UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS PERIÓDICOS

Dion Ross Pasievitch Boni Alves

Curitiba, PR, Brasil

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Dion Ross Pasievitch Boni Alves

OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS PERIÓDICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Alexandre Kirilov
Co-orientador: Dr. Cleber de Medeira

Curitiba, PR, Brasil

2014

A474o Alves, Dion Ross Pasievitch Boni

Operadores pseudodiferenciais periódicos / Dion Ross Pasievitch Boni Alves. – Curitiba, 2014.

81f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2014.

Orientador: Alexandre Kirilov -- Coorientador: Cleber de Medeira.

Bibliografia: p. 81-81.

1. Operadores pseudodiferenciais. 2. Lógica simbólica e matemática. 3. Análise funcional. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kirilov, Alexandre III. Medeira, Cleber de. IV. Título.

CDD: 515.7242

TERMO DE APROVAÇÃO

"OPERADORES PSEUDODIFERENCIAIS PERIÓDICOS"

por

Dion Ross Pasievitch Boni Alves

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: ______________________________

Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Dep. de Matemática – UFPR

Sérgio Luís Zani

____

Prof. Dr. Sergio Luís Zani
USP

Rafael Augusto dos Santos Kapp

____

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
UFSCAR

Curitiba, 06 de fevereiro de 2014.

AGRADECIMENTOS

Nestas poucas linhas nem meus mais calorosos agradecimentos poderiam alcançar a tudo pelo que sou grato. Em especial, devo suprema gratidão a minha família, do remoto Jangada, os quais sempre me propiciaram o melhor, dentro do melhor que tinham, para que eu pudesse seguir e consumar meus objetivos. Sempre grato!

Expresso também meus agradecimentos aos professores Alexandre e Cleber, pelas tantas horas dedicadas as orientações, sempre produtivas. Estou certo, que sem vós não haveria chegado este momento de registrar minha gratidão. Que o futuro nos traga ainda mais o que agradecer!

A meu orientador da graduação, Simão, devo igualmente meus agradecimentos. Pelo apoio constante e palavras encorajadoras muito obrigado.

Devo muito a meus colegas da pós-graduação que me propiciaram grandes momentos e sem os quais as horas árduas teriam sido tão mais árduas. Em especial, aos grandes companheiros de jornada Felipe, Leonardo e Marcos.

Agradeço a todos os professores da pós-graduação que participaram de algum modo em minha formação, afinal o que sou, como matemático, é reflexo de vosso trabalho adicionado a meu esforço para corresponder as suas expectativas.

Em especial, agradeço aos professores Sérgio e Rafael pelas sugestões, muito bem vindas, que acresceram muito a este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê."

(A. Schopenhauer)

RESUMO

Neste trabalho, desenvolvemos a teoria dos operadores pseudodiferenciais periódicos seguindo a exposição existente em [6], [7] e [8]. Para tanto, introduzimos algumas ferramentas da análise discreta que auxiliam na fundamentação do cálculo simbólico dos operadores em questão. Finalmente, apresentamos uma aplicação da teoria desenvolvida na construção de parametrizes para operadores pseudodiferenciais periódicos elíticos.

Palavras-chave: Operadores Pseudodiferenciais no Toro. Análise Discreta. Cálculo Simbólico.

ABSTRACT

In this work we develop the theory of periodic pseudo-differential operators following the exposition found in [6], [7] and [8]. To this end we introduce some tools from discrete analysis that helps establishing the foundations of symbolic calculus of such operators. Finally, we present an application of the developed theory in the construction of parametrices for elliptic periodic pseudo-differential operators.

Keywords: Pseudo-differential Operators on Torus. Discrete Analysis. Symbolic Calculus.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Operadores pseudodiferenciais são uma generalização natural dos operadores diferenciais do ponto de vista da transformada de Fourier. A idéia é pensar na ação do operador diferencial sobre uma função como sendo o produto da transformada inversa de um polinômio (associado ao operador diferencial) pela transformada dessa função. A representação integral obtida conduz a uma generalização natural dos operadores diferenciais quando permitimos que outras funções, que garantam a boa definição, ocupem o lugar das funções polinomiais na transformada inversa.

No caso em que P é um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes, a transformada de Fourier permite obter a solução de equações, por exemplo, da forma $Pu = f$, com u e f em espaços apropriados. Neste caso, a propriedade fundamental utilizada é que a transformada de Fourier age em derivadas resultando em produtos. Entretanto, se P possui coeficientes variáveis, esse técnica torna-se ineficiente para gerar soluções. A teoria de operadores pseudodiferenciais coloca esse problema num contexto mais geral no qual dispomos de novas ferramentas para abordar o problema.

No espaço euclidiano $n-$dimensional, um operador pseudodiferencial A é um operador integral que, por exemplo, a cada função suave $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ associa a função

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\ d\xi,$$

sendo $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função suave, chamada símbolo, que satisfaz

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para todo α e β multi-índices, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Aqui $m \in \mathbb{R}$ e $\rho, \delta \in [0,1]$ estão fixados e a constante $C_{\alpha,\beta}$ não depende de ξ.

Neste trabalho, estaremos interessados em desenvolver a teoria dos operadores pseudodiferenciais periódicos definidos no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Neste caso a transformada de Fourier leva funções de $\mathbb{T}^n$ em sequências de $\mathbb{Z}^n$, e um operador pseudodiferencial A leva, por exemplo, uma função suave $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ em uma função

$$Af(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi),$$

sendo $a : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função suave na primeira variável, também chamada de símbolo, satisfazendo,

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|^2)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para todo α e β multi-índices, $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Aqui também $m \in \mathbb{R}$ e $\rho, \delta \in [0,1]$ estão fixados e a constante $C_{\alpha,\beta}$ não depende de ξ.

Um fato interessante, é que a teoria dos operadores pseudodiferenciais periódicos pode ser feita de maneira independente da teoria euclidiana e esta última não se faz necessária para o entendimento da primeira. Existe, entretanto, um forte elo entre ambas teorias, laço este que pode ser observado no teorema 3.5 no qual mostramos que todo símbolo toroidal é restrição de um símbolo euclidiano. Neste sentido, ganhamos pelo fato de poder recuperar resultados clássicos no contexto toroidal e obter resultados novos, ou mesmo conhecidos, sob uma nova ótica. Além disso, a teoria dos operadores pseudodiferenciais periódicos ainda se beneficia da própria natureza topológica do toro, pois sua compacidade elimina a necessidade da análise do decaimento no infinito.

O texto estrutura-se como segue:

No primeiro capítulo estabelecemos algumas notações e convenções usadas ao longo do texto bem como apresentamos resultados da análise de Fourier sobre $\mathbb{T}^n$ que precisaremos no restante do trabalho.

O segundo capítulo consiste das ferramentas necessárias para o entendimento do cálculo simbólico de operadores pseudodiferenciais. Começamos introduzindo os operadores de diferença que são usuais no cálculo de diferenças finitas e em seguida mostramos uma série de resultados discretos análogos ao caso contínuo. Em destaque, mostramos uma versão discreta do teorema de integração por partes e do teorema fundamental do cálculo.

O último capítulo trata exclusivamente da teoria dos operadores pseudodiferenciais sobre o toro n-dimensional. Iniciamos definido as classes de símbolos e associamos operadores pseudodiferenciais a estes. Introduziremos então, o conceito de amplitude toroidal que permitirá estender estas ideias. Veremos ainda que é possível estender operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev periódicos.

Posteriormente, provamos os principais resultados do cálculo simbólico de operadores pseudodiferenciais. Em particular, apresentamos as condições para que seja possível tomar transpostos e adjuntos de operadores preservando a classe de símbolos.

Em seguida trataremos da importante classe de operadores pseudodiferenciais elíticos. Veremos então como a teoria desenvolvida aplica-se na obtenção de parametrizes, mostrando que eliticidade equivale a existência de uma parametriz. Por fim, provaremos que a eliticidade é preservada quando tomamos o transposto e o adjunto de um operador elítico.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos Iniciais

Neste capítulo introduzimos as notações que serão utilizadas no restante do texto e também listamos os principais resultados da análise de Fourier no toro que serão utilizados posteriormente. Grande parte dos resultados aqui apresentados são clássicos e por isto omitiremos suas provas.

1.1.1 Notações, Convenções e Primeiras Propriedades

Neste trabalho denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos e $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Um *multi-índice* α é um elemento de $\mathbb{N}_0^n$, isto é, uma n-upla de inteiros não negativos. Sempre que nos referirmos a $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ficará subentendido que suas componentes serão $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$. Igualmente, as componentes de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ serão $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ consideraremos as seguintes notações e definições usuais em análise:

(i) o *comprimento* de α é $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;

(ii) escrevemos $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$;

(iii) a *soma* de α e β é $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$. Quando $\alpha \leq \beta$ definimos também a *diferença* de α e β por $\beta - \alpha := (\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n)$;

(iv) $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$ sendo $\binom{\alpha_j}{\beta_j} := \dfrac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!}$ caso $\alpha_j \geq \beta_j$ e 0 do contrário;

(v) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$;

(vi) $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$;

(vii) $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ com $D_j := \dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$;

(viii) $D_x^\alpha := D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$ com $D_{x_j}^k := \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k$.

(ix) $D_x^{(\alpha)} := D_{x_1}^{(\alpha_1)} \cdots D_{x_n}^{(\alpha_n)}$ com $D_{x_\ell}^{(k+1)} := \prod_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\ell} - j\right)$.

(x) $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$;

(xi) por fim, $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{1/2}$ em que $|x| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ indica a norma Euclidiana de x.

Observação 1.1 *A ideia de empregarmos $\langle x \rangle$ é obter uma função que comporta-se assintoticamente como a função modular quando $|x| \to \infty$, porém, suave e nunca nula.*

A notação de multi-índice nos permite escrever a expansão de Taylor em $\mathbb{R}^n$ de uma maneira elegante e concisa:

Teorema 1.1 (Expansão de Taylor em $\mathbb{R}^n$) *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ então,*

$$u(x+y) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(x,y), \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, sendo,

$$r_\alpha(x,y) = \frac{k}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha u(x+ty)\ dy. \tag{1.2}$$

Também podemos expressar a fórmula binomial em $\mathbb{R}^n$ em termos de multi-índices.

Teorema 1.2 (Fórmula Binomial) *Se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ então quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta}. \tag{1.3}$$

Em particular, $\displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$.

O teorema acima possui uma extensão natural conhecida como *teorema multinomial* a qual será de uso recorrente.

Teorema 1.3 (Teorema Multinomial) *Se $p \in \mathbb{N}_0$ então,*

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} x^\alpha, \tag{1.4}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$.

Uma consequência do teorema acima é:

Proposição 1.1 *Se* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \in \mathbb{N}_0^n$ *então,*

$$\langle x \rangle^{2p} = \sum_{|\alpha| \le p} \frac{p!}{\alpha!(m - |\alpha!|)} x^{2\alpha}.$$

Também será de grande utilidade a fórmula de Leibnitz:

Teorema 1.4 (Fórmula de Leibnitz) *Para quaisquer* $u, v \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v). \tag{1.5}$$

Para ilustar o emprego da notação de multi-índices tratamos do operador Laplaciano em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1 (Operador Laplaciano) *O operador Laplaciano em* $\mathbb{R}^n$ *é definido por,*

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{1.6}$$

Definimos também a seguinte variação do operador acima:

$$\overline{\Delta} = I - \frac{1}{4\pi^2} \Delta. \tag{1.7}$$

O exemplo abaixo traz uma identidade que será útil posteriormente:

Exemplo 1.1 Pelo teorema (1.4),

$$\Delta^p := \sum_{|\alpha| = p} \frac{p!}{\alpha!} \partial_x^{2\alpha},$$

qualquer que seja $p \in \mathbb{N}_0$. Agora, combinando-se (1.3) e (1.4) podemos escrever,

$$\overline{\Delta}^q = \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\alpha| = p} \binom{q}{p} \frac{p!}{\alpha!} \frac{(-1)^p}{(4\pi^2)^p} \partial_x^{2\alpha} \tag{1.8}$$

Assim, por exemplo,

$$\overline{\Delta}^q e^{-2\pi i x \cdot \xi} \quad = \quad \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\alpha| = p} \binom{q}{p} \frac{p!}{\alpha!} \frac{(-1)^p}{(4\pi^2)^p} \partial_x^{2\alpha} e^{-2\pi i x \cdot \xi}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\alpha|=p} \binom{q}{p} \frac{p!}{\alpha!} \frac{(-1)^p}{(4\pi^2)^p} (-2\pi i)^{2|\alpha|} \xi^{2\alpha} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi} \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\alpha|=p} \binom{q}{p} \frac{p!}{\alpha!} \xi^{2\alpha} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi} \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \xi^{2\alpha} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi} \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} |\xi|^{2p} \\
&= (1+|\xi|^2)^q e^{-2\pi i x\cdot\xi} \\
&= \langle\xi\rangle^{2q} e^{-2\pi i x\cdot\xi},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\overline{\Delta}^q e^{-2\pi i x\cdot\xi} = \langle\xi\rangle^{2q} e^{-2\pi i x\cdot\xi}. \tag{1.9}
$$

1.2 Análise de Fourier em $\mathbb{T}^n$

Nesta seção tratamos da análise de Fourier em $\mathbb{T}^n$. Iniciamos com a construção do toro n-dimensional e com o estudo das funções definidas neste espaço. Em seguida, introduzimos os espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$ e $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ de maneira análoga ao caso euclidiano. Definimos então a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{T}^n)$ e estudamos seu comportamento sobre o espaço de Schwartz. Após isto, introduzimos as distribuições periódicas e por fim definimos os espaços de Sobolev periódicos. As demonstrações dos resultados desta seção podem ser consultadas nas referências [2], [1], [6] ou [12].

1.2.1 $\mathbb{T}^n$ e Funções Teste Periódicas

Iniciamos construindo o espaço sobre o qual desenvolveremos grande parte da teoria, a saber, o toro. *Grosso modo*, o *n-toro* ou *toro n-dimensional* é o cubo unitário $[0,1]^n$ com lados opostos identificados. Façamos esta construção de maneira formal.

Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ escreva $x \equiv y$ se $x - y \in \mathbb{Z}^n$, sendo $\mathbb{Z}^n$ o subgrupo aditivo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ com coordenadas inteiras. Claramente $\equiv$ é uma relação de equivalência, e a classe de equivalência de um elemento $x \in \mathbb{R}^n$ é,

$$
\begin{aligned}
[x] &:= \{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= \{y \in \mathbb{R}^n : y - x = z, z \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= \{x + z,\ z \in \mathbb{Z}^n\} \\
&= x + \mathbb{Z}^n.
\end{aligned}
$$

Com isto definimos o toro n-dimensional:

Definição 1.2 (Toro n-Dimensional) *O* toro n-dimensional *ou* n-toro *é, por definição, o espaço quociente* $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *munido da topologia quociente.*

Observação 1.2 *A aplicação* $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ *definida por,*

$$\phi([x]) = (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}),$$

é um homeomorfismo e, portanto, $\mathbb{T}^n$ *é compacto.*

Observação 1.3 *Podemos identificar, de maneira natural, funções definidas sobre o* n*-toro com funções* 1*-periódicas definidas sobre* $\mathbb{R}^n$*. Seja* $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ *e defina* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *por* $g(x) = f([x])$*. Note que* g *está bem definida pois se* $x \equiv y$ *em* $\mathbb{R}^n$ *então,*

$$g(y) = f([y]) = f([x]) = g(x).$$

Além do mais, a igualdade,

$$g(x+k) = f([x+k]) = f([x]) = g(x),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$*, significa que a função* g *é* 1*-periódica em* $\mathbb{R}^n$*. Não faremos distinção entre* f *e* g *e escreveremos, por exemplo,* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$*,* $f \in C^k(\mathbb{T}^n)$ *etc., para indicar que* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*,* $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$*, etc., são* 1*-periódicas.*

De especial interesse é o espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, constituído pelas funções $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis, pois este será importante na construção do espaço das funções teste para as distribuições periódicas, como veremos adiante.

A família enumerável de semi-normas $p_k : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow [0, \infty)$ definida, para cada $k \in \mathbb{N}$, por,

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty,$$

induz uma topologia sobre o espaço $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ segundo a qual este espaço é de Fréchet. Na expressão acima usamos a notação,

$$\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Para fatos mais gerais sobre espaços de Fréchet o leitor pode consultar [5]. A família $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ induz a seguinte noção de convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$:

Definição 1.3 ***(Convergência em** $C^\infty(\mathbb{T}^n)$**)*** *Uma sequência* (φ_j) *em* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *converge para uma função* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *se* $p_k(\varphi_j) \to p_k(\varphi)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

De modo geral, empregamos a seguinte caracterização da convergência em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 1.5 *Uma sequência* (φ_j) *em* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *converge para uma função* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *se, e somente se,* $\|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \to 0$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Observação 1.4 *Pelo teorema anterior dizer que uma sequência* (φ_j) *converge em* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *para uma função* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *equivale a dizer que* $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ *uniformemente para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

1.2.2 Espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$ e $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$

Os espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$ e $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ são definidos de maneira análoga ao caso de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4 (Espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$) *O espaço* $L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *consiste das funções (Lebesgue) mensuráveis* $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ *satisfazendo,*

$$\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \; dx < \infty.$$

Igualmente, $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ *consiste das funções (Lebesgue) mensuráveis* $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ *cuja medida de Lebesgue do conjunto* $\{x \in \mathbb{T}^n : |f(x)| > B\}$ *é nula para algum* B *real.*

Os espaços $L^p(\mathbb{T}^n)$ e $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ são espaços normados com normas,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} := \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \; dx \right)^{1/p} \text{ e } \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} := \text{sup ess}_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)|,$$

em que $\text{sup ess}_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)|$ é o menor M tal que $|f(x)| \leq M$, para quase todo ponto $x \in \mathbb{T}^n$.

Observação 1.5 *Note que* $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *se, e somente se,* $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} < \infty$.

Definição 1.5 (Espaços $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$) *O espaço* $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *consiste das sequências* $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ *satisfazendo,*

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\varphi(\xi)|^p < \infty.$$

O espaço $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ *consiste das sequências* $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ *satisfazendo,*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\varphi(\xi)| < \infty.$$

Observação 1.6 (Séries Indexadas em $\mathbb{Z}^n$) *Trataremos de muitas séries da forma* $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)$, *em que* $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. *Dizer que uma tal série converge, significa que existe o limite das somas parciais* $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \sum_{|\xi| \leq k} \varphi(\xi)$.

Os espaços $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ são espaços normados com normas,

$$\|\varphi\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)} := \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(\xi)|^p\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)} := \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(\xi)|.$$

De importância fundamental é o espaço $L^2(\mathbb{T}^n)$ pois este é um espaço de Hilbert com o produto interno,

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Para mais informações sobre as propriedades de $L^2(\mathbb{T}^n)$ indicamos a referência [6].

Na seção seguinte veremos algumas relações do espaço $L^2(\mathbb{T}^n)$ com a transformada de Fourier.

1.2.3 Transformada de Fourier em $\mathbb{T}^n$

A seguir introduzimos a transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{T}^n)$. Para mais detalhes ver [2] ou [12].

Definição 1.6 (Transformada de Fourier) *A* transformada de Fourier toroidal *de uma função $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ é a sequência $\hat{f} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ definida por,*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx.$$

Escrevemos por vezes $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ em lugar de $\hat{f}$ para indicar que estamos tratando da transformada de Fourier toroidal. Em contraste, iremos escrever, por vezes, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ para indicar a transformada de Fourier Euclidiana.

Proposição 1.2 *Se $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ então $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$.*

Teorema 1.6 (Fórmula de Inversão) *Se $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ e $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\xi)| < \infty$ então,*

$$f(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}, \tag{1.10}$$

em quase todo ponto $x \in \mathbb{T}^n$.

Prova: Ver [2]. ∎

Observação 1.7 *Como $\mathbb{T}^n$ possui medida finita, então $L^2(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$, e portanto a transformada de Fourier também está bem definida em $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

É um fato bem conhecido que a coleção $\{e_\xi : \xi \in \mathbb{Z}^n\}$ em que $e_\xi(x) := e^{2\pi i x\cdot\xi}$ é um conjunto ortonormal total de $L^2(\mathbb{T}^n)$. Deste fato segue imediatamente:

Proposição 1.3 *Se $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ então:*

(i) (Identidade de Parseval)

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

(ii) (Convergência em Norma)

$$\lim_{m\to\infty} \|f - \sum_{|\xi|\leq m} \hat{f}(\xi)e_\xi\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} = 0.$$

(iii) (Identidade de Plancherel)

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}.$$

(iv) *A aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é uma isometria entre $L^2(\mathbb{T}^n)$ e $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.*

1.2.4 Espaços de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$

Na seção anterior vimos que é possível representar, a menos de um conjunto de medida nula, uma função em $L^1(\mathbb{T}^n)$ por meio de sua série de Fourier desde que a série dos coeficientes de Fourier seja absolutamente convergente. Nesta seção veremos que no caso de funções suaves periódicas é possível obter tal representação em todo ponto. Começamos introduzindo o espaço de Schwartz:

Definição 1.7 (Espaço de Schwartz) *Dizemos que uma sequência $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ é rapidamente decrescente se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existe uma constante $C_{\varphi,M} < \infty$ tal que,*

$$|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-M}, \tag{1.11}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. O espaço vetorial de todas as sequências rapidamente decrescentes, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, chama-se espaço de Schwartz.

Observação 1.8 *A fim de mostrar que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ basta mostrarmos (1.11) para todo $M \in \mathbb{N}_0$ pois se $M' \in \mathbb{R}$ é qualquer podemos obter $M \in \mathbb{N}_0$ tal que $M \geq M'$ e consequentemente $\langle\xi\rangle^{-M} \leq \langle\xi\rangle^{-M'}$ uma vez que $\langle\xi\rangle \geq 1$.*

A família enumerável de semi-normas $p_k : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow [0, \infty)$ definida, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, por,

$$p_k(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k |\varphi(\xi)|,$$

induz uma topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ com a qual este é um espaço de Fréchet. A convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, em termos da família p_k, exprime-se como:

Definição 1.8 ***(Convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$)*** *Uma sequência (φ_j) em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ é convergente se existe uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ tal que,*

$$p_k(\varphi_j - \varphi) = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k |\varphi_j(\xi) - \varphi(\xi)| \to 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 1.7 *Os espaços $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ são isomorfos.*

Prova: Basta observar que a aplicação $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ definida por,

$$\varphi \longmapsto \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) e_\xi,$$

é um isomorfismo linear. Os detalhes podem ser encontrados em [12]. ∎

Em particular, sequências rapidamente decrescentes nos fornecem um modo de obter funções suaves sobre o toro: Dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, a função $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por,

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) e_\xi(x),$$

é suave.

Conceito dual a uma sequência rapidamente decrescente é aquele de uma sequência de crescimento lento:

Definição 1.9 ***(Sequências de Crescimento Lento)*** *Uma sequência $\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é de crescimento lento se existem M e $C_{\varphi,M}$ tais que,*

$$|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi,M} \langle \xi \rangle^M,$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Denotamos o espaço vetorial das sequências de crescimento lento por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

Definição 1.10 ***(Funcionais Lineares Contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$)*** *Um funcional linear $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se $\langle u, \varphi_j \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ em $\mathbb{C}$ sempre que $\varphi_j \to \varphi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

Observação 1.9 *A fim de que $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ seja contínuo é necessário e suficiente que $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$ em $\mathbb{C}$ sempre que $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

Observação 1.10 *Pode-se mostrar que* $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ *é de fato o dual topológico de* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ *e portanto os funcionais lineares contínuos* $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *são (identificados com) sequências de crescimento lento* $u : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$*. A identificação é dada pela aplicação* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n) \mapsto T_u$ *com* T_u *dada por,*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi)\varphi(\xi),$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$*. Não iremos fazer distinção entre* u *e* T_u *e escreveremos* $\langle u, \varphi \rangle$ *em lugar de* $\langle T_u, \varphi \rangle$*.*

Definição 1.11 ***(Distribuições Temperadas)*** *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo* $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$*.*

Em vista da observação (1.10) distribuições temperadas são da forma,

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi)\varphi(\xi),$$

com $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$.

A convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ é a convergência fraca-$*$ de funcionais lineares:

Definição 1.12 ***(Convergência em*** $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$***)*** *Uma sequência* (u_j) *em* $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ *é convergente se existe* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ *tal que* $\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$*, para toda* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$*.*

A importância do espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ será evidenciada na seção seguinte após introduzirmos a transformada de Fourier em espaços mais gerais.

1.2.5 Distribuições Periódicas

O espaço das funções teste sobre um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto $C_c^\infty(\Omega)$ das funções suaves com suporte compacto. Em $\mathbb{T}^n$ o espaço das funções teste é $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Observação 1.11 *Toda função* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *possui suporte compacto pois o suporte é um conjunto fechado do compacto* $\mathbb{T}^n$*.*

Definição 1.13 ***(Funcionais Lineares Contínuos em*** $C^\infty(\mathbb{T}^n)$***)*** *Um funcional linear* $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *é contínuo se* $\langle u, \varphi_j \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ *em* $\mathbb{C}$ *sempre que* $\varphi_j \to \varphi$ *em* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$*.*

Observação 1.12 *A fim de que* $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *seja contínuo é necessário e suficiente que* $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$ *em* $\mathbb{C}$*, sempre que* $\varphi_j \to 0$ *em* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$*.*

Definição 1.14 ***(Distribuições Periódicas)*** *Uma distribuição periódica é um funcional linear contínuo* $u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$*. Denotamos por* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ *o espaço das distribuições periódicas.*

Observação 1.13 *As operações usuais tornam $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial.*

Tal como no caso euclidiano, toda função em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ induz uma distribuição periódica.

Observação 1.14 *Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $u_f : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por,*

$$\langle u_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)\ dx,$$

é uma distribuição periódica. De agora em diante, iremos escrever $\langle f, \varphi\rangle$ em lugar de $\langle u_f, \varphi\rangle$. Mais geralmente, se $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ então a aplicação,

$$\langle u_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)\ dx,$$

define uma distribuição periódica.

Em vista da observação acima podemos considerar a seguinte inclusão $C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Definição 1.15 *Se $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é da forma $v = u_f$, para alguma $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, dizemos que v provém de uma função suave.*

Observação 1.15 *A inclusão $C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é própria, isto é, nem toda distribuição periódica provém de uma função suave. O exemplo clássico deste fato é a delta de Dirac definida da seguinte forma: $\delta : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto \delta(u) := u(0)$, para toda $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.*

A convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é simplesmente a convergência fraca-$*$ de funcionais lineares, isto é:

Definição 1.16 *Uma sequência (u_j) em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é convergente se existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ tal que $\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.*

No teorema abaixo resumimos as principais operações definida no espaço das distribuições:

Teorema 1.8 ***(Operações com Distribuições)*** *Sejam $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$. Então:*

(a) ***(Adição)*** *O funcional linear $u + v : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por,*

$$\langle u + v, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle v, \varphi\rangle,$$

é uma distribuição periódica.

(b) ***(Multiplicação por $C^\infty(\mathbb{T}^n)$)*** *Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então o funcional linear $fu : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por,*

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle,$$

é uma distribuição periódica.

(c) ***(Derivação)*** *Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *o funcional linear* $D^\alpha u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *dado por,*

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle,$$

é uma distribuição periódica.

(d) ***(Translação)*** *O funcional linear* $u_h : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C$ *dado por,*

$$\langle u_h, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_{-h} \rangle,$$

com $\varphi_{-h}(x) = \varphi(x+h)$ *para todo* $x \in \mathbb{T}^n$, *é uma distribuição periódica.*

Vamos definir a transformada de Fourier em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.

Definição 1.17 ***(Transformada de Fourier em*** $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$***)*** *A transformada de Fourier de* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ *é o funcional linear* $\hat{u} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *definido por,*

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \imath \circ \check{\varphi} \rangle,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Na definição acima $\check{\varphi}$ indica a transformada de Fourier inversa e $(\imath \circ \psi)(x) = \psi(-x)$ para toda $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 1.9 *Os espaços* $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ *e* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ *são isomorfos.*

Prova: A aplicação $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ dada por,

$$\varphi \longmapsto \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) e_\xi,$$

é um isomorfismo linear. Os detalhes podem ser encontrados em [12]. ∎

O seguinte diagrama é útil para lembrar as relações entre os espaços que definimos até então:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, "'"'] & \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \arrow[d, "'"] \\
\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \arrow[r, "\widehat{\ }"'] & \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)
\end{tikzcd}$$

Acima $'$ indica que estamos tomando o dual topológico e $\widehat{\ }$ indica que estamos tomando a transformada de Fourier.

1.2.6 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$

Nesta seção introduzimos os espaços de Sobolev periódicos $H^s(\mathbb{T}^n)$ e enunciamos, sem entrar em detalhes, os resultados que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.18 (Espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$) *Se $s \in \mathbb{R}$ definimos o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$ por $H^s(\mathbb{T}^n) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) : \langle\xi\rangle^s \hat{u}(\xi) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)\}$.*

Note que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ é um elemento de $H^s(\mathbb{T}^n)$ se, e somente se,

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} := \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Pode-se mostrar que $\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$ é uma norma em $H^s(\mathbb{T}^n)$ induzida pelo produto interno,

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{T}^n)} := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}.$$

Além disso, $H^s(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Hilbert em relação à métrica induzida por este produto interno.

Teorema 1.10 *Se $s \in \mathbb{R}$ então os espaços $H^s(\mathbb{T}^n)$ e $H^{s+t}(\mathbb{T}^n)$ são isometricamente isomorfos para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova: Ver [7]. ■

De particular importância é o seguinte:

Teorema 1.11 *Se $m \in \mathbb{N}_0$ e $s > m + n/2$ então $H^s(\mathbb{T}^n) \subset C^m(\mathbb{T}^n)$.*

Como consequência obtemos:

Corolário 1.1 *Vale a igualdade $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^n)$.*

Capítulo 2

Análise Discreta

O cálculo de diferenças finitas desempenha na análise discreta um papel análogo ao cálculo diferencial na análise clássica. A derivada usual no contexto contínuo reduz-se a simples diferenças no meio discreto ao passo que a teoria de integração simplifica-se a somas finitas.

Neste capítulo apresentamos uma breve exposição de conceitos elementares do cálculo de diferenças e provamos alguns resultados clássicos da teoria que serão importantes para o desenvolvimento da análise simbólica do capítulo seguinte. Na verdade, este capítulo consiste de mais ferramentas do que iremos precisar, porém, os resultados aqui apresentados são interessantes por si só, o que justifica nossa abordagem. Referências para esta seção são [6], [7],[8] e [10].

2.1 Cálculo de Diferenças Finitas

Para cada aplicação $\sigma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ podemos associar duas novas aplicações,

$$\Delta_{\xi_j}\sigma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \overline{\Delta}_{\xi_j}\sigma : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C},$$

definidas por,

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j}\sigma(\xi) &:= \sigma(\xi + \delta_j) - \sigma(\xi), \\ \overline{\Delta}_{\xi_j}\sigma(\xi) &:= \sigma(\xi) - \sigma(\xi - \delta_j), \end{aligned}$$

sendo δ_j é o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Iremos nos referir aos operadores definidos acima como operadores de diferença.

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ defina,

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^\alpha &:= \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n}, \\ \overline{\Delta}_\xi^\alpha &:= \overline{\Delta}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{\Delta}_{\xi_n}^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Aqui $\Delta_{\xi_j}^{\alpha_i}$ e $\overline{\Delta}_{\xi_j}^{\alpha_i}$ indica que aplicaremos os operadores Δ_{ξ_j} e $\overline{\Delta}_{\xi_j}$ uma quantidade α_i de vezes.

Para cada $\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ podemos associar dois novos operadores,

$$E_j\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \overline{E}_j\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C},$$

definidos por,

$$\begin{aligned} E_j\phi(\xi) &:= (I + \Delta_{\xi_j})\phi(\xi) = \phi(\xi + \delta_j), \\ \overline{E}_j\phi(\xi) &:= (I - \overline{\Delta}_{\xi_j})\phi(\xi) = \phi(\xi - \delta_j). \end{aligned}$$

Assim, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ teremos,

$$\begin{aligned} E^\alpha &:= E_1^{\alpha_1} \cdots E_n^{\alpha_n} \\ \overline{E}^\alpha &:= \overline{E}_1^{\alpha_1} \cdots \overline{E}_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Observação 2.1 *Vale a igualdade $E^\alpha\phi(\xi) = \phi(\xi + \alpha)$ e $\overline{E}^\alpha\phi(\xi) = \phi(\xi - \alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

A proposição a seguir nos fornece algumas relações simples entre os operadores E_j e $\overline{E}_j$ e os operadores de diferença.

Proposição 2.1 *Para cada j, $1 \leq j \leq n$, tem-se:*

(a) $E_j\overline{\Delta}_{\xi_j} = \Delta_{\xi_j} = \overline{\Delta}_{\xi_j}E_j$.

(b) $\overline{E}_j\Delta_{\xi_j} = \overline{\Delta}_{\xi_j} = \Delta_{\xi_j}\overline{E}_j$.

Prova: (a) Para cada $\sigma : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tem-se $E_j\overline{\Delta}_{\xi_j}\phi(\xi) = \overline{\Delta}_{\xi_j}\phi(\xi + \delta_j) = \overline{\Delta}_{\xi_j}E_j\phi(\xi)$ e,

$$E_j\overline{\Delta}_{\xi_j}\phi(\xi) = \overline{\Delta}_{\xi_j}\phi(\xi + \delta_j) = \phi(\xi + \delta_j) - \phi(\xi) = \Delta_{\xi_j}\phi(\xi),$$

o que prova (a). A prova de (b) é análoga. ∎

A seguir obtemos fórmulas explícitas para Δ_ξ^α e $\overline{\Delta}_\xi^\alpha$.

Teorema 2.1 ***(Fórmulas para Δ_ξ^α e $\overline{\Delta}_\xi^\alpha$)*** *Se $\phi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ então,*

$$\Delta_\xi^\alpha\phi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha}(-1)^{|\alpha-\beta|}\binom{\alpha}{\beta}\phi(\xi + \beta) \tag{2.1}$$

$$\overline{\Delta}_\xi^\alpha\phi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha}(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}\phi(\xi - \beta). \tag{2.2}$$

Prova: Como $\Delta_{\xi_j} = E_j - I$, então $\Delta_\xi^\alpha = (E-I)^\alpha$ e pela fórmula binomial (1.3) obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi^\alpha \phi(\xi) &= (E-I)^\alpha \phi(\xi) \\
&= \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-I)^{\alpha-\beta} E^\beta \phi(\xi) \\
&= \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} E^\beta \phi(\xi) \\
&= \sum_{\beta\leq\alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \phi(\xi+\beta)
\end{aligned}$$

Analogamente, de $\overline{\Delta}_{\xi_j} = I - \overline{E}_j$ teremos,

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi(\xi) &= (I-\overline{E})^\alpha \phi(\xi) \\
&= \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\alpha}{\beta} (-\overline{E})^{\beta} \phi(\xi) \\
&= \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|} \overline{E}^\beta \phi(\xi) \\
&= \sum_{\alpha\leq\beta} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \phi(\xi-\beta),
\end{aligned}$$

provando assim o resultado. ∎

Os operadores de diferença comportam-se de maneira análoga aos operadores derivação também com respeito ao produto:

Teorema 2.2 ***(Fórmula de Leibnitz Discreta)*** *Se $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ então,*

$$\Delta_\xi^\alpha(\varphi\psi)(\xi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Delta_\xi^\beta \varphi(\xi) \Delta_\xi^{\alpha-\beta} \psi(\xi+\beta) \tag{2.3}$$

$$\overline{\Delta}_\xi^\alpha(\varphi\psi)(\xi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \overline{\Delta}_\xi^\beta \varphi(\xi) \overline{\Delta}_\xi^{\alpha-\beta} \psi(\xi-\beta). \tag{2.4}$$

Prova: Vamos mostrar apenas (2.3) pois de maneira análoga mostra-se (2.4). Se $\alpha = \delta_j$ então,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_j}(\varphi\psi)(\xi) &= (\varphi\psi)(\xi+\delta_j) - (\varphi\psi)(\xi) \\
&= \varphi(\xi+\delta_j)\psi(\xi+\delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= \varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi) + \varphi(\xi+\delta_j)\psi(\xi+\delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j) \\
&= \varphi(\xi)[\psi(\xi+\delta_j) - \psi(\xi)] + [\varphi(\xi+\delta_j) - \varphi(\xi)]\psi(\xi+\delta_j) \\
&= \varphi(\xi)\Delta_{\xi_j}\psi(\xi) + \Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j).
\end{aligned}$$

Procedamos por indução sobre o comprimento de $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}(\varphi\psi)(\xi) &= \Delta_{\xi_j}\Delta_\xi^\alpha(\varphi\psi)(\xi)\\
&= \Delta_{\xi_j}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\Delta_\xi^\beta\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha-\beta}\psi(\xi+\beta)\\
&= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left[\Delta_\xi^\beta\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\beta}\psi(\xi+\beta) + \Delta_\xi^{\beta+\delta_j}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha-\beta}\psi(\xi+\beta+\delta_j)\right]\\
&= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\Delta_\xi^\beta\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\beta}\psi(\xi+\beta) + \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\Delta_\xi^{\beta+\delta_j}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha-\beta}\psi(\xi+\beta+\delta_j)\\
&= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\Delta_\xi^\beta\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\beta}\psi(\xi+\beta) + \sum_{\gamma\le\alpha+\delta_j}\binom{\alpha}{\gamma-\delta_j}\Delta_\xi^\gamma\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\gamma}\psi(\xi+\gamma)\\
&= \sum_{\beta\le\alpha+\delta_j}\left[\binom{\alpha}{\beta}+\binom{\alpha}{\beta-\delta_j}\right]\Delta_\xi^\beta\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\beta}\psi(\xi+\beta)\\
&= \sum_{\beta\le\alpha+\delta_j}\binom{\alpha+\delta_j}{\beta}\Delta_\beta^\xi\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j-\beta}\psi(\xi+\beta).
\end{aligned}$$

Acima usamos a convenção $\binom{\alpha}{\gamma} = 0$ se $\gamma > \alpha$ ou se $\gamma \notin \mathbb{N}_0^n$. ■

As relações dadas abaixo são um caso análogo da integração por partes da análise clássica.

Teorema 2.3 ***(Soma por Partes)*** *Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ tais que a série $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\psi(\xi)$ é absolutamente convergente ou finita. Então, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tem-se:*

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi), \tag{2.5}$$

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\overline{\Delta}_\xi^\alpha\psi(\xi) = (-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi). \tag{2.6}$$

Prova: Provaremos apenas (2.5) pois a outra identidade prova-se de maneira análoga. Se $\alpha = \delta_j$ então,

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_{\xi_j}\psi(\xi) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}[\psi(\xi+\delta_j)-\psi(\xi)]\varphi(\xi)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\psi(\xi+\delta_j)\varphi(\xi) - \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\psi(\xi)\varphi(\xi)\\
&= \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^n}\psi(\zeta)\varphi(\zeta-\delta_j) - \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\psi(\xi)\varphi(\xi)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}[\psi(\xi)\varphi(\xi-\delta_j) - \psi(\xi)\varphi(\xi)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)[-\varphi(\xi)+\varphi(\xi-\delta_j)] \\
&= (-1)^{|\delta_j|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)\overline{\Delta}_{\xi_j}\varphi(\xi).
\end{aligned}
$$

Agora, usando a fórmula de Leibnitz (2.3) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\xi_j}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}(\varphi\Delta_\xi^\alpha\psi)(\xi) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}[\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}\psi(\xi)+\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi+\delta_j)] \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}\psi(\xi)+\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi+\delta_j) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}\psi(\xi)+(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j),
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}\psi(\xi) &= \Delta_{\xi_j}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi) \\
&\quad -(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Pela hipótese de indução e novamente pela regra de Leibnitz,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\xi_j}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^\alpha\psi(\xi) &= \Delta_{\xi_j}(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}[(\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi)\psi](\xi) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\Delta_{\xi_j}\psi(\xi) \\
&\quad +(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j) \\
&= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\delta_j|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_{\xi_j}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&\quad +(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j) \\
&= (-1)^{|\alpha+\delta_j|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^{\alpha+\delta_j}\varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&\quad +(-1)^{|\alpha|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\Delta_{\xi_j}\overline{\Delta}_\xi^\alpha\varphi(\xi)\psi(\xi+\delta_j).
\end{aligned}
$$

Voltando a (2.7) resulta,

$$
\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\Delta_\xi^{\alpha+\delta_j}\psi(\xi) = (-1)^{|\alpha+\delta_j|}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\overline{\Delta}_\xi^{\alpha+\delta_j}\varphi(\xi)\psi(\xi).
$$

O resultado segue observando-se que $\overline{\Delta}_\xi^\alpha \Delta_{\xi_j} = \Delta_{\xi_j} \overline{\Delta}_\xi^\alpha$. ■

2.2 Polinômios em $\mathbb{Z}^n$

A primeira coisa que observamos a respeito dos polinômios usuais é que, em geral, $\Delta_\theta^\gamma \theta^\alpha \neq c_{\alpha\gamma}\theta^{\alpha-\gamma}$ qualquer que seja a constante $c_{\alpha\gamma}$. Vamos introduzir uma nova classe de polinômios que possui esta propriedade bem conhecida do cálculo diferencial.

Definição 2.1 ***(Polinômios Discretos)*** *Sejam $\theta \in \mathbb{Z}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Definimos então $\theta^{(\alpha)} = \theta_1^{(\alpha_1)} \cdots \theta_n^{(\alpha_n)}$, sendo $\theta_j^{(0)} = 1$ e,*

$$\theta_\ell^{(\alpha_\ell)} := \prod_{j=0}^{\alpha_\ell - 1} (\theta_\ell - j),$$

para todo $\ell = 1, \ldots, n$. Chamamos $\theta^{(\alpha)}$ de polinômio discreto.

O primeiro resultado que provaremos referente a esta nova classe de polinômios justifica a definição acima.

Proposição 2.2 *Se $\theta \in \mathbb{Z}^n$ então $\Delta_\theta^\gamma \theta^{(\alpha)} = \alpha^{(\gamma)}\theta^{(\alpha-\gamma)}$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.*

Prova: Primeiro vamos mostrar que $\Delta_{\theta_j}\theta_j^{(\alpha_j)} = \alpha_j \theta_j^{(\alpha_j - 1)}$ para $\alpha_j \geq 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta_j}\theta_j^{(\alpha_j)} &= \prod_{\ell=0}^{\alpha_j-1}(\theta_j + 1 - \ell) - \prod_{\ell=0}^{\alpha_j-1}(\theta_j - \ell) \\
&= (\theta_j + 1)\prod_{\ell=1}^{\alpha_j-1}(\theta_j + 1 - \ell) - \prod_{\ell=0}^{\alpha_j-2}(\theta_j - \ell)(\theta_j - \alpha_j + 1) \\
&= (\theta_j + 1)\prod_{\ell=0}^{\alpha_j-2}(\theta_j - \ell) - \prod_{\ell=0}^{\alpha_j-2}(\theta_j - \ell)(\theta_j - \alpha_j + 1) \\
&= \alpha_j \prod_{\ell=0}^{\alpha_j-2}(\theta_j - \ell) \\
&= \alpha_j \theta^{(\alpha_j - 1)}.
\end{aligned}$$

O caso geral é feito por indução sobre o comprimento de $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Se $\gamma = \delta_j$ então,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta_j}\theta^{(\alpha)} &= (\theta + \delta_j)^{(\alpha)} - \theta^{(\alpha)} \\
&= \prod_{\ell=1}^{n}(\theta_\ell + \delta_{j\ell})^{(\alpha_\ell)} - \prod_{\ell=1}^{n}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)} \\
&= \prod_{\ell=1}^{j-1}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)} \prod_{\ell=j+1}^{n} \theta_\ell^{(\alpha_\ell)}(\theta_j + 1)^{(\alpha_j)} - \prod_{\ell=1}^{j-1}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)} \prod_{\ell=j+1}^{n} \theta_\ell^{(\alpha_\ell)}\theta_j^{(\alpha_j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\ell=1}^{j-1}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)}\prod_{\ell=j+1}^{n}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)}[(\theta_j+1)^{(\alpha_j)}-\theta_j^{(\alpha_j)}]\\
&= \prod_{\ell=1}^{j-1}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)}\prod_{\ell=j+1}^{n}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)}\Delta_{\theta_j}\theta_j^{(\alpha_j)}\\
&= \alpha_j\prod_{\ell=1}^{n}\theta^{(\alpha-\delta_{j\ell})}\\
&= \alpha_j\theta_j^{(\alpha_j-\delta_{jj})}\prod_{\ell=1}^{j-1}\theta_\ell^{(\alpha_\ell-\delta_{j\ell})}\prod_{\ell=j+1}^{n}\theta_\ell^{(\alpha_\ell-\delta_{j\ell})}\\
&= \alpha_j\theta^{(\alpha-\delta_j)}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta^{\gamma+\delta_j}\theta^{(\alpha)} &= \Delta_{\theta_j}\Delta_\theta^\gamma\theta^{(\alpha)}\\
&= \alpha^{(\gamma)}\Delta_{\theta_j}\theta^{(\alpha-\gamma)}\\
&= \alpha^{(\gamma)}(\alpha_j-\gamma_j)\theta^{(\alpha-\gamma-\delta_j)}\\
&= \alpha^{(\gamma+\delta_j)}\theta^{(\alpha-(\gamma+\delta_j))},
\end{aligned}$$

provando assim o resultado. ■

Observação 2.2 *Podemos escrever um polinômio discreto da seguinte forma:*

$$\theta^{(\alpha)} = \alpha!\binom{\theta}{\alpha}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha!\binom{\theta}{\alpha} &= \frac{\theta!}{(\theta-\alpha)!} = \prod_{\ell=1}^{n}\frac{\theta_\ell!}{(\theta_\ell-\alpha_\ell)!}\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\frac{\theta_\ell(\theta_\ell-1)\cdots(\theta_\ell-\alpha_\ell+1)(\theta_\ell-\alpha_\ell)!}{(\theta_\ell-\alpha_\ell)!}\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\prod_{i=0}^{\alpha_\ell-1}(\theta_\ell-i)\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\theta_\ell^{(\alpha_\ell)}\\
&= \theta^{(\alpha)}.
\end{aligned}$$

2.3 Teorema Fundamental do Cálculo Discreto

Nesta seção mostramos um resultado análogo ao teorema fundamental do cálculo para o caso discreto. Começamos introduzindo a seguinte notação: Seja b um inteiro não negativo e defina,

$$I_k^b := \sum_{0\leq k<b} \text{ e } I_k^{-b} := -\sum_{-b\leq k<0}.$$

Vamos adotar a seguinte convenção,

$$I_{k_1}^{\theta} I_{k_2}^{k_1} \cdots I_{k_\alpha}^{k_{\alpha-1}} 1 = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ I_{k_1}^{\theta} 1 & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ I_{k_1}^{\theta} I_{k_2}^{k_1} 1 & \text{se} \quad \alpha = 2, \end{cases}$$

e assim por diante. Podemos pensar em $I_\xi^\theta \cdots$ como uma versão discreta da integral $\int_0^\theta \ldots d\xi$.

Lema 2.1 ***(Teorema Fundamental do Cálculo Discreto)*** *Se $\theta, \alpha \in \mathbb{N}_0$ então,*

$$I_{k_1}^{\theta} I_{k_2}^{k_1} \cdots I_{k_\alpha}^{k_{\alpha-1}} 1 = \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)}.$$

Prova: Primeiro observe que,

$$I_k^b \Delta_k k^{(i)} = \sum_{0\leq k<b} [(k+1)^{(i)} - k^{(i)}] = b^{(i)} - 0^{(i)} = b^{(i)},$$

pois a soma acima é telescópica. Note que,

$$k_{n-j}^{(\ell)} = \frac{1}{(\ell+1)} \Delta_{k_{n-j}} k_{n-j}^{(\ell+1)}.$$

Por recorrência, vemos que,

$$\begin{aligned}
I_{k_1}^{\theta} I_{k_2}^{k_1} \cdots I_{k_\alpha}^{k_{\alpha-1}} 1 &= \prod_{j=1}^{\alpha} I_{k_j}^{k_{j-1}} \Delta_{k_\alpha} k_\alpha^{(1)} = \prod_{j=1}^{\alpha-1} I_{k_j}^{k_{j-1}} k_{\alpha-1}^{(1)} \\
&= \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{\alpha-1} I_{k_j}^{k_{j-1}} \Delta_{k_{\alpha-1}} k_{\alpha-1}^{(2)} = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{\alpha-2} I_{k_j}^{k_{j-1}} k_{\alpha-2}^{(2)} \\
&= \frac{1}{3\cdot 2} \prod_{j=1}^{\alpha-2} I_{k_j}^{k_{j-1}} \Delta_{k_{\alpha-2}} k_{\alpha-2}^{(3)} = \frac{1}{3\cdot 2} \prod_{j=1}^{\alpha-3} I_{k_j}^{k_{j-1}} k_{\alpha-3}^{(3)} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)!} I_{k_1}^{\theta} k_{\alpha-(\alpha-1)}^{(\alpha-1)} \\
&= \frac{1}{\alpha\cdot(\alpha-1)!} I_{k_1}^{\theta} \Delta_{k_{\alpha-(\alpha-1)}} k_{\alpha-(\alpha-1)}^{(\alpha)} \\
&= \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)},
\end{aligned}$$

e a prova está completa. ∎

Observação 2.3 *Note que se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ então,*

$$\begin{aligned} I_\xi^\theta \Delta_\xi f(\xi) &= \sum_{0\leq \xi < \theta} [f(\xi+1) - f(\xi)] \\ &= f(\theta) - f(0), \end{aligned}$$

pois a soma acima é telescópica. Deste modo podemos pensar no resultado anterior como uma versão discreta do teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^\theta f^{'}(\xi)\, d\xi = f(\theta) - f(0),$$

para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suficientemente regular.

Corolário 2.1 ***(Teorema Fundamental do Cálculo Discreto)*** *Se $\theta \in \mathbb{Z}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ então,*

$$\prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} 1 = \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)},$$

em que $\prod\limits_{j=1}^n I_j$ significa $I_1 I_2 \cdots I_n$, e $I_j := I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)}$.

Prova: Se $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ então pelo teorema anterior,

$$I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} 1 = \frac{1}{\alpha_j!}\theta_j^{(\alpha_j)},$$

logo,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} 1 &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j!}\theta_j^{(\alpha_j)} \\ &= \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}\theta_1^{(\alpha_1)} \cdots \theta_n^{(\alpha_n)} \\ &= \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)}, \end{aligned}$$

o que encerra a prova. ■

Teorema 2.4 ***(Expansão de Taylor Discreta em $\mathbb{Z}^n$)*** *Se $p : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ então podemos escrever,*

$$p(\xi+\theta) = \sum_{|\alpha|<M} \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi) + r_M(\xi,\theta), \tag{2.8}$$

com resto satisfazendo,

$$|\Delta_\xi^\omega r_M(\xi,\theta)| \leq C_M \max_{|\alpha|=M, \nu\in Q(\theta)} \left|\theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^{\alpha+\omega} p(\xi+\nu)\right|, \tag{2.9}$$

onde $Q(\theta) := \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_j| \leq |\theta_j|,\ \forall j = 1, \ldots, n\}$ e $\omega \in \mathbb{N}_0^n$.

Prova: Para fixar idéias provaremos apenas o caso $n = 1$. O caso geral segue as mesmas linhas e pode ser encontrada em [6]. Neste caso, afirmamos que,

$$r_M(\xi,\theta) = \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M p(\xi + k_M). \tag{2.10}$$

Verifiquemos então que $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ possui a expansão (2.8) com resto dado por (2.10). Indutivamente observamos que o resultado vale para $M = 1$ uma vez que:

$$\begin{aligned} p(\xi+\theta) &= p(\xi) + p(\xi+\theta) - p(\xi) \\ &= p(\xi) + I_{k_1}^{\theta}\Delta_\xi p(\xi + k_1) \\ &= p(\xi) + r_1(\xi,\theta). \end{aligned}$$

Agora supondo,

$$p(\xi+\theta) = \sum_{\alpha=0}^{M-1} \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)}\Delta_\xi^\alpha p(\xi) + r_M(\xi,\theta), \tag{2.11}$$

devemos mostrar que,

$$p(\xi+\theta) = \sum_{\alpha=0}^{M} \frac{1}{\alpha!}\theta^{(\alpha)}\Delta_\xi^\alpha p(\xi) + r_{M+1}(\xi,\theta). \tag{2.12}$$

Assim, o problema reduz-se a mostrar que,

$$r_M(\xi,\theta) = \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M p(\xi) + r_{M+1}(\xi,\theta), \tag{2.13}$$

pois se $r_M(\xi,\theta)$ é como acima, substituindo-se em (2.11) obtemos (2.12). A identidade (2.13) prova-se como segue:

$$\begin{aligned} r_M(\xi,\theta) - \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M p(\xi) &= \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M p(\xi+k_M) - \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M p(\xi) \\ &= \frac{1}{M!}\theta^{(M)}\Delta_\xi^M (p(\xi+k_M) - p(\xi)) \\ &= \frac{1}{M!}\theta^{(M)} I_{k_{M+1}}^{k_M}\Delta_\xi^{M+1} p(\xi + k_{M+1}) \\ &= \frac{1}{(M+1)!}\theta^{(M+1)}\Delta_\xi^{M+1} p(\xi + k_{M+1}) \\ &= r_{M+1}(\xi,\theta). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} |\Delta_\xi^\omega r_M(\xi,\theta)| &= \frac{1}{M!}|\theta^{(M)}||\Delta_\xi^{M+\omega} p(\xi+k_M)| \\ &\leq \frac{1}{M!}|\theta^{(M)}| \max_{\nu\in\{0,\ldots,\theta\}} |\Delta_\xi^{M+\omega} p(\xi+\nu)|. \end{aligned}$$

■

Observação 2.4 *Para uma prova alternativa de que $p : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ possui a expansão* (2.8)*, usando técnicas de equações de diferenças finitas, o leitor pode consultar por exemplo* [6]*, pg. 315.*

2.4 Desigualdades Discretas

Nesta seção iremos mostrar algumas desigualdades que serão de utilidade no próximo capítulo.

Iniciamos relembrando a conhecida desigualdade de Young:

Proposição 2.3 ***(Desigualdade de Young)*** *Seja $p, q \in (1, \infty)$ expoentes conjugados, isto é, $1/p + 1/q = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para todo $a, b > 0$.

Usando isto mostramos:

Teorema 2.5 *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ expoente conjugados, i.e., números reais tais que $1/p + 1/q = 1$. Se $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^n)$ e $g \in \ell^q(\mathbb{Z}^n)$ então,*

$$\|fg\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.$$

Prova: Suponha inicialmente que $\|f\|_{\ell^p} = \|g\|_{\ell^q} = 1$. Pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\xi| \leq k} |f(\xi)||g(\xi)| &\leq \sum_{|\xi| \leq k} \frac{|f(\xi)|^p}{p} + \sum_{|\xi| \leq k} \frac{|g(\xi)|^q}{q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{|\xi| \leq k} |f(\xi)|^p + \frac{1}{q} \sum_{|\xi| \leq k} |g(\xi)|^q \\
&\leq \frac{1}{p} \|f\|_{\ell^p} + \frac{1}{q} \|g\|_{\ell^q} \\
&= \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.
\end{aligned}$$

A sequência a esquerda é monótona e limitada logo convergente, assim,

$$\|fg\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p} \|g\|_{\ell^q}.$$

Se $f = 0$ ou $g = 0$ o resultado é imediato, logo, podemos supor f e g não nulas. Defina $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ por,

$$\tilde{f}(\xi) = \|f\|_{\ell^p}^{-1} f(\xi) \text{ e } \tilde{g}(\xi) = \|g\|_{\ell^q}^{-1} g(\xi).$$

Então $\tilde{f} \in \ell^p$, $\tilde{g} \in \ell^q$ e ambas de norma unitária logo $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_{\ell^1} \leq 1$ e,

$$\frac{1}{\|f\|_{\ell^p}\|g\|_{\ell^q}}\|fg\|_{\ell^1} = \|\tilde{f}\tilde{g}\|_{\ell^1} \leq 1,$$

e portanto $\|fg\|_{\ell^1} \leq \|f\|_{\ell^p}\|g\|_{\ell^q}$. O caso em que $f \in \ell^\infty$ ou $g \in \ell^\infty$ é de fácil verificação. ∎

Teorema 2.6 ***(Desigualdade de Young Discreta)*** *Suponha que $h : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ é uma função satisfazendo:*

$$C_1 := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta, \xi)| < \infty, \quad C_2 := \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta, \xi)| < \infty.$$

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Para qualquer sequência $f \in \ell^p$ defina $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ por

$$g(\eta) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} h(\eta, \xi) f(\xi).$$

Então,

$$\|g\|_{\ell^p} \leq C_1^{1/p} C_2^{1/q} \|f\|_{\ell^q},$$

em que q é o expoente conjugado de p, i.e., $1/p + 1/q = 1$.

Prova: Usando o teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)||f(\xi)| &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \left[|h(\eta,\xi)|^{1/p}|f(\xi)|\right]\left[|h(\eta,\xi)|^{1/q}\right] \\
&\leq \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)||f(\xi)|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)|\right]^{1/q} \\
&\leq \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)||f(\xi)|^p\right]^{1/p} C_2^{1/q}.
\end{aligned}$$

Com isto obtemos,

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\ell^p}^p &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \left|\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} h(\eta,\xi) f(\xi)\right|^p \\
&\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi) f(\xi)|\right]^p \\
&\leq C_2^{p/q} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)||f(\xi)|^p \\
&= C_2^{p/q} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |f(\xi)|^p \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} |h(\eta,\xi)| \\
&\leq C_1 C_2^{p/q} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |f(\xi)|^p
\end{aligned}$$

$$= \quad (C_1^{1/p} C_2^{1/q})^p \|f\|_{\ell^p}^p.$$

∎

A seguinte desigualdade, creditada a Peetre, será utilizada com frequência no capítulo seguinte.

Teorema 2.7 ***(Desigualdade de Peetre)*** *Para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, temos,*

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}. \tag{2.14}$$

Prova: Começamos observando que,

$$\begin{aligned} \langle \xi + \eta \rangle^2 &\leq \langle \xi \rangle^2 + 2|\xi||\eta| + \langle \eta \rangle^2 \\ &\leq \langle \xi \rangle^2 + 2\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle + \langle \eta \rangle^2 \\ &= (\langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle)^2, \end{aligned}$$

e portanto $\langle \xi + \eta \rangle \leq \langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle$. Agora como $\langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle \geq 1$ vemos que $\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \geq \langle \xi \rangle, \langle \eta \rangle$ e portanto $\langle \xi + \eta \rangle \leq \langle \xi \rangle + \langle \eta \rangle \leq 2\langle \xi \rangle \langle \eta \rangle$. Consequentemente, para $s \geq 0$,

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^s.$$

Disto,

$$\langle \eta \rangle^s \leq \langle \xi + \eta - \xi \rangle^s \leq 2^s \langle \xi + \eta \rangle^s \langle -\xi \rangle^s,$$

e portanto,

$$\langle \xi + \eta \rangle^{-s} \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{-s},$$

e assim $\langle \xi + \eta \rangle^{|s|} \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}$. ∎

2.5 Aproximando-se Derivadas e Diferenças

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ iremos escrever,

$$x^{(k)} := \prod_{j=0}^{k-1} (x - j). \tag{2.15}$$

Definição 2.2 ***(Números de Stirling do Primeiro Tipo)*** *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $j, k \in \mathbb{N}_0$ são* *tais que* $j \leq k$. *Os* números de Stirling do primeiro tipo $S_k^{(j)}$ *são definidos pela igualdade,*

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} S_k^{(j)} x^j. \tag{2.16}$$

Observe que os números de Stirling do primeiro tipo são os coeficientes que aparecem na expansão do lado direito de (2.15). Assim, os números de Stirling $S_k^{(j)}$ são unicamente determinados.

Definição 2.3 ***(Números de Stirling do Segundo Tipo)*** *Os* números de Stirling do segundo tipo $\left\{ {k \atop j} \right\}$ *são definidos pela seguinte igualdade,*

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j)}. \tag{2.17}$$

Observação 2.5 *Para* $j < 0$ *e* $j > k$, *é natural estendermos estas definições por,*

$$S_k^{(j)} := 0 \ e \ \left\{ {k \atop j} \right\} := 0.$$

Para multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ definimos,

$$S_\alpha^{(\beta)} \ := \ S_{\alpha_1}^{(\beta_1)} \cdots S_{\alpha_n}^{(\beta_n)} \quad \text{e} \quad \left\{ {\alpha \atop \beta} \right\} := \left\{ {\alpha_1 \atop \beta_1} \right\} \cdots \left\{ {\alpha_n \atop \beta_n} \right\}.$$

Observação 2.6 *Será importante a seguinte identidade,*

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^j x^{(k)} \ = \ \sum_{i=j}^{k} \frac{i!}{(i-j)!} S_k^{(i)} x^{i-j}, \tag{2.18}$$

que é de fácil verificação.

Lema 2.2 *Se* $j, k \in \mathbb{N}_0$ *então,*

$$S_k^{(j)} = \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dx} \right)^j x^{(k)} \bigg|_{x=0} \quad e \quad \left\{ {k \atop j} \right\} = \frac{1}{j!} \Delta_\xi^j \xi^k |_{\xi=0}.$$

Prova: De fato, usando (2.18):

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^j x^{(k)} \bigg|_{x=0} = \sum_{i=j}^{k} \frac{i!}{(i-j)!} S_k^{(i)} x^{i-j} \bigg|_{x=0} = j! S_k^{(j)}.$$

Quanto a segunda identidade,

$$\Delta_\xi^j \xi^k |_{\xi=0} = \Delta_\xi^j \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} \xi^{(i)} \bigg|_{\xi=0} = \sum_{i=0}^{k} \left\{ {k \atop i} \right\} i^{(j)} \delta_{i,j} = j! \left\{ {k \atop j} \right\},$$

o que encerra a prova. ■

Proposição 2.4 *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Então:*

(a) $x^{(\alpha)} = \sum_{\beta \leq \alpha} S_\alpha^{(\beta)} x^\beta \quad e \quad S_\alpha^{(\beta)} = \frac{1}{\beta!} \partial_x^\beta x^{(\alpha)} \Big|_{x=0}$;

(b) $x^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} x^{(\beta)} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\beta!} \Delta_\xi^\beta \xi^\alpha \Big|_{\xi=0}$.

Prova: **(a)** Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ então,

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)} &= x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_n^{(\alpha_n)} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} S_{\alpha_1}^{(j_1)} x^{j_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{\alpha_n} S_{\alpha_n}^{j_n} x^{j_n} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{\alpha_n} S_{\alpha_1}^{(j_1)} \cdots S_{\alpha_n}^{(j_n)} x^{j_1} \cdots x^{j_n} \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} S_\alpha^{(\beta)} x^\beta. \end{aligned}$$

Agora se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$\begin{aligned} S_\alpha^{(\beta)} &= S_{\alpha_1}^{(\beta_1)} \cdots S_{\alpha_n}^{(\beta_n)} \\ &= \frac{1}{\beta_1} \left(\frac{d}{dx_1} \right)^{\beta_1} x_1^{(\alpha_1)} \Big|_{x_1=0} \cdots \frac{1}{\beta_n!} \left(\frac{d}{dx_n} \right)^{\beta_n} x_n^{(\alpha_n)} \Big|_{x_n=0} \\ &= \frac{1}{\beta_1! \cdots \beta_n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n} x_1^{(\alpha_1)} \cdots x_n^{(\alpha_n)} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{\beta!} \partial_x^\beta x^{(\alpha)} \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

(b) Verifica-se de maneira análoga a (a). ■

Lema 2.3 *Valem as seguintes relações:*

(a) $S_k^{(0)} = \delta_{0,k} = \begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) $S_k^{(k)} = 1 = \begin{Bmatrix} k \\ k \end{Bmatrix} = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) $S_k^{(j)} = 0 = \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix}$, $j < 0$ *ou* $j > k$.

(d) $S_{k+1}^{(j)} = S_k^{(j-1)} - k S_k^{(j)}$ *e* $\begin{Bmatrix} k+1 \\ j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k \\ j-1 \end{Bmatrix} + j \begin{Bmatrix} k \\ j \end{Bmatrix}$, $j \geq 1$, $k \geq 0$.

Prova: **(a)** Usando o item (a) de (2.4) e a convenção $0^0 = 1$ vemos que,

$$S_k^{(0)} = \frac{1}{0!} x^{(k)} \bigg|_{x=0} = \delta_{0k}.$$

De maneira análoga,

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{0!} \xi^k \bigg|_{\xi=0} = \delta_{0k}.$$

(b) De (2.2) e por (2.18),

$$S_k^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k x^{(k)} \bigg|_{x=0} = \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{k} \frac{i!}{(i-k)!} S_k^{(i)} x^{i-k} \bigg|_{x=0} = \frac{1}{k!} k! = 1.$$

Por (2.2) obtemos,

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \Delta_\xi^k \xi^k |_{\xi=0} = \frac{1}{k!} k! \xi^{(0)} |_{\xi=0} = \frac{k!}{k!} = 1.$$

(c) Reformulação da convenção $S_k^{(j)} = 0 = \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\}$ quando $j < 0$ ou $j > k$.

(d) Suponha que,

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} S_k^{(j)} x^j.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} S_k^{(j)} x^j &= x^{(k+1)} = (x-k) x^{(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} S_k^{(j)} x^{j+1} - \sum_{j=0}^{k} k S_k^{(j)} x^j \\
&= S_k^{(k)} x^{k+1} - k S_k^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} S_k^{(j)} x^{j+1} - \sum_{j=1}^{k} S_k^{(j)} x^j \\
&= S_k^{(k)} x^{k+1} - k S_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} S_k^{(j-1)} x^j - \sum_{j=1}^{k} S_k^{(j)} x^j \\
&= S_k^{(k)} x^{k+1} - k S_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} [S_k^{(j-1)} - k S_k^{(j)}] x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} [S_k^{(j-1)} - k S_k^{(j)}] x^j.
\end{aligned}$$

Provemos a segunda identidade. Se,

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j)},$$

temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} \left\{ {k+1 \atop j} \right\} x^{(j)} &= x^{k+1} = x x^k = x \sum_{j=0}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (x-j+j) \left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[\left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j+1)} + j \left\{ {k \atop j} \right\} x^{(j)} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left[\left\{ {k \atop j-1} \right\} + j \left\{ {k \atop j} \right\} \right] x^{(j)},
\end{aligned}$$

de forma que podemos calcular $\left\{ {k \atop j} \right\}$ por recursão. ∎

Lema 2.4 *Se $i, j, N \in \mathbb{N}_0$ são tais que $0 \le i, j \le N$ então,*

$$\sum_{k=0}^{N} S_k^{(i)} \left\{ {j \atop k} \right\} = \delta_{ij} = \sum_{k=0}^{N} \left\{ {k \atop i} \right\} S_j^{(k)}.$$

Prova: Por simetria, basta mostrar que vale a primeira igualdade:

$$\begin{aligned}
x^j &= \sum_{k=0}^{j} \left\{ {j \atop k} \right\} x^{(k)} = \sum_{k=0}^{N} \left\{ {j \atop k} \right\} x^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left\{ {j \atop k} \right\} \sum_{i=0}^{k} S_k^{(i)} x^i = \sum_{k=0}^{N} \left\{ {j \atop k} \right\} \sum_{i=0}^{N} S_k^{(i)} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{N} x^i \sum_{k=0}^{N} S_k^{(i)} \left\{ {j \atop k} \right\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, observando que,

$$x^j = \sum_{i=0}^{N} x^i \delta_{ji},$$

segue que,

$$\sum_{k=0}^{N} S_k^{(i)} \left\{ {j \atop k} \right\} = \delta_{ij}.$$

■

Mostraremos a seguir que é possível obter aproximações para diferenças por meio de derivadas. Este tipo de resultado é útil para obter expansões assintóticas.

Teorema 2.8 ***(Aproximando Diferenças por Derivadas)*** *Dados $j, N \in \mathbb{N}_0$ tais que $j < N$, existem constantes $c^{\triangle}_{N,j}, c^{d}_{N,j} > 0$ tais que para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\xi \in \mathbb{R}$ as seguintes desigualdades valem:*

$$\left|\Delta^j_\xi \varphi(\xi) - \sum_{k=j}^{N-1} \frac{j!}{k!} \left\{ {k \atop j} \right\} \varphi^{(k)}(\xi)\right| \leq c^{\triangle}_{N,j} \max_{\eta \in [0,j]} |\varphi^{(N)}(\xi+\eta)|, \tag{2.19}$$

$$\left|\varphi^{(j)}(\xi) - \sum_{k=j}^{N-1} \frac{j!}{k!} S^{(j)}_k \Delta^k_\xi \varphi(\xi)\right| \leq c^{d}_{N,j} \max_{\eta \in [0,N-1]} |\varphi^{(N)}(\xi+\eta)|. \tag{2.20}$$

Prova: Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$\varphi(\xi+\eta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\xi)\eta^k + \frac{1}{N!}\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N.$$

Aqui $\theta(\eta)$ é algum ponto no segmento unindo ξ e $\xi+\eta$. Suponha que $N > j$. Aplicando-se Δ^j_η em $\eta = 0$ e usando que $\left\{ {k \atop j} \right\} = 0$ se $k < j$,

$$\begin{aligned}
\Delta^j_\xi \varphi(\xi) &= \Delta^j_\eta \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\xi)\eta^k + \frac{1}{N!}\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N \right]\Bigg|_{\eta=0} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\xi)\Delta^j_\eta \eta^k\Bigg|_{\eta=0} + \frac{1}{N!}\Delta^j_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right]\Bigg|_{\eta=0} \\
&= \sum_{k=j}^{N-1} \frac{j!}{k!}\left\{ {k \atop j} \right\}\varphi^{(k)}(\xi) + \frac{1}{N!}\Delta^j_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right]\Bigg|_{\eta=0}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N!}\Delta^j_\eta[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N]\Bigg|_{\eta=0} &= \frac{1}{N!}\sum_{\ell=0}^{j}\sum_{m=0}^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\binom{j-\ell}{m}(-1)^{j-\ell-m}\Delta^\ell_\eta \eta^N \varphi^{(N)}(\theta(\eta+\ell+m))\Bigg|_{\eta=0} \\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\ell=0}^{j}\sum_{m=0}^{j-\ell}\binom{j}{\ell}\binom{j-\ell}{m}\left\{ {N \atop \ell} \right\}\ell!(-1)^{j-\ell-m}\varphi^{(N)}(\theta(\ell+m)).
\end{aligned}$$

Como $\ell + m \in [0,j]$ temos $\theta(\ell+m) \in [\xi, \xi+j]$ e assim,

$$\begin{aligned}
\left|\Delta^j_\xi \varphi(\xi) - \sum_{k=j}^{N-1} \frac{j!}{k!} \left\{ {k \atop j} \right\} \varphi^{(k)}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{N!}\Delta^j_\eta[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N]\Bigg|_{\eta=0}\right| \\
&\leq c^{\triangle}_{N,j} \max_{\theta_j \in [\xi,\xi+j]} |\varphi^{(N)}(\theta_j)|
\end{aligned}$$

$$\overset{\eta=\theta_j-\xi}{=} \quad c^{\Delta}_{N,j} \max_{\eta\in[0,j]} |\varphi^{(N)}(\xi+\eta)|.$$

A constante $c^{\Delta}_{N,j}$ depende apenas de N e j. O símbolo Δ superescrito apenas indica que a constante $c_{N,j}$ está associada ao operador Δ ao passo que no segundo a constante estará associada ao operador derivação e, sugestivamente, se tornará $c^{d}_{N,j}$. Quanto a segunda desigualdade,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \Delta^k_\xi \varphi(\xi) &= \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \left(\sum_{j=k}^{N-1} \frac{k!}{j!} \left\{ {j \atop k} \right\} \varphi^{(j)}(\xi) + \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta [\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N] \Big|_{\eta=0} \right) \\
&= \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \sum_{j=k}^{N-1} \frac{k!}{j!} \left\{ {j \atop k} \right\} \varphi^{(j)}(\xi) \\
&\quad + \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right] \Big|_{\eta=0} \\
&= \sum_{j=i}^{N-1} \frac{i!}{j!} \varphi^{(j)}(\xi) \sum_{k=i}^{j} S^{(i)}_k \left\{ {j \atop k} \right\} \\
&\quad + \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right] \Big|_{\eta=0} \\
&= \varphi^{(i)}(\xi) + \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right] \Big|_{\eta=0}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right] \Big|_{\eta=0} &= \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \Delta^k_\eta \eta^N \Delta^{k-\ell}_\eta \varphi^{(N)}(\theta(\eta+\ell)) \Big|_{\eta=0} \\
&= \sum_{k=i}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{m=0}^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \binom{k-\ell}{m} \left\{ {N \atop k} \right\} (-1)^{k-\ell-m} k! \frac{i!}{k!} \\
&\quad S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \varphi^{(N)}(\theta(\ell+m)).
\end{aligned}$$

Como $\ell+m \in [0, N-1]$ temos $\theta(\ell+m) \in [\xi, \xi+N-1]$ e assim,

$$\begin{aligned}
\left| \varphi^{(i)}(\xi) - \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \Delta^k_\xi \varphi(\xi) \right| &= \left| \sum_{k=i}^{N-1} \frac{i!}{k!} S^{(i)}_k \frac{1}{N!} \Delta^k_\eta \left[\varphi^{(N)}(\theta(\eta))\eta^N\right] \Big|_{\eta=0} \right| \\
&\leq c^{d}_{N,i} \max_{\theta_N \in [\xi, \xi+N-1]} |\varphi^{(N)}(\theta_N)| \\
&= c^{d}_{N,i} \max_{\eta\in[0,N-1]} |\varphi^{(N)}(\xi+\eta)|,
\end{aligned}$$

o que encerra a prova. ∎

Capítulo 3

Operadores Pseudodiferenciais Periódicos

Neste capítulo introduziremos as classes de símbolos e veremos como é possível associar operadores aos objetos destas classes. A motivação para a definição de tais classes, e também de tais operadores, encontra-se na teoria dos operadores diferenciais parciais lineares. Também introduziremos os operadores amplitudes, os quais serão, num certo sentido, uma generalização dos operadores pseudodiferenciais. Em seguida veremos como estes novos operadores comportam-se com respeito a espaços de Sobolev periódicos. Após isto, mostraremos que símbolos definidos sobre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ são meramente restrições, respeitando as classes, de símbolos usuais definidos sobre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Trataremos então da periodização de operadores pseudodiferenciais e desenvolveremos a análise simbólica referente a estes operadores. Por fim, concluiremos nosso estudo tratando dos operadores pseudodiferenciais elíticos mostrando que tais operadores admitem uma inversa, módulo certa classe de símbolos.

3.1 Classe de Símbolos

Para motivar a definição das classes de símbolos vamos analisar o caso dos operadores diferenciais parciais lineares. Seja,

$$P(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

um operador diferencial parcial linear de ordem M, isto é, um operador da forma,

$$P(x,D) := \sum_{|\alpha| \le M} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{3.1}$$

com $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. O *símbolo* de $P(x,D)$ é por definição o polinômio em ξ,

$$P(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \le M} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Podemos obter $P(x,\xi)$ a partir da conjugação do operador $P(x,D)$ com a função $e_{-\xi}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
e_{-\xi}(x)P(x,D)e_{\xi}(x) &= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{|\alpha|\leq M} a_\alpha(x)D^\alpha e^{2\pi i x\cdot\xi} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{|\alpha|\leq M} a_\alpha(x)\xi^\alpha e^{2\pi i x\cdot\xi} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\sum_{|\alpha|\leq M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right) e^{2\pi i x\cdot\xi} \\
&= P(x,\xi).
\end{aligned}$$

Isto nos motiva a seguinte definição:

Definição 3.1 ***(Símbolo Toroidal)*** *O símbolo toroidal σ_A de um operador linear $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é a aplicação $\sigma_A : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definida por $\sigma_A(x,\xi) = e_{-\xi}(x)Ae_{\xi}(x)$.*

Vejamos o exemplo do operador Laplaciano.

Exemplo 3.1 Para $p \in \mathbb{N}$ considere $\Delta^p : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ a p-ésima potência do operador Laplaciano:

$$\Delta^p f(x) := \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}\partial_x^{2\alpha} f(x).$$

Este é um operador linear e contínuo. Seu símbolo é,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Delta^p}(x,\xi) &= e_{-\xi}(x)\Delta^p e_{\xi}(x) \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}\partial_x^{2\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}(2\pi i)^p\xi^\alpha e^{2\pi i x\cdot\xi} \\
&= (2\pi i)^{2p}\sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}\xi^{2\alpha} \\
&= (2\pi i)^{2p}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^p \\
&= (2\pi i)^{2p}|\xi|^{2p}.
\end{aligned}$$

Em particular, no caso $p = 1$ temos $\sigma_\Delta(x,\xi) = -4\pi^2|\xi|^2$.

Exemplo 3.2 O operador $\overline{\Delta}^p : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dado por,

$$\overline{\Delta}^p := (I - \frac{1}{4\pi^2}\Delta)^p,$$

é linear e contínuo para todo $p \in \mathbb{N}$. Além do mais, usando (1.9),

$$\overline{\Delta}^p e^{-2\pi i x\cdot\xi} = \langle\xi\rangle^p e^{-2\pi i x\cdot\xi},$$

de forma que $\sigma_{\overline{\Delta}^p}(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{2p}$.

A seguir iremos introduzir uma classe mais geral de operadores que aquela dos operadores diferenciais parciais lineares. Para isto definimos inicialmente alguns espaços apropriados:

Definição 3.2 ***(Espaço** $C^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$**)*** *O espaço* $C^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ *consiste de todas as funções* $a:\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\to\mathbb{C}$ *tais que, para cada* $\xi\in\mathbb{Z}^n$, *a função* $a_\xi:\mathbb{T}^n\to\mathbb{C}$ *dada por* $a_\xi(x) := a(x,\xi)$ *é suave em* $\mathbb{T}^n$.

Definição 3.3 ***(Classe de Símbolos Toroidais)*** *Sejam* $m\in\mathbb{R}$, $\rho,\delta\in[0,1]$. *A classe de símbolos toroidais* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ *consiste das funções* $a\in C^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ *satisfazendo,*

$$|\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{3.2}$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ *e* $\xi\in\mathbb{Z}^n$.

Como é usual, escreveremos,

$$S^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n) = S^m_{1,0}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n) \quad \text{e} \quad S^{-\infty}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n).$$

Assim, $\sigma\in S^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ se,

$$|\Delta_\xi^\alpha\partial^\beta\sigma(x,\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|},$$

para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$, $x\in\mathbb{T}^n$ e $\xi\in\mathbb{Z}^n$. Outra classe, que não utilizaremos, mas que aparece na literatura é,

$$S^\infty_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n) := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n).$$

De modo geral, as constantes em (3.2) também dependem de m e da função considerada, porém, iremos omitir esta dependência para não sobrecarregar a notação.

Observação 3.1 *Como observado em [7], pg. 339, é possível introduzir uma topologia em* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ *com a qual* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ *é um espaço de Fréchet, porém a topologia obtida não desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da teoria.*

Exemplo 3.3 Sejam $\gamma\in\mathbb{N}_0^n$ e $m\in\mathbb{N}$ tais que $|\gamma|\le m$. Para cada $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ considere a função,

$$\begin{aligned} a:\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,\xi) &\longmapsto \xi^\gamma f(x). \end{aligned}$$

Então $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ e,

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| &\overset{(2.1)}{=} \left| \sum_{\theta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\theta} (-1)^{|\alpha-\theta|} (\xi+\theta)^\gamma \partial^\beta f(x) \right| \\
&\leq \sum_{\theta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\theta} |(\xi+\gamma)^\gamma| |\partial^\beta f(x)| \\
&\leq \sum_{\theta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\theta} \langle \xi+\gamma \rangle^{|\gamma|} \|\partial^\beta f(x)\|_\infty \\
&\overset{(2.14)}{\leq} 2^m \sum_{\theta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\theta} \langle \xi \rangle^m \langle \gamma \rangle^m \|\partial^\beta f(x)\|_\infty \\
&= C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^m.
\end{aligned}$$

Portanto, $a \in S^m_{0,0}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

Exemplo 3.4 Toda função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ é um elemento de $S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ para todo $m \in \mathbb{R}$ e portanto $\phi \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Mais geralmente, dado qualquer símbolo $\sigma \in S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ então $\tau(x,\xi) := \sigma(x,\xi)\phi(\xi)$, $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, é um elemento de $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

Na seção seguinte veremos como é possível associar um operador a um símbolo dado.

3.2 Operadores Pseudodiferenciais Periódicos

No caso de operadores diferenciais parciais lineares da forma (3.1) podemos obter uma representação de $P(x,D)$ por meio de $P(x,\xi)$. Se $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$\begin{aligned}
P(x,D)f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{D^\alpha f}(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} P(x,\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Isto nos motiva a introduzir a seguinte definição:

Definição 3.4 ***(Operadores Pseudodiferenciais Toroidais)*** *Seja* $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$*, cha-*

maremos de operador pseudodiferencial toroidal definido pelo símbolo a, o seguinte operador,

$$Op(a)f(x) = a(x,D)f(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}. \tag{3.3}$$

Usaremos ambas notações $Op(a)$ e $a(x,D)$ indistintamente. A coleção de tais operadores será denotada por $Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n))$. Definimos também as classes,

$$\begin{aligned} Op(S^{-\infty}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)) &:= \bigcap_{m\in\mathbb{R}} Op(S^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)),\\ Op(S^{\infty}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)) &:= \bigcup_{m\in\mathbb{R}} Op(S^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)),\\ Op(S^{\infty}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)) &:= \bigcup_{m\in\mathbb{R}} Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)). \end{aligned}$$

O primeiro fato que deve ser observado é o seguinte:

Observação 3.2 *A definição acima é bastante geral uma vez que não estamos impondo qualquer condição para que o operador $Op(a)f$ tenha sentido, isto é, para que a série que o define seja convergente. Sendo assim, sempre que estivermos considerando tais operadores precisamos inicialmente verificar que estes estão bem definidos. Por exemplo, podemos considerar $Op(a)$ no espaço das funções teste periódicas $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ pois neste caso $\hat{f}$ tem decrescimento rápido e a série* (3.3) *converge absolutamente.*

Convém observar que neste momento temos duas definições de símbolos toroidais: àquela dos operadores lineares e contínuos de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$; e àquela da classe de símbolos. Vejamos, que operadores pseudodiferenciais também são lineares e contínuos sobre $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e que, neste caso, as duas noções de símbolos toroidais coincidem neste caso.

Teorema 3.1 *Se $a\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ então $A := Op(a) : C^\infty(\mathbb{T}^n)\to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é linear e contínuo. Em particular, $a(x,\xi) = \sigma_A(x,\xi)$.*

Prova: Já observamos que se $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\mathrm{Op}(a)f$ está bem definido. Além do mais, como a série (3.3) converge absolutamente podemos derivar termo a termo para concluir que $\mathrm{Op}(a)f\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Agora,

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}(a)f(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)f(y)\,dy\\ &\overset{(1.9)}{=} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{-2q}a(x,\xi)\int_{\mathbb{T}^n}\Delta_y^q e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}f(y)\,dy\\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{-2q}a(x,\xi)\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\Delta_y^q f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Suponha agora que $f_j \to f$ em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \mathrm{Op}(a)f_j(x) &= \lim_{j\to\infty} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2q} a(x,\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \Delta_y^q f_j(y)\; dy \qquad (3.4)\\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2q} a(x,\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \lim_{j\to\infty} \Delta_y^q f_j(y)\; dy \\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2q} a(x,\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \Delta_y^q \lim_{j\to\infty} f_j(y)\; dy \\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2q} a(x,\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \Delta_y^q f(y)\; dy \\ &= \mathrm{Op}(a)f(x). \end{aligned}$$

Acima estamos usamos o fato de que a série em (3.4) é absolutamente convergente e que a sequência de funções sob o integrando em (3.4) é uniformemente convergente para passar o limite na série e na integral. Por fim,

$$\begin{aligned} \sigma_A(x,\xi) &= e_{-\xi}(x)\mathrm{Op}(a)e_\eta(x) \\ &= e_{-\xi}(x) \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} a(x,\eta)\widehat{e_\xi}(\eta)e_\eta(x) \\ &= e_{-\xi}(x) \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} a(x,\eta)\delta_{0,\xi}e_\eta(x) \\ &= e_{-\xi}(x)a(x,\xi)e_\xi(x) \\ &= a(x,\xi), \end{aligned}$$

o que encerra a prova. ■

Mais a frente veremos como os operadores pseudodiferenciais agem em espaços de Sobolev periódicos. Por ora, vamos introduzir os operadores amplitude que, num certo sentido, generalizam o conceito de símbolo.

Definição 3.5 ***(Amplitude Toroidal)*** *A classe $\mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ das amplitudes toroidais consiste das funções complexas $a(x,y,\xi)$ definidas em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ suaves em relação a x e y, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ fixado e que satisfazem,*

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta+\gamma|}, \qquad (3.5)$$

para todo $x, y \in \mathbb{T}^n$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Tal função a chama-se amplitude toroidal de ordem $m \in \mathbb{R}$ do tipo (ρ,δ). Denotando por,

$$\mathcal{A}^m(\mathbb{T}^n) := \mathcal{A}^m_{1,0}(\mathbb{T}^n),$$

definimos as classes,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-\infty}(\mathbb{T}^n) &:= \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{A}^m(\mathbb{T}^n)\\ \mathcal{A}^{\infty}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n) &:= \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n).\end{aligned}$$

De modo geral, as constantes em (3.5) também dependem de m e da função a considerada, porém, como no caso dos símbolos toroidais, iremos omitir tal dependência para simplificar a notação. O importante é que tais constantes não dependam de x, y ou ξ.

Observação 3.3 *Símbolos toroidais são casos particulares de amplitudes toroidais que são independentes da segunda variável. De fato, se $a(x, y, \xi)$ é uma tal amplitude definindo-se $\sigma(x, \xi) := a(x, y, \xi)$ recuperamos a definição de símbolo toroidal.*

Tendo em vista a observação acima, é natural querermos definir operadores associados a amplitudes como fizemos para o caso de símbolos toroidais.

Definição 3.6 ***(Operadores Amplitude)*** *Se $a \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ definimos o operador amplitude de grau m associado a a por,*

$$Op(a)f(x) = a(x, y, D)f(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) f(y)\, dy. \tag{3.6}$$

Definimos também as classes de operadores amplitude,

$$\begin{aligned}Op(\mathcal{A}^{-\infty}(\mathbb{T}^n)) &:= \bigcap_{m\in\mathbb{R}} Op(\mathcal{A}^m(\mathbb{T}^n))\\ Op(\mathcal{A}^{\infty}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)) &:= \bigcup_{m\in\mathbb{R}} Op(\mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)).\end{aligned}$$

Observação 3.4 *Se $a(x, y, \xi)$ é independente da segunda variável, definindo-se $\sigma(x, \xi) := a(x, y, \xi)$ vemos que (3.6) se torna,*

$$\begin{aligned}a(x, y, D)f(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \sigma(x, \xi) \left(\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} f(y)\, dy \right) e^{2\pi i x\cdot\xi}\\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \sigma(x, \xi)\hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\\ &= a(x, D)f(x),\end{aligned}$$

isto é, recuperamos a definição dos operadores pseudodiferenciais periódicos.

Diferente do caso dos símbolos, a correspondência de amplitudes e operadores amplitudes não é bijetiva pois várias amplitudes diferentes podem definir o mesmo operador como mostraremos a seguir.

No teorema abaixo se $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$,

$$(e^{2\pi i(y-x)} - 1)^\gamma := \prod_{j=1}^{n} (e^{2\pi i(y_j - x_j)} - 1)^{\gamma_j}.$$

Teorema 3.2 *Dados $c \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ e $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$, considere a aplicação.*

$$b_\gamma(x, y, \xi) := (e^{2\pi i(y-x)} - 1)^\gamma c(x, y, \xi),$$

Então, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, b_γ é uma amplitude e,

$$Op(b_\alpha) = Op(\Delta_\xi^\alpha c) \in \mathcal{A}^{m-\rho|\alpha|}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n).$$

Prova: Observe inicialmente que:

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}(e^{2\pi i(y-x)} - 1)^\alpha &\overset{(1.3)}{=} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} (e^{2\pi i(y-x)})^\beta \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} e^{2\pi i(y-x)\cdot(-\xi)} e^{2\pi i(y-x)\cdot\beta} \\
&= (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|} e^{2\pi i(y-x)\cdot(\beta-\xi)} \\
&= (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-1)^{|\beta|} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\xi-\beta)} \\
&\overset{(2.2)}{=} (-1)^{|\alpha|} \overline{\Delta}_\xi^\alpha e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}.
\end{aligned}$$

Pela soma por partes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(b_\alpha)u(x) &\overset{(3.6)}{=} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} [(e^{2\pi i(y-x)} - 1)^\alpha c(x, y, \xi)] u(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \left[c(x, y, \xi)(-1)^{|\alpha|} \overline{\Delta}_\xi^\gamma e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \right] u(y)\, dy \\
&\overset{(2.5)}{=} \int_{\mathbb{T}^n} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \Delta_\xi^\gamma c(x, y, \xi) \right] u(y)\, dy \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \Delta_\xi^\gamma c(x, y, \xi) u(y)\, dy \\
&\overset{(3.6)}{=} \mathrm{Op}(\Delta_\xi^\gamma c)u(x).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Op}(b_\gamma) = \mathrm{Op}(\Delta_\xi^\gamma c)$. Por fim,

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\theta \Delta_\xi^\gamma c(x, y, \xi)| &= |\Delta_\xi^{\alpha+\gamma} \partial_x^\beta \partial_y^\theta c(x, y, \xi)| \\
&\overset{(3.2)}{\le} C_{\alpha,\beta,\theta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha+\gamma|+\delta|\beta+\theta|}
\end{aligned}$$

$$= \quad C_{\alpha,\beta,\theta}\langle\xi\rangle^{(m-\rho|\gamma|)-\rho|\alpha|+\delta|\beta+\theta|},$$

e portanto $\mathrm{Op}(\Delta_\xi^\gamma c) \in \mathcal{A}_{\rho,\delta}^{m-\rho|\gamma|}(\mathbb{T}^n)$. ∎

3.3 Operadores Pseudodiferenciais em $H^s(\mathbb{T}^n)$

Na seção anterior vimos que $\mathrm{Op}(a) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como $C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset H^s(\mathbb{T}^n)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, é natural querermos estender $a(x,D)$ a $H^s(\mathbb{T}^n)$. Para mais detalhes sobre os espaços $H^s(\mathbb{T}^n)$ referimos o leitor a seção 1.2.6. Para obtermos tal extensão precisamos do seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.1 *Sejam $\rho,\delta \in [0,1]$ e $\sigma \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Então,*

$$|\Delta_\xi^\alpha \hat{\sigma}(\eta,\xi)| \leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-r}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta r}, \tag{3.7}$$

para todo $\eta,\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $r \in \mathbb{N}$.

Prova: Observe que $\Delta_\xi^\alpha \hat{\sigma}(\eta,\xi) = \widehat{\Delta_\xi^\alpha \sigma}(\eta,\xi)$ o que pode ser verificado através de um simples cálculo empregando-se a relação (2.1). Usando isto, a identidade (1.9) e integração por partes obtemos,

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha \hat{\sigma}(\eta,\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\eta} \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\, dx \right| \\
&\overset{(1.9)}{=} \langle\eta\rangle^{-2q} \left| \int_{\mathbb{T}^n} \Delta_x^p e^{-2\pi i x\cdot\eta} \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\, dx \right| \\
&= \langle\eta\rangle^{-2q} \left| \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\eta} \Delta_x^p \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\, dx \right| \\
&\leq \langle\eta\rangle^{-2q} \int_{\mathbb{T}^n} |\Delta_x^q \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)|\, dx.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\Delta_x^q \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) &= \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\beta|=p} \frac{q!}{\beta!(q-p)!} \frac{(-1)^p}{(4\pi^2)^p} \partial_x^{2\beta} \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) \\
&= \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\beta|=p} \frac{q!}{\beta!(q-p)!} \frac{(-1)^p}{(4\pi^2)^p} \Delta_\xi^\alpha \partial_x^{2\beta} \sigma(x,\xi).
\end{aligned}$$

Denotando por $C_{\alpha,q} := \max_{|\beta|\leq q} C_{\alpha,\beta}$, sendo $C_{\alpha,\beta}$ as constantes que parecem na definição (3.2), as quais dependem de σ, α, β e m, teremos:

$$|\Delta_x^p \Delta_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq \sum_{p=0}^{q} \sum_{|\beta|=p} \frac{q!}{\beta!(q-p)!} \frac{1}{(4\pi^2)^p} |\Delta_\xi^\alpha \partial_x^{2\beta} \sigma(x,\xi)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{p=0}^{q}\sum_{|\beta|=p}\frac{q!}{\beta!(q-p)!}\frac{1}{(4\pi^2)^p}C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|2\beta|}\\
&\leq C_{\alpha,q}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|2\beta|}\sum_{p=0}^{q}\sum_{|\beta|=p}\frac{q!}{\beta!(q-p)!}\frac{1}{(4\pi^2)^p}\\
&\leq qC_{\alpha,q}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta 2q}\max_{p\in[0,q]}\sum_{|\beta|=p}\binom{q}{p}\frac{p!}{\beta!}\frac{1}{(4\pi^2)^p}\\
&= C'_{\alpha,q}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta 2q}.
\end{aligned}
$$

Pondo $r=2q$ obtemos,

$$
|\Delta_\xi^\alpha\hat{\sigma}(\eta,\xi)|\leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-r}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta r}.
$$

Provamos assim o resultado para todo natural par. Para mostrar o resultado para um r ímpar qualquer, primeiro multiplicamos as desigualdades,

$$
\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha\hat{\sigma}(\eta,\xi)| &\leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-2r}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta 2r}\\
|\Delta_\xi^\alpha\hat{\sigma}(\eta,\xi)| &\leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-2}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+2\delta},
\end{aligned}
$$

obtendo,

$$
|\Delta_\xi^\alpha\hat{\sigma}(\eta,\xi)|^2\leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-2(r+1)}\langle\xi\rangle^{2(m-\rho|\alpha|+\delta(r+1))},
$$

e portanto,

$$
|\Delta_\xi^\alpha\hat{\sigma}(\eta,\xi)|\leq C_{r,\alpha}\langle\eta\rangle^{-(r+1)}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta(r+1)},
$$

o que conclui a prova. ■

Precisaremos também conhecer os coeficientes de Fourier de um operador pseudodiferencial.

Lema 3.2 *Seja $A := Op(\sigma_A) : C^\infty(\mathbb{T}^n)\to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ um operador linear contínuo. Se $u\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então,*

$$
\widehat{Au}(\xi) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\sigma_A}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta), \tag{3.8}
$$

para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$.

Prova: Se $u\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$
Au(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma_A(x,\xi)\hat{u}(\xi)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\widehat{\sigma_A}(\eta,\xi)\right]\hat{u}(\xi)\\
&\overset{\zeta=\eta+\xi}{=} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\left[\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\zeta-\xi)}\widehat{\sigma_A}(\zeta-\xi,\xi)\right]\hat{u}(\xi)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)\right]\hat{u}(\xi)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)\\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)\right],
\end{aligned}
$$

Pela unicidade de representação da série de Fourier temos o resultado. ∎

O teorema de extensão a espaços de Sobolev ainda fará uso do seguinte resultado de análise funcional:

Lema 3.3 *Seja X um espaço normado e $A \subset X$ um subespaço denso, isto é, $\overline{A} = X$. Se $T : A \to Y$ é um operador linear limitado de A num espaço de Banach Y então existe um único operador linear limitado $\tilde{T} : X \to Y$ tal que $\tilde{T}|_A = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Prova: Ver [3], pg. 100. ∎

Teorema 3.3 *Se $\sigma_A \in S^m_{0,0}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ então $Op(\sigma_A) : H^s(\mathbb{T}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{T}^n)$.*

Prova: Como $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{T}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ (ver [4]) e $H^{s-m}(\mathbb{T}^n)$ é um espaço de Banach basta mostrarmos que $\|Au\|_{H^{s-m}(\mathbb{T}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$. Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$
\begin{aligned}
\|Au\|^2_{H^{s-m}(\mathbb{T}^n)} &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\langle\eta\rangle^{2(s-m)}|\widehat{Au}(\eta)|^2\\
&\overset{(3.8)}{=} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\eta\rangle^{s-m}\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)\right|^2\\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\eta\rangle^{s-m}|\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)||\hat{u}(\xi)|\right]^2\\
&\overset{(2.14)}{\leq} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}2^{|s-m|}\langle\xi\rangle^{s-m}\langle\eta-\xi\rangle^{|s-m|}|\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)||\hat{u}(\xi)|\right]^2\\
&= 2^{2|s-m|}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\eta-\xi\rangle^{|s-m|}\langle\xi\rangle^{-m}|\widehat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi)|\langle\xi\rangle^{s}|\hat{u}(\xi)|\right]^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Em seguida iremos aplicar a desigualdade de Young discreta. Para isto considere as aplicações $h : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ definidas por,

$$\begin{aligned} h(\eta, \xi) &= \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\widehat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| \\ g(\eta) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} h(\eta, \xi) f(\xi) \end{aligned}$$

com $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ dada por $f(\xi) = \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi)|$. Note que $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ pois,

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |f(\xi)|^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 = \|u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^n)} < \infty.$$

Para aplicarmos a desigualdade de Young primeiro precisamos mostrar que,

$$\begin{aligned} C_1 &:= \sup_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\hat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| < \infty \\ C_2 &:= \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\widehat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| < \infty. \end{aligned}$$

Para cada $\eta \in \mathbb{Z}^n$ fixado, pelo lema (3.7) com $\alpha = \rho = \delta = 0$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que $r > |s - m| + n$, teremos,

$$\begin{aligned} \sum_{|\xi| \le k} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\widehat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| &\le C_{r,\alpha} \sum_{|\xi| \le k} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} \langle \eta - \xi \rangle^{-r} \langle \xi \rangle^m \\ &\le C_{r,\alpha} \sum_{|\xi| \le k} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|-r} \\ &\le C'_{r,\alpha} \sum_{|\xi| \le k} \langle \xi \rangle^{|s-m|-r} \langle \eta \rangle^{||s-m|-r|} \\ &< C'_{r,\alpha} \sum_{|\xi| \le k} \langle \xi \rangle^{-n} \langle \eta \rangle^{||s-m|-r} \\ &\le C'_{r,\alpha} \langle \eta \rangle^{||s-m|-r|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{-n} < \infty. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\widehat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| < \infty.$$

Mas então $C_1 < \infty$ pois a série acima converge qualquer que seja $\eta \in \mathbb{Z}^n$. Analogamente, concluímos que $C_2 < \infty$. Agora estamos nas condições do teorema (2.6). Voltando-se a desigualdade (3.9):

$$\|Au\|^2_{H^{s-m}(\mathbb{T}^n)} \le 2^{2|s-m|} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta - \xi \rangle^{|s-m|} \langle \xi \rangle^{-m} |\widehat{\sigma_A}(\eta - \xi, \xi)| \langle \xi \rangle^s |\hat{u}(\xi)| \right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{2|s-m|} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |g(\eta)|^2 \\
&\leq 2^{|s-m|} C_1 C_2 \|f\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} \\
&= C\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T}^n)} < \infty,
\end{aligned}
$$

o que encerra a prova. ■

O resultado anterior era esperado pois a classe $S^m_{0,0}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ contém os operadores diferenciais parciais lineares, os quais satisfazem a conclusão do teorema acima.

Um resultado análogo vale para os operadores amplitude.

Lema 3.4 *Se $a \in \mathcal{A}^m_{0,0}(\mathbb{T}^n)$ e $A := Op(a) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Então,*

$$
\widehat{Au}(\eta) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(\kappa)\hat{a}(\eta-\xi, \xi-\kappa, \xi).
$$

Prova: Abaixo iremos escrever $\hat{a}_1$ para enfatizar que estamos considerando a transformada de Fourier de a com respeito a primeira variável. Se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$
\begin{aligned}
Au(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi)u(y)\, dy \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)} \hat{a}_1(\eta-\xi,y,\xi)\right] \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i y\cdot\kappa}\hat{u}(\kappa)\, dy \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \hat{a}_1(\eta-\xi,y,\xi) e^{2\pi i y\cdot\kappa}\hat{u}(\kappa)\, dy \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{a}_1(\eta-\xi,y,\xi) e^{2\pi i y\cdot\kappa}\hat{u}(\kappa)\, dy \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{a}_1(\eta-\xi,y,\xi) e^{-2\pi i y\cdot(\xi-\kappa)}\hat{u}(\kappa)\, dy \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(\kappa) \int_{\mathbb{T}^n} \hat{a}_1(\eta-\xi,y,\xi) e^{-2\pi i y\cdot(\xi-\kappa)}\, dy \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(\kappa)\hat{a}(\eta-\xi,\xi-\kappa,\xi),
\end{aligned}
$$

e disto segue,

$$
\widehat{Au}(\eta) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(\kappa)\hat{a}(\eta-\xi, \xi-\kappa, \xi).
$$

■

Teorema 3.4 *Se $a \in \mathcal{A}^m_{0,0}(\mathbb{T}^n)$ então $Op(a) : H^s(\mathbb{T}^n) \to H^{s-m}(\mathbb{T}^n)$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$.*

Prova: A prova deste teorema segue a mesma linha de raciocínio do teorema anterior e por isto será o omitida. Os detalhes podem ser encontrados em [6], pg. 346. ∎

3.4 Extensão de Símbolos Toroidais

Nosso objetivo nesta seção será estender símbolos definidos em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ a símbolos definidos em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$.

Lema 3.5 *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existem $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

(i) $P\theta(x) := \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \theta(x+\kappa) = 1.$

(ii) $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)|_{\mathbb{Z}^n}(\xi) = \delta_{0\xi}$, *para todo* $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

(iii) $\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi) = \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi)$, *para todo* $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Prova: Primeiro vamos considerar o caso $n = 1$. Seja $\theta = \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que,

$$\text{supp}(\theta_1) \subset (-1,1),\ \theta_1(-x) = \theta_1(x) \text{ e } \theta_1(1-y) + \theta_1(y) = 1,$$

para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in [0,1]$. Como $\theta_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ temos $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Verifiquemos que valem $(i)-(iii)$:
(i) Tratemos inicialmente do caso em que $x \in [-1,1]$. Se $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} P\theta_1(x) &= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} \theta_1(x+\kappa) = \theta_1(x-1) + \theta_1(x) \\ &= \theta_1(-(1-x)) + \theta_1(x) \\ &= \theta_1(1-x) + \theta_1(x) = 1. \end{aligned}$$

Se $x \in [-1,0]$ então $-x \in [0,1]$ de forma que $P\theta_1(x) = P\theta_1(-x) = 1$. Em geral, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x| > 1$ então $x \in (n, n+1]$ ou $x \in [-1-n, -n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in (n, n+1]$ então $x + k \in (-1,1)$ se, e somente se, $-2-n < k < 1-n$ e portanto,

$$\begin{aligned} P\theta_1(x) &= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \theta_1(x+\kappa) = \theta_1(x+(-1-n)) + \theta_1(x-n) \\ &= \theta_1(-(1-(x-n)) + \theta_1(x-n) \\ &= \theta_1(1-(x-n)) + \theta_1(x-n) \\ &= 1, \end{aligned}$$

pois $x-n \in (0,1]$. Se $x \in [-1-n, -n)$ então $-x \in (n, n+1]$ e portanto $P\theta_1(x) = P\theta_1(-x) = 1$. Sendo assim,

$$P\theta_1(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \theta_1(x+\kappa) = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
(ii) Mostremos que $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1(\xi) = \delta_{0\xi}$. Se $\xi \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta_1(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \theta_1(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \theta_1(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx + \int_{0}^{1} \theta_1(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&\overset{y=x+1, y=x}{=} \int_{0}^{1} \theta_1(x-1)e^{-2\pi i x\cdot\xi}e^{2\pi i\cdot\xi}\, dx + \int_{0}^{1} \theta_1(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&\overset{e^{2\pi i\xi}=1}{=} \int_{0}^{1} [\theta_1(x-1)+\theta_1(x)]e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int_{0}^{1} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \delta_{0\xi},
\end{aligned}$$

e portanto vale (ii).
(iii) Mostremos que $\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta)(\xi) = \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Suponha, por um instante que exista $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfazendo esta identidade. Neste caso, teríamos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1)(\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^n\phi_\alpha(\xi-n)\, d\xi \\
&\overset{\eta=\xi-n}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot(\eta+n)}\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^n\phi_\alpha(\eta)\, d\eta \\
&= \sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}(-1)^n e^{2\pi i x\cdot n}\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\phi_\alpha(\xi)\, d\xi \\
&= (1-e^{2\pi i x})^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\phi_\alpha(\xi)\, d\xi \\
&= (1-e^{2\pi i x\cdot})^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x).
\end{aligned}$$

Integrando-se por partes o lado esquerdo obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1)(\xi)\, d\xi &= (-2\pi i x)^\alpha\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot\xi}\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta_1(\xi)\, d\xi \\
&= (-2\pi i x)^\alpha\theta_1(x),
\end{aligned}$$

e portanto $(-2\pi i x)^\alpha\theta_1(x) = (1-e^{2\pi i x})^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x)$. Como $\mathrm{supp}(\theta_1) \subset (-1,1)$ temos que,

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha(x) = \left(\frac{-2\pi i x}{1-e^{2\pi i x}}\right)^\alpha \theta_1(x),$$

se $0 < |x| < 1$ e $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x) = 0$ se $|x| \geq 1$. Por continuidade $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(0) = 1$. Como $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}$ é inversível vemos que existe ϕ_α. Além do mais, $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ visto que $\theta_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e portanto

vale (iii).
O caso geral reduz-se a este pois a aplicação $\theta : x \mapsto \theta_1(x_1)\theta_1(x_2)\cdots\theta_1(x_n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possui as propriedades desejadas. ■

As desigualdades para a classe $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ dos símbolos periódicos em $\mathbb{R}^n$ são,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0 : |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Para enfatizar a diferença entre tais símbolos e símbolos toroidais iremos chamá-los de *símbolos Euclidianos.*

Teorema 3.5 *Para cada $\rho \in (0,1]$ e $\delta \in [0,1]$ tem-se $\tilde{a} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ se, e somente se, existe $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$. Além do mais, a é único módulo $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Prova: $(\Leftarrow)$ Suponha que exista $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$. Pelo teorema do valor médio, se $\alpha = \delta_j$ então,

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi) &= \Delta_{\xi_j}\partial_x^\beta a(x,\xi) \\
&= \partial_x^\beta a(x,\xi+\delta_j) - \partial_x^\beta a(x,\xi) \\
&= \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta},
\end{aligned}$$

sendo η um ponto no segmento de ξ a $\xi+\alpha$. Mais geralmente, se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ então,

$$\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta},$$

para algum $\eta \in Q := [\xi_1, \xi_1+\alpha_1] \times \ldots \times [\xi_n, \xi_n+\alpha_n]$. Mostremos isto por indução. Acima já provamos para $\alpha = \delta_j$. Suponha agora $\alpha = \gamma + \delta_j$ para algum $j = 1, \ldots, n$ e γ tal que $|\gamma| = n$. Então pelo teorema do valor médio,

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi) &= \Delta_{\xi_j}(\partial_\xi^\gamma \partial_x^\beta \tilde{a})(x,\xi) \\
&= \Delta_{\xi_j}(\partial_\xi^\gamma \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\zeta}) \\
&= \partial_\xi^\gamma \partial_x^\beta a(x,\zeta+\delta_j) - \partial_\xi^\gamma \partial_x^\beta a(x,\zeta) \\
&= \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta},
\end{aligned}$$

para alguns $\zeta, \xi \in \mathbb{R}^n$. Usando que $\langle\eta\rangle \leq C_\alpha\langle\xi+\alpha\rangle$ e a desigualdade de Peetre,

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi)| &= |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta\in Q} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}\langle\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}C_\alpha^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\langle\xi+\alpha\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\
&\leq 2^{|m-\rho|\alpha|+\delta|\beta||}C_{\alpha,\beta}C_\alpha^{m+|\alpha|+|\beta|}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\langle\alpha\rangle^{|m-\rho|\alpha|+\delta|\beta||} \\
&\leq 2^{|m|+|\alpha|+|\beta|}C_{\alpha,\beta}C_\alpha^{m+|\alpha|+|\beta|}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\langle\alpha\rangle^{|m|+|\alpha|+|\beta|} \\
&= C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{a} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.
($\Rightarrow$) Provemos inicialmente a unicidade. Sejam $a, b \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ e suponha que $a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n} = b|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$. Seja $c = a - b$. Então $c \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ e satisfaz $c|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n} = 0$. Se $\xi \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ podemos encontrar $\eta \in \mathbb{Z}^n$ de forma que $\xi \in [\eta, \eta + 1]^n$. Aqui $[\eta, \eta + 1]^n$ denota o cubo $[\eta_1, \eta_1 + 1] \times \ldots \times [\eta_n, \eta_n + 1]$. Pela expansão de Taylor de primeira ordem,

$$\begin{aligned} c(x,\xi) &= c(x,\eta) + \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x,\xi,\xi-\eta)(\xi-\eta)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x,\xi,\xi-\eta)(\xi-\eta)^\alpha, \end{aligned}$$

sendo,

$$r_\alpha(x,\xi,\theta) = \int_0^1 (1-t)\partial_\xi^\alpha c(x,\xi+t\theta)\, dt.$$

Como $\langle \xi - \eta \rangle \leq \langle n \rangle$,

$$\begin{aligned} |c(x,\xi)| &= \left| \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 (1-t)\partial_\xi^\alpha c(x,\xi+t(\xi-\eta))\, dt(\xi-\eta)^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 |1-t||\partial_\xi^\alpha c(x,\xi+t(\xi-\eta))|\, dt|\xi-\eta| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 \langle \xi + t(\xi-\eta)\rangle^{m-\rho}\, dt\langle \xi-\eta\rangle \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 \langle \xi\rangle^{m-\rho}\langle t(\xi-\eta)\rangle^{|m-\rho|}\, dt\langle \xi-\eta\rangle \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|=1} \int_0^1 \langle \xi\rangle^{m-\rho}\langle \xi-\eta\rangle^{|m-\rho|}\, dt\langle \xi-\eta\rangle \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|=1} \langle \xi\rangle^{m-\rho}\langle n\rangle^{|m-\rho|}\langle n\rangle \\ &= C'' \langle \xi\rangle^{m-\rho}. \end{aligned}$$

Prosseguindo o argumento acima indutivamente para c e duas derivadas e usando que $\rho > 0$ vemos que $a - b \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$, isto é,

$$a \equiv b \mod (S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)).$$

Vamos mostrar a existência. Seja $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como no lema (3.5). Defina $a : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por,

$$a(x,\xi) := \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi-\eta)\tilde{a}(x,\eta).$$

Note que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$, pois se $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi-\eta)\tilde{a}(x,\eta) \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \delta_{0,\xi-\eta}\tilde{a}(x,\eta) \\ &= \tilde{a}(x,\xi). \end{aligned}$$

Além do mais,

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi)| &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi-\eta)\partial_x^\beta\tilde{a}(x,\eta)\right| \\ &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \overline{\Delta}_\xi^\alpha\phi_\alpha(\xi-\eta)\partial_x^\beta\tilde{a}(x,\eta)\right| \\ &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \phi_\alpha(\xi-\eta)\Delta_\eta^\alpha\partial_x^\beta\tilde{a}(x,\eta)(-1)^{|\alpha|}\right| \\ &\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\xi-\eta)|C_{\alpha,\beta}\langle\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\overset{\zeta=\xi-\eta,\zeta=\eta}{=} C_{\alpha,\beta}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\eta)|\langle\xi-\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\overset{(2.14)}{\leq} C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\eta)|\langle\eta\rangle^{|m-\rho|\alpha|+\delta|\beta||} \\ &\leq C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\eta)|\langle\eta\rangle^{m+|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\leq C''_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \end{aligned}$$

Portanto $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n)$. ■

Com um argumento análogo mostra-se o seguinte resultado:

Corolário 3.1 *Suponha que $a : \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ satisfaz:*

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{3.10}$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ e para todo $|\alpha|\leq N_1$, $|\beta|\leq N_2$. Então sua restrição $\tilde{a} := a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$ satisfaz:

$$|\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta\tilde{a}(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{3.11}$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, $\xi\in\mathbb{Z}^n$ e para todo $|\alpha|\leq N_1$ e $|\beta|\leq N_2$. Reciprocamente, toda função $\tilde{a} : \mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ satisfazendo (3.10) para todo $|\alpha|\leq N_1$ e $|\beta|\leq N_2$ é uma restrição $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$ de alguma função $a : \mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ satisfazendo (3.11) para todo $|\alpha|\leq N_1$ e $|\beta|\leq N_2$.

Os operadores com símbolos nas classes $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ possuem vantagens sobre aqueles com símbolos nas classes $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ pois no primeiro caso podemos reduzir hipóteses sobre a regularidade na segunda variável ou mesmo retirá-las.

3.5 Periodização de Símbolos

O seguinte resultado mostra que sob certas condições o operador pseudodiferencial $a(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínuo. A demonstração deste resultado foge do escopo deste trabalho e será omitida.

Proposição 3.1 *Seja $a = a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ e suponha que existam $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{R}$ tais que para todo α, β existem constantes reais $C_{\alpha,\beta}$ e $M(\alpha,\beta)$ tais que:*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle x \rangle^{N+(1-\varepsilon)|\beta|} \langle \xi \rangle^{M(\alpha,\beta)},$$

para todos $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Então o operador $a(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com símbolo $a(x,\xi)$ é contínuo.

Dada uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ considere a função $Pf : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como,

$$Pf(x) := \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} f(x+\kappa).$$

Note que se $\xi \in \mathbb{Z}^n$ então,

$$\begin{aligned} Pf(x+\xi) &= \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} f(x+\kappa+\xi) \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} f(x+\eta) \\ &= Pf(x), \end{aligned}$$

isto é, Pf é 1-periódica. Chamamos Pf de **periodização** de f. O operador,

$$\begin{aligned} P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n) \\ f &\longmapsto Pf, \end{aligned}$$

chama-se **operador periodização**. Vejamos algumas propriedades interessantes deste operador:

Teorema 3.6 *Seja $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ o operador periodização. Então:*

(a) P é sobrejetivo.

(b) $\|Pf\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

(c) $Pf(x) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}((\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)|_{\mathbb{Z}^n})(x)$, *isto é,* $Pf(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)$.

Prova: (a) Seja $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ uma função definida como no lema (3.7). Então, para qualquer $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$,

$$\begin{aligned} P(g\theta)(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x+k)\theta(x+k) \\ &= g(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \theta(x+k) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Portanto, P é sobrejetivo.

(b) Agora, para $k \in \mathbb{Z}^n$ vamos escrever,

$$k + \mathbb{T}^n := \prod_{i=1}^{n} [k_i, k_i + 1].$$

Observando que,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n} k + \mathbb{T}^n,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n} |Pf(x)|\ dx \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |f(x+k)|\ dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{k+\mathbb{T}^n} |f(x)|\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\ dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

(c) Para $\xi \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} Pf(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k)\ dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{k+\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\ dx \\ &= (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi), \end{aligned}$$

o que implica $Pf(x) = \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}((\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)|_{\mathbb{Z}^n})(x)$. ■

Corolário 3.2 ***(Soma de Poisson)*** *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi).$$

Prova: Basta tomar $x = 0$ em $Pf(x)$ e usar o item (b) do teorema anterior. ■

Lema 3.6 *Defina $Q_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por,*

$$\langle Q_j, \varphi\rangle := \sum_{|k|\leq j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k\cdot\xi}\varphi(\xi)\ d\xi,$$

para $k \in \mathbb{Z}^n$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $Q_j \to \delta_{\mathbb{Z}^n}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle Q_j, \varphi\rangle &= \sum_{|k|\leq j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k\cdot\xi}\varphi(\xi)\ d\xi \\ &= \sum_{|k|\leq j} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi)(k).\end{aligned}$$

Mas então,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\langle Q_j, \varphi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\sum_{|k|\leq j} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(k)) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi)(k) \\ &\overset{\text{Poisson}}{=} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \\ &= \langle \delta_{\mathbb{Z}^n}, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Portanto $Q_j \to \delta_{\mathbb{Z}^n}$ no sentido de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Definição 3.7 *Dizemos que uma função $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é 1-periódica se a função $x \mapsto a(x, \xi)$ é 1-periódica para todo ξ. Para $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ iremos escrever $\tilde{a} = a|_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}^n}$.*

Teorema 3.7 ***(Periodização de Operadores)*** *Seja $a = a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uma função 1-periódica com respeito a x, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Suponha que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existam constantes reais $C_{\alpha,\beta} > 0$ e $M(\alpha, \beta)$ tais que,*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{M(\alpha,\beta)},$$

para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Se P é o operador periodização então,

$$(P \circ a)(x, D)f = \tilde{a}(x, D) \circ Pf,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Prova: Para $x \in \mathbb{R}^n$ defina,

$$\langle P^x, \varphi \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x+k) \text{ e } \langle P^x_j, \varphi \rangle := \sum_{|k| \leq j} \varphi(x+k),$$

para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $P^x_j \to P^x$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e,

$$\begin{aligned}
P(a(x,D)f)(x) &= \langle P^x, a(x,D)f \rangle \\
&= \lim_{j \to \infty} \langle P^x_j, a(x,D)f \rangle \\
&= \lim_{j \to \infty} \sum_{|k| \leq j} (a(x,D)f)(x+k) \\
&= \lim_{j \to \infty} \sum_{|k| \leq j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x+k)\cdot\xi} a(x+k, \xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)\, d\xi \\
&= \lim_{j \to \infty} \sum_{|k| \leq j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k\cdot\xi} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x, \xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)\, d\xi \\
&= \lim_{j \to \infty} \langle Q_j, \xi \mapsto e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \rangle \\
&= \langle \delta_{\mathbb{Z}^n}, \xi \mapsto e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \rangle \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) \\
&= \tilde{a}(x,D)(Pf)(x).
\end{aligned}$$

∎

Corolário 3.3 *Para $\delta \in [0,1]$ e $\rho \in (0,1]$ vale a igualdade,*

$$Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)) = Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)),$$

isto é, as classes dos operadores pseudodiferenciais 1-periódicos com símbolos em $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ e símbolos toroidais em $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ coincidem.

Corolário 3.4 *Seja $a = a(x,\xi)$ como no teorema (3.7), $g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e V um cubo aberto em $\mathbb{R}^n$ de lado unitário. Suponha que $supp(g|_{\overline{V}}) \subset V$. Então,*

$$\tilde{a}(X,D)g = (P \circ a)(X,D)(g\chi_V),$$

sendo χ_V a função característica do cubo V.

Prova: Vamos escrever $V = (\theta, \theta+1)^n$ para algum $\theta \in \mathbb{Z}$. Observando que $g = Pg|_V$ temos,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g\chi_V)(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g\chi_V(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} (Pg\chi_V)(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} g\chi_V(x+\kappa)\ dx \\
&= \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} \int_{(\kappa+\theta,\kappa+\theta+1)^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x)\ dx \\
&= (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} g)(\xi).
\end{aligned}
$$

Mas então,

$$
\begin{aligned}
P(a(x,D)g\chi_V)(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g\chi_V)(\xi) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} g)(\xi) \\
&= \tilde{a}(x,D)g(x).
\end{aligned}
$$

A primeira igualdade acima foi obtida com o mesmo argumento do teorema anterior. Portanto, $\tilde{a}(x,D)g = P(a(x,D)g\chi_V)$. ■

Como nem sempre temos símbolos periódicos em $\mathbb{R}^n$ pode ser conveniente periodizá-los:

Definição 3.8 ***(Periodização de Símbolos)*** *Seja $a(x,D)$ é um operador pseudodiferencial com símbolo $a(x,\xi)$. A periodização de a é o operador pseudodiferencial $(Pa)(x,D)$ cujo símbolo é dado por,*

$$(Pa)(x,\xi) := \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} a(x+\kappa,\xi).$$

3.6 Cálculo Simbólico

Nesta seção veremos como operações algébricas como adição, produto, composição etc., comportam-se com respeito às classes de símbolo.

Teorema 3.8 *Para $j = 1,2$ seja $\sigma_j \in S^{m_j}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Então $\sigma_1 + \sigma_2 \in S^{m}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, sendo $m = \max\{m_1, m_2\}$.*

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} |\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta(\sigma_1+\sigma_2)(x,\xi)| &\leq |\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma_1(x,\xi)| + |\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma_2(x,\xi)| \\ &\leq C'_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m_1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} + C''_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m_2-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \end{aligned}$$

com $C_{\alpha,\beta} = 2\max\{C'_{\alpha,\beta}, C''_{\alpha,\beta}\}$. ∎

De agora em diante, se A e B são operadores pseudodiferenciais periódicos com símbolos σ_A e σ_B, respectivamente, iremos escrever $\sigma_A \sim \sigma_B$ se $\sigma_A - \sigma_B \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

A seguir mostramos que operadores amplitude são simplesmente operadores pseudodiferenciais periódicos e fornecemos um método de calcular o símbolo módulo $S^{-\infty}$ a partir da amplitude.

Teorema 3.9 *Sejam $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ e $a \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$. Então existe um único símbolo toroidal $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ satisfazendo $Op(a) = Op(\sigma)$ e,*

$$\sigma(x,\xi) \sim \sum_{\gamma\geq 0} \frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a(x,y,\xi)|_{y=x}.$$

Prova: Seja σ o símbolo correspondente ao operador amplitude $\mathrm{Op}(a)$, o qual é único. Vamos mostrar que $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Observe que,

$$\begin{aligned} \sigma(x,\xi) &= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{Op}(a)e_\xi(x) \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\eta}a(x,y,\eta)e^{2\pi i y\cdot\xi}\,dy \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i y\cdot(\eta-\xi)}a(x,y,\eta)\,dy \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\hat{a}(x,\eta-\xi,\eta). \end{aligned}$$

Aplicando-se a fórmula de Taylor discreta,

$$\begin{aligned} \sigma(x,\xi) &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\hat{a}(x,\eta-\xi,\eta) \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\hat{a}(x,\eta,\xi+\eta) \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma \hat{a}(x,\eta,\xi)\eta^{(\gamma)} \\ &+ \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}R_N(x,\eta,\xi,\eta), \end{aligned}$$

sendo $R_N(x,\eta,\xi,p)$ o erro da expansão de Taylor discreta de $\hat{a}(x,\eta,\xi+p)$. Vamos escrever,

$$E_N(x,\xi) := \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} R_N(x,\eta,\xi,\eta).$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned} D_y^{(\gamma)} a(x,y,\xi) &= D_y^{(\gamma)} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i y\cdot\eta}\hat{a}(x,\eta,\xi) \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i y\cdot\eta}\eta^{(\gamma)}\hat{a}(x,\eta,\xi), \end{aligned}$$

e assim,,

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{|\gamma|<N} \frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a(x,y,\xi)|_{y=x} + E_N(x,\xi).$$

As estimativas em [6], pg. 354, implicam $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ e,

$$\sigma(x,\xi) \sim \sum_{\gamma\geq 0} \frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a(x,y,\xi)|_{y=x}.$$

■

Este resultado será fundamental para obtermos expansões assintóticas para os símbolos dos operadores transposto e adjunto.

Definição 3.9 ***(Operador Transposto)*** *O transposto de um operador $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é o operador $A^t : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisfaz,*

$$\int_{\mathbb{T}^n} Av(x)u(x)\ dx = \int_{\mathbb{T}^n} v(x)A^t u(x)\ dx,$$

para todo $u,v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Vamos mostrar que a classe $\mathrm{Op}(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n))$ é fechada em relação a transposição de operadores e vamos obter uma expansão assintótica para σ_{A^t}.

Teorema 3.10 *Sejam $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ e considere $A \in Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n))$. Então $A^t \in Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n))$ e,*

$$\sigma_{A^t}(x,\xi) \sim \sum_{\gamma\geq 0} \frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma D_x^{(\gamma)}\sigma_A(x,-\xi).$$

Prova: Sejam $u,v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Se A tem amplitude $a(x,y,\xi) = \sigma_A(x,\xi)$ temos,

$$\int_{\mathbb{T}^n} v(x)A^t u(x)\ dx \quad = \quad \int_{\mathbb{T}^n} u(y)Av(y)\ dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}^n} u(y) \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) v(x)\ dx \right)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) u(y) v(x)\ dx \right)\ dy \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) u(y) v(x)\ dx\ dy \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) u(y) v(x)\ dy\ dx \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} v(x) \left(\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) u(y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} v(x) \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (y-x)\cdot\xi} a(y,x,\xi) u(y)\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} v(x) \mathrm{Op}(a^t) u(x)\ dx,
\end{aligned}
$$

com $a^t(x,y,\xi) = a(y,x,-\xi)$. Portanto, $A^t = \mathrm{Op}(a^t)$. Por fim, aplicando-se o teorema anterior:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{A^t}(x,\xi) &\sim \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a^t(x,y,\xi)|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a(y,x,-\xi)|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} \sigma_A(y,-\xi)|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_x^{(\gamma)} \sigma_A(x,-\xi).
\end{aligned}
$$

■

Corolário 3.5 *Sejam $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Se $A = Op(a) \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ então $A^t = Op(a^t) \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ e $a^t(y,x,\xi) = a(y,x,-\xi)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^n$.*

A seguir mostraremos um resultado análogo para o operador adjunto.

Definição 3.10 ***(Operador Adjunto)*** *O operador adjunto de $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é o operador $A^* : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisfaz,*

$$
\int_{\mathbb{T}^n} A^* u(x) \overline{\varphi(x)}\ dx = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) \overline{A\varphi(x)}\ dx,
$$

para todo $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Teorema 3.11 *Sejam $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ e considere $A = Op(\sigma_A) \in Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Então*

$A^* := Op(\sigma_{A^*}) \in Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ *e,*

$$\sigma_{A^*}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \Delta_\xi^\alpha D_x^{(\alpha)} \overline{\sigma_A(x,\xi)}.$$

Prova: Sejam $u, v \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Se A tem amplitude $a(x,y,\xi) = \sigma_A(x,\xi)$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} A^*u(x)\overline{v(x)}\, dx &= \int_{\mathbb{T}^n} u(y)\overline{Av(y)}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} u(y) \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi) v(x)}\, dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi)} u(y) \overline{v(x)}\, dx \right) dy \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi)} u(y) \overline{v(x)}\, dx\, dy \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi)} u(y) \overline{v(x)}\, dy\, dx \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \overline{v}(x) \left(\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi)} u(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \overline{v(x)} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} \overline{a(y,x,\xi)} u(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \overline{v(x)} \mathrm{Op}(a^*) u(x)\, dx,
\end{aligned}$$

com $a^*(x,y,\xi) = \overline{a(y,x,\xi)}$. Portanto, $A^* = \mathrm{Op}(a^*)$. Por fim, aplicando-se o teorema (3.9),

$$\begin{aligned}
\sigma_{A^*}(x,\xi) &\sim \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} a^*(x,y,\xi)|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} \overline{a(y,x,\xi)}|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} \overline{\sigma_A(y,\xi)}|_{y=x} \\
&= \sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma D_y^{(\gamma)} \overline{\sigma_A(x,\xi)}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.6 *Sejam* $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. *Se* $A = Op(a) \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ *então* $A^* = Op(a^*) \in \mathcal{A}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n)$ *e* $a^*(y,x,\xi) = \overline{a(y,x,\xi)}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Teorema 3.12 ***(Produto de Símbolos)*** *Se* $\sigma_A \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *e* $\sigma_B \in S^\ell_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *então* $\sigma_A\sigma_B \in S^{m+\ell}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

Prova: Aplicando-se as fórmulas de Leibnitz clássica e discreta temos

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta[\sigma_B(x,\xi)\sigma_A(x,\xi)]| &= \left|\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\Delta_\xi^\alpha[\partial_x^\gamma\sigma_B(x,\xi)\partial_x^{\beta-\gamma}\sigma_A(x,\xi)]\right| \\
&= \left|\sum_{\gamma\le\beta}\sum_{\omega\le\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\omega}(-1)^{|\alpha-\omega|}[\partial_x^\gamma\Delta_\xi^\omega\sigma_B(x,\xi)]\Delta_\xi^{\alpha-\omega}\partial_x^{\beta-\gamma}\sigma_A(x,\xi+\omega)\right| \\
&\le \sum_{\gamma\le\beta}\sum_{\omega\le\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\omega}|\Delta_\xi^\omega\partial_x^\gamma\sigma_B(x,\xi)||\Delta_\xi^{\alpha-\omega}\partial_x^{\beta-\gamma}\sigma_A(x,\xi+\omega)| \\
&\le C_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma\le\beta}\sum_{\omega\le\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\omega}C^B_{\gamma,\omega}\langle\xi\rangle^{\ell-\rho|\omega|+\delta|\gamma|} \\
&\times\ C^A_{\beta-\gamma,\alpha-\omega}\langle\xi+\omega\rangle^{m-\rho|\alpha-\omega|+\delta|\beta-\gamma|} \\
&\le C_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma\le\beta}\sum_{\omega\le\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\omega}C^B_{\gamma,\omega}\langle\xi\rangle^{(m+\ell)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\
&\times\ C^A_{\beta-\gamma,\alpha-\omega}\langle\omega\rangle^{|m-\rho|\alpha-\omega|+\delta|\beta-\gamma||} \\
&\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{(m+\ell)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.13 ***(Composição de Símbolos)*** *Sejam $0 \le \delta < \rho \le 1$, $A \in Op(S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ e $B \in Op(S^\ell_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Então $BA \in Op(S^{m+\ell}_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Além do mais,*

$$\sigma_{BA}(x,\xi) \sim \sum_{\gamma\ge 0}\frac{1}{\gamma!}[\Delta_\xi^\gamma\sigma_B(x,\xi)]D_x^{(\gamma)}\sigma_A(x,\xi).$$

Prova: Observe inicialmente que,

$$\begin{aligned}
\sigma_{BA}(x,\xi) &= e^{-2\pi i x\cdot\xi}[BAe_\xi(x)] \\
&= e^{-2\pi i x\cdot\xi}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\eta}\sigma_B(x,\eta)Ae_\xi(y)\ dy \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}\sigma_B(x,\eta)e^{-2\pi i y\cdot\xi}Ae_\xi(y)\ dy \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)}\sigma_B(x,\eta)\sigma_A(y,\xi)\ dy \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\sigma_B(x,\eta)\int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi y\cdot(\eta-\xi)}\sigma_A(y,\xi)\ dy \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)}\sigma_B(x,\eta)\hat{\sigma_A}(\eta-\xi,\xi) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi x\cdot\eta}\sigma_B(x,\eta+\xi)\hat{\sigma_A}(\eta,\xi).
\end{aligned}$$

Agora, usando a expansão de Taylor discreta de $\sigma_B(x, \eta+\xi)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\sigma_{BA}(x,\xi) &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\sigma_B(x,\eta+\xi)\hat{\sigma_A}(\eta,\xi) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\left[\sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\Delta_\xi^\gamma\sigma_B(x,\xi)\eta^{(\gamma)} + R_N(x,\xi,\eta)\right]\hat{\sigma_A}(\eta,\xi) \\
&= \sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\left[\Delta_\xi^\gamma\sigma_B(x,\xi)\right]\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}\hat{\sigma_A}(\eta,\xi)\eta^{(\gamma)} \\
&+ \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}R_N(x,\xi,\eta)\hat{\sigma_A}(\eta,\xi) \\
&= \sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\left[\Delta_\xi^\gamma\sigma_B(x,\xi)\right]D_x^{(\gamma)}\sigma_A(x,\xi) + E_N(x,\xi),
\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}
D_x^{(\gamma)}\sigma_A(x,\xi) &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} D_x^{(\gamma)}e^{2\pi i x\cdot\eta}\hat{\sigma_A}(\eta,\xi) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\beta\leq\gamma} S_\gamma^{(\beta)}D_x^\gamma e^{2\pi i x\cdot\eta}\hat{\sigma_A}(\eta,\xi) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\beta\leq\gamma} S_\gamma^{(\beta)}\eta^{(\gamma)}e^{2\pi i x\cdot\eta}\hat{\sigma_A}(\eta,\xi).
\end{aligned}$$

Acima,

$$E_N(x,\xi) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta}R_N(x,\xi,\eta)\hat{\sigma_A}(\eta,\xi).$$

A primeira soma está em $S_{\rho,\delta}^{m+\ell}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ ao passo que $E_N \in \mathcal{S}_{\rho,\delta}^{m+\ell-\rho N}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$ e portanto $\sigma_{BA} \in S_{\rho,\delta}^{m+\ell}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n)$. ■

3.7 Operadores Pseudodiferenciais Elíticos

Nesta seção introduzimos os operadores pseudodiferenciais elíticos e mostramos que eliticidade equivale a existência de uma parametriz, isto é, uma inversa módulo certa classe de símbolo. Tais operadores são úteis para se estudar, por exemplo, regularidade de solução. Para aplicações desta classe de operadores, o leitor pode consultar, por exemplo, [9] para o caso euclidiano.

Definição 3.11 *Dizemos que o operador pseudodiferencial $A \in Op(S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n))$ é elítico de ordem $m\in\mathbb{R}$ se existem constantes $n_0, c_0 > 0$ tais que:*

$$|\sigma_A(x,\xi)| \geq c_0\langle\xi\rangle^m, \tag{3.12}$$

para todo $(x,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ *com* $|\xi| \geq n_0$.

Observação 3.5 *Na definição acima* c_0 *não desempenha qualquer papel significativo, pois* A *difere apenas por um operador em* $Op(S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ *de um operador pseudo-diferencial periódico que satisfaz a a desigualdade* (3.12) *para todo* $\xi \in \mathbb{Z}^n$. *Portanto, para um operador elítico* A, *sempre podemos supor que vale* $|\sigma_A(x,\xi)| \geq c_0\langle\xi\rangle^m$ *para todo* $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Precisaremos do seguinte resultado técnico.

Lema 3.7 *Seja* $\sigma \in S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *e* $\tau \in S^\ell(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *um símbolo elítico. Então* $\sigma/\tau \in S^{m-\ell}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ *e* $1/\tau$ *é elítico de ordem* $-\ell$.

Prova: Pela observação 3.5 podemos supor que τ nunca se anula de forma que podemos considerar o quociente σ/τ. Vejamos como derivadas e diferenças agem sobre σ/τ. Usando-se a regra do quociente,

$$\partial_{x_j}\frac{\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)} = \frac{\tau(x,\xi)\partial_{x_j}\sigma(x,\xi) - \sigma(x,\xi)\partial_{x_j}\tau(x,\xi)}{\tau(x,\xi)^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_k}\frac{\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)} &= \frac{\sigma(x,\xi+\delta_k)}{\tau(x,\xi+\delta_k)} - \frac{\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)} \\
&= \frac{\sigma(x,\xi+\delta_k)\tau(x,\xi) - \tau(x,\xi+\delta_k)\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)\tau(x,\xi+\delta_k)} \\
&= \frac{\tau(x,\xi)[\sigma(x,\xi+\delta_k) - \sigma(x,\xi)] - \sigma(x,\xi)[\tau(x,\xi+\delta_k) - \tau(x,\xi)]}{\tau(x,\xi)\tau(x,\xi+\delta_k)} \\
&= \frac{\tau(x,\xi)\Delta_{\xi_k}\sigma(x,\xi) - \sigma(x,\xi)\Delta_{\xi_k}\tau(x,\xi)}{\tau(x,\xi)\tau(x,\xi+\delta_k)}.
\end{aligned}$$

Defina então $\sigma_{0,0} := \sigma$, $\tau_{0,0} := \tau$ e recursivamente,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha,\beta+\delta_j}(x,\xi) &:= \tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)\partial_{x_j}\sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi) - \sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi)\partial_{x_j}\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi) \\
\tau_{\alpha,\beta+\delta_j}(x,\xi) &= \tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)^2 \\
\sigma_{\alpha+\delta_k,\beta}(x,\xi) &= \tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)\Delta_{\xi_k}\sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi) - \sigma_{\alpha,\beta}\Delta_{\xi_k}\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi) \\
\tau_{\alpha+\delta_k,\beta}(x,\xi) &= \tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi+\delta_k).
\end{aligned}$$

Pelo lema (3.12) temos que $\sigma_{\alpha,\beta}$ e $\tau_{\alpha,\beta}$ são símbolos de operadores pseudodiferenciais periódicos. Note que vale,

$$\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta\frac{\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)} = \frac{\sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi)}{\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)}.$$

Para ver isto basta observar que para todo $|\gamma| \leq |\beta|$ e $|\theta| \leq |\alpha|$,

$$\partial_{x_j}^{\beta_j} \frac{\sigma_{0,\gamma}(x,\xi)}{\tau_{0,\gamma}(x,\xi)} = \frac{\sigma_{0,\gamma+\beta_j\delta_j}}{\tau_{0,\gamma+\beta_j\delta_j}(x,\xi)} \text{ e } \Delta_{\xi_j}^{\alpha_j} \frac{\sigma_{\theta,\beta}(x,\xi)}{\tau_{\theta,\beta}(x,\xi)} = \frac{\sigma_{\theta+\alpha_j\delta_j,\beta}}{\tau_{\theta+\alpha_j\delta_j,\beta}},$$

e lembrar que $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ e $\Delta_\xi^\alpha = \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n}$. Consequentemente, por indução sobre α e β,

$$|\sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{(2^{|\alpha+\beta|}-1)\ell + m - |\alpha|}$$
$$c'_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{2^{|\alpha+\beta|}\ell} \leq |\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)| \leq c''_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{2^{|\alpha+\beta|}\ell},$$

para constantes apropriadas $c_{\alpha,\beta}, c'_{\alpha,\beta}, c''_{\alpha,\beta} > 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left| \Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{\sigma(x,\xi)}{\tau(x,\xi)} \right| &= \left| \frac{\sigma_{\alpha,\beta}(x,\xi)}{\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)} \right| \\ &\leq \frac{c_{\alpha,\beta}}{c'_{\alpha,\beta}} \langle \xi \rangle^{(2^{|\alpha+\beta|}-1)\ell + m - |\alpha|} \langle \xi \rangle^{-2^{|\alpha+\beta|}\ell} \\ &= c'''_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{(m-\ell)-|\alpha|}, \end{aligned}$$

e portanto $\sigma/\tau \in S^{m-\ell}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Por fim, tomando-se $\alpha = \beta = 0$ na desigualdade,

$$|\tau_{\alpha,\beta}(x,\xi)| \leq c'_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{2^{|\alpha+\beta|}\ell},$$

vemos que $1/\tau$ é elítico de ordem $-\ell$. ■

Definição 3.12 *Seja $A \in Op(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Dizemos que $B \in Op(S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ se e $BA \sim I \sim AB$.*

A seguir mostraremos que eliticidade equivale a existência de uma parametriz.

Teorema 3.14 ***(Elítico ⇔ Parametriz)*** *Um operador $A \in Op(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ é elítico se, e somente se, admite uma parametriz.*

Prova: Suponha que $A \in \mathrm{Op}(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ e que existe $B \in \mathrm{Op}(S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ tal que $BA = I - T$ e $AB = I - T'$ com $T, T' \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Mostremos que A é elítico. Observe que,

$$1 - \sigma_{BA} = \sigma_T \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n),$$

pois,

$$\begin{aligned} \sigma_T(x,\xi) &= \sigma_{I-BA}(x,\xi) \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\xi}(I - BA)e^{2\pi i x\cdot\xi} \\ &= e^{-2\pi i x\cdot\xi} I e^{2\pi i x\cdot\xi} - e^{-2\pi i x\cdot\xi} BA e^{2\pi i x\cdot\xi} \end{aligned}$$

$$= \quad 1 - \sigma_{BA}(x, \xi).$$

Mas pelos teoremas (3.8) e (3.12) temos $1 - \sigma_B \sigma_A \in S^{-1}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, logo existe $C > 0$ tal que,

$$|1 - \sigma_B \sigma_A(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{-1}.$$

Usando isto e a desigualdade,

$$1 = |1 - \sigma_B \sigma_A + \sigma_B \sigma_A| \leq |1 - \sigma_B \sigma_A| + |\sigma_B||\sigma_A|,$$

obtemos $1 - |\sigma_B \sigma_A| \leq C\langle \xi \rangle^{-1}$ ou de forma equivalente $|\sigma_B||\sigma_A| \geq 1 - C\langle \xi \rangle^{-1}$. Escolhendo-se $n_0 > C$ temos que,

$$|\sigma_B(x, \xi)||\sigma_A(x, \xi)| \geq 1 - C\langle n_0 \rangle^{-1},$$

para todo $|\xi| \geq n_0$, pois,

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^2 = 1 + |\xi|^2 \geq 1 + n_0^2 &\Rightarrow \langle \xi \rangle \geq \langle n_0 \rangle \\ &\Rightarrow C\langle n_0 \rangle^{-1} \geq C\langle \xi \rangle^{-1} \\ &\Rightarrow 1 - C\langle n_0 \rangle^{-1} \leq 1 - C\langle \xi \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\sigma_B \in S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ vale,

$$|\sigma_B(x, \xi)| \leq C_0 \langle \xi \rangle^{-m},$$

e portanto $1/|\sigma_B(x, \xi)| \geq C_0\langle \xi \rangle^m$ o que implica $|\sigma_A(x, \xi)| \geq c_0 \langle \xi \rangle^m$ sempre que $|\xi| \geq n_0$ com $c_0 = C_0(1 - C\langle n_0 \rangle^{-1})$. Portanto, A é elítico de ordem m.

Por outro lado, suponha que $A \in \mathrm{Op}(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ é elítico. Seja B_0 o operador pseudodiferencial periódico com símbolo $\sigma_{B_0}(x, \xi) := 1/\sigma_A(x, \xi)$. Então, pelo lema anterior $\sigma_{B_0} \in S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Além do mais, $\sigma_{B_0}\sigma_A \sim 1 \in S^0(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Então,

$$\sigma_{B_0 A} = \sigma_{B_0}\sigma_A - \sigma_T \sim 1 - \sigma_T,$$

para algum $\sigma_T \in S^{-1}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ ou, equivalentemente, $B_0 A \sim I - T$. Seja R um operador pseudodiferencial periódico satisfazendo $R \sim \sum_{j=0}^{\infty} T^j$. Então,

$$(RB_0)A = R(B_0 A) \sim \sum_{j=0}^{\infty} T^j (I - T) = I.$$

Portanto, $B := RB_0$ é o candidato a paramatriz de A. Com o mesmo raciocínio podemos obter $B' \in \mathrm{Op}(S^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ satisfazendo $AB' \sim I$. Observando que,

$$B' \sim (BA)B' = B(AB') \sim B,$$

temos $AB \sim AB^{'} \sim I$, o que encerra a prova. ■

Corolário 3.7 *Seja $A \in Op(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ um operador pseudodiferencial periódico. Então:*

(a) *A é elítico se, e somente se, $A^* \in Op(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ é elítico.*

(a) *A é elítico se, e somente se, $A^t \in Op(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ é elítico.*

Prova: (a) Já mostramos que $A^* \in \mathrm{Op}(S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Suponha agora A elítico com parametriz B, isto é, $BA = I - T$ e $AB = I - T^{'}$ com $T, T^{'} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. Então A^* tem B^* como parametriz pois,

$$B^*A^* = I - T^{'*} \text{ e } A^*B^* = I - T^*,$$

com $T^*, T^{'*} \in \mathrm{Op}(S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$. A outra implicação é imediata, pois, $(A^*)^* = A$.
(b) A prova é análoga a (a). ■

Por fim, vejamos que extensões respeitam eliticidade.

Teorema 3.15 *Sejam $\tilde{a} \in S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n))$ e $a \in S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Então $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$ é elítico se, e somente se, a é elítico.*

Prova: Restringindo a condição,

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n : |\xi| \geq n_0 \Rightarrow |\sigma_A(x,\xi)| \geq c_0 \langle \xi \rangle^m,$$

a $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ vemos que se a é elítico então $\tilde{a}$ também é elítico.
Se $\xi \in \mathbb{R}^n$ podemos encontrar $\eta \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\xi \in [\eta, \eta + 1]^n$. Podemos supor η e ξ suficientemente grandes. Tomando-se a expansão de Taylor de a em η obtemos,

$$a(x,\xi) = a(x,\eta) + \sum_{|\alpha|=1} (\eta - \xi)^\alpha \int_0^t (1-t) \partial_\xi^\alpha a(x, \xi + t(\xi - \eta))\, dt.$$

Como $\tilde{a}$ é elítico,

$$|a(x,\eta)| = |\tilde{a}(x,\eta)| \geq C \langle \eta \rangle^m \geq C^{'} \langle \xi \rangle^m.$$

Por outro lado, como $\langle \eta - \xi \rangle \leq \langle n \rangle$,

$$\begin{aligned} |r_\alpha(x, \xi - \eta)| &= \sum_{|\alpha|=1} \langle \eta - \xi \rangle^{|\alpha|} \int_0^1 |1-t| |\partial_\xi^\alpha a(x, \xi + t(\xi - \eta))|\, dt \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=1} \langle \eta - \xi \rangle \langle t(\xi - \eta) \rangle^{m-1} \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=1} \langle n \rangle \langle \xi - \eta \rangle^{m-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad C' \sum_{|\alpha|=1} \langle \xi \rangle^{m-1} \langle \eta \rangle^{|m-1|} \\
&\leq \quad C'' \langle \xi \rangle^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Mas então,

$$
\begin{aligned}
|a(x,\xi)| &\geq |\tilde{a}(x,\xi)| - |r_\alpha(x,\xi)| \\
&\geq C' \langle \xi \rangle^{m} - C'' \langle \xi \rangle^{m-1} \\
&\geq C''' \langle \xi \rangle^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Portanto a é elítico. ■

REFERÊNCIAS

[1] IORIO, R., IORIO, V. **Equações Diferenciais Parciais - Uma Introdução**. IMPA, Rio de Janeiro, 2 ed.

[2] GRAFAKOS, L. **Classical Fourier Analysis**. Spinger, 2 ed., 2008.

[3] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. United States of America: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[4] NIRENBERG, L. **Pseudo-differential Operators**. Centro Internazionale Matematico Estivo, Italy, 1968.

[5] RUDIN, W. **Functional Analysis**. United States of America: McGraw Hill Inc., 1973.

[6] RUZHANSKY M., TURUNEN V. **On the Fourier Analysis of Operators on the Torus**. Modern Trends in pseudo-differential operators, 87-105, Birkhäuser, Basel, 2007.

[7] RUZHANSKY M., TURUNEN V. **Pseudo-Differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[8] RUZHANSKY M., TURUNEN V. **Quantization of Pseudo-differential operators on the torus**. J. Fourier Anal. Appli. 16 (2010), no. 6, 943-982.

[9] TAYLOR, M. **Partial Differential Equations II: Qualitative Studies of Linear Equations**. Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag.

[10] TURUNEN, V., VAINIKKO, G. **On Symbol Analysis of Periodic Pseudo-differential Operators**. Z. Anal. Anwendungen 17 (1998), no. 1, 9-22.

[11] WONG, M. W. **An introdution to Pseudo-Differential Operators**. World Scientific Publishing Co., Inc., 1999.

[12] ZANI, S. L. **Hipoeliticidade Global para Operadores de Segunda Ordem**. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 1988.