UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

PATRÍCIA APARECIDA MANHOLI

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO KELVIN-VOIGT COM RETARDO

Curitiba

2014

PATRÍCIA APARECIDA MANHOLI

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO KELVIN-VOIGT COM RETARDO

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador : Dr Pedro Danizete Damazio

Co-orientadora : Dra Ana Leonor Silvestre

Curitiba

2014

TERMO DE APROVAÇÃO

ESTUDO DE EQUAÇÕES DO TIPO KELVIN-VOIGT COM RETARDO

por

PATRÍCIA APARECIDA MANHOLI

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, pela Comissão Examinadora composta por:

Ana Leonor Silvestre

Coorientadora: Profa. Dra. Ana Leonor M. V. Silvestre
Instituto Superior Técnico (IST) – Lisboa

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo
Dep. de Matemática – UFPR

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Dep. de Matemática – UEM

Prof. Dr. Jurandir Ceccon
Dep. de Matemática – UFPR

Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo
Dep. de Matemática – UNIOESTE

Curitiba, 26 de fevereiro de 2014.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da tese da candidata **PATRÍCIA APARECIDA MANHOLI** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2014.

Ana Leonor Silvestre

Coorientadora: Profa. Dra. Ana Leonor M. V. Silvestre
Instituto Superior Técnico (IST) – Lisboa

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo
Dep. de Matemática – UFPR

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Dep. de Matemática – UEM

Prof. Dr. Jurandir Ceccon
Dep. de Matemática – UFPR

Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo
Dep. de Matemática – UNIOESTE

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

DECLARAÇÃO

O Vice-Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR declara que a aluna **PATRICIA APARECIDA MANHOLI,** concluiu todos os créditos exigidos ao Curso de Mestrado e defendeu sua tese de doutorado em **26 de fevereiro de 2014**, perante a banca examinadora composta pelos professores doutores: **PEDRO DANIZETE DAMÁZIO (Orientador); HIGIDIO PORTILLO OQUENDO; JUAN AMADEO SORIANO PALOMINO; JURANDIR CECCON E SANDRO MARCOS GUZZO,** tendo sido considerada **APROVADA** e apta a receber seu Diploma de Doutora.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2014.

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Vice-Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Matemática Aplicada

Prof. Marcelo Muniz Silva Alves
Vice-coordenador do Programa de
Pós -graduação em matemática Aplicada
Matrícula 167789

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 1ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro de 2014, no Anfiteatro B, Bloco das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pela Professora Elizabeth Wegner Karas, Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, a Banca Examinadora para a Primeira Defesa de Tese de Doutorado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino da Universidade Estadual de Maringá, Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Prof. Dr. Jurandir Ceccon, do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo, do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná e a Profa. Dra. Ana Leonor M. V. Silvestre, coorientadora do projeto de tese, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando a candidata **PATRÍCIA APARECIDA MANHOLI** a apresentar seu Projeto de Tese intitulado: "ESTUDO DE EQUAÇÕES DO TIPO KELVIN-VOIGT COM RETARDO". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 05 (cinco) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Tese apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a tese e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 26 de fevereiro de 2014.

Ana Leonor Silvestre

Profa. Dra. Ana Leonor M. V. Silvestre
Instituto Superior Técnico (IST) – Lisboa

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
UEM

Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo
Unioeste

Prof. Dr. Jurandir Ceccon
PPGMA – UFPR

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo
PPGMA – UFPR

Agradecimentos

Ao orientador Professor Dr. Pedro Danizete Damázio, pela orientação e a colaboração na construção do meu conhecimento.

À co-orientadora Professora Dra. Ana Leonor, pela orientação, pela paciência, simpatia e pela acolhida no período que passei no Instituto Superior Técnico - Lisboa - Portugual .Sua disponibilidade e atenção foram fundamentais na realização deste trabalho.

Aos professores e amigos da Universidade Federal do Paraná - Curitiba - Pr, por campatilharem seus conhecimentos com maestria.

Aos Professores e amigos da Universidade Estadual de Maringá - Maringá - Pr, por contribuirem na minha formação.

E por fim, aos programas Capes-DS e Capes-PDSE, pelo apoio financeiro.

Resumo

Investigamos a existência de soluções de equações do tipo Kelvin-Voigt com retardo na força externa e no termo não linear. Usando a teoria de semigrupos estudamos a existência de soluções para um problema da forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u(t,x) - \kappa\Delta\frac{d}{dt}u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u(t,x) + \nabla p = g(t,u_t), \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\
&\operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\
&u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega,\\
&u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega,\\
&u(t,x) = \phi(t,x) \quad (t,x)\in(-\infty,0)\times\Omega,
\end{aligned}
$$

onde

$$F(t,u_t) = \int_{-\infty}^{t}\alpha(s-t)u(s)ds + u(t-r),$$

e

$$g(t,u_t) = \int_{-\infty}^{t}\beta(s-t)u(s)ds.$$

Usando a técnica de aproximações de Galerkin, estudamos o problema anterior com $F(\cdot)$ e $g(\cdot)$ dadas por

$$F(t,u_t) = u(t-\tau(t)), \tag{1}$$

e

$$g(t,u_t) = G(u(t-\rho(t))), \tag{2}$$

para alguma função G apropriada.

Também estudamos a existência de solução para o problema com dado de fronteira não homogêneo, descrito como segue:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u(t,x) - \kappa\Delta\frac{d}{dt}u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u(t,x) + \nabla p = g(t,u_t), \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\
&\operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\
&u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

$u(t,x) = k(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega,$

$u(t,x) = \phi(t,x) \quad (t,x) \in (-\infty,0) \times \Omega,$

com $F(\cdot)$ e $g(\cdot)$ dadas por (1) e (2), respectivamente; e $k(\cdot)$ pertencente a um Espaço que será determinado.

Palavras-chave: Equações do tipo Kelvin-Voigt, retardo, problema homogenêneo, problema não homogêneo.

Abstract

We investigated the existence of solutions for a Kelvin-Voigt type equations with delay in the external force and in the nonlinear term. Using the semi-group theory we study the existence of solution for a problem in the form

$$\frac{d}{dt}u(t,x) - \kappa\Delta\frac{d}{dt}u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u(t,x) + \nabla p = g(t,u_t),\ (t,x)\in(0,T)\times\Omega,$$

$$\operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega,$$

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega,$$

$$u(t,x) = \phi(t,x) \quad (t,x)\in(-\infty,0)\times\Omega,$$

where

$$F(t,u_t) = \int_{-\infty}^{t}\alpha(s-t)u(s)ds + u(t-r),$$

and

$$g(t,u_t) = \int_{-\infty}^{t}\beta(s-t)u(s)ds.$$

Using the Galerkin approximations method we study the same with $F(\cdot)$ and $g(\cdot)$ given by

$$F(t,u_t) = u(t-\tau(t)) \tag{3}$$

and

$$g(t,u_t) = G(u(t-\rho(t))) \tag{4}$$

for some G appropriated.

We also study the existence of solution for the problem with inhomogeneous boundary data, described as follows:

$$\frac{d}{dt}u(t,x) - \kappa\Delta\frac{d}{dt}u(t,x) - \nu\Delta u(t,x) + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u(t,x) + \nabla p = g(t,u_t), \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,$$

$$\operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in(0,T)\times\Omega,$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x\in\Omega,$$

$$u(t,x) = k(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega,$$

$$u(t,x) = \phi(t,x) \quad (t,x) \in (-\infty,0) \times \Omega,$$

with $F(\cdot)$ e $g(\cdot)$ given by (3) e (4), respectively; and $k(\cdot)$ belonging to a space which will be determined.

Keywords: equations of Kelvin-Voigt type, delay, homogenêneo problem, inhomogeneous problem.

Sumário

Introdução

O estudo do movimento de fluidos tem, por muito tempo, sido uma fonte de um grande número de problemas em matemática. Ao estudar até mesmo os mais simples modelos matemáticos de movimento fluido, pode-se enfrentar muitos problemas e muitos deles não foram resolvidos ainda. Historicamente, o tratado de Arquimedes *Sobre os Corpos Flutuantes* parece ser o primeiro trabalho de pesquisa neste campo. É o trabalho em que, pela primeira vez, a noção de pressão foi introduzida como a principal característica da interação entre as partículas de fluido e em que a hipótese de incompressibilidade do fluido foi utilizada. Com base nestes dois pressupostos mecanicistas, a hidrostática começou a ser desenvolvida. A geometria euclidiana desempenhou um papel importante como um instrumento matemático naquele momento. A origem da hidrodinâmica propriamente dita (a ciência do movimento de fluido) está associada com os nomes de Galilei, Huygens, Pascal e Newton, que resultou da descoberta dos fundamentos do cálculo diferencial e integral. O desenvolvimento da hidrodinâmica está associado com os nomes de Euler, Bernoulli, Lagrange, Poisson, Prandtl, Cauchy, Navier, Stokes, Saint-Venant, Poiseuille, Reynolds, entre outros. Estes foram os cientistas que desenvolveram consideravelmente as ciências matemáticas existentes na época e realmente fundaram hidrodinâmica clássica. Para caracterizar o comportamento físico de um fluido, obtiveram vários sistemas de equações diferenciais. A velocidade e a pressão do fluido, como funções do tempo e espaço satisfazem estes sistemas. Em um fluido, as tensões derivam do fluxo resultante da aplicação de forças externas. A propriedade que um fluido tem de apresentar resistência às tensões cisalhantes é chamada de viscosidade. O mel, por exemplo, possui efeitos de viscosidade maiores do que os presentes na água, pois há uma dificuldade maior de as camadas do mel deslizarem umas sobres as outras. Um fluido é classificado como Newtoniano quando a relação entre a força aplicada e a deformação produzida for linear, ao passo que se a dependência for não linear, ele é classificado como não Newtoniano. Um exemplo de fluido não Newtoniano é o sangue que ao ser submetido a forças cada vez mais intensas, produz deformações que não se relacionam com a força de forma linear. O aumento da viscosidade do sangue ocorre porque o sangue possui partículas sólidas em suspensão. Algumas dessas partículas são as células vermelhas que, devido às suas formas discóides, em baixas velocidades, alinham-se de maneira aleatória, enquanto, em altas velocidades, alinham-se com as linhas de corrente facilitando o fluxo sangüíneo. As hipóteses para fluidos Newtonianos são as seguintes:

- estresse depende apenas do atual estado de deformação (independente de qualquer história de deformação).
- estresse depende apenas do estado cinemático local.
- tensão depende linearmente a taxa de deformação (velocidade de deformação).

Os fluidos não Newtonianos estão livres de tais restrições. Na verdade, as interações moleculares são fortes o suficiente para mostrar-se em experimentos físicos e não podem ser obtidas pelos modelos de fluidos Newtonianos. Além disso, estes fluidos são caracterizados por uma longa cadeia de moléculas e exibem forte dinâmica molecular. Fluidos viscoelásticos formam um grupo importante entre os fluidos não Newtonianos. Como o nome sugere , as forças viscosas e elásticas influenciam no comportamento do fluido. Cotidianamente, eles são abundantes no ambiente e na vida diária e tem grande presença industrial, como por exemplo, plástico fundido, óleos para motores, tintas, geles, unguentos e muitos fluidos biológicos, tais como clara de ovo e sangue. Os principais processos industriais que envolvem fluidos viscoelásticos são a indústria de petróleo, química, farmacêutica, alimentos, etc. O fluido de Kelvin-Voight é o mais simples de fluido viscoso não-newtoniano [[41],[42]]. Tal fluido é descrito pela seguinte equação:

$$\sigma = 2\nu D + 2\kappa\partial_t D \tag{5}$$

onde σ representa o desvio de tensor de stresse, D o tensor da velocidade de deformação, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade cinemática e o coeficiente $\kappa > 0$ é caracterizado pelo fato de, após remoção instantânea do stresse, a velocidade do fluxo não desaparece instantaneamente, mas comporta-se como $exp(-\kappa^{-l}t)$. O coeficiente κ também é chamado de tempo de relaxamento de deformações.

Nem Kelvin nem Voigt sugeriram este modelo, que foi considerado pela primeira vez por Pavlovskij em [46]. Vale ressaltar que ele não chamou este modelo de Kelvin-Voigt, ele o chamou de modelo de movimento de soluções de polímero de água fracamente concentrado. Pavlovskij disse que, em tais soluções, é necessário considerar as propriedades elásticas como propriedades viscosas. Em tais soluções poliméricas, as tensões dependem da história de deformação e do valor instantâneo da velocidade de deformação. As propriedades de viscosidade de um tal material estão associadas com o efeito do solvente. No caso de uma baixa concentração de polímero esta contribuição não é despresível. Isto é confirmado por pesquisas experimentais de soluções de óxido de polietileno e de poliacrilamida [2] e soluções de poliacrilamida e goma guar [1]. Baseando-se nesses pesquisadores, em [46] a seguinte relação reológica foi proposta:

$$\sigma = 2\nu \left(D + \nu^{-1}\kappa \partial_t D \right). \tag{6}$$

a relação (6) é diferente da relação determinante Newtoniana, onde $\kappa\partial_t D$ é o termo adicional, que leva em conta a propriedade de relaxamento do fluido. Se a propriedade de relaxamento do fluido é muito fraca (κ tende a zero), ou o movimento do fluido é parado (derivada total em relação ao tempo do tensor de velocidades de deformação é igual a zero), ou então o termo adicional desaparece. No entanto, no caso dos modos de turbulência ou modos laminar não estacionários de movimento de fluido, o termo adicional não é igual a zero e desempenha um papel importante. Este modelo foi o chamado modelo de Kelvin-Voigt, de movimento de fluido pela primeira vez em [4]. Em seqüência, nas obras de Oskolkov e seus seguidores, este modelo foi muitas vezes chamado de modelo de Kelvin-Voigt (ou simplesmente Voigt). Muitas das suas obras foram dedicadas a estudar este modelo de movimento fluido e suas diferentes generalizações e simplificações. Como exemplo, podemos nos referir a trabalhos [[27], [27], [34],[3]] e muitos outros.

Substituindo σ da equação (5) para as equações de movimento de um meio contínuo incompressível na forma Cauchy [[35]-[41]]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \operatorname{div} \sigma + f, \qquad \operatorname{div} u = 0, \tag{7}$$

obtemos as equações de movimento de um fluido de Kelvin-Voight [[36]-[45], [44]]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0. \tag{8}$$

Em (8), $u = u(x, t)$ é o vector de velocidade, $p = p(x, t)$ é a pressão, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade cinemática, caracterizando as propriedades viscosas do fluido de Kelvin-Voigt, $\kappa > 0$ caracteriza as propriedades elásticas deste fluido, $f = f(x, t)$, são o volume de forças motrizes. O. A. Ladyzhenskaya sugeriu (em [30], no Congresso Internacional de Matemáticos em Moscou (1966)), que o sistema de equações de Kelvin-Voigt (8) é um de sistema de equações variante que, em sua opinião, regularizam as equações de Navier-Stokes, no sentido de que esses sistemas possuem uma solubilidade global única para problemas de dados iniciais e de fronteira e outros resultados globais, que não foram provados para as equações Navier-Stokes tridimensional.

Para equações do tipo Navier-Stokes, trabalhos recentes consideram termos com retardo. São considerados vários tipos de retardo, entre limitados, fixos, distribuídos, na força externa e no termo não linear. A motivação para o retardo na força externa, segundo Caraballo ([6] e [7]), é que algumas vezes queremos controlar o sistema aplicando uma força que leva em consideração não só o estado atual do sistema mas também a sua história. A motivação para o retardo no termo não linear, segundo Liu [32], é que a taxa de variação da velocidade ao seguir o fluido, considerada como a derivada material da velocidade, pode sofrer atraso.

No estudo de equações do tipo de Navier-Stokes com retardo, cita-se os trabalhos de Caraballo & Real ([7], [6] e [8]), Garrido-Atienza [19], Taniguchi [54], Planas & Hernández [48], Liu [32]. Mais precisamente, a equação de Burger, que pode ser considerara como o caso unidimensional, foi investigada por Liu em [32] considerando-a com retardo da forma $u(t-\tau, x)u_x(t,x)$ no termo não linear. No caso das equações de Navier-Stokes, Caraballo & Real [6], estudaram o problema em dimensão $n = 2, 3$ considerando diferentes tipos de retardo na força externa, e obtiveram existência e unicidade (para $n = 2$) de solução fraca. Caraballo & Real [7], obtiveram para $n = 2$ a convergência da solução fraca para a solução da equação estacionária, quando $t \to \infty$. Taniguchi [54] também considerou retardo somente na força externa, e mostrou existência e unicidade de solução fraca global (no tempo), e de solução forte local (no tempo) para $n = 3$. Além disso, estudou o comportamento assintótico quando o tempo tende a infinito. Planas & Hernández [48] estudaram o problema para $n = 2$, considerando retardo na força externa e no termo não linear, e provaram a existência de soluções fraca e forte (local no tempo) e a unicidade de solução forte. Também estudaram o comportamento da solução para tempos grandes e a convergência das soluções fracas para a solução da equação estacionária correspondente. Guzzo em ([23] e [24]), investigou o sistema de Navier-Stokes em dimensão 3, considerando retardo do tipo pontual e limitado, utilizando o método de Faedo-Galerkin, e também investigou o problema do tipo Navier-Stokes com retardo do tipo distribuído e não limitado, em dimensão n, utilizando abordagem por teoria de semigrupos lineares.

Neste trabalho, procuramos a solução para o sistema de equações tipo Kelvin-Voigt para fluidos incompressíveis, com dado de fronteira homogêneo ($k(t) = 0$) e não homogêneo ($k(t) \neq 0$), e com a força externa e o termo não linear contendo termos hereditários. Para isso, considere o problema,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u + \nabla p = g(t,u_t), \qquad t>0, \quad x\in\Omega,\\
&\operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad t>0, \quad x\in\Omega,\\
&u(t,x) = k(t), \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega,\\
&u(0,x) = u^0(x), \qquad x\in\Omega,\\
&u(t,x) = \phi(t,x), \qquad t\in(-h,0), \quad x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

onde u_t representa o retardo $u(t+\theta)$ para $\theta \in (-h, 0)$, u^0 e ϕ são os dados iniciais, $F(t, u_t)$ e $g(t, u_t)$ são expressões com retardo e h pode ser um número positivo finito ou infinito.

Para o estudo destes problemas, dividimos este trabalho em cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados básicos da teoria de semigrupos, potências fracionárias de um operador, espaços de fase e sobre o operador de Stokes.

No segundo capítulo, apresentamos teoremas de restrição e estensão para espaços vetoriais solenoidais tridimensionais dependentes do tempo. Usamos esses teoremas no estudo de problemas não homogênea de valor de contorno para o sistema de Kelvin-Voigt incompressível que será apresentado no capítulo 5.

No terceiro Capítulo, estudaremos um problema do tipo Kelvin-Voigt em dimensão n, utilizando a teoria de semigrupos lineares. O retardo considerado será do tipo distribuído, não limitado ($h = \infty$) e permitirá considerar funções como

$$F(t, u_t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(s-t)u(s)ds + u(t-r),$$

e

$$g(t, u_t) = \int_{-\infty}^{t} \beta(s-t)u(s)ds.$$

Consideraremos o sistema do tipo Kelvin-Voigt na forma de um problema abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \nu B_p u\left(t\right) + \overline{F}\left(t, u_t, u\left(t\right)\right) + \overline{g}\left(t, u_t\right) \\ u_0 = P\varphi \end{cases} \tag{9}$$

onde o operador B_p, definido por

$$B_p = \left(I - \kappa A_p\right)^{-1} A_p$$

será analisado, para podermos aplicar a Teoria de Semigrupos.

Após a formulação deste problema abstrato, bem como das hipóteses, mostraremos a existência de (uma única) solução fraca e estudaremos a regularidade desta solução, em particular assumindo hipóteses sobre as condições de retardo, mostraremos que esta solução é uma solução clássica. Os resultados apresentados neste capítulo estendem-se aos resultados sobre as equações de Kelvin-Voigt com retardo pois consideramos retardos do tipo não limitado.

Para o Capítulo 4 consideramos o sistema de Kelvin-Voigt (KVR) em dimensão 2 e 3, utilizando o método de Faedo-Galerkin. O retardo considerado aqui é do tipo pontual e limitado (h finito):

$$F(t, u_t) = u_t(-r(t)) = u(t - r(t)),$$

e

$$g(t, u_t) = G(u(t - \rho(t))),$$

para alguma função G satisfazendo certas condições. Após a formulação adequada do problema, provaremos resultados sobre a existência de solução fraca e forte.

No Capítulo 5 estudaremos o sistema de Kelvin-Voigt com retardo limitado (h finito), com dado de fronteira não nulo, também em dimensão 2 e 3, utilizando o método de Faedo-Galerkin. Como no Capítulo 3, consideramos $F(\cdot)$ e $g(\cdot)$ dadas por

$$F(t, u_t) = u(t - r(t)), \tag{10}$$

e

$$g(t, u_t) = G(u(t - \rho(t))), \tag{11}$$

para alguma função G apropriada.

Capítulo 1

Preliminares

Resumo do capítulo: A teoria de semigrupos de operadores lineares tem um papel importante no estudo de Equações Diferenciais. Um dos ingredientes essenciais dessa teoria é a noção de operador linear. Neste capítulo introduzimos algumas definições e resultados da teoria de semigrupos lineares, potências fracionárias de operadores lineares fechados e elementos básicos da teoria de equações de Navier-Stokes. Aqui, $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e para espaços normados $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ representamos por $\mathcal{L}(Z, W)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de Z em W munido da norma de operadores $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Z,W)}$. Quando $Z = W$ escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(Z)$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Z)}$. Este capítulo tem como base o livro de Pazy [47].

1.1 Semigrupos de operadores lineares

Os resultados de semigrupo desta seção podem ser encontradas em [47].

Definição 1.1.1. *Uma família $(T(t))_{t\geq 0}$ de operadores lineares em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X, se*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todos* $t, s \geq 0$.

Definição 1.1.2. *Se* $\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$, *então o semigrupo de operadores lineares limitados,* $(T(t))_{t\geq 0}$, *édito uniformemente contínuo.*

Note que, se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então $\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0$, para todo $t > 0$.

O operador linear A definido por

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\to X \\ x &\mapsto Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

sendo,

$$D(A) = \left\{ x \in X; \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{existe} \right\},$$

é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Definição 1.1.3. *Um semigrupo de operadores lineares limitados* $(T(t))_{t\geq 0}$ *em* X*, é dito um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados se* $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$*, para todo* $x \in X$*. Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados será chamado de semigrupo de classe* C_0 *ou simplesmente um* C_0*-semigrupo.*

Teorema 1.1.4. [47, Teorema 1.2.2] *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo em* X*. Então existem constantes* $\delta \geq 0$ *e* $M \geq 1$ *tais que* $\|T(t)\| \leq Me^{\delta t}$ *para todo* $t \geq 0$*.*

Se $\delta = 0$ então $(T(t))_{t\geq 0}$ é dito uniformemente limitado e se, além disso, $M = 1$, então $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado um C_0-semigrupo de contrações.

Teorema 1.1.5. [47, Teorema 1.2.4] *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo e seja* A *o seu gerador infinitesimal. Então*

(i) Para $x \in X$*,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(ii) Para $x \in X$*,* $\displaystyle\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ *e*

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

(iii) Para $x \in D(A)$*,* $T(t)x \in D(A)$ *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(iv) Para $x \in D(A)$*,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Vamos agora enunciar o Teorema de Hille-Yosida que caracteriza o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Definição 1.1.6. *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear. O conjunto resolvente de* A*, denotado por* $\rho(A)$*, é o conjunto formado por todos os números complexos* λ *para os quais* $(\lambda I - A)$ *é invertível e* $(\lambda I - A)^{-1}$ *é um operador linear limitado em* X*. A função* $R(\cdot) : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ *dada por* $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$*, é chamada de resolvente de* A*.*

Teorema 1.1.7. (Hille-Yosida [47, Teorema 1.3.1]) *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, se e somente se,*

(i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$,

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para cada $\lambda > 0$.

Definição 1.1.8. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é dito diferenciável para $t > t_0$ se, para todo $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é dito diferenciável, se $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para todo $t > 0$.*

Definição 1.1.9. *Sejam $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$, $\Delta = \{z; \quad \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$ e $(T(z))_{z\in\Delta}$ uma família de operadores lineares limitados em X. A família $(T(z))_{z\in\Delta}$ é chamada semigrupo analítico em Δ se*

(i) $z \mapsto T(z)$ é analítica em Δ,

(ii) $T(0) = I$ e $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$ para todo $x \in X$,

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Delta$.

Observe que, a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real não negativo é um C_0-semigrupo.

Teorema 1.1.10. [47, Teorema 2.5.2] *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo uniformemente limitado, $A : D(A) \subset X \to X$ seu gerador infinitesimal e suponha que $0 \in \rho(A)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *$(T(t))_{t\geq 0}$ pode ser estendido a um semigrupo analítico em algum setor $\Delta_\delta = \{z; |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(z)\|$ é uniformemente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Delta}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$, de Δ_δ.*

(b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}$ para cada $\sigma > 0$ e $\tau \neq 0$.*

(c) *Existe $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para todo $\lambda \in \Sigma \setminus \{0\}$.

(d) *O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > 0$ e existe $C > 0$ tal que $\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}$ para todo $t > 0$.*

Teorema 1.1.11. [47, Corolário 3.2.2] *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Se B é um operador linear limitado então $A + B$ também gerador de um semigrupo analítico.*

Teorema 1.1.12. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\delta t}$ para todo $t \geq 0$ e seja $A : D(A) \subset X \to X$ seu gerador infinitesimal. Se $0 \in \rho(A)$ e $(T(t))_{t\geq 0}$ é analítico, então $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante $C > 0$, tal que $\|AT(t)\| \leq \dfrac{Ce^{\delta t}}{t}$ para todo $t > 0$.*

1.2 Potências fracionárias de operadores lineares fechados

Abordaremos, neste capítulo, certas propriedades de potências fracionárias de um operador o qual é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. De início, admita que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado e que $X = \overline{D(A)}$, e que a seguinte afirmação seja verdadeira:

(Hρ) Existem números positivos ω e M, e uma vizinhança da origem V, tal que

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ \cup V,$$

onde $\Sigma^+ = \{\lambda; \quad 0 < \omega < |\arg \lambda| \leq \pi\}$, e $\|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M}{1+|\lambda|}$, para todo $\lambda \in \Sigma^+ \cup V$.

Dos resultados da seção anterior, temos que se $M = 1$ e $\omega = \frac{\pi}{2}$, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo. Se $\omega < \frac{\pi}{2}$, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Definição 1.2.1. *Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador que satisfaz a hipótese $(H\rho)$ e $\theta \in (\omega, \pi)$. Para $\alpha > 0$, definimos o operador*

$$A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha} R(\lambda : A) d\lambda, \tag{1.1}$$

onde Γ é o caminho composto das curvas $\rho e^{-i\theta}$, $\rho e^{i\theta}$ e $\rho_0 e^{i\varphi}$, com $\rho_0 < \rho < \infty$ e $-\theta \leq \varphi \leq \theta$, e é orientado no sentido do crescimento de $\operatorname{Im}\lambda$.

A integral (1.1) converge para $\alpha > 0$, e portanto, define um operador linear limitado em X. Além disso, se $\alpha = n$ $(n \in \mathbb{N})$, então o integrando é analítico em $\Sigma^+ - \{0\}$, e 0 é o único pólo de ordem n, do integrando. O teorema dos resíduos pode ser usado então para mostrar que quando $\alpha = n$, a definição acima coincide com a definição clássica de $(A^{-1})^n$, isto é, n cópias do operador A^{-1}.

Se $\omega < \dfrac{\pi}{2}$ então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$, e neste caso, podemos ainda obter outra representação para $A^{-\alpha}$.

Se $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, definimos $A^0 = Id$ e para $\alpha > 0$,

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt, \tag{1.2}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama.

A integral em (1.2) converge na topologia do operador para todo $\alpha > 0$, e define portanto um operador linear limitado de X em X.

Lema 1.2.2. ([47, Lemas 2.6.3 e 2.6.6]) *Para todo $\alpha \geq 0$, $A^{-\alpha}$ é injetivo. Mais ainda, existe $C > 0$ tal que $\|A^{-\alpha}\| \leq C$ para todo $\alpha \in [0,1]$.*

A injetividade de $A^{-\alpha}$ motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.3. *Assuma que $\omega < \frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha > 0$, definimos o operador $A^{\alpha} : R(A^{-\alpha}) \subset X \to X$ por $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$.*

Teorema 1.2.4. ([47, Teorema 2.6.8]) *Seja $\alpha \geq 0$. As seguintes propriedades são válidas.*

(a) A^{α} é um operador fechado com domínio $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$.

(b) Se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.

(c) Para cada $\alpha \geq 0$, $X = \overline{D(A^{\alpha})}$.

(d) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}x$, para todo $x \in D(A^{\gamma})$ com $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Teorema 1.2.5. ([47, Teorema 2.6.13]) *As seguintes propriedades são verificadas.*

(a) $T(t)x \in D(A^{\alpha})$ para todo $t > 0$ e todo $\alpha \geq 0$.

(b) Para cada $x \in D(A^{\alpha})$, temos que $T(t)A^{\alpha}x = A^{\alpha}T(t)x$.

(c) Para cada $t > 0$, e todo $\alpha \geq 0$, o operador $A^{\alpha}T(t)$ é limitado e existem $M_{\alpha} > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\|A^{\alpha}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{M_{\alpha}}{t^{\alpha}}e^{-\delta t}$ para todo $t > 0$.

(d) Para cada $\alpha \in [0,1]$, existe $C_{\alpha} > 0$ tal que $\|T(t)x - x\| \leq C_{\alpha}t^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|$, para cada $x \in D(A^{\alpha})$ e todo $t > 0$.

Teorema 1.2.6. [47, Corolário 2.6.11] *Seja B um operador Linear fechado satisfazendo $D(B) \supset D(A^{\alpha})$, $0 < \alpha \leq 1$. Então*

$$\|Bx\| \leq C\,\|A^{\alpha}x\| \quad \text{para todo}\, x \in D(A^{\alpha})$$

e existe uma constante C_1 tal que, para todo $\rho > 0$ e $x \in D(A^{\alpha})$

$$\|Bx\| \leq C_1(\rho^{\alpha}\,\|x\| + \rho^{\alpha+1}\,\|Ax\|)$$

Teorema 1.2.7. [33, Teorema 2.1] *Seja A um operador linear não negativo em um espaço de Banach X, α um número complexo com $\operatorname{Re}\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$. Então temos que,*

$$A(A+\epsilon I)^{-1}$$

é um operador linear não negativo e

$$D((A+\epsilon I)^{\alpha}) = D(A^{\alpha})$$

$$\left[A(A+\epsilon I)^{-1}\right]^{\alpha} = A^{\alpha}[(A+\epsilon I)^{-1}]^{\alpha}$$

onde $I : X \longrightarrow X$ *é o operador identidade.*

Antes de enunciarmos alguns resultados sobre existência e regularidade de soluções do problema de valor inicial, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.2.8. *Seja* X *um espaço de Banach. Dados* $0 < \gamma \leq 1$ *e uma função* $u \in C^0([0,a], X)$. *a função* u *é dita Holder contínua com expoente* γ *se existir uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq C\,|t-s|^\gamma .$$

Para tal função, definimos o quociente de Holder

$$H_\gamma[u] = \sup_{t,s\in[0,a],e\neq s} \frac{\|u(t)-u(s)\|_X}{|t-s|^\gamma} < \infty.$$

Denote por $C^{0,\gamma}([0,a], X) := \{u \in C([0,a], X) : H_\gamma\ [u] < \infty\}$, *este conjunto, munido da norma*

$$\|u\|_{0,\gamma} = \|u\|_{C^0([0,a],X)} + H_\gamma[u], \qquad u \in C^{0,\gamma}([0,a], X),$$

é um espaço de Banach, onde $\|u\|_{C^0([0,a],X)} = \sup_{t\in[0,a]} \|u(t)\|_X$.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t) & t \in [0,a], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e $f : [0,a] \to X$ é uma função.

Definição 1.2.9. *Uma função* $u : [0,a] \to X$ *é chamada solução clássica do problema* (1.3) *se* $u(\cdot)$ *é contínua em* $[0,a]$, *continuamente diferenciável em* $(0,a]$, $u(t) \in D(A)$ *para* $0 < t < a$ *e* $u(t)$ *satisfaz* (1.3) *em* $[0,a]$.

Definição 1.2.10. *Uma função* $u : [0,a] \to X$ *é chamada solução forte do problema de valor inicial* (1.3) *se* $u(\cdot)$ *é diferenciável para quase todo* $t \in [0,a]$, $u'(t) \in L^1(0,a;X)$, $u(0) = u_0$ *e* $u'(t) - Au(t) = f(t)$ *para quase todo* $t \in [0,a]$.

Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (1.3) então

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0,a]. \tag{1.4}$$

Isto motiva a próxima definição.

Definição 1.2.11. *Uma função* $u \in C([0,a];X)$ *é chamada de solução suave (mild solution) do problema de valor inicial* (1.3) *se* $u(\cdot)$ *verifica* (1.4) *em* $[0,a]$.

Nos próximos resultados são consideradas algumas condições sob as quais uma solução suave de (1.3) é de fato uma solução clássica ou uma solução forte.

Teorema 1.2.12. ([47, Corolário 4.2.5]) *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Se $f \in L^1(0,a;X)$ é continuamente diferenciável em $[0,a]$ e $u_0 \in D(A)$, então a solução suave de* (1.3) *em* $[0,a)$ *é uma solução clássica.*

Teorema 1.2.13. ([47, Corolário 4.2.6]) *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e $f \in L^1(0,a;X) \cap C((0,a] : X)$. Se $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in (0,a)$, $Af(s) \in L^1(0,a;X)$ e $u_0 \in D(A)$, então a solução suave de* (1.3) *é uma solução clássica de* (1.3) *em* $[0,a]$.

Teorema 1.2.14. ([47, Corolário 4.2.10]) *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$. Se $f : [0,a] \to X$ é diferenciável quase sempre em $[0,a]$, $f' \in L^1(0,a;X)$ e $u_0 \in D(A)$, então a solução suave de* (1.3) *é uma solução forte de* (1.3) *em* $[0,a]$.

Teorema 1.2.15. ([47, Corolário 4.2.11]) *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ e suponha que X é reflexivo. Se $f : [0,a] \to X$ é Lipschitz e $u_0 \in D(A)$, então a solução suave de* (1.3) *é uma solução forte de* (1.3) *em* $[0,a]$.

Teorema 1.2.16. ([47, Teorema 4.3.1]) *Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ e $f \in L^p(0,a;X)$ com $1 < p < \infty$. Se $u(\cdot)$ é a solução suave de* (1.3) *em $[0,a]$ então $u \in C^{0,\frac{p-1}{p}}([\epsilon,a] : X)$ para todo $\epsilon > 0$. Se além disso, $u_0 \in D(A)$ então $u \in C^{0,\frac{p-1}{p}}([0,a] : X)$.*

Teorema 1.2.17. ([47, Corolário 4.3.3]) *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Se $f \in L^1(0,a;X)$ é localmente Hölder contínua $(0,a]$, então para cada $u_0 \in X$ o problema de valor inicial* (1.3) *possui uma única solução clássica em* $[0,a]$.

1.3 Espaços de fase abstratos

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Banach, $x : (-\infty, \sigma + b) \to Z$ e x_t definida por $x_t(\theta) = x(\theta + t)$, $t \in [0,\sigma]$ e $\theta \in (-\infty, 0]$. Defina por $\mathcal{B}_Z$ (ou simplesmente $\mathcal{B}$ quando não houver possibilidade de confusão) o espaço linear das funções definidas de $(-\infty, 0]$ em Z munido de uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_Z}$ que verifica os seguintes axiomas.

(**A**) Se $x : (-\infty, \sigma + b) \to Z$, $b > 0$, $\sigma > 0$, é contínua em $[\sigma, \sigma + b]$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}_Z$, então para cada $t \in [\sigma, \sigma + b]$, as seguintes propriedades são verificadas

(a) $x_t \in \mathcal{B}_Z$,

(b) $\|x(t)\| \leq H_Z \|x_t\|_{\mathcal{B}_Z}$,

(c) $\|x_t\|_{\mathcal{B}_Z} \leq K_Z(t-\sigma) \sup_{s\in[\sigma,t]} \|x(s)\|_Z + M_Z(t-\sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}_Z}$,

onde $H_Z > 0$ é uma constante, $K_Z, M_Z : [0,\infty) \to [1,\infty)$, $K_Z(\cdot)$ é contínua, $M_Z(\cdot)$ é localmente limitada e H_Z, K_Z, M_Z são independentes de $x(\cdot)$, σ, b e $t \in [\sigma, \sigma+b]$.

(**A1**) Para a função $x(\cdot)$ em (**A**), a função $t \mapsto x_t$ é contínua de $[0, \sigma+b)$ em $\mathcal{B}_Z$.

(**B**) O espaço $\mathcal{B}_Z$ é completo.

(**C2**) Se $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada em $C((-\infty,0] : Z)$ formada por funções com suporte compacto e $\varphi^n \to \varphi$ na topologia compacto aberta, então $\varphi \in \mathcal{B}_Z$ e $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}_Z} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Consideremos agora um exemplo de espaço de fase.

O espaço $\mathbf{C_r} \times \mathbf{L}^\mu(\mathbf{g}, \mathbf{X})$, $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, $\mu \geq \mathbf{1}$. O espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^\mu(g,X)$, consiste das classes de funções $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tais que $\phi(\cdot)$ é contínua em $[-r,0]$, é mensurável no sentido de Lebesgue, e $g(\cdot)\|\phi(\cdot)\|^\mu$ é Lebesgue integrável sobre $(-\infty,-r)$. O espaço $\mathcal{B}$ é munido da seminorma definida por

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}} := \sup_{-r\leq s\leq 0} \|\phi(s)\|_X + \left(\int_{-\infty}^{-r} g(s)\|\phi(s)\|^\mu ds \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

O espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^\mu(g,X)$ satisfaz os axiomas (A), (A-1), e (B), quando $g(\cdot)$ satisfaz as condições (g-1)-(g-6) seguintes.

(g-1) A aplicação $t \mapsto \sup\left\{ \dfrac{g(s+t)}{g(s)}; \quad -\infty < s \leq -t \right\}$ é localmente limitada para $t \geq 0$.

(g-2) $g(s) \to \infty$ quando $s \to -\infty$.

(g-3) $a(t) = \lim_{s\to-\infty} \dfrac{g(s+t)}{g(s)}$ existe para cada t e $a(t)$ é contínua em t.

(g-4) $\ln(g(s))$ é uniformemente contínua em $(-\infty, 0]$.

(g-5) $g(\cdot)$ é localmente integrável em $(-\infty,-r)$, isto é, $\displaystyle\int_\theta^{-r} g(s)ds < \infty$ para qualquer $\theta \in (-\infty,-r)$.

(g-6) Existe uma função $\gamma(\cdot)$, não negativa, localmente limitada em $(-\infty,0]$ tal que $g(\xi+\theta) \leq \gamma(\xi)g(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e $\theta \in (-\infty,-r) \setminus N_\xi$, onde $N_\xi \subset (-\infty,-r)$ é um conjunto com medida nula.

No caso particular onde $r = 0$ e $\mu = 2$, podemos tomar $H = 1$, $M(t) = \gamma(-t)^{1/2}$ e $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^{0} g(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$ para $t \geq 0$. Para maiores detalhes sobre a teoria de espaços de fase, citamos Hino [25].

Um exemplo de função que satisfaz (g-1)-(g-6) é o seguinte :

Sejam $r > 0$ e $g : (-\infty, -r) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $g(s) = e^{-s}$. Então $g(\cdot)$ verifica *(g-1)-(g-6)* acima.

De fato, para (g-1)

$$\frac{g(s+t)}{g(s)} = \frac{e^{-s-t}}{e^{-s}} = e^{-t}.$$

Então, a aplicação $t \mapsto \sup\left\{\frac{g(s+t)}{g(s)} = e^{-t}; \quad -\infty < s \leq -t\right\}$ é localmente limitada para $t \geq 0$.
Para a condição (g-2), temos

$$\lim_{s \to -\infty} g(s) = \lim_{s \to -\infty} e^{-s} = \infty.$$

Para a condição (g-3), $a(t) = \lim_{s \to -\infty} \frac{g(s+t)}{g(s)} = \lim_{s \to -\infty} e^{-t}$ existe para cada t e $a(t)$ é contínua em t.

Para a condição (g-4), temos que $\ln(g(s)) = s$ é uniformemente contínua em $(-\infty, 0]$.
Para a condição (g-5), seja K qualquer compacto, tal que $K \subset (-\infty, -r)$. Então, $\int_K e^{-s}ds < \infty$.

Para (g-6), tome a função $\gamma(x) = e^x$. A função $\gamma(x)$ é não negativa e limitada para $x \in (-\infty, 0]$. Além disso, $g(\xi + \theta) = e^{(-\xi-\theta)} = e^{\xi}e^{-\theta} = \gamma(\xi)g(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e $\theta \in (-\infty, -r) \setminus N_\xi$, onde $N_\xi \subset (-\infty, -r)$ é um conjunto com medida nula.

Finalmente, note que se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em Z e $(W(t))_{t\geq 0}$ é a família de operadores definida por

$$(W(t)\phi)(\theta) := \begin{cases} T(t+\theta)\phi(0), & -t \leq \theta \leq 0, \\ \phi(t+\theta), & -\infty < \theta < -t, \end{cases}$$

então $(W(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de operadores lineares limitados em $\mathcal{B}_Z$.

1.4 Espaços funcionais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Para $n \in \mathbb{N}$ e $p > 1$, defina $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))^n$, $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$, $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left(W^{1,p}(\Omega)\right)^n$ e $\mathcal{V} = \{u \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}$.

Sejam

$$X_p = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^p(\Omega),$$

$$V_p = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

Considere a decomposição de Helmholtz:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = X_p \oplus \left\{\nabla\phi : \phi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\right\}$$

De acordo com [15], vamos definir a projeção $P_p : \mathbf{L}^p(\Omega) \to X_p$. Para isso, considere o seguinte resultado:

Teorema 1.4.1. *[15] Seja $v \in L^p(\Omega)$ tal que $\operatorname{div} v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então, o valor de fronteira $N \cdot v|_{\partial\Omega}$ da componente normal de v sobre $\partial\Omega$ existe e pertence a $W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ independente de v tal que*

$$\|N \cdot v\|_{W^{-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)} + \|\text{div } v\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Seja $w \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. Por φ_1 denote a solução do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = \operatorname{div} w & \text{em} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Temos que $\varphi_1 \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$, e que vale a seguinte estimativa:

$$\|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1 \|\text{div } w\|_{W^{-1,p}(\Omega)},$$

para alguma constante $C_1 > 0$ independente de w. Note ainda que $w - \nabla\varphi_1 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e que $\operatorname{div}(w - \nabla\varphi_1) = 0$.

Agora, por φ_2 denote a solução do Problema de Neumann de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta\varphi_2 = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ N \cdot \nabla\varphi_2|_{\partial\Omega} = N \cdot w - N \cdot \nabla\varphi_1 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Temos que $\varphi_2 \in \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$, e que vale a seguinte estimativa:

$$\|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_2 \|w\|_{L^p(\Omega)},$$

para alguma constante $C_2 > 0$.

Defina por $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Observe que $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. A projeção $P_p : \mathbf{L}^p(\Omega) \to X_p$ é definida por $P_p w = w - \nabla\varphi$. Observe que

$$\text{div } P_p w = \text{div } w - \text{div } \varphi = \text{div } w - \text{div } \varphi_1 - \text{div } \varphi_2 = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = 0,$$

e $(P_p w) \cdot N = (w - \nabla\varphi) \cdot N = w \cdot N - \nabla\varphi \cdot N = 0$.
Reciprocamente, se div $w = 0$ e a componete normal de w, $w \cdot N = 0$, então, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Portanto $\varphi = 0$, e assim, $P_p w = 0$. Além disso, $\forall w \in X_p(\Omega)$, $P_p w = w$.

Ainda em [15], é provado que P_p satisfaz as propriedades:

- $P_p L^p(\Omega) = X_p = \{w \in L^p(\Omega) : \text{div } w = 0, \ \ w \cdot N = 0\}$;
- $\{P_p\}^* = P_{p'}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $0 < p < \infty$;
- $u \in X_p$, $P_p u = u$.
- se $u \in \left\{\nabla\phi : \phi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\right\}$, $P_p u = u + \nabla\varphi$, onde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, e φ_1 é solução de

$$\begin{cases} \Delta\left(\varphi_1 - u\right) = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

  e φ_2 é solução de

$$\begin{cases} \Delta\left(\varphi_2 - u\right) = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ N \cdot \left(\nabla\varphi_2 - u\right)|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

  Donde segue que $\nabla\varphi = 0$. Portanto $P_p u = u \in X_p \cap \left\{\nabla\phi : \phi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)\right\}$, ou seja, $P_p u = 0$.

Considere agora, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com fornteira de classe C^2. O Operador de Stokes é definido por

$$-A_p = P_p\Delta, \qquad D(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap X_p,$$

é um operador fechado, bijetivo de $D(A_p) \subset X_p$ em X_p. Se $u \in D(A_q) \cap D(A_q)$ para $1 < q < \infty$, então $A_p u = A_q u$. Além disso, as normas $\|A_p u\|_{L^p(\Omega)}$ e $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ são equivalentes para $u \in D(A_p)$. Analogamente, as normas $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ e $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ são equivalentes para $u \in D(A_p^{\frac{1}{2}}) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap X_p = V_p$. Mais geralmente,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\left\|A_\gamma^\alpha u\right\|_{L^\gamma(\Omega)} \qquad 1 < \gamma \leq p, \qquad 2\alpha + \frac{3}{p} = \frac{3}{\gamma}$$

é verdadeira para todos $u \in D(A_\gamma^\alpha)$, onde $C = C(p, \gamma, \Omega) > 0$.

O Operador de Stokes gera um semigrupo analítico e^{-tA_p}, $t \geq 0$ sobre X_p. Ainda mais, existe uma constante $\delta_0 = \delta_0(p, \Omega) > 0$, tal que

$$\left\|A_p^\alpha e^{-tA_p} u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq Ce^{-t\delta_0} t^{-\alpha} \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

para $u \in X_p$, $t > 0$, com $C = C(p, \Omega) > 0$.

Para a demostração das afirmações acima sobre o Operador de Stokes, sugiro o livro 'Topics on Partial Differential Equations', o qual é uma coletânea de resultados de Reinhard Farwig, Werner Varnhorn, Hideo Kozono, Pavol Quittner, Hermann Sohr, Patrick J. Rabier e Daniel Sevcovic.

Quando $p = 2$,

$$X_2 = H = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

$$V_2 = V = \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert, munido do produto interno (u, v), pensamos em H munido do produto interno herdado de $L^2(\Omega)$, e V munido do produto interno

$$(u, v)_V = (u, v) + \kappa\left((u, v)\right),$$

para todos $u, v \in V$, onde

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v \, dx \quad \text{e} \quad ((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Portanto $\|u\|_V^2 = \|u\|^2 + \kappa\,|||u|||^2$, onde:

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2 \; dx \quad \text{e} \quad |||u|||^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx.$$

. Note que $\|u\|_V$ e $|||u|||$ são normas equivalentes em V. De fato, para todo $v \in V$

$$\kappa^{\frac{1}{2}}\,|||u||| = \left(\kappa\,|||u|||^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|u\|^2 + \kappa\,|||u|||^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_V$$

e

$$\|u\|_V \leq \left(C(\Omega)^2 + \kappa\right)^{\frac{1}{2}} |||u|||,$$

pela desigualdade de Poincaré, onde $C(\Omega) > 0$ é uma constante que depende de Ω.

Considere novamente $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com fornteira de classe C^2. Defina o operador $A : V \to V^*$ como sendo

$$\langle Au, v\rangle = ((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (\nabla u, \nabla v),$$

onde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é o produto de dualidade $V^* - V$. Então

$$Au = -P\Delta u \qquad \forall\, u \in D(A),$$

onde P é a projeção ortogonal de $(L^2(\Omega))^n$ em H. Note então que, $A = A_2$ e que $P = P_2$.

O operador linear A tem as seguintes propriedades:

- A é um operador autoadjunto, positivo definido em $H = X_2$.
- O operador A possui inversa A^{-1}, o qual é um operador compacto de H em H.
- As autofuções $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de A forma uma base ortonormal de H.

- Os autovalores associados aos autovalores de A, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \longrightarrow \infty$, quando $n \longrightarrow \infty$.

Para os Capítulos 4 e 5, quando consideraremos o problema do tipo Kelvin-Voigt com retardo limitado e pontual, consideraremos que as funções com memória g e F satisfaçam as condições descritas a seguir.
Sendo h um número positivo fixado, por u_t denotaremos a função definida em $(-h, 0)$, dada por

$$u_t(s) = u(t+s), \quad s \in (-h, 0), \quad t \geq 0.$$

Consideremos como em Caraballo e Real [6], X e Y espaços de Banach separáveis, e

$$g : [0, T] \times C([-h, 0], X) \to Y$$

tal que

(H1) Para todo $\xi \in C([-h, 0], X)$, as aplicações

$$t \in [0, T] \longmapsto g(t, \xi) \in Y$$

são mensuráveis.

(H2) $g(t, 0) = 0$ para cada $t \in [0, T]$.

(H3) existe $L_g > 0$ tal que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\|g(t, \xi) - g(t, \eta)\|_Y \leq L_g \|\xi - \eta\|_{C^0([-h,0],X)}.$$

(H4) existe $C_g > 0$ tal que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t \|g(s, u_s) - g(s, v_s)\|_Y^2 \, ds \leq C_g \int_{-h}^t \|u(s) - v(s)\|_X^2 \, ds.$$

(H5) se uma sequência $\{v_k\}$ converge fracamente para v em $L^2(-h, T; Y)$ e fortemente em $L^2(-h, T; X)$, então a sequência de funções $\{\xi_k\}$ dadas por $\xi_k(t) = g(t, (v_k)_t)$ converge fracamente para $\xi(t) = g(t, v_t)$ em $L^2(0, T; Y)$.

Note que, dado $u \in C^0([-h, 0], X)$, a função $g_u : t \in [0, T] \longrightarrow Y$ definida por $g_u(t) = g(t, u_t)$, $\forall t \in [0, T]$ é mensurável e portanto pertence a $L^2(0, T; Y)$. Então a aplicação

$$\mathcal{G} : u \in C^0([-h, T], X) \longmapsto g(t, u_t) \in L^2(0, T; Y)$$

está bem definida e satisfaz as hipóteses $(H1)-(H5)$. Como $C^0([-h,T];X)$ é denso em $L^2(0,T;Y)$ então, pela propriedade $(H4)$, $\mathcal{G}$ admite uma única extensão, a aplicação

$$\widetilde{\mathcal{G}}: u \in L^2(-h,T;X) \longmapsto g(t,u_t) \in L^2(0,T;Y)$$

a qual é uniformemente contínua. Denote por $g(t,u_t)=\widetilde{\mathcal{G}}(u)(t)$ para cada $u \in L^2(-h,T;Y)$, e portanto $\forall t \in [0,T]$, $\forall u,v \in L^2(0,T;Y)$ temos que

$$\int_0^t \|g(s,u_s)-g(s,v_s)\|_Y^2\, ds \le C_g \int_{-h}^t \|u(s)-v(s)\|_X^2\, ds$$

Exemplo 1.4.2. *Suponha $T>0$. Defina $g:[0,T]\times C([-h,0],X)\to X$ por $g(t,u)=u\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)\right)$. Observe que g satisfaz as hipótese (H1)-(H5) acima. De fato:*

(H1) Dado $\xi \in C([-h,0],X)$, as aplicações

$$t\in[0,T]\longmapsto g(t,\xi)=\xi\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)\right)\in X$$

são mensuráveis pois, pondo $\omega(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)$, temos $\omega \in C([0,T],[-h,0])$, e portanto $\xi\circ\omega \in C([0,T],X)$.

(H2) $g(t,0)=0\left(\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)\right)=0$ para cada $t\in[0,T]$.

(H3) existe $L_g>0$ tal que, para cada $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\|g(t,\xi)-g(t,\eta)\|_X &= \left\|\xi\left(\left(1-\tfrac{t}{T}\right)(-h)\right)-\eta\left(\left(1-\tfrac{t}{T}\right)(-h)\right)\right\|_Y\\ &\le L_g\|\xi-\eta\|_{C^0([-h,0],X)}.\end{aligned}$$

(H4) existe $C_g>0$ tal que, para cada $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|g(s,u_s)-g(s,v_s)\|_X^2\, ds\\ &\quad\le \int_0^t \left\|u\left(s-\left(1-\frac{s}{T}\right)(-h)\right)-v\left(s+\left(1-\frac{s}{T}\right)(-h)\right)\right\|_X^2 ds\\ &\quad\le \frac{1}{1-\frac{h}{T}}\int_{-h}^t \|u(s)-v(s)\|_X^2\, ds.\end{aligned}$$

(H5) se uma sequência $\{v_k\}$ converge fracamente para v em $L^2(-h,T;X)$ e fortemente em $L^2(-h,T;x)$. Então, claramente pela hipótese (H4), a sequência de funções $\{\xi_k\}$ dadas por $\xi_k(t)=g(t,(v_k)_t)=v_k\left(t+\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)\right)$ converge fracamente para $\xi(t)=g(t,v_t)=\left(t+\left(1-\frac{t}{T}\right)(-h)\right)$ em $L^2(0,T;X)$.

1.4.1 Lemas técnicos

Lema 1.4.3. *(de Rham) Seja* $T = (T_1, \cdots, T_n) \in \boldsymbol{D'}(\Omega) = (D'(\Omega))^n = ((C_0^\infty(\Omega))^*)^n$*. Então,* $\langle T, \eta \rangle = 0$*, para todo* $\eta \in \mathcal{V}$ *se, e somente se, existe* $Q \in \boldsymbol{D'}(\Omega)$*, tal que* $T = \nabla Q$*.*

Prova. Ver [51] ou [55] página 14, para mais detalhes. □

Lema 1.4.4. *Se* $P \in \boldsymbol{D'}(\Omega)$*, e todas as primeiras derivadas* $D_i P \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$*, então* $P \in L^2(\Omega)$*.*

Prova. Ver [55], página 15. □

Lema 1.4.5. • *Para* $n = 2$*, temos que,* $\forall u \in H_0^1(\Omega)$*,*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}},$$

• *para* $n = 3$*, temos que,* $\forall u \in H_0^1(\Omega)$*,*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}.$$

Prova. Ver [55], página 262 - Lema 3.2, e página 296 - Lema 3.5. □

Sendo λ_1 primeiro autovalor do operador $A = -P\Delta$, e $\|\cdot\|_V^2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \kappa \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$, note que

para $n = 2$,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

pois $\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{4}}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$.

Como $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\kappa^{\frac{1}{2}}} \|u\|_V$, temos que

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \left(\frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{2}} \kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_V.$$

Agora, para $n = 3$,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \leq \left(\frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_V,$$

pois $\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{8}} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{8}}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}$.

Como $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\kappa^{\frac{1}{2}}} \|u\|_V$, temos que

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \left(\frac{2}{\lambda_1^{\frac{1}{4}} \kappa} \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_V .$$

Agora, sejam $n = 2, 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, tal que $\partial\Omega$ seja suficientemente regular. A forma trilinear

$$b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla) v, w) = \int_\Omega (u \cdot \nabla) v \cdot w \, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx,$$

é definida sobre $H^{m_1}(\Omega) \times H^{m_2+1}(\Omega) \times H^{m_3}(\Omega)$, onde $m_i \geq 0$ e

$$\begin{aligned} &m_1 + m_2 + m_3 \geq \tfrac{n}{2} \quad \text{se} \quad m_i \neq \tfrac{n}{2} \quad i = 1, 2, 3 \\ &m_1 + m_2 + m_3 > \tfrac{n}{2} \quad \text{se} \quad m_i = \tfrac{n}{2} \quad \text{para algum } i \end{aligned} \tag{1.7}$$

e satisfaz a seguinte estimativa:

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{H^{m_1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{H^{m_2+1}(\Omega)} \|w\|_{H^{m_3}(\Omega)},$$

onde $C > 0$ é uma constante. A respeito desta forma trilinear, para $1 < q_i < \infty$ tais que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leq 1$, pela desigualdade de Holder, vale a estimativa:

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^{q_2}(\Omega)} \|w\|_{L^{q_3}(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Assim, tomando $q_1 = q_3 = 4$ e $q_2 = 2$, temos

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Como $L^4(\Omega) \hookrightarrow V$, para $(n = 2, 3)$, temos que

$$|b(u, v, w)| \leq \widehat{C} \|u\|_V \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V, \tag{1.10}$$

onde $\widehat{C} > 0$ é a constante de inclusão $L^4(\Omega)$ em V. De acordo com o Lema 1.4.5, segue que $\forall \quad u, v, w \in V$,

$$|b(u, v, w)| \leq \begin{cases} \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \kappa^{-1}\right) \|u\|_V \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V & \text{se} \quad n = 2, \\ \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{4}} \kappa^{-1}\right) \|u\|_V \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_V & \text{se} \quad n = 3. \end{cases} \tag{1.11}$$

Da mesma forma, tomando $q_1 = q_2 = 4$ e $q_3 = 2$, temos

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.12}$$

Como $L^4(\Omega) \hookrightarrow V$, para $(n = 2, 3)$, temos que

$$|b(u,v,w)| \quad \leq \widehat{C}\|u\|_V \|\nabla v\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Pelo Lema 1.4.5, segue que $\forall \quad u, v, w \in V$,

$$|b(u,v,w)| \leq \begin{cases} \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\kappa^{-1}\right) \|u\|_V \|\nabla v\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)} & \text{se} \quad n = 2, \\ \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\kappa^{-1}\right) \|u\|_V \|\nabla v\|_V \|w\|_{L^2(\Omega)} & \text{se} \quad n = 3. \end{cases} \tag{1.14}$$

Em particular b é uma forma trilinear contína sobre $V \times V \times V$. (Para definições e demonstrações sobre a forma b, veja [55]).

Defina o operador $B : V \times V \to V^*$ por

$$\langle B\,(u, v)\,, w \rangle = b\,(u, v, w)\,.$$

Capítulo 2

Teoremas de traço para campos vetoriais solenoidais dependentes do tempo.

Resumo do capítulo: Neste capítulo, nosso objetivo é caracterizar a restrição de campos vetoriais (solenoidais) definidos no espaço-tempo $Q_T = [0,T] \times \Omega$ para a superficie lateral $\Sigma_T = [0,T] \times \partial\Omega$, e também estender campos vetoriais definidos sobre Σ_T em campos vetoriais (solenoidais) definidos sobre Q_T

Desejamos estabelecer a existência e unicidade de solução em dimensão 2 e 3, para o sistema equações do tipo Kelvin-Voigt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + ((F(t,u_t))\cdot\nabla)\,u\,(t,x) + \nabla p = f(t) + g(t,u_t)$$

sujeito a condições iniciais, de retardo, de contorno e de divergência nula.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$. Considere o seguinte sistema de equações do tipo Kelvin-Voigt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + ((F(t,u_t))\cdot\nabla)\,u\,(t,x) & & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\nabla p = f(t) + g(t,u_t) & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ u = k & \text{sobre} & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u^0(x) & \text{em} & \Omega \\ u_0 = \varphi & \text{em} & (-h,0)\times\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde u representa o campo de velocidades, p a pressão hidrostática, $k \neq 0$ é a velocidade na fronteira, f é a força externa sem retardo, g é outra força externa com alguma característica hereditária, u^0 é velocidade inicial, φ é o dado inicial com alguma característica hereditária, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $\kappa > 0$ é o coeficiente que caracteriza as propriedades elásticas do fluido Kelvin-Voight em questão. Sendo h um número positivo fixado, por u_t denotaremos a função definida em $(-h, 0)$, dada por

$$u_t(s) = u(t+s), \quad s \in (-h, 0).$$

Considere $Q_T = (0,T) \times \Omega$, e $\Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega$ é a superficie lateral de Q_T, e para $n \in \mathbb{N}$ e $p > 1$, defina $\mathbf{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega)^n$.

Note que, tomando $w = u - \widetilde{v}$, onde $\widetilde{v}$ está definido em $[-h, T] \times \Omega$,

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} \widetilde{v} = 0 & \text{em} & (0,T) \times \Omega \\ \widetilde{v} = k & \text{sobre} & (0,T) \times \partial\Omega \\ \widetilde{v}(x,0) = \widetilde{v}_0(x) & \text{em} & \Omega, \end{array}$$

podemos reescrever (2.1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nu\Delta w + \left(\left(w(t-r(t)) + \widetilde{v}(t-r(t))\right) \cdot \nabla\right)(w + \widetilde{v})(t,x) & & \\ \qquad\qquad + \nabla p = f_1(t) + g(t, w_t + \widetilde{v}_t) & \text{em} & (0,T) \times \Omega \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{em} & (0,T) \times \Omega \\ w = 0 & \text{sobre} & (0,T) \times \partial\Omega \\ w(x,0) = u_0(x) - v_0(x) & \text{em} & \Omega \\ w(t,x) = \varphi(t,x) - \widetilde{v}(t,x) & \text{em} & (-h,0) \times \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f_1 = f - \dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \Delta\dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \nu\Delta\widetilde{v} \in L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$; e lembrando que, para cada tempo $t \in (0,T)$, denotamos por w_t a função definida em $(-h,0)$ pela relação $w_t(\theta) = w(t+\theta)$, $\theta \in (-h, 0)$. A pergunta agora é em que espaços os dados de fronteira devem estar para que 2.2 tenha solução. Note que $f_1 = f - \dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \Delta\dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \nu\Delta\widetilde{v} \in L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$, pede que $\widetilde{v} \in H^1\left(0,T; H^1(\Omega)\right)$ pelo menos. Neste momento, definimos em que espaço a extenção do dado de fronteira k deve estar, de modo que o sistema (2.2) possui solução. Assim, podemos propor um espaço $Y \subseteq H^1\left(0,T; H^1(\Omega)\right)$ de campos vetoriais solenoidais em Q_T que, a partir da Teoria de Traço, que será estudada neste capítulo, para determinar o espaço G dos elementos de contorno de Dirichlet definidos sobre Σ_T, cujo traço de elementos do espaço Y coincide com os elementos do espaço G.

A idéia, então, para resolver este problema é reduzir a investigação de solução de problemas de valor de fronteira não nulo, a problemas de fronteira nula. Para isso, precisamos caracterizar a restrição de campos vetoriais (solenoidais) definidos no espaço-tempo $Q_T = [0,T] \times \Omega$ para a superficie lateral $\Sigma_T = [0,T] \times \partial\Omega$, e também estender campos vetoriais definidos sobre Σ_T em campos vetoriais (solenoidais) definidos sobre Q_T; e este será o objetivo deste capítulo.

2.1 Formulação para um Teorema do traço

Assuma $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ uma variedade C^∞ compacta, composta por J componentes conexas $\partial\Omega_j$,

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{J} \Gamma_j, \qquad \text{e} \qquad \Gamma_j \cap \Gamma_j = \emptyset \text{ sempre que } i \neq j.$$

2.1.1 Espaços funcionais

Considere o espaço

$$S = S(\mathbb{R}^d) = \left\{ u : x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^d); \forall\alpha; \forall\beta \right\},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ são multiíndices com componentes não negativas, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$,

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\left(\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_d^{\beta_d}\right)}.$$

Para $u \in S$, definimos a Transformada de Fourier

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\ dx$$

onde $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{d} x_i \xi_i$.

A inversa da Transformada de Fourier é dada por

$$u(x) = \overline{\mathcal{F}}\hat{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)\ d\xi = \mathcal{F}u(-x).$$

O espaço de Schwartz $S'(\mathbb{R}^d)$ é o espaço dual de $S(\mathbb{R}^d)$. A Transformada de Fourier de $u \in S'$ é definida pela fórmula

$$\langle \mathcal{F}u, \phi \rangle = \left\langle u, \overline{\mathcal{F}}\phi \right\rangle \quad, \forall\phi \in S(\mathbb{R}^d)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto de dualidade entre S' e S o qual é gerado pelo produto escalar de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ é definido como segue:

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \quad d\xi.$$

Sobre o fecho $\overline{G}$ de um domínio G, introduzimos os seguintes subespaços de $H^s(\mathbb{R}^d)$:

$$H^s_{\overline{G}}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} u \in \overline{G} \right\}.$$

Para um domínio Ω, denote por $\Omega' = \mathbb{R}^d - \Omega$. Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ das funções definidas sobre Ω é definido como segue:

$$H^s(\Omega) = H^s(\mathbb{R}^d)/H^s_{\Omega'}(\mathbb{R}^d). \tag{2.3}$$

As definições gerais dos espaços quociente de espaços de Banach e (2.3) implica que existe um operador de extensão $E : H^s(\Omega) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{E} \|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.4}$$

onde o infimo é tomado sobre todos os operadores extensão E (veja [8] e [9]).

Como assumimos que o domínio Ω é bem regular, ou seja, que a fronteira $\partial\Omega$ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $d-1$ e compacta, então existe um sistema de cartas locais $\{(U_k, \delta_k)\}_{k=1,\cdots,m}$ finito e, de posse destas cartas locais, podemos construir uma partição da unidade subordinada a cobertura aberta $\{U_k \cup \Omega\}_{k=1,\cdots,m}$ do aberto $\bigcup_{j=1}^{m} (U_k \cup \Omega)$ que contém $\overline{\Omega}$. Denote esta partição por $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_m$. Obtemos então:

1. $\operatorname{supp} \phi_0 \subset \Omega$;
2. $\operatorname{supp} \phi_k \subset U_k,\ k = 1, 2, \cdots, m$;
3. $\phi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ k = 0, 2, \cdots, m$;
4. $0 \le \phi_k \le 1,\ k = 0, 2, \cdots, m$;
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) = 1,\ \forall x \in \overline{\Omega}$.

Desta forma, a norma sobre o espaço $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$,

$$\|u\|_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{k=1}^{m} \left\| \phi_k u \circ \delta_k^{-1} \right\|_{H^s(\mathbb{R}^{d-1})}$$

está bem definida.

Defina o espaço $V^s(\Omega) = \left\{ v = (v_1, \ldots, v_d) \in [H^s(\Omega)]^d : \text{div } v = 0 \right\}$.
Se $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$, então a transformada de Fourier $\hat{u}(\tau, \xi)$ é definida por

$$\hat{u}(\tau, \xi) = \mathcal{F}u(\tau, \xi) = (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-i(t\tau + x\cdot\xi)} u(t, x)\, dt\, dx.$$

Considere o espaço de Schwartz $S'(\mathbb{R}^{d+1})$ e defina

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1}) = H^1(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d)) = \left\{ u(t, x) \in S'(\mathbb{R}^{d+1}) : (1 + |\tau|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1 + |\tau|^2)(1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\tau, \xi)|^2 \;\; d\xi\, d\tau.$$

Sobre o cilindro $Q_T = (0, T) \times \Omega$, analogamente a (2.3), podemos definir

$$\mathcal{H}^s(Q_T) = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1}) / \mathcal{H}^s_{Q'_T}(\mathbb{R}^{d+1}) \tag{2.5}$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(Q_T)} = \inf_E \|Eu\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})} \tag{2.6}$$

onde o infimo é tomado sobre todos os operadores extensão $E : \mathcal{H}^s(Q_T) \longrightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})$.

Definimos ainda, o espaço vetorial

$$\mathcal{V}^s(Q_T) = \left\{ v = (v_1, \ldots, v_d) \in [\mathcal{H}^s(Q_T)]^d : \text{div } v = 0 \right\}.$$

Os traços de funções $u \in \mathcal{V}^s(Q_T)$ sobre a superfície lateral $[0, T] \times \partial\Omega$ são procurados em espaços do tipo $H^s\left(0, T; \mathbf{H}^r(\partial\Omega)\right)$, suas normas são construidas a partir da norma de $H^s\left(\mathbb{R}; \mathbf{H}^r(\partial\Omega)\right)$, da mesma forma que em (2.4). A norma em $H^s\left(\mathbb{R}; \mathbf{H}^r(\partial\Omega)\right)$ é dada por

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}; \mathbf{H}^r(\partial\Omega))} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|^2)^s \, \|\hat{u}(\tau, \cdot)\|^2_{\mathbf{H}^r(\partial\Omega)} \;\; d\tau,$$

onde

$$\hat{u}(\tau, \cdot) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tau} u(t, \cdot)\; dt$$

é a transformada de Fourier da função $u(t, \cdot)$ definida para $t \in \mathbb{R}$ com valores pertencentes a $\mathbf{H}^r(\partial\Omega)$.

O Teorema do traço consiste de duas partes: um Teorema de restrição e um de extenção. Seja $v(x), x \in \Omega$ um campo vetorial solenoidal ($\operatorname{div} v(x) = 0$) de classe C^∞, e γv sua restrição sobre a fronteira $\partial\Omega$:

$$\gamma v = v|_{\partial\Omega}.$$

Podemos decompor $\gamma v(x)$ da seguinte maneira:

$$\gamma v(x) = \gamma_\tau(x)v + (\gamma_n v(x))n \tag{2.7}$$

onde $\gamma_n(x)v$ é a componente normal de $\gamma v(x)$, obtida pela projeção ortogonal de $\gamma v(x)$ sobre o campo vetorial normal n; e $\gamma_\tau(x)v$ é a componente tangencial de $\gamma v(x)$, obtida pela projeção ortogonal de sobre o espaço tangente $T_x\partial\Omega$ da variedade $\partial\Omega$ no ponto x.

Introduzimos os seguintes espaços funcionais sobre Σ_T:

$$G^s_\tau(\Sigma_T) = H^1\left(0,T; H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right), \quad \frac{1}{2} < s$$

$$G^s_n(\Sigma_T) = H^1\left(0,T; H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; \widetilde{H}^0(\partial\Omega)\right), \quad \frac{1}{2} < s$$

onde $\widetilde{H}^\alpha(\partial\Omega) = \left\{ v \in H^\alpha(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} v\, dx = 0 \right\}$ (para $\alpha < 0$, a integral é entendida no sentido de distribuição), e

$$G^s(\Sigma_T) = G^s_\tau(\Sigma_T) \times G^s_n(\Sigma_T).$$

2.1.2 Resultados de restrição

Para uma função $u(t,x) \in C^\infty(Q_T) \cap \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$, introduzimos os seguintes operadores restrição:

$$\gamma_0 u(t,x') = u(t,x)\big|_{x_d=0} \quad e \quad (\gamma_k u) = \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x_d^k}\bigg|_{x^d=0} \tag{2.8}$$

onde $k = 1,2,\ldots$; $x = (x_1,\ldots x_d)$ e $x' = (x_1,\ldots,x_{d-1})$. Nosso objetivo é encontrar os espaços das restrições γ_k, $\quad k = 0,1,2,\ldots$, para $u \in \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$.

Lema 2.1.1. *Seja $k \geq 0$ um inteiro, e assuma $\frac{1}{2} < s$. Então o operador γ_k, definido em (2.7), pode ser estendido por continuidade ao operador contínuo*

$$(\gamma_k u) : \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right) \longrightarrow H^1\left(\mathbb{R}; H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})\right) = \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d). \tag{2.9}$$

Prova. Seja $\widehat{u}(\tau,\xi)$ a transformada de Fourier de $u(x,t)$, então

$$\widehat{\gamma_k u}(\tau,\xi') = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_{\mathbb{R}} e^{ix_d\xi_d}\widehat{u}(\tau,\xi',\xi_d)\, d\xi_d\bigg|_{x_d=0} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (i\xi_d)^k \widehat{u}(\tau,\xi',\xi_d)\, d\xi_d.$$

Sejam

$$a(\xi') = 1 + |\xi'|^2, \quad b(\tau) = 1 + |\tau|^2 \quad e \quad \Lambda_s(\tau,\xi') = b(\tau)a(\xi')^s.$$

Com uma função $R(\tau,\xi')>0$ a ser determinada posteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} R(\tau,\xi')\,|\widehat{\gamma_k u}(\tau,\xi')|^2\,d\tau\,d\xi' \\
&\quad= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} R(\tau,\xi')\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_d^k}{\Lambda_s^{\frac{1}{2}}(\tau,x',\xi_d)}\widehat{u}(\tau,x',\xi_d)\Lambda_s^{\frac{1}{2}}(\tau,x',\xi_d)\,d\xi_d\right|^2 d\tau\,d\xi' \\
&\quad\leq (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(R(\tau,\xi')\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta^{2k}}{\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)}\,d\eta\right)\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{u}(\tau,\xi',\eta)\right|^2\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)\,d\eta\,d\tau\,d\xi',
\end{aligned}$$

onde $\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)=b(\tau)a(\xi',\eta)^s=b(\tau)(1+|\xi'|^2+|\eta|^2)^s$.

Precisamos determinar $R(\tau,\xi')$ tal que

$$0<C_1\leq R(\tau,\xi')\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta^{2k}}{\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)}\,d\eta\leq C_2, \tag{2.10}$$

onde as constantes C_1 e C_2 não dependem de τ e ξ'; então

$$\int_{\mathbb{R}^d} R(\tau,\xi')\left|\widehat{\gamma_k u}(\tau,\xi')\right|^2 d\tau\,d\xi'\leq C\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\left|\widehat{u}(\tau,\xi',\eta)\right|\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)\,d\eta=c\,\|u\|^2_{\mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)}$$

de modo que, ao encontrar R, possamos definir uma norma no espaço de $\gamma_k u$, para $u\in\mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$. Para determinar R satisfazendo (2.10), defina

$$\beta=\beta(\tau,\xi')=b(\tau)a(\xi')^s$$

então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\frac{\eta^{2k}}{\Lambda_s(\tau,\xi',\eta)}\,d\eta &= 2\int_0^\infty\frac{\eta^{2k}}{ba^s+b\eta^{2s}}\,d\eta \\
&= 2\beta^{\frac{2k+1-2s}{2s}}\int_0^\infty\frac{\left(\frac{\eta}{\beta^{\frac{1}{2s}}}\right)^{2k}}{1+b\left(\frac{\eta}{\beta^{\frac{1}{2s}}}\right)^{2s}}\,d\left(\frac{\eta}{\beta^{\frac{1}{2s}}}\right) \\
&= 2\beta^{\frac{2k+1-2s}{2s}}\int_0^\infty\frac{y^{2k}}{1+by^{2s}}\,dy.
\end{aligned}$$

Vamos avaliar a integral $I(b)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{y^{2k}}{1+by^{2s}}\,dy$.

Tomando $z = y^{2k+1}$,

$$\begin{aligned}
I(b) &= \tfrac{1}{2k+1}\int_0^\infty \frac{dz}{1+bz^{\frac{2s}{2k+1}}}\\
&= \tfrac{1}{2k+1}\int_0^\infty \frac{dz}{z^{\frac{2s}{2k+1}}\left(z^{\frac{-2s}{2k+1}}+b\right)}\\
&= \tfrac{1}{2k+1}\left(1-\tfrac{2s}{2k+1}\right)\int_0^\infty \frac{d\left(z^{\left(1-\frac{2s}{2k+1}\right)}\right)}{z^{\frac{-2s}{2k+1}}+b}\\
&= \tfrac{1}{2s-2k-1}\int_0^\infty \frac{dy}{y^{\frac{2s}{2s-2k-1}}+b}\\
&= Cb^{\frac{2s-2k-1}{2s}-1}\int_0^\infty \frac{d\frac{y}{b^{\frac{2s-2k-1}{2s}}}}{\left(\frac{y}{b^{\frac{2s-2k-1}{2s}}}\right)^{\frac{2s}{2s-2k-1}}+1}\\
&= Cb^{\frac{-(2k+1)}{2s}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 < \frac{C}{2}b^{\frac{-(2k+1)}{2s}} < I(b) = Cb^{\frac{-(2k+1)}{2s}},$$

ou seja,

$$0 < C_1 < b^{\frac{2k+1}{2s}} I(b) \le C_2,$$

ou ainda,

$$0 < C_1 < (2^{-1}\beta^{\frac{2s-2k-1}{2s}})b^{\frac{2k+1}{2s}}\left(2\beta^{\frac{2k+1-2s}{2s}} I(b)\right) \le C_2.$$

Portanto, podemos definir $R(\tau,\xi')$ como segue:

$$R(\tau,\xi') = \beta^{\frac{2s-2k-1}{2s}} b^{\frac{2k+1-2s}{2s}} = (ba^s)^{\frac{2s-2k-1}{2s}} b^{\frac{2k+1}{2s}} = a^{\frac{2s-2k-1}{2}}(b)^{\frac{2s-2k-1}{2s}} b^{\frac{2k+1}{2s}},$$

ou seja,

$$R(\tau,\xi') = ba^{s-k-\frac{1}{2}},$$

para $\dfrac{1}{2} < s$, $k \ge 0$. Assim, $R(\tau,\xi')$ define uma norma em $H^1\left(\mathbb{R}; H^{\frac{2s-2k-1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})\right)$. $\square$

Considere agora o caso $Q_T = [0,T]\times\Omega$ e $\Sigma_T = [0,T]\times\partial\Omega$.

Corolário 2.1.2. *Seja $k \ge 0$ um inteiro e $\dfrac{1}{2} < s$. Então, o operador restrição definido em (2.8) pode ser estendido por continuidade ao operador limitado*

$$\gamma_k : \mathcal{H}^s(Q_T) \longrightarrow H^1\left(0,T; H^{s-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right).$$

Prova. Dado $u \in \mathcal{H}^s(Q_T)$, então pela definição do espaço $H^r(0,T;H^s(\Omega))$, podemos considerar $v \in H^1(\mathbb{R};H^s(\Omega))$ a extensão de u como segue:

$v(t) = u(t)$, para $t \in [0,T]$,

$v(t) = 0$ para $t \in [T+\delta, +\infty) \cup (-\infty, -\delta]$,

e v é uma função suave em $(T, T+\delta] \cup [-\delta, 0)$ de modo que $v(T+\delta) = v(-\delta) = 0$ Então, $v(t) \in H^s(\Omega)$, para quase todo $t \in [0,T]$.

Como a fronteira $\partial\Omega$ do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é uma variedade compacta, de classe C^∞, de dimensão $d-1$, existe uma cobertura finita $\{U_k\}_{k=1,\ldots,J}$ de $\partial\Omega$ e um difeomorfismo $\delta_k : U_k \longrightarrow B = \left\{x \in \mathbb{R}^d; |x| < 1\right\}$ tal que, sobre $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\delta_i \circ \delta_j^{-1}$ seja C^∞. Seja ϕ_k uma partição da unidade subordinada a $\{U_k\}$.

Para $j = 1, \ldots, J$ e cada t, defina

$$v_j(t)(y) = \begin{cases} (\phi_j(v(t)))\left(\delta_j^{-1}(y)\right), & y \in (0,1)^{d-1} \times [0,1] = Y \\ 0, & y \in \mathbb{R}^d - Y. \end{cases}$$

Então $v_j(t) \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Pelo Teorema anterior,

$$v_j \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1}) \longrightarrow \gamma_k(v_j) \in H^1(\mathbb{R}; H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})).$$

Então, para cada $j = 1, \ldots, J$ temos $\gamma_k v_j(t)$ definida em $\mathbb{R}^{d-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\right\}$ e

$$\gamma_k v_j(t)(y') = \begin{cases} \left(\phi_j \frac{\partial^k v(t)}{\partial x_d^k}\right)\left(\delta_j^{-1}(y_1, \ldots, y_{d-1}, 0)\right), & y' \in (0,1)^{d-1} = Y'; \\ 0, & y \in \mathbb{R}^{d-1} - Y'. \end{cases}$$

Como $v_j(t) \in H^s(\mathbb{R}^d)$, temos que $\gamma^k v_j(t) \in H^{-k-\frac{1}{2}s}(\mathbb{R}^{d-1})$ para $j = 1, \ldots, J$, e

$$\|\gamma_k v(t)\|^2_{H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sum_j \left\| \left(\phi_j \frac{\partial^k v(t)}{\partial x_d^k}\right) \circ \left(\delta_j^{-1}\right) \right\|^2_{H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\gamma_k u\|^2_{H^1(0,T;H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} &= \|\gamma_k v\|^2_{H^1(\mathbb{R};H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \\
&= \sum_j \left\| \left(\phi_j \frac{\partial^k v}{\partial x_d^k}\right) \circ \left(\delta_j^{-1}\right) \right\|^2_{H^1\left(\mathbb{R};H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})\right)} \\
&= \sum_j \|\gamma_k v_j\|^2_{H^1\left(\mathbb{R};H^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})\right)} \\
&\leq C \sum_j \|v_j\|^2_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})} \\
&\leq C \sum_j \left\| (\phi_j(v)) \left(\delta_j^{-1}\right) \right\|^2_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})} \\
&= C \|u\|^2_{\mathcal{H}^s(Q_T)}.
\end{aligned}$$

□

2.1.3 Resultados de extensão

Teorema 2.1.3. *Seja $k \geq 0$ um inteiro e $s \in \mathbb{R}$. Então existe um operador contínuo*

$$\beta_k : \mathcal{H}^{s-k-\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^d\right) \longrightarrow \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$$

tal que $\gamma_k \circ \beta_k = I$ e $\gamma_j \circ \beta_k = \{0\}$, $j \neq k$, para $u \in \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^d\right)$, onde γ_k é o operador definido em (2.8).

Prova. Seja $\phi_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $\operatorname{supp}\phi_k(t) \subset [-1,1]$ e $\phi_k(t) = \dfrac{t^k}{k!}$ para $|t| < \dfrac{1}{2}$. Para $u \in \mathcal{H}^s\left(\mathbb{R}^{d+1}\right)$ denote por

$$\widehat{u}(\tau,\xi',x_d) \equiv \widehat{u}(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_{d-1},x_d)$$

a transformada de Fourier com respeito às variáveis $(t,x') = (t,x_1,\ldots,x_{d-1})$. Seja $v(t,x) \in \mathcal{H}^{s-k-\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^d\right)$ e $\widehat{v}(\tau,\xi')$ a transformada de Fourier de v em relação as variáveis (t,x'). Defina o operador β_k pela fórmula

$$(\widetilde{\beta_k v})(\tau,\xi',x_d) = \phi_k(a^{\frac{1}{2}}(\xi')x_d)\widehat{v}(\tau,\xi')a^{\frac{-k}{2}}(\xi'), \tag{2.11}$$

onde $a(\xi') = 1 + |\xi'|^2$. Tomando a transformada de Fourier com respeito a x_d em (2.11), temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta v}(\tau, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\widetilde{\beta_k v})(\tau, \xi', x_d) e^{-2\pi i (x_d \xi_d)} \, dx_d \\
&= \frac{\widehat{v}(\tau, \xi')}{a^{\frac{k}{2}}(\xi')} \int_{\mathbb{R}} \phi_k(a^{\frac{1}{2}}(\xi') x_d) e^{-2\pi i (x_d \xi_d)} \, dx_d \\
&= \frac{\widehat{v}(\tau, \xi')}{a^{\frac{k+1}{2}}(\xi')} \int_{\mathbb{R}} \phi_k(y) e^{-2\pi i (a^{-\frac{1}{2}}(\xi') \xi_d) y} \, dy \\
&= \frac{\widehat{v}(\tau, \xi')}{a^{\frac{k+1}{2}}(\xi')} \phi_k(a^{-\frac{1}{2}}(\xi') \xi_d).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|\beta v\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})} &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (a(\xi') + |\xi_d|^2)^s b \frac{|\widehat{v}(\tau, \xi')|^2}{a^{k+1}(\xi')} \left| \phi_k(a^{-\frac{1}{2}}(\xi') \xi_d) \right|^2 \, d\tau \, d\xi' \, d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (a(\xi') + a(\xi') y^2)^s b \frac{|\widehat{v}(\tau, \xi')|^2}{a^{k+1}(\xi')} \left| \phi_k(y) \right|^2 a^{\frac{1}{2}}(\xi') \, d\tau \, d\xi' \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (a^{s-k-\frac{1}{2}}(\xi'))(1 + y^2)^s b \left| \widehat{v}(\tau, \xi') \right|^2 \left| \phi_k(y) \right|^2 \, d\tau \, d\xi' \, dy \\
&\leq c_1 \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (a^{s-k-\frac{1}{2}}(\xi')) b \left| \widehat{v}(\tau, \xi') \right|^2 \, d\tau \, d\xi' \\
&= c_1 \|v\|_{\mathcal{H}^{s-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} .
\end{aligned}$$

Agora $\gamma_k \circ \beta_k = I$ e $\gamma_j \circ \beta_k = \{0\}$, $j \neq k$, para $v \in \mathcal{H}^{s-k-\frac{1}{2}}\left(\mathbb{R}^d\right)$, seguem da definição de γ_k em (2.8) e de β_k em (2.11). □

Com ajuda das técnicas de partição da unidade obtemos, a partir do Teorema anterior mostraremos, a seguir, resultados de extensão para funções definidas sobre $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$ para funções definidas sobre $Q = \mathbb{R} \times \Omega$.

Corolário 2.1.4. *Seja $k \geq 0$ um inteiro e $s \in \mathbb{R}$. Então existe um operador contínuo*

$$\beta_k : \mathcal{H}^{s-k-\frac{1}{2}}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{H}^s(Q)$$

tal que $\gamma_k \circ \beta_k = I$ e $\gamma_j \circ \beta_k = \{0\}$, $j \neq k$, para $u(t, x)$ definida para $(t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega$, onde γ_k é o operador definido em (2.8).

□

Considere os seguintes espaços funcionais :

$$V^s(\Omega) = \left\{ u \in [H^s(\Omega)]^3 : \operatorname{div} u = 0 \right\}. \tag{2.12}$$

Para $s \geq 0$, seja o espaço

$$\widehat{V}^s(\Omega) = \left\{ u \in V^s(\Omega) : \int_{\Gamma_j} \gamma_n u \, dx' = 0, j = 1, \ldots, J \right\}. \tag{2.13}$$

Considere também os espaços

$$H_0^s(\Omega) = \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ na norma de } H^s(\Omega), s > 0,$$

e

$$V_0^0(\Omega) = \left\{ u \in V^0(\Omega) : \gamma_n u = 0 \right\}. \tag{2.14}$$

Temos a decomposição do espaço $L^2(\Omega)$ (veja [13]):

$$L^2(\Omega) = V_0^0(\Omega) \oplus \nabla H^1(\Omega)$$

onde $\nabla H^1(\Omega) = \left\{ \nabla p : p \in H^1(\Omega) \right\}$.

Note que $\nabla H^1(\Omega) \subset \ker \mathbf{curl}$ (veja [57], Terorema 2.7, página 30).

Defina $H_c = V_0^0 \cap \ker \; \mathbf{curl}$, temos que:

- $H_c \neq \{0\}$;
- H_c é um subespaço de dimensão finita de $H^1(\Omega)$;
- H_c é o conjunto dos vetores dos vetores $\nabla p(x)$, onde $p(x)$ é uma função de múltiplos valores satisfazendo $\Delta p = 0$ e $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$;
- $(H_c)^\perp = \left\{ v \in V_0^0(\Omega) : \int_{\Gamma_i} v \cdot n \, dx' = 0, \, i = 1, 2, ..., J \right\}$;
- a seguinte decomposição ortogonal em $L^2(\Omega)$ é verdadeira:

$$V_0^0(\Omega) = W^0(\Omega) \oplus H_c(\Omega).$$

Todas estas propriedades do espaço H_c podem ser encontradas no artigo de Foias & Temam: "Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomenès les successifs de bifurcation" - [13]. Defina, para $s \geq 0$,

$$W^s(\Omega) = W^0(\Omega) \cap H^s(\Omega), \tag{2.15}$$

onde $W^s(\Omega)$ munido da norma de $H^s(\Omega)$, e

$$W^{-s}(\Omega) = \text{fecho de } W^0(\Omega) \text{ na a norma de } H^{-s}(\Omega),$$

onde $H^{-s}(\Omega)$ munido da norma $\|u\|_{-s} = \sup\limits_{v \in H_0^s(\Omega)} \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{H_0^s(\Omega)}}$ e a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é gerada pelo produto interno em $L^2(\Omega)$.

Finalmente defina

$$\widehat{V}^{-s} = \text{fecho de } \widehat{V}^0(\Omega) \text{ na norma de } H^{-s}(\Omega).$$

Teorema 2.1.5. *Seja* $s > -\frac{3}{2}$ *e* $s \neq -\frac{1}{2}$. *Então o operador*

$$curl : W^{s+1}(\Omega) \longrightarrow \widehat{V}^{s}(\Omega)$$

é um isomorfismo. Além disso, o operador rotacional

$$curl : \widehat{V}^{s+1}(\Omega) \longrightarrow \widehat{V}^{s}(\Omega)$$

é sobrejetivo.

Prova. : Ver [16] *Teorema* 4.1, página 1097. □

Agora considere os seguintes espaços funcionais:

$$\widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T) = \left\{ u \in L^2\left(0, T; \widehat{V}^{s}(\Omega)\right) : \partial_t u \in L^2\left(0, T; \widehat{V}^{s}(\Omega)\right), \right\} \tag{2.16}$$

e

$$\widehat{\mathcal{W}}^{s}(Q_T) = \left\{ u \in L^2(0, T; W^{s}(\Omega)) : \partial_t u \in L^2(0, T; W^{s}(\Omega)) \right\}. \tag{2.17}$$

Teorema 2.1.6. *Seja* $s > \frac{1}{2}$. *Então, para* $u \in \widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T)$, *existe uma única solução* $v \in \widehat{\mathcal{W}}^{s+1}(Q_T)$ *para o problema*

$$\begin{cases} curl\, v(t) = u(t), & x \in \Omega \\ div\, v(t) = 0, & x \in \Omega \\ \gamma_n\, v(t) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.18}$$

(onde t *é um parâmetro)e a seguinte estimativa é verdadeira:*

$$\|v\|_{\widehat{\mathcal{W}}^{s+1}(Q_T)} \leq C\, \|u\|_{\widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T)},$$

onde $C > 0$ *não depende de* u.

Prova. : Seja $u \in \widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T)$, então para quase todo $t \in [0, T]$, $u(t) \in \widehat{V}^{s}(\Omega)$. Pelo (2.1.5), existe um único $v(t) \in W^{s+1}(\Omega)$ tal que curl$v(t) = u(t)$, para quase todo $t \in [0, T]$.

Novamente, como $\partial_t u \in \widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T)$ e sua definição em (2.16), segue que $\partial_t u(t) \in \widehat{V}^{s}(\Omega)$. Novamente pelo (2.1.5) existe um único $w(t) \in W^{s+1}(\Omega)$ tal que curl$w(t) = \partial_t u(t), x \in \Omega$. Como

$$\mathrm{curl}(w(t)) = \partial_t u(t) = \partial_t(\mathrm{curl} v(t)) = \mathrm{curl}(\partial_t v(t)),$$

temos que $\partial_t v(t) = w(t)$, para quase todo $t \in [0, T]$, já que pelo Teorema anterior curl é um isomorfismo. Assim, $\partial_t v \in L^2\left(0, T; W^{s+1}(Q_T)\right)$ e então $v \in \widehat{\mathcal{W}}^{s}(Q_T)$.

Da definição (2.15) de $W^{s+1}(\Omega)$, segue que div $v(t) = 0, x \in \Omega$ e $\gamma_n v(t) = 0, x \in \partial\Omega$, para quase todo $t \in [0, T]$. □

Para cada componente conexa Γ_i de $\partial\Omega = \bigcup \Gamma_i$, considere o conjunto

$$\Theta = \Theta_{i,\delta} = \{x \in \Omega : dist(x, \Gamma) < \delta\} \qquad \Gamma = \Gamma_i$$

onde δ é um número suficientemente pequeno. Introduziremos em Θ coordenadas locais especiais.

Lema 2.1.7. *Defina*

$$y_3(x) = dist(x, \Gamma_i). \tag{2.19}$$

Então existe uma cobertura finita $\{U_j\}$ de $\Theta_{i,\delta}$ tal que em cada U_j existe um sistema de coordenadas $(y_1(x), y_2(x), y_3(x))$, onde y_3 é definida por (2.19), orientada por (x_1, x_2, x_3) e satisfaz

$$\nabla y_j(x) \cdot \nabla y_k(x) = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3 \tag{2.20}$$

onde δ_{jk} é o símbolo de Kronecker.

Prova. Ver Lema 4.4 página 1100 em [17]. □

Usando (2.20), podemos calcular, nas coodernadas locais (y_1, y_2, y_3), o tensor métrico $g_{kl}(y)$ gerado pela métrica Euclidiana do espaço envolvendo $\mathbb{R}^3$ por $g_{kl}(y) = \delta_{jk}$. Esta relação implica que as fórmulas para div e curl são dadas na forma usual:

$$\text{div}u = \sum_1^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad e \quad \text{curl}u = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1).$$

Considere o operador d_τ, o qual em coordenadas locais (t, y_1, y_2) sobre Σ_T, é definido por

$$d_\tau v = \frac{\partial v_2}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

onde $v(t, y_1, y_2) = (v_1(t, y_1, y_2), v_2(t, y_1, y_2))$ é um campo vetorial tangencial sobre Σ_T.
Pode-se provar que (veja [16], Capítulo 4, página 1096), para uma função suave u,

$$d_\tau \gamma_\tau \text{curl}^{-1} u = \gamma_n u.$$

Teorema 2.1.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. O operador*

$$\gamma = (\gamma_\tau, \gamma_n) : \widehat{\mathcal{V}}^s(Q_T) \longrightarrow G_\tau^s(\Sigma_T) \times G_n^s(\Sigma_T) \tag{2.21}$$

para $s > \frac{1}{2}$, é contínuo, onde $G_\tau^s(\Sigma_T) = H^1\left(0, T; H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma_T)\right)$, $G_n^s(\Sigma_T) = \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma_T) \cap L^2(0, T; \widetilde{H}^{-1}(\Gamma))$ e $\widehat{\mathcal{V}}^s(Q_T) = \left\{u \in L^2\left(0, T; \widehat{V}^s(\Omega)\right) : \partial_t u \in L^2\left(0, T; \widehat{V}^s(\Omega)\right)\right\}$.

Prova. : Seja $u \in \widehat{\mathcal{V}}^s(Q^T)$, operador traço $\gamma = (\gamma_\tau, \gamma_n)$, nas coordenadas locais introduzido no Lema (2.1.7) (vide **Lema** 4.4, página 1100 de [17]), pode ser reescrito como segue:

$$\gamma u = (w_1|_{y_3=0}, w_2|_{y_3=0}, w_3|_{y_3=0}),$$

ou seja,

$$\gamma_\tau u = (w_1|_{y_3=0}, w_2|_{y_3=0}).$$

Observe que

$$\begin{cases} w_1|_{y_3=0} = \gamma_0 w_1(t, y_1, y_2), \\ \\ w_2|_{y_3=0} = \gamma_0 w_2(t, y_1, y_2). \end{cases}$$

Note que $w_1, w_2 \in \mathcal{H}^s\left((0,T) \times \Theta_i\right)$, onde $\Theta_i = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma_i) < y_3\}$, onde Γ_i são as componentes conexas de $\partial\Omega$. Estendendo w_1 e w_2 a uma função pertencente a $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^{d+1})$, e aplicando o (2.1.1), deduzimos a continuidade da componente γ_τ do operador γ.

Vamos estimar γ_n. Para isso, precisamos voltar às coordenadas originais do problema. Defina $v = \mathrm{curl}^{-1} u$ como a solução $v \in \widehat{\mathcal{W}}^{s+1}\left(Q_T\right)$ do problema (2.18). Usando novamente as coordenadas locais introduzido no Lema anterior, a parte tangencial de v sobre Σ_T pode ser reescrita como $\gamma_\tau v = (v_1(y_1, y_2, 0), v_2(y_1, y_2, 0))$. Ao aplicarmos o operador d_τ, obtemos:

$$d_\tau \gamma_\tau v = \partial_2 v_1(y_1, y_2, 0) - \partial_1 v_2(y_1, y_2, 0).$$

Daí, segue que

$$w_3(y_1, y_2, 0) = \gamma_n u = d_\tau \gamma_\tau \mathrm{curl}^{-1} u = d_\tau \gamma_\tau v = \partial_2 v_1(y_1, y_2, 0) - \partial_1 v_2(y_1, y_2, 0),$$

e

$$\begin{aligned}
&\|\gamma_n u\|_{\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma_T) \cap L^2(0,T;\widetilde{H}^{-1}(\Gamma))} \\
&\qquad = \left\|\left(\partial_2 v_1(y_1, y_2, 0) - \partial_1 v_2(y_1, y_2, 0)\right)|_{\Sigma_T}\right\|_{\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma_T) \cap L^2(0,T;\widetilde{H}^{-1}(\Gamma))} \\
&\qquad \leq C \left\|v|_{\Sigma_T}\right\|_{\mathcal{H}^{s+\frac{1}{2}}(\Sigma_T) \cap L^2(0,T;\widetilde{H}^{0}(\Gamma))} \\
&\qquad \leq C \|v\|_{\mathcal{H}^{s+1}(Q_T)} \\
&\qquad \leq C \|v\|_{\widehat{\mathcal{W}}^{s+1}(Q_T)} \\
&\qquad \leq \widetilde{C} \|u\|_{\widehat{\mathcal{V}}^{s}(Q_T)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.9. *(Teorema de restrição): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Então podemos definir operador restrição em*(2.7)*, pelo operador contínuo*

$$\gamma : \mathcal{V}^s\left(Q_T\right) \to G^s(\Sigma_T), \quad \textit{para} \quad \frac{1}{2} < s.$$

Prova. : Seja $v \in \mathcal{V}^s\left(Q_T\right)$ para $\frac{1}{2} < s$. Denote por

$$\int_{\Gamma_j} v \cdot n \, ds = q_i(t), \quad j = 1, 2, \cdots, J$$

$$\sum_{j=1}^{J} q_j(t) = \sum_{j=1}^{J} \int_{\Gamma_j} v \cdot n \, ds = \int_{\Omega} div \, v \, dx = 0, \tag{2.22}$$

para cada $t \in [0, T]$.

Considere o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta p(t,x) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} = q_j(t) \quad j = 1, 2, \cdots, J. \end{cases} \tag{2.23}$$

Em virtude de (2.22), existe uma solução $p(t,x)$ para o problema (2.23), e $\nabla p(t,x)$ é definido unicamente. Por Teoremas de regularidade, $\nabla p(t,x) \in H^1\left(0, T; C^{\infty}(\overline{\Omega})\right) \subset \mathcal{H}^s(Q_T)$. Como $\operatorname{div} \nabla p = \Delta p = 0$, temos que $\nabla p \in \mathcal{V}^s(Q_T)$. Além disso, $\partial_t v$, $\partial_t \nabla p \in \mathcal{V}^s(Q_T)$. Portanto

$$(v - \nabla p) \in \mathcal{V}^s\left(Q_T\right)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \gamma_n(v - \nabla p) \, dx' = \int_{\Gamma_j} (v - \nabla p) \cdot n \, dx' = 0.$$

Assim $(v - \nabla p) \in \widehat{\mathcal{V}}^s\left(Q_T\right)$. Então, pelo Teorema anterior, obtemos resultado de restrição para $(v - \nabla p)$.

Note que

$$\gamma(v) = \gamma(v - \nabla p) + \gamma(\nabla p,)$$

Como

$$\nabla p|_{\partial\Omega} = \sum_{j}^{J} \nabla p|_{\Gamma_j} = \sum_{j}^{J} q_i(t) = 0$$

Então, aplicando o Teorema anterior a $u = v - \nabla p$, temos o resultado. □

Omitiremos a demonstração do próximo resultado pois sua prova segue os mesmos passos dos Teoremas 5.1 e 2.2, (páginas 1110 e 1112) do artigo [16] de Fursikov, Gunzburger e Hou, com uma única diferença: no momento em que se aplica o Teorema do Traço (no caso do artigo [16], o Teorema 3.2), aplicamos o Corolário 2.1.4 deste trabalho. Note que, mesmo que a prova seja praticamente a mesma, os resultados são obtitidos em espaços diferentes do do artigo [16].

Considere o seguinte espaço funcional:

$$\widehat{G}^s(\Sigma_T) = G_{\tau}^s(\Sigma_T) \times \widehat{G}_n^s(\Sigma_T),$$

onde

$$\widehat{G}_n^s(\Sigma_T) = \left\{ u_n \in G_n^s(\Sigma_T) : \int_{\Gamma_i} u_n(t, x') \, dx' = 0 \, \text{para quase todo } \; t \in [0, T], \, j = 1, \ldots, J \right\}.$$

Teorema 2.1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Então, para $\frac{1}{2} < s$, existe um operador levantamento contínuo*

$$R : \widehat{G}^s(\Sigma_T) \longrightarrow \mathcal{V}^{(s)}(Q_T)$$

de modo que o operador R é tal que $\gamma \circ R = I$, onde $I : G^s(\Sigma_T) \longrightarrow G^s(\Sigma_T)$ é o operador identidade.

Da mesma forma que o resultado anterior, também omitiremos a prova do próximo Teorema, já que os passos são os mesmos da demonstração do Lema2.2 em [16], página 1112. Lembrando que, mesmo que a prova tenha os mesmos argumentos, os resultados são diferentes dos obtidos em [16].

Teorema 2.1.11. *(Teorema de levantamento): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Então, para $\frac{1}{2} < s$, existe um operador levantamento contínuo*

$$R : G^s(\Sigma_T) \longrightarrow \mathcal{V}^{(s)}(Q_T)$$

de modo que o operador R é tal que $\gamma \circ R = I$, onde $I : G^s(\Sigma_T) \longrightarrow G^s(\Sigma_T)$ é o operador identidade.

2.2 Formulação para um Teorema de Extensão para dados de fronteira: caso bidimensional

Sejam $Q = \mathbb{R} \times \Omega$ e $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$ a superfície lateral do cilíndro do tempo-espaço infinito. Vamos descrever o espaço vetorial definido sobre Σ que pode ser estendido ao espaço vetorial solenoidal definido sobre Q o qual é subespaço de $\mathcal{V}^{(1)}(Q)$.

Vamos examinar os traços normal e tangencial separadamente, pois eles pertencem a diferentes espaços funcionais. Então, denote por $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ e $n = (n_1, n_2)$, os vetores tangente e normal exterior unitários, respectivamente, ao longo da fronteira $\partial\Omega$, orientada no sentido anti-horário. Temos as seguintes relações

$$\tau_1 = n_2 \qquad \text{e} \qquad \tau_2 = -n_1 \ .$$

Dado um campo vetorial

$$b(t,x) = b_n(t,x)n(x) + b_\tau(t,x)\tau(x), \quad \text{para quase todo} \, (t,x) \in \Sigma,$$

satisfazendo

$$\int_{\partial\Omega} b \cdot n \, ds = 0, \text{ para quase todo } t \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

onde $b_n = b \cdot n$ e $b_\tau = b \cdot \tau$, procuramos $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{V}^{(1)}(Q)$ da forma $u_1 = \partial_2 F$ e $u_2 = \partial_1 F$ onde F é a função fluxo de u e $\partial_i F = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$. Em outras palavras, dado um vetor b, tal que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} b \cdot n \, ds = 0$, para quase todo $t \in \mathbb{R}$, procuramos F de modo que

$$b_n = -(\nabla F \cdot \tau)|_{\partial\Omega} \equiv -\, \partial_\tau F|_\Sigma \tag{2.25}$$

e

$$b_\tau = -(\nabla F \cdot n)|_\Sigma \equiv -\partial_n F|_\Sigma \,. \tag{2.26}$$

Observe que, por $\displaystyle\int_{\partial\Omega} b \cdot n \, ds = 0$, para quase todo $t \in \mathbb{R}$, a hipótese (2.26) é equivalente a

$$F|_\Sigma = h \equiv -\int_{x_0}^{x} b_n(t, \mathrm{X}(s)) \, ds, \tag{2.27}$$

onde a integral de linha é tomada ao longo de $\partial\Omega$ no sentido anti-horário, começando de um ponto fixo $x_0 \in \partial\Omega$.

Proposição 2.2.1. *Um par (b_τ, h) definido sobre Σ, possui uma extensão $F \in \mathcal{H}^2(Q)$ satisfazendo* (2.25), (2.26),

$$\|F\|_{\mathcal{H}^2(Q)} \leq C \left\{ \|b_\tau\|_{H^{\frac{1}{4}}\left(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)} + \|h\|_{H^{\frac{3}{4}}\left(\mathbb{R}; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)} \right\}, \tag{2.28}$$

e

F se anula fora de um vizinhança de $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$

onde C é uma constante que independe de b_τ, h e F, se e somente se

$$b_\tau \in H^{\frac{1}{4}} \left(\mathbb{R}; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right) \tag{2.29}$$

e

$$h \in H^{\frac{3}{4}} \left(\mathbb{R}; H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right). \tag{2.30}$$

Prova. Considere b_τ satisfazendo (2.29) e h satisfazendo (2.30), vamos construir uma extensão F satisfazendo (2.26) – (2.28), tal que F se anula fora de um vizinhança de $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^∞, podemos escolher uma vizinhança U de $\partial\Omega$ com coordenadas $(x_1^{'}, x_2^{'})$ tal que

$$U = \left\{ x = (x_1^{'}, x_2^{'}) : (x_1^{'}, 0) \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad x_2^{'} \in [0, \epsilon] \right\}$$

para algum $\epsilon > 0$. Então, reescrevendo o espaço $\mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times U)$ como segue

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times U) = \left\{ F(x_2^{'}, t, x_1^{'}) \in L^2(0, \epsilon; H^1(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega))) : \partial_{x_2^{'} x_2^{'}} F \in L^2(0, \epsilon; L^2(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega))) \right\}$$

do Teorema do Traço em [10] (Teorema 4.2, página 29), temos que as aplicações

$$\gamma_0 : F \in \mathcal{H}^2(Q) \longmapsto F|_{x_2'=0} \in \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{1}{4}}$$

e

$$\gamma_1 : F \in \mathcal{H}^2(Q) \longmapsto \partial_{x_2'} F|_{x_2'=0} \in \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{3}{4}}$$

são contínuas e sobrejetivas. Portanto, a aplicação

$$F \longmapsto (\gamma_0 F, \gamma_1 F)$$
$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times U) \longrightarrow \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{1}{4}} \times \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{3}{4}}$$

é contínua e sobrejetiva. Como (veja em [10] a equação 9.24 na página 53, e Teorema 9.6 na página 49))

$$\left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{1}{4}} = H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}, H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$$
$$\left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{3}{4}} = H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

Temos que $F \longmapsto (\gamma_0 F, \gamma_1 F)$ é contínua e sobrejetiva de $\mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times U)$ em $H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}, H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)) \times H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$. Finalmente, escolha outra vizinhança $\widetilde{U}$ de $(0, \epsilon) \times \partial\Omega$ tal que $\overline{U}$ está contido em $\widetilde{U}$. A partir dos resultados de extensão, podemos estender continuamente o espaço $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}\times U)$ no espaço $\left\{F \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times \Omega) : F \quad \text{se anula fora de} \quad \widetilde{U}\right\}$.

Agora, suponha que um par (b_τ, h), definido sobre Σ, possui uma estensão $F \in \mathcal{H}^2(Q)$ satisfazendo (2.25), (2.26), e que F se anula fora de um vizinhança $U = \left\{x = (t, x_1', x_2') : t \in \mathbb{R},\, (x_1', 0) \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad x_2' \in [0, \epsilon]\right\}$ de $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$.

Observe que

$$F \in \left\{F(x_2', t, x_1') \in L^2(0, \epsilon; H^1(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega))) : \partial_{x_2' x_2'} F \in L^2(0, \epsilon; L^2(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega)))\right\}.$$

Novamente, do Teorema do Traço em [10] (Teorema 4.2, página 29), temos que a aplicação

$$\gamma_0(F) = F|_{x_2'=0}$$

e

$$\gamma_1(F) = \partial_{x_2'} F|_{x_2'=0}$$

estão bem definidas, e que

$$F \longmapsto (\gamma_0 F, \gamma_1 F) =$$
$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R} \times U) \longrightarrow \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{1}{4}} \times \left[H^1(\mathbb{R}, H^2(\partial\Omega)), L^2(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))\right]_{\frac{3}{4}}$$

Note que $x \in \Sigma$ quando $x_2 = 0$ então, por (2.25), (2.26), temos que $(\gamma_0 F, \gamma_1 F) = (h, b_\tau)$. □

Teorema 2.2.2. *Assuma que b_n e b_τ satisfazem*

$$\int_{\partial\Omega} b_n \, ds = 0 \text{ para quase todo } t \in [0,T],$$

$$b_n \in H^{\frac{3}{4}}(0,T,H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)),$$

$$b_\tau \in H^{\frac{1}{4}}(0,T,H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)).$$

Então existe $u \in \mathcal{V}^1(Q_T)$ satisfazendo

$$u|_{\Sigma_T} = b \equiv b_n \cdot n + b_\tau \cdot \tau$$

e a estimativa

$$\|u\|_{\mathcal{V}^1(Q_T)} \leq C \left\{ \|b_\tau\|_{H^{\frac{1}{4}}\left(\mathbb{R};H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right)} + \|b_n\|_{H^{\frac{3}{4}}\left(\mathbb{R};H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)\right)} \right\}$$

onde C independe de b_n e b_τ, e tal que u se anula fora de uma vizinhança de $(0,T) \times \Omega$.

Prova. Os espaços $H^r(0,T;H^s(\partial\Omega))$ com índices r e s fracionários podem ser considerados como a restrição sobre $(0,T) \times \Omega$ dos espaços de funções $H^r(\mathbb{R},H^s(\partial\Omega))$.

Portanto, pode-se estender os dados temporais , ou seja, existem

$$\widetilde{b}_n \in H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R},H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$$

$$\widetilde{b}_\tau \in H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R},H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$$

tais que

$$\widetilde{b}_n = b_n \text{ e } \widetilde{b}_\tau = b_\tau \quad \text{em} \quad (0,T),$$

$$\left\|\widetilde{b}_n\right\|^2_{H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R},H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))} \leq C \left\|b_n\right\|^2_{H^{\frac{3}{4}}(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))}$$

e

$$\left\|\widetilde{b}_\tau\right\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R},H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \leq C \left\|b_\tau\right\|^2_{H^{\frac{1}{4}}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}.$$

Podemos assumir que

$$\int_{\partial\Omega} \widetilde{b}_n \, ds = 0, \text{ para quase todo } t \in \mathbb{R}$$

(se necessário, pode-se tomar $\widetilde{\widetilde{b}}_n = \widetilde{b}_n - \dfrac{\int_{\partial\Omega} \widetilde{b}_n \, ds}{\int_{\partial\Omega} ds}$)

Defina

$$\widetilde{h}(t,x) = -\int_{x_0}^{x} \widetilde{b}_n(t,X(s)) \, ds, \; x \in \partial\Omega,$$

onde a integral é tomada no sentido antihorário ao longo de $\partial\Omega$, começando no ponto $x_0 \in \partial\Omega$. Note que $\widetilde{h} \in H^{\frac{3}{4}}(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega))$, então da Proposição anterior, temos que existe $F \in \mathcal{H}^2(Q)$, a qual se anula fora de $\mathbb{R} \times \partial\Omega$, tal que

$$F|_{\Sigma} = \widetilde{h} \text{ e } \partial_n F|_{\Sigma} = \widetilde{b}_{\tau}.$$

Agora, tomando

$$u = \text{curl}\,(\partial_2 F, -\partial_1 F)\,,$$

segue que $u \in \mathcal{V}^1(Q)$ e

$$(u \cdot n)|_{\Sigma} = \text{curl}F \cdot n|_{\Sigma} = -\nabla F \cdot \tau = -\partial_{\tau} F|_{\Sigma} = -\partial_{\tau}\widetilde{h} = \widetilde{b}_n$$

e

$$(u \cdot \tau)|_{\Sigma} = \text{curl}F \cdot \tau|_{\Sigma} = -\nabla F \cdot n = -\partial_n F = -\partial_n \widetilde{h} = \widetilde{b}_{\tau}.$$

Então $u|_{\Sigma_T} = \widetilde{b} = \widetilde{b}_n \cdot n + \widetilde{b}_{\tau} \cdot \tau$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{V}^1(Q_T)} &= \|\text{curl } F\|_{\mathcal{V}^1(Q_T)} \\ &\leq \widetilde{C}\,\|F\|_{\mathcal{H}^2(Q_T)} \\ &\leq C\left\{\|b_{\tau}\|_{H^{\frac{1}{4}}\left(\mathbb{R};H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)} + \|h\|_{H^{\frac{3}{4}}\left(\mathbb{R};H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)}\right\}. \end{aligned}$$

Além disso, como F se anula fora de um vizinhança Z de $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$, segue que u também se anula fora de um vizinhança de $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$.

$\square$

Capítulo 3

Soluções em L^p para sistemas do tipo Kelvin-Voigt com memória não limitada

Resumo do capítulo: Neste capítulo estudaremos a existência de soluções para uma classe de sistemas do tipo de Kelvin-Voigt com retardo não-limitado. Para obter nossos resultados, usaremos a teoria de semigrupos analíticos em espaços de Banach e assumiremos que o espaço de fase (o espaço das histórias) é definido de maneira axiomática.

3.1 Existência de solução para a Equação do tipo Kelvin-Voight com retardo não limitado

Desejamos determinar a existência de solução clássica para o sistema equações do tipo Kelvin-Voigt com retardo não-limitado nos termos não-linear e na força externa descrito como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \left(\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \alpha\,(s-t)\, u\,(s,x)\, ds + \gamma u\,(t-r,x)\right) \cdot \nabla\right) u\,(t,x) & \\ \qquad\qquad +\nabla p - \kappa\Delta \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \beta\,(s-t)\, u\,(s,x)\, ds & (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} u(t,x) = 0 & (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & (0,T)\times\partial\Omega \\ u_0\,(t,x) = \psi\,(t,x) & (-\infty,0]\times\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde u representa o campo de velocidades, p a pressão hidrostática, $u(0) = u_0(x)$ e $u|_\Gamma = 0$ são as condições inicial e de fronteira, respectivamente, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com fronteira Γ de classe C^2, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $\kappa > 0$ é o coeficiente que caracteriza as propriedades elásticas do fluido Kelvin-Voigt em questão, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ são funções apropriadas, não negativas, que satisfazem:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}} ds < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{\beta(s)^{p'}}{\rho(s)^{\frac{p'}{p}}} ds < \infty,$$

onde $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ e $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

Aplicando a projeção sobre o sistema (3.1) obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \kappa P_p \Delta \dfrac{du}{dt} = \nu P_p \Delta u + F(t, u_t, u(t)) + g(t, u_t) \\ u_0 = P_p \psi, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $u_t : (-\infty, 0) \to X_p$ é definida por $u_t(\theta) = u(\theta + t)$,

$$\begin{aligned} F(t, u_t, u(t)) &= -P_p \left(\left(\int_{-\infty}^{t} \alpha(s-t) u(s,x) ds + \gamma u(t-r) \right) \cdot \nabla \right) u(t,x) \\ &= -P_p \left(\left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s) u_t(s,x) ds + \gamma u_t(-r) \right) \cdot \nabla \right) u(t,x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(t, u_t) &= -P_p \left(\int_{-\infty}^{t} \beta(s-t) u(s,x) ds \right) \\ &= -P_p \left(\int_{-\infty}^{0} \beta(s) u_t(s,x) ds \right). \end{aligned}$$

O operador linear $-A_p = P_p \Delta$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações $e^{-A_p t}$ em X_p. Observe que o conjunto resolvente de $-A_p$, $\rho(-A_p)$, contém o conjunto dos reais positivos, assim, para $\kappa > 0$, $(I + \kappa A_p)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado em X_p. Portanto, podemos reescrever (3.2) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \nu (I + \kappa A_p)^{-1} (-A_p) u(t) + \overline{F}(t, u_t, u(t)) + \overline{g}(t, u_t) \\ u_0 = P_p \psi, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde

$$\overline{F}(t, u_t, u(t)) = (I + \kappa A_p)^{-1} F(t, u_t, u(t))$$

e

$$\overline{g}(t, u_t) = (I + \kappa A_p)^{-1} g(t, u_t).$$

Para mostrarmos a existência de solução para o sistema (3.1), precisamos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 3.1.1. *As seguintes propriedades são verificadas:*

1. *O operador $B_p = \nu (I + \kappa A_p)^{-1} (-A_p)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico uniformemente limitado $(T_p(t))_{t \geq 0}$ em $D(A_p)$.*

2. *Para* $1 < p \leq q < \infty$, $(T_p(t))_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo em* $D(A_p)$. *Além disso,* $T_q(t) = T_p(t)\,|_{D(A_q)}$ *e* $T_p(\cdot)\,x \in C([0,\infty), D(A_p))$ *para cada* $x \in D(A_p)$.

3. *[10] Seja* $n > 1$ *um número natural. Então*

   (a) *Dado* $1 < p < n$, *então* $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$ *se* $q \in [p, \frac{np}{n-p}]$.

   (b) *Dado* $p > n$, *então* $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$ *se* $q \in [1, +\infty)$.

   (c) *Dado* $p = n$, *então* $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$ *se* $q \in [p, +\infty)$.

4. *[23] Seja* $\infty > p > 1$ *e* $p = 2q$ *Existe uma função* $\widetilde{F} : [0,a] \times \mathcal{B}_{V_q} \times V_q \to X_p$ *tal que* $F(t,\psi,w) = (A_p)^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{F}(t,\psi,w)$ *para todo* $(t,\psi,w) \in [0,a] \times \mathcal{B}_{V_q} \times V_q$ *onde* $\mathcal{B}_{V_q}$ *é o espaço de fase definido por*

$$\mathcal{B}_{V_q} = (C_r \times L^q(\rho; V_q))^n\,, \quad q > 1,\, r > 0.$$

   Existem funções $L^i_{\widetilde{F}} \in C([0,\infty), [0,\infty))$, $i = 0,1,2$ *e* $\gamma_1 \in (0,1)$ *tais que*

$$\left\|\widetilde{F}(t,\psi_1,w_1) - \widetilde{F}(s,\psi_2,w_2)\right\|_{X_p} \leq L^0_{\widetilde{F}}(R)\,|t-s|^{\gamma_1} + L^1_{\widetilde{F}}(R)\,\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}_{V_q}} + L^2_{\widetilde{F}}(R)\,\|w_1 - w_2\|_{V_q}\,,$$

   para todo $(\psi_1,\psi_2) \in B_R(0,\mathcal{B}_{V_q}) \times B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$, $w_1, w_2 \in V_p$, *e todos* $t,s \in [0,a]$, *onde* $B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$ *é a bola de centro* $0 \in \mathcal{B}_{V_q}$ *e raio* R.

5. *Seja* $\infty > p > 1$ *e* $p = 2q$ *A função* $F(t,\psi,w) = (A_p)^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{F}(t,\psi,w)$ *para todo* $(t,\psi,w) \in [0,a] \times \mathcal{B}_{V_q} \times V_q$ *onde* $\mathcal{B}_{V_q}$ *é o espaço de fase definido por*

$$\mathcal{B}_{V_q} = (C_r \times L^q(\rho; V_q))^n\,, \quad q > 1,\, r > 0.$$

   Existem funções $L^i_F \in C([0,\infty), [0,\infty))$, $i = 0,1,2$ *e* $\gamma_1 \in (0,1)$ *tais que*

$$\|F(t,\psi_1,w_1) - F(s,\psi_2,w_2)\|_{X_p} \leq L^0_F(R)\,|t-s|^{\gamma_1} + L^1_F(R)\,\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}_{V_q}} + L^2_F(R)\,\|w_1 - w_2\|_{V_q}\,,$$

   para todo $(\psi_1,\psi_2) \in B_R(0,\mathcal{B}_{V_q}) \times B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$, $w_1, w_2 \in V_p$, *e todos* $t,s \in [0,a]$, *onde* $B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$ *é a bola de centro* $0 \in \mathcal{B}_{V_q}$ *e raio* R.

6. *[23] A função* $g(\cdot)$ *é contínua de* $[a,b] \times \mathcal{B}_{V_q}$ *em* X_q *e existe uma função crescente* $L_g \in C([0,\infty), (0,\infty))$ *e* $\gamma_2 \in (0,1)$ *tal que*

$$\|g(t,\psi_1) - g(s,\psi_2)\|_{X_q} \leq L_g(R)\left(|t-s|^{\gamma_2} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}_{V_q}}\right),$$

   para todos $\psi_i \in B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$ *e todos* $t,s \in [0,a]$.

Prova.

1. Lembre-se que $-A_p = P_p\Delta$ é gerador de um semigrupo analítico de contrações em X_p.

   Como o $B_p = (I + \kappa A_p)^{-1}(-A_p)$ é um operador linear limitado, segue que B_p é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T_p(t))_{t\geq 0}$ em $D(A_p)$, onde $T_p(t) = e^{B_p t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n((I+\kappa A_p)^{-1}(A_p))^n t^n}{n!}$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $B_p = (-A_p)_{\frac{1}{\kappa}} = \frac{1}{\kappa^2}R(\frac{1}{\kappa}, -A) - \frac{1}{\kappa}I$ (veja [47], página 9), onde $(-A_p)_\lambda$ é a aproximação de Yosida de $-A_p$ sobre $D(A_p)$, para todo $\lambda > 0$. Sendo assim, B_p é gerador de um semigrupo de contrações em $D(A_p)$.

   Antes de prosseguirmos, note que:

$$\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)} = \frac{1}{\kappa}\left\|\left(\frac{1}{\kappa}I + A_p\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \leq 1.$$

   Além disso, para $x \in D(A_q) = Im(A_p^{-1})$, então $A_p x = y \in Im(A_p) = D(A_q^{-1})$. Assim,

$$\begin{aligned}(\kappa A_p + I)^{-1}A_p x &= (\kappa A_p + A_p A_p^{-1})^{-1}A_p x \\ &= (\kappa I + A_p^{-1})^{-1}x \\ &= (\kappa A_p A_p^{-1} + A_p^{-1})^{-1}x \\ &= A_p(\kappa A_p + I)^{-1}x.\end{aligned}$$

   Logo, para $x \in D(A_q) = Im(A_p^{-1})$

$$\begin{aligned}\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A_p))} &= \sup_{x\in D(A_p), \|x\|_{D(A_p)}\neq 0} \frac{\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}x\right\|_{X_p}}{\|x\|_{D(A_p)}} \\ &\leq \sup_{x\in D(A_p), \|A_p x\|_{X_p}\neq 0} \frac{\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}A_p x\right\|_{X_p}}{\|A_p x\|_{X_p}} \\ &\leq \left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \leq 1.\end{aligned}$$

   Note ainda que $(I+\kappa A_p)(I+\kappa A_p)^{-1} = I_{X_p}$, onde I_{X_p} é o operador identidade sobre X_p. Assim,

$$A_p(I+\kappa A_p)^{-1} = \frac{1}{\kappa}I_{X_p} - \frac{1}{\kappa}(I+\kappa A_p)^{-1},$$

   portanto

$$\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \leq \frac{2}{\kappa},$$

   para todo $x \in X_q = D(A_p^{-1})$

   Da mesma forma

$$\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A_p))} \leq \frac{2}{\kappa},$$

   sabendo que $x \in D(A_p) \subset X_q = D(A_p^{-1})$

2. Como o operador A_q é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S_q(t)$ sobre X_q, então, pelo item 1., $B_q = \nu (I + \kappa A_q)^{-1} (-A_q)$ também é gerador de um semigrupo analítico $T_q(t)$ sobre $D(A_q) \hookrightarrow X_p$.

   Para $1 < p \leq q < \infty$, lembre-se que que $D(A_q) \hookrightarrow X_q$ e $D(A_p) \hookrightarrow X_p$, como $X_q \hookrightarrow X_p$, temos $D(A_q) \hookrightarrow D(A_p)$. Note que $S_q(t) = S_p(t)|_{X_q}$ e que $A_q = A_p|_{D(A_q)}$ (veja [20], [5]). Vamos mostrar que $B_q = B_p|_{D(A_q)}$.

   De fato, dado $x \in D(A_q)$

$$B_p x = \nu (I + \kappa A_p)^{-1} (-A_p)x = \nu (I + \kappa A_p)^{-1} (-A_q)x.$$

   Por outro lado, para todo $y \in X_q$

$$\begin{aligned}
(I + \kappa A_p)^{-1} y = \frac{1}{\kappa} R\left(\frac{1}{\kappa} : -A_p\right) y \quad &= \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^{-t\frac{1}{\kappa}} S_p(t)\, y\, dt \\
&= \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\kappa}t} S_q(t)\, y\, dt \\
&= \frac{1}{\kappa} R\left(\frac{1}{\kappa} : -A_q\right) y \\
&= (I + \kappa A_q)^{-1} y.
\end{aligned}$$

   Assim, para todo $x \in D(A_q)$, $B_p x = B_q x$, ou seja, $B_p|_{D(A_q)} = B_q$.

   Agora, como B_p e B_q são operadores lineares limitados em $D(A_p)$ e $D(A_q)$, respectivamente, temos que $T_p(t) = e^{B_p t}$ e $T_q(t) = e^{B_q t}$, $t \geq 0$.

   Portanto, para $x \in D(A_q)$

$$T_p(t)\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n (B_p)^n x}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t)^n (B_q)^n x}{n!} = T_q(t)\, x,$$

   ou seja, $T_p(t)|_{D(A_q)} = T_q(t)$.

3. [10] Seja $n > 1$ um número natural. Então
   Dado $1 < p < n$, então $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$, se $q \in [p, \frac{np}{n-p}]$, segue do Teorema de Imersão de Sobolev e por $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (veja [10], página 110).
   Para $p > n$ dado, então $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$, se $q \in [1, +\infty)$, segue do Teorema da desigualdade de Morrey (veja [10], página 122).
   Para $p = n$, então $D(A_p^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow X_q$, se $q \in [p, +\infty)$, veja [10], página 112.

4. De acordo com o Lema 2.2.1 em [23], demostraremos este item como segue.

   A função $F(\cdot)$ dada por

$$F(t, \psi, w) = -P_p(\left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi(s)ds + \gamma\psi(-r)\right) \cdot \nabla)w,$$

para $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathcal{B}_{V_p}$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in V_p$. Analisando os termos integrais que aparecem na definição das funções anteriores, parece razoável escolher espaços do tipo $\mathcal{B}_{V_q} = (C_r \times L^q(\rho; V_q))^n$, $q > 1$, $r > 0$, como espaços de fase para modelar o problema. No que segue, F_j representa a j-ésima coordenada do vetor $F \in \mathbb{R}^n$. Assuma que $\psi \in \mathcal{B}_{V_q}$ e $w \in V_q$ são suficientemente regulares de modo que $\operatorname{div}(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0$ e $\operatorname{div} w = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
F_j(t, \psi, w) &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds \frac{\partial}{\partial x_i} w_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma \psi_i(-r) \frac{\partial}{\partial x_i} w_j \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds w_j \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma \psi_i(-r) w_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds w_j + \gamma \psi_i(-r) w_j \right).
\end{aligned}$$

Por [5] (Lema 2.2, página 340), existem operadores limitados $U_k : \mathbf{L}_p(\Omega) \to X_p$ tais que $(A_p)^{\frac{1}{2}} U_k = P_p \frac{\partial}{\partial x_k}$, estes operadores aplicam X_q em X_p. Assim

$$F(t, \psi, w) = (A_p)^{\frac{1}{2}} \left(-\sum_{i=1}^{n} U_i \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds w_j + \gamma \psi_i(-r) w_j \right) \right)_j .$$

Defina por $\widetilde{F} : [0, a] \times \mathcal{B}_{V_q} \times V_q \to X_p$ por $\widetilde{F}(t, \psi, w) = (\widetilde{F}_1(t, \psi, w), \dots, \widetilde{F}_n(t, \psi, w))$, onde

$$\widetilde{F}_j(t, \psi, w) = -\sum_{i=1}^{n} U_i \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds w_j \right) - \sum_{i=1}^{n} (U_i \gamma \psi_i(-r) w_j) .$$

Seja $b = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\|U_i\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_p(\Omega), X_p)}\}$, e assuma que $\rho(\cdot)$ é uma função que verifica as condições (g-1)-(g-5). Para $(t, \psi, w), (t, \varphi, v) \in [0, a] \times \mathcal{B}_{V_q} \times V_q$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{F}_j(t, \psi, w) - \widetilde{F}_j(t, \varphi, v)\|_{X_p} \\
&= \|\widetilde{F}_j(t, \psi, w) - \widetilde{F}_j(t, \psi, v) + \widetilde{F}_j(t, \psi, v) - \widetilde{F}_j(t, \varphi, v)\|_{X_p} \\
&= \Bigg\| \sum_{i=1}^{n} \left[U_i \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds(w_j - v_j) \right) + U_i \gamma \psi_i(-r)(w_j - v_j) \right] \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} \left[U_i \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds v_j \right) + U_i \gamma \left((\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)) v_j \right) \right] \Bigg\|_{X_p} \\
&\le b \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds(w_j - v_j) + \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds v_j \right\|_{X_p} \\
&\qquad + b\gamma \sum_{i=1}^{n} \|(\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)) v_j + \psi_i(-r)(w_j - v_j)\|_{X_p} .
\end{aligned}$$

Agora, como $X_q \hookrightarrow X_p$ e $V_q \hookrightarrow X_q$, temos

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds(w_j - v_j) + \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds v_j \right\|_{X_p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds(w_j - v_j) \right\|_{X_p} + \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))dsv_j \right\|_{X_p} \\
&\leq \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds \right\|_{X_{2p}} \|w_j - v_j\|_{X_{2p}} + \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds \right\|_{X_{2p}} \|v_j\|_{X_{2p}} \\
&\leq C(\Omega) \left(\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds \right\|_{X_q} \|w_j - v_j\|_{V_q} + \left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds \right\|_{X_q} \|v_j\|_{V_q} \right),
\end{aligned}
$$

onde $C(\Omega) > 0$ é uma constante que depende de Ω, e $p = 2q$. Sendo q' o expoente conjugado de q e $C_\rho = \displaystyle\int_{-r}^{0} \rho(s)ds$ e assuma que

$$
C_{\alpha,\rho} = \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}} ds \right)^{\frac{1}{q'}} < \infty.
$$

Como

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds \right\|_{X_q}^{q} \\
&\quad = \left\| \int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)}{\rho(s)^{\frac{1}{q}}} \rho(s)^{\frac{1}{q}} \psi_i(s)ds \right\|_{X_q}^{q} \\
&\quad = \left\| \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}} ds \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(s)(\psi_i(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{X_q}^{q} \\
&\quad = \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}} ds \right)^{\frac{q}{q'}} \left\| \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(s)(\psi_i(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{X_q}^{q} \\
&\quad \leq C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{0} \rho(s)|\psi_i(s)|^q dsdx \\
&\quad = C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{-\infty}^{0} \rho(s) \int_{\Omega} |\psi_i(s)|^q dxds \\
&\quad = C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{-\infty}^{0} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \\
&\quad = C_{\alpha,\rho}^{q} \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds + \int_{-r}^{0} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \right) \\
&\quad \leq C_{\alpha,\rho}^{q} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} \int_{-r}^{0} \rho(s)ds + \int_{-\infty}^{-r} \alpha(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \right) \\
&\quad \leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \left(C_\rho \sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} + \int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right) \\
&\quad \leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right)^{\frac{q}{q}} \right) \\
&\quad \leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q} + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{q} \\
&\quad = C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)}^{q}.
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira mostra-se que

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))ds \right\|_{X_q} \leq C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)},$$

onde $C = \max\{C_\rho, 1, C(\Omega)\}$. Das estimativas anteriores segue que

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\,\psi_i(s)ds(w_j - v_j) + \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s))dsv_j \right\|_{X_p}$$
$$\leq C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|w_j - v_j\|_{V_q} + C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|v_j\|_{V_q}.$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned}
\|(\psi_i(-r) - &\varphi_i(-r))v_j + \psi_i(-r)(w_j - v_j)\|_{X_p} \\
&\leq \|(\psi_i(-r) - \varphi_i(-r))v_j\|_p + \|\psi_i(-r)(w_j - v_j)\|_{X_p} \\
&\leq \|\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)\|_q \|v_j\|_q + \|\psi_i(-r)\|_q \|w_j - v_j\|_{V_q} \\
&\leq C(\Omega)(\|\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)\|_{V_q} \|v_j\|_{V_q} + \|\psi_i(-r)\|_{V_q} \|w_j - v_j\|_{V_q}) \\
&\leq C(\Omega)\left(\|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|v_j\|_{V_q} + \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|w_j - v_j\|_{V_q}\right).
\end{aligned}$$

Destas estimativas anteriores obtemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{F}_j(t,&\psi, w) - \widetilde{F}_j(t, \varphi, v)\|_{X_p} \\
&\leq b \sum_{i=1}^{n} (C_{\alpha,\rho} C + \gamma) \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|w - v\|_{V_q} \\
&\qquad\qquad + b \sum_{i=1}^{n} (C_{\alpha,\rho} C + \gamma) \|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho;V_q)} \|v\|_{V_q} \\
&\leq bn(C_{\alpha,\rho} C + \gamma) \|\psi\|_{\mathcal{B}_{V_q}} \|w - v\|_{V_q} + bn(C_{\alpha,\rho} C + \gamma) \|\psi - \varphi\|_{\mathcal{B}_{X_q}} \|v\|_{V_q},
\end{aligned}$$

para $C = \max\{C_\rho, 1, C(\Omega)\}$, o que mostra que $\widetilde{F}$ satisfaz a condição de Lipschitz desejada, com $L^0_{\widetilde{F}}(R) = 0$ e

$$L^1_{\widetilde{F}}(R) = L^2_{\widetilde{F}}(R) = bn(C^q_{\alpha,\rho} C + \gamma)R.$$

5. Com no item anterior, demostraremos este item como segue.

   A função $F(\cdot)$ dada por

$$F(t, \psi, w) = -P_p(\left(\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi(s)ds + \gamma\psi(-r)\right) \cdot \nabla)w,$$

   para $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathcal{B}_{V_p}$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in V_p$. No que segue, F_j representa a j-ésima coordenada do vetor $F \in \mathbb{R}^n$, segue que

$$F_j(t, \psi, w) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\psi_i(s)ds \frac{\partial}{\partial x_i} w_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma\psi_i(-r) \frac{\partial}{\partial x_i} w_j$$

Assuma que $\rho(\cdot)$ é uma função que verifica as condições (g-1)-(g-5). Para $(t,\psi,w),(t,\varphi,v)\in[0,a]\times\mathcal{B}_{V_q}\times V_q$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|F_j(t,\psi,w)-F_j(t,\varphi,v)\|_{X_p}\\
&\quad=\|F_j(t,\psi,w)-F_j(t,\psi,v)+F_j(t,\psi,v)-F_j(t,\varphi,v)\|_{X_p}\\
&\quad=\left\|\sum_{i=1}^n\left[\left(\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)\right)+\gamma\psi_i(-r)\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)\right]\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{i=1}^n\left[\left(\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right)+\gamma\left(\psi_i(-r)-\varphi_i(-r)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right]\right\|_{X_p}\\
&\quad\le\sum_{i=1}^n\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)+\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right\|_{X_p}\\
&\qquad+\gamma\sum_{i=1}^n\left\|(\psi_i(-r)-\varphi_i(-r))\frac{\partial}{\partial x_i}v_j+\psi_i(-r)\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)\right\|_{X_p}.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)+\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right\|_{X_p}\\
&\le\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)\right\|_{X_p}+\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right\|_{X_p}\\
&\le\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\right\|_{X_{2p}}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(w_j-v_j)\right\|_{X_{2p}}\\
&\qquad\qquad+\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\right\|_{X_{2p}}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}v_j\right\|_{X_{2p}}\\
&\le\left(\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\right\|_{X_q}\|w_j-v_j\|_{V_q}+\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)(\psi_i(s)-\varphi_i(s))ds\right\|_{X_q}\|v_j\|_{V_q}\right),
\end{aligned}$$

onde $p=2q$. Sendo q' o expoente conjugado de q e $C_\rho=\displaystyle\int_{-r}^0\rho(s)ds$ e assuma que

$$C_{\alpha,\rho}=\left(\int_{-\infty}^0\frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}}ds\right)^{\frac{1}{q'}}<\infty.$$

Como

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{-\infty}^0\alpha(s)\psi_i(s)ds\right\|_{X_q}^q\\
&\quad=\left\|\int_{-\infty}^0\frac{\alpha(s)}{\rho(s)^{\frac{1}{q}}}\rho(s)^{\frac{1}{q}}\psi_i(s)ds\right\|_{X_q}^q\\
&\quad=\left\|\left(\int_{-\infty}^0\frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}}ds\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{-\infty}^0\rho(s)(\psi_i(s))^q ds\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{X_q}^q
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\alpha(s)^{q'}}{\rho(s)^{\frac{q'}{q}}} ds \right)^{\frac{q}{q'}} \left\| \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(s)(\psi_i(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{X_q}^{q} \\
&\leq C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{0} \rho(s)|\psi_i(s)|^q ds dx \\
&= C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{-\infty}^{0} \rho(s) \int_{\Omega} |\psi_i(s)|^q dx ds \\
&= C_{\alpha,\rho}^{q} \int_{-\infty}^{0} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \\
&= C_{\alpha,\rho}^{q} \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds + \int_{-r}^{0} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \right) \\
&\leq C_{\alpha,\rho}^{q} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} \int_{-r}^{0} \rho(s) ds + \int_{-\infty}^{-r} \alpha(s) \|\psi_i(s)\|_{X_q}^{q} ds \right) \\
&\leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \left(C_\rho \sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} + \int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right) \\
&\leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right)^{\frac{q}{q}} \right) \\
&\leq C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \left(\sup_{-r \leq s \leq 0} \|\psi_i(s)\|_{V_q} + \left(\int_{-\infty}^{-r} \rho(s) \|\psi_i(s)\|_{V_q}^{q} ds \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{q} \\
&= C(\Omega) C_{\alpha,\rho}^{q} \max\{C_\rho, 1\} \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)}^{q}.
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira mostra-se que

$$
\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s)) ds \right\|_{X_q} \leq C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)},
$$

onde $C = \max\{C_\rho, 1, C(\Omega)\}$. Das estimativas anteriores segue que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\, \psi_i(s) ds (w_j - v_j) + \int_{-\infty}^{0} \alpha(s)(\psi_i(s) - \varphi_i(s)) ds v_j \right\|_{X_p} \\
&\qquad \leq C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)} \|w_j - v_j\|_{V_q} + C_{\alpha,\rho} C \|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)} \|v_j\|_{V_q}.
\end{aligned}
$$

Ainda temos que

$$
\begin{aligned}
&\|(\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j + \psi_i(-r) \frac{\partial}{\partial x_i}(w_j - v_j)\|_{X_p} \\
&\qquad \leq \left\| (\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right\|_p + \left\| \psi_i(-r) \frac{\partial}{\partial x_i}(w_j - v_j) \right\|_{X_p} \\
&\qquad \leq \|\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)\|_{X_q} \|v_j\|_{V_q} + \|\psi_i(-r)\|_{X_q} \|w_j - v_j\|_{V_q} \\
&\qquad \leq C(\Omega)(\|\psi_i(-r) - \varphi_i(-r)\|_{V_q} \|v_j\|_{V_q} + \|\psi_i(-r)\|_{V_q} \|w_j - v_j\|_{V_q}) \\
&\qquad \leq C(\Omega) \left(\|\psi_i - \varphi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)} \|v_j\|_{V_q} + \|\psi_i\|_{C_r \times L^q(\rho; V_q)} \|w_j - v_j\|_{V_q} \right).
\end{aligned}
$$

Destas estimativas, obtemos finalmente que

$$
\|F_j(t, \psi, w) - F_j(t, \varphi, v)\|_{X_p}
$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(C_{\alpha,\rho}C+\gamma)\|\psi_i\|_{C_r\times L^q(\rho;V_q)}\|w-v\|_{V_q}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(C_{\alpha,\rho}C+\gamma)\|\psi_i-\varphi_i\|_{C_r\times L^q(\rho;V_q)}\|v\|_{V_q}$$
$$\leq n(C_{\alpha,\rho}C+\gamma)\|\psi\|_{\mathcal{B}_{V_q}}\|w-v\|_{V_q}+n(C_{\alpha,\rho}C+\gamma)\|\psi-\varphi\|_{\mathcal{B}_{X_q}}\|v\|_{V_q},$$

para $C=\max\{C_\rho,1,C(\Omega)\}$, o que mostra que F satisfaz a condição de Lipschitz desejada, com $L^0_{\widetilde{F}}(R)=0$ e

$$L^1_{\widetilde{F}}(R)=L^2_{\widetilde{F}}(R)=n(C^q_{\alpha,\rho}C+\gamma)R.$$

6. Da mesma forma que o item anterior, baseando-se no Lema 2.2.1 em [23], demostraremos este item como segue: A função

$$g(t,\psi)=P_p\int_{-\infty}^{0}\beta(s)\psi(s)ds,$$

para $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)\in\mathcal{B}_{V_p}$, $w=(w_1,\dots,w_n)\in V_p$, assuma que $\psi\in\mathcal{B}_{V_q}$ e $w\in V_q$ são suficientemente regulares de modo que $\operatorname{div}(\psi_1,\dots,\psi_n)=0$ e $\operatorname{div} w=0$.

Como nas estimativas anteriores, pode-se mostrar que $g(s,\cdot)$ é um operador linear limitado para cada $s\in[0,a]$ e que $\|g(s,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_{V_p},V_p)}\leq L_g$. De fato, seja p' é o expoente conjugado de p e

$$C_{\beta,\rho}=\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{\beta(s)^{p'}}{\rho(s)^{\frac{p'}{p}}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty.$$

Para $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{B}_{V_p}$, temos que

$$\|g(t,\psi_1)-g(t,\psi_2)\|^p_{X_p}$$
$$\leq C(\Omega)\|A_p^{\frac{1}{2}}\left(g(t,\psi_1)-g(t,\psi_2)\right)\|^p_{X_p}$$
$$\leq C(\Omega)\left\|\int_{-\infty}^{0}\beta(s)A_p^{\frac{1}{2}}(\psi_1(s)-\psi_2(s))ds\right\|^p_{X_p}$$
$$\leq C(\Omega)\left\|\int_{-\infty}^{0}\frac{\beta(s)}{\rho(s)^{\frac{1}{p}}}\rho(s)^{\frac{1}{p}}A_p^{\frac{1}{2}}(\psi_1(s)-\psi_2(s))ds\right\|^p_{X_p}$$
$$\leq C(\Omega)\left\|\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{\beta(s)^{p'}}{\rho(s)^{\frac{p'}{p}}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-\infty}^{0}\rho(s)\left(A_p^{\frac{1}{2}}(\psi_1(s)-\psi_2(s))\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right\|^p_{X_p}$$
$$\leq C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}\int_{\Omega}\int_{-\infty}^{0}\rho(s)|A_p^{\frac{1}{2}}\left(\psi_1(s)-\psi_2(s)\right)|^p dsdx$$
$$=C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}\int_{-\infty}^{0}\rho(s)\|A_p^{\frac{1}{2}}\left(\psi_1(s)-\psi_2(s)\right)\|^p_{X_p}ds$$
$$=C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}$$
$$\left(\int_{-\infty}^{-r}\rho(s)\|A_p^{\frac{1}{2}}\left(\psi_1(s)-\psi_2(s)\right)\|^p_{X_p}ds+\int_{-r}^{0}\rho(s)\|A_p^{\frac{1}{2}}\left(\psi_1(s)-\psi_2(s)\right)\|^p_{X_p}ds\right)$$

$$\leq C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}$$
$$\left(\sup_{-r\leq s\leq 0}\|A_p^{\frac{1}{2}}(\psi_1(s)-\psi_2(s))\|^p_{X_p}\int_{-r}^0\rho(s)ds+\int_{-\infty}^{-r}\rho(s)\|A_p^{\frac{1}{2}}(\psi_1(s)-\psi_2(s))\|^p_{X_p}ds\right)$$
$$\leq C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}\max\{C_\rho,1\}$$
$$\left(\sup_{-r\leq s\leq 0}\|\psi_1(s)-\psi_2(s)\|^p_{V_p}+\left(\int_{-\infty}^{-r}\rho(s)\|\psi_1(s)-\psi_2(s)\|^p_{V_p}ds\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$
$$\leq C(\Omega)C^p_{\beta,\rho}\max\{C_\rho,1\}\|\psi_1-\psi_2\|^p_{\mathcal{B}_{V_p}}.$$

Portanto,

$$\|g(t,\psi_1)-g(t,\psi_2)\|_{V_p}\leq C_{\beta,\rho}C\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathcal{B}_{V_p}},$$

onde $C=\max\{C_\rho,1,C(\Omega)\}$.

□

Observe que, do item 4 do Lema anterior, para $\infty>p>1$ e $p=2q$, existem funções $L^i_F\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $i=0,1,2$ e $\gamma_1\in(0,1)$ tais que

$$\begin{aligned}&\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}F(t,\psi_1,w_1)-(I+\kappa A_p)^{-1}F(s,\psi_2,w_2)\right\|_{D(A_p)}\\&=\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}(F(t,\psi_1,w_1)-F(s,\psi_2,w_2))\right\|_{X_p}\\&\leq\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}\|F(t,\psi_1,w_1)-F(s,\psi_2,w_2)\|_{X_p}\\&\leq\frac{2}{\kappa}\left(L^0_F(R)|t-s|^{\gamma_1}+L^1_F(R)\|\psi_1-\psi_2\|_{\mathcal{B}_{V_q}}+L^2_F(R)\|w_1-w_2\|_{V_q}\right),\end{aligned}$$

para todo $(\psi_1,\psi_2)\in B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})\times B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$, $w_1,w_2\in V_p$, e todos $t,s\in[0,a]$, onde $B_R(0,\mathcal{B}_{V_q})$ é a bola de centro $0\in\mathcal{B}_{V_q}$ e raio R.

Seja $n>1$ um número natural. Vamos assumir que $p\geq n$ e que $q=2p$.

De acordo com o que vimos anteriormente, podemos modelar o sistema (3.2) na forma abstrata

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=B_pu(t)+(I+\kappa A_p)^{-1}F(t,u_t,u(t))+(I+\kappa A_p)^{-1}g(t,u_t)\\ u_0=P_p\psi\in\mathcal{B}_{V_q}\end{cases}\tag{3.4}$$

em que as condições $1-6$ do Lema 3.1.1 são verificadas. Introduzimos agora os seguintes conceitos de solução para o sistema (3.4). Para simplificar, chame de $P_p\psi=\varphi$.

Definição 3.1.2. *Uma função $u:(-\infty,b]\to V_q$, $0<b\leq a$, é chamada de solução fraca do problema abstrato 3.4 em $[0,b]$, se $u_0=\varphi\in\mathcal{B}_{V_q}$, $u\in C([0,b];V_q)$, a função $s\mapsto(A_p)^{\frac{1}{2}}T(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)+\widetilde{F}(s,u_s,u(s))]$ pertence a $L^1([0,b];V_q)$ e*

$$u(t)=(A_p)^{\frac{1}{2}}T(t)(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)+\int_0^t(A_p)^{\frac{1}{2}}T(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)+\widetilde{F}(s,u_s,u(s))]ds,$$

para todos $t \in [0,b]$.

Definição 3.1.3. *Uma função* $u : (-\infty, b] \to D(A_p)$*,* $0 < b \leq a$*, é chamada de solução suave (mild solution) do problema de Cauchy abstrato 3.4 se* $u_0 = \varphi$ *e*

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)(I + \kappa A_p)^{-1}[g(s,u_s) + F(s,u_s,u(s))]ds, \qquad t \in [0,b].$$

Definição 3.1.4. *Uma função* $u : (-\infty, a] \to D(A_p)$*,* $0 < b \leq a$*, é chamada de solução clássica de 3.4 em* $[0,b]$*, se* $u_0 = \varphi$*,* $u \in C^1((0,a]; D(A_p))$ *e*

$$u'(t) = -B_p u(t) + (I + \kappa A_p)^{-1}\left[F(t,u_t,u(t)) + g(t,u_t)\right], \qquad t \in [0,b]$$

é satisfeita para cada $t \in (0,a]$.

Teorema 3.1.5. *Para* $\varphi \in \mathcal{B}_{V_q}$*, existe uma única solução fraca do problema em* $[0,a]$.

Prova. Das propriedades das funções $g(\cdot)$ e $\widetilde{F}(\cdot)$, podemos escolher R e $C(R)$ tais que $\left\|\widetilde{F}(t,\psi,w)\right\|_{X_p} < C(R)$, $\left\|(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(t,\psi)\right\|_{X_p} < C(R)$ e $\left\|(A_p)^{\frac{1}{2}} g(t,\psi)\right\|_{X_p} < C(R)$, para todo $t \in [0,R]$ e todo $(\psi,w) \in B_{R_1}\left(0,\mathcal{B}_{V_q}\right) \times B_{R_1}(0,V_q)$, com $R_1 = K_{a,V_q}R + \left(K_{a,V_q}H_{V_q} + M_{a,V_q}\right)\|\varphi\|_{\mathcal{B}_{V_q}}$.

Fixe $0 < b \leq a$ tal que

$$\left[\|\varphi(0)\|_{V_q} + \left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)} C(R)\right] \; b \leq R$$

e

$$\left[L_g(R_1)K_{a,V_q} + \left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}\left(L^1_{\widetilde{F}}(R_1) + L^2_{\widetilde{F}}(R_1)\right)\right] b < 1.$$

Seja $\mathcal{F} = \{u : (-\infty, b] \to V_q \;\; ; \;\; u \in C([0,b], V_q), \;\; u_0 = \varphi\}$, munido da métrica

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,b]} \|u(t) - v(t)\|_{V_q},$$

e o subconjunto

$$\mathcal{F}_R = \left\{ u \in \mathcal{F} : \sup_{t\in[0,a]} \|u(t) - \varphi(0)\|_{V_q} \leq R \right\}.$$

Sobre $\mathcal{F}_R$ definimos a função $\mathcal{T} : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{F}$ por

$$\mathcal{T}u(t) = \begin{cases} \varphi & \text{se} \quad t \in (-\infty, 0) \\ (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t)(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0) + \displaystyle\int_0^t (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1} & \\ \quad \left[(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s) - \widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right] ds & \text{se} \quad t \in [0,b]. \end{cases}$$

1. $\mathcal{T}u \in \mathcal{F}$ para cada $u \in \mathcal{F}_R$.

De fato, seja $u \in \mathcal{F}_R$. Para cada $s \in [0,b]$, (veja **espaços de fase abstratos** página 8, item **A**, subitem (c))

$$\begin{aligned}
\|u_s\|_{\mathcal{B}_{V_q}} &\leq K_{a,V_q} \sup_{\theta\in[0,s]} \|u(\theta)\|_{V_q} + M_{a,V_q} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{V_q}} \\
&\leq K_{a,V_q} \sup_{\theta\in[0,s]} \|u(\theta)-\varphi(0)\|_{V_q} + K_{a,V_q} \|\varphi(0)\|_{V_q} + M_{a,V_q} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{V_q}} \\
&\leq K_{a,V_q} R + K_{a,V_q} H_{V_q} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{V_q}} + M_{a,V_q} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{V_q}} \\
&\leq R_1,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que $\left\|\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right\|_{X_p} \leq C(R_1)$ e $\left\|(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s)\right\|_{X_p} \leq C(R_1)$, para todo $s \in [0,b]$.

Lembrando que $V_q = D\left(A_q^{\frac{1}{2}}\right)$ e aplicando o Lema 3.1.1, para $t \in [0,b)$ e $h > 0$ tais que $t+h \in [0,b]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}u(t+h) - \mathcal{T}u(t)\|_{V_q} \\
&\leq \left\|(A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t+h)\,(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0) - (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t)\,(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{V_q} \\
&\quad + \left\|\int_0^{t+h} (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t+h-s)\,(I+\kappa A_p)^{-\frac{1}{2}} \left[(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s) - \widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right] ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t} (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t-s)\,(I+\kappa A_p)^{-1} \left[(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s) - \widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right] ds\right\|_{V_q} \\
&= \left\|T_p(t+h)\,(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0) - (A_p)^{\frac{1}{2}} T_p(t)\,(A_p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{D(A_q)} \\
&\quad + \left\|\int_0^{t+h} T_p(t+h-s)\,(I+\kappa A_p)^{-\frac{1}{2}} \left[(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s) - \widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right] ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t} T_p(t-s)\,(I+\kappa A_p)^{-1} \left[(A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s,u_s) - \widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right] ds\right\|_{D(A_p)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\left\|(A_q)^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{D(A_q)}\\
&\quad+\left\|\int_0^t T_p(h)T_p(t-s)\left(I+\kappa A_p\right)^{-1}\left[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right]ds\right.\\
&\quad+\int_t^{t+h}T_p(h)T_p(t-s)\left(I+\kappa A_p\right)^{-1}\left[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right]ds\\
&\quad\left.-\int_0^t T_p(t-s)\left(I+\kappa A_p\right)^{-1}\left[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right]ds\right\|_{D(A_p)}\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}\\
&\quad+\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\int_0^t\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\left[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right]\right\|_{D(A_p)}ds\\
&\quad+\int_t^{t+h}\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\left[(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right]\right\|_{D(A_p)}ds\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}\\
&\quad+\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}\int_0^t\left\|(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right\|_{X_p}ds\\
&\quad+\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}\int_t^{t+h}\left\|(A_p)^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right\|_{X_p}ds\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}+2\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}C(R)\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}b\\
&\quad+2\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}C(R)h,
\end{aligned}
$$

o que prova a continuidade à direita de $t\in[0,b]$ pois $(T_p(t))$ e $(T_q(t))$ são semigrupos uniformemente contínuos em $D(A_p)$ e $D(A_q)$, respectivamente. Da mesma forma, pode-se mostrar a continuidade à esquerda para $t\in[0,b]$. Portanto $\mathcal{T}u\in C\left([0,b],V_q\right)$.

2. $\mathcal{T}\mathcal{F}_R\subseteq\mathcal{F}_R$ De fato, para $u\in\mathcal{F}_R$ e $t\in[0,b]$,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{T}u(t)-\varphi(0)\|_{V_q} &\leq \left\|T_p(t)A_q^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)-A_q^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{D(A_q)}\\
&\quad+\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}\int_0^t\left\|A_p^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)-\widetilde{F}(s,u_s,u(s))\right\|_{X_p}ds\\
&\leq\left[\|T_q(t)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}+2\left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_p)}C(R)\right]b\\
&\leq R.
\end{aligned}
$$

3. Mostraremos que $\mathcal{T}$ é uma contração em $\mathcal{F}_R$.

Sejam $u, v \in \mathcal{F}_R$ e $t \in [0, b]$, então

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{T}u(t) - \mathcal{T}v(t)\|_{V_q} \\
&\quad \leq \int_0^t \|T_p(t-s)\|_{\mathcal{L}(D(A_p))} \left\| (I + \kappa A_p)^{-1} A_p^{-\frac{1}{2}} \left(g(s, u_s) - g(s, v_s)\right) \right\|_{D(A_p)} ds \\
&\qquad + \int_0^t \|T_p(t-s)\|_{\mathcal{L}(D(A_p))} \left\| (I + \kappa A_p)^{-1} \left[\widetilde{F}(s, u_s, u(s)) - \widetilde{F}(s, v_s, v(s)) \right] \right\|_{D(A_p)} ds \\
&\quad \leq \int_0^t \left\| A_p^{\frac{1}{2}} \left(g(s, u_s) - g(s, v_s)\right) \right\|_{X_p} ds \\
&\qquad + \int_0^t \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \left\| \widetilde{F}(s, u_s, u(s)) - \widetilde{F}(s, v_s, v(s)) \right\|_{X_p} ds \\
&\quad \leq L_g(R_1) K_{a, V_q} \int_0^t \sup_{\theta \in [0,s]} \|u(\theta) - v(\theta)\|_{V_q} ds \\
&\qquad + \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \left(L^1_{\widetilde{F}}(R_1) + L^2_{\widetilde{F}}(R_1) \right) \int_0^t \sup_{\theta \in [0,s]} \|u(\theta) - v(\theta)\|_{V_q} ds \\
&\qquad \leq \left[L_g(R_1) K_{a, V_q} + \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \left(L^1_{\widetilde{F}}(R_1) + L^2_{\widetilde{F}}(R_1) \right) b \right] \ d(u, v).
\end{aligned}
$$

A existência e a unicidade de uma solução fraca para o sistema abstrato (3.4) sobre $[0, b]$, é agora uma consequência direta do princípio de ponto fixo para contrações.

Agora, seja $[0, b^*)$ o intervalo maximal de solução, ou seja, b^* é o tempo tal que $\|u(t)\|_{V_q}$ é finita quando $t \in [0, b^*)$, mas

$$
\lim_{t \to (b^*)^-} \|u(t)\|_{V_q} = \infty.
$$

Então para t,

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{V_q} \ &\leq \left\| T_p(t) A_P^{-\frac{1}{2}} \varphi(0) \right\|_{D(A_q)} \\
&\quad + \int_0^t \|T_p(t-s)\|_{D(A_p)} \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \left\| (A_p)^{-\frac{1}{2}} g(s, u_s) - \widetilde{F}(s, u_s, u(s)) \right\|_{X_p} \\
&\leq \|\varphi(0)\|_{V_q} + 2 \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} C(R_1) t.
\end{aligned}
$$

Fazendo $t \to (b^*)^-$, temos

$$
\lim_{t \to (b^*)^-} \|u(t)\|_{V_q} = \|\varphi(0)\|_{V_q} + 2 \left\| A_p (I + \kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} C(R_1) b^* < +\infty.
$$

Portanto, segue que $\|u(t)\|_{V_q}$ é limitado para todo $t \in [0, b^*]$.

Logo, podemos estender a solução u do problema abstrato (3.4) ao intervalo $t \in [0, a]$.

□

No que segue, sempre assumiremos que as hipóteses do Teorema 3.1.5 são verificadas e que $u(\cdot)$ é solução fraca de (3.4) em $[0,a]$. Defina a função $G:[0,a]\longrightarrow X_q$ por

$$G(s)=A_p^{-\frac{1}{2}}g(s,u_s)+\widetilde{F}(s,u_s,u(s))$$

e $R>0$, tal que $\|G(s)\|_{X_q}\leq R$ para todo $s\in[0,a]$.

Lema 3.1.6. *Se* $\varphi(0)\in V_q$ *então* $u\in C^{0,1}([0,a],V_q)$.

Prova. Se $t\in[0,a]$ e $h>0$ são tais que $t+h\leq a$, temos

$$\begin{aligned}
&\|u(t+h)-u(t)\|_{V_q}\\
&\leq \left\|T_p(t+h)A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)-T_p(t)A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{D(A_q)}+\left\|\int_0^{t+h}T_p(t+h-s)(I+\kappa A_p)^{-1}G(s)ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^t T(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}G(s)ds\right\|_{D(A_q)}\\
&\leq \left\|T_q(t)T_q(h)A_q^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)-T_q(t)A_q^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\|_{D(A_q)}+\left\|\int_0^t T_q(h)T_q(t-s)(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)ds\right.\\
&\qquad\left.+\int_t^{t+h}T_q(h)T_q(t-s)(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)ds-\int_0^t T_q(t-s)(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)ds\right\|_{D(A_q)}\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}+\left\|\int_0^t(T_q(h)-I)T_q(t-s)(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)ds\right.\\
&\qquad\left.+\int_t^{t+h}T_q(h)T_q(t-s)(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)ds\right\|_{D(A_q)}\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}+\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\int_0^t\left\|(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)\right\|_{D(A_q)}ds\\
&\qquad+\int_t^{t+h}\left\|(I+\kappa A_q)^{-1}G(s)\right\|_{D(A_q)}ds\\
&\leq \|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}\|\varphi(0)\|_{V_q}+\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_p))}\int_0^t\left\|A_q(I+\kappa A_q)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_q)}\|G(s)\|_{X_q)}ds\\
&\qquad+\int_t^{t+h}\left\|A_q(I+\kappa A_q)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_q)}\|G(s)\|_{X_q}ds\\
&\leq \left(\|\varphi(0)\|_{V_q}+2\left\|A_q(I+\kappa A_q)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_q)}aR\right)\|T_q(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_q))}+2\left\|A_q(I+\kappa A_q)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_q)}Rh.
\end{aligned}$$

Além disso, para $r=p,q$ temos

$$\begin{aligned}
\|B_r\|_{\mathcal{L}(D(A_r))} &= \left\|(I+\kappa A_r)^{-1}A_r\right\|_{\mathcal{L}(D(A_r))} \\
&= \sup_{x\in D(A_r),\|x\|_{D(A_r)}\neq 0} \frac{\left\|(I+\kappa A_r)^{-1}A_r x\right\|_{D(A_r)}}{\|x\|_{D(A_r)}} \\
&\leq \sup_{y\in X_r,\|y\|_{X_r}\neq 0} \frac{\left\|(I+\kappa A_r)^{-1}y\right\|_{D(A_r)}}{\|y\|_{X_r}} \\
&= \left\|A_r(I+\kappa A_r)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_r)} \\
&\leq \frac{2}{\kappa}
\end{aligned}$$

$$\|T_r(h)-I\|_{\mathcal{L}(D(A_r))} \leq h\,\|B_r\|_{\mathcal{L}(D(A_r))}\, e^{b\|B_r\|_{\mathcal{L}(D(A_r))}} \leq \frac{2}{\kappa} h e^{(\frac{2}{\kappa})a} \leq Ch.$$

Portanto

$$\|u(t+h)-u(t)\|_{V_q} \leq \left(C\,\|\varphi(0)\|_{V_q} + \frac{4}{\kappa}aCR + \frac{4}{\kappa}R\right)h,$$

o que implica que $u \in C^{0,1}\left([0,b], V_q\right)$, pois t e h são arbitrários.

□

Lema 3.1.7. *Assuma que as hipóteses do Lema 3.1.6 são satisfeitas e que existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $W(\cdot)\,\varphi \in C^{0,\gamma}\left([0,a];\mathcal{B}_{D(A_q)}\right)$. Então, a função $s \mapsto u_s$ pertence a $C^{0,\gamma}\left([0,a];\mathcal{B}_{V_q}\right)$.*

Prova. Considere a decomposição $A_p^{-\frac{1}{2}}u(\cdot) = A_p^{-\frac{1}{2}}x(\cdot) + A_p^{-\frac{1}{2}}y(\cdot)$, onde $x, y : (-\infty, a] \longrightarrow V_q$ são tais que:

$$A_p^{-\frac{1}{2}}y(t) = \begin{cases} T_p(t)A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(0) & t\in[0,a] \\ A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(t), & t\in[-\infty,0] \end{cases}$$

e

$$A_p^{-\frac{1}{2}}x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t T_p(t-\tau)\,(I+\kappa A_p)^{-1}\left((A_p)^{-\frac{1}{2}}\,g(\tau,u_\tau) + \widetilde{F}(\tau,u_\tau,u(\tau))\right)\,d\tau, & t\in[0,a] \\ 0, & t\in[-\infty,0]\,. \end{cases}$$

Da definição de $y(\cdot)$ temos que $A_p^{-\frac{1}{2}}y_t = W(t)\,A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi$, e que $u_t = x_t + y_t$ para cada $t \in [0,a]$.

Dos axiomas do espaço fase $\mathcal{B}_{D(A_q)}$, para todo $t\in[0,a)$ e $h>0$ tal que $t+h\leq a$ e pelo

Lema anterior, temos

$$
\begin{aligned}
&\left\| A_p^{-\frac{1}{2}} u_{t+h} - A_p^{-\frac{1}{2}} u_t \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} \\
&\quad \leq K_{D(A_q)}(t) \sup_{0\leq\theta\leq t} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} u(\theta+h) - A_p^{-\frac{1}{2}} u(\theta) \right\|_{D(A_q)} + M(t) \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} u_h - A_p^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} \\
&\quad \leq K_{D(A_q)}(t) \sup_{0\leq\theta\leq t} \|u(\theta+h) - u(\theta)\|_{V_q} + M(t) \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} u_h - A_p^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} \\
&\quad \leq K_{D(A_p)}(t) \sup_{0\leq\theta\leq t} \|u(\theta+h) - u(\theta)\|_{V_q} \\
&\qquad + M_{a,D(A_q)} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} x_h \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} + M_{a,D(A_q)} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} y_h - A_q^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_p)}} \\
&\quad \leq K_{D(A_q)}(t) C_1 h + M_{a,D(A_q)} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} x_h \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} + M_{a,D(A_q)} \left\| W(h) A_p^{-\frac{1}{2}} \varphi - A_p^{-\frac{1}{2}} \varphi \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_q)}} \\
&\quad \leq C_2 h^{\gamma} + M_{a,D(A_q)} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} x_h \right\|_{\mathcal{B}_{D(A_p)}} \\
&\quad \leq C_2 h^{\gamma} + M_{a,D(A_q)} K_{a,D(A_q)} \sup_{0\leq\theta\leq h} \left\| A_p^{-\frac{1}{2}} x(\theta) \right\|_{D(A_q)} \\
&\quad \leq C_2 h^{\gamma} + M_{a,D(A_q)} K_{a,D(A_q)} \sup_{0\leq\theta\leq h} \|x(\theta)\|_{V_q}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $\theta \in [0, h]$

$$
\begin{aligned}
\|x(\theta)\|_{V_q} &\leq \int_0^{\theta} \left\| A_p^{\frac{1}{2}} T_p(\theta-\tau)(I-\kappa A_p)^{-1} G(\tau) \right\|_{V_q} d\tau \\
&\leq \int_0^{\theta} \left\| T_p(\theta-\tau)(I-\kappa A_p)^{-1} G(\tau) \right\|_{D(A_p)} d\tau \\
&\leq \int_0^{\theta} \|T_p(\theta-\tau)\|_{\mathcal{L}(D(A_q)} \left\| (I-\kappa A_p)^{-1} G(\tau) \right\|_{D(A_p)} d\tau \\
&\leq \int_0^{\theta} \left\| A_q (I-\kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} \|G(\tau)\|_{X_p} d\tau \\
&\leq 2 \left\| A_q (I-\kappa A_p)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_p)} R\theta \\
&\leq \frac{4}{\kappa} R h.
\end{aligned}
$$

Logo, $\sup_{0\leq\theta\leq h} \|x(\theta)\|_{V_q} \leq \frac{4}{\kappa} R h.$
Portanto,

$$
\|u_{t+h} - u_t\|_{\mathcal{B}_{V_q}} \leq C_2 h^{\gamma} + \frac{4}{\kappa} M_{a,D(A_q)} K_{a,D(A_q)} R h \leq \left(C_2 + \frac{4}{\kappa} C_3 M_{a,D(A_q)} K_{a,D(A_q)} R \right) h^{\gamma},
$$

ou seja, a função $s \mapsto u_s$ pertence a $C^{\gamma}\left([0,a]\,;\mathcal{B}_{V_q}\right)$ para $\gamma \in (0,1)$. $\square$

Proposição 3.1.8. *Assuma as hipóteses do Lema 3.1.7, e que* $\varphi(0) \in D(A_q)$. *Então* $u(\cdot)$ *é solução suave (mild solution) do problema abstrato (3.4) em* $[0,a]$ *e* $u \in C^{0,\gamma}([0,a]\,;V_p))$ *para o mesmo valor* $\gamma \in (0,1)$ *encontrado no Lema 3.1.7.*

Prova. Como para $x \in D(A_p) = Im(A_p^{-1})$, então $A_p x = y \in Im(A_p) = D(A_p^{-1})$. Então,

$$(\kappa A_p + I)^{-1} A_p x = A_p (\kappa A_p + I)^{-1} x$$

Para, $x \in D(A_p)$, vamos mostrar que $A_p^{\frac{1}{2}} B_p^n A_p^{-\frac{1}{2}} x = B_p^n x, \quad n \in \mathbb{N}$. Para isso, vamos usar o princípio de indução.

1. para $n = 1$,
$$\begin{aligned} A_p^{\frac{1}{2}} B_p A_p^{-\frac{1}{2}} x &= A_p^{\frac{1}{2}} (A_p + I)^{-1} (-A_p) A_p^{-\frac{1}{2}} x \\ &= -A_p^{\frac{1}{2}} (A_p + I)^{-1} A_p^{\frac{1}{2}} x \\ &= -\tfrac{1}{\kappa} A_p^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{\frac{1}{\kappa} t} S_p(t) A_p^{\frac{1}{2}} x \, dt \right) \\ &= -\tfrac{1}{\kappa} A_p^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{\frac{1}{\kappa} t} A_p^{\frac{1}{2}} S_p(t) x \, dt \right) \\ &= -\tfrac{1}{\kappa} A_p^{\frac{1}{2}} A_p^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{\frac{1}{\kappa} t} S_p(t) x \, dt \right) \\ &= -\tfrac{1}{\kappa} A_p \left(\int_0^\infty e^{\frac{1}{\kappa} t} S_p(t) x \, dt \right) \\ &= (-A_p)(A_p + I)^{-1} x \\ &= (A_p + I)^{-1} (-A_p) x \\ &= (A_p + I)^{-1} (-A_p) x, \end{aligned}$$
onde $S_p(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador linear $(-A_p)$.

2. Para n, suponha que $A_p^{\frac{1}{2}} B_p^n A_p^{-\frac{1}{2}} x = B_p^n x$, então
$$\begin{aligned} A_p^{\frac{1}{2}} B_p^{n+1} A_p^{-\frac{1}{2}} x &= A_p^{\frac{1}{2}} \left((A_p + I)^{-1} (-A_p) \right)^{n+1} A_p^{-\frac{1}{2}} x \\ &= A_p^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\left((A_p + I)^{-1} (-A_p) \right) \cdots \left((A_p + I)^{-1} (-A_p) \right)}_{n+1-vezes} \right) A_q^{-\frac{1}{2}} x \\ &= A_p^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left((A_p + I)^{-1} (-A_p) \right) \cdots \left((A_p + I)^{-1} (-A_p) \right)}_{n-1-vezes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(A_p+I)^{-1}(-1)(A_p)^{\frac{1}{2}}\left[(A_p)^{\frac{1}{2}}(A_p+I)^{-1}(-A_p)A_p^{-\frac{1}{2}}x\right]\\
&= A_p^{\frac{1}{2}}B^{n-1}(A_p+I)^{-1}(-A_p)(A_p)^{-\frac{1}{2}}Bx\\
&= A_p^{\frac{1}{2}}B^{n}(A_p)^{-\frac{1}{2}}Bx\\
&= B_p^{n+1}x,
\end{aligned}$$

portanto $A_p^{\frac{1}{2}}B_p^nA_p^{-\frac{1}{2}}x = B_p^nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, sendo $\varphi(0) \in D(A_q)$.

$$\begin{aligned}
A_p^{\frac{1}{2}}T_p(t)A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(0) &= A_p^{\frac{1}{2}}e^{-B_pt}A_p^{-\frac{1}{2}}\varphi(0)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{A_p^{\frac{1}{2}}B_p^nA_p^{-\frac{1}{2}}t^n}{n!}\varphi(0)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{B_p^nt^n}{n!}\varphi(0)\\
&= e^{-B_pt}\varphi(0)\\
&= T_p(t)\varphi(0).
\end{aligned}$$

Agora, como $g(\tau,u_\tau)+F(\tau,u_\tau,u(\tau))) \in X_p$, então $(I-\kappa A_p)^{-1}\left(g(\tau,u_\tau)+F(\tau,u_\tau,u(\tau))\right) \in D(A_p)$. Então

$$A_p^{\frac{1}{2}}T(t)(I-\kappa A_p)^{-1}A_p^{-\frac{1}{2}}\left(g(\tau,u_\tau)+F(\tau,u_\tau,u(\tau))\right) = (I-\kappa A_p)^{-1}\left(g(\tau,u_\tau)+F(\tau,u_\tau,u(\tau))\right).$$

Portanto,

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}[g(s,u_s)+F(s,u_s,u(s))]ds. \qquad t \in [0,a], \tag{3.5}$$

Agora, note que, como $\varphi(0) \in D(A_p)$, então $T_p(t)\varphi(0) \in D(A_p)$ (Veja Teorema 1.5.1, item iii).

Ainda pelo Teorema 1.5.1, item ii, segue que $\int_0^t T_p(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}[g(s,u_s)+F(s,u_s,u(s))]ds \in D(A_p)$, pois $(I+\kappa A_p)^{-1}[g(s,u_s)+F(s,u_s,u(s))] \in D(A_p)$.

Portanto, $u(\cdot)$ é solução suave do problema de Cauchy abstrato 3.4 em $[0,a]$.

Mostraremos que $u(\cdot)$ é localmente Holder contínua com respeito a norma em $V_q = D(A_q)^{\frac{1}{2}}$. De fato, para $t \in [0,a)$ e $h > 0$ tal que $t+h \in [0,a]$, pelo axioma (A) de Espaços de Fase (página 8), vemos que

$$\begin{aligned}
\|u(t+h)-u(t)\|_{V_q} &\leq H_{V_p}\|u_{t+h}-u_t\|_{\mathcal{B}_{V_q}}\\
&\leq H_{V_q}\left(C_2+\tfrac{4}{\kappa}C_3M_{a,V_q}K_{a,V_q}R\right)h^\gamma
\end{aligned}$$

onde $H_{V_q} > 0$ é uma constante, $K_{V_q}, M_{V_q} : [0,\infty) \to [1,\infty)$, $K_{V_q}(\cdot)$ é contínua, $M_{V_q}(\cdot)$ é localmente limitada e H_{V_q}, K_{V_q}, M_{V_q} são independentes de $u(\cdot)$, a e $t \in [0,a]$. □

Teorema 3.1.9. *Seja* $\varphi \in \mathcal{B}_{V_q}$. *Se* $\varphi(0) \in D(A_q)$ *e existe* $\gamma \in (0,1)$ *tal que* $W(\cdot)\varphi \in C^{0,\gamma}\left([0,b];\mathcal{B}_{V_q}\right)$ *então* $u(\cdot)$ *é uma única solução clássica do problema abstrato* (3.4) *em* $[0,a]$.

Prova. Pelo Lema 3.1.7, temos que existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $u_s \in C^{0,\gamma}\left([0,a];\mathcal{B}_{V_q}\right)$. Pela Proposição 3.1.8 , temos que $u \in C^{0,\gamma}([0,a];V_q)$.

Portanto, pelas propriedades de $g(\cdot)$ e $F(\cdot)$, existe $\delta \in (0,1)$ com $\delta = \min\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\}$ tal que $(I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(\cdot) \in C^{\delta}([0,a];D(A_p))$, onde $(I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(s) = (I+\kappa A_p)^{-1}[g(s,u_s)+F(s,u_s,u(s))]$. Então, como u em (3.5) da seguinte forma

$$u(t) = T_p(t)\varphi(0) + \int_0^t T_p(t-s)(I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(s)ds, \qquad t \in [0,a].$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\|(I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(s)\right\|_{D(A_p)} &\leq \left\|A_p(I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(s)\right\|_{X_p}\\ &\leq C\left\|\overline{G}(s)\right\|_{X_p}\\ &\leq \widetilde{C}s^{\delta},\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{G}(s) = (I+\kappa A_p)^{-1}\overline{G}(s) \in C^{0,\delta}([0,a];D(A_p))$. A prova de existência estará completa ao aplicarmos o Teorema 1.2.17.

□

Proposição 3.1.10. *Sejam* $\infty > p > 1$, $q = 2p$ *e* $\varphi \in \mathcal{B}_{V_q}$, *então as seguintes propriedades são verificadas:*

1. *Existe uma única solução fraca* $u \in C^0([0,a],V_q)$ *de* (3.4) *em* $[0,a]$.

2. *Se* $\varphi(0) \in V_q$, *então* u *é Lipschitziana.*

3. *Se* $\varphi(0) \in D(A_q)$ *e existe* $\gamma \in (0,1)$ *tal que* $W(\cdot)\varphi \in C^{0,\gamma}\left([0,a],\mathcal{B}_{D(A_q)}\right)$ *então a função* $s \mapsto u_s \in C^{0,\gamma}\left([0,a],\mathcal{B}_{V_q}\right)$ *e* $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ *para cada* $t \in [0,a]$.

4. *Se* $\varphi(0) \in D(A_q)$ *e existe* $\gamma \in (0,1)$ *tal que* $W(\cdot)\varphi \in C^{0,\gamma}\left([0,a],\mathcal{B}_{D(A_q)}\right)$ *então a função* $u(\cdot)$ *é solução clássica de* (3.4) *em* $[0,a]$ *tal que,* $u \in C^1([0,a]\ V_q)\bigcap C\left([0,a],H_0^1(\Omega)\cap W^2(\Omega)\right)$, $u \in C^{0,\gamma}\left([0,a],H_0^1(\Omega)\right)$ *e* $u(\cdot)$ *satisfaz* (3.1) *para quase todo* $(t,\xi) \in (-\infty,a]\times\Omega$.

Para introduzir a pressão hidrostatica p observe que, para u solução clássica do problema abstrato (3.4), temos que: $u \in C^1((0,a];V_p)\cap C((0,a];[D(A_q)])$ e

$$u'(t) = B_p u(t) + \overline{F}(t,u_t,u(t)) + \overline{g}(t,u_t), \qquad t \in [0,a]$$

é satisfeita para cada $t \in (0, a]$. Mais ainda

$$u'(t) = A_p(I - \kappa A_p)^{-1}u(t) - P_p(I - \kappa A_p)^{-1}F(t, u_t, u(t)) - P_p(I - \kappa A_p)^{-1}g(t, u_t)$$

é satisfeita para cada $t \in (0, a]$.

Interpretando A_p como $P_p\Delta$, e o operador P_p como o operador estendido $P_p : D'(\Omega) \longrightarrow D'_\sigma(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \mathrm{div} u = 0\}$, temos que:

$$P_p\left(u'(t) - \Delta(I - \kappa A_p)^{-1}u(t) - (I - \kappa A_p)^{-1}F(t, u_t, u(t)) - (I - \kappa A_p)^{-1}g(t, u_t)\right) = 0,$$

$t \in [0, a]$. Deste modo, pode-se recuperar o termor da pressão ∇p pelo Lema (1.4.3).

Capítulo 4

Existência de soluções para uma equação de Kelvin-Voigt com retardo limitado

Resumo do capítulo: Desejamos estabelecer a existência e unicidade de solução em dimensão 2 e 3, para o sistema equações do tipo Kelvin-Voigt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + ((F(t,u_t))\cdot\nabla)\,u(t,x) + \nabla p = f(t) + g(t,u_t)$$

sujeito a condições iniciais, de retardo, de contorno e de divergência nula. Provaremos que a solução forte define um conjunto absorvente. A partir de uma estimativa de energia para a solução fraca, mostraremos que qualquer solução fraca que satisfaz esta estimativa de energia, converge para a solução estacionária quando $t \to \infty$.

4.1 Formulação do Problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ um domínio limitado com fronteira Γ. Considere o seguinte sistema de equações do tipo Kelvin-Voigt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + ((F(u,u_t))\cdot\nabla)\,u(t,x) & \\ \qquad\qquad\qquad + \nabla p = f(t) + g(t,u_t) & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u^0(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u_0(t,x) = \varphi(x,t) & \text{em} \quad (-h,0)\times\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

onde u representa o campo de velocidades, p a pressão hidrostática, f é a força externa sem retardo, g é outra força externa com alguma característica hereditária, u^0 é velocidade inicial, φ é o dado inicial com alguma característica hereditária, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $\kappa > 0$ é o coeficiente que caracteriza as propriedades elásticas do fluido Kelvin-Voigt em questão.

Sendo h um número positivo fixado, por u_t denotaremos a função definida em $(-h, 0)$

$$u_t(s) = u(t+s), \quad s \in (-h, 0).$$

Vamos assumir que a força externa

$$g : [0, T] \times C^0([-h, 0], V) \to L^2(\Omega)$$

satisfaz as seguintes hipóteses (H1)-(H5) (descritas no primeiro capítulo), para $Y = \mathbf{L}^2(\Omega)$ e $X = V$.

Além disso, $F(t, \psi) = \psi(-r(t))$ onde $r \in C^1([0, \infty], [0, h])$, $r(t) \geq 0$ e $r'(t) \leq \tau* < 1$, para todo $t > 0$. Observe que $F(t, u_t) = u_t(-r(t)) = u(t - r(t))$.

O problema em análise é o seguinte:

Dados $u^0 \in V$, $\varphi \in L^2(-h, 0; V)$, $f \in L^2(0, T; V^*)$ e g verifica as propriedades antes definidas, desejamos encontrar $u \in L^2(-h, T; V) \cap L^\infty(0, T; V)$ tal que $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0, T; V)$, e

$$\begin{cases} \dfrac{d(u, v)}{dt} + \kappa \dfrac{d(\nabla u, \nabla v)}{dt} & +\nu(\nabla u, \nabla v) + b(F(t, u_t), u(t), v) \\ & = \langle f(t), v\rangle + \langle g(t, u_t), v\rangle, v \in V \\ u(0) = u^0 & \\ u_0(t) = \varphi(t) & t \in (-h, 0), \end{cases} \tag{4.2}$$

Como $u \in C^0([0, T]; V)$, a igualdade $u(0) = \varphi_0$ faz sentido.

De acordo com as definições dadas no Capítulo 1, o problema (4.2) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + \kappa A \frac{du(t)}{dt} + \nu A u(t) + B(F(t, u_t), u(t)) = f(t) + g(t, u_t), \qquad & t \geq 0 \\ u(0) = u^0, \qquad & \\ u_0(t) = \phi(t), \qquad & t \in (-h, 0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Definição 4.1.1. *Sejam $u^0 \in V$, $\varphi \in L^2(-h, 0; V)$, $f \in L^2(0, T; V^*)$, F e g verificam as propriedades antes definidas. Uma função mensurável $u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ é dita uma solução fraca para o problema (4.1) em $[0, T] \times \Omega$, se:*

1. $u \in L^2(-h,T;V) \cap L^\infty(0,T;V)$;

2. u satisfaz (4.2)

4.2 Existência de solução

Considere o conjunto $\{w_j\}$, de modo que $\{w_j\}$ seja ortonormal em V munido da norma $\|\cdot\|_V^2 = \|\cdot\|^2 + \kappa\,|||\cdot|||^2$.

Defina o seguinte problema aproximado de ordem $k \geq 1$:

Encontrar $u^k : [0,T] \to V$, da forma $u^k(t) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) w_i$, onde $\gamma_{ik}(t)$ são tais que

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(u^k, w_j\right)_V}{dt} + \nu\left(\left(u^k, w_j\right)\right) + b\left(F\left(t, u_t^k\right), u^k(t), w_j\right) \\ \qquad\qquad = \langle f(t), w_j\rangle + \left\langle g\left(t, u_t^k\right), w_j\right\rangle \\ (u^0)^k = P_{V_k} u^0 \\ u_0^k(t) = P_{V_k}\varphi(t) \qquad t \in (-h,0), \end{cases} \tag{4.4}$$

para cada $1 \leq j \leq k$; onde P_{V_k} é a projeção ortogonal de V em $V_k = [w_1, \cdots, w_k]$.

Então (4.4) é um sistema de equações diferenciais funcionais nas funções $\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{kk}$. Substituindo $u^k(t) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) w_i$ em (4.4) , obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}\gamma_{ik}(t)\,(w_i, w_j)_V + \nu \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t)\,((w_i, w_j)) + \sum_{i,l=1}^{k} \gamma_{ik}(t - r(t))\gamma_{lk}(t) b(w_i, w_l, w_j) = \langle f(t), w_j\rangle + \left\langle g\left(t, u_t^k\right), w_j\right\rangle$$

para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Escrevendo a equação acima na forma matricial, e levando em conta que

$$(w_i, w_j)_V = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\gamma_{1k}(t) \\ \frac{d}{dt}\gamma_{2k}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\gamma_{kk}(t) \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t)\,((w_i, w_1)) \\ \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t)\,((w_i, w_2)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t)\,((w_i, w_k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i,l=1}^{k} \gamma_{ik}(t - r(t))\gamma_{lk}(t) b(w_i, w_l, w_1) \\ \sum_{i,l=1}^{k} \gamma_{ik}(t - r(t))\gamma_{lk}(t) b(w_i, w_l, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{i,l=1}^{k} \gamma_{ik}(t - r(t))\gamma_{l,k}(t) b(w_i, w_l, w_k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1 \rangle \\ \langle f(t), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), w_k \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle g(t, u_t^k), w_1 \rangle \\ \langle g(t, u_t^k), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle g(t, u_t^k), w_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo em forma simplificada

$$\frac{d\Gamma_k(t)}{dt} = \Phi_1(\Gamma_k(t)) + \Phi_2(\Gamma_k(t-r(t)), \Gamma_k(t)) + \Phi_3(f(t)) + \Phi_4\left(g\left(t, u_t^k\right)\right),$$

onde as funções Φ_1, Φ_2, Φ_3 e Φ_4 são funções vetorias definidas como sugere a equação matricial, e $\Gamma_k(t) = (\gamma_{1k}(t), \ldots, \gamma_{kk}(t))$.

Considere $\|\cdot\|_k$ a norma em $\mathbb{R}^k$, vamos mostrar que $\Phi_i, (i = 1, \ldots, 4)$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\left\|\Phi_1(\Gamma_k(t)) - \Phi_1\left(\overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k \leq C_1 \left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k,$

2. $\left\|\Phi_2(\Gamma_k(t-r(t)), \Gamma_k(t)) - \Phi_2\left(\overline{\Gamma}_k(t-r(t)), \overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k$

   $\leq C_2 \left\|\Gamma_k(t-r(t)) - \overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k \|\Gamma_k(t)\|_k + C_2 \left\|\overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k \left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k,$

3. $\|\Phi_3(f)\|_k \leq C_3 \|f(t)\|_{V^*},$

4. $\left\|\Phi_4\left(g\left(t, \xi_t^k\right)\right) - \Phi_4\left(g\left(t, \eta_t^k\right)\right)\right\|_k \leq C_4 \left\|g\left(t, \xi_t^k\right) - g\left(t, \eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)},$

com $\left\|\xi^k(s) - \eta^k(s)\right\|_V \leq C_5 \left\|\Gamma_k(s) - \overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k$.

Lembre-se que podemos considerar $\|\cdot\|_k$ como a norma da soma (devido à equivalência de normas), e $C_i > 0$ são constantes.

De fato,

1. Dadas $\Gamma_k(t), \overline{\Gamma}_k(t)$ em $\mathbb{R}^k$, temos

   $$\left\|\Phi_1(\Gamma_k(t)) - \Phi_1\left(\overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k \leq \nu \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left|\gamma_{i,k}(t) - \overline{\gamma}_{i,k}(t)\right| |((w_i, w_j))| \right)$$

   $$\leq \nu \left(\sum_{j=1}^{k} \max_{1 \leq i \leq k} |((w_i, w_j))| \right) \sum_{i=1}^{k} |\gamma_{ik}(t) - \overline{\gamma}_{ik}(t)| \leq C_1(\nu, k) \left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k.$$

2. $\left\|\Phi_2\left(\Gamma_k(t-r(t)),\Gamma_k(t)\right)-\Phi_2\left(\overline{\Gamma}_k(t-r(t)),\overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left|\sum_{i,l=1}^{k}\gamma_{i,k}(t-r(t))\gamma_{l,k}(t)b\left(w_i,w_l,w_j\right)-\sum_{i,l=1}^{k}\overline{\gamma}_{i,k}(t-r(t))\overline{\gamma}_{l,k}(t)b\left(w_i,w_l,w_j\right)\right|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k}\max_{1\leq i\leq k}\left|b\left(w_i,w_l,w_j\right)\right|\right)\left|\sum_{i,l=1}^{k}\gamma_{ik}(t-r(t))\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\overline{\gamma}_{lk}(t)\right|$$

$$\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left(\left|\gamma_{ik}(t-r(t))\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\overline{\gamma}_{lk}(t)\right|\right)$$

$$\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|\gamma_{ik}(t-r(t))\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{i,k}(t-r(t))\gamma_{lk}(t)\right|$$

$$+\,C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\overline{\gamma}_{lk}(t)\right|$$

$$\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left(\left|\gamma_{ik}(t-r(t))-\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right|\left|\gamma_{lk}(t)\right|+\left|\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{lk}(t)\right|\left|\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right|\right)$$

$$\leq C_2(k)\left[\sum_{i,l=1}^{k}\left|\gamma_{ik}(t-r(t))-\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right|\right]\sum_{l=1}^{k}\left|\gamma_{lk}(t)\right|$$

$$+\,C_2(k)\left|\gamma_{lk}(t)-\overline{\gamma}_{lk}(t)\right|\sum_{i=1}^{k}\left|\overline{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right|$$

$$\leq C_2(k)\left\|\Gamma_k(t-r(t))-\overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k\left\|\Gamma_k(t)\right\|_k+C_2(k)\left\|\overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k.$$

3. $\left\|\Phi_3\left(f_1\right)\right\|_k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\langle f_1(t),w_j\rangle\right|\leq\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|w_j\right\|_V\right)\left\|f_1(t)\right\|_{V*}=C_3(k)\left\|f_1(t)\right\|_{V^*}.$

4. $\left\|\Phi_4\left(g\left(t,\xi_t^k\right)\right)-\Phi_4\left(g\left(t,\eta_t^k\right)\right)\right\|_k\leq\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right),w_j\right\rangle\right|$

$$\leq\left(\sum_{j=1}^{k}\left\|w_j\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C_4(k)\left\|g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Note ainda que se $\Gamma_k(t)=(\gamma_{lk}(t),\ldots,\gamma_{kk}(t))=0$, então

$$u^k(t)=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{jk}(t)w_j=0.$$

Neste caso,

$$g(t,0)=0,\ \Phi_1(0)=0,\ \Phi_2(0,0)=0 \text{ e } \Phi_4(0)=0.$$

Além disso, considerando $w=(w_1,\ldots,w_k)$, onde os w_j $(j=1,\ldots,k)$ pertencem a base $\{w_j\}$ de V, e $\xi^k,\eta^k\in V_k$, temos que

$$\xi^k\left(t\right)=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{jk}(t)w_j \quad \text{e} \quad \eta^k\left(t\right)=\sum_{j=1}^{k}\overline{\gamma}_{jk}(t)w_j.$$

Então,

$$\left\|\xi^k(t)-\eta^k(t)\right\|_V^2=\left\|\xi^k(t)-\eta^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\nabla\xi^k(t)-\nabla\eta^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)w_j-\overline{\gamma}_{jk}(t)w_j\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)\nabla w_j-\overline{\gamma}_{jk}(t)\nabla w_j\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$=\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)-\overline{\gamma}_{jk}(t)\right)w_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)-\overline{\gamma}_{jk}(t)\right)\nabla w_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$=\left\|\left\langle\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s),w\right\rangle\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\left\langle\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s),\nabla w\right\rangle\right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq\int_\Omega\left\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k^2\|w\|_k^2\,dx+\kappa\int_\Omega\left\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k^2\|\nabla w\|_k^2\,dx$$

$$\leq\left\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k^2\int_\Omega\|w\|_k^2+\kappa\|\nabla w\|_k^2\,dx$$

$$=\left\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k^2\|w\|_V^2$$

$$=\left\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k^2\sum_{j=1}^{k}\|w_j\|_V^2$$

$$\leq C_5(k)\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k.$$

Na busca de solução para o sistema

$$\begin{cases}\dfrac{d\Gamma_k(t)}{dt}=\Phi_1\left(\Gamma_k(t)\right)+\Phi_2\left(\Gamma_k(t-r(t)),\Gamma_k(t)\right)\quad+\Phi_3\left(f(t)\right)+\Phi_4\left(g(t,u_t^k)\right)\\ \Gamma_k(0)=(u^0)^k\\ \Gamma_k(s)=\varphi_k(s)=P_{V_k}\varphi(s)\qquad\qquad s\in(-h,0)\,,\end{cases}$$

procuramos solução para a equação integral

$$\Gamma_k(t)=\begin{cases}\Gamma_k(0)+\displaystyle\int_0^t\Phi_1\left(\Gamma_s(t)\right)\,ds+\int_0^t\Phi_2\left(\Gamma_k(s-r(s)),\Gamma_k(s)\right)\,ds\\ \qquad\qquad\qquad\qquad+\displaystyle\int_0^t\Phi_3\left(f(s)\right)\,ds+\int_0^t\Phi_1\left(g(s,u_s^k)\right)\,ds\\ (u^0)^k\\ \varphi_k(s)\qquad\qquad s\in(-h,0)\,.\end{cases}\tag{4.5}$$

Teorema 4.2.1. *Sejam* $(u^0)^k=(\gamma_{1k}(0),\cdots,\gamma_{kk}(0))\in\mathbb{R}^k$, $\Gamma_k\in L^2\left(0,T;\mathbb{R}^k\right)$ $g:[0,T]\times C\left([0,T],\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^k$ *satisfazendo as hipóteses (H3) e (H4). Assumindo* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *e* Φ_4 *como acima, temos que*

(i) *existe $t_* \in [0,T]$ tal que o problema*

$$\begin{cases} \Gamma_k(t) = (u^0)^k + \displaystyle\int_0^t \Phi_1\left(\Gamma_k(s)\right)\,ds + \int_0^t \Phi_2\left(\Gamma_k(s-r(s)),\Gamma_k(s)\right)\,ds \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \Phi_3\left(f(s)\right)\,ds + \int_0^t \Phi_1\left(g(s,u_s^k)\right)\,ds \\ \Gamma_k(t) = \varphi_k(t) \qquad t \in (-h,0) \end{cases}$$

possui uma única solução para $t \in [0,t_*]$.

(ii) *Suponha que existe uma constante $c > 0$, independente de t, tal que se $t_* \in (0,T]$ é tal que existe uma solução $\Gamma_k(t)$ para (4.5), então*

$$\sup_{0 \le t \le t_*} \|\Gamma_k(t)\|_k \le c.$$

Nestas condições, existe uma solução $\Gamma_k \in W^{1,2}\left([0,T],\mathbb{R}^k\right)$ para (4.5) com $t_* = T$.

Prova. A demonstração desse resultado é idêntica a do Teorema 3.4.3 em [23] página 52. $\square$

Teorema 4.2.2. *Assuma $u^0 \in V$, $\varphi \in L^2(-h,0;V)$, $f \in L^2(0,T;V^*)$ e que $g : [0,T] \times C([-h,0],V) \to L^2(\Omega)$ satisfaz as hipóteses (H1)-(H4). Então, para cada $T > 0$ fixo, existe uma única solução fraca u para o problema (4.3) tal que $u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(-h,T;V)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;V)$.*

Prova. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para mostrar a existência de solução fraca. Considere um conjunto $\{w_j\} \subset \mathcal{V}$ ortonormal e completo em V munido da norma $\|\cdot\|_V$.

Queremos encontrar $u^k(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) w_i$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(u^k, w_j\right)_V + \nu\left(\left(u^k, w_j\right)\right) + \quad b\left(F\left(t,u_t^k\right), u^k(t), w_j\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \langle f(t), w_j\rangle + \left\langle g\left(t,u_t^k\right), w_j\right\rangle, \\ (u^0)^k = P_{V_k} u^0 \\ u^k(t) = P_{V_k}\varphi(t) \qquad\qquad\qquad t \in (-h,0), \end{cases} \tag{4.6}$$

onde P_{V_k} é a projeção ortogonal de V em V_k.

Pelo Teorema anterior, concluimos que o problema (4.6) possui uma única solução maximal $u^k(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) w_i$ definida no intervalo $[0,t_k)$ com $0 < t_k \le T$.

Das estimativas *a priori* a seguir, concluiremos que $t_k = T$.

Voltando à primeira equação em (4.6), multiplicando por $\gamma_{jk}(t)$ e somando de $j = 1$ até $j = k$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|u^k(t)\right\|^2 + \kappa\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2\right) + \nu\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 = \left\langle f(t), u^k(t)\right\rangle + \left\langle g(t, u^k_t), u^k(t)\right\rangle, \tag{4.7}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + \nu\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 = \left\langle f(t), u^k(t)\right\rangle + \left\langle g(t, u^k_t), u^k(t)\right\rangle. \tag{4.8}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + \nu\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 \leq \|f(t)\|_{V^*}\left\|u^k(t)\right\|_V + \left\|g(t, u^k_t)\right\|\left\|u^k(t)\right\|.$$

Integrando em t, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu\int_0^t\left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds \leq \left\|u^k(0)\right\|_V^2 &+ 2\int_0^t\|f(s)\|_{V^*}\left\|u^k(s)\right\|_V ds\\ &+2\int_0^t\left\|g(s, u^k_s)\right\|\left\|u^k(s)\right\| ds.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young para $q = 2 = q'$,

$$\begin{aligned}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu\int_0^t\left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds \leq \left\|u^k(0)\right\|_V^2 &+ \int_0^t\|f(s)\|_{V^*}^2 ds + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\\ &+ \int_0^t\left\|g(s, u^k_s)\right\|\left\|u^k(s)\right\| ds.\end{aligned}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Yuong para $q = 2 = q'$ e $\epsilon = C_g$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu\int_0^t\left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds \leq \left\|u^k(0)\right\|_V^2 &+ \int_0^t\|f(s)\|_{V^*}^2 ds + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\\ &+\frac{1}{C_g}\int_0^t\left\|g(s, u^k_s)\right\|^2 ds + C_g\int_0^t\left\|u^k(s)\right\|^2 ds.\end{aligned}$$

Das hipóteses (H1) e (H4) sobre g, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_g}\int_0^t\left\|g(s, u^k_s)\right\|^2 ds \leq \frac{1}{C_g}C_g\int_{-h}^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds = \int_{-h}^0\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\\ + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds \leq \int_{-h}^0\left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2 ds + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu\int_0^t\left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds &\leq \|u^k(0)\|_V^2 + \int_0^t\|f(s)\|_{V^*}^2 ds + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\\ &+ \int_{-h}^0\left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2 ds + \int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds + C_g\int_0^t\left\|u^k(s)\right\|^2 ds.\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_V$

$$\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds \leq \left\|u^k(0)\right\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds \quad + \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2 ds$$
$$+(2 + C_g) \int_0^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\left\|u^k(t)\right\|_V^2 \quad +2\nu \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds$$
$$\leq \left(\left\|u^k(0)\right\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \, ds + \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2 ds\right)(1 + (2 + 4C_g)t)\, e^{(2+4C_g)t}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Sabendo que

$$f \in L^2\left(0, T; V^*\right)$$

$$\varphi \in L^2\left(-h, 0; V\right)$$

$$u^0 \in V \text{ e } \left\|(u^0)^k\right\| = \left\|P_{V_k} u^0\right\| \leq \left\|u^0\right\|_V,$$

temos que

$$\left\|u^k(t)\right\|_V^2 + \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|^2 ds \leq C_2,$$

para todo $0 \leq t \leq T$, onde $C_2 > 0$ é uma constante, independente de t e de k.

Portanto,

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty\left(0, T; V\right)$$

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty\left(0, T; V_{|||\cdot|||}\right)$$

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2\left(-h, T; V\right)$$

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2\left(-h, T; V_{|||\cdot|||}\right)$$

Em particular,

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right),$$

pois $\left\|u^k\right\|^2 \leq \left\|u^k\right\|_V^2$.

Das estimativas acima, segue que

$$F\left(\cdot, u^k\right) = u^k\left(\cdot - r(\cdot)\right) \in L^2\left(0, T; V\right),$$

independentemente de k.

Agora, vamos mostrar que $\dfrac{du^k}{dt} \in L^2(0,T;V)$. De fato, voltando a primeira equação em (4.6), multiplicando por $\dfrac{d\gamma_{jk}}{dt}$ e somando em $j=1$ até $j=k$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|^2+\kappa\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|^2\right)+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 \quad &+b\left(F\left(t,u^k\right),u^k,\ \frac{du^k}{dt}\right)\\ &=\left\langle f(t),\frac{du^k}{dt}\right\rangle+\left\langle g(t,u_t^k),\frac{du^k}{dt}\right\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 \quad &+b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\tfrac{du^k}{dt}\right)\\ &=\left\langle f(t),\frac{du^k}{dt}\right\rangle+\left\langle g(t,u_t^k),\frac{du^k}{dt}\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Como pela desigualdade de Holder

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\frac{du^k}{dt}\right)\right| \leq \left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla u^k\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_{L^4(\Omega)},$$

e como $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\frac{du^k}{dt}\right)\right| \leq C_1\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V\left\|\nabla u^k\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V,$$

onde $C_1>0$ é a constante de imersão de V em $L^4(\Omega)$. Além disso, $u^k \in L^\infty(0,T;V)$, então existe uma constante C_3 tal que

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\frac{du^k}{dt}\right)\right| \leq C_3\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V.$$

Aplicando a desigualdade de Young a última desigualdade,

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\frac{du^k}{dt}\right)\right| \leq 6C_3^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2.$$

Voltando a equação (4.10), temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 &\leq 6C_3^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2\\ &\quad+\|f(t)\|_{V^*}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V+\left\|g(t,u_t^k)\right\|\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|,\end{aligned}$$

ou ainda, novamente pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 \leq 6C_3^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+6\|f(t)\|_{V^*}^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2\\ +6\left\|g(t,u_t^k)\right\|^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2\leq 6\left(C_3^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\|f(t)\|_{V^*}^2+\left\|g(t,u_t^k)\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\left\|\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2.$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}\nu\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2&+\int_0^t\left\|\frac{du^k(s)}{dt}\right\|_V^2\,ds\\&\leq\nu\left\|\nabla u^k(0)\right\|^2+C_4\left(\int_0^t\left\|F\left(s,u_s^k\right)\right\|_V^2\,ds+\int_0^t\|f(s)\|_{V^*}^2\,ds+\int_0^t\left\|g(s,u_s^k)\right\|^2\,ds\right)\\&\leq\nu\left\|\nabla u^k(0)\right\|^2+C_4\left(\int_0^t\left\|F\left(s,u_s^k\right)\right\|_V^2\,ds+\int_0^t\|f(s)\|_{V^*}^2\,ds+C_g\int_{-h}^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2\,ds\right)\\&\leq C_5,\end{aligned}$$

pois

$$f\in L^2\left(0,T;V^*\right)$$

$$u^k\in L^2\left(-h,T;V\right)$$

$$F\left(\cdot,u_\cdot^k\right)\in L^2\left(0,T;V\right),$$

onde C_5 é uma constante positiva.

Portanto $\dfrac{du^k}{dt}\in L^2\left(0,T;V\right)$.

Como consequência dos resultados de compacidade (ver [50]), temos que

$$\left\{u:u,\frac{du}{dt}\in L^2\left(0,T;V\right)\right\}\text{ está imerso compactamente }L^2\left(0,T;H\right),$$

e então, segue que

$$u^k\to u\text{ fortemente em }L^2\left(0,T;H\right).$$

Como $P_{v_k}u=\varphi_k$ converge fortemente para $\varphi=u$ em $L^2\left(-h,0;H\right)$, temos que

$$F\left(\cdot,u_\cdot^k\right)=u^k(\cdot-r(\cdot))\to F\left(\cdot,u.\right)=u(\cdot-r(\cdot))\text{ fortemente em }L^2(0,T;H).$$

Além disso,

$$g\left(\cdot,u_\cdot^k\right)\to g\left(\cdot,u.\right)\text{ fracamente em }L^2\left(0,T;V^*\right).$$

De fato,

$$\left\|g\left(t,u_t^k\right)\right\|_{V^*}=\sup_{\|v\|_V=1}\left|\left(g\left(t,u_t^k\right),v\right)\right|\leq\left\|g\left(t,u_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)},$$

então, da hípótese (H4) sobre g, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\left\|g\left(s,u_s^k\right)\right\|_{V^*}^2\,ds&\leq\int_0^T\left\|g\left(s,u_s^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds\leq C_g\int_{-h}^T\left\|u^k(s)\right\|_V^2\,ds\\&=C_g\left\|u^k\right\|_{L^2(-h,T;V)}.\end{aligned}$$

Da condição [$(H5)$], passando a uma subsequência, se necessáio, segue que

$$g\left(s,u_s^k\right) \to g\left(s,u_s\right) \text{ fracamente em } L^2\left(0,T;V^*\right),$$

quando $k \to \infty$.

Observe também que, desde que $u \in L^2\left(0,T;V\right)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;V\right)$, segue $u \in C\left(\left[0,T\right];V\right))$, e faz sentido calcular $u(0)$.

<u>*Passagem ao limite*</u>

Considere $\psi \in C^1\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$, tal que $\psi(T)=0$. Então, para todo $v \in V$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d\left(u^k,v\right)_V}{dt}\psi(t)\,dt \quad &+\nu\int_0^T \left(\left(u^k(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt + \int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t))\,dt \\ &= \int_0^T \left\langle (t,u^k(t)),v\right\rangle \psi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle g(t,u_t^k),v\right\rangle \psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado esquerdo da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \left(u^k(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt - \left(u^k(0),v\psi(0)\right)_V + \nu\int_0^T \left(\left(u^k(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt \\ &+\int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t))\,dt = \int_0^T \left\langle f(t),v\right\rangle \psi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle g(t,u_t^k),v\right\rangle \psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, vamos analisar a convergência de cada parcela da igualdade acima.

1.
$$\begin{aligned}\int_0^T \left(u^k(t)-u(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt &= \int_0^T \left(u^k(t)-u(t),v\right)\psi'(t)\,dt \\ &+\kappa\int_0^T \left(\left(u^k(t)-u(t),v\right)\right)\psi'(t)\,dt.\end{aligned}$$

   Das estimativas *a priori* existe $u \in L^\infty\left(0,T;V\right)$ e uma subsequência, que continuaremos a denotar por u^k, tal que u^k converge para u, na topologia fraco-estrela de $L^\infty\left(0,T;V\right)$. Logo, como $v\psi' \in L^1\left(0,T;V\right)$, então

$$\int_0^T \left(u^k(t)-u(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt \longrightarrow 0,\;\; k \longrightarrow \infty.$$

2. Sabemos que existe $C_6 > 0$, tal que

$$|||u^k|||_{L^2\left(0,T;V_{|||\cdot|||}\right)} \leq C_6\left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;V)}.$$

   Portanto

$$\left\{u^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2\left(-h,T;V_{|||\cdot|||}\right).$$

   Assim, fazendo como no item 1, segue que

$$\int_0^T \left(\left(u^k(t)-u(t),v\right)\right)\psi'(t)\,dt \longrightarrow 0,\;\; k \longrightarrow \infty.$$

3.
$$\int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t)) - b\left(F(t,u_t),u(t),v\psi(t)\right)\, dt$$
$$= \int_0^T b(F(t,u_t^k)-F(t,u_t),u^k(t),v\psi(t)) + b(F(t,u_t),u^k(t)-u(t),v\psi(t))\, dt.$$

Assim,
$$\int_0^T b(F(t,u_t^k)-F(t,u_t),u^k(t),v\psi(t))\, dt$$
$$\leq \int_0^T \left\|F(t,u_t^k)-F(t,u_t)\right\| \left\|\nabla u^k(t)\right\| \|v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\, dt.$$

Das estimativas a priori temos que

$$\left\|\nabla u^k(t)\right\| < C_5$$

$$\|v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < C_5$$

$$\left\|F(\cdot,u_\cdot^k)-F(\cdot,u_\cdot)\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0, \text{ quando } k\to\infty,$$

portanto
$$\int_0^T b\left(F(t,u_t^k)-F(t,u_t),u^k(t),v\psi(t)\right)\, dt \longrightarrow 0.$$

Agora
$$\int_0^T b\left(F(t,u_t^k),u^k(t)-u(t),v\psi(t)\right) dt$$
$$= -\int_0^T b\left(F(t,u_t^k),v\psi(t),u^k(t)-u(t)\right) dt$$
$$\leq \int_0^T \left\|F(t,u_t^k)\right\| \|\nabla v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|u^k(t)-u(t)\right\| dt$$
$$\leq c_1 \left\|F(\cdot,u_\cdot^k)\right\|_{L^2(0,T;H)} \left\|u^k-u\right\|_{L^2(0,T;H)}$$
$$\leq c_2 \left\|u^k-u\right\|_{L^2(0,T;H)} \longrightarrow 0.$$

Logo
$$\int_0^T b\left(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t)\right)\, dt \longrightarrow \int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t)),\ dt$$
quando $k\to\infty$.

4. Pela hipótese [H5], como a sequência u^k converge fracamente para u em $L^2(-h,T;V)$ e fortemente em $L^2(0,T;H)$, então a sequência de funções ξ_k dadas por $\xi_k(t) = g(t,(u^k)_t)$ converge fracamente para $\xi(t) = g(t,u_t)$ em $L^2(0,T;V^*)$, e assim
$$\int_0^T \left\langle g(t,u_t^k),v\right\rangle \psi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle g(t,u(t)),v\rangle\, \psi(t)\, dt,$$

para todo $v\in V$, quando $k\to\infty$.

5. Por fim, como $u^0 \in V$,

$$\left((u^k(0) - u^0), v\psi(0)\right)_V \leq C_7 \left\|u^k(0) - u^0\right\|_V = C_7 \left\|P_{V_k} u^0 - u^0\right\|_V \longrightarrow 0,$$

quando $k \to \infty$, onde $C_7 > 0$ é uma constante, e lembrando que P_{V_k} é a projeção ortogonal de V em V_k.

Então, a passagem ao limite nos fornece

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)_V \, \psi'(t)\, dt + (u_0, v\psi(0))_V + \nu \int_0^T ((u(t), v))\, \psi(t)\, dt& \\ + \int_0^T b(F(t, u_t), u(t), v\psi(t))\, dt& \\ = \int_0^T \langle f(t), v\rangle\, \psi(t)\, dt + \int_0^T \langle g(t, u_t), v\rangle\, \psi(t)\, dt,& \end{aligned}$$

para todo $v \in V$.

Em particular, se $\psi \in D\left((0,T)\right)$, então $\psi(0) = 0$, e portanto,

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)_V \, \psi'(t)\, dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\psi(t)\, dt + \int_0^T b(F(t, u_t), u(t), v\psi(t))\, dt& \\ = \int_0^T \langle f(t), v\rangle\, \psi(t)\, dt + \int_0^T \langle g(t, u_t), v\rangle\, \psi(t)\, dt,& \end{aligned}$$

para todo $v \in V$, e todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$.

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d\,(u(t), v)_V}{dt}\psi(t)\, dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\psi(t)\, dt + \int_0^T b\left(F(t, u_t), u(t), v\psi(t)\right)\, dt& \\ = \int_0^T \langle f(t), v\rangle\, \psi(t)\, dt + \int_0^T \langle g(t, u_t), v\rangle\, \psi(t)\, dt,& \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$.

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d\,(u(t), v)}{dt}\psi(t)\, dt + \kappa \int_0^T \frac{d\,((u(t), v))}{dt}\psi(t)\, dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\psi(t)\, dt& \\ + \int_0^T b(F(t, u_t), u(t), v\psi(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle\, \psi(t)\, dt + \int_0^T \langle g(t, u_t), v\rangle\, \psi(t)\, dt,& \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$,

ou

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{du(t)}{dt} + \kappa \frac{d\,(Au(t))}{dt} + \nu Au(t) + B\left(F(t, u_t), u(t)\right), v \right\rangle \psi(t)\, dt& \\ = \int_0^T \langle f(t) + g(t, u_t), v\rangle\, \psi(t)\, dt,& \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$. Ou seja, a igualdade

$$\frac{du(t)}{dt} + \kappa \frac{d\left(Au(t)\right)}{dt} + \nu Au(t) + B\left(F(t,u_t,u(t))\right) = f(t) + g(t,u_t)$$

é verdadeira ao menos em V^*.

Vamos mostrar que $u(0) = u^0$ em V.

Como para $\psi \in C^1\left([0,T], \mathbb{R}\right)$, com $\psi(T) = 0$, e $v \in V$ temos

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}\left(u(t) - \kappa Au(t)\right), v \right\rangle \psi(t)\, dt = -\int_0^T \langle u(t) + \kappa Au(t), v\rangle\, \psi'(t)\, dt$$
$$+ \langle u(0) - \kappa Au(0), v\psi(0)\rangle\,.$$

Então,

$$-\int_0^T (u(t),v)\,\psi'(t)\,dt - \kappa\int_0^T ((u(t),v))\,\psi'(t)\,dt + (u(0),v\psi(0)) + \kappa\,((u(0),v\psi(0)))$$
$$+\,\nu\int_0^T (((u(t),v))\,\psi(t)\,dt + \int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t))\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt.$$

Mas, pela passagem ao limite

$$-\int_0^T (u(t),v)\,\psi'(t)\,dt - \kappa\int_0^T ((u(t),v))\,\psi'(t)\,dt + \left(u^0,v\psi(0)\right) + \kappa\left(\left(u^0,v\psi(0)\right)\right)$$
$$+\nu\int_0^T ((u(t),v))\,\psi(t)\,dt$$
$$+\int_0^T b(F(t,u_t,u(t)),v\psi(t))\,dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt.$$

Portanto

$$\left[\left(u(0)-u^0,v\right) + \kappa\left(\left(u(0)-u^0,v\right)\right)\right]\psi(0) = 0,$$

para cada $v \in V$ e cada ψ do tipo considerada. Podemos escolher ψ tal que $\psi(0) \neq 0$.

Assim

$$\left(u(0)-u^0,v\right)_V = 0,$$

para todo $v \in V$.

Logo,

$$0 = \left\|u(0)-u^0\right\|_V^2,$$

ou seja, $u(0) = u^0$ em V.

unicidade

Sejam u^1 e u^2 duas soluções de (4.3).

Então, $u^1, u^2 \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;V)$ e satisfazem

$$\frac{dw(t)}{dt} + \kappa \frac{d(Aw(t))}{dt} + \nu Aw(t) + B\left(F(t,w_t), w(t)\right) = f(t) + g(t,w_t) \quad \text{em} \qquad V^*$$

Seja $u = u^1 - u^2$.

Como $\dfrac{du^1}{dt}, \dfrac{du^2}{dt} \in L^2(0,T;V)$, então $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;V)$.

A diferença $u = u^1 - u^2$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \kappa \dfrac{d(Au(t))}{dt} & +\nu Au(t) + B\left(F(t,u_t^1), u^1(t)\right) \\ & -B\left(F(t,u_t^2), u^2(t)\right) = g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2) \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Tomando o produto escalar da primeira equação em (4.11) com $u(t)$, obtemos

$$\frac{d\left\|u(t)\right\|_V^2}{dt} + 2\nu\left\|\nabla u(t)\right\|^2 + 2b\left(F(t,u_t^1), u^1(t), u(t)\right) - 2b\left(F(t,u_t^2), u^2(t), u(t)\right)$$
$$= 2\left\langle g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2), u(t)\right\rangle.$$

Como

$$b\left(F(t,u_t^1), u^1(t), u(t)\right) - b\left(F(t,u_t^2), u^2(t), u(t)\right)$$
$$= b\left(F(t,u_t^1), u^1(t), u(t)\right) - b\left(F(t,u_t^1), u^2(t), u(t)\right) + b\left(F(t,u_t^1), u^2(t), u(t)\right)$$
$$-b\left(F(t,u_t^2), u^2(t), u(t)\right)$$
$$= b\left(F(t,u_t^1), u(t), u(t)\right) + b\left(\left(F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right), u^2(t), u(t)\right)$$
$$= b\left(\left(F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right), u^2(t), u(t)\right).$$

Além disso,

$$\left|b\left(\left(F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right), u^2(t), u(t)\right)\right|$$
$$\leq \left\|F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right\|_{L^4(\Omega)} \left\|\nabla u(t)\right\| \left\|u^2(t)\right\|_{L^4}(\Omega)$$
$$\leq C_3 \left\|F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right\|_V \left\|\nabla u(t)\right\|,$$

pois $u^2 \in L^\infty(0,T;V)$ (lembrando que $\kappa > 0$) e $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré, temos

$$2\left|\left\langle g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2), u(t)\right\rangle\right| \leq \left\|g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2)\right\| \left\|\nabla u(t)\right\|.$$

Portanto,

$$\frac{d\left\|u(t)\right\|_V^2}{dt} + 2\nu\left\|\nabla u(t)\right\|^2$$
$$\leq C_8 \left\|F(t,u_t^1) - F(t,u_t^2)\right\|_V \left\|\nabla u(t)\right\| + \left\|g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2)\right\| \left\|\nabla u(t)\right\|_V$$
$$= C_8 \left\|u(t - r(t))\right\|_V \left\|\nabla u(t)\right\| + \left\|g(t,u_t^1) - g(t,u_t^2)\right\| \left\|\nabla u(t)\right\|.$$

Integrando de 0 a t, aplicando $u(0)=0$ e a desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|_V^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2\ ds\\
&\leq C_8\int_0^t \|u(s-r(s))\|_V \|\nabla u(s)\|\ ds + \int_0^t \left\|g(s,u_s^1)-g(s,u_s^2)\right\| \|\nabla u(s)\|\ ds\\
&\leq \frac{C_9}{\nu(1-\tau^*)}\int_{-h}^t \|u(s)\|_V^2\ ds + \nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2\ ds + \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|g(s,u_s^1)-g(s,u_s^2)\right\|^2\ ds\\
&\qquad +\nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2\ ds
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\frac{C_9}{\nu(1-\tau^*)}\int_{-h}^t \|u(s)\|_V^2\ ds + \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|g(s,u_s^1)-g(s,u_s^2)\right\|^2\ ds \leq C_{10}\int_{-h}^t \|u(s)\|_V^2\ ds
$$

Pela desigualdade de Gronwall, segue que

$$
\|u(t)\|_V^2 \leq 0 \text{ para quase todo } t\in[-h,T].
$$

Portanto $u^1=u^2$.

Vamos agora determinar a pressão p.

Como $u\in L^2(0,T;V)$ e $f\in L^2(0,T;V^*)$, podemos integrar (4.6) de 0 a t, e obtemos

$$
\begin{aligned}
&\langle u(t),v\rangle - \langle u(0),v\rangle - \kappa\langle \Delta u(t),v\rangle + \kappa\langle \Delta u(0),v\rangle + \nu\int_0^t ((u(s),v))\ ds\\
&\qquad + \int_0^t b\left(F\left(s,u_s\right),u_s,v\right)\ ds = \int_0^t \langle f(s),v\rangle\ ds + \int_0^t \langle g(s,u_s),v\rangle\ ds,
\end{aligned}
$$

para todo $v\in V$, lembrando que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto de dualidade V^*-V. A iqualdade acima pode ser reescrita como segue:

$$
\begin{aligned}
&\langle u(t)-\kappa\Delta u(t),v\rangle - \langle u(0)-\Delta u(0),v\rangle + \nu\int_0^t \langle \Delta u(s),v\rangle\ ds + \int_0^t \left\langle B\left(F\left(s,u_s\right),u_s\right),v\right\rangle\ ds\\
&\qquad = \int_0^t \langle f(s),v\rangle\ ds + \int_0^t \left\langle g(s,u_s^k),v\right\rangle\ ds.
\end{aligned}
$$

Defina $U(t) = \int_0^t u(s)\,ds$, $\overline{B}(t) = \int_0^t B\left(F\left(s,u_s\right),u_s\right)\,ds$, $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ e $J(t) = \int_0^t g(s,u_s^k)\,ds$, então $U\in C([0,T];V)$ e $\overline{B},F,J\in C([0,T];V^*)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\langle u(t)-\kappa\Delta u(t),v\rangle - \langle u(0)-\kappa\Delta u(0),v\rangle \quad &\nu\langle \Delta U(t),v\rangle + \left\langle \overline{B}(t),v\right\rangle\\
&= \langle F(t),v\rangle + \langle J(t),v\rangle,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\left\langle u(t)-\kappa\Delta u(t)+u(0)-\Delta u(0)+\nu\Delta U(s)+\overline{B}(t)-F(t)-J(t),v\right\rangle = 0, \tag{4.12}
$$

para todo $v \in V$. Defina por

$$R(t) = u(t) - \kappa\Delta u(t) + u(0) - \kappa\Delta u(0) + \nu\Delta U(s) + \overline{B}(t) - F(t) - J(t) \in V^*.$$

Desta forma temos $R \in C([0,T];V^*)$. Pelo fato de V ser subespaço fechado de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, podemos, graças ao Teorema de Hahn-Banach, estender $R(t)$ a um funcional $T(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, para cada $t \in [0,T]$, tal que

$$\langle T(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle R(t), v\rangle\,, \ \forall v \in V, \qquad \text{e} \qquad \|T(t)\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = \|R(t)\|_{V^*}\,. \tag{4.13}$$

Assim, $R \in C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Por (4.12), temos que

$$\langle T(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 0, \qquad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Pelos Lemas (1.4.3) e (1.4.4), temos que existe $Q(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, satisfazendo $T(t) = \nabla Q(t)$ em $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Portanto $\nabla Q \in C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Sendo ∇ um isomorfismo do grupo quociente $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ em $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, temos que $Q \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$.

De (4.13), segue que $R(t) = \nabla Q(t)$ em V^*, $\forall t \in [0,T]$, ou seja,

$$\nabla Q(t) = u(t) - \kappa\Delta u(t) + u(0) - \kappa\Delta u(0) + \nu\Delta U(s) + \overline{B}(t) - F(t) - J(t), \tag{4.14}$$

em V^* e para todo $t \in [0,T]$.

Agora, ao diferenciarmos (4.14) no sentido de distribuição, temos que

$$\nabla Q'(t) = u'(t) - \kappa\Delta u'(t) + \nu\Delta U'(s) + \overline{B}'(t) - F'(t) - J'(t)$$

em $D'([0,T],V^*)$, o que nos dá

$$\nabla Q'(t) = \frac{du(t)}{dt} + \kappa\Delta\frac{du(t)}{dt} + \nu\Delta u(t) + B\left(F\left(t,u_t\right), u(t)\right) - f(t) - g(t,u_t^k)$$

em $L^1(0,T,V^*)$. Pondo $-p = Q'$, temos que

$$-\nabla p = \frac{du(t)}{dt} + \kappa\Delta\frac{du(t)}{dt} + \nu\Delta u(t) + B\left(F\left(t,u_t\right), u(t)\right) - f(t) - g(t,u_t^k).$$

Como $B\left(F\left(s,u_s\right), u(s)\right) = \left(F\left(t,u_t\right)\cdot\nabla\right)u(t)$ em V^*, segue que

$$\frac{du(t)}{dt} + \kappa\Delta\frac{du(t)}{dt} + \nu\Delta u(t) + \left(F\left(t,u_t\right)\cdot\nabla\right)u(t) + \nabla p = f(t) + g(t,u_t^k).$$

$\square$

Teorema 4.2.3. *Assuma $u^0 \in H^2(\Omega)\cap V$, $\varphi \in L^\infty\left(-h,0;V\right)\cap L^2\left(-h,0;V\cap H^2(\Omega)\right)$, $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ e que $g : [0,T]\times C\left([-h,0],V\right) \to L^2\left(\Omega\right)$ satisfaz as hipóteses (H1)-(H4). Então, para cada $T > 0$ fixo, existe uma única solução forte u para o problema (4.2) tal que $u \in L^\infty\left(0,T;V\right)\cap L^2\left(-h,T;V\cap H^2(\Omega)\right)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;V\right)$. Mais ainda, se $\varphi \in C^0([-h,0];V)$ e $\varphi(0) = u^0$ então $u \in C^0([-h,T];V)$.*

Prova. De acordo com o Teorema anterior, para cada $T > 0$ fixo, existe uma única solução fraca u para o problema (2) tal que $u \in L^{\infty}(0,T;V) \cap L^{2}(-h,T;V)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^{2}(0,T;V)$, e portanto (vide [3]), $u \in C^{0}([0,T];V)$. Além disso, observe que, se $\varphi \in C^{0}([-h,0];V)$ e $\phi(0) = u^{0}$ então $u \in C^{0}([-h,T];V)$.

Denote por P o operador projeção ortogonal de $\mathbf{L}^{2}(\Omega)$ sobre o subespaço H. Pela projeção P, podemos definir o operador de Stokes $A : D(A) \longrightarrow H$, por $A = -P\Delta$ e cujo dominio $D(A) = \mathbf{H}^{2}(\Omega) \cap V$. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para mostrar a existência de solução forte com dado $u^{0} \in D(A)$. Considere o conjunto $\{w_j\}$ das autofunções do Operador de Stokes em $(V, \|\cdot\|_V)$, de modo que $\{w_j\}$ seja ortonormal com respeito ao produto interno $(\cdot,\cdot) + \kappa(\cdot,\cdot)$. Para cada autovetor w_j, $j = 1, 2, \ldots$, denote por λ_k autovalor do operador de Stokes associado, ou seja, $-P\Delta w_j = \lambda_j w_j$ para cada $j = 1, 2, \ldots$. Assim $Au^{k}(t) = -P\Delta u^{k}(t) = -\lambda_j \sum_{i=1}^{k} \gamma_{ij}(t) w_i$ para cada $j = 1, 2, \ldots$.

Voltando à primeira equação em (4.6), multiplicando por $\lambda_j \gamma_{jk}(t)$ e somando de $j = 1$ até $j = k$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|^{2} + \kappa\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2}\right) + \quad & \nu\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2} + b\left(F(t,u_t^{k}), u^{k}(t), Au^{k}(t)\right) \\ & = \left\langle f(t), Au^{k}(t)\right\rangle + \left\langle g(t,u_t^{k}), Au^{k}(t)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.15}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|^{2} + \kappa\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2}\right) + \nu\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2} + b\left(F(t,u_t^{k}), u^{k}(t), Au^{k}(t)\right) \\ & \qquad = \left(f(t), Au^{k}(t)\right) + \left(g(t,u_t^{k}), Au^{k}(t)\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|^{2} + \kappa\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2}\right) + \nu\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2} \\ & \qquad \leq \left\|F(t,u_t^{k})\right\|_{L^{4}(\Omega)}\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|_{L^{4}(\Omega)}\|Au(t)\| + \|f(t)\|\left\|Au^{k}(t)\right\| + \left\|g(t,u_t^{k})\right\|\left\|Au^{k}(t)\right\|. \end{aligned}$$

Como $V \hookrightarrow L^{4}(\Omega)$ e $F(\cdot, u_{\cdot}^{k}) \in L^{\infty}(-h,T;V)$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|^{2} + \kappa\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2}\right) + \nu\left\|Au^{k}(t)\right\|^{2} \\ & \qquad \leq C_3\left\|\nabla u^{k}(t)\right\|_V\left\|Au^{k}(t)\right\| + \|f(t)\|\left\|Au^{k}(t)\right\| + \left\|g(t,u_t^{k})\right\|\left\|Au^{k}(t)\right\|. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned} & \left\|\nabla u^{k}(t)\right\|^{2} + \kappa\left\|Au^{k}(s)\right\|^{2} + 2\nu\int_0^t\left\|Au^{k}(s)\right\|^{2} ds \\ & \quad \leq \left\|\nabla u^{k}(0)\right\|^{2} + \left\|Au^{k}(0)\right\|^{2} + 2C_1\int_0^t\left\|\nabla u^{k}(s)\right\|_V\left\|Au^{k}(s)\right\| ds \\ & \qquad + 2\int_0^t\|f(s)\|\left\|Au^{k}(s)\right\| ds + 2\int_0^t\left\|g(s,u_s^{k})\right\|\left\|Au^{k}(s)\right\| ds. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young para $q = 2 = q'$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(t)\right\|^2 + 2\nu \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds \\
&\leq \left\|\nabla u^k(0)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \frac{3C_2}{\nu} \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|_V^2\, ds + \frac{\nu}{3} \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds \\
&\quad + \frac{3}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \frac{\nu}{3} \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds + \frac{3}{\nu} \int_0^t \left\|g(s, u_s^k)\right\|\, ds + \frac{\nu}{3} \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|\, ds,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(t)\right\|^2 + \nu \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds \\
&\qquad \leq \left\|\nabla u^k(0)\right\|_V^2 + \kappa \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \frac{3C_2}{\nu} \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|_V^2\, ds + \frac{3}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds \\
&\qquad\quad + \frac{3}{\nu} \int_0^t \left\|g(s, u_s^k)\right\|^2\, ds.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Das hipóteses (H1) e (H4) sobre g, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\|g(s, u_s^k)\right\|^2\, ds &\leq C_g \int_{-h}^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2\, ds \\
&= C_g \textstyle\int_{-h}^0 \left\|u^k(s)\right\|_V^2\, ds + C_g \displaystyle\int_0^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2\, ds \\
&\leq C_g \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2\, ds + C_g \int_0^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Substitiuindo (4.18) em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(t)\right\|^2 + \nu \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds \\
&\quad \leq \left\|\nabla u^k(0)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \frac{3C_2}{\nu} \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|_V^2\, ds + \frac{3}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds \\
&\quad\quad + C_g \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2\, ds + C_g \int_0^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2\, ds,
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(t)\right\|^2 + \nu \int_0^t \left\|Au^k(s)\right\|^2\, ds \\
&\leq \left\|\nabla u^k(0)\right\|^2 + \kappa \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2\, ds + C_g \int_0^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds \\
&\quad + \left(\frac{3C_2}{\nu}\right) \int_0^t \left\|\nabla u^k(s)\right\|_V^2\, ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, segue que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2+\kappa\left\|Au^k(t)\right\|^2+\nu\int_0^t\left\|Au^k(s)\right\|^2 ds\\
&\leq\left(\left\|\nabla u^k(0)\right\|^2+\kappa\left\|Au^k(0)\right\|^2+\int_0^t\|f(s)\|^2 ds+\int_{-h}^0\|\varphi(s)\|_V^2 ds+C_g\int_0^t\left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\right)\\
&\qquad\qquad\left(1+\left(\frac{3C_2}{\nu}\right)t\right)e^{\left(\frac{3C_2}{\nu}\right)t},
\end{aligned}
$$

para todo $0\leq t\leq T$.

Sabendo que

$$f\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

$$u^k\in L^2\left(-h,T;V\right),$$

$$\varphi\in L^2\left(-h,0;V\right),$$

$$u^0\in V\cap H^2(\Omega)\text{ e }\left\|\nabla u^k(0)\right\|+\kappa\left\|Au^k(0)\right\|^2\leq\left\|\nabla u^0\right\|^2+\kappa\left\|Au^0\right\|^2,$$

temos que

$$\left\|\nabla u^k(t)\right\|^2+\kappa\left\|Au^k(t)\right\|^2+\kappa\int_0^t\left\|Au^k(s)\right\|^2\ ds\leq C_{11},$$

para todo $0\leq t\leq T$, onde $C_{11}>0$ é uma constante.

Portanto,

$$\left\{\nabla u^k\right\}\text{ é uniformemente limitada em }L^\infty\left(0,T;V\right),$$

$$\left\{\nabla u^k\right\}\text{ é uniformemente limitada em }L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

$$\left\{u^k\right\}\text{ é uniformemente limitada em }L^\infty\left(0,T;V\right),$$

$$\left\{u^k\right\}\text{ é uniformemente limitada em }L^\infty\left(-h,T;H^2(\Omega)\cap V\right),$$

$$\left\{u^k\right\}\text{ é uniformemente limitada em }L^2\left(-h,T;H^2\cap V(\Omega)\ \right).$$

Agora, vamos mostrar que $\dfrac{du^k}{dt}\in L^2\left(0,T;H^2\cap V\right)$. De fato, voltando a primeira equação em (4.6), multiplicando por $\lambda_k\dfrac{d\gamma_{jk}}{dt}$ e somando em $j=1$ até $j=k$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|^2+\kappa\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2\right)+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|Au^k(t)\right\|^2+\ \ & b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\ A\frac{du^k}{dt}\right)\\
&=\left(f(t),A\frac{du^k}{dt}\right)+\left(g(t,u_t^k),A\frac{du^k}{dt}\right).
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|^2+\kappa\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2\right)+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\left\|Au^k(t)\right\|^2+\quad b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,A\frac{du^k}{dt}\right)$$
$$=\left\langle f(t),A\frac{du^k}{dt}\right\rangle+\left\langle g(t,u_t^k),A\frac{du^k}{dt}\right\rangle. \tag{4.19}$$

pela desigualdade de Holder, temos

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,A\frac{du^k}{dt}\right)\right|\leq\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\nabla u^k\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|,$$

e como $V\hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,A\frac{du^k}{dt}\right)\right|\leq C_3\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V\left\|\nabla u^k\right\|_V\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|$$

Além disso, $\nabla u^k\in L^\infty(0,T;V)$, então existe uma constante $C_{12}>0$ tal que

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,A\frac{du^k}{dt}\right)\right|\leq C_{12}\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|.$$

Aplicando a desigualdade de Young na última desigualdade,

$$\left|b\left(F\left(t,u_t^k\right),u^k,\frac{du^k}{dt}\right)\right|\leq\frac{12}{\kappa}C_{12}^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{\kappa}{12}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2.$$

Voltando a equação (4.19), temos

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|Au^k(t)\right\|^2}{dt}\leq\frac{12}{\kappa}C_{12}^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{\kappa}{12}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2$$
$$+\|f(t)\|\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|+\left\|g(t,u_t^k)\right\|\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|$$

ou ainda, novamente pela desigualdade de Young,

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\nabla du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|Au^k(t)\right\|^2}{dt}$$
$$\leq\frac{12}{\kappa}C_{12}^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\frac{1}{12}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{12}{\kappa}\|f(t)\|^2+\frac{1}{12}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2$$
$$+\frac{12}{\kappa}\left\|g(t,u_t^k)\right\|^2+\frac{1}{12}\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|Au^k(t)\right\|^2}{dt}\leq\frac{12}{\kappa}\left(C_{12}^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\|f(t)\|^2+\left\|g(t,u_t^k)\right\|^2\right)+\frac{\kappa}{4}\left\|\frac{Adu^k}{dt}\right\|^2.$$

Como $\kappa\left\|A\frac{du^k}{dt}\right\|^2\leq\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2$, temos que

$$\frac{1}{4}\left\|\nabla\frac{du^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|Au^k(t)\right\|^2}{dt}\leq\frac{12}{\kappa}\left(C_{12}^2\left\|F\left(t,u_t^k\right)\right\|_V^2+\|f(t)\|^2+\left\|g(t,u_t^k)\right\|^2\right).$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}
2\nu \left\|Au^k(t)\right\|^2 &+ \int_0^t \left\|\nabla \frac{du^k(s)}{dt}\right\|_V^2 ds \\
&\leq 2\nu \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \overline{C}_1(\kappa)\left(\int_0^t \left\|F\left(s,u_s^k\right)\right\|_V^2 ds + \int_0^t \|f(s)\|^2\, ds + \int_0^t \left\|g(s,u_s^k)\right\|^2 ds\right) \\
&\leq \nu \left\|Au^k(0)\right\|^2 + \overline{C}_1(\kappa)\left(\int_0^t \left\|F\left(s,u_s^k\right)\right\|_V^2 ds + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + C_g \int_{-h}^t \left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds\right) \\
&\leq \overline{C}_2(\kappa),
\end{aligned}$$

pois

$$f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

$$u^k \in L^2\left(-h,T;V\right),$$

$$F\left(\cdot,u_{(\cdot)}^k\right) \in L^2\left(0,T;V\right),$$

onde $\overline{C}_1(\kappa)$ e $\overline{C}_2$ são constantes positivas que dependem de κ.

Portanto $\dfrac{du^k}{dt} \in L^2\left(0,T;H^2 \cap V\right)$.

Como consequência dos resultados de compacidade (ver [50]), temos que $\left\{u; u, \dfrac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;H^2\cap V\right)\right\}$ está imerso compactamente em $L^2\left(0,T;V\right)$ Logo, temos então que

$$u^k \to u \text{ fortemente em } L^2\left(0,T;V\right).$$

Como $P_{V_k}u = \varphi_k$ converge fortemente para $\varphi = u$ em $L^2\left(-h,0;V\right)$, temos que

$$F\left(\cdot,u_{(\cdot)}^k\right) = u^k(\cdot - r(\cdot)) \to F\left(\cdot,u_{(\cdot)}\right) = u(\cdot - r(\cdot)) \text{ fortemente em } L^2(0,T;V)$$

Além disso,

$$g\left(\cdot,u_{(\cdot)}^k\right) \to g\left(\cdot,u_{(\cdot)}\right) \text{ fortemente em } L^2\left(0,T;V^*\right).$$

De fato,

$$\left\|g\left(t,u_t^k\right)\right\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V=1}\left|\left(g\left(t,u_t^k\right),v\right)\right| \leq \left\|g\left(t,u_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Então, da hípótese (H4) sobre g, temos que

$$\int_0^T \left\|g\left(s,u_s^k\right)\right\|_{V^*}^2 ds \leq \int_0^T \left\|g\left(s,u_s^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_g \int_{-h}^T \left\|u^k(s)\right\|_V^2 ds = C_g \left\|u^k\right\|_{L^2(-h,T;V)}.$$

Portanto, como $u^k \to u$ fortemente em $L^2\left(-h,T;V\right)$, segue que

$$g\left(s,u_s^k\right) \to g\left(s,u_s\right) \text{ fortemente em } L^2\left(0,T;V^*\right),$$

quando $k \to \infty$.

Observe também que, desde que $u \in L^2\left(0,T;V\cap H^2\right)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;V\cap H^2\right)$, segue $u \in C\left([0,T];V\cap H^2\right)$, e faz sentido calcular $u(0)$.

Passagem ao limite

Considere $\psi \in C^1\left([0,T],\mathbb{R}\right)$, tal que $\psi(T)=0$. Então, para todo $v \in V$, obtemos

$$\int_0^T \frac{d\left(u^k,v\right)_V}{dt}\psi(t)\,dt \quad +\nu\int_0^T \left(\left(u^k(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt + \int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t))\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle g(t,u_t^k),v\right\rangle\psi(t)\,dt.$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado esquerdo da igualdade acima, obtemos

$$-\int_0^T \left(u^k(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt + \left(u^k(0),v\psi(0)\right)_V + \nu\int_0^T \left(\left(u^k(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt$$
$$+\int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t))\,dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \left\langle g(t,u_t^k),v\right\rangle\psi(t)\,dt.$$

Fazendo $k\to\infty$, vamos analisar a convergência de cada parcela da igualdade acima.

1.
$$\int_0^T \left(u^k(t)-u(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt \le \widehat{C}_1 \left\|u^k-u\right\|_{L^2(0,T;V)} \longrightarrow 0,$$

pois $u^k \to u$ fortemente em $L^2\left(-h,T;V\right)$, quando fazemos $k\to\infty$. Portanto

$$-\int_0^T \left(u^k(t),v\right)_V \psi'(t)\,dt \longrightarrow -\int_0^T (u(t),v)_V\,\psi'(t)\,dt.$$

2. Como existe $\overline{C}_2>0$, tal que

$$\left|\left|\left|u^k-u\right|\right|\right|^2_{L^2\left(0,T;V_{|||\cdot|||}\right)} = \int_0^T \left|\left|\left|u^k(t)-u(t)\right|\right|\right|^2\,dt = \int_0^T \left\|\nabla\left(u^k(t)-u(t)\right)\right\|^2\,dt$$
$$\le \overline{C}_2\int_0^T \left\|u^k(t)-u(t)\right\|_V^2\,dt = \overline{C}_2\left\|u^k(t)-u(t)\right\|^2_{L^2(0,T;V)} \longrightarrow 0,$$

quando $k\to\infty$, pois $u^k\to u$ fortemente em $L^2\left(-h,T;V\right)$.

Portanto

$$\left|\nu\int_0^T \left(\left(u^k(t)-\nabla u(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt\right| \le \overline{C}_2\left\|u^k(t)-u(t)\right\|_{L^2(0,T;V)} \longrightarrow 0,$$

quando $k\to\infty$, ou seja,

$$\nu\int_0^T \left(\left(u^k(t),v\right)\right)\psi(t)\,dt \longrightarrow \nu\int_0^T ((u(t),v))\,\psi(t)\,dt,$$

quando $k\to\infty$.

3.
$$
\begin{aligned}
&\int_0^T b\left(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t)\right) - b\left(F(t,u_t),u(t),v\psi(t)\right)\, dt \\
&= \int_0^T b\left(F(t,u_t^k)-F(t,u_t),u^k(t),v\psi(t)\right) + b\left(F(t,u_t),u^k(t)-u(t),v\psi(t)\right)\, dt \\
&\le \int_0^T \left\|F(t,u_t^k)-F(t,u_t)\right\| \left\|\nabla u^k(t)\right\| \|v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\, dt \\
&\qquad + \int_0^T \|F(t,u_t)\| \left\|\nabla\left(u^k(t)-u(t)\right)\right\| \|v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\, dt.
\end{aligned}
$$

Das estimativas a priori temos que

$$\left\|\nabla u^k(t)\right\| < \overline{C}_3,$$

$$\|v\psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \overline{C}_3,$$

$$\|F(t,u_t)\| < \overline{C}_3,$$

$$\left\|F(\cdot,u_{(\cdot)}^k)-F(\cdot,u_{(\cdot)})\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0, \text{ quando } k\to\infty, \text{ e}$$

$$\left\|\nabla\left(u^k-u\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le \overline{C}_2\left\|u^k-u\right\|_{L^2(0,T;V)} \longrightarrow 0, \text{ quando } k\to\infty.$$

Portanto,

$$\int_0^T b(F(t,u_t^k),u^k(t),v\psi(t))\, dt \longrightarrow \int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t))\, dt,$$

quando $k\to\infty$.

4.
$$
\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle g(t,u_t^k)-g(t,u_t),v\right\rangle \psi(t)\, dt &\le \int_0^T \left\|g(t,u_t^k)-g(t,u_t)\right\| \|v\psi(t)\|\, dt \\
&\le \widetilde{C}_g \int_{-h}^T \left\|u^k(t)-u(t)\right\|_V^2\, dt = \widetilde{C}_g\left\|u^k-u\right\|_{L^2(-h,T;V)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

quando $k\to\infty$, pois $u^k\to u$ fortemente em $L^2(-h,T;V)$.

Portanto,
$$\int_0^T \left\langle g(t,u^k(t)),v\right\rangle \psi(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle g(t,u(t)),v\rangle\, \psi(t)\, dt.$$

5. Por fim, como $u^0\in V$,

$$\left((u^k(0)-u^0),v\psi(0)\right)_V \le \overline{C}_4\left\|u^k(0)-u^0\right\|_V = \overline{C}_4\left\|P_{V_k}u^0-u^0\right\|_V \longrightarrow 0,$$

quando $k\to\infty$, lembrando que P_{V_k} é a projeção ortogonal de V em V_k.

Então, a passagem ao limite nos fornece

$$-\int_0^T (u(t),v)_V\,\psi'(t)\,dt + \left(u^0, v\psi(0)\right)_V + \nu\int_0^T ((u(t),v))\,\psi(t)\,dt + \int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t))\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt,$$

para todo $v \in V$.

Em particular, se $\psi \in D\left((0,T)\right)$, então $\psi(0) = 0$, e portanto

$$-\int_0^T (u(t),v)_V\,\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt + \int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t))\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt,$$

para todo $v \in V$, e todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$.

Portanto

$$\int_0^T \frac{d\,(u(t),v)_V}{dt}\psi(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt + \int_0^T b\left(F(t,u_t),u(t),v\psi(t)\right)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$, ou ainda,

$$\int_0^T \frac{d\,(u(t),v)}{dt}\psi(t)\,dt + \kappa\int_0^T \frac{d\,((u(t),v))}{dt}\psi(t)\,dt + \nu\int_0^T ((u(t),v))\psi(t)\,dt$$
$$+\int_0^T b(F(t,u_t),u(t),v\psi(t))\,dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt,$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$, ou seja,

$$\int_0^T \left\langle \frac{du(t)}{dt} + \kappa\frac{d\,(Au(t))}{dt} + \nu Au(t) + B\left(F(t,u_t),u(t)\right)), v\right\rangle \psi(t)\,dt$$
$$= \int_0^T \langle f(t)+g(t,u_t),v\rangle\,\psi(t)\,dt,$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D\left((0,T)\right)$. Logo, a igualdade

$$\frac{du(t)}{dt} + \kappa\frac{d\,(Au(t))}{dt} + \nu Au(t) + B\left(F(t,u_t),u(t)\right)) = f(t) + g(t,u_t)$$

é verdadeira ao menos em V^*.

Vamos mostrar que $u(0) = u^0$ em $H^2(\Omega)\cap V$, ou seja, mostrar que $\left\|Au^0 - Au(0)\right\| = 0$. De fato, como o operador $A : V \longrightarrow V^*$ e $u(0) = u^0$ em V, temos que $Au(0) = Au^0$ em V^*, isto é,

$$\left\langle Au^0 - Au(0), v\right\rangle = 0, \quad \forall v \in V.$$

Agora, como $Au^0 - Au(0) \in V$

$$\left\|Au^0 - Au(0)\right\|^2 = \left(Au^0 - Au(0), Au^0 - Au(0)\right) = \left\langle Au^0 - Au(0), Au^0 - Au(0)\right\rangle = 0.$$

<u>*unicidade*</u>

Prova-se a unicidade de solução de forma idêntica a feita no Teorema anterior. □

Considere g na forma:

$$g(t, u_t) = G(u(t - \rho(t)))$$

com $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função Lipschitz contínua com constante de Lipschitz L, satisfazendo $G(0) = 0$ e $\rho \in C^1([0, \infty); [0, h])$, $\rho(t) \geq 0$, e $\rho'(t) \leq \rho^* < 1$, para todo $t \geq 0$. Observe que, nestas condições, g satisfaz as hipóteses (H1)-(H3).

Além disso, usando mudança de variáveis $\eta = s - \rho(s)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|g(s, u_s) - g(s, v_s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&\qquad = \int_0^t \|G(u(s - \rho(s))) - G(v(s - \rho(s)))\|^2_{L^2} ds \\
&\qquad = \int_0^t \int_\Omega \|G(u(s - \rho(s))) - G(v(s - \rho(s)))\|^2_{\mathbb{R}^3} dx ds \\
&\qquad = \int_0^t \int_\Omega L^2 \|u(s - \rho(s)) - v(s - \rho(s))\|^2_{\mathbb{R}^3} dx ds \\
&\qquad \leq L^2 \int_0^t \|u(s - \rho(s)) - v(s - \rho(s))\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\
&\qquad \leq L^2 \int_{-\rho(0)}^{t-\rho(t)} \frac{1}{1 - \rho^*} \|u(\eta) - v(\eta)\|^2_{L^2(\Omega)} d\eta \\
&\qquad \leq \frac{L^2}{1 - \rho^*} \int_{-h}^t \|u(s) - v(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds,
\end{aligned}$$

e consequentemente (H4) e (H5) também ocorrem, com constante C_g igual a $\dfrac{L^2}{1 - \rho^*}$.

Suponha ainda que f satisfaz uma hipótese como em Taniguchi [54, Teorema 5.2]:

(Hf) $\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}$ é uniformemente $L(\theta)$-integrável, isto é,

$$\int_0^t e^{\theta(s-t)} \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq L(\theta).$$

Teorema 4.2.4. *Sejam $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $\varphi \in L^\infty(-h, 0; V)$, $f \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$, e $g : [0, T] \times C([-h, 0]; V) \to (L^2(\Omega))^3$ satisfazendo as hipóteses (H1)-(H5). Suponha ainda $f(t)$ satisfaz a hipótese **(Hf)**, e seja λ_1 o primeiro autovalor do operador de Stokes $A = -P\Delta$, tome $\nu > 0$ de modo que*

$$\frac{\nu^2}{2} > \begin{cases} \dfrac{16(1 + \lambda_1 \kappa)\widetilde{C}}{\kappa \lambda_1^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2L}{(1 - \rho^*)\lambda_1^2} & se \quad n = 2 \\[2ex] \dfrac{16(1 + \lambda_1 \kappa)\widetilde{C}}{\kappa \lambda_1^{\frac{5}{4}}} + \dfrac{2L}{(1 - \rho^*)\lambda_1^2} & se \quad n = 3, \end{cases} \tag{4.20}$$

onde $\widetilde{C}$ *é definido no decorrer da demonstração. Suponha ainda que* $(1-\rho^*)\nu^2\lambda_1^2 > 4L$*, e seja* $\theta^* > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{\nu}{2} - \dfrac{\theta^*}{\lambda_1} - \dfrac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2e^{h\theta^*}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2} = 0 \quad se \quad n=2 \\ \dfrac{\nu}{2} - \dfrac{\theta^*}{\lambda_1} - \dfrac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{2e^{h\theta^*}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2} = 0 \quad se \quad n=3. \end{cases}$$

Então, para cada $T > 0$ *fixado, existe uma única solução forte* $u \in L^\infty(-h,T;V) \cap L^2(0,T;V \cap H^2(\Omega))$ *que satisfaz*

$$\|\nabla u(t)\|_V^2 \leq (\|\nabla u^0\|_V^2 + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)}\|\varphi\|^2_{L^2(-h,0;H)})e^{-\theta t} + \frac{2}{\nu}L(\theta), \tag{4.21}$$

para algum $\theta \in (0,\theta^*)$.

Prova. A existência e unicidade segue do Teorema 3.2.3. Vamos verificar a veracidade da desigualdade (4.21). Para isso, defina $W(t,u^k)$ da seguinte forma,

$$W(t,u^k) = e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 + \frac{2}{\nu(1-\rho^*)}\int_{t-\rho(t)}^t e^{\theta s}e^{\theta h}\|G(u^k(s))\|^2_{L^2}ds,$$

onde $\theta > 0$ ainda será escolhido. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t,u^k) &= \theta e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 + e^{\theta t}\frac{d}{dt}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 + \frac{2}{(1-\rho^*)\nu}e^{\theta t}e^{\theta h}\|G(u^k(t))\|^2_{L^2} \\ &\quad - \frac{2e^{\theta(t-\rho(t))}e^{\theta h}(1-\rho'(t))}{\nu(1-\rho^*)}\|G(u^k(t-\rho(t)))\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \theta e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 + 2e^{\theta t}\left\langle Au^k(t), \frac{d}{dt}(u^k(t)+\kappa Au^k(t))\right\rangle \\ &\quad + \frac{2e^{\theta h}Le^{\theta t}}{(1-\rho^*)\nu}\|u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2e^{\theta t}}{\nu}e^{\theta(h-\rho(t))}\frac{(1-\rho'(t))}{1-\rho^*}\|G(u^k(t-\rho(t)))\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \theta e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 \\ &\quad + 2e^{\theta t}\left\langle Au^k(t), -\nu Au^k(t) - B(F(t,u_t^k),u^k(t)) + f(t) + G(u^k(t-\rho(t)))\right\rangle \\ &\quad + \frac{2e^{\theta h}Le^{\theta t}}{(1-\rho^*)\nu}\|u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{2e^{\theta t}}{\nu}\|G(u^k(t-\rho(t)))\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Note que

$$2e^{\theta t}\left\langle Au^k(t), -\nu Au^k(t)\right\rangle = -2\nu e^{\theta t}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} &2e^{\theta t}\langle Au^k(t), -B(F(t,u_t^k),u^k(t))\rangle \\ &\qquad = -2e^{\theta t}\left\langle B(F(t,u_t^k),u^k(t)), Au^k(t)\right\rangle \\ &\qquad = -2e^{\theta t}b(F(t,u_t^k),u^k(t),Au^k(t)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq e^{\theta t} 2C_3 \|F(t,u_t^k)\|_V \|\nabla u^k(t)\|_V \|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq e^{\theta t}\left(C_3^2 2^2 \left(\frac{2}{\nu}\right) \|F(t,u_t^k)\|_V^2 \|\nabla u^k(t)\|_V^2 + \frac{\nu}{2}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= \frac{8C_3^2 e^{\theta t}}{\nu} \|F(t,u_t^k)\|_V^2 \|\nabla u^k(t)\|_V^2 + \frac{\nu}{2} e^{\theta t} \|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2e^{\theta t}\left\langle Au^k(t), f(t)\right\rangle &\leq 2e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\nu} e^{\theta t}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
2e^{\theta t}\left\langle Au^k(t), G(u(t-\rho(t)))\right\rangle &\leq 2e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\|G(u(t-\rho(t)))\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\nu} e^{\theta t}\|G(u^k(t-\rho(t)))\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}
$$

Voltando à equação (4.22) e aplicando as estimativas acima, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} W(t,u^k) \leq\ & \theta e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 - 2\nu e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \frac{8C_3^2 e^{\theta t}}{\nu}\|F(t,u_t^k)\|_V^2\|\nabla u^k(t)\|_V^2 + \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2e^{\theta t}}{\nu}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2e^{\theta h} L e^{\theta t}}{(1-\rho^*)\nu}\|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} W(t,u^k) \leq\ & \theta e^{\theta t}\|\nabla u^k(t)\|_V^2 - \frac{\nu}{2} e^{\theta t}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{8C_3^4 e^{\theta t}}{\nu}\|F(t,u_t^k)\|_V^2\|\nabla u^k(t)\|_V^2 \\
&+ \frac{2e^{\theta t}}{\nu}\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2e^{\theta h} L e^{\theta t}}{(1-\rho^*)\nu}\|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\|\nabla u^k(t)\|_V^2 = \|\nabla u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \kappa\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2
$$

e

$$
\|u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|\nabla u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,
$$

temos também

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\langle \nabla u^k(t), \nabla u^k(t)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle Au^k(t), u^k(t)\right\rangle \\
&\leq \|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u^k(t)\|_{L^2} \leq \|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla u^k(t)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$
\|\nabla u^k(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|Au^k(t)\|_{L^2(\Omega)},
$$

e portanto

$$\|\nabla u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_1}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e

$$\|\nabla u^k(t)\|^2_V = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \kappa\right)\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(t,u^k) \leq & \left(\frac{1+\kappa\lambda_1}{\lambda_1}\right)\theta e^{\theta t}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\nu}{2}e^{\theta t}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{8C_3^2 e^{\theta t}(1+\lambda_1\kappa)}{\nu\lambda_1}\|F(t,u^k_t)\|^2_V\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{2e^{\theta t}}{\nu}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2e^{\theta h}Le^{\theta t}}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Resta apenas estimar o termo $\|F(t,u^k_t)\|^2_V$. Para isto, notemos que

$$F(t,u^k_t) = u^k(t-\tau(t)) = \begin{cases} \varphi^k(t-\tau(t)) & \text{se} \quad -h \leq t-\tau(t) \leq 0 \\ u^k(t-\tau(t)) & \text{se} \quad 0 < t-\tau(t) \leq T. \end{cases}$$

De qualquer forma, sabemos que existe uma costante $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|F(t,u^k_t)\|^2_V \leq \max\{\|\varphi^k\|^2_{L^\infty(-h,0;V)}, \|u^k\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\} \leq \widetilde{C}.$$

Obtemos então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(t,u^k) \leq & \left(\left(\frac{1+\kappa\lambda_1}{\lambda_1}\right)\theta - \frac{\nu}{2} + \frac{8C_3^2(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\nu\lambda_1} + \frac{2e^{\theta h}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2}\right)e^{\theta t}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{2}{\nu}e^{\theta t}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

donde segue que

$$\frac{d}{dt}W(t,u^k) + M(\theta)e^{\theta t}\|Au^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\nu}e^{\theta t}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para $M(\theta) = -\left(\left(\frac{1+\kappa\lambda_1}{\lambda_1}\right)\theta - \frac{\nu}{2} + \frac{8C_3^2(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\nu\lambda_1} + \frac{2e^{\theta h}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2}\right)$.

Como podemos tomar (veja 1.8, página 15)

$$C_3 = \begin{cases} \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\kappa^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad n=2 \\ \left(2\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\kappa^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad n=3 \end{cases}$$

Logo,

$$M(\theta) = \begin{cases} -\left(\left(\frac{1+\kappa\lambda_1}{\lambda_1}\right)\theta - \frac{\nu}{2} + \frac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e^{\theta h}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2}\right) & \text{se} \quad n=2 \\ -\left(\left(\frac{1+\kappa\lambda_1}{\lambda_1}\right)\theta - \frac{\nu}{2} + \frac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{5}{4}}} + \frac{2e^{\theta h}L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2}\right) & \text{se} \quad n=3. \end{cases}$$

Note que função M é decrescente e, se $\theta = 0$,

$$M(0) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{2} - \dfrac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2} & \text{se} \quad n = 2 \\ \dfrac{\nu}{2} - \dfrac{16(1+\lambda_1\kappa)\widetilde{C}}{\kappa\nu\lambda_1^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{2L}{(1-\rho^*)\nu\lambda_1^2} & \text{se} \quad n = 3. \end{cases}$$

que, pela hipótese (4.20), $M(0) > 0$.

Portanto, existe $\theta^* > 0$ tal que, para $\theta \in (0, \theta^*)$, temos $M(\theta) > 0$. Integrando em t, de 0 a t, temos

$$W(t, u^k) - W(0, u^k) + M(\theta) \int_0^t e^{\theta s} \|Au^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq \frac{2}{\nu} \int_0^t e^{\theta s} \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds,$$

ou ainda,

$$W(t, u^k) + M(\theta) \int_0^t e^{\theta s} \|Au^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq W(0, u^k) + \frac{2e^{\theta t}}{\nu} \int_0^t e^{\theta(s-t)} \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

Usando agora a hipótese **(Hf)**,

$$\begin{aligned} e^{\theta t} \|\nabla u^k(t)\|^2_V &+ M(\theta) \int_0^t e^{\theta s} \|Au^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \|\nabla u^k(0)\|^2_V + \frac{2}{\nu(1-\rho^*)} \int_{-\rho(0)}^0 e^{\theta s} \|G(u^k(s))\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{2}{\nu} e^{\theta t} L(\theta). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Como

$$\int_{-\tau(0)}^0 e^{\theta s} \|G(u^k(s))\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq L^2 \int_{-h}^0 \|u^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = L^2 \int_{-h}^0 \|\varphi^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds$$

e por descarte no primeiro membro, podemos então escrever

$$e^{\theta t} \|\nabla u^k(t)\|^2_V \leq \|\nabla u^k(0)\|^2_V + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)} \int_{-h}^0 \|\varphi^k(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{2}{\nu} e^{\theta t} L(\theta),$$

donde,

$$\begin{aligned} \|\nabla u^k(t)\|^2_V &\leq \left(\|\nabla u^0\|^2_V + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)} \|\varphi\|^2_{L^2(-h,0;H)} \right) e^{-\theta t} + \frac{2}{\nu} L(\theta) \\ &\leq \|\nabla u^0\|^2_V + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)} \|\varphi\|^2_{L^2(-h,0;H)} + \frac{2}{\nu} L(\theta), \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. □

Note que, em particular, se $f = 0$, então qualquer solução forte do problema (4.3) decai a zero exponencialmente.

Agora, como consequência do Teorema 4.2.4, provaremos a existência de conjuntos absorventes nos espaço $C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega))$. Lembremos a definição de conjunto absorvente para o problema (4.3).

Definição 4.2.5. *Seja $u = u(t; u^0, \varphi)$ a solução forte do problema (4.3). Seja $B_{V\cap H^2(\Omega)}(0, \alpha) = \{u \in C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega)) : \|\nabla u\|_V \leq \alpha\}$ a bola com raio α e centro 0. Seja $\varphi \in C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega))$ tal que $\varphi(0) = u^0$ e $\|\varphi\|_{C([-h,0];V\cap H^2(\Omega))} < R$, para algum $R > 0$ fixo. Se existe um tempo $T_0 = T_0(R) > 0$ tal que $\|u(t; u^0, \varphi)\|_{V\cap H^2(\Omega)} < \alpha$ para todo $t \geq T_0$, então a bola $B_{V\cap H^2(\Omega)}(0, \alpha)$ é dita um conjunto absorvente em $C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega))$.*

Corolário 4.2.6. *Suponha que as condições do Teorema 4.2.4 são satisfeitas. Então existe um conjunto absorvente em $C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega))$ para o problema (4.3).*

Prova. Seja $R > 0$ e $\varphi \in B_{V\cap H^2(\Omega)}(0, R)$. Note que

$$\begin{aligned}\|u^0\|_V \leq C(\kappa)\|u^0\|_{V\cap H^2(\Omega)} &= \|\varphi(0)\|_{V\cap H^2(\Omega)} \\ &\leq \max_{-h\leq t\leq 0} \|\varphi(t)\|_{V\cap H^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{C([-h,0];V\cap H^2(\Omega))} < R,\end{aligned}$$

onde $C(\kappa) = \frac{1}{\lambda_1} + \kappa$. Do teorema 4.2.4, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_V^2 &\leq e^{-\theta t}\left(\|\nabla u^0\|_V^2 + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)}\|\varphi\|^2_{L^2(-h,0;H)}\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta). \\ &\leq e^{-\theta t}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu(1-\rho^*)}\int_{-h}^0 \|\varphi(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta). \\ &\leq e^{-\theta t}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}\int_{-h}^0 \|\varphi(s)\|^2_V ds\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta). \\ &\leq e^{-\theta t}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}\|\varphi\|^2_{C([-h,0];V)}\int_{-h}^0 1ds\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta). \\ &\leq e^{-\theta t}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta).\end{aligned}$$

Afirmamos que, apartir desta desigualdade, as bolas $B_{V\cap H^2(\Omega)}(0, \alpha)$ com $\alpha^2 > \frac{2}{\nu}L(\theta)$ são conjuntos absorventes em $C([-h, 0]; V \cap H^2(\Omega))$, já que

$$\|\nabla u(t)\|_V \leq \alpha \qquad \text{para todo} \qquad t \geq T_0 = T_0(R) = \frac{1}{\theta}\ln\frac{R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2}{\alpha^2 - \frac{2}{\nu}L(\theta)}.$$

De fato, para $t \geq T_0(R)$, temos

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_V^2 &\leq e^{-\theta\left(\frac{1}{\theta}\ln\frac{R^2+\frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2}{\alpha^2-\frac{2}{\nu}L(\theta)}\right)}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta) \\ &= \frac{\alpha^2 - \frac{2}{\nu}L(\theta)}{R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2}\left(R^2 + \frac{2L^2}{\nu\lambda_1(1-\rho^*)}hR^2\right) + \frac{2}{\nu}L(\theta) \\ &= \alpha^2 - \frac{2}{\nu}L(\theta) + \frac{2}{\nu}L(\theta) = \alpha^2,\end{aligned}$$

e esta prova está completa. □

4.3 Estimativa de energia para a solução fraca

Nesta seção, vamos obter uma estimativa de energia para a solução fraca do Teorema 3.2.2. O procedimento será o mesmo encontrado no Livro de Temam [56]. Multiplicando cada equação em (4.6) pela respectiva γ_{jk} e somando em j, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k(t)\|_V^2 + \nu\|\nabla u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \Big\langle f(t), u^k(t)\Big\rangle + \Big\langle G(u^k(t-\rho(t))), u^k(t)\Big\rangle.$$

Multiplicando agora esta igualdade por $\psi(t) \in D((0,T))$, com $\psi(t) \geq 0$, e integrando em t, de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k(t)\|_V^2 + \nu\|\nabla u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\psi(t)dt$$
$$= \int_0^T \left(\Big\langle f(t), u^k(t)\Big\rangle + \Big\langle G(u^k(t-\rho(t))), u^k(t)\Big\rangle\right)\psi(t)dt.$$

Mas note que

$$\int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^k(t)\|_V^2\psi(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \|u^k(t)\|_V\frac{d}{dt}\psi(t)dt,$$

donde temos

$$\frac{1}{2}\int_0^T -\|u^k(t)\|_V^2\frac{d}{dt}\psi(t) + 2\nu\|\nabla u^k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\psi(t)dt$$
$$= \int_0^T \left(\Big\langle f(t), u^k(t)\Big\rangle + \Big\langle G(u^k(t-\rho(t))), u^k(t)\Big\rangle\right)\psi(t)dt.$$

Passando agora o limite inferior, quando $k \to \infty$, chegamos a

$$\frac{1}{2}\int_0^T -\|u(t)\|_V^2\frac{d}{dt}\psi(t) + 2\nu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\psi(t)dt$$
$$\leq \int_0^T \left(\langle f(t), u(t)\rangle + \langle G(u(t-\rho(t))), u(t)\rangle\right)\psi(t)dt,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u(t)\|_V^2\psi(t) + 2\nu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\psi(t)dt$$
$$\leq \int_0^T \left(\langle f(t), u(t)\rangle + \langle G(u(t-\rho(t))), u(t)\rangle\right)\psi(t)dt,$$

para toda $\psi \in D((0,T))$, $\psi \geq 0$. Isto significa que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_V^2 + \nu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle f(t), u(t)\rangle + \langle G(u(t-\rho(t))), u(t)\rangle.$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Reescrevendo, obtemos

$$\left\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t)\right\rangle_V + \nu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle f(t), u(t)\rangle + \langle G(u(t-\rho(t))), u(t)\rangle \tag{4.24}$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

4.4 Estabilidade de soluções estacionárias

Considere a equação

$$\frac{d}{dt}u + \kappa\frac{d}{dt}Au + \nu Au + B(u,u) = f + G(u). \tag{4.25}$$

com a força externa $f \in V^*$ independe de t. Uma solução estacionária para o problema (4.25) é u_∞ tal que

$$\nu Au_\infty + B(u_\infty, u_\infty) = f + G(u_\infty). \tag{4.26}$$

O próximo resultado mostra que esta equação possui solução estacionária u_∞. Este resultado pode ser encontrado em [7], e em [23], mas por motivos de clareza, vamos exibi-la. Para o próximo resultado, vamos considerar o espaço V munido da norma $|||\cdot||| = \|\nabla\cdot\|$, isto é, $\|\cdot\|_V\ \|\nabla\cdot\|$.

Teorema 4.4.1. *Suponha $f \in V^*$ e $\nu > \dfrac{L}{\lambda_1}$ onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Stokes $A = -P\Delta$ e L é a condição de Lipschitz da função G. Então, o problema estacionário*

$$\nu Au + B(u,u) = f + G(u)$$

possui solução estacionária $u_\infty \in V$. Se além disso $(\nu - \frac{L}{\lambda_1})^2 > C_1^2\|f\|_{V^*}$, onde C_1 é a constante de inclusão de V em $L^4(\Omega)$, então, a solução é única. Se $f \in H$ então $u_\infty \in D(A)$.

Prova. V é um espaço de Hilbert. Para cada $z \in V$, temos que

$$\nu\langle\cdot,\cdot\rangle_V + b(z,\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

é bilinear, contínua e coerciva. E como

$$f + \langle G(z), \cdot\rangle_{L^2(\Omega)} \in V^*$$

então pelo teorema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in V$ tal que

$$\nu\langle u, v\rangle_V + b(z,u,v) = \langle f, v\rangle + \langle G(z), v\rangle, \tag{4.27}$$

para toda $v \in V$. A unicidade de u permite definir a aplicação φ que a cada $z \in V$ associa $u = \varphi(z)$, tal que (4.27) é satisfeita. Tomando $v = u$ em (4.27) temos

$$\nu\|u\|_V^2 = \langle f, u\rangle + \langle G(z), u\rangle$$

donde

$$\nu\|u\|_V^2 \le \|f\|_{V^*}\|u\|_V + \|G(z)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f\|_{V^*}\|u\|_V + L\|z\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{V^*}\|u\|_V + \frac{L}{\lambda_1}\|z\|_V\|u\|_V
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\nu\|u\|_V \leq \|f\|_{V^*} + \frac{L}{\lambda_1}\|z\|_V. \tag{4.28}
$$

Tomemos $k > 0$ tal que $k(\nu - \frac{L}{\lambda_1}) > \|f\|_{V^*}$, e consideremos o conjunto

$$
X = \{z \in V; \quad \|z\|_V \leq k\}.
$$

O conjunto X é um conjunto convexo e compacto de $(L^4(\Omega))^3$, em virtude da imersão compacta de V em $(L^4(\Omega))^3$. Mais ainda, por (4.28) e da escolha de k temos que a aplicação φ leva X em X.

Para provarmos a continuidade desta aplicação φ, sejam $z_1, z_2 \in X$ e $u_1, u_2 \in X$ tais que

$$
\nu \langle u_i, v\rangle_V + b(z_i, u_i, v) = \langle f, v\rangle + \langle G(z_i), v\rangle \qquad (i = 1, 2)
$$

para toda $v \in V$. Fazendo a diferença entre estas duas igualdades, segue que

$$
\nu \langle u_1 - u_2, v\rangle_V = b(z_2, u_2, v) - b(z_1, u_1, v) + \langle G(z_1) - G(z_2), v\rangle ,
$$

ou ainda,

$$
\nu \langle u_1 - u_2, v\rangle_V = b(z_2 - z_1, u_1, v) - b(z_2, u_1 - u_2, v) + \langle G(z_1) - G(z_2), v\rangle
$$

e escolhendo $v = u_1 - u_2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\nu\|u_1 - u_2\|_V^2 &= b(z_2 - z_1, u_1, u_1 - u_2) + \langle G(z_1) - G(z_2), u_1 - u_2\rangle \\
&\leq \|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^4(\Omega)} + \|G(z_1) - G(z_2)\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_1\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)}\|u_1\|_V\|u_1 - u_2\|_V + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|z_1 - z_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_V \\
&\leq kC_1\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_V + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|z_1 - z_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1 - u_2\|_V,
\end{aligned}
$$

onde C_1 é a constante de imersão de V em $(L^4(\Omega))^3$. Obtemos assim,

$$
\nu\|u_1 - u_2\|_V \leq kC_1\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)} + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|z_1 - z_2\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Como consequência desta última desigualdade e das inclusões $V \hookrightarrow (L^4(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\nu}{C_1}\|u_1 - u_2\|_{L^4(\Omega)} &\leq \frac{\nu C_1}{C_1}\|u_1 - u_2\|_V \\
&\leq kC_1\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)} + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|z_1 - z_2\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq kC_1\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)} + \frac{LC_2}{\sqrt{\lambda_1}}\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)}\\
&= \left(kC_1 + \frac{LC_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\|z_1 - z_2\|_{L^4(\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde C_2 é a constante de inclusão de $(L^4(\Omega))^3$ em $(L^2(\Omega))^3$. Segue que φ é contínua de $L^4(\Omega)$ em $L^4(\Omega)$. O teorema de ponto fixo de Schauder garante agora que existe um ponto fixo para φ e tal ponto fixo é solução estacionária de (4.26).

Para provar a unicidade sejam u_1 e u_2 duas soluções estacionárias de (4.26). Então

$$\nu A u_1 + B(u_1, u_1) = f + G(u_1),$$

e também

$$\nu A u_2 + B(u_2, u_2) = f + G(u_2). \tag{4.29}$$

Fazendo a diferença entre estas equações, e colocando $w = u_1 - u_2$, temos

$$\nu A w + B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2) = G(u_1) - G(u_2),$$

e aplicando esta equação em w, obtemos

$$\nu \langle Aw, w\rangle + b(u_1, u_1, w) - b(u_2, u_2, w) = \langle G(u_1) - G(u_2), w\rangle .$$

Como

$$\nu \langle Aw, w\rangle = \nu \langle \nabla w, \nabla w\rangle = \nu\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} = \nu\|w\|^2_V,$$

e

$$
\begin{aligned}
&b(u_1, u_1, w) - b(u_2, u_2, w)\\
&\qquad = b(u_1, w, w) + b(u_1, u_2, w) - b(u_2, u_2, w)\\
&\qquad = b(u_1, w, w) - b(w, u_2, w)\\
&\qquad = -b(w, u_2, w),
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
\nu\|w\|^2_V &\leq |b(w, u_2, w)| + \|G(u_1) - G(u_2)\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \|w\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^4(\Omega)} + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_V\\
&\leq C_1^2\|w\|_V\|u_2\|_V\|w\|_V + \frac{L}{\lambda_1}\|u_1 - u_2\|_V\|w\|_V\\
&= C_1^2\|u_2\|_V\|w\|^2_V + \frac{L}{\lambda_1}\|w\|^2_V.
\end{aligned}
$$

Mas, aplicando (4.29) em u_2, obtemos

$$\nu\|u_2\|^2_V = \langle f, u_2\rangle + \langle G(u_2), u_2\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|f\|_{V^*}\|u_2\|_V + \|G(u_2)\|_{L^2}\|u_2\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{V^*}\|u_2\|_V + \frac{L}{\lambda_1}\|u_2\|_V^2,
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\|u_2\|_V \le \frac{\|f\|_{V^*}}{(\nu - \frac{L}{\lambda_1})}.
$$

Desta desigualdade, temos

$$
\nu\|w\|_V^2 \le \frac{C_1^2\|f\|_{V^*}}{(\nu - \frac{L}{\lambda_1})}\|w\|_V^2 + \frac{L}{\lambda_1}\|w\|_V^2,
$$

e reorganizando os termos, segue que

$$
\left((\nu - \tfrac{L}{\lambda_1})^2 - C_1^2\|f\|_{V^*}\right)\|w\|_V^2 \le 0,
$$

que, pela condição assumida, traz a unicidade da solução.

Se $f \in H$ então, denotando u_∞ a solução da equação estacionária, temos

$$
\nu A u_\infty + B(u_\infty, u_\infty) = f + G(u_\infty)
$$

e tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ com u_∞, podemos estimar $\|u_\infty\|_V$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\nu\|u_\infty\|_V^2 &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} + \|G(u_\infty)\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_V + L\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_V + \frac{L}{\lambda_1}\|u_\infty\|_V\|u_\infty\|_V,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\|u_\infty\|_V \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}(\nu - \frac{L}{\lambda_1})}\|f\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Além disso (veja [53], página 243),

$$
\|B(u_\infty, u_\infty)\|_{L^2(\Omega)} \le
\begin{cases}
C_3\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_\infty\|_V\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} & \text{para} \quad n = 2 \\
C_3\|u_\infty\|_V^{\frac{3}{2}}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} & \text{para} \quad n = 3
\end{cases}
$$

Desta forma, temos a estimativa para $\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}$ dada por

$$
\begin{aligned}
\nu\|Au_\infty\|_{L^2} &\le \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|B(u_\infty, u_\infty)\|_{L^2(\Omega)} + \|G(u_\infty)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_3\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_\infty\|_V\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + L\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_3 C(\Omega)\|u_\infty\|_V^{\frac{3}{2}}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + L\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C_4^2}{\nu}\|u_\infty\|_V^3 + \frac{\nu}{2}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)} + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|u_\infty\|_V,
\end{aligned}
$$

para $n = 2$, e

$$
\begin{aligned}
\nu\|Au_\infty\|_{L^2} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|B(u_\infty,u_\infty)\|_{L^2(\Omega)} + \|G(u_\infty)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_3\|u_\infty\|_V^{\frac{3}{2}}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + L\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_3\|u_\infty\|_V^{\frac{3}{2}}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + L\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C_4^2}{\nu}\|u_\infty\|_V^3 + \frac{\nu}{2}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)} + \frac{L}{\sqrt{\lambda_1}}\|u_\infty\|_V,
\end{aligned}
$$

se $n=3$,

onde $C_4 = \max\{2C_3C(\Omega), 2C_3\}$ e $C(\Omega)>0$ é a constante da desigualdade de Poincaré.

Daí, segue a desigualdade

$$
\frac{\nu}{2}\|Au_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C_4^2}{\nu\lambda_1^{\frac{3}{2}}(\nu-\frac{L}{\lambda_1})^3}\|f\|_{L^2(\Omega)}^3 + \frac{L}{\lambda_1(\nu-\frac{L}{\lambda_1})}\|f\|_{L^2(\Omega)}
$$

e portanto $u_\infty \in D(A)$. Isto termina esta prova. □

Voltando a considerar o espaço V munido da norma $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \kappa\,\|\nabla\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4.2. *Sejam $u_0 \in V$, $\varphi \in L^2(-h,0;V)$, $f(t)\equiv f \in V^*$ e suponha $\nu > \dfrac{L}{\lambda_1}$ e também*

$$
2\frac{\nu}{\kappa} - \frac{L}{\lambda_1\kappa} - \frac{C_1^2(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa)\|f\|_{V^*}^2}{\kappa(\nu-\frac{L}{\lambda_1})^2} > \frac{L}{(1-\rho^*)\lambda_1} + \frac{C_1^2}{(1-\tau^*)} \tag{4.30}
$$

onde C_1 é a constante de inclusão de $(V,\|\nabla\cdot\|)$ em $(L^4(\Omega))^3$. Então qualquer solução fraca do problema (4.3), que satisfaz a estimativa de energia (4.24), converge exponencialmente, quando $t\to\infty$, para a solução estacionária u_∞ do problema (4.26). Mais precisamente, existem constantes positivas C e λ tais que

$$
\|u(t)-u_\infty\|_V^2 \leq Ce^{-\lambda t}\left(\|u_0-u_\infty\|_V^2 + \|\varphi-u_\infty\|_{L^2(-h,0;V)}^2\right).
$$

para todo $t\geq 0$.

Prova. Do produto interno de (4.3) com u_∞ em $(L^2(\Omega))^3$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tfrac{d}{dt}u(t),u_\infty\right\rangle_V + \nu\left\langle\nabla u(t),\nabla u_\infty\right\rangle \quad &+ b(u(t-r(t)),u(t),u_\infty)\\
&= \langle f,u_\infty\rangle + \langle G(u(t-\rho(t))),u_\infty\rangle
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Lembre-se que $u_\infty \in V$ satisfaz

$$
\nu Au_\infty + B(u_\infty,u_\infty) = f + G(u_\infty). \tag{4.32}
$$

Do produto interno de (4.32) com $u(t)$ em $(L^2(\Omega))^3$, obtemos

$$
\nu\left\langle\nabla u_\infty,\nabla u(t)\right\rangle + b(u_\infty,u_\infty,u(t)) = \langle f,u(t)\rangle + \langle G(u_\infty),u(t)\rangle
$$

Finalmente, do produto interno de (4.32) com u_∞, em $(L^2(\Omega))^3$, temos

$$\nu \langle \nabla u_\infty, \nabla u_\infty \rangle = \langle f, u_\infty \rangle + \langle G(u_\infty), u_\infty \rangle,$$

ou seja

$$\nu \|\nabla u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle f, u_\infty \rangle + \langle G(u_\infty), u_\infty \rangle. \tag{4.33}$$

Denote $w(t) = u(t) - u_\infty$. Somando a estimativa de energia (4.24) (para $f(t) \equiv f$) com (4.33) e subtraindo (4.31) e (4.32), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t) \right\rangle_V & +\nu\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|\nabla u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\langle \frac{d}{dt}u(t), u_\infty \right\rangle_V \\
& -\nu \langle \nabla u(t), \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} - b(u(t-r(t)), u(t), u_\infty) \\
& -\nu \langle \nabla u_\infty, \nabla u(t) \rangle_{L^2(\Omega)} - b(u_\infty, u_\infty, u(t)) \\
& \leq \langle f, u(t) \rangle + \langle G(u(t-\rho(t))), u(t) \rangle + \langle f, u_\infty \rangle + \langle G(u_\infty), u_\infty \rangle \\
& \quad - \langle f, u_\infty \rangle - \langle G(u(t-\rho(t))), u_\infty \rangle - \langle f, u(t) \rangle - \langle G(u_\infty), u(t) \rangle.
\end{aligned}$$

Após o cancelamento de termos, o segundo membro da equação acima pode ser reescrito na forma

$$\langle G(u(t-\rho(t))) - G(u_\infty), w(t) \rangle,$$

enquanto o primeiro membro pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t) - u_\infty \right\rangle_V & + \nu \left(\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u(s), \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_\infty, \nabla u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_\infty\|^2_{L^2} \right) \\
& - b(u(t-r(t)), u(t), u_\infty) - b(u_\infty, u_\infty, u(t)).
\end{aligned}$$

Mas como

$$-b(u_\infty, u_\infty, u(t)) = b(u_\infty, u(t), u_\infty),$$

então

$$\begin{aligned}
-b(u(t-r(t)), u(t), u_\infty) - b(u_\infty, u_\infty, u(t)) & \\
& = -b(u(t-r(t)), u(t), u_\infty) + b(u_\infty, u(t), u_\infty) \\
& = -b(w(t-r(t)), u(t), u_\infty) \\
& = -b(w(t-r(t)), u(t), u_\infty) + b(w(t-r(t)), u_\infty, u_\infty) \\
& = -b(w(t-r(t)), w(t), u_\infty).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\nu \Big(\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} & - \langle \nabla u(s), \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_\infty, \nabla u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&= \nu \Big(\langle \nabla u(s), \nabla u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_\infty, \nabla u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \langle \nabla u_\infty, \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u(s), \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&= \nu \Big(\langle \nabla w(s), \nabla u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla w(s), \nabla u_\infty \rangle_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&= \nu \langle \nabla w(s), \nabla w(s) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \nu \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Lembremos também que, já que $\dfrac{d}{dt} u_\infty = 0$, então

$$
\left\langle \frac{d}{dt} u(t), u(t) - u_\infty \right\rangle_V = \left\langle \frac{d}{dt} w(t), w(t) \right\rangle_V = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_V.
$$

Desta forma, ainda podemos escrever (4.4), usando $w(t) = u(t) - u_\infty$, como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_V + \nu \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} - b(w(t - r(t)), w(t), u_\infty) \\
\leq \langle G(u(t - \rho(t))) - G(u_\infty), w(t) \rangle,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_V \leq & - 2\nu \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2b(w(t - r(t)), w(t), u_\infty) \\
& + 2 \langle G(u(t - \rho(t))) - G(u_\infty), w(t) \rangle.
\end{aligned}
$$

Usando esta estimativa, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Big(e^{\lambda t} \|w(t)\|^2_V \Big) &= \lambda e^{\lambda t} \|w(t)\|^2_V + e^{\lambda t} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2_V \\
&\leq \lambda e^{\lambda t} \|w(t)\|^2_V - 2e^{\lambda t} \nu \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2e^{\lambda t} b(w(t - r(t)), w(t), u_\infty) \\
&\qquad + 2e^{\lambda t} \langle G(u(t - \rho(t))) - G(u_\infty), w(t) \rangle \\
&\leq \lambda e^{\lambda t} \|w(t)\|^2_V - 2e^{\lambda t} \nu \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2e^{\lambda t} b(w(t - r(t)), w(t), u_\infty) \\
&\qquad + 2e^{\lambda t} \|G(u(t - \rho(t))) - G(u_\infty)\|_{L^2} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
2e^{\lambda t} \|G(u(t - \rho(t))) & - G(u_\infty)\|_{L^2(\Omega)} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2e^{\lambda t} L \|u(t - \rho(t)) - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq e^{\lambda t} \Big(L \|u(t - \rho(t)) - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} + L \|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&\leq e^{\lambda t} \left(L \|w(t - \rho(t))\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{L}{\lambda_1} \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right);
\end{aligned}
$$

e também,

$$
\begin{aligned}
&2e^{\lambda t} b(w(t-r(t)), w(t), u_\infty) \\
&\qquad \le 2e^{\lambda t}\|w(t-r(t))\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_\infty\|_{L^4(\Omega)} \\
&\qquad \le 2e^{\lambda t}\frac{C_1}{\kappa}\|w(t-r(t))\|_V\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}C_1\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

onde C_1 é a constante tal que $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)} \le C_1 \|\nabla\cdot\|$. Chegamos à estimativa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2\right) &\le \lambda e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2 + e^{\lambda t}\left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right)\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + Le^{\lambda t}\|w(t-\rho(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 2e^{\lambda t}C_1\|w(t-r(t))\|_V\|\nabla w(t)\|_V C_1\|u_\infty\|_V \\
&\le \lambda e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2 + Le^{\lambda t}\|w(t-\rho(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 2e^{\lambda t}C_1\|w(t-r(t))\|_V\|\nabla w(t)\|_V C_1\|u_\infty\|_V.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, aplicando a equação estacionária

$$\nu A u_\infty + B(u_\infty, u_\infty) = f + G(u_\infty)$$

em u_∞, temos

$$
\begin{aligned}
\nu\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le \|f\|_{V^*}\|u_\infty\|_V + L\|u_\infty\|_{L^2}\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|f\|_{V^*}\|u_\infty\|_V + \frac{L}{\lambda_1}\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
$$

donde obtemos

$$\left(\nu - \tfrac{L}{\lambda_1}\right)\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \|f\|_{V^*}\|u_\infty\|_V$$

Mas

$$\|u_\infty\|_V \le \left(\frac{1}{\lambda_1} + \kappa\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)}$$

Então,

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\left(\frac{1}{\lambda_1} + \kappa\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{V^*}}{\left(\nu - \frac{L}{\lambda_1}\right)},$$

e substituindo esta estimativa obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2\right) &\le e^{\lambda t}\lambda\|w(t)\|_V^2 + e^{\lambda t}\left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right)\frac{1}{\kappa}\|w(t)\|_V^2 + Le^{\lambda t}\|w(t-\rho(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 2e^{\lambda t}C_1\|w(t-r(t))\|_V\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1} + \kappa\right)^{\frac{1}{2}}C_1\|f\|_{V^*}}{\left(\nu - \frac{L}{\lambda_1}\right)} \\
&\le e^{\lambda t}\lambda\|w(t)\|_V^2 + e^{\lambda t}\left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right)\frac{1}{\kappa}\|w(t)\|_V^2 + Le^{\lambda t}\|w(t-\rho(t))\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ e^{\lambda t} C_1^2 \|w(t-r(t))\|_V^2 + e^{\lambda t} \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \|f\|_{V^*}}{(\nu - L\lambda_1^{-1})} \right)^2 \frac{1}{\kappa} \|w(t)\|_V^2 \\
\leq{}& e^{\lambda t} \left(\lambda + \left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right) \frac{1}{\kappa} + \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \|f\|_{V^*}}{\kappa^{\frac{1}{2}}(\nu - L\lambda_1^{-1})} \right)^2 \right) \|w(t)\|_V^2 \\
&+ L e^{\lambda t} \|w(t-\rho(t))\|_{L^2(\Omega)}^2 + e^{\lambda t} C_1^2 \|w(t-\tau(t))\|_V^2.
\end{aligned}
$$

Integrando em t, temos

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2 \\
&\leq \|w(0)\|_V^2 + \left(\lambda + \left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right) \frac{1}{\kappa} + \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \|f\|_{V^*}}{\kappa^{\frac{1}{2}}(\nu - L\lambda_1^{-1})} \right)^2 \right) \int_0^t e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\quad + L \int_0^t e^{\lambda s} \|w(s-\rho(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C_1^2 \int_0^t e^{\lambda s} \|w(s-r(s))\|_V^2 ds \\
&\leq \|w(0)\|_V^2 + \left(\lambda + \left(-2\nu + \frac{L}{\lambda_1}\right) \frac{1}{\kappa} + \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \|f\|_{V^*}}{\kappa^{\frac{1}{2}}(\nu - L\lambda_1^{-1})} \right)^2 \right) \int_0^t e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\quad + \frac{L e^{\lambda h}}{(1-\rho^*)} \int_{-h}^t e^{\lambda s} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{e^{\lambda h} C_1^2}{(1-\tau^*)} \int_{-h}^t e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\leq \|w(0)\|_V^2 + \left(\frac{L e^{\lambda h}}{(1-\rho^*)\lambda_1} + \frac{C_1^2 e^{\lambda h}}{(1-\tau^*)} \right) \int_{-h}^0 e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\quad + \left(\lambda + \frac{L}{\kappa\lambda_1} - \frac{2\nu}{\kappa} + \left(\frac{\left(\frac{1}{\lambda_1}+\kappa\right)^{\frac{1}{2}} C_1 \|f\|_{V^*}}{\kappa^{\frac{1}{2}}(\nu - L\lambda_1^{-1})} \right)^2 + \frac{L e^{\lambda h}}{(1-\rho^*)\lambda_1} + \frac{C_1^2 e^{\lambda h}}{(1-\tau^*)} \right) \int_0^t e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds.
\end{aligned}
$$

Em virtude da hipótese (4.30), podemos escolher $\lambda > 0$ para que a constante da última integral seja igual a zero, e a desigualdade restante,

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2 &\leq \|w(0)\|_V^2 + \left(\frac{L e^{\lambda h}}{(1-\rho^*)\lambda_1} + \frac{C_1^2 e^{\lambda h}}{(1-\tau^*)} \right) \int_{-h}^0 e^{\lambda s} \|w(s)\|_V^2 ds \\
&\leq \|w(0)\|_V^2 + \left(\frac{L e^{\lambda h}}{(1-\rho^*)\lambda_1} + \frac{C_1^2 e^{\lambda h}}{(1-\tau^*)} \right) \|w(s)\|_{L^2(-h,0;V)}^2
\end{aligned}
$$

nos leva a

$$
e^{\lambda t}\|w(t)\|_V^2 \leq C \left(\|w(0)\|_V^2 + \|w(s)\|_{L^2(-h,0;V)}^2 \right)
$$

e portanto

$$
\|u(t) - u_\infty\|_V^2 \leq C e^{-\lambda t} \left(\|u_0 - u_\infty\|_V^2 + \|\phi - u_\infty\|_{L^2(-h,0;V)}^2 \right),
$$

como queriamos. $\square$

Capítulo 5

Existência de solução para a Equação do tipo Kelvin-Voigt com retardo limitado e dados de fronteira não nulos

Resumo do capítulo: Desejamos estabelecer a existência e unicidade de solução em dimensão 2 e 3, para o sistema equações do tipo Kelvin-Voigt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \left(\left(F\left(t,u_t\right)\right)\cdot\nabla\right)u + \nabla p = f(t) + g\left(t,u_t\right)$$

sujeito a condições iniciais, de retardo, de divergência nula mas com condição de contorno não nula. Para este estudo, aplicaremos a teoria apresentada no Capítulo 2, mais precisamente os Teoremas de extensão e restrição para campos vetoriais solenoidais dependentes do tempo.

Desejamos estabelecer a existência e unicidade de solução em dimensão 2 e 3, para o sistema equações do tipo Kelvin-Voigt

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \left(\left(F\left(t,u_t\right)\right)\cdot\nabla\right)u\left(t,x\right) + \nabla p = f(t) + g\left(t,u_t\right)$$

sujeito a condições iniciais, de retardo, de contorno e de divergência nula.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$. Considere o seguinte sistema de equações do tipo Kelvin-Voigt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \left(\left(F\left(t,u_t\right)\right)\cdot\nabla\right)u & & \\ \qquad\qquad\qquad +\nabla p = f\left(t\right) + g\left(t,u_t\right) & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ \text{div } u = 0 & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ u = k & \text{sobre} & (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = u^0\left(x\right) & \text{em} & \Omega \\ u_0 = \varphi & \text{em} & (-h,0)\times\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

onde u representa o campo de velocidades, p a pressão hidrostática, $k \neq 0$ é a velocidade na fronteira, f é a força externa sem retardo, g é outra força externa com alguma característica hereditária, u^0 é velocidade inicial, φ é o dado inicial com alguma característica hereditária, $\nu > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $\kappa > 0$ é o coeficiente que caracteriza as propriedades elásticas do fluido Kelvin-Voigt em questão. Sendo h um número positivo fixado, por u_t denotaremos a função definida em $(-h,0)$, dada por

$$u_t\left(s\right) = u\left(t+s\right), \quad s \in \left(-h,0\right).$$

Considere $Q_T = (0,T)\times\Omega$, e $\Sigma_T = (0,T)\times\partial\Omega$ é a superficie lateral de Q_T, e para $n \in \mathbb{N}$ e $p > 1$, defina $\mathbf{L}^p\left(\Omega\right) = L^p\left(\Omega\right)^n$.

Consideraremos, a força externa g satisfazendo as hípoteses $(H1)-(H4)$ (capítulo 1), para $X = Y = \mathbf{L}^2\left(\Omega\right)$.

5.1 Problema de Fronteira Não Homogêneo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira C^∞. Sobre o cilindro $Q_T = (0,T)\times\Omega$, considere o problema não homogêneo para as Equações Kelvin-Voight com retardo limitado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + & \left(F\left(u,u_t\right)\cdot\nabla\right)u + \nabla P = f\left(t\right) + g\left(t,u_t\right), \\ \text{div } u = 0, & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = k(t,x), & \text{sobre} \quad (0,T)\times\partial\Omega \\ u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), & \text{em} \quad \Omega \\ u\left(t,x\right) = \varphi\left(t,x\right), & \text{em} \quad (-h,0)\times\Omega, \;\; \infty > h > 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Pela condição de divergência nula, pedimos que

$$\int_{\partial\Omega} u(t,x')\cdot n(x')\,dx' = 0$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

Assuma que $\operatorname{div} u_0 = 0$, e que a seguinte condição de compatibilidade seja verdadeira

$$(u_0 \cdot n)|_{\partial\Omega} = (k \cdot n)|_{t=0}$$

Suponha que

$$f \in L^2\left(0,T;V^{-1}(\Omega)\right), \tag{5.3}$$

$$u_0 \in V^1(\Omega), \tag{5.4}$$

$$k \in G^1(\Sigma_T). \tag{5.5}$$

Em virtude do Teorema de Extensão, para $k \in G^1(\Sigma_T)$, podemos construir uma extensão $v \in \mathcal{V}^1(Q_T)$ definida sobre Q_T e com suporte numa vizinhança de Σ_T. Defina $\widetilde{v} \in \mathcal{V}^1\left((-h,T)\times\Omega\right)$, da seguinte forma

$$\widetilde{v}(t,x) = v(t,x) \text{ para } (t,x) \in [0,T]\times\Omega,$$

$$\widetilde{v}(t,x) \in C^1\left(-h,0;C^\infty(\Omega)\right),$$

$$\operatorname{div} \widetilde{v}(t) = 0 \text{ para } t \in (-h,0)$$

e que $\widetilde{v}(0) = v(0)$

Procuramos solução $u \in \mathcal{V}^1\left((-h,T)\times\Omega\right)$ de (5.2) da forma:

$$u = \widetilde{v} + w. \tag{5.6}$$

Com $\widetilde{v} \in \mathcal{V}^1\left((-h,T)\times\Omega\right)$, e $w \in \mathcal{V}^1\left((-h,T)\times(\Omega)\right)$ satisfazendo o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \kappa\Delta\dfrac{\partial w}{\partial t} - \nu\Delta w + \left(\left(w(t-r(t)) + \widetilde{v}(t-r(t))\right)\cdot\nabla\right)(w+\widetilde{v}) & \\ \qquad\qquad +\nabla p = f_1(t) + g\left(t, w_t + \widetilde{v}_t\right) & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ w = 0 & \text{sobre} \quad (0,T)\times\partial\Omega \\ w(x,0) = u_0(x) - v_0(x) & \text{em} \quad \Omega \\ w(t,x) = \varphi(t,x) - \widetilde{v}(t,x) & \text{em} \quad (-h,0)\times\Omega \end{cases} \tag{5.7}$$

onde $f_1 = f - \dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial t} + \kappa\Delta\dfrac{\partial\widetilde{v}}{\partial t} + \nu\Delta\widetilde{v} \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$; e lembrando que, para cada tempo $t \in (0,T)$, denotamos por w_t a função definida em $(-h,0)$ pela relação $w_t(\theta) = w(t+\theta)$, $\theta \in (-h,0)$.

O problema em análise é o seguinte:

Dado $f_1 \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $w_0 \in V$, $\varphi - \widetilde{v} \in L^2\left(-h,0;V\right)$, F e g verificam as propriedades antes definidas;
desejamos encontrar $w \in L^2\left(-h,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right)$ e $\dfrac{dw}{dt} \in L^2\left(-h,T;V\right)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(w,v\right)}{dt} + \kappa\dfrac{d\left(\nabla w,\nabla v\right)}{dt} & +\nu\left(\nabla w,\nabla v\right) + b\left(w(t-r(t)) + \widetilde{v}(t-r(t)),\left(w+\widetilde{v}\right)(t),v\right) \\ & = \left\langle f_1\left(t\right),v\right\rangle + \left\langle g\left(t,w_t+\widetilde{v}_t\right),v\right\rangle, v \in V \\ w\left(0\right) = w_0 & \\ w\left(t\right) = \varphi\left(t\right) - \widetilde{v}(t) & t \in \left(-h,0\right). \end{cases} \tag{5.8}$$

Note que, como $w \in C\left([0,T];V\right)$, a igualdade $w(0) = w_0$ faz sentido (em V).

Levando em conta o produto interno $\left(\cdot,\cdot\right)_V = \left(\cdot,\cdot\right) + \kappa\left(\left(\cdot,\cdot\right)\right)$, podemos reescrever o sistema (5.8) como segue:

Encontrar $w \in L^2\left(-h,T;V\right) \cap L^\infty\left(0,T;V\right)$ e $\dfrac{dw}{dt} \in L^2\left(-h,T;V\right)$, tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(w,v\right)_V}{dt} + \nu\left\langle Au,v\right\rangle + & \left\langle B\left(w(t-r(t)) + \widetilde{v}(t-r(t)),(w+\widetilde{v})(t)\right),v\right\rangle \\ & = \left\langle f_1(t),v\right\rangle + \left\langle g\left(t,w_t+\widetilde{v}_t\right),v\right\rangle, t \geq 0, v \in V, \\ w\left(0\right) = w_0, & \\ w\left(t\right) = \varphi\left(t\right) - \widetilde{v}\left(t\right), & t \in \left(-h,0\right). \end{cases} \tag{5.9}$$

5.1.1 Existência de solução

Considere o conjunto $\{e_j\}$ ortonormal e completo em $(V,\|\cdot\|_V)$

Com a ajuda destas autofunções, defina o seguinte problema aproximado de ordem $k \geq 1$:

Encontrar $w^k : [-h,T] \to V$, da forma $w^k(t) = \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)e_i$, onde $\gamma_{ik}(t)$ são tais que:

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(w^k,e_j\right)_V}{dt} + \nu\left(\left(w^k,e_j\right)\right) + & b\left(w^k(t-r(t)) + P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),(w^k+P_{V_k}\widetilde{v}),e_j\right) \\ & = \left\langle f\left(t\right),e_j\right\rangle + \left\langle g\left(t,w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t\right),e_j\right\rangle, \forall t \geq 0 \text{ e } e_j \\ w_0^k = P_{V_k}w_0 & \\ w^k\left(t\right) = P_{V_k}\left(\varphi(t) - \widetilde{v}(t)\right) & t \in \left(-h,0\right) \end{cases} \tag{5.10}$$

onde P_{V_k} é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em V_k, e portanto, podemos reescrever $P_{V_k}\widetilde{v}(t)$ da forma $P_{V_k}\widetilde{v}(t) = \sum_{i=1}^{k}\widetilde{\gamma}_{ik}(t)e_i$, onde $\widetilde{\gamma}_{ik}(t) = (P_{V_k}\widetilde{v}(t),e_i)_V$. Note que, quando trabalhamos com o caso homôgeneo do Capítulo anterior, bastava a projeção de V em V_k, pois todos os elementos do sistema de equações eram elementos de V, o que não acontece aqui.

Observe ainda que, $\|P_{V_k}\widetilde{v}(t)-\widetilde{v}(t)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow 0$.

Então (5.10) é um sistema de equações diferenciais funcionais nas funções $\gamma_{1k},\ldots,\gamma_{kk}$. Substituindo $w^k(t)=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)e_i$ e $P_{V_k}\widetilde{v}(t)=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{\gamma}_{ik}(t)e_i$ em (5.10), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} d\frac{\gamma_{ik}(t)}{dt}\left(e_i,e_j\right)_V & +\nu \textstyle\sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)\left(\left(e_i,e_j\right)\right)\\ & +\sum_{i,l=1}^{k}\left(\gamma_{ik}(t-r(t))+\widetilde{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right)\left(\gamma_{lk}(t)+\widetilde{\gamma}_{lk}(t)\right)b\left(e_i,e_l,e_j\right)\\ & =\left\langle f_1\left(t\right),e_j\right\rangle+\left\langle g\left(t,w_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t\right),e_j\right\rangle\end{aligned}$$

para $j=1,2,\ldots,k$.

Escrevendo na forma matricial, e levando em conta que

$$\left(e_i,e_j\right)_V=\begin{cases}0 & \text{se} \quad i\neq j,\\ 1 & \text{se} \quad i=j\end{cases}$$

Obtemos

$$\begin{bmatrix} d\dfrac{\gamma_{1k}(t)}{dt}\\ d\dfrac{\gamma_{2k}(t)}{dt}\\ \vdots\\ d\dfrac{\gamma_{kk}(t)}{dt}\end{bmatrix}+\nu\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)\left(\left(e_i,e_1\right)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)\left(\left(e_i,e_2\right)\right)\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{k}\gamma_{ik}(t)\left(\left(e_i,e_k\right)\right)\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{i,l=1}^{k}\left(\gamma_{ik}(t-r(t))+\widetilde{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right)\left(\gamma_{lk}(t)+\widetilde{\gamma}_{lk}(t)\right)b\left(e_i,e_l,e_1\right)\\ \sum_{i,l=1}^{k}\left(\gamma_{ik}(t-r(t))+\widetilde{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right)\left(\gamma_{lk}(t)+\widetilde{\gamma}_{lk}(t)\right)b\left(e_i,e_l,e_2\right)\\ \vdots\\ \sum_{i,l=1}^{k}\left(\gamma_{ik}(t-r(t))+\widetilde{\gamma}_{ik}(t-r(t))\right)\left(\gamma_{lk}(t)+\widetilde{\gamma}_{lk}(t)\right)b\left(e_i,e_l,e_k\right)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\left\langle f_1\left(t\right),e_1\right\rangle\\ \left\langle f_1\left(t\right),e_2\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle f_1\left(t\right),e_k\right\rangle\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left\langle g\left(t,u_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t\right),e_1\right\rangle\\ \left\langle g\left(t,u_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t\right),e_2\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle g\left(t,u_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t\right),e_k\right\rangle.\end{bmatrix}$$

Reescrevendo em forma simplificada

$$\frac{d\Gamma_k(t)}{dt} =$$

$$\Phi_1\left(\Gamma_k(t)\right) + \Phi_2\left(\Gamma_k(t-r(t)) + \widetilde{\Gamma}_k(t-r(t)), \Gamma_k(t) + \widetilde{\Gamma}_k(t)\right) + \Phi_3\left(f_1(t)\right) + \Phi_4\left(g\left(t, u_t^k\right)\right)$$

onde as funções Φ_1, Φ_2, Φ_3 e Φ_4 são funções vetoriais definidas como sugere a equação matricial, $\Gamma_k(t) = (\gamma_{lk}(t), \ldots, \gamma_{kk}(t))$ e $\widetilde{\Gamma}_k(t) = (\widetilde{\gamma}_{lk}(t), \ldots, \widetilde{\gamma}_{kk}(t))$.

Vamos mostrar que $\Phi_i, (i = 1, \ldots, 4)$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\left\|\Phi_1\left(\Gamma_k(t)\right) - \Phi_1\left(\overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k \leq C_1(k)\left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k;$

2.
$$\begin{aligned}\Big\|\Phi_2\left((\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)), (\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right) - \Phi_2\left((\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)), (\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right)\Big\|_k \\ \leq C_2(k)\left\|\Gamma_k(t-r(t)) - \overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k \left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right\|_k \\ +C_2(k)\left\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t))\right\|_k \left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k;\end{aligned}$$

3. $\left\|\Phi_3\left(f\right)\right\|_k \leq C_3(k)\left\|f(t)\right\|_{V^*};$

4. $\left\|\Phi_4\left(g\left(t,\xi_t^k\right)\right) - \Phi_4\left(g\left(t,\eta_t^k\right)\right)\right\|_k \leq C_3\left\|g\left(t,\xi_t^k\right) - g\left(t,\eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)},$

com $\left\|\xi^k(s) - \eta^k(s)\right\|_V \leq C_5\left\|\Gamma_k(s) - \overline{\Gamma}_k(s)\right\|_k$,

onde $\|\cdot\|_k$ é a norma em $\mathbb{R}^k$, que podemos considerar como a norma da soma (devido à equivalência de normas), e $C_i > 0$ são constantes, para $i = 1, 2, 3, 4$.

De fato,

1. Dadas $\Gamma_k(t), \overline{\Gamma}_k(t)$ em $\mathbb{R}^k$, temos
$$\left\|\Phi_1\left(\Gamma_k(t)\right) - \Phi_1\left(\overline{\Gamma}_k(t)\right)\right\|_k \leq \nu\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\left|\gamma_{i,k}(t) - \overline{\gamma}_{i,k}(t)\right|\left|((e_i, e_j))\right|\right)$$
$$\leq \nu\left(\sum_{j=1}^{k}\max_{1\leq i\leq k}\left|((e_i,e_j))\right|\right)\sum_{i=1}^{k}\left|\gamma_{i,k}(t) - \overline{\gamma}_{i,k}(t)\right| \leq C_1(k)\left\|\Gamma_k(t) - \overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k.$$

2. $\Big\|\Phi_2\left((\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)), (\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right) - \Phi_2\left((\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)), (\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right)\Big\|_k$
$$\begin{aligned}= \sum_{j=1}^{k}\Bigg|\sum_{i,l=1}^{k}(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))((\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t))b\left(e_i,e_l,e_j\right) \\ - \sum_{i,l=1}^{k}(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)b\left(e_i,e_l,e_j\right)\Bigg|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k}\max_{1\leq i\leq k}\left|b\left(e_i,e_l,e_j\right)\right|\right)\\
&\left(\left|\sum_{i,l=1}^{k}(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\right)\\
&\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left(\left|(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\right)\\
&\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\\
&+C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\\
&\leq C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))-(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))\right|\left|(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\\
&+C_2(k)\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))\right|\left|(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\\
&\leq C_2(k)\left[\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\gamma_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))-(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))\right|\right]\sum_{l=1}^{k}\left|(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\\
&+C_2(k)\left[\sum_{i,l=1}^{k}\left|(\gamma_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)-(\overline{\gamma}_{l,k}+\widetilde{\gamma}_{l,k})(t)\right|\right]\sum_{l=1}^{k}\left|(\overline{\gamma}_{i,k}+\widetilde{\gamma}_{i,k})(t-r(t))\right|\\
&\leq C_2(k)\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t))-(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t))\right\|_k\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right\|_k\\
&+C_2(k)\left\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t))\right\|_k\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)-(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right\|_k\\
&=C_2(k)\left\|\Gamma_k(t-r(t))-\overline{\Gamma}_k(t-r(t))\right\|_k\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right\|_k\\
&+C_2(k)\left\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t))\right\|_k\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k.
\end{aligned}
$$

3. $\left\|\Phi_3\left(f_1\right)\right\|_k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\langle f_1(t),e_j\rangle\right|\leq\left(\sum_{j=1}^{k}\|e_j\|_V\right)\|f(t)\|_{V*}=C_3(k)\,\|f(t)\|_{V^*}.$

4. $\left\|\Phi_4\left(g\left(t,\xi_t^k\right)\right)-\Phi_4\left(g\left(t,\eta_t^k\right)\right)\right\|_k\leq\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\left|\left\langle g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right),w_j\right\rangle\right|$

$$
\leq\left(\sum_{j=1}^{k}\|e_j\|_{L^2(\Omega)}\right)\left\|g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C_4(k)\left\|g\left(t,\xi_t^k\right)-g\left(t,\eta_t^k\right)\right\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Note ainda que

$$\Phi_1(0)=0,\ \Phi_2(0,0)=0 \text{ e } \Phi_4(0)=0.$$

Além disso, considerando $e=(e_1,\ldots,e_k)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\left\|\xi^k(s)-\eta^k(s)\right\|_V^2 &\leq \left\|\xi^k(s)-\eta^k(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\nabla\xi^k(s)-\nabla\eta^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)e_j-\overline{\gamma}_{jk}(t)e_j\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)\nabla e_j-\overline{\gamma}_{jk}(t)\nabla e_j\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)-\overline{\gamma}_{jk}(t)\right)e_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_{jk}(t)-\overline{\gamma}_{jk}(t)\right)\nabla e_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\|\left\langle\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t),e\right\rangle_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\left\langle\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t),\nabla e\right\rangle_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \left\|\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k\|e\|_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\kappa\left\|\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k\|\nabla e\|_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \int_\Omega\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k^2\|e\|_k^2\,dx+\kappa\int_\Omega\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k^2\|\nabla e\|_k^2\,dx \\
&= \left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k^2\int_\Omega\left(\|e\|_k^2+\kappa\|\nabla e\|_k^2\right)dx \\
&= \left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k^2\sum_{j=1}^{k}\|e_j\|_V^2 \\
&\leq C_5(k)\left\|\Gamma_k(t)-\overline{\Gamma}_k(t)\right\|_k,
\end{aligned}
$$

onde $\langle x,y\rangle_k=\sum_{j=1}^{k}x_jy_j,\quad x=(x_1,\cdots,x_k),y=(y_1,\cdots,y_k)\in\mathbb{R}^k.$

Na busca de solução para a equação

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\Gamma_k(t)}{dt}=\Phi_1\left(\Gamma_k(t)\right) + \Phi_2\left((\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)),(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right)+\Phi_3\left(f_1(t)\right) \\
\qquad\qquad + \Phi_4\left(g(t,x_t^k)\right), \qquad \forall t\geq 0 \\
\Gamma_k(0)=w_0^k \\
\Gamma_k(s)=\phi_k(s) \qquad\qquad s\in(-h,0),
\end{cases}
\tag{5.11}
$$

procuramos solução para a equação integral

$$
\begin{cases}
\Gamma_k(t) = w_0^k+\displaystyle\int_0^t\Phi_1\left(\Gamma_k(s)\right)ds+\int_0^t\Phi_2\left((\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t-r(t)),(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right)ds \\
\qquad\qquad +\displaystyle\int_0^t\Phi_3\left(f_1(s)\right)ds+\int_0^t\Phi_1\left(g(s,x_s^k)\right)ds, \qquad \forall t\geq 0 \\
\Gamma_k(s) = \phi_k(s) \qquad s\in(-h,0).
\end{cases}
\tag{5.12}
$$

Teorema 5.1.1. *Sejam $w_0^k\in\mathbb{R}^k$, $\phi_k\in L^2\left(-h,0;\mathbb{R}^k\right)$, $g:[0,T]\times C\left([0,T],\mathbb{R}^k\right)\to\mathbb{R}^k$ satisfazendos as hipóteses (H3) e (H4). Assumindo Φ_1, Φ_2,Φ_3 e Φ_4 como acima, temos que*

(i) *existe $t_* = t_*(k) \in [0,T]$ tal que o problema abaixo*

$$\begin{cases} \Gamma_k(t) = w_0^k + \displaystyle\int_0^t \Phi_1\left(\Gamma_k(s)\right)\, ds + \int_0^t \Phi_2\left((\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s)), (\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\right)\, ds \\ \qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \Phi_3\left(f_1(s)\right)\, ds + \int_0^t \Phi_4\left(g(s, \xi_s^k)\right)\, ds, \forall t \le t_* \\ \Gamma_k(t) = \phi_k(t) \qquad t \in (-h, 0)\,, \end{cases}$$

possui uma única solução para $t \in [0, t_*]$.

(2i) *Suponha que existe $c > 0$ tal que, se $t_* \in [0,T]$ é tal que existe uma solução $\Gamma_k(t)$ para* (5.12), *então*

$$\sup_{0 \le t \le t_*} \|\Gamma_k(t)\|_k \le c.$$

Nestas condições, existe uma solução $\Gamma_k \in W^{1,2}\left([0,T], \mathbb{R}^k\right)$ para (6) com $t_* = T$

Prova. Tomemos $C > 0$ tal que $\|w_0^k\|_k + \left\|\widetilde{\Gamma}_k(t)\right\|_k \le C$ (lembre-se que $\widetilde{\Gamma}_k(t) = (\widetilde{\gamma}_{1k}(t), \cdots, \widetilde{\gamma}_{kk}(t))$ segue de $P_{V_k}\widetilde{v}(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\gamma}_{ik}(t) e_i$, já conhecido). Defina por $\psi^k(t) = \phi^k(t) + P_{V_k}\widetilde{v}(t)$ para $t \in [-h, 0]$, observe que $\psi^k \in L^2\left(-h, 0; \mathbb{R}^k\right)$.
Sejam

$$M = C + 4$$

e $t_* > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\left(C_1 M + \frac{C_2 M^2}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + 2C_4 C_g^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} M\right) t_* \\ &+ \left(\frac{C_2 M}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + \frac{C_2 M}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} C h^{\frac{1}{2}}\right) t_*^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(C_3 \|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} C h^{\frac{1}{2}}\right) t_*^{\frac{1}{2}} < 1, \end{aligned} \tag{5.13}$$

e sendo $\dfrac{T}{t_*}$ um inteiro. Defina

$$X = \left\{\Gamma \in L^2(-h, t_*; \mathbb{R}^k) \cap C^0([0,t_*]; \mathbb{R}^k);\ \Gamma = \phi^k \quad \text{em} \quad (-h, 0),\ \|\Gamma(t)\|_k \le M \text{ em } \quad [0, t_*]\right\},$$

munido da métrica

$$d(\Gamma, \overline{\Gamma}) = \max_{t \in [-h, t_*]} \|\Gamma(t) - \overline{\Gamma}(t)\|_k.$$

Observe que (X, d) é um espaço métrico completo e $X \neq \emptyset$, pois $\widetilde{\phi}^k$ definido por $\widetilde{\phi}^k = 0$ para $t \in (0, t^*]$, e $\widetilde{\phi}^k = \Gamma_k$ para $t \in [-h, 0]$, pertence a X.

Para cada Γ_k em X, defina

$$\mathcal{T}(\Gamma_k)(t) = \begin{cases} w_0^k + \int_0^t \Phi_1(\Gamma_k(s))ds + \int_0^t \Phi_2((\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s)), (\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s))ds \\ \qquad + \int_0^t \Phi_3(f_1(s))ds + \int_0^t \Phi_4(g(s, \xi_s^k))ds \qquad \forall t \in [0, t_*] \\ \phi^k(t) \qquad\qquad t \in (-h, 0). \end{cases}$$

Portanto, $\mathcal{T}(\Gamma_k) \in L^2(-h, t_*; \mathbb{R}^k) \cap C^0([0, t_*]; \mathbb{R}^k)$ e, por definição, $\mathcal{T}(\Gamma_k)(t) = \phi^k(t)$ em $(-h, 0)$. Para cada $0 \le t \le t_*$, temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\Gamma_k)(t)\|_k &\le \|w_0^k\|_k + \int_0^t \|\Phi_1(\Gamma_k(s))\|_k ds + \int_0^t \|\Phi_2((\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s)), (\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s))\|_k ds \\ &\quad + \int_0^t \|\Phi_3(f_1(s))\|_k ds + \int_0^t \|\Phi_4(g(s, \xi_s^k))\|_k ds \\ &\le C + C_1 \int_0^t \|\Gamma_k(s)\|_k ds + C_2 \int_0^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s))\|_k \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k ds \\ &\quad + C_3 \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*} ds + C_4 \int_0^t \|g(s, \xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le C + C_1 M t_* + C_2 \left(\int_0^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s))\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_3 \left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C_4 \int_0^t \|g(s, \xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le C + C_1 M t_* + C_2 t_*^{\frac{1}{2}} 2M \left(\int_0^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s))\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_3 t_*^{\frac{1}{2}} \|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} + C_4 \int_0^t \|g(s, \xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\le C + C_1 M t_* + \frac{2 C_2 t_*^{\frac{1}{2}} M}{(1 - \tau^*)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{-h}^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C_3 t_*^{\frac{1}{2}} \|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} + C_4 \int_0^t \|g(s, \xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \left(\int_{-h}^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{-h}^0 \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds + \int_0^t \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\int_{-h}^0 \|\psi^k(s)\|_k^2 ds + 4M^2 t_* \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}^2 + 4M^2 t_* \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2M t_*^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + C h^{\frac{1}{2}} + 2M t_*^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(\Gamma_k)(t)\|_k &\leq C + C_1Mt_* + \frac{C_2Mt_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\left(\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + Ch^{\frac{1}{2}} + 2Mt_*^{\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad + C_3t_*^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} + C_4\int_0^t \|g(s,\xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)}ds\\
&\leq C + C_1Mt_* + \frac{C_2Mt_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + \frac{C_2MCh^{\frac{1}{2}}t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad + 2\frac{C_2t_*M^2}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_3t_*^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)} + C_4\int_0^t \|g(s,\xi_s^k)\|_{L^2(\Omega)}ds
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Pela desigualdade (H4) temos:

$$\begin{aligned}
C_4\int_0^t \|g(s,\xi_s^k)\|_{L^2}ds &\leq C_4\left(\int_0^t 1ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \|g(s,\xi_s^k)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \|g(s,\xi_s^k)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-h}^t \|\xi^k(s)\|_V^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-h}^0 \|\xi^k(s)\|_V^2ds + \int_0^t \|\xi^k(s)\|_V^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}\left(C_5\int_{-h}^0 \|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2ds + C_5\int_0^t \|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}\left(C_5\|\psi^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + C_54M^2t_*\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}\left(\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2Mt_*^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}\left(\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + Ch^{\frac{1}{2}} + 2Mt_*^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + C_4Ch^{\frac{1}{2}}t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}} + 2C_4C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}Mt_*.
\end{aligned}$$

Voltando então, para a limitação de $\mathcal{T}(\Gamma_k)$, temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(\Gamma_k)(t)\|_k \leq C &+ C_1Mt_* + \frac{C_2Mt_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + \frac{C_2MCh^{\frac{1}{2}}t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \frac{C_2t_*M^2}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_3t_*^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{L^2(0,T;V^*)}\\
&+ C_4t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + C_4Ch^{\frac{1}{2}}t_*^{\frac{1}{2}}C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}} + 2C_4C_g^{\frac{1}{2}}C_5^{\frac{1}{2}}Mt_*
\end{aligned}$$

e pela escolha de t_* e de M, temos

$$\|\mathcal{T}(\Gamma_k)(t)\|_k \leq C + 1 < C + 4 = M$$

o que garante que $\mathcal{T}$ leva X em X. Precisamos mostrar que $\mathcal{T}$ é contração.

De fato, se Γ_k e $\overline{\Gamma}_k$ pertencem a X, então

$$
\begin{aligned}
& d(\mathcal{T}(\Gamma_k),\mathcal{T}(\overline{\Gamma}_k)) = \max_{0\le t\le t_*}\|\mathcal{T}(\Gamma_k)(t)-\mathcal{T}(\overline{\Gamma}_k)(t)\|_k \\
& \le \int_0^{t_*}\|\Phi_1(\Gamma_k(s))-\Phi_1(\overline{\Gamma}_k(s))\|_k ds \\
& \quad + \int_0^{t_*}\|\Phi_2((\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s)),(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s))-\Phi_2(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s)),(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s))\|_k ds \\
& \quad + \int_0^{t_*}\|\Phi_4(g(s,\xi_s^k))-\Phi_4(g(s,\eta_s^k))\|_k ds \\
& \le C_1\int_0^{t_*}\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\|_k ds \\
& \quad + C_2\int_0^{t_*}\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))-(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))\right\|_k\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\right\|_k \\
& \quad + C_2\int_0^{t_*}\left\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))\right\|_k\left\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)-(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(t)\right\|_k ds \\
& \quad + C_4\int_0^{t_*}\|g(s,\xi_s^k)-g(s,\eta_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
& \le C_1\int_0^{t_*}\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\|_k ds \\
& \quad + C_2\left(\int_0^{t}\|(\Gamma_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{t_*}\|\Gamma_k(s-r(s))-\overline{\Gamma}_k(s-r(s))\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_2\left(\int_0^{t}\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{t_*}\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_4\left(\int_0^{t} 1 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{t_*}\|g(s,\xi_s^k)-g(s,\eta_s^k)\|_{L^2}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \le C_1 t_* d(\Gamma_k,\overline{\Gamma}_k)+\frac{C_2 2M t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-h}^{t_*}\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_2 t_*^{\frac{1}{2}} d(\Gamma_k,\overline{\Gamma}_k)\left(\int_0^{t_*}\left\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))\right\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-h}^{t_*}\|\xi^k(s)-\eta^k(s)\|_V^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \le C_1 t_* d(\Gamma_k,\overline{\Gamma}_k)+\frac{2C_2 M t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} d(\Gamma_k,\overline{\Gamma}_k) \\
& \quad + \frac{C_2 t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} d(\Gamma_k,\overline{\Gamma}_k)\left(\int_{-h}^{t_*}\|(\overline{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{t_*}\|\Gamma_k(s)-\overline{\Gamma}_k(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(C_1 t_* + \frac{2C_2 M t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_* C_5^{\frac{1}{2}} \right) d(\Gamma_k, \overline{\Gamma}_k) \\
&\qquad + \frac{C_2 t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} d(\Gamma_k, \overline{\Gamma}_k) \left(\int_{-h}^{0} \|(\overline{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds + \int_0^{t_*} \|(\overline{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(C_1 t_* + \frac{C_2 M t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_* C_5^{\frac{1}{2}} \right) d(\Gamma_k, \overline{\Gamma}_k) \\
&\qquad + \frac{C_2 t_*^{\frac{1}{2}}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} d(\Gamma_k, \overline{\Gamma}_k) \left(\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2M t_*^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \left(C_1 t_* + \frac{4C_2 M t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_* C_5^{\frac{1}{2}} + \frac{C_2 t_*^{\frac{1}{2}} \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} \right) d(\Gamma_k, \overline{\Gamma}_k).
\end{aligned}
$$

Agora, como $M > 4 > 1$ então devido à escolha de t_*, escolhemos

$$
K = C_1 t_* + \frac{4C_2 M t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_* C_5^{\frac{1}{2}} + \frac{C_2 t_*^{\frac{1}{2}} \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}}
$$

$$
\leq C_1 M t_* + \frac{C_2 M^2 t_*}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} M t_* + \frac{C_2 M \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}}{(1-\tau^*)^{\frac{1}{2}}} t_*^{\frac{1}{2}} < 1
$$

o que garante que $\mathcal{T}$ é uma contração de X em X. Segue agora, do teorema de ponto fixo para contrações, que $\mathcal{T}$ tem um único ponto fixo. Tal ponto fixo é a solução de (5.12), e portanto, da equação (5.11) no intervalo desejado. Isto termina a prova de (i).

Para provarmos (ii), seja $C > 0$ como na hipótese, isto é, se t_* é tal que existe uma solução $\Gamma_k(t)$ de (5.11) então

$$
\max_{0 \leq t \leq t_*} \|\Gamma_k(t)\|_k \leq C.
$$

Tome M e t_* como no item (i), e $\frac{T}{t_*}$ sendo um inteiro. Nestes termos, existe uma única $\Gamma_k \in L^2(-h, t_*; \mathbb{R}^k) \cap C^0([0,t_*]; \mathbb{R}^k)$ tal que

$$
\Gamma_k(t) = \begin{cases} \phi^k(t) & t \in (-h, 0) \\ w_0^k + \int_0^t \Phi_1(\Gamma_k(s)) ds + \int_0^t \Phi_2((\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s - r(s)), (\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)) ds \\ \qquad + \int_0^t \Phi_3(f_1(s)) ds + \int_0^t \Phi_4(g(s, \xi_s^k)) ds & t \in [0, t_*]. \end{cases}
$$

Se $t_* < T$, definimos,

$$
\widehat{\phi}^k(s) = \Gamma_k(s + t_*) \qquad \text{para} \quad s \in (-h, 0)
$$

e

$$
\widehat{\psi}^k(s) = (\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s + t_*) \qquad \text{para} \quad s \in (-h, 0)
$$

e consideramos o problema de encontrar $\widehat{\Gamma}_k \in X$ tal que

$$\widehat{\Gamma}_k(t) = \begin{cases} \widehat{\phi}^k(t) & t \in (-h,0), \\ \Gamma_k(t_*) + \displaystyle\int_0^t \Phi_1(\widehat{\Gamma}_k(s))ds + \int_0^t \Phi_2((\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s)), (\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s))ds & \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t \Phi_3(f_1(s))ds + \int_0^t \Phi_4(g(s,\widehat{\xi}^k_s))ds & t \in [0,t_*]. \end{cases} \tag{5.16}$$

Note que, se $(t_* - h) \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \|\widehat{\psi}^k(s)\|_k^2 ds &= \int_{-h}^0 \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s+t_*)\|_k^2 ds \\ &= \int_{-h+t_*}^{t_*} \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \\ &\leq \left(2C^2 + 2M^2\right) \int_{-h+t_*}^{t_*} ds = \left(2C^2 + 2M^2\right) h \\ &\leq \|\psi^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + h\left(2C^2 + 2M^2\right), \end{aligned}$$

e por outro lado, se $(t_* - h) < 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \|\widehat{\psi}^k(s)\|_k^2 ds &= \int_{-h+t_*}^{t_*} \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \\ &\leq \int_{-h}^0 \|\psi^k\|_k^2 ds + \int_0^{t_*} \|(\Gamma_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds \\ &\leq \|\psi^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + t_*\left(2C^2 + 2M^2\right) \\ &\leq \|\psi^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + h\left(2C^2 + 2M^2\right), \end{aligned}$$

donde $\|\widehat{\psi}^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} \leq \|\psi^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + h\left(2C^2 + 2M^2\right)$, e portanto,

$$\|\widehat{\psi}^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} \leq \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2h^{\frac{1}{2}}(C+M).$$

O problema (5.16) tem a mesma estrutura do problema (5.12). As funções Φ_1, Φ_2, Φ_3 e Φ_4 possuem em (5.16) as mesmas estimativas que em (5.12). Vamos verificar tal fato. Para Φ_1, temos como anteriormente,

$$\|\Phi_1(\widehat{\Gamma}_k(s)) - \Phi_1(\overline{\widehat{\Gamma}}_k(s))\|_k \leq C_1 \|\widehat{\Gamma}_k(s) - \overline{\widehat{\Gamma}}_k(s)\|_k,$$

donde

$$\int_0^t \|\Phi_1(\widehat{\Gamma}(s))\|_k ds \leq C_1 \int_0^t \|\widehat{\Gamma}(s)\|_k ds \leq C_1 M t_*.$$

Para Φ_2, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_2((\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s)), (\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)) \quad & -\Phi_2((\overline{\widehat{\Gamma}}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s)), (\overline{\widehat{\Gamma}}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s))\|_k \\ & \leq C_2 \|\widehat{\Gamma}_k(s-r(s)) - \overline{\widehat{\Gamma}}_k(s-r(s))\|_k \|(\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k \\ & \quad + C_2 \|\widehat{\Gamma}_k(s) - \overline{\widehat{\Gamma}}_k(s)\|_k \|(\overline{\widehat{\Gamma}}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s-r(s))\|_k, \end{aligned}$$

e da mesma forma que antes

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \|\Phi_2\left(\left(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k\right)(s-r(s)),\left(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k\right)(s)\right)\|_k ds\\
&\qquad\le C_2\int_0^t \|\widehat{\Gamma}_k(s-r(s))+\widetilde{\Gamma}_k(s-r(s))\|_k\|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k ds\\
&\qquad\le C_2\left(\int_0^t \|\widehat{\Gamma}_k(s-r(s))+\widetilde{\Gamma}_k(s-r(s))\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^t \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\qquad\le 2C_2Mt_*^{\frac12}\left(\int_0^t \|\widehat{\Gamma}_k(s-r(s))+\widetilde{\Gamma}_k(s-r(s))\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\qquad\le \frac{2C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\left(\int_{-h}^t \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\qquad= \frac{2C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\left(\int_{-h}^0 \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds+\int_0^t \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\qquad\le \frac{C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\left(\int_{-h}^0 \|\widehat{\psi}^k(s)\|_k^2 ds+4M^2t\right)^{\frac12}\\
&\qquad= \frac{2C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\left(\|\widehat{\psi}^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}^2+4M^2t_*\right)^{\frac12}\\
&\qquad\le \frac{2C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\|\widehat{\psi}^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}+\frac{4C_2M^2t_*}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\\
&\qquad\le \frac{2C_2Mt_*^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}\|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)}+\frac{2C_2(C+M)t_*^{\frac12}h^{\frac12}}{(1-\tau^*)^{\frac12}}+\frac{4C_2M^2t_*}{(1-\tau^*)^{\frac12}}.
\end{aligned}
$$

Para Φ_3, claramente segue a mesma limitação, já que Φ_3 não depende de $\widehat{\Gamma}$, mas sim de $f_1 \in L^2(0,T;V^*)$. Finalmente, temos

$$
\|\Phi_4(g(s,\widehat{\xi}_s^k))-\Phi_4(g(s,\widehat{\eta}_s^k))\|_k\le C_4\|g(s,\widehat{\xi}_s^k)-g(s,\widehat{\eta}_s^k)\|_{L^2},
$$

e similarmente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \|\Phi_4(g(s,\widehat{\xi}_s^k))\|_k ds &\le C_4\int_0^t \|g(s,\widehat{\xi}_s^k)\|_{L^2(\Omega)} ds\\
&\le C_4t_*^{\frac12}\left(\int_0^t \|g(s,\widehat{\xi}_s^k)\|_{L^2}^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\le C_4C_g^{\frac12}t_*^{\frac12}\left(\int_{-h}^t \|\widehat{\xi}_s^k\|_V^2 ds\right)^{\frac12}\\
&\le C_4C_g^{\frac12}t_*^{\frac12}C_5^{\frac12}\left(\int_{-h}^t \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac12}\\
&= C_4C_g^{\frac12}t_*^{\frac12}C_5^{\frac12}\left(\int_{-h}^0 \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds+\int_0^t \|(\widehat{\Gamma}_k+\widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds\right)^{\frac12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-h}^{0} \|(\widehat{\Gamma}_k + \widetilde{\Gamma}_k)(s)\|_k^2 ds + 4M^2 t_* \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} \left(\|\widehat{\psi}^k\|^2_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 4M^2 t_* \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} \|\widehat{\psi}^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2C_4 C_g^{\frac{1}{2}} M t_* C_5^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} \|\psi^k\|_{L^2(-h,0;\mathbb{R}^k)} + 2C_4 C_g^{\frac{1}{2}} t_*^{\frac{1}{2}} C_5^{\frac{1}{2}} (C+M) h^{\frac{1}{2}} + C_4 C_g^{\frac{1}{2}} M t_* C_5^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Procedendo como na parte (i), garantimos a existência de uma única solução $\widehat{\Gamma}_k(t)$, para (5.16), no intervalo $[0, t_*]$. Colocando então

$$
\mathbf{\Gamma}_k(t) = \begin{cases} \Gamma_k(t), & t \in (-h, t_*] \\ \widehat{\Gamma}_k(t - t_*), & t \in [t_*, 2t_*], \end{cases}
$$

obtemos uma única solução para o problema (5.12) no intervalo $(-h, 2t_*]$. Repetindo este processo, após um número finito de passos, obteremos uma única solução para (5.12) no intervalo $(-h, T]$. □

Teorema 5.1.2. *Assuma $w_0 \in V$, $\varphi - \widetilde{v} = \phi \in L^2(-h, 0; V)$, $f_1 \in L^2(0, T; V^*)$ e que $g : [0, T] \times C([-h, 0], V) \to L^2(\Omega)$ satisfaz as hipóteses (H1)-(H4).*

Então, para cada $T > 0$ fixo, existe uma única solução fraca u para o problema (5.2) *tal que $w \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(-h, T; V)$ e $\dfrac{dw}{dt} \in L^2(0, T; V)$.*

Prova. Usaremos o método de Faedo-Galerkin para mostrar a existência de solução fraca. Considere o conjunto $\{e_j\}$ das autofunções do Operador de Stokes, de modo que $\{e_j\}$ seja um conjunto ortonormal em V munido da norma $\|\cdot\|_V$.

Quemos encontrar $w^k(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) e_i$ tal que

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\left(w^k, e_j\right)_V}{dt} + \nu\left(\left(w^k, e_j\right)\right) + b\left(w^k(t - r(t)) + P_{V_k}\widetilde{v}(t - r(t)), w^k(t) + P_{V_k}\widetilde{v}(t), e_j\right) \\
\qquad = \langle f_1(t), e_j\rangle + \left\langle g\left(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t\right), e_j\right\rangle, \quad t \geq 0 \\
w_0^k = P_{V_k} w(0), \\
w^k(t) = P_{V_k}(\varphi(t) - \widetilde{v}(t)) \qquad t \in (-h, 0),
\end{cases}
\tag{5.17}
$$

onde P_{V_k} é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $V_k = [e_1, \ldots, e_k]$.

De acordo Teorema anterior, concluimos que o problema (5.17) possui uma única solução maximal $w^k(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_{ik}(t) w_i$ definida no intervalo $[0, t_k)$ com $0 < t_k \leq T$.

Das estimativas *a priori* a seguir, concluiremos que $t_k = T$.

Voltando à primeira equação em (5.17), multiplicando por $\gamma_{jk}(t)$ e somando, de $j = 1$ até $j = k$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|w^k(t)\right\|^2\right. &+ \left.\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2\right) + \nu\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2 \\ &\leq \left|b\left(w^k(t-r(t)) + P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)), w^k(t) + P_{V_k}\widetilde{v}(t), w^k(t)\right)\right| \\ &+ \left|\left\langle f_1(t), w^k(t)\right\rangle\right| + \left|\left\langle g(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t), w^k(t)\right\rangle\right|\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 &+ \nu\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2 \leq \left|b\left(w^k(t-r(t)), P_{V_k}\widetilde{v}(t), w^k(t)\right)\right| \\ &+ \left|b\left(P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)), P_{V_k}\widetilde{v}(t), w^k(t)\right)\right| + \left|\left\langle f_1(t), w^k(t)\right\rangle\right| \\ &+ \left|\left\langle g(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t), w^k(t)\right\rangle\right|.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Pela desigualdade de Holder e por $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\left|b\left(w^k(t-r(t)), P_{V_k}\widetilde{v}(t), w^k(t)\right)\right| &\leq \left\|w^k(t-r(t))\right\|_{L^4(\Omega)} \left\|\nabla P_{V_k}\widetilde{v}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|w^k(t)\right\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_1\left\|w^k(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V;\end{aligned} \tag{5.19}$$

e também

$$\begin{aligned}\left|b\left(P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)), P_{V_k}\widetilde{v}(t), w^k(t)\right)\right| &\leq \left\|P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V \left\|\nabla P_{V_k}\widetilde{v}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|w^k(t)\right\|_V \\ &\leq C_1\left\|P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Substituindo (5.19) e (5.20) em (5.18), obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2 \\ &\quad\leq C_1\left\|w^k(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V \\ &\quad+ C_1\left\|P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V + \left|\left\langle f_1(t), w^k(t)\right\rangle\right| + \left|\left\langle g(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t), w^k(t)\right\rangle\right|.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Poincaré, e pela equivalência das normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2 &\leq C_1\left\|w^k(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V \\ + C_1\left\|P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V \left\|w^k(t)\right\|_V &+ (1 + C_3(\Omega))^{\frac{1}{2}}\left\|f_1(t)\right\|_{V^*}\left\|\nabla w^k(t)\right\| \\ &+ \left\|g(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t)\right\|\left\|w^k(t)\right\|,\end{aligned}$$

onde $C_3(\Omega) > 0$ é uma constante que depende de Ω. Multiplicando a desigualdade anterior por

2 e integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + 2\nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \le \left\|w^k(0)\right\|_V^2 + 2C_1\int_0^t \left\|w^k(s-r(s))\right\|_V \left\|w^k(s)\right\|_V\, ds\\ +2C_1\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\|_V \left\|w^k(s)\right\|_V\, ds + 2C_4\int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}\left\|w^k(s)\right\|_V\, ds\\ +2\int_0^t \left\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s)\right\| \left\|w^k(s)\right\|\, ds.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young para $q = 2 = q'$,

$$\begin{aligned}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \le \left\|w^k(0)\right\|_V^2 + C_1\int_0^t \left\|w^k(s-r(s))\right\|_V^2\, ds\\ +C_1\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\|_V^2\, ds + C_1\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds\\ +\int_0^t \left\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s)\right\| \left\|w^k(s)\right\|\, ds.\end{aligned}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Young para $q = 2 = q'$ e $\epsilon = C_g$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \le \left\|w^k(0)\right\|_V^2 + C_1\int_0^t \left\|w^k(s-r(s))\right\|_V^2\, ds\\ +C_1\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\|_V^2\, ds + C_1\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds\\ +\frac{1}{C_g}\int_0^t \left\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s)\right\|^2\, ds + C_g\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|^2\, ds.\end{aligned} \tag{5.21}$$

Das hipóteses (H1) e (H4) sobre g, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_g}\int_0^t \left\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s)\right\|^2\, ds\\ &\le \frac{1}{C_g}C_g\int_{-h}^t \left\|w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s(s)\right\|_V^2\, ds\\ &= \int_{-h}^0 \left\|w^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \left\|w^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds\\ &\le \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds + 2\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + 2\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Substitiuindo (5.22) em (5.21), obtemos

$$\begin{aligned}&\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds\\ &\le \left\|w^k(0)\right\|_V^2 + C_1\int_0^t \left\|w^k(s-r(s))\right\|_V^2\, ds + C_1\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\|_{H^1(\Omega)}^2\, ds\\ &+C_1\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds + \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds\\ &+2\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + 2\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + C_g\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|^2\, ds.\end{aligned}$$

Desde que

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\|w^k(s-r(s))\right\|_V^2\, ds &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_{-h}^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\left(\int_{-h}^0 \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds\right)\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s)\right\|_V^2\, ds + \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\left\|\varphi^k\right\|_{L^2(-h,0;V)}^2 + \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\|_V^2\, ds &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_{-h}^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\left(\int_{-h}^0 \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + \int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds\right)\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_{-h}^0 \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds\\ &\leq \frac{1}{(1-\tau^*)}\|P_{V_k}\widetilde{v}\|_{L^2(-h,0;V)}^2 + \frac{1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}&\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \leq \left\|w^k(0)\right\|_V^2 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\left\|\varphi^k\right\|_{L^2(-h,0;V)}^2\\ &\quad+\frac{C_1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\|P_{V_k}\widetilde{v}\|_{L^2(-h,0;V)} + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds\\ &\quad+C_1\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds + \int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds\\ &\quad+2\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds + 2\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + C_g\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|^2\, ds.\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_V$

$$\begin{aligned}&\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \leq \Bigg(\left\|w^k(0)\right\|_V^2 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\left\|\varphi^k\right\|_{L^2(-h,0;V)}^2\\ &\quad+\frac{C_1}{(1-\tau^*)}\|P_{V_k}\widetilde{v}\|_{L^2(-h,0;V)} + \left(2 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\right)\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds\\ &+\int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds\Bigg) + \left(2 + C_1 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)} + C_g\right)\int_0^t \left\|w^k(s)\right\|_V^2\, ds.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned}&\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \nu\int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2\, ds \leq \Bigg(\left\|w^k(0)\right\|_V^2 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\left\|\varphi^k\right\|_{L^2(-h,0;V)}^2\\ &\quad+\frac{C_1}{(1-\tau^*)}\|P_{V_k}\widetilde{v}\|_{L^2(-h,0;V)} + \left(2 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)}\right)\int_0^t \|P_{V_k}\widetilde{v}(s)\|_V^2\, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2\, ds\\ &+\int_{-h}^0 \left\|\varphi^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v}(s)\right\|_V^2\, ds\Bigg)\left(2 + C_1 + \frac{C_1}{(1-\tau^*)} + 4C_g\right) t e^{\left(2+C_1+\frac{C_1}{(1-\tau^*)}+C_g\right)t},\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

Sabendo que

$$f_1 \in L^2\left(0,T;V^*\right),$$

$$\varphi^k \in L^2\left(-h,0;V\right),$$

$$\varphi^k + P_{V_k}\widetilde{v} \in L^2\left(-h,0;V\right),$$

$$w_0 \in V,$$

$$P_{V_k}\widetilde{v} \in L^2\left(-h,T;V\right),$$

temos que

$$\left\|w^k(t)\right\|_V^2 + \int_0^t \left\|\nabla w^k(s)\right\|^2 \, ds \leq C$$

para todo $0 \leq t \leq T$, onde $C > 0$ é uma constante.

Portanto,

$$\left\{w^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty\left(0,T;V\right)$$

$$\left\{w^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^2\left(-h,T;V\right).$$

Em particular,

$$\left\{w^k\right\} \text{ é uniformemente limitada em } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right),$$

pois $\left\|w^k\right\|^2 \leq \left\|w^k\right\|_V^2$.

Das estimativas acima, segue que

$$\left(w^k + P_{V_k}\widetilde{v}\right)\left(\cdot - r(\cdot)\right) \in L^2\left(-h,T;V\right)$$

independentemente de k.

Agora, vamos mostrar que $\dfrac{dw^k}{dt} \in L^2\left(0,T;V\right)$. De fato, voltando à primeira equação em (5.17), multiplicando por $\dfrac{d\gamma_{jk}}{dt}$ e somando em $j=1$ até $j=k$, obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|^2 + \kappa\left\|\nabla\frac{dw^k}{dt}\right\|^2\right) \quad & +\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2}{dt} \\ & +b\left(w^k(t-r(t)) + P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)), w^k(t) + P_{V_k}\widetilde{v}(t), \frac{dw^k}{dt}\right) \\ & = \left\langle f_1(t), \frac{dw^k}{dt}\right\rangle + \left\langle g(t, w_t^k + P_{V_k}\widetilde{v}_t), \frac{dw^k}{dt}\right\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2+\frac{\nu}{2}\frac{d\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2}{dt}+b\left(w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t),\frac{dw^k}{dt}\right)\\&=\left\langle f_1(t),\frac{du^k}{dt}\right\rangle+\left\langle g(t,w_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t),\frac{dw^k}{dt}\right\rangle.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Pela desigualdade de Holder, segue que:

$$\begin{aligned}&\left|b\left(w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t),\frac{dw^k}{dt}\right)\right|\\&\leq\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_{L^6(\Omega)}\left\|\nabla(w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t))\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_{L^6(\Omega)},\end{aligned}$$

e como $V\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$, temos que:

$$\begin{aligned}&\left|b\left(w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t),\frac{dw^k}{dt}\right)\right|\\&\leq\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V\left\|\nabla(w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t))\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V.\end{aligned}$$

Além disso, $w^k+P_{V_k}\widetilde{v}\in L^\infty(0,T;V)$, então existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$\begin{aligned}&\left|b\left(w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t),\frac{dw^k}{dt}\right)\right\|_V\\&\leq C_1\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V.\end{aligned}$$

Aplicando à desigualdade de Young na última desigualdade acima,

$$\begin{aligned}&\left|b\left(w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t)),w^k(t)+P_{V_k}\widetilde{v}(t),\frac{dw^k}{dt}\right)\right|\\&\leq 6\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V^2+\frac{1}{6}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2.\end{aligned}$$

Voltando a equação (5.23), temos

$$\begin{aligned}2\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2+\nu\frac{d\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2}{dt}&\leq 12\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V^2+\frac{1}{3}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2\\&+2\left\|f_1(t)\right\|_{V^*}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V+2\left\|g(t,w_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t)\right\|\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|\end{aligned}$$

ou ainda, novamente pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}&2\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2+\nu\frac{d\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2}{dt}\leq 12\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V^2+\frac{1}{3}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2\\&+12\left\|f_1(t)\right\|_{V^*}^2+\frac{1}{3}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2+12\left\|g(t,w_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t)\right\|^2+\frac{1}{3}\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{dw^k}{dt}\right\|_V^2+\nu\frac{d\left\|\nabla w^k(t)\right\|^2}{dt}\leq 12\left(\left\|w^k(t-r(t))+P_{V_k}\widetilde{v}(t-r(t))\right\|_V^2\right.\\&\left.+\left\|f_1(t)\right\|_{V^*}^2+\left\|g(t,w_t^k+P_{V_k}\widetilde{v}_t)\right\|^2\right).\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\nu \left\|\nabla w^k(t)\right\|^2 + \int_0^t \left\|\frac{dw^k(s)}{dt}\right\|_V^2 \, ds \leq \nu \left\|\nabla w^k(0)\right\|^2$$
$$+12\left(\int_0^t \left\|w^k(s-r(s)) + P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\right\|_V^2 \, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2 \, ds + \int_0^t \left\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s)\right\|^2 \, ds\right)$$
$$\leq \nu \left\|\nabla w^k(0)\right\|^2 + 12\left(\int_0^t \left\|w^k(s-r(s)) + P_{V_k}\widetilde{v}(s-r(s))\right\|_V^2 \, ds + \int_0^t \|f_1(s)\|_{V^*}^2 \, ds\right.$$
$$\left. + C_g \int_{-h}^t \left\|(w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s)\right\|_V^2 \, ds\right) \leq C_4,$$

onde $C_4 > 0$ é uma constante positiva.

Esta última desigualdade segue por

$$f_1 \in L^2\left(0, T; V^*\right)$$

$$w^k \in L^2\left(-h, T; V\right)$$

$$\left(w^k(\cdot - r(\cdot)) + P_{V_k}\widetilde{v}(\cdot - r(\cdot))\right) \in L^2\left(-h, T; V\right)$$

independentemente de k, e por $w_0 \in V$.

Portanto $\dfrac{dw^k}{dt} \in L^2\left(0, T; V\right)$.

Como consequência dos resultados de compacidade:

$$\left\{w; w, \frac{dw}{dt} \in L^2\left(0, T; V\right)\right\} \hookrightarrow L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

segue que

$$w^k \longrightarrow w \text{ fortemente em } L^2\left(-h, T; L^2(\Omega)\right).$$

Observe que,

$$\left(w^k_{(\cdot)} + P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \to \left(w_{(\cdot)} + \widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \text{ fortemente em } L^2(-h, T; L^2(\Omega)).$$

De fato, como

$$P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)} \longrightarrow \widetilde{v}_{(\cdot)} \text{ em } L^2(-h, T; L^2(\Omega)),$$

temos que,

$$\left(w^k_{\cdot} + P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)}\right) = \left(w^k_{(\cdot)} + P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \longrightarrow \left(w_{\cdot} + \widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \text{ fortemente em } L^2(-h, T; L^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$g\left(\cdot, w^k_{\cdot} + P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \to g\left(\cdot, w_{(\cdot)} + \widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \text{ fortemente em } L^2\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right).$$

De fato, da hípótese $[H4]$ sobre g, temos:

$$\int_0^T \left\| g\left(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s\right) - g\left(s, w_s + \widetilde{v}_s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_g \int_{-h}^T \left\| w^k(s) - w(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$
$$+C_g \int_{-h}^T \|P_{V_k}\widetilde{v}(s) - \widetilde{v}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = C_g \left\| w^k - w\right\|_{L^2(-h,T;L^2(\Omega))} + C_g \|P_{V_k}\widetilde{v} - \widetilde{v}\|_{L^2(-h,T;L^2(\Omega))}.$$

Portanto, como $w^k + P_{V_k}\widetilde{v} \to w + \widetilde{v}$ fortemente em $L^2\left(-h, T; L^2(\Omega)\right)$, temos que:

$$g\left(\cdot, w_{(\cdot)}^k + P_{V_k}\widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \to g\left(\cdot, w_{(\cdot)} + \widetilde{v}_{(\cdot)}\right) \text{ fortemente em } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

quando $k \to \infty$.

Observe também que, desde que $w \in L^2(0,T;V)$ e $\dfrac{dw}{dt} \in L^2(0,T;V)$, segue $w \in C([0,T];V)$ (veja [3]), e faz sentido calcular $w(0)$.

<u>*Passagem ao limite*</u>

Considere $\psi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$, tal que $\psi(T) = 0$. Então, para todo $v \in V$, obtemos

$$\int_0^T \frac{d\left(w^k, v\right)_V}{ds}\psi(s)\, ds + \nu \int_0^T \left(\left(w^k(s), v\right)\right)\psi(s)\, ds$$
$$+ \int_0^T b((w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s - r(s)), (w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(s), v\rangle\, \psi(s)\, ds + \int_0^T \left(g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s), v\right)\psi(s)\, ds.$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado esquerdo da igualdade acima, obtemos:

$$-\int_0^T \left(w^k(s), v\right)_V \psi'(s)\, ds + \left(w^k(0), v\psi(0)\right)_V + \nu \int_0^T \left(\left(w^k(s), v\right)\right)\psi(s)\, ds$$
$$+ \int_0^T b((w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s - r(s)), (u^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(s), v\rangle\, \psi(s)\, ds + \int_0^T \left(g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s), v\right)\psi(s)\, ds.$$

Fazendo $k \to \infty$, vamos analisar a convergência de cada parcela da igualdade acima.

1. Como
$$\int_0^T \left(w^k(s) - w(s), v\right)_V \psi'(s)\, ds = \int_0^T \left(w^k(s) - w(s), v\right)\psi'(s)\, ds$$
$$+\kappa \int_0^T \left(\left(w^k(s) - w(s), v\right)\right)\psi' s)\, ds.$$

   e também

$$\int_0^T \left(w^k(s) - w(s), v\right)\psi'(t)\, ds \leq C \left\| w^k - w\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0$$

pois $w^k \to w$ fortemente em $L^2\left(-h, T; L^2(\Omega)\right)$, quando fazemos $k \to \infty$. Além disso,

$$\int_0^T \left(\left(w^k(s) - w(s), v\right)\right) \psi'(s)\, ds \longrightarrow 0$$

pois colocando

$$F_{v\psi'(s)}(e) = \int_0^T ((e(s), v))\, \psi'(s)\, ds, \qquad \forall v \in V,$$

temos que $F_{v\psi'(s)} \in L^2\left(0, T; V^*\right)$ e portanto, a convergência fraca $w^k \rightharpoonup w$ em $L^2(0,T;V)$ nos dá

$$F_{v\psi'(s)}(w^k) \to F_{v\psi'(s)}(w).$$

Portanto

$$-\int_0^T \left(w^k(s), v\right)_V \psi'(s)\, ds \longrightarrow -\int_0^T (w(s), v)_V\, \psi'(s)\, ds.$$

2. Procendendo como no ítem anterior, temos que

$$\nu \int_0^T \left(\left(w^k(s), v\right)\right) \psi(s)\, ds \longrightarrow \nu \int_0^T ((w(s), v))\, \psi(s)\, ds$$

quando $k \to \infty$.

3.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big(b((w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s - r(s)), (w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s), v\psi(s)) \\
&\qquad\qquad - b((w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w + \widetilde{v})(s), v\psi(s))\Big)\, ds \\
&= \int_0^T b\left((w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s - r(s)) - (w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s), v\psi(s)\right) \\
&\qquad + \int_0^T b\left((w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s) - (w + \widetilde{v})(s), v\psi(s)\right)\, ds.
\end{aligned}$$

Das *estimativas a priori* e de $\widetilde{v} \in \mathcal{V}^1\left(Q_T\right) \cap C^1\left(-h, 0; C^\infty(\Omega)\right)$ temos que

$$\left\|\nabla\left(w^k(s) + P_{V_k}\widetilde{v})(s)\right)\right\| < C,$$

$$\|v\psi(s)\|_{L^\infty(\Omega)} < C,$$

$$\|\nabla(v\psi(s))\|_{L^\infty(\Omega)} < C,$$

$$\left\|(w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s)\right\| < C,$$

e $\left\|(w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(\cdot - r(\cdot))) - (w + \widetilde{v})(\cdot - r(\cdot)))\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0$, quando $k \to \infty$.

Portanto

$$\int_0^T b((w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s - r(s)), (w^k + P_{V_k}\widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds$$
$$\longrightarrow \int_0^T b((w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w + \widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds,$$

quando $k \to \infty$.

4.
$$\int_0^T \Big(g(t, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s) - g(s, w_s + \widetilde{v}_s), v\Big)\, \psi(s)\, ds$$
$$\leq \int_0^T \Big\|g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s) - g(s, w_s + \widetilde{v}_s)\Big\|\, \|v\psi(s)\|\, ds$$
$$\leq \widetilde{C}_g \left(\int_{-h}^T \Big\|w^k(s) - w(s)\Big\|^2\, ds + \int_{-h}^T \|P_{V_k}\widetilde{v}(s) - \widetilde{v}(s)\|^2\, ds \right)$$
$$= \widetilde{C}_g \Big(\big\|w^k - w\big\|_{L^2(-h,T;L^2(\Omega))} + \|P_{V_k}\widetilde{v} - \widetilde{v}\|_{L^2(-h,T;L^2(\Omega))} \Big) \longrightarrow 0,$$

quando $k \to \infty$, pois $w^k \to w$ fortemente em $L^2\left(-h, T; L^2(\Omega)\right)$ e $P_{V_k}\widetilde{v} \to \widetilde{v}$ fortemente em $L^2\left(-h, T; L^2(\Omega)\right)$.

Portanto,

$$\int_0^T \Big(g(s, w_s^k + P_{V_k}\widetilde{v}_s), v\Big)\, \psi(s)\, ds \longrightarrow \int_0^T (g(s, w_s + \widetilde{v}_s), v)\, \psi(s)\, ds.$$

5. Por fim, como $w_0 \in V$, segue que

$$\Big((w^k(0) - w_0), v\psi(0)\Big)_V \longrightarrow 0$$

pois $P_{V_k}w_0 = \sum_{i=1}^{k} (\widetilde{v}, e_i)_V e_i$ converge fortemente para w_0 (lembrando que P_{V_k} é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em V_k).

Então, a passagem ao limite nos fornece

$$-\int_0^T (w(s), v)_V\, \psi'(s)\, ds + (w_0, v\psi(0))_V + \nu \int_0^T ((w(s), v))\, \psi(s)\, ds$$
$$+ \int_0^T b((w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w + \widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds = \int_0^T \langle f_1(t), v\rangle\, \psi(s)\, ds$$
$$+ \int_0^T (g(s, w_s + \widetilde{v}_s), v)\, \psi(s)\, ds$$

para todo $v \in V$.

Em particular, se $\psi \in D\left((0, T)\right)$, então $\psi(0) = 0$, e portanto,

$$-\int_0^T (w(s), v)_V\, \psi'(s)\, ds + \nu \int_0^T ((w(s), v))\psi(s)\, ds + \int_0^T b((w + \widetilde{v})(s - r(s)), (w + \widetilde{v})(s), v\psi(s))\, ds$$
$$= \int_0^T \langle f(t), v\rangle\, \psi(s)\, ds + \int_0^T (g(s, w_s + \widetilde{v}_s), v)\, \psi(s)\, ds$$

para todo $v \in V$, e todo $\psi \in D((0,T))$. Portanto

$$\int_0^T \frac{d\,(w(s),v)_V}{dt}\psi(s)\,ds + \nu\int_0^T ((w(s),v))\psi(s)\,ds + \int_0^T b((w+\widetilde{v})(s-r(s)),(w+\widetilde{v})(s),v\psi(s))\,ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(s),v\rangle\,\psi(s)\,ds + \int_0^T (g(s,w_s+\widetilde{v}_s),v)\,\psi(s)\,ds,$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D((0,T))$, ou,

$$\int_0^T \frac{d\,(w(s),v)}{ds}\psi(s)\,ds + \kappa\int_0^T \frac{d\,((w(s),v))}{ds}\psi(s)\,ds + \nu\int_0^T ((w(s),v))\psi(s)\,ds$$
$$+\int_0^T b((w+\widetilde{v})(s-r(s)),(w+\widetilde{v})(s),v\psi(s))\,ds = \int_0^T \langle f_1(s),v\rangle\,\psi(s)\,ds + \int_0^T (g(s,w_s+\widetilde{v}_s),v)\,\psi(s)\,ds$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D((0,T))$, ou ainda

$$\int_0^T \left\langle \frac{dw(s)}{ds} + \kappa\frac{d\,(Aw(s))}{dt} + \nu Aw(s) + B\left((w+\widetilde{v})(s-r(s)),(w+\widetilde{v})(s)\right),v\right\rangle\psi(s)\,ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(s)+g(s,w_s+\widetilde{v}_s)),v\rangle\,\psi(s)\,ds$$

para todo $v \in V$ e para todo $\psi \in D((0,T))$; ou seja, a igualdade

$$\frac{dw(t)}{dt} + \kappa\frac{d\,(Aw(t))}{dt} + \nu Aw(t) + B\left((w+\widetilde{v})(t-r(t)),(w+\widetilde{v})(t)\right) = f_1(t) + g(t,w_t+\widetilde{v}_t)$$

é verdadeira, ao menos em V^*.

Vamos verificar que $w(0) = w_0$ em V. Para $\psi \in C^1([0,T],\mathbb{R})$, com $\psi(T) = 0$, e $v \in V$ temos

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\,(w(s)-\kappa Aw(s))}{ds},v\right\rangle\psi(s)\,ds$$
$$= -\int_0^T \langle w(s)+\kappa Aw(s),v\rangle\,\psi'(s)\,ds + \langle w(0)-\kappa Aw(0),v\psi(0)\rangle\,.$$

Então

$$-\int_0^T (w(s),v)\,\psi'(s)\,ds - \kappa\int_0^T ((w(s),v))\,\psi'(s)\,ds + (u(0),v\psi(0)) + \kappa\left((w(0),v\psi(0))\right)$$
$$+\,\nu\int_0^T ((w(s),v)))\,\psi(s)\,ds + \int_0^T b(w_s+\widetilde{v}_s,w(s)+\widetilde{v}(s),v\psi(t))\,ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(s),v\rangle\,\psi(s)\,ds + \int_0^T \langle g(s,w_s+\widetilde{v}_s),v\rangle\,\psi(s)\,ds.$$

Mas, pela passagem ao limite

$$-\int_0^T (w(s),v)\,\psi'(s)\,ds - \kappa\int_0^T ((w(s),v))\,\psi'(s)\,ds + (w_0,v\psi(0)) + \kappa\left((w_0,v\psi(0))\right)$$
$$+\nu\int_0^T ((w(s),v))\,\psi(s)\,ds + \int_0^T b(w_s+\widetilde{v}_s),w(s)+\widetilde{v}(t),v\psi(t))\,ds$$
$$= \int_0^T \langle f_1(t),v\rangle\,\psi(t)\,dt + \int_0^T \langle g(s,w_s+\widetilde{v}_s),v\rangle\,\psi(s)\,ds.$$

Portanto

$$[(w(0) - w_0, v) + \kappa\left((w(0) - w_0, v)\right)]\,\psi(0) = 0$$

para cada $v \in V$ e cada ψ do tipo considerada. Podemos escolher ψ tal que $\psi(0) \neq 0$.

Assim

$$(w(0) - w_0, v)_V = 0$$

para todo $v \in V$. Logo,

$$0 = \|w(0) - w_0\|_V^2$$

ou seja, $w(0) = w_0$ em V.

<u>*unicidade*</u>

Sejam u^1 e u^2 duas soluções fracas (5.17).

Então, $u^1, u^2 \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;V)$ e satisfazem

$$\frac{dw(t)}{dt} + \kappa\frac{(dAw(t))}{dt} + \nu Aw(t) + B\left(w_t + \widetilde{v}_t, w(t) + \widetilde{v}(t)\right) = f_1(t) + g(t, w_t + \widetilde{v}_t).$$

Seja $u = u^1 - u^2$.

Como $\dfrac{du^1}{dt}, \dfrac{du^2}{dt} \in L^2(0,T;V)$, então $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;V)$. A diferença $u = u^1 - u^2$ satisfaz

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + \kappa\frac{d\left(Au(t)\right)}{dt} + \quad & \nu Au(t) + B\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^1(t) + \widetilde{v}(t)\right) \\ & -B\left(u_t^2 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t)\right) = g(t, u_t^1 + \widetilde{v}_t) - g(t, u_t^2 + \widetilde{v}_t) \\ u(0) = 0. & \end{aligned}\right. \tag{5.24}$$

Tomando o produto escalar da primeira equação em (5.24) com $u(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\|u(t)\|_V^2}{dt} + 2\nu\|\nabla u(t)\|^2 \quad & +2b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^1(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) - 2b\left(u_t^2 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) \\ & = 2\left\langle g(t, u_t^1 + \widetilde{v}_t)) - g(t, u_t^2 + \widetilde{v}_t)), u(t)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^1(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) - b\left(u_t^2 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) \\ & \quad = b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^1(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) - b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) \\ & \qquad +b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) - b\left(u_t^2 + \widetilde{v}_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) \\ & \quad = b\left(u_t^1 + \widetilde{v}_t, u(t), u(t)\right) + b\left(u_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right) \\ & = b\left(u_t, u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \left|b\left(u(t - r(t)), u^2(t) + \widetilde{v}(t), u(t)\right)\right| \leq \|u(t - r(t))\|_{L^4(\Omega)} \left\|\nabla(u^2(t) + \widetilde{v}(t))\right\| \|u(t)\|_{L^4}(\Omega) \\ & \leq \widetilde{C}_1 \|u(t - r(t))\|_V \|\nabla u(t)\|, \end{aligned}$$

pois u^2 e $\widetilde{v}$ pertencem a $L^\infty(0,T;V)$ (lembrando que $\kappa > 0$) e $V \hookrightarrow L^4(\Omega)$, onde $\widetilde{C}_1$ é uma contante positiva.

Por outro lado, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, temos que:

$$2\left|\left\langle g(t,u_t^1+\widetilde{v}_t)-g(t,u_t^2+\widetilde{v}_t),u(t)\right\rangle\right| \leq \widetilde{C}_2(\Omega)\left\|g(t,u_t^1+\widetilde{v}_t)-g(t,u_t^2+\widetilde{v}_t)\right\|\|\nabla u(t)\|,$$

onde $\widetilde{C}_2(\Omega)$ é uma contante positiva que depende de Ω.

Portanto, pela desigualdade de Young, segue que:

$$\frac{d\|u(t)\|_V^2}{dt} \leq \widetilde{C}_3\|u(t-r(t))\|_V + \widetilde{C}_4\left\|g(t,u_t^1+\widetilde{v}_t)-g(t,u_t^2+\widetilde{v}_t)\right\|.$$

Integrando de 0 a t,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_V &\leq \widetilde{C}_3\int_0^t\|u(s-r(s))\|_V^2\ ds + \int_0^t\left\|g(s,u_s^1+\widetilde{v}_t)-g(s,u_s^2+\widetilde{v}_s)\right\|^2\ ds\\ &\leq \frac{\widetilde{C}_3}{1-\tau^*}\int_{-h}^t\|u(s)\|_V^2\ ds + \widetilde{C}_5\int_{-h}^t\|u(s)\|^2\ ds \leq \widetilde{C}_6\int_{-h}^t\|u(s)\|_V^2\ ds.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall, segue que:

$$\|u(t)\|_V^2 \leq 0 \text{ para todo } t\in[-h,T].$$

Portanto $u^1 = u^2$. □

Pelo Teorema anterior, garantimos a existência de solução fraca $w \in \mathcal{V}^1((-h,T)\times(\Omega))$ para o problema homogêneo 5.7:

Dado $f_1 \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $w_0 \in V$, $\varphi - \widetilde{v} \in L^2(-h,0;V)$, F e g verificam as propriedades antes definidas;

encontramos $w \in L^2(-h,T;V)\cap L^\infty(0,T;V)$ e $\dfrac{dw}{dt} \in L^2(-h,T;V)$, tal que

$$\begin{cases}\dfrac{d(w,v)}{dt}+\dfrac{d(\nabla w,\nabla v)}{dt} & +\nu(\nabla w,\nabla v)+b\left(w(t-r(t))+\widetilde{v}(t-r(t)),(w+\widetilde{v})(t),v\right)\\ & =\langle f_1(t),v\rangle+\langle g(t,u_t),v\rangle, v\in V\\ w(0)=w_0 & \\ w(t)=\varphi(t)-\widetilde{v}(t) & t\in(-h,0).\end{cases}$$

Como tinhamos tomado $w = u+\widetilde{v} \in \mathcal{V}^1((-h,T)\times(\Omega))$, para encontrarmos a solução fraca para 5.2, basta tomar $u = w-\widetilde{v}$, e teremos encontrado a solução do problema:

Dado $f \in L^2\left(0,T;V^{-1}(\Omega)\right)$, $u_0 \in V^1(\Omega)$, $\varphi \in L^2\left(-h,0;L^2(\Omega)\right)$, $k \in G^1(\Sigma_T)$, F e g verificam as propriedades antes definidas;

temos que $u \in \mathcal{V}^1\left(\left(-h, T\right) \times \left(\Omega\right)\right)$, satisfaz:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\left(u,v\right)}{dt} + \dfrac{d\left(\nabla u, \nabla v\right)}{dt} & +\nu\left(\nabla u, \nabla v\right) + b\left(u(t-r(t)), u\left(t\right), v\right) \\
& = \left\langle f\left(t\right), v\right\rangle + \left\langle g\left(t, u_t\right), v\right\rangle, v \in V \\
u\left(0\right) = u_0 & \\
u\left(t\right) = \varphi\left(t\right) & t \in \left(-h, 0\right).
\end{cases}
$$

Para recuperarmos a pressão, e assim concluir a existencia de solução fraca para o problema não homogêneo 5.2 , basta seguirmos os mesmos passos feitos no Teorema 4.2.2 do Capítulo 4.

Apêndice A

Formulação das equações de Kevin-Voigt com retardo em termos do operador de Stokes A_p

Antes de descrevermos formulação fraca e suave (mild solution) das equações de Kelvin-Voigt com termos com retardo, vamos fazê-la primeiramente para as Equações de Navier-Stokes também com termos com retardo.

A.1 Formulação das equações de Navier-Stokes com retardo em termos do operador de Stokes A_p

Considere as equações do tipo Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (F(t, u_t) \cdot \nabla) u + \nabla p = g(t, u_t), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u(t, x) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u^0(x), \qquad x \in \Omega, \\ u(t, x) = \phi(t, x), \qquad t \in (-\infty, 0], \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

Ao aplicarmos o operador projeção P_p, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu P_p \Delta u + P_p \left((F(t, u_t) \cdot \nabla) u \right) = P_p g(t, u_t), \qquad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u_0(t, x) = P_p \phi(t, x), \qquad t \in (-\infty, 0], \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

No que segue, vamos usar a seguinte notação: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_\Omega f\, g\, dx$, para $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde p e p' são expoêntes conjugados. Para $v \in W_0^p(\Omega) \cap X_p(\Omega)$, temos

$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle - \nu \langle P_p \Delta u, v\rangle + \langle P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), v\rangle = \langle P_p g(t,u_t), v\rangle,$$

ou ainda, introduzindo o operador de Stokes A_p, temos

$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle + \nu \langle A_p u, v\rangle + \langle P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), v\rangle = \langle P_p g(t,u_t), v\rangle,$$

se, e somente se

$$\frac{d}{dt}\left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}u, A_{p'}^{\frac{1}{2}}v\right\rangle + \nu\left\langle A_p^{\frac{1}{2}}u, A_{p'}^{\frac{1}{2}}v\right\rangle + \left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), A_{p'}^{\frac{1}{2}}v\right\rangle = \left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}P_p g(t,u_t), A_{p'}^{\frac{1}{2}}v\right\rangle.$$

Como $A_{p'}^{\frac{1}{2}}v \in Im(A_{p'}^{\frac{1}{2}}) = D(A_p^{-\frac{1}{2}})$, o qual é denso em $X_{p'}$, então $\forall w \in X_{p'}$

$$\frac{d}{dt}\left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}u, w\right\rangle + \nu\left\langle A_p^{\frac{1}{2}}u, w\right\rangle + \left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), w\right\rangle = \left\langle A_p^{-\frac{1}{2}}P_p g(t,u_t), w\right\rangle,$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}A_p^{-\frac{1}{2}}u + \nu A_p^{\frac{1}{2}}u + A_p^{-\frac{1}{2}}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right) = A_p^{-\frac{1}{2}}P_p g(t,u_t), \qquad \text{em } X_p.$$

Defina $\mathcal{U} := A_p^{-\frac{1}{2}}u$, então

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} + \nu\mathcal{U} = A_p^{-\frac{1}{2}}P_p g(t,u_t) - A_p^{-\frac{1}{2}}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right),$$

ou ainda

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\nu A_p t}\mathcal{U}(0) + \int_0^t A_p^{\frac{1}{2}}e^{-\nu A_p(t-s)}A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds.$$

Então $u : [0,T] \longrightarrow X_p$ é solução fraca de (A.1) se

$$u(t) = A_p^{\frac{1}{2}}e^{-\nu A_p t}A_p^{-\frac{1}{2}}u(0) + \int_0^t A_p^{\frac{1}{2}}e^{-\nu A_p(t-s)}A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds,$$

que pode ser escrito como segue

$$u(t) = e^{-\nu A_p t}u(0) + \int_0^t A_p^{\frac{1}{2}}e^{-\nu A_p(t-s)}A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds,$$

se $u_0 \in X_p$.

Dizemos que $u : [0,T] \longrightarrow X_p$ é solução suave de (A.1) se

$$u(t) = e^{-\nu A_p t}u(0) + \int_0^t e^{-\nu A_p(t-s)}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds,$$

se $u_0 \in X_p$.

A.2 Formulação das equações de Kevin-Voigt com retardo em termos do operador de Stokes A_p

Agora, escreveremos a formulação fraca e suave (mild solution) das equações de Kelvin-Voigt com termos com retardo.

Para isso, considere as equações do tipo Kelvin-Voigt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial \Delta u}{\partial t} - \nu \Delta u + (F(t,u_t)\cdot\nabla)u + \nabla p = g(t,u_t), \qquad t>0, \quad x\in\Omega, \\ \operatorname{div} u(t,x) = 0, \qquad t>0, \quad x\in\Omega, \\ u(t,x)=0, \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=u^0(x), \qquad x\in\Omega, \\ u(t,x)=\phi(t,x), \qquad t\in(-\infty,0], \quad x\in\Omega. \end{cases} \tag{A.2}$$

Ao aplicarmos o operador projeção P_p, obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial P_p \Delta u}{\partial t} - \nu P_p \Delta u + P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right) = P_p g(t,u_t), \qquad t>0, \quad x\in\Omega \\ u_0(t,x) = P_p\phi(t,x), \qquad t\in(-\infty,0], \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

No que segue, vamos usar a seguinte notação: $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_\Omega f\,g\,dx$, para $f\in L^p(\Omega)$ e $g\in L^{p'}(\Omega)$, onde p e p' são expoêntes conjugados. Para $v\in W_0^p(\Omega)\cap X_p(\Omega)$, temos

$$\frac{d}{dt}\langle u,v\rangle - \frac{d}{dt}\langle P_p\Delta u,v\rangle - \nu\langle P_p\Delta u,v\rangle + \langle P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right),v\rangle = \langle P_p g(t,u_t),v\rangle,$$

ou ainda, introduzindo o operador de Stokes A_p, temos

$$\frac{d}{dt}\langle u,v\rangle + \frac{d}{dt}\langle A_p u,v\rangle + \nu\langle A_p u,v\rangle = \langle P_p g(t,u_t),v\rangle - \langle P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right),v\rangle,$$

se, e somente se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle A_p^{-\frac12}u, A_{p'}^{\frac12}v\right\rangle &+ \kappa\frac{d}{dt}\left\langle A_p^{\frac12}u, A_{p'}^{\frac12}v\right\rangle + \nu\left\langle A_p^{\frac12}u, A_{p'}^{\frac12}v\right\rangle \\ &= \left\langle A_p^{-\frac12}P_p g(t,u_t), A_{p'}^{\frac12}v\right\rangle - \left\langle A_p^{-\frac12}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), A_{p'}^{\frac12}v\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $A_{p'}^{\frac12}v\in Im(A_{p'}^{\frac12}) = D(A_p^{-\frac12})$, o qual é denso em $X_{p'}$, então $\forall w\in X_{p'}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle A_p^{-\frac12}u, w\right\rangle &+ \kappa\frac{d}{dt}\left\langle A_p^{\frac12}u, w\right\rangle + \nu\left\langle A_p^{\frac12}u, w\right\rangle \\ &= \left\langle A_p^{-\frac12}P_p g(t,u_t), w\right\rangle - \left\langle A_p^{-\frac12}P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right), w\right\rangle, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}A_p^{-\frac12}u + \kappa\frac{d}{dt}A_p^{\frac12}u + \nu A_p^{\frac12}u = A_p^{-\frac12}P_p g(t,u_t),$$

em $X_p - A_p^{-\frac{1}{2}} P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)$. Defina$\mathcal{U} := A_p^{-\frac{1}{2}}u$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} + \kappa\frac{d}{dt}A_p\mathcal{U} + \nu A_p\mathcal{U} = A_p^{-\frac{1}{2}} P_p g(t,u_t) - A_p^{-\frac{1}{2}} P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right),$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\left(I+\kappa A_p\right)\mathcal{U} + \nu A_p\mathcal{U} = A_p^{-\frac{1}{2}} P_p g(t,u_t) - A_p^{-\frac{1}{2}} P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right),$$

se, e somente se

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \nu\left(I+\kappa A_p\right)^{-1}(-A_p)\mathcal{U} + \left(I+\kappa A_p\right)^{-1} A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right].$$

Pondo $B_p = \nu\left(I+\kappa A_p\right)^{-1}(-A_p)$, segue que

$$\mathcal{U}(t) = e^{B_p t}\mathcal{U}(0) + \int_0^t A_p^{\frac{1}{2}} e^{\nu B_p(t-s)} A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds.$$

Então, dizemos que $u:[0,T]\longrightarrow V_p$ é solução fraca de (A.1) se

$$u(t) = A_p^{\frac{1}{2}} e^{B_p t} A_p^{-\frac{1}{2}} u(0) + \int_0^t A_p^{\frac{1}{2}} e^{-\nu A_p(t-s)} A_p^{-\frac{1}{2}}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds,$$

se $u_0 \in V_p$. Dizemos que $u:[0,T]\longrightarrow V_p$ é solução suave de (A.1) se

$$u(t) = e^{B_p t}u(0) + \int_0^t e^{-\nu A_p(t-s)}\left[P_p g(t,u_t) - P_p\left((F(t,u_t)\cdot\nabla)u\right)\right] ds,$$

se $u_0 \in D(A_p)$.

Referências

[1] Amfilokhiev, V. B and Pavlovkij, V. A. *Experimental data on laminar-turbulent transition for montion of polymer solutions in pipes.* Tr. Leningr. Korablestr. Inst., 104,03-5(1976).

[2] Amfilokhiev, V. B., Voitkunskiy, Ya. I.; Mazaeva, N. P. and Khodorkovskiy, Ya. S. *Flows of polymer solutions under conective accelerations.* Tr. Leningr. Korablestr. Inst., 96, 3-9 (1975).

[3] Aubin, J. P. *Un Théorème de compacité.* C. R. Acad. Sci., 256, 5042-5044 (1963).

[4] Betchov, R. and Criminale, W. O. *Topics in Hydrodynamic Stability.* [Russian translation], Mir,Moscow, 1971.

[5] Bridges, Thomas J. *The Hopf bifurcation with symmetry for the Navier-Stokes Equations in $(L_p(\Omega))^n$, with application to Plane Poiseuille Flow.* Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1989), pp. 335-376.

[6] Caraballo, Tomás and Real, José. *Navier-Stokes equations with delays.* Proc. R. Soc. Lond. A **457** (2001), pp. 2441–2453.

[7] Caraballo, Tomás and Real, José. *Asymptotic behavior of two-dimensional Navier-Stokes equations with delays.* Proc. R. Soc. Lond. A **459** (2003), pp. 3181–3194.

[8] Caraballo, Tomás and Real, José. *Attractors for 2D Navier-Stokes models with delay.* Journal of differential equations **205** (2004), no. 2, pp. 271–297.

[9] Cattabriga, Lamberto. *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes.* (Italian) Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31 1961 308–340.

[10] Cavalcante, M. M. and Cavalcante, V. N. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* UEM/DMA (2007).

[11] Constantin, Peter and Foias, Ciprian. *Navier-Stokes equations.* University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[12] Dubrovin, B. and Fomenko, A. and Novikov, S. *Modern Geometry: Methods And Applications, Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields.* Springer, New York, 1992.

[13] Foias, C. and Temam, R.; *Remarques sur les équations de Navier-Stokes et les phénomènes successifs de bifurcation*, Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa Series (4) 5 1978, pp.29-63.

[14] Fujita, Hiroshi and Kato, Tosio. *On the Navier-Stokes initial value problem I.* Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964) pp. 269–315.

[15] Fujiwara, D. and Morimoto, H. *An L_p theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields.* J. Fa. sci. Univ. Tokyo, Sect. Math. IA **24** (1977), pp. 685–700.

[16] Fursikov A. , Gunzburger M. and Hou L. *Boundary Value Problems and Optimal Boundary Control for the Navier-Stokes System: The Two-Dimensional Case Trace theorems for three-dimensional time-dependent solenoidal vector Fields and their applications.* SIAM J. Contro Optim. c 1998 Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 36, No. 3, pp. 852–894, May 1998.

[17] Fursikov A. , Gunzburger M. and Hou L. *Trace theorems for three-dimensional time-dependent solenoidal vector Fields and their applications.* Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 1079–1116.

[18] Galdi, G.P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Linearized Steady Problems.* Springer Tracts in Natural Philosophy, 38, Springer-Verlag, NewYork, Revised Edition, (1998).

[19] Garrido-Atienza, Maria José and Marín-Rubio, Pedro. *Navier-Stokes equations with delays on unbounded domains.* Nonlinear analisys **64** (2006), no. 5, pp. 1100–1118.

[20] Giga, Yoshikazu. *Analyticity of the semi-group generated by the Stokes operator in L_p spaces.* Math. Z., **178** (1981), pp. 297–329.

[21] Giga, Yoshikazu. *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_p spaces.* Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), pp. 251–265.

[22] Giga, Yoshikazu and Miyakawa, Tetsuro. *Solutions in L_p of the Navier-Stokes initial value problem.* Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), pp. 267–281.

[23] Guzzo, S. M. *Estudo de equações do tipo Navier-Stokes com retardo. Tese de Doutorado*, ICMC-USP, 2009.

[24] Guzzo, S. M. and Planas, G. *On a class of three Dimensional Navier-Stokes Equations with Bonded Delay.* Discrete and Continuous doi:10.3934/dcdsb.2011.16.225 Dynamical Systems Series B Volume 16, Number 1, July 2011

[25] Hino, Y.; Murakami, S. and Naito, T. *Functional-differential equations with infinite delay.* Lecture Notes in Mathematics **1473**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[26] Hormander, L. *On the theory of general partial differential operators.* Acta Math. 94 (1955), p. 161-148.

[27] Karazeeva, N. A., Kotsiolis, A. A. and Oskolkov, A. P. *On Dynamical Systems Generated by initialboundary value problems for the equations of motion of linear viscoelastic fluids.* Tr. Mat. Inst. Steklova, 188, 59-87 (1990).

[28] Kato, Hisako. *Existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations.* Journal of mathematical analysis and applications **208** (1997), pp. 141–157.

[29] Kato, Tosio and Fujita, Hiroshi. *On the nonstationary Navier-Stokes system.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **32** (1962), pp. 243 – 260.

[30] Ladyzhenskaya, O. A. *On certain nonlinear problems of the theory of continuous media.* in: Internat. Congress of Mathematicians (Moscow, 1966), Abstracts of Reports, Moscow (1966), p. 149.

[31] Lions, Jacques L. *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires.* Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[32] Liu, W. *Asymptotic behavior of solutions of time-delayed Burger's equation.* Discrete Continuous Dynamical Systems - B, **2** (2002), 47–56.

[33] Martinez, C.& Sanz, M. and Marco, M., *Fractional powers of operators.* J. Math. Soc. of Japan, (1988), 40(2).

[34] Oskolkov, A. P., *On the theory of non-stationary flows of nonlinear viscoelastic fluids.* Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, 115, 191-202 (1982).

[35] Oskolkov, A. P. *Initial boundary-value problems for the equations of motion of Kelvin-Voight and Oldroyd fluids.* Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 179, 126-164 (1988).

[36] Oskolkov, A. P. *On the solvability in the whole of the first boundary-value problem for a quasilinear third-order system occurring in the study of motion of viscous fluids.* gap. Nauchn. Semin. Pomi, 27, 145-160 (1972).

[37] Oskolkov, A. P. *On a nonstationary quasilinear system with a small parameter that regularizes the system of Navier-Stokes equations.* Probl. Mat. Anal., No. 4, 78-87 (1963).

[38] Oskolkov,A. P. *On some model nonstationary systems in the theory of non-Newtonian fluids.* Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 127, 32-57 (1975).

[39] Oskolkov, A. P. *On some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the study of the motion of viscous fluids.* Zap. Nauchn. Semin. POMI, 59, 133-177 (1976).

[40] Oskolkov, A. P. *On nonstationary flows of viscoelastic fluids.* Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 159, 103-131 (1983).

[41] Oskolkov, A. P. *On the uniqueness and solvability in the whole of boundary-value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers.* Nap. Nauchn. Semin. Pomi, 38, 98-136 (1973).

[42] Oskolkov, A. P. & Shadiev, R. D. *Nonlocal problems of the theory of the motion equations of Kelvin- Voight fluids.* gap. Nauchn. Semin. Pomi, 181,146-185 (1990).

[43] Oskolkov, A. P. *Nonlocal problems for a class of nonlinear operator equations occurring in the theory of equations of Sobolev's type.* gap. Nauchn. Semin. POMI, 198, 31-48 (1991).

[44] Oskolkov, A. P. *Initial boundary-value problems with slipping boundary condition for the modified Navier-Stokes equations.* gap. Nauchn. Serain. POMI, 213, 93-115 (1994).

[45] Oskolkov, A. P. *Nonlocal problems for the equations of Kelvin-Voight fluids.* gap. Nauchn. Semin. LOMI, 197, 120-158 (1992).

[46] Pavlovskij, V. A. *On the theoretical description of weak water solution of polymer.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 200, No. 4, 809-812, (1971).

[47] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations.* Applied mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1983).

[48] Planas, Gabriela & Hernández, Eduardo. *Asymptotic behaviour of two-dimensional time-delayed Navier-Stokes equations.* Discrete and continuous dynamical systems. 21 (2008) no. 4, pp. 1245–1258.

[49] Simander, C. G. and Sohr, H. *The Helmholtz Decomposition in Lq and Related Topics. Mathematical Problems Related to the Navier-Stokes Equations*, Galdi, G. P. (ed.), Advances in Mathematics for Applied Science, World Sientific, 11, 1-35 (1992).

[50] Simon, J. *Compact Sets in the spaces* $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica pura ed applicata (4), Vol 146, p. 65-96, (1987).

[51] Simon, J *Primitives de distributions et applications, Séminaire d'Analyses.* 6, 7, 1990-1991,01991-1992 (Aubière, 1990-1991 and 1991-1992), Univ. Blaise Pascal Lab. Math. Pures Appl., Clermont, 1995 pp. Exp. No. 6.20, 21.

[52] Solonnikov, V. A. *Estimatives for Solutions of Nonstationary Navier-Stokes Equations.* J. Soviet Math. 8, 467-528 (1977).

[53] Robinson, James C. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.* Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press. 2001.

[54] Taniguchi, Takesi. *The exponential behavior of Navier-Stokes equations with time delay external force.* Discrete and Continuous Dynamical Systems. 12 (2005), no. 5, pp. 997–1018.

[55] Temam, Roger. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis.* CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, no. 66, (1995).

[56] Temam, Roger. *Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis.* Studies in Mathematics and its applications. Volume 2. The Netherlands, (1984).

[57] Vivette, G. & Raviart, P.-A. *Finite Element methods for Navier-Stokes-Equations: Theory and Algorithms.* Springer-Verlang, Berlin-Heidelberg-New-York Tokio , (1986).

[58] Volevich, L. & Paneyakh, B. *Certain spaces of generalized functions and embedding theorems.* Russian Math. Surveys 20 (1965), No.1, p. 1-73.

[59] Zvyagin, V. G. & Turbin, M. V. *The Study of initial-boundary value problems for Mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt Fluid.* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 168, No. 2, (2010).