

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA

DANIELE CRISTINA THOALDO

FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA
COM SOLUÇÃO FUNDAMENTAL INDEPENDENTE DO TEMPO

CURITIBA

2011

DANIELE CRISTINA THOALDO

**FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DA ONDA
COM SOLUÇÃO FUNDAMENTAL INDEPENDENTE DO TEMPO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos
em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em
Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de
Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer

CURITIBA

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Daniele Cristina Thoaldo

**“Formulação Unidimensional do Método dos Elementos de Contorno
para a Equação da Onda com Solução Fundamental
Independente do Tempo”**

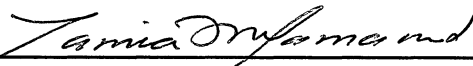
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. José Antônio Marques Carrer, D.Sc.

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia -
PPGMNE / UFPR



Prof.ª Tamia Marta Yamamoto, D.Sc.

Universidade Tuiuti do Paraná – UTP



Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D.Sc.

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia -
PPGMNE / UFPR



Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Curitiba, 04 de novembro de 2011.

*Dedico esta obra aos
meus pais, pelo carinho e
compreensão.*

" Se pudermos medir aquilo de que falamos e exprimir por meio de números o resultado, conhecemos algo sobre o assunto; mas, se não pudermos, nosso conhecimento é deficiente e insatisfatório."

(William Thomson)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que com Sua infinita bondade me permitiu a realização de mais um sonho, que esteve junto comigo me dando força para a realização desse trabalho.

Aos meus pais, Geraldo e Leordina que fizeram o possível para que esse trabalho fosse finalizado, me dando incentivo e apoiando nas horas mais difíceis e compreendendo a minha ausência como filha durante esse período.

Aos meus irmãos Jeferson e Cleverson que desde a época da graduação, sempre me ajudando e apoiando nos estudos e incentivando de maneira inigualável.

A minha cunhada Deise que sempre que eu precisava de algo estava prestes a me ajudar, principalmente com seus dotes culinários, pois contribuía para uma utilização do meu tempo de estudo.

A minha cunhada Suellen que foi uma grande companheira no CESEC sempre disposta a estudar, discutir conceitos não se importando com data e hora.

Aos meus dois sobrinhos que são meus amores Alysson e Davi que trouxeram muita alegria para nossas vidas me distraindo muitas vezes com suas gargalhadas e transmitindo aquele carinho incrível que só as crianças conseguem ter.

Ao Marcelo de Oliveira Franco, que com muita paciência acompanhou todo o meu trajeto no CESEC e sempre me incentivando e me ajudando com as soluções analíticas, com problemas computacionais, e o mais importante, pela amizade que conquistei com sua família inclusive com sua esposa Débora sempre ajudando com o apoio necessário.

Ao Raphael Fernando Scuciato, que me ensinou a caminhar pelos trilhos do Fortran, tendo paciência e sempre explicando passo a passo cada detalhe de uma linha de programação, sua ajuda foi de suma importância para a realização desse trabalho.

A Maristela, que sempre sorrindo animava nossos dias, fazendo sempre um cafezinho com carinho e encantava a todos por ser ótima secretária.

Ao meu orientador José Antonio Marques Carrer, que foi um ótimo orientador, sempre prestativo em me ajudar, agradeço pela sua paciência e confiança para a realização deste trabalho.

Aos meus professores da Universidade Tuiuti do Paraná, pois sem o incentivo deles eu não teria conquistado o título de mestre, em especial a professora Maria Eugênia e a Tamia Yamamoto, que me recebeu em suas casas para que eu tivesse uma melhor compreensão dos conteúdos.

Aos meus amigos e colegas do CESEC que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho, em especial o Bruno e Rodrigo Dias.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
LISTA DE SIGLAS	xii
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. ONDAS	3
2.1 Movimento Ondulatório	3
2.2 Classificação das Ondas	4
2.3 Velocidade da Onda.....	5
2.4 Equação da Onda	8
2.4.1 Equação da onda em uma corda	8
2.4.2 Equação geral do movimento ondulatório.....	12
2.5 Equação Governante.....	14
3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	15
3.1 Aspectos Históricos	15
3.2 Evolução Histórica do MEC.....	16
3.3 Solução Fundamental	17
3.4 Equações Constituintes do MEC	19
3.4.1 Método de Houbolt.....	21
3.4.2 Integral de Domínio.....	23
3.4.3 Marcha no Tempo.....	24
4. EXEMPLOS NUMÉRICOS	26
4.1 Barra Fixa em Uma das Extremidades	26
4.2 Barra Fixa em Uma das Extremidades com Campo de Deslocamento Inicial Prescrito	29
4.3 Barra Fixa em Uma das Extremidades com Campo de Velocidade Inicial Prescrito	29

4.4	Barra Fixa nas Duas Extremidades com Campo de Deslocamento Inicial Prescrito	35
4.4.2	Análise de reação de apoio na extremidade da barra.....	37
4.5	Barra Fixa nas Duas Extremidades com Campo de Velocidade Inicial Prescrito....	37
4.5.1	Análise do deslocamento no meio da barra.....	38
4.5.2	Análise de reação de apoio.....	39
4.5.3	Análise de reação de apoio no final da barra.....	39
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
6.	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICE A – Equação constituinte do MEC-D	43
	APÊNDICE B – Integral de domínio	47

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2. 1: Onda descrita pela equação (2.3).....	7
FIGURA 2. 2: Segmento de Corda.....	9
FIGURA 2. 3: Haste	13
FIGURA 3. 1: Segmento de Corda Discretizado	23
FIGURA 4.1: Barra fixa em uma das extremidades.....	27
FIGURA 4.2: Deslocamento em $x = L/2$	27
FIGURA 4.3: Reação de apoio em $x = 0$	28
FIGURA 4.4: Deslocamento em $x = L/2$	29
FIGURA 4.5: Viga apoiada em uma das extremidades.....	30
FIGURA 4.6: Deslocamento em $x = L/2$	31
FIGURA 4.7: Reação de apoio em $x = 0$	32
FIGURA 4.8: Reação de apoio em $x = L$	32
FIGURA 4.9: Barra com velocidade inicial prescrita	33
FIGURA 4.10: Deslocamento em $x = L/2$	34
FIGURA 4.11: Reação de apoio em $x = L$	35
FIGURA 4.12: Barra fixa nas duas extremidades	36
FIGURA 4. 13: Deslocamento em $x = L/2$	36
FIGURA 4. 14: Reação de apoio em $x = L$	37
FIGURA 4. 16: Deslocamento em $x = L/2$	38
FIGURA 4. 17: Reação de apoio em $x = 0$	39
FIGURA 4. 18: Reação de apoio em $x = L$	39
FIGURA 6. 3: Função de interpolação ϕ_i	47
FIGURA 6. 4: Função de interpolação ϕ_j	48

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Força resultante
F_1 e F_2	Força de tensão na extremidade da corda
μ	Densidade linear
v	Velocidade da onda
ϕ_1 e ϕ_2	Ângulo entre a corda e a horizontal
S	Tangente do ângulo entre a corda e a horizontal
S_1 e S_2	Coefficientes angulares em cada extremidade do segmento da corda
ΔS	Varição da inclinação
Δx	Comprimento aproximado da corda
c	Velocidade de propagação da onda
x, y, z	Coordenadas cartesianas
u	Função que representa o deslocamento
t	Tempo
ξ	Ponto fonte
x	Ponto campo
r	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
u^*	Solução fundamental
Γ	Contorno
Ω	Domínio
q^*	Derivada normal
$u(x, t)$	Deslocamento ou potencial
$q(0, t)$	Reação ao apoio da barra ou fluxo
\dot{u}_0	Velocidade inicial
$\delta(\xi, x)$	Delta de Dirac
L	Comprimento da barra

LISTA DE SIGLAS

<i>EDP</i>	Equações diferenciais parciais
<i>MEC</i>	Método dos elementos de contorno
<i>MEC – D</i>	Método dos elementos de contorno de domínio
<i>BIEM</i>	Método das equações integrais de contorno
<i>NNOS</i>	Número de nós

RESUMO

Este trabalho foi idealizado com o desenvolvimento de uma aproximação do Método dos Elementos de Contorno no domínio do tempo, que será denotado por MEC-D (D representa domínio), para a solução de problemas de propagação de ondas em domínios unidimensionais. Serão apresentados cinco exemplos para a validação do método e os resultados obtidos serão comparados com as respectivas soluções analíticas. O esquema marcha no tempo empregado foi método de Houbolt.

Palavras-chave: Métodos de Elementos de Contorno, Equação da Onda Escalar, Condições Iniciais, Domínio do Tempo.

ABSTRACT

This work deals with the development of a boundary element method formulation in the time domain, which will be denoted by MEC-D (D means the domain), in order to solve wave propagation problems in one-dimensional domains. Five examples are presented to validate the formulation and, for each problem, the results are compared with the analytical solution. The time marching employed was the Houbolt method.

Key-words: Boundary Element Method, Scalar Wave Equation, Initial Conditions, Time Domain.

1. INTRODUÇÃO

Problemas em domínios unidimensionais têm o mérito de fornecer experiência ao pesquisador e também confiança para enfrentar os casos mais elaborados.

Grande parte dos problemas físicos é modelada por sistemas de equações ou equações diferenciais parciais. Portanto, é necessária a solução dessas equações, que muitas vezes pode ser obtida analiticamente; entretanto, na maior parte dos casos, só é possível determinar a solução através de um método numérico.

O interesse em resolver diversos problemas na engenharia tem motivado o surgimento de um grande número de métodos numéricos entre os quais o Método dos Elementos de Contorno, referenciado por MEC.

As equações integrais de contorno podem ser obtidas através de um tratamento residual. Quando são utilizadas soluções fundamentais independentes do tempo, a formulação resultante denomina-se MEC-D (onde D significa domínio), devido à ocorrência de uma integral de domínio envolvendo o produto da função de ponderação com a derivada segunda em relação ao tempo. Admitindo um intervalo finito, por exemplo, $0 \leq x \leq L$, como domínio do problema unidimensional, o contorno é constituído apenas pelos nós extremos $x = 0$ e $x = L$. O esquema de marcha no tempo empregado será o método de HOUBOLT (1950), BATHE (1996) que é obtido da derivada de segunda ordem em relação ao tempo de polinômios cúbicos de Lagrange.

Neste trabalho, primeiramente serão apresentados os conceitos teóricos do problema de propagação da onda, tais como: velocidade, deslocamento e tensão, entre outros. Em seguida será apresentada a formulação MEC-D, que utiliza células para modelar o domínio. Serão apresentados diversos exemplos com diferentes condições de contorno e condições iniciais. Para a validação da formulação, os resultados numéricos serão comparados com as soluções analíticas.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, inicialmente, será feita uma abordagem da teoria de ondas e do movimento ondulatório; na segunda parte será introduzido o conceito da velocidade da onda e, em seguida, será apresentada a equação governante do problema.

No capítulo 3 é apresentada a teoria do Método dos Elementos de Contorno e uma breve abordagem sobre os aspectos históricos e evolução histórica do MEC. Nesse mesmo capítulo será feita uma breve revisão sobre a solução fundamental, que é utilizada para obtenção das equações que constituem o MEC.

No capítulo 4 são apresentados os exemplos para a validação da formulação.

No capítulo 5 são apresentadas as considerações finais sobre os resultados obtidos.

2. ONDAS

O movimento causado por uma perturbação que se propaga através de um meio denomina-se onda.

Podem-se citar alguns exemplos de ondas presentes no nosso cotidiano. São elas: ondas sonoras, ondas luminosas, ondas de rádio, ondas do mar, entre outras.

“A equação da onda governa uma grande variedade de fenômenos de propagação de ondas, tais como o movimento das ondas eletromagnéticas, das ondas na água, de fluidos supersônicos, da pulsação de fluxo sanguíneo, de ondas elásticas em sólidos e da vibração de cordas e membranas”. GREENBERG (1998).

2.1 *Movimento Ondulatório*

Segundo HALLIDAY (2010) partícula e onda são dois grandes conceitos da física clássica, no sentido de que se podem associar quase todos os ramos do assunto a um conceito ou ao outro, onde partícula é associada ao transporte de energia e onda à transferência de energia no meio.

De acordo com TIPLER (2009), grande parte das informações que se obtém chega até nós por algum tipo de onda. “Uma onda mecânica é causada por uma perturbação em um meio. Por exemplo, quando uma corda esticada é tocada, a perturbação produzida se propaga ao longo da corda como uma onda. A perturbação, neste caso, é consequência da interação entre cada segmento da corda e os segmentos adjacentes.” Em uma onda mecânica são transportados energia e momento através do espaço; porém, não é transportada matéria. Este efeito é obtido através de uma perturbação que se propaga no meio. Podem-se obter dois tipos de movimento ondulatório simples: Ondas Transversais e Ondas Longitudinais.

2.2 Classificação das Ondas

Quanto à direção da vibração

Ondas Transversais: São as ondas que causam uma perturbação perpendicular à direção da propagação.

Ondas Longitudinais: São as ondas que causam uma perturbação paralela à direção de propagação.

Ondas Mistas: São as ondas que causam simultaneamente uma perturbação perpendicular à direção da propagação e uma perturbação paralela à direção da propagação.

Quanto à natureza

Ondas Mecânicas: São as ondas que necessitam de um meio material para se propagar, é o caso de onda em molas, cordas, interior dos líquidos entre outras.

Ondas Eletromagnéticas: São as ondas que correspondem às variações de um campo elétrico e de um campo magnético originados por cargas elétricas oscilantes que se propagam sem a necessidade de um meio material.

Quanto ao número de direções de propagação

Ondas Unidimensionais: São as ondas que se propagam em uma linha, como por exemplo, as ondas em uma corda.

Ondas Bidimensionais: São as ondas onde a propagação acontece em uma superfície; pode-se usar como exemplo a superfície dos líquidos.

Ondas Tridimensionais: São as ondas que se propagam em todo o espaço tridimensional, é o que acontece com o som propagando-se no ar.

O movimento ondulatório pode ser mais bem compreendido ao se considerar, por exemplo, uma corda distendida horizontalmente. Supondo que haja uma perturbação transversal na extremidade, uma propagação rítmica se propaga através da corda. Os movimentos das partículas são para cima e para baixo, enquanto ao mesmo tempo a

perturbação move-se ao longo da extensão da corda. Após a perturbação cessar, as partículas retornam a sua condição inicial. O que é propagado pela corda é a perturbação, e não o próprio meio.

2.3 Velocidade da Onda

A velocidade com que as partículas se movimentam no meio de propagação está relacionada à frequência e ao movimento de onda. A velocidade das ondas de acordo com TIPLER (1993) “depende das propriedades do meio, mas não depende do movimento da fonte das ondas: esta é uma propriedade geral do movimento ondulatório”, por exemplo, a velocidade do som de uma buzina de carro, de acordo com TIPLER (1993), depende somente das propriedades do ar e não do movimento do carro. No caso de pulsos ondulatórios numa corda é fácil demonstrar que quanto maior for a tensão de tração mais rápida será a propagação das ondas. Além disso, as ondas se propagam mais rapidamente numa corda leve do que em uma corda pesada, sujeitas ambas à mesma tensão de tração.

Sendo σ a tensão e μ a massa específica, a velocidade da onda em uma corda é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \quad (2.1)$$

Alguns conceitos importantes são apresentados a seguir:

Amplitude (y): Refere-se à distância entre o ponto médio da vibração e a crista (ou vale da onda).

Frequência (f): É a taxa de repetição de uma determinada vibração.

Período (T): É o intervalo de tempo após o qual o movimento de um elemento oscilante começa a se repetir.

Comprimento de Onda (λ): É a distância que vai de uma crista a outra adjacente, ou seja, é a distância após a qual o padrão da onda começa a se repetir.

Uma onda senoidal, de modo geral, pode ser descrita na forma de uma função seno ou cosseno. Por exemplo, a onda senoidal é gerada quando se movimentam transversalmente a extremidade da corda num movimento harmônico simples. Define-se uma forma de onda a partir de uma relação do tipo:

$$y = h(x, t) \quad (2.2)$$

na qual y é o deslocamento transversal de qualquer elemento da corda, h é uma função da posição x deste elemento ao longo da corda e do tempo t . Para o deslocamento y do elemento da corda na posição x e no instante t , tem-se:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.3)$$

onde o índice m representa a amplitude máxima e k e ω são constantes.

Para a determinação da velocidade da onda supõe um intervalo de tempo Δt . A onda se propaga na direção positiva do eixo x . Assim, o ponto A da figura (2.1) abaixo desloca-se Δx para uma variação no tempo igual a Δt . O limite da relação $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero é a velocidade de onda v .

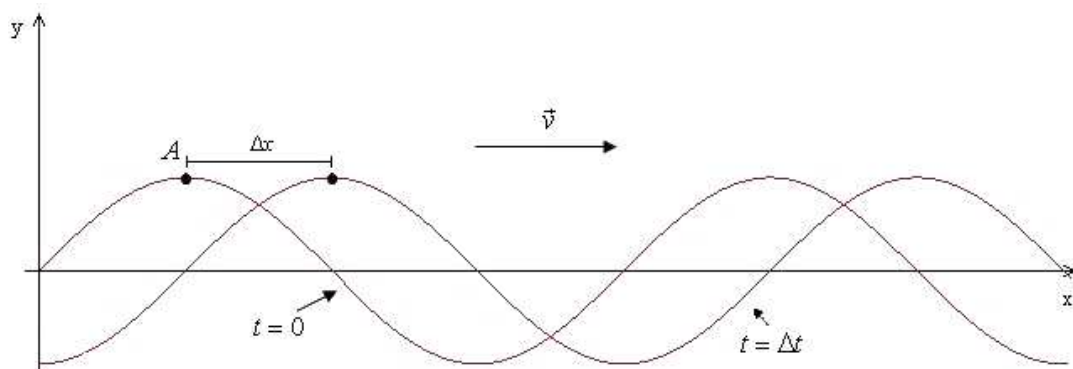


FIGURA 2. 1: Onda descrita pela equação (2.3)

Focalizando um ponto, ponto A da figura 2.1, tem-se um deslocamento transversal y que é definido ao associar um valor fixo à quantidade $kx - \omega t$ que se chama *fase* da onda.

Assim, tem-se:

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad (2.4)$$

À medida em que t aumenta na equação (2.3) o valor da coordenada de x aumenta se o deslocamento na direção em x é crescente.

Sabendo-se que:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

Assim:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (2.6)$$

Para determinar a equação de uma onda que se propaga na direção oposta, substitui-se t na equação (2.3) por $-t$.

- Para a equação de uma onda que se propaga na direção positiva do eixo x , pode-se escrever:

$$y(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.7)$$

- Para a equação de uma onda que se propaga na direção negativa do eixo x , pode-se escrever:

$$y(x,t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t) \quad (2.8)$$

2.4 Equação da Onda

De acordo com GREENBERG (1998) o estudo de equação da onda teve uma importância histórica, pois foi amplamente estudado pelos matemáticos *Leonhard Euler* (1709–1783), *Jean d’Alambert* (1717–1783), *Daniel Bernoulli* (1700–1782) e *Joseph – Louis Lagrange* (1736–1813), dando origem ao tema de equações diferenciais parciais, que é apresentado nesse trabalho como EDP. “Em seus estudos de cordas vibrantes, d’Alambert desenvolveu o método de separação de variáveis, achando necessário representar a forma inicial da corda, com que hoje é conhecido como uma Série de Fourier. O método de separação de variáveis foi objeto de debate que continuou até o século XIX.”

2.4.1 Equação da onda em uma corda

Para a dedução da equação diferencial conhecida como equação da onda, segundo TIPLER (1993) pode-se aplicar as leis de Newton ao movimento de um segmento da corda.

A figura 2.2 representa um segmento de corda tensionado. A equação da onda se deduz pela aplicação, ao segmento, da segunda lei de Newton.

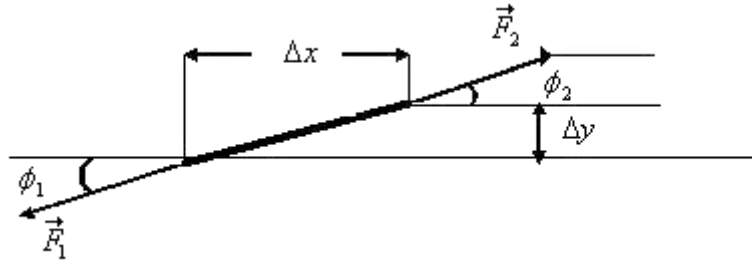


FIGURA 2. 2: Segmento de Corda

Com base na figura podem-se admitir pequenos deslocamentos verticais. O comprimento do segmento é aproximadamente Δx e a massa desse segmento é $\Delta m = \mu A \Delta x$, sendo μ a massa específica e A , a área de seção transversal da corda. Desta forma, o segmento desloca-se verticalmente e a força resultante nesse caso é dada por (TIPLER(1993)):

$$\sum F = F \text{ sen } \phi_2 - F \text{ sen } \phi_1 \quad (2.9)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos descritos na figura 2.2 e $F = \sigma A$ representa a tensão na corda. Como os ângulos são pequenos, pode-se adotar a aproximação $\text{sen } \phi \approx \text{tan } \phi$; a equação (2.9) é reescrita como:

$$\sum F = F (\text{sen } \phi_2 - \text{sen } \phi_1) \approx F (\text{tan } \phi_2 - \text{tan } \phi_1) \quad (2.10)$$

A tangente do ângulo entre a corda e a horizontal é a inclinação S (coeficiente angular) da curva descrita pela corda. A inclinação é a derivada parcial de $y = y(x, t)$ em relação a x . Assim, tem-se:

$$S = \tan \phi = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.11)$$

e, para o segmento da figura 2.2:

$$S_1 = \tan \phi_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \quad (2.12)$$

$$S_2 = \tan \phi_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \quad (2.13)$$

Portanto, substituindo (2.13) e (1.14) em (2.9), tem-se:

$$\sum F = F(S_2 - S_1) = F \Delta S \quad (2.14)$$

onde ΔS é a variação da inclinação. Igualando a resultante das forças ao produto da massa $\mu A \Delta x$ pela aceleração, dada por $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, fica-se com:

$$\sigma A \Delta S = \mu A \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

De (2.15) pode-se obter a seguinte relação:

$$\sigma \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

Calculando o limite da equação (2.16) quando $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.16) resulta em:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Substituindo a expressão (2.1) na equação (2.18) tem - se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

A equação (2.19) representa a equação da onda em uma corda tencionada.

A equação da onda tem como solução qualquer função do tipo $y(x - vt)$. Seja a função da onda dada por:

$$y = y(x - vt) \quad (2.20)$$

Seja $\alpha = x - vt$; substituindo em (2.20), obtém-se:

$$y = y(\alpha) \quad (2.21)$$

Representando por $\frac{\partial y}{\partial x}$ a derivada de y em relação a x , pela regra da cadeia de derivação representa -se a derivada de y em relação a α por y' . Obtém-se, então, as expressões abaixo:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (2.22)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = y' \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (2.23)$$

Com $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -v$, tem-se:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \quad (2.24)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vy' \quad (2.25)$$

Tomando as derivadas de segunda ordem, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \quad (2.26)$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial y'}{\partial t} = -v \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = v^2 y'' \quad (2.27)$$

Assim

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

A partir deste ponto, a velocidade da onda será representada pela letra c .

Logo, a equação de propagação da onda que será resolvida neste trabalho pelo Método de Elementos de Contorno fica da forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

2.4.2 Equação geral do movimento ondulatório

De acordo com ALONSO (1930), numa corda, sejam regidos por leis dinâmicas características de cada processo, existe uma equação aplicável a todo tipo de movimento

ondulatório, do mesmo modo que a lei de Newton, se aplica a todos os movimentos de partículas, quaisquer que sejam as forças.

A equação que descreve o movimento ondulatório com velocidade inicial prescrita v e sem distorção, ao longo da $+X$ e $-X$. Esta equação é a equação do movimento ondulatório ou equação da onda, e é dada por:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} \quad (2.30)$$

A solução geral da equação (2.30) é da forma:

$$\xi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (2.31)$$

A solução geral da equação (2.30) pode ser expressa como a superposição de dois movimentos ondulatórios que se propagam em sentidos opostos.

Quando se produz uma perturbação numa extremidade de uma haste, por exemplo, a perturbação propaga-se ao longo da haste, até chegar à outra extremidade.

Considera-se, por exemplo, uma haste de seção transversal uniforme A sujeita a um esforço, ao longo do seu eixo, indicado pela força F . Em cada seção transversal existem duas forças iguais e opostas.

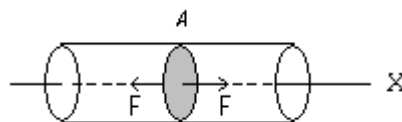


FIGURA 2. 3: Haste

A tensão normal σ é definida como a força por unidade de área que atua perpendicularmente à seção transversal. Então:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.32)$$

onde F é expresso em N e σ é expresso em N / m^2 ou PA .

2.5 Equação Governante

A equação que governa problemas de propagação de ondas é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

onde as variáveis x, y e z são as coordenadas espaciais para problemas tridimensionais. Em problemas bidimensionais, usam-se as coordenadas x e y . Para o caso unidimensional, que é o proposto neste trabalho, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno é um método utilizado para soluções de sistemas de equações diferenciais, formuladas em forma integral. O método possui melhor desempenho que o método dos elementos finitos em certas circunstâncias, como, por exemplo, quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito.

3.1 Aspectos Históricos

A idéia de representar funções contínuas através de aproximação por partes não é uma novidade. “Rudimentos das idéias de interpolação supostamente foram usados antigamente pelos babilônios e egípcios”, segundo YAMAMOTO (1994).

“Devido à introdução das idéias do Cálculo desenvolvido por Leibniz e Newton, foram determinadas formulações dos problemas da Física Matemática através de equações diferenciais e integrais”, de acordo com YAMAMOTO (1994).

O método das diferenças finitas foi o primeiro método aproximado conhecido. De acordo com KATSIKADELIS (2004) a paternidade do MEC pode ser atribuída a Fredholm. “No início do século XX, ele foi o primeiro a usar as equações de contorno singulares, a fim de encontrar as quantidades de contorno desconhecida para os problemas da teoria do potencial.”

Para a solução de equações integrais em Potencial e Fluxo, as técnicas foram desenvolvidas por Trefftz e Prager no início do século XX, sendo que tais técnicas seriam impraticáveis sem o uso de computadores BESKOS (1987).

A expressão Método dos Elementos de Contorno, segundo YAMAMOTO (1994), apareceu na literatura em 1977, nos trabalhos de Banerjee e Butterfield e nos de Brebbia e Domingues, para indicar o caráter de discretização do contorno do problema.

Em 1872, Betti apresentou um método geral para a integração das equações de elasticidade e que baseia a sua solução de forma integral. Basicamente, este pode ser considerado como uma extensão direta da abordagem de Green para as equações de elasticidade de Navier.

Foi mostrado por Brebbia que o Método dos Elementos Finitos, “o Métodos dos Elementos de Contorno e muitos outros métodos numéricos, podem ser obtidos como um caso especial da formulação de ‘Resíduos Ponderados’ geral e, a partir daí, estabelecer conexão entre várias outras técnicas existentes”, YAMAMOTO (1994)

3.2 Evolução Histórica do MEC

Segundo KATSIKADELIS (2004) até o início dos anos 80, o MEC era conhecido como Método das Equações Integrais (Boundary Integral Equation Method, BIEM). Esse método tem como finalidade resolver problemas de matemática e física e teve sua origem no trabalho de Georg Green. “Ele formulou, em 1828, a representação integral para os problemas de Dirichlet e Neumann da equação de Laplace, introduzindo a função de Green.”

Em 1885, Somigliana usou o método de Betti para extrair a representação da solução integral para o problema de elasticidade, KATSIKADELIS (2004).

O método empregado por Fredholm, no início do século XX, tinha como finalidade determinar as condições de contorno necessárias para problemas da física matemática e não como método para resolver os problemas. Os primeiros trabalhos como uma técnica computacional do MEC surgiram no início dos anos 60. “As equações de Fredholm foram utilizadas por Jaswon e Symm para resolver problemas da teoria do potencial bidimensional”, KATSIKADELIS (2004)

Admitindo que todas as funções pertinentes possuem transformada de Laplace, uma equação integral de contorno é derivada e resolvida no espaço das transformadas, para uma seqüência de valores reais positivos transformando o parâmetro. Um procedimento de inversão na transformação numérica é então empregado para computar as variáveis físicas no espaço real. Usando esta aproximação, o problema de dependência do tempo é temporariamente removido.

O primeiro artigo de MEC no Brasil foi publicado na década de 70, ver TELLES, MANSUR E HALBRITTER (1978).

3.3 Solução Fundamental

Soluções de equações diferenciais que representam respostas a fontes pontuais denominam-se funções de Green, quando devem satisfazer as condições de contorno do problema. No Método dos Elementos de Contorno, quando se utiliza o Método de Resíduos Ponderados, são empregadas, como funções de ponderação, as soluções fundamentais do problema singular.

A função de Green aplica-se a Equações Lineares e é uma solução de uma equação diferencial parcial não-homogênea.

Considera-se um sistema algébrico de equações não-homogêneas do tipo:

$$Df(x) = g(x) \quad (3.1)$$

sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções definidas no domínio do problema e D , o operador diferencial. Para a resolução da equação (3.1) pode-se usar uma função de Green, representada por $G(x, \xi)$, que é a solução da equação:

$$D_x G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (3.2)$$

onde D_x indica que D opera sobre a função de x ficando o ponto ξ fixo e $\delta(x - \xi)$ é o delta de Dirac. A função de Green, $G(x, \xi)$, portanto, representa o efeito em um ponto x devido a uma perturbação no ponto ξ . Para $x \neq \xi$, obtém-se a forma homogênea da equação (3.2).

A “função” delta de Dirac pode ser representada como uma força pontual em mecânica dos sólidos e dos fluidos, como uma carga elétrica pontual em eletrostática, etc., SCUCIATO (2007).

O delta de Dirac é descrito pelas suas propriedades, das quais a mais utilizada é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \xi) d\xi = f(\xi) \quad (3.3)$$

A solução fundamental utilizada na formulação MEC-D é a solução independente do tempo, ou seja, é a solução fundamental do problema estático.

A solução fundamental para o caso bidimensional é (BREBBIA e DOMINGUES (1989)):

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.4)$$

Para o caso tridimensional é (BREBBIA e DOMINGUES (1989)):

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi r} \quad (3.5)$$

onde, em (3.4) e (3.5) r é a distância do ponto campo (x) ao ponto fonte (ξ).

Neste trabalho será utilizada a solução fundamental para o caso do domínio unidimensional, dada por VLADIMIROV (1979):

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (3.6)$$

que é a solução da equação abaixo:

$$\frac{\partial^2 u^*(\xi, x)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (3.7)$$

Note-se que para o caso unidimensional não há problemas de singularidade, pois quando os pontos coincidem a solução fundamental é nula.

A dedução da equação (3.7) pode ser encontrada em OLIVEIRA (2011).

3.4 Equações Constituintes do MEC

A equação constituinte do MEC-D para problemas unidimensionais é dada por:

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t) = & \left[q^*(\xi, x) u(x, t) \Big|_L - q^*(\xi, x) u(x, t) \Big|_0 \right] \\
 & - \left[u^*(\xi, x) q(x, t) \Big|_L - u^*(\xi, x) q(x, t) \Big|_0 \right] \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_0^L u^*(\xi, x) \ddot{u}(x, t) dx
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A dedução da equação constituinte do MEC-D é desenvolvida no Apêndice B. Na equação (3.8) nota-se a presença de uma integral de domínio; a manutenção desta integral caracteriza a formulação MEC-D. Observe-se que esta integral de domínio aparece em decorrência da utilização da solução fundamental independente do tempo.

A função $q^*(\xi, x)$ é a derivada normal da solução fundamental:

$$q^*(\xi, x) = \frac{du^*(\xi, x)}{dn(x)} = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} \frac{dx}{dn(x)} \tag{3.9}$$

A expressão para $q^*(\xi, x)$ é investigada de acordo com a posição do ponto fonte no contorno. Assim, para $\xi = 0$, tem-se $x > \xi$ e, conseqüentemente:

$$\frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(x - \xi)}{\partial x} = \frac{1}{2} \tag{3.10}$$

Para $\xi = L$, $x < \xi$ e:

$$\frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi - x)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \tag{3.11}$$

Levando em conta que:

$$\left. \frac{dx}{dn(x)} \right|_{x=L} = 1 \quad e \quad \left. \frac{dx}{dn(x)} \right|_{x=0} = -1 \quad (3.12)$$

a expressão para $q^*(\xi, x)$ é dada simplesmente por:

$$q^*(\xi, x) = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

Apresentando a equação (3.8) em forma matricial para a resolução do problema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} & \dots & H^{1n} \\ H^{21} & H^{22} & \dots & H^{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ H^{m1} & H^{m2} & \dots & H^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(L) \\ \vdots \\ u(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} \\ G^{21} & G^{22} \\ \vdots & \vdots \\ G^{m1} & G^{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ q(L) \end{bmatrix} + \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & \dots & M^{1n} \\ M^{21} & M^{22} & \dots & M^{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ M^{m1} & M^{m2} & \dots & M^{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}(0) \\ \ddot{u}(L) \\ \vdots \\ \ddot{u}(n) \end{bmatrix}$$

A equação (3.14) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{q_{n+1}^c\} + \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^c \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^d \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Os índices superiores representam a localização os pontos: **c** representa os nós do contorno e **d** representa os pontos internos. Nas sub-matrizes, o primeiro índice

superior corresponde à posição do ponto fonte e o segundo, à posição do ponto campo. Os índices inferiores referem-se ao tempo da análise.

A função u representa o potencial ou o deslocamento e a função q representa a derivada em relação à normal.

Os coeficientes das sub-matrizes $H^{cc}, H^{dc}, G^{cc}, G^{dc}$ são obtidos diretamente da equação (3.8).

Os coeficientes das sub-matrizes $M^{cc}, M^{cd}, M^{dc}, M^{dd}$ são calculados analiticamente. Deve-se tomar cuidado com a posição do ponto fonte relativamente à célula que está sendo integrada.

O problema apresentado nesse trabalho é unidimensional o que indica que possui apenas dois pontos no contorno, que se referem às extremidades do domínio.

A solução da equação (3.8) requer a discretização do domínio e a escolha de uma aproximação para aceleração. Para a dimensão das matrizes, estas são relacionadas com a quantidade de nós adotadas no problema. É importante notar que, se N intervalos são adotados, os pontos internos são numerados de 3 até $(N + 1)$, pois os nós 1 e 2 pertencem ao contorno.

A função \ddot{u} em (3.8) representa a derivada segunda em relação ao tempo e é aproximada com o emprego do método de Houbolt, que será apresentado abaixo.

3.4.1 Método de Houbolt

Para as aproximações da aceleração pode ser empregado, nas formulações MEC-D, o método de HOUBOLT, por exemplo (CARRER e MANSUR, 2004).

O método de Houbolt tem sido bastante utilizado nas formulações do tipo MEC-D, segundo CARRER et al. (2009). De acordo com MANSUR (1983) é comum no MEC, tanto na formulação dependente do tempo, quanto na formulação MEC-D, que a escolha do intervalo de tempo seja feita de maneira empírica. Não há, até onde é do conhecimento da autora, trabalhos relativos ao estudo da estabilidade e convergência do método quando utilizado juntamente com o MEC.

O método de HOUBOLT (1950), BATHE (1996), é obtido por derivação de polinômios cúbicos de Lagrange; as aproximações para a velocidade e para a aceleração são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{6\Delta t} \left[11\mathbf{u}_{n+1} - 18\mathbf{u}_n + 9\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_{n-2} \right] \quad (3.16)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} \left[2\mathbf{u}_{n+1} - 5\mathbf{u}_n + 4\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2} \right] \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.15), o sistema de equações pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{\mathbf{q}_{n+1}^c\} \\ + \frac{1}{(c\Delta t)^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{u}_{n+1}^c - 5\mathbf{u}_n^c + 4\mathbf{u}_{n-1}^c - \mathbf{u}_{n-2}^c \\ 2\mathbf{u}_{n+1}^d - 5\mathbf{u}_n^d + 4\mathbf{u}_{n-1}^d - \mathbf{u}_{n-2}^d \end{Bmatrix} & \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agrupando os termos semelhantes, a equação (3.18) fica:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \left((c\Delta t)^2 \mathbf{H}^{cc} - 2\mathbf{M}^{cc} \right) & -2\mathbf{M}^{cd} \\ \left((c\Delta t)^2 \mathbf{H}^{dc} - 2\mathbf{M}^{dc} \right) & -2\mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+1}^c \\ \mathbf{u}_{n+1}^d \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (c\Delta t)^2 \mathbf{G}^{cc} \\ (c\Delta t)^2 \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} \{\mathbf{q}_{n+1}^c\} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5\mathbf{u}_n^c + 4\mathbf{u}_{n-1}^c - \mathbf{u}_{n-2}^c \\ -5\mathbf{u}_n^d + 4\mathbf{u}_{n-1}^d - \mathbf{u}_{n-2}^d \end{Bmatrix} & \end{aligned} \quad (3.19)$$

Apresentando a equação (3.19) de forma reduzida:

$$\overline{\mathbf{H}} \mathbf{u}_{n+1} = \overline{\mathbf{G}} \mathbf{q}_{n+1} + \frac{1}{c^2} \mathbf{M} (-5\mathbf{u}_n + 4\mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_{n-2}) \quad (3.20)$$

As matrizes $\overline{\mathbf{H}}$ e \mathbf{M} são quadradas. Para a obtenção das matrizes, usa-se o número total de nós (NNOS) apresentado no problema, que é igual ao número de nós do domínio mais os dois nós do contorno.

Para a construção da matriz \bar{G} , as linhas são formadas pelo número total de nós e há apenas duas colunas.

Por se tratar de um problema unidimensional, a figura 3.1 mostra como seria a discretização do problema com 5 pontos internos.

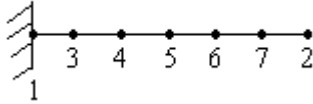


FIGURA 3. 1: Segmento de Corda Discretizado

Com relação à figura acima, os pontos do contorno são representados por 1 e 2 e os pontos do domínio, ou seja, os pontos internos, seguem a sequência de 3 a 7.

3.4.2 Integral de Domínio

A matriz M é formada através da integral de domínio que aparece à direita da igualdade na equação (3.8), representada abaixo:

$$\int_0^L u^*(\xi, x) \ddot{u}(x, t) dx \quad (3.21)$$

Substituindo $u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2}$ e para $\ddot{u}(x, t)$ utiliza-se as funções de forma do

tipo $\phi_i = \frac{x_j - x}{\Delta x}$ e $\phi_j = \frac{x - x_i}{\Delta x}$, obtém a integral apresentada abaixo:

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{|x - \xi|}{2} [\phi_i \quad \phi_j] dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

A solução é apresentada por:

$$\Omega_i = \frac{1}{12 \cdot \Delta x} [x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_i^2 \cdot x_j + 2x_i^3 + 6\xi x_j \cdot x_i - 3\xi x_i^2] \quad (3.23)$$

e

$$\Omega_j = \frac{1}{12 \cdot \Delta x} \left[2x_j^3 - 3x_j^2 \cdot x_i - 3\xi x_j^2 + 6\xi x_i \cdot x_j + x_i^3 - 3\xi x_i^2 \right] \quad (3.24)$$

A resolução da integral de domínio encontra-se desenvolvida no apêndice C

O sistema de equações é resolvido para cada passo de tempo de análise, pois se trata de um problema transiente. Assim os vetores contendo as incógnitas são atualizados a cada passo de tempo, utilizando os resultados do passo anterior.

Quando $n = 0$ na equação (3.19), ou na equação (3.20), encontram-se os valores \mathbf{u}_{-2} e \mathbf{u}_{-1} , que estão fora do domínio. Esses valores estão relacionados com as condições iniciais da seguinte forma (CARRER et al. 2009):

$$\mathbf{u}_{-2} = \mathbf{u}_0 - 2\Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (3.25)$$

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (3.26)$$

3.4.3 Marcha no Tempo

Para a marcha no tempo, a escolha do intervalo de tempo, Δt , de acordo com MANSUR (1983), desempenha um papel muito importante em problemas transientes.

Um parâmetro adimensional foi definido por MANSUR (1983) para ajudar na escolha do intervalo de tempo e se relaciona com a velocidade da onda, com Δt e com ΔL (para a presente formulação) de acordo com a expressão abaixo:

$$\beta = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta L} \quad (3.27)$$

O valor do parâmetro β utilizado para os problemas unidimensionais apresentados nesse trabalho foi definido empiricamente e é dado por $\beta = 0,32$. Ou seja, um intervalo de tempo adequado para os exemplos foi obtido seguindo o valor $\beta = 0,32$.

No Método dos Elementos de Contorno, estudos analíticos sobre a escolha de β ainda não foram concluídos, até onde é do conhecimento da autora.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com a finalidade de validar a formulação desenvolvida, serão apresentados cinco exemplos e os resultados obtidos pelo MEC – D serão comparados com a solução analítica.

Para os exemplos será utilizada uma barra unidimensional de comprimento $L = 1,2$ e para a velocidade da onda será admitido $c = 1$. As condições de contorno e as condições iniciais serão apresentadas em cada caso.

Nesse trabalho, as soluções analíticas de cada exemplo foram obtidas seguindo os procedimentos apresentados em Greenberg (1998).

4.1 Barra Fixa em Uma das Extremidades

Esse exemplo consiste em uma barra fixa em $x = 0$ e com uma carga aplicada em $x = L$, como mostra a figura 4.1. Será feita a comparação dos resultados relativos ao deslocamento no meio da barra, ou seja, para $x = \frac{L}{2}$, e para a reação de apoio em $x = 0$.

As condições de contorno são:

$$u(0, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$q(L, t) = 1 \quad (4.2)$$

As condições iniciais para esse problema são nulas, isto é:

$$u(x, 0) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (4.4)$$

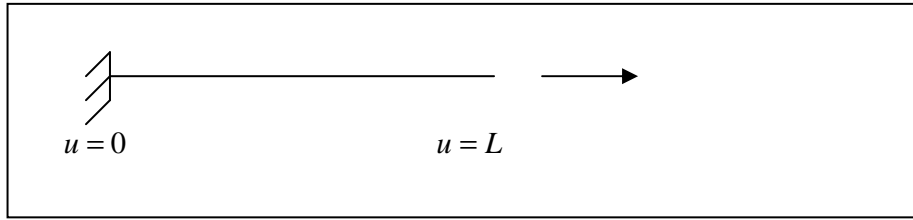


FIGURA 4.1: Barra fixa em uma das extremidades

A solução analítica é dada por:

$$u(x,t) = x + \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi ct}{2L}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{n^2} \quad (4.5)$$

Os exemplos que serão apresentados utilizam $\Delta t = 0,384$. A discretização para as análises emprega dez células, ou seja, $\Delta L = 1,2$.

Os resultados correspondentes ao deslocamento no meio da barra estão apresentados na figura 4.2.

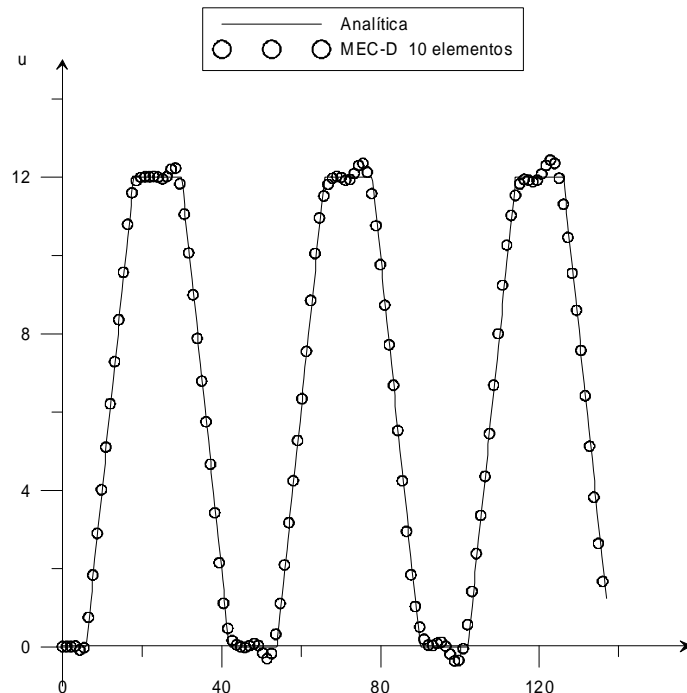


FIGURA 4.2: Deslocamento em $x = L/2$

Como é possível observar na figura 4.2 a solução do MEC – D apresenta uma boa concordância com a solução analítica, mesmo com o emprego de uma malha relativamente pobre.

Os resultados correspondentes à reação de apoio em $x = 0$ estão apresentados na figura 4.3.

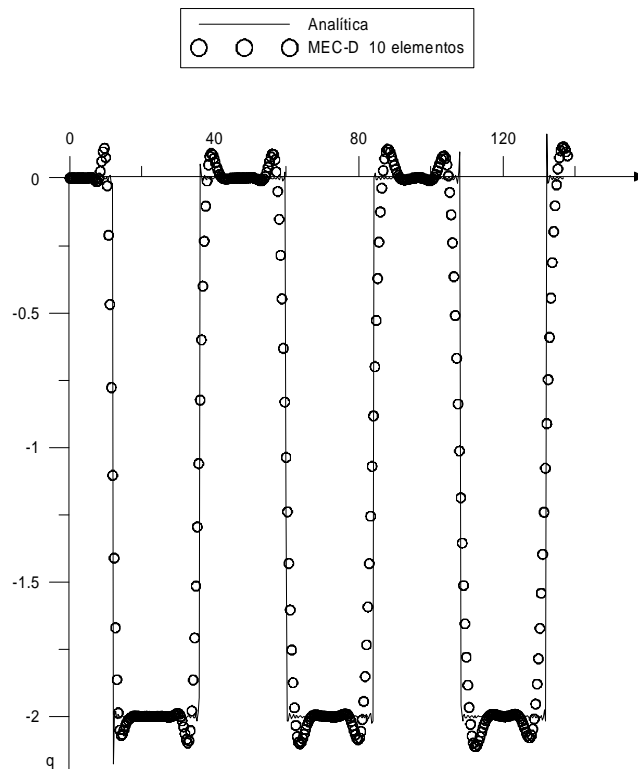


FIGURA 4.3: Reação de apoio em $x = 0$

Novamente, observa-se boa concordância entre as soluções numérica e analítica.

Adicionalmente às análises apresentadas, foram feitos alguns estudos para se verificar a influência da escolha do intervalo de tempo nos resultados ou, em outras palavras, para mostrar o acerto da escolha feita neste trabalho para o valor do parâmetro β . Assim sendo, foram utilizados intervalos de tempo iguais a: $\Delta t = 0,1$, $\Delta t = 0,2$ e $\Delta t = 0,5$ correspondentes, respectivamente, a: $\beta = 0,08$, $\beta = 0,16$ e $\beta = 0,41$. Os resultados estão apresentados na figura 4.4.

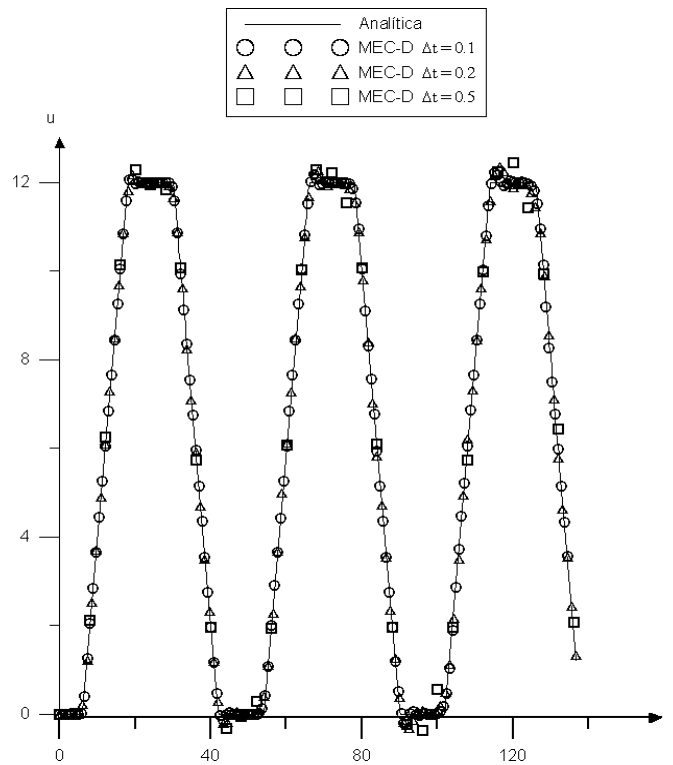


FIGURA 4.4: Deslocamento em $x = L/2$

O intervalo de tempo mais apropriado para este exemplo é $\Delta t = 0,5$, o que produz respostas que mais se aproximam da solução analítica.

4.2 Barra Fixa em Uma das Extremidades com Campo de Deslocamento Inicial Prescrito

Este exemplo consiste em uma barra fixa em $x=0$ e livre em $x=L$, com um campo de deslocamento inicial prescrito, como mostra a figura 4.5. Novamente, serão feitas comparações entre os resultados relativos ao deslocamento no meio da barra e à reação de apoio em $x=0$. Também serão feitas comparações entre os resultados relativos ao deslocamento na extremidade livre, isto é, em $x=L$.

Para este exemplo serão utilizadas as condições de contorno:

$$u(0,t) = 0 \quad (5.1)$$

$$q(L,t) = 0 \quad (5.2)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$u(x,0) = U_0 x \quad (5.3)$$

onde U_0 é constante (para efeitos práticos, adotou-se o valor unitário) e:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad (5.4)$$

A solução analítica é dada por:

$$u(x,t) = \frac{8LU}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi ct}{2L}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{n^2} \quad (5.5)$$

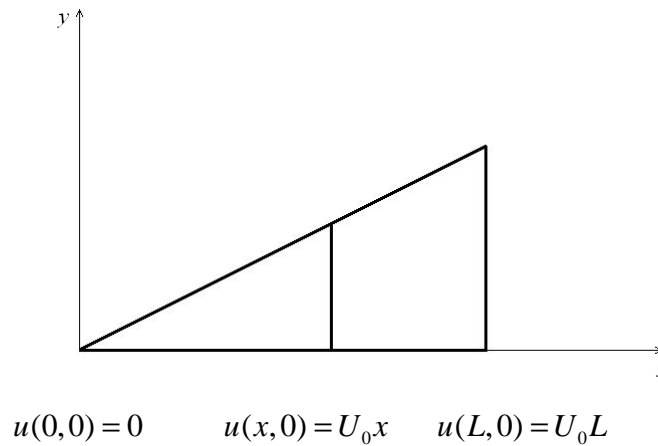


FIGURA 4.5: Viga apoiada em uma das extremidades

Os resultados relativos ao deslocamento em $x = L/2$ e à reação em $x = 0$ estão apresentados, respectivamente, nas figuras 4.6 e 4.7. Os resultados relativos ao deslocamento em $x = L$ estão apresentados na figura 4.8. Em todas as comparações,

observa-se uma boa concordância entre as soluções numérica e analítica. A presença de amortecimento numérico é observada com clareza na figura 4.8, mas pode ser considerada aceitável. Além disso, um posterior refinamento do domínio tenderia a diminuir esse amortecimento.

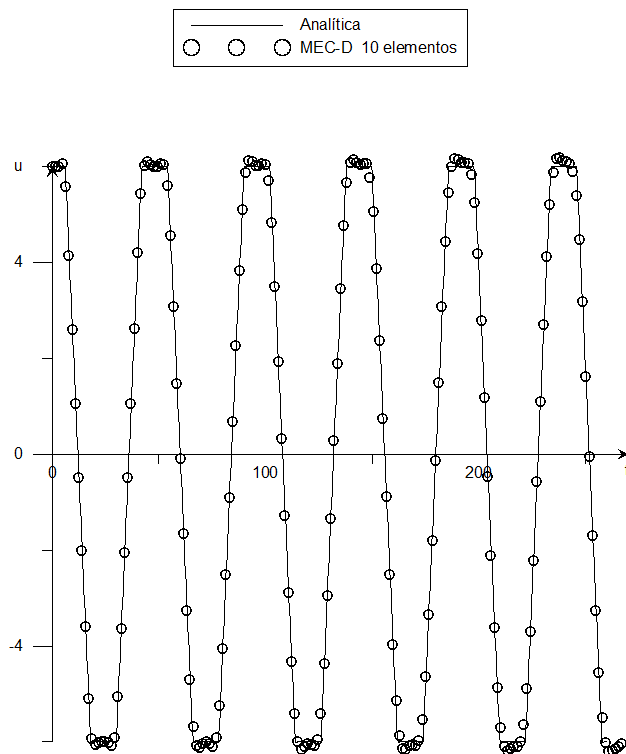


FIGURA 4.6: Deslocamento em $x = L/2$

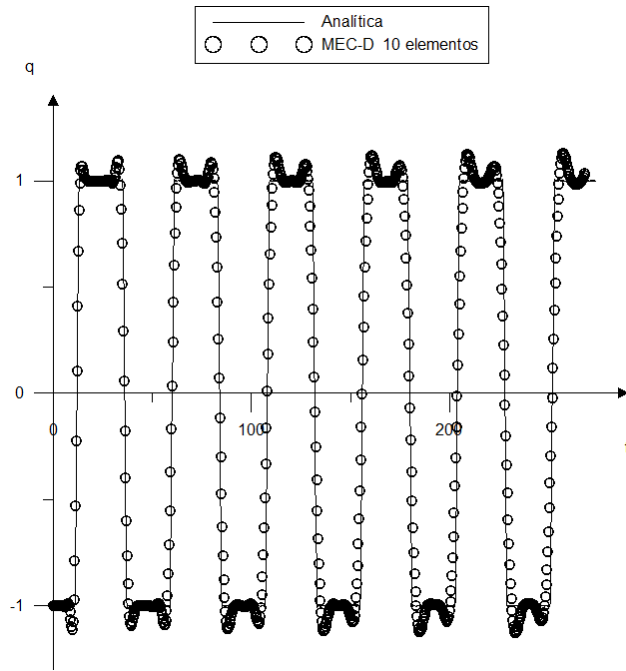


FIGURA 4.7: Reação de apoio em $x = 0$

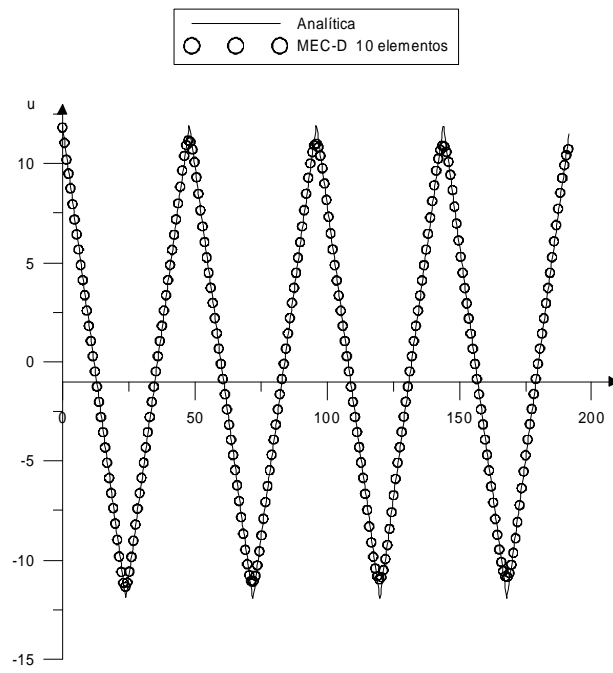


FIGURA 4.8: Reação de apoio em $x = L$

4.3 Barra Fixa em Uma das Extremidades com Campo de Velocidade Inicial Prescrito

Este é o mesmo exemplo anterior, agora com um campo de velocidade inicial prescrito em todo o domínio. Portanto, as condições de contorno são dadas por:

$$u(0,t) = 0 \quad (5.6)$$

$$q(L,t) = 0 \quad (5.7)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$u(x,0) = 0 \quad (5.8)$$

$$\dot{u}_0 = V_0 \quad (5.9)$$

onde V_0 é uma constante (admitida unitária nas análises realizadas).

A solução analítica é dada por:

$$u(x,t) = \frac{8LV}{c\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{2L}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)}{n^2} \quad (5.10)$$

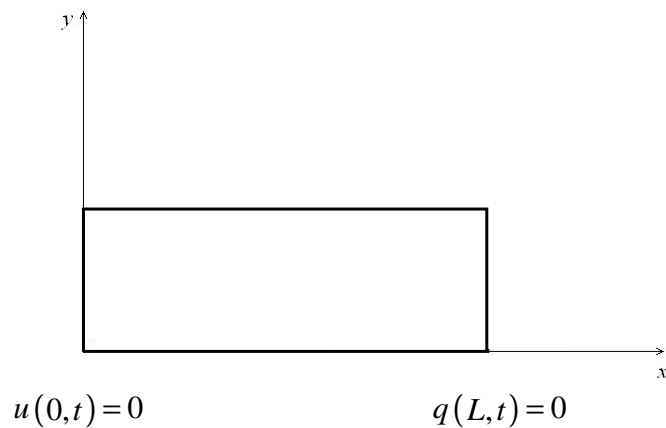


FIGURA 4.9: Barra com velocidade inicial prescrita

Os resultados correspondentes ao deslocamento em $x = L/2$ e em $x = L$ estão apresentados nas figuras 4.10 e 4.11, respectivamente. Novamente, obteve-se boa concordância entre as soluções numérica e analítica.

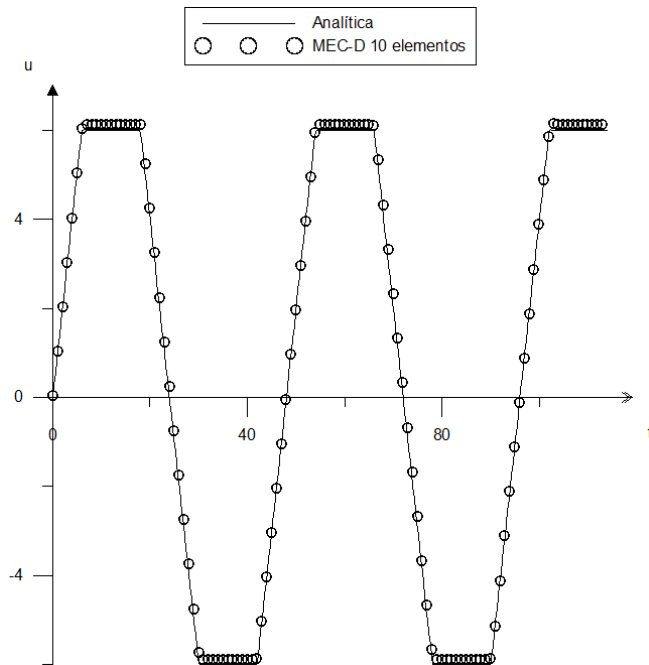


FIGURA 4.10: Deslocamento em $x = L/2$

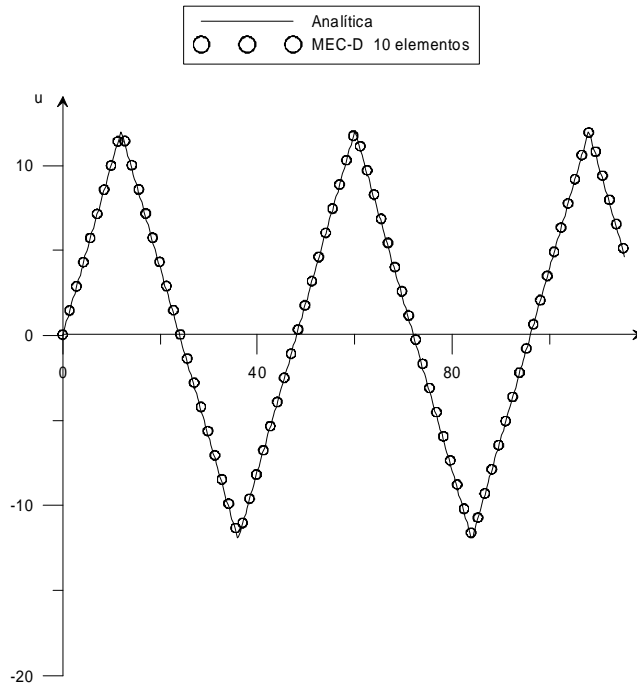


FIGURA 4.11: Reação de apoio em $x = L$

4.4 Barra Fixa nas Duas Extremidades com Campo de Deslocamento Inicial Prescrito

Neste exemplo será considerada uma barra fixa nas duas extremidades, ver figura 4.12.

As condições de contorno para esse caso são dadas por:

$$u(0,t) = 0 \quad (5.11)$$

$$u(L,t) = 0 \quad (5.12)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$u(x,0) = \text{sen}\left(\frac{x\pi}{L}\right) \quad (5.13)$$

$$\dot{u}(x,0) = 0 \quad (5.14)$$

A solução analítica é dada por:

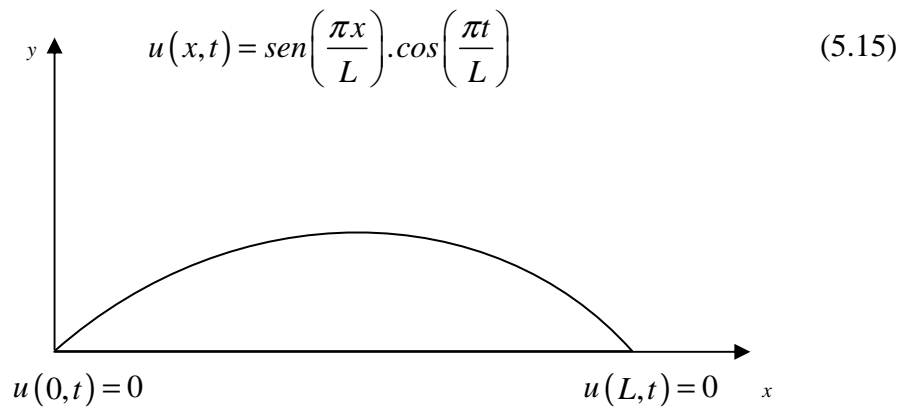
$$u(x,t) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) \quad (5.15)$$


FIGURA 4.12: Barra fixa nas duas extremidades

Os resultados correspondentes ao deslocamento no meio da barra estão apresentados na figura 4.13, enquanto que os resultados correspondentes à reação de apoio em $x = 0$ estão apresentados na figura 4.14. As duas respostas numéricas apresentam boa concordância com a analítica.

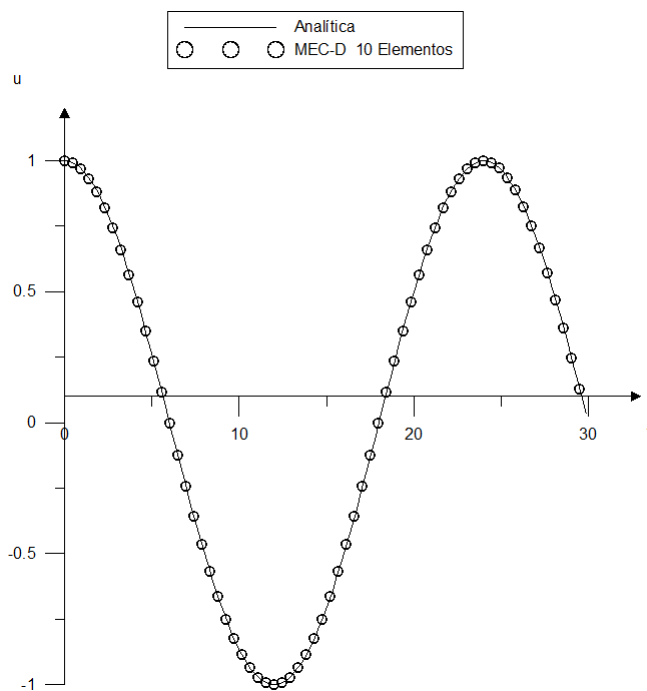


FIGURA 4. 13: Deslocamento em $x = L/2$

4.4.2 Análise de reação de apoio na extremidade da barra

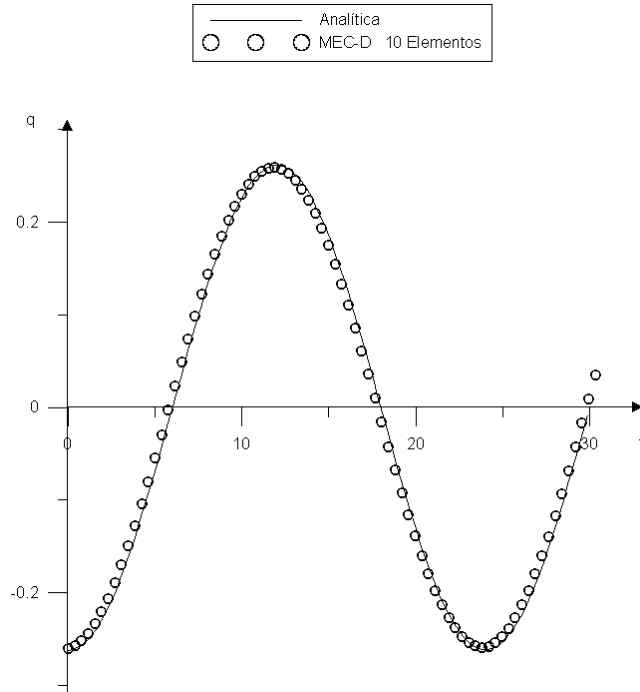


FIGURA 4. 14: Reação de apoio em $x = L$

4.5 Barra Fixa nas Duas Extremidades com Campo de Velocidade Inicial Prescrito

Para este exemplo também será considerada uma barra fixa nas duas extremidades.

As condições de contorno são:

$$u(0,t) = 0 \quad (5.16)$$

$$u(L,t) = 0 \quad (5.17)$$

As condições iniciais são dadas por:

$$u(x,0) = 0 \quad (5.18)$$

$$\dot{u}(x,0) = \text{sen}\left(\frac{x\pi}{L}\right) \quad (5.19)$$

A solução analítica é:

$$u(x,t) = \frac{L}{n\pi c} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (5.20)$$

Neste exemplo também serão apresentados os resultados correspondentes ao deslocamento no meio da barra e à reação de apoio em $x = 0$. Novamente, pode-se observar uma boa concordância entre as respostas numérica e analítica.

4.5.1 Análise do deslocamento no meio da barra

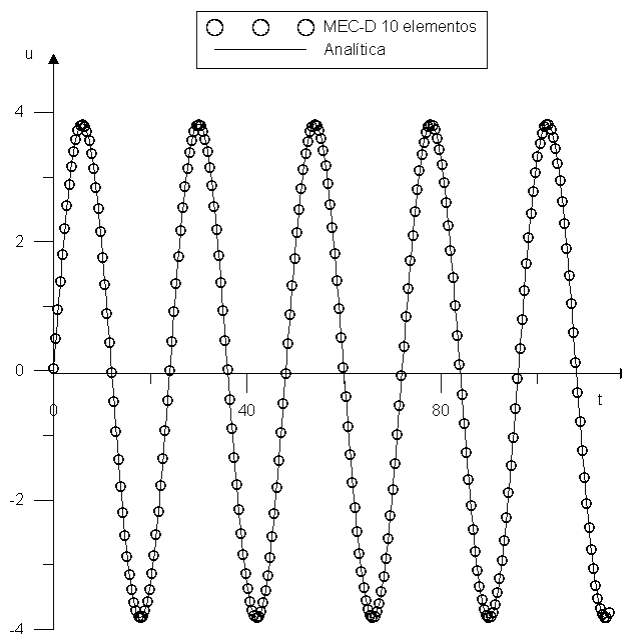


FIGURA 4. 15: Deslocamento em $x = L/2$

4.5.2 Análise de reação de apoio

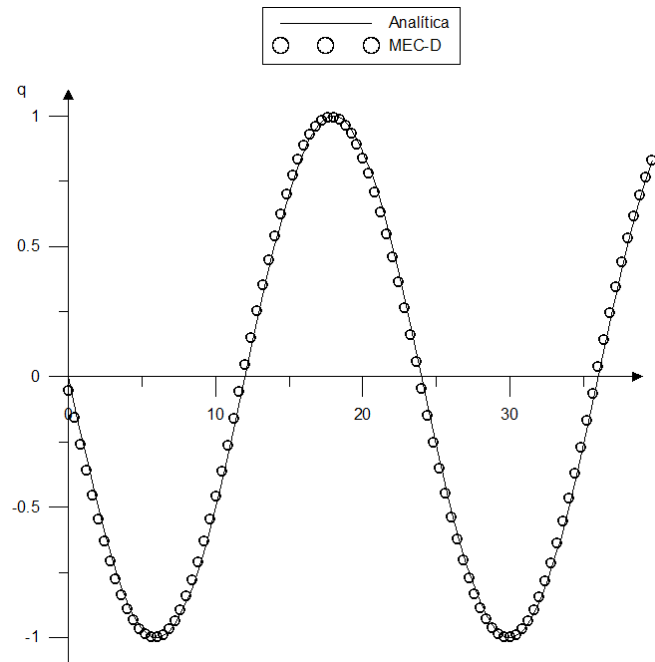


FIGURA 4. 16: Reação de apoio em $x = 0$

4.5.3 Análise de reação de apoio no final da barra

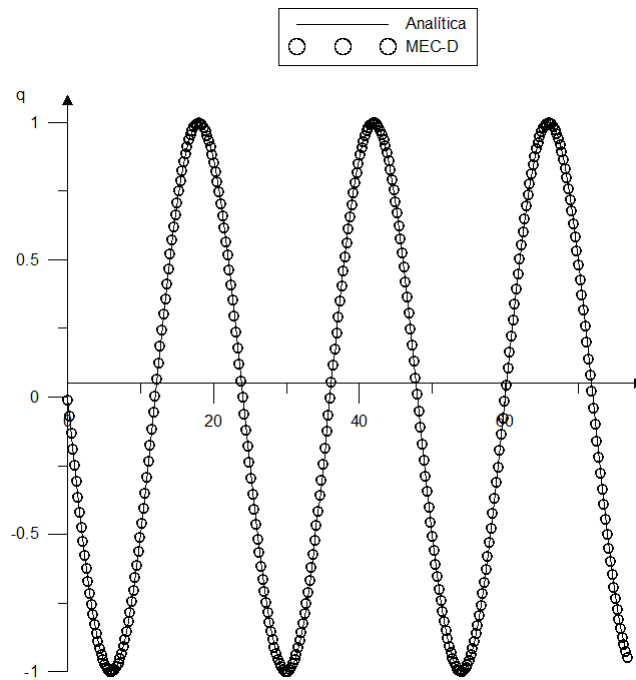


FIGURA 4. 17: Reação de apoio em $x = L$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A solução de problemas que envolvem a variável tempo pelo Método dos Elementos de Contorno é bastante atraente, uma vez que há várias possibilidades (que se traduzem em diferentes formulações) para a solução do problema. Entre as formulações disponíveis está apresentada neste trabalho, denominada MEC-D porque ao empregar uma solução fundamental independente do tempo apresenta e conserva nas equações integrais uma integral de domínio cujo integrando é a solução fundamental multiplicada pela derivada de segunda ordem, em relação ao tempo, do deslocamento.

Para problemas em uma dimensão o contorno é constituído por apenas dois nós e o domínio a ser discretizado é um intervalo finito; conseqüentemente, o desenvolvimento de uma formulação MEC-D torna-se relativamente simples.

A simplicidade da formulação, aliada aos bons resultados obtidos, encoraja o seu emprego para a solução de outros problemas, tais como o da difusão.

Note-se que a escolha de esquemas de marcha no tempo ainda é um tópico que merece atenção nas formulações MEC-D, uma vez que questões relativas à convergência e estabilidade do método ainda não foram respondidas. Por esse motivo, a escolha do intervalo de tempo ainda se dá de forma empírica.

Para os exemplos incluídos neste trabalho, o domínio foi discretizado com o emprego de apenas dez células, o que demonstra que, mesmo com uma discretização relativamente pobre podem-se obter bons resultados.

6. REFERÊNCIAS

ALONSO, MARCELO.; **Física, um curso universitário**, Vol. 2 (campos e ondas) 1930

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J., **Boundary elements: an introductory course**, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill, Southhampton, 1989.

BATHE, K. J., **Finite Element Procedures**. Prentice Hall – 1ª edição: New Jersey – 1996

BESKOS, D.E., **Boundary Elements Methods in Mechanics**. North – Holland - 1987

CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J., VANZUIT, R.J., **Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach with Non-Homogeneous Initial Conditions**. Computational Mechanics 2009, 44:31 – 44

CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J. **Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach for One-Dimensional Problems**. Springer – Verlag 2004.

CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J. **Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation**. Springer – Verlag 2004.

CARRON, W., **Física Volume Único**. Moderna – 2 edição, São Paulo, 2003

CHAPMAN, S. J. **Fortran 90/95 for Scientists and Engineers**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2004.

GREENBERG, M. D., **Advanced Engineering Mathematics**, Prentice Hall-2ª edição, New Jersey, 1998

HALLIDAY,D., RESNICK, R., WALKER, J., **Fundamentals of physics**, John Wiley & Sons – 9th ed, 2010

HOUBOLT, J.C., **A Recurrence Matrix solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft**, International Journal of Aeronautical Sciences: n. 17, p. 540-550, 1950.

KATSIKADELIS, J.T. **Boundary Element, Theory and Applications.** Elsevier, 2004.

MANSUR, W.J., **A time-stepping technique to solve wave propagation problem using the boundary element method, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1983**

OLIVEIRA, M. F., **O Método dos Elementos de Contorno para a análise de fluxo de calor unidimensional,** Curitiba, 2011, Dissertação de Mestrado. PPGMNE/UFPR.

SCUCIATO, R. F. **Estudo teórico e implementação computacional do método de elementos de contorno aplicado a problemas elastostáticos lineares bidimensionais,** Curitiba, 2007, Dissertação de Mestrado. PPGMNE/UFPR.

SENNA, A.M.S. **Uma Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise Propagação de Ondas Escalares,** Rio de Janeiro, 2003, Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ

STEPHENSON G.; **An Introduction to Partial Differential Equations for Science,** Students, Longman, 1970.

TIPLER P. A.; **Física para Cientistas e Engenheiros,** Volume 1, LTC, 1993.

VLADIMIROV, V.S. **Generalized Functions in Mathematical Physics.** Nauka Publishers, Moscow, 1979.

WROBEL, L. C., **Boundary Element Method - Volume 1,** John Wiley & Sons. Ltd, England, 2002.

YAMAMOTO, T.M., **Cálculo da Ondulação Geoidal pelo Método dos Elementos de Contorno,** Paraná, 1994, Tese de Doutorado. UFPR.

APÊNDICE A – Equação constituinte do MEC-D

Seja a equação diferencial que rege problemas de propagação da onda em domínios unidimensionais:

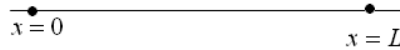


FIGURA A.1: Barra unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Omega = [0, L] \text{ e } \Gamma = \{0, L\} \quad (\text{A.1})$$

onde Ω representa o domínio do problema e Γ representa o contorno, com as seguintes condições de contorno:

$$u|_{x=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = Q$$

Para que a equação (A.1) possa ser resolvida através do MEC, a equação será ponderada por uma função u^* , isto é, a formulação do MEC será obtida através do método dos resíduos ponderados.

Como solução fundamental do problema estático associado

$$\frac{\partial^2 u^*(\xi, x)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (\text{A.2})$$

tem-se:

$$u^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \quad (\text{A.3})$$

Dada a equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.4})$$

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = \int_0^L \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.5})$$

Resolvendo apenas o lado esquerdo da equação, ou seja a seguinte integral:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx \quad (\text{A.6})$$

Integrando por partes a equação (B.6):

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\begin{cases} u = u^* \\ du = \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \end{cases} \quad \begin{cases} v = \frac{\partial u}{\partial x} \\ dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \end{cases}$$

Substituindo em (A.6), obtém a formulação fraca, que é dada da forma:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.7) em (A.5), a equação pode ser reescrita como:

$$u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx = \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.8})$$

Ou

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.9})$$

Para a obtenção da formulação inversa, deve-se resolver o lado esquerdo da equação (A.9).

$$\int u dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial u^*}{\partial x} \\ du = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx \end{cases} \quad \begin{cases} v = u \\ dv = \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{cases}$$

Substituindo apenas no lado esquerdo da equação (A.9), temos:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L u \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx \quad (\text{A.10})$$

Substituindo (A.10) em (A.9) a equação pode ser reescrita como:

$$u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L u \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.11})$$

Ou

$$\int_0^L u \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx = u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L - u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.12})$$

De acordo com a equação (A.3) tem-se que $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(\xi, x) = \delta(x - \xi)$, e sendo u uma função de (x, t) e substituindo a expressão (A.3) em (A.12), pode ser reescrito na forma:

$$\int_0^L u(x, t) \cdot \delta(x - \xi) dx = u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L - u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.13})$$

Resolvendo a integral do lado esquerdo, tem-se:

$$\int_0^L u(x,t) \cdot \delta(x-\xi) dx = u(\xi,t) \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.13) obtém-se a equação:

$$u(\xi,t) = u \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0^L - u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.15})$$

Sendo $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, então, derivando a função u^* dada em (3.6), obtém-se q^* .

$$u^*(x,\xi) = \frac{|x-\xi|}{2} = \frac{\sqrt{(x-\xi)^2}}{2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(x-\xi) = \frac{(x-\xi)}{2\sqrt{(x-\xi)^2}} = q^*$$

Substituindo $\frac{\partial u}{\partial x}$ e q^* em (A.16):

$$u(\xi,t) = u \cdot q^* \Big|_0^L - u^* \cdot q \Big|_0^L + \frac{1}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* dx \quad (\text{A.16})$$

Desenvolvendo a expressão (A.16), sendo u e q função de (x,t) , e u^* e q^* função de (ξ,x) chega-se a seguinte expressão final:

$$\begin{aligned} u(\xi,t) = & \left[q^*(\xi,x) u(x,t) \Big|_L - q^*(\xi,x) u(x,t) \Big|_0 \right] \\ & - \left[u^*(\xi,x) q(x,t) \Big|_L - u^*(\xi,x) q(x,t) \Big|_0 \right] \\ & + \frac{1}{c^2} \int_0^L u^*(\xi,x) \ddot{u}(x,t) dx \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

APÊNDICE B – Integral de domínio

Seja dada a equação constituinte do MEC-D, para problemas unidimensionais.

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t) = & \left[q^*(\xi, x) u(x, t) \Big|_L - q^*(\xi, x) u(x, t) \Big|_0 \right] \\
 & - \left[u^*(\xi, x) q(x, t) \Big|_L - u^*(\xi, x) q(x, t) \Big|_0 \right] \\
 & + \frac{1}{c^2} \int_0^L u^*(\xi, x) \ddot{u}(x, t) dx
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

A integral de domínio à direita na equação (B.1) é calculada a seguir:

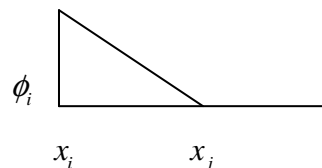
$$I_{\Omega} = \int_0^L u^*(\xi, x) \ddot{u}(x, t) dx \tag{B.2}$$

Substituindo u^* pela sua expressão, dada pela equação (B.2), a integral a ser calculada é reescrita abaixo:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{r}{2} [\phi_i \ \phi_j] dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} \tag{B.3}$$

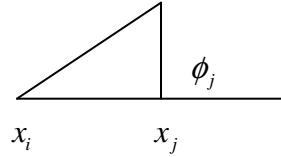
na qual r representa a distância entre os pontos campo e fonte

Os valores de ϕ_i e ϕ_j são determinados através das funções de forma:



$$\phi_i = \frac{x_j - x}{\Delta x} \tag{B.4}$$

FIGURA 6. 1: Função de interpolação ϕ_i



$$\phi_j = \frac{x - x_i}{\Delta x} \quad (\text{B.5})$$

FIGURA 6. 2: Função de interpolação ϕ_j

Substituindo $r = \frac{|x - \xi|}{2}$ e as funções (B.4) e (B.5), relativas a ϕ_i e ϕ_j , em (B.3), obtém-se:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \frac{|x - \xi|}{2} \left[\frac{x_j - x}{\Delta x} \quad \frac{x - x_i}{\Delta x} \right] dx \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Trabalhando somente com a integral, pode-se escrever:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \left[\frac{|x - \xi|}{2} \left(\frac{x_j - x}{\Delta x} \right) \quad \frac{|x - \xi|}{2} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \right]$$

Admitindo que $x > \xi$, a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$I_{\Omega} = \int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{x - \xi}{2} \right) \left(\frac{x_j - x}{\Delta x} \right) \quad \left(\frac{x - \xi}{2} \right) \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \right] dx =$$

$$\int_{x_i}^{x_j} \left[\left(\frac{x.x_j - x^2 - \xi x_j + \xi x}{2.\Delta x} \right) \quad \left(\frac{x^2 - x.x_i - \xi x + \xi x_i}{2.\Delta x} \right) \right] dx = [\Omega_i \quad \Omega_j] \quad (\text{B.7})$$

onde:

$$\Omega_i = \frac{1}{12.\Delta x} \left[x_j^3 - 3\xi x_j^2 - 3x_i^2 .x_j + 2x_i^3 + 6\xi x_j .x_i - 3\xi x_i^2 \right] \quad (\text{B.8})$$

e

$$\Omega_j = \frac{1}{12.\Delta x} \left[\left(2x_j^3 - 3x_j^2 .x_i - 3\xi x_j^2 + 6\xi x_i .x_j \right) - \left(-x_i^3 + 3\xi x_i^2 \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

Para a situação na qual $x < \xi$, as expressões obtidas são iguais às expressões (B.8) e (B .9) multiplicadas por (-1).