submódulo de $Z^n(A, M)$ e $Z^n(A, M)/B^n(A, M) \simeq H^n(A, M)$, o n-ésimo módulo de cohomologia de A com coeficientes em M.*

No caso particular em que tomamos o $(A - A)$-bimódulo M como sendo o próprio A, então o n-ésimo módulo de cohomologia $H^n(A, M) = H^n(A, A)$ é denotado por $HH^n(A)$ e chamado de n-ésimo módulo de cohomologia de Hochschild de A.

2.4 Os módulos de cohomologia $H^0(A, M)$ e $H^1(A, M)$

Vamos agora analisar $H^0(A, M)$ e $H^1(A, M)$. É sabido que $C^0(A, M) = M$, logo tomando $u \in M$ temos que $\delta_u \in C^1(A, M)$, isto é

$$\begin{array}{rccl} \delta_u : & A & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & \delta_u(x) = xu - ux \end{array}$$

logo $Z^0(A, M)$ é o submódulo de M dos elementos u tais que $ux = xu \forall x \in A$, como $C^{-1}(A, M) = 0$ temos $H^0(A, M) \simeq Z^0(A, M)$.
Seja $f \in C^1(A, M)$, então

$$\delta(f)(x, y) = xf(y) - f(xy) + f(x)y \quad \forall x, y \in A$$

assim $\delta(f) = 0 \Leftrightarrow f$ é K-homomorfismo tal que $f(xy) = xf(y) + f(x)y$. Funções como esta propriedade é denominada **derivação** de A sobre o $(A - A)$-bimódulo M. Se $u \in M, u$ determina uma derivação δ_u dita interna e é dada por

$$\delta_u(x) = xu - ux$$

podemos observar que de fato δ_u é uma derivação, pois, $\delta_u(xy) = xy(u) - (u)xy = x(yu) - x(uy) + (xu)y - (ux)y = x(yu - uy) + (xu - ux)y = x\delta_u(y) + \delta_u(x)y$. Denotando por $\mathrm{Der}(A, M)$ o módulo das derivações de A em M e $\mathrm{Inder}(A, M)$ o módulo das derivações internas, temos que $\mathrm{Inder}(A, M)$ é submódulo de $\mathrm{Der}(A, M)$. Dado $g \in C^1(A, M)$ então $g \in B^1(A, M)$ se e só se $g = \delta(f)$ para algum $f \in C^0(A, M) = M$, logo $g(a) = \delta(f)(a) = af - fa$, ou seja, g é uma derivação interna e com isso concluimos que

$$H^1(A, M) \simeq \mathrm{Der}(A, M)/\,\mathrm{Inder}(A, M)$$

Capítulo 3

Cohomologia de Hochschild de uma Álgebra Quociente

Neste capítulo consideraremos K sendo um anel comutativo e f um polinômio mônico em $K[x]$. Formando o quociente $K[x]/\langle f\rangle$ ao qual denotaremos por A, buscaremos calcular uma resolução projetiva de A como A^e-módulos e todos os K-módulos de cohomologia de Hochschild dessa álgebra. No que diz respeito aos K-módulos de cohomologia de Hochschild de A, explicitaremos estes em termos do conceito de derivada e conjunto anulador em $K[x]$. Por fim faremos algumas observações importantes para o caso particular em que tomaremos f sendo x^n e que será importante base para estudos posteriores. Os principais referenciais teóricos deste capítulo são [7] e [8], sendo que a construção da resolução projetiva antes citada é definida em [7] e é também onde pode ser encontrado resultados que explicitam as homologias de Hochschild de A. Em [8] foram calculadas as cohomologias de Hochschild de A a partir da mesma resolução.

3.1 Uma resolução projetiva para a K-álgebra $K[x]/\langle f\rangle$

Consideremos $A = K[x]/\langle f\rangle$, $f = x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \ldots + f_0 \in K[x]$ polinômio mônico de grau n e $\langle f\rangle$ ideal de $K[x]$ gerado por f. Consideremos as funções

$$\begin{array}{rccl} T: & A & \longrightarrow & A^e \\ & P & \longmapsto & 1\otimes P - P\otimes 1 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \mu: & A^e & \longrightarrow & A \\ & P\otimes Q & \longmapsto & PQ \end{array}$$

vale ressaltar que como K é comutativo, consequentemente A também é, então $A = A^{op}$ e $A^{\otimes 2} = A^e$. A função T definida anteriormente é dita uma série de Taylor e foi definida em [19]. Vejamos o seguinte resultado

Teorema 3.1 *Para qualquer que seja o polinômio $P \in A$ tem-se que $T(x)$ divide $T(P)$. Explicitamente, se $P = \sum_{i=0}^{l} p_i x^i$ então*

$$\frac{T(P)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{l} p_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}$$

se definirmos $T : K[x] \longrightarrow K[x]^e$ pela mesma expressão, ainda assim teríamos o mesmo resultado.

Demonstração. Para $i \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} T(x)\sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1} &= (1\otimes x - x\otimes 1)\sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1}(1\otimes x)(x^j \otimes x^{i-j-1}) - \sum_{j=0}^{i-1}(x\otimes 1)(x^j \otimes x^{i-j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j} - \sum_{j=0}^{i-1} x^{j+1} \otimes x^{i-j-1} \\ &= x^0 \otimes x^i - x^i \otimes x^0 \\ &= T(x^i) \end{aligned}$$

com isso, $T(x^i)/T(x) = \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}$. Para $i = 0$, como $T(x^0) = T(1) = 1\otimes 1 - 1 \otimes 1 = 0$ vale $T(x)\cdot 0 = 0 = T(x^0)$, ou seja, $T(x^0)/T(x) = 0$. Sendo $P = \sum_{i=0}^{l} p_i x^i$, então

$$\frac{T(P)}{T(x)} = \frac{T\left(\sum_{i=0}^{l} p_i x^i\right)}{T(x)} = \sum_{i=0}^{l} p_i \frac{T(x^i)}{T(x)} = \sum_{i=1}^{l} p_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}$$

□

Segue desse teorema que para quaisquer polinômios P, Q temos

$$T(P)\frac{T(Q)}{T(x)} = \frac{T(P)T(Q)}{T(x)} = \frac{T(P)}{T(x)}T(Q)$$

com efeito, sendo $P = \sum_{i=0}^{l} p_i x^i$ e $Q = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i$ temos

$$T(P) = T(x)\sum_{i=1}^{l} p_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}$$

com isso

$$T(P)T(Q) = T(x)\left(\sum_{i=1}^{l} p_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right) T(Q)$$

logo

$$\frac{T(P)T(Q)}{T(x)} = \left(\sum_{i=1}^{l} p_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right) T(Q) = \frac{T(P)}{T(x)} T(Q)$$

e analogamente

$$T(Q) = \left(\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right) T(x)$$

com isso

$$T(P)T(Q) = T(P)\left(\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right) T(x)$$

logo

$$\frac{T(P)T(Q)}{T(x)} = T(P)\left(\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right) = T(P)\frac{T(Q)}{T(x)}$$

A seguir veremos duas identidades envolvendo a aplicação T que serão úteis posteriormente. A primeira delas válida para polinômios P e Q tanto em A como em $K[x]$ é

$$T(PQ) = PT(Q) + QT(P) + T(P)T(Q) \tag{3.1}$$

que segue do fato que

$$\begin{aligned}
&PT(Q) + QT(P) + T(P)T(Q)\\
&= P \otimes 1(1 \otimes Q - Q \otimes 1) + Q \otimes 1(1 \otimes P - P \otimes 1) + (1 \otimes P - P \otimes 1)(1 \otimes Q - Q \otimes 1)\\
&= P \otimes Q - PQ \otimes 1 + Q \otimes P - QP \otimes 1 + 1 \otimes PQ - Q \otimes P - P \otimes Q + PQ \otimes 1\\
&= 1 \otimes PQ - PQ \otimes 1\\
&= T(PQ)
\end{aligned}$$

A segunda, válida para polinômios P em A é

$$\frac{T(Pf)}{T(x)} = P \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)} = 1 \otimes P \frac{T(f)}{T(x)} \tag{3.2}$$

que segue do fato que

$$\frac{T(P)T(f)}{T(x)} = \frac{T(P)}{T(x)} T(f)$$

mas $T(f) = 0$ em $A \otimes A$, logo $T(P)T(f)/T(x) = 0$, ou seja,

$$0 = \frac{(1 \otimes P - P \otimes 1)T(f)}{T(x)} = \frac{(1 \otimes P)T(f)}{T(x)} - \frac{(P \otimes 1)T(f)}{T(x)}$$

e daí

$$P \otimes 1\frac{T(f)}{T(x)} = 1 \otimes P\frac{T(f)}{T(x)}$$

Para a última igualdade usamos (3.1) e o fato de que $T(x)$ divide $T(P),\ \forall P$. Assim, $T(Pf) = PT(f) + fT(P) + T(P)T(f)$ e como $f = 0$ e $T(f) = 0$ em A^e, vale:

$$\frac{T(Pf)}{T(x)} = \frac{PT(f)}{T(x)} + \frac{fT(P)}{T(x)} + \frac{T(P)T(f)}{T(x)} = P\frac{T(f)}{T(x)} + f\frac{T(P)}{T(x)} + \frac{T(P)}{T(x)}T(f) = P \otimes 1\frac{T(f)}{T(x)}$$

donde seguem as igualdades. Vejamos como construir uma resolução projetiva para A.

Teorema 3.2 *Seja $A = K[x]/\langle f\rangle$ onde $f = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i x^i$ é mônico. Considerando a sequência:*

$$\cdots \xrightarrow{d_3} A^e \xrightarrow{d_2} A^e \xrightarrow{d_1} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{3.3}$$

onde $d_{2i+1}(a \otimes b) = (a \otimes b)T(x)$ e $d_{2(i+1)}(a \otimes b) = (a \otimes b)T(f)/T(x), \forall i \geq 0$. Então (3.3) é uma resolução projetiva de A como A^e-módulos.

Demonstração. Para verificar que (3.3) é complexo é suficiente ter $\mu T(x), T(x)\frac{T(f)}{T(x)}$ e $\frac{T(f)}{T(x)}T(x)$ nulos em A^e,Vejamos:

$$\mu T(x) = \mu(1 \otimes x - x \otimes 1) = \mu(1 \otimes x) - \mu(x \otimes 1) = 1 \cdot x - x \cdot 1 = x - x = 0$$

$$T(x)\frac{T(f)}{T(x)} = \frac{T(x)T(f)}{T(x)} = \frac{T(x)}{T(x)}T(f) = \frac{T(x)}{T(x)}0 = 0$$

$$\frac{T(f)}{T(x)}T(x) = \frac{T(f)T(x)}{T(x)} = T(f)\frac{T(x)}{T(x)} = 0\frac{T(x)}{T(x)} = 0$$

Construimos agora homomorfismos de A-módulos à direita $S_0 : A \longrightarrow A^e$, $-S_1 : A^e \longrightarrow A^e$ e $S_2 : A^e \longrightarrow A^e$ que são retrações homotópicas para o complexo (3.3). Estas são definidas como:

$$S_0(P) = 1 \otimes P, \quad S_1(P \otimes 1) = \frac{T(P)}{T(x)} \quad \text{e} \quad S_2(P \otimes 1) = \overline{Px} \otimes 1$$

onde a notação $\overline{Px}$ significa o quociente da divisão de Px por f, o que funciona para $f \in K[x]$ mesmo K sendo anel comutativo, pois f é mônico. No geral, dado um polinômio $P \in A$ denotamos através do algoritmo da divisão $P = \overline{P}f + r(P)$, onde $r(P)$ é o resto da divisão de P por f e $\overline{P}$ o quociente. Temos o seguinte diagrama:

$$\cdots \underset{-S_1}{\overset{d_3}{\rightleftarrows}} A^e \underset{S_2}{\overset{d_2}{\rightleftarrows}} A^e \underset{-S_1}{\overset{d_1}{\rightleftarrows}} A^e \underset{S_0}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 0$$

o proximo passo é verificar que valem as igualdades

$$\mu S_0 = I_A, \quad S_0\mu - d_1 S_1 = I_{A^e}, \quad S_2 d_{2i} - d_{2i+1}S_1 = I_{A^e} \quad \text{e} \quad d_{2(i+1)}S_2 - S_1 d_{2i+1} = I_{A^e}$$

Para as duas primeiras equações, temos

$$\mu S_0(P) = \mu(1 \otimes P) = 1 \cdot P = P$$

$$\begin{aligned}
(S_0\mu - d_1S_1)(P \otimes 1) &= S_0\mu(P \otimes 1) - d_1S_1(P \otimes 1) = S_0(P) - d_1\left(\frac{T(P)}{T(x)}\right) \\
&= 1 \otimes P - \frac{T(P)}{T(x)}T(x) = 1 \otimes P - (1 \otimes P - P \otimes 1) = P \otimes 1
\end{aligned}$$

as outras duas equações serão verificadas nos geradores de A^e como A-módulos à direita, a saber, $\{1 \otimes 1, x \otimes 1, \ldots, x^{n-1} \otimes 1\}$. Também veremos sua validade nas duas primeiras vezes que aparecem na sequência, pois as demais são análogas já que os operadores $d's$ são definidos de forma análoga dentro da mesma paridade nos índices. Lembrando que grau de f é n, então para $k < n-1$, $\overline{x^{k+1}} = 0$.

Considerando $k < n-1$, temos:

$$\begin{aligned}
(-S_1d_1 + d_2S_2)(x^k \otimes 1) &= -S_1d_1(x^k \otimes 1) + d_2S_2(x^k \otimes 1) \\
&= -S_1(x^k \otimes 1)(1 \otimes x - x \otimes 1) + d_2(\overline{x^k x} \otimes 1) \\
&= -S_1(x^k \otimes x - x^{k+1} \otimes 1) + d_2(0 \otimes 1) \\
&= -S_1(x^k \otimes 1)x + S_1(x^{k+1} \otimes 1) \\
&= -\frac{T(x^k)}{T(x)}x + \frac{T(x^{k+1})}{T(x)}
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
-T(x^k)x + T(x^{k+1}) &= -(1 \otimes x^k - x^k \otimes 1)x + (1 \otimes x^{k+1} - x^{k+1} \otimes 1) \\
&= x^k \otimes x - x^{k+1} \otimes 1 = x^k(1 \otimes x - x \otimes 1) = (x^k \otimes 1)T(x)
\end{aligned}$$

logo

$$-\frac{T(x^k)}{T(x)}x + \frac{T(x^{k+1})}{T(x)} = \frac{-T(x^k)x + T(x^{k+1})}{T(x)} = (x^k \otimes 1)\frac{T(x)}{T(x)} = x^k \otimes 1$$

Para o caso de x^{n-1} (lembrando que $\overline{x^n} = 1$), temos:

$$\begin{aligned}
(-S_1d_1 + d_2S_2)(x^{n-1} \otimes 1) &= -S_1d_1(x^{n-1} \otimes 1) + d_2S_2(x^{n-1} \otimes 1) \\
&= -S_1(x^{n-1} \otimes 1)(1 \otimes x - x \otimes 1) + d_2(\overline{x^n} \otimes 1) \\
&= -S_1(x^{n-1} \otimes x) + S_1(x^n \otimes 1) + d_2(1 \otimes 1) \\
&= -S_1(x^{n-1} \otimes 1)x + S_1(x^n \otimes 1) + \frac{T(f)}{T(x)} \\
&= -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n)}{T(x)} + \frac{T(f)}{T(x)}
\end{aligned}$$

$$= \quad \star$$

como $x^n - (x^n - f) \in \langle f \rangle$, no quociente (em A), $x^n = x^n - f$, com isso

$$\begin{aligned}
\star &= -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n)}{T(x)} + \frac{T(f)}{T(x)} = -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n - f)}{T(x)} + \frac{T(f)}{T(x)} \\
&= -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n)}{T(x)} - \frac{T(f)}{T(x)} + \frac{T(f)}{T(x)} \\
&= -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n)}{T(x)} \\
&= \star\star
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
-T(x^{n-1})x + T(x^n) &= -(1 \otimes x^{n-1} - x^{n-1} \otimes 1)x + (1 \otimes x^n - x^n \otimes 1) \\
&= x^{n-1} \otimes x - x^n \otimes 1 \\
&= (x^{n-1} \otimes 1)(1 \otimes x - x \otimes 1) \\
&= (x^{n-1} \otimes 1)T(x)
\end{aligned}$$

logo

$$\star\star = -\frac{T(x^{n-1})}{T(x)}x + \frac{T(x^n)}{T(x)} = \frac{(x^{n-1} \otimes 1)T(x)}{T(x)} = x^{n-1} \otimes 1$$

A última igualdade faremos por indução nos geradores. Para $x^k \otimes 1$ com $k = 0$, temos

$$\begin{aligned}
(S_2 d_2 - d_3 S_1)(1 \otimes 1) &= S_2 d_2 (1 \otimes 1) - d_3 S_1 (1 \otimes 1) \\
&= S_2 \left(1 \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)}\right) - d_3 \left(\frac{T(1)}{T(x)}\right) \\
&= S_2 \left(\frac{T(f)}{T(x)}\right) - \frac{T(1)}{T(x)} T(x) \\
&= S_2 \left(\frac{T(f)}{T(x)}\right) - T(1) \\
&= S_2 \left(\frac{T(f)}{T(x)}\right) = S_2 \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{j-i-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} S_2(x^j \otimes x^{j-i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} S_2(x^j \otimes 1) x^{j-i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} (\overline{x^{j+1}} \otimes 1) x^{j-i-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sum_{j=0}^{i-1} (\overline{x^{j+1}} \otimes 1) x^{j-i-1} + f_n \sum_{j=0}^{n-1} (\overline{x^{j+1}} \otimes 1) x^{j-i-1} \\ &= \star \end{aligned}$$

para $i \leq n-1 \Rightarrow j \leq i-1 \leq n-2$, com isso, $j+1 \leq n-1$ e $\overline{x^{j+1}} = 0$, como f é mônico temos

$$\star = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sum_{j=0}^{i-1} (\underbrace{\overline{x^{j+1}}}_{=0} \otimes 1) x^{j-i-1} + \sum_{j=0}^{n-2} (\underbrace{\overline{x^{j+1}}}_{=0} \otimes 1) x^{j-i-1} + (\overline{x^n} \otimes x^0) = 1 \otimes 1$$

Suponhamos agora que vale para x^k, isto é,

$$\begin{aligned} (S_2 d_2 - d_3 S_1)(x^k \otimes 1) = x^k \otimes 1 \quad &\Leftrightarrow \quad S_2 d_2 (x^k \otimes 1) - d_3 S_1 (x^k \otimes 1) = x^k \otimes 1 \\ &\Leftrightarrow \quad S_2 \left(x^k \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)} \right) - \frac{T(x^k)}{T(x)} T(x) = x^k \otimes 1 \\ &\Leftrightarrow \quad S_2 \left(x^k \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)} \right) = T(x^k) + x^k \otimes 1 \end{aligned}$$

para x^{k+1}, usaremos a identidade (3.2).

$$\begin{aligned} S_2 \left(x^{k+1} \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)} \right) &= S_2 \left(1 \otimes x^{k+1} \frac{T(f)}{T(x)} \right) = S_2 \left(1 \otimes x \cdot 1 \otimes x^k \frac{T(f)}{T(x)} \right) \\ &= S_2 \left(1 \otimes x^k \frac{T(f)}{T(x)} x \right) = S_2 \left(x^k \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)} \right) x \\ &= (T(x^k) + x^k \otimes 1) x = (1 \otimes x^k - x^k \otimes 1 + x^k \otimes 1) x \\ &= 1 \otimes x^{k+1} = 1 \otimes x^{k+1} - x^{k+1} \otimes 1 + x^{k+1} \otimes 1 \\ &= T(x^{k+1}) + x^{k+1} \otimes 1 \end{aligned}$$

Portanto a cohomologia de Hochschild de A é a cohomologia do complexo obtido da aplicação de $\mathrm{Hom}_{A^e}(\_, A)$ à resolução (3.3).

□

3.2 Os K-módulos de cohomologia de Hochschild de $K[x]/\langle f \rangle$

Se denotarmos por f' a derivada de f e $\mathrm{Ann}(g) = \{a \in A \mid ga = 0\}$ o anulador de g $\forall g \in K[x]$, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja* $A = K[x]/\langle f \rangle$

1. *Usando o isomorfismo,* $\operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) \simeq A$*, o complexo do qual será calculado as cohomologias de Hochschild toma a forma*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f'} \cdots$$

onde $f'(P) = f' \cdot P$*.*

2. *Os módulos de cohomologia de Hochschild de* A *são:*

$$HH^i(A) = \begin{cases} A & \text{se } i = 0 \\ \operatorname{Ann}(f') & \text{se } i \text{ ímpar} \\ A/\langle f' \rangle & \text{se } i \text{ par} \end{cases}$$

Demonstração.

1- Usando o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) & \longrightarrow & A \\ & g & \longmapsto & g(1 \otimes 1) \end{array}$$

temos que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[r, "d^*_{2i+1}"] \arrow[d, "\psi"] & \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "0"] & A \end{tikzcd}$$

com efeito, haja vista que A é comutativo e dado a aplicação A^e-linear g, temos:

$$\begin{aligned} \psi d^*_{2i+1}(g) &= d^*_{2i+1} g(1 \otimes 1) = g d_{2i+1}(1 \otimes 1) \\ &= g((1 \otimes 1)(1 \otimes x - x \otimes 1)) = g(1 \otimes x - x \otimes 1) = g(1 \otimes x) - g(x \otimes 1) \\ &= g((1 \otimes x)(1 \otimes 1)) - g((x \otimes 1)(1 \otimes 1)) \\ &= (1 \otimes x) g(1 \otimes 1) - (x \otimes 1) g(1 \otimes 1) = 1 g(1 \otimes 1) x - x g(1 \otimes 1) 1 = 0 \end{aligned}$$

Também o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[r, "d^*_{2i}"] \arrow[d, "\psi"] & \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "f'"] & A \end{tikzcd}$$

$$\psi d^*_{2i}(g) = d^*_{2i} g(1 \otimes 1) = g d_{2i}(1 \otimes 1) = g\left(1 \otimes 1 \frac{T(f)}{T(x)}\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} g(x^j \otimes x^{i-j-1}) = \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j \otimes x^{i-j-1} g(1\otimes 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} x^j g(1\otimes 1) x^{i-j-1} = \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} g(1\otimes 1) x^j x^{i-j-1} \\
&= g(1\otimes 1)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=0}^{i-1} x^{i-1}\right) = g(1\otimes 1)\sum_{i=1}^{n} f_i i x^{i-1} = g(1\otimes 1) f' \\
&= f'\psi(g)
\end{aligned}
$$

logo temos que os complexos a seguir conduzem às mesmas cohomologias, como mostra a figura

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[l, "d_3^*"'] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[l, "d_2^*"'] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \arrow[l, "d_1^*"'] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[l] \\
\cdots & A \arrow[l, "0"] & A \arrow[l, "f'"] & A \arrow[l, "0"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

2- Segue do item anterior que

$$HH^0(A) = \frac{\mathrm{Ker}\, 0}{\mathrm{Im}\, 0} = \frac{A}{0} \simeq A$$

$$HH^{2i+1}(A) = \frac{\mathrm{Ker}(f')}{\mathrm{Im}\, 0} \simeq \mathrm{Ker}(f') = \{P \in A \mid f'P = 0\} = \mathrm{Ann}\, f'$$

$$HH^{2i}(A) = \frac{\mathrm{Ker}\, 0}{\mathrm{Im}(f')} = \frac{A}{\langle f' \rangle}$$

□

3.3 Mais informações sobre a álgebra quociente para o caso $f = x^n$

Nesta seção faremos algumas observações importantes sobre a álgebra quociente $A = K[x]/\langle f \rangle$ no caso em que tomaremos o polinômio mônico f como sendo x^n. Tais resultados serão de fundamental importância quando iremos tratar da estrutura de anel de cohomologia da álgebra $(K[x]/\langle x^n \rangle)\#KG$ no caso em que K for um corpo. Começamos então definindo a função

$$
\begin{aligned}
\epsilon_0 : \quad A \otimes \overline{A}^{\otimes R} \otimes A &\longrightarrow A \otimes \overline{A}^{\otimes R+1} \otimes A \\
a_0 \otimes \ldots \otimes a_{R+1} &\longmapsto 1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{R+1}
\end{aligned}
$$

onde $\overline{A} = A/K$ e $\overline{A}^{\otimes R} = \underbrace{\overline{A} \otimes \overline{A} \otimes \ldots \otimes \overline{A}}_{R \text{ vezes}}$. Definimos também morfismos de A^e-módulos $\psi's$ como

$$\begin{array}{rcll} \psi_0 = Id: & A^e & \longrightarrow & A^e \\ & a \otimes b & \longmapsto & a \otimes b \\ \psi_1: & A \otimes \overline{A} \otimes A & \longrightarrow & A^e \\ & 1 \otimes x^k \otimes 1 & \longmapsto & Tx^k/Tx = \sum_{j=0}^{k-1} x^j \otimes x^{k-j-1} \\ \psi_2: & A \otimes \overline{A}^e \otimes A & \longrightarrow & A^e \\ & 1 \otimes x^k \otimes x^l \otimes 1 & \longmapsto & -1 \otimes \overline{x^k x^l} = -1 \otimes \overline{x^{k+l}} \end{array} \tag{3.4}$$

vale lembrar que o traço em cima do polinômio representa o quociente da divisão por f que neste caso é x^n, ou seja, dado um polinômio qualquer $q(x)$ usamos o algoritmo da divisão e temos única espressão $q(x) = \overline{q(x)} \cdot x^n + r(x)$, onde $r(x)$ denota o resto da divisão. Voltando na definição da família ψ, para índice $R > 2$ definimos $\psi_R : A \otimes \overline{A}^{\otimes R} \otimes A \longrightarrow A^e$ por

$$\psi_R(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_R} \otimes 1) = -\psi_{R-2}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{R-2}} \otimes 1)\psi_2(1 \otimes x^{i_{R-1}} \otimes x^{i_R} \otimes 1)$$

segue da definição que

$$\begin{aligned} &\psi_{2r}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{2r}} \otimes 1) = -\psi_{2r-2}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{2r-2}} \otimes 1)\psi_2(1 \otimes x^{i_{2r-1}} \otimes x^{i_{2r}} \otimes 1) \\ &= (-1)^2\psi_{2r-4}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{2r-4}} \otimes 1)\psi_2(1 \otimes x^{i_{2r-3}} \otimes x^{i_{2r-2}} \otimes 1)\psi_2(1 \otimes x^{i_{2r-1}} \otimes x^{i_{2r}} \otimes 1) \\ &= \ldots = (-1)^r\psi_2(1 \otimes x^{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes 1) \ldots \psi_2(1 \otimes x^{i_{2r-1}} \otimes x^{i_{2r}} \otimes 1) \\ &= (-1)^r(-1)1 \otimes \overline{x^{i_1}x^{i_2}} \ldots (-1)1 \otimes \overline{x^{i_{2r-1}}x^{i_{2r}}} \\ &= (-1)^{2r}1 \otimes \overline{x^{i_1}x^{i_2}} \ldots 1 \otimes \overline{x^{i_{2r-1}}x^{i_{2r}}} = 1 \otimes \overline{x^{i_1}x^{i_2}} \ldots \overline{x^{i_{2r-1}}x^{i_{2r}}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\psi_{2r+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{2r+1}} \otimes 1) \\ &\quad = \ldots = (-1)^r\psi_1(1 \otimes x^{i_1} \otimes 1)\psi_2(1 \otimes x^{i_2} \otimes x^{i_3} \otimes 1) \ldots \psi_2(1 \otimes x^{i_{2r}} \otimes x^{i_{2r+1}} \otimes 1) \\ &\quad = (-1)^r(Tx^{i_1}/Tx)(-1)1 \otimes \overline{x^{i_2}x^{i_3}} \ldots (-1)\overline{x^{i_{2r}}x^{i_{2r+1}}} \\ &\quad = (-1)^{2r}\sum_{m=0}^{i_1-1} x^m \otimes x^{i_1-m-1}(1 \otimes \overline{x^{i_2+i_3}} \ldots \overline{x^{i_{2r}+i_{2r+1}}}) \\ &\quad = \sum_{m=0}^{i_1-1} x^m \otimes x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}} \ldots \overline{x^{i_{2r}+i_{2r+1}}} \end{aligned}$$

Definimos A^e-homomorfismos $\phi's$ como

$$\begin{array}{rcll} \phi_0 = Id: & A^e & \longrightarrow & A^e \\ & a \otimes b & \longmapsto & a \otimes b \\ \phi_{R+1}: & A^e & \longrightarrow & A \otimes \overline{A}^{\otimes R+1} \otimes A \\ & 1 \otimes 1 & \longmapsto & \epsilon_0\phi_R((-1)^{R+1}d_{R+1})(1 \otimes 1) \end{array} \tag{3.5}$$

explicitamente estas funções são dadas por

$$\phi_{2l}(1 \otimes 1) = 1 \otimes \alpha_l$$
$$\phi_{2l+1}(1 \otimes 1) = 1 \otimes x \otimes \alpha_l$$

onde

$$\alpha_l = \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes x^{i_2} \otimes \ldots \otimes x \otimes x^{i_{l+1}}$$

e $S = \{i_1, \ldots, i_{l+1} \mid i_1 + \ldots + i_{l+1} = ln - l,\ \ i_1, \ldots, i_l \geq 1\ ,\ i_{l+1} \geq 0\}$. Vamos verificar estas fórmulas por indução. Temos que $\alpha_0 = \sum_{\{i_1 = 0n-0 \mid i_1 \geq 0\}} x^{i_1} = \sum_{i_1=0} x^{i_1} = x^0 = 1$, assim

$$\phi_0(1 \otimes 1) := 1 \otimes 1 = 1 \otimes \alpha_0$$

também

$$\begin{aligned}
\phi_1(1 \otimes 1) &= \epsilon_0 \phi_0(-d_1)(1 \otimes 1) = \epsilon_0(Id)((x \otimes 1 - 1 \otimes x)(1 \otimes 1)) \\
&= \epsilon_0(x \otimes 1 - 1 \otimes x) = 1 \otimes x \otimes 1 - 1 \otimes \underbrace{1}_{=0\ (\in \overline{A})} \otimes x \\
&= 1 \otimes x \otimes 1 = 1 \otimes x \otimes \alpha_0
\end{aligned}$$

Agora suponhamos que seja válido para os indíces $2r$ e $2r+1$ e vejamos que vale para $2r+2$ e $2r+3$.

$$\begin{aligned}
\phi_{2r+2}(1 \otimes 1) &= \epsilon_0 \phi_{2r+1} d_{2r+2}(1 \otimes 1) = \epsilon_0 \phi_{2r+1}(Tx^n/Tx) \\
&= \epsilon_0 \left(\sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-j-1} \cdot \phi_{2r+1}(1 \otimes 1) \right) \\
&\overset{HI}{=} \epsilon_0 \left(\sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-j-1} \cdot 1 \otimes x \otimes \left(\sum_S x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+1}} \right) \right) = \star
\end{aligned}$$

onde $S = \{i_1, \ldots, i_{r+1} \mid i_1 + \ldots + i_{r+1} = rn - r;\ i_1, \ldots, i_r \geq 1;\ i_{r+1} \geq 0\}$

$$\star = 1 \otimes \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+1}} x^{n-j-1} = \star\star$$

como $x^j \in \overline{A}$ então $x^j = 0$ para $j = 0$, assim

$$\star\star = 1 \otimes \sum_{j=1}^{n-1} \sum_S x^j \otimes x \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+1}+n-j-1}$$

como $j + i_1 + \ldots + (i_{r+1} + n - j - 1) = j + (i_1 + \ldots + i_{r+1}) + n - j - 1 = rn - r + n - 1 = n(r+1) - (r+1)$ também $j, i_1, \ldots, i_r \geq 1$ e $i_{r+1} + n - j - 1 \geq 0$ (já que $j \leq n-1 \Rightarrow n-1-j \geq 0$ e também $i_{r+1} \geq 0$), então $(j, i_1, \ldots, i_r, i_{r+1} + n - j - 1)$ formam as $(r+2)$-uplas de todas as soluções. É importante ressaltar que as $(r+2)$-uplas são todas as soluções no caso em que estamos estudando e não no sentido das soluções inteiras, por exemplo, algum dos índices poderia passar de $n-1$, mas neste caso x com essa potência seria nulo em A ou em $\overline{A}$ o que não acrescentaria em nada no somatório. No conjunto S antes citado tinha como uma das soluções as $(r+1)$-uplas $(n-1, n-1, \ldots, n-1, 0)$ e $(1, n-2, n-1, \ldots, n-1, n-1)$ o que garante que cada um desses índices atinge seu ponto máximo afim de acrescentar algo no somatório das soluções, já a $(r+1)$-upla $(1, 1, \ldots, 1, r(n-2))$ é também uma solução inteira mas pode não ter contribuição alguma no somatório já que dependendo dos valores de r e n é possível que se tenha $r(n-2) > n-1$ (por exemplo no caso que $r > 2$ e $n > 3$). Para índice $2r+3$, temos

$$\begin{aligned}
\phi_{2r+3}(1 \otimes 1) &= \epsilon_0 \phi_{2r+2}(-d_{2r+3})(1 \otimes 1) = \epsilon_0 \phi_{2r+2}(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \\
&= \epsilon_0((x \otimes 1 - 1 \otimes x)\phi_{2r+2}(1 \otimes 1)) \\
&= \epsilon_0 \left((x \otimes 1 - 1 \otimes x) \left(1 \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes x^{i_2} \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+2}} \right) \right) = \star
\end{aligned}$$

onde $S = \{i_1, \ldots, i_{r+2} \mid i_1 + \ldots + i_{r+2} = n(r+1) - (r+1);\ i_1, \ldots, i_{r+1} \geq 1;\ i_{r+2} \geq 0\}$, assim

$$\begin{aligned}
\star &= \epsilon_0 \left(\left(x \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+2}} \right) - \left(1 \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+2}+1} \right) \right) \\
&= (1 \otimes x \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+2}}) - (1 \otimes \underbrace{1}_{=0\ (\in \overline{A})} \otimes \sum_S x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{r+2}+1}) \\
&= 1 \otimes x \otimes \alpha_{r+1}
\end{aligned}$$

De acordo com as definições das funções $\phi's$ e $\psi's$ podemos verificar que para cada $m \geq 0$ tem-se que ψ_m é inversa à esquerda de ϕ_m, com efeito, para o caso em que $m = 2r$ temos

$$\begin{aligned}
\psi_{2r}\phi_{2r}(1 \otimes 1) &= \psi_{2r} \left(\sum_S 1 \otimes x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x \otimes x^{i_{r+1}} \right) \\
&= \sum_S 1 \otimes \overline{x^{i_1+1}} \cdots \overline{x^{i_r+1}} x^{i_{r+1}} = \star
\end{aligned}$$

onde $S = \{i_1, \ldots, i_{r+1} \mid i_1 + \ldots + i_{r+1} = r(n-1);\ i_1, \ldots, i_r \geq 1;\ i_{r+1} \geq 0\}$, com isso a única solução que resultará em uma parcela não nula na soma em questão será a $(r+1)$-upla $(i_1, \ldots, i_r, i_{r+1}) = (n-1, \ldots, n-1, 0)$, logo

$$\begin{aligned}
\star &= 1 \otimes \overline{x^{n-1+1}} \cdots \overline{x^{n-1+1}} x^0 \\
&= 1 \otimes (1 \cdot \cdots \cdot 1) \\
&= 1 \otimes 1
\end{aligned}$$

e no caso de $m = 2r + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_{2r+1}\phi_{2r+1}(1 \otimes 1) &= \psi_{2r+1}\left(\sum_S 1 \otimes x \otimes x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x \otimes x^{i_{r+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{1-1} x^k \otimes x^{1-k-1}\overline{x^{i_1+1}} \ldots \overline{x^{i_r+1}} x^{i_{r+1}} = \star
\end{aligned}$$

onde S é o mesmo conjunto de soluções que no caso $2r$, assim novamente temos única solução que resultará em uma parcela não nula na soma que é a $(r+1)$-upla $(i_1, \ldots, i_r, i_{r+1}) = (n-1, \ldots, n-1, 0)$, daí

$$\begin{aligned}
\star &= \sum_{k=0}^{1-1} x^k \otimes x^{1-k-1}\overline{x^{n-1+1}} \ldots \overline{x^{n-1+1}} x^0 \\
&= x^0 \otimes x^{1-0-1}\overline{x^n} \ldots \overline{x^n} \\
&= 1 \otimes (1 \cdot 1 \cdots 1) \\
&= 1 \otimes 1
\end{aligned}$$

Precisaremos do seguinte resultado auxiliar

Lema 3.4 *Para todo $r > 0$ tem-se*

$$\psi_{r+1}(1 \otimes P_1 \otimes \ldots \otimes P_{r+2}) = S_{r+1}\psi_r\delta'(1 \otimes P_1 \otimes \ldots \otimes P_{r+2})$$

onde funções $(S_{r+1})'s$ são as retrações homotópicas de (3.3) já vistas anteriormente, e onde são igualmente definidas nos graus pares diferentes de 0 e nos graus ímpares, isto é, $S_{2j} = S_2$ e $S_{2j-1} = S_1$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vejamos que esta fórmula é válida testando a mesma nos geradores dos elementos $1 \otimes P_1 \otimes \cdots \otimes P_{r+1} \in A \otimes \overline{A}^{\otimes^r} \otimes A$, isto é, nos elementos da forma $1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+1}}$. Primeiramente vejamos que $S_{r+1}\psi_r(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+1}}) = 0$. Para $r = 2t$ temos

$$\begin{aligned}
S_{2t+1}\psi_{2t}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+1}}) &= S_{2t+1}\psi_{2t}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t}} \otimes 1)x^{i_{2t+1}} \\
&= S_{2t+1}(1 \otimes \overline{x^{i_1}x^{i_2}} \cdots \overline{x^{i_{2t-1}}x^{i_{2t}}})x^{i_{2t+1}} \\
&= S_{2t+1}(1 \otimes 1)\overline{x^{i_1}x^{i_2}} \cdots \overline{x^{i_{2t-1}}x^{i_{2t}}}x^{i_{2t+1}} \\
&= \frac{T(1)}{T(x)}(\overline{x^{i_1}x^{i_2}} \cdots \overline{x^{i_{2t-1}}x^{i_{2t}}}x^{i_{2t+1}}) \\
&= 0 \cdot (\overline{x^{i_1}x^{i_2}} \cdots \overline{x^{i_{2t-1}}x^{i_{2t}}}x^{i_{2t+1}}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

para $r = 2t + 1$ temos

$$S_{2t+1+1}\psi_{2t+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}})$$

$$
\begin{aligned}
&= S_{2t+2}\psi_{2t+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+1}} \otimes 1)x^{i_{2t+2}} \\
&= S_{2t+2}\left(\sum_{m=0}^{i_1-1} x^m \otimes x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}+i_{2t+1}}}\right)x^{i_{2t+2}} \\
&= \star
\end{aligned}
$$

como $\partial(x^{i_1}) < n$ temos que $\partial(x^{m+1}) = m+1 \leq i_1 - 1 + 1 < n$. Assim $\overline{x^{m+1}} = 0$ e lembrando que S_{2t+2} é A-linear a direita temos

$$
\begin{aligned}
\star &= \sum_{m=0}^{i_1-1} S_{2t+2}(x^m \otimes x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}+i_{2t+1}}})x^{i_{2t+2}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_1-1} S_{2t+2}(x^m \otimes 1)x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}+i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_1-1} (\overline{x^{m+1}} \otimes 1)x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}+i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_1-1} (0 \otimes 1)x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2+i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}+i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

haja vista que

$$
\delta'(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+2}}) = x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+2}} + \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^j 1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_j}x^{i_{j+1}} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+2}}
$$

temos que

$$
S_{r+1}\psi_r\delta'(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{r+2}) = S_{r+1}\psi_r(x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{r+2}})
$$

dessa forma para $r = 2t$

$$
\begin{aligned}
S_{2t+1}\psi_{2t}\delta'(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}}) &= S_{2t+1}\psi_{2t}(x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}}) \\
&= S_{2t+1}((1 \otimes \overline{x^{i_2}x^{i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}}x^{i_{2t+1}}}) \cdot (x^{i_1} \otimes x^{i_{2t+2}})) \\
&= S_{2t+1}(x^{i_1} \otimes \overline{x^{i_2}x^{i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}}x^{i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}}) \\
&= \frac{T(x^{i_1})}{T(x)}(\overline{x^{i_2}x^{i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}}x^{i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}}) \\
&= \sum_{j=0}^{i_1-1} x^j \otimes x^{i_1-j-1}\overline{x^{i_2}x^{i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}}x^{i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}}
\end{aligned}
$$

por outro lado

$$
\begin{aligned}
\psi_{2t+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}}) &= \psi_{2t+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+1}} \otimes 1)x^{i_{2t+2}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_1-1} x^m \otimes x^{i_1-m-1}\overline{x^{i_2}x^{i_3}}\cdots\overline{x^{i_{2t}}x^{i_{2t+1}}}x^{i_{2t+2}}
\end{aligned}
$$

logo vale vale a fórmula para $r = 2t$. Vejamos agora o caso $r = 2t + 1$. Temos

$$\begin{aligned}
\psi_{2t+1}(x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+3}}) &= \psi_{2t+1}(1 \otimes x^{i_2} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}} \otimes 1) \cdot x^{i_1} \otimes x^{i_{2t+3}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_2-1} x^m \otimes x^{i_2-m-1}\overline{x^{i_3}x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}}x^{i_{2t+2}}} \cdot x^{i_1} \otimes x^{i_{2t+3}} \\
&= \sum_{m=0}^{i_2-1} x^m \otimes x^{i_2-m-1} \cdot 1 \otimes \overline{x^{i_3}x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}}x^{i_{2t+2}}} \cdot x^{i_1} \otimes x^{i_{2t+3}} \\
&= \frac{T(x^{i_2})}{T(x)} 1 \otimes \overline{x^{i_3}x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}}x^{i_{2t+2}}} \cdot 1 \otimes x^{i_{2t+3}} \cdot x^{i_1} \otimes 1
\end{aligned}$$

como S_{2t+2} é A-linear a direita, temos

$$\begin{aligned}
S_{2t+2}\psi_{2t+1}(x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+3}}) &= 1 \otimes \overline{x^{i_3}x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}}x^{i_{2t+2}}} \cdot 1 \otimes x^{i_{2t+3}} S_{2t+2}\left(x^{i_1} \otimes 1 \frac{T(x^{i_2})}{T(x)}\right) \\
&= \star
\end{aligned}$$

afim de prosseguir com os cálculos usaremos a seguinte igualdade

$$\frac{T(r(P_1P_2))}{T(x)} = P_1 \otimes 1 \frac{T(P_2)}{T(x)} + 1 \otimes P_2 \frac{T(P_1)}{T(x)} - 1 \otimes \overline{P_1P_2}\frac{T(x^n)}{Tx}$$

onde $r(P_1P_2)$ e $\overline{P_1P_2}$ denotam o resto e o quociente da divisão de P_1P_2 por x^n em $K[x]$. Vejamos que esta fórmula é verdadeira. Pelo algoritmo da divisão temos

$$\begin{aligned}
P_1P_2 = \overline{P_1P_2}x^n + r(P_1P_2) &\Rightarrow T(P_1P_2) = T(\overline{P_1P_2}x^n) + T(r(P_1P_2)) \\
&\Rightarrow T(r(P_1P_2)) = T(P_1P_2) - T(\overline{P_1P_2}x^n)
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
T(r(P_1P_2)) &= P_1T(P_2) + P_2T(P_1) + T(P_1)T(P_2) \\
&\quad -\overline{P_1P_2}T(x^n) - x^nT(\overline{P_1P_2}) - T(\overline{P_1P_2})T(x^n)
\end{aligned}$$

como $x^n = 0$ em $A = K[x]/\langle x^n \rangle$ e também valem

$$\begin{aligned}
&P_2 \otimes 1 \cdot T(P_1) + T(P_1)T(P_2) \\
&\quad = P_2 \otimes 1(1 \otimes P_1 - P_1 \otimes 1) + (1 \otimes P_1 - P_1 \otimes 1)(1 \otimes P_2 - P_2 \otimes 1) \\
&\quad = P_2 \otimes P_1 - P_2P_1 \otimes 1 + 1 \otimes P_1P_2 - P_2 \otimes P_1 - P_1 \otimes P_2 + P_1P_2 \otimes 1 \\
&\quad = 1 \otimes P_2P_1 - P_1 \otimes P_2 \\
&\quad = 1 \otimes P_2(1 \otimes P_1 - P_1 \otimes 1) \\
&\quad = 1 \otimes P_2 \cdot T(P_1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&-\overline{P_1P_2}\otimes 1\cdot T(x^n)-T(x^n)T(\overline{P_1P_2})\\
&\quad=-\overline{P_1P_2}\otimes 1(1\otimes x^n-x^n\otimes 1)-(1\otimes x^n-x^n\otimes 1)(1\otimes\overline{P_1P_2}-\overline{P_1P_2}\otimes 1)\\
&\quad=-\overline{P_1P_2}\otimes x^n+\overline{P_1P_2}x^n\otimes 1-1\otimes x^n\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_2}\otimes x^n+x^n\otimes\overline{P_1P_2}-x^n\overline{P_1P_2}\otimes 1\\
&\quad=-1\otimes x^n\overline{P_1P_2}+x^n\otimes\overline{P_1P_2}\\
&\quad=-1\otimes\overline{P_1P_2}(1\otimes x^n-x^n\otimes 1)\\
&\quad=-1\otimes\overline{P_1P_2}\cdot T(x^n)
\end{aligned}$$

assim

$$T(r(P_1P_2))=P_1\otimes 1\cdot T(P_2)+1\otimes P_2\cdot T(P_1)-1\otimes\overline{P_1P_2}\cdot T(x^n)$$

e dividindo por $T(x)$ temos a expressão desejada. Visto isso podemos reescrever a expressão $S_{2t+2}(x^{i_1}\otimes 1\cdot T(x^{i_2})/T(x))$ em $\star$ como

$$\begin{aligned}
&S_{2t+2}\left(x^{i_1}\otimes 1\cdot\frac{T(x^{i_2})}{T(x)}\right)\\
&\quad=S_{2t+2}\left(\frac{T(r(x^{i_1}x^{i_2}))}{T(x)}-1\otimes x^{i_2}\cdot\frac{T(x^{i_1})}{T(x)}+1\otimes\overline{x^{i_1}x^{i_2}}\cdot\frac{T(x^n)}{T(x)}\right)\\
&\quad=S_{2t+2}\left(\frac{T(r(x^{i_1}x^{i_2}))}{T(x)}\right)-1\otimes x^{i_2}\cdot S_{2t+2}\left(\frac{T(x^{i_1})}{T(x)}\right)+1\otimes\overline{x^{i_1}x^{i_2}}\cdot S_{2t+2}\left(\frac{T(x^n)}{T(x)}\right)\\
&\quad=\star\star
\end{aligned}$$

como $\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))<n$ temos que

$$\begin{aligned}
S_{2t+2}\left(\frac{T(r(x^{i_1}x^{i_2}))}{T(x)}\right)&=S_{2t+2}\left(\sum_{j=0}^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-1}x^j\otimes x^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-j-1}\right)\\
&=\sum_{j=0}^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-1}\overline{x^jx}\otimes x^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-j-1}\\
&=\sum_{j=0}^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-1}0\otimes x^{\partial(r(x^{i_1}x^{i_2}))-j-1}\\
&=0
\end{aligned}$$

analogamente, como $i_1<n$ temos

$$S_{2t+2}\left(\frac{T(x^{i_1})}{T(x)}\right)=\sum_{j=0}^{i_1-1}\overline{x^jx}\otimes x^{i_1-j-1}=\sum_{j=0}^{i_1-1}0\otimes x^{i_1-j-1}=0$$

e

$$S_{2t+2}\left(\frac{T(x^n)}{T(x)}\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{x^jx}\otimes x^{n-j-1}=\sum_{j=0}^{n-2}\overline{x^jx}\otimes x^{n-j-1}+\overline{x^{n-1+1}}\otimes x^{n-(n-1)-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} 0 \otimes x^{n-j-1} + \overline{x^n} \otimes x^0 = 1 \otimes 1$$

substituindo estas expressões em $\star\star$ temos

$$S_{2t+2}\left(x^{i_1} \otimes 1 \cdot \frac{T(x^{i_2})}{T(x)}\right) = 1 \otimes \overline{x^{i_1} x^{i_2}}$$

e substituindo esta em $\star$ temos

$$\begin{aligned}
\star &= 1 \otimes \overline{x^{i_3} x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}} x^{i_{2t+2}}} \cdot 1 \otimes x^{i_{2t+3}} \cdot 1 \otimes \overline{x^{i_1} x^{i_2}} \\
&= 1 \otimes \overline{x^{i_1} x^{i_2}} \cdot \overline{x^{i_3} x^{i_4}} \cdots \overline{x^{i_{2t+1}} x^{i_{2t+2}}} \cdot 1 \otimes x^{i_{2t+3}} \\
&= \psi_{2t+2}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}} \otimes 1) \cdot 1 \otimes x^{i_{2t+3}} \\
&= \psi_{2t+2}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \cdots \otimes x^{i_{2t+2}} \otimes x^{i_{2t+3}})
\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração $\square$

De acordo com as funções $\phi' s$ e $\psi' s$ antes definidas podemos enunciar o seguinte resultado

Proposição 3.5 *De acordo com a definição das funções $\phi' s$ e $\psi' s$ temos que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta'"] & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \otimes A \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, shift left, "\psi_2"] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, shift left, "\psi_1"] & A \otimes A \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "="] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "-d_3"'] & A^e \arrow[r, "d_2"'] \arrow[u, shift left, "\phi_2"] & A^e \arrow[r, "-d_1"'] \arrow[u, shift left, "\phi_1"] & A^e \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde a linha de cima é a resolução barra de A normalizada.

Demonstração. Tomamos inicialmente o caso dos $\psi' s$, ou seja, mostremos que os seguintes quadrados comutam

$$\begin{tikzcd}
A \otimes \overline{A}^{\otimes^{r+1}} \otimes A \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\psi_{r+1}"] & A \otimes \overline{A}^{\otimes^{r}} \otimes A \arrow[d, "\psi_r"] \\
A^e \arrow[r, "(-1)^{r+1} d_{r+1}"'] & A^e
\end{tikzcd}$$

para $r = 0,\ \psi_0 = Id$ com isso temos

$$\begin{aligned}
(-d_1)\psi_1(1 \otimes P \otimes 1) &= (-d_1)(TP/Tx) = -(TP/Tx)Tx = -TP \\
&= P \otimes 1 - 1 \otimes P = \psi_0(1 \cdot P \otimes 1 - 1 \otimes P \cdot 1) \\
&= \psi_0 \delta'(1 \otimes P \otimes 1)
\end{aligned}$$

vejamos o caso $r > 0$, para tal usaremos dois resultados já conhecidos, a primeira é

$$\begin{aligned}(-1)^{r+1}d_{r+1}S_{r+1} + (-1)^r S_r d_r = 1 \quad &\Rightarrow \quad (-1)^{r+1}d_{r+1}S_{r+1} = 1 + (-1)^{r+1}S_r d_r \\ &\Rightarrow \quad d_{r+1}S_{r+1} = (-1)^{r+1} + (-1)^{2(r+1)}S_r d_r\end{aligned}$$

que surge das retrações homotópicas de (3.3), e a segunda é

$$\psi_{r+1} = S_{r+1}\psi_r\delta'$$

proveniente do lema 3.4, logo supondo válido para índice r temos

$$\begin{aligned}(-1)^{r+1}d_{r+1}\psi_{r+1} &= (-1)^{r+1}d_{r+1}S_{r+1}\psi_r\delta' = (-1)^{r+1}((-1)^{r+1} + S_r d_r)\psi_r\delta' \\ &= (-1)^{2(r+1)}\psi_r\delta' + (-1)S_r(-1)^r d_r\psi_r\delta' \\ &\overset{HI}{=} \psi_r\delta' + (-1)S_r\psi_{r-1}\underbrace{\delta'\delta'}_{=0} = \psi_r\delta'\end{aligned}$$

Analisemos agora o caso dos morfismos $\phi's$

$$\begin{tikzcd} A\otimes\overline{A}^{\otimes^{r+1}}\otimes A \arrow[r, "\delta'"] & A\otimes\overline{A}^{\otimes^{r}}\otimes A \\ A^e \arrow[u, "\phi_{r+1}"] \arrow[r, "(-1)^{r+1}d_{r+1}"'] & A^e \arrow[u, "\phi_r"'] \end{tikzcd}$$

para $r = 0,\ \phi_0 = Id$, logo

$$\begin{aligned}\phi_0(-d_1)(P\otimes Q) &= (-d_1)(P\otimes Q) = (P\otimes Q)(-Tx) = (P\otimes Q)(x\otimes 1 - 1\otimes x) \\ &= Px\otimes 1 - 1\otimes xQ = \delta'(P\otimes x\otimes Q) = \delta'\phi_1(P\otimes Q)\end{aligned}$$

antes de analisar o caso $r > 0$ vejamos que vale a igualdade: $\delta'\epsilon_0 = 1 - \epsilon_0\delta'$
($\epsilon_0 : A\otimes\overline{A}^{\otimes^S}\otimes A \to A\otimes\overline{A}^{\otimes^{S+1}}\otimes A$).

$$\begin{aligned}&(1-\epsilon_0\delta')(a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1}) \\ &\quad = a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1} - \epsilon_0\delta'(a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1}) \\ &\quad = a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1} - \epsilon_0\left(\sum_{i=0}^{S}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{S+1}\right) \\ &\quad = a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1} - \sum_{i=0}^{S}(-1)^i 1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{S+1} \\ &\quad = a_0\otimes\ldots\otimes a_{S+1} + \sum_{i=0}^{S}(-1)^{i+1} 1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{S+1}\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}\delta'\epsilon_0(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{S+1}) &= \delta'(1 \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{S+1}) \\ &= a_0 \otimes \ldots \otimes a_{S+1} + \sum_{i=0}^{S}(-1)^{i+1} 1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{S+1}\end{aligned}$$

com isso da definição $\phi_{r+1}(1 \otimes 1) := \epsilon_0\phi_r((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1)$, temos aplicando δ' em ambos os lados que

$$\begin{aligned}\delta'\phi_{r+1}(1 \otimes 1) &= \delta'\epsilon_0\phi_r((-1)^{r+1})d_{r+1})(1 \otimes 1) \\ &= (Id - \epsilon_0\delta')\phi_r((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1) \\ &= \phi_r((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1) - \epsilon_0(\delta'\phi_r)((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1) \\ &\overset{HI}{=} \phi_r((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1) - \epsilon_0\phi_{r-1}(-1)^r d_r(-1)^{r+1}d_{r+1}(1 \otimes 1) \\ &= \phi_r((-1)^{r+1}d_{r+1})(1 \otimes 1) - (-1)^{2r+1}\epsilon_0\phi_{r-1}\underbrace{d_r d_{r+1}}_{=0}(1 \otimes 1) \\ &= \phi_r(-1)^{r+1}d_{r+1}(1 \otimes 1)\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Cohomologia de Hochschild de Álgebras de Hopf de Posto Um

Neste capítulo fixamos G como sendo um grupo multiplicativo finito, K um corpo e χ um caracter de G em K^*. Veremos que formando o quociente $A = K[x]/\langle x^n \rangle$ temos uma ação particular de G em A dado por ${}^g x = \chi(g)x$. Também tomando KG sendo a álgebra do grupo G, poderemos formar a álgebra $B = A \# KG$, que faz parte de uma família de álgebras de Hopf de posto um. Ao longo deste capítulo o objetivo principal é calcular as cohomologias de Hochschild de B. Para alcançar esse objetivo será necessário tirar devidas conclusões relacionadas a outras estruturas, como por exemplo, relacionados à D, álgebra essa isomorfa à uma subálgebra de B. Também será importante usar alguns resultados auxiliares, como por exemplo, o Lema de Eckmann-Shapiro. Veremos que os cálculos relacionados à $HH^n(B)$ podem ser obtidos a partir do cálculo de G-invariantes de B, ação essa induzida da ação de G sobre o espaço das funções K-lineares. Por fim, explicitaremos quem são os G-invariantes de B e suas cohomologias de Hochschild nos respectivos graus, além de concluir que os espaços $HH^{2i}(B)$ e $HH^{2i+1}(B)$ são isomorfos e consequentemente possuem a mesma dimensão visto como K-espaços vetoriais. O principal referencial teórico deste capítulo é [10].

4.1 Uma família de álgebras de Hopf de posto um

Seja G um grupo finito cuja ordem é relativamente prima com a característica de um corpo K e seja

$$\chi : G \longrightarrow K^{\times}$$

um caracter, isto é, um homomorfismo do grupo G para o grupo multiplicativo K. Seja $n \geq 2$ inteiro positivo e $A = K[x]/\langle x^n \rangle$. G age por automorfismo sobre A por:

$$^{g}x = \chi(g)x \quad \forall g \in G$$

Observe que desta ação definida na base temos que $^{g}(x^k) = (^{g}x)^k = \chi(g)^k x^k$ assim como $^{g}1 = 1$. Com isso vale:

$$^{g}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi(g)^j x^j$$

Observemos que as igualdades de ação por automorfismos se verificam:

$$^{(gh)}x^k = \chi(gh)^k x^k = \chi(g)^k \chi(h)^k x^k = \chi(g)^k (^{h}x^k) = {}^{g}(^{h}x^k)$$
$$^{1_G}x = \chi(1_G)x = 1x = x$$

$\forall g, h \in G$ e $1_G \in G$. Temos também a álgebra $B = A\#KG$ com produto dado por

$$(a\#g)(b\#h) = a(^{g}b) \otimes gh$$

$\forall a, b \in A$ $g, h \in G$. Por conveniência denotaremos $a\#g$ por ag, e quando se fizer necessário, principalmente quando houver necessidade da explicitação desta multiplicação, tomaremos a expressão original. Assumamos que exista elemento central $g_1 \in G$ tal que $\chi(g_1)$ é uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Com isso B se torna uma álgebra de Hopf com:
Coproduto:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + g_1 \otimes x, \quad \Delta(g) = g \otimes g$$

Counidade:

$$\epsilon(x) = 0, \quad \epsilon(g) = 1$$

Antípoda:

$$S(x) = -xg_1^{-1}, \quad S(g) = g^{-1}$$

$\forall g \in G$. As expressões acima se encontram na notação abreviada, ou seja, na verdade em B o que temos por exemplo é $x = x\#1_G$ e $g = 1\#g$. Esta álgebra generaliza a álgebra de Taft, com efeito, esta última é igualmente definida quando se considera $g_1^n = 1_G$.

Sendo H uma álgebra de Hopf, a filtração coradical de H é uma coleção de subespaços $H_0, \ldots, H_n, \ldots \subset H$ tal que vale:

$$H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots$$

$$H = \bigcup_n H_n$$

sendo que H_0 é a soma das subcoálgebras simples de H e H_n é definido recursivamente por

$$H_{n+1} = \Delta^{-1}(H_n \otimes H + H_0 \otimes H)$$

Um subespaço $W \subset H$ é uma subcoálgebra de H se $\Delta(W) \subset W \otimes W$ e é simples se não possui subcoálgebra própria. No caso de termos que H_0 é uma subálgebra de H então H_1 torna-se um $(H_0 - H_0)$-bimódulo. Segundo [13] dizemos que H tem posto n se H_0 é subálgebra de H, H_1 gera H como álgebra e se $\dim K \otimes_{H_0} H_1 = n + 1$.

No caso da álgebra $B = A\#KG$ temos que $H_0 = KG$ e $H_1 = KG + xKG$. Neste caso H_0 é uma subálgebra de B e H_1 gera B como álgebra. Temos que $\dim K \otimes_{KG} (KG + xKG) = 2$, com isso B faz parte de uma família de álgebras de Hopf de posto um.

4.2 A subálgebra D de B^e e relações com as estruturas de A, B e B^e

Temos que G age em A^e através da ação diagonal, que é uma ação por automorfismos, isto é, ${}^g(a \otimes b) = {}^ga \otimes {}^gb$. Dessa forma temos a álgebra $D = A^e\#KG$, a qual é isomorfa a subálgebra $\bigoplus\limits_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1}$ de B^e, e que será fundamental para que posteriormente possamos calcular a cohomologia de Hochschild de B. O isomorfismo entre as álgebras citadas é dado por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A^e\#KG & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1} \\ & (a \otimes b)g & \longmapsto & ag \otimes ({}^{g^{-1}}b)g^{-1} \end{array}$$

$\forall a, b \in A$ e $g \in G$. Com efeito, dado $ag \otimes bg^{-1} \in \bigoplus\limits_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1}$ definimos

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \bigoplus\limits_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1} & \longrightarrow & A^e\#KG \\ & ag \otimes bg^{-1} & \longmapsto & (a \otimes ({}^gb))g \end{array}$$

assim temos

$$\varphi \circ \psi(ag \otimes bg^{-1}) = \varphi((a \otimes ({}^gb))g) = ag \otimes^{g^{-1}} ({}^gb)g^{-1} = ag \otimes bg^{-1}$$

$$\psi \circ \varphi((a \otimes b)g) = \psi(ag \otimes ({}^{g^{-1}}b)g^{-1}) = (a \otimes b)g$$

com isso φ é inversa de ψ, e para concluir que o isomorfismo citado é um isomorfismo de álgebras, é suficiente verificar que φ é um morfismo de álgebras. Vejamos

$$\varphi((a \otimes b)g \cdot (c \otimes d)h) = \varphi(a \otimes b\#g \cdot c \otimes d\#h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi((a\otimes b)^g(c\otimes d)\#gh)\\
&= \varphi((a\otimes b)({}^gc\otimes^g d)\#gh)\\
&= \varphi(a({}^gc)\otimes({}^gd)b\#gh)\\
&= a({}^gc)gh\otimes^{(gh)^{-1}}(({}^gd)b)(gh)^{-1}\\
&= a({}^gc)gh\otimes^{(gh)^{-1}}({}^gd)^{(gh)^{-1}}b(gh)^{-1}\\
&= a({}^gc)gh\otimes({}^{h^{-1}}d)({}^{(gh)^{-1}}b)(gh)^{-1}
\end{aligned}
$$

e por outro lado

$$
\begin{aligned}
\varphi((a\otimes b)g)\varphi((c\otimes d)h) &= (ag\otimes^{g^{-1}} bg^{-1})(ch\otimes^{h^{-1}} dh^{-1})\\
&= (a\#g\otimes^{g^{-1}} b\#g^{-1})(c\#h\otimes^{h^{-1}} d\#h^{-1})\\
&= a({}^gc)\#gh\otimes({}^{h^{-1}}d\#h^{-1})\cdot({}^{g^{-1}}b\#g^{-1})\\
&= a({}^gc)\#gh\otimes^{h^{-1}} d({}^{h^{-1}}({}^{g^{-1}}b))\#h^{-1}g^{-1})\\
&= a({}^gc)\#gh\otimes({}^{h^{-1}}d)({}^{(gh)^{-1}}b)\#(gh)^{-1})\\
&= a({}^gc)gh\otimes({}^{h^{-1}}d)({}^{(gh)^{-1}}b)(gh)^{-1}
\end{aligned}
$$

Como B é $(B{-}B)$-bimódulo logo B é B^e-módulo e sendo D álgebra isomorfa a uma subálgebra de B^e temos que B é D-módulo por restrição de escalares. Tomando $(a\otimes b)g\in D$ e $c\in B$ temos que a ação de D em B é dada por

$$
\begin{aligned}
(a\otimes b)g\cdot c &= \varphi((a\otimes b)g)c\\
&= (ag\otimes {}^{g^{-1}}bg^{-1})c\\
&= (ag)c({}^{g^{-1}}bg^{-1})
\end{aligned}
$$

segue dessa ação que $A=K[x]/\langle x\rangle$ se torna um D-módulo por

$$
\begin{aligned}
\cdot:\quad D\times A &\longrightarrow A\\
((e\otimes b)g,a) &\longmapsto e({}^ga)b
\end{aligned}
$$

com efeito, sendo a aplicação

$$
\begin{aligned}
A &\longrightarrow A\#1\\
a &\longmapsto a\#1
\end{aligned}
$$

um isomorfismo de álgebras, podemos identificar A com $A\#1\subset B$, assim a ação de D em B induz uma ação de D em A que o torna um D-módulo. Sendo $(e\otimes b)g\in D$ e $a\simeq a\#1\in A$ temos que esta ação é dada por

$$(e\otimes b)g\cdot a = (eg)a({}^{g^{-1}}bg^{-1})$$

$$\begin{aligned} &= (e\#g)(a\#1)({}^{g^{-1}}b\#g^{-1}) \\ &= (e({}^{g}a)\#g)({}^{g^{-1}}b\#g^{-1}) \\ &= e({}^{g}a)b\#1 \end{aligned}$$

Quando não houver confusão omitiremos o símbolo $\cdot$ da ação de D em A. Prosseguindo, agora vejamos que há um isomorfismo de B^e-módulos

$$\begin{aligned} \varphi : \quad B &\longrightarrow B^e \otimes_D A \\ b &\longmapsto (b \otimes 1) \otimes_D 1 \end{aligned}$$

Primeiramente vejamos que φ é de fato morfismo de B^e-módulos. Para a soma de elementos é imediato, pois sendo $b_1, b_2 \in B$ temos

$$\varphi(b_1 + b_2) = (b_1 + b_2) \otimes 1 \otimes_D 1 = (b_1 \otimes 1) \otimes_D 1 + (b_2 \otimes 1) \otimes_D 1 = \varphi(b_1) + \varphi(b_2)$$

Agora, para verificar a propriedade do produto por escalares de B^e é mais complicado e para isso faremos algumas contas antes.

Começamos destacando que em $B^e \otimes_D A$ vale

$$(ag \otimes bh) \otimes_D 1 = (1 \otimes g(bh)) \otimes_D a \tag{4.1}$$

com efeito

$$(ag \otimes bh) \otimes_D 1 \quad = \quad (a\#g \otimes b\#h) \otimes_D 1 = \star$$

como em B^{op} temos $g(bh) \cdot_{op} g^{-1} = g^{-1}g(bh) = (1\#g^{-1})(1\#g)(b\#h) = b\#h = bh$, então

$$\begin{aligned} \star &= ((1\#1_G \otimes (1\#g)(b\#h)) \cdot (a\#g \otimes 1\#g^{-1})) \otimes_D 1 \\ &= ((1 \otimes g(bh)) \cdot (ag \otimes g^{-1})) \otimes_D 1 = ((1 \otimes g(bh)) \cdot (a \otimes 1)g) \otimes_D 1 \\ &= (1 \otimes g(bh)) \otimes_D ((a \otimes 1)g \cdot 1) = (1 \otimes g(bh)) \otimes_D a({}^{g}1)1 \\ &= (1 \otimes g(bh)) \otimes_D a \end{aligned}$$

também vale

$$(1 \otimes ag) \otimes_D 1 = (1 \otimes g) \otimes_D a \tag{4.2}$$

pois

$$\begin{aligned} (1 \otimes g) \otimes_D a &= (1\#1_G \otimes 1\#g) \otimes_D ((1 \otimes a)1_G \cdot 1) \\ &= ((1\#1_G \otimes 1\#g) \cdot (1 \otimes a)) \otimes_D 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((1\#1_G \otimes 1\#g)\cdot(1\#1_G \otimes a\#1_G)) \otimes_D 1\\
&= (((1\#1_G)(1\#1_G)) \otimes ((a\#1_G)(1\#g))) \otimes_D 1\\
&= (1\#1_G \otimes a\#g) \otimes_D 1\\
&= (1 \otimes ag) \otimes_D 1
\end{aligned}$$

Assim se tomarmos $b_1 = a_1\#g_1, b_2 = a_2\#g_2$ e $b = a\#g$ elementos nos geradores de B temos usando as igualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
(b_1 \otimes b_2)\varphi(b) &= (b_1 b \otimes b_2) \otimes_D 1 = ((a_1\#g_1)(a\#g) \otimes a_2\#g_2) \otimes_D 1\\
&= (a_1{}^{g_1}a\#g_1g \otimes a_2\#g_2) \otimes_D 1 \overset{(4.1)}{=} (1 \otimes (1\#g_1g)(a_2\#g_2)) \otimes_D a_1{}^{g_1}a\\
&= (1 \otimes {}^{g_1g}a_2\#g_1gg_2) \otimes_D a_1{}^{g_1}a = ((1 \otimes {}^{g_1g}a_2\#g_1gg_2) \otimes_D 1)a_1{}^{g_1}a\\
&\overset{(4.2)}{=} ((1 \otimes g_1gg_2) \otimes_D {}^{g_1g}a_2)a_1{}^{g_1}a = (1 \otimes g_1gg_2) \otimes_D {}^{g_1g}a_2a_1{}^{g_1}a
\end{aligned}$$

e por outro lado, lembrando que A é comutativo e então ${}^{g_1g}a_2a_1{}^{g_1}a = a_1{}^{g_1}a^{g_1g}a_2$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi((b_1 \otimes b_2)b) &= (b_1bb_2 \otimes 1) \otimes_D 1 = ((a_1\#g_1)(a\#g)(a_2\#g_2) \otimes 1) \otimes_D 1\\
&= ((a_1^{g_1}a\#g_1g)(a_2\#g_2) \otimes 1) \otimes_D 1 = (a_1^{g_1}a^{g_1g}a_2\#g_1gg_2) \otimes 1) \otimes_D 1\\
&\overset{(4.1)}{=} (1 \otimes g_1gg_2) \otimes_D a_1^{g_1}a^{g_1g}a_2
\end{aligned}$$

de onde concluimos a propriedade do produto por escalar. Para verificar que φ é um isomorfismo exibamos sua inversa ψ dada por

$$\begin{aligned}
\psi: \quad B^e \otimes_D A &\longrightarrow B\\
(b \otimes c) \otimes_D a &\longmapsto bac
\end{aligned}$$

de fato ψ é inversa de φ pois

$$\psi\varphi(b) = \psi((b \otimes 1) \otimes_D 1) = b \cdot 1 \cdot 1 = b$$

$$\begin{aligned}
\varphi\psi((b \otimes c) \otimes_D a) &= \varphi(bac) = \varphi((b \otimes ac)1) = (b \otimes ac)((1 \otimes 1) \otimes_D 1)\\
&= (b \otimes ac) \otimes_D 1 = (b \otimes (c \cdot_{op} a)) \otimes_D 1 = (b \otimes c) \otimes_D a
\end{aligned}$$

A álgebra B^e é livre e em particular projetiva como D-módulo à direita, com efeito, como K-espaço vetorial temos

$$B = A\#KG = A \otimes \bigoplus_g Kg \simeq \bigoplus_g A \otimes g$$

assim, ainda como K-espaço vetorial

$$B \otimes B^{op} = A\#KG \otimes A\#KG \simeq \left(\bigoplus_g A \otimes g\right) \otimes \left(\bigoplus_h A \otimes h\right) \simeq \bigoplus_{g,h} Ag \otimes Ah$$

também é possível reescrever a soma direta $\bigoplus_{r,s} Ar \otimes As$ como $\bigoplus_{g,h} Ag \otimes Ag^{-1}h$. A inclusão $\bigoplus_{g,h} Ag \otimes Ag^{-1}h \subset \bigoplus_{r,s} Ar \otimes As$ é imediata, já a inclusão contrária pode ser verificada observando que $Ar \otimes As = Ar \otimes Ar^{-1}(rs)$, logo

$$B^e = B \otimes B^{op} \simeq \bigoplus_{g,h} Ag \otimes Ag^{-1}h = \bigoplus_h (1 \otimes h) \left(\bigoplus_g Ag \otimes Ag^{-1}\right) \tag{4.3}$$

Assim $\{1 \otimes h \mid h \in G\}$ é um conjunto de geradores de B^e como D-módulo à direita. Vejamos que é um conjunto linearmente independente. Considerando escalares $c_h \in D$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{h \in G} (1 \otimes h) c_h = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_h \sum_g (1 \otimes h) a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum_h \sum_g a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} h = 0 \end{aligned}$$

da soma direta temos que $a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} h = 0 \ \forall g, h \in G$. Ou seja, $\sum_g a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} h = 0$. Considerando a função

$$\begin{aligned} R_{h^{-1}} : \quad B &\longrightarrow B \\ ag &\longmapsto agh^{-1} \end{aligned}$$

e a aplicação linear $T = I_B \otimes R_{h^{-1}}$, temos

$$0 = T\left(\sum_g a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} h\right) = \sum_g a_{(g,h)} g \otimes b_{(g,h)} g^{-1} = c_h \quad \forall h \in G$$

Com o propósito de usar posteriormente as estruturas que foram desenvolvidas desde o início deste capítulo, colocamos agora em forma de tópicos os principais resultados que abordamos, a saber, dada a álgebra $A = K[x]/\langle x^n \rangle$ com ação do grupo G dada por ${}^g x = \chi(g)x$, temos:

- $B = A\#KG$ é uma álgebra de Hopf com:

  Coproduto dado por: $\Delta(x) = x \otimes 1 + g_1 \otimes x$ e $\Delta(g) = g \otimes g$;

  Counidade dado por: $\epsilon(x) = 0$ e $\epsilon(g) = 1$;

  Antípoda dada por: $S(x) = -xg_1^{-1}$ e $S(g) = g^{-1}$;

  $\forall g \in G$.

- G age sobre A^e por ${}^g(a \otimes b) = {}^ga \otimes {}^gb$, e o produto smash $D = A^e \# KG$ é isomorfo à subálgebra $\bigoplus_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1}$ de B^e pelo isomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & A^e \# KG & \longrightarrow & \bigoplus_{g \in G} Ag \otimes Ag^{-1} \\ & (a \otimes b)g & \longmapsto & ag \otimes ({}^{g^{-1}}b)g^{-1} \end{array}$$

  $\forall a, b \in A$ e $g \in G$;

- B é D-módulo por restrição de escalares e A também é D-módulo por meio do isomorfismo $A \simeq A\#1$;

- B^e é D-módulo livre à direita (e consequentemente projetivo como D-módulo) com base $\{1 \otimes h \mid h \in G\}$, pois

$$B^e = \bigoplus_{h \in G} (1 \otimes h)D \simeq D^{|G|}$$

4.3 O Lema de Eckmann-Shapiro

Em busca de calcular a cohomologia de Hochschild de B usaremos um resultado que permita calcular tais cohomologias sobre outro anel de escalares. Um resultado deste tipo é conhecido como lema de Eckmann-Shapiro, o qual apresentaremos a seguir. Usaremos este resultado no momento oportuno dentre condições impostas.

4.3.1 A aplicação do Lema de Eckmann-Shapiro na álgebra B e sua relação com $HH^n(B)$

No caso geral, o Lema de Eckmann-Shapiro se apresenta como segue:

Lema 4.1 (Eckmann-Shapiro) *Seja $R \to S$ homomorfismo de anéis, então S se torna R-módulo à direita e à esquerda (${}_RS_R$). Sejam M um S-módulo à esquerda, que por restrição de escalares é também R-módulo à esquerda (${}_RM, {}_SM$) e N um R-módulo à esquerda (${}_RN$). Assim se S é projetivo como R-módulo à direita, então*

$$\mathrm{Ext}^n_R(N, M) \simeq \mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, M)$$

Demonstração. Consideramos a seguinte resolução injetiva de S-módulos de M:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{v_0} I_0 \xrightarrow{v_1} I_1 \xrightarrow{v_2} I_2 \xrightarrow{v_3} \cdots$$

aplicando o funtor covariante $\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, \_)$ nessa resolução temos o complexo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_0) \xrightarrow{v_{1*}} \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_1) \xrightarrow{v_{2*}} \dots$$

segue do isomorfismo de adjunção que temos o isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_n) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(S, I_n)) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) \end{array}$$

onde dado $n \in N$ e $s \in S$, tem-se, $\varphi(g)(n)(s) = g(s \otimes n)$. Também

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathrm{Hom}_S(S, I_n) & \longrightarrow & I_n \\ & f & \longmapsto & \psi(f) = f(1) \end{array}$$

é isomorfismo de R-módulos à esquerda. Com esses dados vejamos que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_{n-1}) \arrow[rr, "v_{n*}"] \arrow[d, "\varphi"'] & & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_n) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(S, I_{n-1})) \arrow[d, "\psi_*"'] & & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(S, I_n)) \arrow[d, "\psi_*"] \\ \mathrm{Hom}_R(N, I_{n-1}) \arrow[rr, "v_{n*}"] & & \mathrm{Hom}_R(N, I_n) \end{tikzcd}$$

Para facilitar as contas posteriores, observemos que dado $g \in \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(S, I_{n-1}))$ e $n \in N$, então

$$(\psi_*(g))(n) = (\psi(g))(n) = \psi(g(n)) = g(n)(1)$$

Sendo assim, seja $f \in \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_{n-1})$ e $n \in N$. Logo

$$v_{n*}\psi_*\varphi(f)(n) = v_n((\psi_*\varphi(f))(n)) = v_n(\varphi(f)(n)(1)) = v_n(f(1 \otimes n))$$

por outro lado

$$\psi_*(\varphi(v_{n*}(f)))(n) = \varphi(v_{n*}(f))(n)(1) = (v_{n*}f)(1 \otimes n) = (v_n f)(1 \otimes n) = v_n(f(1 \otimes n))$$

Temos que os isomorfismos anteriormente citados preservam injetividade dos $I_n's$ no sentido de que cada I_n era injetivo sobre S e depois torna-se injetivo sobre R através de mudança de escalares devido ao morfismo $R \to S$. Com efeito, sendo $P = \mathrm{Hom}_S(\_, I_n)$ e $T = S \otimes_R \_$

temos que P e T são exatos devido ao fato de que I_n e S são S-injetivo e R-projetivo respectivamente. Como composta de funtores exato é exato temos que $P \circ T = \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R \_, I_n) \simeq \mathrm{Hom}_R(\_, \mathrm{Hom}_S(S, I_n)) \simeq \mathrm{Hom}_R(\_, I_n)$ é exato. Logo I_n é R-injetivo. Do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_0) \arrow[r, "v_{1*}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_1) \arrow[r, "v_{2*}"] \arrow[d, "\simeq"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N, I_0) \arrow[r, "v_{1*}"] & \mathrm{Hom}_R(N, I_1) \arrow[r, "v_{2*}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

temos que

$$\mathrm{Ext}^n_S(S \otimes_R N, M) := H^n(\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R N, I_\bullet)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}_R(N, I_\bullet)) := \mathrm{Ext}^n_R(N, M)$$

□

Usando o lema de Eckmann-Shapiro que foi enunciado no caso geral ao nosso caso, temos como consequência o seguinte resultado

Teorema 4.2 *Sendo $A = K[x]/\langle x^n \rangle, B = A\#KG$ e $D = A^e\#KG$. Temos que $HH^n(B) \simeq \mathrm{Ext}^n_D(A, B)$*

Demonstração. Fazendo analogia com o caso geral, identificamos $R = D, S = B^e, M = B$ e $N = A$. Também fixamos o homomorfismo inclusão $D \xhookrightarrow{f} B^e$. Assim temos

$$\mathrm{Ext}^n_D(A,_D B) \simeq \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B^e \otimes_D A, B)$$

e como vimos $B^e \otimes_D A \simeq B$, então as cohomologias de Hochschild de B denotado por $HH^n(B)$ podem ser interpretados da seguinte forma

$$HH^n(B) := \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B, B) \simeq \mathrm{Ext}^n_{B^e}(B^e \otimes_D A, B) \simeq \mathrm{Ext}^n_D(A, B)$$

□

4.3.2 Os G invariantes em $\mathrm{Hom}_K(M, N)$

Iremos ver agora dois resultados que ajudaram nos cálculos posteriores, provaremos os mesmos em um caso mais abrangente que o nosso, mas de demonstração análoga. Consideremos que G age em uma álgebra C por automorfismos K-lineares, M e N são $C\#KG$-módulos e $\mathrm{Hom}_C(M, N)$, $\mathrm{Hom}_{C\#KG}(M, N)$ K-espaços de funções; observe que ambos são K-subespaços de $\mathrm{Hom}_K(M, N)$. Segue que temos os seguintes resultados

Proposição 4.3 *Se M, N e L são KG-módulos temos*

1. $\mathrm{Hom}_K(M,N)$ *é KG-módulo por*

$$(g \triangleright \varphi)(x) = g\varphi(g^{-1}x)$$

onde $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M,N), g \in G$ *e* $x \in M$*;*

2. *Se* $f \in \mathrm{Hom}_K(M,N), h \in \mathrm{Hom}_K(N,L)$ *e* $g \in G$ *então* $g \triangleright (hf) = (g \triangleright h)(g \triangleright f)$

Demonstração.

1. Sendo $f, l \in \mathrm{Hom}_K(M,N), g_1, g_2, 1_G \in G, \alpha, \beta \in K$ e $x \in M$. Assim

   (a)

$$\begin{aligned} g_1 \triangleright (g_2 \triangleright f)(x) &= g_1(g_2 \triangleright f)(g_1^{-1}x) \\ &= g_1(g_2 f)(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (g_1g_2)f((g_1g_2)^{-1}x) \\ &= (g_1g_2) \triangleright f(x) \end{aligned}$$

   (b)

$$1_G \triangleright f(x) = 1_G f(1_G^{-1}x) = 1_G f(1_G x) = f(x)$$

   (c)

$$\begin{aligned} g_1 \triangleright (\alpha f + \beta l)(x) &= g_1(\alpha f + \beta l)(g_1^{-1}x) \\ &= (g_1(\alpha f) + g_1(\beta l))(g_1^{-1}x) \\ &= g_1(\alpha f)(g_1^{-1}x) + g_1(\beta l)(g_1^{-1}x) \\ &= \alpha g_1 f(g_1^{-1}x) + \beta g_1 l(g_1^{-1}x) \\ &= \alpha(g_1 \triangleright f)(x) + \beta(g_1 \triangleright l)(x) \\ &= (\alpha(g_1 \triangleright f) + \beta(g_1 \triangleright l))(x) \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} \left(\sum_g a_g g + \sum_g b_g g\right) \triangleright f(x) &= \left(\sum_g (a_g g + b_g g)\right) \triangleright f(x) \\ &= \left(\sum_g (a_g + b_g) g\right) \triangleright f(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_g (a_g + b_g) g \triangleright f(x) \\
&= \sum_g (a_g + b_g) g f(g^{-1}x) \\
&= \sum_g a_g g f(g^{-1}x) + \sum_g b_g g f(g^{-1}x) \\
&= \sum_g a_g g \triangleright f(x) + \sum_g b_g g \triangleright f(x) \\
&= \left(\sum_g a_g g\right) \triangleright f(x) + \left(\sum_g b_g g\right) \triangleright f(x) \\
&= \left(\left(\sum_g a_g g\right) \triangleright f + \left(\sum_g b_g g\right) \triangleright f\right)(x)
\end{aligned}
$$

2. Dado $x \in M$ temos

$$
\begin{aligned}
(g \triangleright h)((g \triangleright f)(x)) &= (g \triangleright h)(g f(g^{-1}x)) = g h(g^{-1} g f(g^{-1}x)) \\
&= g h(f(g^{-1}x) = g(hf)(g^{-1}x) = (g \triangleright (hf))(x)
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.4 *Seja G um grupo que age em uma álgebra C por automorfismos K-lineares e M, N dois $C\#KG$-módulos. Temos que* $\mathrm{Hom}_C(M,N)$ *é KG-módulo e* $\mathrm{Hom}_C(M,N)^G = \mathrm{Hom}_{C\#KG}(M,N)$

Demonstração. Vejamos que os elementos de $\mathrm{Hom}_C(M,N)$ são invariantes sob a ação de G o que torna $\mathrm{Hom}_C(M,N)$ um módulo sobre KG. Seja $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(M,N)$ então

$$
\begin{aligned}
(g \triangleright \varphi)(cx) &= g\varphi(g^{-1}cx) = g\varphi((1\#g^{-1})(c\#1)x) \\
&= g\varphi(({}^{g^{-1}}c\#g^{-1})x) = g\varphi(({}^{g^{-1}}c)(g^{-1}x)) \\
&= g({}^{g^{-1}}c)\varphi(g^{-1}x) = (1\#g)({}^{g^{-1}}c\#1)\varphi(g^{-1}x) \\
&= 1^g({}^{g^{-1}}c)\#g1\varphi(g^{-1}x) = c\#g\varphi(g^{-1}x) \\
&= (c\#1)(1\#g)\varphi(g^{-1}x) = c(g\varphi(g^{-1}x)) = c(g \triangleright \varphi)(x)
\end{aligned}
$$

Para verificar a igualdade $\mathrm{Hom}_C(M,N)^G = \mathrm{Hom}_{C\#KG}(M,N)$ façamos isso através das inclusões. Primeiro $\mathrm{Hom}_C(M,N)^G \subset \mathrm{Hom}_{C\#KG}(M,N)$. Seja φ G-invariante, daí

$$
\varphi((c\#g)x) = \varphi(c(gx)) = cgg^{-1}\varphi(gx)
$$

$$= \quad cg(g^{-1}\varphi((g^{-1})^{-1}x)) = cg(g^{-1} \triangleright \varphi(x)) = (c\#g)\varphi(x)$$

onde usamos a hipótese na última igualdade, logo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{C\#KG}(M,N)$. Agora seja $\varphi \in \mathrm{Hom}_{C\#KG}(M,N)$ e $g \in G$ com isso

$$\begin{aligned}(g \triangleright \varphi)(x) &= g\varphi(g^{-1}x) = (1\#g)\varphi((1\#g^{-1})x)\\ &= (1\#g)(1\#g^{-1})\varphi(x) = \varphi(x)\end{aligned}$$

de onde encerra a demonstração. □

4.3.3 Os G invariantes e o lema de Eckmann-Shapiro no cálculo de $HH^n(B)$

Voltando ao nosso caso, dado uma resolução projetiva para A de D-módulos

$$\cdots \xrightarrow{d_3} A_3 \xrightarrow{d_2} A_2 \xrightarrow{d_1} A_1 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

e aplicando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_D(\_, B)$ temos o complexo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(A_1,B) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_D(A_2,B) \xrightarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}_D(A_3,B) \xrightarrow{d_3^*} \mathrm{Hom}_D(A_4,B) \longrightarrow \cdots$$

onde $\mathrm{Ext}^n_D(A,B) = \mathrm{Ker}\, d^*_{n+1}/\,\mathrm{Im}\, d^*_n$. Porém como $D = A^e\#KG$, haja vista o lema anterior, temos que $\mathrm{Hom}_D(A_n,B) = \mathrm{Hom}_{A^e\#KG}(A_n,B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A_n,B)^G$ e com isso o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A_1,B) \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Hom}_D(A_2,B) \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, "="] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A_1,B)^G \arrow[r, "d_1^*"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A_2,B)^G \arrow[r, "d_2^*"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Logo $\mathrm{Ext}^n_D(A,B) = \mathrm{Ker}\, d^*_{n+1}/\,\mathrm{Im}\, d^*_n$ e pelo teorema 4.2 temos que

$$HH^n(B) \simeq \mathrm{Ext}^n_D(A,B) = \mathrm{Ker}\, d^*_{n+1}/\,\mathrm{Im}\, d^*_n$$

4.4 Uma condição suficiente para a projetividade de um D-módulo

Outro resultado que ajudará nos cálculos das cohomologias no sentido de permitir ver uma resolução sobre um módulo ser também resolução sobre outro esperado é o que se segue:

Lema 4.5 *Sejam G um grupo finito, K um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Sejam C K-álgebra com ação de um grupo finito G e P um $C\#KG$-módulo. Se P é projetivo sobre C então P é projetivo sobre $C\#KG$. Em particular todo módulo projetivo sobre A^e é projetivo sobre $D = A^e\#KG$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama em ${}_{C\#KG}\mathrm{Mod}$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "k"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

podemos então restringir os escalares e ver o diagrama em ${}_C\mathrm{Mod} = {}_{C\#1}\mathrm{Mod}$. Como P é projetivo sobre C, existe $h : P \longrightarrow L$ fazendo o diagrama comutar, isto é

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "k"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde $h \in \mathrm{Hom}_C(P, L)$ e $fh = k$. Como mdc(char(K),$|G|$)=1 temos bem definido a função:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathrm{Hom}_C(P,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(P,L)^G = \mathrm{Hom}_{C\#KG}(P,L) \\ & h & \longmapsto & \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g \triangleright h \end{array}$$

de fato $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g \triangleright h \in \mathrm{Hom}_C(P,L)^G$, pois dado $m \in G$ temos

$$m \triangleright \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \triangleright h \right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m \triangleright g \triangleright h = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (mg) \triangleright h = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \triangleright h$$

na última passagem é válido ressaltar que foi usado o fato de que ao fixar elemento $m \in G$ e variar os demais, se acaba percorrendo todos elementos do grupo novamente. Para finalizar basta ver que

$$\begin{aligned} f\pi(h) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g \triangleright h) \overset{f\in\mathrm{Hom}_C(,)^G}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (g \triangleright f)(g \triangleright h) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \triangleright fh = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \triangleright k \\ &\overset{k\in\mathrm{Hom}_C(,)^G}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} k = \frac{1}{|G|}|G|k = k \end{aligned}$$

assim o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "k"] \arrow[dl, dashed, "\pi(h)"'] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta em ${}_{C\#KG}\mathrm{Mod}$ e portanto P é projetivo sobre $C\#KG$. □

4.5 A cohomologia de Hochschild de B

A seguir enunciaremos o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.6 *Seja $N = \mathrm{Ker}\,\chi \subset G$. Para todo $i \geq 0$ a dimensão $HH^{2i}(B)$ e de $HH^{2i+1}(B)$ são as mesmas e igual ao número de representantes g de classes de conjugação em G tal que $g \in N$ e $\chi^{in}|_{Z(g)} = 1$. O símbolo $Z(g)$ denota o centralizador de g.*

A demonstração deste teorema é um pouco extensa e envolve inúmeras considerações. Deste modo demonstraremos ao longo de duas subseções a seguir.

4.5.1 Os G invariantes de B

Começamos considerando a resolução livre de A sobre A^e dada em (3.3) onde neste caso nosso polinômio mônico f é x^n. Para facilitar as contas, como os operadores d_{2i} eram definidos de igual forma denotaremo-os simplesmente por $-u$, de igual modo denotaremos os operadores d_{2i+1} por v. Ainda na resolução em questão como um operador e seu oposto possuem mesmo núcleo e imagem, podemos ver (3.3) da forma:

$$\cdots \xrightarrow{u} A^e \xrightarrow{v} A^e \xrightarrow{u} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

onde $u = -T(x) = x \otimes 1 - 1 \otimes x, v = T(x^n)/T(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-1-j} = x^{n-1} \otimes 1 + x^{n-2} \otimes x + \ldots + 1 \otimes x^{n-1}$ e μ é a multiplicação. Tendo como auxiliar a ação diagonal de G em A^e que é uma ação de álgebras e é dado por

$$^g(a \otimes b) = {}^ga \otimes {}^gb$$

Definimos ações de G sobre A^e em cada grau que o torna um KG-módulo por

$$\begin{array}{ll} \text{em grau } 0, & g(a \otimes b) = {}^g(a \otimes b) = {}^ga \otimes {}^gb \\ \text{em grau } 2i, & g(a \otimes b) = \chi(g)^{in}({}^g(a \otimes b)) = \chi(g)^{in}({}^ga \otimes {}^gb) \\ \text{em grau } 2i+1, & g(a \otimes b) = \chi(g)^{in+1}({}^g(a \otimes b)) = \chi(g)^{in+1}({}^ga \otimes {}^gb) \end{array}$$

$\forall a, b \in A$ e $g \in G$. Com isso cada uma dessas ações dá uma estrutura de D módulo para A^e, ou seja, A^e é um D-módulo diferente para cada grau. Também podemos observar que as funções

μ, u e v são D-lineares, com efeito, dado $g \in G$ temos

$$\mu(g(a \otimes b)) = \mu({}^g a \otimes {}^g b) = {}^g a {}^g b = {}^g(ab) = {}^g\mu(ab)$$

sendo v com domínio em grau $2i$ e imagem em grau $2i-1 = 2(i-1)+1$, temos

$$v(g(a \otimes b)) = v(\chi(g)^{in}({}^g a) \otimes {}^g b) = (\chi(g)^{in}({}^g a) \otimes {}^g b)\left(\frac{T(x^n)}{T(x)}\right) = \chi(g)^{in}({}^g a \otimes {}^g b)\frac{T(x^n)}{T(x)}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} gv(a \otimes b) &= g\left((a \otimes b)\left(\frac{T(x^n)}{T(x)}\right)\right) = \chi(g)^{(i-1)n+1}({}^g(a \otimes b))^g\left(\sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-1-j}\right) \\ &= \chi(g)^{(i-1)n+1}({}^g a \otimes {}^g b)\sum_{j=0}^{n-1} {}^g(x^j) \otimes {}^g(x^{n-1-j}) \\ &= \chi(g)^{(i-1)n+1}({}^g a \otimes {}^g b)\sum_{j=0}^{n-1} \chi(g)^{j+(n-1-j)} x^j \otimes x^{n-1-j} \\ &= \chi(g)^{(i-1)n+1}({}^g a \otimes {}^g b)\chi(g)^{(n-1)}\sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-1-j} \\ &= \chi(g)^{in}({}^g a \otimes {}^g b)\frac{T(x^n)}{T(x)} \end{aligned}$$

por fim, considerando u com domínio em grau $2i+1$ e domínio em grau $2i$ temos

$$\begin{aligned} u(g(a \otimes b)) &= u(\chi(g)^{in+1}({}^g a) \otimes {}^g b) = (\chi(g)^{in+1}({}^g a) \otimes {}^g b)(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \\ &= \chi(g)^{in+1}({}^g a \otimes {}^g b)(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gu(a \otimes b) &= g((a \otimes b)(x \otimes 1 - 1 \otimes x)) = \chi(g)^{in}({}^g(a \otimes b))^g(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \\ &= = \chi(g)^{in}({}^g a \otimes {}^g b)({}^g x \otimes {}^g 1 - {}^g 1 \otimes {}^g x) = \chi(g)^{in}({}^g a \otimes {}^g b)\chi(g)(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \\ &= \chi(g)^{in+1}({}^g a \otimes {}^g b)(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \end{aligned}$$

Do fato das funções μ, u e v serem D-lineares e segundo o lema 4.5 que garante que os módulos A^e são projetivos sobre D temos que (4.4) é uma resolução projetiva de D-módulos de A. Pelo teorema 4.2, devemos aplicar o funtor $\operatorname{Hom}_D(\_, B)$ na resolução (4.4) afim de calcular as cohomologias de Hochschild de B, tendo assim o complexo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_D(A^e, B) \xrightarrow{u^*} \operatorname{Hom}_D(A^e, B) \xrightarrow{v^*} \dots$$

Haja vista isomorfismo entre $\operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, B)$ e B dado por

$$\begin{array}{rlcl} \phi: & \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, B) & \longrightarrow & B \\ & f & \longmapsto & f(1 \otimes 1) \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \theta: & B & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, B) \\ & b & \longmapsto & f_b \end{array}$$

onde $f_b(1 \otimes 1) = (1 \otimes 1)b = b$. Segue que $\mathrm{Hom}_D(A^e, B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)^G$, assim o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "v^*"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\phi"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "u^*"] & B \arrow[r, "v^*"] & B \arrow[r, "u^*"] & \dots
\end{tikzcd}$$

com efeito, $\phi u^*(f) = (u^* f)(1 \otimes 1) = fu(1 \otimes 1) = \phi(fu) = (\phi f)u = u^* \phi f$; análogo para v^*. Segue do lema 4.4 que $\mathrm{Hom}_D(A^e, B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)^G$ onde a ação de G em $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)$ em cada grau do complexo é dado por

$$(g \triangleright f)(a \otimes b) = gf(g^{-1}(a \otimes b)), \ \forall f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B) \text{ e } g \in G$$

além disso como a ação de G em B é induzida da estrutura de D-módulo em B, por meio do monomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} KG & \longrightarrow & D \\ g & \longmapsto & (1 \otimes 1)g \end{array}$$

identificamos G com o subconjunto $(1 \otimes 1)G \subset D$, consequentemente

$$\begin{aligned} (g \triangleright f)(a \otimes b) &= (1 \otimes 1)g \cdot f(g^{-1}(a \otimes b)) \\ &= (g \otimes g^{-1})f(g^{-1}(a \otimes b)) \\ &= gf(g^{-1}(a \otimes b))g^{-1} \end{aligned}$$

Podemos induzir ação de G em B através de sua ação em $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)$. Neste caso a ação de G sobre B depende do grau de A^e no complexo e como vale $b = f_b(1 \otimes 1)$ definimos a ação em questão por $g \cdot b := g \triangleright f_b(1 \otimes 1)$. Assim temos que a ação em grau $2i$ é dada por

$$\begin{aligned} g \cdot b = g \triangleright f_b(1 \otimes 1) &= gf_b(g^{-1}(1 \otimes 1))g^{-1} = gf_b(\chi(g^{-1})^{in}({}^{g^{-1}}1 \otimes {}^{g^{-1}}1))g^{-1} \\ &= g\chi(g^{-1})^{in} f_b(1 \otimes 1)g^{-1} = g\chi(g)^{-in} bg^{-1} = \chi(g)^{-in} gbg^{-1} \end{aligned}$$

e de maneira análoga, devido a ação de g em $1 \otimes 1$ em grau $2i+1$, a ação é dada por

$$g \cdot b = \chi^{-(in+1)} gbg^{-1}$$

Temos também que o isomorfismo $\phi : \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B) \longrightarrow B$ preserva a ação de G, com efeito, dado $g \in G$ e $b \in B$ temos

$$g \cdot b = g \cdot \phi(f_b) := g \triangleright f_b(1 \otimes 1) = \phi(g \triangleright f_b)$$

segue disso que $\mathrm{Hom}_D(A^e, B) = \mathrm{Hom}_{A_e}(A_e, B)^G \simeq B^G$, e com isso temos o isomorfismo de complexos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "v^*"] \arrow[d, "\phi"] & \mathrm{Hom}_D(A^e,B) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\phi"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & B^G \arrow[r, "u^*"] & B^G \arrow[r, "v^*"] & B^G \arrow[r, "u^*"] & \dots \end{tikzcd}$$

Nosso próximo passo será agora calcular os invariantes de B sob a ação de G, isto é B^G, em cada grau do complexo. Começemos em grau $2i$. Seja

$$\alpha = \sum_{j,h} a_{j,h} x^j h \in B^G \tag{4.5}$$

onde $0 \leq j \leq n-1$ e $h \in G$. Temos

$$\begin{aligned} g \cdot \sum_{j,h} a_{j,h} x^j h &= \chi(g)^{-in} g \left(\sum_{j,h} a_{j,h} x^j h \right) g^{-1} = \chi(g)^{-in} \sum_{j,h} a_{j,h} g x^j h g^{-1} \\ &= \chi(g)^{-in} \chi(g)^j \sum_{j,h} a_{j,h} x^j g h g^{-1} \end{aligned}$$

na última passagem do cálculo anterior usamos o fato de que $gx^j = (1\#g)(x^j\#1) = 1^g x^j \# g = \chi(g)^j x^j g$. Como $\alpha \in B^G$ vale $g \cdot \alpha = \alpha$, isto é

$$\chi(g)^{-in+j} \sum_{j,h} a_{j,h} x^j g h g^{-1} = \sum_{j,h} a_{j,h} x^j h$$

$\forall g \in G$. Aplicamos então a igualdade para o elemento central g_1 anteriormente citado. Vale lembrar que $\chi(g_1)$ é uma raiz n-ésima primitiva da unidade. Sendo assim

$$\chi(g_1)^{-in+j} \sum_{j,h} a_{j,h} x^j g_1 h g_1^{-1} = \chi(g_1)^{-in+j} \sum_{j,h} a_{j,h} x^j h = \sum_{j,h} a_{j,h} x^j h$$

como os elementos $x^j h$ formam parte da base de B então,

$$\chi(g_1)^{-in+j} a_{j,h} = (\chi(g_1)^n)^{-i} \chi(g_1)^j a_{j,h} = a_{j,h}$$

logo

$$\chi(g_1)^j a_{j,h} = a_{j,h}, \ \forall h, j \tag{4.6}$$

Para $j = 0$ vale a igualdade e se ocorrer de algum $a_{j,h} \neq 0$ então $\chi(g_1)^j = 1$, mas como $j < n$ e $\chi(g_1)$ é raiz primitiva da unidade então $n|j$, ou seja, $j = 0$. Logo (4.6) é válido para $a_{j,h} \neq 0$ somente quando $j = 0$. Assim

$$\alpha = \sum_{0,h} a_{0,h} \chi(g)^{-in+0} x^0 g h g^{-1} = \sum_h a_h \chi(g)^{-in} g h g^{-1}$$

também devido à (4.5) ao substituir $j = 0$ teremos uma segunda expressão dada por $\alpha = \sum_h a_h h$. No caso de termos $\chi^{-in} = 1$

$$\alpha = \sum_h a_h g h g^{-1} \iff \alpha g = \sum_h a_h g h = g \sum_h a_h h = g\alpha$$

isso diz que $\alpha \in Z(KG)$, e decorrente disso $B^G = Z(KG)$. No caso em que $\chi^{-in} \neq 1$

$$\alpha = \sum_h a_h h = \sum_h \chi(g)^{-in} a_h g h g^{-1}, \ \forall g \in G$$

fazendo $ghg^{-1} = x \iff h = g^{-1}xg$ temos:

$$\alpha = \sum_h a_h h = \sum_x \chi(g)^{-in} a_{g^{-1}xg} x$$

disso $a_h = \chi(g)^{-in} a_{g^{-1}hg} \iff a_{g^{-1}hg} = \chi(g)^{in} a_h, \ \forall g \in G$. Por conveniência trocamos g por g^{-1} e com isso teremos que

$$a_{ghg^{-1}} = \chi(g)^{-in} a_h \quad \forall g \in G$$

Seja g elemento em $Z(h)$, onde $Z(h)$ denota o centralizador de h, isto é, $ghg^{-1} = h$. Assim, $\chi(g)^{-in} a_h = a_{ghg^{-1}} = a_h$ e $(\chi(g)^{-in} - 1)a_h = 0$, logo, $\chi(g)^{-in} = 1$ ou $a_h = 0$ $\iff g \in \operatorname{Ker} \chi^{-in}$ ou $a_h = 0$. Segue disso que podemos concluir que a_h só pode ser diferente de 0 no caso em que $Z(h)$ estiver contido no núcleo de χ^{-in}.

Observemos que G age em B por conjugação, isto é, $g \cdot x = gxg^{-1}$. Fixado um representante h_j da classe de conjugação C_j de G, temos atráves do teorema[1] da órbita e estabilizador que

$$\mathcal{O}(h_j) = \{g \cdot h_j \mid g \in G\} = \{g h_j g^{-1} \mid g \in G\} = C_j$$

$$G_{h_j} = \{g \in G \mid g \cdot h_j = h_j\} = \{g \in G \mid g h_j g^{-1} = h_j\} = Z(h_j)$$

Considerando a bijeção

$$\begin{array}{rccl} \varphi_j : & G/Z(h_j) & \longrightarrow & C_j \\ & gZ(h_j) & \longmapsto & g \cdot h_j = g h_j g^{-1} \end{array}$$

e sendo

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} t_i Z(h_j)$$

com $t_1, t_2, \ldots, t_m$ representantes das classes laterais de $Z(h_j)$ em G, temos

$$\sum_{g \in G} a_{g h_j g^{-1}} g h_j g^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{g \in t_i Z(h_j)} a_{g h_j g^{-1}} g h_j g^{-1}$$

[1] ver considerações feitas sobre o Teorema do Órbita e Estabilizador no apêndice

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{g \in t_i Z(h_j)} a_{\varphi_j(gZ(h_j))} \varphi_j(gZ(h_j)) = \star$$

como $g \in t_i Z(h_j)$, temos $t_i Z(h_j) = gZ(h_j)$ e como a função φ_j independe do representante da classe lateral de $Z(h_j)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \star &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{g \in t_i Z(h_j)} a_{\varphi_j(t_i Z(h_j))} \varphi_j(t_i Z(h_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} |Z(h_j)| a_{\varphi_j(t_i Z(h_j))} \varphi_j(t_i Z(h_j)) = \star\star \end{aligned}$$

como φ_j é uma bijeção entre $G/Z(h_j)$ e C_j então cada $\varphi_j(t_i Z(h_j))$ representa um único elemento $l \in C_j$, logo

$$\star\star = \sum_{l \in C_j} |Z(h_j)| a_l l = |Z(h_j)| \sum_{l \in C_j} a_l l$$

assim

$$\frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} a_{gh_jg^{-1}} gh_j g^{-1} = \sum_{l \in C_j} a_l l$$

e somando sob todas as classes de conjugação, temos a igualdade

$$\sum_{C_j} \sum_{l \in C_j} a_l l = \sum_{C_j} \frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} a_{gh_jg^{-1}} gh_j g^{-1}$$

Considerando então $C_1, \ldots, C_q$ como sendo as classes de conjugação de G com respectivos representantes $h_1, \ldots, h_q$ e o conjunto $J = \{j \mid h_j \in C_j \text{ e } \chi^{-in}|_{Z(h_j)} = 1\}$. Temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{h \in G} a_h h = \sum_{C_j} \sum_{l \in C_j} a_l l \\ &= \sum_{C_j} \frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} a_{gh_jg^{-1}} gh_j g^{-1} \\ &\overset{a_{h_j}=0 \text{ se } j \notin J}{=} \sum_{C_j | j \in J} \frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} a_{h_j} gh_j g^{-1} \\ &= \sum_{C_j | j \in J} a_{h_j} \sum_{g \in G} \frac{1}{|Z(h_j)|} \chi(g)^{-in} gh_j g^{-1} \end{aligned}$$

Com isso B^G é gerado pelos elementos $\sum_{g \in G} \frac{1}{|Z(h_j)|} \chi(g)^{-in} gh_j g^{-1}$, ou ainda já que $\frac{1}{|Z(h_j)|} \in K^*$, pelos elementos da forma $\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} gh_j g^{-1}$, onde h_j é um representante da classe de conjugação de G tal que $\chi^{-in}|_{Z(h_j)} = 1$. Vale observar que esses elementos são linearmente independentes e formam uma base para B^G. No caso em que $\chi^{-in} = 1$ e $B^G = Z(G)$ temos em particular que $\chi^{in}|_{Z(h_j)} = 1\ \forall j$, neste caso α é gerado pelas somas $\sum\limits_{g\in G} gh_jg^{-1}$ sem restrição, ou seja, $\alpha = \sum\limits_{C_j} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum\limits_{g\in G} gh_jg^{-1}$.

Vejamos agora os invariantes em grau $2i+1$, para tal consideramos $\alpha \in B^G$ como em (4.5), assim:

$$\begin{aligned} g\cdot \sum_{j,h} a_{j,h}x^jh &= \chi(g)^{-in-1}g\left(\sum_{j,h} a_{j,h}x^jh\right)g^{-1} = \chi(g)^{-in-1}\sum_{j,h} a_{j,h}gx^jhg^{-1} \\ &= \chi(g)^{-in-1}\chi(g)^j\sum_{j,h} a_{j,h}x^jghg^{-1} \end{aligned}$$

e como $\alpha \in B^G$ vale:

$$\chi(g)^{-in-1+j}\sum_{j,h} a_{j,h}x^jghg^{-1} = \sum_{j,h} a_{j,h}x^jh$$

$\forall g \in G$. Para g_1

$$\chi(g_1)^{-in-1+j}\sum_{j,h} a_{j,h}x^jg_1hg_1^{-1} = \chi(g_1)^{-in-1+j}\sum_{j,h} a_{j,h}x^jh = \sum_{j,h} a_{j,h}x^jh$$

como os elementos x^jh formam parte da base de B então,

$$(\chi(g_1)^n)^{-i}\chi(g_1)^{j-1}a_{j,h} = \chi(g_1)^{-in-1+j}a_{j,h} = a_{j,h}$$

logo

$$\chi(g_1)^{j-1}a_{j,h} = a_{j,h},\ \forall h, j \tag{4.7}$$

Para $j=1$ vale a igualdade e se ocorrer de algum $a_{j,h}\neq 0$ então $\chi(g_1)^{j-1}=1$, como a ordem de $\chi(g_1)$ é n e $j-1<n$ então $j-1=0$. Logo (4.7) é válido para $a_{j,h}\neq 0$ somente quando $j=1$. Assim

$$\alpha = \sum_{1,h} a_{1,h}\chi(g)^{-in-1+1}x^1ghg^{-1} = \sum_h a_h\chi(g)^{-in}xghg^{-1}$$

sendo $\alpha \in B^G$ e reescrevendo $ghg^{-1}=y$, temos

$$\alpha = \sum_h a_hxh = g\cdot\alpha = \chi(g)^{-in}\sum_y a_{g^{-1}yg}xy$$

como o conjunto $\{xh \mid h\in G\}$ é L.I. em B então $a_h = \chi(g)^{-in}a_{g^{-1}hg}$, ou, $a_{g^{-1}hg} = \chi(g)^{in}a_h$. Como a expressão anterior vale para todo $g\in G$, podemos por motivo de conveniência trocar g por g^{-1}e obter a expressão equivalente $a_{ghg^{-1}} = \chi(g)^{-in}a_h\ \forall g,h\in G$.

Como no caso $2i$, consideramos de maneira similar $C_1, \ldots, C_q$ sendo as classes de conjugação de G com respectivos representantes $h_1, \ldots, h_q$ e o conjunto J como antes. Logo

$$\alpha = \sum_{h \in G} a_h x h = \sum_{C_j} \sum_{l \in C_j} a_l x l = \star$$

novamente a partir de cálculos envolvidos no teorema da órbita e estabilizador, de maneira similar ao caso $2i$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \star &= \sum_{C_j} \frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} a_{g h_j g^{-1}} x g h_j g^{-1} \\ &= \sum_{C_j | j \in J} \frac{1}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} a_{h_j} x g h_j g^{-1} \\ &= \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} x g h_j g^{-1} \end{aligned}$$

No caso em que $\chi^{-in} = 1$ tem-se em particular que $\chi^{-in}|_{Z(h_j)} = 1$ para todo j, e neste caso

$$\alpha = \sum_{C_j} a_{h_j} \sum_{g \in G} \frac{1}{|Z(h_j)|} x g h_j g^{-1}$$

Para finalizar esta subseção e resumir os resultados que foram condicionados no decorrer dos cálculos de B^G nas hipóteses sobre χ^{-in} e no grau do complexo, ilustraremos para efeito didático esses conjuntos em uma tabela. Vejamos

	Grau $2i$	**Grau $2i+1$**
$\boldsymbol{\chi^{-in}} = 1$	$Z(KG) =$ $\mathrm{Span}_K\{\sum_{g \in G} g h_j g^{-1} \mid j = 1, \ldots, q\}$	$xZ(KG) =$ $\mathrm{Span}_K\{\sum_{g \in G} x g h_j g^{-1} \mid j = 1, \ldots, q\}$
$\boldsymbol{\chi^{-in}} \neq 1$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \mid j \in J\}$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} x g h_j g^{-1} \mid j \in J\}$
$h_1, \ldots, h_q$ são representantes das classes de conjugação $C_1, \ldots, C_q$ de G respectivamente		
$J = \{j \mid h_j \in C_j$ e $\chi^{-in}|_{Z(h_j)} = 1\}$		

4.5.2 O cálculo e isomorfismo entre $HH^{2i}(B)$ e $HH^{2i+1}(B)$

Analisemos agora as funções u^* e v^*. Dado $b \in B$

$$u^*(b) = u^* f_b(1 \otimes 1) = f_b u(1 \otimes 1) = f_b(1 \otimes 1(x \otimes 1 - 1 \otimes x))$$

$$\begin{aligned} &= f_b(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \overset{f \in \mathrm{Hom}_D(,)}{=} (x \otimes 1 - 1 \otimes x) f_b(1 \otimes 1) \\ &= (x \otimes 1 - 1 \otimes x)b = x(b)1 - 1(b)x = xb - bx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v^*(b) &= v^* f_b(1 \otimes 1) = f_b v(1 \otimes 1) \\ &= f_b(1 \otimes 1(x^{n-1} \otimes 1 + x^{n-2} \otimes x + \ldots + 1 \otimes x^{n-1})) \\ &= f_b(x^{n-1} \otimes 1 + x^{n-2} \otimes x + \ldots + 1 \otimes x^{n-1}) \\ &\overset{f \in \mathrm{Hom}_D(,)}{=} (x^{n-1} \otimes 1 + x^{n-2} \otimes x + \ldots + 1 \otimes x^{n-1}) f_b(1 \otimes 1) \\ &= (x^{n-1} \otimes 1 + x^{n-2} \otimes x + \ldots + 1 \otimes x^{n-1}) b \\ &= x^{n-1}(b)1 + x^{n-2}(b)x + \ldots + 1(b)x^{n-1} \\ &= x^{n-1}b + x^{n-2}bx + \ldots + bx^{n-1} \end{aligned}$$

Lembrando que u^* e v^* possuem como domínio B^G em graus pares e ímpares respectivamente. Para $\chi(g)^{-in} = 1$, nos geradores de B^G, temos:

$$\begin{aligned} v^*\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right) &= x^{n-1}\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right)1 + x^{n-1}\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right)x \\ &+ \ldots + 1\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right)x^{n-1} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} x^k\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right)x^{n-1-k} &= x^k\#1\left(\sum_g x\#gh_jg^{-1}\right)x^{n-1-k}\#1 \\ &= \left(\sum_g x^k({}^1x)\#gh_jg^{-1}\right)x^{n-1-k}\#1 \\ &= \sum_g x^{k+1}({}^{ghg^{-1}}x^{n-1-k})\#gh_jg^{-1} \\ &= \sum_g \chi(ghg^{-1})^{n-1-k}x^{k+1}x^{n-1-k}\#gh_jg^{-1} \\ &= \sum_g \chi(ghg^{-1})^{n-1-k}\underbrace{x^n}_{=0}\#gh_jg^{-1} = 0 \end{aligned}$$

segue que

$$v^*\left(\sum_g xgh_jg^{-1}\right) = 0 \Rightarrow v^* = 0$$

Para o caso em que $\chi^{-in} \neq 1$, tendo em vista que os geradores são da forma $\sum_g \chi(g)^{-in}xgh_jg^{-1}$, e que de maneira análoga ao caso anterior tem-se

$$x^k\left(\sum_g \chi(g)^{-in}xghg^{-1}\right)x^{n-1-k} = 0$$

isto implica que $v^* = 0$ neste caso também. De qualquer forma $v^* = 0$ e com isso $\operatorname{Ker} v^* = B^G$ e $\operatorname{Im} v^* = 0$.

Vejamos agora u^*. Supondo que $\chi^{-in} \neq 1$ assim:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \in \operatorname{Ker} u^* \\
\iff \quad & u^* \left(\sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \right) = 0 \\
\iff \quad & x \left(\sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \right) 1 \\
& -1 \left(\sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \right) x = 0 \\
\iff \quad & \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} (x \# 1)(1 \# g h_j g^{-1}) \\
& - \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} (1 \# g h_j g^{-1})(x \# 1) = 0 \\
\iff \quad & \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} x ({}^1 1) \# g h_j g^{-1} \\
& - \sum_{C_j | j \in J} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} 1 ({}^{g h_j g^{-1}} x) \# g h_j g^{-1} = 0 \\
\iff \quad & \sum_{C_j | j \in J} a_{h_j} (1 - \chi(h_j)) \sum_{g \in G} \frac{1}{|Z(h_j)|} \chi(g)^{-in} x \# g h_j g^{-1} = 0 \\
\implies \quad & a_{h_j} (1 - \chi(h_j)) = 0
\end{aligned}
$$

Logo se $a_{h_j} \neq 0$ então de $a_{h_j}(1 - \chi(h_j)) = 0$ tem-se que $h_j \in \operatorname{Ker} \chi$, com isso temos que $\operatorname{Ker} u^*$ é o K-subespaço de $\operatorname{Span}_K\{\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \mid j \in J\}$ gerado pelos elementos $\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1}$ onde $h_j \in \operatorname{Ker} \chi$. Para $\chi^{-in} = 1$ é análogo, isto é, $\operatorname{Ker} u^*$ é o K-subespaço de $\operatorname{Span}_K\{\sum_{g \in G} g h_j g^{-1} \mid j = 1 \ldots, q\}$ gerado pelos elementos $\sum_{g \in G} g h_j g^{-1}$ onde $h_j \in \operatorname{Ker} \chi$, as contas para verificar isso são análogas a menos de não ter que carregar o escalar $\chi^{-in}(g)$, o que não interfere em nada nos cálculos. A imagem de u^* no caso $\chi^{-in} \neq 1$ é gerado por elementos da forma $\sum\limits_{g} \chi(g)^{-in} x g h_j g^{-1}$ para os quais $h_j \notin \operatorname{Ker} \chi$, pois

$$
\begin{aligned}
u^* \left(\sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} g h_j g^{-1} \right) \neq 0 \quad & \iff \quad \sum_{g \in G} \chi(g)^{-in} x g h_j g^{-1} (1 - \chi(h_j)) \neq 0 \\
& \iff \quad 1 - \chi(h_j) \neq 0 \iff \chi(h_j) \neq 1 \\
& \iff \quad h_j \notin \operatorname{Ker} \chi
\end{aligned}
$$

de forma análoga, no caso de $\chi^{-in} = 1$ temos que $\operatorname{Im} u^*$ é gerado por elementos da forma $\sum\limits_g xgh_jg^{-1}$ para os quais $h_j \notin \operatorname{Ker}\chi$. Em grau $2i+1$ podemos escrever B^G na seguinte soma direta

$$B^G = \operatorname{Im} u^* \oplus W$$

onde

$$W = \begin{cases} \operatorname{Span}_K\{\sum\limits_g \chi(g)^{-in} xgh_jg^{-1} \mid j \in J \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} & \text{se} \quad \chi^{-in} \neq 1 \\ \operatorname{Span}_K\{\sum\limits_g xgh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} & \text{se} \quad \chi^{-in} = 1 \end{cases}$$

lembrando que

$$\operatorname{Ker} u^* = \begin{cases} \operatorname{Span}_K\{\sum\limits_g \chi(g)^{-in} gh_jg^{-1} \mid j \in J \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} & \text{se} \quad \chi^{-in} \neq 1 \\ \operatorname{Span}_K\{\sum\limits_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} & \text{se} \quad \chi^{-in} = 1 \end{cases}$$

temos em ambos os casos um isomorfismo de K-espaços vetoriais entre W e $\operatorname{Ker} u^*$, sendo este definido nos geradores de W por

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & \operatorname{Ker} u^* \\ \sum\limits_g \chi(g)^{-in} xgh_jg^{-1} & \longmapsto & \sum\limits_g \chi(g)^{-in} gh_jg^{-1} \end{array}$$

assim

$$HH^{2i}(B) = \frac{\operatorname{Ker} u^*}{\operatorname{Im} v^*} = \frac{\operatorname{Ker} u^*}{0} \simeq \operatorname{Ker} u^*$$
$$HH^{2i+1}(B) = \frac{\operatorname{Ker} v^*}{\operatorname{Im} u^*} = \frac{B^G}{\operatorname{Im} u^*} = \frac{\operatorname{Im} u^* \oplus W}{\operatorname{Im} u^*} \simeq W$$

logo

$$HH^{2i}(B) \simeq \operatorname{Ker} u^* \simeq W \simeq HH^{2i+1}(B)$$

portanto podemos concluir que $\dim HH^{2i}(B) = \dim HH^{2i+1}(B)$ o que encerra o teorema.

Voltando ao caso em que $\chi^{-in} = 1$, isto é, quando

$$HH^{2i}(B) \simeq \operatorname{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} \subset B^G = Z(KG)$$
$$HH^{2i+1}(B) \simeq \operatorname{Span}_K\{\sum_g xgh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q \text{ e } h_j \in \operatorname{Ker}\chi\} \subset B^G = xZ(KG)$$

vejamos que podemos reescrever estes conjuntos como $(KN)^G$ e $x(KN)^G$ respectivamente. Vamos fazer as contas nos graus pares (e que de maneira análoga podem ser feitas nos graus ímpares). Vejamos isso através de inclusões.

Sendo $b \in \mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$ escrevemos

$$b = \sum_j b_j \sum_g gh_jg^{-1} = \sum_j \sum_g b_jgh_jg^{-1}$$

Dado $l \in G$ temos que $l \cdot b = b$, pois $b \in B^G$. Também temos

$$\chi(gh_jg^{-1}) \;=\; \chi(g)\chi(h_j)\chi(g^{-1}) = \chi(gg^{-1})\chi(h_j) = \chi(1_G)\chi(h_j) = 1_K \cdot 1_K = 1_K$$

segue disto que $gh_jg^{-1} \in N,\ \forall g \in G$. Portanto $b = \sum_j b_j \sum_g gh_jg^{-1} \in B^G \cap (KN)$, logo $\mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\} \subset (KN)^G$.

Reciprocamente, dado $b \in (KN)^G$ escrevemos

$$b = \sum_{h \in N} a_h h$$

com isso

$$\sum_{h \in N} a_h h = b = g \cdot b = g \cdot \sum_{h \in N} a_h h = \sum_{h \in N} a_h ghg^{-1}$$

fazendo $ghg^{-1} = x$ temos $h = g^{-1}xg$, ou trocando g por g^{-1} temos $h = gxg^{-1}$. Com isso

$$\sum_{h \in N} a_h h = b = g^{-1} \cdot b = \sum_{h \in N} a_h g^{-1}hg = \sum_{x \in N} a_{gxg^{-1}} x \quad \forall g^{-1} \in G$$

logo, $a_h = a_{ghg^{-1}}\ \forall g \in G, h \in N$. Considerando as classes de conjugação C_j de G com respectivos representantes h_j, temos

$$b = \sum_{h \in N} a_h h = \sum_{C_j \subset N} \sum_{h \in C_j} a_h h = \sum_{C_j \subset N} a_{h_j} \sum_{h \in C_j} h = \star$$

e a partir de cálculos envolvidos na demonstração do teorema da órbita e estabilizador podemos escrever

$$\star = \sum_{C_j \subset N} \frac{a_{h_j}}{|Z(h_j)|} \left(\sum_{g \in G} gh_jg^{-1} \right) \in \mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q \text{ e } h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$$

Logo $(KN)^G \subset \mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$, e portanto vale a igualdade $(KN)^G = \mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$ analogamente temos $x(KN)^G = \mathrm{Span}_K\{\sum_g xgh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$.

Para resumir os cálculos de $HH^n(B)$ de acordo com as hípoteses impostas para os cálculos destas, fixamos a seguinte tabela

	$\boldsymbol{HH^{2i}(B)}$
$\boldsymbol{\chi^{-in}} = 1$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_g gh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\} = (KN)^G$
$\boldsymbol{\chi^{-in}} \neq 1$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_g \chi(g)^{-in}gh_jg^{-1} \mid j \in J$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$
	$\boldsymbol{HH^{2i+1}(B)}$
$\boldsymbol{\chi^{-in}} = 1$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_g xgh_jg^{-1} \mid j = 1, \ldots, q$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\} = x(KN)^G$
$\boldsymbol{\chi^{-in}} \neq 1$	$\mathrm{Span}_K\{\sum_g \chi(g)^{-in}xgh_jg^{-1} \mid j \in J$ e $h_j \in \mathrm{Ker}\,\chi\}$
$h_1, \ldots, h_q$ são representantes das classes de conjugação $C_1, \ldots, C_q$ de G respectivamente	
$J = \{j \mid h_j \in C_j$ e $\chi^{-in}\|_{Z(h_j)} = 1\}$	

Vale ressaltar que no caso em que $\chi^{-in} = 1$ temos que $HH^{2i}(B) = (KN)^G$ e $HH^{2i+1}(B) = x(KN)^G$ são K-álgebras comutativas.

Capítulo 5

A Estrutura de Anel

No capítulo 2, definimos o n-ésimo módulo de cohomologia de uma K-álgebra A com coeficientes em um $(A - A)$-bimódulo M, e vimos como isto pode ser obtido por meio da resolução barra de A. Quando M também é uma K-álgebra, o produto em M torna a soma direta desses K-módulos de cohomologia em um anel associativo, dito anel de cohomologia de A com coeficientes em M. O cerne deste capítulo é calcular o anel de cohomologia de B com coeficientes em B, também dito de anel de cohomologia de B ou ainda de estrutura de anel de $HH^*(B)$, onde $B = A\#KG$ como definido no capítulo anterior e sobre a hipótese de que $\chi^n = 1$. Para entender do que se trata tal estrutura abordaremos a mesma na próxima seção, onde será definido o produto cup e consequentemente o anel de Cohomologia através da definição clássica de Gerstenhaber para uma K-álgebra. Posteriormente usaremos tais ferramentas para calcular o anel de cohomologia de B e veremos através do coproduto que este é isomorfo à álgebra $(KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2 \rangle$. Os principais referenciais teóricos deste capítulo são [2], [7], [9] e [10].

5.1 Produto cup e anel de cohomologia

Seja K sendo um anel comutativo, A e M duas K-álgebras e M um $(A-A)$-bimódulo. Consideramos uma m-cocadeia f^m de A com coeficientes em M como sendo um homomorfismo de K-módulos do produto tensorial $A^{\otimes^m}$ em M, isto é, $f^m \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M)$. Identificamos $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^0}, M)$ com M. Para cada m temos homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \delta = \delta_m : & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+1}}, M) \\ & f & \longmapsto & \delta_m(f) \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta_m f(a_1\otimes\ldots\otimes a_{m+1}) &= a_1 f(a_2\otimes\ldots\otimes a_{m+1})\\ &+ \sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(a_1\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{m+1})\\ &+ (-1)^{m+1} f(a_1\otimes\ldots\otimes a_m)a_{m+1}.\end{aligned}$$

com esses homomorfismos temos que o seguinte diagrama comuta para cada $m\geq 0$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}},M) \arrow[r, "d^*_{m+1}"] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+3}},M) \\ \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m},M) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\delta_m"] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+1}},M) \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

onde, segundo o capítulo sobre cohomologia de álgebras o isomorfismo $\varphi:\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m},M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}},M)$ é dado por

$$\varphi(f)(a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+1}) = a_0f(a_1\otimes\cdots\otimes a_m)a_{m+1}$$

para todo $f\in\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m},M), a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+1}\in A^{\otimes^{m+2}}$ e

$$\begin{aligned} d_m:\quad & A^{\otimes^{m+2}} &\longrightarrow\ & A^{\otimes^{m+1}}\\ & a_0\otimes\ldots\otimes a_{m+1} &\longmapsto\ & \sum_{i=0}^{m}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{m+1}\end{aligned}$$

Com efeito, sendo $f\in\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m},M)$ e $a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+2}\in A^{\otimes^{m+3}}$, temos

$$\begin{aligned}&\varphi\delta_m(f)(a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+2})\\ &= a_0(\delta_m(f)(a_1\otimes\cdots\otimes a_{m+1}))a_{m+2}\\ &= a_0(a_1f(a_2\otimes\cdots\otimes a_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(a_1\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{m+1})\\ &\quad +(-1)^{m+1}f(a_1\otimes\cdots\otimes a_m)a_{m+1})a_{m+2}\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}&d^*_{m+1}\varphi(a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+2}) = \varphi d_{m+1}(a_0\otimes\cdots\otimes a_{m+2})\\ &= \varphi(f)\left(\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{m+2}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i\varphi(f)(a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{m+2})\\ &= \varphi(f)(a_0a_1\otimes\cdots\otimes a_{m+2}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\varphi(f)(a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{m+2})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +(-1)^{m+1}\varphi(f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{m+1}a_{m+2}) \\
= \;& a_0a_1f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{m+1})a_{m+2} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+1})a_{m+2} \\
& +(-1)^{m+1}a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)a_{m+1}a_{m+2} \\
= \;& a_0(a_1f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+1}) \\
& +(-1)^{m+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)a_{m+1})a_{m+2}
\end{aligned}
$$

de resultados do capítulo sobre cohomologia de álgebras tínhamos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, M) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^3}, M) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

era um complexo, assim de acordo com a comutatividade do quadrado que mostramos a pouco, temos também que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^0}, M) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^1}, M) \xrightarrow{\delta_1} \cdots$$

é um complexo, logo $\delta_{m+1}\delta_m = 0$. Como consequência disso, esses dois complexos possuem as mesmas cohomologias. Assim $H^m(A, M) \simeq Z^m(A, M)/B^m(A, M)$ onde $Z^m(A, M) = \mathrm{Ker}\,\delta_m$ e $B^m(A, M) = \mathrm{Im}\,\delta_{m-1}$.

A multiplicação de M induz para cada m, n um homomorfismo denotado por $\smile$ e chamado de produto cup de $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M) \otimes \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, M)$ em $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+n}}, M)$ definido para $f^m \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M)$ e $g^n \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, M)$ por:

$$
\begin{array}{rccc}
\smile : & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M) \otimes \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+n}}, M) \\
& f^m \otimes g^n & \longmapsto & \smile(f^m \otimes g^n) := f^m \smile g^n
\end{array}
$$

onde

$$f^m \smile g^n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) = f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m)g^n(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n)$$

consideramos

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, M)$$

Com o produto cup esta soma direta se torna uma K-álgebra graduada pelos inteiros. Vale também a igualdade

$$\delta(f^m \smile g^n) = (\delta f^m) \smile g^n + (-1)^m f^m \smile (\delta g^n)$$

vejamos:

$$\delta(f^m \smile g^k)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \otimes a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1 f^m \smile g^k(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m+k} (-1)^i f^m \smile g^k(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&+ (-1)^{m+k+1} f^m \smile g^k(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+k}) a_{m+k+1} \\
&= a_1 f^m(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) g^k(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (-1)^i f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) g^k(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^{m+i} f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) g^k(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+i} a_{m+i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&+ (-1)^{m+k+1} f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) g^k(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k}) a_{m+k+1}
\end{aligned}
$$

por outro lado

$$
\begin{aligned}
&((\delta f^m) \smile g^k + (-1)^m f^m \smile (\delta g^k))(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad = ((\delta f^m) \smile g^k)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) + ((-1)^m f^m \smile (\delta g^k))(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad = \delta f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) g^k(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad + (-1)^m f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) \delta g^k(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad = [a_1 f^m(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) \\
&\quad + (-1)^{m+1} f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m) a_{m+1}] g^k(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad + (-1)^m f^m(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m)[a_{m+1} g^k(a_{m+2} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i g^k(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+i} a_{m+i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k+1}) \\
&\quad + (-1)^{k+1} g^k(a_{m+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+k}) a_{m+k+1}]
\end{aligned}
$$

a última expressão depois de feita a distributiva irá cancelar alguns termos chegando na expressão desejada. Com isso, se $f^m \in Z^m(A, M)$ e $g^n \in Z^n(A, M)$ então $f^m \smile g^n \in Z^{m+n}(A, M)$, pois

$$
\delta(f^m \smile g^n) = \delta f^m \smile g^n + (-1)^m f^m \smile \delta g^n = 0 \smile g^n + (-1)^m f^m \smile 0 = 0
$$

assim $Z^*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} Z^n(A, M)$ é subanel de $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, M)$, de fato, pode-se verificar que $Z^*(A, M)$ é fechado para a diferença e também vale que $\delta(1) = 0$, para este último basta observar que para $\delta_0 : M = \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^0}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^1}, M)$, tomando $m \in M$ e $a \in A$ temos $\delta(m)(a) = am - ma$, logo $\delta(1)(a) = a - a = 0$.

Se tivermos a condição de que $f^m \in B^m(A, M)$ ou $g^n \in B^n(A, M)$ então $f^m \smile g^n \in B^{m+n}(A, M)$, de onde concluimos que $B^*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} B^n(A, M)$ é um ideal de $Z^*(A, M)$.

Com efeito, suponhamos o caso em que $f^m \in B^m(A, M)$, ou seja, $f^m = \delta f^{m-1}$ para algum $f^{m-1} \in \operatorname{Hom}_K(A^{\otimes^{m-1}}, M)$ e $g_n \in Z^n(A, M)$, o outro caso é análogo, com isso

$$f^m \smile g^n = \delta f^{m-1} \smile g^n + (-1)^m f^m \smile \underbrace{\delta_n g^n}_{=0} = \delta(f^{m-1} \smile g^n)$$

Teorema 5.1 *Sendo*

$$Z^*(A, M)/B^*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} Z^n(A, M)/\bigoplus_{n \geq 0} B^n(A, M)$$

e

$$H^*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} (Z^n(A, M)/B^n(A, M))$$

temos o seguinte isomorfismo de K-módulos

$$\begin{array}{ccc} Z^*(A, M)/B^*(A, M) & \longrightarrow & H^*(A, M) \\ (z_n) + B^*(A, M) & \longmapsto & (z_n + B^n(A, M)) \end{array}$$

Demonstração. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \theta: & Z^*(A, M) & \longrightarrow & H^*(A, M) \\ & (z_n) & \longmapsto & (\overline{z_n}) \end{array}$$

com isso

$$\begin{array}{rcl} (a_n) \in \operatorname{Ker} \theta & \iff & \theta((a_n)) = (\overline{a_n}) = (\overline{0}) \iff \overline{a_n} = \overline{0}\ \forall n \\ & \iff & a_n \in B^n(A, M)\ \forall n \iff (a_n) \in B^*(A, M) \end{array}$$

logo $\operatorname{Ker} \theta = B^*(A, M)$, também θ é sobrejetor, pois, se $(\overline{z_n}) \in H^*(A, M)$ então $(\overline{z_n}) = \theta((z_n))$, logo pelo teorema do isomorfismo

$$\frac{Z^*(A, M)}{\operatorname{Ker} \theta} \simeq \operatorname{Im} \theta \iff \frac{Z^*(A, M)}{B^*(A, M)} \simeq H^*(A, M)$$

□

Podemos então definir o produto cup de elementos de $H^m(A, M)$ e $H^n(A, M)$ escolhendo representantes arbitrários em $Z^m(A, M)$ e $Z^n(A, M)$ respectivamente. A multiplicação será novamente denotada por $\smile$ e torna $H^*(A, M) \simeq Z^*(A, M)/B^*(A, M)$ um anel associativo, chamado de anel de cohomologia de A com coeficientes em M.

Obs: A estrutura de anel de $H^*(A, M)$ induzida pelo isomorfismo do teorema 5.1 é dada explicitamente por

$$(\overline{z_n}) + (\overline{w_n}) = (\overline{z_n + w_n})$$

e como $\sum \overline{z_n} \sum \overline{w_k} = \sum \overline{z_n \smile w_k}$, temos

$$(\overline{z_n})(\overline{w_n}) = \left(\sum_{i+j=n} \overline{z_i \smile w_j} \right)$$

Com o propósito de calcular o anel de cohomologia de B, será necessário encontrar resultados que permitam passar de um complexo ao outro até chegar em um que seja adequado àquele dado pela definição, isto é, o produto cup sobre $\bigoplus\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^n}, B)$. Vejamos isso através dos resultados que seguem.

5.2 Outras duas resoluções D-projetivas para $A = K[x]/\langle x^n \rangle$

Uma K-base para $A = K[x]/\langle x^n\rangle$ é $\beta_A = \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ e para KG é $\beta_{KG} = \{g \mid g \in G\}$, logo uma K-base para $B = A\#KG$ é $\beta_B = \{x^j g \mid j = 0, \ldots, n-1 \text{ e } g \in G\}$ e para $B^{\otimes^m}$ é $\beta = \{x^{j_1}g_1 \otimes \ldots \otimes x^{j_m}g_m \mid x^{j_i}g_i \in \beta_B\}$. Agora podemos particionar a base β através dos subconjuntos β_g dados por:

$$\beta_g = \{x^{j_1}g_1 \otimes \ldots \otimes x^{j_m}g_m \mid g_1 \cdot g_2 \ldots g_m = g\}$$

denotaremos o K-subespaço gerado por β_g por $(B^{\otimes^m})_g$. Para $m+2$, temos que

$$(B^{\otimes^{m+2}})_g = \mathrm{Span}_K\{a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \mid a_i \in A,\ g_i \in G \text{ e } g_0g_2\ldots g_{m+1} = g\}$$

Segue que temos a seguinte soma direta de K-subespaços

$$B^{\otimes^{m+2}} = \bigoplus_{g\in G} (B^{\otimes^{m+2}})_g$$

onde denotaremos $(B^{\otimes^{m+2}})_1$ por D_m, ou seja,

$$D_m = \mathrm{Span}_K\{a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \mid a_i \in A,\ g_i \in G \text{ e } g_0\ldots g_{m+1} = 1\}$$

consideramos agora a resolução barra de B construída de forma análoga visto em (2.1) e que denotaremos por

$$\cdots \longrightarrow B^{\otimes^4} \xrightarrow{\delta} B^{\otimes^3} \xrightarrow{\delta} B^e \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$$

temos que $\mathrm{Im}(\delta|_{(B^{\otimes^{m+2}})_g}) \subset (B^{\otimes^{m+1}})_g$, com efeito, sendo $a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \in (B^{\otimes^{m+2}})_g$ (vale $g_0 \ldots g_{m+1} = g$), temos:

$$\delta(a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \quad = \quad \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_ig_ia_{i+1}g_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i a_0g_0 \otimes \ldots \otimes (a_i{}^{g_i}a_{i+1})g_ig_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}$$

e como $g_0 \ldots (g_ig_{i+1}) \ldots g_{m+1} = g$ vale o mencionado. Também devido ao fato de que $(B)_1 = \text{Span}_K\{a_0g_0 \mid g_0 = 1\} = A$, então a resolução barra de B induz o complexo

$$\cdots \longrightarrow (B^{\otimes^4})_1 \xrightarrow{\delta|_{(B^{\otimes 4})_1}} (B^{\otimes^3})_1 \xrightarrow{\delta|_{(B^{\otimes 3})_1}} (B^e)_1 \xrightarrow{\mu|_{(B^e)_1}} B_1 \simeq A \longrightarrow 0$$

ou reescrevendo

$$\cdots \longrightarrow D_2 \xrightarrow{\delta|_{D_2}} D_1 \xrightarrow{\delta|_{D_1}} D_0 \xrightarrow{\mu|_{D_0}} A \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

Os K-subespaços D_m são D-módulos, com efeito, $B^{\otimes^{m+2}}$ é B^e-módulo e temos a aplicação inclusão D-linear $D \overset{i}{\hookrightarrow} B^e$, assim $B^{\otimes^{m+2}}$ é D-módulo por restrição de escalares. A ação de D em $B^{\otimes^{m+2}}$ é dada por

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & D \times B^{\otimes^{m+2}} & \longrightarrow & B^{\otimes^{m+2}} \\ & ((a \otimes b)g, a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) & \longmapsto & (ag \otimes {}^{g^{-1}}bg^{-1}) \cdot a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \end{array}$$

onde temos

$$\begin{aligned} &(ag \otimes {}^{g^{-1}}bg^{-1}) \cdot a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \\ &\quad = ag(a_0g_0) \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes (a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1} \\ &\quad = (a^ga_0)gg_0 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes (a_{m+1}{}^{g_{m+1}}({}^{g^{-1}}b))g_{m+1}g^{-1} \end{aligned}$$

No caso em que $a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \in D_m$ teremos que $(ag \otimes {}^{g^{-1}}bg^{-1}) \cdot a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \in D_m$ pois $(gg_0)g_1 \ldots g_m(g_{m+1}g^{-1}) = g(g_0 \ldots g_{m+1})g^{-1} = g1g^{-1} = gg^{-1} = 1$. Sendo então D_m invariante sob a ação de D, temos que D_m possui estrutura de D-módulo. Vejamos agora que as aplicações $\delta|_{D_{m+1}} : D_{m+1} \to D_m$ são D-lineares

$$\begin{aligned} &\delta|_{D_{m+1}}((a \otimes b)g \cdot a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \\ &\quad = \delta(ag(a_0g_0) \otimes \ldots \otimes (a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1}) \\ &\quad = (ag(a_0g_0))a_1g_1 \otimes a_2g_2 \otimes \ldots \otimes (a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i ag(a_0g_0) \otimes \ldots \otimes a_ig_i(a_{i+1}g_{i+1}) \otimes \ldots \otimes (a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1} \\ &\quad + (-1)^m ag(a_0g_0) \otimes \ldots \otimes a_mg_m((a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1}) = \star \end{aligned}$$

a associatividade de B em $(ag(a_0g_0))a_1g_1 = ag(a_0g_0a_1g_1)$ e $a_mg_m((a_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1}) = (a_mg_ma_{m+1}g_{m+1})^{g^{-1}}bg^{-1}$ mostra que

$$\begin{aligned}\star &= (a\otimes b)g\cdot a_0g_0a_1g_1\otimes\ldots\otimes a_{m+1}g_{m+1}\\ &+ (a\otimes b)g\cdot\left(\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i a_0g_0\otimes\ldots\otimes a_ig_ia_{i+1}g_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{m+1}g_{m+1}\right)\\ &+ (-1)^m(a\otimes b)g\cdot a_0g_0\otimes a_1g_1\otimes\ldots\otimes a_mg_ma_{m+1}g_{m+1}\\ &= (a\otimes b)g\cdot\delta|_{D_{m+1}}(a_0g_0\otimes a_{m+1}g_{m+1})\end{aligned}$$

logo (5.1) é um complexo de D-módulos, isto é, $\delta|_{D_m}\delta|_{D_{m+1}} = 0$. Agora tomemos $a\in \operatorname{Ker}\delta|_{D_m}\subset (B^{\otimes^{m+2}})_1$, podemos escrever $a = a+0$ onde $0\in\bigoplus\limits_{g\neq 1}(B^{\otimes^{m+2}})_g$, assim

$$0=\delta|_{D_m}(a)=\delta|_{D_m}(a+0)=\delta(a)$$

segue da exatidão da resolução barra de B que $a\in\operatorname{Im}\delta$, logo existe $a_{m+1}+a'_{m+1}\in B^{\otimes^{m+3}} = D_{m+1}\bigoplus\left(\bigoplus\limits_{g\neq 1}(B^{\otimes^{m+3}})_g\right)$ tal que $a=\delta(a_{m+1}+a'_{m+1})=\delta(a_{m+1})+\delta(a'_{m+1})\in D_m$. Como a componente $\delta(a'_{m+1})\in D_m\cap\bigoplus\limits_{g\neq 1}(B^{\otimes^{m+2}})_g = 0$ então $a=\delta(a_{m+1})=\delta|_{D_{m+1}}(a_{m+1})$ e a sequência induzida nos módulos D_m é exata em cada grau $m>0$. Também $\mu|_{D_0}: D_0\longrightarrow A$ é sobrejetor, pois dado $a\in A$, temos, $a=a1=(a^{1_G}1_A)1_G1_G^{-1}=\mu(a1_G\otimes 1_A1_G)$. Logo (5.1) é exato e para ser resolução D-projetiva para A falta verificar que os D-módulos são projetivos sobre D. Tem-se que

$$B^{\otimes^{m+2}}\simeq_{B^e} B^e\otimes_K B^{\otimes^m}\overset{(4.3)}{\simeq} D^{(G)}\otimes_K B^{\otimes^m}$$

como $\dim A = n$ e $\dim KG = |G|$ então $\dim B = n|G|$ e $\dim B^{\otimes^m} = (n|G|)^m$, denotando $(n|G|)^m$ por N temos $B^{\otimes^m}\simeq K^N$, assim temos os isomorfismos de D-módulos à esquerda

$$D^{(G)}\otimes_K B^{\otimes^m}\simeq_D D^{(G)}\otimes_K K^N\simeq_D (D^{(G)}\otimes_K K)^N\simeq_D (D^{(G)})^N\simeq_D D^{(G)N}$$

logo $B^{\otimes^{m+2}}$ é livre sobre D, e consequentemente $D_m = (B^{\otimes^{m+2}})_1$ é projetivo sobre D, pois é somando direto de $B^{\otimes^{m+2}}$.

A resolução barra de A é compatível com a ação de $D = A^e\#KG$ dada pela ação usual de A^e e ação diagonal de G sobre o produto tensorial $A^{\otimes^m}$, a saber

$$(a\otimes b)g\cdot a_1\otimes a_2\otimes\ldots\otimes a_m = a({}^ga_1)\otimes {}^ga_2\otimes\ldots\otimes({}^ga_m)b$$

vejamos por exemplo que

$$(c\otimes d)h\cdot((a\otimes b)g\cdot a_1\otimes\ldots\otimes a_m) \quad=\quad (c\otimes d)h\cdot a({}^ga_1)\otimes {}^ga_2\otimes\ldots\otimes({}^ga_m)b$$

$$= \quad c^h(a({}^g a_1)) \otimes {}^{hg}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{hg}a_{m-1} \otimes {}^h(({}^g a_m)b)d$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
&((c \otimes d)h(a \otimes b)g) \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \\
&\quad = ((c \otimes d)^h(a \otimes b)hg) \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \\
&\quad = ((c \otimes d)({}^h a \otimes {}^h b)hg) \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \\
&\quad = (c^h a \otimes {}^h bd)hg \cdot a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \\
&\quad = c^h a^{hg} a_1 \otimes {}^{hg}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{hg}a_{m-1} \otimes {}^{hg}a_m{}^h bd
\end{aligned}$$

também denotando por δ os diferenciais da resolução barra de A, isto é,

$$\begin{array}{rccl}
\delta: & A^{\otimes^{m+2}} & \longrightarrow & A^{\otimes^{m+1}} \\
 & a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1} & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}
\end{array}$$

temos que estes são D-lineares, com efeito, sendo $(a \otimes b)g \in D$ e $a_0 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{m+1} \in A^{\otimes^{m+2}}$, temos

$$\begin{aligned}
&(a \otimes b)g \cdot \delta(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) = (a \otimes b)g \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1} \\
&= \quad (a \otimes b)g \cdot (a_0 a_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1} \\
&\qquad + (-1)^m a_0 \otimes \ldots \otimes a_m a_{m+1}) \\
&= \quad a^g(a_0 a_1) \otimes \ldots \otimes {}^g a_{m+1} b + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i a^g a_0 \otimes \ldots \otimes {}^g(a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes {}^g a_{m+1} b \\
&\qquad + (-1)^m a^g a_0 \otimes \ldots \otimes {}^g(a_m a_{m+1}) b
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
&\delta((a \otimes b)g \cdot a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) = \delta\,(a^g a_0 \otimes \ldots \otimes {}^g a_{m+1} b) \\
&= \quad (a^g a_0)^g a_1 \otimes \ldots \otimes {}^g a_{m+1} b + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i a^g a_0 \otimes \ldots \otimes {}^g a_i {}^g a_{i+1} \otimes \ldots \otimes {}^g a_{m+1} b \\
&\qquad + (-1)^m a^g a_0 \otimes \ldots \otimes {}^g a_m {}^g a_{m+1} b
\end{aligned}$$

com isso pelo lema 4.5 a resolução barra de A se torna D-projetiva. Podemos também definir para cada m funções D-lineares

$$\begin{array}{rccl}
\rho_m: & D_m & \longrightarrow & A^{\otimes^{m+2}} \\
 & a_0 g_0 \otimes \cdots \otimes a_{m+1} g_{m+1} & \longmapsto & a_0 \otimes {}^{g_0}a_1 \otimes \ldots \otimes {}^{g_0 \cdots g_m}a_{m+1}
\end{array}$$

tendo consequentemente um morfismo de complexos entre as duas resoluções projetivas sobre D que havíamos mencionado, isto é,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A^{\otimes^4} \arrow[r, "\delta"] & A^{\otimes^3} \arrow[r, "\delta"] & A^{\otimes^2} \arrow[r, "\delta"] & A \arrow[r] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & D_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\rho_2"] & D_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\rho_1"] & D_0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\rho_0"] & A \arrow[r] \arrow[u, "="] & 0 \end{tikzcd}$$

Para fim de conclusóes posteriores a respeito da estrutura de anel de cohomologia de B, vale ressaltarmos que existe um isomorfismo de B^e-módulos envolvendo os D-módulos D_m, a saber,

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & B^{\otimes^{m+2}} & \longrightarrow & B^e \otimes_D D_m \\ & a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} & \longmapsto & (1 \otimes g_0 \ldots g_{m+1}) \otimes (a_0g_0 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes a_{m+1}g_m^{-1} \ldots g_0^{-1}) \end{array}$$

com inversa dada por

$$\begin{array}{rccc} \alpha^{-1}: & B^e \otimes_D D_m & \longrightarrow & B^{\otimes^{m+2}} \\ & (b_{-1} \otimes b_{m+2}) \otimes (b_0 \otimes \ldots \otimes b_{m+1}) & \longmapsto & b_{-1}b_0 \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_m \otimes b_{m+1}b_{m+2} \end{array}$$

5.3 Os morfismos de complexos ϕ e ψ e o produto cup em B^G

Escrevendo a resolução barra de A por

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes^4} \xrightarrow{\delta} A^{\otimes^3} \xrightarrow{\delta} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

Temos duas sequências de funções que são morfismos entre os complexos (4.4) e (5.2), a saber, essas cadeias são dadas pelas funções $\phi's$ e $\psi's$ definidas em (3.5) e (3.4) e torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\delta"] & A^{\otimes^4} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift left, "\psi_2"] & A^{\otimes^3} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift left, "\psi_1"] & A^e \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "="] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ \cdots \arrow[r, "u"'] & A^e \arrow[r, "v"'] \arrow[u, shift left, "\phi_2"] & A^e \arrow[r, "u"'] \arrow[u, shift left, "\phi_1"] & A^e \arrow[r, "\mu"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Passando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_D(\_, B)$ neste diagrama comutativo e tendo em vista o isomorfismo $\mathrm{Hom}_D(A^e, B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, B)^G \simeq B^G$ que denotaremos por η, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, shift left, "\phi_0^*"] & \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^3}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, shift left, "\phi_1^*"] & \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^4}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, shift left, "\phi_2^*"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "u^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_0^*"] \arrow[d, "\eta", "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "v^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_1^*"] \arrow[d, "\eta", "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "u^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_2^*"] \arrow[d, "\eta", "\simeq"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & B^G \arrow[r, "u^*"] & B^G \arrow[r, "v^*"] & B^G \arrow[r, "u^*"] & \cdots \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Vale lembrar que ao definirmos as funções $\varphi's$ e $\psi's$, vimos que para cada $m \geq 0$, ψ_m era inversa à esquerda de ϕ_m, isto é, $\psi_m\phi_m = 1$, logo ao passarmos o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_D(\_, B)$ temos que $\phi_m^*\psi_m^* = 1^* = 1$, ou seja, ϕ_m^* é inversa à esquerda de ψ_m^*. O isomorfismo η : $\mathrm{Hom}_D(A^e, B) \longrightarrow B^G$ é dado por $\eta(f) = f(1 \otimes 1)$ e sua inversa $\eta^{-1} : B^G \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(A^e, B)$ é dado por $\eta^{-1}(a) = f_a$, onde $f_a(1 \otimes 1) = a$. Vejamos agora o teorema que é o cerne e encerra o presente capítulo

Teorema 5.2 *Assuma que $\chi^n = 1$ e seja $N = \mathrm{Ker}\,\chi \subset G$. Existe um isomorfismo de álgebras graduadas*

$$HH^*(B) \simeq (KN)^G \otimes K[y, z]/\langle z^2 \rangle$$

onde grau de y é 2 e grau de z é 1.

No capítulo que diz respeito à cohomologia de álgebras foi mencionado isomorfismo entre $\mathrm{Hom}_{A^e}(X_l, M)$ e $\mathrm{Hom}_K(X_{l-2}, M)$ onde A era uma K-álgebra, $X_l = A^{\otimes^{l+2}}$ e M um $(A{-}A)$-bimódulo. O mesmo vale para o caso em questão, onde $A = K[x]/\langle x^n \rangle$ e consideramos B no lugar de M, isto é, $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{l+2}}, B) \simeq \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^l}, B)$. Esse isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rlcl} \sigma : & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{l+2}}, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^l}, B) \\ & f & \longmapsto & \sigma(f) \end{array}$$

e onde $\sigma(f)(a^{\otimes^l}) = f(1 \otimes a^{\otimes^l} \otimes 1)$. Sua inversa é dada por

$$\begin{array}{rlcl} \sigma^{-1} : & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^l}, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{l+2}}, B) \\ & g & \longmapsto & \sigma^{-1}(g) \end{array}$$

onde $\sigma^{-1}(g)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{l+1}) = a_0 \otimes a_{l+1} \cdot g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_l)$. Novamente vale reforçar que no capítulo sobre cohomologia de álgebras esse último isomorfismo foi provado no caso geral, com outra notação.

Como temos ação diagonal de G em $A^{\otimes^i}$ e ação de G em B dada por $g \cdot b = gbg^{-1}$, então pela proposição 4.3, G age nos conjuntos de funções $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^i}, B) \subset \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^i}, B)$, temos que o isomorfismo σ^{-1} preserva a ação de G. Com efeito, tomando $f \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^l}, B)$, $g \in G$ e $v = a_1 \otimes \ldots \otimes a_l \in A^{\otimes^l}$, temos

$$\begin{aligned} (g \triangleright (\sigma^{-1}f))(a_0 \otimes v \otimes a_{l+1}) &= g[(\sigma^{-1}f)(g^{-1} \cdot (a_0 \otimes v \otimes a_{l+1}))]g^{-1} \\ &= g[(\sigma^{-1}f)({}^{g^{-1}}a_0 \otimes {}^{g^{-1}}v \otimes {}^{g^{-1}}a_{l+1})]g^{-1} \\ &= g({}^{g^{-1}}a_0)f({}^{g^{-1}}v)({}^{g^{-1}}a_{l+1})g^{-1} = \star \end{aligned}$$

lembrando que $g({}^{g^{-1}}a_0) = (1\#g)({}^{g^{-1}}a_0\#1_G) = 1^{gg^{-1}}a_0\#g1_G = a_0\#g = a_0g$ e que $g^{-1}a_{l+1} = (1\#g^{-1})(a_{l+1}\#1_G) = 1^{g^{-1}}a_{l+1}\#g^{-1}1_G = {}^{g^{-1}}a_{l+1}\#g^{-1} = ({}^{g^{-1}}a_{l+1})g^{-1}$, podemos escrever

$$\star = a_0gf({}^{g^{-1}}v)g^{-1}a_{l+1} = a_0(g \triangleright f)(v)a_{l+1} = \sigma^{-1}(g \triangleright f)(a_0 \otimes v \otimes a_{l+1})$$

com isso $g \triangleright (\sigma^{-1}f) = \sigma^{-1}(g \triangleright f)$ e como consequência deste fato temos que o isomorfismo σ^{-1} preserva G invariantes, isto é, $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^i}, B) \simeq \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{i+2}}, B) \Rightarrow \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^i}, B)^G \simeq \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{i+2}}, B)^G$. Sendo assim em grau i temos a sequência de funções K-lineares

$$B^G \xrightarrow{\eta_{\simeq}^{-1}} \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \underset{\phi_i^*}{\overset{\psi_i^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{i+2}}, B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{i+2}}, B)^G \underset{\sigma^{-1}}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^i}, B)^G$$

e como havíamos anteriormente verificado a comutavidade do diagrama para cada $m \geq 0$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+3}}, M) \\
\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+1}}, M) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

temos ainda a comutatividade desse quadrado nos invariantes desses módulos, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}}, M)^G \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+3}}, M)^G \\
\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, M)^G \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+1}}, M)^G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

comuta para cada $m \geq 0$. Sendo $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}}, M)^G = \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{m+2}}, M)$, temos que o diagrama (5.3) tem incluido mais uma família de funções de cadeia σ como segue

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^0}, B)^G \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^1}, B)^G \arrow[r] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^2}, B)^G \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "\simeq"', "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\phi_0^*"] & \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^3}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "\simeq"', "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\phi_1^*"] & \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^4}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[u, "\simeq"', "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\phi_2^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "u^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_0^*"] \arrow[d, "\simeq"', "\eta"] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "v^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_1^*"] \arrow[d, "\simeq"', "\eta"] & \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \arrow[r, "u^*"'] \arrow[u, shift left, "\psi_2^*"] \arrow[d, "\simeq"', "\eta"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B^G \arrow[r, "u^*"] & B^G \arrow[r, "v^*"] & B^G \arrow[r, "u^*"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{5.4}$$

De acordo com o capítulo anterior vimos que as cohomologias de Hochschild de B podiam ser calculadas através das cohomologias do complexo da linha inferior do diagrama anterior, isto é, no complexo com os módulos B^G, porém a definição de produto cup usado para calcular o anel de cohomologia de Hochschild de B é dado em termos da resolução barra de B. Vejamos que o produto cup sobre o complexo induzido da resolução barra de B pode ser definido a partir da linha superior do diagrama anterior, no sentido de que o produto cup será preservado. Para isso consideramos a função $\rho_m : D_m \longrightarrow A^{\otimes^{m+2}}$, o isomorfismo $\alpha : B^{\otimes^{m+2}} \longrightarrow B^e \otimes_D D_m$ como definidos na seção anterior e os isomorfismos

$$\begin{array}{rccl} \beta : & B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{B^e}(B^e, B) \\ & c & \longmapsto & f_c \end{array}$$

onde $f_c(a \otimes b) = af_c(1 \otimes 1)b = acb$

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathrm{Hom}_{B^e}(B^{\otimes^{m+2}}, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^m}, B) \\ & g & \longmapsto & \sigma(g) \end{array}$$

onde $\sigma(g)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{m-1}) = g(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{m-1} \otimes 1)$, com inversa

$$\begin{array}{rccl} \sigma^{-1} : & \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^m}, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{B^e}(B^{\otimes^{m+2}}, B) \\ & h & \longmapsto & \sigma(h^{-1}) \end{array}$$

onde $\sigma^{-1}(h)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{m+1}) = a_0\sigma^{-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m)a_{m+1}$. Analogamente temos definidos isomorfismos σ e σ^{-1} entre $\mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{m+2}}, B) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{m+2}}, B)^G$ e $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, B)^G$. Segue diretamente dessas funções ou das respectivas imagens depois de aplicados em funtores covariante e contravariante do tipo $\mathrm{Hom}(,)$ que temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, B)^G \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+1}}, B)^G \arrow[d, "\sigma^{-1}"] \\
\mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{m+2}}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\rho_m^*"] & \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{m+3}}, B) \arrow[d, "\rho_{m+1}^*"] \\
\mathrm{Hom}_D(D_m, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\beta_*"] & \mathrm{Hom}_D(D_{m+1}, B) \arrow[d, "\beta_*"] \\
\mathrm{Hom}_D(D_m, \mathrm{Hom}_{B^e}(B^e, B)) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{Hom}_D(D_{m+1}, \mathrm{Hom}_{B^e}(B^e, B)) \arrow[d, "\theta"] \\
\mathrm{Hom}_{B^e}(B^e \otimes_D D_m, B) \arrow[r, "(1\otimes\delta)^*"] \arrow[d, "\alpha^*"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B^e \otimes_D D_{m+1}, B) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
\mathrm{Hom}_{B^e}(B^{\otimes^{m+2}}, B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathrm{Hom}_{B^e}(B^{\otimes^{m+3}}, B) \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^m}, B) \arrow[r, "\delta^*"] & \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^{m+1}}, B)
\end{tikzcd} \tag{5.5}$$

onde θ é o isomorfismo de adjunção e é dado por

$$\theta(f)((b_1 \otimes b_2) \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+2})) = (f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+2}))(b_1 \otimes b_2)$$

Afim de verificar se o produto cup através do complexo inferior do diagrama de onde vem sua definição original é preservado ao calcularmos o mesmo através do complexo induzido da resolução barra de A, ou seja, aquele da linha superior, busquemos agora calcular a composta dessas funções que denotaremos por τ, isto é, $\tau = \sigma\alpha^*\theta\beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}$. Dessa forma, sendo $f \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+2}}, B)^G$ e $a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \in B^{\otimes^m}$, temos

$$\begin{aligned}
&\sigma\alpha^*\theta\beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}(f)(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m)\\
&\quad = \alpha^*\theta\beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}(f)(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1)\\
&\quad = \theta\beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}(f)\alpha(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1)\\
&\quad = \theta\beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}(f)((1 \otimes g_1 \ldots g_m) \otimes (1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1g_m^{-1} \ldots g_1^{-1}))\\
&\quad = \beta_*\rho_m^*\sigma^{-1}(f)(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})(1 \otimes g_1 \ldots g_m)\\
&\quad = \beta\rho_m^*\sigma^{-1}(f)(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})(1 \otimes g_1 \ldots g_m)\\
&\quad = \rho_m^*\sigma^{-1}(f)(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})g_1 \ldots g_m\\
&\quad = \sigma^{-1}(f)\rho_m(1 \otimes a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m \otimes 1g_m^{-1} \ldots g_1^{-1})g_1 \ldots g_m\\
&\quad = \sigma^{-1}(f)(1 \otimes {}^1a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\ldots g_m}1)g_1 \ldots g_m\\
&\quad = f(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\ldots g_{m-1}}a_m)g_1 \ldots g_m
\end{aligned}$$

resumindo temos que

$$\tau(f)(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_mg_m) = f(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\ldots g_{m-1}}a_m)g_1 \ldots g_m$$

Podemos verificar que τ possui inverso à esquerda, para vermos isso basta observar que a inclusão $i_m : A^{\otimes^{m+2}} \longrightarrow D_m$ é uma inversa à direita de ρ_m, com efeito, dado $a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1} \in A^{\otimes^{m+2}}$ temos

$$\begin{aligned}
\rho_m i_m(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}) &= \rho_m(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1})\\
&= \rho_m(a_01 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}1)\\
&= (a_1 \otimes {}^1a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{1\cdot\ldots\cdot 1}a_{m+1})1 \cdot \ldots \cdot 1\\
&= a_0 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}
\end{aligned}$$

sendo assim $\rho_m i_m = 1$, passando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_D(\_, B)$ nesta identidade, vale $i_m^*\rho_m^* = 1^* = 1$. Dessa forma sendo $\tau = (\sigma\alpha^*\theta\beta_*)\rho_m^*\sigma^{-1}$ definimos $\omega = \sigma i_m^*(\sigma\alpha^*\theta\beta_*)^{-1}$ e com isso

$$\omega\tau = \sigma i_m^*(\sigma\alpha^*\theta\beta_*)^{-1}(\sigma\alpha^*\theta\beta_*)\rho_m^*\sigma^{-1} = \sigma i_m^*\rho_m^*\sigma^{-1} = \sigma 1\sigma^{-1} = 1$$

também temos que o diagrama anterior onde foi definido τ comuta, isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+2}}, B)^G \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+3}}, B)^G \arrow[d, "\tau"] \\
\mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^{m}}, B) \arrow[r, "\delta^*"] & \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^{m+1}}, B)
\end{tikzcd}$$

com efeito, tomando $f \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{m+2}}, B)^G$ e $a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1} \in B^{\otimes^{m+1}}$, temos

$$\begin{aligned}
&\tau\delta^*(f)(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \\
&= \delta^*(f)(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} \\
&= f\delta(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} \\
&= f(a_1{}^{g_1}a_2 \otimes {}^{g_1g_2}a_3 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}a_1 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_{i-1}}a_i{}^{g_1\cdots g_i}a_{i+1} \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} \\
&= f(a_1{}^{g_1}a_2 \otimes {}^{g_1g_2}a_3 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}f(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_{i-1}}a_i{}^{g_1\cdots g_{i-1}g_i}a_{i+1} \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1}
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
&\delta^*\tau(f)(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \\
&= \tau(f)\delta(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \\
&= \tau(f)\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_ig_ia_{i+1}g_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}\right) \\
&= \tau(f)\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}a_1g_1 \otimes \ldots \otimes (a_i{}^{g_i}a_{i+1})g_ig_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\tau(f)(a_1g_1 \otimes \ldots \otimes (a_i{}^{g_i}a_{i+1})g_ig_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+1}g_{m+1}) \\
&= f(a_1{}^{g_1}a_2 \otimes {}^{g_1g_2}a_3 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}f(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_{i-1}}(a_i{}^{g_i}a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} \\
&= f(a_1{}^{g_1}a_2 \otimes {}^{g_1g_2}a_3 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1} + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m}(-1)^{i+1}f(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_{i-1}}a_i{}^{g_1\cdots g_{i-1}g_i}a_{i+1} \otimes \ldots \otimes {}^{g_1\cdots g_m}a_{m+1})g_1\cdots g_{m+1}
\end{aligned}$$

vejamos também que τ preserva o produto cup na cohomologia dos complexos $\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^\bullet}, B)^G$ e $\mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^\bullet}, B)$. Consideremos $g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^n}, B)^G$, $h \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, B)^G$ e $a_1g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+n}g_{m+n} \in A^{\otimes^{m+n}}$, assim

$$\begin{aligned}
&\tau(g \smile h)(a_1 g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+n} g_{m+n}) \\
&\quad = \quad (g \smile h)(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) g_1 \ldots g_{m+n} \\
&\quad = \quad g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) h({}^{g_1 \cdots g_n}a_{n+1} \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) g_1 \ldots g_{m+n}
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
&\tau(g) \smile \tau(h)(a_1 g_1 \otimes \ldots \otimes a_{m+n} g_{m+n}) \\
&\quad = \quad \tau(g)(a_1 g_1 \otimes \ldots \otimes a_n g_n) \tau(h)(a_{n+1} g_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{m+n} g_{m+n}) \\
&\quad = \quad g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) g_1 \ldots g_n \\
&\qquad\quad h(a_{n+1} \otimes {}^{g_{n+1}}a_{n+2} \otimes \ldots \otimes {}^{g_{n+1} \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) g_{n+1} \ldots g_{m+n} \\
&\quad = \quad g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) g_1 \ldots g_n \\
&\qquad\quad h(a_{n+1} \otimes {}^{g_{n+1}}a_{n+2} \otimes \ldots \otimes {}^{g_{n+1} \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) (g_1 \ldots g_n)^{-1} (g_1 \ldots g_n) g_{n+1} \ldots g_{m+n} \\
&\quad = \quad \star
\end{aligned}$$

segue do fato do produto de G em B ser induzida do produto de D, isto é, $g \cdot b = gbg^{-1}$, da ação diagonal de G em $B^{\otimes^m}$ e também que $h \in \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^m}, B)$ é G-linear, que temos

$$\begin{aligned}
\star \quad = \quad & g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) g_1 \ldots g_n \\
& \cdot h(a_{n+1} \otimes {}^{g_{n+1}}a_{n+2} \otimes \ldots \otimes {}^{g_{n+1} \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) g_1 \ldots g_n g_{n+1} \ldots g_{m+n} \\
= \quad & g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) \\
& h(g_1 \ldots g_n \cdot (a_{n+1} \otimes {}^{g_{n+1}}a_{n+2} \otimes \ldots \otimes {}^{g_{n+1} \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n})) g_1 \ldots g_n g_{n+1} \ldots g_{m+n} \\
= \quad & g(a_1 \otimes {}^{g_1}a_2 \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{n-1}}a_n) h({}^{g_1 \cdots g_n}a_{n+1} \otimes \ldots \otimes {}^{g_1 \cdots g_{m+n-1}}a_{m+n}) g_1 \ldots g_{m+n}
\end{aligned}$$

Também há uma relação entre os diagramas (5.4) e (5.5), com efeito, podemos relacionar os complexos $\mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^m}, B)$ e aquele formado pelos B^G, ambos que podem ser usados para o cálculo das cohomologias de Hochschild de B, a saber, de acordo com as funções anteriormente definidas temos em grau m entre complexos a seguinte composição de funções

$$B^G \xrightarrow[\simeq]{\eta^{-1}} \mathrm{Hom}_D(A^e, B) \underset{\phi_m^*}{\overset{\psi_m^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_D(A^{\otimes^{m+2}}, B) \xrightarrow[\simeq]{\sigma} \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^m}, B)^G \xrightarrow{\tau} \mathrm{Hom}_K(B^{\otimes^m}, B)$$

5.4 O cálculo do produto cup em B^G

Tomamos $a, b \in B^G$ elementos de graus $2l$ e $2m$ respectivamente, assim $\sigma\psi_{2l}^* f_a \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{2l}}, B)^G$, $\sigma\psi_{2m}^* f_b \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{2m}}, B)^G$ e $\sigma\psi_{2l}^* f_a \smile \sigma\psi_{2m}^* f_b \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes^{2(m+l)}}, B)^G$.

Usando as funções σ^{-1} e $\phi^*_{2(m+l)}$ definimos em B^G o produto cup entre a e b por

$$a \smile b := f_a \smile f_b(1 \otimes 1) = \phi^*_{2(m+l)}\sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(1 \otimes 1)$$

desta forma temos

$$\begin{aligned}
a \smile b &= f_a \smile f_b(1 \otimes 1) \\
&= \phi^*_{2(m+l)}\sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(1 \otimes 1) \\
&= \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)\phi_{2(l+m)}(1 \otimes 1) \\
&= \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)\left(\sum_I 1 \otimes x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x \otimes x^{i_{l+m+1}}\right) \\
&= \sum_I \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(1 \otimes x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x \otimes x^{i_{l+m+1}}) = \star
\end{aligned}$$

onde $I = \{i_1, \ldots, i_{l+m+1} \mid i_1 + \ldots + i_{l+m+1} = (l+m)(n-1);\ i_1, \ldots, i_{l+m} \geq 1;\ i_{l+m+1} \geq 0\}$, assim

$$\begin{aligned}
\star &= \sum_I (1 \otimes x^{i_{l+m+1}})(\sigma\psi^*_{2l}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m}} \otimes x) \\
&= 1\sum_I \sigma\psi^*_{2l}f_a(x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_l} \otimes x)\sigma\psi^*_{2m}f_b(x^{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m}} \otimes x)x^{i_{l+m+1}} \\
&= \sum_I \psi^*_{2l}f_a(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_l} \otimes x \otimes 1)\psi^*_{2m}f_b(1 \otimes x^{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m}} \otimes x \otimes 1)x^{i_{l+m+1}} \\
&= \sum_I f_a\psi_{2l}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_l} \otimes x \otimes 1)f_b\psi_{2m}(1 \otimes x^{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m}} \otimes x \otimes 1)x^{i_{l+m+1}} \\
&= \sum_I f_a(1 \otimes \overline{x^{i_1+1}} \ldots \overline{x^{i_l+1}})f_b(1 \otimes \overline{x^{i_{l+1}+1}} \ldots \overline{x^{i_{l+m}+1}})x^{i_{l+m+1}}
\end{aligned}$$

de todas as soluções em I só uma delas resulta em parcela não nula na soma em questão, a saber, $i_1 = \ldots = i_{l+m} = n-1$ e $i_{l+m+1} = 0$, ou seja a $(l+m+1)$-upla $(i_1, \ldots, i_{l+m}, i_{l+m+1}) = (n-1, \ldots, n-1, 0)$. Com efeito, começando com esta $(l+m+1)$-upla, se aumentarmos mesmo que em uma unidade qualquer uma das variáveis, para manter a soma delas constante é preciso diminuir também uma unidade de uma outra, mas isso é suficiente para que a correspondente parcela se anule, pois para $i_j < n-1 \Rightarrow i_j + 1 < n$, assim, $x^{i_j+1} = 0 \cdot x^n + x^{i_j+1}$ e $\overline{x^{i_j+1}} = 0$, pois corresponde ao quociente da divisão por x^n. No caso de $i_j = n-1$ tem-se $x^{(n-1)+1} = x^n$ e pelo algoritmo da divisão $x^n = 1 \cdot x^n$ de onde o quociente é 1 e então $\overline{x^n} = 1$. Temos

$$\begin{aligned}
a \smile b &= f_a \smile f_b(1 \otimes 1) = f_a(1 \otimes \overline{x^{(n-1)+1}} \ldots \overline{x^{(n-1)+1}})f_b(1 \otimes \overline{x^{(n-1)+1}} \ldots \overline{x^{(n-1)+1}})x^0 \\
&= f_a(1 \otimes \overline{x^n} \ldots \overline{x^n})f_b(1 \otimes \overline{x^n} \ldots \overline{x^n})x^0 \\
&= f_a(1 \otimes 1)f_b(1 \otimes 1) = ab
\end{aligned}$$

Consideremos agora $a, b \in B^G$ um em grau par e outro em grau ímpar, isto é, em graus $2l+1$ e $2m$ respectivamente, com isso

$$\begin{aligned} a \smile b &= \phi^*_{2(m+l)+1}\sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(1\otimes 1) \\ &= \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)\phi_{2(m+l)+1}(1\otimes 1) \\ &= \sum_I \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(1\otimes x \otimes x^{i_1}\otimes \ldots \otimes x^{i_{(l+m)+1}}) = \star \end{aligned}$$

onde $I = \{i_1, \ldots, i_{l+m+1} \mid i_1 + \ldots + i_{l+m+1} = (l+m)(n-1);\ i_1, \ldots, i_{l+m} \geq 1;\ i_{l+m+1} \geq 0\}$, assim

$$\begin{aligned} \star &= \sum_I (1\otimes x^{i_{(l+m)+1}})(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m}f_b)(x\otimes x^{i_1}\otimes\ldots\otimes x^{i_{(l+m)}}\otimes x) \\ &= \sum_I (1\otimes x^{i_{(l+m)+1}})\sigma\psi^*_{2l+1}f_a(x\otimes x^{i_1}\otimes\ldots\otimes x^{i_l}\otimes x)\sigma\psi^*_{2m}f_b(x^{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes x^{i_{(l+m)}}\otimes x) \\ &= \sum_I \psi^*_{2l+1}f_a(1\otimes x\otimes x^{i_1}\otimes\ldots\otimes x^{i_l}\otimes x\otimes 1)\cdot \\ &\quad \psi^*_{2m}f_b(1\otimes x^{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes x^{i_{(l+m)}}\otimes x\otimes 1)x^{i_{(l+m)+1}} \\ &= \sum_I f_a\psi_{2l+1}(1\otimes x\otimes x^{i_1}\otimes\ldots\otimes x^{i_l}\otimes x\otimes 1)\cdot \\ &\quad f_b\psi_{2m}(1\otimes x^{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes x^{i_{(l+m)}}\otimes x\otimes 1)x^{i_{(l+m)+1}} \\ &= \sum_I f_a\left(\sum_{k=0}^{1-1} x^k\otimes x^{1-k-1}\overline{x^{i_1+1}}\ldots\overline{x^{i_l+1}}\right) f_b(1\otimes\overline{x^{i_{l+1}+1}}\ldots\overline{x^{i_{l+m}+1}})x^{i_{l+m+1}} \\ &= \sum_I f_a(1\otimes\overline{x^{i_1+1}}\ldots\overline{x^{i_l+1}})f_b(1\otimes\overline{x^{i_{l+1}+1}}\ldots\overline{x^{i_{l+m}+1}})x^{i_{l+m+1}} \end{aligned}$$

como no caso em que $a, b \in B^G$ estavam em graus pares, temos de forma análoga que a única solução que resulta em parcela não nula no somatório é para o caso em que $i_1 = \ldots = i_{l+m} = n-1$ e $i_{l+m+1} = 0$, assim teremos novamente

$$a \smile b = f_a(1\otimes 1)f_b(1\otimes 1) = ab$$

Por fim vamos analisar o caso em que $a, b \in B^G$ ambos em graus ímpares, sejam estes, graus $2l+1$ e $2m+1$ respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} a \smile b &= \phi^*_{2(l+m+1)}\sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m+1}f_b)(1\otimes 1) \\ &= \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m+1}f_b)\phi_{2(l+m+1)}(1\otimes 1) \\ &= \sum_I \sigma^{-1}(\sigma\psi^*_{2l+1}f_a \smile \sigma\psi^*_{2m+1}f_b)(1\otimes x^{i_1}\otimes x\otimes\ldots\otimes x\otimes x^{i_{l+m+2}}) = \star \end{aligned}$$

onde $I = \{i_1, \ldots, i_{l+m+2} \mid i_1 + \ldots + i_{l+m+2} = (l+m+1)(n-1);\ i_1, \ldots, i_{l+m+1} \geq 1;\ i_{l+m+2} \geq 0\}$, assim

$$\begin{aligned}
\star \;&=\; \sum_I (1 \otimes x^{i_{l+m+2}})(\sigma\psi^*_{2l+1} f_a \smile \sigma\psi^*_{2m+1} f_b)(x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m+1}} \otimes x) \\
&=\; \sum_I \sigma\psi^*_{2l+1} f_a(x^{i_1} \otimes x \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+1}}) \sigma\psi^*_{2m+1} f_b(x \otimes x^{i_{l+2}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m+1}} \otimes x) x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \sum_I \psi^*_{2l+1} f_a(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+1}} \otimes 1) \\
&\quad\; \psi^*_{2m+1} f_b(1 \otimes x \otimes x^{i_{l+2}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m+1}} \otimes x \otimes 1) x^{i_{l+m+2}} \cdot \\
&=\; \sum_I f_a \psi_{2l+1}(1 \otimes x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+1}} \otimes 1) \cdot \\
&\quad\; f_b \psi_{2m+1}(1 \otimes x \otimes x^{i_{l+2}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{l+m+1}} \otimes x \otimes 1) x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \sum_I f_a \left(\sum_{j=0}^{i_1 - 1} x^j \otimes x^{i_1 - j - 1} \overline{x^{1+i_2}} \ldots \overline{x^{1+i_{l+1}}} \right) \cdot \\
&\quad\; f_b \left(\sum_{k=0}^{1-1} x^k \otimes x^{1-k-1} \overline{x^{i_{l+2}+1}} \ldots \overline{x^{i_{l+m+1}+1}} \right) x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \sum_I f_a \left(\sum_{j=0}^{i_1 - 1} x^j \otimes x^{i_1 - j - 1} \overline{x^{i_2+1}} \ldots \overline{x^{i_{l+1}+1}} \right) f_b(1 \otimes \overline{x^{i_{l+2}+1}} \ldots \overline{x^{i_{l+m+1}+1}}) x^{i_{l+m+2}} = \star\star
\end{aligned}$$

Para que a contribuição de uma respectiva solução seja não nula no somatório em questão, devemos ter $i_k \geq n-1$ para $2 \leq k \leq l+m+1$. Com efeito, se $i_k < n-1$ então $i_k + 1 < n$ e com isso pelo algoritmo da divisão teremos $x^{i_k+1} = 0 \cdot x^n + x^{i_k+1}$, assim $\overline{x^{i_k+1}} = 0$. No caso em que $i_k \geq n-1$, isto é, $i_k + 1 \geq n$ podemos escrever $x^{i_k+1} = x^{i_k+1-n} x^n$ e com isso $\overline{x^{i_k+1}} = x^{i_k+1-n}$. Consideremos o conjunto $I' = I \cap \{i_k \geq n-1 \mid 2 \leq k \leq l+m+1\}$, com isso

$$\begin{aligned}
&\star\star \\
&=\; \sum_I f_a \left(\sum_{j=0}^{i_1-1} x^j \otimes x^{i_1-j-1} x^{i_2+1-n} \ldots x^{i_{l+1}+1-n} \right) f_b(1 \otimes x^{i_{l+2}+1-n} \ldots x^{i_{l+m+1}+1-n}) x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \sum_{I'} f_a \left(\sum_{j=0}^{i_1-1} x^j \otimes x^{(i_1+\ldots+i_{l+1})+l(1-n)-(j+1)} \right) f_b \left(1 \otimes x^{(i_{l+2}+\ldots+i_{l+m+1})+m(1-n)} \right) x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \sum_{I'} \sum_{j=0}^{i_1-1} x^j f_a(1 \otimes 1) x^{(i_1+\ldots+i_{l+1})+l(1-n)-(j+1)} 1 f_b(1 \otimes 1) x^{(i_{l+2}+\ldots+i_{l+m+1})+m(1-n)} x^{i_{l+m+2}} \\
&=\; \star\star\star
\end{aligned}$$

Temos que $f_a(1 \otimes 1) = a$ e $f_b(1 \otimes 1) = b$ sendo $a, b \in B^G$ em grau ímpar, isto é, $a, b \in x(KN)$. Assim $a \in \mathrm{Span}_K\{\sum_{h \in G} x\#hg_ah^{-1}\}$ e $b \in \mathrm{Span}_K\{\sum_{s \in G} x\#sg_bs^{-1}\}$ onde g_a, g_b são representantes das classes de conjugação de G. Denotando $(i_1+\ldots+i_{l+1})+l(1-n)-(j+1) = T_1$ e $(i_{l+2}+\ldots+i_{l+m+2})+m(1-n) = T_2$, temos nos geradores de a e b em $\star\star\star$ que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1} x^j\#1 \sum_h x\#hg_ah^{-1}\cdot x^{T_1}\#1 \sum_s x\#sg_bs^{-1}\cdot x^{T_2}\#1 \\
&= \sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1}\sum_{h,s}(x^jx\#hg_ah^{-1})(x^{T_1}x\#sg_bs^{-1})x^{T_2}\#1 \\
&= \sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1}\sum_{h,s} x^{j+1}({}^{hg_ah^{-1}}(x^{T_1+1}))\#hg_ah^{-1}sg_bs^{-1}\cdot x^{T_2}\#1 \\
&= \sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1}\sum_{h,s} \chi(hg_ah^{-1})^{T_1+1}x^{T_1+j+2}\#hg_ah^{-1}sg_bs^{-1}\cdot x^{T_2}\#1 \\
&= \sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1}\sum_{h,s} \chi(hg_ah^{-1})^{T_1+1}x^{T_1+j+2}({}^{hg_ah^{-1}sg_bs^{-1}}(x^{T_2}))\#hg_ah^{-1}sg_bs^{-1} \\
&= \sum_{I'}\sum_{j=0}^{i_1-1}\sum_{h,s} \chi(hg_ah^{-1})^{T_1+1}\chi(hg_ah^{-1}sg_bs^{-1})^{T_2}x^{T_1+T_2+j+2}\#hg_ah^{-1}sg_bs^{-1} \\
&= \star\star\star\star
\end{aligned}
$$

daí

$$
\begin{aligned}
&T_1+T_2+j+2 \\
&= (i_1+\ldots+i_{l+1})+l(1-n)-(j+1)+(i_{l+2}+\ldots+i_{l+m+2})+m(1-n)+j+2 \\
&= (i_1+\ldots+i_{l+1}+i_{l+2}+\ldots+i_{l+m+2})+(l+m)(1-n)+1 \\
&= (l+m+1)(n-1)+(l+m)(1-n)+1 = n-1+1 = n
\end{aligned}
$$

como $x^n = 0$ em A segue que $\star\star\star\star = 0$ e consequentemente $a \smile b = 0$.

Vejamos agora um resultado sem sua devida demonstração, porém podendo ser esta encontrada em [9].

Teorema 5.3 *Seja A uma K-álgebra. Se $f^m \in HH^m(A)$ e $g^n \in HH^n(A)$ então*

$$f^m \smile g^n = (-1)^{mn} g^n \smile f^m$$

Segue deste teorema que se f^m ou g^n é um elemento de grau par então o produto cup deles é comutativo, com efeito, a potência par de -1 é 1. Porém no caso em que estamos trabalhando, isto é, em B^G, se tivermos $a, b \in B^G$ elementos de graus $2l+1$ e $2m+1$, então $a \smile b = 0 = b \smile a$. Sendo assim como consequência do teorema anterior temos o seguinte resultado:

Corolário 5.4 *O produto cup em B^G é comutativo.*

5.5 Produto tensorial de álgebras e o anel de cohomologia de B

Do capítulo anterior temos que $HH^i(B)$ é igual à $(KN)^G$ para i par e $x(KN)^G$ para i ímpar, logo:

$$HH^*(B) = (KN)^G \oplus x(KN)^G \oplus (KN)^G \oplus x(KN)^G \oplus (KN)^G \oplus \cdots$$

Sendo $(KN)^G$ e $K[y,z]/\langle z^2\rangle$ K-álgebras comutativas, consideremos seu coproduto, que é o produto tensorial (ver apêndice) e os morfismos de K-álgebras α e β como segue

$$\begin{tikzcd}
 & (KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2\rangle & \\
(KN)^G \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & K[y,z]/\langle z^2\rangle \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
 & HH^*(B) &
\end{tikzcd}$$

i_1 e i_2 são as injeções e α e β são definidos por

$$\begin{array}{rccc}
\alpha: & (KN)^G & \longrightarrow & HH^*(B) \\
 & b & \longmapsto & (b, 0, 0, \ldots)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
\beta: & K[y,z]/\langle z^2\rangle & \longrightarrow & HH^*(B) \\
 & y & \longmapsto & (0, 0, 1, 0, \ldots) \\
 & z & \longmapsto & (0, x, 0, 0, \ldots)
\end{array}$$

pelo coproduto existe um morfismo de álgebras $\theta : (KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2\rangle \longrightarrow HH^*B$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2\rangle \arrow[dd, "\theta"] & \\
(KN)^G \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & K[y,z]/\langle z^2\rangle \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
 & HH^*(B) &
\end{tikzcd}$$

comuta. Com isso temos que

$$\begin{aligned}
\theta(a_i \otimes y^i) &= \theta(a_i \otimes 1 \cdot 1 \otimes y \cdots 1 \otimes y) = \theta(a_i \otimes 1) \smile \theta(1 \otimes y)^i \\
&= (a_i, 0, 0, \ldots) \underbrace{\smile (0,0,1,0,\ldots) \cdots \smile (0,0,1,0,\ldots)}_{i\ vezes} \\
&= (a_i, 0, 0, \ldots) \smile (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{2i}, 0, \ldots) = (0, \ldots, 0, \underbrace{a_i}_{2i}, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}
\theta(b_j \otimes y^j z) &= \theta(b_j \otimes 1 \cdot 1 \otimes y \cdots 1 \otimes y \cdot 1 \otimes z) \\
&= \theta(b_j \otimes 1) \smile \theta(1 \otimes y)^j \smile \theta(1 \otimes z) = (0, \ldots, 0, \underbrace{b_j}_{2j}, 0, \ldots) \smile (0, x, 0, \ldots) \\
&= (0, \ldots, 0, \underbrace{b_j x}_{2j+1}, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

Assim para $\sum_i a_i \otimes y^i + \sum_j b_j \otimes y^j z \in (KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2 \rangle$ temos

$$\theta\left(\sum_i a_i \otimes y^i + \sum_j b_j \otimes y^j z\right) = (a_0, b_0 x, a_1, b_1 x, \ldots)$$

Vejamos que θ é um isomorfismo, isto é, θ é injetor e sobrejetor. Quanto a injetividade, tomemos $c = \sum_i a_i \otimes y^i + \sum_j b_j \otimes y^j z \in \operatorname{Ker}\theta$, assim, $\theta(c) = (a_0, b_0 x, a_1, b_1 x, \ldots) = (0,0,0,\ldots)$, com isso $a_i = b_j = 0\ \forall i, j$, logo $c = 0$ e $\operatorname{Ker}\theta = 0$. Quanto a sobrejetividade, basta observar que para cada $c = (c_0, c_1 x, c_2, c_3 x, \ldots) \in HH^*B$ temos

$$c = \theta\left(\sum_{i \text{ par}} c_i \otimes y^i + \sum_{j \text{ ímpar}} c_j \otimes y^j z\right)$$

portanto $HH^*B \simeq (KN)^G \otimes K[y,z]/\langle z^2 \rangle$

Apêndice

A - O Teorema do Órbita e Estabilizador

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [2]. Dado um conjunto X e um grupo G, dizemos que G age em X se existe função

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

tal que valem as condições

(i) $(gh)x = g(hx) \quad \forall g, h \in G$ e $x \in X$

(ii) $1_G x = x \quad \forall x \in X$

Se G age em X, fixando a primeira variável, digamos g, temos uma função

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \alpha_g(x) = gx \end{array}$$

A função α_g é uma permutação em X tendo inversa $\alpha_{g^{-1}}$. Sendo S_X o grupo das permutações de S, a função

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G & \longrightarrow & S_X \\ & g & \longmapsto & \alpha_g \end{array}$$

é homomorfismo de grupos. Reciprocamente, dado homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow S_X$ definimos $gx = \varphi(g)(x)$ e assim isto define uma ação de G em X. Logo, existe uma bijeção de ações de G em X e homomorfismos de grupos de G para S_X.

Exemplo: G age sobre si mesmo por conjugação, consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G & \longrightarrow & S_G \\ & g & \longmapsto & \alpha_g \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

assim α é homomorfismo de grupos, com efeito, dados g, h e $x \in G$ temos

$$\alpha(gh)(x) = \alpha_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = \alpha_g(hxh^{-1}) = \alpha_g(\alpha_h(x))$$

logo

$$\alpha_{gh} = \alpha_g\alpha_h \iff \alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$$

Definição: Se G age em X e $x \in X$, a órbita de x, denotada por $\mathcal{O}(x)$, é o subconjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

e o estabilizador de x, denotado por G_x, é o subgrupo de G

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Se G age em X, definimos a relação $x \equiv y$ se existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Prova-se que $\equiv$ é uma relação de equivalência em X. Denotando por $[x]$ a respectiva classe de equivalência de x temos

$$\begin{aligned}
[x] &= \{y \in X \mid y \equiv x\} \\
&= \{y \in X \mid \exists\, g \text{ onde } y = gx\} \\
&= \{gx \mid g \in G\} \\
&= \mathcal{O}(x)
\end{aligned}$$

Vejamos agora o teorema que relaciona a órbita e o estabilizador de $x \in X$, dado que há uma ação de G sobre um conjunto X. Este teorema é comumente chamado de Teorema da Órbita e Estabilizador.

Teorema *Se G age no conjunto X e $x \in X$, então $|\mathcal{O}(x)| = [G : G_x]$, onde $[G : G_x]$ denota o índice do estabilizador G_x em G*

Demonstração. Seja G/G_x a família de todas as classes laterais à esquerda de G_x em G. Vejamos que é possível definir uma bijeção entre G/G_x e $\mathcal{O}(x)$ o que implicará o resultado desejado, pois, neste caso teremos $[G : G_x] = |G/G_x| = \mathcal{O}(x)$. Definamos então

$$\begin{aligned}
\varphi :\ G/G_x &\longrightarrow \mathcal{O}(x) \\
gG_x &\longmapsto gx
\end{aligned}$$

Primeiramente observemos que φ está bem definida, sendo $gG_x = hG_x$ então $h = gf$ para algum $f \in G_x$, isto é, $fx = x$, com isso temos $\varphi(hG_x) = hx = gfx = gx = \varphi(gG_x)$.

Também φ é injetor, pois, $\varphi(hG_x) = \varphi(gG_x) \iff gx = hx \Rightarrow h^{-1}gx = x$, logo $h^{-1}g \in G_x \Rightarrow gG_x = hG_x$. Por fim φ é sobrejetor, pois, dado $y \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow y = gx$ para algum $g \in G$, logo $y = gx = \varphi(gG_x)$. $\square$

B - Módulos Livres

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [1]. Seja K um anel comutativo e A uma K-álgebra. Se temos um A-módulo M e um conjunto $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de M, dizemos que este conjunto é livre ou linearmente independente se para toda família $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de A tal que $(a_\lambda x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tem suporte finito, tivermos que a relação $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda = 0$ implica em $a_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Se tal conjunto não for livre, vamos chamá-lo de linearmente dependente.

Uma base de M, se existir, é por definição uma família de elementos $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ linearmente independente que gera M como A-módulo. Vale ressaltarmos que nem todo módulo admite uma base, para exibirmos um contra-exemplo basta tomarmos um grupo abeliano de ordem finita (assim este grupo abeliano possui estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo), com isso toda família não nula de elementos $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ deste grupo dá origem a uma relação $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x_\lambda = 0$ com escalares $a_\lambda \neq 0$, pois basta considerarmos $a_\lambda = kn$ onde n é a ordem de tal grupo.

Visto que já sabemos o que é um conjunto livre de elementos de um módulo, vamos agora definir o que é um A-módulo livre.

Definição: *Seja X um conjunto. Um A-módulo livre sobre X é dado por um par $(L(X), j_x)$, onde $L(X)$ é um A-módulo e $j_x : X \to L(X)$ uma aplicação, tal que, se M é um A-módulo e $f : X \to M$ uma segunda aplicação, então existirá um único homomorfismo de A-módulos $f' : L(X) \to M$ tal que $f'j_x = f$. Como mostra o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "f"'] & L(X) \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Também podemos reformular a unicidade citada acima como segue: se $f', g' : L(X) \to M$ são dois A-homomorfismos tal que $f'j_x = g'j_x$ então $f' = g'$.

Decorre da definição acima, que vale o seguinte resultado:

Teorema *Para todo conjunto X, existe um A-módulo livre sobre X, único a menos de isomorfismo*

Demonstração. Vejamos primeiro a unicidade, isto é, suponhamos que L e L' sejam dois módulos livres sobre X, $j : X \to L$ e $j' : X \to L'$ as aplicações correspondentes. Sabemos da definição que existem homomorfismos $f : L \to L'$ e $j' : L' \to L$ tais que $j' = fj$ e $j = f'j'$ como mostram os diagramas a seguir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_X"'] & L \arrow[d, dashed, "f"] \\ X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "1_X"'] & L' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ X \arrow[r, "j"] & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "1_X"'] & L' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_X"'] & L \arrow[d, dashed, "f"] \\ X \arrow[r, "j'"] & L' \end{tikzcd}$$

Segue do que vimos acima que: $j' = fj \Rightarrow j' = ff'j' = 1_{L'}j'$ e $j = f'j' \Rightarrow j = f'fj = 1_L j$, logo da propriedade universal temos que $ff' = 1_{L'}$ e $f'f = 1_L$ o que mostra que f e f' são dois isomorfimos.

Agora resta exibir a existência. Seja então $L(X) =_A A^{(X)}$, isto é, a soma direta de cópias do A-módulo à esquerda ${}_AA$ indexada por X, e $j_X : X \to L(X)$ dado por $j_X(\lambda) = e^\lambda = (e^\lambda_\mu)_{\mu\in X}$, onde $e^\lambda_\lambda = 1$ e $e^\lambda_\mu = 0$ para $\lambda \neq \mu$. Em particular todo elemento de $L(X)$ se escreve como $\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda$ onde $(a_\lambda)_{\lambda\in X}$ é uma família de elementos de A com suporte finito.

Consideremos agora uma aplicação $f : X \to M$ onde M é um A-módulo, então o único A-homomorfismo $f' : L(X) \to M$ tal que $f'j_X = f$ é definida por:

$$f'\left(\sum_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda\right) = \sum_{\lambda\in X} a_\lambda f'(e^\lambda) = \sum_{\lambda\in X} a_\lambda f' j_X(\lambda) = \sum_{\lambda\in X} a_\lambda f(\lambda)$$

Temos que f' definida acima é um A-homomorfismo, pois para $\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda, \sum\limits_{\lambda\in X} b_\lambda e^\lambda \in L(X)$ e $a \in A$ temos:

(i) $f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda + \sum\limits_{\lambda\in X} b_\lambda e^\lambda\right) = f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda + b_\lambda e^\lambda\right) = f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} (a_\lambda + b_\lambda)e^\lambda\right) =$
$\sum\limits_{\lambda\in X}(a_\lambda + b_\lambda)f(\lambda) = \sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda f(\lambda) + \sum\limits_{\lambda\in X} b_\lambda f(\lambda) = f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda\right) + f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} b_\lambda e^\lambda\right)$.

(ii) $f'\left(a\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda\right) = f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} a(a_\lambda e^\lambda)\right) = f'\left(\sum\limits_{\lambda\in X}(aa_\lambda)e^\lambda\right) = \sum\limits_{\lambda\in X}(aa_\lambda)f(\lambda) =$
$\sum\limits_{\lambda\in X} a(a_\lambda f(\lambda)) = a\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda f(\lambda) = af'\left(\sum\limits_{\lambda\in X} a_\lambda e^\lambda\right)$. □

Chamamos o módulo $L(X)$ de módulo livre sobre X, também dizemos que um módulo L é livre se existir um conjunto X para o qual $L \simeq L(X)$. Vejamos um exemplo a seguir

Exemplo: Um elemento do módulo livre ${}_KL(\mathbb{N}) = K^{(\mathbb{N})}$ é uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K onde existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $n > n_0$ implica $x_n = 0$. Como também as operações em $K^{(\mathbb{N})}$ se fazem por coordenadas, então isto nos permite induzir um isomorfismo de K-módulos $K^{(\mathbb{N})} \simeq K[t]$.

Exemplo: Sendo G um grupo, o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G é o conjunto $\mathbb{Z}^{(G)} = \bigoplus_{g \in g} \mathbb{Z}_g$, onde $\mathbb{Z}_g = \mathbb{Z}\ \forall g \in G$. Na literatura algumas vezes o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base G é denotado por $\mathbb{Z}[G]$.

C - Produto tensorial

Produto tensorial de módulos sobre um anel

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [1] e [2]. Seja K um anel comutativo e $M_1, \ldots, M_n$ e N K-módulos. Dizemos que uma função

$$j : M_1 \times \ldots \times M_n \to N$$

é K-multilinear se satisfaz

$$j(m_1, \ldots, k_i m_i + k_i' m_i', \ldots, m_n) = k_i j(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) + k_i' j(m_1, \ldots, m_i', \ldots, m_n)$$

onde $1 \leq i \leq n,\ m_i, m_i' \in M_i,$ e $k_i, k_i' \in K$. Segue disto a seguinte definição

Definição: Seja K um anel comutativo e $M_1, \ldots, M_n$ K-módulos. O produto tensorial de $M_1, \ldots, M_n$ é um K-módulo denotado por $M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$ e uma função K-multilinear

$$j : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$$

tal que para cada K-módulo N e função K-multilinear $f : M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow N$ existe um único K-homomorfismo $\tilde{f} : M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n \longrightarrow N$ fazendo que com o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd} & M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ M_1 \times \ldots \times M_n \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Quando o anel K ficar subentendido é normal simplificar o simbolo $\otimes_K$ do produto tensorial simplesmente por $\otimes$. Dados K-módulos $M_1, \ldots, M_n$ é verdade que o produto tensorial deles sempre existe, além do mais, é único a menos de isomorfismos. De acordo com sua construção, o produto tensorial $M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$ a rigor é o quociente $K^{(M_1 \times \ldots \times M_n)}/R$ onde $K^{(M_1 \times \ldots \times M_n)}$ denota o K-módulo livre com base $M_1 \times \ldots \times M_n$ e R é o K-submódulo de

$K^{(M_1 \times \ldots \times M_n)}$ gerado pelos elementos da forma

$$(m_1, \ldots, k_i m_i + k_i' m_i', \ldots, m_n) - k_i(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n) - k_i'(m_1, \ldots, m_i', \ldots, m_n)$$

para $i = 1, \ldots, n$ onde $m_i's \in M$ e $k_i's, (k_i')'s \in K$. Assim os elementos do quociente produto tensorial são as classes $(m_1, \ldots, m_n) + S$, as quais são denotadas por $m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$, segue disto que valem dentre outras as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} & m_1 \otimes \ldots \otimes (k_i m_i + k_i' m_i') \otimes \ldots \otimes m_n = \\ & \qquad k_i(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes \ldots \otimes m_n) + k_i'(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i' \otimes \ldots \otimes m_n),\ i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Um elemento genérico do produto tensorial $M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$ é uma soma da forma

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} k_{i_1, \ldots, i_n} \cdot m_{i_1} \otimes \ldots \otimes m_{i_n}, \quad k_{i_1, \ldots, i_n} \in K$$

porém, algumas vezes no intuito de verificar alguma propriedade com respeito ao produto tensorial $M_1 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$ através de um cálculo, para que esse não se torne muito enfadonho, o mesmo pode ser realizado em alguns casos verificando tal propriedade nos elementos individuais $m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$, pois estes formam um conjunto de geradores para o produto tensorial.

Produto tensorial de módulos sobre uma álgebra

Sejam K um anel comutativo, A uma K-álgebra, M um A-módulo à direita, N um A-módulo à esquerda e V um K-módulo. Uma aplicação $f : M \times N \to V$ é A-bilinear se
$f(\lambda_1 m + \lambda_2 m', n) = \lambda_1 f(m, n) + \lambda_2 f(m', n)$ para todos $m, m' \in M, n \in N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$
$f(m, \lambda_1 n + \lambda_2 n') = \lambda_1 f(m, n) + \lambda_2 f(m, n')$ para todos $m \in M$, $n, n' \in N$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$
$f(ma, n) = f(m, an)$ para $a \in A$, $m \in M$ e $n \in N$.

Um produto tensorial de M e N é um par $(j, M \otimes_A N)$, onde $M \otimes_A N$ é um K-módulo e $j : M \times N \to M \otimes_A N$ é uma aplicação A-bilinear tal que se $f : M \times N \to V$ é A-bilinear, existe um único K-homomorfismo $\tilde{f}$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_A N \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ M \times N \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Quando a K-álgebra ficar subentendida costuma-se simplificar o simbolo $\otimes_A$ do produto tensorial simplesmente por $\otimes$. Sendo A uma K-álgebra, M um A-módulo à direita e N um A-módulo à esquerda é verdade que o produto tensorial $M \otimes_A N$ sempre existe, além do mais, é único a menos de isomorfismos. De acordo com sua construção, o produto tensorial $M \otimes_A N$ a rigor é o quociente $K^{(M\times N)}/S$ onde $K^{(M\times N)}$ denota o K-módulo livre com base $M \times N$ e S é o K-submódulo de $K^{(M\times N)}$ gerado pelos elementos da forma

$$(\lambda_1 m + \lambda_2 m', n) - \lambda_1(m, n) - \lambda_2(m', n)$$
$$(m, \lambda_1 n + \lambda_2 n') - \lambda_1(m, n) - \lambda_2(m, n')$$
$$(ma, n) - (m, an)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in K, m, m' \in M, n, n' \in N$ e $a \in A$. Assim os elementos do quociente produto tensorial $M \otimes_A N$ são as classes $(m, n) + S$, as quais são denotadas por $m \otimes n$. Segue disso, que dentre outras propriedades do produto tensorial entre M e N valem

$$\begin{aligned} (\lambda_1 m + \lambda_2 m') \otimes n &= \lambda_1(m \otimes n) + \lambda_2(m' \otimes n) \\ m \otimes (\lambda_1 n + \lambda_2 n') &= \lambda_1(m \otimes n) + \lambda_2(m \otimes n') \\ ma \otimes n &= m \otimes an \end{aligned}$$

onde $m, m' \in M, n, n' \in N$ e $a \in A$.

Algumas propriedades do produto tensorial

A seguir apresentamos alguns resultados importantes do produto tensorial em forma de teoremas, porém sem as devidas demonstrações.

Teorema *Dado um anel K, uma K-álgebra A, A-módulos à direita M, M', A-módulos à esquerda N, N' e A-homomorfismos $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$. Então existe um único K-homomorfismo $f' : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ com $f'(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$.*

Teorema *Dado um anel K (que é sobre si mesmo um K-módulo à direita e à esquerda) e um K-módulo à esquerda M temos que $K \otimes_K M \simeq M$. Análogamente, se M for um K-módulo à direita teremos que $M \otimes_K K \simeq M$.*

Teorema *Dado um anel K e uma K-álgebra A (que é sobre si mesma um A-módulo à direita e à esquerda) e um A-módulo à esquerda M temos que $A \otimes_A M \simeq M$. Análogamente, se M for um A-módulo à direita teremos que $M \otimes_A A \simeq M$.*

Teorema *Se tivermos K-álgebras A e B, A-módulo à direita M, B-módulo à esquerda N e um $(A - B)$-bimódulo T. Então temos que os produtos tensoriais $M \otimes_A T$ e $T \otimes_B N$ admitem estruturas de módulos, mais precisamente $M \otimes_A T$ é B-módulo à direita e $T \otimes_B N$ A-módulo à esquerda, onde as ações se dão por*

$$\begin{aligned} \cdot : \quad M \otimes_A T \times B &\longrightarrow M \otimes_A T \\ (m \otimes t, b) &\longmapsto m \otimes (tb) \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & A \times T \otimes_B N & \longrightarrow & T \otimes_B N \\ & (a, t \otimes n) & \longmapsto & (at) \otimes n \end{array}$$

Com isso é possível formar os produtos tensoriais $(M \otimes_A T) \otimes_B N$ *e* $M \otimes_A (T \otimes_B N)$*, além disso, estes são isomorfos, isto é, temos o isomorfismo de* K*-módulos*

$$\begin{array}{rccc} \xi: & (M \otimes_A T) \otimes_B N & \longrightarrow & M \otimes_A (T \otimes_B N) \\ & (m \otimes t) \otimes n & \longmapsto & m \otimes (t \otimes n) \end{array}$$

D - Complexos de A-módulos

A categoria ${}_A\mathrm{Comp}$

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [1] e [2]. Seja A uma K-álgebra. Um complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ é uma sequência de A-módulos $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e uma sequência de homomorfismos $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ em que $d_n d_{n+1} = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$

$$C_\bullet = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

As funções d_n são chamadas diferenciais. Usualmente abreviamos $(C_\bullet, d_\bullet)$ por $C_\bullet$. Se tivermos $C_n's$ e $d_n's$ nulos para $n \geq 1$ teremos que o complexo $C_\bullet$ toma a forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C_{-2} \longrightarrow \cdots$$

neste caso denotaremos este complexo por

$$0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C_{-2} \longrightarrow \cdots$$

e continuaremos o denotando por $C_\bullet$ desde que esteja subentendido.

Podemos também ter um complexo com os módulos e homomorfismos dispostos com os índices em ordem crescente, isto é, quando tivermos $\mathrm{Im}\, d_{n-1} \subset \mathrm{Ker}\, d_n\ \forall n \in \mathbb{Z}$, daí ele toma a forma

$$C_\bullet = \cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

e novamente neste caso, quando tivermos um complexo na forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \longrightarrow \cdots$$

manteremos a notação

$$C_\bullet = 0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \longrightarrow \cdots$$

desde que esteja subentendido.

Pode-se também encontrar outras notações para complexos. Para fim de ilustração, no caso em que tem-se os módulos e homomorfismos dispostos com os índices em ordem crescente, há uma notação em que os índices entram na parte de cima dos módulos e dos diferenciais, ou seja, o complexo se torna uma sequência de funções escrita da forma

$$C^\bullet = \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde $d^n d^{n-1} = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$, neste caso ainda podemos usar a mesma notação para o caso

$$C^\bullet = 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \longrightarrow \cdots$$

desde que esteja subentendido.

Se tivermos dois complexos $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$, um morfismo $f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ entre esses complexos é uma sequência de morfismos $(f_n : C_n \to C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que é compatível com os diferenciais, isto é, satisfazem $f_{n-1}d_n = d'_n f_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras é o mesmo que dizer que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Temos que dados morfismos de complexos $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ e $f'_* : C'_\bullet \to C''_\bullet$ então podemos definir a composição $f'_\bullet f_\bullet : C_\bullet \to C''_\bullet$ por $f'_\bullet f_\bullet = (f'_n f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. O morfismo identidade $1_{C_\bullet}$ em $(C_\bullet, d_\bullet)$ é definido como sendo a cadeia de funções identidades $1_{C_n} : C_n \to C_n$. Sendo assim, fixado uma K-álgebra A, o conjunto de todos os complexos de A-módulos a èsquerda formam uma categoria. Denotamos essa categoria por ${}_A\mathrm{Comp}$.

Funtor H_i de homologia

Se $(C_\bullet, d_\bullet)$ é um complexo, definimos $n-$ciclos $= Z_n(C_\bullet) = \operatorname{Ker} d_n$ e $n-$bordos $= B_n(C_\bullet) = \operatorname{Im} d_{n+1}$. O fato de termos $d_n d_{n+1} = 0$ em um complexo é equivalente a condição $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, isto é $B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$, para todo complexo $C_\bullet$. Podemos definir também o quociente $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$, chamamos este de n-ésimo módulo de homologia de $C_\bullet$. No caso de termos um complexo com os módulos e homomorfismos na forma

$$C_\bullet = \cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde $\operatorname{Im} d_{n-1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, denotaríamos então $\operatorname{Ker} d_n = Z^n(C_\bullet)$, $\operatorname{Im} d_{n-1} = B^n(C_\bullet)$ e o quociente $\operatorname{Ker} d_n/\operatorname{Im} d_{n-1} = Z^n(C_\bullet)/B^n(C_\bullet)$ por $H^n(C_\bullet)$ e chamaríamos este de n-ésimo módulo de cohomologia de $C_\bullet$. Segue destas observações que temos o seguinte resultado

Teorema *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $H_n : {}_A\mathrm{Comp} \to {}_A\mathrm{Mod}$ é um funtor aditivo chamado de funtor H_n de homologia*

Demonstração. Já temos definido H_n nos objetos nos resta agora definir nos morfismos. Se $f_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ é um morfismo de complexos, definimos

$$\begin{array}{rccc} H_n(f_\bullet): & H_n(C_\bullet) & \longrightarrow & H_n(C'_\bullet) \\ & z_n + B_n(C_\bullet) & \longmapsto & f_n(z_n) + B_n(C'_\bullet) \end{array}$$

Devemos mostrar que $f_n(z_n)$ é um ciclo e que $H_n(f_\bullet)$ independe da escolha do ciclo z_n. Ambos esses resultados seguem do fato de que $f_\bullet$ é um morfismo de complexos, isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Primeiro, seja z um n-ciclo em $Z_n(C_\bullet)$, isto é, $d_n(z) = 0$. Então a comutatividade do diagrama garante que $d'_n f_n(z) = f_{n-1} d_n(z) = 0$, desta forma $f_n(z)$ é um n-ciclo. Próximo, assumamos que $z + B_n(C_\bullet) = y + B_n(C_\bullet)$, assim $z - y \in B_n(C_\bullet)$, isto é, $z - y = d_{n+1}(c)$ para algum $c \in C_{n+1}$. Aplicando f_n temos que $f_n(z) - f_n(y) = f_n d_{n+1}(c) = d'_{n+1} f_{n+1}(c) \in B_n(C'_\bullet)$, então, $f_n(z) + B_n(C'_\bullet) = f_n(y) + B_n(C'_\bullet)$.

Vejamos que H_n é um funtor. Obviamente pela definição $H_n(1_{C_\bullet})$ é função identidade em $H_n(C_\bullet)$. Se tivermos funções $f_\bullet$ e $g_\bullet$ tal que a composição $g_\bullet f_\bullet$ está definida, então para cada n-ciclo z_n, temos $H_n(g_\bullet f_\bullet)(z_n + B_n(C_\bullet)) = g_n f_n(z_n) + B_n(C''_\bullet) = H_n(g_\bullet)(f_n(z_n) + B_n(C'_\bullet)) = H_n(g_\bullet)H_n(f_\bullet)(z_n + B_n(C_\bullet))$. Finalmente vejamos que H_n é aditivo. Considerando $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ dois morfismos de complexos e z um n-ciclo então

$$\begin{aligned} H_n(f_\bullet + g_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) &= (f_n + g_n)(z) + B_n(C'_\bullet) \\ &= f_n(z) + g_n(z) + B_n(C'_\bullet) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [f_n(z) + B_n(C'_\bullet)] + [g_n(z) + B_n(C'_\bullet)] \\
&= H_n(f_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) + H_n(g_\bullet)(z + B_n(C_\bullet)) \\
&= [H_n(f_\bullet) + H_n(g_\bullet)](z + B_n(C_\bullet))
\end{aligned}
$$

□

Se $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ são dois complexos e $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ são morfismos entre esses complexos, dizemos que $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são homotópicos ou que $f_\bullet$ é homotópico a $g_\bullet$ (denotamos por $f_\bullet \sim g_\bullet$) se existe uma cadeia de morfismos $(s_n : C_n \to C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

A sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é chamada de homotopia entre $f_\bullet$ e $g_\bullet$. Como consequência de termos $f_\bullet \sim g_\bullet$ temos que $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Com efeito, se para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale a igualdade $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, então dado $z_n \in Z_n(C_\bullet)$, isto é, $d_n(z_n) = 0$ então

$$f_n(z_n) - g_n(z_n) = d'_{n+1}s_n(z_n) \in \operatorname{Im} d'_{n+1} = B_n(C_\bullet)$$

assim $f_n(z_n) + B_n(C_\bullet) = g_n(z_n) + B_n(C_\bullet)$, ou seja, $H_n(f_\bullet)(z_n + B_n(C_\bullet)) = H_n(g_\bullet)(z_n + B_n(C_\bullet))$ e como vale para todo n-ciclo z_n então $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$.

Funtor EXT

Consideremos A uma K-álgebra e P um A-módulo. Dizemos que um A-módulo P é projetivo se para todo homomorfismo sobrejetor $f : M \longrightarrow N$ e todo homomorfismo $u : P \longrightarrow N$ existe um homomorfismo $v : P \longrightarrow M$ tal que $u = fv$, isto é, o diagrama a seguir comuta

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "u"] & \\
M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Um resultado importante que relaciona o conceito de módulos projetivos com o de módulos livres é dado como segue

Proposição *Seja A uma K-álgebra. Todo A-módulo livre é projetivo.*

Analogamente podemos definir o conceito de módulos injetivos. A saber, dizemos que um A-modulo I é injetivo se para todo homomorfismo injetor $f : L \longrightarrow M$ e todo homomorfismo $u : L \longrightarrow I$ existe um homomorfismo $v : M \longrightarrow I$ tal que $u = vf$, isto é, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[dl, dashed, "v"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Um resultado importante, e que não demonstraremos, é que dado um A-módulo M sempre existe uma sequência exata (isto é, um complexo onde se tem $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$)

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é um A-módulo projetivo. Um outro resultado similar para módulos injetivos é que dado qualquer A-módulo M, sempre existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{f_{n+1}} I_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde cada I_i é um A-módulo injetivo.

Fixamos agora um A-módulo M e consideramos uma resolução injetiva para um A-módulo N sendo

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{d_0} I_0 \xrightarrow{d_1} I_1 \xrightarrow{d_2} I_2 \longrightarrow \cdots$$

Considerando o funtor covariante $\operatorname{Hom}_A(M, \_) : {}_A\mathrm{Mod} \longrightarrow {}_K\mathrm{Mod}$, aplicamos este na resolução injetiva de N e excluimos o K-módulo $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ obtendo o complexo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, I_0) \xrightarrow{(d_1)_*} \operatorname{Hom}_A(M, I_1) \xrightarrow{(d_2)_*} \cdots$$

denotaremos por $E^n(M, N)$ o n-ésimo módulo de cohomologia deste complexo, isto é,

$$E^n(M, N) = \operatorname{Ker}(d_{n+1})_* / \operatorname{Im}(d_n)_*$$

De maneira similar podemos considerar o funtor contravariante $\operatorname{Hom}_A(\_, N) : {}_A\mathrm{Mod} \longrightarrow {}_K\mathrm{Mod}$ e uma resolução projetiva de M

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

excluindo o K-módulo $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ temos o complexo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} \operatorname{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

denotaremos neste caso $E_n(M,N)$ como sendo o n-ésimo módulo de cohomologia do complexo em questão, isto é,

$$E_n(M,N) = \operatorname{Ker} d^*_{n+1} / \operatorname{Im} d^*_n$$

Um outro resultado que novamente não iremos demonstrar é que das construções feitas anteriormente existe um isomorfismo entre $E_n(M,N)$ e $E^n(M,N)$. Sendo assim podemos considerar esses dois como sendo o mesmo do ponto de vista álgébrico. Denotaremos então por $\operatorname{Ext}^n_A(M,N) := E^n(M,N) \simeq E_n(M,N)$.

Proposição *Se tivermos uma sequência de A-módulos $(C_n)_{n\geq 0}$ e A-homomorfismos $(d_n)_{n\geq 0}$ como mostra o diagrama*

$$C = \cdots \xrightarrow{d_2} C_2 \xrightarrow{d_1} C_1 \xrightarrow{d_0} C_0 \longrightarrow 0$$

e existir uma sequência de homomorfismos de grupos (dito homomorfismos contrativos)

$$C_0 \xrightarrow{s_0} C_1 \xrightarrow{s_1} C_2 \xrightarrow{s_2} \cdots$$

tais que valem as relações:

1. $d_0 s_0 = 1_{C_0}$;
2. $d_n s_n + s_{n-1} d_{n-1} = 1_{C_n} \quad \forall n \geq 1$;
3. $\langle \operatorname{Im} s_n \rangle_A = C_{n+1} \quad \forall n \geq 2$;
4. $d_0 d_1 = 0$.

então a sequência C é exata, em particular, se em C cada C_n for A-projetivo e os morfismos $d_n's$ A-lineares então C é uma resolução A-projetiva de C_0. No caso termos a hipótese de C ser um complexo então é suficiente as hipóteses 1 e 2 para concluir que esta seja exata.

Demonstração. Primeiramente vejamos que a sequência C é um complexo, isto é, que os A-homomorfismos $d_i's$ satisfazem $d_n d_{n+1} = 0 \ \forall n \geq 0$. Vejamos isto por indução nos índices dos homomorfismos $d_i's$. O primeiro passo já esta resolvido, pois por hipótese $d_0 d_1 = 0$. Como $\langle \operatorname{Im} s_{n+1} \rangle_A = C_{n+2}$, para $n \geq 1$, para mostrar que $d_n d_{n+1} = 0$ é suficiente mostrar que $d_n d_{n+1} s_{n+1} = 0$. Assumindo por indução que $d_{n-1} d_n = 0$, temos

$$\begin{aligned} d_n d_{n+1} s_{n+1} &= d_n(1_{C_{n+1}} - s_n d_n) = d_n - d_n s_n d_n \\ &= d_n - (1_{C_n} - s_{n-1} d_{n-1}) d_n = d_n - d_n + s_{n-1} d_{n-1} d_n \\ &= 0 + s_{n-1} 0 = 0 \end{aligned}$$

Uma vez sendo C um complexo, em C_n temos que $\operatorname{Im} d_n \subset \operatorname{Ker} d_{n-1}$, por outro lado, sendo válidas as relações mencionadas na hipótese, temos que em C_n vale $d_n s_n + s_{n-1}d_{n-1} = 1_{C_n}$, assim dado $b \in \operatorname{Ker} d_{n-1}$, temos $b = d_n s_n(b) + s_{n-1}d_{n-1}(b) = d_n s_n(b) + s_{n-1}(0) = d_n(s_n(b))$, ou seja, $b \in \operatorname{Im} d_n$. Logo, $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Ker} d_{n-1}\ \forall n \geq 1$. Também dado $a \in C_0$ temos $a = d_0 s_0(a)$, o que mostra que d_0 é sobrejetor.

Se C já fosse um complexo, então poderíamos reescrever as relações 1 e 2 como:

1. $d_0 s_0 = 1_{C_0} - 0_{C_0}$;
2. $d_n s_n + s_{n-1}d_{n-1} = 1_{C_n} - 0_{C_n} \quad \forall n \geq 1.$

o que implicaria no fato dos morfismos $1_\bullet, 0_\bullet : C \longrightarrow C$ serem homotópicos, como mostra o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_2"] & C_2 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "1"] & C_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "s_1"] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[dl, "s_0"] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d_2"'] & C_2 \arrow[r, "d_1"'] & C_1 \arrow[r, "d_0"'] & C_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como consequência do fato de $1_\bullet$ ser homotópico a $0_\bullet$ temos que $H_n(1_\bullet) = H_n(0_\bullet)$. Aplicando esta igualdade em $H_n(C)$ temos que $H_n(1_\bullet)(H_n(C)) = H_n(0_\bullet)(H_n(C))$, ou seja, $H_n(C) = 0$ de onde concluímos que $Z_n(C) \subset B_n(C)$, mas como a inclusão contrária já é verdadeira do fato de C ser um complexo, temos que $Z_n(C) = B_n(C)$ o que implica na exatidão da sequência. $\square$

E - Álgebras de Hopf

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [4]. Buscaremos nesta seção construir uma série de definições que busquem de maneira simplificada definir o que é uma álgebra de Hopf.

Definição: Uma K-álgebra é uma tripla (A, M, u), onde A é um K-espaço vetorial, $M : A \otimes A \longrightarrow A$ e $u : K \longrightarrow A$ são morfismos de K-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "M\otimes I_A"] \arrow[d, "I_A\otimes M"'] & A\otimes A \arrow[d, "M"] \\
A\otimes A \arrow[r, "M"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A\otimes A \arrow[dd, "M"] & \\
K\otimes A \arrow[ur, "u\otimes I_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A\otimes K \arrow[ul, "I_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Definição: Uma K-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ϵ) onde C é um K-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to K$ são transformações lineares e que fazem os diagramas abaixo comutarem

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes I"] \\
C\otimes C \arrow[r, "I\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\
K\otimes C & & C\otimes K \\
& C\otimes C \arrow[ul, "\epsilon\otimes I"] \arrow[ur, "I\otimes\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição: Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) duas K-álgebras. Uma transformação linear $f : A \to B$ é dita um morfismo de K-álgebras se os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "M_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & B \\
& K \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que a comutatividade desses diagramas possuem relação com expressões analíticas de morfismos de K-álgebras, pois, sendo f morfismo de K-álgebras temos

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \Rightarrow \quad f \circ M_A(a \otimes b) = M_B \circ (f \otimes f)(a \otimes b)$$

$$f(1_A) = 1_B \quad \Rightarrow \quad f \circ u_A(1_K) = u_B(1_K)$$

Definição: Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ duas K-coálgebras. Uma transformação linear $g : C \to D$ é dita um morfismo de K-coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C\otimes C \arrow[r, "g\otimes g"'] & D\otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Segue das definições anteriores que temos o seguinte resultado que não demonstraremos

Teorema *Se H é um K-espaço vetorial dotado de uma estrutura de Álgebra (H, M, u) e de uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ϵ) então as afirmações são equivalentes*

(i) M e u são morfismos de coálgebra;

(ii) Δ e ϵ são morfismos de álgebra.

Definição: Uma biálgebra é um K-espaço vetorial com uma estrutura de álgebra (H, M, u) e com uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ϵ) tal que M e u são morfismos de coálgebra

Definição: Sejam (C, Δ, ϵ) K-coálgebra e (A, M, u) K-álgebra. Temos que $\text{Hom}(C, A)$ tem estrutura de álgebra ao definirmos:

$$f * g(c) = \sum_i f(c_i^1)g(c_i^2) \quad \text{onde} \quad \Delta(c) = \sum_i c_i^1 \otimes c_i^2 \quad \forall c \in C$$

chamaremos $*$ de produto de convolução

Obs: $u \circ \epsilon$ é a identidade em $\text{Hom}(C, A)$.

Definição: Se H é biálgebra podemos denotar por H^A a álgebra correspondente e H^C a coálgebra. Logo $\text{Hom}(H^C, H^A)$ tem estrutura de álgebra com respectivo produto de convolução:

$$f * g(h) = \sum_i f(h_i^1)g(h_i^2) \quad \text{onde} \quad \Delta(h) = \sum_i h_i^1 \otimes h_i^2 \quad \forall h \in H$$

Definição: Se H é biálgebra. Um operador $S : H \to H$ é chamado antípoda de H se S é inversa de I com respeito ao produto de convolução em $\text{Hom}(H^C, H^A)$

Definição: Uma biálgebra H que possui uma antípoda é chamada de uma ***Álgebra de Hopf***

Exemplo: Seja G um grupo finito e KG o K-espaço vetorial com base G, temos que KG é uma álgebra de Hopf com estrutura de álgebra (KG, M, u) e com estrutura de coálgebra (KG, Δ, ϵ) dadas por

$$\begin{array}{rccc} M: & KG \otimes KG & \longrightarrow & KG \\ & g \otimes h & \longmapsto & gh \\ \Delta: & KG & \longrightarrow & KG \otimes KG \\ & g & \longmapsto & g \otimes g \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} u: & K & \longrightarrow & KG \\ & 1 & \longmapsto & 1_G \\ \epsilon: & KG & \longrightarrow & K \\ & g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

e antípoda

$$\begin{array}{rccc} S: & KG & \longrightarrow & KG \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Definição: Seja A uma K-álgebra e H uma K-álgebra de Hopf. Uma ação à esquerda de H em A é uma função K-linear

$$\begin{array}{rccc} \blacktriangleright\colon & H \otimes A & \longrightarrow & A \\ & h \otimes a & \longmapsto & h \blacktriangleright a \end{array}$$

que satisfaz

1. A é um H-módulo à esquerda;
2. $h \blacktriangleright (ab) = \sum\limits_i (h_i^1 \blacktriangleright a)(h_i^2 \blacktriangleright b)$ onde $\Delta(h) = \sum_i h_i^1 \otimes h_i^2 \quad \forall h \in H, a, b \in A$;
3. $h \blacktriangleright 1_A = \epsilon(h)1_A \quad \forall h \in H$

Dizemos neste caso que A é um H-módulo álgebra à esquerda.

Definição: Se A é um H-módulo álgebra à esquerda, o produto smash de A e H denotado por $A\#H$, é o K-espaço vetorial $A\#H := A \otimes H$ com produto dado por

$$(a\#h)(b\#k) = \sum_i a(h_i^1 \blacktriangleright b)\#h_i^2 k \quad \text{onde} \quad \Delta(h) = \sum_i h_i^1 \otimes h_i^2$$

temos que $A\#H$ com este produto possui estrutura de K-álgebra com unidade $1\#1$

Exemplo: Se G é um grupo finito e age por automorfismos em uma K-álgebra A (denotamos por $g \blacktriangleright a = {}^g a$) então temos que A é um KG-módulo álgebra. Com efeito, o fato de que A é um KG-módulo à esquerda é imediato e lembrando que da estrutura de coálgebra de KG tem-se que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\epsilon(g) = 1_K$, então temos que

$$g \blacktriangleright (ab) = {}^g(ab) = ({}^g a)({}^g b) = (g \blacktriangleright a)(g \blacktriangleright b)$$

$$g \blacktriangleright 1_A = {}^g 1_A = 1_A = 1_K 1_A = \epsilon(g)1_A$$

Sendo assim temos que A é um KG-módulo álgebra, neste caso o produto smash de A por KG denotado por $A\#KG$ é uma K-álgebra com produto dado por

$$(a\#g)(b\#h) = a(g \blacktriangleright b)\#gh = a({}^g b)\#gh$$

F - Coproduto

Nesta seção veremos alguns resultados que podem ser encontrados em [2]. Sejam A e B objetos na categoria $\mathscr{C}$ então o coproduto de A e B é uma tripla $(A \sqcup B, \alpha, \beta)$, onde $A \sqcup B$ é um objeto em $\mathscr{C}$ e $\alpha : A \longrightarrow A \sqcup B$, $\beta : B \longrightarrow A \sqcup B$ são morfismos (ditas injeções), tal que para cada objeto $X \in \mathscr{C}$ e cada par de morfismos $f : A \longrightarrow X$ e $g : B \longrightarrow X$, existe único morfismo $\theta : A \sqcup B \longrightarrow X$ fazendo o diagrama comutar, isto é, $\theta\alpha = f$ e $\theta\beta = g$ como mostra o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \sqcup B \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & X \\
& B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Na categoria dos conjuntos, dados conjuntos A e B temos que $A \sqcup B = A' \sqcup B'$ onde $A' = A \times \{1\}$ e $B' = B \times \{2\}$, isto é, $A \sqcup B = A \cup B \times \{1, 2\}$. As funções α e β saõ definidas por

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & A & \longrightarrow & A \sqcup B \\ & a & \longmapsto & (a, 1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \beta : & B & \longrightarrow & A \sqcup B \\ & b & \longmapsto & (b, 2) \end{array}$$

dados f e g como no diagrama acima, θ é dado por $\theta : A \sqcup B \longrightarrow X$, onde $\theta(a, 1) = f(a)$ e $\theta(b, 2) = g(b)$. Segue da definição de θ que este faz o diagrama comutar, quanto a unicidade, suponhamos que exista $\psi : A \sqcup B \longrightarrow X$ que satisfaz $\psi\alpha = f$ e $\psi\beta = g$ então teremos que $\psi(a, 1) = f(a) = \theta(a, 1)$ e $\psi(b, 2) = g(b) = \theta(b, 2)$ de onde concluimos que $\psi = \theta$ em $A \sqcup B$.

Teorema *Se A e B são R-módulos então existe o coproduto $A \sqcup B$ em ${}_R\mathrm{Mod}$ e é a soma direta $A \oplus B$*

Demonstração. Consideremos a soma direta $C = A \oplus B$, ou seja, o produto cartesiano entre A e B e definamos as funções

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & A & \longrightarrow & C \\ & a & \longmapsto & (a, 0) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \beta : & B & \longrightarrow & C \\ & b & \longmapsto & (0, b) \end{array}$$

assim como definidos, α e β são R-homomorfismos. Agora tomemos um R-módulo X e R-homomorfismos $f : A \longrightarrow X$ e $g : B \longrightarrow X$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \theta : & C & \longrightarrow & X \\ & (a, b) & \longmapsto & f(a) + g(b) \end{array}$$

Vejamos que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
 & C = A \oplus B \arrow[dd, dashed, "\theta"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

com isso

$$\theta\beta(b) = \theta(0, b) = f(0) + g(b) = 0 + g(b) = g(b)$$
$$\theta\alpha(a) = \theta(a, 0) = f(a) + g(0) = f(a) + 0 = f(a)$$

Para verificar a unicidade de θ, suponhamos que existe R-homomorfismo $\psi : C \longrightarrow X$ que faz o diagrama comutar, assim

$$\psi(a, b) = \psi(a, 0) + \psi(0, b) = \psi\alpha(a) + \psi\beta(b) = f(a) + g(b) = \theta(a, b)$$

logo $\psi = \theta$ □

Teorema *Se K é um anel comutativo e A e B são K-álgebras comutativas, então $A \otimes_K B$ é o coproduto na categoria das K-álgebras comutativas*

Demonstração. Tomemos as funções

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & A & \longrightarrow & A \otimes_K B \\ & a & \longmapsto & a \otimes 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta : & B & \longrightarrow & A \otimes_K B \\ & b & \longmapsto & 1 \otimes b \end{array}$$

como definidos α e β são morfismos de K-álgebras. Seja agora X uma K-álgebra comutativa e consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \otimes_K B & & X \\
 & B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

onde f e g são morfismos de K-álgebras. A função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A \times B & \longrightarrow & X \\ & (a, b) & \longmapsto & f(a)g(b) \end{array}$$

é K-bilinear, pois

$$\begin{aligned}\varphi(ka_1+a_2,b) &= f(ka_1+a_2)g(b) = (kf(a_1)+f(a_2))g(b)\\ &= kf(a_1)g(b)+f(a_2)g(b) = k\varphi(a_1,b)+\varphi(a_2,b)\end{aligned}$$

e análogo para $\varphi(a_1, kb_1+b_2)$. Assim existe único morfismo de K-módulos

$$\begin{aligned}\theta: \ A\otimes_K B &\longrightarrow X\\ a\otimes b &\longmapsto f(a)g(b)\end{aligned}$$

onde θ é morfismo de K-álgebras, com efeito

$$\begin{aligned}\theta(a\otimes b\cdot a'\otimes b') &= \theta(aa'\otimes bb') = f(aa')g(bb') = f(a)f(a')g(b)g(b')\\ &= f(a)g(b)f(a')g(b') = \theta(a\otimes b)\theta(a'\otimes b')\end{aligned}$$

quanto a comutatividade do diagrama temos

$$\theta\alpha(a) = \theta(a\otimes 1) = f(a)g(1) = f(a)$$
$$\theta\beta(b) = \theta(1\otimes b) = f(1)g(b) = g(b)$$

Para verificar a unicidade de θ, suponhamos que exista morfismo de K-álgebras $\phi : A\otimes_K B \longrightarrow X$ que faz o diagrama comutar, com isso, dado $a\otimes b\in A\otimes_K B$ temos que $a\otimes b = a\otimes 1\cdot 1\otimes b = \alpha(a)\beta(b)$, com isso para os geradores $a\otimes b$ de $A\otimes_K B$ temos

$$\phi(a\otimes b) = \phi(\alpha(a)\beta(b)) = \phi\alpha(a)\phi\beta(b) = f(a)g(b) = \theta(a\otimes b)$$

portanto $\phi = \theta$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ASSEM, I. ***Algèbres et modules***. Ed. Masson, 1997.

[2] ROTMAN, J.J. ***Advanced Modern Algebra***. Prentice-Hall, 2002.

[3] ROTMAN, J.J. ***An Introduction to Homological Algebra, Second Edition***. Springer, 2009.

[4] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. ***Hopf Algebras: An Introduction***. Marcel Dekker, Inc., 2001.

[5] WEIBEL, C.A. ***An Introduction to Homological Algebra***. Cambridge Univertity Press, 1994.

[6] JACOBSON, N. ***Basic Algebra II, Second Edition***. W.H. Freeman and Company, 1989.

[7] The Buenos Aires Cyclic Homology Group. ***Cyclic Homology of Algebras with One Generator***. K-Theory 5, 1991, pg. 51-69.

[8] HOLM, T. ***Hochschild Cohomology Rings of Algebras*** $\mathrm{k}[\mathrm{x}]/\langle\mathrm{f}\rangle$. Beiträge zur Algebra und Geometrie Contribuitions to Algebra and Geometry, v. 41, n. 1, 2000, pg. 291-301.

[9] GERSTENHABER, M. ***The Comology Structure of an Associative Ring***. Annals of Mathematics, v. 78, n. 2, 1963, pg. 267-288.

[10] BURCIU, S.M.; WITHERSPOON, S.J. ***Hochschild Cohomology of Smash Products and Rank One Hopf Algebras***. 2006.

[11] LANE, S.M. ***Homology***. Springer-Verlag, 1963.

[12] FULTON, W.; HARRIS, J. ***Representation Theory. A First Course***. Springer-Verlag, 1991.

[13] KROP, L.; Radford, D.E. ***Finite-dimensional Hopf algebras of rank one in characteristic zero***. Journal of Algebra, v. 302, 2006, pg. 214-230.

[14] TAFT, E.J. ***The Order the Antipode of Finite-dimensional Hopf Algebra***. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 68, n. 11, 1971, pg. 2631-2633.

[15] CIBILS, C.; SOLOTAR, A. ***Hochschild cohomology algebra of abelian groups***. Archiv der Mathematik, v. 68, 1997, pg. 17-21.

[16] CIBILS, C. ***Tensor product of Hopf bimodules over a group***. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 125, n. 5, 1997, pg. 1315-1321.

[17] SIEGEL, S.F.; WITHERSPOON, S.J. ***The Hochschild cohomology ring of a group algebra***. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 79, n. 1, 1999, pg. 131-157.

[18] LINCKELMANN, M. ***On the Hochschild cohomology of commutative Hopf algebras***. Archiv der Mathematik, v. 75, 2000, pg.410-412.

[19] VILLAMAYOR, O.E.; MOUNT, K.R. ***Taylor-Series and Higher Derivations, Serie Impresiones previas No. 18***. Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires, 1969.