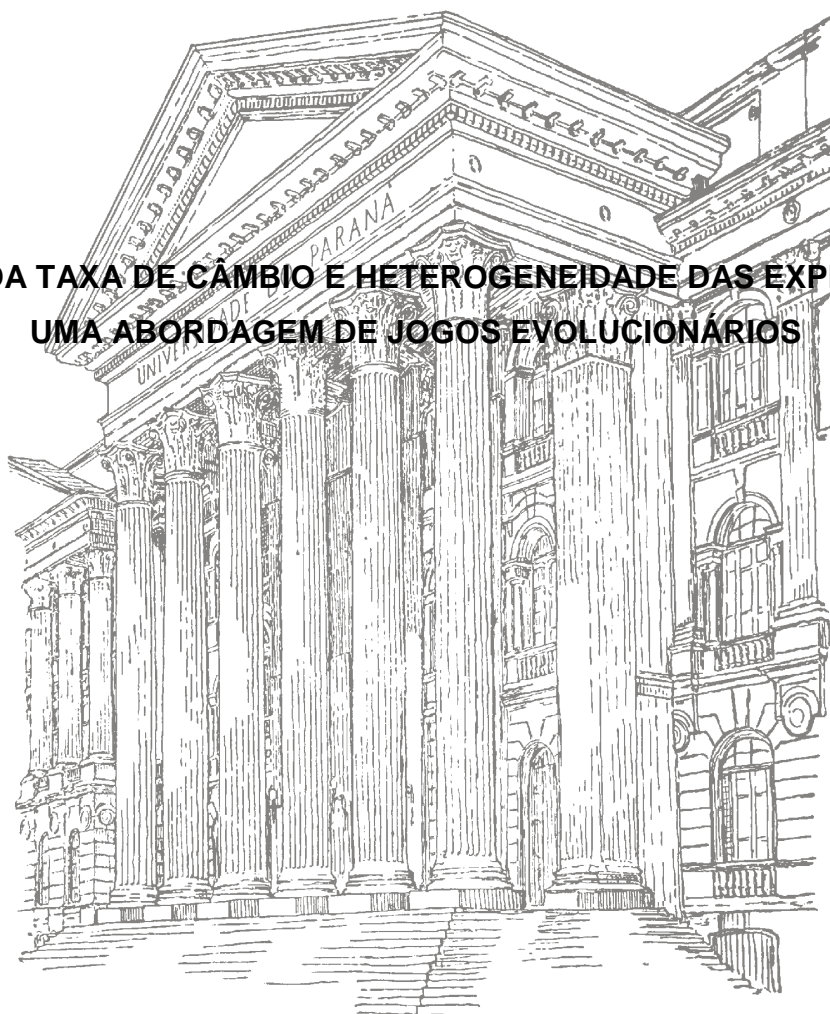


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CARLOS EDUARDO IWAI DRUMOND

**DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE DAS EXPECTATIVAS:
UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS**



CURITIBA

2014

CARLOS EDUARDO IWAI DRUMOND

**DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE DAS EXPECTATIVAS:
UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS**

Tese apresentada ao curso de Doutorado em
Desenvolvimento Econômico da
Universidade Federal do Paraná, como
exigência para a obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. João Basílio Pereima
Neto

CURITIBA

2014

TERMO DE APROVAÇÃO

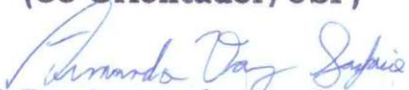
Carlos Eduardo Iwai Drumond

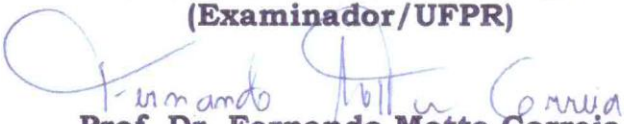
“Dinâmica da Taxa de Câmbio e Heterogeneidade das Expectativas: Uma abordagem de Jogos Evolucionários”

TESE APROVADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DESENVOLVIMENTO ECONÔMICO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ, PELA SEGUINTE BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. João Basílio Pereima Neto
(Orientador/UFPR)


Prof. Dr. Gilberto Tadeu Lima
(Co-Orientador/USP)


Prof. Dr. Armando Vaz Sampaio
(Examinador/UFPR)


Prof. Dr. Fernando Motta Correia
(Examinador/UFPR)


Prof. Dr. Ricardo Silva Azevedo Araujo
(Examinador/UNB)

06 de junho de 2014

... a dúvida e a idéia são indissociáveis
(Albert O. Hirschman)

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível com a ajuda de muitas pessoas queridas. Peço perdão às que não aparecem listadas abaixo.

Em primeiro lugar tenho que agradecer a Deus, em quem creio profundamente, sendo grato pela vida e pelos caminhos que me possibilitou trilhar até aqui. Agradeço pelo carinho e apoio constante da minha família, sem o qual a tarefa de fazer esse trabalho seria mais difícil. Cito em especial meus pais Adem e Nanci e minha esposa Leidiane, companheira desde a época da graduação.

Agradeço aos amigos do PPGDE-UFPR, Cleiton, que me auxiliou inúmeras vezes com comentários e sugestões durante este trabalho, Karlo, Gilberto, Leonardo e Arno, de quem obtive apoio constante durante a realização desta tese.

Agradeço ao amigo Josué pelo apoio durante o período em que estive na FEA-USP.

Sou muito grato ao meu orientador João Basílio Pereima, pela orientação, dedicação e amizade.

Agradeço ao meu co-orientador, professor Gilberto Tadeu Lima, pela motivação inicial para esse trabalho, pelas contribuições valiosas e pelo apoio durante o período em que estive na FEA-USP.

Agradeço aos professores Armando Vaz Sampaio e Fernando Motta pelas contribuições na qualificação desta tese e por aceitarem participar da minha banca. Agradeço também ao professor Ricardo Araújo por aceitar participar da minha banca.

Agradeço aos vários funcionários da UFPR que tornam nosso trabalho possível, dos quais cito nominalmente a secretária da Pós-Graduação Ivone.

Agradeço à CAPES, que me forneceu bolsa nos primeiros momentos do doutorado.

Agradeço também à UESC e aos colegas do Departamento de Economia da UESC pela liberação pelo período de um ano para finalização do meu trabalho de tese.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	2
LISTA DE FIGURAS	2
RESUMO.....	3
ABSTRACT	4
1. INTRODUÇÃO	5
2. NOTAS SOBRE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS.....	10
2.1 ESTRATÉGIAS EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEIS.....	10
2.2 DINÂMICAS EVOLUCIONÁRIAS E DINÂMICA DE REPLIÇÃO	15
2.3 DINÂMICAS EVOLUCIONÁRIAS E MICROFUNDAMENTOS	22
2.4 CONCLUSÕES PRELIMINARES.....	25
3. MODELOS DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL: UMA REVISÃO DA LITERATURA	27
3.1 CHARTISTAS, FUNDAMENTALISTAS E GESTORES DE PORTFÓLIO: O MODELO DE FRANKEL E FROOT	27
3.2 CHARTISTAS FUNDAMENTALISTAS E ESPECULADORES RACIONAIS: O MODELO DE FRENKEL.....	34
3.3 FUNDAMENTALISTAS COM REGRA DE DECISÃO NÃO LINEAR.....	42
3.4 SELEÇÃO ENDÓGENA DE ESTRATÉGIAS E APRENDIZAGEM.....	47
3.5 CONCLUSÕES PRELIMINARES.....	49
4. DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE DAS EXPECTATIVAS: UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS.....	51
4.1 O MODELO DE DORNBUSCH E O OVERSHOOTING	52
4.2 DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO COM HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL.....	56
4.3 DINÂMICA EVOLUCIONÁRIA DA HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL	66
5. CONCLUSÕES	76
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Matriz de payoffs (Hawk-Dove Game)	14
Tabela 2.2 – Matriz de payoffs (Dynamics-Hawk-Dove Game)	19

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama de fases (Dynamics-Hawk-Dove Game)	21
Figura 3.1 – Trajetória do Câmbio (apreciação cambial)	32
Figura 3.2 – Trajetória do <i>share</i> dos fundamentalistas (ω)	32
Figura 3.3 – Trajetória do Câmbio (depreciação cambial)	33
Figura 3.4 – Dinâmica do câmbio com o mercado dominado por chartistas	38
Figura 3.5 – Dinâmica do câmbio com chartistas e fundamentalistas	40
Figura 3.6 – Dinâmica do câmbio com chartistas, fundamentalistas e especuladores racionais	41
Figura 3.7 – Dinâmica do câmbio e da demanda por títulos	44
Figura 3.8 – Dinâmica do câmbio (<i>bull and bear markets</i>)	45
Figura 3.9 – Dinâmica do câmbio	46
Figura 3.10 – Dinâmica do câmbio com estratégias endógenas	49
Figura 3.11 – Dinâmica da estratégia chartista	49

RESUMO

Seguindo a evidência empírica de que as expectativas de taxa de câmbio são heterogêneas e formadas principalmente por meio de mecanismos de racionalidade limitada, o objetivo principal deste trabalho é estender o modelo de Dornbusch (1976), incorporando expectativas cambiais heterogêneas. Como no modelo de Dornbusch, contudo, independentemente de como o comportamento limitadamente racional é especificado, no curto prazo, uma expansão monetária causará um *overshooting* da taxa de câmbio em relação ao seu valor de longo prazo. No entanto, a extensão do *overshooting* (e, portanto, a volatilidade de curto prazo da taxa de câmbio) depende da distribuição de frequência das estratégias de formação das expectativas cambiais. A distribuição das estratégias de previsão da taxa de câmbio segue uma dinâmica evolucionária. Em linha com a evidência empírica, as duas estratégias de formação de expectativas podem sobreviver no longo prazo. Assim, a previsão perfeita por parte de todos os agentes não é uma condição necessária para a realização dos valores fundamentais da taxa de câmbio. Uma importante implicação do modelo é que a heterogeneidade das expectativas tem impactos sobre a volatilidade da taxa de câmbio.

Palavras-chave: Dinâmica da taxa de câmbio, Expectativas heterogêneas, Dinâmica Evolucionária.

ABSTRACT

As there is compelling empirical evidence that exchange rate expectations are heterogeneous and formed mostly through boundedly rational mechanisms, the present work aims to extend Dornbusch' (1976) model by incorporating heterogeneous exchange rate expectations. As in the Dornbusch model, but regardless of how boundedly rational behavior is specified, in the short run the exchange rate adjusts to a domestic monetary expansion by overshooting its long-run response. However, the overshooting (and hence the short-run volatility of the exchange rate) depends on the frequency distribution of strategies to form exchange rate expectations. The frequency distribution of exchange rate forecasting strategies follows an evolutionary dynamics. In line with the empirical evidence, both strategies to form exchange rate expectations can survive in the long run. Yet perfect foresight by all agents is not a necessary condition for realization of the fundamental values of the exchange rate and price level. An important implication of the model is then that expectations heterogeneity does matter for the volatility of the exchange rate.

Keywords: Exchange Rate Dynamics, Heterogeneous Expectations, Evolutionary Dynamics.

1. INTRODUÇÃO

Encontrar explicações teóricas para a determinação da taxa de câmbio tem sido um grande desafio para os economistas, o que torna essa área de pesquisa prolifera em teorias concorrentes. Dentro da tradição keynesiana, os primeiros esforços teóricos nesse campo remetem aos trabalhos de Lerner (1936), Metzler (1942a, 1942b), Habberger (1950), Laursen e Metzler (1950) e Alexander (1952), focados na importância das elasticidades da demanda e oferta das importações, assim como, na demanda e oferta de moeda estrangeira para determinação do câmbio. Embora nos anos cinquenta alguns outros avanços tenham ocorrido, é nos anos sessenta que surge, a partir dos trabalhos de Mundell (1961, 1962, 1963) e Fleming (1962), o arcabouço Mundell-Fleming, que viria a se tornar o primeiro *workhorse* da área, presente até hoje nos livros textos intermediários de macroeconomia. Nos anos setenta, conforme a macroeconomia sofria transformações importantes, os modelos monetários de câmbio com preços flexíveis, à exemplo de Frenkel (1976) e Mussa (1976,1979), ganharam bastante espaço, contudo o trabalho de maior impacto nesse período foi o modelo desenvolvido por Dornbusch (1976), que viria a ser conhecido como modelo *overshooting* ou *sticky-price monetary model*. A grande inovação do modelo de Dornbusch foi incorporar a rigidez de preços (no curto prazo) em um modelo com previsão perfeita (expectativas racionais) gerando resultados que pareciam ajudar na compreensão da volatilidade cambial verificada nos regimes de câmbio flexível. Mais recentemente, o trabalho seminal de Obstfeld e Rogoff (1995) inaugurou o que ficou conhecido como *new-open-economy-macroeconomics*, modelando a determinação da taxa de câmbio com microfundamentos convencionais, rigidez nominal e competição imperfeita.¹

Desde do texto de Meesse e Rogoff (1983), mostrando que a hipótese de random walk explicava melhor a dinâmica da taxa de câmbio que os modelos padrões da época, uma série de *puzzles* foram sendo elencados, apontando o baixo desempenho empírico dos modelos de câmbio. Alguns exemplos destas anomalias são, i) o fato da taxa de câmbio parecer estar descolada dos fundamentos em grande

¹ Uma revisão detalhada sobre as teorias cambiais mais significativas pode ser encontrada em Sarno e Taylor (2002), incluindo alguns modelos importantes que não foram citados no texto.

parte do tempo, ii) o excesso de volatilidade da taxa de câmbio, acima da volatilidade das variáveis macroeconômicas, iii) não normalidade da distribuição dos retornos no mercado de câmbio. (CHIARELLA, HE E ZHENG, 2013; WESTERHOFF, 2009)

Uma das linhas em que a investigação empírica avançou foi buscando responder a essas anomalias através da compreensão da microestrutura do mercado cambial, havendo indícios de que tais puzzles podiam estar relacionados com o fato das expectativas serem heterogêneas.

A grande maioria dos trabalhos empíricos sobre heterogeneidade expectacional no mercado de câmbio se baseia em pesquisas de expectativa individual (survey data). Ito (1990), por exemplo, analisa um painel de dados bissemanais coletados pelo JCIF (Japan Center for International Finance) sobre expectativas de taxa de câmbio (yen/dólar) de quarenta e quatro instituições, incluindo bancos, instituições financeiras, importadores e exportadores. O autor encontra forte evidência de heterogeneidade entre os participantes do mercado, sendo que exportadores/importadores possuíam expectativa viesada em relação aos outros agentes. Para períodos curtos a hipótese de expectativa racional foi rejeitada em alguns casos sendo que para períodos de seis meses foi rejeitada totalmente. Por fim, o texto aponta indícios de formação expectacional defasada (lag structure) por parte dos agentes.

Allen e Taylor (1990), por sua vez, procuram avaliar a prevaência de analistas técnicos (chartistas) no mercado de câmbio londrino. Também usando dados sobre expectativa individual (survey data), os autores mostram evidências de que a análise técnica (chartista) é a mais usual para o curto prazo, sendo que cerca de 90 % dos agentes informaram usar algum tipo de análise técnica para horizontes curtos e em 60 % das respostas os agentes atribuíam importância pelo menos tão grande para a análise técnica quanto para os fundamentos. Para períodos mais longos, a evidência é de que a análise técnica perdia espaço para análise fundamentalista, sendo que, para períodos de um ano ou mais, 30 % dos agentes se diziam puramente fundamentalistas e 85 % julgavam os fundamentos mais importantes que a análise técnica. Um importante resultado obtido por Allen e Taylor (1990) é que mesmo entre os chartistas a formação expectacional não parece ser homogênea havendo indícios econométricos de vários tipos de processos expectacionais entre esses agentes, tais quais expectativas adaptativas, expectativas regressivas, expectativas extrapolativas

e do tipo *bandwagon*. Taylor e Allen (1992), usando dados (questionários) produzidos pelo Banco da Inglaterra, encontram resultados que reforçam Allen e Taylor (1990), mostrando evidências de que a análise técnica (chartista) é predominante no curto prazo e a análise baseada nos fundamentos ganha mais peso conforme os horizontes de previsão são maiores.

Estudando o mercado de câmbio alemão, através de questionários enviados para profissionais de bancos e sociedades gestoras de fundos, Menkhoff (1998) procura investigar a existência de dois tipos de agentes, aqueles que formam expectativas completamente racionais (*arbitrageurs with fully-rational expectations*) e agentes que estão sujeitos à algum tipo de viés sistemático (*noise traders*). Esse autor não só encontra evidência para a heterogeneidade expectacional como encontra indícios de que o comportamento limitadamente racional impacta significativamente na expectativa do resto do mercado, de modo que mesmo os agentes que usam os fundamentos de maneira aparentemente mais racional podem estar sujeitos à algum tipo de racionalidade limitada.

Mais recentemente, Chinn e Frankel (2002), embora não estejam explicitamente interessados em testar heterogeneidade expectacional, encontram suporte para hipótese de racionalidade limitada no mercado de câmbio a partir de um conjunto de dados de 24 moedas contra o dólar americano. Os autores encontram uma grande variabilidade de expectativa de depreciação cambial e também a existência de *time-varying risk premium*. Em contrapartida, para o conjunto de dados avaliados, os autores não encontram indícios de expectativas regressivas.

Motivado pelas evidências e no espírito das contribuições de Herbert Simon, para quem os tomadores de decisão têm uma capacidade limitada para adquirir, absorver e processar informações, o presente trabalho tem como objetivo principal estender o modelo de Dornbusch (1976) na direção de incorporar heterogeneidade expectacional e a existência de agentes com racionalidade limitada no mercado de câmbio. Segundo Rogoff (2002), o modelo de Dornbusch é um dos mais influentes trabalhos no campo da economia internacional escrito desde a segunda guerra mundial. O modelo de *overshooting* é ainda hoje um dos modelos mais importantes na área, a despeito das novas gerações de modelos ligados à tradição *new-open-economy-macroeconomics*. Sua elegância analítica e desempenho empírico (ao menos se comparado aos modelos com microfundamentos convencionais) fazem com

que ele continue sendo usado como *benchmark* tanto na academia quanto em análises de mercado. Por conta disso, esse parece ser um candidato natural à extensões que procurem incorporar heterogeneidade comportamental e racionalidade limitada à literatura de câmbio.

Dentre as diferentes formas de pensar em heterogeneidade em economia, a teoria dos jogos é, sem dúvida, uma proeminente opção metodológica. Contudo, a interpretação padrão da teoria dos jogos não-cooperativos é que o jogo analisado é jogado por jogadores totalmente racionais que conhecem todos os detalhes do jogo, incluindo as preferências de cada um sobre os *payoffs* (WEIBULL, 1995). Em direção diferente da teoria dos jogos clássicas, um ramo da teoria dos jogos, conhecido como teoria dos jogos evolucionários, vem sendo alvo de inúmeros avanços na tentativa de incorporar comportamentos limitadamente racionais na análise. Segundo Samuelson (1997, pp. 15), o ponto de partida para um modelo de jogos evolucionários é a crença de que as pessoas nem sempre se comportam de maneira racional (ou pelo menos plenamente racional no sentido padrão do termo em economia). Embora o comportamento plenamente racional seja um *benchmark* importante, em muitas situações os agentes simplesmente se comportam a partir de regras de bolso, normas sociais, convenções, analogias etc. Adicionalmente, ao longo do tempo os agentes tendem a aprender, imitar outros comportamentos e reproduzir as estratégias de maior sucesso. O resultado é um processo de experimentação em que os agentes vão “tateando” à procura do comportamento mais adequado, “um processo no qual as estratégias que tragam maiores retornos tendem a expulsar as estratégias de menor retorno.” (SAMUELSON, 1997, pp. 15)

Do ponto de vista dos propósitos deste trabalho, a teoria dos jogos evolucionários parece fornecer uma alternativa ao arcabouço da macroeconomia com agente representativo, sobretudo, quando se pensa na possibilidade comportamentos limitadamente racionais e seus desdobramentos no tempo. Mais ainda, tal ferramenta ajuda a compreender como certos comportamentos no plano microeconômico podem gerar a emergência de resultados aparentemente anômalos.

Feitas essas observações, ao estender o modelo de Dornbusch num contexto de agentes heterogêneos, optou-se por modelar a heterogeneidade expectacional como um processo endógeno, fruto de uma dinâmica evolucionária. Aplicando o arcabouço dos jogos evolucionários na macrodinâmica, é desenvolvido um modelo no

qual o mercado de câmbio é formado por dois tipos de agentes, agentes que preveem exatamente a variação cambial futura (plenamente racionais), e para isto arcam com um custo, e agentes que preveem o câmbio baseando-se em algum comportamento de racionalidade limitada. A evolução da distribuição de estratégias de formação de expectativas no mercado de câmbio é construída como um processo evolucionário, que reflete a diferença entre os *payoffs* esperados de cada tipo de agente e também certas escolhas aleatórias não relacionadas com os *payoffs* esperados.

A rigor, este não é um trabalho sobre teoria dos jogos, assim como os modelos macroeconômicos padrão não se ocupam das diversas discussões metodológicas e analíticas que envolvem a microeconomia por detrás da otimização dos agentes representativos, aqui o procedimento de modelagem se resumirá ao uso do arcabouço de jogos evolucionários em um modelo macroeconômico. Não obstante, reconhecendo que a utilização de microfudamentos com jogos evolucionários é relativamente recente e menos usual se comparada à macroeconomia padrão, o segundo capítulo desta tese se ocupa de uma breve revisão sobre o tema, especialmente sobre os modelos com dinâmicas de replicação.

No terceiro capítulo será revisada a literatura de câmbio com agentes heterogêneos, na tentativa de contextualizar a contribuição deste trabalho para a literatura pré-existente, sobretudo, tentando elencar as lacunas e possíveis questões em aberto que devem ser exploradas em novos avanços na área.

O quarto capítulo da tese traz a contribuição mais importante deste trabalho, no qual será desenvolvido o modelo proposto e analisados os seus resultados e extensões.

2. NOTAS SOBRE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Desde os trabalhos de Neumann e Morgenstern (1944) e, sobretudo, do trabalho de Nash (1950), que a teoria dos jogos foi sendo introduzida no vocabulário dos economistas ao ponto de contemporaneamente ter se tornado uma ferramenta padrão em teoria econômica.

Até os anos oitenta, em economia, a teoria dos jogos-não-cooperativos se ocupava basicamente de situações nas quais todos os agentes envolvidos no jogo não só possuem racionalidade plena como existe conhecimento comum² da racionalidade de todos os agentes no jogo. A partir da década de noventa, ganhou espaço no campo da teoria dos jogos a teoria dos jogos evolucionários, ocupada justamente de incorporar comportamentos de racionalidade limitada nos modelos.

A teoria dos jogos evolucionários estuda o comportamento de grandes populações de agentes envolvidos em repetidas interações nas quais as ações de um grupo de agentes dependem também das escolhas dos outros grupos de agentes. Na teoria dos jogos evolucionários, contudo, de maneira distinta do que ocorre nos jogos não-cooperativos convencionais, a mudança das estratégias dos agentes pode ser conduzida por comportamentos míopes (SANDHOLM, 2008; SANDHOLM, 2010c). Neste contexto, o que guia os agentes não é necessariamente a racionalidade mas o aprendizado através do sucesso e fracasso das estratégias.

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos de teoria dos jogos evolucionários e suas aplicações dinâmicas. Revisões da literatura podem ser encontradas em Samuelson (1997), Friedman (1998), Samuelson (2002) e Ponti (2000), este último com foco na análise dinâmica (em tempo contínuo).

Introduções mais técnicas ao assunto podem ser encontradas em Gintis (2009), Weibull (1995) e Vega Redondo (1996).

2.1 ESTRATÉGIAS EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEIS

Os primeiros desenvolvimentos da teoria dos jogos evolucionários remetem aos trabalhos de Maynard Smith e Price (1973) e Maynard Smith (1982). Estes autores adaptaram a teoria dos jogos tradicional para o contexto da biologia, se ocupando de

² Uma definição formal da hipótese de “conhecimento comum” pode ser encontrada em Aumann (1976). Detalhes sobre “conhecimento comum da racionalidade” podem ser encontrados em Aumann (1987a).

problemas de seleção natural e conflito entre espécies. É também nestes trabalhos que surge o importante conceito de “Estratégias Evolutivamente Estáveis” (EES – Evolutionarily Stable Strategies). O conceito de Estratégia Evolutivamente Estável destina-se a refletir uma situação estacionária em que o padrão de comportamento que prevalece nas espécies não pode ser invadido por qualquer mutação (VEGA REDONDO, 1996).

O contexto em que opera um ESS difere dos jogos clássicos na forma como ocorre as interações entre os agentes. No lugar dos jogos do tipo *one-shot* e dos jogos repetidos, Maynard Smith introduziu a noção de *repetido emparelhamento aleatório de agentes*. Dentro de uma grande população de agentes, os indivíduos da população são repetidamente pareados de maneira aleatória para jogar um jogo (SAMUELSON, 2002; GINTIS, 2009). Outra hipótese básica é que os jogos são simétricos, i.e., os agentes possuem *payoffs* idênticos, sendo que os *payoffs* são oriundos de “aptidões naturais” o que resulta em ganhos maiores para os agentes que possuam maiores aptidões.

Uma definição formal

Existem diferentes maneiras de apresentar formalmente a definição de ESS, cada uma delas com maior ou menor grau de rigor. Se reproduz aqui a definição encontrada em Gintis (2009), sendo evitadas maiores discussões a respeito da generalidade de um ESS.

Considere um jogo em forma normal no qual ambos os jogadores estão sujeitos ao conjunto $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ de estratégias puras. O agente que joga a estratégia $s_i \in S$ tem o *payoff* π_{ij}^1 e o agente que joga a estratégia $s_j \in S$ tem o *payoff* $\pi_{ij}^2 = \pi_{ji}^1$. Este tipo de jogo é chamado de *simétrico nos payoffs*. Adicionalmente, assuma que os agentes não condicionam suas ações ao fato de serem o “jogador 1” ou o “jogador 2”, o que faz do jogo simétrico em estratégias. Sendo o jogo simétrico nos *payoffs* e nas estratégias o jogo é simplesmente chamado de *simétrico*.

Os *payoffs* do jogo podem ser representados pela matriz linha $A = (\pi_{ij}^1)$. Não é necessário descrever inteiramente a matriz do jogo, uma vez que o jogo é simétrico, os *payoffs* do jogador 2 são iguais à transposta da matriz A . O jogo ocorre em estágios, sendo que a cada estágio os jogadores são pareados de maneira aleatória. Em cada

período $t = 1, 2, \dots, n$ os agentes são aleatoriamente pareados e jogam um estágio³ G do jogo. Cada agente do tipo i joga uma estratégia $s_i \in S$ no estágio G do jogo. Se a proporção de agentes do tipo j é p_j em um tempo particular, se diz que o estado da população é $\sigma = p_1 s_1, \dots, p_n s_n$, com $p_1, \dots, p_n \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$.

O *payoff* do agente i , quando o estado da população é σ , é dado por:

$$\pi_{i\sigma} = \sum_{j=1}^n \pi_{ij} p_j \quad (2.1)$$

Este é o *payoff* esperado do jogador após ter sido pareado com um parceiro em particular. Essas condições definem um *novo jogo*, chamado de *jogo evolucionário* que corresponde a um estágio G .

Suponha que o estado da população é σ e alguma pequena subpopulação de agentes comece a jogar uma estratégia “mutante” $\tau = q_1 s_1, \dots, q_n s_n$, sendo q_i a frequência de estratégias puras s_i nesta subpopulação. Quando um membro aleatório da subpopulação mutante, do tipo τ , encontra um membro aleatório da população σ ele terá o seguinte *payoff* esperado:

$$\pi_{\tau\sigma} = \sum_{i,j=1}^n q_i \pi_{ij} p_j \quad (2.2)$$

Suponha que o estado da população seja $\sigma = p_1 s_1, \dots, p_n s_n$, sendo o *payoff* de um membro desta população, escolhido aleatoriamente, igual à $\pi_{\sigma\sigma}$. Se uma pequena fração $\epsilon > 0$ da população for substituída por mutantes do tipo τ , o novo estado da população se torna:

$$\mu = (1 - \epsilon)\sigma + \epsilon\tau \quad (2.3)$$

O *payoff* esperado de um não-mutante, escolhido aleatoriamente, torna-se:

$$\pi_{\sigma\mu} = (1 - \epsilon)\pi_{\sigma\sigma} + \epsilon\pi_{\sigma\tau} \quad (2.4)$$

³ Na literatura de jogos repetidos esse tipo de estágio de um jogo é conhecido como “stage game”, sendo o jogo inteiro chamado de super-jogo. Do ponto de vista dinâmico o jogo evolucionário é formado por sucessões de “stage games”.

Sendo o *payoff* esperado de um mutante, escolhido aleatoriamente, igual à:

$$\pi_{\tau\mu} = (1 - \epsilon)\pi_{\tau\sigma} + \epsilon\pi_{\tau\tau} \quad (2.5)$$

Se diz que os mutantes podem invadir a população se $\sigma \neq \mu$ e para um valor suficientemente pequeno de ϵ , $\pi_{\tau\mu} \geq \pi_{\sigma\mu}$. Isto implica que os mutantes estão ao menos tão bem como um não-mutante. Se considera $\sigma = \sigma^*$ uma estratégia evolutivamente estável (ESS) se não pode ser invadida por mutantes.

Como aponta Vega Redondo (1996), esta definição de ESS pode ser bastante restritiva, uma vez que, contempla apenas situações nas quais toda a população adota uma estratégia comum (*monomorphic strategies*). Em estudos aplicados, maneiras mais flexíveis de pensar em um ESS são bastante úteis, contemplando também a possibilidade de heterogeneidade *ex post* das estratégias (*polymorphic strategies*). Isso implica na possibilidade de equilíbrios estáveis com estratégias mistas, desde que se considere que os agentes possam “herdar” o mesmo conjunto de estratégias mistas originalmente presente no jogo. A possibilidade de ESS com estratégias mistas oferece recursos dinâmicos mais amplos, especialmente no contexto de dinâmicas de replicação, maiores detalhes sobre isso podem ser encontrados em Gintis (2009), Samuelson (1997) e Vega Redondo (1996).

O jogo Falcão-Pombo (Hawk-Dove Game)

O jogo *Falcão-Pombo* é um dos exemplos mais famosos de jogo evolucionário, estando presente em vários livros importantes da área, inclusive no livro seminal de Maynard Smith (1982). Segue-se aqui a apresentação deste jogo encontrada em Vega Redondo (1996).

Considere uma população infinita de uma certa espécie que compete por recursos escassos (comida, terra ou outro recurso). A competição ocorre aos pares, de forma que os agentes (membros da espécie) são aleatoriamente pareados. Os competidores podem usar uma de duas estratégias, a estratégia Falcão (que será chamada de H) e a estratégia Pombo (chamada de D). A estratégia H é uma estratégia agressiva enquanto D é uma estratégia passiva.

Quando H (o falcão) encontra D (o pombo), H abocanha todos os ganhos, tendo *payoff* igual à V (total dos recursos), enquanto D tem um *payoff* igual à 0. Esse

resultado é consequência da estratégia passiva de D, que não resiste à H de maneira conflituosa, evitando custos de conflito para os dois jogadores. Quando dois jogadores do mesmo tipo se encontram (são pareados) ambos dividem os recursos igualmente, cabendo a cada um a parcela $V/2$ de recursos. No caso de D encontrar D, não existe custo de conflito, então, o resultado líquido do jogo será $V/2$, por outro lado, quando H encontra H existe conflito para que ocorra a divisão dos recursos. Nesta última situação cada jogador H fica com $V/2$ de recursos, contudo, arca com o custo $C/2$ por conta de ter participado de um conflito. Abaixo segue a matriz de *payoffs* desse jogo:

Tabela 2.1 – Matriz de payoffs (Hawk-Dove Game)

	H	D
H	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$V, 0$
D	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

Considere agora uma certa população que adota H e D em uma proporção dada por p e $(1-p)$ respectivamente. De maneira simplificada, isso implica que a população como um todo joga a mesma estratégia mista $\sigma = (p, 1-p)$. Três casos podem ser considerados:

- Com $V > C$; nesta circunstâncias jogar H com probabilidade igual à 1 [$\sigma = (1,0)$], é uma estratégia estritamente dominante, logo, nenhuma outra estratégia pode invadi-la. Contudo, essa estratégia pode invadir qualquer outra, o que a configura como ESS.
- Com $V = C$; jogar H é apenas fracamente dominante, contudo, existindo uma probabilidade estritamente positiva de se encontrar um indivíduo que jogue D, jogar H terá *payoff* superior à qualquer outra estratégia (pura ou mista). Novamente jogar H com probabilidade 1 é um ESS.
- Com $C > V$; nesta situação os equilíbrios anteriores podem ser invadidos por alguma estratégia mista que envolva jogar D com probabilidade positiva. Note, contudo, que, jogar D com probabilidade 1 também não seria um ESS pois

poderia ser invadida por uma pequena fração de jogadores H. Logo, com $C > V$ o único ESS seria uma estratégia mista⁴ $\sigma = (p, 1 - p)$ com $0 < p < 1$.

2.2 DINÂMICAS EVOLUCIONÁRIAS E DINÂMICA DE REPLIÇÃO

O uso de sistemas dinâmicos (contínuos) tem se mostrado uma ferramenta útil para solução de problemas envolvendo teoria dos jogos e, em especial, problemas com jogos evolucionários. Há várias maneiras de se tratar um jogo evolucionário em termos dinâmicos, dentre elas, a “dinâmica de replicação” introduzida pelo trabalho de Taylor e Jonker (1978) que é uma das mais conhecidas e usuais, sendo a única estudada neste texto.

The replicator dynamic is a fundamental deterministic evolutionary dynamic for games. Under this dynamic, the percentage growth rate of the mass of agents using each strategy is proportional to the excess of the strategy's payoff over the population's average payoff. The replicator dynamic can be interpreted biologically as a model of natural selection, and economically as a model of imitation. (SANDHOLM, 2009, pp. 3)

Outras formas de tratamento dinâmico de jogos evolucionários podem ser encontradas em Friedman (1991), Hofbauer e Sigmund (1998) e também em Sandholm (2009).

Segundo Gintis (2009), considere uma grande população de agentes que joga um jogo simétrico no qual, a cada momento do tempo, os agentes são pareados e jogam um *stage game*, sendo que o resultado do jogo determina a taxa de replicação dos agentes/estratégias. Como os agentes são pareados aleatoriamente é necessário definir qual a probabilidade de um agente (que usa certa estratégia) encontrar outro agente do mesmo tipo. A maneira mais simples de fazer isto é considerando que a probabilidade de um agente que joga a estratégia i encontrar outro agente do mesmo tipo é igual à fração p_i dos agentes jogadores de i na população.

Adicionalmente, considere um jogo evolucionário no qual cada jogador segue uma das n estratégias puras s_i para $i = 1, \dots, n$. O jogo é repetido em $t = 1, 2, \dots$. Suponha também que p_i^t é a fração de jogadores que joga a estratégia s_i no tempo t , e que o *payoff* de jogar s_i é $\pi_i^t = \pi_i(p^t)$ onde $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$. A cada momento do tempo as estratégias geram seus respectivos *payoffs* tal que $\pi_1^t \leq \pi_2^t \leq \dots \leq \pi_n^t$.

⁴ Ver prova em Vega Redondo (1996)

Em cada momento de tempo dt cada agente conhece o *payoff* de outro agente aleatoriamente escolhido, com a probabilidade αdt . Caso este agente perceba que o *payoff* do outro agente (com quem foi pareado) é maior que o seu, ele muda de estratégia. Note que esse formato de jogo implica que a informação sobre os *payoffs* é imperfeita, sendo o processo de aprendizado (sobre os *payoffs*) dependente do pareamento dos agentes, que aprendem uns com os outros.

A probabilidade (no tempo t) de um agente usando a estratégia s_i mudar para estratégia s_j é dada pela seguinte função:

$$p_{ij}^t = \begin{cases} \beta(\pi_j^t - \pi_i^t) & \text{para } \pi_j^t > \pi_i^t \\ 0 & \text{para } \pi_j^t \leq \pi_i^t \end{cases} \quad (2.6)$$

Com β sendo um parâmetro positivo suficientemente pequeno e $p_{ij}^t \leq 1$ para todo i e j . A fração esperada de agentes na população usando a estratégia s_i no tempo $t + dt$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}p_i^{t+dt} &= p_i^t - \alpha dt p_i^t \sum_{j=i+1}^n p_j^t \beta(\pi_j^t - \pi_i^t) + \sum_{j=1}^i \alpha dt p_j^t p_i^t \beta(\pi_i^t - \pi_j^t) \\ &= p_i^t + \alpha dt p_i^t \sum_{j=1}^n p_j^t \beta(\pi_i^t - \pi_j^t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Computando o *payoff* médio da população como um todo, igual à $\bar{\pi} = \pi_1^t p_1^t + \pi_2^t p_2^t + \dots + \pi_n^t p_n^t$, chega-se à:

$$\mathbf{E}p_i^{t+dt} = p_i^t + \alpha dt p_i^t \beta(\pi_i^t - \bar{\pi}) \quad (2.8)$$

Considerando uma população suficientemente grande, pode-se fazer $p_i^{t+dt} = \mathbf{E}p_i^{t+dt}$. Tomando o limite de dt tendendo à zero, subtraindo p_i^t dos dois lados da equação (2.8) e dividindo por dt , se deduz a equação da dinâmica de replicação em tempo contínuo :

$$\dot{p}_i^t = \alpha p_i^t \beta(\pi_i^t - \bar{\pi}) \quad (2.9)$$

A lógica da dinâmica de replicação é que a frequência de uma estratégia na população aumenta quando tem retorno acima da média. A participação de uma dada estratégia na população cresce à uma taxa proporcional à diferença do *payoff* desta estratégia com relação ao *payoff* médio de toda a população de agentes.

A equação (2.9) é uma maneira generalizada de representar uma dinâmica de replicação quando existem “ n ” estratégias disponíveis, encontrada na maior parte dos livros textos da área. Em uma situação específica em que existam apenas 2 estratégias disponíveis dentro da população, algo frequente em modelos analíticos mais simples, há um forma bastante conveniente de representar a dinâmica de replicação. Considere uma grande população de agentes jogando um jogo simétrico no qual existem duas estratégias p^t e $(1 - p^t)$ com os respectivos *payoffs* π_1^t e π_2^t . Reescrevendo (2.9) neste contexto:

$$\dot{p}^t = \alpha p^t \beta (\pi_1^t - \bar{\pi}) \quad (2.10)$$

Existindo apenas dois *payoffs* disponíveis o *payoff* médio é facilmente deduzido como segue:

$$\bar{\pi} = p^t \pi_1^t + (1 - p^t) \pi_2^t \quad (2.11)$$

Combinando (2.11) e (2.10):

$$\dot{p}^t = p^t (1 - p^t) \alpha \beta (\pi_1^t - \pi_2^t) \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é análoga à (2.10), sendo assim, a taxa de participação de uma estratégia na população cresce se essa estratégia possuir rendimento maior que a média. Note, contudo, que é possível fazer uma interpretação mais particular da equação (2.12). Os agentes são pareados (a partir de uma distribuição de probabilidade uniforme) e em cada momento do tempo avaliam o rendimento esperado da sua estratégia. A variação do número de agentes jogando p^t ao longo do tempo depende da probabilidade de um agente que joga p^t encontrar outro que jogue $(1 - p^t)$ e da comparação que se fará dos *payoffs* π_1^t e π_2^t em cada instante/pareamento.

Na forma como foi apresentada até aqui, a dinâmica de replicação contempla apenas processos evolutivos que dependem somente das avaliações que os agentes fazem dos *payoffs* do jogo. Por outro lado, sistemas evolutivos podem estar sujeitos à ruídos aleatórios em forma de mutações ou perturbações (GINTIS, 2009).

A primeira intuição sobre a existência de ruídos/mutações numa dinâmica de replicação tem fundo biológico, i.e., a mutação pode ser interpretada como uma mudança genética em alguns indivíduos da população e/ou o surgimento de habilidades mais adaptáveis às situações do jogo. Em particular, a existência de mutação conjugada à uma dinâmica de replicação diz respeito a possibilidade dos agentes mudarem de estratégia aleatoriamente, sem levar em conta os *payoffs*. Kandor, Mailath e Rob (1993) apontam duas justificativas econômicas para a existência de mutações em contexto econômico: i) A cada momento do tempo existe alguma probabilidade de um agente presente no jogo ser substituído por outro que não conhece os *payoffs* e, por conta disto, escolhe uma estratégia de maneira aleatória; ii) Os agentes experimentam ocasionalmente estratégias diferentes.

Detalhes sobre o uso de mutações/ruídos-aleatórios em dinâmicas evolucionárias podem ser encontradas em Kandor, Mailath e Rob (1993) e em Gale, Binmore e Samuelson (1995). O modelo desenvolvido no capítulo 4 desta tese lança mão da hipótese de mutação acoplada à dinâmica de replicação, o que pode ser útil aos interessados na operacionalização de uma dinâmica evolucionária com mutação.

O jogo Falcão-Pombo em versão dinâmica

Como na seção (2.1), considere uma situação em que dois tipos de aves disputam recursos. Novamente imagine duas estratégias Falcão (H) e Pombo (D), sendo H uma estratégia agressiva e D passiva. Para fins ilustrativos, considere que o recurso natural envolvido na disputa são ninhos e que existem dois tipos de ninhos, os bons e os ruins. Quando uma ave encontra um ninho bom ela tem melhores condições de reprodução e, conseqüentemente, piores condições no ninho ruim. Cada ave se reproduz por clonagem, sendo que, encontrando um bom ninho produz uma média de $u + 2$ filhotes e quando encontra um ninho ruim produz apenas u filhotes. Existem n aves que procuram um ninho ao fim de cada dia, contudo, existem apenas $n/2$ ninhos bons que são disputados pelas aves. O processo de reprodução ocorre de um dia

para o outro, sendo que o dia é tratado como uma variável infinitesimal e o número de aves (n) como uma variável contínua.

Existem p falcões (H) na população de aves e $(1-p)$ pombos (D), quando um pombo (D) encontra um outro pombo (D) eles dividem o ninho bom, produzindo cada um deles $u + 1$ filhotes. Quando um pombo (D) encontra um falcão (H), o pombo cede o ninho para o falcão, sendo assim o falcão produz $u + 2$ filhotes e o pombo, com o ninho ruim que lhe resta, apenas u filhotes. Finalmente, quando um falcão encontra um outro falcão eles brigam pelo ninho de modo que ambos produzem menos filhotes, produzindo apenas $u - 1$ filhotes cada um. Abaixo segue a matriz de *payoff* para um estágio desse jogo:

Tabela 2.2 – Matriz de payoffs (Dynamics-Hawk-Dove Game)

	H	D
H	$u - 1, u - 1$	$u + 2, u$
D	$u, u + 2$	$u + 1, u + 1$

O nascimento de pombos, a cada fração de tempo dt , pode ser descrito pela seguinte função:

$$f_d(p)dt = (u + 1 - p)dt \quad (2.13)$$

O evento de um pombo encontrar um falcão tem probabilidade “ p ”, igual a frequência de falcões na população, o que diminui o número de nascimentos em uma unidade, em comparação ao que ocorreria caso o pombo encontrasse outro pombo. Como existem np falcões na população e $n(1 - p)$ pombos, depois de um período dt o número de pombos na população será:

$$n(1 - p)[1 + (u + 1 - p)dt] = n(1 - p)(1 + f_d(p)dt) \quad (2.14)$$

Repetindo raciocínio análogo para os falcões, o número de nascimentos (por cada falcão) será:

$$f_h(p)dt = (u + 2(1 - p) - p)dt \quad (2.15)$$

O número de falcões após o intervalo dt é dado pela equação abaixo:

$$np[1 + (u + 2(1 - p) - p)dt] = np(1 + f_h(p)dt) \quad (2.16)$$

O número total de nascimentos, considerando os dois tipos/estratégias de aves é dado por:

$$f(p)dt = (1 - p)f_a(p)dt + pf_h(p)dt \quad (2.17)$$

Sabe-se que, após os nascimentos, a população total de aves será igual à $n(1 + f(p)dt)$, logo, a proporção dos falcões na população, após dt , será uma razão entre os nascimentos de falcões e o nascimento total de aves:

$$p(t + dt) = \frac{np(t)(1 + f_h(p)dt)}{n(1 + f(p)dt)} = p(t) \frac{(1 + f_h(p)dt)}{(1 + f(p)dt)} \quad (2.18)$$

Colocando em taxa de variação:

$$\frac{p(t + dt) - p(t)}{dt} = p(t) \frac{(f_h(p) - f(p))}{(1 + f(p)dt)} \quad (2.19)$$

É possível aproximar para tempo contínuo fazendo dt tender à zero:

$$\dot{p} = p(t)(f_h(p) - f(p)) \quad (2.20)$$

A equação acima é uma dinâmica de replicação, como derivada na seção anterior. Combinando (2.20) com (2.13) e (2.15):

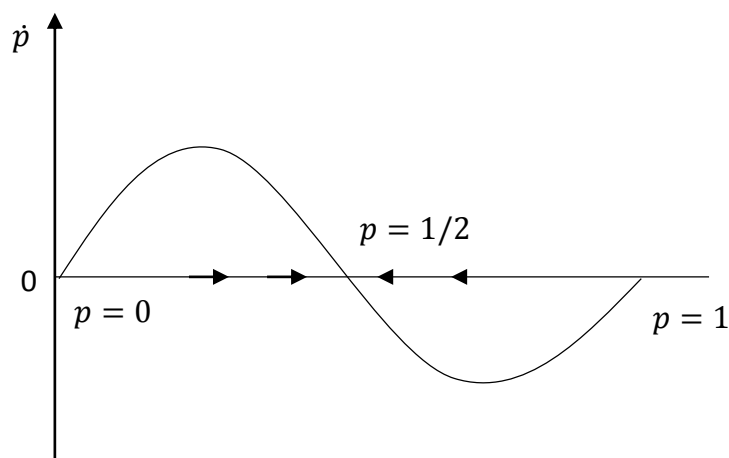
$$\dot{p} = p(1 - p)(1 - 2p) \quad (2.21)$$

A equação diferencial (2.21) tem três pontos fixos, $p = 0, p = 1, p = 1/2$. É possível analisar a estabilidade derivando (2.21) em relação à p e avaliando o sinal da derivada/variação no tempo.

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 1 - 6p + 6p^2$$

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p}(0) > 0; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\right) < 0; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}(1) > 0 \quad (2.22)$$

Figura 2.1 – Diagrama de fases (Dynamics-Hawk-Dove Game)



A população estará em estado estacionário se for composta exclusivamente de falcões ($p = 1$) ou exclusivamente de pombos ($p = 0$), contudo, tais situações não são estáveis, bastando a introdução de um única ave de tipo concorrente para a população ser puxada para uma situação de estabilidade com população heterogênea ($p = \frac{1}{2}$), que é o único equilíbrio estável do jogo.⁵

Como aponta Samuelson (2002), a estratégia evolutivamente estável (ESS) do jogo falcão-pomba é também o seu único equilíbrio simétrico de Nash, note-se, contudo, que há relação entre ESS e equilíbrio de Nash não é trivial, havendo uma vasta literatura sobre o assunto que extrapola os objetivos deste texto.⁶

⁵ Se o jogo-dinâmico fosse modelado usando a matriz de *payoff* apresentada na seção 2.1 o equilíbrio estável com $p = V/C$.

⁶ Informações sobre o assunto podem ser encontradas em Vega Redondo (1996), Samuelson (2002) e Sandholm (2009).

2.3 DINÂMICAS EVOLUCIONÁRIAS E MICROFUNDAMENTOS

Embora a teoria econômica de “livro texto” deixe a impressão de que os agentes econômicos são hiper racionais e conseguem maximizar todo o tempo, ganha cada vez mais espaço na profissão uma ideia parcimoniosa sobre o tema.

Economic theory is now routinely described as assuming not that people are relentless maximizers, but rather that some process of selection—perhaps the tendency of unprofitable firms to fail or the tendency of people to imitate their more successful counterparts—will cause us to observe people who act as if they are maximizing. (SAMUELSON, 2002, pp. 51)

Neste contexto, a teoria dos jogos evolucionários apresenta um grande potencial de aplicações em várias áreas da ciência econômica, sobretudo, quando se considera o trabalho de base já realizado por teóricos de jogos na construção dos fundamentos da área (FRIEDMAN 1998, PONTI 2000).

Duas ideias servem de ponto de partida para um modelo evolucionário: i) os agentes nem sempre se comportam de maneira racional e; ii) os comportamentos emergem de processos de aprendizagem e tentativa e erro (SAMUELSON, 1998). Em particular, isto faz com que a teoria dos jogos evolucionários ofereça um arcabouço complementar de microfundamentos para modelos macroeconômicos, possibilitando questionamentos que não poderiam ser feitos com o arcabouço do agente racional representativo.

Nesta seção será apresentado o modelo desenvolvido por Silveira e Lima (2008). Trata-se de um modelo macroeconômico que usa o arcabouço de jogos evolucionários, mais especificamente uma dinâmica de replicação em tempo contínuo, para dar microfundamento à um problema macroeconômico. Duas são as justificativas para a escolha deste modelo como exemplo: i) O modelo pode servir como ponto de partida para os interessados em aplicar técnicas semelhante à problemas “macro”; ii) O modelo foi operacionalizado de maneira semelhante ao modelo que será desenvolvido nesta tese (capítulo 4).

Conhecimento Imperfeito, Custo de Otimização e Racionalidade Limitada

Considere uma economia funcionando em concorrência monopolística na qual existe um *continuum* de firmas dividido em dois grupos. Em cada período de tempo existe

uma fração k de firmas, que pode variar de um período para outro, que estabelecem seus preços sem conhecerem todos os preços da economia, estas são firmas de racionalidade limitada. A fração $(1 - k)$ é formada pelas firmas plenamente informadas. Sobre as firmas plenamente informadas, Silveira e Lima (2008) ressaltam um aspecto fundamental nesse tipo de modelo (nos quais existem formas de racionalidade limitada), i.e., não faria sentido pensar que a informação completa seja distribuída livremente, sendo assim, as firmas plenamente informadas $(1 - k)$ incorrem em um custo para obter e processar as informações.

O nível geral de preços P é dado pela média geométrica dos preços P_n praticados pelas firmas plenamente informadas (chamadas de Nash) e pela média dos preços praticados pelas firmas de racionalidade limitada P_b :

$$P = P_b^k P_n^{1-k} \quad (2.23)$$

Os preços ótimos praticados pelas firmas Nash são iguais à:

$$P_n = \alpha P^a M^{1-a} \quad (2.24)$$

Em que M é o estoque nominal de moeda, com os parâmetros $\alpha > 0$ e $0 < a < 1$.
1. Combinando com (2.23):

$$P_n = \alpha (P_b^{ak} M^{1-a})^{\frac{1}{1-a(1-k)}} \quad (2.25)$$

O preço médio das firmas de racionalidade limitada é dado por:

$$P_b = \mu(k) P_n \quad (2.26)$$

Sendo μ (função de k) o desvio médio⁷ com relação ao preço ótimo. A partir das equações (2.25) e (2.26) é possível deduzir o preço ótimo praticado pelas firmas Nash, o preço médio das firmas de racionalidade limitada e o nível geral de preços.

$$P_n = \mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M, \text{ com } \alpha_0 \equiv \alpha^{\frac{1}{1-a}}$$

⁷ Os desvios do preço praticado pelas firmas de racionalidade limitada dependem de ruídos na observação do nível geral de preços, sendo que $\mu(k)$ uma função continua não decrescente. Para maiores detalhes ver Silveira e Lima (2008).

$$P_b = \mu(k)^{\frac{1-a(1-k)}{1-a}} \alpha_0 M \quad (2.27)$$

$$P = \mu(k)^{\frac{k}{1-a}} \alpha_0 M$$

Os fluxos de agentes entre as diferentes estratégias será tratado como uma dinâmica de replicação em tempo contínuo. Computado o preço ótimo e o preço praticado pelas firmas de racionalidade limitada é possível pensar nos *payoffs* decorrentes de cada estratégia de fixação de preços.

O *payoff* das firmas de racionalidade limitada é computado com uma função de perda quadrática dos desvios dos preços por elas praticados em relação ao preço ótimo.

$$L_b(k) = -\beta(P_b - P_n)^2 = -\beta \left[(\mu(k) - 1) \left(\mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M \right) \right]^2; \quad \beta > 0 \quad (2.28)$$

As firmas Nash não incorrem em perdas decorrentes de desvios em relação ao preço ótimo, contudo, arcam com um custo $c(k)$ para coletarem a informação completa. Esse custo é tomado como uma função continuamente diferenciável de k , com $c'(k) > 0$ para todo $k \in [0,1]$. Assim, a perda das firmas Nash é dada por:

$$L_n = -c(k) \quad (2.29)$$

Seguindo uma dinâmica de replicação, como descrita na seção anterior, a frequência de uma estratégia em dada população é uma função da diferença do seu respectivo *payoff* com relação ao *payoff* médio, segue-se que:

$$\dot{k} = k\{L_b - (kL_b + (1-k)L_n)\} = k(1-k)\psi(k) \quad (2.30)$$

Com:

$$\psi(k) = c(k) - \beta \left[(\mu(k) - 1) \left(\mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M \right) \right]^2 \quad (2.31)$$

Considerando que $\psi(0) \neq 0$ e $\psi(1) \neq 1$ há dois equilíbrios de estratégias puras $k^* = 0$ (todas as firmas se tornam Nash) e $k^* = 1$ (todas as firmas adotam a estratégia de racionalidade limitada). Por outro lado, quando $\psi(k^*) = 0$, ocorre um equilíbrio com estratégias mistas, com $k^* \in (0,1)$.

Após uma série de considerações sobre a existência de equilíbrios no contexto da dinâmica de replicação, Silveira e Lima (2008) demonstram que o equilíbrio com estratégias mistas, no qual sobrevivem ambas estratégias de fixação de preços, é a única solução estável do modelo. Nas palavras dos autores:

Em termos da dinâmica de replicação, existem dois equilíbrios de estratégia pura, a saber, um caracterizado pela extinção da estratégia de racionalidade limitada, de não incorrer no custo de atualização do conjunto informacional, e outro pela extinção da estratégia Nash, de incorrer nesse custo. Além disso, em uma economia regular existe pelo menos um equilíbrio de estratégia mista, caracterizado pela sobrevivência de ambas as estratégias. Nesse tipo de economia, os equilíbrios de estratégia pura são repulsores locais, de maneira que a dinâmica evolucionária, se iniciada a partir de uma situação de coexistência de estratégias, não conduz à extinção de nenhuma delas. (SILVEIRA E LIMA, 2008, pp. 73)

2.4 CONCLUSÕES PRELIMINARES

Nas duas últimas décadas houve grande avanço nas pesquisas teóricas na área de jogos evolucionários. Estes avanços resultaram em uma ampla base metodológica disponível para pesquisadores interessados em aplicar a teoria dos jogos evolucionários em variados problemas de pesquisa.

O uso de jogos como ferramenta alternativa de microfundamentação é já razoavelmente usual em problemas que envolvam interações estratégicas, contudo, na sua forma convencional, se restringe à problemas nos quais os agentes possuam racionalidade plena. Quando se deseja tratar a racionalidade dos agentes econômicos de maneira parcimoniosa, o arcabouço de jogos evolucionários oferece alternativas interessantes de microfundamentação.

O intuito deste capítulo foi construir uma breve introdução ao arcabouço de jogos evolucionários e dar suporte ao leitor na compreensão de como o problema principal desta tese (o modelo no capítulo 4) foi formulado. Vale salientar que problemas de macroeconomia e finanças envolvendo heterogeneidade expectacional e racionalidade limitada não são necessariamente novos, existindo outras metodologias disponíveis (além dos jogos evolucionários) para problemas deste tipo, das quais se destaca o *framework* desenvolvido por Brock e Hommes (1997, 1998).

A escolha de uma metodologia (em detrimento de outras) na formulação de problemas teóricos quase sempre envolve algum grau de subjetividade, além de depender do nível de familiaridade técnica do pesquisador com um ou outro *approach*.

A despeito disto, na visão deste autor, o arcabouço de jogos evolucionários possibilita a formulação de modelos nos quais a interação e o processo de aprendizagem dos agentes são tratados de maneira explícita, oferecendo um suporte microeconômico mais sólido se comparado, por exemplo, com o *framework* de Brock e Hommes (1997, 1998).

Existem inúmeras maneiras de se utilizar o arcabouço de jogos evolucionários em economia, embora, neste texto, se tenha dado ênfase às dinâmicas de replicação, os vários artigos e livros citados anteriormente constituem-se em uma rica fonte de consulta aos interessados.

3. MODELOS DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL: UMA REVISÃO DA LITERATURA

A partir dos trabalhos de Frankel e Froot (1986, 1987), paralelamente aos desenvolvimentos mais convencionais, foram surgindo trabalhos focados na microestrutura do mercado de câmbio e na possibilidade de comportamento heterogêneo dos *players* nesse mercado. Parte importante da motivação para esses trabalhos advêm da existência de *puzzles* ligados à dinâmica da taxa de câmbio, especialmente o frequente descolamento da taxa de câmbio de seus fundamentos previstos pela paridade poder de compra (PPP), assim como, da evidência de que o mercado cambial é formado por agentes heterogêneos.

O objetivo deste capítulo, na tentativa de contextualizar a contribuição original desta tese, é fazer, de maneira não exaustiva, uma revisão da literatura sobre determinação da taxa de câmbio em ambiente de agentes heterogêneos. Mais especificamente, serão apresentados quatro modelos representativos da literatura em que existe heterogeneidade expectacional conjugada com algum tipo de comportamento de racionalidade limitada.

3.1 CHARTISTAS, FUNDAMENTALISTAS E GESTORES DE PORTFÓLIO: O MODELO DE FRANKEL E FROOT

Os trabalhos de Frankel e Froot (1986,1990a) fazem parte de uma agenda de pesquisa desenvolvida por esses autores que aponta evidências, a partir do uso de questionários, para a heterogeneidade expectacional no mercado de câmbio americano. Motivados pela evidência empírica, os autores desenvolveram um modelo simples incorporando a existência de diferentes agentes no mercado cambial, mais exatamente, os chartistas os fundamentalistas e os gestores de portfólio. Os fundamentalistas preveem a taxa de a partir dos desvios do câmbio com relação ao seu valor fundamental, à maneira do modelo de Dornbusch (1976), contudo, eles não conhecem o verdadeiro parâmetro de ajuste do câmbio, como no modelo de overshooting original. Os chartistas, por outro lado, usam séries temporais auto-regressivas para prever o comportamento do câmbio e, finalmente, os gestores de portfólio, formam suas expectativas usando uma média ponderada da expectativa dos

chartistas e dos fundamentalistas. Os gestores de portfólio (que também podem ser entendidos como o mercado como um todo) revisam os pesos dessa média ponderada de maneira bayesiana de acordo com os acertos e erros cometidos pelos outros dois tipos de agentes. A rigor todos os três tipos de agentes estão sujeitos à um comportamento limitadamente racional, pois, embora façam o melhor possível para prever o câmbio, não sabem exatamente a trajetória desta variável no tempo.

Seguindo as mesmas notações de Frankel e Froot (1986,1990a), a determinação da taxa de câmbio é descrita pela seguinte equação:

$$s_t = c\Delta s_{t+1}^m + z_t \quad c \geq 0 \quad (3.1)$$

Em que s_t é a taxa de câmbio *spot*, Δs_{t+1}^m é a depreciação esperada pelo mercado (*gestores de portfólio*) e z_t representa outros determinantes da taxa de câmbio presente.

Por sua vez, a variação cambial esperada pelo mercado pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Delta s_{t+1}^m = \omega_t \Delta s_{t+1}^f + (1 - \omega_t) \Delta s_{t+1}^c \quad (3.2)$$

Em que Δs_{t+1}^f é a depreciação esperada pelos fundamentalistas, Δs_{t+1}^c a depreciação esperada pelos chartistas e ω_t e $(1 - \omega_t)$ os pesos da expectativa destes agentes na expectativa do mercado.

A variação esperada do câmbio dos fundamentalistas é dada pelos desvios do câmbio em relação ao seu valor de equilíbrio fundamental, \bar{s} , que é exógeno no modelo, já que não são feitas considerações explícitas sobre os fundamentos macroeconômicos da economia. O parâmetro θ , positivo, mede a velocidade de ajuste:

$$\Delta s_{t+1}^f = \theta(\bar{s} - s_t) \quad (3.3)$$

Por simplificação, ao invés de usar algum modelo regressivo mais sofisticado, a hipótese é de que os chartistas acreditem que o câmbio segue um random walk, logo:

$$\Delta s_{t+1}^c = 0 \quad (3.4)$$

Reescrevendo a equação (3.2):

$$\Delta s_{t+1}^m = \omega_t \theta (\bar{s} - s_t) \quad (3.5)$$

O peso dos fundamentalistas na previsão do mercado varia de acordo com o processo *bayesiano* descrito abaixo:

$$\Delta \omega_t = \delta (\hat{\omega}_{t-1} - \omega_{t-1}) \quad (3.6)$$

Em que $\hat{\omega}_{t-1}$ é o peso, computado ex-post, do que teria sido a previsão perfeita do câmbio, conforme se observa na equação seguinte:

$$\Delta s_t = \hat{\omega}_{t-1} \theta (\bar{s} - s_{t-1}) \quad (3.7)$$

Combinando (3.7) e (3.6):

$$\Delta \omega_t = \delta \left(\frac{\Delta s_t}{\theta (\bar{s} - s_{t-1})} - \omega_{t-1} \right) \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), o parâmetro δ mede a velocidade de adaptação dos pesos nas expectativas do mercado. Considerando apenas soluções interiores e tomando os limites para $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se uma equação diferencial para evolução do peso dos agentes *fundamentalistas* na expectativa de variação cambial do mercado.

$$\dot{\omega} = \delta \left(\frac{\dot{s}}{\theta (\bar{s} - s)} - \omega \right), \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (3.9)$$

Pode se encontrar uma equação diferencial para a taxa de câmbio derivando a equação (3.1) no tempo. Ainda em tempo discreto tem-se que:

$$s_{t+1} - s_t = (c \Delta s_{t+2}^m + z_{t+1}) - (c \Delta s_{t+1}^m + z_t)$$

Usando a equação (3.5) e considerando “z” e a taxa de câmbio de equilíbrio de longo prazo como constantes:

$$s_{t+1} - s_t = c\omega_{t+1} \theta(\bar{s} - s_{t+1}) - c\omega_t \theta(\bar{s} - s_t)$$

Somando e subtraindo $c\omega_t \theta s_{t+1}$ do lado direito da equação e rearranjando os termos de maneira conveniente:

$$(s_{t+1} - s_t) = \frac{(\omega_{t+1} - \omega_t)c\theta(\bar{s} - s_{t+1})}{(1 + c\theta\omega_t)}$$

Novamente tomando o limite com Δt tendendo à zero:

$$\dot{s} = \frac{\dot{\omega}c\theta(\bar{s} - s)}{(1 + c\theta\omega)} \quad (3.10)$$

Combinando (3.9) e (3.10) obtém-se um sistema de equações para ω e s :

$$\dot{\omega} = \frac{-\delta\omega(1 + c\theta\omega)}{1 + c\theta\omega - \delta c} \quad (3.11)$$

$$\dot{s} = \left(\frac{-\delta\omega c\theta}{1 + c\theta\omega - \delta c} \right) (\bar{s} - s) \quad (3.12)$$

Estabilidade e solução analítica no modelo

Os autores dão maior ênfase à solução numérica do modelo, no entanto, fazem alguns exercícios tentando deduzir certos achados. Esses exercícios analíticos são, contudo, um tanto confusos, uma vez que solucionando o modelo à maneira tradicional (como um sistema de equações diferenciais) ele não possui solução fechada. Olhando apenas para equação (3.12), o que implica considerar ω como um parâmetro, os autores deduzem uma condição estabilidade para o câmbio no longo prazo. Se $1 + c\theta\omega - \delta c > 0$, qualquer choque no câmbio tende a leva-lo para uma trajetória

divergente, enquanto com $1 + c\theta\omega - \delta c < 0$ o sistema seria convergente para o estado estacionário com $s = \bar{s}$. Segundo Frankel e Froot (1990a) uma condição necessária para estabilidade seria $\delta = 1$, o que economicamente significa que os *gestores de portfólio* aprendem rápido com o processo de acerto e erro dos outros agentes no mercado, contudo, como se pode ver na equação, essa não é uma condição suficiente fazendo com que a estabilidade ocorra apenas numa situação bastante fortuita.

As simulações numéricas

No texto original Frankel e Froot (1990a) calibram o modelo com o uso de dados estimados para a taxa de câmbio americana, isto porque o interesse dos autores era reproduzir séries aderentes aos dados do período, na defesa da hipótese de que a forte apreciação cambial do dólar naqueles anos tinha relação com a heterogeneidade expectacional do mercado. Com o intuito de demonstrar as características qualitativas do modelo, será feita uma simulação numérica com uso de um software matemático⁸ e é destas simulações que se deduzem alguns achados interessantes. As condições iniciais para as equações (2.11) e (2.12) foram estabelecidas com $\omega(0) = 1$ e $s(0) = 0.85$. Os valores dos parâmetros foram calibrados com $\delta = \theta = c = 0,5$ e $\bar{s} = 1$; duas considerações importantes são necessárias, primeiro está sendo considerado que o mercado aprende lentamente (valor de δ) e segundo que a taxa de câmbio no tempo inicial está apreciada em relação ao valor de longo prazo.

⁸ Foi usado o integrador de Runge-Kutta presente na maior parte dos pacotes matemáticos, sendo que os valores paramétricos são diferentes dos usados no texto original, embora com o mesmo sinal.

Figura 3.1 – Trajetória do Câmbio (apreciação cambial)

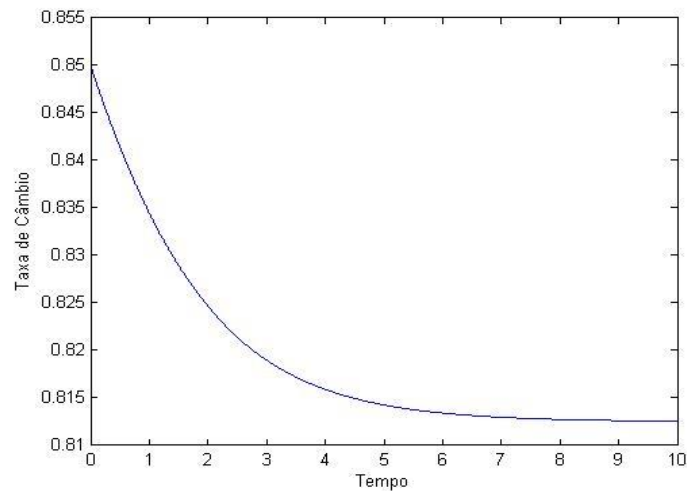
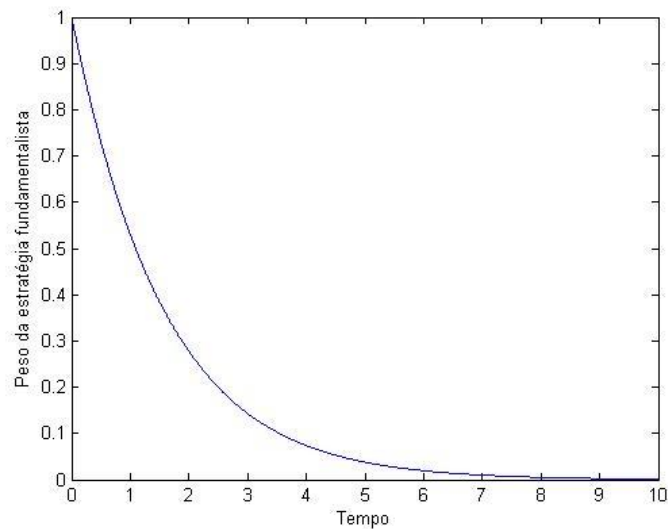


Figura 3.2 – Trajetória do *share* dos fundamentalistas (ω)



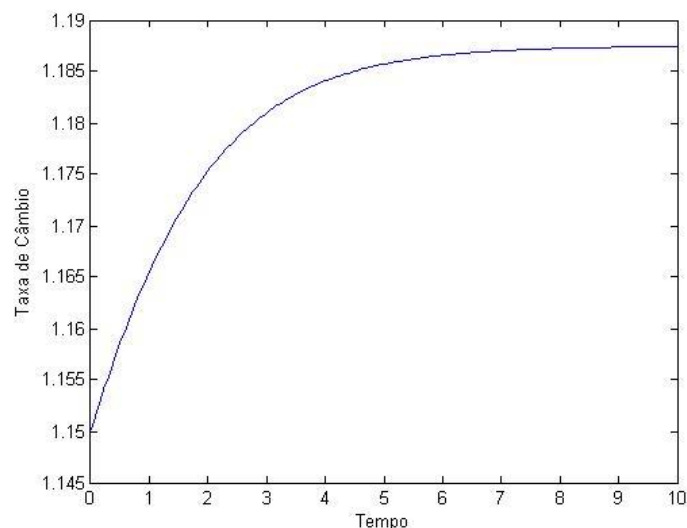
Dois resultados do modelo merecem destaque: i) Dado um desalinhamento cambial no curto prazo, a taxa de câmbio prescrita pelos fundamentos (\bar{s}) deixa de ser um equilíbrio estável, de modo que o câmbio se estabiliza em um patamar distante do prescrito pela (PPP); ii) Existe perda de importância dos agentes fundamentalistas e o crescimento da importância da expectativa dos chartistas na dinâmica da taxa de câmbio ao longo do tempo. Um interessante conclusão derivada disto é que, curiosamente, os gestores de portfólio, embora no tempo inicial tomem suas decisões pautados unicamente pelos fundamentos, ao longo de vários períodos, vão se

afastando cada vez mais em direção à um comportamento menos racional. Sobre isso Frankel and Froot (1986, pp.35-36) fazem o seguinte comentário:

All this comes at what might seem a high cost: portfolio managers behave irrationally in that they do not use the entire model in formulating their exchange rate forecasts. But another interpretation of this behavior is possible in that portfolio managers are actually doing the best they can in a confusing world. Within this framework they cannot have been more rational; abandoning fundamentalism more quickly would not solve the problem in the sense that their expectations would not be validated by the resulting spot process in the long run. In trying to learn about the world after a regime change, our portfolio managers use convex combinations of models which are already available to them and which have worked in the past. In this context, rationality is the rather strong presumption that one of the prior models is correct. It is hard to imagine how agents, after a regime change, would know the correct model.

A respeito do desalinhamento cambial em relação à (PPP), é importante notar que os autores fazem as simulações apenas para o caso do câmbio, no curto prazo, estar apreciado em relação aos fundamentos, o que leva o câmbio para um ponto ainda mais apreciado no longo prazo (como na Figura 3.1). Se a simulação for refeita colocando o câmbio de curto prazo depreciado em relação aos fundamentos, $s(0) = 1,15$, a taxa de câmbio tende a se depreciar ainda mais ao longo do tempo.

Figura 3.3 – Trajetória do Câmbio (depreciação cambial)



3.2 CHARTISTAS FUNDAMENTALISTAS E ESPECULADORES RACIONAIS: O MODELO DE FRENKEL

O modelo de Frenkel (1997) usa uma estratégia semelhante à apresentada na seção anterior, dividindo o mercado de câmbio entre chartistas e fundamentalistas, mas, acrescentando a existência de especuladores racionais. O modelo é construído a partir de uma abordagem de ativos financeiros, sendo que os fundamentos macroeconômicos, assim como no modelo anterior, são tomados como parâmetros exógenos.

A heterogeneidade é inserida a partir das seguintes considerações:

- Os agentes chartistas usam análise técnica, olhando para a taxa de câmbio passada.
- Os fundamentalistas tomam decisões com base no desvio da taxa de câmbio *spot* em relação à taxa de câmbio de longo prazo determinada pelos fundamentos macroeconômicos.
- A especulação no mercado de câmbio é conduzida pela taxa de câmbio *spot*.
- Um terceiro grupo de agentes possui expectativa racional.
- Fatores aleatórios podem afetar a taxa de câmbio (choques).

Usando as mesmas notações de Frenkel (1997), a taxa de câmbio *spot* é explicada pela demanda por ativos financeiros externos e pelo estoque de ativos financeiros nacionais.

$$s_t = m_t + d_t + u_t \quad (3.13)$$

O único ativo doméstico é o estoque de moeda m_t sendo que quanto maior o estoque de moeda nacional mais depreciada a taxa de câmbio, d_t é a demanda por ativos estrangeiros (quanto maior a demanda mais depreciada a taxa de câmbio) e finalmente u_t reflete a possibilidade de choques exógenos.

Os diversos agentes no mercado impactam a dinâmica do câmbio a partir de suas respectivas demandas por ativos estrangeiros. Os chartistas têm expectativas cambiais extrapolativas, isto implica que o movimento de depreciação/apreciação

cambial passado é entendido por eles como tendência, de sorte que terão maior rendimento esperado quando, ao comprar títulos estrangeiros, o câmbio estiver em movimento de depreciação e menor rendimento esperando quando o movimento for de apreciação.

$$d_t^c = \theta_1(s_t - s_{t-1}) + \theta_2(s_{t-1} - s_{t-2}) \quad (3.14)$$

Os chartistas usam uma combinação da depreciação da taxa de câmbio no tempo corrente com a ocorrida no tempo imediatamente anterior. Os parâmetros θ_1 e θ_2 são as elasticidades da demanda de ativos com respeito à depreciação cambial.

Os fundamentalistas, que possuem expectativas regressivas em relação ao câmbio previsto pelo fundamento, têm a seguinte demanda por ativos:

$$d_t^f = \gamma(s^f - s_t) \quad (3.15)$$

Quanto mais alta a taxa de câmbio de longo prazo, s^f , maior a demanda de ativos destes agentes, sendo γ a elasticidade de demanda por ativos.

Um terceiro grupo de agentes é formado pelos especuladores racionais, que possuem expectativas racionais sobre a trajetória do câmbio. Eles conhecem a variação cambial desencadeada pelo comportamento dos chartistas e dos fundamentalistas.

$$d_t^r = \mu E_t(s_{t+1} - s_t) \quad (3.16)$$

Na equação (3.16) a demanda por títulos dos especuladores racionais é função da esperança da variação da taxa de câmbio no tempo $t+1$ dada a elasticidade μ .

Combinando as três demandas por ativos e denotando por α e β a participação de chartistas e fundamentalistas no mercado, respectivamente, pode se escrever a demanda total por ativos:

$$d_t = \alpha d_t^c + \beta d_t^f + (1 - \alpha - \beta) d_t^r \quad (3.17)$$

Quanto menor α e β são, mas o mercado de câmbio é dominado por especuladores racionais.

Depois de apresentar a estrutura básica do modelo, o autor realiza alguns exercícios com diferentes configurações de parâmetros, com o intuito de descrever possíveis dinâmicas cambiais após um choque.

O mercado de câmbio composto apenas por chartistas

O primeiro exercício consiste em avaliar a dinâmica do câmbio na ausência de fundamentalistas e especuladores racionais. Inserindo a demanda de ativos (3.17) em (3.13) e computando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ é possível encontrar uma equação dinâmica para o câmbio:

$$s_t = \theta_1(s_t - s_{t-1}) + \theta_2(s_{t-1} - s_{t-2}) + m_t + u_t \quad (3.18)$$

Resolvendo para s_t :

$$\begin{aligned} s_t - \theta_1 s_t &= m_t + u_t + \theta_2(s_{t-1} - s_{t-2}) - \theta_1 s_{t-1} \\ s_t + (\theta_1 - \theta_2) \frac{s_{t-1}}{1 - \theta_1} + \frac{\theta_2 s_{t-2}}{1 - \theta_1} &= \frac{m_t + u_t}{1 - \theta_1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Reescrevendo as constantes convenientemente e desconsiderando choques aleatórios:

$$\begin{aligned} \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{(1 - \theta_1)} &= a_1 \\ \frac{\theta_2}{1 - \theta_1} &= a_2 \\ \frac{m_t}{1 - \theta_1} &= b \end{aligned} \quad (3.20)$$

Usando (3.20) encontra-se a equação reduzida para a dinâmica cambial:

$$s_t + a_1 s_{t-1} + a_2 s_{t-2} = b \quad (3.21)$$

A equação acima é uma equação à diferenças de segunda ordem cuja a solução geral é reproduzida abaixo.

$$s_t = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t + m_t \quad (3.22)$$

A dinâmica do modelo depende dos sinais das raízes da equação característica de (3.22), isto é, dos sinais de λ_1 e λ_2 que, por sua vez, dependem dos parâmetros do modelo a_1 e a_2 . As constantes C_1 e C_2 são especificadas pelas condições iniciais.

A primeira solução possível é encontrada quando a equação característica para (3.22) possui duas raízes reais distintas, isso só é possível quando $a_1^2 - 4a_2 > 0$. Uma condição necessária para isso é que $\theta_1 > \theta_2$, o que em termos econômicos implica que a demanda por ativos dos chartistas deva ser mais sensível à variação cambial em t do que em $t-1$.

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2} \quad (3.23)$$

$$\lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

Para que o câmbio não tenha um comportamento explosivo (dado um choque) é necessário que o módulo das raízes características seja menor que um, sendo que, dependendo dos valores θ_1 e θ_2 , a taxa de câmbio pode convergir de maneira monotônica ou oscilatória para os fundamentos.

A segunda solução possível para a equação (3.22) ocorre quando existem duas raízes reais idênticas, o que se verifica quando $a_1^2 - 4a_2 = 0$. Neste caso $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$, sendo que a taxa de câmbio não terá uma trajetória explosiva apenas se $\left| \frac{a_1}{2} \right| < 1$. Esta solução é bastante improvável porque seria necessário, além das condições de estabilidade, verificar a igualdade $(\theta_1 - \theta_2)^2 = 4\theta_2(1 - \theta_1)$

A terceira e última solução para (3.22) ocorre quando $a_1^2 - 4a_2 < 0$, neste caso as raízes da equação característica de (3.22) possuem complexos conjugados e o solução geral pode ser reescrita da maneira abaixo:

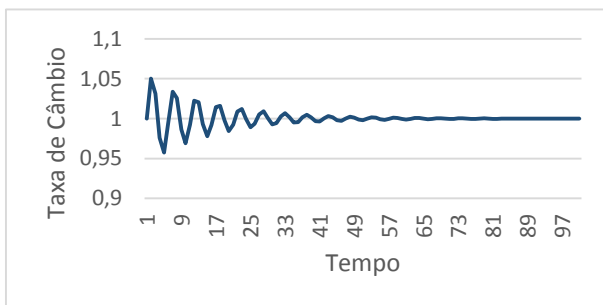
$$s_t = C_1 R^t \cos(\varphi t) + C_2 R^t \sin(\varphi t) + m_t \quad (3.24)$$

$$R \cos(\varphi t) = -\frac{1}{2} a_1$$

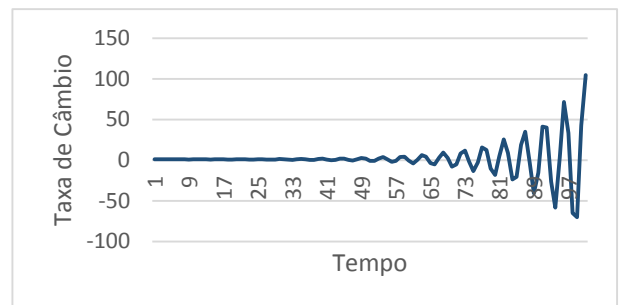
$$R \sin(\varphi t) = \sqrt{a_2 - \left(\frac{a_1^2}{4}\right)}$$

Com raízes complexas o modelo comporta tanto a possibilidade de um ciclo limite como de convergência/divergência oscilatória. Abaixo seguem os gráficos das soluções numéricas do modelo em diferentes configurações de parâmetros, todas com $s^* = m = 1$, $s_{t-2} = 1$ e $s_{t-1} = 1,05$. Nos três casos abaixo a equação característica de (2.22) tem soluções complexas e o ajuste do câmbio se dá após um choque em $t-1$ sem, contudo, haver mudanças nos fundamentos.

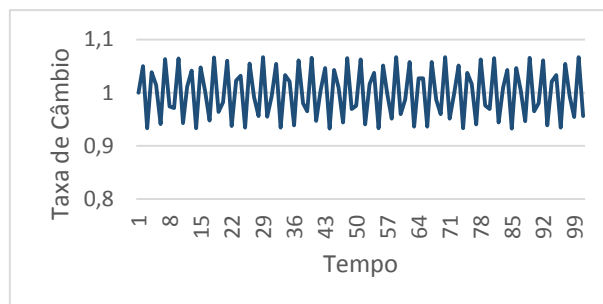
Figura 3.4 – Dinâmica do câmbio com o mercado dominado por chartistas



$$\theta_1 = 0,2 ; \theta_2 = 0,7$$



$$\theta_1 = 0,4 ; \theta_2 = 0,7$$



$$\theta_1 = 0,7 ; \theta_2 = 0,3$$

Segundo Frankel (1997) o modelo, quando há só chartistas no mercado, teria êxito em reproduzir dinâmicas cambiais aderentes à evidência empírica:

The version of the model that includes chartists as the only type of speculators is interesting because it already reveals some typical characteristics of exchange rate movements. For example, a single considerable shock to the foreign exchange market equilibrium leads to longer fluctuations around the value that can be explained by fundamentals. The exchange rate paths can easily look like smaller bubbles which are not reversed in one period but over a few periods. (...) However, unlike in the model of Frankel und Froot [8], where fluctuations can be as long as 5 to 10 years, the case studied here implies very short term fluctuations in the foreign exchange markets. (FRANKEL, 1997, pp. 9)

Interação entre chartistas e fundamentalistas

O passo seguinte do modelo é adicionar os agentes fundamentalistas à análise, notando que estes possuem expectativas regressivas. Fazendo $\beta = 1 - \alpha$ e combinando (3.13), (23.14) e (3.15) encontra-se a nova equação dinâmica para o câmbio:

$$s_t = \alpha\theta_1(s_t - s_{t-1}) + \alpha\theta_2(s_{t-1} - s_{t-2}) + (1 - \alpha)\gamma(s^f - s_t) + m_t + u_t \quad (3.25)$$

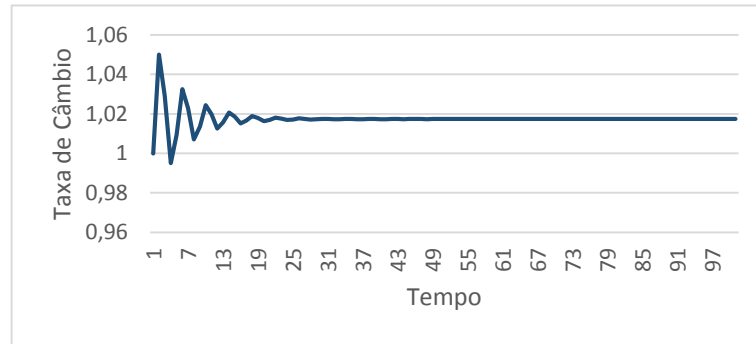
Rearranjando:

$$\begin{aligned} s_t + \frac{\alpha(\theta_1 - \theta_2)}{1 - \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\gamma} s_{t-1} + \frac{\alpha\theta_2}{1 - \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\gamma} s_{t-2} \\ = \frac{m_t + (1 - \alpha)\gamma s^f + u_t}{1 - \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\gamma} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Novamente encontra-se uma equação à diferenças de segunda ordem, possível de ser resolvida de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, lembrando que s^f é a taxa de câmbio de longo prazo (esperada) pelos fundamentalistas que é exógena no modelo. Abaixo, é apresentado o resultado de uma solução numérica da equação (3.26), tomando parâmetros compatíveis com a estabilidade do modelo e tomando as condições de contorno $s^* = m = 1$, $s_{t-2} = 1$ e $s_{t-1} = 1,05$.

Figura 3.5 – Dinâmica do câmbio com chartistas e fundamentalistas

($\theta_1 = 0,1$; $\theta_2 = 0,7$; $\alpha = 0,9$; $\gamma = 0,15$ e $m_t = s^f = 1$)



O autor faz ainda dois exercícios adicionais na ausência de especuladores racionais no mercado, testando a possibilidade de mudanças na taxa de câmbio fundamental entrar no predictor dos fundamentalistas e também a possível existência de um threshold (da variação cambial) acima da qual os fundamentalistas não estariam dispostos a se arriscar no mercado de câmbio. Considerando que os resultados desses exercícios difere pouco do apresentado até aqui estas duas extensões não serão apresentadas.

Chartistas, fundamentalistas e especuladores racionais

O último exercício com o modelo consiste em acrescentar os especuladores racionais, que conhecem a verdadeira variação cambial, ao mercado de câmbio. Combinando (3.13) e (3.17) encontra-se a dinâmica do câmbio com os três tipos de agentes no mercado:

$$s_t = \eta[-\alpha(\theta_1 - \theta_2)s_{t-1} - \alpha\theta_2s_{t-2} + \beta\gamma s^f + (1 - \alpha - \beta)\mu E_t(s_{t+1} - s_t) + m_t + u_t] \quad (3.27)$$

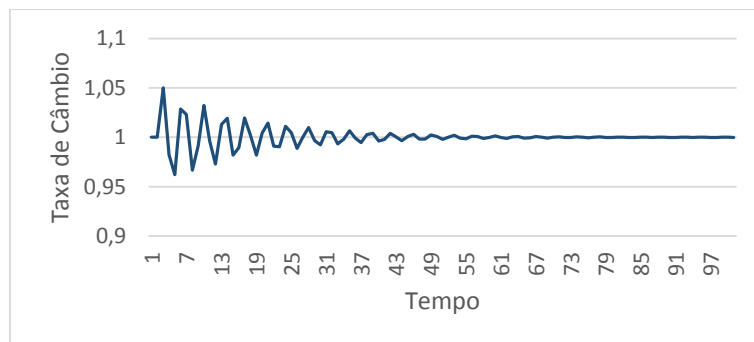
$$\eta = \frac{1}{(1 - \alpha\theta_1 + \beta\gamma)}$$

A taxa de câmbio, na equação acima, é determinada tanto pela taxa de câmbio passada quanto pela expectativa de câmbio futura, por conta dos especuladores racionais conhecerem a taxa de câmbio em $t+1$. Pode-se derivar uma expressão para a expectativa de variação cambial dos especuladores racionais usando (3.27).

$$E_t(s_{t+1} - s_t) = \frac{1}{(1 - \alpha - \beta)\mu\eta} s_t + \frac{\alpha(\theta_1 - \theta_2)}{(1 - \alpha - \beta)\mu} s_{t-1} + \frac{\alpha\theta_2}{(1 - \alpha - \beta)\mu} s_{t-2} - \frac{\beta\gamma s^f + m_t + u_t}{(1 - \alpha - \beta)\mu} \quad (3.28)$$

Os especuladores racionais podem errar em três situações, quando eles erram a previsão dos fundamentos usados pelos fundamentalistas, quando os próprios fundamentalistas erram os fundamentos e, finalmente, quando houver algum choque aleatório não previsto. Considerando que os especuladores racionais acertam a previsão de variação cambial e que os fundamentalistas conhecem o verdadeiro fundamento, a taxa de câmbio convergirá para o valor fundamental no longo prazo. Isto é facilmente verificável igualando (3.28) à zero e fazendo $s^f = m_t$ e $u_t = 0$. A figura 6 mostra o resultado de uma simulação numérica do modelo com especuladores racionais, considerando mais uma vez $s^* = m = 1$, $s_{t-2} = 1$ e $s_{t-1} = 1,05$.

Figura 3.6 – Dinâmica do câmbio com chartistas, fundamentalistas e especuladores racionais
($\theta_1 = 0,2$; $\theta_2 = 0,7$; $\alpha = 0,8$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,15$; $\mu = 0,5$ e $m_t = s^f = 1$)



Como se pode ver, também com especuladores racionais no mercado, a taxa de câmbio tende a convergir de maneira cíclica para os fundamentos, a diferença é que neste caso quanto maior for o número de especuladores racionais no mercado mais rapidamente o câmbio tenderá a convergir para o seu valor de longo prazo.

O modelo de Frenkel (1997) consegue reproduzir algumas características estilizadas do mercado de câmbio, como a volatilidade de curto prazo e o

descolamento do câmbio em relação aos fundamentos. Mostra também que a dinâmica do câmbio após um choque pode depender do grau de heterogeneidade do mercado e do modelo expectacional usado pelos agentes. Por outro lado, embora o comportamento limitadamente racional dos players no mercado de câmbio possa explicar parte das oscilações cambiais, a heterogeneidade expectacional não implica necessariamente em deslocamento duradouro do câmbio do seu fundamento, como ocorre em Frankel e Froot (1987), sendo que mesmo com o mercado dominado apenas por chartistas o câmbio pode retornar ao equilíbrio fundamental.

3.3 FUNDAMENTALISTAS COM REGRA DE DECISÃO NÃO LINEAR

Nos modelos apresentados até aqui, os agentes usam processos lineares de tomada de decisão, contudo, uma explicação adicional para as oscilações no mercado de câmbio pode advir de alguma não linearidade no processo decisório dos agentes. Nesta seção será apresentado um modelo com chartistas e fundamentalistas no mercado de câmbio reproduzido de Westerhoff (2009) que tem como característica particular uma regra de decisão não linear por parte dos fundamentalistas. Outro exemplo de modelo de câmbio com chartistas e fundamentalistas e regra de decisão não linear pode ser encontrado em Chiarella, He e Zheng (2013).

De maneira semelhante ao visto em Frenkel (1997), o modelo é construído a partir da abordagem de ativos da taxa de câmbio, sendo a dinâmica cambial explicada pelo excesso de demanda de moeda estrangeira como na equação abaixo:

$$S_{t+1} = S_t + a(W_t^C D_t^C + W_t^F D_t^F) \quad (3.29)$$

Em que S é o log da taxa de câmbio doméstica, a é um parâmetro (positivo) que captura a velocidade de ajuste do câmbio com respeito ao excesso de demanda por títulos estrangeiros. A parcela de agentes chartistas no mercado é igual à W_t^C , enquanto W_t^F é a parcela de agentes fundamentalistas, sendo D_t^C e D_t^F a ordem de compra de títulos estrangeiros gerada por cada tipo de agente. Quando o excesso de demanda por títulos estrangeiros ($W_t^C D_t^C + W_t^F D_t^F$) é positivo/negativo, a taxa de câmbio sobe/desce.

As ordens de compra de títulos estrangeiros dos chartistas se baseiam em expectativa extrapolativa sobre o câmbio, se o câmbio passado estiver abaixo do câmbio presente eles compram se estiver acima eles vendem.

$$D_t^C = b(S_t - S_{t-1}), \quad b > 0 \quad (3.30)$$

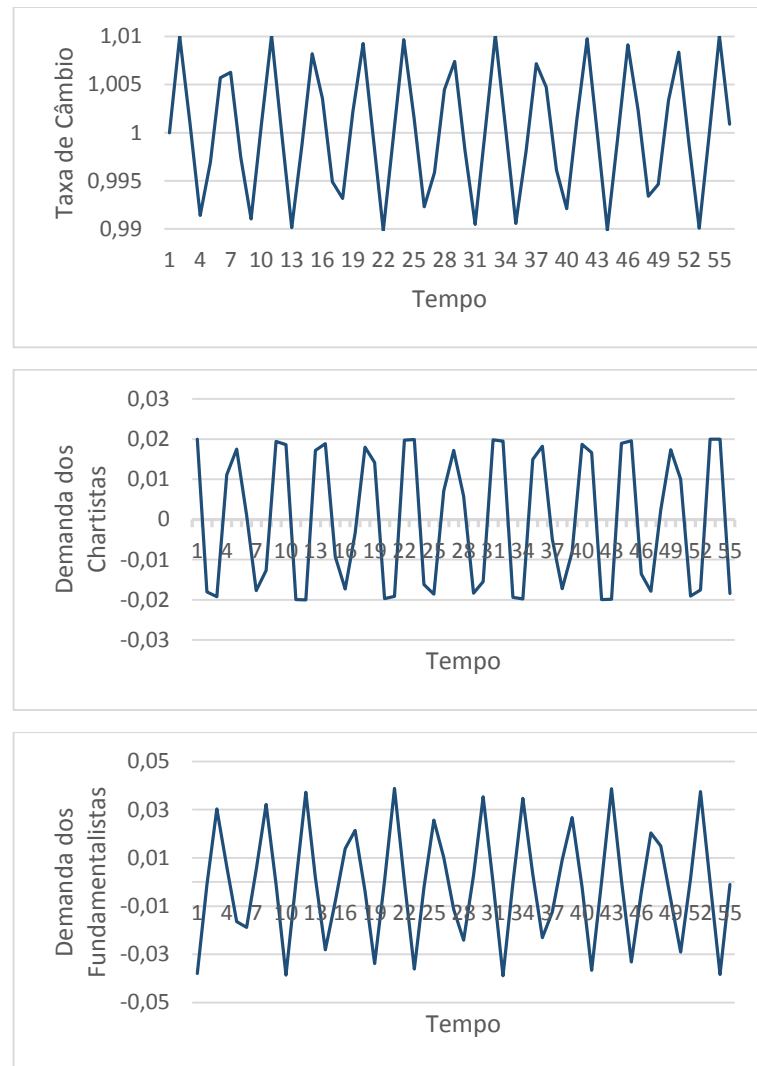
Os fundamentalistas tomam suas decisões de compra e venda com base na variação do câmbio em relação ao fundamento, contudo, diferentemente dos modelos anteriores, embutem uma não-linearidade na regra de decisão.

$$D_t^F = c(S^f - S_t)\sqrt{|S^f - S_t|}, \quad c > 0 \quad (3.31)$$

Desde que o coeficiente de reação “c” seja positivo, os fundamentalistas compram quando a taxa de câmbio está abaixo do valor fundamental e vendem quando está acima. A expressão em raiz quadrada mostra que a atividade de compra/venda de títulos estrangeiros é dependente do tempo. Quanto maior o desalinhamento do câmbio com relação aos fundamentos, maior é a confiança dos fundamentalistas na utilidade da estratégia por eles empregada e, portanto, maior o nível de atividade destes agentes no mercado. Tal comportamento pode ser justificado pelo fato de que quanto maior o desalinhamento do câmbio maior as oportunidades de lucro. (WESTERHOFF, 2009; DAY E HUANG 1990).

Combinando (3.29), (3.30) e (3.31) encontra-se uma equação à diferenças que pode ser resolvida numericamente. Os parâmetros usados por Westerhoff (2009) são $a = 1$; $b = 2$; $c = 38$; $S^f = 1$, $W^C = W^F = 0,5$ e $S_{t-1} = 1,01$ (choque exógeno de 1%). Nos gráficos a seguir são plotadas a dinâmica do câmbio e a demanda por títulos de cada grupo de agentes.

Figura 3.7 – Dinâmica do câmbio e da demanda por títulos



Uma inspeção no gráfico da dinâmica do câmbio mostra que a taxa de câmbio flutua ao redor do seu fundamento sem aparente tendência a convergir. Segundo Westerhoff, (2009), a regra de decisão não linear dos fundamentalistas e o comportamento cíclico do câmbio estão interligados:

The story of the dynamics is quite easy to grasp. When the exchange rate is far away from its fundamental value, the fundamentalists are quite confident of their trading strategy and trade rather aggressively. Their orders dominate those of the chartists and drive the exchange rate back towards fundamentals. However, when the exchange rate is close to fundamentals, fundamental analysis is not regarded as very attractive and thus its market impact is relatively weak. In this situation the market is governed by the destabilizing orders of the chartists, who create the next temporary bubbles. The process then repeats itself. (WESTERHOFF, 2009, p. 301)

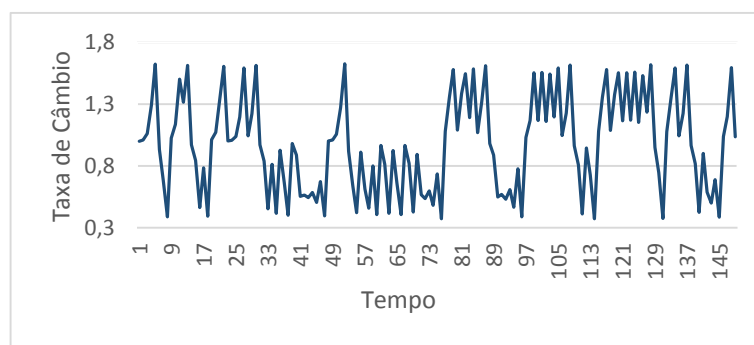
Varição 1 – Emergência de mercados altistas e baixistas (*bull and bear markets*)

Seguindo Day e Huang (1990), Westerhoff (2009), desenvolve uma extensão para o modelo na qual os chartistas acreditam na persistência de touros (tendência de alta) ou ursos (tendência de baixa) no mercado. Seguindo essa ideia a demanda por títulos dos chartistas é descrita agora de uma forma diferente:

$$D_t^C = b(S_t - S^f), \quad b > 0 \quad (3.32)$$

Os chartistas enviam ordens de compra quando o mercado está sobre-avaliado, na crença que os preços dos títulos estrangeiros tendem a aumentar ainda mais. Quando os títulos estão acima do valor de equilíbrio a taxa de câmbio também estará desalinhada e acima dos fundamentos, que agora os chartistas usam como previsor. Os movimentos contrários são análogos, quando há tendência de baixa, e a taxa de câmbio é inferior ao fundamento, os chartistas dão ordem de venda acreditando que o mercado tende à baixa. O gráfico a seguir mostra a dinâmica desta extensão do modelo para $a = 1; b = 12; c = 18; S^f = 1, W^C = W^F = 0,5$ e $S_{t-1} = 1,01$ (choque exógeno de 1 %).

Figura 3.8 – Dinâmica do câmbio (*bull and bear markets*)



A emergência de mercados baixistas/altistas pode explicar a dinâmica errática da taxa de câmbio. Quando a taxa de câmbio está ligeiramente acima dos fundamentos, os *chartistas* dominam o mercado e puxam o câmbio ainda mais pra cima, contudo, quanto maior o desalinhamento cambial, mais intensa é atividade dos *fundamentalistas*. Em certo ponto do tempo os fundamentalistas tendem a puxar o câmbio de volta ao valor fundamental, mas a atuação dos chartistas ocorre em sentido

contrário, aumentando a taxa de câmbio novamente. Westerhoff (2009), argumenta que essa dinâmica pode explicar mudanças no mercado cambial de situações altistas (bull-market) para situações baixistas (bear-market):

Suppose that the exchange rate is extremely high. Then the chartists are still buying but the fundamentalists are selling strongly. Their selling pressure may not only drive the exchange rate down but may cause a severe crash in which the exchange rate is pushed below its fundamental value. Then a bull market turns into a bear market. (WESTERHOFF, 2009, p. 303)

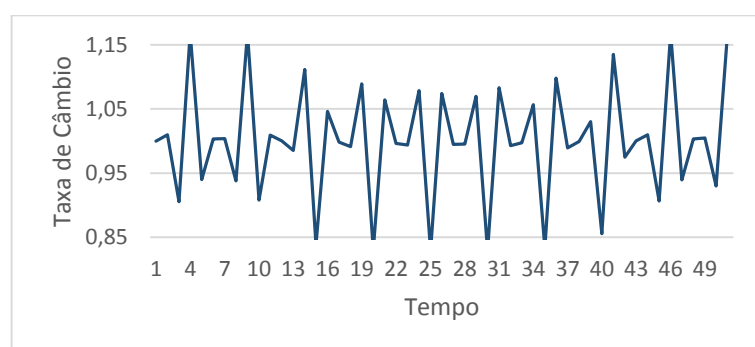
Varição 2: Diminuição do impacto da análise fundamentalista

A premissa básica da versão inicial deste modelo é que a confiança dos fundamentalistas aumenta à medida que o desalinhamento cambial aumenta, por conta das oportunidades de lucro ficarem maiores. Por outro lado, deve se notar que quanto maior é o desalinhamento do câmbio também é maior o erro de previsão dos fundamentalistas. Nesta variação se assume que quanto maior o desalinhamento cambial menor é a confiança dos fundamentalistas na estratégia de previsão por eles adotada.

$$D_t^F = \frac{c(S^f - S_t)}{\sqrt{d + |S^f - S_t|}}, \quad d > 0; c > 0 \quad (3.33)$$

O gráfico a seguir mostra a dinâmica desta extensão do modelo para $a = 1$; $b = 2$; $c = 2,4$; $S^f = 1$, $W^C = W^F = 0,5$ e $S_{t-1} = 1,01$ (choque exógeno de 1 %).

Figura 3.9 – Dinâmica do câmbio



Comparando a dinâmica cambial na figura 3.9 com a dinâmica cambial na figura 7, é possível ver que mais uma vez a regra não linear de decisão dos fundamentalistas

leva à um comportamento complexo da taxa de câmbio, contudo, com uma diferença qualitativa importante. Quando há um pequeno desalinhamento cambial os fundamentalistas tendem a agir de maneira bastante forte causando um overshooting, no entanto, o impacto dos fundamentalistas no mercado vai diminuindo conforme o desalinhamento cresce o que faz com que o câmbio não tenha uma trajetória explosiva.

3.4 SELEÇÃO ENDÓGENA DE ESTRATÉGIAS E APRENDIZAGEM

Uma questão importante na literatura de câmbio com agentes heterogêneos é compreender como a fração de diferentes estratégias expectacionais varia endogenamente. No modelo de Frenkel e Froot (1986), os gestores de portfólio avaliam o desempenho das duas diferentes estratégias ao longo do tempo, quanto maior o acerto dos fundamentalistas/chartistas, maior o peso destes agentes na decisão dos gestores de portfólio. Dentre as formas alternativas de endogenização das estratégias, se destaca o approach desenvolvido por Brock e Hommes (1997, 1998) que é aplicado em um modelo de câmbio por Westerhoff (2009). Modelos de câmbio construídos de maneira semelhante também podem ser encontrados em De Grauwe, e Grimaldi (2006a) e De Grauwe e Markiewicz (2013).

O modelo é basicamente o mesmo da seção anterior com a diferença dos fundamentalistas usarem uma regra linear:

$$D_t^F = c(S^f - S_t), \quad c > 0 \quad (3.34)$$

Combinando (3.29), (3.30) e (3.34), encontra-se uma equação dinâmica para o câmbio bastante familiar. A inovação do modelo é adicionar um mecanismo endógeno de seleção de previsores, baseado em escolha discreta. Se assume que os agentes avaliam as duas regras de previsão (chartista/fundamentalista) comparando o retorno das duas regras. Quanto mais lucrativa for a regra de decisão mais agentes tendem a escolhê-la.

No contexto do modelo, o retorno esperado dos ativos estrangeiros é igual à variação cambial⁹, sendo assim, o poder de previsão dos chartistas K_t^C e dos fundamentalistas K_t^F são computados da maneira seguinte:

$$K_t^C = (Exp[S_t] - Exp[S_{t-1}])D_{t-2}^C \quad (3.35)$$

$$K_t^F = (Exp[S_t] - Exp[S_{t-1}])D_{t-2}^F \quad (3.36)$$

Os agentes avaliam o poder de previsão das estratégias a partir das performances mais recentes (adaptive learning). As ordens de compra/demanda por títulos no período t-2 são executadas aos preços do período t-1, sendo que os lucros efetivos dependem dos preços realizados no período t.

A fração de agentes que segue a estratégia fundamentalista/chartista é dada por:

$$W_t^C = \frac{Exp[gK_t^C]}{Exp[gK_t^C] + Exp[gK_t^F]} \quad (3.37)$$

$$W_t^F = \frac{Exp[gK_t^F]}{Exp[gK_t^C] + Exp[gK_t^F]} \quad (3.38)$$

O parâmetro $g > 0$ apreende o grau de racionalidade dos agentes, isto é, a sensibilidade da massa de agentes no mercado em escolher a estratégia mais lucrativa. A dinâmica do modelo é simulada fazendo $a = 1; b = 2,9; c = 1,225, g = 150, S^f = 1$ e $S_{t-1} = 1,01$ (choque exógeno de 1 %).

⁹ Como o câmbio é modelado em logs naturais o retorno esperado deve ser computado fazendo potências na base "e".

Figura 3.10 – Dinâmica do câmbio com estratégias endógenas

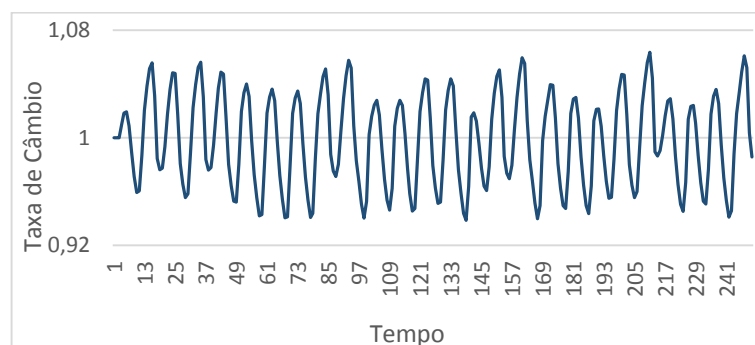
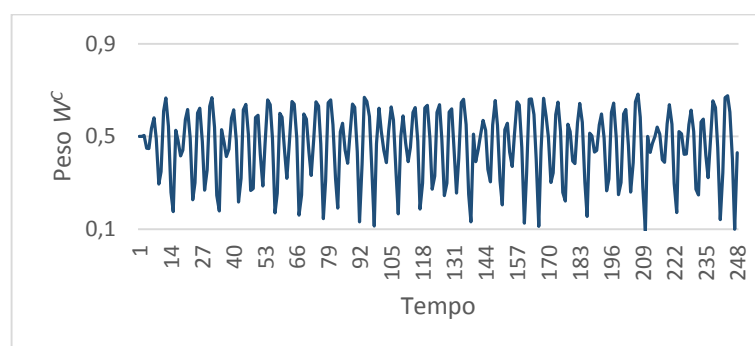


Figura 3.11 – Dinâmica da estratégia chartista



Conforme crescem os desvios do câmbio, a estratégia chartista torna-se bastante lucrativa, enquanto a estratégia fundamentalista produz grandes erros de previsão. Em certo momento do tempo, a trajetória do câmbio reverte em direção aos fundamentos, o que impede um comportamento cambial explosivo, neste ponto a estratégia fundamentalista torna-se mais lucrativa. O rendimento esperado das duas estratégias varia continuamente de forma endógena e a taxa de câmbio, por conta disso, oscila ao redor do valor fundamental sem tendência de convergir permanentemente para ele.

3.5 CONCLUSÕES PRELIMINARES

Os modelos apresentados neste capítulo estão longe de esgotar a literatura de câmbio com agentes heterogêneos, contudo, são bastante representativos das estratégias de modelagem mais usuais nesta classe de modelos.

Em certa medida, estes modelos possuem maior êxito em reproduzir dinâmicas cambiais aderentes aos dados do que os modelos convencionais

(microfundamentados ou não). Alta volatilidade cambial, não-normalidade dos retornos no mercado cambial e períodos de alta volatilidade alternados com períodos de baixa volatilidade são alguns dos fatos estilizados do mercado cambial que encontram suportes neles. Uma limitação importante é que os seus resultados são muito sensíveis à mudanças paramétricas nas simulações numéricas, de sorte que tanto é possível que a taxa de câmbio retorne a seus fundamentos no longo prazo como tenha um comportamento explosivo após um choque, a depender de mudanças nos parâmetros. Este tipo de limitação tende a ser potencializada conforme cresce o nível de complexidade do modelo, cujo caso limite são os modelos *agent based*. Esta característica, embora não invalide os resultados e *insights*, proporciona o desafio adicional de se buscar construir modelos com soluções analíticas de maneira complementar aos trabalhos com foco computacional.

Outra desafio importante é construir modelos com referência explícita aos fundamentos macroeconômicos, visto que, nos modelos estudados até aqui, a taxa de câmbio fundamental é um parâmetro exógeno e tanto a dinâmica do mercado de bens quanto do mercado monetário não são incorporadas.

4. DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO E HETEROGENEIDADE DAS EXPECTATIVAS: UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Neste capítulo será desenvolvida a principal contribuição desta tese, isto é, a construção de um modelo macrodinâmico que incorpora heterogeneidade expectacional ao modelo de Dornbusch (1976).

Três pontos merecem destaque: i) Com exceção de Chiarella, He e Zheng (2013), na maior parte da literatura citada no capítulo anterior os modelos não fazem menção explícita aos fundamentos microeconômicos. No modelo que será desenvolvido neste capítulo, a dinâmica dos preços e o diferencial de juros jogam um papel importante. ii) A forma como a dinâmica da heterogeneidade expectacional é modelada fornece fundamentos microeconômicos para heterogeneidade que é guiada por um jogo. Como foi visto no capítulo anterior, a literatura já possui modelos que tratam a heterogeneidade expectacional de maneira endógena usando o arcabouço de Brock e Hommes (1997, 1998). Embora a escolha de um ou outro arcabouço metodológico sempre envolva algum grau de subjetividade do pesquisador, a escolha do arcabouço de jogos evolucionários (em lugar do *approach* de Brock e Hommes) se deve por, na visão deste autor, possibilitar uma percepção mais precisa sobre o processo de interação entre os agentes. Além disto, no caso do *approach* de Brock e Hommes, além da forma de interação entre os agentes ser menos clara, estes precisam ter um conhecimento perfeito sobre os *payoffs* (desempenho de cada modelo expectacional). Por outro lado, uma das premissas básicas de um jogo evolucionário é que o conhecimento sobre os *payoffs* é distribuído de maneira imperfeita e, portanto, o processo de aprendizado também se dá de maneira imperfeita. Ainda que em última instância numa dinâmica de replicação (sem mutação) todos os agentes do jogo passem a conhecer os *payoffs*, isto é um resultado *ex-post* e não uma premissa inicial. iii) Finalmente, o modelo tem solução analítica, de modo que seus resultados não dependem de parametrização, isto provê maior grau de generalidade aos resultados encontrados.

Na próxima seção o modelo de Dornbusch é apresentado na sua forma original, isto será útil para contrapor os resultados do modelo aqui desenvolvido com os do original. Nas seções subsequentes o modelo de câmbio com heterogeneidade expectacional é apresentado.

4.1 O MODELO DE DORNBUSCH E O OVERSHOOTING

O objetivo desta seção é apresentar modelo de Dornbusch (1976). Embora, ao longo do tempo, o modelo tenha sido apresentado na literatura de inúmeras formas, a apresentação aqui reproduzida segue de perto o artigo original. As equações de partida vão sumarizadas abaixo, elas também serão usadas nas extensões subsequentes:

$$r = r^* + x \quad (4.1)$$

$$x = E_t \left(\frac{de}{dt} \right)$$

$$m = p + \phi y - \lambda r \quad , \quad \phi > 0, \lambda > 0 \quad (4.2)$$

$$m^s = m^d = m$$

$$\ln D = u + \delta(e - p) + \gamma y - \sigma r \quad , \quad 1 < \gamma < ; \delta > 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{p} = \pi \ln \left(\frac{D}{Y} \right) = \pi [u + \delta(e - p) + (\gamma - 1)y - \sigma r], \quad \pi > 0 \quad (4.4)$$

A economia do modelo é uma pequena economia aberta com perfeita mobilidade de capital. Sendo os ativos denominados em moeda estrangeira e moeda nacional substitutos perfeitos e não havendo diferencial de risco entre eles, a equação (4.1) reproduz a paridade descoberta dos juros, na qual r é a taxa de juros doméstica, r^* a taxa de juros estrangeira (exógena), x a depreciação esperada da taxa de câmbio e " e " o logaritmo natural da taxa de câmbio nominal. A equação (4.2) descreve o equilíbrio no mercado monetário sendo m o logaritmo natural do estoque de moeda, p o logaritmo natural do nível de preços domésticos e y o logaritmo natural do produto. A equação (4.3) descreve a demanda agregada doméstica como função dos gastos autônomos u , da renda agregada doméstica, da taxa de juros doméstica e da taxa de câmbio real em logaritmos naturais.¹⁰ Finalmente, a equação (4.4) descreve a dinâmica dos preços como função da diferença entre o produto agregado (exógeno) e a demanda agregada.

No que diz respeito à formação das expectativas, o modelo Dornbusch distingue entre a taxa de câmbio de longo prazo, para a qual a economia irá convergir

¹⁰ Adota-se a seguinte simplificação $P^* = 1$ e $\ln p^* = 0$.

em última instância, e a taxa de câmbio presente (spot). Formalmente, assume-se que:

$$x = \theta(\bar{e} - e) \quad (4.5)$$

A equação (4.5) implica que a depreciação esperada da taxa de câmbio presente é proporcional a discrepância entre a taxa de câmbio de longo prazo (\bar{e}) e a taxa de câmbio presente (e), sendo $\theta > 0$ o parâmetro de ajuste.

Combinando (4.1), (4.2) e (4.5):

$$p - m = -\phi y + \lambda r^* + \lambda \theta(\bar{e} - e) \quad (4.6)$$

Dada uma oferta de moeda constante no longo prazo, o nível de preços de equilíbrio de longo prazo pode ser deduzido igualando-se as taxas de câmbio de curto e longo prazo.

$$\bar{p} = m + (\lambda r^* - \phi y) \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) em (4.6), é possível deduzir uma relação entre a taxa de câmbio corrente, a taxa de câmbio de longo prazo e os desvios dos preços em relação ao seu valor de equilíbrio de longo prazo.

$$e = \bar{e} - \frac{1}{\lambda\theta}(p - \bar{p}) \quad (4.8)$$

Para dado nível de preços, existe uma taxa de juros doméstica e um diferencial de juros. Dada a taxa de câmbio de longo prazo, existe um único nível de câmbio (spot) que faz a depreciação/apreciação cambial esperada ser igual ao diferencial de juros (doméstico/externo). Quando ocorre uma elevação no nível de preços, a taxa de juros sobe para equilibrar o mercado monetário, isto faz com que ocorra fluxo de capitais e apreciação da taxa de câmbio corrente até que paridade dos juros seja novamente reestabelecida.

A partir da dinâmica do mercado de bens, é possível deduzir uma equação diferencial para os preços. Reescrevendo (4.4) em função dos desvios em relação ao estado estacionário e lembrando que no longo prazo $p = \bar{p}$ e $r = r^*$:

$$\dot{p} - 0 = \pi[\delta(e - \bar{e}) - \delta(p - \bar{p}) - \sigma(r - r^*)] \quad (4.9)$$

Da paridade descoberta dos juros sabe-se que $r - r^* = \theta(\bar{e} - e)$, combinando (4.9), (4.8) e a paridade dos juros:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\pi \left[\delta \frac{1}{\lambda\theta} (p - \bar{p}) + \delta(p - \bar{p}) + \frac{\sigma\theta}{\lambda\theta} (p - \bar{p}) \right] \\ \dot{p} &= -\pi \left[\frac{\delta + \sigma\theta}{\lambda\theta} + \delta \right] (p - \bar{p}) = -v(p - \bar{p}) \quad (4.10) \\ v &= \pi \left[\frac{\delta + \sigma\theta}{\lambda\theta} + \delta \right] \end{aligned}$$

Resolvendo a equação (4.10) para $p(t)$:

$$p(t) = \bar{p} + (p_0 - \bar{p}) \exp(-vt) \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.8):

$$\begin{aligned} e(t) &= \bar{e} - \frac{1}{\lambda\theta} (p_0 - \bar{p}) \exp(-vt) \quad (4.12) \\ e(t) &= \bar{e} - (e_0 - \bar{e}) \exp(-vt) \end{aligned}$$

A solução da equação anterior é fundamental dentro do modelo, uma vez que as expectativas só serão consistentes se compatíveis com o verdadeiro parâmetro de ajuste do câmbio (v). Se os agentes possuem previsão perfeita, que é o equivalente de expectativas racionais em termos determinísticos, a igualdade abaixo deve ser atendida:

$$\theta \equiv v = \pi \left[\frac{\delta + \sigma\theta}{\lambda\theta} + \delta \right] \quad (4.13)$$

Resolvendo para θ :

$$\tilde{\theta}(\lambda, \delta, \sigma, \pi) = \frac{\pi \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta \right)}{2} + \left[\pi^2 \frac{\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta \right)^2}{4} + \frac{\pi \delta}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

A equação (4.14) descreve a taxa de convergência da economia para o equilíbrio de longo prazo ao longo da trajetória de previsão perfeita.¹¹

Usando (4.14) em (4.8), é possível derivar uma expressão para o impacto de uma variação na oferta de moeda sobre a taxa de câmbio corrente. Tendo em vista que existe rigidez no mercado de bens, variações na oferta de moeda têm efeito sobre preço e câmbio de longo prazo ($dm = d\bar{p} = d\bar{e}$), contudo, não têm efeito nos preços no curto prazo ($dp = 0$):

$$\frac{de}{dm} = 1 + \frac{1}{\lambda \tilde{\theta}} > 0 \quad (4.14)$$

A equação (4.14) sintetiza o famoso resultado de *overshooting*, isto é, para uma variação positiva na oferta de moeda a taxa de câmbio de curto prazo irá se depreciar mais que proporcionalmente à sua depreciação de longo prazo.

Quanto mais alta a elasticidade da demanda de moeda em relação aos juros, menor será o *overshooting*, porque uma expansão monetária deverá ter pequeno efeito sobre a taxa de juros, requerendo menor variação cambial para manter o equilíbrio no mercado de ativos internacionais. Do mesmo modo, quanto maior o parâmetro expectacional $\tilde{\theta}$, menor deverá ser o *overshooting*. O ajuste de curto prazo do câmbio é dominado pelos efeitos do mercado monetário, pela mobilidade de capitais e pelas expectativas. Mais especificamente, o ajuste do câmbio, nestes moldes, se dá pelo fato do mercado financeiro se ajustar rapidamente (variáveis jump) e o mercado de bens se ajustar lentamente. Este fato fica mais evidente quando se olha para o parâmetro π de ajuste dos preços, quando esse parâmetro tende a infinito não existe *overshooting* e a taxa de câmbio, para uma mudança monetária, deve saltar

¹¹ A solução de (4.13) foi computada tomando a raiz estável do sistema de equações diferenciais formado por preços e câmbio. É importante salientar que o modelo tem solução do tipo saddle-path, válido como estabilidade para o caso de expectativa racional/previsão-perfeita.

instantaneamente para seu equilíbrio de longo prazo. Em contraste, quanto menor for π (maior rigidez no mercado de bens), maior deverá ser o *overshooting*.

4.2 DINÂMICA DA TAXA DE CÂMBIO COM HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL

Em linha com a evidência empírica sobre expectativas no mercado de câmbio, a partir daqui será desenvolvido um modelo que estende o trabalho de Dornbusch (1976), incorporando expectativas cambiais heterogêneas. Uma inovação adicional do modelo é tratar a distribuição de estratégias expectacionais como uma variável endógena e não como um parâmetro, sendo que esta variável segue uma dinâmica evolucionária que responde ao desempenho relativo das estratégias de previsão de câmbio. Não obstante, as hipóteses de perfeita mobilidade de capital, rigidez no mercado de bens e produto fixo ao nível de pleno emprego, continuam sendo usadas.

Existem dois grupos de agentes, tratados, nesse primeiro momento, ambos como fundamentalistas, contudo, uma parte destes agentes são fundamentalistas com expectativas racionais que pagam um custo (fixo) para conhecer o verdadeiro previsor do câmbio (ou previsor consistente para usar a linguagem de Dornbusch) e os outros são fundamentalistas com racionalidade limitada que, embora conheçam os fundamentos, não conhecem o verdadeiro parâmetro de ajuste do câmbio, mas em compensação não possuem custos relativos à previsão cambial. Portanto, a previsão perfeita não é um bem gratuito. De fato, enquanto os agentes com expectativas racionais pagam um custo *ex ante* para evitar enfrentar uma perda *ex post* resultante de erros expectacionais, os agentes limitadamente racionais não pagam tal custo e estão sujeitos a enfrentar uma perda *ex post* resultante de erros de previsão.

O termo expectativa racional é usado aqui como sinônimo de previsão perfeita, de fato em ambiente determinístico os dois termos são equivalentes. Uma interessante discussão sobre o uso de expectativa racional/previsão perfeita em modelos contínuos pode ser encontrada em Gray e Turnovsky (1975) e Turnovsky (1995). Mais exatamente, assim como em Dornbusch (1976), a noção de previsão perfeita usada aqui é a de “perfect myopic foresight”. “We say that forecasts of a given variable satisfy perfect myopic foresight if the expected instantaneous rate of change

of that variable equals its actual instantaneous rate of change” (Gray e Turnovsky ,1975,pp.643).

Formalmente, enquanto $k \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ denota a fração de agentes com expectativa racional, $1 - k \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ denota a fração de agentes limitadamente racionais. Tanto k quanto $1 - k$ variam endogenamente através de uma dinâmica evolucionária que será descrita posteriormente. Feitas essas considerações, é possível reescrever a expectativa de depreciação cambial da equação (4.5) como uma média ponderada:

$$x = kx_f + (1-k)x_b \quad (4.15)$$

Onde x_f é a expectativa de depreciação cambial dos agentes com expectativa racional e x_b é a expectativa de depreciação cambial dos agentes com racionalidade limitada.

Os dois grupos de agentes se comportam de maneira fundamentalista, logo:

$$x_f = \theta_f(\bar{e} - e) \quad (4.16)$$

$$x_b = \theta_b(\bar{e} - e) \quad (4.17)$$

Em que $\theta_i > 0$ e $\theta_b = \alpha\theta_f$, com α sendo positivo e diferente de um. Embora alfa seja diferente de um, espera-se que este parâmetro seja suficientemente próximo de um, pois, a despeito dos agentes limitadamente racionais cometerem erros de previsão, não seria razoável imaginar erros expectationais de grande magnitude visto que eles mimetizam de alguma sorte o comportamento plenamente racional. Nesta primeira especificação a taxa de câmbio de longo prazo é conhecida por todos os agentes, no entanto, apenas os agentes com expectativa racional conhecem a verdadeira trajetória de convergência do câmbio, pois, pagam pelo previsor perfeito.

Assim, como na seção anterior, a trajetória cambial será deduzida a partir da expectativa de depreciação cambial (que depende, nesse caso, de $\theta_b; \theta_f$, e k) e depois será computado o valor de θ_f que é consistente com previsão perfeita. Combinando (4.15), (4.16) e (4.17):

$$x = A\theta_f (\bar{e} - e) \quad (4.18)$$

Sendo $A(k) \equiv [k + \alpha(1-k)]$, com $A(k) > 0$ para todo $k \in [0,1]$. Entretanto, note que $A(k)$ varia positivamente (negativamente) com k se α é menor (maior) que um.

Sobre o equilíbrio no mercado financeiro internacional uma hipótese é adicionada. Como se sabe, a oferta/demanda dos títulos estrangeiros depende, além do diferencial de juros, da variação cambial esperada. Conforme se espera uma variação futura da taxa de câmbio, o rendimento esperado dos títulos estrangeiros/nacionais pode ser mais ou menos atraente. No modelo desenvolvido aqui, parte dos agentes (agentes com racionalidade limitada) prevê incorretamente a trajetória do câmbio e por conta disto também incorre em erros ao prever o rendimento dos títulos estrangeiros/nacionais para um dado diferencial de juros. Na tentativa de compensar seus possíveis erros de previsão cambial, os agentes com racionalidade limitada usam uma regra de bolso. Em outras palavras, como os possíveis erros de previsão cambial tornam a precificação dos ativos estrangeiros sujeita à miopia, os agentes com racionalidade limitada tratam os títulos nacionais e estrangeiros como substitutos imperfeitos. Os pontos a seguir detalham o funcionamento desta hipótese: i) Os agentes com racionalidade limitada usam um previsor de câmbio que os próprios agentes reconhecem como imperfeito. ii) Considerando que o previsor imperfeito é livre de custos e estes agentes não conhecem o previsor perfeito, utilizar este previsor imperfeito é o melhor que podem fazer. iii) Como uma maneira de atenuar o impacto dos erros de previsão cambial no rendimento esperado dos títulos, os agentes com racionalidade limitada adicionam um mecanismo de correção de preços (dado pelo parâmetro $0 < \rho < 1$) na precificação dos títulos estrangeiros. iv) Esse mecanismo funciona como uma regra de bolso que é, também, imperfeita, sendo que seu uso só eliminará completamente as perdas oriundas de erros de previsão dos agentes com racionalidade limitada em situações completamente fortuitas. A nova equação para o equilíbrio no mercado financeiro internacional segue abaixo:

$$r = k(r^* + x_f) + (1 - k)(r^* + x_b + \rho) \quad (4.19)$$

$$r = r^* + x + (1 - k)\rho$$

Na equação acima, que expressa o equilíbrio para o mercado financeiro internacional, a paridade descoberta dos juros só seria verificada com $k = 1$, isto é, caso não existissem agentes com racionalidade limitada no mercado de câmbio.

Como no modelo original de Dornbusch, a oferta de moeda é exógena e a autoridade monetária pode controlar a oferta de moeda. Contemporaneamente, esta é uma hipótese considerada heroica, visto que a dificuldade prática de controlar a oferta de moeda levou uma grande parte dos bancos centrais no mundo a operacionalizar a política monetária usando uma regra do tipo *Taylor Rule*. No entanto, como mostram De Gregorio e Parrado (2006), a introdução de uma regra de política monetária não altera as características do modelo de Dornbusch, e, portanto, também não trariam mudanças nos resultados do modelo aqui desenvolvido.¹²

Usando a condição de equilíbrio no mercado monetário e o equilíbrio no mercado financeiro internacional, pode-se combinar (4.2), (4.18) e (4.19):

$$p - m = -\phi y + \lambda r^* + \lambda(1 - k)\rho + \lambda A\theta_f(\bar{e} - e) \quad (4.20)$$

Tomando o equilíbrio de longo prazo:

$$\bar{p} = m + [\lambda(r^* + (1 - k)\rho) - \phi y] \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) em (4.20):

$$e = \bar{e} - (1/\lambda A\theta_f)(p - \bar{p}) \quad (4.22)$$

A diferença fundamental entre (4.22) e (4.8) é que a distribuição de frequência das expectativas (dado por k) tem impacto sobre o processo de ajuste da taxa de câmbio. De maneira análoga à feita na seção anterior, resolvendo a dinâmica dos preços a partir da equação (4.4) e usando a equação de equilíbrio no mercado financeiro internacional na presença de heterogeneidade $[r - r^* - (1 - k)\rho = x]$, encontra-se a nova equação diferencial para os preços:

¹² O modelo mostrado por De Gregorio e Parrado (2006) considera que a política monetária (e a meta de preços/inflação) é completamente crível, uma possível extensão do modelo aqui desenvolvido pode ser construída pensando não apenas na heterogeneidade expectacional com respeito ao câmbio mas também com respeito aos preços (credibilidade imperfeita da política monetária).

$$\dot{p} = -\pi[(\delta + \sigma A\theta_f) / \lambda A\theta_f + \delta](p - \bar{p}) = -v(p - \bar{p}) \quad (4.23)$$

Na qual:

$$v \equiv \pi[(\delta + \sigma A\theta_f) / \lambda A\theta_f + \delta] \quad (4.24)$$

Resolvendo a equação diferencial (4.23) da maneira convencional:

$$p(t) = \bar{p} - (p_0 - \bar{p})\exp(-vt) \quad (4.25)$$

Combinando (4.25) e (4.22) e resolvendo para $e(t)$:

$$e(t) = \bar{e} - (e_0 - \bar{e})\exp(-vt) \quad (4.26)$$

No modelo de Dornbusch (no qual, por hipótese, $k = A = 1$), o coeficiente de ajuste dado por (4.24) é paramétrico e positivo, o que implica que tanto os preços como a taxa de câmbio devem convergir para seus valores de longo prazo. Agora, com heterogeneidade expectacional, apesar de $A(k) > 0$ para qualquer $k \in [0,1]$, e $v(k) > 0$ para qualquer $k \in [0,1]$, a heterogeneidade expectacional dada por $[k, (1-k)]$ é uma variável endógena, guiada por uma dinâmica evolucionária. Neste contexto, uma questão importante que surge é se a dinâmica evolucionária da heterogeneidade expectacional pode frustrar a convergência da taxa de câmbio e do nível de preço para seus valores estacionários. Além disso, a trajetória temporal do câmbio depende da distribuição de frequência das estratégias expectacionais, de modo que, também a resposta de curto prazo da taxa de câmbio à um choque monetário (doméstico) depende da heterogeneidade expectacional, o que, em última instância, implica que a volatilidade cambial de curto prazo possui relação com o grau de heterogeneidade expectacional no mercado de câmbio.

A consistência da estratégia plenamente racional (expectativas racionais) depende dos agentes que usam esta estratégia conhecerem o efetivo parâmetro de ajuste do câmbio, logo a igualdade $\theta_f = v$ deve valer:

$$\theta_f = v \equiv \pi[(\delta + \sigma A\theta_f) / \lambda A\theta_f + \delta] \quad (4.27)$$

Resolvendo para a raiz estável do modelo:

$$\tilde{\theta}_f(\lambda, \delta, \sigma, \pi, k) = \frac{\pi\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta\right) + \left\{ \left[\pi\left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta\right) \right]^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)} \right\}^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (4.28)$$

Como no modelo Dornbusch, é possível explorar as implicações de curto prazo de um aumento na oferta de moeda. Usando (4.22) e (4.28):

$$\frac{de}{dm} = 1 + \frac{1}{\lambda A(k)\theta_f(k)} > 1 \quad (4.29)$$

No curto prazo a taxa de câmbio se ajusta, dada uma expansão monetária, através de um *overshooting*. Neste caso, no entanto, a extensão do *overshooting* e, portanto, a volatilidade cambial de curto prazo da taxa de câmbio, depende também da distribuição de frequência das estratégias de previsão cambial.

Overshooting, heterogeneidade expectacional e volatilidade cambial

Sabe-se que a extensão/magnitude do *overshooting* é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{de}{dm} = 1 + \frac{2}{\lambda A(k) \left(\pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}} \right)} \quad (4.30)$$

Note que existe uma relação entre o tamanho do *overshooting* e o grau de heterogeneidade, formalmente:

$$\frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial k} = \frac{(1-\alpha)(B-C)}{D} \quad (4.31)$$

Sendo:

$$B = \frac{4\delta\pi}{\lambda^2 A^2(k) \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}}} > 0 \quad (4.32)$$

$$C = 2 \left(\pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}} \right) > 0 \quad (4.33)$$

$$D = \lambda A^2(k) \left(\pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}} \right)^2 > 0 \quad (4.34)$$

Sabe-se que $C > B$, dado que:

$$4\delta\pi < 2 \left(\pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}} \right) \lambda^2 A^2(k) \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda A(k)}} \quad (4.35)$$

A relação entre a magnitude do *overshooting* e o grau de heterogeneidade cambial pode ser positiva ou negativa, a depender do parâmetro α . Quando a velocidade de convergência da taxa de câmbio para o equilíbrio de longo prazo prevista pelos agentes limitadamente racionais é superior à verdadeira velocidade de convergência do câmbio ($\alpha > 1$), o que implica que estes agentes (dado um choque monetário positivo) esperam que a taxa de câmbio se deprecie à uma taxa superior à efetiva, mais agentes limitadamente racionais no mercado resultam em menor *overshooting*:

$$\frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial k} = \frac{(1-\alpha)(B-C)}{D} > 0; \quad \frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial(1-k)} = \frac{(1-\alpha)(B-C)}{D} < 0; \quad \text{para } \alpha > 1 \quad (4.36)$$

Da mesma sorte, quando a velocidade de convergência da taxa de câmbio para o equilíbrio de longo prazo prevista pelos agentes limitadamente racionais é inferior à verdadeira velocidade de convergência do câmbio ($0 < \alpha < 1$), o que implica que estes

agentes (dado um choque monetário positivo) esperam que a taxa de câmbio se deprecie à uma taxa inferior à efetiva, mais agentes limitadamente racionais no mercado resultam em maior *overshooting*, isto é, neste caso quanto mais racional o mercado como um todo menor será o *overshooting*.

$$\frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial k} = \frac{(1-\alpha)(B-C)}{D} < 0; \quad \frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial (1-k)} = \frac{(1-\alpha)(B-C)}{D} > 0; \quad \text{para } 0 < \alpha < 1 \quad (4.37)$$

Fundamentalistas com expectativa racional e chartistas

Uma configuração alternativa do modelo pode ser construída em linha com a literatura que usa estratégias chartistas e fundamentalistas combinadas no mercado cambial. Continua valendo a hipótese de que os agentes com expectativa racional são fundamentalistas, contudo, nesta especificação, os agentes limitadamente racionais adotam uma estratégia chartista, acreditando que o câmbio segue um *random walk*. Esta é a mesma hipótese utilizada por Frankel e Froot (1986), e implica que $x_b = 0$. Reescrevendo a média ponderada em (4.18) de acordo com a especificação acima:

$$x = k\theta_f(\bar{e} - e) \quad (4.38)$$

Usando a equação (4.38) no equilíbrio monetário:

$$p - m = -\phi y + \lambda r^* + \lambda(1-k)\rho + \lambda k\theta_f(\bar{e} - e) \quad (4.39)$$

Logo:

$$e = \bar{e} - (1/\lambda k\theta_f)(p - \bar{p}) \quad (4.40)$$

A dinâmica dos preços é derivada de maneira semelhante a feita anteriormente

$$\dot{p} = -\pi[(\delta + \sigma k \theta_f) / \lambda k \theta_f + \delta](p - \bar{p}) = -n(p - \bar{p}) \quad (4.41)$$

Sendo:

$$n \equiv \pi[(\delta + \sigma k \theta_f) / \lambda k \theta_f + \delta] \quad (4.42)$$

Resolvendo (4.40):

$$p(t) = \bar{p} - (p_0 - \bar{p}) \exp(-nt) \quad (4.43)$$

Sendo a trajetória do câmbio dada por:

$$e(t) = \bar{e} - (e_0 - \bar{e}) \exp(-nt) \quad (4.44)$$

Agora para que a estratégia plenamente racional seja consistente é necessário que a igualdade $\theta_f = n$ seja verificada. Resolvendo a equação seguinte para expectativas consistentes:

$$\theta_f = n \equiv \pi[(\delta + \sigma k \theta_f) / \lambda k \theta_f + \delta] \quad (4.45)$$

Tomando apenas a raiz estável do modelo:

$$\hat{\theta}(\lambda, \delta, \sigma, \pi, k) = \frac{\pi \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta \right) + \left\{ \left[\pi \left(\frac{\sigma}{\lambda} + \delta \right) \right]^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda k} \right\}^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (4.46)$$

Esta especificação da origem à uma nova expressão para o *overshooting*:

$$\frac{de}{dm} = 1 + \frac{1}{\lambda k \hat{\theta}(k)} > 1 \quad (4.47)$$

Assim, como na especificação anterior, no curto prazo, a taxa de câmbio se ajusta à uma expansão monetária doméstica através de um *overshooting*. Nesta extensão, no entanto, como os agentes limitadamente racionais usam uma estratégia chartista e acreditam que o câmbio segue um *random-walk*, a extensão do *overshooting* depende positivamente da fração de chartistas no mercado.

Formalmente a extensão do overshooting é dada agora por:

$$\frac{de}{dm} = 1 + \frac{2}{\lambda k \left(\pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda k}} \right)} \quad (4.48)$$

Sendo:

$$B' = \frac{4\delta\pi}{\lambda^2 k \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda k}}} \quad (4.49)$$

$$C' = 2 \left\{ \pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda k}} \right\} \quad (4.50)$$

$$D' = \lambda k^2 \left\{ \pi \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \sqrt{\pi^2 \left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 + \frac{4\delta\pi}{\lambda k}} \right\}^2 \quad (4.51)$$

Assim, a magnitude do overshooting em função da distribuição de frequência das estratégias pode ser analisada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial k} = \frac{(B' - C')}{D'} < 0; \quad \frac{\partial \left(\frac{de}{dm} \right)}{\partial (1-k)} = \frac{(B' - C')}{D'} > 0 \quad (4.52)$$

Na verdade, o caso em que os agentes limitadamente racionais acreditam que o câmbio segue um *random-walk* é um caso limite da especificação anterior para $\alpha = 0$. Não é surpreendente, portanto, que, ao contrário do que ocorria anteriormente,

a extensão do *overshooting* varie inequivocamente de forma negativa na medida em que aumenta o número de agentes plenamente racionais no mercado. Esses resultados confirmam, num contexto em que os fundamentos macroeconômicos são modelados explicitamente, um resultado teórico recorrente na literatura, isto é, o fato de que a presença de chartistas no mercado de câmbio pode potencializar a volatilidade cambial de curto prazo.

A seguir serão avaliados os resultados de longo prazo do modelo, tomando a heterogeneidade expectacional como uma variável endógena.

4.3 DINÂMICA EVOLUCIONÁRIA DA HETEROGENEIDADE EXPECTACIONAL

Como mencionado na seção anterior, esta extensão do modelo de Dornbusch busca modelar a distribuição de frequência das estratégias expectacionais no mercado de câmbio como um vetor de variáveis endógenas que segue uma dinâmica evolucionária. Enquanto os agentes plenamente racionais pagam *ex ante*, um custo fixo “z” para evitar perdas *ex post* resultadas de previsões incorretas (ou inconsistentes), os agentes limitadamente racionais não pagam este custo, contudo, estão sujeitos à perdas *ex post* resultadas de erros de previsão. Esta ideia pode ser modelada através do uso de funções de perda. A função de perda dos agentes plenamente racionais é dada por “z”, uma vez que a única perda em que estes incorrem é resultante do custo de computação da estratégia de previsão perfeita:

$$L_f = -z \quad (4.53)$$

A perda dos agentes com racionalidade limitada é resultante dos seus erros de precificação dos ativos estrangeiros, que, por sua vez, são função da expectativa cambial. Lembrando que o rendimento esperado dos títulos estrangeiros, computado pelos agentes com expectativas racionais, é igual à $r^* + x_f$ e o rendimento esperado dos títulos estrangeiros, computado pelos agentes com racionalidade limitada, é igual $r^* + x_b + \rho$ é possível escrever a função de perda dos agentes limitadamente racionais como segue:

$$L_b = -\beta[(r^* + x_f) - (r^* + x_b + \rho)]^2 \quad ; \quad 0 < \beta \leq 1$$

$$L_b = -\beta[x_f - (x_b + \rho)]^2 \quad (4.54)$$

Embora os agentes limitadamente racionais não incorram em custos para obter a previsão perfeita, estes só acertam a verdadeira trajetória cambial e o efetivo rendimento dos ativos estrangeiros em uma situação completamente fortuita, portanto, incidem em perdas relacionadas aos erros de previsão. Essas perdas ocorrerão tanto no caso de sobrestimação quanto no caso de subestimação do rendimento dos títulos estrangeiros.

Considerando que os agentes plenamente racionais conhecem a verdadeira trajetória cambial, a dinâmica do câmbio pode ser descrita como segue:

$$\dot{e} = x_f = \tilde{\theta}(\bar{e} - e) \quad (4.55)$$

A equação (4.55) pode também ser vista como uma condição de transversalidade para a taxa de câmbio no sentido apresentado por Gray e Turnovsky (1979). Substituindo (4.55) em (4.54):

$$L_b = -\beta[(1 - \alpha)\tilde{\theta}(\bar{e} - e) - \rho]^2 \quad (4.56)$$

Seguindo (Weibull, 1995), a frequência das estratégias de previsão da taxa de câmbio é modelada seguindo uma dinâmica de replicação. Há uma importante diferença da dinâmica de replicação aqui utilizada para aquela que foi apresentada no capítulo dois desta tese. Na forma mais geral da dinâmica de replicação, todos os agentes precisam se submeter à um pareamento para conhecer os *payoffs* alternativos à sua estratégia. Neste modelo, contudo, os agentes com expectativa racional conhecem a perda média da estratégia de racionalidade limitada e, por conta disto, não precisam realizar comparações por pares para eventualmente mudarem de estratégia. Um procedimento semelhante é adotado por Lima e Silveira (2014) no contexto de heterogeneidade expectacional da previsão do nível de preços.

A cada intervalo de tempo cada agente com racionalidade limitada compara sua perda com a perda de um agente escolhido de maneira aleatória. Numa população suficientemente grande de agentes, a probabilidade desta comparação ocorrer com

um agente que possui expectativas racionais é dada por k_t . A quantidade de agentes com racionalidade limitada que pode eventualmente passar a utilizar a estratégia de expectativas racionais é igual à $k_t(1 - k_t)$, isto é, igual ao número de agentes com racionalidade limitada (no período) multiplicado pela probabilidade k_t . A revisão de estratégia de previsão de câmbio depende da comparação das perdas dada por $(L_f - L_b)$. Sendo assim, a probabilidade de um agente de racionalidade limitada mudar de estratégia é igual à $k_t(L_f - L_b)$, isto é, a probabilidade um agente com racionalidade limitada ser pareado com um agente com expectativa racionais vezes o resultado da comparação dos *payoffs*. Como a cada intervalo de tempo existem $(1 - k_t)$ agentes com racionalidade limitada, o número de agentes com racionalidade limitada que irá adotar a estratégia plenamente racional em $t + dt$ será igual à $k_t(1 - k_t) dt(L_f - L_b)$.

Os agentes com expectativa racional, por sua vez, conhecem a distribuição de *payoffs* no jogo e não precisam se submeter ao pareamento para eventualmente mudar de estratégia (caso seja vantajoso). Sendo assim, a quantidade de agentes com expectativa racional que irão adotar a estratégia de racionalidade limitada após $t + dt$ será igual à $k_t dt(L_b - L_f)$, isto é, o número total de agentes com expectativas racionais vezes a comparação dos *payoffs* no período.

Feitas essas considerações, a variação do número de agentes com expectativa racional no mercado de câmbio pode ser escrita como segue:

$$k_{t+dt} - k_t = k_t(1 - k_t)dt(L_f - L_b) - k_t dt(L_b - L_f)$$

Ou

$$\frac{k_{t+dt} - k_t}{dt} = k_t[(1 - k_t)(L_f - L_b) + (L_f - L_b)]$$

Fazendo $dt \rightarrow 0$ encontra-se a dinâmica de replicação em tempo contínuo do modelo:

$$\dot{k} = k[(1 + (1 - k))(L_f - L_b)] \quad (4.57)$$

Combinando (4.53), (4.56) e (4.57):

$$\dot{k} = k \left[(1 + (1 - k)) \left(\beta[(1 - \alpha)\tilde{\theta}(\bar{e} - e) - \rho]^2 - z \right) \right] \quad (4.58)$$

Finalmente, para montar um sistema 3x3 da dinâmica do câmbio, dos preços e das estratégias, é preciso retomar a equação (4.4) e reescreve-la em termo dos desvios em relação ao preço e ao câmbio de longo prazo:

$$\dot{p} = \pi\delta(e - \bar{e}) - \left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)(p - \bar{p}) \quad (4.59)$$

O sistema dinâmico não-linear tridimensional, formado pela dinâmica dos preços, do câmbio e das estratégias, pode ser analisado computando os estados estacionários como segue abaixo:

$$0 = \pi\delta(e - \bar{e}) - \left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)(p - \bar{p}) \quad (4.60)$$

$$0 = \tilde{\theta}(\bar{e} - e) \quad (4.61)$$

$$0 = k \left[(1 + (1 - k)) \left(\beta[(1 - \alpha)\tilde{\theta}(\bar{e} - e) - \rho]^2 - z \right) \right] \quad (4.62)$$

De (4.60) e (4.61) sabe-se que no estado estacionário $p = \bar{p}$ e $e = \bar{e}$. Inserido o estado estacionário do câmbio na equação (4.62):

$$k[(1 + (1 - k))(\beta\rho^2 - z)] = 0 \quad (4.63)$$

A equação acima só admite uma solução de estado estacionário compatível com o modelo¹³, que é $k^* = 0$. Resta avaliar se o conjunto de equilíbrios estacionários, \bar{p}, \bar{e}, k^* é estável. Computando a matriz jacobiana na vizinha dos equilíbrios estacionários¹⁴:

$$J(\bar{p}, \bar{e}, k^*) = \begin{bmatrix} -\left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) & \pi\delta & 0 \\ 0 & -\tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2(\beta\rho^2 - z) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

¹³ Como $(\beta\rho^2 - z) \neq 0$ a equação 4.63 admite a solução $k = 0$ e $k = 2$, contudo só a primeira solução tem sentido econômico.

¹⁴ É importante lembrar que o termo $\tilde{\theta}$, que aparece na matriz, é uma função de k e é dado pela expressão (4.27), contudo, mesmo no estado estacionário com $k=0$ este termo continua sendo positivo.

Segue-se da matriz jacobiana a seguinte equação característica com os autovalores correspondentes:

$$[2(\beta\rho^2 - z) - \varepsilon] \left\{ \left[\left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) + \varepsilon \right] (\tilde{\theta} + \varepsilon) \right\} \quad (4.65)$$

Antes de computar os autovalores é preciso avaliar o sinal da expressão $2(\beta\rho^2 - z)$. Por hipótese admite-se que o parâmetro ρ é suficiente pequeno, já que do contrário a tentativa de atenuar erros de previsão cambial acabaria por gerar erros de precificação de outra natureza por parte dos agentes com racionalidade limitada. Sendo assim é razoável supor que $\beta\rho^2 < z$ de modo que o primeiro autovalor do sistema possa ser calculado como segue:

$$\varepsilon_1 = 2(\beta\rho^2 - z) < 0 \quad (4.66)$$

Resolvendo os autovalores seguintes:

$$\varepsilon_2 = -\left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \quad (4.67)$$

$$\varepsilon_2 = -\tilde{\theta} \quad (4.68)$$

Como os três autovalores da equação característica são negativos o sistema dinâmico é estável. Este é um importante resultado do modelo, embora no curto prazo a estratégia de racionalidade limitada possa aumentar a volatilidade cambial, no longo prazo esta estratégia tende a prevalecer no mercado, acarretando na extinção da estratégia plenamente racional. Mesmo quando o comportamento limitadamente racional é um comportamento *chartista* ($\alpha = 0$), o que potencializa de maneira inequívoca a volatilidade cambial de curto prazo, a estratégia de racionalidade limitada é um equilíbrio evolutivamente estável. Outro resultado importante diz respeito a convergência do câmbio para o seu valor fundamental. Neste modelo a convergência do câmbio para o seu valor de longo prazo (que resulta na paridade poder de compra) não depende dos agentes serem todos plenamente racionais, na verdade, a despeito

de no longo prazo os agentes se tornarem todos limitadamente racionais, o câmbio convergirá para os fundamentos. Contudo, como existe *overshooting*, a trajetória do câmbio para o equilíbrio se dará de maneira não monotônica o que torna a dinâmica de transição do câmbio para o equilíbrio de longo prazo não-trivial.

Dinâmica evolucionária com mutação

Uma maneira de estender o modelo apresentado até aqui é incorporando o que a literatura de jogos evolucionários chama de mutação, isto é, assumir que existe um ruído na dinâmica evolucionária descrita em (4.58) análogo à mutação em contexto biológico. Em contexto biológico, mutações podem ser interpretadas literalmente como mudanças aleatórias no código genético. Por outro lado, em contexto econômico, como aponta Samuelson (1998, ch 7), mutações devem ser interpretadas como situações nas quais um agente (num jogo) muda de estratégia aleatoriamente sem levar em conta os *payoffs*. Sendo assim, no modelo aqui desenvolvido, a mutação é como um distúrbio exógeno na dinâmica evolucionária que leva alguns agentes a escolherem aleatoriamente uma das estratégias de previsão de câmbio sem computar os *payoffs*. Kandori, Mailath e Rob (1993) elencam duas justificativas teóricas para a mutação em contextos econômicos, uma delas é que a cada tempo um agente sai do mercado com alguma probabilidade (fixa) e é substituído por outro agente que não conhece nada (ou tem pouca experiência) sobre os processos de decisão, a segunda possível explicação é que cada agente simplesmente experimenta ocasionalmente estratégias diferentes com probabilidade fixa.

No contexto do modelo aqui desenvolvido, no qual umas das estratégias possíveis envolve previsão perfeita, é preferível pensar que a mutação reflete a entrada de novos agentes no mercado (em substituição à agentes saindo do mercado) que se deparam com o conjunto informacional suficiente para poder escolher entre o previsor perfeito e o imperfeito e escolhem (experimentam) de maneira aleatória entre eles.

Como em Lima e Silveira (2014), o processo de mutação será adicionado à equação (4.58) seguindo Gale, Binmore e Samuelson (1995). Imagine que $\mu \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ é o número de agentes que sai do mercado a cada tempo e é substituído (em igual número) por agentes mutantes que escolhem uma estratégia sem levar em conta os

payoffs esperados. Uma parcela μk dos agentes saindo do mercado são agentes plenamente racionais e $\mu(1 - k)$ são agentes limitadamente racionais. Imagine que os agentes mutantes (entrantes) escolhem entre as duas estratégias com igual probabilidade. Como o número total de agentes saindo do mercado é igual ao número total de entrantes em cada tempo, $\mu k \left(\frac{1}{2}\right)$ será o número de agentes plenamente racionais substituídos por agentes limitadamente racionais e $\mu(1 - k) \left(\frac{1}{2}\right)$ agentes limitadamente racionais substituídos por agentes plenamente racionais. Como a equação de replicação em (4.58) é escrita em termos de " k ", segue abaixo o influxo de agentes plenamente racionais no mercado de câmbio oriundos da escolha aleatória de estratégias:

$$\mu(1 - k) \left(\frac{1}{2}\right) - \mu k \left(\frac{1}{2}\right) = \mu \left(\frac{1}{2} - k\right) \quad (4.69)$$

Acrescentando (4.69) à (4.58) encontra-se a dinâmica de replicação com mutação:

$$\dot{k} = k \left[(1 + (1 - k)) \left(\beta [(1 - \alpha) \tilde{\theta} (\bar{e} - e) - \rho]^2 - z \right) \right] + \mu \left(\frac{1}{2} - k \right) \quad (4.70)$$

Refazendo o sistema dinâmico usando (4.70) deve-se computar os novos valores estacionários para k , sendo que os valores estacionários do câmbio e do nível de preços são iguais aos do modelo sem mutação. O estado estacionário de (4.70), dado que $\bar{e} = e$, envolve a seguinte equação:

$$k^2 [2(z - \beta \rho^2)] - [2(z - \beta \rho^2) + \mu]k + \frac{\mu}{2} = 0 \quad (4.71)$$

Fazendo $2(z - \beta \rho^2) = \varphi$ e lembrando que $z > \beta \rho^2$:

$$\varphi k^2 - (\varphi + \mu)k + \frac{\mu}{2} = 0 \quad (4.72)$$

Existem duas soluções para a equação acima:

$$k_1 = \frac{[(\varphi + \mu) + \sqrt{\varphi^2 + \mu^2}]}{2\varphi} \quad (4.73)$$

E:

$$k_2 = \frac{[(\varphi + \mu) - \sqrt{\varphi^2 + \mu^2}]}{2\varphi} \quad (4.74)$$

Apenas a solução em (4.74) tem significado econômico, a solução em (4.73) não é economicamente significativa uma vez que k poderia assumir valores acima de um. Isto pode ser verificado tomando os limites de (4.73) e (4.74):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\varphi + \mu) + (\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2\varphi} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\mu}{(\varphi + \mu) - (\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}} = \infty \quad (4.75)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(\varphi + \mu) + (\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2\varphi} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{\mu}{\varphi}\right) + \left(1 + \frac{\mu^2}{\varphi^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = 1 \quad (4.76)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\varphi + \mu) - (\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\mu}{(\varphi + \mu) + (\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \quad (4.77)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z + \mu) - (z^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mu}{(z + \mu) + (z^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (4.78)$$

Feitas essas observações, será tomado apenas o resultado estacionário de k em (4.74):

$$k^* = \frac{[(\varphi + \mu) - \sqrt{\varphi^2 + \mu^2}]}{2\varphi}$$

Como ρ é constante, $\frac{\partial k^*}{\partial z}$ e $\frac{\partial k^*}{\partial \varphi}$ tem o mesmo sinal, sendo possível calcular a derivada de k^* em relação φ para compreender qual o impacto do custo de computação da estratégia de previsão perfeita sobre o equilíbrio de longo prazo:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \varphi} = \frac{\mu \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \varphi^2}} - 1 \right)}{2\varphi^2} < 0 \quad (4.79)$$

Adicionalmente:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \mu} = \left(\frac{1}{2\varphi} \right) \left(1 - \frac{\mu}{2(\varphi^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}} \right) > 0 \quad (4.80)$$

Os resultados acima implicam que no longo prazo a heterogeneidade expectacional persista, sobrevivendo no mercado tanto a estratégia de racionalidade plena (previsão perfeita) como de racionalidade limitada. Além disto, a parcela de agentes plenamente racionais será tão menor quanto maior for o custo z correspondente ao processamento do previsor perfeito e tão maior quanto maior for a taxa de mutação (saída/entrada de agentes).

Mais uma vez é preciso analisar a estabilidade do equilíbrio linearizando o sistema dinâmica e computando a matriz jacobiana:

$$J(\bar{p}, \bar{e}, k^*) = \begin{bmatrix} -\left(\pi\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) & \pi\delta & 0 \\ 0 & -\tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{(\varphi + \mu) + \sqrt{\varphi^2 + \mu^2}}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Dos três autovalores da matriz acima apenas um difere dos autovalores encontrados na versão anterior do modelo (sem mutação).

$$\varepsilon_1 = -\left[\frac{(\varphi + \mu) + \sqrt{\varphi^2 + \mu^2}}{2}\right] < 0 \quad (4.82)$$

Como no modelo sem mutação, o equilíbrio estacionário $(\bar{e}, \bar{p}, k^* \in (0,1))$ é um equilíbrio estável, contudo, diferentemente do caso anterior esse é um equilíbrio de estratégias mistas no qual ambas estratégias sobrevivem no longo prazo. Este resultado demonstra que não é necessário que todos os agentes sejam plenamente racionais para que o câmbio convirja para seu fundamento no longo prazo. Mais exatamente, a coexistência de estratégias plenamente racionais e limitadamente racionais mostra-se como uma propriedade de longo prazo do modelo e não apenas uma situação transitória no mercado, essa coexistência, no entanto, não provoca comportamentos explosivos do câmbio. Note-se, contudo, que ainda assim a presença de agentes limitadamente racionais no mercado de câmbio pode potencializar a volatilidade de curto prazo da taxa de câmbio.

Finalmente, o modelo fornece informações interessantes sobre o equilíbrio no mercado financeiro internacional na presença de heterogeneidade expectacional. Em nenhuma das versões do modelo (com ou sem mutação) a paridade descoberta dos juros é verificada, seja no curto ou no longo prazo. Como se pode ver na equação (4.19), a paridade descoberta dos juros só seria verificada caso o mercado de câmbio fosse povoado apenas por agentes com previsão perfeita ($k = 1$). No modelo aqui desenvolvido $k = 1$ não é um equilíbrio de longo prazo para o qual a economia tenda a convergir, ao contrário, no caso sem mutação todos os agentes tendem a se tornarem limitadamente racionais ($k = 0$) e no caso com mutação a heterogeneidade expectacional permanece no longo prazo ($0 < k < 1$). A verificação ou não da paridade descoberta dos juros é um tema de acalorado debate na literatura de finanças internacionais e economia da taxa de câmbio. Apesar de sua inegável utilidade como ponto de partida, como apontam Froot e Thaler (1990), Taylor (1995) e Sarno (2005), a maioria dos testes empíricos não corroboram com a hipótese de paridade descoberta dos juros. Considerando que o modelo aqui desenvolvido tenha sido construído com base em hipóteses razoáveis é, portanto, possível atribuir parte da falha empírica da paridade descoberta dos juros ao fato do mercado de câmbio ser povoado (também) por agentes com racionalidade limitada.

5. CONCLUSÕES

Havendo evidência empírica convincente, a partir de *surveys*, de que as expectativas sobre taxa de câmbio são persistentemente heterogêneas e formadas principalmente por meio de mecanismos limitadamente racionais, este trabalho estendeu o famoso modelo de Dornbusch (1976), incorporando expectativas cambiais heterogêneas. Na economia do modelo existem dois tipos de agentes: Agentes plenamente racionais, que pagam um custo para calcular a previsão correta da taxa de câmbio e os agentes limitadamente racionais, que formam previsões cambiais sem custo. Deste modo, diferentemente do modelo de Dornbusch original, portanto, o mecanismo de previsão perfeita não é um bem gratuito.

A distribuição de frequência das estratégias de previsão da taxa de câmbio na população de agentes segue uma dinâmica evolucionária. Duas versões do modelo foram construídas, na primeira a dinâmica evolucionária é movida apenas pelo desempenho relativo das estratégias disponíveis e na segunda, além do desempenho relativo das estratégias, uma mutação, que independe dos *payoffs* do jogo, é acrescentada à dinâmica de replicação.

Como no modelo com agente representativo de Dornbusch, mas independentemente de como o comportamento limitadamente racional é especificado, no curto prazo, a taxa de câmbio se ajusta à uma expansão monetária doméstica por *overshooting*. Nesta extensão, no entanto, a magnitude do *overshooting* e, portanto, a volatilidade de curto prazo da taxa de câmbio, depende da distribuição de frequência das estratégias de previsão de câmbio.

Quando os agentes limitadamente racionais são fundamentalistas, a relação entre a magnitude do *overshooting* e o grau de heterogeneidade cambial pode ser positiva ou negativa. Quando a velocidade de convergência da taxa de câmbio para o equilíbrio de longo prazo prevista pelos agentes limitadamente racionais é superior à verdadeira velocidade de convergência do câmbio, o que implica que estes agentes (dado um choque monetário positivo) esperam que a taxa de câmbio se deprecie à uma taxa superior à efetiva, mais agentes limitadamente racionais no mercado resulta em menor *overshooting*. Por outro lado, quando a velocidade de convergência da taxa de câmbio para o equilíbrio de longo prazo prevista pelos agentes limitadamente racionais é inferior à verdadeira velocidade de convergência do câmbio, o que implica

que estes agentes (dado um choque monetário positivo) esperam que a taxa de câmbio se deprecie à uma taxa inferior à efetiva, mais agentes limitadamente racionais no mercado resulta em maior *overshooting*, isto é, neste caso quanto mais racional o mercado como um todo menor será o *overshooting*. Um caso particular ocorre quando os agentes limitadamente racionais usam uma estratégia chartista, acreditando que o câmbio segue um *random walk*, sendo que nesse caso a relação entre número de agentes limitadamente racionais no mercado e a magnitude do *overshooting* é inequivocamente positiva. Esse fato implica em um importante resultado teórico, isto é, a presença de chartistas no mercado pode potencializar a volatilidade cambial de curto prazo.

No longo prazo dois são os resultados possíveis, um relativo ao modelo sem mutação e o outro no modelo com mutação. No primeiro caso (sem mutação) a estratégia de racionalidade plena (expectativa racional/previsão perfeita) tende a desaparecer e a estratégia de racionalidade limitada se mostra como um equilíbrio evolutivamente estável. No segundo caso (com mutação) encontra-se um equilíbrio estável com estratégias mistas no qual as duas estratégias de previsão cambial sobrevivem no estado estacionário. Nos dois casos os valores fundamentais do câmbio e dos preços são verificados de modo que a paridade poder de compra não é comprometida no longo prazo. Embora a paridade poder de compra seja verificada, o mesmo não ocorre com a paridade descoberta dos juros que não é verificada em nenhum dos casos, seja no curto ou no longo prazo.

Em especial, o caso em que as duas estratégias de formação de expectativas sobrevivem no mercado, reproduz, como uma solução de equilíbrio evolutivo, a evidência da literatura empírica reportada no texto, que aponta a heterogeneidade expectacional como uma propriedade persistente dos mercados de câmbio. Este resultado demonstra que a racionalidade plena - uma situação na qual todos os agentes, eventualmente, adotam a estratégia de previsão perfeita para formar expectativas cambiais, não é nem uma condição necessária para a realização dos valores fundamentais da taxa de câmbio e o nível de preços, nem uma consequência inevitável da dinâmica da economia.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alexander, S.S. (1952), 'Effects of a Devaluation on a Trade Balance', *International Monetary Fund Staff Papers*, 2, pp. 263–78.
- Allen, H. ,Taylor, M. P. (1990). "Charts, noise and fundamentals in the London foreign exchange market'." *The Economic Journal* 100: 49-59.
- Aumann, R. J. (1976), "Agreeing to Disagree," *The Annals of Statistics*, 4(6), 1236-1239.
- Aumann, R. J. (1987a), Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality, *Econometrica* 55, 1–18.
- Brock, W. and Hommes, C. (1997) "A rational route to randomness". *Econometrica*, 65, 1059-1095
- Brock, W. and Hommes, C. (1998) "Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model" *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol.22(8-9), pp. 1235-1274, August.
- Carl Chiarella and Xue-Shong He and Min Zheng, (2013). "Heterogeneous expectations and exchange rate dynamics. *European Journal of Finance*", Taylor and Francis Journals, vol. 19(5), pp. 392-419.
- Cavaglia, S. et atl (1998) "Interest expectations and exchange rates news" *Empirical Economics*, Springer, vol. 23(4), pages 525-534
- Chinn, M. D. , Frankel., J. A. (2002). Survey data on exchange rate expectations: More currencies, more horizons, more tests. *Monetary Policy, Capital Flows and Exchange Rates: Essays in honour of Maxwell Fry*. D. G. D. a. W. A. Allen. London and New York, Routledge: 145-167.
- Day, R. and Huang, W. (1990): Bulls, bears and market sheep. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 14, 299-329.
- De Grauwe, P., Grimaldi, M., (2006b). "The Exchange Rate in a Behavioral Finance Framework." Princeton University Press.
- De Grauwe, P., Grimaldi, M (2006a). "Exchange rate puzzles: a tale of switching attractors." *European Economic Review* 50: 1-33.
- De Grauwea, P. Markiewicz, A.; (2013). "Learning to forecast the exchange rate: Two competing approaches." *Journal of International Money and Finance* 32: 42-76.
- De Gregorio, J., Parracho, E. (2006). "Overshooting Meets Inflation Targeting" Central Bank of Chile Working Papers N. 394

Dornbusch, R. (1976). "Expectations and Exchange Rate Dynamics." *The Journal of Political Economy* 84(6): 1161-1176.

Fleming, J.M. (1962), 'Domestic Financial Policies Under Fixed and Under Floating Exchange Rates', *International Monetary Fund Staff Papers*, 12, pp. 369–80.

Frankel, J. A., Froot, K. A. (1986). "Understanding the US dollar in the eighties: The expectations of chartists and fundamentalists." *The Economic Record* Special issue(24-38).

Frankel, J.A. and Froot, K.A., (1987b) Short-term and Long-term Expectations of the Yen/Dollar Exchange Rate: Evidence from Survey Data, *Journal of the Japanese and International Economies* 1, 249-274; also published as *NBER working paper* 2216, April 1987

Frankel, J.A. and Froot, K.A., (1990a) Chartists, Fundamentalists and the Demand for Dollars, In: Courakis, A.S. and Taylor, M.P. (eds.), *Private behaviour and government policy in interdependent economies*, New York, Oxford University Press, pp. 73-126. (also published as NBER Working Paper No. r1655, October 1991)

Frenkel, J.A. (1976), 'A Monetary Approach to the Exchange Rate: Doctrinal Aspects and Empirical Evidence', *Scandinavian Journal of Economics*, 78, pp. 200–24.

Frenkel, M. (1997). "Exchange rate dynamics with chartists, fundamentalists, and rational speculators in the foreign exchange market." *International Journal of Business* 2: 1-24.

Friedman, D. (1991). "Evolutionary games in economics", *Econometrica*, 59:637–666.

Friedman, D. (1998). "On economic applications of evolutionary game theory", *Journal of Evolutionary Economics*, Springer, vol. 8(1), pp. 15-43.

Froot, Kenneth A., and Richard H. Thaler, (1990), "Foreign exchange", *Journal of Economic Perspectives* 4, 179-192.

Gale, J., Binmore, K. & Samuelson, L. (1995). "Learning to be imperfect: the ultimatum game." *Game and Economic Behavior* 8(1): 56-90.

Gintis H (2009) *Game theory evolving*, 2nd edn. Princeton University Press, Princeton

Gray, M.R., and S.J. Turnovsky. (1979). "The stability of exchange rate dynamics under perfect myopic foresight." *International Economic Review* 20, no. 3: 643–60.

Harberger, A.C. (1950), 'Currency Depreciation, Income and the Balance of Trade', *Journal of Political Economy*, 58, pp. 47–60.

Hofbauer, J. and K. Sigmund. (1998). "Evolutionary Games and Population Dynamics". Cambridge: Cambridge University Press

Ito, T. (1990). "Foreign exchange rate expectations: micro survey data." *The American Economic Review* 80: 434-449.

Kandori, Michihiro, George J. Mailath and Rafael Rob. 1993. "Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games." *Econometrica*. January, 61:1, pp. 29-56.

Laursen, S. and L.A. Metzler (1950), 'Flexible Exchange Rates and the Theory of Employment', *Review of Economics and Statistics*, 32, pp. 281–99.

Lerner, A.P. (1936), 'The Symmetry Between Export and Import Taxes', *Economica*, 3, pp. 306–13.

Lima, G.T, Silveira, J.J,. (2014) "Monetary Neutrality under Evolutionary Dominance of Bounded Rationality" mimeo.

Maynard Smith, John and G. R. Price. 1973. "The Logic of Animal Conflict." *Nature*. 246, pp. 15-18.

Maynard Smith, John. 1982. "Evolution and the Theory of Games". Cambridge: Cambridge University Press.

Meese, R.A. and K. Rogoff (1983), 'Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They Fit Out of Sample?', *Journal of International Economics*, 14, pp. 3–24.

Menkhoff, L. (1998). "The noise trading approach-questionnaire evidence from foreign exchange" *Journal of International Money and Finance* 17: 304-314.

Metzler, L.A. (1942a), 'Underemployment Equilibrium in International Trade', *Econometrica*, 10, pp. 97–112.

Metzler, L.A. (1942b), 'The Transfer Problem Reconsidered', *Journal of Political Economy*, 50, pp. 397–414.

Mundell, R.A. (1961), 'A Theory of Optimum Currency Areas', *American Economic Review*, 51, pp. 657–65.

Mundell, R.A. (1962), 'The Appropriate Use of Monetary and Fiscal Policy for Internal and External Stability', *International Monetary Fund Staff Papers*, 12, pp. 70–9.

Mundell, R.A. (1963), 'Capital Mobility and Stabilization Policy Under Fixed and Flexible Exchange Rates', *Canadian Journal of Economics and Political Science*, 29, pp. 475–85.

Mussa, M. (1976), 'The Exchange Rate, the Balance of Payments and Monetary and Fiscal Policy under a Regime of Controlled Floating', *Scandinavian Journal of Economics*, 78, pp. 229–48.

Mussa, M. (1979), 'Empirical Regularities in the Behaviour of Exchange Rates and Theories of the Foreign Exchange Market', Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 11, pp. 9–57.

Nash, John F. 1950. "Equilibrium Points in n-Person Games." Proceedings of the National Academy of Sciences. 36, pp. 48-49.

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1995), 'Exchange Rate Dynamics Redux', Journal of Political Economy, 103, pp. 624–60.

Ponti, Giovanni, 2000. "Continuous-time evolutionary dynamics: theory and practice," Research in Economics, Elsevier, vol. 54(2), pages 187-214, June

Rogoff, K. (2002). "Dornbusch's Overshooting Model After Twenty-Five Years." IMF Working Paper 02/39(International Monetary Fund).

Samuelson, L. (1997). Evolutionary Games and Equilibrium Selection. Cambridge MA: MIT Press.

Samuelson, L. (1997) "Evolutionary games and equilibrium selection", Cambridge, MA: The MIT Press.

Samuelson, L. (2002) "Evolution and Game Theory" Journal of Economic Perspectives, 16(2): 47-66.

Sandholm, W. (2008). Deterministic evolutionary dynamics. In S. N. Durlauf and L. E. Blume (Eds.), New Palgrave Dictionary of Economics (2nd ed.). Palgrave Macmillan, New York.

Sandholm, W. (2009). Evolutionary Game Theory in R.A. Meyers (Ed) "Encyclopedia of Complexity and System Science, pp. 3176-3205, Springer, 2009.

Sandholm, W. H. (2010c). Population Games and Evolutionary Dynamics. MIT Press, Cambridge.

Sarno, L. (2005). "Towards a Solution to the Puzzles in Exchange Rate Economics: Where Do We Stand?". Canadian Journal of Economics 38: 673-708.

Sarno L, Taylor MP. The economics of exchange rates. Cambridge: MIT Press; 2002

Silveira, J.J, Lima, G.T. (2008) "Conhecimento Imperfeito, Custo de Otimização e Racionalidade Limitada: Uma Dinâmica Evolucionária de Ajustamento Nominal Incompleto." Revista Brasileira de Economia, FGV/EPGE Escola Brasileira de Economia e Finanças, vol. 62(1), pp. 57-75, setembro.

Taylor, Mark P., (1995), "The economics of exchange rates", Journal of Economic Literature 33, 13-47

Taylor, P.D. and Jonker, L. "Evolutionarily stable strategies and game dynamics".Mathematical Biosciences, 40:145–156, 1978

Taylor, M. P., Allen, H; (1992). "The use of technical analysis in the foreign exchange market." *Journal of International Money and Finance* 11: 304-314.

Turnovsky, S. J. (1995) "Methods of Macroeconomic Dynamics", MIT Press.

Vega-Redondo, Fernando. 1996. *Evolution, Games, and Economic Behavior*. Oxford: Oxford University Press.

Von Neumann, John e Oskar Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton : Princeton University Press.

Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary Game Theory*. Cambridge, MA., The MIT Press.

Westerhoff, F. (2009): Exchange rate dynamics: a nonlinear survey. In: Rosser, J.B., Jr. (ed): *Handbook of Research on Complexity*. Edward Elgar, Cheltenham, 287-325.