UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: METAFÍSICA E EPISTEMOLOGIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O ERRO DE NEWTON À LUZ DA POLÊMICA SOBRE O CÁLCULO:
Um estudo acerca da obstinada revisão da proposição X do livro II dos *Principia*

LUIZ FELIPE SIGWALT DE MIRANDA

Curitiba
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: METAFÍSICA E EPISTEMOLOGIA

LUIZ FELIPE SIGWALT DE MIRANDA

O ERRO DE NEWTON À LUZ DA POLÊMICA SOBRE O CÁLCULO:

Um estudo acerca da obstinada revisão da proposição X do livro II dos *Principia*

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre do Curso de Mestrado em Filosofia do Setor de Ciências Humanas da Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra

Curitiba
2014

Catalogação na publicação
Fernanda Emanoéla Nogueira – CRB 9/1607
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

Miranda, Luiz Felipe Sigwalt de
O erro de Newton à luz da polêmica sobre o cálculo : um estudo acerca da obstinada revisão da Proposição X do Livro II dos *Principia* / Luiz Felipe Sigwalt de Miranda – Curitiba, 2014.
157 f.

Orientador: Profº. Drº. Eduardo Salles de Oliveira Barra
Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Setor de Ciências Humanas da Universidade Federal do Paraná.

1. Newton, Isaac, 1642 -1727. 2. Leibniz, Gottfried Wihelm, Freiherr Von, 1646-1716. 3.Cálculo - História. 4. Matemática - História. I.Título.

CDD 515.09

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA

ATA DA SESSÃO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Defesa nº 120 de 2014

Ata da Sessão Pública de Exame de Dissertação para Obtenção do Grau de MESTRE em FILOSOFIA, área de concentração: **FILOSOFIA.**

Ao décimo dia do mês de fevereiro do ano de dois mil e quatorze, as quatorze horas e trinta minutos, nas dependências do Programa de Pós-Graduação em Filosofia, do Setor de Ciências Humanas, da Universidade Federal do Paraná, reuniu-se a banca examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Filosofia, composta pelos Professores: Profa. Dra. Tatiana Marins Roque (UFRJ), Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin (UFPR), sob a orientação do Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra, com a finalidade de julgar a dissertação do candidato Louis de Luiz Felipe Sigwalt de Miranda "**O erro de Newton à luz da polêmica sobre o cálculo: Um estudo sobre a obstinada revisão da proposição X do livro II dos *Principia*.**", para obtenção do grau de mestre em Filosofia. O desenvolvimento dos trabalhos seguiu o roteiro de sessão de defesa estabelecido pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia, com abertura, condução e encerramento da sessão solene de defesa feita pelo Professor Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da banca examinadora deliberaram pela "aprovação" do mesmo HABILITANDO-O ao título de Mestre em FILOSOFIA, na área de concentração FILOSOFIA, desde que apresente a versão definitiva da dissertação no prazo de sessenta (60) dias, conforme Res.65/09-CEPE-Art.67 e Regimento Interno do Programa de Pós-Graduação em Filosofia. E, para constar, eu Aurea Junglos, Secretária Administrativa do Programa, lavrei a presente ata que vai assinada por mim e pelos membros da banca.

Curitiba, 10 de fevereiro de 2014.

Aurea Junglos
Secretaria Administrativa PGFILOS/UFPR

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra
Orientador e Presidente da banca examinadora
UFPR

Profa. Dra. Tatiana Marins Roque
Primeira examinadora
UFRJ

Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin
Segundo examinador
UFPR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - SCHLA - UFPR
MESTRADO

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Humanas
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

AVALIAÇÃO DA DISSERTAÇÃO
Defesa nº 120 de 10/02/2014

Mestrando: Luiz Felipe Sigwalt de Miranda

Titulo da Dissertação: "O erro de Newton à luz da polêmica sobre o cálculo: Um estudo sobre a obstinada revisão da proposição X do livro II dos *Principia*."

Integrantes da banca examinadora	Notas
Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra (UFPR) Orientador e Presidente da banca examinadora	10
Profa. Dra. Tatiana Marins Roque (UFRJ) Primeira examinadora	10
Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin (UFPR) Segundo examinador	10
Média final	10
Conceito	A

Os examinadores atribuem nota em escala de zero a 10 (dez), sendo considerado aprovado o mestrando que obtiver como nota final, a média aritmética superior a 7 (sete). No parecer emitido por ocasião da defesa, constará a nota e o critério: **CONCEITO.**
Os examinadores registraram no corpo da dissertação as correções sugeridas.

Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra
Orientador e Presidente da banca examinadora
UFPR

Profa. Dra. Tatiana Marins Roque
Primeira examinadora
UFRJ

Prof. Dr. Ronei Clécio Mocelin
Segundo Examinador
UFPR

§ 1º - Será considerado aprovado o aluno que lograr os conceitos A, B ou C.
A = Excelente = 9,0 a 10,0
B = Bom = 8,0 a 8,9
C = Regular = 7,0 a 7,9
D = Insuficiente = zero a 6,9

Prof. Dr. Luiz Damon Santos Moutinho
Coordenador do PGFILOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - SCHLA - UFPR
MESTRADO

Prof. Dr. Luiz Damon Santos Moutinho
Coordenador da PGFIL... SCH/UFPR
Gestão 2013/2015

Dedicatória

Aos meus pais, Elias e Mariza.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Eduardo Salles de Oliveira Barra pela orientação, pela generosidade ao sugerir o tema desta pesquisa, pela disposição e dedicação que somente aqueles que se lançam ao real ofício da docência possuem. Agradeço ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez e à Prof.a Dr.a Marisa Donatelli pela prestimosa leitura de meu texto e pelos valiosos conselhos dados na minha qualificação. Agradeço ao Alex e à Veronica Calazans por terem zelosamente me acolhido. Agradeço ao grupo de Filosofia da Ciência da Universidade Federal do Paraná. Agradeço aos meus amigos e colegas da pós-gradução pelas belas discussões que tivemos. Agradeço ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná. Agradeço à Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos. Agradeço à minha família por acreditarem em mim, à Mariza, minha mãe, pelas constantes palavras de incentivo; ao Ricardo, meu irmão, pelo apoio e consideração; à Lilian, minha esposa, pela paciência e amor.

Epígrafe

```
                 ERRA UMA VEZ
   nunca cometo o mesmo erro
duas vezes
   já cometo duas três
quatro cinco seis
   até esse erro aprender
que só o erro tem vez
```

Paulo Leminski

Sumário

Resumo

Os cálculos de Newton e Leibniz marcaram a história da matemática devido suas eficácias e devido à personalidade de seus inventores. Durante a controvérsia da prioridade do cálculo, ambos se esforçaram para reclamar sua autoria. Em parte, a proposição X do livro II dos *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* participou desse embate. O matemático leibniziano Johann Bernoulli encontrou nela uma contradição que poderia salvar o cálculo de Leibniz em detrimento do cálculo de Newton. Quais foram as circunstâncias desse erro de Newton? Os trabalhos de Lagrange, Whiteside e Panza dão-nos condições para responder a essa pergunta. Lagrange defende que seja uma falha devido uma identidade imprópria entre duas quedas galileanas. Whiteside, concorda com Lagrange e acrescenta que Newton deixou de considerar um fator numérico nessas quedas. Panza, por outro lado, afirma que há uma limitação no método sintético de Newton. Estudar os pormenores de um problema histórico como este revela um modo do "fazer matemático" muito próprio da época, e isso interessa à filosofia da ciência.

Palavras-chave: Proposição X; Prioridade do cálculo; Método das fluxões; Cálculo leibniziano.

Abstract

The calculus of Newton and Leibniz marked the history of mathematics because their efficacy and due to its inventors personality. During the controversy of the calculus priority, both strove to claim the authorship. In part, the proposition X of book II of the *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* participated into this conflict. The leibnizian mathematician Johann Bernoulli found in it a contradiction that could save the Leibniz's calculus rather than Newton's calculus. What was the circunstances of this Newton's flaw? That is what this research attempts to answer. Works from Lagrange, Whiteside and Panza form a background which allows us to reply it. Lagrange argues that the cause is a failure due to a improper identity between two galilean falls. Whiteside, agrees with him and adds that Newton failed in consider a numerical factor on these specific falls. Panza, on the other hand, states that there is a limitation into the synthetic method used by Newton. Studying the details of a historical problem like this shows a particular "doing math way" proper to that time, and it matters to philosophy of science.

Key-words: Proposition X; Calculus priority; Fluxions method; leibnizian calculus.

1 Apresentação

Este trabalho circunscreve-se ao período da controvérsia em torno da prioridade da invenção do cálculo infinitesimal. Essa controvérsia tem início, propriamente, com a réplica de Leibniz endereçada à *Royal Society*, em 1711, à acusação de plágio feita por John Keill nas *Acta Eruditorum.* Nesse momento, exemplares da primeira edição da mais famosa obra de Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, já haviam chegado a todo o continente europeu. Essa foi a época em que a comunidade matemática do velho continente estava repartida basicamente em dois grupos, devido às influências de dois grandes matemáticos: Leibniz e Newton. Desde então, costumou-se chamar de leibnizianos aqueles matemáticos adeptos do cálculo diferencial inventado obviamente pelo primeiro. Da mesma forma, nomeou-se de newtonianos os adeptos do método das fluxões desenvolvido pelo último. Matemáticos continentais e matemáticos ingleses são outras designições para os mesmos grupos.

Dos matemáticos continentais, Johann Bernoulli recebeu neste trabalho um maior destaque. Primeiramente, ele e seu irmão Jakob Bernoulli, como professores da Universidade da Basiléia, ajudaram a difundir o cálculo leibniziano. Além de grandes professores, eles também foram muito atuantes na comunidade científica da época. Quando Johann recebeu uma cópia dos *Principia*, ele percebeu que havia um erro, na verdade, uma contradição na proposição X do livro II. Isso, para ele e Leibniz, proporcionou a ocasião para responder a primeira acusação de plágio feita pelo newtoniano Fatio de Duillier em 1699 – quando a controvérsia da prioridade do cálculo teve início nos veículos de difusão acadêmica–, reforçada por Keill (como vimos) dez anos depois. Johann e Nikolaus (I) Bernoulli, em 1710, identificaram o erro de Newton e propuseram a sua correção por meio do cálculo leibniziano. Esta solução foi encaminhada à *Academie des Sciences* de Paris, e publicada três anos depois nas memórias dessa mesma academia. Em setembro de 1712, Nikoulaus (I) foi a Londres e apresentou ao próprio Newton a contradição por ele identificada. De pronto, Newton reconheceu o seu erro e, obstinadamente, dedicou-se nos três meses seguintes a corrigi-lo. A pressa de Newton deve-se ao fato de que, àquela altura do ano de 1712, a impressão da segunda edição dos *Principia* já estava em curso – e seria concluída no ano seguinte. Curiosamente, a solução apresentada por Newton na *secunda editio* é muito diferente da *editio princeps*, visto que toda a estrutura matemática foi modificada. Newton deixou seus leitores sem explicações; não há menção alguma nem no prefácio de sua segunda edição nem alhures.

Na realização deste trabalho, reuni esforços para responder a seguinte pergunta: Quais foram as circunstâncias do erro de Newton? Pelo breve relato acima, já está claro que a minha opção historiográfica foi por localizar o episódio em torno do erro de Newton no interior das polêmicas acerca da prioridade na inveção do cálculo infinitesimal. Para sustentar a minha opção, tive que buscar nos textos históricos indícios suficientes. Não estive sozinho nessa tarefa. Três brilhantes comentadores foram solicitados para ajudar-me: Joseph-Louis Lagrange, Derek Thomas Whiteside e Marco Panza (a quem indiretamente devo o tema desta pesquisa). Lagrange foi o primeiro a tentar responder essa mesma questão, e sua influência é perceptível nas considerações de Whiteside e de Panza.

Dividi este trabalho em seis partes. A primeira delas é esta apresentação que visa fornecer um panorama a respeito do assunto deste trabalho e de sua estrutura. A segunda parte corresponde à reconstrução histórica do erro de Newton, que envolve a controvérsia da prioridade do cálculo, a descoberta do erro por Johann Bernoulli e as consequências dessa descoberta. A terceira parte é inteiramente dedicada à prop. X. Nela apresento as duas estruturas matemáticas diferentes contidas na primeira e na segunda edições dos *Principia*, a contradição encontrada por Johann junto de sua solução via cálculo diferencial leibniziano, a explicação do erro de Newton segundo Nikolaus (I), e os cálculos de Newton que o fizeram assentir ao anúncio do erro. A quarta parte corresponde ao trabalho de Newton para solucionar seu erro. Foram escolhidas seis tentativas sequênciais – de um conjunto maior – porque apresentam um modo como Newton, ao longo desse processo de correção, modificou a estrutra matemática de sua proposição. A quinta parte reúne as interpretações dos três comentadores com os quais dialogo neste trabalho: Lagrange, Whiteside e Panza. Por fim, a sexta parte contêm minhas considerações a respeito do problema e das interpretações antes analisadas. Reservei um apêndice para demonstrar uma solução para a famosa equação diferencial de Bernoulli – que foi utilizada por Johann em seu artigo; e um anexo que contêm certos manuscritos de Newton utilizados principalmente por Whiteside para sustentar seu argumento a respeito do erro.

2 O caminho para a problematização histórica

Parte da história do cálculo será aqui apresentada, com respeito, principalmente, ao trabalho de dois grandes pensadores modernos. Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz foram dois expoentes em várias áreas do conhecimento. Contudo, foi no campo da matemática que eles se encontraram de forma mais pulgente. Ambos desenvolveram trabalhos que modificaram as ciências de modo geral, eles foram para além das fronteiras da matemática. Neste trabalho, o foco será centralizado, sobretudo, na disputa pública que envolveu não somente eles mas também seus discípulos. Essa contenda acadêmica objetivou eleger o inventor do cálculo diferencial e integral, afinal, foram concomitantemente dois os métodos desenvolvidos para o cálculo: o método das fluxões de Newton e o cálculo diferencial de Leibniz.

Esse breve histórico limita-se ao momento em que Newton e Leibniz – e outros matemáticos – se envolveram no embate oficial ocorrido em Londres, na "casa" de Newton, ou melhor, na *Royal Society*, quando esse ocupava a presidência. Em 1713, essa sociedade londrina contituiu um comitê de especialistas para averiguar documentos com objetivo de comprovar a autoria do cálculo e conferir prioridade ao seu legítimo inventor. Esse comitê apresentou um parecer favorável a Newton! Não julgaremos aqui a provável parcialidade desse julgamento. Lançaremos luz sobre alguns fatos que intensificaram a tensão entre esses dois matemáticos, a qual foi pouco a pouco nutrida ao logo de três décadas.

2.1 Leibniz, Newton e as pesquisas matemáticas do século XVII

Como bem ressaltou Rupert Hall:

> Se se tem dois para fazer uma querela, tem de se ter dois homens geniais para se fazer uma querela famosa. Se Newton é uma das seis maiores figuras na história da matemática, Gottfried Wilhelm Leibniz goza de igual destaque na história da filosofia (HALL, 2002b, p.44).

Tanto Newton quanto Leibniz foram célebres em seus trabalhos. O embate entre eles nos oferece uma oportunidade para estudarmos os pormenores técnicos das produções intelectuais de ambos, como também, os traços de suas personalidades, as suas influências na academia, entre muitos outras coisas. Aqui, os esforços foram concentrados na tentativa de compreender os detalhes técnicos desse embate.

No século XVII muitos matemáticos estavam trabalhando em uma espécie de agenda de pesquisa [1] que favoreceu a concepção do cálculo. Mesmo que se admita uma proximidade dos estudos de Newton e Leibniz com os de seus antecessores – tais como Renè François de Sluse, Nikolaus Mercartor e Isaac Barrow – ou de alguns de seus contemporâneos – Christiaan Huygens, James Gregory e Nicolas Fatio de Duillier –, que também pesquisavam problemas acerca de tangentes e áreas, pode ser problemático compreender seus trabalhos como uma síntese dos demais. Nas décadas de 1650 e de 1660 uma série independente de problemas se apresentou. Assim, uma solução que viesse a ser satisfatória para qualquer um desses auxiliava, também, para a concepção do cálculo. Muitos talentos foram destinados para essa suposta agenda. Soluções atribuídas a mais de um matemático tornaram-se comuns, como por exemplo: o método das tangentes de Sluse e Newton; o método das quadraturas de Mercartor, Gregory e Newton; as séries particulares obtidas para círculos de Gregory, Newton e Leibniz; e as formulações para expansão binomial de Gregory e Newton. Assim, com tantos matemáticos trabalhando em pesquisas similares e apresentando sucessos particulares, torna-se razoável a reivindicação de participação e de reconhecimento da parte de qualquer um deles. Por mais que essa apresentação sugira uma história evolucionista da matemática, é inegável admitir as participações de vários matemáticos que contribuiram com essa agenda de pesquisa.

Newton, em seus anos de estudante na Universidade de Cambridge, tomou contato com os escritos de Vìete, Descartes, Van Schooten, Hudde, Huygens, Oughtred e Wallis. Uma rápida verificação nas séries desenvolvidas na *Arithimetica Infinitorum* de John Wallis e nas curvas contidas no *Géométrie* de Descartes – junto com o tratamento analítico que esse matemático francês apresentou para traçar as tangentes em pontos dados – mostra como esses matemáticos influenciaram Newton. Basta folhear o *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas* (escrito em 1669) – o qual já apresentava o fundamento da cálculo newtoniano e, sobretudo, o método das fluxões e suas séries infinitas, concebido no período da vida de Newton nomeado por ele mesmo como *anni mirabilis* (entre 1664 e 1666) – para chegar a essa conclusão.

[1] Essa agenda de pesquisa foi chamada por Hall de *research front*, cf. Hall, 2002b, p.44.

Leibniz, por sua vez, ingressou no curso de Direito da Universidade de Leipzig em 1661 com apenas quatorze anos de idade e adquiriu grau de doutor pela Universidade de Altdorf em 1666. No ano seguinte, recusou o convite para ser professor dessa mesma universidade a fim de prestar serviços diplomáticos ao Barão Johann Christian von Boyneburg, então, Ministro de Philipp von Schönborn, Eleitor de Mainz. Em 1672, Leibniz foi a Paris para uma missão diplomática a pedido do Barão von Boyneburg. Com o falecimento de seu superior, no mesmo ano de sua partida para França, Leibniz decidiu não regressar imediatamente e, assim, permaneceu em Paris por quatro anos. Durante esse período, aprofundou-se em filosofia moderna com o teólogo jansenista Antoine Arnauld e o também teólogo e filósofo Nicholas Malabranche; aprofundou-se também em matemática com o brilhante Christiaan Huygens e em física, com Edme Mariotte. Foi neste período que os conhecimentos de Leibniz sobre matemática refinaram-se e conduziram-no provavelmente à concepção do seu cálculo diferencial.

Newton foi convidado por Seth Ward para filiar-se a *Royal Society* em 1671, devido aos seus trabalhos sobre telescópio refletor. No ano seguinte, Newton entregou seus estudos sobre luz e cores ao secretário dessa mesma sociedade, Henry Oldenburg. Esses estudos foram duramente criticados por um membro *senior* muito respeitado, o curador de experimentos, Robert Hooke, numa conferência interna. Oldenburg foi também responsável por levar à *Royal Society* ilustres membros estrangeiros – como foram os casos dos continentais Christiaan Huygens, Giovanni Domenico Cassini, Marcello Malpighi, Renè François Sluse e Antoni van Leeuwenhoek. Ele viu em Leibniz uma oportunidade de agregar ao corpo de estudiosos um jovem saxão muito talentoso. Desse modo, o secretário solicitou que Leibniz apresentasse um trabalho à altura de sua capacidade como cientista e filósofo. Leibniz e o sobrinho do falecido Barão von Boynebrug foram a Londres, em 1673, para uma visita diplomática ligada aos trabalhos parcialmente desenvolvidos em Paris. Leibniz aproveitou essa viagem para também ir à *Royal Society*, atendendo ao pedido de Oldenburg, portando seu livro *De Arte Combinatoria* (1666) e sua calculadora mecânica – uma versão aprimorada da calculadora de Pascal que, além de operar adições e subtrações, executava multiplicações e divisões. O invento e o livro de Leibniz não supreenderam Hooke. Mesmo assim, Leibniz foi admitido na *Royal Society*. Não demorou para que ele tomasse ciência de sua baixa estima em Londres. Talvez, em decorrência disso, ele tenha se aprimorado ainda mais em matemática, pois, ao retornar a Paris, Huygens indicou-lhe os trabalhos de Pascal, Fabri, Gregory, Saint-Vicent, Descartes e Sluse. Leibniz manteve seus estudos focados principalmente na geometria dos infinitesimais.

John Collins, assistente da *Royal Society*, manteve contato frequente, por meio de cartas, com muitos membros da sociedade londrina, entre eles Newton e Leibniz. Essas cartas eram intermediadas por Henry Oldenburg que as recebia e fazia-as circular entre os associados. O secretário tinha de registrar todos os envios e recebimentos de textos para manter um controle da divulgação desse material. Certas vezes, ele recebia textos de não associados – como foi o caso de Newton, em 1669 (quando ainda era professor em Cambridge), que enviou uma cópia do *De Analysi* a Collins. Essa prática interessava aos estudiosos da época pois permitia a divulgação dos trabalhos na comunidade científica de uma forma mais ágil em comparação com a publicação de livros. Mesmo que as cartas tivessem destinatários bem definidos, a ampla divulgação entre associados era garantida porque a cada ano, algumas vezes a cada seis meses, o secretário publicava a reunião dessas cartas em um *compendium*, que no caso da *Royal Society* recebeu o nome de *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Como vimos acima, com Newton não foi diferente, como um membro recente da sociedade já encaminhou a Collins uma carta descrevendo seu método das tangentes. Mesmo não sendo uma publicação, os membros da *Royal Society* também conheceram certamente os trabalhos de Newton em matemática.

Membros estrangeiros da *Royal Society*, como Leibniz, faziam o mesmo. É claro que ele não deixou de encaminhar a Oldenburg seus últimos avanços com respeito às séries infinitas. Vale ressaltar que o secretário tinha um cuidado particular com a prioridade dos textos que apresentavam inovações, a fim de que a "descoberta" fosse atribuída ao primeiro que a anunciasse. Por vezes, um mesmo invento era atribuído a mais de um autor, desde que fosse reconhecida a contribuição de ambos, seja por complementação, generalização ou influência acadêmica. Todavia, isso não aconteceu com Leibniz. John Collins respondeu-lhe que Newton já havia encontrado resultados mais gerais para as séries infinitas. Esse evento, apesar de frustrante para Leibniz, revelou a sua genialidade, por ele ter desenvolvido de forma independente certos conteúdos que circulavam ou que já tinham circulado entre os membros – se não entre a sociedade como um todo, pelo menos entre aqueles membros ingleses.

De fato, Leibniz desenvolveu-se em matemática e chegou a encontrar, de maneira isolada, diversas relações e propriedades nas séries infinitas. Porém, em relação aos seus colegas ingleses ou mais precisamente em relação a Newton, ele estava "atrasado" em suas leituras e estudos cerca de dez anos. Afinal, o matemático inglês já havia estudado muito antes de Leibniz certos livros ainda em sua formação em Cambridge, entre eles estão: *Arithmetica Infinitorum* (1656) de John Wallis; a *Geométrie* de Descartes com as notas de Frans van Schooten (1659); a *Vera Circuli et Hyperbolæ Quadratura* (1667) de

James Gregory, a *Logarithmotechnia* (1668) de Nicolaus Mercator; e ainda as *Lectiones Geometricæ* de Isaac Barrow (que vieram a ser impressas somente em 1670).

O matemático saxão reuniu esforços para tornar seu cálculo diferencial mais claro e compreensível. O refinamento ocorreu principalmente em sua simbologia, o que significou um incremento importante para o seu cálculo, cujos fundamentos já haviam sido estabelecidos em 1673. Foi em 1675 que essa *finesse* nos símbolos matemáticos foi agregada aos conceitos de seu cálculo. Ainda nesse ano, Leibniz veio a conhecer em Londres Tschirnhaus, e os dois em conjunto desenvolveram estudos que aprimoraram o conhecimento matemático de ambos. Nessa ocasião, maiores avanços foram conquistados por Leibniz como a derivada do produto e, logo em 1676, a derivada de potências de expoente inteiro e fracionário.

Além dos avanços em cálculo diferencial, Leibniz também provou ser possível expressar um quadrado cuja área é igual a um oitavo de uma circunferência de raio unitário, por meio da seguinte soma infinita: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$. Apesar de James Gregory ter afirmado a impossibilidade de se quadrar um círculo, Leibniz e Huygens provaram o contrário. Esses últimos trabalhos de Leibniz impressionaram tanto John Collins quanto Henry Oldenburg. Isso ocorreu num período em que Newton havia abandonado seus estudos em matemática para se dedicar à alquimia. Assim como seu professor, Isaac Barrow, Newton passou por um período em que acreditava que a matemática estava estéril e, por aproximadamente um ano, deixou de se comunicar com Collins.

Esse período foi marcado por dois fatores: pela baixa produtividade dos matemáticos ingleses e por uma rusga dentro da sociedade londrina de ciências. O matemático escocês James Gregory – membro da comunidade matemática bastante produtivo e, além disso, respeitado – faleceu em 1675. Nesta mesma época, o secretário Henry Oldenburg envolveu-se em conflitos internos na *Royal Society*: um deles, de ordem acadêmica, teve como origem uma contradição encontrada por Newton e alguns cientistas continentais em sua teoria óptica; o outro, de ordem administrativa, diz respeito às acusações de Robert Hooke por sua negligência em relação aos membros da sociedade. Além disso, John Collins se afastou da *Royal Society* em 1676, o que implicou uma redução no volume de cartas trocadas entre Newton e Leibniz. Por fim, problemas de ordem editorial também ocorreram nesse mesmo período. As gráficas de Londres estavam se recusando a imprimir outros livros de matemática, depois da laboriosa obra de Isaac Barrow, *Lectiones Geometricæ*, que exigiu muita atenção e cuidado devido ao número excessivo de figuras.

Foi justamente nesse período que Leibniz intensificou seu contato com Oldenburg. Poderia ter sido o caso da *Royal Society* ignorar por completo as cartas de Leibniz. Mas não foi o que ocorreu. Ao contrário, Leibniz caiu nas graças do secretário e do assistente por apresentar vasta produção e interesse em matemática. Uma razão que sustenta isso foi o fato de que, para auxiliar Leibniz e mostrar-lhe o que se estava fazendo na época acerca das séries infinitas e métodos de redução, Henry Oldenburg e John Collins encaminharam-lhe os estudos de Newton e James Gregory. Leibniz comunicou-se intensamente com Oldenburg e, por intermédio desse último, Newton manteve-se informado dos mais recentes avanços acerca de séries infinitas e acerca do cálculo diferencial leibiniziano.

O *frisson* e entusiasmo provocado por Leibniz na *Royal Society* foi comunicado por John Collins a Newton. Esse último, sabendo do interesse de Leibniz em séries infinitas, encaminhou-lhe uma primeira carta, em tom cordial, apresentando alguns de seus resultados envolvendo séries infinitas. Newton ainda escreveu uma segunda carta apresentando seu método de se traçar tangentes e de se encontrar pontos máximos e mínimos de uma curva. De acordo com Whiteside,[2] a obscuridade expressada pelo lacônico desenvolvimento do método das fluxões nesta segunda carta foi devido à baixa auto-estima de Newton provocada pela enfática crítica de Robert Hooke direcionada aos seus trabalhos em óptica quatro anos antes.

Como dito acima, Leibniz precisou retornar a Paris porque seus trabalhos diplomáticos não justificavam uma maior permanência na Inglaterra. Ele esteve na França por mais uma última temporada para, em seguida, em 1676, mudar-se para Hanouver e lá permanecer sem jamais se deslocar por longos períodos. Após mudar-se para Hanouver, pouco comunicou-se com a *Royal Society*. A distância não foi o maior dos obstáculos, pois, com o afastamento de John Collins e o falecimento de Henry Oldenburg, as cartas trocadas entre a sociedade londrina e Leibniz foram interrompidas por certo tempo. Newton foi quem fez o último contato com sua segunda carta. Depois disso, o matemático inglês dedicou-se a outras áreas. Ironicamente, essas duas cartas foram as últimas produções em matemática que Newton teve até a primeira edição dos *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* em 1687. Durante esse período o Reino Unido passou por um momento de escassez de produção matemática. As exceções foram os escoceses David Gregory (sobrinho de James Gregory) e seu discípulo John Craig.

Em 1682, Otto Mencke fundou a primeira revista científica alemã, as *Acta Eruditorum*, em Leipzig, e o seu primeiro editor foi Leibniz. Três anos depois, Leibniz plublicou

[2] Cf. Whiteside, apud Hall, 2002b, p.67.

nela seu famoso trabalho *Nova Methodus pro Maximus et Minimus itemque Tangentibus, quae nec Fractas nec Irrationales Quantitates Moratur et Singulare pro Illis Calculi Genus*, ou seja, os fundamentos do seu cálculo diferencial. Aproximadamente nesse mesmo período, em agosto de 1684, Edmond Halley, secretário da *Royal Society*, sucessor de Henry Oldenburg, foi a Cambridge a procura de Newton. Halley portava o seguinte problema proposto por Robert Hooke, Christopher Wren e por ele mesmo: pede-se a curva descrita pelos planetas, supondo uma força central exercida pelo Sol na razão inversa do quadrado da distância entre os planetas e o Sol. Ao apresentar o problema a Newton, Halley obteve uma resposta imediata: Newton disse que se tratava de uma elipse. Ele próprio já havia se proposto esse mesmo problema, mas não encontrara os registros de seus cálculos e comprometeu-se com Halley a refazê-los. Assim, Edmond Halley retornou a Londres com a resposta e a promessa de Newton. Como prometido, em novembro do mesmo ano Newton encaminhou-lhe mais do que a resposta ao problema. De fato, enviou-lhe o tratado *De Motu Corporum*, que fundamentalmente contém os principais teoremas do livro I dos *Principia*. Cerca de dezoito meses depois Newton e Halley (como editor), em 1687, imprimiram os *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, obra mais célebre de Newton.

2.2 Os discípulos de Leibniz e Newton

John Craig interessou-se pelo problema de encontrar áreas abaixo de curvas. O seu interesse o levou aos trabalhos de Leibniz, que se tornaram conhecidos entre os ingleses devido principalmente às séries para quadrar círculos. Craig, além de perceber a grande utilidade do uso dessas séries para quadrar curvas, aprendeu os algoritmos do cálculo diferencial leibniziano – ele reconheceu certamente a importância do trabalho de Leibniz. Apesar de mostrar-se inicialmente um leibniziano, Craig voltou-se mais tarde aos trabalhos de Newton. Nesses últimos, aprendeu métodos para tratar séries infinitas. Não existem comprovações de que Newton ensinou-lhe tais séries ou, até mesmo, ensinuou-lhe algo a respeito do método das fluxões e do teorema fundamental do cálculo (isto é, encontrar a área abaixo de uma curva pela determinação da tangente). Foi depois da publicação dos *Principia* que Craig teve contato com esses métodos (contidos no famoso Lem.II, livro II dessa mesma obra) e, após isso, de fato, tornou-se newtoniano, ou melhor, um entusiasta de Newton. Até 1685, John Craig apresentou-se neutro com relação à prioridade do cálculo, porém, anos antes do embate tornar-se público, declarou que a autoria do cálculo cabia tão somente a Newton.

Não foram só os esforços de Leibniz ou a admiração inicial de Craig que fizeram com que o cálculo diferencial leibniziano se difundisse. De fato, foram os irmãos Bernoulli os grandes responsáveis pela abrangência continental que o cálculo de Leibniz adquiriu. Filhos de uma família de comerciantes e banqueiros muito abastada, Jakob e Johann, ao contrário do que imaginavam seus pais, seguiram um outro caminho, o das ciências. Jakob, o filho mais velho de Nikolaus Bernoulli e Margaretha Schönauer, contrariou o desejo de seu pai – um grande comerciante e importante cidadão da Basiléia, membro do conselho de magistratura da cidade e consorte da herdadeira de uma família de banqueiros – ao tornar-se professor de matemática na universidade de sua cidade natal. Johann, o décimo filho do casal Bernoulli, revelou-se, também, muito talentoso em matemática. A diferença de 13 anos entre Johann e Jakob possibilitou que esse último fosse professor do primeiro. Segundo Hall,[3] Johann foi um homem muito ambicioso e, devido a isso, provocou insatisfação e muitas richas. Até mesmo com seu irmão Jakob e com seu filho Daniel – mais um célebre representante da família Bernoulli, autor da *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum comentarii*, e professor de matemática e física em São Petersburgo e na Basiléia. Hall sugere que o temperamento de Johann pode ter contribuido para que a disputa entre Newton e Leibniz fosse ainda mais intensa.

Os irmãos Bernoulli, logo em 1685, estudaram o *Nova methodis* de Leibniz, aprenderam rapidamente o cálculo diferencial e especializaram-se a tal ponto que se tornaram professores de uma geração de grandes matemáticos, entre eles Leonard Euler, Jakob Hermann, Guillaume François Antoine (ou Marquês de l'Hôpital), Daniel Bernoulli e Nikolaus (I) Bernoulli. Jakob e Johann sistematizaram e disseminaram o ensino do cálculo diferencial leibniziano no continente europeu. Esse cálculo serviu muito bem aos propósitos técnicos, ou seja, para superar as dificuldades matemáticas e mecânicas enfrentadas na época. Assim, o cálculo diferencial leibniziano estendeu-se por todo o continente e, também, para além do canal da Mancha. Todo esse movimento afetou tanto Leibniz quanto seus discípulos, além de também repercutir entre os matemáticos ingleses, dentre eles, Newton.

2.3 O problema da braquistócrona e o início da querela entre Leibniz e Newton

Nicolas Fatio de Duillier foi um jovem inflamado matemático escocês, protegido de Newton, principalmente quando esse foi membro do parlamento constituinte londrino

[3] Ibid., p.80.

– representante da Universidade de Cambridge – em 1689. Fatio tornou-se um discípulo muito próximo de Newton e teve, pois, pleno acesso ao material desenvolvido por ele durante as décadas de 1660 e 1670, ou seja, todo o conteúdo a respeito das séries infinitas e do método das fluxões.

Johann Bernoulli, com seu espírito provocativo, lançou em 1696 dois problemas de mecânica para serem resolvidos pelos "mais habilidosos matemáticos do mundo", um deles tornou-se conhecido como o problema da braquistócrona – problema esse que pede a curva que une dois pontos, a qual é descrita por um corpo no menor tempo possível, sendo que esses dois pontos não podem estar alinhados na perpendicular em relação ao horizonte. Esses problemas foram encaminhados por carta para muitos matemáticos, inclusive Newton e Wallis. Não há evidências das razões que levaram Johann a propor tais problemas. Supõe-se que seja ou por autopromoção – pois ele próprio publicou sua solução nas *Philosophical Transations* – ou para contestar Newton. O fato é que Newton e Fatio entenderam dessa última forma.[4]

Apenas cinco matemáticos responderam aos problemas. Foram eles: Johann, Leibniz, l'Hôpital, Jakob e Newton (anonimamente). Assim, comentou Leibniz nas *Acta Eruditorum* de 1697: "[é] certamente válido salientar... só solucionaram o problema aqueles, assim penso, que estavam preparados para tal, ou seja, somente aqueles que penetraram suficientemente fundo nos mistérios de nosso cálculo diferencial".[5] De imediato, é razoável pensar que os matemáticos que resolveram esse problema fizeram-no graças ao cálculo diferencial leibniziano. Todavia, Newton, com seu método das fluxões, o fez. Portanto, para resolver o problema proposto, foi necessário ter o domínio do cálculo, porém, não exclusivamente do cálculo diferencial leibniziano.

Segundo Hall,[6] Fatio foi quem primeiro acusou Leibniz de plágio. A acusação oficial foi redigida em 1699 no livro de Fatio intitulado *Lineæ Brevissimi Descensus Investigatio Geometrica Duplex*.

> Reconheço, ainda, que Newton foi o primeiro e por muitos anos o mais antigo inventor do cálculo, sou conduzido a essa conclusão pela evidência factual a respeito. Quanto a Leibniz, seu segundo inventor, ter emprestado algo que seja dele [Newton], prefiro deixar ao juízo de quem tenha visto as cartas e outros manuscritos de Newton, não a mim. Nem o silêncio do mais modesto Newton nem o zelo ansioso de Leibniz em atribuir a si o invento do cálculo irá se impor a qualquer um que tenha lido

[4]Ibid., p.106.
[5]Gerhardt, 1859, pp.331–6.
[6]Cf. Hall, 2002a, p.437.

> aqueles documentos os quais eu mesmo examinei (DUILLIER, apud HALL, 2002b, pp.106-7).

As razões da acusação de Fatio podem ser as mais diversas. O fato é, no entanto, que o autor não foi distinguido por Johann entre os matemáticos que receberam a carta com a proposta para solucionar aqueles problemas mecânicos.

Leibniz respondeu à acusação de Fatio nas *Acta Eruditorum* de 1700. Afirmou que, de fato, ele próprio e Newton foram os inventores do cálculo, na seguinte ordem temporal: Leibniz em 1685 e Newton em 1687. George Cheyne – matemático newtoniano, escocês, discípulo de David Gregory – em seu livro *Fluxionum Methodus Inversa* (1703), afirmou que qualquer coisa publicada nos últimos vinte e quatro anos "com relação a esses métodos de [Newton], ou outros métodos não dissimilares... [são] somente a repetição ou um simples corolário do que Newton há muito comunicou a seus amigos ou ao público".[7] Isso parece não ter sido consenso geral entre os newtonianos, pois Cheyne foi repreendido por Abraham de Moivre. Leibniz respondeu à acusação de Cheyne numa carta a Johann, de forma mais enfática, que o levou a deixar de considerar o cálculo como uma coautoria e passou a tomar tão somente para si essa invenção.

Após o falecimento de Robert Hooke, Newton elegeu-se presidente da *Royal Society*, e finalmente publicou o seu *Opticks* em 1704 – cerca de três décadas depois de tê-lo apresentado pela primeira vez a essa sociedade. Ele optou por publicar o *Opticks* com dois anexos estranhos ao texto principal, ou seja, com o *Enumeratio linearum tertii ordinis* e com o *De quadratura curvarum*. Newton não causou grandes reações na comunidade matemática com essa sua nova publicação. O *Opticks* foi o primeiro livro publicado por Newton que abarcou tanto conteúdos de óptica física e geométrica quanto de matemática pura (devido aos anexos acima citados). Contudo, sua estreia também como autor em matemática foi pífia porque sua grande novidade contida principalmente no *De quadratura curvarum*, ou seja, o método das fluxões ou cálculo newtoniano, para o público em geral não passou de uma reescrita daquilo que já tinha sido lançado, oito anos antes, no primeiro manual de cálculo diferencial, *Analyse des Infiniment Petits*, escrito por Marquês de l'Hôpital com exercícios elaborados por Johann Bernoulli.

Assim que o *Opticks* foi lançado, Leibniz escreveu uma resenha do anexo *De quadratura curvarum* e a publicou anonimamente em 1705 nas *Acta Eruditorum*.[9] Nessa

[7] Leibniz, Responsio ad Dn. Fatii Duillerii imputaiones. Accessit nova Artis Analytica promotio specimine indicatta; dum Designatione per Numeros assumtitios loco literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit. Lipsiæ: Prostant apud Joh. Grossii Hæredes Frid. Groschuf, 1700. pp.198-208.

[8] Cf. Gerhardt, 1859, pp.340-50.

crítica, Leibniz comparou o seu cálculo diferencial com o método das fluxões da seguinte forma: seja um corpo que descreve um movimento numa dada linha curva, ele é analisado como um ponto que se desloca com velocidade uniforme em determinados momentos iguais de tempo, num fluxo crescente ou decrescente das quantidades fluentes. As diferenças entre tamanhos das quantidades que fluem são, para Leibniz, como as diferenciais e, pela mesma analogia, as quantidades fluentes geradas são como o somatório (ou integral, termo cunhado pelo próprio Johann Bernoulli). Ainda neste mesmo texto, Leibniz acusou Newton de ter feito tal como fez Honoré Fabri em seu *Synopsi Geometrica* (1669), onde substituiu simplesmente o avanço dos movimentos pelo método de Cavalieri.

Newton ainda não tinha lido a revisão de Leibniz quando John Keill a respondeu, em 1708, reforçando a acusão de plágio de Fatio. Como consta na *Philosophical Transaction* (1708), na carta *Epistola ad clarissimum virum Edmundum Halleirum Geometriæ professorem savilianum, de Legibus virum centripetarum*:

> Tudo se segue da contemporânea e altamente celebrada aritmética das fluxões, que sem sombra de dúvida o Sr. Newton descobriu por primeiro, qualquer um que leia suas cartas publicadas pelo Sr. Wallis [em 1693] rapidamente assentirá, e ainda a mesma aritmética foi posteriormente publicada pelo Sr. Leibniz nas *Acta Eruditorum* trocando o nome e a simbologia (Philosophical Transaction, 1708, v.26, n^o.313-24, pp.174-88).

Keill claramente acusa Leibniz de plágio, mas segundo Hall[10] não há evidências de que Keill tenha conhecido Newton até esse momento. Parece que Keill apenas estava repetindo as palavras de Fatio. Leibniz não deixou essa acusação sem réplica. Como ambos eram membros da *Royal Society*, ele contestou a acusação por meio de uma carta encaminhada ao secretário da sociedade londrina – colega de Edmond Halley –, Hans Sloane. Em seguida, o secretário procurou o presidente, que nessa ocasião era o próprio Newton, para ser aconselhado. Newton sugeriu que Keill explicasse as razões para sua acusação. Com o auxílio de Newton, Keill reportou-se, sem dificuldade, a favor do presidente da *Royal Society* e, ainda, aproveitou a oportunidade para lembrar o modo como ele foi anteriormente criticado nas *Acta Eruditorum.* Assim, Keill e Newton prepararam um longo relato citando as duas cartas que Newton encaminhou a Leibniz em 1676: “[elas] deram indicações claras e diretas àquele homem da mais perceptiva inteligência de quem Leibniz derivou os princípios de seu cálculo ou ao menos poderia ter derivado”.[11] Eles

[9]Cf. Leibniz, Isaaci Newtoni Tractatus duo, de speciebus magnitudine figurarum curvilinearum. Lipsiæ: Prostant apud Joh. Grossii Hæredes Frid. Groschuf, 1705. pp.30-6.

[10]Cf. Hall, 2002a, p.440.

ainda declararam que Newton já havia progredido no cálculo em 1671 além de qualquer outro até 1711.[12] Essa carta foi aprovada pela *Royal Society* e encaminhada para Leibniz.

Em janeiro de 1712, Leibniz enviou uma carta resposta sugerindo fortemente a Newton uma retratação pública de Keill frente à *Royal Society.* Leibniz reforçou que ele foi o primeiro a conceber o cálculo e não foi quem iniciou as injúrias nessa disputa. Desse modo, para atender à exigência de Leibniz, um comitê composto por dez membros[13] foi constituído para investigar a questão. Entre matemáticos, físicos e outros pesquisadores da ciência, estava o embaixador da Prússia em Londres para representar Leibniz. O relatório desse comitê foi apresentado no dia 06 de março de 1713, e foi o próprio Newton quem redigiu o documento.[14] Tratou-se de um *dossier* composto por várias cartas que pretendiam provar a prioridade de Newton, como consta no documento: "o Sr.Newton foi o primeiro inventor [do cálculo] e somos da opinião que o Sr. Keill [ao] afirmar o mesmo de modo algum foi injurioso com o Sr. Leibniz".[15] A *Royal Society* ordenou a imediata impressão do relatório, em latim para divulgação internacional, sob o título de *Commercium Epistolicum Collins* & *aliorum, De Analysi promota.* O conteúdo como bem sabemos diz respeito à disputa entre o Sr. Leibniz e o Dr. Keill acerca do direito à prioridade na invenção do método das fluxões, por alguns chamado de método diferencial. Assim que chegou à Alemanha, o *Commercium Epistolicum* foi considerado pelos leibnizianos uma ofensa, como consta no seguinte trecho de uma carta de maio de 1713 encaminhada de Johann Bernoulli a Leibniz:

> ... você é acusado diretamente diante de um tribunal composto, como parece, [de] membros que são eles mesmos testemunhas, se é acusado de plágio, então, documentos contra você são produzidos, a sentença é passada; você perde o caso, você é condenado (BERNOULLI, J. apud HALL, 2002a, p.444).

2.4 O erro de Newton na prop. X, livro II dos *Principia* (1687)

Durante esse período de disputa, em 1710, – antes mesmo de Leibniz ter contestado John Keill diante da *Royal Society* por tê-lo difamado publicamente com uma forte insinuação de plágio – mais precisamente em agosto desse ano, Johann Bernoulli enviou

[11] Hall, 2002a, p.441

[12] Cf. *Correspondence of Isaac Newton*, v.5, p.142 e p.145.

[13] Os membros inglês foram Arbuthnot, Aston, Burnet, Halley, Hill, Jones, Machin, de Moivre, Robarts e Brook Taylor.

[14] Cf. *Correspondence of Isaac Newton*, v.5, pp.xxvi-xxvii.

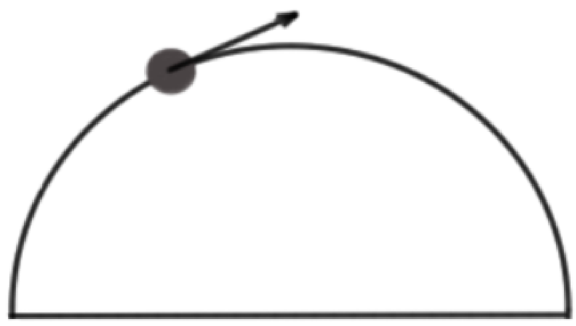
[15] Hall, 2002a, p.442.

uma carta a Leibniz informando-o de sua estranheza devido à maneira como Newton solucionou a prop. X, livro II, na primeira edição dos *Principa*.

Ora, antes de seguirmos adiante, aqui neste ponto, faz-se necessário apresentar essa prop. X, pois, como será visto no decorrer desse trabalho, um dos nossos objetivos é compreender como esse erro incidiu sobre essa proposição e, em particular, esclarecer o processo de dissolução desse erro que, como veremos, demandou bastante trabalho.

O livro II, de maneira geral, trata do movimento de corpos em meios resistentes. A prop. X ou prob. III, mais especificamente, submete a exame o movimento resistente de um corpo, sob a ação da gravidade, numa trajetória semicircular. Newton propõe encontrar a velocidade do corpo, a resistência e a densidade do meio. Veremos com mais detalhes adiante.

Figura 1: Esboço do movimento estudado por Newton na prop. X, livro II dos *Principia*



Uma das soluções encontradas por Newton foi apresentada em forma de relação (ou divisão) entre a resistência do meio (r) e a gravidade (g). Essa relação pode ser expressa de uma forma muito simplificada como, digamos, $\frac{r}{g} = T$, sendo T igual a uma expressão algébrica. Foi nessa solução que Johann e Leibniz enxergaram uma ocasião para fragilizar o método das fluxões newtoniano. Johann pontuou o seguinte: "[n]a proposição X, página 260, parece-me que o problema não foi resolvido corretamente pelo autor, embora... não saiba precisamente onde o erro se encontra".[16] Mais tarde, quando o erro tornou-se claro, Johann apresentou duas objeções. A primeira diz respeito à impossibilidade de ocorrer movimento uniforme quando um corpo está sob a ação da gravidade – ele julgou que a igualdade considerada por Newton entre a resistência do meio e a gravidade em cada ponto da trajetória semicircular do corpo não é válida. Segue, nas palavras de Johann, a segunda objeção: "... pelo meu próprio método de resolução 'neste

[16]Whiteside, 1967-1981, v.8, p.49.

caso particular' encontrei que a resistência está para a ação motora [sc. da componente descendente da gravidade que age instantaneamente na direção do movimento circular] na razão constante de 3 para 2".[17] Em outras palavras, a relação $\frac{r}{g} = T$ deve ser corrigida com o acréscimo do fator número $\frac{3}{2}$, ou seja, a forma correta para a expressão acima é $\frac{r}{g} = \frac{3}{2}T$.

Em janeiro de 1711, Johann encaminhou para *Académie des Sciences* sua solução alternativa via cálculo leibniziano. A solução era acompanhada de um adendo, de autoria de seu sobrinho, cujo conteúdo versava sobre o erro cometido por Newton. Nesse adendo, foi descrito precisamente em qual passo matemático Newton falhou e, por isso, não conseguiu encontrar a mesma proporção $\frac{3}{2}$ entre a resistência do meio e a gravidade. A solução alternativa bernoulliana foi publicada nas *Mémoires de l'Académie*, em 1713, em Paris.

No artigo dos Bernoulli, Nikolaus (I), contrário à primeira objeção de seu tio, afirmou que a consideração de Newton com respeito à resistência do meio e à gravidade serem iguais em cada ponto da trajetória semicircular do corpoo tem como consequência possível o movimento uniforme, o que é contraditório.[18] Quanto a segunda objeção de Johann, Nikolaus (I) concordou com seu tio e afirmou que o erro ocorrera quando Newton "correlacionou equivocadamente os coeficientes das potências do incremento da base, em sua expansão por série de Taylor, no aumento da trajetória da ordenada com as correspondentes derivadas da mesma em relação à base".[19]

Antes, porém, da publicação das *Mémoires de l'Académie*, em 1713, Newton fora informado do erro inicialmente identificado pelos Bernoulli. Em setembro de 1712, Nikolaus (I) foi a Londres encontrar-se com Newton para apresentar-lhe pessoalmente o erro então recém descoberto. O sobrinho de Johann foi recebido por Newton. Coube a um amigo muito próximo dele, Abraham de Moivre, intermediar o contato. Tão logo ouviu o diagnóstico de Nikolaus (I) e após algumas revisões matemáticas, Newton assentiu ao anúncio do erro e passou a trabalhar arduamente na sua correção. A urgência dessa correção era ainda maior pois tudo isso transcorria bem no período de impressão da segunda edição dos *Principia*, que estava a cargo de Roger Cotes.

[17]Ibid.

[18]Nikolaus (I) não justificou sua opinião contrária à primeira objeção de seu tio. Uma hipótese nossa com respeito às diferentes formas de compreender o mesmo fenômeno mecânico é que numa visão mais ampla do movimento como um todo parece que somos conduzidos, de fato, a uma inconsistência ao considerarmos que um corpo num movimento circular esteja em movimento uniforme pleno (sem variações de intesidade, direção e sentido). Contudo ao submetermos o movimento a certos momentos de tempo (ou seja, pequenas parcelas de tempo associadas a segmentos de base evanescentes), ele tornar-se-á uniforme, conforme o Lem.X do livro I dos *Principia*.

[19]Whiteside, 1967-1981, v.8, p.50.

Em suma, o autor dos *Principia* teve de lidar com dois grandes problemas: a investida bernoulliana contra seu método e a urgência imposta pela impressão da segunda edição dos *Principia*. Para remediar essa urgência, Newton solicitou a Cotes que interrompesse à impressão da segunda edição e que retirasse o texto correspondente a prop. X, do livro II, dos exemplares já impressos, porque novas alterações teriam de ser feitas. Newton passou um mês trabalhando na correção da referida proposição e produziu ao todo 50 páginas manuscritas.[20] Foi um trabalho denso, obstinado, com várias tentativas mal sucedidas de salvar o argumento empregado na primeira edição.

Após o contato com Nikolaus (I), quando Newton já estava trabalhando na correção de seu erro, Abraham de Moivre, numa carta a Johann Bernoulli datada de 18 de outubro de 1712, comunicou-lhe que Newton considerara aquilo que ouvira de Nicolaus (I) "uma boa objeção, e que ele [Newton] havia corrigido a conclusão... [e ele] garante que esse erro procede simplesmente de ter considerado uma tangente ao contrário, mas que o fundamento de seu cálculo e as séries que ele utilizou devem ser mantidas".[21] Entretanto, esse relato não parece ser confiável porque uma falha dessa natureza seria de simples resolução e os manuscritos de Newton não revelam tamanha simplicidade, como veremos adiante.

Foi somente em janeiro de 1713 que Newton encaminhou o texto final a Cotes, na mesma quantidade de páginas ocupadas pela prop. X na primeira edição, porém, numa solução que não se assemelha em nada à primeira. O que levou Newton a abandonar a estrutura do argumento matemático empregada na primeira edição dos *Principia*? E, ainda, no prefácio dessa segunda edição não há qualquer menção a respeito da contribuição dos Bernoulli. Talvez esse descaso de Newton tenha agravado ainda mais a sua tensa relação entre ele, Leibniz e os Bernoulli.

Em julho de 1713, Leibniz escreveu uma carta relatando a descoberta feita por Johann Bernoulli do erro cometido por Newton, expressando seu sentimento de injustiça com respeito ao parecer emitido pela comissão de especialistas constituída pela *Royal Society*. Essa carta,[22] conhecida por *Charta Volans*, foi distribuída no continente europeu e chegou a Londres durante o outono daquele ano (entre setembro e dezembro). John Keill não teve de se esforçar muito para convecer Newton a refutar a *Charta Volans*. Keill, também, escreveu uma resposta a Leibniz no *Journal Litéraire de la Haye* na edição de

[20]Editadas e vertidas para o inglês na monumental obra de Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, v.8, pp.312-424.

[21]Whiteside, 1967-1981, v.8, p.52.

[22]São duas versões da *Charta Volans*, uma em latim e outra vertida para o francês. Ambas foram impressas e distribuídas por Christiaan Wolff, editor das *Acta Eruditorum*.

julho/agosto de 1714.[23]

Conforme vimos, mesmo após a morte de Leibniz, em 1716, as acusações não cessaram. Newton não deixou de utilizar de seu *status* de presidente da *Royal Society* para minimizar as réplicas de Leibniz. Naquele julgamento realizado nessa mesma instituição, o então presidente "provou" a legitimidade de sua descoberta e registrou-a no *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins, et aliorum de Analysi Promota jussu Societatis Regiæ*, em forma de uma análise pormenorizada das cartas trocadas entre ele, John Collins e outros (inclusive Leibniz) no período 1669 a 1677. Uma das acusações de Newton contra Leibniz foi que ele recebeu uma cópia do manuscrito *De Analysi* (1669) – que contém o fundamento do cálculo newtoniano ou método das fluxões – encaminhada por Collins em 1676, antes da publicação do *Nova Methodus* (1685). Portanto, segundo Newton, Leibniz teria plagiado-o porque, de posse dessa cópia, ele teria facilmente transcrito todo o cálculo newtoniano alterando tão somente a simbologia.

[23]Cf. *Correspondence of Isaac Newton*, v.6, carta 1069.

3 Os *Principia*, a prop. X, suas objeções e soluções

A alteração do argumento matemático da primeira edição dos *Principia* para a segunda foi a motivação para esta pesquisa, e a partir dela podemos indagar: Quais as circunstâncias do erro de Newton? Por que Newton não manteve a mesma estrutura do argumento matemático anterior, alterando apenas os parâmentros equivocadamente usados na primeira edição? Teria sido uma falha de que tipo? Um equívoco apenas? Ou, uma falha somente no argumento matemático construído de tal forma que não era possível modificá-lo, porque se o fizesse, comprometeria a tal ponto a solução que não poderia mais ser aplicável àquela maneira? Ou, ainda, seria uma falha no método das fluxões cuja única solução seria seu completo abandono?

Minha hipótese é que se trata de um erro no argumento matemático utilizado por Newton para resolver o problema da prop. X. Para avaliar essa hipótese, precisamos analisar as duas soluções de Newton, tanto a apresentada na primeira quanto na segunda edição dos *Principia*, além das as tentativas mal sucedidas de Newton de salvar a solução de 1687. Por outro lado, faz-se importante analisar a solução bernoulliana para compreender o esforço de Newton para equipar seus resultados aos de Johann. Mas, antes de iniciar a análise da prop. X, requer-se apresentar rapidamente os *Principia* de Newton.

Os *Principia* dividem-se em três livros, a saber: o primeiro livro, *De Motu Corporum*, aborda o movimento dos corpos em meios livres de quaisquer resistências; o segundo, também trata do movimento dos corpos, mas agora em meios resistentes – traz estudos sobre o movimento dos pêndulos, a mecânica de fluidos e a mecânica dos vórtices celestes cartesianos –; e, finalmente, o terceiro livro, *De Systemate Mundi*, explica, por meio de recursos matemáticos e de dados experimentais, o movimento dos planetas e de seus satélites com base na gravitação universal.

O segundo livro, que é o objeto deste estudo, possui conteúdos que vão além da mecânica do movimento dos corpos. São exemplos desses conteúdos o Lema II, que contém uma explicação do método das fluxões, o *scholium* no qual Newton prova que os vórtices de Descartes levam a conclusões inconsistentes com as leis de Kepler, a determinação (hoje considerada equivocada) da velocidade do som e, por fim, uma investigação das mínimas resistências em um corpo sólido. Nota-se que o livro tem mais de um assunto, embora a crítica aos vórtices de Descartes seja considerado o tema principal. Parece-me que Newton prepara o seu leitor nos dois primeiros livros para, no terceiro, usar dos recursos, antes apresentados e demonstrados adequadamente, e expor o sistema que rege o mundo, ou seja, os princípios das revoluções dos planetas, bem como de quaisquer outros satélites naturais do sistema solar.

3.1 A prop. X, livro II dos *Principia* de Newton

As soluções – aqui chamadas de históricas, por falta de melhor classificação, referem-se àquelas produzidas por Newton e pelos Bernoulli – foram dispostas nessa seção na seguinte ordem: solução de Newton de 1687; solução alternativa de Johann; e a solução de Newton de 1713. Foi escolhida essa disposição para que o leitor aprecie tanto a mudança radical entre as soluções das duas edições dos *Principia* quanto a maneira como Newton conduziu seus cálculos para que sua solução convergisse com a solução de Johann Bernoulli. Além disso, o leitor poderá verificar, nos pormenores dos argumentos de cada matemático, as diferenças entre métodos e abordagens.

As soluções estão aqui dispostas na mesma sequência cronológica em que foram historicamente apresentadas. Portanto, cabe uma recomendação: a leitura das soluções aqui analisadas pode ser realizada *paripassu* com os originais de Newton e Johann, embora os cálculos tenham sido "abertos" a fim de que possam ser melhor analisados. A escolha de detalhar os passos demonstrativos pressupostos por seus autores resultou numa apresentação um tanto quanto técnica das soluções.

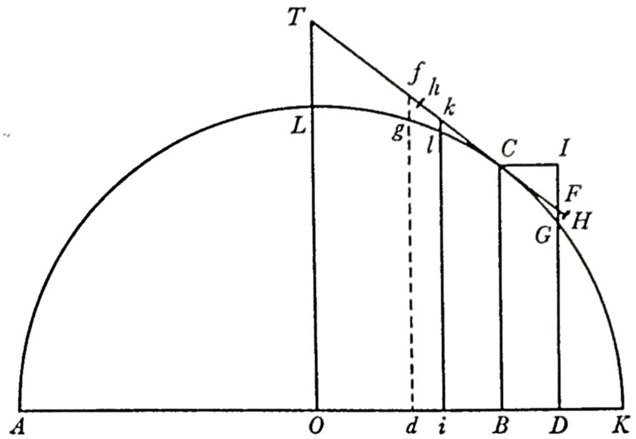
A prop. X foi desenvolvida por Newton no formato de um problema, por isso, também é chamada de prob. III. Esse problema supõe o deslocamento de um corpo, num meio resistente, em uma trajetória semicircular dada. Sabe-se que esse corpo está submetido à força da gravidade. Pede-se a velocidade de deslocamento do corpo, a resistência e a densidade do meio. Sendo essa última uma grandeza que mantém o corpo na trajetória curva – como se ela desse a "forma" da trajetória. A resistência do meio, como designado pelo autor na segunda seção do livro II dos *Principia* é proporcional ao quadrado da velocidade. Segue abaixo a proposição tal como apresentada por Newton nas duas edições.

> Esteja a força da gravidade uniforme tendendo diretamente sobre o plano do horizonte e, seja a resistência proporcional a densidade do meio em conjunção com a velocidade ao quadrado; solicita-se encontrar, individualmente em cada ponto, a densidade do meio que movimenta o corpo na linha curva dada, como também a velocidade e a resistência do meio (NEWTON, 1687, p.162).

3.2 Solução de Newton na primeira edição

Parte da solução dessa proposição depende do diagrama a seguir, ou melhor, as equações geométricas dependem deste diagrama de tal maneira que podem ser considerados indissociáveis. O mesmo ocorre com todas as soluções propostas por Newton, isso ficará mais claro no decorrer do texto. Voltemo-nos agora à explicação da Figura 2.

Figura 2: Diagrama geométrico da primeira edição dos *Principia*



Newton considera a ação da gravidade vertical e perpendicular ao horizonte, ou seja, perpendicular ao segmento AK no sentido descendente. O corpo move-se sobre a trajetória semicircular ACK, em dois sentidos, de A para K e de K para A. No primeiro movimento, no sentido $A \to K$, o meio exerce uma ação resistente sobre o deslocamento do corpo. Por outro lado, no sentido reverso, isto é, no sentido $A \leftarrow K$, a resistência – por mais que pareça contraintuitivo[1] – propele o corpo, exercendo uma ação motora. É sobre a reta tangente ao ponto C, representada por TCF, que a resistência atua. A escolha dessas coordenadas intrínsecas, uma tangencial e outra vertical, "permite a Newton estabelecer que a resistência age somente ao longo da reta tangente e a gravidade,

[1]Para esclarecer esse ponto, considere que o meio se move, tal como a correnteza de um rio, e nele se desloca um corpo numa trajetória semicircular. No sentido contra a correnteza, o meio resiste ao movimento do corpo, mas noutro sentido, ou seja, a favor da correnteza, o meio propele o corpo.

somente ao longo da reta vertical, num tempo infinitamente pequeno".[2]

O segmento OB e a ordenada BC são quantidades fluentes, ora, se movimentar a ordenada BC até que o ponto B coincida com o ponto D, então, os segmentos BD e FG serão respectivamente as fluxões de BC e OB. Dito de outro modo, BD e FG estão entre si na razão primeira dos incrementos nascentes de BC e OB. Se o corpo, no momento em que passa por C, não estivesse mais sob a ação da gravidade e fosse influenciado somente pela força resistente do meio que age no sentido $A \to K$, o corpo pararia em F. Mas a gravidade impele o corpo para baixo, deslocando-o para G. Assim, o segmento FG, nesse instante, representa a ação da gravidade e o arco CG, a trajetória percorrida. Agora, se o corpo estivesse livre da gravidade e livre da resistência, no mesmo tempo do caso anterior, o corpo se deslocaria até H, de tal forma que o segmento FH representaria aqui a resistência do meio. No sentido contrário – lembrando que no sentido $A \leftarrow K$ a resistência age propelindo o corpo –, os segmentos fg e fh representam respectivamente a ação da gravidade e a resistência do meio.

Quantidades fluentes	Fluxões	
	$A \to K$	$A \leftarrow K$
OB	BD	Bd
BC	FG	fg
Ações	**Incrementos**	
	$A \to K$	$A \leftarrow K$
Gravidade	FG	fg
Resistência do meio	FH	fh

Tabela 1: Quantidades fluentes e ações em termos de seus efeitos

Depois de Newton descrever a construção da Figura 2, ele evoca o Lem.X, seção I, Livro I, para chegar a primeira expressão. O Lema X diz que:

> As distâncias que um corpo descreve impelido por qualquer força finita, seja essa força determinada e imutável, ou continuamente aumentada ou diminuida, estão, exatamente no início do movimento, uma para a outra, como os quadrados dos tempos (NEWTON, 2008, p.77).

[2]Cf. Erlichson, 1994, p.284.

[3]A primeira objeção de Johann Bernoulli diz respeito justamente a relação entre a resistência nascente e a gravidade, como mostra a equação (3.1). Veremos adiante, na nota 14, que a solução de Newton para a razão entre resistência do meio e gravidade contradiz a afirmação de que o corpo desloca-se em um movimento cuja velocidade varia conforme $\sqrt{2BC}$. Como vimos, Nikolaus (I) Bernoulli é contrário a seu tio, mas as suas razões são bastante peculiares: "...descobri que não havia necessariamente um erro no raciocínio do Sr. Newton, porque eu não encontrei erro algum em seu cálculo" (BERNOULLI, 1714b, p.54).

Sendo assim, a resistência $\mathcal{R}$ é proporcional a $\frac{FH}{FG}$, visto que, FH é proporcional à resistência vezes o quadrado do tempo e FG (isto é, a queda galileana gerada pela constante gravitacional g) é proporcional ao quadrado do tempo.[3] Dito de outro modo,

$$\begin{cases} FH \propto \mathcal{R} \times tempo^2 \\ FG \propto tempo^2 \\ \hline FH \propto \mathcal{R} \times FG \end{cases}$$

Essa conclusão aparece no texto da demosntração da Prop. X do seguinte modo,

$$\mathcal{R} \propto \frac{FH}{FG}. \tag{3.1}$$

Visto que, $CH = Ch$ e $FH = fh$, então $2FH = Cf - CF$, de tal modo que:

$$FH \propto Cf - CF.$$

Substituindo a proporção acima em (3.1), obtém-se[4]:

$$\mathcal{R} \propto \frac{Cf - CF}{FG} \tag{3.2}$$

Uma vez encontrada a relação que representa a resistência do meio, Newton parte então para determinar a relação que expressa a densidade do meio ς. Como consta no enunciado da proposição, a resistência do meio $\mathcal{R}$ é proporcinal ao quadrado da velocidade v^2 ($\mathcal{R} \propto v^2$) de tal modo que, se tomarmos ς como uma constate de proporcionalidade, teremos $\mathcal{R} = \varsigma v^2$. Isolando ς na equação acima, chega-se a:

$$\varsigma = \frac{\mathcal{R}}{v^2}.$$

Visto que nas primeiras razões, a quantidade nascente CF é proporcional a CG:

$$v = \frac{CF}{tempo}.$$

E ainda, considerando a queda galileana FG proporcional ao quadrado do tempo,

$$FG \propto tempo^2$$

[4]Cf. Guicciardini, 1999, p.235.

obtém-se,

$$v = \frac{CF}{\sqrt{FG}}$$

que elevado ao quadrado torna-se

$$v^2 = \frac{CF^2}{FG}.$$

Substituindo esse valor e a proporção (3.2) na equação $\varsigma = \frac{R}{v^2}$, tem-se

$$\varsigma = \frac{\frac{Cf-CF}{FG}}{\frac{CF^2}{FG}} = \frac{Cf - CF}{CF^2} \tag{3.3}$$

Newton finaliza, assim, a demonstração da prop. X ao encontrar uma equação que expressa a densidade do meio. A seguir, no Corolário I, ele encontra uma segunda equação para expressar ς: $\frac{FG-kl}{CF\times(FG+kl)}$.

A respeito dessa segunda equação, a pergunta que se pode fazer é: trata-se de uma mera expressão alternativa de uma mesma relação ou algum tipo de revisão da relação anterior? Algumas considerações preliminares aos desenvolvimentos formais apresentados por Newton para justificar a segunda equação permitem-nos supor que Newton, de fato, detectou um problema na primeira equação. Senão vejamos.

O incremento Bd não equivale ao incremento BD. Em outras palavras, no mesmo período de tempo em que o corpo se move de $A \to K$ descrevendo o arco CG, ele percorre, no sentido contrário, quando a resistência do meio age propelindo o corpo adiante – produzindo um movimento cujas variações de velocidade são aditivas – um arco maior Cg. Assim, Newton ao aplicar a série infinita convergente de potências, ou série de Taylor, a DG para determinar CF, não será capaz, sob as mesmas condições acima, de encontrar Cf. E, então, tanpouco será capaz de substituir o valor de Cf na equação (3.3), para finalmente expressar a densidade do meio em termos generalizados.

A série infinita e convergente de potências consiste na adição *ad infinitum* de parcelas. A forma dessa série é:

$$P \pm Qo \pm Ro^2 \pm So^3 \pm \ldots$$ [5]

[5] Na aplicação da série infinita e convergente de potências, os coeficientes (ou aqui chamados de termos generalizados) tornam-se determinados segmentos do diagrama geométrico. Nesse caso, $P = BC$, $Qo = BC - DF = IF$ e $Ro^2 = FG$. O termo So^3 não possui um equivalente geométrico. Antes de aplicar a série infinita convergente de potências, a solução apresentada depende de segmentos particulares, ao passo que, após a aplicação da série, o resultado tornar-se-á geral. No caso acima, o resultado não depende mais de segmentos particulares como Cf, CF, FG ou kl, mas de termos da série P, Qo, Ro^2 e So^3, os quais são, no vocabulário atual denominados diferenciais de primeira, segunda e terceira ordens respectivamente ou

Para contornar o problema do segmento Cf, Newton toma o momento à esquerda de B, Bi, igual a BD, e traça a ordenada il que corta a curva ACK em l e a tangente TCF em k, de tal forma que $CF = Ck$.

Visto que as quedas galileanas fg e kl estão para os segmentos Cf e Ck – respectivamente proporcionais a Bd e Bi, que representam o tempo – da seguinte forma $Cf^2 : Ck^2 :: fg : kl$, então

$$Cf : Ck :: \sqrt{fg} : \sqrt{kl}$$

Aplicando a propriedade das diferenças das proporções, tem-se:

$$fk(= Cf - Ck) : Ck :: \sqrt{fg} - \sqrt{kl} : \sqrt{kl}$$

Após considerar Ck igual a CF, Newton também considera $\sqrt{fg}$ igual a $\sqrt{FG}$. Logo,

$$Cf - CF : CF :: \sqrt{FG} - \sqrt{kl} : \sqrt{kl} \tag{3.4}$$

Se multiplicarmos o segundo membro da proporção pela unidade, não haverá alteração:

$$Cf - CF : CF :: \sqrt{FG} - \sqrt{kl} : \sqrt{kl} \times 1$$

A unidade pode ser representada como $\sqrt{FG} + \sqrt{kl} : \sqrt{FG} + \sqrt{kl}$, de tal modo que

$$Cf - CF : CF :: \sqrt{FG} - \sqrt{kl} : \sqrt{kl} \times (\sqrt{FG} + \sqrt{kl} : \sqrt{FG} + \sqrt{kl})$$

Multiplicando o segundo membro da proporção pela unidade,

$$Cf - CF : CF :: [(\sqrt{FG} - \sqrt{kl}) \times (\sqrt{FG} + \sqrt{kl})] : [\sqrt{kl} \times (\sqrt{FG} + \sqrt{kl})]$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplação no segundo membro e fazendo alguns desenvolvimentos algébricos, tem-se:

$$Cf - CF : CF :: FG - kl : kl + \sqrt{FG \times kl}$$

coeficientes taylorianos da série.

Nas primeiras razões, $kl = FG$, então,

$$Cf - CF : CF :: FG - kl : FG + kl$$

Multiplicando-se os segundos termos nos dois membros da proporção por CF, ela não se altera:

$$\underbrace{Cf - CF : CF^2} :: FG - kl : CF \times (FG + kl)$$

Por substituição direta da equação (3.3) na proporção acima, encontra-se a expressão alternativa de Newton sem recorrer ao segmento Cf:

$$\varsigma = \frac{FG - kl}{CF \times (FG + kl)} \tag{3.5}$$

Assim, Newton chega a sua solução final para a densidade do meio. Essa solução ainda está em seu formato particular porque não depende dos coeficientes da série infinita convergente de potências, como vimos anteriormente.[6] Falta, agora, proceder da mesma maneira com relação à resistência do meio e à gravidade. É no Corolário II que o autor, de modo análogo ao Corolário I, expressa essas grandezas. Retomemos a proporção

$$Cf - CF : CF :: FG - kl : FG + kl,$$

sabendo que

$$2HF = Cf - CF,$$

tem-se

$$2HF : CF :: FG - kl : FG + kl.$$

Mas visto que $kl = FG$ e de tal modo que $2FG = FG + kl$,

$$2HF : CF :: FG - kl : 2FG$$

Multiplicando os dois membros da proporção por $\frac{CF}{FG}$, chaga-se a

$$(CF : FG) \times 2HF : CF :: (CF : FG) \times FG - kl : 2FG$$

ou

$$(2HF : FG) \times (CF : CF) :: CF \times (FG - kl) : 2FG^2$$

[6] Vide nota 5, seção 2.2.

ou

$$(2HF : FG) \times 1 :: CF \times (FG - kl) : 2FG^2,$$

tem-se ao final

$$\underbrace{HF : FG} :: CF \times (FG - kl) : 4FG^2.$$

Recorrendo à Tabela 1, a proporção acima revela a relação entre resistência do meio $\mathcal{R}$ e gravidade g, isto é,

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{HF}{FG} = \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^2} \tag{3.6}$$

No Corolário III, finalmente, Newton se propõe encontrar uma expressão geral para os resultados acima obtidos. Ele procede por meio da relação entre a abcissa AB e a ordenada BC e da série infinita convergente de potências. Acerca desse procedimento, Newton ainda acrescenta: "O problema será resolvido mais rapidamente pelos primeiros termos da série".[7] Para tanto, Newton se vale de três exemplos. Aqui, apenas o primeiro deles será analisado porque é nele que se concentram as objeções bernoullianas.

O primeiro exemplo fornece exatamente as mesmas condições apresentadas pela prop. X, Newton pede: "[S]eja a linha semicircular ACK sobre o diametro AK, pede-se a densidade do meio que faz o corpo mover-se nesta linha" (ver Figura 2).[8] Apesar desse exemplo pedir somente a densidade do meio, Newton também calcula a resistência do meio.[9] Parece não haver no *Exempl.1* quaisquer novidades, pois a densidade e a resistência do meio já foram encontradas [sc. equações (3.5) e (3.6)]. Contudo, são soluções particulares, ou seja, dependentes de segmentos geométricos particulares, próprios do diagrama da Figura 2. Agora, Newton propõe encontrar soluções gerais, que sejam determinadas pelos termos generalizados ou coeficientes da série infinita convergente de potências. Para isso, ele representa a ordenada DG por meio de uma série infinita convergente que obtém mediante a extração da raiz quadrada do segmento. Para tal, usa as coordenadas de Fermat e as associa aos segmentos do diagrama geométrico da Figura 2 da seguinte forma: $OK = n$, $OB = a$, $BC = e$, $BD = Bi = o$. Usando o Teorema de Pitágoras no ΔOCB da Figura 2, chega-se a

$$DG^2 = OK^2 - OD^2,$$

[7]Cf. Whiteside, 1967-1981, v.8, p.378.
[8]Ibid.
[9]Ibid., p.380.

como $OD = OB + BD$, então

$$DG^2 = OK^2 - (OB + BD)^2$$

ou

$$DG^2 = OK^2 - (OB^2 + 2OB \times BD + BD^2),$$

$$DG^2 = OK^2 - OB^2 - 2OB \times BD - BD^2,$$

da Figura 2 encontra-se $BC^2 = OK^2 - OB^2$, assim chega-se a

$$DG^2 = BC^2 - 2OB \times BD - BD^2.$$

Ao substituir os segmentos da expressão geométrica acima pelas coordenadas de Fermat, tem-se

$$DG^2 = e^2 - 2ao - o^2.$$

Finalmente, ao extrair a raiz quadrada nos dois lados da equação, obtém-se

$$DG = \sqrt{e^2 - 2ao - o^2}.$$

Retomando a prop. XII do *Analysis per quantitates fluentes.*

> Para resolver a potência de um binômio numa série ilimitada em números de seus termos. Solução: Seja o binômio $P + PQ$ e o índice de sua potência $\frac{m}{n}$, terá:
>
> $$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{1}{2}\frac{m-n}{n}BQ + \frac{1}{3}\frac{m-2n}{n}CQ + \frac{1}{4}\frac{m-3n}{n}DQ + \ldots$$
>
> onde P e Q podem ser as quantidades que se têm, simples ou composta, a A, B, C, D... denotam os termos da série, nomeiam-se por: A, o primeiro termo $P\frac{m}{n}$; B, o segudo termo $\frac{m}{n}AQ$; C, o terceiro termo $\frac{1}{2}\frac{m-n}{n}BQ$; e assim indefinidamente.
> Demonstração: A regra proposta mostra corretamente as "dignidades" ou potências do binômio quando os índices $\frac{m}{n}$ das potências são integrados, quando será por vez evidente para aquele que computa. A regra que acerca corretamente os intervalos inumeráveis iguais, acercará os espaços intermediários.
> Escólio: Se o segundo membro do binômio for o momento do primeiro membro, e a potência do primeiro membro for, de acordo com a regra aduzida, resolvida em séries, os termos das séries serão como os momentos das potências; especificamente, o segundo termo B como o primeiro, o terceiro como o segundo momento, o quarto D como o terceiro momento, e assim por diante. De fato $1 \times B$ será o primeiro momento da potência, $1 \times 2C$ o segundo momento, $1 \times 2 \times 3D$ o terceiro momento, $1 \times 2 \times 3 \times 4E$ o quarto momento e assim infinitamente (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, p.271).[10]

[10]Whiteside nos auxilia a compreender melhor o conteúdo desse escólio com a seguinte observação: "Neste caso $Q = o\dot{P}$, o 'momento' do *nomem premium* P com respeito a variável base do 'tempo' que o

Eis o procedimento, portanto, utilizado por Newton para extrair a raiz quadrada de DG. Esse processo não foi apresentado pelo autor na primeira edição dos *Principia* (1687) – nem mesmo na segunda. Porém, aqui faremos a demonstração desse procedimento, com objetivo de compreedermos melhor o adendo de Nikolaus (I) Bernoulli (veremos com mais detalhes o que o sobrinho de Johann disse em seu adendo na seção 3.3 deste trabalho). Por ora, lançamo-nos aos detalhes desse procedimento. Portanto, para calcular $DG = \sqrt{e^2 - 2ao - o^2}$, tem-se que:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{1}{2}\frac{m-n}{n}BQ + \frac{1}{3}\frac{m-2n}{n}CQ + \frac{1}{4}\frac{m-3n}{n}DQ + \dots$$

Sendo:

$$\begin{array}{lll} \text{A=} & 1^\circ \text{ termo=} & P^{\frac{m}{n}} \\ \text{B=} & 2^\circ \text{ termo=} & \frac{m}{n}AQ \\ \text{C=} & 3^\circ \text{ termo=} & \frac{1}{2}\frac{m-n}{n}BQ \\ \text{D=} & 4^\circ \text{ termo=} & \frac{1}{3}\frac{m-2n}{n}CQ \end{array}$$

Escrevendo DG na forma $(P + PQ)^{\frac{m}{n}}$ chega-se a $\left[e^2 + e^2\left(\frac{-2ao-o^2}{e^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$, por comparação direta tem-se:

$$\begin{cases} P = e^2 \\ Q = \frac{-2ao-o^2}{e^2} \\ m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

Calculando separadamente os coeficientes A, B, C e D; encontra-se:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & = P^{\frac{m}{n}} = (e^2)^{\frac{1}{2}} = e \\ \text{B} & = \frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}e\left(\frac{-2ao-o^2}{e^2}\right) = -\frac{ao}{e} - \frac{o^2}{2e} \end{array}$$

incremento 'instantâneo' é unidade; embora fique claro que Newton aqui especifique – inconscientemente antecipando a objeção de Johann Bernoulli do próximo ano. . . que ele não soube como – a expansão de "Taylor" do incremento da potência $(P + o\dot{P})^{\frac{m}{n}}$ como $P^{\frac{m}{n}} + oB + o^2C + o^3D + o^4E + \dots$ corretamente ficando como B, $2C$, $6D$, $24E$, . . . são o primeiro, segundo, terceiro, quarto, . . . " (ibid., nota 30). Ora, trata-se do que hoje conhecemos por expansão de Taylor, desse modo, quando Newton se refere a momentos, hoje entendemos como derivadas – da função a ser expressa em termos de uma série infinita convergente – de primeira, segunda, terceira ordens para os sengudo, terceiro e quarto termos; e assim por diante. Há nessa nota outro detalhe importante, Whiteside se adianta com respeito a objeção de Johann Bernoulli. Na verdade, Whiteside fez menção mais a explicação de Nikolaus (I) Bernoulli com respeito a segunda objeção do seu tio do que do próprio Johann. Essa explicitação prematura ficará mais clara quando chegarmos na seção 3.3.

$$\begin{aligned}
\text{C} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{m-n}{n}BQ = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-2}{2}\right)\left(-\tfrac{ao}{e}-\tfrac{o^2}{2e}\right)\left(\tfrac{-2ao-o^2}{e^2}\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[+\tfrac{2a^2o^2}{e^3}+\tfrac{ao^3}{e^3}+\tfrac{2ao^3}{2e^3}+\tfrac{o^4}{2e^3}\right] = \\
&= \left(-\tfrac{1}{4}\right)\left[\tfrac{2a^2o^2}{e^3}+\tfrac{2ao^3}{e^3}+\tfrac{o^4}{2e^3}\right] = \\
&= -\tfrac{2a^2o^2}{4e^3}-\tfrac{2ao^3}{4e^3}-\tfrac{o^4}{8e^3} = \\
&= -\tfrac{a^2o^2}{2e^3}-\tfrac{ao^3}{2e^3}-\tfrac{o^4}{8e^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D} &= \tfrac{1}{3}\tfrac{m-2n}{n}CQ = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1-2.2}{2}\right)\left(-\tfrac{a^2o^2}{2e^3}-\tfrac{ao^3}{2e^3}-\tfrac{o^4}{8e^3}\right)\left(\tfrac{-2ao-o^2}{e^2}\right) = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left[+\tfrac{2a^3o^3}{2e^5}+\tfrac{a^2o^4}{2e^5}+\tfrac{2e^2o^4}{2e^5}+\tfrac{ao^5}{2e^5}+\tfrac{2ao^5}{8e^5}+\tfrac{o^6}{8e^5}\right] = \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[\tfrac{a^3o^3}{e^5}+\tfrac{3a^2o^4}{2e^5}+\tfrac{3ao^5}{2e^5}+\tfrac{o^6}{8e^5}\right] = \\
&= -\tfrac{a^3o^3}{2e^5}-\tfrac{3a^2o^4}{4e^5}-\tfrac{3ao^5}{4e^5}-\tfrac{o^6}{16e^5}
\end{aligned}$$

Com os termos calculados, basta substituir em $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{1}{2}\frac{m-n}{n}BQ + \frac{1}{3}\frac{m-2n}{n}CQ + \frac{1}{4}\frac{m-3n}{n}DQ + \ldots$ Logo,

$$\left[e^2+e^2\left(\frac{-2ao-o^2}{e^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= e + \left\{-\frac{ao}{e}-\frac{o^2}{2e}\right\} + \left\{-\frac{a^2o^2}{2e^3}-\frac{ao^3}{2e^3}-\frac{o^4}{8e^3}\right\} + \left\{-\frac{a^3o^3}{2e^5}-\frac{3a^2o^4}{4e^5}-\frac{3ao^5}{4e^5}-\frac{o^6}{16e^5}\right\} + \cdots$$

abrindo os termos chega-se a:

$$= e - \frac{ao}{e} - \frac{o^2}{2e} - \frac{a^2o^2}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} + \left(-\frac{o^4}{8e^3} - \frac{3a^2o^4}{4e^5} - \frac{3ao^5}{4e^5} - \frac{o^6}{16e^5} - \cdots\right)$$

Newton desconsidera os termos em o^4 e superiores – isto é, aqueles dispostos no parênteses acima –, pois em relação aos termos de ordem inferior a magnitude deles pode ser desprezada. Assim, chega-se ao resultado apresentado por Newton para a raiz de DG na primeira edição:[11]

$$DG = \sqrt{e^2-2ao-o^2} = e - \frac{ao}{e} - \frac{o^2}{2e} - \frac{a^2o^2}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}\cdots$$

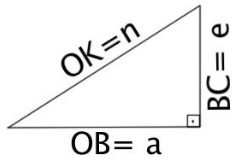


Figura 3: Detalhe do diagrama da primeira edição

[11] Cf. Whiteside, 1967-1981, v.8, p.378.

Consideremos, agora, a Figura 3 acima. Se escrevermos n^2 igual a $e^2 + a^2$, DG torna-se

$$\begin{aligned} DG &= e - \frac{ao}{e} - \left\{1 + \frac{a^2}{e^2}\right\} \frac{o^2}{2e} - \left\{1 + \frac{a^2}{e^2}\right\} \frac{ao^3}{2e^3} \cdots \\ &= e - \frac{ao}{e} - \left\{\frac{e^2 + a^2}{e^2}\right\} \frac{o^2}{2e} - \left\{\frac{e^2 + a^2}{e^2}\right\} \frac{ao^3}{2e^3} \cdots \\ &= e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} \cdots \end{aligned}$$

Comparando DG com a série infinita convergente expandida no seu formato geral:

$$DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} \cdots = P + Qo + Ro^2 + So^3 + \cdots$$

tem-se rapidamente os coeficientes correspondentes a cada um dos termos generalizados. De modo geral, numa compreensão geométrica dos termos, P representa a ordenada BC; Qo o segmento FI; $Ro^2 + So^3 \ldots$, o segmento FG. Desse modo,

$$DG = BC + IF + \underbrace{Ro^2 + So^3 + \cdots}_{FG}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ CIF da Figura 4, chega-se a $CF^2 = BD^2 + IF^2$.

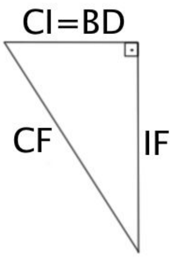


Figura 4: Detalhe do diagrama da primeira edição

Podemos agora exprimir a ordenada DG e o segmento FG em termos de séries infinitas:

$$DG = e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} \cdots$$

e

$$FG = -\frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5}.$$

Em virtude de BD e Bi serem iguais em comprimento, FG e kl também são iguais em extensão. Logo,

$$kl = -\frac{n^2o^2}{2e^3} + \frac{an^2o^3}{2e^5}.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
FG + kl &= -\frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} + \left\{-\frac{n^2o^2}{2e^3} + \frac{an^2o^3}{2e^5}\right\} \\
&= -\frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} - \frac{n^2o^2}{2e^3} + \frac{an^2o^3}{2e^5} \\
&= -\frac{2n^2o^2}{2e^3} = 2\left(-\frac{n^2o^2}{2e^3}\right) = 2Ro^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
FG - kl &= -\frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} - \left\{-\frac{n^2o^2}{2e^3} + \frac{an^2o^3}{2e^5}\right\} \\
&= -\frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} + \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5} \\
&= -\frac{2an^2o^3}{2e^5} = 2\left(-\frac{an^2o^3}{2e^5}\right) = 2So^3
\end{aligned}$$

Retomando a igualdade $CF^2 = BD^2 + IF^2$, e sabendo que $BD = o$ e $IF = Qo$, ao substituir os termos anteriores na igualdade, tem-se

$$\begin{aligned}
CF &= \sqrt{BD^2 + IF^2} \\
&= \sqrt{o^2 + (Qo)^2} \\
&= o\sqrt{1 + Q^2}
\end{aligned}$$

Ora, densidade do meio (ς) pode ser apresentada segundo termos generalizados. Portanto, a equação (3.5) tornar-se-á

$$\begin{aligned}
\varsigma &= \frac{FG - kl}{CF \times (FG + kl)} \\
&= \frac{2So^3}{o\sqrt{1 + Q^2} \times (2Ro^2)} \\
&= \frac{S}{R\sqrt{1 + Q^2}} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, a resistência do meio ($\mathcal{R}$) está para gravidade (g) – da equação (3.6) – assim como:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{R}}{g} &= \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^2} \\
&= \frac{o\sqrt{1 + Q^2} \times (2So^3)}{4(Ro^2)^2} \\
&= \frac{S\sqrt{1 + Q^2}}{2R^2} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Assim, Newton pôde expressar nos termos generalizados da série infinita convergente as soluções para a densidade do meio $\left(\varsigma = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}\right)$ e para a razão entre a resistência e a gravidade $\left(\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}\right)$.

A velocidade, ao contrário do que foi acima obtido para os casos da densidade e da resistência do meio, foi ainda expressa em termos dos segmentos particulares próprios da Figura 2. Para tanto, Newton se valeu da expressão da velocidade em termos do *latus rectum*, qual seja $v^2 = \frac{g\mathcal{L}}{2}$.[12] Desse modo, tem-se que $\mathcal{L} = \frac{1+Q^2}{R}$ de acordo com a solução de 1687 de Newton.[13] Logo,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{g\mathcal{L}}{2}} = \sqrt{g\frac{\left(\frac{1+Q^2}{R}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{g\frac{1+Q^2}{2R}} = \sqrt{g\frac{1+\left(\frac{a}{e}\right)^2}{2\left(\frac{n^2}{2e^3}\right)}} \\ &= \sqrt{g\frac{1+\frac{a^2}{e^2}}{\frac{n^2}{e^3}}} = \sqrt{g\frac{e^2+a^2}{e^2}\left(\frac{e^3}{n^2}\right)}, \text{ mas } n^2 = e^2 + a^2 \\ &= \sqrt{g\frac{n^2}{e^2}\frac{e^3}{n^2}} = \sqrt{ge} = \sqrt{gBC} \end{aligned} \tag{3.9}$$

desse modo, a velocidade do móvel depende da ordenada BC.

É necessário nesse ponto retomar o assunto com respeito à primeira objeção de Johann Bernoulli desenvolvida, ainda de maneira precária, na nota 3. Essa objeção diz respeito à contradição que os cálculos de Newton acerca da velocidade do corpo chegam em comparação com a afirmação desse autor quanto à variação não nula dessa grandeza. Da equação (3.8) facilmente chegamos a seguinte relação: $\frac{R}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} = \frac{\frac{an^2}{2e^5}\sqrt{1+\left(\frac{a}{e}\right)^2}}{2\left(\frac{n^2}{2e^3}\right)^2} = \frac{\frac{an^2}{2e^5}\frac{n}{e}}{\frac{n^4}{2e^6}} = \frac{an^3}{2e^6}.\frac{2e^6}{n^4} = \frac{a}{n}$. Isso implica que a componente tangencial da gravidade deduzida da aceleração tangencial total ($\mathcal{R}_t = g\frac{a}{n}$) evanesce, logo, a velocidade é constante. Mas Newton encontra, por outro lado, que a velocidade varia com a raiz quadrada da ordenada BC: "...OB está para o semidiâmetro do círculo OK, assim como a velocidade estará para $\sqrt{2BC}$".[14] Conforme vimos logo acima, a velocidade varia como $\sqrt{ge}$. Ora, essa relação da velocidade está correta, mas contradiz o resultado da equação (3.8), ou seja, que a aceleração devido à gravidade ao longo da trajetória semicircular compensa exatamente a desaceleração devido à resistência do meio. Fica evidente que essa contradição escapa

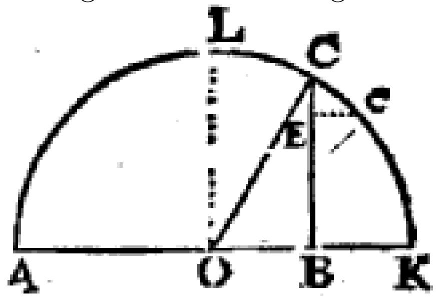
[12] Cf. Nauenberg, 2011, p.573.
[13] Cf. Whiteside, 1967-1981, v.8, p.385.

de Newton, mas não de Johann, como veremos.[14]

3.3 A objeção de Johann e o adendo de Nikolaus (I)

Para Johann Bernoulli, a solução newtoniana do Exempl.1, Corolário III, Prop. X da primeira edição dos *Principia* apresenta, como vimos, uma contradição. Os cálculos revelam como consequência um movimento uniforme descrito pelo projétil, enquanto Newton considerou que a velocidade variava conforme a relação $\sqrt{2BC}$.[1]

Figura 5: Diagrama geométrico do artigo de Johann Bernoulli



> ... Sr. Newton disse na página 265 que para qualquer corpo C de peso constante que descreve no ar um quarto de círculo LCK, caindo de L para K... a resistência do meio deve estar para a gravidade, em cada ponto C, assim como OB está para OK, e que sua velocidade no ponto C estaria na razão de $\sqrt{2BC}$, isso implica numa clara contradição (BERNOULLI, 1714a, p.50)...

Segundo a relação enunciada por Bernoulli, se chamarmos de $\mathcal{R}$ a resistência do meio, de $\mathcal{P}$ a ação da gravidade (ou peso) e de Π a força que age sobre o prójetil em cada ponto C de sua trajetória, temos:

$$\mathcal{P} : \Pi :: OC(= OK) : OB \tag{3.10}$$

Ora, para Newton, a resistência está para gravidade na seguinte razão:

$$\mathcal{R} : \mathcal{P} :: OB : OK \tag{3.11}$$

Logo,

$$\mathcal{R} : \Pi :: OB : OB \tag{3.12}$$

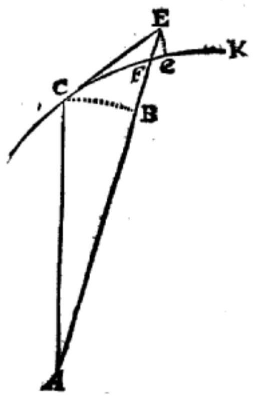
[14]Ibid., p.380.
[15]Cf. Nauenberg, 2011, p.573.
[1]O segmento BC é proporcional a queda FG por mera semelhança de triângulos [$\Delta OBC \sim \Delta CIF \sim \Delta CGF$] nas últimas razões das quantidades evanescentes. Então, $v = \frac{CF}{\sqrt{[2]FG}} = \frac{CF}{\sqrt{[2]BC}}$.

– o que é uma contradição. Pois senão vejamos.

A resistência do meio consumiu grande parte da aceleração do projétil proporcionada por Π – componente da gravidade $\mathcal{P}$ – e, consequentemente, da proporção (3.12) chegamos a $\mathcal{R} = \Pi$. Ora, quando $\mathcal{R} = \Pi$, a velocidade do móvel é uniforme. Entretanto, Newton afirmara que $v = \sqrt{2BC}$. E assim, a velocidade é concomitantemente uniforme e variável. Dessa forma, sustenta Johann, Newton comete uma contradição!

Essa é a primeira objeção de Johann; ora, encontrar uma contradição em um argumento implica necessariamente na dissolução do mesmo. Creio que o fato de Johann ter encontrado essa contradição de Newton o fez lançar-se para a solução da prop. X. É claro que o caminho que o caminho escolhido de Johann não poderia ser diferente, o da cálculo diferencial; vejamos, portanto, a proposta de Johann. Sua solução alternativa parte do seguinte lema: $T = \sqrt{\frac{2S}{P}}$, onde T é o tempo, S, o espaço percorrido e P, o peso (ou gravidade).[2] Se substituirmos S pela queda galileana $Ee \left(= \frac{dS^2}{2r}\right)$, P por $\frac{fdy}{dS}$ e T por dt, chegaremos:[3]

Figura 6: Diagrama geométrico contido na solução do artigo de Johann Bernoulli



$$T = \sqrt{\frac{2S}{P}} \rightarrow dt = \sqrt{\frac{2\left(\frac{dS^2}{2r}\right)}{\frac{fdy}{dS}}}$$

[2]O Lema diz que um corpo impelido por uma força uniforme (tal como a gravidade) chamada P, o qual atravessa um espaço qualquer S, pantindo do repouso, terá seu tempo expresso por $\sqrt{\frac{2S}{P}}$ (cf. Bernoulli, 1714a, p.47).

[3]O Lema XI do Livro I dos *Principia* diz que a subtensa evanescente da tangente – delimitada pelo ângulo de contato da tangente com a curva –, nas últimas razões, é proporcional ao quadrado da subtensa contida no arco adjacente (cf. Newton, 1687, p.29). Essa proporção, apesar de estar axiomatizada nos *Principia*, era amplamente conhecida e sua autoria atribuida a Galileu – tanto que, em diversos momentos deste artigo, empregamos "quedas galileanas" para nomeá-la. Também Johann empregará essa proporção a fim de inferir que $Ee \propto \frac{dS^2}{2r}$, onde Ee é a subtensa da tangente, $2r$ é o diâmetro da curvatura e $dS \approx Ce$ é a subtensa do arco. Por outro lado, $P = \frac{fdy}{dS}$ pois $\Delta BCF \sim \Delta EeF$, assim, $CF(= dS) \propto FE$ e $CB(= dy) \propto Fe$ de tal modo que a proporção $\frac{dy}{dS} = \frac{CB}{CF} \propto \frac{Fe}{FE}$ fornece a direção da força peso para f.

ou

$$dt = \sqrt{\frac{\frac{2dS^2}{2r}}{\frac{fdy}{dS}}} = \sqrt{\frac{dS^2}{r}.\frac{dS}{fdy}} = \sqrt{\frac{dS^3}{frdy}}$$

ora

$$v.dt = dS$$

$$dt = \sqrt{\frac{dS^3}{frdy}} = \frac{dS}{v}$$

$$\frac{dS^3}{frdy} = \frac{dS^2}{v^2} \therefore f = \frac{v^2 dS}{rdy} \tag{3.13}$$

Na equação (3.13), f representa a força central que age sobre o corpo, v, a velocidade instântanea e r, o raio de curvatura. Na Figura 6, CF representa a trajetória percorrida por C, dS, o diferencial da trajetória e dy, o segmento CB. Johann, a partir da equação (3.13), desenvolve sua solução alternativa da seguinte forma: aplicando a equação (3.13) à Figura 5 e representando a força f que age sobre o corpo pelo peso $\mathcal{P}$, além de que $r = OC$ e $\frac{dy}{dS} = \frac{Ec}{Cc} = \frac{BC}{OC}$, teremos:

$$v^2 = \mathcal{P}.OC.\frac{BC}{OC} = \mathcal{P}.BC$$

Fazendo $BC = x$, chega-se a

$$v^2 = \mathcal{P}.x$$

e, ao derivar a equação acima e isolar vdv, obtém-se

$$2vdv = \mathcal{P}.dx \therefore vdv = \frac{\mathcal{P}.dx}{2}.$$

Substituindo-se vdv e $\mathcal{P}$ na equação diferencial de Bernoulli,[4] chega-se a

$$\mathcal{P}dx \pm \mathcal{R}dS = -\frac{\mathcal{P}dx}{2},$$

ou

$$\mathcal{P}dx + \frac{\mathcal{P}dx}{2} = \mp \mathcal{R}dS,$$

$$\frac{3}{2}\mathcal{P}dx = \mp \mathcal{R}dS,$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}} = \mp\frac{3}{2}\frac{dx}{dS} = \mp\frac{3}{2}\frac{CE}{Cc} = \mp\frac{3}{2}\frac{OB}{OC} = \mp\frac{3}{2}\frac{OB}{OK}.$$

[4] A equação diferencial de Bernoulli $\left(vdv + \frac{v^2 dS}{rdy}dx \pm v^n \tau dS = 0\right)$ foi desenvolvida pelo irmão de Johann, Jakob Bernoulli. Essa equação pode ser aplicada a muitos problemas de hidrodinâmica, tais como a prop. X de Newton. Recorrendo à equação (3.5) e à relação $\mathcal{R} = v^2\tau$ – onde a resistência do meio $\mathcal{R}$ é diretamente proporcional ao produto de v^2 e a densidade do meio τ –, tem-se $\mathcal{P}dx \pm \mathcal{R}dS = -vdv$.

Nas palavras de Johann, para "remediarmos esse defeito a contradição de Newton, afirmo que precisamos de $\mathcal{R} : \mathcal{P} :: 3 \times OB : 2 \times OK$".[5] Desse modo, fica evidente a discrepância entre o resultado obtido por Newton e aquele obtido por Johann, uma discrepância localizada no fator $\frac{3}{2}$ aplicado à proporção entre OB e OK. Resta saber se essa discrepância resultou de algum erro que Newton houvera cometido em seus cálculos. No adendo do artigo de Johann, Nikolaus (I) apresenta sua interpretação e sustenta que Newton não cometeu qualquer erro, contrariando seu tio, para a origem da contradição. Nikolaus (I) interpreta o presumido erro de Newton como um mero equívoco computacional. Vejamos as explicações de Nikolaus (I) Bernoulli com respeito ao erro de Newton encontrado por seu tio, Johann Bernoulli.

> Tendo encontrado através da aplicação das igualdades $v^2 = fr\frac{dy}{dS}$ e $\tau = \frac{fdx+vdv}{\mp v^n dS}$ (verdade da qual estou inteiramente convencido) o caso particular do semicírculo relatado pelo Sr. Newton, p.263 de seu *Philosophæ Naturalis Principia Mathematica* não está em conformidade com a solução daquele autor [Johann] e, ao ver novamente o absurdo manifesto que resulta quando assumimos que a resistência está para a força central [peso] assim como OB está para OK, descobri que não havia necessariamente um erro no raciocínio do Sr. Newton, porque eu não encontrei nenhum em seu cálculo (BERNOULLI, 1714b, p.54).

Para Nikolaus (I), o equívoco computacional de Newton ocorreu na aplicação da expansão da série infinita convergente para a extração da raiz $DG = \sqrt{e^2 - 2ao - o^2}$. No contexto dos estudos de Newton sobre o cálculo das fluxões, o computo para extração de raízes encontra-se no escólio do tratado *De Quadratura Curvarum*, publicado como apêndice do *Opticks* em abril de 1704.

> Dizemos nessa ordem que são o primeiro, segundo, terceiro, quarto etc as fluxões das quantidades fluentes. Essas Fluxões são os termos [coeficientes] das séries infinitas e convergentes. Seja z^n a quantidade fluente que ao fluir tornar-se-á $(z+o)^n$, que se resolve na série convergente $z^n + noz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2z^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3} + \&c.$ O primeiro termo dessa série z^n será a quantidade fluente, o segundo $[noz^{n-1}]$ será o primeiro incremento ou diferença ao qual, quando considerado nascente, a primeira fluxão será proporcional: o terceiro $\frac{n^2-n}{2}o^2z^{n-2}$ será o segundo incremento ou diferença ao qual, quando considerado nascente, a segunda fluxão será proporcional: o quarto $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3}$ será o terceiro incremento ou diferença ao qual, quando considerado nascente, a terceira fluxão será proporcional: e assim por diante *in infinitum* (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, pp.151-5).

Acerca desse procedimento, Nikolaus (I) comenta o seguinte:

[5]Cf. Bernoulli, 1714a, p.51.

[6]Para Whiteside, Johann Bernoulli e seus contemporâneos continentais não entenderam a expansão generalizada de 'Taylor' desenvolvida por Newton vinte anos antes da publicação do artigo dos Bernoulli

> É esse método de substituir quantidades indeterminadas e invariáveis por sequências convergentes, e tomar os termos dessa sequência por seus respectivos diferenciais, a saber, o segundo termo pelo seu diferencial de primeiro grau [ou ordem], o terceiro termo pelo seu diferencial do diferencial, o quarto termo pelo seu diferencial de terceiro grau etc, é, digo, esse método que levou o Sr. Newotn a falsas soluções no exemplo que acabei de mencionar e nos seguintes; pois essa maneira de tomar os diferenciais, que também é prescrita no escólio ao final de seu tratado *De Quadratura*, só é boa apenas para os diferenciais de primeiro grau, pois os outros diferenciais de um grau mais elevado, não são expressos pelos termos das sequências convergentes, que são somente proporcionais e não iguais a esses diferenciais, como se pode ver pelo exemplo dado por ele nesse escólio... [Se houvesse seguido] sua própria regra e supondo o ($\dot{z}$ ou dz) constante, ele teria encontrado o diferencial de segundo grau de z^n como $(n^2-n)z^{n-2}o^2$ e a do terceiro grau como $(n^3-3n^2+2n)z^{n-3}o^3$ (BERNOULLI, 1714b, pp.54-5) etc

Nikolaus (I) deturpa o procedimento descrito por Newotn com o objetivo de forçar o resultado para que ele seja o mesmo daquele calculado por seu tio. As razões de Nikolaus (I) não estão fundamentadas, não passam de meras coincidências numéricas. Ele deforma o procedimento de cálculo de fluxão de potências, faz uma associação fraca com a expansão em séries para extração de raizes e, por puro acaso, as manipulações numéricas atribuídas sem critério entregaram a Nikolaus (I) o resultado que ele queria. Ora, ele segue: dada a ordenada $BC = e = \sqrt{n^2-a^2}$, na Figura 5, a extração da raiz por série infinita convergente não seria a sequência apresentada por Newton como $e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{2e^5}\cdots$,[7] mas $e - \frac{ao}{e} - \frac{n^2o^2}{e^3} - \frac{3an^2o^3}{e^5}\cdots$, aquilo que, segundo a interpretação maliciosa de Nikolaus (I), Newton deveria ter chegado se tivesse aplicado corretamente a regra proposta por ele mesmo. Donde, se fizermos $Q = \frac{a}{e}$, $R = \frac{n^2}{e^3}$, $S = \frac{3an^2}{e^5}$ e o substituirmos na solução encontrada por Newton no Exempl.1 da prop. X, chega-se ao resultado que Nikolaus (I) tanto quis

$$\begin{aligned} S\sqrt{1+Q^2} : 2R^2 \quad & :: \frac{3an^2}{e^5}\sqrt{1+\frac{a^2}{e^2}} : \frac{2n^4}{e^6} \\ & :: \frac{3an^2}{e^6}\sqrt{e^2+a^2} : \frac{2n^4}{e^6} \\ & :: 3an^3 : 2n^4 \\ & :: 3a : 2n \\ & :: 3OB : 2OK \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, finalmente, a "resistência está para a força central [gravidade], como $3OB$ está para $2OK$ conforme meu tio encontrou". [8] Nikolaus (I) assume que, para Newton

(1713) nas *Mémoires de l'Academie des Sciences*, na sua versão manuscrita do tratado *De Quadratura* (1691) (cf. Whiteside, 1967-1981, v.8, p.303).

[7]Cf. Newton, 1687, p.163

corrigir sua solução, ele deveria substituir os termos R e S da série infinita convergente $DG = e_{a+o} = P \pm Qo \pm Ro^2 \pm So^3 \pm \dots$ por $DG' = e_{a+o} = P \pm Qo \pm 2Ro^2 \pm 6So^3 \pm \dots$. Em outras palavras, o Corolário III da prop. X da primeira edição dos *Principia* que apresenta como solução para a densidade do meio $\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$ deverá ser corrigido, segundo Nikolaus (I), para $\frac{6S\sqrt{1+Q^2}}{2(2R)^2}$. Feita essa correção, as soluções de Newton e de Johann tornam-se a mesma, qual seja, $\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} = \frac{3}{2}\frac{OB}{OK}$.[9]

3.4 Solução de Newton na segunda edição

Como já apresentado na análise da solução contida na primeira edição dos *Principia*, prop. X, Corolário II, Newton facilmente percebeu que um erro se originou da consideração das quantidades relacionadas a incrementos desiguais da abcissa, dB e DB, como correspondentes a iguais incrementos de tempo, conforme consta na Figura 2 e na expressão para densidade do meio $\varsigma = \frac{Cf-CF}{CF^2}$. Para superá-lo, Newton desenvolveu uma outra expressão para ς dependente de incrementos iguais da base, BD e Bi, $\varsigma = \frac{FG-kl}{CF\times(FG+kl)}$. Contudo, tal solução continuaria sendo defeituosa – conforme sustentam Guicciardini e Whiteside[1] – porque as quedas galileanas fg e FG são consideradas iguais na proporção (3.4). Whiteside sustenta que essas quedas galileanas são diferentes em seus diferenciais de terceira ordem – como veremos adiante.

Vejamos a construção do diagrama da Figura 7 contida na solução corrigida, publicada na segunda edição dos *Principia*. Newton considera que os incrementos da abcissa são iguais, ou seja, $BC = CD = DE$. Na Figura 7, a partir dos pontos que delimitam esses incrementos são levantadas ordenadas correspondentes aos pontos G, H e I na trajetória semicircular PFQ. Nesse diagrama, o corpo move-se de G em direção a I e, para os arcos GH e HI, LH e NI representam quedas galileanas.

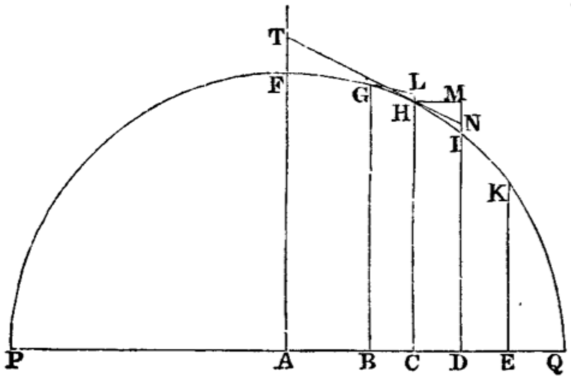
Os intervalos de tempo T e t em que o corpo (de massa unitária) descreve os

[8]Cf. Bernoulli, N., 1714b, pp.55-6.

[9]Para Guicciardini, trata-se de uma "interpretação maliciosa de Nikolaus (I) Bernoulli... É uma acusação extraordinária anunciar que Newton não soube como calcular fluxões de ordem superior, para $y = x^n$... O erro de Newton não reside em sua manipulação dos coeficientes de Taylor, mas em sua razão geométrica, onde ele igualou FG e fg" (Guicciardini, 1999, pp.243-4). Para Whiteside, "converter a medida de Newton de 1687 para $\frac{1}{2}\frac{(6S)\sqrt{1+Q^2}}{(2R^2)} = \frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$, agora aumentada pelo fator de $\frac{3}{2}$, é uma coincidência sem sentido... Quando... Newton propriamente verificou que tinha cometido um *faux pas* no argumento de sua proposição, ele soube deduzir $\frac{1}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ da principal expressão geométrica defeituosa $\frac{1}{4}\frac{CF(FG-kl)}{FG^2}\cdots$ e não demorou muito para ele detectar que seu erro foi inadvertidamente repor *en route* a pequena e evanescente linha fg pela sua 'igual' FG na diferença $fg - kl$" (Whiteside, 1981, p.51).

[1]Vide nota 9, seção 3.3.

Figura 7: Diagrama da Prop. X na segunda edição dos *Principia*



arcos GH e HI são diferentes. O decremento da velocidade ocorre durante o intervalo de tempo t e é expresso por:[2]

$$\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} \tag{3.15}$$

Essa variação de velocidade dada pelo incremento infinitesimal de tempo é, pela segunda lei do movimento (lei II, livro I, *Principia*), igual à componente tangencial da força. Adiciona-se a variação de velocidade à componente tangencial da gravidade. Newton observa que a "gravidade produz num corpo que ao cair percorre o espaço NI uma velocidade com a qual ele seria capaz de descrever duas vezes este espaço no mesmo tempo, como Galileu demonstrou; isto é, a velocidade $\frac{2NI}{t}$".[3] Desse modo, a projeção da queda do corpo devido à gravidade em relação à tangente é $\frac{2NI}{t}\frac{MI}{HI}$.[4] Logo, tem-se

$$\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI}{t}.\frac{MI}{HI}.$$

Essa é a equação do movimento que permite a Newton exprimir adiante a relação entre a resistência e a gravidade, assim como, a relação entre a densidade do meio e velocidade do corpo. Segue Newton, então: "como, no mesmo tempo, a ação da gravidade em um corpo que cai gera a velocidade $\frac{2NI}{t}$, a resistência está para a gravidade assim como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI.MI}{t.HI}$ está para $\frac{2NI}{t}$ ou $GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI}$ está para $2NI$".[5] Então, a

[2]Newton, na versão revisada, adota um modelo consideravelmente diferente do original. Enquanto a versão de 1687 é baseada na representação usual da força newtoniana via desvio continuamente acelerado do movimento inercial (lema X, seção I, livro I, *Principia*), aqui Newton opta por representar a variação infinitesimal da velocidade por meio de uma equação do movimento. Ele, então, considera dois arcos infinitesimais, GH e HI, atravessados por um só movimento, e usa a equação (3.15) para expressar a mudança infinitesimal de velocidade (cf. Guicciardini, 1999, pp.237–40).

[3]Cf. Newton, 2008, p.36.

[4]Os triângulos HMI e HMN são, nas razões nascentes, proporcionais, assim, tem-se que $MN : HN :: MI : HI$. Essa proporção nos apresenta a relação do cateto MI (ou MN) ou, ainda, do segmento NI $(=g)$ com a tangente HN. Portanto, a componente tangencial da gravidade pode ser expressa por $g.t\left(\frac{2NI}{t}\right).\frac{MI}{HI}\left(\text{ ou } \frac{MN}{HN}\right)$.

relação entre resistência e gravidade é

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI}}{2NI} \tag{3.16}$$

Os intervalos de tempo, T e t, são proporcionais a $\sqrt{LH}$ e a $\sqrt{NI}$, respectivamente: os "... tempos que o corpo descreve os arcos GH e HI estarão para as raízes quadradas das distâncias LH e NI as quais o corpo descreveria nos mesmos tempos caindo de suas tangentes".[6] De fato, unicamente devido a gravidade Newton concebe LH e NI como pequenas quedas galileanas. Então, a razão $\frac{t}{T}$ pode ser substituída por $\frac{NI}{LH}$.

Tabela 2: Ordenadas e abscissas do diagrama da segunda solução

Ordenadas	Abscissas
$CH = P$	
$DI = P - Qo - Ro^2 - So^3 \dots$	$CD = o$
$BG = P + Qo - Ro^2 + So^3 \dots$	$CB = -o$
$EK = P - 2Qo - 4Ro^2 - 8So^3 \dots$	$CE = 2o$
$MI = Qo + Ro^2 + So^3 \dots$	
$NI = Ro^2 + So^3 \dots$	

Tendo em vista a Figura 7, Newton estabelece as abscissas e as ordenadas conforme a Tabela 2, e efetua as diferenças entre as seguintes ordenadas,

$$BG - CH = Qo - Ro^2 + So^3 \dots$$

$$CH - DI = Qo + Ro^2 + So^3 \dots$$

e as eleva ao quadrado, desprezando os termos superiores a o^3.

$$\begin{aligned}(BG - CH)^2 &= \left(Qo - Ro^2 + So^3 \dots\right)^2 \\ &= Q^2o^2 - QRo^3 - QRo^3 \dots \\ &= Q^2o^2 - 2QRo^3 \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(CH - DI)^2 &= (Qo + Ro^2 + So^3 \dots)^2 \\ &= Q^2o^2 + QRo^3 + QRo^3 \dots \\ &= Q^2o^2 + 2QRo^3 \dots\end{aligned}$$

[5]Ibid., p.36.
[6]Ibid., p.37.

A esses quadrados, adicionam-se os quadrados de BC e CD respectivamente.

$$\begin{aligned} BC^2 + (BG - CH)^2 \quad &= (-o)^2 + Q^2o^2 - 2QRo^3 \ldots \\ &= o^2 + Q^2o^2 - 2QRo^3 \ldots \end{aligned}$$

$$CD^2 + (CH - DI)^2 = o^2 + Q^2o^2 + 2QRo^3 \ldots$$

Agora, portanto, deve-se extrair as raízes quadradas de $BC^2 + (BG - CH)^2$ e $CD^2 + (CH - DI)^2$ para se chegar aos arcos GH e HI, respectivamente. Seguem os cálculos apenas do primeiro, posto que o procedimento é o mesmo para ambos.

$$\sqrt{BC^2 + (BG - CH)^2} = \sqrt{o^2 + Q^2o^2 - 2QRo^3 \ldots}$$

Focando apenas no radicando, tem-se que

$$o^2 + Q^2o^2 - 2QRo^3 \ldots = o^2 \left(1 + Q^2 - 2QRo \ldots\right)$$

o termo dentro do parênteses pode ser escrito na forma do produto notável $a^2 - 2ab + b^2$. Onde,

$$a^2 = 1 + Q^2 \therefore a = \sqrt{1 + Q^2}$$

$$2ab = 2QRo \;\text{ e }\; b^2 = b^2$$

Assim, para encontrar o termo em b.

$$2ab = 2QRo$$

$$2\sqrt{1 + Q^2}b = 2QRo$$

$$b = \frac{QRo}{\sqrt{1 + Q^2}}$$

Então, o produto notável pode ser escrito como,

$$a^2 - 2ab + b^2 = (1 + Q^2) - 2\sqrt{1 + Q^2}\frac{QRo}{\sqrt{1 + Q^2}} + \left(\frac{QRo}{\sqrt{1 + Q^2}}\right)^2$$

Sabendo que $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ tem-se que,

$$(a - b)^2 = \left(\sqrt{1 + Q^2} - \frac{QRo}{\sqrt{1 + Q^2}}\right)^2$$

Retomando o termo de dentro do parênteses agora arranjado de outra forma.

$$o^2\left(1+Q^2-2QRo\ldots\right)=o^2\left(\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo}{\sqrt{1+Q^2}}\ldots\right)^2$$

Recolocando o termo acima na raiz de onde foi retirado.

$$\sqrt{o^2+Q^2o^2+2QRo^3\ldots}=\sqrt{o^2\left(\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo}{\sqrt{1+Q^2}}\ldots\right)^2}$$

Efetuando, portanto, a raiz quadrada e truncando o resultado, chega-se ao valor para o arco GH. O termo o^2b^2 inserido pelo produto notável não altera a solução encontrada porque é um termo de quarta ordem infinitesimal $\left(\frac{Q^2R^2o^4}{1+Q^2}\right)$, portanto, desprezível; porém, útil na solução dessa raiz.

$$\sqrt{o^2\left(\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo}{\sqrt{1+Q^2}}\ldots\right)^2}=o\left(\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo}{\sqrt{1+Q^2}}\ldots\right)$$

$$GH=o\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}$$

Como anteriormente justificado, o arco HI resulta de um processo muito semelhante. Basta, por ora, apresentar o seu valor.

$$HI=o\sqrt{1+Q^2}+\frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}$$

Os arcos percorridos pelo móvel são calculados por:

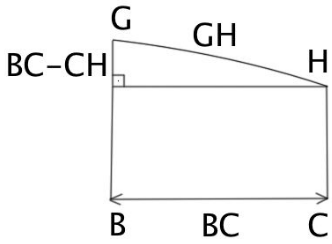
$$GH=\sqrt{BC^2+(BG-CH)^2}$$

$$HI=\sqrt{CD^2+(CH-DI)^2}$$

pela aplicação do teorema de Pitágoras em GH [vide Figura 8], pois, como $BC=o$, ou seja, infinitamente pequeno, então, nas últimas razões o arco GH aproxima-se a um segmento de reta, sendo possível aplicar o teorema de Pitágoras. Para esse caso: $GH^2=BC^2+(BC-CH)^2$, e o mesmo ocorre para HI. Newton continua efetuando a subtração da metade da soma das ordenadas BG e DI, da ordenada CH. O mesmo procedimento é empregado para DI e a metade da soma de CH e EK.

$$CH-\frac{BG+DI}{2}=P-\frac{2P-2Ro^2\ldots}{2}=Ro^2\ldots$$

Figura 8: Detalhe do arco GH do diagrama da segunda edição



$$DI-\frac{CH+EK}{2}=P-Qo-Ro^2-So^3\ldots-\frac{2P-2Qo-4Ro^2-8So^3\ldots}{2}=Ro^2+3So^3\ldots$$

As expressões acima são os senoversos dos arcos GI e HK. Newton passa, então, a proporção $GI : HK :: LH : NI (= T^2 : t^2)$, e fazendo as devidas substituições e isolando a razão entre t e T, obtém

$$Ro^2 : Ro^2 + 3So^3 :: T^2 : t^2$$

$$R + 3So : R :: t^2 : T^2$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{R+3So}{R}$$

$$\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}}$$

Para calcular LH, parte-se da mesma proporção.

$$GI : HK :: LH : NI$$

$$Ro^2 : Ro^2 + 3So^3 :: LH : Ro^2 + So^3\ldots$$

$$LH = \frac{Ro^2(Ro^2+So^3\ldots)}{Ro^2+3So^3}$$

$$LH = \frac{R^2o^4+RSo^5\ldots}{Ro^2+3So^3} = \frac{R^2o^2+RSo^3\ldots}{R+3So}$$

Dessa forma, $\frac{t}{T}$ também pode ser encontrado por:

$$LH : NI :: T^2 : t^2$$

$$NI : LH :: t^2 : T^2$$

$$LH.t^2 = NI.T^2$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{NI}{LH}$$

Substituindo os valores de NI e LH.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{T}\right)^2 &= \frac{Ro^2+So^3}{\frac{R^2o^2+RSo^3}{R+3So}} \\
&= \left(Ro^2+So^3\right).\frac{R+3So}{R^2o^2+RSo^3} \\
&= \frac{Ro^2+So^3}{Ro^2+So^3}.\frac{R+3So}{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t}{T} &= \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{R}{R}.\frac{R+3So}{R}} \\
&= \sqrt{\frac{R^2+3RSo}{R^2}} = \sqrt{\frac{\left(R+\frac{3}{2}So\right)^2-\frac{9}{4}S^2o^2}{R^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(R+\frac{3}{2}So\right)^2}{R^2}-\frac{\frac{9}{4}S^2o^2}{R^2}}
\end{aligned}$$

Como $\frac{\left(R+\frac{3}{2}So\right)^2}{R^2} >> \frac{\frac{9}{4}S^2o^2}{R^2}$, então a razão entre t e T fica $\frac{t}{T}=\sqrt{\left(\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}\right)^2}=\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$.

Finalmente, todos os termos contidos em (3.16) já foram encontrados. Basta, substitui-los e efetuar as operações exigidas pela equação do movimento. Retomando, portanto, os termos:

Equação do movimento	Termos da equação
$\dfrac{GH\frac{t}{T}-HI+2NI\frac{MI}{HI}}{2NI}$	$GH=o\sqrt{1+Q^2}-\dfrac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}$ $\dfrac{t}{T}=\dfrac{R+\frac{3}{2}So}{R}=1+\dfrac{3So}{2R}$ $HI=o\sqrt{1+Q^2}+\dfrac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}$ $NI=Ro^2+So^3\ldots$ $MI=Qo+Ro^2+So^3\ldots$

Resolvendo por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
GH\frac{t}{T} &= \left(o\sqrt{1+Q^2}-\frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}\right)\left(1+\frac{3So}{2R}\right) \\
&= o\sqrt{1+Q^2}+\frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R}-\frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}-\frac{3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}}
\end{aligned}$$

$$GH\frac{t}{T} - HI = \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} - \frac{\overbrace{2QRo^2}^{\times 2}}{\underbrace{\sqrt{1+Q^2}}_{\times 2}} - \frac{3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} - \frac{4QRo^2 + 3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}}$$

$$2NI\frac{MI}{HI} = 2\left(Ro^2 + So^3 \ldots\right) \frac{Qo + Ro^2 + So^3 \ldots}{o\sqrt{1+Q^2} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}}$$

$$= \frac{2QRo^3}{o\sqrt{1+Q^2} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}}.$$

O numerador da equação do movimento, então, fica

$$GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI} =$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} - \frac{4QRo^2 + 3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}} + \frac{2QRo^3}{o\sqrt{1+Q^2} + \frac{QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} - \frac{4QRo^2 + 3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}} + \frac{2QRo^3}{\frac{(1+Q^2)o + QRo^2}{\sqrt{1+Q^2}}}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} - \frac{4QRo^2 + 3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}} + \frac{2QR\sqrt{1+Q^2}o^2}{(1+Q^2) + QRo}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} + \frac{-(4QRo^2 + 3SQo^3)(1 + Q^2 + QRo) + 2QR\sqrt{1+Q^2}o^2.2\sqrt{1+Q^2}}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} + \frac{-4QRo^2 - 4Q^3Ro^2 - 4Q^2R^2o^3 - 3SQo^3 - 3SQ^3o^3 - 3SQ^2Ro^4}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)} \cdots$$

$$\cdots \frac{+4QR(1+Q^2)o^2}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)}$$

, ou,

$$GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI} =$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} + \frac{-4QRo^2 - 4Q^3Ro^2 + 4QRo^2 + 4Q^3Ro^2 - 4Q^2R^2o^3 - 3SQo^3}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)} \cdots$$

$$\cdots \frac{-3SQ^3o^3 - 3SQ^2Ro^4}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)}$$

$$= \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R} + \frac{-4Q^2R^2o^3 - 3SQo^3 - 3SQ^3o^3 - 3SQ^2Ro^4}{2\sqrt{1+Q^2}(1 + Q^2 + QRo)}.$$

Newton nesse passo do desenvolvimento parece ter desprezado os termos de ordem o^3 e superiores. Resultando, finalmente em

$$GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI} = \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R}$$

Segundo a equação 3.18, tem-se que

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI}}{2NI} = \frac{\frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R}}{2(Ro^2 + So^3)}$$

mais uma vez, ignorando os termos em o^3, fica

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3So^2\sqrt{1+Q^2}}{2R}\frac{1}{2Ro^2}$$

e assim, chega-se a solução apresentada por Newton na segunda edição dos *Principia* conforme a solução alternativa bernoulliana.

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} \tag{3.17}$$

A velocidade do corpo que parte de qualquer ponto H da curva na direção tangente HN no vácuo descreverá uma parábola de diâmetro HN e *latus rectum* $\mathcal{L} = \frac{HN^2}{NI}$, ou seja: $\mathcal{L} = \frac{HN^2}{NI} = \frac{o^2+Q^2o^2}{Ro^2+So^3...} = \frac{1+Q^2}{R}$, desprezando os termos em o^3 e superiores. A velocidade ao quadrado, por sua vez, segundo a relação $v^2 = \frac{g\mathcal{L}}{2}$, será $v^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}$. Por fim, a densidade do meio é tal que $\varsigma = \frac{R}{v^2}$, logo:

$$\varsigma = \frac{\frac{3}{2}g\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}}{\frac{1}{2}g\frac{(1+Q^2)}{R}} = \left[\frac{3}{2}\right]\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} \tag{3.18}$$

Acabamos de ver como Newton modificou sua solução de 1713 em comparação com a solução de 1687, para chegar ao fator numérico de $\frac{3}{2}$. Percebemos as diferenças, a começar pelo próprio diagrama geométrico e pelas considerações dinâmico-geométricas do movimento analisado [vide nota 2 desta seção]. Porém, todo esse retrabalho só teve início depois da visita de Nikolaus (I) a Newton. Retomemos esse momento para, em seguida, na verificação de Newton que o fez consentir com os Bernoulli e, em consequência disso, lançar-se a dissolução dessa falha.

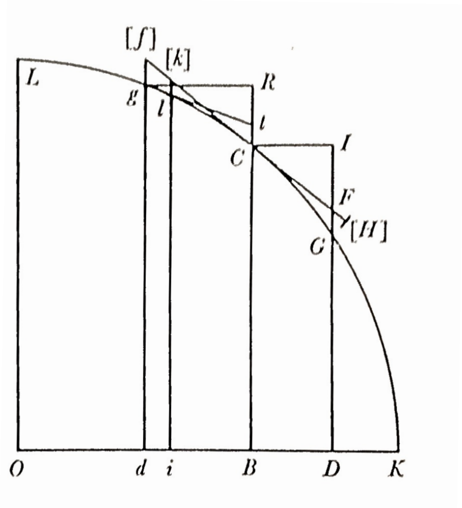
3.5 Newton frente à objeção de Johann

Logo após a visita de Nikolaus (I) a Londres, em setembro de 1712, Abraham de Moivre encarregou-se rapidamente de mostrar para Newton as objeções dos Bernoulli.

Levou de dois a três dias para Newton apresentar seus primeiros esforços para corrigir seu erro na prop. X. Antes de acompanhar toda trajetória de correção de Newton, prematuramente, Abraham de Moivre escreveu o seguinte para Johann.

> Foi dito a mim que ele [Nikolaus (I)] tinha uma objeção contra o argumento do livro do Sr. Newton com respeito ao movimento de um corpo que descreve um círculo num meio resistente, e tendo comunicado essa objeção a mim, eu de imediato informei Newton, no lugar dele. Sr. Newton disse que examinaria isso, e dois ou três dias depois, passei por sua casa, ele disse-me que era uma boa objeção e que ele tinha corrigido o argumento; de fato, ele mostrou-me sua correção, e provou-se [nesse recálculo] conforme os resultados de seu sobrinho. Então, ele acrescentou que pretendia ver seu sobrinho e agradecê-lo, e me pediu para levá-lo para onde Nikolaus (I) estava: o que fiz. Para finalizar, Sr. Newton me assergurou que esse erro simplesmente procede de ter considerado a tangente no sentido errado, mas a base de seu cálculo e as séries que ele fez uso continuam tal como estão (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, p.52).

Figura 9: Diagrama geométrico da conferência de Newton



Para compreender melhor a afirmação de Abraham de Moivre com respeito à mudança no sentido da tangente, perceba, na Figura 9, que Newton deixa de considerar uma única tangente, como na Figura 2, para dois movimentos (horário e anti-horário), e passa a tratar duas tangentes de arcos sucessivos percorridos por um único movimento, tal como encontramos na Figura 7. Segundo Whiteside,[1] o relato de Abraham de Moivre não condiz com as várias tentativas de Newton para salvar seu argumento original – e isso ficará evidente no capítulo quatro). Newton ocupou-se detidamente, ora, suas várias tentativas

[1]Ibid., p.53.

falhas foram bastante extensas. Esse percurso de tentativas falhas fizeram-no paulatinamente modificar seu argumento. Para, de uma vez por todas, num modelo matemático radicalmente diferente, obter êxito. Ainda, seguindo os argumentos de Whiteside, tendo em vista tal mudança no diagrama geométrico, ele afirma:

> Foi, está agora claro, uma circunstância contingente criada por um mera conveniência prática. E, se Newton não se deu conta disso quando fez sua primeira declaração lacônica da correção do erro em sua primeira edição de 1687, ele deve ter chegado a suspeitar fortemente logo em seguida quando fez adiante testes de validade de seu modo original de atacar [o problema] (WHITESIDE, 1967-1981, v.8, p.53).

Em outras palavras, segundo Whiteside, por ter falhado em suas primeiras tentativas de salvar o argumento original – como mostram seus *unprinted private papers* – Newton reuniu esforços para subjulgar as sutilezas matemáticas e dinâmicas de seu problema do movimento em meio resistente, isso o conduz a um detalhe técnico. Comparando o primeiro estado e seus subsequentes de um movimento de projétil ao redor de um ponto central, Newton voltou-se para uma investida matemática que lhe trouxe melhor ajuda, ao considerar, por analogia, um projétil atravessando num único movimento arcos infinitesimais em sua trajetória de voo .[2] Parece-me que foi devido a essa alteração da forma com que Newton arquitetou seu primeiro argumento que Abraham de Moivre afirmou ser a falha um equívoco na consideração do sentido da tangente – como consta na carta enviada a Johann Bernoulli, na glosa acima transcrita. Vejamos finalmente os detalhes matemáticos do assentimento de Newton.

Considere a Figura 9, conforme consta em Whiteside.[3] Considere $OB = a$; $BC = e$; $BD = Bi = o$ e $Bd = p$, sabe-se que usando das séries tem-se

$$IF = \frac{ao}{e}$$

e

$$GF = \frac{nno^2}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔCIF da Figura 3 e usando a relação $n^2 = e^2 + a^2$:

$$CF = \sqrt{oo + \frac{aaoo}{e[e]}} = \frac{no}{e}$$

[2]Ibid.

[3]Ibid., pp.391-2.

Igualando:

$$gf = GF$$

$$\frac{nnpp}{2e^3} - \frac{annp^3}{2e^5} \ldots = \frac{nnoo}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5} \ldots$$

ou melhor,

$$pp - \frac{ap^3}{ee} = oo + \frac{ao^3}{ee}$$

$$pp\left[1 - \frac{ap}{e^2}\right] = oo\left[1 + \frac{ao}{e^2}\right]$$

$$\frac{\frac{e^2-ap}{e^2}}{\frac{e^2+ao}{e^2}} = \frac{oo}{pp}$$

$$\frac{oo}{pp} = \frac{e^2 - ap}{e^2 + ao}$$

Isto é,

$$oo : pp :: ee - ap : ee + ao$$

$$(o : p)^2 :: ee - ap : ee + ao$$

$$o : p :: \sqrt{ee - ap : ee + ao}$$

ou

$$o : p :: \sqrt{ee - ap} : \sqrt{ee + ao}$$

aplicando $(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q \ldots$ para abrir as raízes, tem-se

$$o : p :: \left[e^2 - e^2\left(\frac{ap}{e^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} : \left[e^2 + e^2\left(\frac{ao}{e^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$o : p :: \left[\left(e^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}e\frac{ap}{e^2} \ldots\right] : \left[\left(e^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e\frac{ao}{e^2} \ldots\right]$$

assim,

$$o : p :: \left(e - \frac{ap}{2e}\right) : \left(e + \frac{ao}{2e}\right)$$

para $p = o + 0o^2$

$$o : p :: e : e + \frac{ao}{e}$$

ou[4]

$$o : p{-}o :: e : \frac{ao}{e} :: BC(= e) : IF(= \frac{ao}{e}) :: CF(= \frac{no}{e}) : kf\left(= Cf - CF = 2FH = \frac{naoo}{e^3}\right)$$

por isso,

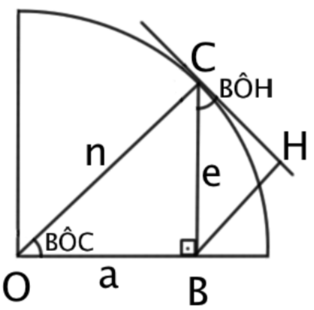
$$\left(\frac{naoo}{2e^3} =\right) FH : \left(\frac{nnoo}{2e^3} =\right) FG :: a : n$$

Logo, $GH \perp FH$ e o corpo não está acelerado. Retomando, $\frac{naoo}{2e^3} = Cf - CF$ torna-se $\frac{a}{n} = \frac{Cf-CF}{FG}$ como a resistência. E, $\frac{a}{2ne}\left[= \frac{Cf-CF}{CF^2}\right]$ como densidade.

> [A queda galileana] FH é de uma só vez o incremento da componente da gravidade agindo na direção do movimento ao longo da tangente CH (inclinada a $B\hat{C}H = B\hat{O}C = cos^{-1}\left[\frac{a}{n}\right]$), e, também, o decremento no movimento do corpo em relação a resistência contrária do meio. [Isso] é impossível, porque a aceleração descendente constante do corpo deve ter uma componente na direção CH que é proporcinal ao $cosB\hat{C}H = \frac{a}{n}$, enquanto que se o movimento total do corpo naquela direção não é acelerado então não pode haver variação da resistência do meio naquele progresso uniforme. Essa *reductio ad absurdum* da razão obtida no 'Exempl.1' da *editio princeps* para a resistência num movimento semicircular em um plano perpendicular ao horizonte já tinha sido feita por Johann Bernoulli e comunicada, particularmente, por ele a Leibniz numa carta em 12 de agosto de 1710 (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, p.392, nota 6).

Primeiramente, por meio da seguinte análise geométrica – onde ΔCOB e ΔCBH são semelhantes, se o ângulo em H for perpendicular – encontramos facilmente $C = cos^{-1}\left[\frac{a}{n}\right]$. Ora, Whiteside afirma que deve ocorrer uma componente gravitacional no eixo tangencial proporcional ao $\cos B\hat{C}H$, ou seja, $\frac{a}{n}$ igual a resistência do meio – ou seja, naquela direção, o movimento do corpo não é acelerado. No *Exempl.1*, Newton mostra que a velocidade varia conforme $\sqrt{BC}$ [vide nota 14, seção 3.2]. Essa é justamente a contradição encontrada por Johann Bernoulli, uma velocidade que é ao mesmo tempo constante e variável!

Figura 10: Análise geométrica do arccos



Continua Whiteside em sua proposta de como Newton deveria ter agido para chegar à fração de três meios (ainda em termos leibnizianos, porém, como veremos na

[4]Ora, da proporção $o : p - o :: e : \frac{ao}{e}$, chegamos a $o : p - o :: e^2 : ao$. Multplicando os meios pelos extremos, econtramos: $p - o = \frac{ao^2}{e^2}$. Agora, tomemos: $kf = Cf - CF = \frac{np}{e} - \frac{no}{e} = \frac{n}{e}(p-o)$. Mas como conhecemos $(p-o) = \frac{ao^2}{e^2}$, encontramos finalmente: $\frac{n}{e}.\left(\frac{ao^2}{e^2}\right) = \frac{ano^2}{e^3}$.

seção 5.1, nosso comentador não nos deixa sem os cálculos desenvolvidos pelo próprio Newton que solucionam a contradição e reduz a solução da primeira edição dos *Principia* à solução dos Bernoulli sem alterar a estrutura matemática da solução original).

> O denominador dessa medida de 1687 da razão entre a resistência e a gravidade... deveria ser '$2FG$'. Quando, entretanto, Johann Bernoulli primeiramente comentou em 1710... arguímos diretamente os primeiros princípios nesse presente caso do semicírculo $e = +\sqrt{(n^2 - a^2)}$ para o qual (em termos leibnizianos) está $da : de : ds = e : -a : n$ onde $\widehat{LC} = s$, desde que a velocidade instantânea seja $v = \frac{ds}{dt}$ em C (t é o tempo do movimento sobre $\widehat{LC}$) é $\sqrt{\frac{1}{2}g\left(\frac{1+Q^2}{R}\right)} = \sqrt{(-ge)}$, enquanto a resistência do meio ρ reage em ambos: na aceleração curvelinear $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$; e na componente $-g\frac{de}{ds}$ da gravidade g, na direção do movimento instantâneo, [desse modo] segue $\frac{\rho}{g} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} - e\right)}{ds} = \frac{3}{2}\frac{de}{ds}$, ou seja, $\frac{3}{2}\frac{a}{n}$ *recte* (ibid., nota 7).

Whiteside parte da velocidade instântanea já calculada neste trabalho, a qual se encontra na relação expressa pela equação (3.9). Em seguida, ele considera a componente da resistência do meio que age na direção da gravidade e faz alguns ajustes algébricos da seguinte forma:

$$\rho = -g\frac{de}{ds} \therefore \frac{\rho}{g} = -\frac{de}{ds},$$

mas das equações do movimento, sabemos que

$$v^2 = 2g\mathcal{S}, \text{ onde } \mathcal{S} \text{ é a distância da queda}$$

ora, isolando $\mathcal{S}$, temos

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g};$$

mas a queda que nos interessa é aquela entre os intervalos de tempo determinados pela base, que no caso é BD; em função da ordenada $BC(= e)$, logo, chegamos à variação da queda $\mathcal{S} - e$, ou seja, $\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} - e$. Agora, colocamos a variação da queda em termos diferenciais e a incerimos na relação $\frac{\rho}{g}$ antecedente. Temos, desse modo

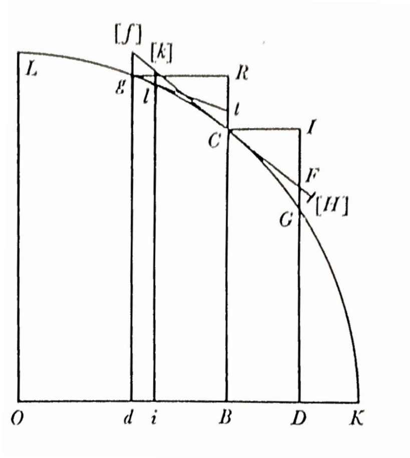
$$\frac{\rho}{g} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} - e\right)}{ds},$$

substituindo v na expressão acima e fazendo alguns ajustes chegamos a

$$\frac{\rho}{g} = -\frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{(-ge)}{g} - e\right)}{ds} = -\frac{d\left(-\frac{e}{2} - e\right)}{ds} = -\frac{d\left(\frac{-e-2e}{2}\right)}{ds} = -\frac{d\left(-\frac{3}{2}e\right)}{ds} = -\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{de}{ds} = \frac{3}{2}\frac{de}{ds}.$$

Finalmente, por meio da proporção $da : de : ds = e : -a : n$ encontramos diretamente $\frac{\varrho}{g} = \frac{3}{2}\frac{a}{n}$. Newton, na sequência de sua análise, deixa-nos uma proposta de recuperar o ajuste de $\frac{3}{2}$ para corresponder corretamente a relação geral entre a resistência do meio e gravidade em uma curva arbitrária dada.

Figura 11: Diagrama geométrico da conferência de Newton



Retomemos o diagrama geométrico; considere – conforme lem.XI, livro I dos *Principia* – $GF = \frac{CF^2}{2GD}$ como dado. Esteja a [resistência ou] velocidade^2 $\propto$ gravidade assim como $CF^2 \propto GD$, ou seja,

$$GF = \frac{CF^2}{2GD}$$

$$CF^2 = FG \times 2GD$$

$$CF^2 \propto GD \therefore CF \propto \sqrt{GD}$$

Este CF, que é proporcional a o [*sc.* $\frac{no}{e}$] está para e^3, assim como BD está para $GD^{\frac{3}{2}}$. E, GI está para OD (=$DG^{\frac{1}{2}}$), assim como o decremento da velocidade ao quadrado, ou seja,$\frac{Cf-CF}{2}$[$= HF$] : [$FG =$]$\frac{CF^2}{2CB}$, isto é,

$$\text{Resistência : Gravidade} :: \frac{\overbrace{\sqrt{fg \times (fd + dg)}}^{Cf} - \overbrace{\sqrt{FG \times (FD + GD)}}^{CF}}{2} : FG$$

ou seja,

$$CF^2 = FG \times 2DG \;\; \text{mas} \;\; 2DG \approx DG + FD (\approx DG) \therefore CF = \sqrt{FG \times (DG + FD)}$$

o mesmo vale para fg, ou,

$$\frac{\sqrt{fg \times (fd + dg)} - \sqrt{FG \times (FD + DG)}}{2} : FG$$

considerando[5] $\sqrt{fg} \approx \sqrt{FG}$

$$\frac{\sqrt{FG}\left\{\sqrt{fd+dg}-\sqrt{FD+DG}\right\}}{2} : FG$$

dividindo tudo por $\sqrt{FG}$, tem-se

$$\frac{\sqrt{fd+dg}-\sqrt{FD+DG}}{\frac{2}{\sqrt{FG}}} : \left(\sqrt{FG}\right)^2$$

ou

$$\sqrt{fd+dg}-\sqrt{FD+DG} : 2\sqrt{FG}$$

Contudo, operando o primeiro membro da proporção segundo a regra de redução por extração de raízes[6], após algumas simplificações, tem-que:

$$\sqrt{\overbrace{dg+fg}^{fd}+dg}-\sqrt{\overbrace{DG+FG}^{FD}+DG} : 2\sqrt{FG}$$

$$\sqrt{2dg+fg}-\sqrt{2DG+FG} : 2\sqrt{FG}$$

mas, Newton considera $\sqrt{fg} \approx \sqrt{FG}$,[5] então finalmente

$$\sqrt{2dg+FG}-\sqrt{2DG+FG} : 2\sqrt{FG}$$

extraindo a raiz, chega-se

$$\left\{\left(\sqrt{2dg}+\frac{FG}{2\sqrt{2dg}}\cdots\right)-\left(\sqrt{2DG}+\frac{FG}{2\sqrt{2DG}}\cdots\right)\right\} : 2\sqrt{FG}$$

simplificando o primeiro membro

$$\left[\left\{\sqrt{2dg}-\sqrt{2DG}\right\}+\left\{\frac{FG}{2\sqrt{2DG}}+\frac{FG}{2\sqrt{2dg}}\cdots\right\}\right] : 2\sqrt{FG}$$

$$\left[\left(\sqrt{2dg}-\sqrt{2DG}\right)+\left\{\frac{2\sqrt{2DG}FG-2\sqrt{2dg}FG}{4\sqrt{2DG}\sqrt{2dg}}\cdots\right\}\right] : 2\sqrt{FG}$$

$$\left[\left(\sqrt{2dg}-\sqrt{2DG}\right)+\left\{\frac{(\sqrt{2dg}-\sqrt{2DG}).(-FG)}{4\sqrt{DG.dg}}\cdots\right\}\right] : 2\sqrt{FG}$$

[5]Essa aproximação, segundo Whiteside, é um dos erros que Newton reiteradamente comete durante o processo de correção. Essa equivalência pudemos também notar na proporção (3.4) da seção 3.2. Essa afirmação de Whiteside ficará mais clara no capítulo quatro onde apresentarei uma sequência de cinco tentativas frustadas de Newton solucionar seu erro que são importantes para evidenciar qual foi o erro de Newton segundo esse comentador.

[6]Cf. Whiteside, 1967-1981, v.3, p.41

$$\left(\sqrt{2dg}-\sqrt{2DG}\right).\left(1-\frac{FG}{4\sqrt{DG.dg}}\cdots\right):2\sqrt{FG}$$

no $\lim_{FG\to 0}\frac{1}{4}\frac{FG}{\sqrt{DG.dg}}\to 0$, então por fim

$$\sqrt{fd+dg}-\sqrt{FD+DG}:2\sqrt{FG}::\sqrt{dg}-\sqrt{DG}:\sqrt{2FG}$$

Pondo $DG=e+Qo+Roo+So^3\&c$, então tornam-se $Q=-\frac{a}{e}$, $R=-\frac{nn}{2e^3}$, $S=-\frac{ann}{2e^5}$. Agora, chegamos à proporção da resistência para a gravidade assim como $2So^3\sqrt{oo+QQoo}$ para $4RRo^4$. Isto é,

$$\frac{ann}{2e^5}\times\frac{n}{e}\text{ está para }\frac{n^4}{2e^6}\text{ ou como }\frac{a}{2}\text{ está para }\frac{n}{2}.$$

Onde, gravidade:resistência::n:a; e se a linha gt toca a curva LCK em g, então Ct será igual a FG. Então, gravidade:resistência::FG:FH $\left(=\frac{1}{2}fk\right)$. A mesma solução encontrada na primeira edição dos *Principia* [ora, $\frac{R}{g}=\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}=\frac{a}{n}$, vide nota 14, seção 3.2]. Pontua Whiteside:

> Essa equação... marca o ponto no qual Newton considerou por primeiro o desvio da reta sobre o arco gC, ao mesmo tempo, CF, como para o arco CG, e a tangente gt com seu término em C. Ele foi aqui, talvez, mais sábio do que imaginou, uma vez que as componentes descendentes da resistência (as quais ele tinha até agora negligenciado ao considerar $fg=FG$) agem num mesmo sentido: especificamente, ele continua a entender que os arcos infinitesimais gC e CG são atravessados em tempos iguais, digamos θ, podemos mostrar... que, ao ignorar termos da ordem de θ^4, o projétil em seu movimento sucessivo de g para C é – sob a ação conjunta da tração descendente e continua da gravidade g e da componente da resistência do meio ρ oposta nessa direção ao movimento do projétil até C – desviado de seus caminhos tangenciais iniciais gt e CF nas iguais distâncias $tC=FG=\frac{1}{2}g\theta^2-\frac{1}{6}\frac{g\rho}{v}\theta^3$, onde v é a velocidade instantânea do projétil. Teria ele pensado em fazer essa conexão? Newton poderia aqui ter diretamente seguido para a dedução correta da expressão ajustada apropriadamente da relação entre a resistência e a gravidade da expressão geométrica básica $\frac{1}{2}\frac{fC-CF}{FG}$ determinada por ele em sua *editio princeps*. Para, de acordo com o incremento da base $BD=o$, a expansão em série do incremento da ordenada $DG=e_{a+o}$ como $e+Qo+Ro^2+So^3+\ldots$ (onde $Q\equiv Q_a=\frac{de}{da}$, $R\equiv R_a=\frac{d^2e}{da^2}=\frac{1}{2}\frac{dQ}{da}$ e $S\equiv S_a=\frac{1}{6}\frac{d^3e}{da^3}=\frac{1}{3}\frac{dR}{da}$), chegar novamente a $CF=o\sqrt{1+Q^2}$ e a $FG=Ro^2+So^3+\ldots$; enquanto, da mesma forma, de acordo com o decremento $Bd=-p$, tem-se $dg=e_{e-a}=e-Qp+Rp^2-Sp^3+\ldots$ e consequentemente
>
> $$tC=R_{a-p}p^2+S_{a-p}p^3+\ldots=(R-3Sp+\ldots)p^2+(S-\ldots)p^3=Rp^2-2Sp^3\ldots$$
>
> A partir disso, ao equacionar os desvios FG e tC, segue-se que
>
> $$p^2=o^2+3\frac{S}{R}o^3\text{ ou }p=o+\frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2\ldots,$$

> para que $\frac{1}{2}\frac{fC-CF}{FG} = \frac{1}{2}(p-o)\frac{\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2+...}$ torne-se, no limite de o tendendo a zero, diretamente, $\frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$. Newton, por si só, aparentemente não teria visto essa maneira relativamente simples de ajustar o argumento de sua *editio princeps* até ele ter chegado, mais radicalmente, a remodelar seu argumento original, quando ele particularmente retornou a considerar outra vez onde sua falha estava, aí obteve a razão entre o e p equivalente a *ex sagittis*.
> Imediatamente, na sequência [vide Add.3965109^r – Anexo A - Manuscritos de Newton], ainda incapaz de se ver livre da *idée fixe* que fg e FG têm comprimentos iguais, ele se pôs em vão a derivar o argumento correto da premissa completamente confusa '$GF = C[t] = g[f]$', mantendo devidamente que '$Cf - CF$ = *'decr[emento] mot[us]'* mede a resistência sobre gCG. Vemos que não há necessidade de reproduzirmos essas computações ineficientes nos mais completos detalhes, pensar nisso é suficiente para exemplificar suas qualidades numa típica passagem... onde uma substituição de fg por FG... leva Newton inexoravelmente a duplicar mais uma vez o resultado atingido no texto de 1687 (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, p.394, nota 13).

Whiteside salienta que nesse momento, e isso é importante para a sua argumentação a respeito do erro do Newton, o matemático inglês deixa de considerar iguais as quedas galileanas FG e fg, e passa a considerar iguais FG e Ct para um movimento no qual os arcos Cg e CG são atravessados em um mesmo intervalo de tempo. Posto isso, a conexão a que nosso comentador se refere é justamente a diferença entre FG e fg ter sido finalmente compreendida por Newton. Contudo, não passa de mero artifício retórico de Whiteside. No capítulo seguinte veremos que a compreensão de Newton com respeito a isso não se deu, assim, de forma célere. Whiteside nos mostra também como Newton poderia ter procedido para solucionar o problema da falta do fator numérico $\frac{3}{2}$. De maneira muito simples, ele parte da proporção (3.2) – solução da *editio princeps* – e do fato que as bases $BD = o$ e $Bd = -p$ são diferentes (na verdade distintas por um diferencial de terceira ordem, como veremos na seção 5.1). Depois de alguns ajustes algébricos e do limite de o tendendo a zero, chega-se finalmente a $\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$. Segundo nosso comentador, Newton não teria percebido em Add.3965.109^r – Anexo A - Manuscritos de Newton – a diferença entre as quedas galileanas porque pôs-se a considerar a seguinte igualdade $FG = Ct = fg$, e isso o conduziu novamente à solução duplicada da edição dos *Principia* de 1687.

3.6 Revisão deste capítulo

Faremos uma rápida apresentação dos passos principais que constituiram as soluções: das primeira e segunda edições dos *Principia* de Newton; das objeções de Johann e da explicação de Nikolaus (I) do erro de Newton. Não podemos deixar de citar a forma como Newton percebeu sua contradição e como Whiteside sugere a correção sem alterar a estrutura matemática da *editio princeps*.

3.6.1 As soluções de Newton

As duas soluções, como já vimos, iniciam na construção dos diagramas geométricos que servem de base para encontrar as equações particulares. Em seguida, para tornar tais soluções independentes de segmentos particulares contidos nos diagramas – ou seja, como método de generalização – Newton aplica as coordenadas de Fermat devidamente equacionadas por uma raiz quadrada formada pelo teorema de Pitágoras, levando-se em conta a posição final do movimento do ponto. Ora, a solução para essa raiz quadrada em sua forma geral – cuja identidade se faz com a ordenada que contém o ponto em seu movimento final no trajeto semicircular dado – é $P \pm Qo \pm Ro^2 \pm So^3 \ldots$ Os coeficientes dessa expansão em série infinita e convergente, além de serem termos generalizantes das soluções particulares, relacionam-se diretamente com segmentos do diagrama – inclusive com as subtensas das tangentes ou, como também são chamadas de, quedas galileanas. Essas foram as semelhanças entre as soluções de 1687 e de 1713. Contudo, as diferenças se encontram fundamentalmente em dois pontos: no diagrama geométrico (que contém a estrutura para o movimento do ponto) e nas equações (construídas a partir do diagrama).

Na solução original, Newton considerou um diagrama cuja tangente no ponto C foi avaliada para um movimento no sentido horário e no sentido anti-horário – chamei essa estrutura de modelo da tangente. Essa consideração foi determinante para a construção da primeira proporção que fundamentou todo o restante do desenvolvimento de Newton, para que ele chegasse às respostas procuradas, quais sejam: a densidade do meio e a relação entre a resistência do meio e a gravidade. Com auxílio do Lem.X, seção I, Livro I e da Figura 2, tem-se que $FH \propto \mathcal{R} \times t^2$ para a resistência do meio ($\mathcal{R}$) e o tempo (t). A queda galileana – hoje calculada por $\frac{gt^2}{2}$ – FG é determinada, segundo o próprio Galileu, pela proporção $FG \propto t^2$. Ora, quase por um silogismo aristotélico, podemos encontrar facilmente que $\mathcal{R} \propto \frac{FH}{FG}$ – essa é a proporção fundamental anunciada acima. Por meio, agora, da tangente TCF, encontramos rapidamente que $FH = \frac{Cf - CF}{2}$. Quando Newton substiui essa igualdade na proporção acima, ele retira o denominador numérico '[2]' por se tratar de uma proporção onde fatores numéricos podem ser despre-

[1]É neste ponto que Whiteside chama atenção para um dos erros de Newton. Ele desconsiderou o fator numérico '[2]' junto a queda galileana FG quando incluiu essa proporção na igualdade $\mathcal{R} = \varsigma v^2$. Ora, uma vez que retoma o uso de igualdade, os fatores numéricos devem voltar às proporções para que essas tornem-se novamente igualdades.

zados. Por substituição direta, levando em conta a advertência anterior, $\mathcal{R} \propto \frac{Cf-CF}{FG}$. Newton, por hipótese, considera a resistência do meio diretamente proporcional à velocidade (instantânea) ao quadrado (v^2) e inversamente proporcional à densidade do meio (ς), ou seja, $\mathcal{R} = \varsigma v^2$.[1] Sabendo que a velocidade (instantânea) pode ser expressa por $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$ [vide seção 3.2], chegamos à expressão para a densidade do meio: $\varsigma = \frac{Cf-CF}{CF^2}$.

A expressão acima, com respeito à densidade do meio, causou um problema operacional para Newton. Para generalizar essa expressão em termos da série infinita convergente ($P \pm Qo \pm Ro^2 \pm So^3 \ldots$), os momentos ou incrementos de base (o) deveriam relacionar-se geometricamente a todos os segmentos contidos na expressão. O problema se explicita quando verificamos que Cf tem como segmento de base Bd cuja extensão (digamos p) é diferente de $BD(= o)$.[2] Newton tratou de resolver esse impasse incluindo uma outra base, $Bi(= -o)$, e a ela associada uma outra queda galileana, kl. Depois de alguns ajustes algébricos, Newton pôde chegar a $\varsigma = \frac{FG-kl}{(FG+kl)CF}$ e a $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{CF(FG-kl)}{4FG^2}$.[3] O restante do processo se resume na generalização das duas novas expressões encontradas para a densidade e para a resistência do meio, resultando em: $\varsigma = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$ e $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$.

Na segunda solução de Newton, ele parte da construção de um novo diagrama geométrico, que se baseia em um único movimento, e analisa-o a partir de sucessão de dois arcos GH e HI [vide Figura 7]. Por isso, chamei essa estrutura matemática de modelo dos arcos sucessivos. Outra diferença que essa solução tem em relação à primeira, é que Newton constrói uma equação do movimento e, para isso, parte da seguinte consideração: se os tempos T e t com que o corpo atravessa os arcos GH e HI são diferetes, então a variação ou decremento de velocidade (instantânea) sofrida pelo móvel devido a resistência do meio é $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. A essa variação acrescenta-se a componente gravitacional ao longo da tangente TLN, qual seja, $\frac{2NI}{t}\frac{MI}{HI}$ [vide seção 3.4]. Desse modo, tem-se $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI}{t}\frac{MI}{HI}$. Essa é a relação fundamental que possibilita Newton representar a resistência, a densidade e a velocidade do projétil. Assim, segundo Newton, se a gravidade gera a velocidade $\frac{2NI}{t}$ ao mesmo tempo que faz cair o corpo, então a resistência está para a gravidade assim como $GH\frac{t}{T} - HI + 2NI\frac{MI}{HI}$ está para $2NI$, ou seja, $\frac{R}{g} = \frac{GH\frac{t}{T}-HI+2NI\frac{MI}{HI}}{2NI}$. Newton considera

[2]Neste ponto, Galuzzi observa: "pela série é óbvio expressar CF e FG, mas Cf cria um problema porque corresponde a um incremento negativo [de base] de valor absolutamente diferente de o, correspondente em comprimento descrito no mesmo tempo" (cf. Guicciardini, 1999, p.235). Essa observação me inspirou particularmente a buscar essa diferença e empregá-la na solução original de Newton. Minha tentativa foi anterior à consulta que fiz ao material de Whiteside correspondente a essa passagem. Apesar de incompleta em relação a de nosso comentador, não deixei de apresentá-la no último capítulo deste trabalho [vide subseção 5.1.2].

[3]Como vimos na seção 3.2, mais precisamente na proporção (3.4), Newton iguala $\sqrt{FG}$ com $\sqrt{fg}$ para encontrar a densidade e em seguida a resistência do meio, isso foi o segundo erro apresentado por Whiteside. Essas duas quedas galileanas são diferentes em seus diferenciais de terceira ordem [vide seção 5.1].

que os tempos T e t são proporcionais às quedas galileanas LH e NI, sugerindo, portanto a substituição de $\frac{t}{T}$ por $\frac{NI}{LH}$. Como nessa solução, Newton não tem problemas quanto ao uso correto dos incrementos de base (o), ele parte para o processo de generalização da expressão acima por meio da expansão em série infinta e convergente. Depois desse longo processo, a solução para a relação entre resistência do meio e gravidade torna-se finalmente $\frac{R}{g} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$ e a densidade do meio, $\varsigma \propto \left[\frac{3}{2}\right]\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$.

3.6.2 A contradição encontrada por Johann e a solução via cálculo diferencial leibniziano

Johann parte da seguinte relação, expressa por Newton, $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{OB}{OK} = \frac{OB}{OC}$ e da expressão para velocidade, $v = \frac{CF}{\sqrt{\frac{2FG}{g}}}$. Ao considerar $FG + kl \approx 2FG$ [vide seção 3.2], chega-se a

$$\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\varsigma v^2}{g} = \frac{FG - kl}{(FG + kl)CF}\frac{CF^2}{2FG} = \frac{(FG - kl)CF}{4FG^2} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}.$$

A contradição está na consideração de um movimento constante – pelo fato da componente tangencial da gravidade ser igual à resistência do meio – cuja expressão matemática tem por consequência (apresentada por Newton em seu *Exempl.1*) que a velocidade varia conforme $\sqrt{BC}$.

Para solucionar esse erro, Johann parte da equação de Bernoulli, $\frac{v^2 dsdr}{\rho dy} + \varsigma v^n ds = -vdv$. Como a componente tangencial da gravidade é $F_t = \frac{Fdr}{ds} = \frac{v^2 dr}{\rho r d\theta}$ e $dy = rd\theta$, tem-se: $Fdr + \varsigma v^n ds = -vdv$. Levando-se em conta o *Exempl.1* [ver Figura 2], estipula-se que $F = g$, $\rho = OC$, $\varsigma v^n = \mathcal{R}$ e $r = BC$, assim: $gdr + \mathcal{R}ds = -vdv$. Mas a componente da gravidade normal em relação à trajetória $g\frac{BC}{OC}$ é $\frac{v^2}{OC}$, logo, $v^2 = gBC = gr$, deriva-se essa igualdade para chegar a $vdv = \frac{1}{2}gdr$. Desse modo, retornando à equação de Bernoulli, $gdr + \mathcal{R}ds = -\frac{1}{2}gdr$, e finalmente $\frac{\mathcal{R}}{g} = -\frac{3}{2}\frac{dr}{ds} = \cdots = -\frac{3}{2}\frac{OB}{OK}$ chega-se ao resultado com o fator numérico de correção.

3.6.3 Adendo de Nikolaus (I) Bernoulli: explicação do erro de Newton

O sobrinho de Johann, Nikolaus (I), afirma que Newton errou na expansão da série infinita convergente. Ora, segundo ele, se Newton tivesse seguido corretamente sua regra, a série infinita deveria ser reescrita com os seguintes coeficientes numéricos: $P \pm Qo \pm 2Ro^2 \pm 6So^3 \ldots$. Assim, a relação da resistência do meio e da gravidade seria corretamente determinada como $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{6S\sqrt{1+Q^2}}{2(2R)^2} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$. Vimos que essa interpretação de Nikolaus (I) trata-se de uma combinação fortuita de números que nada representa para a correção pretendida por Newton.

3.6.4 Newton e a revisão de seus cálculos

Newton percebeu que as objeções de Johann Bernoulli se verificavam. De fato, o matemático inglês chegou à contradição explicada por Johann, qual seja, que a velocidade por ele considerada é constante. Porém, seus cálculos levam à conclusão de que a velocidade varia de acordo com $\sqrt{BC}$ [vide nota 14, seção 3.2]. Temos, por substituição direta, que $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} = \cdots = \frac{a}{n}$ e que, por semelhança de triângulos, – ΔCOB e ΔCBH, ver Figura 10 – a componente tangencial da gravidade também é igual a $\frac{a}{n}$; logo, a velocidade é constante. Mas a velocidade no movimento parabólico está de acordo com $v^2 = \frac{g\mathcal{L}}{2}$, onde o *latus rectum* ($\mathcal{L}$) é $\frac{1+Q^2}{R}$. A mera substituição dessas duas expressões leva a $v = \sqrt{ge} = \sqrt{gBC}$. Aqui está, portanto, a contradição!

3.6.5 Whiteside e sua proposta de correção

Whiteside aponta dois erros: a falta da correta proporção numérica em conjunção com a queda galileana; e a diferença entre FG e fg. Se assim for considerado, tem-se da proporção (3.2) a equação adequada com o fator numérico faltante: $\frac{1}{2}\frac{Cf-CF}{FG}$. Agora, deve-se impor a diferença entre as quedas galileanas, a partir disso é possível escrever o incremento de base $Bd(= -p)$ (ligado a queda fg) em função do incremento $BD(= o)$ (ligado a queda FG) – ou seja, $p = o + \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ – para, enfim, encontrarmos a solução com o fator numérico de correção, como: $\frac{1}{2}\frac{Cf-CF}{FG} = \frac{1}{[2]}(p-o)\frac{\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2+\cdots} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$ (no limite de o tendendo a zero).

No próximo capítulo veremos como Newton perseguiu o fator numérico de correção apresentado pelos Bernoulli e, no decorrer dessa trajetória, Whiteside nos mostrará como se constituiram na persistência de cada falha de Newton os dois erros apresentados por ele, já revelados neste capítulo que se encerra.

4 O retrabalho de Newton

O retrabalho de Newton foi detalhadamente apresentado e comentado por Whiteside em seu *Mathematical Papers of Isaac Newton* volume 8, em quatro partes distintas. A seguinte ordem não corresponde à disposição dada por Whiteside (aproxima-se mais da sequência temporal das tentativas de Newton): "As primeiras tentativas (ao final de setembro? de 1712) de ajustar o argumento defeituoso de 1687 [pp.394-414]"; "Três esboços da tentativa restrospecta (ao final do outono [boreal]? de 1712) de mais uma vez salvar o argumento de 1687 [pp.415-19]"; "Proposição X do segundo livro dos *Principia* retrabalhada [pp.312-37]" e "Refinando o argumento correto, forjando-o de modo diferente da prova e moldando-o para que o todo caiba no mesmo espaço impresso [pp.338-72]".

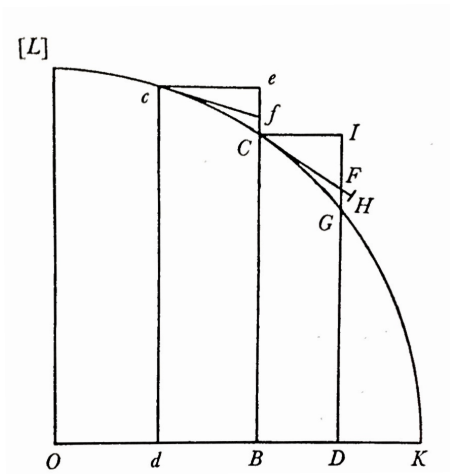
Centrei esforços na terceira parte, ou seja, na *Proposição X do segundo livro dos Principia retrabalhada: passos falhos rumo ao argumento válido.* A escolha dessa parte da obra de Whiteside se justifica pela construção feita paulatinamente por Newton do argumento matemático contido na segunda edição dos *Principia.* Como o próprio título sugere, foram construtos matemáticos em que Newton se lançou para eliminar a contradição encontrada em sua solução original, e cada tentativa frustrada dele nos mostra o fio condutor de seu raciocínio. O objetivo desta seção, portanto, é resgatar as tentativas newtonianas para, a partir delas, apresentar as mudanças no tratamento matemático de Newton com vistas à solução da prop. X. Para isso, foram dispostas seis tentativas em ordem cronológica, tal como Whiteside nos apresenta. Essas tentativas referem-se aos conteúdos contidos no intervalos das páginas 312 a 337, do *Mathematical Papers of Isaac Newton*, volume 8. Como nossa referência principal para este capítulo já foi apresentada, optei por referenciar somente as notas de Whiteside.

Todas as seis tentativas já se apresentam num modelo que podemos chamar de arcos sucessivos, ou seja, em que o corpo atravessa numa única vez e num único sentido dois arcos sucessivos de bases iguais (o). Antes, porém, gostaria de apresentar aquilo que chamei de ponto de inflexão do raciocínio matemático de Newton, ou seja, a tentativa de Newton que se distancia de vez por todas do modelo da tangente – mais próximo do argumento matemático da primeira edição – rumo ao modelo de arcos sucessivos – como apresentado na segunda edição.

4.1 Ponto de inflexão no raciocínio de Newton

No final do capítulo anterior, na seção 3.5, mostramos como Newton concordou com a objeção de Johann Bernoulli. Essa passagem está contida na parte da obra de Whiteside que se refere às primeiras tentativas, ou seja, *As primeiras tentativas (ao final de setembro? de 1712) de ajustar o argumento defeituoso de 1687* [pp.394–414]. São ao todo três, a segunda tentativa corresponde ao que chamei de ponto de inflexão. Vejamos como Newton procedeu nesta passagem que vem a ser um marco divisor de seu raciocínio.

Figura 12: Diagrama do ponto de inflexão no raciocínio de Newton



Seja A a altura que o corpo C atinge com sua velocidade ascendente sem resistência. O corpo adquire velocidade enquanto continua movendo-se de C para G na razão de $\sqrt{\frac{A+IG}{A}}$, ou seja, como $\frac{A+\frac{1}{2}IG}{A}$.[1] Se a velocidade em C for V,[2] então o incremento da velocidade em G será $\frac{\frac{1}{2}IG}{A}V$ e o decremento da velocidade devido à resistência e à gravidade em conjunto será $\frac{cf-CF}{CF}V$. Assim, a velocidade[3] será $\left\{\frac{IG}{2A}+\frac{cf-CF}{CF}\right\}\times V$ devido apenas à resistência,[4] e $GF.V$ devido apenas à gravidade.

Logo, a resistência está para a gravidade assim como $\frac{IG}{2A}+\frac{cf-CF}{CF}$ está para GF.[5] Agora, se considerar t o tempo que o corpo percorre o arco cC – assim como o arco CG –, então temos $2Cf : Cc :: t : \frac{Cc.t}{2Cf}$ ou $tt : \frac{Cc^2.tt}{4Cf^2} :: Cf : A\left(=\frac{Cc.Cc}{4Cf}=\frac{1}{2}CB\right)$.[6] Desse modo, a resistência está para gravidade assim como $IG\frac{2Cf}{Cc.Cc}+\frac{cf-CF}{CF}$ está para $GF(=Cf)$. Isso resulta em: resistência como $\frac{2IG.Cf}{Cc.Cc}+\frac{cf-CF}{CF}$; quadrado da velocidade como $\frac{Cc.Cc}{Cf}$; e densidade como $\frac{2IG.Cf^2}{Cc.Cc} + \frac{Cf.cf-Cf.CF}{CF.Cc.Cc}$ ou $\frac{R.Cf}{Cc.Cc}$ [para R= resistência],[7] ou, então, $CF : IF :: GF : \frac{IF.GF}{CF}$= incremento da tangente devido à gravidade. O decremento devido *(resistência - gravidade)* é $cf - CF$. Logo, o decremento da velocidade devido à resistência é $cf - CF + \frac{IF.GF}{CF}$.[8] Finalmente, a resistência está para a gravidade assim como $cf - CF + \frac{IF.GF}{CF}$ está para FG.[9]

Esta seção foi intitulada de ponto de inflexão porque dela seguem outras tentativas de Newton para solucionar seu erro na prop. X do livro II que não mais retomam o modelo de uma única tangente, como na primeira edição, e, sim, aproximam-se cada vez mais do modelo da segunda edição ou modelo dos arcos sucessivos. Além disso, a expressão geométrica da resistência que se encontra aproximadamente no meio desta tentativa $\left(\left\{\frac{IG}{2A} + \frac{cf-CF}{CF}\right\} \times V\right)$ sugere uma equação do movimento tal como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2NI}{t}\frac{MI}{HI}$ (expressão para a resistência do meio contida na segunda edição). As duas expressões, em suma, representam a mesma coisa, qual seja, *variação da velocidade(R&g)+incremento de velocidade(g)*. Uma expressão que toma duas partes, uma sendo o decremento da velocidade devido aos efeitos resistivos do meio em conjunção com os efeitos gravitacionais, acrescido da segunda parte que é, tão só, o efeito gravitacional. Tem-se o decremento da velocidade também pelos efeitos gravitacionais e, logo em seguida, o acréscimo só dos efeitos da gravidade, segue-se, portanto, isolada a variação da velocidade devido à

[1]Tem-se, $v : V :: \sqrt{A+IG} : \sqrt{A}$, ou seja, as velocidades são proporcionais as raizes quadradas dos comprimentos – de acordo com $v^2 = v_0^2 - 2gy$ para $v_0 = 0$ – desse modo: $v = \sqrt{-2gy}$ ou $v \propto \sqrt{y}$, segundo a nomenclatura atual. Da primeira proporção desta nota, tem-se que $\frac{v}{V} = \sqrt{\frac{A+IG}{A}}$ por simplificação – como, nas pp.46-7 deste trabalho, para a razão de t em T – chega-se a $\frac{v}{V} = \frac{A+\frac{1}{2}IG}{A} = 1 + \frac{IG}{2A}$, e isolando v – incremento da velocidade devido a ação da gravidade – obtém-se $v = \left(1 + \frac{IG}{2A}\right)V$ ou $v \propto \frac{IG}{2A}V$.

[2]O termo V representa o incremento de velocidade do corpo devido à tração da gravidade g no mesmo tempo em que o corpo atravessa o arco CG (cf. Whiteside, 1981, v.8, p.395, nota18).

[3]Aqui, a ação conjunta da resistência e da gravidade $\left(\frac{cf-CF}{CF}V\right)$ tem a parcela da gravidade anulada quando adiciona-se à expressão anterior a ação da gravidade em termos da velocidade, ou seja, $\frac{IG}{2A}V$, portanto, resulta somente a ação da resistência.

[4]Como na nota anterior, a ação da gravidade isolada é tão somente $g = FG$.

[5]Donde deveria ser $\frac{2GF}{CF}$ para, então, produzir a razão entre a resistência e a gravidade, aqui corretamente escrita como $\left(\frac{1}{2}IG \times \frac{CF}{A}\right)$ ou$2\frac{IG}{CF} \times GF + cf - CF$ está para $2GF$; onde $\frac{IG}{CF} = \frac{IF}{CF} = \cos B\hat{C}F$ no limite em que DGF passa a coincidir com BC (ibid., p.396, nota 21).

[6]Sabe-se que $v = \sqrt{2gA}$ ou $\frac{CF}{t} = \sqrt{2gA}$ ou, ainda, $\frac{CF^2}{t^2} = 2gA$. Mas, $FG = \frac{1}{2}gt^2$, assim, $\frac{CF^2}{t^2} = 2\frac{2FG}{t^2}A$, então, $A = \frac{1}{4}\frac{CF^2}{FG}$. Contudo, $CF^2 : FG :: cf^2 : CF$, como $Cc \propto cf$ então $CF^2 : FG :: Cc^2 : CF$ e, finalmente, $A = \frac{1}{4}\frac{CF^2}{FG} = \frac{1}{4}\frac{Cc^2}{Cf}$.

[7]Lembrar que $R = \varsigma v^2$, ou seja, $\varsigma = \frac{R}{v^2} = \frac{R.Cf}{Cc^2}$.

[8]De outro modo, $-(CG - cC) = -d(LC)$, isso, entretanto, representa o decremento $t.dV$ da velocidade no movimento devido à oposição da força da resistência e da gravidade ao longo da tangente CF. A descendente correspondente ao *'incrementum velocitatis ex gravitate'* é $t.gt = 2GF$, e sua componente ao longo de CF é $2\left(\frac{IF}{GF} \times GF\right)$. Isso será sutilmente o obstáculo remanescente de Newton para alcançar a medida correta da resistência em relação à gravidade, um obstáculo que não foi facilmente superado por ele (ibid., nota 25).

resistência do meio, somente. Não posso deixar de pontuar que Newton não considera, adequadamente, a queda galileana na composição da expressão geométrica para a resistência do meio, pois, é dado que $FG = \frac{1}{2}gt^2$ ou $gt = 2\frac{FG}{t} = 2\frac{FG}{\frac{CF}{V}} = \frac{2FG}{CF}V$ [vide nota 8]. Desse modo, tem-se a expressão da razão entre a resistência do meio e a gravidade como: $\frac{\rho}{g} = \frac{\left\{\frac{IG}{2A}+\frac{cf-CF}{CF}\right\}\times V}{\frac{2FG}{CF}V}$, agora ajustada adequadamente a proporção para FG.

4.1.1 Mesma tentativa reestruturada

Sejam $EB(= BD)$, OE, OB, OD as abscissas; EH, BC, DG, as ordenadas; e HN, CF, as tangentes. Pelos termos da série, encontramos HN, CN, CF, FG; tem-se que $HC - HN = \frac{\overline{EH-BN}\text{ em }CN}{HN}$, adicionando HN tem-se HC. Seja a proporção $Cf : CF :: \sqrt{CN} : \sqrt{FG}$ – devido a ordenada fdg ser paralela as demais –,[10] como $fg = CN$, então os arcos HC e Cg serão síncronos, e o decremento momentâneo da velocidade será $HC-Cg$ ou (o que é o mesmo) $HN-Cf$. Disso, o decremento da gravidade diminui: $Cg-Cf$ ou $HC-HN$. [11] Assim, a resistência resultará $HN-Cf+HC-HN = HC-Cf$,[12] logo, a resistência estará para a gravidade assim como $HC - Cf$ está para fg ou CN.[13] Num círculo de centro O, raio OK, tem-se $HN = \sqrt{CN \times 2CB}$ e $Cf = \sqrt{fg \times 2gd}$ e[14] $HN - Cf = \sqrt{CN}$ em $\left\{\sqrt{2CB} - \sqrt{2gd}\right\}$ e $HC = HN + \frac{EH-BN}{HN} \times CN$. Assim,

$$HC - Cf = \sqrt{CN} \text{ em } \left\{\sqrt{2CB} - \sqrt{2gd}\right\} + \frac{EH - BN}{HN}CN.$$

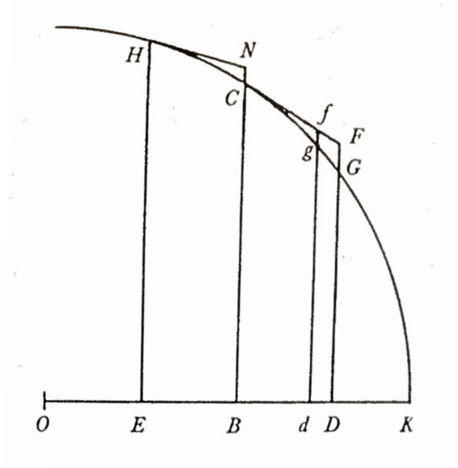
Mais precisamente,[15]

$$HC - Cf = CN \text{ em } \frac{\sqrt{2CB + CN} - \sqrt{2gd + CN}}{\sqrt{CN}} + \frac{OB}{OC}.$$

---

[9] E, consequentemente, essa razão deve ser recte, 'assim como $cf - CF + \frac{2IF,GF}{CF}$ está para $2GF$' [vide nota 5]. Omitimos a reprodução das anotações irregulares seguintes do manuscrito onde Newton começou a tentar retrabalhar seu texto de 1687 introduzindo: 'o ponto G da tangente deixa-se cair na perpendicular Gn', então obtém-se o 'incremento da tangente devido a gravidade', diretamente, como Fn. Além disso, Newton, ainda, tinha checado mais uma vez à expansão em série do incremento da ordenada $DG = \sqrt{e^2 - 2ao - o^2}$ tal como ele desenvolveu em seu texto de 1687 e, depois, veio a converter brevemente as coordenadas de C verdadeiramente cartesianas '$OB = x$, $BC = y$', agora supondo que $DG = y_{x+o}$ tem a expansão tayloriana '$y + bo + coo + do^3$[&c]', onde '$\dot{x} = o$, $-bo = IF$, $-coo = FG$, $CF = q = o\sqrt{1 + bb}$'. Mas os cálculos reduziram-se à nada, numa tentativa de avaliar a medida errada 'gravidade:resistência::$FG : FH = \dot{CF} + Fn$' computada, num deslize, por meio de '$\dot{CF}(= cf - CF)$' como a verdadeira fluxão $\dot{q}$. Ainda que ele tenha calculado corretamente a partir de sua medida falsa, Newton teria encontrado: $cf = o\sqrt{1 + b^2} - 2\frac{bc}{\sqrt{1+b^2}}o^2 \ldots$, $CF = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{d}{c}o\ldots\right)o\sqrt{1 + b^2}$ e, então, $\dot{CF} = \left(\frac{\frac{3}{2}d\sqrt{1+b^2}}{c} - \frac{2bc}{1+b^2}\right)o^2 + 0o^3$, enquanto $Fn = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}co^2$. Assim, a relação entre a resistência e a gravidade teria sido $\frac{3}{2}\frac{d\sqrt{1+b^2}}{c^2} - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ (ibid., pp.396-7, nota 27).

Figura 13: Diagrama do 'ponto de inflexão' retrabalhado



Isto é,

$$= CN \text{ em } \frac{2CB + CN - 4\sqrt{CB}, gd + 2CN, 2CB}{HN}.$$

> Newton interrompe, depois de completar a solução radical, precisando dos termos '$+2CN, 2fg + CN^2$' (e com a última razão ainda para juntar '$+\frac{OB}{OC}$'). Agora segue – se restauramos corretamente a sequência cronológica dos manuscritos – a mais completa e mais textualmente acabada [sequência de tentativas de Newton] para corrigir o argumento de seu texto de 1687 que organizamos [por primeiro na Primeira tentativa] e que culmina, finalmente, [ao final da Sexta tentativa] no momento mágico quando pela primeira vez Newton atinge seu objetivo (ibid., p.398, nota 35).

Os dois erros de Newton que Whiteside aponta insistentemente estão presentes aqui, de forma detalhada, na nota 13. São eles: a correta proporção numérica para a queda galileana (em '[2]fg' e '[2]CN') e as expansões em séries infinitas convergentes dessas quedas galileanas em função dos distintos incrementos de base $EB(= o)$ e $Bd(= p)$. Ao averiguar as seis tentativas que compõem o retrabalho da prop. X do livro II, Whiteside identifica os dois erros persistentes de Newton nas cinco primeiras tentativas. Ainda com relação às quedas, elas ajudam Whiteside a evidenciar um erro presente de maneira reiteirada nos comptos newtonianos, qual seja, $FG = fg$, conforme veremos mais adiante no capítulo cinco. Nosso principal comentador já nos apresentou como Newton poderia ter eliminado esses erros [vide o final da seção 3.5, p.54]. Contudo, se Newton os tivesse notado, ele poderia ter arrumado seu primeiro argumento sem ter comprometido toda sua estrutura (a viabilidade disso Whiteside já nos mostrou) – como, bem o fez mais tarde, coforme registro em Add.3968.41-132^v (Anexo A – Manuscritos de Newton), à época em que compunha o *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins et aliorum.* Com efeito, conforme reforça Whiteside, Newton só pôde ter arrumado seu primeiro argumento de 1687 quando "enxergou" seu erro na aplicação do princípio de Galileu. Vejamos, portanto, esse percurso de Newton e, concomitantemente a isso, o detalhamento da tese de Whiteside.

4.2 Primeira tentativa

Esteja AK [contido] [n]o plano perpendicular ao plano da figura. Seja ALK a linha curva; C, o corpo que se move; e CF, a linha reta tocando em C. Em tempos iguais, o corpo descreve os arcos gC e CG. Em AK, descem as perpendiculares gd, GD; e a DG traçada encontra a tangente CF em F. Seja $Bm = dB$ e a perpendicular levantada mn encontra a tangente CF em p, então, completa o paralelogramo $GFpq$. Por causa dos tempos iguais, as linhas CH e GF criadas pela gravidade são iguais. Se a resistência for nula, o corpo, no final do tempo, será encontrado em n. Devido à resistência, o corpo é encontrado em G e, consequentemente, a linha qG (ou pF) é gerada pela resistência. Então, a Resistência está para a Gravidade assim como Fp está para FG,[16] ou seja, como $(Dm \times gH) \div dB$ para $FG (= CH)$, ou como $Dm \times gH$ para $dB \times CH$ ou $1/2(pn - FG) \times gH$ para CH^2.

---

[10] Os arcos HC e Cg são percorridos sucessivamente em 'instantes' iguais de tempo (ibid., p.397, nota 29).

[11] Teria de ser [vide nota 8] '$2\overline{Cg - Cf}$ ou $2\overline{HC - HN}$' (ibid., nota 30).

[12] Leia-se '$HN - Cf + 2HC - 2HN = 2HC - Cf - HN$ ou $HC + Cg - 2Cf$' (ibid., nota 31).

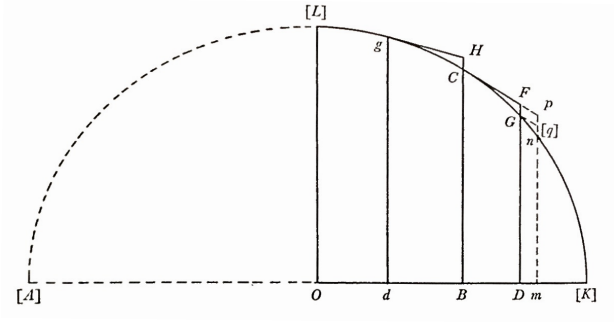
[13] Teria de ser... lido como '$2fg$ ou $2CN$'. Então, mais precisamente ajustada, a resistência está para a gravidade assim como $\frac{1}{2}(HC + Cg) - Cf$ está para fg. Um equivalente analítico no qual (assim como no texto de 1687) $OB = o$ e $BC = e = e_a$ são as coordenadas de um ponto qualquer $C(a, e)$ da trajetória e, o incremento $BD = o$ produz a expansão da série $e + Qo + Ro^2 + So^3 + \ldots$ da ordenada $DG = e_{a+o}$, isso corresponde a $EH = e_{a-o} = e - Qo + R^2 - So^3 + \ldots$ e, então, $CN = Ro^2 - 2So^3 + \ldots$; onde, se nomearmos $Bd = p$, então, $fg = Rp^2 + Sp^3 + \ldots$, a igualdade dos desvios CN e fg de suas tangentes HN e Cf... dá $p^2 = o^2 - 3\frac{S}{R}o^3 \ldots$ e, portanto, $p = o - \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ Assim, $HN = o\sqrt{1 + Q^2_{a-o}} = o\sqrt{1 + (Q - 2Ro + 3So^2 - \ldots)^2}$, ou seja, $o\sqrt{1 + Q^2} - 4QRo + \ldots = o\sqrt{1 + Q^2} - 2\frac{QR}{\sqrt{1+Q^2}}o^2 \ldots$ e, de forma análoga, $Cf = p\sqrt{1 + Q^2} = o\sqrt{1 + Q^2} - \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R}o^2 \ldots$, enquanto, $HC - HN = Cg - Cf = CN\frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}$. Consequentemente, então, no limite quando $BC(= o)$ tende a zero, a medida de Newton apresentada $\frac{HC-Cf}{fg}$ produz o mesmo resultado errado $\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2} - \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}$ para razão entre a resistência e a gravidade como teria, *mutatis mutantis*, resultado [vide nota 9]; enquanto, é claro, para a medida ajustada $\frac{1}{2}\frac{(HC-Cg)-Cf}{fg}$ produz-se corretamente $\frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ (ibid., pp.397-8, nota 32).

[14] Mais precisamente, desde que $HN^2 = CN \times (BC + BN)$ para o círculo que intercepta a trajetória sobre o arco HC, tem-se $HN = \sqrt{CN \times (2BC + CN)}$ correspondendo a $Cf = \sqrt{gf \times (2dg + gf)}$, ou seja, (devido os desvios CN e gf serem iguais), $\sqrt{CN \times (2dg + CN)}$; Newton, na sequência arruma (ibid., p.398, nota 33).

[15] Vide nota 14.

[16] Para Whiteside, Newton falha ao considerar, erroneamente, a proporção da queda dos corpos de Galileu. O comentador afirma que se Newton tivesse aplicado adequadamente o princípio de Galileu,

Figura 14: Diagrama da primeira tentativa



Exemplo 1. No semicírculo ALK, seja o diâmetro $AK = 2n$, e consequentemente ao estebelecer que $OB = a$, $BC = e$ e $dB = Bm = o$, de onde vem $a^2 + e^2 = n^2$. Whiteside aponta que:

> Newton aqui assume... que o arco infinitesimal CG atravessado por C num movimento resistente coincide com a porção correspondente ao arco parabólico Cn atravessado num movimento sem resistência; de onde tem-se $pn : FG :: Cp^2 : CF^2$ e então $(pn - FG) : FG :: \left(Cp^2 - CF^2\right) : CF^2$ (ou seja, desde que Fp seja suposto infinitamente menor que CF) ou
>
> $$\frac{1}{2}(pn - FG) : FG(= HC) :: Fp : CF(\approx Cp) :: Dm : Bm(= dB).$$
>
> No equivalente analítico introduzido [neste] exemplo (aqui como na *'editio princeps'*) segue-se que corresponde à expansão em série da variação da ordenada $DG = e_{a+o}$ como $e + Qo + Ro^2 + So^3 + \ldots$ (onde $Q \equiv Q_a = \frac{de}{da}, R \equiv R_a = \frac{1}{2}\frac{d^2e}{da^2}$ e $S \equiv S_a = \frac{1}{6}\frac{d^3e}{da^3} = \frac{1}{3}\frac{dR}{da}$), isto é, do mesmo modo, na forma de $Bm = dB = p$, $mn = e_{a+p} = e + Qp + Rp^2 + Sp^3 + \ldots$ e $dg = e_{a-p} = e - Qp + Rp^2 - Sp^3 \ldots$; então $np = Rp^2 + Sp^3 + \ldots$ e $CH = R_{a-p}p^2 + S_{a-p}p^3 + \ldots$, ou seja, $Rp^2 - 2Sp^3 + \ldots$, e, portanto, Newton apresenta a medida (inalterada) da razão entre a resistência e a gravidade como $\frac{1}{2}\left(3Sp^3 \ldots\right) . \frac{p.\sqrt{1+Q^2_{a-p}}}{(Rp^2+\ldots)^2} = \frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ no limite de p tendendo a zero. Através de um deslize trivial ao aplicar isso a um caso particular de um caminho semicircular $e = \sqrt{n^2 - a^2}$ no exemplo [anterior] retrabalhado. Newton não notou, de uma só vez, que o resultado é o dobro do valor verdadeiro que Bernoulli havia independentemente encontrado. Quando, numa versão mais completa [tentativa 2], que ele elaborou sobre a mesma base, Newton descobriu o erro em seu cálculo no *'Exempl.1'*, ele abandonou ao perceber que o erro foi diretamente retificado ao dobrar (como deveria ser) o segmento FG na tração descendente da gravidade, mas se pôs em vão [na Terceira tentativa] ao distinguir os arcos resistentes e não resistentes CG e Cn (ibid, nota 11).

Whiteside aponta que na passagem, acima Newton não teria percebido a falta da proporção correta para a queda galileana CH a qual, para esse caso deveria ser:

então, teríamos o dobro da distância referente à queda da tangente proporcional ao produto da gravidade, com a força que age sobre o corpo, e com quadrado do tempo [vide nota 8] (ibid, p.315, nota 9).

$^1/_2(pn-FG)\times gH$ para $2CH^2$ [vide nota 16]. Esse erro conduziu Newton coincidentemente à proporção de $\frac{3}{2}$ para a relação entre resistência e gravidade: desse modo, $mn = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \cdots$, e, também, $dg = e + \frac{ao}{e} - \frac{noo}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5} - \cdots$. Assim

$$dg^3 = e^3 + 3eao$$

e que

$$pn = \frac{nnoo}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5}$$

e, similarmente,

$$\begin{aligned} CH = \quad & \frac{nnoo}{2dg^3} + \frac{anno^3}{2dg^5} = \frac{nnoo}{2e^3+6eao} + \frac{anno^3}{2e^5} \\ = \quad & \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{e^5} \end{aligned}$$

assim,

$$pn - CH = \frac{3anno^3}{2e^5}$$

torna-se, portanto,[17]

$$\begin{aligned} \frac{pn-CH}{2} \times gH \text{ está para } CH^2 :: \quad & \frac{3anno^3}{4e^5} \times \sqrt{oo + \frac{aa}{ee}oo} : \frac{n^4o^4}{2e^6} \\ :: \quad & \frac{3an^3o^4}{4e^6} : \frac{n^4o^4}{2e^6} \\ :: \quad & 3a : 2n \\ :: \quad & \text{Resistência : Gravidade} \end{aligned}$$

> Podemos imaginar o gozo de Newton quando chegou ao resultado correto e, em seguida compôs apressadamente [na Segunda tentativa] uma versão melhor elaborada e ajustada de seu argumento acima. Mas bastou detectar o erro numérico [vide seção 4.3] para que o sabor doce de sua conquista ilusória tornar-se amargo (Ibid., nota 14).

Apesar do resultado convergir para o esperado, ele é simplesmente o dobro do que Johann havia encontrado, como já averiguado por Whiteside e apresentado aqui na citação que sucede o exemplo acima. Mas Newton só pôde apreceber-se disso quando, na Segunda tentativa, considerou adequadamente a queda galileana em CH (na primeira

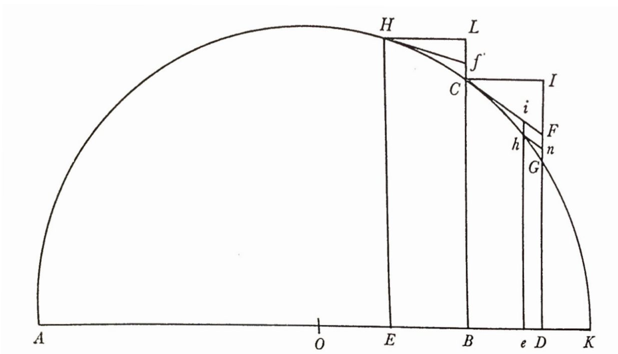
[17] O quadrado de $CH = \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2\ldots$ deveria (para as maiores potências de o ignoradas) ser '$\frac{n^4}{4e^6}o^4$'! Esse nítido deslize numérico – para o imediato deleite de Newton que se encontra na próxima linha e para a subsequente confusão na Segunda tentativa onde se dá conta do erro – compensa o erro recente o qual ele considera a potência da gravidade como sendo somente a metade de seu valor [vide nota 16] (ibid., p.317, nota 13).

tentativa) ou em Cf (na segunda). Há mais um erro em seu cálculo, esse sim quase que perene em suas tentativas: a falta da correta proporção numérica na aplicação do princípio de Galileu nas quedas das tangentes [vide nota 18].

4.3 Segunda tentativa

Seja AK o plano perpendicular ao plano da figura; ACK, a linha curva; C, o corpo que se move nela; e CF, a linha reta que toca a curva em C. Sobre o plano horizontal AK, deixe cair as perpendiculares HE, CB, he, GD os intervalos EB e BD delimitados pelas ordenadas são iguais; e que os arcos HC e Ch sejam descritos pelo movimento do corpo C em tempos iguais. Trace Hf e CiF tocando a curva descrita nos pontos H e C, interceptando as perpendiculares BC, eh, DG formando [os pontos] f, i, F. Complete os paralelogramos $BCID$ e $Fihn$. Esteja o corpo livre de resistência, os tempos nos quais ele atravessou por entre as perpendiculares EH e BC, e por entre BC e DG – posicionadas uma em relação a outra em distâncias iguais – são os mesmos e o corpo, [cujo movimento] descende das tangentes em tempos iguais [devido] a força da gravidade, descreve iguais alturas fC e Fn, e pode consequentemente ao término dos tempos ser encontrado em n.

Figura 15: Diagrama da segunda tentativa



Devido à resistência [o corpo], ao final dos tempos, será consequentemente encontrado no lugar [geométrico] h. Então, as linhas nh e Fn(ou ih) serão simultâneamente geradas pela força da resistência e por aquela força da gravidade, respectivamente.[18] Desse modo, a resistência está para gravidade assim como hn está para hi(ou Cf) e, portanto, a resistência está para $^{hn}/_{Cf}$.

[18]Newton cai no mesmo erro sutil de antes [vide nota 16]. De fato, em correspondência com a linha Fn gerada pela força da gravidade, a força da resistência produzirá somente um decremento de $\frac{1}{2}Fi = \frac{1}{2}nh$ (ibid., p.318, nota 16).

Contudo, o tempo está para $\sqrt{Cf}$; a velocidade está diretamente para o comprimento descrito Ci e inversamente para o tempo, ou como $\frac{Ci}{\sqrt{Cf}}$. Enquanto a resistência – assim como $\frac{hn}{Cf}$ que é proporcional a essa última – está para a densidade do meio e o quadrado da velocidade, e, portanto, a densidade do meio está para a resistência, diretamente, e para a velocidade, inversamente, ou seja, está para $\frac{hn}{Ci^2}$. Como foi encontrado.

Corolário 1. A resistência está para a gravidade assim como $\frac{1}{2}nG \times Ci$ está para Cf^2. Assim, a resistência esta para a gravidade assim como hn estava para Cf, ou seja, assim como $hn \times Cf$ está para Cf^2, enquanto Ci está para hn assim como Cf(ou nF), está para $\frac{1}{2}nG$.[19]

Corolário 2. E a densidade do meio é como $\frac{nG}{Ci^2}$.

Corolário 3. Enquanto Ci e CF estão – devido iF ser indefinidamente pequeno – um para o outro numa razão de igualdade, a densidade do meio estará para $\frac{1}{2}\frac{nG}{CF} \times CF$, e a resistência está para a gravidade assim como $\frac{1}{2}nG \times CF$ está para Cf^2, e a velocidade como $\frac{CF}{\sqrt{Cf}}$.

Portanto, se a linha curva for definida pela relação entre sua base (ou abscissa) AB e a ordenada BC (como de costume) – com o valor da ordenada resolvido por séries convergentes –, então o problema será prontamente solucionado pelos primeiros termos da série, como nos exemplos seguintes.

Exemplo 1. Seja a linha $ACK\ldots$ e a curvatura das curvas [como na primeira edição]. Além disso, enquanto Ci e CF estão – devido iF ser infinitamente pequeno – numa relação recíproca de igualdade, Ci estará para a raiz quadrada de $CI^2 + IF^2$ (ou seja, para BD^2) e o quadrado do segundo termo da série. Escrevendo BE no lugar de BD (ou seja, $-o$) no lugar de $+o$, o valor de DG é convertido para o valor de EH. Colocar o valor de IF como $a - o$ ao invés de a, e no lugar de EH, colocar $e = BC$], ter-se-á Lf; como resultado disso, segue-se de uma só vez $Cf(= Fn)$ e nG. Contudo, os termos nos quais o tiver mais de três dimensões eu sempre os negligenciei por serem infinitamente pequenos em relação àqueles a serem considerados neste presente problema. Portanto, se DG for denotado universalmente por essas séries $BC + Qo + Ro^2 + So^3$, então, teremos IF igual a Qo; CF igual a $\sqrt{(o^2 + Q^2o^2)}$; FG igual a $Ro^2 + So^3$; $EH = e - Qo + Ro^2 - So^3$; e $CL = -Qo + Ro^2 - So^3$. Em termos de IF, escreve-se OE no lugar de OB, e EH no lugar de BC, [assim], ter-se-á Lf, que quando tirado de CL deixa $Cf = nF$. Quando

[19]Newton, mais uma vez, supõe [como na Primeira tentativa], com precisão suficiente, que o arco infinitesimal Ch da curva do movimento resistente ACK coincide (em comprimento) com o arco parabólico correspondente CG de uma queda livre de resistência mas sobre o efeito da gravidade, donde, $Ci^2 : CF^2 ::$ ih(ou Fn) : FG(ou Fn+nG), então, $Ci : CF :: Fn : \left(Fn + \frac{1}{2}nG\right)$ e, assim, $Ci : (CF - Ci$ ou$)$ $hn :: Fn :$ $\frac{1}{2}nG$ (ibid., pp.318-9, nota 18).

tira-se GF, deixa-se nG. Então, no problema a ser resolvido agora terá:

$$IF \text{ (ou seja, Qo)} = -\frac{a}{e}o$$

$$Ci \approx CF \text{ (ou } \sqrt{(o^2 + Q^2o^2)}) = \sqrt{o^2 + \left(\frac{a^2}{e^2}\right)o^2} = \frac{n}{e}o$$

$$FG \text{ (ou } Ro^2 + So^3) = -\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{e^2}\right)o^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{an^2}{e^5}\right)o^3$$

e, portanto,

$$fL = \frac{(a-o)o}{\left(e + \left(\frac{a}{e}\right)o - \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{e^3}\right)o^2\right)} = \left(\frac{a}{e}\right)o - \left(\frac{n^2}{e^3}\right)o^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{an^2}{e^5}\right)o^3$$

enquanto, também,

$$Cf = CL - fL = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{e^3}\right)o^2 - \left(\frac{an^2}{e^5}\right)o^3 = hi, \text{ ou } nF, \text{ então}$$

$$nG = \frac{3}{2}\left(\frac{an^2}{e^5}\right)o^3.$$

Disso resulta a resistência para a gravidade como $\frac{1}{2}nG \times Ci$ para Cf^2 ou

$$\frac{3}{4}\left(\frac{an^2}{e^5}\right)o^3 \times \left(\frac{n}{e}\right)o \text{ para } \frac{1}{4}\left(\frac{n^4}{e^6}\right)o^4, \text{ ou seja, } 3a \text{ para } n.$$

Compare o termo $Cf = \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2$ cujo o quadrado nesta tentativa foi corretamente calculado, resultando em $Cf^2 = \frac{1}{4}\frac{n^4}{e^6}o^4$ – que levou Newton ao dobro do resultado esperado – com o seu equivalente, na tentativa anterior, $CH = \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2$, cujo o quadrado calculado, sem dúvida alguma, de fato, não pode ser considerado certo, pois, não resulta em $\frac{1}{2}\frac{n^4}{e^6}o^4$. Esse equívoco conduziu Newton àquilo que tanto queria, ao fator de correção numérico $\frac{3}{2}$. Curiosamente, um erro (o dobro do quadrado de CH) compensou o outro (a falta do fator numérico 2 na proporção da queda galileana). Vejamos nas palavras de Whiteside:

> Com o quadrado de $Cf = \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2 \ldots$ agora calculado corretamente [vide nota 17] foi que a 'vitória' se desfez por completo. Por esse outro argumento, Newton pensou ter superado um problema que ainda persistia de maneira insistente, embutido resistentemente na investida matemática dele! Newton deveria estar provavelmente desanimado nesse ponto, contudo, ele passa implacavelmente para [a Terceira tentativa]. Onde verificará se a distinção entre o caminho parabólico CG da queda livre e o arco correspondente Ch da curva atravessada por um movimento resistente lhe renderá frutos. Newton ainda foi incapaz de ver que a razão entre a resistência e a gravidade, inconvenientemente dobrada no exemplo do caminho semicircular, repousa sobre sua falha em deixar de relacionar apropriadamente os incrementos

gerados pelas duas [grandezas] em tempos infinitamente iguais [vide nota 18] (ibid., pp.320-1, nota 28).

De fato, agora que Newton se deparou com seu pequeno deslize com respeito ao quadrado de Cf – em consequência disso, a solução encontrada em sua razão dobrada – é que ele pode se lançar à construção de um argumento aida mais radical. Porém, Newton se deparará com mais dois outros deslizes [vide as notas 24 e 25] em seus cálculos, como apresenta Whiteside.[20]

4.4 Terceira tentativa

Imagine que um corpo está em um movimento progressivo, contudo, impedido pelo meio. O corpo, livre da resistência e da gravidade descreve distâncias, em tempos iguais, as distâncias AF e FG, também iguais; somente sob a ação da gravidade, ou seja sem a resistência do meio, o corpo descreve os arcos parabólicos AH e HI; sob a ação conjunta da gravidade e da resistência ele descreve os arcos AD e DE; FH (ou BD) será a distância que o corpo em queda, pela ação da força da gravidade, descreve no início do tempo; GI (ou CE)[21] será a distância que o corpo, em queda devido à força da gravidade, descreve no tempo total, pelo fato do tempo ser o dobro, a distância será (pelo lema XI, livro I)[22] quatro vezes a anterior. Complete os parelelogramos $BFHD$ e $CGIE$; e, então, HD será a linha nascente, devido a resistência, na primeira parte do tempo, e IE, a linha gerada pela resistência no tempo total; esta última linha é (pelo lema XI, livro I)[22] quatro vezes maior que a anterior. Assim, a resistência estará para a gravidade assim como DH está para BD (ou EI está para EC).[23] Tome BK igual a AB, e CK será o dobro de BF (ou DH); e, consequentemente, a resistência estará para gravidade assim como $\frac{1}{2}EL$ está para BD, ou seja, como $\frac{1}{2}(AB - BC)$ está BD.[24]

Contudo, o tempo está para $\sqrt{BD}$, e a velocidade está diretamente para o com-

[20]Ibid, p.321, nota 29.

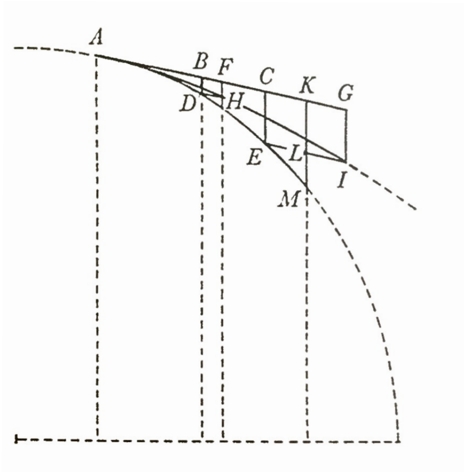
[21]As igualdades $BD = FH$ e $CE = GI$, aqui assumidas discretamente por Newton, asseguram-se verdadeiras, de fato, somente na ordem do quadrado de AB. Ele virá prontamente a pensar [vide nota 25] que essas magnitudes poderão indiscriminadamente ser substituídas uma pela outra, resultando na diferença $LM = KM - KL$ de $0(AB^3)$ (ibid., nota 32).

[22]Esse lema [cf. Whiteside, 1967-1981, v.6, p.116] diz que o pequeno incremento linear nascente gerado por uma força qualquer é proporcional ao quadrado do tempo infinitesimal em que ela age, de tal modo que, ao dobrar o tempo o comprimento quadriplica, na medida em que é traçado (ibid., p.322, nota 33).

[23]Leia '$2BD$' e '$2EC$' para se fazer a correta comparação com os incrementos contemporâneos com respeito a resistência e a gravidade [vide nota 16] (ibid., nota 34).

[24]Quando esta razão deveria ser $\frac{1}{2}(AB - BC) : [2]BD$. Esse erro se prolonga na sequência [vide nota 25]. Num equivalente analítico [vide seção 4.2], há aqui, *mutatis mutantis*, $AB = o\sqrt{1+Q^2}$ e $BD = Ro^2+So^3 \ldots$ como, também, $AB : AF : AG :: o : p : 2p$, assim, $AB : BF : CG :: o : (p-o) : 4(p-o)$

Figura 16: Diagrama I, terceira tentativa



primento descrito AD (ou AB) e o tempo $\sqrt{BD}$, inversamente, ou como $\frac{AB}{\sqrt{BD}}$; enquanto a resistência – e $\frac{1}{2}\frac{EL}{BD}$ proporcional a ela – está para a densidade do meio e o quadrado da velocidade, então, a densidade está diretamente para resistência e inversamente para o quadrado da velocidade, ou seja, $\frac{1}{2}\frac{EL}{AB^2}$.

Corolário 1. A resistência está para a gravidade assim como $LM \times AB$ está para $8BD^2$. Para que a resistência esteja para a gravidade assim como $\frac{1}{2}EL$ está para BD – ou seja, assim como $EL \times BD$ está para $2BD^2$; $\frac{1}{4}LM$ está para $\left(\frac{1}{4}EC \text{ ou}\right) \frac{1}{4}KL = BD$; e assim como EL está para BC –, então, LM está para EL assim como EC, ou seja, $4BD$ está para BC (ou AB).[25]

Corolário 2. A densidade do meio é como $\frac{1}{6}\frac{LM}{AB^2}$.

Corolário 3. Por isso, se a curva. . .[26]

Exemplo 1. Esteja a linha (ACK). . . como a está para e.[27] Os seguintes termos $\frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2 + \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3$ designam a linha $FG(= BD)$[28] que repousa entre a tangente e a curva, por isso, determina o ângulo de contato FCG e a curvatura que a linha curva possui em C. Se, agora, a linha FG for diminuída indefinidamente, os termos subsequentes provarão ser infinitamente menores que o terceiro termo e podem ser razoavelmente ignorados. O

---

e consequentemente

$$AC = AB\frac{2p - 4(p - o)}{o} = AB\left[2 - 2\frac{(p - o)}{o}\right]$$

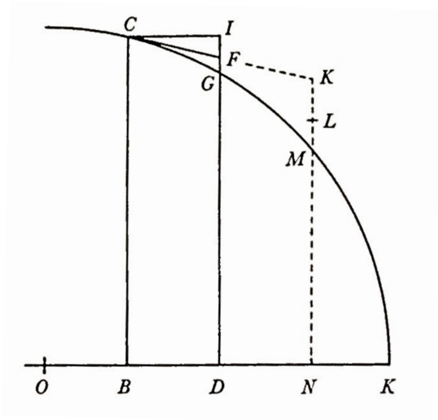
portanto, como, também, $BD = Rp^2 - 2Sp^3 \dots$ [vide p.50] e, então, $p^2 = o^2 + 3\frac{S}{R}o^3 \dots$ ou $p = o + \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \dots$ a correta medida

$$\frac{1}{4}\frac{AB - BC}{BD} = \frac{1}{4}\frac{2AB - AC}{BD}$$

produz $\frac{1}{4}\frac{2(p-o)\dots\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2+\dots} = \frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ para a verdadeira razão entre a resistência e a gravidade. O próprio Newton, infelizmente, agora procede para introduzir o segundo erro na sequência de seus cálculos (ibid., nota 35).

quarto termo – aqui $\frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3$ – determina a variação da curvatura, o quinto termo a variação da variação, e assim por diante. Daí... a curvatura das curvas.

Figura 17: Diagrama II, terceira tentativa



Ademais, $CF(= AB)$[28] é a raiz quadrada de $CI^2 + IF^2$, ou seja, de BD^2 e do quadrado do segundo termo – no presente exemplo, chamado de, $\sqrt{o^2 + \frac{a^2}{e^2}o^2}$ ou $\frac{n}{e}o$. E, mediante isso, $2o$ no lugar de $2BD(= BN)$[29] disso resulta

$$KM = 2\frac{n^2}{e^3}o^2 + 4\frac{an^2}{e^5}o^3,$$

[25]Para que a tangente em M – se o caminho resistente ADM for efetivamente uma parábola [com suficiente precisão aqui], e se AK for $2AB$ [pela construção] (desde que $CK = 2BF$ seja infinitesimal em comparação com AK, a extensão da corda ME) – passe por B, então, $BC : CE :: EL : LM$. A hipótese, entretanto, que CE é igual a $4BD$, ou seja, $4(Ro^2 + So^3 \ldots)$, a partir da qual Newton calcula LM – o excesso de $KM = R(2o)^2 + S(2o)^3 \ldots = 4Ro^2 + 8So^3 \ldots$ sobre CE – como $4So^3 \ldots$ está errada; mais precisamente,

$$CE = R(2o - 2(p - o))^2 + S(2o - 2(p - o))^3 \ldots = 4Ro^2 + 8So^3 - 8Ro(p - o) \ldots;$$

para que essa equação em $4Ro^2 + 4So^3 \ldots$ implique em $p = o + \frac{1}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ aonde *recte* [vide nota 24] tem-se $p = o + \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ produzindo, então, $CE = 4Ro^2 - 4So^3 \ldots$ e, em consequência disso, chega-se a $LM(= KM - CE) = 12So^3 \ldots$: três vezes o comprimento calculado por Newton. Isso permite, adiante, devido seu recente encauto, dobrar a fração $\frac{1}{4}\frac{AB-BC}{BD}$ que expressa corretamente a razão entre a resistência e a gravidade [vide notas 23 e 24]. Não ficaríamos surpresos que seus cálculos de $\frac{1}{8}\frac{LM \times AB}{BD^2}$ dessem $\frac{1}{8}\frac{(4So^3)\ldots o\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2\ldots}$, ou seja, $\frac{1}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$, no limite em que o tende a zero e que isso levasse Newton, novamente, como num círculo vicioso, a medida de sua *editio princeps*, apenas, dois terços da medida verdadeira. Mas na sequência ele mesmo encontra, quando calcula, em particular, o exemplo do caminho semicircular no '*Exempl.1*' seguinte (ibid., pp.322-3, nota 36).

[26]O corolário 3 segue o mesmo texto da proposição original (ibid., pp.377-8) sem mudanças. Nesse ponto, Newton recorre ao esquema de sua *editio princeps*, doravante, refere-se à sua presente notação dos pontos de seu diagrama em colchetes até suas duas últimas linhas, quando ele, novamente, entende de maneira confusa sua figura [mas não esqueçamos que essa tentativa trata-se de um esquema grosseiro e inacabado, o qual Newton não pretendia publicar] (ibid., p.323, nota 37).

[27]Aqui estão os dois parágrafos iniciais e as três primeiras sentenças do terceiro parágrafo do '*Exempl.1*' de sua *editio princeps* dos *Principia* (ibid., p.378-9). Na sequência, Newton pela primeira vez fez esta cópia: 'o terceiro termo que é $\left[\frac{nnoo}{2e^3}\right]$' antes de interromper para remanejar do restante do parágrafo (ibid., nota 38).

e quando $KL(= 4BD)$, ou seja,[30] $\frac{2n^2o^2}{e^3} + \frac{2an^2o^3}{e^5}$ for retirado restará $LM = \frac{2an^2o^3}{e^5}$. De onde, a densidade do meio está assim como $\frac{1}{2}\frac{a}{ne}$, e a resistência está para a gravidade assim como a está para n.

Mais uma vez, Newton chegou ao resultado impossível de seu texto de 1687, ou seja, Newton recai em $\frac{a}{n}$. No primeiro erro [vide nota 24], Newton, novamente, calculou a queda da tangente na proporção incorreta quando aplicou o princípio de Galileu. Já, no segundo erro [vide nota 25], ele falhou ao calcular $CE = 4BD = 4So^3$, quando o valor correto corresponde ao triplo disso. Sem se deixar abater por esses erros recentes, Newton se encaminha para outras duas abordagens [a quarta e quinta tentativas seguintes] ainda fracassadas para, somente, na sexta atingir o ajuste requisitado de $\frac{3}{2}$.

Newton, a partir da próxima tentativa, irá, escrever uma equação do movimento instantâneo na direção tangencial, concebendo, assim, a desaceleração do projétil a cada ponto do caminho – medida como a diferença entre os comprimentos dos pequenos arcos descritos em iguais tempos infinitesimais – a ser acrescentada pela componente gravitacional motora na direção tangencial – calculadas iguais quedas das tangentes naqueles mesmos tempos – e pela ação resistente do meio devido ao movimento do corpo, esse último efeito equivale (no sentido oposto do movimento) à soma da desaceleração do corpo com a componente da gravidade agindo no mesmo sentido.[31] Assim, percebemos que Newton está se encaminhando para o argumento matemático de sua segunda edição, vejamos como isso se dá.

4.5 Quarta tentativa

Seja AK o plano perpendicular ao plano da figura, LCK a linha curva e C o corpo movendo-se nela. Entretanto, imagine que o corpo é, em seu progresso, impelido pelo meio. Deixe o corpo, em momentos iguais de tempo, descrever as distâncias CG e Gg; e seja o arco Gh igual a CG; a linha gh será o decremento da distância gerado pela

[28]As linhas 'FG' e 'CF' relacionam-se com a figura do texto de 1687... enquanto, 'BD' e 'AB' são os respectivos equivalentes no diagrama redesenhado e remarcado com outras letras [Figura 16]. Por conveniência, adicionamos... o esquema que indica os elementos do diagrama I que são aqui pertinentes [Figura 17], prolongado (em uma linha tracejado) pela terceira ordenada que repousa nos pontos K, L e M no diagrama II (ibid., p.324, nota 39).

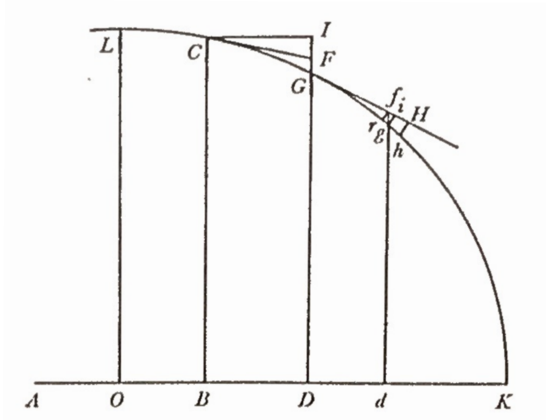
[29]Não há correspondência para $2BD$ – ou seja, BN na nossa figura... – no presente esquema de Newton, ele deixou necessariamente aqui em branco. Entenda isso como sendo, é claro, a distância horizontal de KLM da primeira ordenada por meio de A [ou seja, BC no texto de 1687] (ibid., nota 40).

[30]Leia $[4Ro^2 - 4So^3 =]$'$\frac{2n^2o^2}{e^3} - \frac{2an^2o^3}{e^5}$' *recte*, quando toma-se o caminho KM, deve na sequência restar $[12So^3 =]$'$\frac{6an^2o^3}{e^5} = LM$'; compare com a nota 25 (ibid., nota 41).

[31]Ibid., p.325, nota 43

força da gravidade e da resistência juntas, num certo momento de tempo.

Figura 18: Diagrama da quarta tentativa



Trace as linhas retas CF e Gf tocando a curva descrita nos pontos C e G. Pelo plano AOK, paralelo ao horizonte, caem as perpendiculares CB, GD e gd; prolongue DG e dg até encontrarem respectivaemnte as tangentes em F e f. Então, terão distâncias iguais a FG e fg, que o corpo descrevá na queda devido a força da gravidade em momentos de tempo iguais. No arco Cg, tome Gr igual a tangente Gf, então: rg será o incremento do arco pela força da gravidade num momento de tempo;[32] rh será o decremento de arco subsequente da resistência do meio no mesmo momento.[33] Assim, a resistência está para a gravidade assim como rh está para rg.[34]

Para a diferença dos arcos gh escreva ou a diferença das cordas dos arcos CG e Gg ou a diferença das tangentes CF e Gf; sejam essas diferenças iguais a D. Enquanto isso, no lugar de rg escreva $\frac{Dd\times gf}{GF}$ ou $\frac{BD\times GF}{CF}$; sejam elas iguais a d. Então, a resistência está para a gravidade assim como $D+d$ está para d.[35]

Entretanto, o tempo está para $\sqrt{GF}$ e a velocidade está o arco descrito CG ou o que resulta no mesmo a velocidade é diretamente proporcional a CF, e o tempo, inversamente proporcional a $\sqrt{GF}$. A resistência está para a densidade do meio e o quadrado da velocidade, por isso, a densidade do meio está para a resistência, diretamente,

[32]Deveria ser '[2]rg' *recte*, quando a comparação do decremento é apropriada, $CG($ ou $FH)-Gg=gh$, for feita como $\rho - g\frac{rg}{fg}\theta^2$, onde ρ é a resistência do meio e $g\theta^2 = 2fg$ é o dobro da distância vertical da queda da tangente GH devido a ação da gravidade g no tempo infinitesimal θ quando o corpo atravessa o arco Gg em seu caminho resistivo [vide notas 8 e 16] (ibid., p.326, nota 46).

[33]Nos termos da nota anterior, deveria ser $(\rho\theta^2 =)2rg+gh$, ou seja, '$rg+rh$' (ibid., nota 47).

[34]Newton erra devido a 'fg', é claro! Além desse *lapsus calami* – que é, infelizmente, mantido na sequência – a correta razão deveria ser [vide notas 32 e 33] $(\frac{1}{2}\rho\theta^2 : \frac{1}{2}g\theta^2 =)\frac{1}{2}(rg+rh) : fg$ (ibid., nota 48).

[35]De novo, leia 'fg' [vide nota 34] (ibid., nota 50).

e, para o quadrado da velocidade, inversamente, ou seja: $\frac{D+d}{d\times GF}$.[36] Como foi encontrado.[37]

Exemplo1. Seja a linha ACK o semicírculo, e lá será provado que $DG = e - \frac{a}{e}o - \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2 - \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3 \ldots$ a curvatura da curva.

Agora, seja $OD = b$, $DG = f$ e $Dd = p$, então:

$$dg = f - \frac{b}{f}p - \frac{1}{2}\frac{n^2}{f^3}p^2 - \frac{1}{2}\frac{bn^2}{f^5}p^3$$

e

$$fg = \frac{1}{2}\frac{n^2}{f^3}p^2 + \frac{1}{2}\frac{bn^2}{f^5}p^3.$$

Entretanto,

$$CF = \sqrt{o^2 + \frac{a^2}{e^2}o^2} = \frac{n}{e}o \text{ e } Gf = \sqrt{p^2 + \frac{b^2}{f^2}p^2} = \frac{n}{f}p.$$

Portanto,

$$FG = \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2 + \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3 = fg = \frac{1}{2}\frac{n^2}{f^3}p^2 + \frac{1}{2}\frac{bn^2}{f^5}p^3.$$

Assim,

$$\frac{e^2o^2 + ao^3}{e^5} = \frac{f^2p^2 + bp^3}{f^5}.$$

Mas,

$$b = a - o \quad \text{e} \quad f = e - \frac{a}{e}o.$$

E, por conseguinte,

$$\frac{e^2o^2 + ao^3}{e^5} = \frac{e^2p^2 - 2aop^2 + ap^3}{e^5 - 5ae^3o}$$

ou

$$e^2o^2 - 4ao^3 = e^2p^2 - 2aop^2 + ap^3.$$

Assim,

$$o^2 : p^2 :: e^2 - 2ao + ap : e^2 - 4ao :: e^2 - ao : e^2 - 4ao :: e^2 : e^2 - 3ao$$

ou

$$o^2 : p^2 :: BC : BC - 3IG.^{38}$$

---

[36] Outra confusão! Newton quis dizer '$\frac{CF^2}{GF}$' (ibid., nota 51).

[37] Esse parágrafo do manuscrito de Newton foi aqui omitido porque ele começa a remodelar, fora da ordem, a parte final do terceiro parágrafo do subsequente *Exempl.1* [ibid., p.378]; começando por: 'Os seguintes termos da série $\frac{nnoo}{2e^3} + \frac{anno^3}{2e^5}$ são designados pela linha FCG ou pela curvatura que a linha em C. Se, aquela linha $[FG]$ diminuir infinitamente, os termos subsequentes ao terceiro desaparecerão, desse, eles podem ser desprezados, e tão somente o terceiro termo determinará a curva. . . ' [ibid., pp.338-72]. Essa paráfrase foi retirada, palavra por palavra, por Newton em sua revisão e não vamos nos alongar nisso (ibid., p.327, nota 52).

[38] De uma vez, '$o : p :: ee : ee - \frac{3}{2}aoo$' e, consequentemente, '$p = o - \frac{3a}{2ee}oo$' (*recte*, desprezam-se os

Whiteside nos mostra que Newton falhou ao mal considerar a razão entre a resistência e a gravidade. No caso, a queda galileana 'rg' deveria ser [2]'rg' devido a correta proporção aplicada à sua componente projetada na direção tangencial. E, por sua vez, a projeção da resistência do meio na direção tangencial é composta por '$rg + rh$' e não como foi considerado por Newton como somente 'rh'. Assim, a correta expressão para a razão entre a resistência e a gravidade deveria ser '$\frac{rg+rh}{[2]fg}$' (vide nota 34) e não '$\frac{rh}{rg}$' como fez Newton. Whiteside continua sua exposição, monstrando-nos que os cálculos de Newton conduzem – com as correções indicadas acima – a uma razão entre resistência e gravidade como sendo $\frac{rh}{fg} = \frac{2a}{n}$, ou seja, diferente da razão $\frac{3}{2}\frac{a}{n}$ buscada por ele. E, se Newton tivesse

termos de ordem o^3) e, então, $|gh| = (Gf - CF$ ou$)\frac{np}{f} - \frac{no}{e}$, ou seja,

$$\frac{no\left(1 - \frac{3}{2}\frac{ao}{e^2}\right)}{e\left(1 - \frac{ao}{e^2}\right)} - \frac{no}{e} = \frac{1}{2}\frac{an}{e^3}o^2$$

é (na mesma ordem) igual a $rg = \frac{a}{n}fg$. Se Newton previu ou não fixar a razão entre a resistência e a gravidade aqui como $\frac{rh}{rg}$, nesse exemplo semicircular, não importa. O fato é que produziu o resultado impossível de que a resistência deve, em toda parte, ser o dobro da gravidade, ao mesmo tempo em que é constante (e contrária a velocidade do movimento do corpo). Newton, neste ponto, deixa essa tentativa para, mais uma vez, recompor seu argumento, na próxima página de seu manuscrito (f.201) que aqui reproduzimos pela [quinta tentativa]. Mesmo que ele tenha ajustado o erro por descuido escrevendo 'rg' está para 'fg' em sua razão mais básica [vide nota 34], Newton teria, podemos acrescentar, chegado ao valor inaceitável $\frac{gh}{fg} = 2\frac{a}{n}$ nesse presente exemplo.

Nesse caso, em geral, se (como Newton) expandirmos o incremento da ordenada $DG = e_a + o$ por meio da série $e + Qo + Ro^2 + So^3 + \ldots$ (onde, como sempre, $Q \equiv Q_a = \frac{de}{da}$, $R \equiv R_a = \frac{1}{2}\frac{dQ}{da}$ e $S \equiv S_a = \frac{1}{3}\frac{dR}{da}$) teremos que $CF = o\sqrt{1+Q^2}$ e $FG = Ro^2 + So^3 \ldots$, em seguida, de maneira correspondente, quando o aumento da base $OD = a + o = b$ receber o seguinte incremento $Dd = p$ como $Gf = p\sqrt{1+Q_b^2}$, ou seja, $p\sqrt{1+(Q+2Ro+\ldots)^2} = p\sqrt{(1+Q^2)\left(1+\frac{2QRo}{1+q^2}\ldots\right)}$ e, também, $fg = R_bp^2 + S_bp^3 + \ldots = (R + 3So + \ldots)p^2 + (S + \ldots)p^3$. Daí, ao equacionar as distâncias FG e fg das quedas da direção tangencial inicial em tempo iguais, teremos $p^2 + \frac{S}{R}p^3 \ldots = \frac{Ro^2So^3\ldots}{R+3So\ldots} = o^2 - 2\frac{S}{R}o^3 \ldots$ ou $p^2 = o^2 - 3\frac{S}{R}o^3 \ldots$ e, consequentemente, $p = o - \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ [vide nota 25, onde os presentes incrementos da base p e o estão trocados] Segue-se que

$$Gf = o\sqrt{1+Q^2} + \left(-\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R} + \frac{2QR}{\sqrt{1+Q^2}}\right)o^2\ldots,$$

e, disso, $gh = CF - Gf = \left(\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R} - \frac{2QR}{\sqrt{1+Q^2}}\right)o^2\ldots$, equanto, também,

$$rg = \frac{Dd}{Gf} \times fg = \frac{Q_b}{\sqrt{1+Q_b^2}}.FG = \left(\frac{QR}{\sqrt{1+Q^2}}\right)o^2\ldots.$$

Portanto, a razão pretendida por Newton $\frac{rh}{fg} = \frac{rg+gh}{fg}$ entre resistência e gravidade (novamente, vide nota 34) produz – no limite em que o incremento da ordenada DG e dg confundem-se com BC (ou seja, quando o e p evanescem) –, a correspondente medida errada $\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2} - \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}$ (a verdadeira expressão $\frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ resulta, diretamente, não precisamos repetir, a correta razão $\frac{1}{2}\frac{rg+rh}{fg}$) (ibid., pp.328-9, nota 54).

continuado seus cálculos, encontraria para $\frac{rh}{fg} \to \lim_{dg\to DG} \frac{rg+gh}{fg} \to \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2} - \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}$, ao passo que o verdadeiro resultado esperado viria de $\lim_{dg\to DG} \frac{1}{2}\frac{rg+rh}{fg} \to \frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ (vide nota 38).

Newton, no preparo de sua quinta tentativa – que não deixa de ser uma reformulação da quarta tentativa – falha novamente nos dois pontos levantados na tentativa anterior, ou seja, ao expressar erroneamente a ação da gravidade como a componente projetada na direção tangencial do movimento e nos coeficientes numéricos aplicados a expressão das forças que agem naquela direção [vide notas 42 e 43] antes de seguir em seus comptos de ajuste.[39]

4.6 Quinta tentativa

Sejam as linhas NE e CF tangentes a curva $LNCGgK$ nos pontos N e C. Procura-se a densidade do meio por meio do movimento do corpo pela curva. Deixe NE como a tangente que o corpo descreve num momento de tempo e, EC, a altura que ele descreveria caindo nesse mesmo momento, e ao final do momento o corpo encontrar-se-á em C. Deixe CF ser a tangente que o corpo descreveria no momento seguinte e, FG, a altura que o corpo descreveria ao cair nesse mesmo momento, e ao final do momento o corpo encontrar-se-á em G.[40] A difereça dos arcos NC e CG ou, o que é efetivamente o mesmo, a diferença das tangentes NE e CF, será o decremento da distância que o corpo descreve separadamente nos momentos.[41] Chame essa diferença de D e deixe E ser o excesso do arco NC sobre a tangente NE – ou, o que é efetivamente o mesmo, deixe $E = IE \times \frac{CE}{NE}$ – e, então,[42] E será o incremento da distância descrito separadamente nos momentos, decorrente da gravidade; D, o decremento decorrente da resistência e da gravidade e, $D+E$, o decremento decorrente só da resistência. Por isso, a resistência está para a gravidade assim como $D+E$ está para E.[43]

[39]Ibid., p.329, nota 55

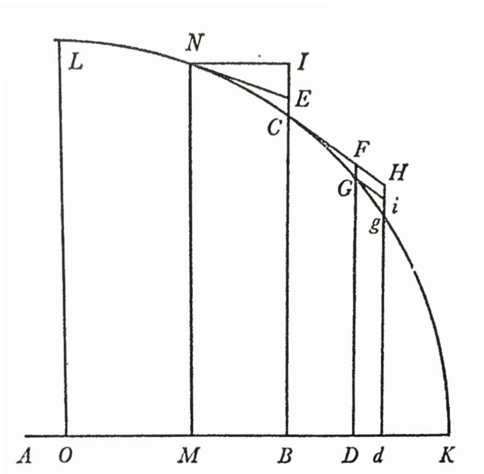
[40]Numa continuação que primeiramente parece cancelada, Newton vem a repetir seu argumento básico (da primeira e segunda tentativas) antes de modificar a investida da quarta tentativa. Ele escreve: 'Prolonga-se a tangente CF em direção de H, assim, CH está igual a tangente NE e a diferença das tangentes, FH, será o decremento do espaço de um único momento descrito decorrente da resistência, assim, a resistência está para a gravidade assim como FH está para FG'... [Recte], é claro, essa razão deveria ser FH para [2]FG compare com [a primeira tentativa]: [vide nota 16] (ibid., nota 56).

[41]Na sequência, Newton vem a especificar: 'e, esse decremento nasce das forças da gravidade e da resistência, conjuntamente' e, acrescenta, 'a gravidade aumenta [e a resistência diminui]'... antes de interromper e cancelar tudo (ibid., nota 57).

[42]Teria de ser '[2]E' em cada caso [vide notas 16 e 32] (ibid., p.330, nota 58).

[43]Newton aqui quis dizer 'CE' e não sua projeção na direção tangencial em C, mas repete seu deslize [da tentativa quatro] no lugar correspondente [vide nota 34]. Seguindo com a introdução do coeficiente

Figura 19: Diagrama da quinta tentativa



Entretanto, o tempo está para $\sqrt{EC}$ e a velocidade está para o comprimento do arco descrito NC (ou NE), diretamente, e o tempo $\sqrt{EC}$, inversamente, ou seja, está para $\frac{NE}{\sqrt{EC}}$. Enquanto a resistência está para a densidade do meio, diretamente, e para o quadrado da velocidade, inversamente e, por isso, a densidade do meio está diretamente para resistência e inversamente para a velocidade, ou seja, está para $\frac{D+E}{E} \times \frac{EC}{NE^2}$.[44] Como foi encontrado.

Corolário 1. Tome $Bd = MB$ e erga a perpendicular dgH encontrando a curva em g e a tangente CF produzida em H, e complete o paralelogramo $GFHi$. Disso, então, será[45] $\left(Hi + \frac{1}{2}ig\right) : \frac{1}{2}ig :: CH : FH$, e então $\left(HI + \frac{1}{2}ig\right) : HI :: CH : CF$, ou seja,[46] $\frac{1}{2}(CE + hg) : CE :: CH : CF$.[47]

numérico aqui omitido [vide nota 42], a correta razão entre resistência e gravidade, de fato, é assim como $D + 2E$ está para $2CE$. E, a sequência precisa ser ajustada de forma correspondente (ibid., nota 59).

[44]Agora Newton acrescenta – como não fez na [quarta tentativa, vide nota 36] – o adequado fator proporcional ao recíproco quadrado da velocidade,

$$\frac{NE}{\sqrt{\frac{2CE}{g}}} \propto \frac{NE}{\sqrt{CE}}$$

, onde g é a gravidade. Essa medida da densidade precisa [vide nota 43] ainda mais uma correção para estar certa 'está para $\frac{D+2E}{2CE} \times \frac{CE}{NE^2}$', ou seja, está para $\frac{D+2E}{NE^2}$ (ibid., nota 60).

[45]Mais uma vez, pressupõe-se [vide primeira tentativa; segunda tentativa, nota 19 e terceira tentativa, nota 25] que o caminho resistido CGg é, com suficiente precisão, a parábola, onde, $Hg : (FG \text{ ou}) Hi :: HC^2 : FC^2$ e, então, $\sqrt{Hg \times Hi} \approx Hi + \frac{1}{2}ig : Hi :: HC : FC$ (ibid., nota 62).

[46]Porque $Hi = (FG \text{ ou}) RC$ e $ig = Hg - Hi$, ou seja, $Hi + \frac{1}{2}ig = (Hi + Hg)$ (ibid., p.331, nota 63).

[47]Nesse ponto, evidentemente, Newton estava consciente que essa adaptação de sua prévia elaboração (na tentativa três) não o levou a lugar algum. Ele interrompeu (essa tentativa) para começar o mais radical modo de abordagem construído pelo qual ele finalmente, na (sexta tentativa), alcançará seu objetivo. Na sequência, sempre parcimonioso em sua reutilização econômica daquilo que tornou-se mero esboço, emprega as últimas poucas polegadas de papel em branco no rodapé da página para rascunhar uma diferente e elegante prova (ibid., p.408-9, nota 70) que a resistência do meio circundante (ao corpo) não oferece resistência ao movimento numa simples parábola galileana, que é o segundo exemplo estabelecido

Depois de mais dois erros, um referente à insistente falta da proporção correta para a queda galileana (que se fez presente em todas as tentativas até aqui) e, outra falha, nesse caso nova, que concerne ao uso da projeção da queda galileana quando ele deveria ter usado a própria queda CE para determinar a expressão para a razão entre a resistência e a gravidade. Finalmente, chegamos à sexta tentativa, dessa coleção a mais importante pois traz consigo a confluência dos resultados newtonianos e bernoullianos. Como, também, uma investida matemática que por completo se distancia de seu texto de 1687.

Newton mantém o modelo matemático dos arcos sucessivos, mas ao invés de considerar o movimento que atravessa os arcos em tempos iguais, ele supõe que é a projeção sobre o horizonte do movimento resistido que avança uniformemente em "momentos iguais de tempo". Newton, pela primeira vez, depois de um erro inicial [vide nota 51], expressa a mudança de velocidade instantânea produzida pela ação conjunta da resistência do meio e da componente da gravidade na direção tangencial, para daí, então, deduzir, no colorário I de maneira muito simples, a correta razão entre a resistência e a gravidade. Ao final do *Exempl.1* no movimento resistido pelo meio num trajeto semicircular, Newton verificou que a razão encontrada entre a resistência e a gravidade produziu, de uma forma totalmente independente, o resultado de Johann Bernoulli.[48]

4.7 Sexta tentativa

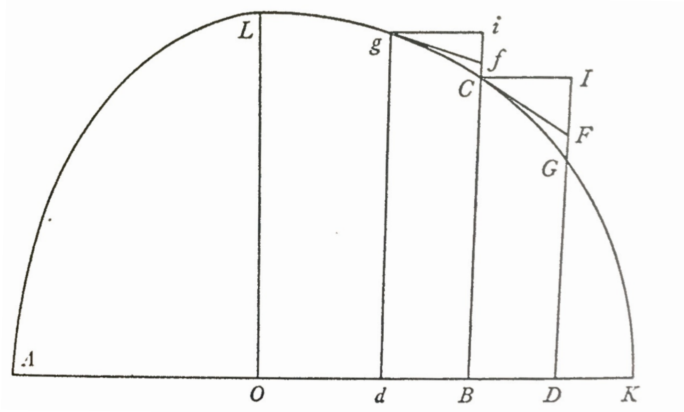
Seja AK o plano perpendicular ao plano da figura, ACK a linha curva,[49] C o corpo em movimento e FC a linha reta tocando em C. Entretanto, imagine que o corpo C avança de A para K pelo caminho da linha ACK, e por todo ele é impedido pela resistência do meio. Do ponto C para a linha reta AK desce a perpendicular CB. Tome pela linha reta CB nos dois sentidos duas linhas iguais DB e Bd, e as perpendiculares erguidas DG e dg encontram a curva em G e g. Estenda DG até encontrar a tangente CF em F, complete o retângulo $CBDI$ e trace a linha reta gf tocando a curva em g e encontrando a perpendicular BC produzida em f.

por ele para ilustrar seu problema (ibid., nota 64).

[48]Ibid., nota 65.

[49]Como na *editio princeps* a figura que acompanha tem por finalidade representar o semicírculo do *Exempl.1*, para a qual ela também se faz útil, mas reproduzimos fielmente as proporções do diagrama desenhado à mão livre, no qual o quadrante esquerdo ALO foi 'esmagado' apresentando afinidade a uma representação de uma forma elíptica. Inicialmente, parece que Newton escreveu 'a linha curva LK' e, de maneira correspondente, desenhou somente o quadrante direito, então, alterou a figura para que ali ficasse, mas não encontrou mais espaço a direita daquilo que já havia escrito para comportar o aumento da figura em sua extensão completa (ibid., pp.331-2, nota 66).

Figura 20: Diagrama da sexta tentativa



Então, os tempos nos quais o corpo descreve os arcos gC e CG serão as metades nas razões das alturas fC e FG que o corpo terá caído das tangentes prontas para serem descritas e, as velocidades estarão para os comprimentos gC e CG, diretamente, e os tempos, inversamente. Em consequência disso, representam-se os tempos[50] por $\sqrt{Cf}$ e $\sqrt{FG}$; e, então, as velocidades, por $\frac{gC}{Cf}$ e $\frac{CG}{FG}$ ou, o que é efetivamente o mesmo, por $\frac{gf}{\sqrt{Cf}}$ e $\frac{CF}{\sqrt{FG}}$; o decremento da velocidade no tempo $\sqrt{FG}$ será expresso por $\frac{gC}{Cf} - \frac{CG}{FG}$.[51] Esse decremento advém da resistência e da gravidade juntas, a resistência aumenta-o e a gravidade o diminui. Além do mais, $\frac{2FG}{\sqrt{FG}}$ (ou $2\sqrt{FG}$) é a velocidade[52] a qual o corpo adquire pela queda no tempo $\sqrt{FG}$, cobrindo a altura FG, e essa velocidade está para a velocidade adicionada pela gravidade ao mesmo tempo que a velocidade do corpo no arco CG assim como FG está para $CG - CF$, ou seja, $IF \times \frac{FG}{CF}$, e consequentemente, a velocidade que a gravidade adiciona ao corpo é:

[50]As quedas livres – a partir do repouso e sob o efeito da gravidade g através das distâncias Cf e FG – são respectivamente, de fato, $\sqrt{\frac{2Cf}{g}}$ e $\sqrt{\frac{2FG}{g}}$. Newton aqui supõe o fator numérico de escala $\sqrt{\frac{1}{2}g}$ (ibid., p.332, nota 67).

[51]Está marcado (pelo símbolo [†] que não foi aqui especificamente usado) em seu $f.197^r$ [vide Anexo A - Manuscritos de Newton] nas linhas principais do presente argumento. Newton, inicialmente, (em $f.219^r$) veio a concluir que: 'o incremento da velocidade devido somente a gravidade' – agindo na direção instantânea do movimento do corpo – 'é expresso por $\frac{CG-CF}{\sqrt{FG}}$ ou, o que é o mesmo, por $\frac{FI\sqrt{FG}}{CF}$; e o decremento da velocidade devido somente a resistência é expresso por $\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + \frac{FI\sqrt{FG}}{CF}$; e a velocidade gerada pela queda é expressa por $\sqrt{FG}$'... A expressão resultante $\frac{gf}{Cf \times FG} - \frac{CF}{FG} + \frac{FI}{CF}$ para a razão entre a resistência e a gravidade, é claro, está errada... ela produz novamente a medida falha

$$\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2} - \frac{QR}{\sqrt{1+Q^2}}$$

que foi analogamente deduzida na [quarta tentativa, nota 38] e que no primeiro exemplo do semicírculo $e = \sqrt{n^2 - a^2}$ correspondente prescreve a seguinte proporção: a resistência está para a gravidade assim como '$2a$ está para n' – e, então, o próprio Newton observou, depois de uma rápida verificação computacional, em sua página precedente $f.197^r$. Nesse ponto, retomando os passos anteriores mais gerais de

$$2IF \times \frac{FG}{CF \times \sqrt{FG}}$$

ou

$$2FI \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}.$$

Então, quando a essa velocidade foi adicionado o decremento de velocidade – previamente mencionado que surge da resistência e da gravidade – tornar-se-á o decremento da velocidade advindo apenas da resistência,

$$\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{CF}} + 2IF \times \frac{\sqrt{FG}}{CF}.$$

Como resultado, a resistência está para a força da gravidade assim como

$$\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{CF}} + 2IF \times \frac{\sqrt{FG}}{CF} \text{ está para } 2FG$$

ou

$$\frac{gf}{2\sqrt{Cf \times FG}} - \frac{CF}{2FG} + \frac{IF}{CF} \text{ está para } 1.$$[53]

A resistência, entretanto, está para a densidade do meio e o quadrado da velocidade em conjunto e, portanto, a densidade do meio está para resistência, diretamente, e para o quadrado da velocidade, inversamente, ou seja, como

seu argumento, ele, finalmente, detectou o erro que tinha, de uma forma ou de outra, atormentado todas as suas tentativas prévias, [da primeira a quinta tentativas] para armar o correto argumento e inserir diretamente os coeficientes numéricos '2' nos espaços pertinentes de sua sentença precedente, para se ler: 'o incremento da velocidade devido somente a gravidade é expresso por $\frac{2CG-2CF}{\sqrt{FG}}$ ou, o que é exatamente o mesmo, expresso por $\frac{2FI\sqrt{FG}}{CF}$, e o decremento da velocidade devido somente a resistência é expresso por $\frac{gf}{\sqrt{Cf}} - \frac{CF}{\sqrt{FG}} + \frac{2FI\sqrt{FG}}{CF}$, e a velocidade gerada pela queda é expressa por $2\sqrt{FG}$', donde a resistência está para a gravidade assim como, *recte*, $\frac{1}{2}\frac{gf}{\sqrt{Cf \times FG}} - \frac{1}{2}\frac{CF}{FG} + \frac{FI}{CF}$ está para a unidade. Então, na sua próxima página do manuscrito ($f.220^r$) ele remodela diretamente a sentença crucial, aumentando-a para tornar claro porque a 'incremento da velocidade devido a gravidade' precisa, portanto, ser dobrado (compare com a nota seguinte) e essa substituição foi colocada na sequência, seguindo a instrução do original de Newton (pelo referente '†') (ibid., nota 68).

[52]Seria $2FG$ a distância que o corpo cobriria no tempo $\sqrt{FG}$ em que o corpo se moveria com velocidade uniforme, na queda a partir do repouso sob a ação da gravidade, chegaria ao ponto G. Nos termos da nota 50, resulta-se o mesmo ao se dimensionar a velocidade terminal $\sqrt{2g.FG}$ no 'expoente' da razão $\sqrt{\frac{1}{2}g}$ (ibid., p.333, nota 69).

[53]*Et voilá!* Em um equivalente analítico no qual um ponto qualquer $C(a, e)$ do caminho LCK é formado por uma dada relação $e = e_a$ entre a abscissa $OB = a$ e a ordenada $BC = e$, ao expandir o incremento da ordenada $DG = e_{a+o}$ em séries $e+Qo+Ro^2+So^3+\ldots$ (onde, como sempre, $Q \equiv Q_a = \frac{de}{da}$, $R \equiv R_a = \frac{1}{2}\frac{dQ}{da}$, $S \equiv S_a = \frac{1}{3}\frac{dR}{da}, \ldots$) e que se tenha $IF = Qo$, $GF = Ro^2 + So^3 + \ldots$; então, $CF = o\sqrt{1+Q^2}$, enquanto,

$$\left\{\frac{gf}{2\sqrt{Cf\times FG}}-\frac{CF}{2FG}+\frac{IF}{CF}\right\}\times\frac{FG}{CG^2}.$$

Como foi encontrado.

Corolário 1 A resistência está para a gravidade assim como $\frac{gf}{Cf+FG}-\frac{CF}{2FG}+\frac{IF}{CF}$ está para 1. No lugar de[54] $2\sqrt{Cf\times FG}$ é possível escrever $Cf+FG$.

Corolário 2 Se a linha curva for definida pela relação entre a base ou abscissa como nos exemplos seguintes.[55]

Exemplo 1. Seja a linha ACK descrita como um semicírculo sobre o diâmetro AK, e seja requerida a densidade do meio que fará o projétil mover-se nessa linha. Bissecte o semicírculo de diâmetro AK em O, e chame $OK=n$, $OB=a$, $BC=e$ e BD ou $dB=o$: então será DG^2, isto é, OG^2-OD^2, igual a $n^2-a^2-2ao-o^2$ ou $e^2-2ao-o^2$ e, quando a raiz for extraída pelo nosso método, aparecerá:

$$DG=e-\frac{a}{e}o-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}+\frac{a^2}{e^3}\right)o^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{e^3}+\frac{a^3}{e^5}\right)o^3-\cdots$$

Escreva aqui n^2 no lugar de e^2+a^2 então provará que

$$DG=e-\frac{a}{e}o-\frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2-\frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3-\cdots$$

Séries desse tipo eu distinguo nos termos sucessivos deste modo: o primeiro termo, e, até

correspondendo ao decremento da ordenada $dg=e_{a-o}$ tem-se

$$Cf=R_{a-o}o^2+S_{a-o}o^3+\ldots \text{ ou } (R-3So\ldots)o^2+(S-\ldots)o^3\ldots=Ro^2-2So^3\ldots$$

e $gf=o\sqrt{1+Q_{a-o^2}}$ ou $o\sqrt{1+(Q-2Ro)^2}=o\sqrt{1+Q^2}-2\frac{QR}{\sqrt{1+Q^2}}o^2\ldots$; então, $\sqrt{Cf\times GF}=\sqrt{R^2o^4-RSo^5\ldots}=Ro^2-\frac{1}{2}So^3$, ou seja, a razão entre a resistência e a gravidade vem, finalmente correta, como sendo

$$\frac{o\sqrt{1+Q^2}-2\frac{QR}{\sqrt{1+Q^2}}o^2\ldots}{2(Ro^2-\frac{1}{2}So^3\ldots)}-\frac{o\sqrt{1+Q^2}}{2(Ro^2+So^3\ldots)}+\frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}=\frac{3S\sqrt{1+Q^2}o^4\ldots}{4R^2o^4+2RSo^5}$$

, ou ainda, $\frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}$ no limite do incremento infinitesimal (decremento) $BD=dB=o$ tornar-se zero. Por qualquer outro caminho resistente particular, observamos que os valores de Cf e gf são prontamente computáveis dos primeiros princípios pelo cálculo direto de Q_{a-o} e R_{a-o} sem parar para calcular seus equivalentes $Q-2Ro+3So^2\ldots$ e $R-3So+\ldots$, respectivamente; então, Newton determina-os na sequência de seu primeiro exemplo do semicírculo ou *Exempl.1* [vide nota 58] Na sentença final retirada do manuscrito, Newton vem inicialmente informar que: 'para este $2\sqrt{Cf}\times\sqrt{FG}$ pode-se escrever $Cf+FG$, logo, está a gravidade para a resistência assim como $\frac{gf}{Cf+FG}-\frac{CF}{2FG}+\frac{IF}{CF}$ está para 1'...– e ao fazer mais duas reduções seguintes da razão para se ter termos mais simples que, na verdade, aumentam em complexidade (e nesse último que ele erra ao confundir Cf com CF) – depois de atrasar essa observação para ser separada no '*Corol.1*' de seu argumento principal. De forma a corresponder, '$Cf+FG$' foi primeiramente escrito no lugar de '$2\sqrt{Cf}+\sqrt{FG}$' no parágrafo seguinte (ibid., pp.334-5, nota 70).

o quarto termo, $\frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3$, determina a variação da curvatura e a curvatura das curvas.[56]

Além disso, CF é a raiz quadrada de $CI^2 + IF^2$, ou seja, $o^2 + \frac{a^2}{e^2}o^2$ (ou $\frac{n^2}{e^2}o^2$), e, consequentemente, $\frac{n}{e}o$. A linha DG, ao modificar o sinal de o, modifica também em $dg = e + \frac{a}{e}o - \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3} + \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3 \cdots$ De onde tem-se $Ci = \frac{a}{e}o - \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3}o^2 + \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5}o^3 \cdots$ E as linhas GF e CF, ao se escrever[57] Od no lugar de OB e dg no lugar de BC, tornam-se Cf e gf. E daí resultará,

$$Cf = \frac{n^2o^2}{2e^3} - \frac{an^2o^3}{e^5}$$

e

$$gf = \frac{no}{e} - \frac{ano^2}{e^3}.^{58}$$

De onde,

$$\frac{gf}{Cf + GF} - \frac{CF}{2GF} = \frac{(e^2no - ano^2)}{n^2o^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{an^2}{e^2}\right)o^3} - \frac{no}{\left(\frac{n^2}{e^2}\right)o^2 + \left(\frac{an^2}{e^4}\right)o^3},$$

ou seja,

$$\frac{e^2 - ao}{no - \frac{1}{2}\frac{an}{e^2}}o^2 - \frac{e^4}{e^2no + ano^2} = \frac{1}{2}\frac{ae^2no^2}{e^2n^2o^2} = \frac{1}{2}\frac{a}{n}, \text{ e, também, } \frac{FI}{CF} = \frac{a}{n}.$$

A resistência torna-se, então, para a gravidade assim como

$$\frac{1}{2}\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \text{ está para 1, ou seja, 3a para 2n.}$$

> Correto, finalmente! Com um alívio evidente, Newton parte diretamente para um acréscimo mínimo ao seu parágrafo precedente – no qual, entre '... podemos desconsiderar' e 'o quarto termo...' [ibid., p.379], é aqui inserida a sentença adicional: 'nesse problema, no lugar da linha FG empregamos o terceiro e o quarto termos'... – e, então, logo abaixo ele começa a esboçar uma breve carta a Nikolaus (I) Bernoulli: 'Eu lhe enviei anexo a solução do problema a respeito da densidade e da resistência do meio corrigida. Desejo que você mostre isso a seu tio e retorne os meus agradecimentos a ele por mim, por mandar avisar-me sobre o erro' ($f.219^v$)... Mas se o sobrinho do Johann de fato recebeu uma cópia disso temos todas as razões para duvidar (WHITESIDE, 1967-1981, v.8, p.337, nota 76).

---

[54]Ou seja, $\sqrt{(Cf + GF)^2 - (-Cf + GF)^2}$, onde [vide nota anterior] $GF = Ro^2 + So^3 \ldots$ e $Cf = Ro^2 - 2So^3 \ldots$, e, então, a diferença deles $3So^3$ será, no limite de o evanescer, vem a tornar-se infinitamente menor que a soma deles $2Ro^2 - So^3 \ldots$ (ibid., p.355, nota 71).

[55]Entender o texto do '*Corol.2*' como está escrito na *editio princeps* dos *Principia* [cf. ibid., p.376-8] (ibid., nota 72).

[56]Entenda como o terceiro parágrafo do *Exempl.1* do texto de 1687 [cf. ibid., p.376-8] (ibid., nota 73).

[57]Ou seja, '$a - o$ por a'... (ibid., p.336, nota 74).

[58]Como em seus cálculos preliminares, $f.201^v$, Newton nos apresenta sem dúvidas – exceto que ele lá cometeu um deslize ao calcular Cf como sendo $R_{a+o}o^2 + S_{a+o}o^3 + 0\left(o^4\right)$, ou seja,

$$\frac{nnoo, \overline{ee - 2ao} + ano^3}{2e^5 - 10e^3ao} = \frac{nnoo}{2e^3} + \frac{4anno^3}{2e^5}$$

Portanto, vimos emergir o fator numérico perseguido por Newton ao longo de todas essas tentativas. Com isso, percebemos a mudança da estrutura matemática que culminou, finalmente, naquela que chamei de modelo de arcos sucessivos. Ora, vimos o erro com respeito à falta da correta proporção da queda galileana (que insistentemente ocorreu nos cálculos de Newton) ser corrigido (vide nota 51). Newton percebeu que se mantivesse a mesma equação (tal como foi construída), os cálculos o levariam ao mesmo resultado falho da quarta tentativa (vide nota 38, seção 4.5) e da '*mesma tentativa reestruturada*' (vide nota 13, subseção 4.1.1). Assim, num recompto em $f.197^r$ da equação do movimento contida nesta sexta tentativa foi que ele percebeu a falta do fator [2] para a queda galileana. A partir da marca (†) muito claramente contida $f.219^r$ foi que Newton apresentou a correta expressão para o movimento do corpo, dimensionada em $f.220^r$, logo depois da marca de ligação (†). Além disso, vimos também que Newton, diferentemente de outras tentativas, não igualou as quedas galileanas cujos incrementos de base são distintos devido às diferentes considerações com respeito a ação da resistência do meio (ou seja, ora o corpo estava livre dela, ora não). Ele optou por uma forma mais elaborada de estruturar a equação do movimento: considerou corretamente a ação gravitacional ao longo a tangente, conjuntamnte com a ação resistiva do meio. Ao final desse caminho, fica evidente para nós como Whiteside constituiu sua tese com respeito ao erro de Newton. Creio que não poderia ser diferente, pois a assunção dessa falha não poderia ocorrer sem a minuciosa averiguação dos registros de Newton.

4.8 Algumas considerações a respeito das tentativas de Newton

Vimos neste capítulo o esforço de Newton para incluir o fator numérico bernoulliano, $\frac{3}{2}$, na sua solução da prop. X. Duas observações feitas iniciamente por Abraham de Moivre e por Nikolaus (I) puderam ser aqui melhor entendidas e, assim, compreendidas como incondizentes para esse caso. Pois, com respeito ao primeiro, Newton teria rapidamente solucionado o problema se a falha estivesse na mera consideração do sentido de uma tangente (ora para direita, ora para esquerda). Todavia, em parte alguma encontramos esse tipo de consideração feita por Newton. Agora, a segunda observação, aquela feita por

– Newton conduz esses valores para os comprimentos de Cf e gf como $\left(R_{a-o}o^2 + S_{a-o}o^3 =\right) \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^3_{a-o}}o^2 + \frac{1}{2}\frac{an^2}{e^5_{a-o}}o^3$ e $\left(o\sqrt{1+Q^2_{a-o}} =\right) \frac{no}{e_{a-o}}$, respectivamente. Em cada caso, arrendonda as séries seguintes nas potências maiores de o para seus primeiros dois termos que são só pertinentes aos estágios finais do cálculo. Nesse ponto crucial em sua computação, ele abandona a explicação verbal devido ao seu anseio em chegar ao resultado, e os próprios cálculos matemáticos são dispostos como num *staccato*. Fizemos interpolações editoriais sutis para trazer sentido (ibid., pp.336-7, nota 75).

Nikolaus (I), também não merece crédito porque faz uso de uma combinação numérica fortuita na expansão em série infinita convergente que sequer precisa ser aqui repetida. Restrinjo-me a apenas mencionar que se a solução fosse como Nikolaus (I) disse, então, Newton teria, já em sua verificação do erro, encontrado tal falha (apenas uma tentativa já bastaria para a dissolução de um problema como esse).

Nesta seção, não retomarei os detahes das seis tentativas de Newton porque ao final de cada seção correspondente já há uma breve síntese dos pontos principais de cada uma. Limitar-me-ei a salientar o seguinte: na seção 4.1 apresentei a virada de estrutura matemática, ou seja, o momento em que ocorreu a mudança do modelo da tangente para o modelo de arcos sucessivos. Com essa virada, Newton considerou a construção de uma equação para o movimento, um recurso algébrico alternativo o qual não deixou de usar até sua sexta tentativa. O percurso realizado por Newton o fez chegar a uma equação de movimento completa onde as influências gravitacionais e resistivas encontram-se representadas por suas respectivas componentes. Newton deixou também (para fins de simplificação) de considerar quedas galileanas iguais, isso não o fez cair em uma identidade falsa, como aconteceu na solução original (no próximo capítulo há a prova de Whiteside de que as quedas FG e fg da *editio princeps* são de fato diferentes entre si), contudo, essa observação pode parecer que pelo simples fato de Newton evitar o uso de uma identidade algébrica o deixaria livre desse problema não foi isso o que quis salientar, o que quero, de fato, é apenas reforçar que o uso de uma equação do movimento dispensa esse tipo de recurso o qual pareceu ser simplificador para o modelo da tangente; vimos, também, a persistente falta da proporção numérica '[2]' para as quedas galileanas, Whiteside demarcou com muita precisação quando faltou e a quais erros essa falta conduziu, e, ainda, quando Newton percebeu essa falta e que o acréscimo desse fator o conduziria a solução correta. Apesar da enorme contribuição de Whiteside à história da matemática, para esse problema, há uma questão que ele deixou de fora: como dissolver a contradição apresentada por Johann Bernoulli? No próximo capítulo, mostrarei o estudo de Lagrange que diz respeito ao esclarecimento dessa questão, a saber, a contradição, e, ainda, a interpretação de Marco Panza, justamente, desse esclarecimento lagrangeano. Não posso deixar de citar que há também uma breve seção ainda dedicada a Whiteside onde apresentamos seu estudo sobre a diferença entre as quedas em nível diferencial de terceira ordem entre FG e fg (quedas da solução de 1687), e uma tentativa de Newton (separada daquelas apresentadas acima) que o conduziria à solução correta sem modificar a estrutura matemática (em $Add.3968.41 - 132^v$, único registro dessa solução contido apenas nos manuscritos).

5 Interpretações com respeito ao erro de Newton

Chamamos para esse capítulo três comentadores: Whiteside, Lagrange e Panza. O primeiro já nos é conhecido, pois auxiliou-nos a compreender o percurso de Newton para a solução correta, além de ter-nos apresentado sua solução elegante de correção [vide subseção 3.6.5]; ora, de fato, Whiteside nos acompanhou durante grande parte desse trabalho. Contudo, como salientado no final do capítulo anterior, ele deixa ainda obscuro como Newton desfez também a contradição encontrada por Johann e verificada pelo próprio matemático inglês.

Para esclarecer esse ponto, devemos agora buscar o apoio nas análises de Lagrange. Esse último apresentou um estudo minucioso a respeito desse mesmo assunto em seu texto *Théorie des fonctions analytiques* (impreso em duas edições). Lagrange refaz as soluções apresentadas por Newton na primeira e na segunda edições dos *Principia* para esclarecer a contradição e apresentar, numa análise mais profunda (vide subseção 5.2.4), sua interpretação de qual foi o erro de Newton.

Panza baseia-se em Lagrange, na verdade, nas duas edições do texto de Lagrange, com vistas para as soluções de Newton. Panza promove, assim como Lagrange, uma discussão com respeito aos métodos sintético e analítico da matemática e ao tratamento dado por ambos para a solução do problema apresentado na prop. X. Panza, nessa discussão, lançou um olhar para práticas matemáticas distintas e muito próprias de cada época, seja para Newton com seu método sintético da primeira edição dos *Principia* (final do séc. XVII e início do séc. XVIII), seja para Lagrange com seu método analítico (séc. XIX). Ora, para Panza são os métodos os aportes que sustentam o sucesso e o fracasso das soluções desse problema em específico (problema III ou prop. X) e, mais que isso, a comparação desses métodos entre si mostram (para quem se lança para uma investigação historiográfica) a robustez e generalidade adquirida pela matemática com a adoção do método analítico (veremos com mais detalhes na seção 5.3).

Como descrito na última seção do terceiro capítulo, Galuzzi sugere (creio que baseado em Whiteside) que o desenvolvimento em série infinita convergente de quaisquer elementos do diagrama geométrico depende de iguais incrementos de base (o), dado o movimento sofrido pelo ponto C ao se deslocar para G (vide Figura 2). Assim, mostra-se necessário buscar uma correta diferenciação entre incrementos de base, tarefa contemplada pela seção 5.1.2 deste capítulo.

5.1 A interpretação de Whiteside

Por diversas vezes, Whiteside foi solicitado para nos auxiliar a melhor compreender o problema de que este trabalho trata. Em síntese, podemos apontar quais são, para esse comentador, os deslizes que Newton inúmeras vezes cometeu, ao menos nas tentativas aqui apresentadas. Certamente, não listaremos todos os erros cometidos por Newton. Apenas, pontuaremos os mais recorrentes que, sobretudo, dificultaram a tarefa de Newton em consertar a prop. X do livro II, de tal forma a nela comparecer o fator de $\frac{3}{2}$ na relação entre a resistência do meio e a gravidade. Conforme previsto por Johann Bernoulli em seu artigo publicado em 1713 nas *Mémoires de l'Académie des Science*.

Vimos como Whiteside trata, em um desenvolvimento matemático contemporâneo, os erros de Newton ao final da seção 3.5. Whiteside afirmou primeiramente que a queda galileana – diversas vezes usada para exprimir a contribuição da gravidade na expressão geométrica que gera a razão entre resistência e gravidade $\left[\frac{\varrho}{g}\right]$ – não foi adequadamente expressada. Foi o que conduziu, portanto, Newton a apresentar essa relação como sendo o dobro do valor o qual de fato deveria possuir.

Foi através dos passos de Lagrange, que serão apresentados na sequência, que Whiteside nos mostrou que as quedas galileanas, fg e FG, da tangente TCF – conforme diagrama da prop. X , livro II dos Principia, primeira edição – são diferentes. As quedas, consideradas por Newton como iguais [vide proporção (3.4)] no desenvolvimento da prop. X da *editio princeps* – são distintas em suas infinitesimais de terceira ordem. A demonstração da diferença entre as quedas apresentada por Whiteside foi inspirada no trabalho do matemático francês, Lagrange, (conforme consta na seção 5.2). Vejamos como procede Whiteside em sua demonstração para $fg \neq FG$.

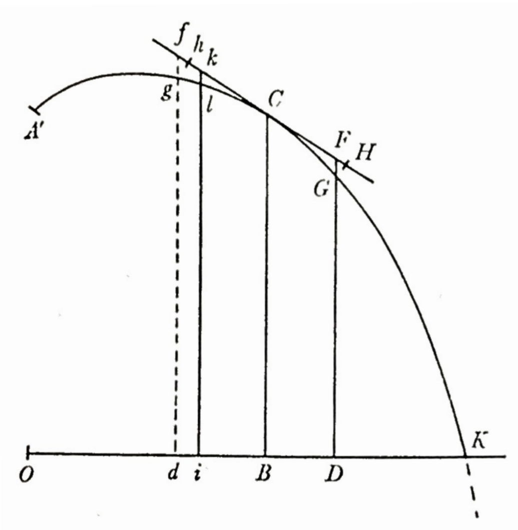
> Aqui nasceu a confusão que arruinou Newton na sucessão de seu argumento: a pequena linha FG é gerada não meramente por uma força vertical descendente da gravidade, mas também pela componente (aqui negativa) da força de resistência do movimento ao longo de CFH qua age na mesma direção descendente [da gravidade].

Para resumir a longa e percipiente análise a este modo de abordagem dado por J.L.Lagrange em: *Théorie des Fonctions Analytiques* (Paris, Prairial An V [=Mai-Jun 1797]): Seconde Partie, §§202-5:244-51 mais detalhada no correspondente Chapitre IV da 2^o Partie da edição revisada (Paris,$_2$1813) [=(ed.J.A.Serret)(Œuvres, 9, Paris, 1881:360-76)] – verificar especialmente §204:257-8(=$_2$1813:§§20-21).
Se considerarmos que o móvel C desloca-se pela tangente sob a ação resistiva ρ no pequeno e evanescente tempo θ e, por todo esse tempo é submetido, também, pela gravidade g que o puxa constantemente para baixo. Sabemos que os incrementos da base $OB = x$ e da ordenada $BC = y$ são respectivamente $(BD =)o$ e p; sejam $\dot{x} = \frac{o}{\theta}$ e $\dot{y} = \frac{Qo}{\theta}$ (onde $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = Q$). Temos que, $\dot{y} - Q\dot{x} = 0$, derivando obtém-se $\ddot{y} - Q\ddot{x} - \dot{Q}\dot{x} = 0$. Portanto, a velocidade instantânea $[v]$ em C é $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x}\sqrt{1 + Q^2}$, e as equações de Euler do movimento são $\ddot{x} = -\frac{\rho}{\sqrt{1+Q^2}} = -\frac{\rho\dot{x}}{v}$ e $\ddot{y} = -\frac{\rho Q}{\sqrt{1+Q^2}} - g = Q\ddot{x} - g$. Então, $\ddot{y} - Q\ddot{x} = \dot{Q}\dot{x} = -g$; logo derivando $\dddot{y} - Q\dddot{x} = \dot{Q}\ddot{x} = -\frac{g\ddot{x}}{\dot{x}}$ ou $= \frac{g\rho}{v}$. Em seguida, $o = \dot{x}\theta + \frac{1}{2}\ddot{x}\theta^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}\theta^3 + \ldots$, onde por inversão $\theta = \frac{\sqrt{1+Q^2}}{v}o + \frac{1}{2}\frac{\rho(1+Q^2)}{v^3}o^2 \ldots$. De maneira similar, $p = \dot{y}\theta + \frac{1}{2}\ddot{y}\theta^2 + \frac{1}{6}\dddot{y}\theta^3 \ldots$. Correspondentemente, obtemos:

$$FG = -(p - Qo) = \frac{1}{2}g\theta^2 - \frac{1}{6}\frac{g\rho}{v}\theta^3 + 0\theta^4$$

A partir dos termos precedentes (porque os arcos Cg e CG são supostamente percorridos em tempos iguais) é manifesto que $fg = \frac{1}{2}g(-\theta)^2 - \frac{1}{6}\frac{g\rho}{v}(-\theta)^3 + 0\theta^4$, as pequenas linhas fg e FG, de fato, diferem por um termo de terceira ordem $(\frac{1}{3}\frac{g\rho}{v}\theta^3)$ que não pode, como Newton supôs, em questão, ser negligenciado (WHITESIDE, 1967–1981, v.8, pp.374-5, notas 6 e 8).

Figura 21: Diagrama de Whiteside que ilustra onde está erro de Newton



Eis, portanto, a diferença entre as quedas FG e fg diversas vezes anunciada durante o texto. Esta diferença $\left[\frac{1}{3}\frac{g\rho}{v}\theta^3\right]$ impediu Newton de chegar à solução correta, ao negligenciá-la. Veremos, logo na próxima seção, quando Newton deixa de considerar essa igualdade e passa a construir uma equação do movimento, que seu erro se resume à falta da correta proporção numérica a queda galileana (vide nota 4). Mas Whiteside não nos deixou sem resposta quanto à correta consideração da diferença entre FG e fg nos cálculos da primeira edição dos *Principia*, lembremos que na seção 3.5 há a prova de que a correta diferenciação das quedas (mediante consideração dos incrementos de base distintos o e p respectivamente relacionados às quedas FG e fg) leva à tão perseguida solução dos Bernoulli, para isso basta acrescentar a proporção '[2]' à queda da tangente.

Ora, percebamos também, e isso faz-se importante para a argumentação de Panza a respeito dessa passagem, que foi o método analítico, tal como apresentado no desenvolvimento de Lagrange, que possibilitou a apresentação clara desta distinção, que Newton não pôde determinar devido ao seu método sintético aplicado na primeira edição dos *Principia*. Contudo, ainda faremos algumas observações com respeito a essa interpretação no último capítulo deste trabalho.

Uma das maiores contribuições de Whiteside encontra-se na sua descrição quando Newton retoma sua solução da prop. X, livro II em três tentativas, já ao final do Outono [boreal] de 1712. São os *Três esboços da tentativa restrospecta (ao final do outono [boreal]? de 1712) de mais uma vez salvar o argumento de 1687*, contidas no apêndice 3, pp.415–19, v.8, dos *The mathematical papers of Isaac Newton*. Vamos, portanto, à terceira tentativa retrospecta de Newton para nela apresentar a nota em que Whiteside nos mostra como Newton fez para manter o mesmo argumento de 1687 e chegar a solução de 1713.

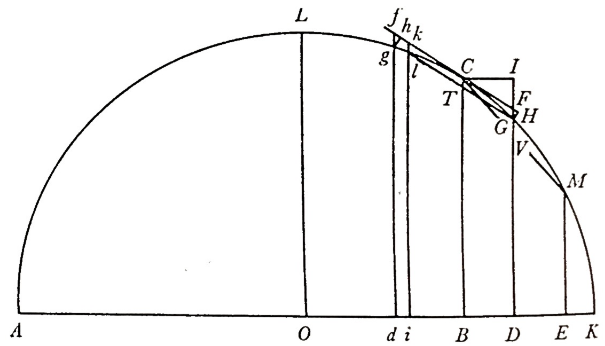
5.1.1 Terceira tentativa retrospecta de mais uma vez salvar o argumento de 1687

Seja AK perpendicular; LCK, a linha curva; C, corpo em movimento nessa curva; fCF, reta tangente nesse ponto C. Porém, o corpo descreve em tempos iguais arcos tão pequenos quanto gC e CG. Sejam Ch e CH aplicadas à tangente, e a partir dos pontos g, C e G descem as perpendiculares gd, CB e GD em direção ao plano do horizonte AK. As perpendiculares gd e GD prolongam-se tocando a tangente em f e F. No tempo em que o corpo descreve o arco CG – descendo da mesma tangente – a gravidade descreverá a altura FG.[1] Tomada a diferença entre o arco Cg e o arco CG,[2]

[1]Newton, inicialmente, especificou de forma mais completa: 'e, se para o mesmo grau de velocidade o corpo regressa o arco Cg, e que através tempo o corpo atinge C afastando-se de G, da mesma forma atinge g afastando-se de C, a força da gravidade faz o corpo cair da tangente descrevendo numa altura fg. E, por causa da igualdade dos tempos, as alturas FG e fg geradas pela gravidade são iguais. E, devido a semelhança entre os triângulos retângulos FGH e fgh, os lados FH e fh são também iguais. E, a diferença dos arcos Cg e CG, $Cg - CG = Ch - CH$ é $Cf - CF - 2FH$ pela ação conjunta. . . (cf. Whiteside, 1967-1981, v.8, p.418, nota 15) Contudo, no decorrer dessa solução, ele não adota a identidade anunciada ($FG = fg$), passa dretamente para a construção da equação do movimento.

$Cg - CG$ pela ação conjunta da resistência e da gravidade. A resistência aumenta a diferença, [enquanto] a gravidade diminui, e essa última reduz em cada tempo tomando FH. A essa linha é adicionada, e terá o decremento originário do arco no mesmo tempo descrito pela resistência sozinha, a saber $Cg - CG + FH$.[3] A gravidade, como abaixo, no mesmo tempo gera a queda FG. Portanto, a resistência está para a gravidade assim como $Cg - CG + FH$ está para FG.[4]

Figura 22: Diagrama da terceira tentativa retrospecta de Newton



Agora, seja uma ordenada qualquer $BC = P$, uma pequena abscissa $BD = o$, e a ordenada precedente $DG = P - Qo - Roo - So^3 - \&c$. O segundo termo dessa série indicará a linha FI, que a tangente fCF toca e, ainda, atravessa o paralelogramo $DBCI$ e o lado DI. Os termos subsequentes, $Roo + So^3 + \&c$, indicam a linha FG que repousa entre a tangente e a curva. O terceiro termo, Roo, de fato, determinará a curvatura da linha curva para o ponto C, o quarto termo So^3 determinará a variação da curvatura, o quinto, a variação da variação e assim por diante até o infinito. Na abscissa, a partir do ponto B até D, tome DE, e tome o mesmo para Bi, iguais a BD, e as séries para as ordenadas perpendiculares EM e il são escritas tomando respectivamente BE e Bi como $2 \times o$ e $-o$ produzindo $EM = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ e $il = P + Qo - Roo + So^3$. As cordas secantes lG e CM estão unidas às ordenadas BC e DG nos pontos T e V; e a flecha CT será igual ao excesso – acima da secante lG – da ordenada BC que é superior à medate da soma das ordenadas il e DG, isto é, à quantidade Roo, pelo mesmo argumento, a flecha GV será $Roo + 3So^3$. Mas o corpo descreverá os arcos lC e CG nos tempos que estão na razão da raiz quadrada dos cursos cujos corpos podem descrever estes tempos caindo e estes cursos estão como estas flechas.[5] Assim, o tempo para descrever o arco lC

[2]Se Newton considera a ação da resistência e a ação da componente da gravidade somente sobre o arco CG, então deverá ser lido como 'tomada a metade da diferença' (ibid., p.416, nota 4).

[3]Onde deveria ser '$\frac{1}{2}\overline{gC - CG} + FH$, isto é, $\frac{1}{2}\overline{fC - CF}$' (ibid., p.417, nota 12).

[4]Onde, determina-se, '*recte*', que 'a resistência está para a gravidade assim como $gC - CG + 2FH$, ou $fC - CF$, está para $2FG$', como na *editio princeps* (ibid., p.418, nota 19).

está para o tempo para descrever o arco CG ou para descrever gC, assim como, $\sqrt{Roo}$ está para $\sqrt{Roo+So^3}$, isto é, assim como R está para $\sqrt{RR+3So}$ ou, assim como, R está para $R+\frac{3}{2}So$, e nesta razão o arco lC está para o arco gC. Portanto, o arco gC está para lC na razão de $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$. A resistência está para a gravidade assim como lC – em $\frac{2R+3So}{2R}$ $-\, CG+FH$ – está para FG.[6] Mas é $lC^2 = iB^2+\overline{il-BC}^2$, isto é, $oo+QQoo-2QRo^3\&c$ e, extraindo a raiz, tem-se $lC=o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. E, por um argumento similar chega-se a $CG=o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. E daí, lC em $\frac{2R+3So}{2R}-CG$ torna-se $-\frac{2QRoo}{\sqrt{1+QQ}}+\frac{3Soo}{2R}\times\sqrt{1+QQ}$. Adiciona-se $FH=\frac{GI\times CF}{CG}=\frac{Qo\times Roo}{o\sqrt{1+QQ}}$ ou $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, e será a razão da resistência para a gravidade assim como $\frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ está para Roo, isto é, assim como $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{2RR}-\frac{Q}{\sqrt{1+QQ}}$ está para 1.

Recaímos no resultado já conhecido por nós (vide nota 38, seção 4.5), qual seja: Newton deixou de considerar, mais uma vez, a correta proporção numérica '[2]' para a queda galileana. Se ele tivesse considerado adequadamente esse fator, teríamos chegado (vide nota 4) a solução correta com o fator $\frac{3}{2}$ presente. Segue, agora, uma consideração de Whiteside muito curiosa, pois nos mostra que se Newton tivesse corrigido adequadamente a equação do movimento acima $\left(\text{para } \frac{Cg-CG+FH(=Cf-CF)}{[2]FG}\right)$, ou seja, se tivesse considerado a correta proporção numérica '[2]' a queda galileana na composição da equação (tenho que lembrar que neste momento, a confusão anterior que diz respeito à igualdade entre FG e fg já não se confirma pois Newton está usando uma equação do movimento para descrever a trajetória de C), ele teria chegado ao resultado com o fator dos Bernoulli. Ora, foi justamente isso que Newton fez quando, em 1713, estava preparando o *Commercium Epistolicum*, segundo Whiteside, logo abaixo da reprodução da carta de Leibniz a Wallis de 28 de maio de 1697. Contudo, por um deslise numa pequena transliteração descuidada – na qual ao invés de escrever $1+\frac{3So}{2R}=1+\frac{3go}{2f}$, Newton escreveu $1+\frac{3go}{f}$ (mais precisamente, compare a quarta linha com a segunda de baixo para cima: vide Add.3968.41-132^v, manuscrito contido no Anexo A - Manuscritos de Newton) – ele encontrou mais uma vez o resultado dobrado (vide seção 4.3) e abandonou esse cálculo que teria sido a prova de que

[5] Vide nota 13, subseção 4.1.1.

[6] Aqui teria de ser '$-CG+2FH$ está para $2FG$', na correta medida genitora de Newton [vide nota 4]. Seu cálculo introdutório para o que se segue sobreviveu em Add.3968.41-132^v [vide Anexo A - Manuscritos de Newton] (imediatamente abaixo de um comentário seu abandonado no terceiro parágrafo da carta de Leibniz a Wallis em 28 de maio de 1697 impresso no *Commercium Epistolicum D. Johannis Collins, et aliorum* que foi brevemente publicado 'para' *Royal Society*), onde ele calculou logo em seguida:'tempo em lC:tempo em gC::R:$\sqrt{RR+3RSo}$=$R+\frac{3}{2}So$, assim,

$$gC = lC \text{ em } 1+\frac{3So}{2R} = o\sqrt{1+QQ}-\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}+\frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R},$$

ou seja, $CG=o\sqrt{1+QQ}+\frac{QRoo}{1+QQ}$, torna-se, $gC-CG=\frac{3Soo}{2R\sqrt{1+QQ}}-\frac{2QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, mais $FH=\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ e...' (ibid., p.419, nota 21).

a estrutura da primeira argumentação não necessitava ser revista. Vejamos nas palavras de Whiteside:

> Ajustando a razão genitora para: 'assim como $gC - CG + 2FH$ está para [2]FG' [vide nota 4], disso segue-se, *recte*, que 'se chega a resistência está para a gravidade assim como $\frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R}$ está para $2Roo$, isto é, assim como $3S\sqrt{1+QQ}$ está para $4RR$'. Podemos permitir que o próprio Newton, depois de chegar a esse reparo final de seu argumento falho em sua *editio princeps*; em seguida numa linha e meia acrescentada por ele imediatamente depois do cálculo introdutório em Add.3968.41:132^v [vide nota 6]... ele recalcula aquilo como sendo (onde agora e, f e g ocupam os lugares dos coeficientes anteriores Q, R e S):
>
> $$\text{‘}1 + \frac{3go}{f} \text{ em } o\sqrt{1+ee} - \frac{efoo}{\sqrt{1+ee}} : \qquad -o\sqrt{1+ee} - \frac{efoo}{\sqrt{1+ee}} : \\ + \frac{2foo, eo}{o\sqrt{1+ee}} = \frac{-2efoo}{+\sqrt{1+ee}} + \frac{3goo\sqrt{1+ee}}{f}.$$
>
> Assim, a resistência está para a gravidade assim como $\frac{3g\sqrt{1+ee}}{f}$ está para $2f$ ou $3g\sqrt{1+ee}$ está para $2ff$.' Isso foi posteror ao trabalho, a não ser pelo momento de ajuste da transliteração aqui descuidada da razão prévia '$\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$' (do tempo da passagem sobre os arcos gC e lC) agora como sendo '$1 + \frac{3go}{2f}$', e, então, ao consertar este cálculo: $gC - CG + (2FH \text{ ou})2CF \times \frac{GI}{CG}$ produzindo '$\frac{3goo\sqrt{1+ee}}{2f}$', donde, divide-se por $(2FG =)$'$2foo$', então, a razão entre a resistência e a gravidade resulta precisamente em: 'assim como $\frac{3g\sqrt{1+ee}}{2f}$ está para $2f$ ou $3g\sqrt{1+ee}$ está para $4ff$'. Mas em um estado incorreto, Newton abandonou o cálculo. Por que, na verdade, ele deveria se preocupar? Neste rascunho que não se destina a comunicar [algo] para posteridade, ao escrever '[2]' no denominador quando ele agora sabia que deveria estar lá (ibid., pp.419-20, nota 22)!

A indignação de Whiteside torna-se razoável ao verificar onde e como a passagem acima citada pelo comentador de Newton encontra-se. A catalogação feita pela Cambrigde University dispõe esse fragmento de texto numa seção intitulada 'Unarraged fragments, mostly relating to the dispute with Leibniz'. De fato, trata-se de um excerto de texto desligado fisicamente de toda a problemática em torno da prop. X, livro II dos *Principia*.

5.1.2 Distinção entre incrementos de base: um desenvolvimento independente

Como dito anteriormente, apresento aqui um desenvolvimento muito semelhante àquele de Whiteside (vide seção 3.5): mesmo com meus cálculos ainda incompletos, posso afirmar que nossos resultados parciais se equivaleram. Mas comecemos do início, ainda em minha leitura do *Reading the Principia* de Guicciardini, Massimo Galuzzi adiantou (vide nota 2, subseção 3.6.1) que os incrementos de base na solução da primeira edição dos *Principia* devem ser considerados como distintos, por exemplo, como o e como p, de acordo com as diferentes quedas galileanas FG e fg, respectivamente. Assim, lancei-me a esse desafio, vejamos (vide seção 3.2, Figura 2):

Galuzzi expõe corretamente o problema de se expressar Cf, dado que esse não corresponde à projeção horizontal (ou incremento de base) $BD(= o)$. Entretanto, mesmo que os movimentos direto e regresso de C ao longo da tangente TCF descrevam arcos diferentes (CG e Cg) é possível estabelecer diferentes incrementos de base correspondentes a cada arco (ou a cada queda galileanda FG e fg), como já estabelecido, $BD(= o)$ e $Bd(= p)$. Da equação geométrica $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{1}{2}\frac{Cf-CF}{FG}$ [resultado adquirido diretamente da proporção (3.1), já corrigida com o fator numérico '[2]'] – considerando $Cf = p\sqrt{1+Q^2}$, $CF = o\sqrt{1+Q^2}$ e $FG = Ro^2 + So^3 \ldots$ – chega-se facilmente a $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{1}{2}\frac{(p-o)\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2+So^3\ldots}$. Minha dificuldade foi justamente determinar $(p - o)$, mas como já conhecia a resposta $\left[\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3}{4}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{R^2}\right]$, igualei as duas equações. Com isso, encontrei $(p - o) = \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \cdots$ Ora, esse caminho não serve como prova, pois, não demonstra $(p - o)$, apenas indica seu resultado porque conheço a solução de $\frac{\mathcal{R}}{g}$. Logo, não podia sustentar o resultado que encontrei para a diferença entre os incrementos de base segundo esses cálculos; se assim fizesse, então estaria cometendo a mesma trapaça matemática de Nikolaus (I). Desse modo, interrompi esta minha tentantiva de resolução e reservei o valor para que em algum momento futuro eu o retomasse, e continuei a seguir os comptos de Whiteside, conforme revela a estrutura deste trabalho.

Não demorou muito para saber que o valor encontrado para $(p-o)$ poderia estar, de fato, correto quando verifiquei que Whiteside achou o mesmo (vide seção 3.5). Como apresentado acima, o camimho de nosso comentador foi legítimo, pois não buscou na resposta conhecida a solução procurada. O problema foi que – talvez por economia de espaço ou para o simples deleite de um leitor com habilidades apuradas em matemática (e isso é muito comum em textos dessa área) Whiteside suprimiu seus cálculos, e, mais uma vez, fiquei sem compreender como chegar a $(p - o)$.

Mas Lagrange não deixou que essa dúvida se propagasse pois revelou com detalhes aquilo que para mim, até este momento, ficou incompreendido. Vejamos como Lagrange "abriu" as cálculos de Newton e, com isso, como ele me ajudou a compreender melhor o resultado que encontrei, bem como, também lançou luz à contradição que Newton caiu.

5.2 A interpretação de Lagrange

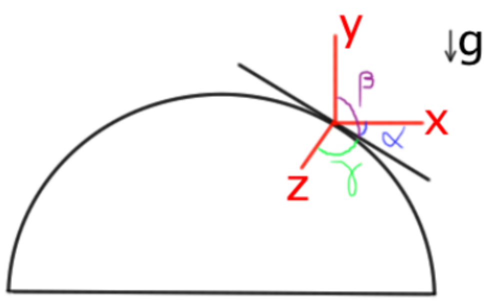
Lagrange[7] aborda a prop. X, livro II em três etapas distintas. Na primeira delas, ele soluciona essa proposição por meio das derivadas das equações do movimento do corpo em coordenadas retangulares. Ele se utiliza de duas abordagens, assim, essa primeira etapa acabou sendo composta por duas partes. Já na segunda etapa, Lagrange apresenta uma análise da prop. X da primeira edição e de como Newton poderia tê-la resolvido para chegar à solução correta. Na terceira e última etapa, Lagrange apresenta qual foi, para ele, o erro do matemático inglês.

5.2.1 A primeira abordagem: solucionar a prop. X segundo derivadas das equações do movimento

Considere um corpo que se desloca numa trajetória semicircular, tal como na Figura 23, num meio com resistência r e sob o efeito da gravidade g. Tome a resistência como uma força contrária ao movimento do corpo que age na direção tangencial. Num ponto qualquer, a desaceleração resistiva sobre o corpo – expressa nas coordenadas retangulares x, y e z – são, nesta ordem, $-r\cos\alpha$, $-r\cos\beta$ e $-r\cos\gamma$. Um observação: no eixo y g age no sentido descendente. Assim, são as equações para as acelerações em que um corpo de massa unitária está sujeito para esse caso:

$$\begin{cases} x'' = -r\cos\alpha \\ y'' = -g - r\cos\beta \\ z'' = -r\cos\gamma \end{cases}$$

Figura 23: Diagrama geométrico da solução de Lagrange



[7]Cf. Lagrange, 1813, pp.360-76.

seja o movimento, $u = s'$, composto por $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, então, têm-se as equações que expressam o movimento em termos das componentes em cada eixo como:

$$\begin{cases} x' = u\cos\alpha \\ y' = u\cos\beta \\ z' = u\cos\gamma \end{cases}$$

ao substituir $\cos\alpha = \frac{x'}{u}$, $\cos\beta = \frac{y'}{u}$ e $\gamma = \frac{z'}{u}$ nas equações de x'', y'' e z''; têm-se $x'' = \frac{-rx'}{u}$, $y'' = -g - \frac{ry'}{u}$ e $z'' = \frac{-rz'}{u}$. Disso, tira-se que

$$\frac{x''}{x'} = \frac{z''}{z'} = \frac{-r}{u}$$

se chamar $\frac{-r}{u}$ de m, tem-se

$$\frac{z'}{x'} = \frac{z''}{x''} = m \therefore z' = mx'$$

se integrar os dois lados da equação

$$\int z' = m \int x'$$

chega-se a

$$z = mx + n.$$

São m e n constantes arbitrárias. Essa equação está contida num único plano, assim como toda a trajetória curva está contida nesse mesmo plano, ou seja, no plano xy, tem-se que $z = z' = 0$. Então, as três equações do movimento foram reduzidas a duas. Nomeia-se $\frac{r}{u}$ de q, logo, $x'' = -qx'$ e $y'' = -g - qy'$ e, ainda, sabendo[8] que $(y'') = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$,[9] tem-se

$$\begin{aligned} (y'') &= \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3} \\ &= \frac{-g - qy'}{x'^2} - \frac{y'[-qx']}{x'^3} \\ &= \frac{-g}{x'^2} - \frac{-qy'}{x'^2} + \frac{-qy'}{x'^2} \\ &= \frac{-g}{x'^2}. \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para $(y''') = \frac{y''-(y')x'''-3(y'')x'x''}{x'^3}$,[8] mas como $(y') = \frac{y'}{x'}$,[8] tem-se

$$(y''') = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{y'x'''}{x'4} - \frac{3(y'')x''}{x'^2}.$$

[8]Ibid., p.359.

[9]Os parênteses diferenciam as componentes que são função do tempo daquelas que não são, por exemplo, y'' está em função do tempo, já (y'') não está em função do tempo, está sim em função de x. Esse é o método usado por Lagrange para eliminar o tempo.

Ao derivar $x'' = -qx'$ e $y'' = -g - qy'$, chega-se a

$$\begin{aligned}[x'']' = x''' &= -qx'' + [-q'x'] \text{ , mas } x'' = -qx' \text{, então,}\\ &= q[-qx'] - q'x'\\ &= q^2x' - q'x' = [q^2 - q']x'\end{aligned}$$

da mesma forma,

$$\begin{aligned}[y'']' = y''' &= 0 + [-qy''] + [-q'y'] \text{ , mas } y'' = -g - qy' \text{, então,}\\ &= -q[-g - qy'] - q'y'\\ &= qg + q^2y' - q'y'\\ &= qg + [q^2 - q']y'.\end{aligned}$$

Com os valores de x''' e y''', calcula-se (y''') da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(y''') &= \frac{qg + [q^2 - q']y'}{x'^3} - \frac{y'\{[q^2x' - q']x'\}}{x'^4} - \frac{3\left[\frac{-g}{x'^2}\right][-qx']}{x'^2}\\ &= \frac{qg}{x'^3} + \frac{[q^2 - q']y'}{x'^3} - \frac{[q^2 - q']y'}{x'^3} - \frac{3qg}{x'^2} = \frac{-2qg}{x'^3}.\end{aligned}$$

Contudo, $q = \frac{r}{u} = \frac{r}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$, logo,

$$\begin{aligned}(y''') &= \frac{-2rg}{x'^3\sqrt{x'^2 + y'^2}}\\ &= \frac{-2rg}{x'^4\sqrt{1 + \frac{y'^2}{x'^2}}};\end{aligned}$$

elevando-se $(y'') = \frac{-g}{x'^2}$ ao quadrado obtém-se $(y'')^2 = \frac{g^2}{x'^4}$, ou seja, $x'^4 = \frac{g^2}{(y'')^2}$. E, de $(y') = \frac{y'}{x'}$, chega-se a $(y')^2 = \frac{y'^2}{x'^2}$. A partir disso, tem-se

$$\begin{aligned}(y''') &= \frac{-2rg}{\frac{g^2}{(y'')^2}\sqrt{1 + (y')^2}}\\ &= \frac{-2r(y'')^2}{g\sqrt{1 + (y')^2}},\end{aligned}$$

dado que as funções (y'), (y'') e (y''') dependem somente de x, opta-se em escrevê-las como y', y'' e y'''. E, ao arranjar a equação acima chega-se, finalmente, a relação entre a resistência e a gravidade como sendo

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1 + y'^2}}{2y''^2}. \tag{5.1}$$

A velocidade u é calculada por:

$$u = \sqrt{x'^2 + y'^2} = x'\sqrt{1 + \frac{y'^2}{x'^2}},$$

sabe-se que $(y'') = \frac{-g}{x'^2}$, disso, isola-se $x' = \frac{g}{-(y'')}$ e substitui em u e chega-se em

$$u = \frac{\sqrt{g}\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-y''}}; \tag{5.2}$$

como (y') e (y'') encontram-se, também, em função de x, optou-se, assim como foi feito com $\frac{r}{g}$, escrever y' e y''. Para se escrever (5.1) e (5.2) em termos de diferenciais basta considerar que $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ e $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ para dx constante.

Calcula-se a densidade do meio Δ assumindo que a resistência do meio é proporcional ao produto entre o quadrado da velocidade e Δ, logo,

$$r = mu^2\Delta,$$

m é uma constante proporcional. Ora, conhece-se u, portanto, substitui-se (5.2) na equação acima,

$$r = m\frac{g[1 + y'^2]}{-y''}\Delta.$$

Conhece-se também $\frac{r}{g}$, então, isola-se essa fração e substitui o valor dela conforme (5.1), ou seja,

$$\frac{r}{g} = \frac{m\Delta[1 + y'^2]}{-y''} \rightarrow -\frac{y'''\sqrt{1 + y'^2}}{2y''^2} = \frac{m\Delta[1 + y'^2]}{-y''}$$

ou

$$m\Delta = \frac{y'''}{2y''\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{5.3}$$

Essa equação (5.3) serve para se calcular a densidade do meio quando dada a curva, como também para o inverso, ou seja, dada a densidade, determina-se a curva. Para fins de lançamentos de objetos no ar, supõe-se Δ homogênio e constante; e, por simplicidade, considerar-se-á $2m\Delta = k$,[10] assim, a equação da curva será,

$$2m\Delta = k = \frac{y'''}{y''\sqrt{1 + y'^2}}$$

ou

$$\frac{y'''}{y''} = k\sqrt{1 + y'^2}.$$

[10]Aqui, Lagrange considera $2m\Delta = \frac{1}{k}$ (ibid., p.363). Contudo, tal como Panza, também, verificou (cf. Panza, 1988, p.447), ao considerar $\frac{1}{k}$ Lagrange não teria chegado aos resultados apresentados por ele e, sim, ao seu inverso.

Como a velocidade u é a primeira derivada do arco percorrido s – nesse caso em relação a x, ou seja, s' –, a equação da curva é:

$$\frac{y'''}{y''} = ks'. \tag{5.4}$$

Trata-se de uma equção diferencial ordinária linear de terceira ordem ($y''' - ks'y'' = 0$), cuja solução geral, para esse caso, é dada por $y = Ae^{ks}$, sendo A uma constante arbitrária. Essa é a forma mais simples em que pode ser colocada a equação da curva.

5.2.2 A segunda abordagem: a prop. X e o erro de Newton

Trata-se de uma abordagem mais simples, segundo o próprio autor. A equação da curva pode ser diretamente deduzida a partir das equações do movimento,

$$x'' = -\frac{rx'}{s'} \quad \text{e} \quad y'' = -g - \frac{ry'}{s'},$$

ou seja, pela eliminação imediata do tempo. São as funções x e y dependentes do tempo t, dessa forma, y e t podem ser escritos em função de x,[11] sendo essa última a variável principal e sua derivada (x') igual a uma unidade. Logo, nos lugares de x' e y', colocar-se-ão

$$x' = \frac{(x')}{(t')} = \frac{1}{(t')} \quad \text{e} \quad y' = \frac{(y')}{(t')};$$

e nos lugares de x'' e y'',

$$x'' = \frac{\left(\frac{(x')}{(t')}\right)'}{(t')} = \frac{\frac{(x'')(t')-(x')(t'')}{(t')^2}}{(t')} = \frac{\frac{0-1(t'')}{(t')^2}}{(t')} = -\frac{(t'')}{(t')^3}$$

e

$$y'' = \frac{\left(\frac{(y')}{(t')}\right)'}{(t')} = \frac{\frac{(y'')(t')-(y')(t'')}{(t')^2}}{(t')} = \frac{(y'')}{(t')^2} - \frac{(y')(t'')}{(t')^3}.$$

A velocidade é $u = s' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{(t')}\right)^2 + \left(\frac{(y')}{(t')}\right)^2} = \frac{1}{(t')}\sqrt{1 + (y')^2}$. Agora, basta substituir essas equações encontradas nas equações do movimento, ou seja,

$$x'' = -\frac{rx'}{s'} = -\frac{r\frac{1}{(t')}}{\frac{1}{(t')}\sqrt{1+(y')^2}} = -\frac{r}{\sqrt{1+(y')^2}} = -\frac{(t'')}{(t')^3}$$

[11] Cf. Lagrange, 1813, pp.99-100.

e

$$y'' = -g - \frac{ry'}{s'} = -g - \frac{r\frac{(y')}{(t')}}{\frac{1}{(t')}\sqrt{1+(y')^2}} = -g - \frac{r(y')}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{(y'')}{(t')^2} - \frac{(y')(t'')}{(t')^3}.$$

Dessa última igualdade, substitui-se o valor $-\frac{(t'')}{(t')^3}$ retirado da equação anterior a essa e chega-se a

$$-g - \frac{r(y')}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{(y'')}{(t')^2} + \left[\frac{-r}{\sqrt{1+(y')^2}}\right](y')$$

ou

$$-g = \frac{(y'')}{(t')^2}. \tag{5.5}$$

Articula-se algebricamente a equação (5.5) e tem-se

$$(t')^{-2} = \frac{-g}{(y'')},$$

para, então, derivar

$$-2(t')^{-3}(t'') = \frac{0-(-g)(y''')}{(y'')^2}$$

ou

$$2\frac{-(t'')}{(t')^3} = \frac{g(y''')}{(y'')^2},$$

como $-\frac{(t'')}{(t')^3}$ é conhecido, por substituição encontra-se

$$2\left[-\frac{r}{\sqrt{1+(y')^2}}\right] = \frac{g(y''')}{(y'')^2}.$$

Donde, finalmente, retira-se a razão entre a resistência e a gravidade – tal como no equação (5.1) – como sendo

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} \quad -,$$

pois, sabe-se que (y'), (y'') e (y''') dependem de x de tal forma que se optou escrever sem os parênteses, conforme o mesmo critério adotado acima. Agora, a velocidade é encontrada a partir de $u = \frac{1}{(t')}\sqrt{1+(y')^2}$ e $(t') = \sqrt{\frac{-(y'')}{g}}$, esse último é obtido da equação (5.5), logo,

$$u = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{\frac{-(y'')}{g}}}$$

, ou seja,

$$u = \frac{\sqrt{g}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}$$

conforme a equação (5.2) e o critério utilizado para (y'), (y'') e (y'''). Acaso, g seja variável, toma-se a equação (5.5), deriva-se novamente sob esse novo critério e encontra-se

$$-\frac{2(t'')}{(t')^3} = \frac{g(y''') - g'(y'')}{(y'')^2},$$

e, mais uma vez, substitui-se $-\frac{(t'')}{(t')^3} = -\frac{r}{\sqrt{1+(y')^2}}$, porém, agora na equação de cima e isola-se $\frac{r}{g}$ para se chegar a

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} + \frac{g'\sqrt{1+y'^2}}{2gy'} \tag{5.6}$$

Segundo Lagrange,[12] esse método de eliminar o tempo em equações do movimento além de fornecer um modo mais direto de desenvolvê-las, auxiliou na descoberta da verdadeira fonte do erro onde Newton caiu em sua primeira edição dos *Principia.* Lagrange justifica seu interesse nesse problema e, ainda, apresenta de forma adiantada qual sua conclusão com respeito ao erro de Newton.

> Embora possa parecer sem importância em que e como Newton pode estar errado em uma solução que foi por ele mesmo abandonada, tudo que se diz respeito à invenção e aos primeiros desenvolvimentos da análise infinitesimal merece atenção para aqueles que estão interessados em história da ciência. Pensei que ficaria grato em discutir novamente esse tópico, como um ponto que não foi suficientemente esclarecido, porque trata-se de uma distinção sutil entre o método diferencial e o método das séries que Newton emprega em sua primeira solução (liv.II, prop.X) (ibid.).

Para compreender a conclusão à qual Lagrange chega é preciso percorrer o raciocínio desse autor que se inicia pela reconstrução da solução de Newton encontrada na primeira edição dos *Principia.*

5.2.3 A reconstrução da primeira solução de Newton por Lagrange

Seja um ponto qualquer de uma trajetória semicircular que um corpo percorre num plano perpendicular ao plano do horizonte, conforme a Figura 2 repetida logo abaixo. O móvel desloca-se, sem resistência e sem gravidade, num determinado tempo muito pequeno t, uma parte também pequena da tangente TCF aqui denominada de α, γ é o pequeno espaço que o corpo descreveria acaso a gravidade agisse sobre o corpo nesse mesmo tempo t, e ρ é a resistência que age sobre o corpo no mesmo tempo t reduzindo o espaço percorrido em TCF.

[12] ibid., p.365.

Figura 24: Diagrama geométrico da primeira edição dos *Principia*

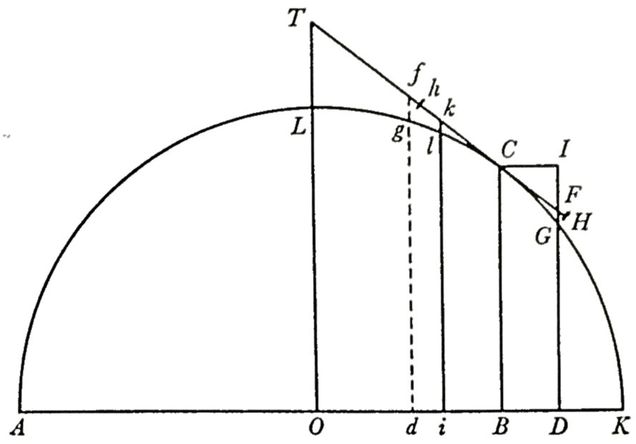


Tabela 3: Interpretação de Lagrange para a solução de 1687

Notação	Segmento
α	$CH(\propto CF)$
γ	FG ou fg
ρ	FH ou fh
$\alpha - \rho$	CG
$\alpha + \rho$	Cg

Assim, no sentido $A \to K$ a partir de C, no mesmo tempo que o corpo chega a percorrer em TCF, o espaço $\alpha - \rho$, o próprio corpo cai verticalmente a quantidade γ, consequentemente, γ é a flecha do arco $\alpha - \rho$ tomada a direita de C. Agora, no sentido contrário, ou seja, $A \leftarrow K$, a partir do mesmo ponto C, a resistência será $-\rho$ devido ao meio nesse sentido favorecer o movimento e não retardá-lo, como é o caso para o sentido $A \to K$. Dessa forma, o espaço percorrido pelo corpo na tangente TCF é $\alpha + \rho$ e o espaço de queda devido a gravidade continua sendo γ, consequentemente, γ é a flecha do arco $\alpha + \rho$ tomada a esquerda de C.

Devido ao tempo do movimento ser infinitamente pequeno, os quadrados tanto dos arcos CG e Cg quanto suas projeções na tangente TCF – ou seja, CF e Cf – são proporcionais às flechas. Tomando no sentido $A \leftarrow K$, calcula-se pela proporção abaixo a flecha kl correpondente a parte $\alpha - \rho$ do arco Cg, ou seja, Cl. Portanto, tem-se

$$kl : \gamma :: (\alpha - \rho)^2 : (\alpha + \rho)^2$$

ou

$$kl = \gamma \left[\frac{\alpha - \rho}{\alpha + \rho}\right]^2. \tag{5.7}$$

Assim, a diferença δ das flechas γ e kl é

$$\delta = \gamma - kl,$$

substitui-se kl de acordo com a equação (5.7), tem-se

$$\begin{aligned} \delta &= \gamma - \gamma \left[\frac{\alpha - \rho}{\alpha + \rho}\right]^2 = \gamma \left\{1 - \left[\frac{\alpha - \rho}{\alpha + \rho}\right]^2\right\} \\ &= \gamma \left[\frac{\alpha^2 + 2\alpha\rho + \rho^2 - \alpha^2 + 2\alpha\rho - \rho^2}{(\alpha + \rho)^2}\right] = \frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha + \rho)^2}, \end{aligned}$$

isole ρ

$$\rho = \frac{\delta(\alpha + \rho)^2}{4\alpha\gamma}$$

e divida a equação acima por γ

$$\rho = \frac{\delta(\alpha + \rho)^2}{4\alpha\gamma} \quad (\div\gamma)$$

ou melhor

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha + \rho)^2}{4\alpha\gamma^2},$$

como $\alpha >> \rho$, então $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha^2}{4\alpha\gamma^2}$, assim, chega-se finalmente à

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}. \tag{5.8}$$

Considere, $\delta = \gamma - kl$ juntamente com os segmentos da Tabela 3 e substitua-os em (5.8), assim, chegamos a

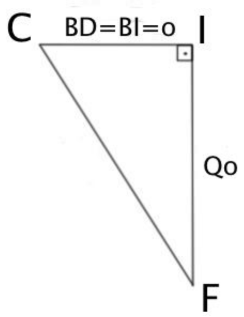
$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^2}$$

o resultado de Lagrange revela-se idêntico ao resultado de Newton contido no Corolário II da primeira edição dos *Principia* (vide equação (3.6)). Segundo o próprio Lagrange, “[e]sse é o raciocínio de Newton apresentado de maneira mais clara (ibid., p.366).”

Agora, considere as abscissas x e as ordenadas y, Newton supôs que quando o ponto C caminha no sentido $A \rightarrow K$, a abscissa x torna-se $x + o$ e a ordenada será expressa pela série $y - Qo - Ro^2 - So^3 \ldots$ É da Figura 25 que se determina CF por meio da aplicação direta do teorema de Pitágoras, ou seja,

$$CF^2 = o^2 + Q^2o^2 = o^2(1 + Q^2) \therefore CF = o\sqrt{1 + Q^2}$$

Figura 25: Detalhe do Δ *CIF* do diagrama da primeira edição dos *Principia* usado, também, por Lagrange



e, tal como Newton já havia considerado, a flecha γ ou ordenada compreendida entre a tangente CF e o arco da curva CG é $FG = Ro^2 + So^3 + \ldots$ Da mesma forma, no sentido $A \leftarrow K$, a flecha referente ao arco Cg é $fg = Ro^2 - So^3 + \ldots$ E, a diferença $FG - fg$ é $\delta = Ro^2 + So^3 + \ldots - [Ro^2 - So^3 + \ldots] = 2So^3 \ldots$ Portanto, ao retomar $\alpha = CF = o\sqrt{1+Q^2}$ tem-se para equação (5.8)

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2} = \frac{2So^3 \ldots o\sqrt{1+Q^2}}{4[Ro^2 + So^3 + \ldots]^2} = \frac{2So^4 \ldots \sqrt{1+Q^2}}{4R^2o^4 \ldots},$$

ao truncar a equação acima até o^4 chega-se ao resultado apresentado por Newton na primeira edição dos *Principia* referente ao Exempl.1 da prop. X, livro II [vide equação (3.8)], ou seja,

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}.$$

Lagrange propõem uma outra notação, quando a abscissa x torna-se $x + o$, y torna-se

$$y + oy' + \frac{o^2}{2}y'' + \frac{o^3}{2.3}y''' \ldots$$

e ao comparar a série acima com a série de Newton, tem-se

$$Q = -y', \;\; R = -\frac{y''}{2} \;\text{ e }\; S = -\frac{y'''}{2.3},$$

agora, substituem-se valores de Q, R e S em $\frac{\rho}{\gamma}$ e obtém-se

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} = \frac{-\frac{y'''}{2.3}\sqrt{1+(-y')^2}}{2\left[-\frac{y''}{2}\right]^2} = \frac{1}{12}.4\frac{-y'''\sqrt{1+y'^2}}{y''^2}$$

$$\therefore \frac{\rho}{\gamma} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}. \tag{5.9}$$

Lagrange encontrou um valor distinto para a mesma razão entre a resistência e a gravidade [vide equação (5.1)], assim, tem-se que

$$\frac{\rho}{\gamma} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2} \neq -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} = \frac{r}{g},$$

"[d]isso segue que a solução de Newton está errada" (ibid., p.367).

> É notável que se substituirmos simplesmente y', y'' e y''' – ou $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^3y}{dx^3}$ – por Q, $-R$ e $-S$ conduzir-nos-emos a um resultado correto, foi isso que levou os Bernoulli por primeiro a descobrir o erro de Newton e todos os dois falaram depois que esse erro cometido por Newton advinha das diferenças de primeiro, segundo e terceiro graus da ordenada [representadas pelos] termos da série $Qo - So^2 - Ro^3 - \ldots$ enquanto que esses termos só seriam iguais na divisão por $1, 2, 6, \ldots$ [nessa ordem]. Mas é fácil de ver que a solução de Newton independe da consideração dessas diferenças e que a substituição dos termos Ro^2 e So^3 – que são γ e $\frac{\delta}{2}$ – na fórmula $\frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$ é legítima. Assim, o erro de Newton deve ser nessa fórmula mesma, que faz a relação entre a resistência e a gravidade, o que se prova sem réplica alguma. Se a gravidade for variável essa mesma fórmula ainda recairia no mesmo [problema] porque nos movimentos direto e retrógrado supõem-se que o corpo desça verticalmente a mesma linha γ. Assim, nesse caso, deve-se também ter uma solução exata para a substituição de y', y'' e y''' no lugar de Q, $-R$ e $-S$, o que não ocorre, como pode ser visto para o valor de $\frac{r}{g}$ que verificamos no caso anterior (ibid., 368).

De fato, verifica-se que se considerarmos g variável, recaímos no mesmo problema. Vejamos a partir de (5.6):

$$\begin{aligned}
\frac{r}{g} &= -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} + \frac{g'\sqrt{1+y'^2}}{2gy'} \\
&= -\frac{[-S]\sqrt{1+Q^2}}{2[-R]^2} + \frac{g'\sqrt{1+Q^2}}{2gQ} \\
&= \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} + \frac{g'\sqrt{1+Q^2}}{2gQ}.
\end{aligned}$$

Justamente conforme Lagrange bem expôs! Ora, se a primeira derivada da gravidade for nula – resultado previsto para a derivada de uma constante – encontramos a expressão falha: $\frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$. Vejamos os detalhes para consideração dessa equação como falsa.

5.2.4 Uma análise mais profunda de Lagrange para encontrar o erro de Newton

Lagrange, então, propõe-se a encontrar a solução de Newton de acordo com a seguinte análise. Seja u o movimento de um ponto sobre uma curva semicircular; $u\theta$, a espaço percorrido sobre a tangente TCF livre da ação da gravidade g e da resistência do meio r num dado tempo θ. As expressões $\frac{g\theta^2}{2}$ e $\frac{r\theta^2}{2}$ são os espaços percorridos em virtude dessas forças consideradas constantes em θ, suposto muito pequeno. Dessa forma, o corpo percorre sob a ação da resistência o espaço tangencial $u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$, nesse mesmo tempo cai da tangente o espaço $\frac{g\theta^2}{2}$, parte da ordena da y, ou seja, a flecha correspondente ao arco CG. Agora, suponha – como fez Newton – que no movimento retrógrado $A \leftarrow K$, com velocidade u e tempo T, o espaço percorrido é de $uT + \frac{rT^2}{2}$ (pois $\theta = -T$), e a flecha correspondente a esse último movimento retrógrado é $\frac{gT^2}{2}$. Sejam os espaços percorridos, nos sentidos $A \rightarrow K$ e $A \leftarrow K$ iguais entre si, assim:

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = uT + \frac{rT^2}{2}$$

ou

$$u\theta = uT + \frac{r}{2}(\theta^2 + T^2);$$

se $\theta = -T$ como suposto, então,

$$u\theta = uT + \frac{r}{2}(\theta^2 + (-\theta)^2)$$

ou

$$u\theta = uT + r\theta^2,$$

isole T para chegar em

$$T = \theta - \frac{r\theta^2}{u}.$$

Se substituir o valor acima em $\frac{gT^2}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{gT^2}{2} &= \frac{g}{2}\left[\theta - \frac{r\theta^2}{u}\right]^2 \\ &= \frac{g}{2}\left[\theta^2 - \frac{2r\theta^3}{u} + \frac{r^2\theta^4}{u^2}\right] \\ &= \frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\theta^3}{u} + \dots, \end{aligned}$$

agora, a diferença entre a duas flechas $\delta = FG - fg = \frac{g\theta^2}{2} - \frac{gT^2}{2}$ é

$$\delta = \frac{g\theta^2}{2} - \left[\frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\theta^3}{u}\right] = \frac{gr\theta^3}{u}. \tag{5.10}$$

Por outro lado, de acordo com a notação aplicada acima,

$$\alpha = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}, \;\; \gamma = \frac{g\theta^2}{2} \;\; \text{e} \;\; \rho = \frac{r\theta^2}{2}$$

, ou melhor,

$$\alpha = u\theta - \rho \therefore u = \frac{\alpha - \rho}{\theta}, \;\; g = \frac{2\gamma}{\theta^2} \;\text{ e }\; r = \frac{2\rho}{\theta^2},$$

substitua na equação (5.10) para chegar em

$$\delta = \frac{\frac{2\gamma}{\theta^2}.\frac{2\rho}{\theta^2}.\theta^3}{\frac{\alpha-\rho}{\theta}} = \frac{\frac{4\gamma\rho}{\theta}}{\frac{\alpha-\rho}{\theta}} = \frac{4\gamma\rho}{\alpha - \rho}, \text{ mas } \alpha >> \rho, \text{ então, } \delta = \frac{4\gamma\rho}{\alpha}.$$

Isole $\rho = \frac{\gamma\alpha}{4\gamma}$ e, agora, divida os dois termos da equação por γ, finalmente chega-se a

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2},$$

exatamente como na equação (5.8). Sabendo-se que $\delta = 2So^3 \ldots$, $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$ e $\gamma = Ro^2 + So^3 + \ldots$ [vide subseção anterior], tem-se

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2} = \frac{2So^3 \ldots o\sqrt{1+Q^2}}{4[Ro^2 + So^3 + \ldots]^2} = \frac{2So^4 \ldots \sqrt{1+Q^2}}{4R^2o^4 \ldots} \rightarrow \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2},$$

"conforme Newton encontrou para essa construção (ibid., p.369)".

O resultado acima advém das seguintes equações:

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2} \;, \;\; \frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3 e$$
$$-uT - \frac{rT^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2} \;\text{ e }\; \frac{gT^2}{2} = Ro^2 - So^3,$$

principalmente de $u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}$ e de $\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3$ – vale resaltar que elas independem de o. Considere a primeira delas $\left[u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}\right]$ em um movimento tangencial $\alpha = u\theta$,

$$\alpha = u\theta \therefore \theta = \frac{\alpha}{u} = \frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u},$$

ao elevar os dois membros da equação ao quadrado obtém-se

$$\theta^2 = \frac{o^2(1+Q^2)}{u^2}.$$

Substitua esse θ^2 em $u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}$:

$$u\theta - \frac{r\left[\frac{o^2\sqrt{1+Q^2}}{u^2}\right]}{2} = o\sqrt{1+Q^2}$$

ou

$$u\theta = o\sqrt{1+Q^2} + \frac{r}{2}\frac{o^2(1+Q^2)}{u^2}.$$

Isole θ e chegue a

$$\theta = \frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}.$$

Agora, substitua esse valor de θ em $\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3$, assim,

$$\frac{g}{2}\left[\frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}\right]^2 = Ro^2 + So^3$$

ou

$$\frac{g}{2}\left[\frac{\theta^2(1+Q^2)}{u^2} + \frac{r^2(1+Q^2)^2o^4}{4u^6} + 2\frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u}\frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}\right] = Ro^2 + So^3.$$

Elimine o termo em o^4, logo,

$$\frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{2u^4} = Ro^2 + So^3.$$

Por comparação direta dos dois membros da equação, tira-se que

$$R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2} \tag{5.11}$$

e

$$S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}. \tag{5.12}$$

Isole u^2 na equação (5.11) $\left[u^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}\right]$ e substitua na equação (5.12):

$$S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2\left[\frac{g(1+Q^2)}{2R}\right]^2} = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2\frac{g^2(1+Q^2)^2}{4R^2}} = \frac{r}{g}.2R^2.(1+Q^2)^{\frac{3}{2}-2} = \frac{r}{g}\frac{2R^2}{\sqrt{1+Q^2}}.$$

Finalmente, isole $\frac{r}{g}$ para se chegar ao resultado de Newton, qual seja,

$$\frac{r}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}.$$

Mas devemos observar que esse resultado acima foi tirado da comparação dos termos afetados por o^3 na transformação da equação $\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3$ que pode não estar correta, porque o primeiro membro dessa equação, que é a expressão da flecha [do arco CG] no tempo, é em si mesmo correto como uma aproximação até θ^3. De tal sorte que, a rigor, tem-se apenas o resultado correto até $R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}$, obtido pela comparação de termos de segunda ordem. Para ter, dessa maneira, o valor correto de $\frac{r}{g}$ na dedução dos termos afetados por o^3, a expressão da flecha em θ teria que ser ela mesma correta inclusive até θ^3, mas o termo que deve seguir $\frac{g\theta^2}{2}$ não é dado imediatamente pelos princípios da Mecânica, pode-se apenas encontrar pela lei da derivação da seguinte maneira (ibid., pp.370-1).

Segundo a hipótese de Newton (vide subseção anterior), quando x aumenta para $x+o$, y tornar-se-á $Qo - Ro^2 - So^3 - \dots$ Sendo $o\sqrt{1+Q^2} = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$ e $Ro^2 + So^3 = \frac{g\theta^2}{2}$ (onde θ é o aumento de tempo que corresponde ao aumento o da abscissa x), segue-se: se o tempo t torna-se $t+\theta$, então x será $x+o$. Ora, para calcular $x+o$ de $o\sqrt{1+Q^2} = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$, isola-se o – ou seja, $o = \frac{u\theta}{\sqrt{1+Q^2}} - \frac{r\theta^2}{2\sqrt{1+Q^2}}$ – e substitui em $x+o$ desse modo:

$$x + o = x + \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\frac{\theta^2}{2}. \tag{5.13}$$

O aumento em y, em função do aumento da abscissa $x+o$, será em função do aumento do tempo $t+\theta$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_{x+o} &= y + Qo - Ro^2 - So^3 \dots \\ &= y + Q\left[\frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\frac{\theta^2}{2}\right] - g\frac{\theta^2}{2} \\ &= y + \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}}\frac{\theta^2}{2} - g\frac{\theta^2}{2}\text{ , finalmente,} \end{aligned}$$

$$y_{t+\theta} = y + \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \left[\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} + g\right]\frac{\theta^2}{2}. \tag{5.14}$$

As funções derivadas x', x'',..., y', y'',... em relação a t, quando inseridas em x e y no momento em que o tempo aumenta em $t+\theta$ têm-se

$$x + o = x + x'\theta + x''\frac{\theta^2}{2} + x'''\frac{\theta^3}{2.3}\dots$$

e

$$y_{t+\theta} = y + y'\theta + y''\frac{\theta^2}{2} + y'''\frac{\theta^3}{2.3}\dots$$

Mais uma vez, por comparação direta, têm-se:

$$x' = \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}\ ,\ \ x'' = -\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}$$

e

$$y' = \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}\ ,\ \ y'' = -\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} - g.$$

Ao mesmo tempo que x e y tornam-se $x+o$ e $y + Qo - Ro^2 - So^3 - \dots$, tem-se, também, que

$$o = \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}\theta + \left[-\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\right]\frac{\theta^2}{2} = x'\theta + x''\frac{\theta^2}{2} + x'''\frac{\theta^3}{2.3} + \dots$$

e

$$Qo - Ro^2 - So^3 - \dots = y'\theta + y''\frac{\theta^2}{2} + y'''\frac{\theta^3}{2.3} + \dots$$

Assim, como a flecha do arco CG é expressa, em geral, por $Ro^2 + So^3 + \ldots$ então sua equação, dependente de θ, será

$$Qo - Ro^2 - So^3 - \ldots = y'\theta + y''\frac{\theta^2}{2} + y'''\frac{\theta^3}{2.3} + \ldots$$

ou

$$Qo - y'\theta - y''\frac{\theta^2}{2} - y'''\frac{\theta^3}{2.3} - \ldots = Ro^2 + So^3,$$

mas como se tem o valor de $o = x'\theta + x''\frac{\theta^2}{2} + x'''\frac{\theta^3}{2.3} + \ldots$, logo,

$$Q\left[x'\theta + x''\frac{\theta^2}{2} + x'''\frac{\theta^3}{2.3} + \ldots\right] - y'\theta - y''\frac{\theta^2}{2} - y'''\frac{\theta^3}{2.3} - \ldots = Ro^2 + So^3$$

ou

$$(Qx' - y')\theta + (Qx'' - y'')\frac{\theta^2}{2} + (Qx''' - y''')\frac{\theta^3}{2.3} + \cdots = Ro^2 + So^3. \tag{5.15}$$

Substitua x', y', x'' e y'', para chegar em:

$$\left[Q\frac{u}{\sqrt{1+Q^2}} - \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}\right]\theta + \left[Q\left\{-\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\right\} - \left\{-\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} - g\right\}\right]\frac{\theta^2}{2}\ldots$$
$$\ldots + (Qx''' + y''')\frac{\theta^3}{2.3} + \ldots = Ro^2 + So^3.$$

Iguale o termo em $\frac{\theta^2}{2}$ a g e chegue a

$$Q\underbrace{\left\{-\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\right\}}_{x''} - \underbrace{\left\{-\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} - g\right\}}_{y''} = g$$

$$Qx'' - y'' = g \tag{5.16}$$

ou

$$y'' = Qx'' - g.$$

Donde tira-se que

$$[y'']' = y''' = [Qx'' - g]' = Q'x'' + Qx'' - 0,$$

ou, ainda,

$$Qx''' - y''' = -Q'x''. \tag{5.17}$$

Para encontrar Q', tome y' da seguinte forma:

$$y' = Q\frac{u}{\sqrt{1+Q^2}} = Qx' \therefore Qx' - y' = 0. \tag{5.18}$$

Agora, derive y' em relação a x

$$[y']' = y'' = Q'x' + Qx'',$$

isole Q'

$$Q' = \frac{y'' - Qx''}{x'},$$

mas $y'' = Qx'' - g$ ou $y'' - Qx'' = -g$, logo, substitua essa expressão na de cima

$$Q' = \frac{-g}{x'}.$$

Assim, com o valor de Q' retome a equação (5.17)

$$Qx''' - y''' = -\left[\frac{-g}{x'}\right] x'' = g\frac{x''}{x'}.$$

Ora, são $x' = \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}$ e $x'' = -\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}$, portanto,

$$Qx''' - y''' = g\frac{-\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}}{\frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}} = -g\frac{r}{u} \therefore Qx''' - y''' = -g\frac{r}{u}. \tag{5.19}$$

Com a expressão da flecha do arco CG [vide equação (5.15)] pode-se determinar o valor de Ro^2+So^3, pois se têm as equações (5.18), (5.16) e (5.19) prontas para serem substituidos, ou melhor:

$$(Qx' - y')\theta + (Qx'' - y'')\frac{\theta^2}{2} + (Qx''' - y''')\frac{\theta^3}{2.3} + \cdots = Ro^2 + So^3$$

ou

$$(0)\theta + (g)\frac{\theta^2}{2} + (-g\frac{r}{u})\frac{\theta^3}{2.3} + \cdots = Ro^2 + So^3$$

ou, ainda, para os termos até θ^3 (inclusive), tem-se, finalmente, que

$$Ro^2 + So^3 = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{gr}{u}\frac{\theta^3}{6}. \tag{5.20}$$

Assim, no lugar da equação $Ro^2+So^3 = g\frac{\theta^2}{2}$ tem-se, aqui, $Ro^2+So^3 = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{gr}{u}\frac{\theta^3}{6}$ (correta até a terceira ordem infinitesimal). Conhece-se o valor de $\theta = \frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}$ [vide subseção anterior], então, para $Ro^2 + So^3 = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{gr}{u}\frac{\theta^3}{6}$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&Ro^2 + So^3 = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{gr}{u}\frac{\theta^3}{6} \\
&= \frac{g}{2}\left[\frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}\right]^2 - \frac{gr}{6u}\left[\frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}\right]^3 \\
&= \frac{g}{2}\left[\frac{o^2(1+Q^2)}{u^2} + \frac{2o\sqrt{1+Q^2}}{u}\frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3} + \frac{r^2(1+Q^2)^2o^4}{4u^6}\right] - \frac{gr}{6u}\ldots \\
&\ldots\left[\frac{o^3(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3} + \frac{3o^2(1+Q^2)}{u^2}\frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3} + \frac{3o\sqrt{1+Q^2}}{u}\frac{r^2(1+Q^2)^2o^4}{4u^6} + \frac{r^3(1+Q^2)^3o^6}{8u^9}\right].
\end{aligned}
$$

Eliminam-se os termos superiores a $\o^3$:

$$
\begin{aligned}
Ro^2 + So^3 &= \frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{2u^4} - \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{6u^4} \\
&= \frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{3gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{6u^4} - \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{6u^4} \\
&= \frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{2gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{6u^4} \\
&= \frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{3u^4}.
\end{aligned}
$$

Por comparação, chega-se a

$$R = \frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} \tag{5.21}$$

e

$$S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{3u^4}. \tag{5.22}$$

Da equação (5.21), isola-se $u^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}$ e substitui-se na equação (5.22), logo:

$$S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{3\left[\frac{g(1+Q^2)}{2R}\right]^2} = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3g^2(1+Q^2)^2}{4R^2}} = \frac{4R^2r}{3g}(1+Q^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Isole $\frac{r}{g}$ *et voilá*!

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2} \tag{5.23}$$

Chega-se ao "valor que Newton determinou, depois, na segunda edição de seus *Principia* (liv.II, prob,III) e vimos que pelos valores y', $-\frac{y''}{2}$ e $-\frac{y'''}{2.3}$ nos lugares de Q, R e S; tem-se (ibid., p.373)":

$$\frac{r}{g}=\frac{3\left[-\frac{y'''}{2.3}\right]\sqrt{1+[y']^2}}{4\left[-\frac{y''}{2}\right]^2}=\frac{-\frac{y'''}{2}\sqrt{1+y'^2}}{4\frac{y''^2}{4}}=\frac{-y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}.$$

Finalmente, a solução correta em concordância com a equação (5.1).

5.2.5 O erro de Newton por Lagrange

Já sabemos que Newton somente chegou ao resultado correto quando considerou duas tangentes sucessivas (ou dois arcos consecutivos da curva), enquanto, na primeira edição dos *Principia* (cujo resultado demonstrado foi falho) ele considerou uma única tangente prolongada para ambos os lados a partir de um ponto de tangência. Para Lagrange, é necessário mostrar como se pode chegar ao resultado correto levando-se em conta o modelo da primeira edição, sem se distânciar do "espírito dessa solução", qual seja, a aplicação do método das séries.[13] Por esse método, pode-se encontrar a equação do problema ou por meio dos primeiros termos da série desenvolvida para a ordenada ou por meio do desenvolvimento de uma função que satisfaça as condições mecânicas ou geométricas do problema em questão. É nisso que consiste o método das séries de Newton, cuja distinção com relação ao método das diferenças das funções derivadas se dá pela abordagem indireta à equação, ou seja, por meio dos termos da série aplicada, justamente o oposto do acesso direto que o método das diferenças das funções derivadas proporciona.

Nota-se que a construção empregada por Newton na segunda edição leva a uma razão entre a resistência e a gravidade similar à da primeira edição (que é $\frac{\rho}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$), essa expressão, como visto, não está correta. A diferença se dá pela quantidade δ que na primeira edição representa a diferença das flechas dos arcos CG e Ck – porções iguais da mesma tangente tomadas à direta e à esquerda do ponto de contato (cujos correspondetes na abscissa x são o e $-o$) –, mas na segunda, δ exprime a diferenças entre as flechas de dois arcos consecutivos tomados do mesmo lado e que conrrespondem a partes iguais o da abscissa x. Para encontrar essas flechas, Newton tomou a correspondente na ordenada y ao aumento o na abscissa x, ou melhor, $x+o$, ou seja, pela aplicação da série $P+Qo+Ro^2+So^3+\ldots$ Mas ele determinou as flechas pelo método das diferenças, ao tomar a diferença entre uma ordenada intermediária e a metade da soma de suas duas ordenadas adjacentes. Assim, ao considerar as três ordenadas correspondentes as abscissas $x-o$, x e $x+o$, Newton encontra a flecha $LH=Ro^2$, e ao considerar mais uma vez três

[13]Ibid., p.374.

ordenadas correspondentes, mas agora para as abscissas x, $x+o$ e $x+2o$, ele encontra a flecha $NI = Ro^2 + 3So^3$ e, a diferença δ entre essas duas flechas é $3So^3$. Como na primeira solução, basta apenas substituir $\delta = 3So^3$, $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$ e $\gamma = Ro^2$ em $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$ para se obter a expressão correta $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2}$. Portanto, a falha não estava nessa expressão $\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$ (ela mesma), e sim no termo δ, o qual na primeira edição foi calculado erroneamente como $2So^3$.

Segundo a notação de Lagrange, a ordenada y tornar-se-á $y+y'o+y''\frac{o^2}{2}+y'''\frac{o^3}{2.3}+\ldots$ quando toma-se o incremento da abscissa $x+o$. A parte da tangente que corresponde à o é $o\sqrt{1+Q^2}$, ou seja, α. A parte da ordenada entre a curva e a tangente, ou a flecha, é $y''\frac{o^2}{2}+y'''\frac{o^3}{2.3}+\ldots$ que é justamente o valor de γ. Dessa forma, tem-se $\frac{\alpha}{4\gamma^2} = \frac{\sqrt{1+Q^2}}{y''^2o^3}$. Agora, δ, na primeira edição dos *Principia*, é δ_1 a diferença entre as flechas que correspondem a $x+o$ e a $x-o$ igual $y'''\frac{o^3}{3}$. Já na segunda edição, δ_2 é a diferença das flechas correspondentes a x e $x+o$ (ou quando x torna-se $x+o$ ou, ainda, quando a ordenada y'' torna-se $y''+y'''o+\ldots$), disso segue-se que os termos o^4 e superiores são descartados para se chegar ao valor da segunda flecha, como sendo $y''\frac{o^2}{2}+y'''\frac{4o^3}{2.3}$, logo, a diferença δ_2 das flechas é $y'''\frac{o^3}{2}$. Então, sendo $\frac{\delta\alpha}{4\gamma^2} = \frac{\delta o\sqrt{1+Q^2}}{y''^2o^4+\frac{y'''}{9}o^6\ldots}$ ao substituir $\delta_1 = y'''\frac{o^3}{3}$ e $\delta_2 = y'''\frac{o^3}{2}$, obtêm-se dois resultados: $\frac{y'''\sqrt{1+Q^2}}{3y''^2}$ e $\frac{y'''\sqrt{1+Q^2}}{2y''^2}$. Como já visto, o primeiro desses é falso, a razão está na falta de precisão no cálculo da diferença δ entre as flechas tomadas para primeira edição como sendo relevantes apenas até a segunda ordem diferencial.

5.3 A interpretação de Marco Panza

Marco Panza abordou o problema acerca do erro de Newton por meio do trabalho de Lagrange. A premissa central de Panza diz respeito aos métodos sintético e analítico que subjazem os procedimentos aplicados pelos dois matemáticos a saber, Newton e Lagrange. Embora, eles tenham tratado de formas diferentes o mesmo problema, segundo Panza, suas resoluções são tradutíveis entre si, ou melhor, que a demonstração sintética de Newton é tradutível na desmonstração analítica de Lagrange[14] e, ainda, que "Newton resolve um problema específico, a escolha de uma linguagem e de um procedimento demonstrativo intrinsicamente ligado a ela; Lagrange nada mais faz a não ser aplicar princípios e métodos gerais a um exemplo".[15] Por essas palavras, verifica-se um outro ponto levantado por Panza, uma mudança de origem epistemológica. O problema mecânico é o ensejo, tanto para uma abordagem vinculada a uma representação geométrica, própria do século XVII, quanto para uma abordagem analítica de um sistema de equações diferenciais, coerente com a matemática do final do século XVIII. Em suma, Panza apresenta esses dois aspectos como indicadores de um processo de desenvolvimento da matemática. Seja por uma maneira diferente de conceber os objetos de investigação matemática, seja por uma evolução do conhecimento matemático. Lagrange, aos olhos de Panza, revela em sua solução uma genealogia que remete a um tempo anterior a Johann Bernoulli com seu artigo de 1711 e anterior a Newton com sua segunda edição dos *Principia.* A solução lagrangiana remonta à tentativa de Varignon de construir uma teoria geral do movimento resistente oriunda de um único método geral.[16]

O esforço de Panza em apresentar essa ligação intrínsica é, na verdade, para justificar sua interpretação do erro de Newton. Seu caminho perpassa duas edições do *Théorie des Fonctions Analytiques*, a de 1797 e a de 1813, para explicitar o erro de Newton. Na seção anterior, escolhemos apresentar os cálculos de Lagrange contidos na segunda edição por se tratar de uma versão mais recente e, principalmente, revisada. Diferente de Panza, tal escolha não faz parte de um contexto mais amplo de justificação.

5.3.1 Um retorno à primeira edição dos *Principia*

Panza utiliza algumas transformações de Lagrange – conhecidas por nós pela segunda edição do *Théorie des Fonctions Analytiques* – para justificar o raciocínio de Newton. Vejamos, então, mais uma vez, a prop. X ou problema III conforme exposto por Panza. Ora, seja a curva ACK dada percorrida por um móvel lançado em um meio resistente, com uma velocidade variável e indeterminada, a partir de um ponto C sobre a curva, depois de um determinado tempo atinge G. Essa posição é determinada por Newton no tempo por meio da ação de três forças que provocam o movimento. Se o incremento de tempo o for infinitamente pequeno, as forças podem ser consideradas constantes em intesidade e direção. São essas forças, no transcorrer de o, as seguintes: inércia (que tomada isoladamente, conduz o corpo na direção tangencial para H); gravidade (que puxa o corpo para P); e a resistência (que em conjunto com a gravidade leva o corpo para G).

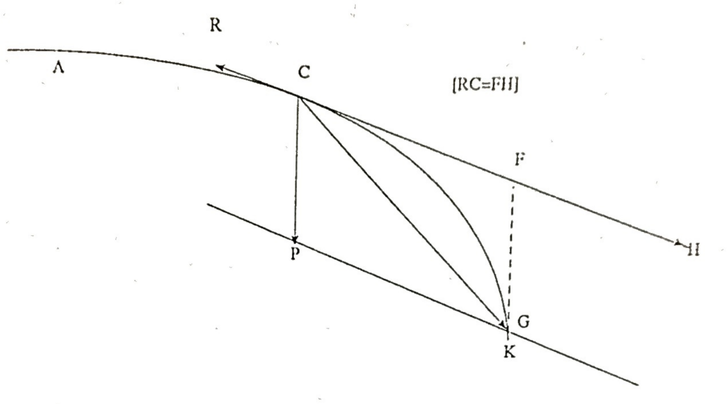
Newton assume que os pontos P, H e G estão dispostos de tal forma que G encontra-se sobre a reta paralela a CH e a uma distância CP menor que CH. São as

[14]Cf. Panza, 1988, pp.455-6.

[15]Ibid., p.448.

[16]Cf. Varignon, P., 1707. *Des mouvements primitivament variés dans des millieux resistens en raison des quarrés des vitesse effectives de ces mouvements*, Hist. Acad. Roy. Sci., Mem. Math. et Phy., 1709(pub.1711), pp.193-227.

Figura 26: Movimento de um corpo sobre a curva ACK



forças de inércia e resistência tangenciais e dispostas na mesma direção sobre CH, porém, em sentidos contrários. A proporcionalidade entre os espaços e o produto das forças com os quadrados dos tempos permite escrever [vide equação (3.1)]:[17]

$$\frac{r}{g} = \frac{FH}{FG} \tag{5.24}$$

ou, numa forma mais moderna,

$$\frac{r_t}{g} = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{FH}{FG} \right] \left[\begin{array}{c} FH = \rho = \rho(t, \theta) \\ FG = \gamma = \gamma(\theta) \end{array} \right]. \tag{5.25}$$

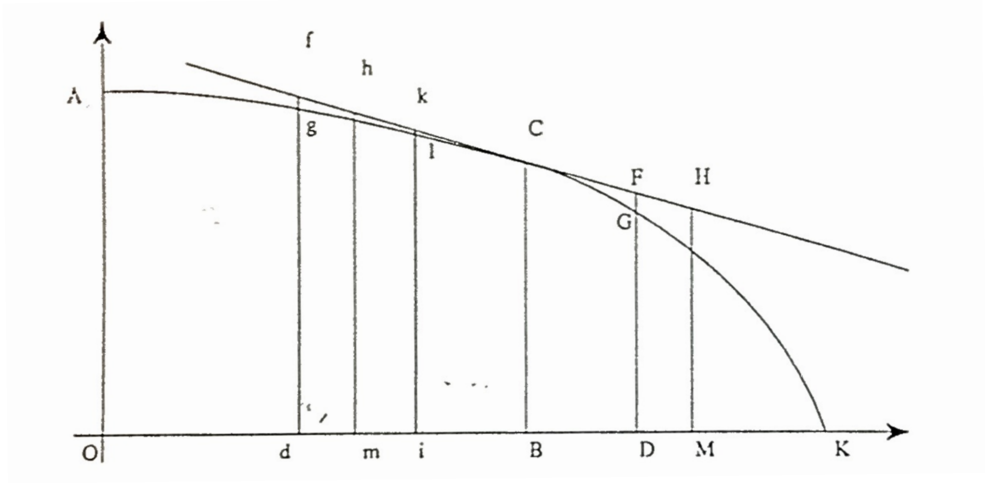
Pede-se para determinar a densidade do meio, a resistência e a gravidade para um mesmo tempo. Bem, o problema possui solução, segundo Panza, basta observar a Figura 26 que se torna evidente a condição de codirecionalidade entre resistência e inércia em conjunção com gravidade para encontrar G. Mas o problema se torna tal que Newton se esforça para exprimir a relação entre resistência e gravidade, ou seja, $\frac{FH}{FG}$ (para um tempo qualquer o limite dessa relação) em função apenas de uma propriedade da curva ACK. Para Panza, é "essa a finalidade que visa a segunda parte da demonstração de Newton onde reside o erro".[18]

Considere a Figura 27, então, $OB = x$, $BC = y_x$ e $x = x_t$, tem-se:[19]

$$FH = \frac{\theta^2}{2} \left[-x_t'' - x_t''' \frac{\theta}{3} - \cdots \right] \sqrt{1 + [y_{x_t}']^2}, \tag{5.26}$$

[17]Cf. Newton, 1687, p.28, Lem.X, liv.I.
[18]Cf. Panza, 1988, p.454.

Figura 27: Representação do diagrama geométrico da primeira edição dos *Principia*



quando dividido pela gravidade, como dita Galileu para a queda dos corpos, chega-se a

$$\frac{r_t}{g} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\theta^2}{2}\left[-x_t'' - x_t'''\frac{\theta}{3} - \cdots\right]\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}}{g} = \frac{-x_t''\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}}{g}. \tag{5.27}$$

Da equação (5.27) encontra-se a solução de Lagrange, se substituir $x_t'' = -\frac{t_x''}{[t_x']^3}$ e $\frac{t_x''}{[t_x']^3} = -\frac{g y'''_{x_t}}{2[y''_{x_t}]^2}$ [vide subseção 5.2.2], ou seja:

$$\frac{-x_t''\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}}{g} = \frac{-\left(-\frac{g y'''_{x_t}}{2[y''_{x_t}]^2}\right)\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}}{g} \therefore \frac{r_t}{g} = \frac{-y'''_{x_t}\sqrt{1+[y'_{x_t}]^2}}{2[y''_{x_t}]^2}.$$

Panza toma a reconstrução acima – que separa a demonstração de Newton em duas faces distintas, apresentadas nas duas primeiras edições do *Principia* – como ponto de partida de seu trabalho, qual seja, o esforço tanto de Lagrange quanto de Newton de eliminar o tempo. Lagrange parte de uma equação geral do movimento dependente do tempo e a transforma numa equação dependente do espaço. Newton, por sua vez, decompõe o movimento transcorrido num intervalo de tempo infinitesimal e executa uma transformação (envolvendo elementos geométricos do diagrama) de uma relação dependente da velocidade instantânea em um relação independente disso.

No curso do desenvolvimento da estrutura matemática apresentada na *editio princeps* de Newton, os segmentos dependentes da velocidade pontual, sustenta Panza, não se diferem da quantidade indeterminada em uma demonstração analítica usual, posto

[19]Ibid., pp.482-3.

que a razão $\frac{FH}{FG}$ foi reduzida a uma relação dependente somente do incremento $BD(= o)$ (entendido como a componente horizontal do movimento durante um intervalo de tempo θ). Esse segmento pode ser tomado como uma quantidade interderminada devido à indeterminação do tempo. Então, BD assume o papel de um parâmetro espacial totalmente independente da velocidade. Finaliza Panza, “[por] trás da profunda diferença entre as linguagens utilizadas, o plano de demonstração de Newton e de Lagrange parece, então, essencialmente o mesmo”.[20]

O artifício de Newton para justificar a transformação da expressão geométrica dependente da velocidade para outra independente dela está na introdução do movimento retrógrado imaginário, cujas propriedades estão totalmente ausentes em seu resultado final. A analogia entre os métodos de resolução de Newton e de Lagrange tornam-se ainda mais estreitas no corolário II. Vejamos com mais detalhes. Panza retoma a solução da primeira edição em suas quatro partes: os dois corolários, sendo o segundo subdivido em mais dois. O corolário I apresenta:

$$FH = \frac{fC - CF}{2} \text{ e}$$
$$\frac{fC - CF}{CF}\left[= \frac{FG - kl}{kl + \sqrt{FG \times kl}}\right] = \frac{FG - kl}{2FG}, \tag{5.28}$$

onde kl é substituido por FG no radicando do denominador na equação (5.28), e $FG + kl$ foi considerado muito próximo de $2FG$. O corolário II, primeira parte, consiste no uso da expressão anterior para apresentar, de forma trivial, a equação (5.24) nos seguintes termos:

$$\frac{r}{g} = \frac{CF(FG - kl)}{4(FG)^2}. \tag{5.29}$$

Por fim, na segunda parte do corolário II, têm-se as relações:

$$i)\ CF = [v_t\theta - FH] = v_t\theta \text{ e}$$
$$ii)\ FG = \frac{1}{2}g\theta^2.$$

Delas, em conjunção com as equações (5.24) e (5.28), chega-se a relação

$$\Delta \propto \frac{fC - CF}{(CF)^2} = \frac{FG - kl}{(FG + kl)CF}. \tag{5.30}$$

[20]Ibid., p.453.

Então, afirma Panza, a determinação da resistência é completamente independente da densidade e da hipótese da proporção do quadrado da velocidade que aparece apenas na equação (5.30). Assim, num olhar mais detalhado, o corolário II não se segue do corolário I e nem dessa proporção. Segue-se apenas de algumas expressões exploradas no contexto da demonstração de Newton. Ora, o enunciado do problema pede para determinar a densidade e a velocidade. Disso, pode-se pensar que o papel do corolário II seja de permitir a passagem da equação (5.30) para o valor da velocidade. Todavia, os resultados obtidos nas equações (5.29) e (5.30), graças à hipótese $r \propto \Delta v_t^2$, são exatamente os mesmos quando se compõem i) e ii) com as equações (5.30) e (5.28). Portanto, o corolário II não contém algum resultado que requeira essa proporção. A conjunção da equação (5.29) com i) e ii) proposta no corolário III (dado que $r \propto \Delta v_t^2$), resulta em:

$$K\Delta = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} = \frac{y_x'''}{3y_x''\sqrt{1+[y_x']^2}}. \tag{5.31}$$

Newton não podia aparecer com uma ferramenta para tentar "às cegas" encontrar uma aproximação (pelo menos local) da trajetória a partir da resistência em um meio homogêneo, que resiste na proporção direta com a velocidade ao quadrado. Então, para concluir, o papel do corolário II parece ser o de unir o problema do movimento retrógrado ao problema do movimento progressivo.

Continua Panza, a equação (5.31) fornece uma relação analítica e não uma determinação geométrica aproximada da trajetória, além de sua imprecisão devido à presença excessiva de um fator constante (K) igual a $\frac{2}{3}$. A ligação entre os dois problemas, progressivo e retrógrado, não era evidente ao final do século XVII. Primeiro, porque a interpretação da equação (5.31) era como uma equação fuxional de terceira ordem que requer saber a forma geral do desenvolvimento (em séries) de Taylor, pois o tratamento do *Exempl.1* demonstra que Newton já tinha conhecimento disso naquele tempo dos *Principia*, antes mesmo da publiblicação do *De quadratura* (1704). Por segundo, o único instrumento que Newton tinha para integrar em 1687 era o método das séries infinitas formulado no *De methodis* (1671), que possui a limitação de resultar apenas numa aproximação local da curva. Por terceiro, enfim, a curva nos *Principia* não foi precisamente equacionada, aliás, devido à oposição bem conhecida entre geométrico e analítico.

5.3.2 A tese da tradutibilidade entre sintético e analítico em Newton

Seja a conexão estabelecida entre os problemas do movimento retrógrado e do movimento progressivo por meio do corolário II uma hipótese cujas marcas são a limitação inerente à abordagem geométrica e à dificuldade de encontrar o que o próprio Newton solicita na prop. X. Se a demostração de Newton é conduzida por um procedimento sintético e a forma com que ele atribui ao resultado final é o método proposto pelo corolário III, então é claramente manifesto que Newton se preocupou em fornecer uma fácil tradução analítica do procedimento sintético. O caráter específico da tradução proposta por Newton, segundo Panza, é o último elemento significativo de analogia com a demonstração lagrangiana.[21]

Newton compreende um elemento geométrico em termos das parcelas, uma série infinita convergente ao invés de fazer referência explícita à noção de fluxão. Assim, se o resultado é claramente obtido por meio de um procedimento infinitesimal, então pode ser entendido, enquanto tal, como uma regra projetada para encontrar a razão procurada, em qualquer caso particular, por meio de um procedimento *standart* dependente, somente, das leis da álgebra. Portanto, Newton apresenta uma interpretação implícita de uma fluxão em uma ordem diversa que parece corresponder àquela proposta por Lagrange em 1797 que consiste em entender tal fluxão como o coeficiente sucessivo do desenvolvimento em série da função primitiva que é, por sua vez, obtido por um procedimento algébrico independente, qual seja, atribuir à variável um incremento indeterminado e arbitrário.

5.3.3 Crítica de Panza à analise de Whiteside

Antes de Panza iniciar sua análise, ele apresenta um breve comentário a respeito da interpretação de Whiteside [vide seção 5.1], vejamos:

> Recentemente, Whiteside chegou à conclusão de que tal origem [do erro de Newton] encontra-se na negligência da componente vertical da força de resistência que contrubui (juntamente com a força da gravidade) para gerar o segmento FG (que não pode, assim, ser considerado como proporcional a essa última). Uma tal leitura do raciocínio de Newton, que é ela própria, sem dúvida, esclarecedora, deve, parece-me, ser melhor especificada (PANZA, 1988, p.457).

No curso da demonstração, os segmentos CF e FG são, na primeira edição dos *Principia*, compreendidos por Newton de duas maneiras diferentes, como: o espaço percor-

[21] Ibid., p.456.

rido pelo móvel, durante o tempo θ, onde atuam isoladamente a gravidade e a resultante da composição da inércia e da resistência pontual; e como diferenças, relativas à curva, determinadas pela posição efetiva G [vide Figura 27] que o móvel assume no instante $t+\theta$. A consideração de um tempo infinitamente pequeno (o nascente), durante o qual as forças permanecem constantes em intensidade e direção, permite essa comparação. Ora, tão só a indentidade que essa comparação produz – não a identidade no limite onde o torna-se de segunda ordem – não permite, portanto, substituições indiscriminadas tais como Newton, ao contrário, fez. Tal substituição corresponde, em última análise, a omitir o infinitesimal de ordem superior, tornando iguais certos segmentos que são somente iguais em suas primeiras ordens. Isso, pode conduzir, talvez, à tentação de reconstruir a demonstração de Newton utilizando diretamente o instrumento analítico do desenvolvimento em série infinita convergente para exprimir o valor do segmento considerado, interpretando a inferência em termos do princípio de omissão.

Uma reconstrução, tal como essa descrita acima, tem, no entanto, um defeito que parece capital. À luz desse erro, "resulta não só evidente, mas até mesmo banal e, portanto, inexplicável, resolver equiparar, também, rapidamente, no curso do mesmo raciocínio, que se refere, em ocasião diversa, a segunda ou a terceira ordem".[22] Usar isso para exprimir a falácia na dedução de Newton é, para Panza, de mínima ajuda para a dinâmica intrínseca da falha.

5.3.4 As reconstruções de Lagrange das demonstrações de Newton por Panza

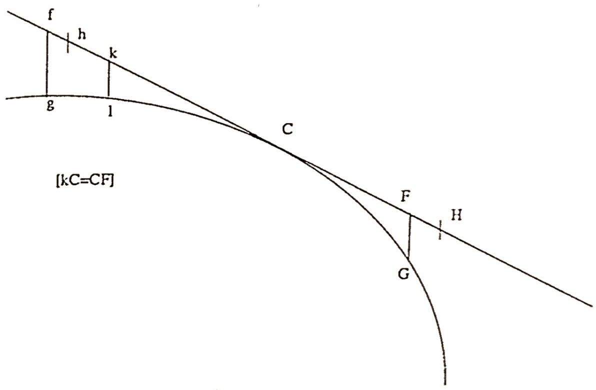
O objetivo declarado pela análise – ou melhor, da reconstrução feita por Lagrange das demonstrações newtonianas – é de identificar o erro de Newton e de descobrir, por assim dizer, a origem de tal falha. Curiosamente, Lagrange apresenta diferentes estudos a respeito das demonstrações de Newton: um encontra-se na primeira edição da *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797), o outro na segunda edição (1813). Panza utiliza essas duas edições para explicitar qual foi, para ele, o erro de Newton. Vejamos:

O núcleo do argumento de Newton na *editio princeps* foi expresso por Lagrange (na edição de 1813) em uma notação que favoreceu uma maior agilidade [vide subseção 5.2.2] do seguinte modo: a partir da Figura 28, considere as igualdades

- $CH = hC = \alpha$;

[22] Ibid., p.457.

Figura 28: Detalhe da tangente na primeira edição dos *Principia*



- $FH = fh = \rho$;
- $fC - CF = 2FH = 2fh = 2\rho$ e
- $FG = fg = \gamma$.

A correção advém ao considerar um tempo infinitamente pequeno tal que a direção da tangente em relação à curva seja invariável. O mesmo diagrama geométrico mostra como as igualdades acima exprimem a equiparação entre identidades geométricas e mecânicas mencionadas acima. Ao aceitar indiscriminadamente tal premissa – ou melhor, ao considerar γ como a flecha comum dos arcos CG e gC, não como o limite comum das duas flechas diferentes –, Lagrange resume a falha na dedução de Newton no corolário II nos seguintes termos. Seja a flecha da curva lC, tomanda a esquerda de C, subtendida pelo segmento tangentcial $\alpha - \rho$, como $\gamma^*(= kl)$. Uma vez que, nos arcos infinitamente pequenos, as flechas estão para esses arcos assim como, os arcos estão para os quadrados dos segmentos tangentes, tem-se:

$$\gamma^* = \gamma \left[\frac{\alpha - \rho}{\gamma + \rho}\right]^2 \tag{5.32}$$

disso, encontra-se

- $\delta = \gamma - \gamma^* = \gamma \left[1 - \left(\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right)^2\right]$,
- $\rho = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma}$ e
- $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma^2}$.

Ao omitir ρ, com respeito a α, (que desenvolvendo a série infinita convergente relativa a curva, segundo um incremento determinado ω, torna-se infinitamente pequeno) chega-se a

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho}{\gamma} \quad & = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}\left[= \frac{(FG-kl)FG}{4(FG)^2}\right] = \frac{FH}{FG} = \frac{r_t}{g} = \\
& = \frac{\sqrt{1+[y'_x]^2}\left[-\frac{y'''_x}{3} - \frac{y^{(5)}}{3.4.5}\omega^2 - \cdots\right]}{[y''_x]^2 + \frac{2}{3}[y''_x.y'''_x]\omega + \ldots} \\
& = \frac{-y'''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}{3[y''_x]^2} \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

Panza acrescenta o seguinte:

> Para justificar a identidade $\left[\delta = \gamma\left\{1 - \left(\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right)^2\right\}\right]$ (que reproduz o resultado de Newton na sua forma original), nota-se que tanto γ quanto a flecha do arco gC são entendidas como a flecha do arco CG. Em seguida, δ é considerado tanto como a diferença entre as flechas dos arcos gC e lC, quanto como a diferença entre as flechas dos arcos CG e lC. Ora, e também ρ é omitido relativamente a α, assim, tem-se $CH = \alpha = CF = \alpha + \rho$, ou seja, uma contradição para $\rho \neq 0$ (PANZA, 1988, p.460, nota 42).

Não é difícil de perceber, sobretudo, que a omissão referida acima depende da razão $\frac{FH}{FG} = \frac{\rho}{\gamma}$ – que exprime a relação entre a resistência pontual do meio e a gravidade – somente se o intervalo temporal considerado for assumido como infinitamente pequeno (vide equação 5.33). Portanto, o procedimento de Newton parece o seguinte: estabelecida a equação (5.24) – ou seja, $\frac{r}{g} = \frac{FH}{FG}$ – (como ocorre, de modo análogo na equação (5.25)) ele considera separadamente um conjunto de igualdades geométricas formuladas por meio da equiparação que as transformam, dadas substituições sucessivas da razão $\frac{FH}{FG}$, em uma razão nova independente da velocidade a qual Newton identifica (ao considerar o valor limite) como a razão solicitada. Assim, a eliminação do tempo decorre do uso indiscriminado de substituições junto da igualdade (no limite onde FG desempenha um papel fundamental) para conduzir da razão $\frac{FH}{FG}$ para a razão $\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}$; e permite ainda transformar a equação (5.25) na seguinte relação:

$$
\frac{r_t}{g} = \lim_{\omega\to 0}\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}. \qquad (5.34)
$$

Segundo Panza, Lagrange expôs claramente o erro de Newton quando deduziu de forma correta o resultado por meio de um procedimento alternativo fundado no clássico método do ideterminado – o qual apresenta a vantagem de minimizar o número de hipóteses implícitas (reduzindo a equiparação de FH e FG ao resultado das flechas que exprimem a gravidade e a resistência pontual) –, enquanto que no método 'de tudo evidente' a aproximação da razão entre resistência e gravidade leva para omissão da quantidade relevante, ou seja, $\frac{3}{2}$ do resultado.

Na primeira edição do texto de Lagrange (1797), o raciocínio do autor pode ser reconstruido como o seguinte: considere θ como o intervalo temporal indeterminado (e finito), e considere também, porém separadamente, a força que age no móvel em C no instante t. Indicam-se por α, β, γ e ρ o modelo de flechas que exprimem as forças com respeito a θ. De acordo com a Figura 26, têm-se: $\alpha = CH$, $\gamma = CP$ e $\rho = RC$; para o módulo da velocidade instantânea tem-se $v_t = x'_t\sqrt{1+[y_t]^2}$. Assim,

- $\alpha = v_t\theta$;
- $\gamma = \frac{1}{2}g\theta^2$;
- $\rho = \frac{1}{2}r_t\theta^2$ e
- $\alpha - \rho = v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2$.

O erro de Newton se segue quando assume-se θ como um intervalo indeterminado e infinitamente pequene, e igualam-se respectivamente ρ e γ aos segmentos FG e CF em termos das coordenadas da curva.

Sejam as projeções nos eixos tomadas em função de φ (ângulo entre a tangente em C e o eixo das abscissas) e $\omega(= BD)$ [vide Figura 27], tem-se

$$\omega = \left[v_t - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\cos\varphi. \tag{5.35}$$

Ao assumir as igualdades mencionadas acima, chega-se (para a expanção em série infinita convergente da ordenada $y_{x+\omega}$) a:

$$\begin{aligned} y_{x+\omega} - y_x = &\quad y'_x\omega + \frac{y''_x}{2!}\omega^2 + \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 + \cdots \\ = &\quad \left[v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\sin\varphi - \frac{1}{2}g\theta^2. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Quando substitui a equação (5.35) na equação (5.36) obtém-se:

$$\begin{aligned} &[y'_x v_t\cos\varphi - v_t\sin\varphi]\theta - \left[-\frac{y'_x}{2}r_t\cos\varphi + \frac{y''_x}{2}[v_t]^2\cos^2\varphi + \frac{r_t}{2}\sin\varphi + \frac{g}{2}\right]\theta^2 + \\ &\left[-\frac{y''_x}{2}v_t r_t^2\cos^2\varphi + \frac{y'''_x}{3!}[v_t]^3\cos^3\varphi\right]\theta^3 + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Agora, ao igualar a zero os coeficientes das potências de θ têm-se:

1. $y'_x = \tan\varphi$;

2. $[v_t]^2 = \frac{g}{y''_x \cos^2\varphi} = \frac{g(1+[y'_x]^2)}{y''_x}$ e

3. $r_t = -\frac{gy'''_x}{3[y''_x]^2\cos\varphi} = -\frac{gy'''_x\sqrt{1+[y'_x]^2}}{3[y''_x]^2}$.

Esse procedimento funda-se na omissão dos valores efetivos de CF e FG dos termos que dependem da variação de intensidade e de direção da força de inércia e da resistência, que se verificam no tempo θ. Se essa omissão for inicialmente justificada pelo carácter infinitesimal de θ, então a dedução do valor da resistência pontual por meio do anulamento do coeficiente de θ^3 é ilegítima porque tal omissão não pode afetar os termos superiores ao terceiro.

Por outro lado, esse mesmo procedimento pode estar correto se eliminar, de todo, a suposição infinitesimalista. A chave, da correção, segundo Panza,[22] reside obrigatoriamente na decomposição da força ao longo de duas direções fixas que, por comodidade, são consideradas paralelas aos eixos e ortogonais entre si. O efeito da variação da direção da força de inércia e da resistência pontual do meio pode ser expressa tanto em função de ω quanto em função de uma série infinita convergente de termos indeterminados de ordem superior ao segundo para $y_{x+\omega} - y_x$, e a variação de intensidade das mesmas forças pode ser determinada pela composição de tais termos. Com respeito a essa variação da direção em relação aos eixos, indicar-se-ão por a_1, a_2 etc; b_1, b_2 etc os coeficientes de ordem superior ao segundo termo. As equações (5.35) e (5.36) tornar-se-ão:

$$\omega\left[= x'_t\theta + \frac{x''_t}{2!}\theta^2 + \frac{x'''_t}{3!}\theta^3 + \cdots\right] = \left[v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\cos\varphi + a_1\theta^3 + a_2\theta^4 + \ldots \tag{5.38}$$

e

$$\begin{aligned} y_{x+\omega} - y_x &= y'_x\omega + \frac{y''_x}{2!}\omega^2 + \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 + \cdots \\ \left[= y'_x\theta + \frac{y''_x}{2!}\theta^2 + \frac{y'''_x}{3!}\theta^3 + \cdots\right] &= [v_t\sin\varphi]\theta - \left[\frac{1}{2}r_t\sin\varphi + \frac{1}{2}g\right]\theta^2 \\ &\quad + b_1\theta^3 + b_2\theta^4 + \ldots \end{aligned} \tag{5.39}$$

Agora, o problema se reduz a determinar os termos a_1 e b_1 – o valor de r_t resulta, como visto anteriormente, independentemente dos termos sucessivos. Se a consideração dos dados mecânicos do problema é insuficiente, então, a lei geral de formação do coeficiente de uma série infinita convergente inteira permite uma dedução totalmente analítica.

[22] Ibid., p.463.

Assim, ao confrontar o último membro da equação (5.39) com a forma geral, indicada entre colchetes, tem-se

(i) $x_t' = v_t \cos\varphi$

$x_t''[= v_t' \cos\varphi - v_t(\sin\varphi)\varphi'] = -r_t \cos\varphi$

(ii) $y_t' = v_t \sin\varphi$

$y_t''[= v_t' \sin\varphi + v_t(\cos\varphi)\varphi'] = -r_t \sin\varphi - g.$

Para facilitar a manipulação, considera-se $v_t\varphi' = -g\cos\varphi$, assim:

(I) $x_t''' = 3!a_1 = -r_t' \cos\varphi + r_t(\sin\varphi)\varphi = -r_t' \cos\varphi - \frac{gr_t \sin\varphi \cos\varphi}{v_t}$

(II) $y_t''' = 3!b_1 = -r_t' \sin\varphi - r_t(\cos\varphi)\varphi' = -r_t' \sin\varphi + \frac{gr_t cos^2\varphi}{v_t}$

Ao introduzir esses termos na equação (5.37), ajustando o novo valor para o terceiro coeficiente, tal como em 1. e em 2., encontra-se o valor correto de $\frac{r_t}{g}$:

$$\frac{r_t}{g} = -\frac{y_x'''}{2[y_x'']^2 \cos\varphi} = -\frac{y_x''' \sqrt{1+[y_x']^2}}{2[y_x'']^2}. \tag{5.40}$$

Para melhor compreender – ou a fim de mostrar mais explicitamente – a conexão entre a dedução original de Newton na segunda edição da *Théorie des Fonctions Analytiques* (1813), Lagrange reformula sua própria dedução analítica na seguinte forma. Considere θ como um intervalo de tempo durante o qual a força permanece constante. Seja ϑ um tempo durante o qual o móvel está submetido a um segundo movimento, ao seja, ao movimento que na ausência da gravidade se segue na tangente, percorrendo um segmento igual a $\alpha - \rho$, ou seja:

$$v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2 = v_t\vartheta + \frac{1}{2}r_t\vartheta^2. \tag{5.41}$$

Ao tomar o valor positivo da raiz, chega-se a

$$\vartheta = \theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 + \frac{r_t^3}{v_t^2}\theta^2 + \cdots \tag{5.42}$$

Chame de $\gamma^* = \frac{1}{2}g\vartheta^2$ o segmento vertical que o móvel percorre no tempo ϑ. Se sobre o móvel não agir a força da gravidade (e seja δ a diferença $\gamma - \gamma^*$), então tem-se

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}g\left[\theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 + \frac{r_t^3}{v_t^2}\theta^2 + \cdots\right]^2 \\ &= g\frac{r_t}{v_t}\theta^3 + g\frac{r_t}{v_t}\left[r_t + \frac{1}{2}\right]\theta^4 + \cdots \end{aligned} \tag{5.43}$$

Tome, agora, $\alpha = v_t\theta$, $\gamma = \frac{1}{2}g\theta^2$ e $\rho = \frac{1}{2}r_t\theta^2$ tal como considerado logo acima, então, encontrará o resultado errado de Newton como:

$$\frac{r_t}{g} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\delta(\alpha-\rho)}{4\gamma^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\left(v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right)\left(g\frac{r_t}{v_t}\theta^3 + \cdots\right)}{4.\frac{1}{4}g^2\theta^4}. \tag{5.44}$$

Vejamos, portanto, a correta consideração do segmento em relação à curva, ora, desse modo teremos [segundo (i), (ii), (I) e (II); e $y'_x = \tan\varphi$] o seguinte:

$$\begin{aligned} FG &= -\frac{y''_x}{2!}\omega^2 - \frac{y'''}{3!}\omega^3 - \cdots = (y_t - y_{t+\theta}) + y'_x\omega \\ &= -y'_t\theta - y''_t\frac{\theta^2}{2!} - y'''_t\frac{\theta^3}{3!} - \cdots + y'_x\left[x'_t\theta + x''_t\frac{\theta^2}{2!} + x'''_t\frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right] \\ &= [-v_t\sin\varphi + y'_x v_t\cos\varphi]\theta + [r_t\sin\varphi + g - y'_x r_t\cos\varphi]\frac{\theta^2}{2} + \\ &\quad [-b_1 + y'_x a_1]\theta^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{2}g\theta^2 + [y'_x a_1 - b_1]\theta^3 + \ldots \end{aligned} \tag{5.45}$$

Então, colocando $B_1 = y'_x a_1 - b_1$ chega-se a

(a) $CH = \alpha = v_t\theta$;

(b) $FG = \gamma + o(\theta^2) = \frac{1}{2}g\theta^2 + B_1\theta^3 + \ldots$;

(c) $BD = \sqrt{(\alpha-\rho)^2 - (\alpha-\rho)^2\sin\varphi} + o(\theta^2) = \left[v_t - \frac{1}{2}r_t\theta^2\right]\cos\varphi + a_1\theta^3 + \ldots$;

(d) $CF = \alpha - \rho + o(\theta^2) = v_t\theta - \frac{1}{2}g\theta^2 + \frac{a_1}{\cos\varphi}\theta^3 + \cdots$;

(e) $kl = \gamma^* + o(\theta^2) = \frac{1}{2}g\vartheta^2 - B_1\vartheta^3 + \ldots$ e

(f) $FG - kl = \delta + o(\theta^2) = \frac{1}{2}g(\theta^2 - \vartheta^2) + B_1(\theta^3 + \vartheta^3) + \ldots$

Se o erro de Newton foi corretamente isolado, então a substituição na equação (5.44) dos termos δ, $\alpha - \rho$ e γ por $FG - kl$, CF e FG, nessa ordem, produz uma nova razão cujo limite será $\frac{2}{3}\frac{r_t}{g}$. Ora, tanto para fazer essa verificação *a posteriori* quanto para obter *a priori* o valor correto de $\frac{r_t}{g}$, o valor de B_1 será suficiente (independentemente de se conhecer os valores de suas parcelas $y'_x a_1$ e b_1).

Lagrange reformula em sua segunda edição (1813) a demonstração contida em sua primeira (1797), porém, de forma mais ágil. Ele introduz uma modificação local – tal como Panza apresentou a segunda parte do argumento de Lagrange. Toma-se o coeficiente em θ^2 da equação (5.39) e compara-se com (i), assim:

$$y''_x = -r_t \sin\varphi - g = x''_t \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - g = x''_t y'_x - g.$$

Logo, $y'''_t = x'''_t y'_x + [y'_x]'_t x''_t$. Por outro lado, de $y'_t = y'_x x'_t$ ter-se-á, também, $y''_t = [y'_x]'_t x'_t + y'_x x''_t$ ou

$$[y'_x]'_t = \frac{y''_t - y'_x x''_t}{x'_t} = -\frac{g}{x'_t}.$$

Em seguida, tem-se que

$$y'_x x'''_t - y''_t = 3! B_1 = \frac{g}{x'_t} x''_t = -\frac{g r_t}{v_t}. \tag{5.46}$$

Para obter-se o resultado correto é suficiente: substituir a equação (5.46) na equação (5.45) para retomar a equação (5.38); e redefinir o coeficiente de θ^3, ou seja:

(A) $-\frac{y''_x}{2!}\omega - \frac{y'''_x}{3!}\omega^3 - \cdots = g\frac{\theta^2}{2} - \frac{g r_t}{v_t}\frac{\theta^3}{3!} + \cdots$ e

(B) $[g + y''_x v_t^2 \cos^2\varphi]\frac{\theta^2}{2!} + \left[-\frac{g r_t}{v_t} - 3y''_x v_t r_t \cos^2\varphi + y'''_x v_t^3 \cos^3\varphi\right]\frac{\theta^3}{3!} + \cdots = 0.$

Foi onde Lagrange chegou ao redefinir o coeficiente de θ^3 segundo (B) e segundo a equação (5.40). Assim, estabelce-se facilmente a verificação *a posteriori* ao introduzir na equação (5.41) o termo de ordem superior ao segundo, ora, tem-se, de fato:

$$\vartheta = \theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 + A_1\theta^3 + \ldots \tag{5.47}$$

(com A_1 o coeficiente depende de a_1), para, então, ao substituir em (f) encontrar

$$FG - kl = \left[\frac{g r_t}{v_t + 2B_1}\right]\theta^3 + C_1\theta^4 + \ldots \tag{5.48}$$

(C_1 depende de a_1 mas não de b_1). Agora, substitui-se na equação (5.44) os itens (b), (d) e a equação (5.46), assim, chega-se finalmente a

$$\begin{aligned}
&\lim_{\theta\to 0} \frac{(FG - kl)CF}{4(FG)^2} = \\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\left(\left[\frac{g r_t}{v_t} + 2B_1\right]\theta^3 + C_1\theta^4 + \ldots\right)\left(v_t\theta - \frac{1}{2}r_t\theta^2 + \cdots\right)}{4\left(\frac{1}{2}g\theta^2 + B_1\theta^3 + \ldots\right)^2} \\
&= \frac{r_t}{g} + \frac{2B_1 v_t}{g^2} = \frac{2}{3}\frac{r_t}{g}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Assim encontramos conforme a dedução analítica de Lagrange o resultado errado ao qual a solução da *editio princeps* chegou de duas formas diferentes: como na primeira edição de 1797 do texto de Lagrange e como na segunda edição desse emsmo texto, de 1813.

Ora, o fator numérico peseguido por Newton foi justamento o inverso $\frac{3}{2}$ do encontrado. O erro para Panza, como veremos adiante, não está diretamente na composição da equação $\left[\frac{r}{g} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\delta(\alpha-\rho)}{4\gamma^2} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}\right]$, mas talvez indiretamente isolado pelos termos de (a) a (f) e na série infinita convergente (5.47) utilizados na sua composição; ora, vejamos com mais detalhes.

5.3.5 O erro de Newton por Panza

O objetivo de Panza[23] foi determinar o erro de Newton por meio do confronto das soluções analítica (de Lagrange) e sintética (primeira solução geométrica de Newton). O nosso comentador complementa:

> O que eu tentei mostrar foi que o método resolutivo de Newton e a filosofia da matemática que o apoia, por um lado, não impedem, de modo algum, uma compreensão profunda dos termos intrínsecos os quais o problema se põe, por outro, constituem uma barreira intransponível para o problema receber uma solução correta por meio de uma comparação do espaço percorrido durante um tempo dado com a resistência pontual e a gravidade. Essa estratégia resolutiva é, sem dúvida, a mais ágil e a mais imediata, e requer a introdução inevitável do método analítico (PANZA, 1988, p.468).

Lagrange mostra que o erro de Newton não pode ser atribuído a uma decomposição imprópria do movimento. Pode-se concluir (sem alguma necessidade de realizar o cálculo explícito de B_1) que $\frac{r}{g} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{(fg-kl)CF}{4(FG)^2}$ é correta. Assim, a solução adequada ao problema "não requer tanto fazer agir a resistência pontual ao longo da direção vertical quanto conceituar que o limite de $\frac{FH}{FG}$ depende da variação da resistência e da velocidade".[24] Assim, para calcular fg basta substituir $-\theta$ em θ no valor de FG, logo, tem-se a partir da equação (5.47):

$$\begin{aligned} fg - kl &= \frac{1}{2}g([-\theta]^2 - \vartheta^2) + B_1([-\theta]^3 + \vartheta^3)\dots \\ &= \frac{1}{2}g\theta^2 - B_1\theta^3 - \frac{1}{2}\vartheta^2 + B_1\vartheta^2\dots \\ &= \frac{1}{2}g\theta^2 - B_1\theta^3 - \frac{1}{2}g\left(\theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 - \cdots\right)^2 + B_1\left(\theta - \frac{r_t}{v_t}\theta^2 - \dots\right)^3 - \dots \\ &= \frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + \cdots \end{aligned}$$

[23]Ibid., p.468.

e, então,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{CF(fg-kl)}{4(FG)^2} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{(v_t\theta+o(\theta))\left(\frac{gr_t}{v_t}\theta^3+o(\theta^3)\right)}{g^2\theta^4+o(\theta^4)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{r_tg\theta^4+o(\theta^4)}{g^2\theta^4+o(\theta^4)}=\frac{r_t}{g}.\end{aligned}$$

Assim, Panza lança dois questionamentos:

1. O método de Newton é matematicamente adequado para permitir a compreesão de $\frac{r}{g}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(fg-kl)CF}{4(FG)^2}$?
2. Isso fornece o meio para superar o erro de Newton?

Para a primeira questão, Panza[25] sustenta que por um lado Newton poderia explicar, em termos estritamente geométricos (considerando a diferença $dB-BD$ como um infinitesimal de segunda ordem) que a quantidade $fg-kl$ é um infinitesimal de terceira ordem e que se é, então, igual a segunda ordem de $FG-kl$ é, também, a essa ordem, nula, de modo que a razão $\frac{r_t}{g}$ permanece em relação a segunda ordem, indeterminada. Para isso ser possível, objeta-se, por outro lado, que:

1. a linguagem de Newton é muito diferente dessa (contemporânea) e que a igualdade encontrada por ele, na forma $\frac{A}{B}\to 1$, têm suas ordens indeterminadas;
2. Newton não utiliza (por opção epistermológica) o instrumento de desenvolvimento em série no percurso da solução;
3. ele combina uma igualdade geométrica com uma mecânica, devido, mais do que ao diagrama geométrico, e às propriedades do movimento retrógrado, onde $fg=FG$ é, ela mesma, uma identidade desse gênero pois essa combinação constitui o núcleo de seu método resolutivo;
4. Johann Bernoulli não teve sucesso em perceber a combinação citada acima mesmo fazendo uso de um métdo infinitesimalista; e
5. Lagrange não soube exprimi-la usando um método extrínseco ao de Newton.

Agora, com respeito à segunda questão, a resposta é negativa. Ainda que a dificuldade tivesse sido básica, a solução do problema em termos de uma transformação adequada da

[24]Ibid., pp.468-9.
[25]Ibid., p.469

razão $\frac{HF}{FG}$ exigiria a introdução de um procedimento analítico capaz de elaborar, a partir dos dados geométricos e mecânicos, os efeitos de variação (em intensidade e direção) da velocidade e da resistência. Todavia, ao analizar as soluções propostas por Lagrange (seja pelo método da função derivada, seja pelo método das séries) encontra-se nelas um dado comum que se liga intrinsicamente aquela solução de Newton. O confronto entre as duas soluções de Lagrange não exprime como consequência apenas dois modos distintos de entender a curva ACK, ou seja, de entender como expressão da combinação entre abscissa e ordenada (ou de duas coordenadas geométricas) ou de entender como traço de um movimento que, ao ser realizado no tempo, determina em dois eixos ortogonais projeções variáveis dependentes do tempo e, *a priori* independetes entre si. Mas exprime, sim, a quantidade determinada pelo movimento na curva de dois modos diferentes.

Onde Newton viu um problema mecânico difícil (a determinação de uma força e de uma velocidade em função da trajetória dada), Lagrange viu, um século mais tarde, um problema analítico genérico (de determinar a razão geral por derivadas sucessivas de uma mesma quantidade entendida como uma função de duas variáveis diferentes). Panza salienta que "o modo newtoniano parece próprio para se pensar uma curva como uma expressão de uma relação entre duas funções de uma variável comum – o que torna possível interpretar o modo lagrangiano como um caso geral do newtoniano".[26]

5.4 Revisão deste capítulo

Teremos, agora, uma pequena revisão a respeito das interpretações de cada um de nossos comentadores porque em geral os desenvolvimentos até aqui apresentados são um pouco longos. Assim, uma síntese dessas interpretações auxiliará para uma melhor compreensão dessas.

5.4.1 Interpretação de Whiteside para o erro de Newton

Vimos, e isso já não é mais uma novidade, que Whiteside apresenta duas considerações para o erro de Newton. Um delas, a mais requisitada por ele, foi inúmeras vezes apresentada no capítulo quatro, qual seja, a correta proporção '[2]' aplicada às quedas galileanas [vide seção 4.7]. Ora, segundo Whiteside, esse pequeno deslize, persistente nas tentativas newtonianas, fez com que Newton chegasse a encontrar a solução *demi correcte* dobrada [vide seção 4.3]. De maneira mais clara, a distância percorrida pela queda de

[26] Ibid., p.470.

um corpo é proporcional ao quadrado do tempo dessa mesma queda, ou seja, $y = \frac{1}{2}gt^2$ (segundo uma simbologia mais contemporânea). É o denominador numérico que fornece o valor preciso para essa distância, e foi justamente a falta desse fator numérico que Newton percebeu somente no recálculo da equação do movimento encontrada na sexta tentativa contida em Add.3965.f.197^r (vide Anexo A - Manuscritos de Newton). Assim, logo em seguida, Newton acrescentou primeiramente a correta proporção numérica '[2]' nas velocidades de queda das tangentes (por exemplo, em $\frac{2FG}{\sqrt{FG}}$), e depois, consequentemente, na componente tangencial da gravidade da expressão algébrica $\frac{2CG-2CF}{\sqrt{FG}}$, ou seja, incremento da velocidade devido a gravidade. A partir desse acréscimo numérico e da remodelação (contida em $Add.3965.f.220^r$, vide Anexo A - Manuscritos de Newton) da equação do movimento indicada, pelo símbolo †, Newton chegou ao correto fator numérico de $\frac{3}{2}$.

Além disso, Whiteside nos mostrou que as quedas galileanas FG e fg contidas na solução original de Newton são diferentes na terceira ordem diferencial. Com auxílio de Lagrange, Whiteside desenvolve as equações de movimento de Euler e chega a $FG - fg = \frac{1}{3}\frac{g\rho}{v}\theta^3$ (onde relaciona a gravidade [g], a resistência do meio [ρ], velocidade de queda [v] e o tempo [θ], quando expandida na série infinita covergente em função de θ). Essa distinção, *ex sagittis*, aplicada diretamente aos incrementos de base (p para fg, o para FG) na expressão (da solução de 1687) $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{Cf-CF}{[2]FG}$ – devidamente corrigida com a proporção numérica '[2]' – faz com que resulte em $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{1}{2}(p-o)\frac{\sqrt{1+Q^2}}{Ro^2\ldots}$, com o valor de $(p-o)$ previamente calculado como $p-o = \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2\ldots$, assim, encontramos a solução correta $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$.

Newton retrabalhou a solução original mais uma vez antes de alterar a estrutura matemática (como indicado na subseção 5.1.1) por definitivo (vide seção 4.1). Mesmo que Newton tenha considerado inicialmente $FG = fg$ (vide subseção 5.1.1, nota 1), ele não seguiu com essa consideração no restante do desenvolvimento de sua solução, nesta tentativa em específico. Relembremos que na *editio princeps*, Newton percebeu que aplicar a expansão em série infinita convergente $(P \pm Qo \pm Ro^2 \pm So^3 \ldots)$ com incrementos de base diferentes relativos às ordenadas dg e DG, segundo a tangente TCF considerada à direita (CF) e à esquerda (Cf) – adequadas respectivamente às quedas FG e fg – para uma e mesma equação $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{Cf-CF}{[2]FG}$ não era possível (vide Figura 2). Em seguida, Newton quis contornar esse problema, e (conforme indicado pela proporção (3.1) as quedas galileanas foram assim consideradas $fg = FG$) chegou erroneamente a $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{CF\times(FG-kl)}{4FG^2}$ [vide equação (3.6)]. Mas na tentativa apresentada nesta seção a estratégia foi diferente, Newton tratou de equacionar o movimento – essa forma de solução dispensa considerar o movimento ora à direita, ora à esquerda – somente no sentido (horário) do movimento. Neste ponto, o único problema que Newton teve de solucionar foi a falta da correta proporção numérica '[2]' para a queda galileana, posto o que foi dito acima. Isso fica patente quando Whiteside nos mostra que esse deslize fez com que Newton chegasse, nesta tentativa, à solução $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{2RR} - \frac{Q}{\sqrt{1+QQ}}$ – exatamente igual à quarta tentativa (vide seção 4,6, nota 38) e a '*mesma tentativa reestruturada*' (vide subseção 4.1.1, nota 13). Para reforçar a afirmativa acima, Whiteside acrescenta (e isso acredito ser a contribuição mais relevante de nosso comentador) que no recompto (vide Add.3968.41-132^v, Anexo A – Manuscritos de Newton) – o qual se encontra logo abaixo das considerações do matemático inglês a carta de Leibniz a Wallis de 28 de maio 1697, justo quando ele estava escrevendo o *Commercium Epistolicum* – Newton poderia ter encontrado a solução correta sem alteração da estrutura matemática de 1687. Aquilo que o distanciou, neste caso, do fator numérico de $\frac{3}{2}$ foi a transliteração equivocada – ou seja, $1 + \frac{3go}{f}$ com a ausência do denominador numérico dois multiplicando f – para o tempo de passagem do ponto C sobre os arcos Cg e lC [vide Figura 22] de $1 + \frac{3So}{2R} = 1 + \frac{3go}{2f}$.

Em suma, o erro de Newton para Whiteside reside em uma série de pequenos equívocos de ordem técnica. O principal deles – superado na sexta tentativa (vide seção 4.7) – foi a falta da correta proporção numérica '[2]' nas quedas galileanas Cf e FG (vide Figura 20). O segundo, diz respeito à igualdade entre as quedas FG e fg aplicada à solução original e em algumas das tentativas apresentadas no capítulo quatro; contudo, nesse mesmo capítulo, há na composição da equação do movimento equívocos no compto da componente tangencial da gravidade. Muitos outros pequenos erros (de mesma ordem técnica) apresentados ao longo das seis tentativas aqui dispostas dificultaram também ainda mais o trabalho de Newton de encontrar a solução correta, conforme a solução bernoulliana.

5.4.2 Interpretação de Lagrange para o erro de Newton

Lagrange apresentou uma excelente análise a respeito do problema de Newton a qual concentrar-me-ei aqui apenas em algumas partes que considero mais importantes para a construção da interpretação desse comentador. Tomemos primeiramente as seguintes equações (vide subseção 5.2.2) das acelerações do movimento do ponto C decompostas nos eixos ortogonais x e y, a saber: $x'' = -\frac{rx'}{s'}$ e $y'' = -g - \frac{ry'}{s'}$ (onde r é a resistência do meio; g, a gravidade; e s', a velocidade com que o corpo descreve o arco). Passaremos agora por um processo de eliminação da dependência temporal dessas acelerações. O primeiro passo é escrever $x'' = -\frac{(t'')}{(t')^3} = -\frac{r}{\sqrt{1+(y')^2}}$, $y'' = \frac{(y'')}{(t')^2} - \frac{(y')(t'')}{(t')^3} = -g - \frac{r(y')}{\sqrt{1+(y')^2}}$ e $s' = \frac{1}{(t')}\sqrt{1+(y')^2}$ em função de x, sendo a sua derivada igual a unidade.[1] O segundo passo é encontrar $-g = \frac{(y'')}{(t')^2}$ a partir de y''; isolar (t') nessa equação, derivá-la uma vez, e substituir nela o valor conhecido $-\frac{(t'')}{(t')^3}$. Encontramos – após alguns ajustes algébricos – a correta expressão $\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$.[2] Adiante (vide subseção 5.2.3), Lagrange parte da expressão encontrada por Newton em sua *editio princeps* $\left[\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}\right]$ – com as considerações: $Q = -y'$, $R = -\frac{y''}{2}$ e $S = -\frac{y'''}{2.3}$ – chega consequentemente a $\frac{\mathcal{R}}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$.

A discrepância encontrada entre as soluções para a relação entre a resistência e a gravidade, qual seja, $-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2} \neq -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$; teve origem na equação geradora $\frac{r}{g} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$ (onde α é a distância $[CH]$ percorrida pelo ponto C na tangente TCF livre da ação da gravidade e da resistência; γ representa a queda galileana $[FG]$; e δ a diferença das quedas galileanas ou *ex sagittis* $[FG-fg]$) (vide Figura 2 e Tabela 3). Mais precisamente, quando substituimos na expressão geradora $\left[\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}\right]$ os termos $\alpha = o\sqrt{1+y'^2}$ e $\gamma = \frac{y''}{2}o^2 + \frac{y'''}{2.3}o^3 \cdots$ temos $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\delta o\sqrt{1+y'^2}}{4\left(\frac{y''^2}{4}o^2 + \frac{y'''^2}{36}o^6 \ldots\right)}$. Os valores $\delta_1 = \frac{y'''}{3}o^3$ e $\delta_2 = \frac{y'''}{2}o^3$ correspondem respectivamente às diferenças das quedas galileanas da primeira e da segunda edições. Sendo assim, encontramos facilmente – ignorando os termos em o^4 e superiores – $\left(\frac{\mathcal{R}}{g}\right)_1 = \frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$ e $\left(\frac{\mathcal{R}}{g}\right)_2 = \frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$, conforme índices estabelecidos acima, justamente como havia sido calculado.

Lagrange não deixa de expressar essas diferenças em termos dos coeficientes da série infinita convergente, ou seja, conforme vimos $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$. Ora, sabemos que $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$ e $\gamma = Ro^2 + So^3 \ldots$; substituindo esses termos na equação geradora, tem-se: $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\delta o\sqrt{1+Q^2}}{4(Ro^2+So^3\ldots)^2}$. Para $\delta_1 = FG - fg = Ro^2 + So^3 \ldots - (Ro^2 - So^3) = 2So^3 \ldots$, temos $\left(\frac{\mathcal{R}}{g}\right)_1 = \frac{2So^3 \ldots o\sqrt{1+Q^2}}{4R^2o^4+4S^2o^6\ldots}$, e desprezando os termos em o^4 e superiores, chega-se a $\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$; o mesmo vale para $\delta_2 = NI - LH = (Ro^2 + 3So^3 \ldots) - Ro^2 \ldots = 3So^3 \ldots$ que resulta em $\left(\frac{\mathcal{R}}{g}\right)_2 = \frac{3So^3 \ldots o\sqrt{1+Q^2}}{4R^2o^4+4S^2o^6\ldots} \rightarrow \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2}$.

Mais uma observação, quando disse que Lagrange ajudou a dissolver a contradição encontrada por Johann Bernoulli e confirmada por Newton, eu queria na verdade explicitar o seguinte: os cálculos de Newton resultam na expressão $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{a}{n}$ ($a = OB$ e $n = OK$) que significa uma velocidade constante – isso ocorre porque a resistência do meio e a gravidade se compensam – contudo, vimos também que a velocidade varia conforme $\sqrt{ge}$ ($e = BC$),

[1]Lembremos que a notação com parênteses refere-se as grandezas que não estão diretamente em função do tempo, elas estão verdadeiramente em função dos espaços.

[2]Lagrange retira os parênteses das grandezas dependentes dos espaços depois de terminado o processo de eliminação do tempo.

eis a contradição. Ora, Lagrange a desfaz porque a razão entre a resistência do meio e a gravidade está precedida pelo fator três meios $\left(\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3}{2}\frac{a}{n}\right)$, isso significa que a resistência do meio deixa de compensar a componente tangencial da gravidade (essa equivalência só vale para o caso especial de $\frac{a}{n}$). A resistência do meio e a gravidade continuam sendo diretamente proporcionais, porém a resistência do meio é corrigida por um fator que é diretamente proporcional a $\mathcal{R}$ em $3a$ e inversamente proporcional a g em $2n$. É evidente que a gravidade e a resistência não mais se compensam. Assim, a velocidade deixa de ser constante (ou uniforme) e essa consideração não contradiz a variação da velocidade.

Para finalizar, Lagrange nos apresenta a distinção na terceira ordem diferencial das quedas galileanas FG e fg quando considerou (vide subseção 5.2.4) que o corpo descreve os arcos CG e Cg em tempos iguais ($\theta = -T$). Essa consideração já denuncia que $\delta = FG - fg = \frac{gr}{u}\theta^3$ (vide equação 5.10), logo adiante, Lagrange calcula $FG = Ro^2 + So^3 = \frac{g}{2}\theta^2 - \frac{gr}{6u}\theta^3$ e , por essa mesma via, $fg = \frac{g}{2}\theta^2 + \frac{gr}{6u}\theta^3$. Isso nos mostra que FG é igual a fg numa aproximação à segunda ordem diferencial, mas fica evidente que essas quedas são diferentes no nível da terceira ordem diferencial – ou seja, $\delta = FG - fg = \frac{1}{3}\frac{gr}{u}\theta^3$. Em suma, o erro de Newton para Lagrange está justamente na identidade mal considerada entre FG e fg, e isso levou à diferença δ discrepante, que na substituição desse termo na equação geradora $\left[\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}\right]$, o erro teria sido introjetado na relação entre a resistência e a gravidade. Para Lagrange, tal distinção entre quedas tem apenas uma única via de acesso direto a saber, o método analítico das diferenças ou cálculo diferencial.

5.4.3 Interpretação de Panza para o erro de Newton

Devemos admitir, assim como fez Panza, a tese de que Newton em sua primeira edição dos *Principia* utilizou-se do método sintético, enquanto na segunda edição, fez uso do método analítico. Ora, essa tese remonta ao estudo de Augustus de Morgan[3] apresentado no apêndice histórico e explicativo de Florian Cajori.[4] De forma geral, Augustus de Morgan defende que na *editio princeps* Newton teria desenvolvido o conceito das fluxões com base nos infinitesimais (ou momentos), contudo, na *editio secunda* ele altera essa base. Isso ocorre segundo de Morgan devido a controvérsia a respeito da prioridade do cálculo. Mais precisamente, depois da publicação do *De Quadratura Curvarum* (1704), onde Newton adotou um método mais preciso, o método analítico. Em 1713, então, Newton tentou obscurecer seu fundamento primeiro com respeito aos infinitesimais e transcreveu, onde pôde, o método analítico em detrimento do sintético (e a prop. X é para de Morgan um exemplo disso).

Assim como Panza – e sua tese da tradutibilidade –, de Morgan considerou como premissa que a fluxão é uma velocidade ou primeira derivada temporal, e que a notação newtoniana $\dot{x}$ equivale a notação leibiniziana $\frac{dx}{dt}$. Essa discussão perdura e não há consenso entre os pesquisadores se isso que de Morgan afirmou, de fato, procede. Apenas para citar alguns deles: Boss e Bertolini asseveram, que apesar do método das fluxões newtoniano e cálculo diferencial leibniziano apresentarem os mesmos resultados, eles são fundamentalmente diferentes (portanto não se pode admitir a premissa acima para além dos resultados e das condições iniciais);[5] Guicciardini é também adepto da tese da tradutibilidade, mas em nível sintático. Já, no nível sintático, para ele, Newton e Leibniz concordam em importantes questões de fundamento. Guicciardini não deixa de ressaltar que há diferenças de ordem prática-social, ou seja, em métodos de ensino, treino de matemáticos, expectativas para pesquisas futuras, sistema de valores que suporta a visão de que o método de prova é preferível em relação a outro etc.[6]

Posto isso, Panza afirma que o problema de Newton começa quando ele tenta escrever a relação entre resistência pontual e gravidade somente em termos das propriedades da curva ACK, ou seja, para $\frac{r_t}{g} = \frac{FH}{FG}$; onde Newton, na verdade, desejou encontrar $\frac{r_t}{g} = \lim\limits_{\theta \to 0} \left[\frac{FH}{FG}\right]$. Para explicitar isso, Panza reconstrói rapidamente a solução analítica de Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{r_t}{g} = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{FH}{FG}\right] = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\theta^2}{2} \left[-x''_t - x'''_t \frac{\theta}{3} - \cdots\right] \sqrt{1 + [y'_{x_t}]^2}}{g} = \frac{-x''_t \sqrt{1 + [y'_{x_t}]^2}}{g}.$$

Do trabalho de Lagrange reconhecemos que $x''_t = -\frac{t''_x}{[t'_x]^3}$ e $\frac{t''_x}{[t'_x]^3} = -\frac{g y'''_{x_t}}{2[y''_{x_t}]^2}$ (vide subseção 5.2.2), disso encontra-se:

$$\frac{r_t}{g} = \frac{-\left(-\frac{g y'''_{x_t}}{2[y'_{x_t}]^2}\right) \sqrt{1 + [y'_{x_t}]^2}}{g} \therefore \frac{r_t}{g} = \frac{-y'''_{x_t} \sqrt{1 + [y'_{x_t}]^2}}{2[y''_{x_t}]^2}.$$

Segundo Panza, Newton, assim como Lagrange, opta por eliminar o tempo por meio de uma decomposição do movimento num intervalo de tempo infinitesimal, em função dos elementos geométricos do diagrama, e dispensa também a velocidade instantânea. Assim, a razão $\frac{FH}{FG}$ é reduzida a uma relação dependente de $BD(= o)$ – uma quantidade indeterminada devido à indeterminação do tempo θ.

---

[3] Cf. de Morgan, A., 1852. *On the early history of infinitesimals in England*, Philosophical Magazine, s.4, v.4, n.26, pp.321-30.

[4] Cf. Newton, 2008, pp.411-40.

[5] Cf. Bos, Henk J. M., 1978. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. Archive for History of Exact Science, v.14, p.1-90; e Bertolini Meli, D., 1993. Equivalence and priority: Newton versus Leibniz. Oxford: Clarendon Press.

[6] Cf. Guicciardini, 1999, p.136.

A equação encontrada devido à introdução do movimento retrógrado imaginário na transformação equivocada de $\frac{r_t}{g} = \frac{Cf - CF}{FG}$ para $\left(\frac{r_t}{g}\right)' = \frac{CF(FG-kl)}{4FG^4}$ via primeira parte do corolário II, segundo Panza, não se segue do corolário I e nem da proporção $r \propto \Delta v_t^2$; e, ainda, a determinação da velocidade também independe disso, pois pode-se calculá-la a partir de $\Delta = \frac{FG-kl}{(FG+kl)CF}$ e da segunda parte do corolário II – qual seja, $CF = v_t\theta$ e $FG = \frac{1}{2}g\theta^2$ –, a saber: $K\Delta = \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} = \frac{y_x'''}{3y_x''\sqrt{1+[y_x']^2}}$. Em suma, a ligação entre os problemas progressivo e retrógrado demandaria de Newton: *(i)* a interpretação dessa última equação em termos de fluxões de terceira ordem via séries infinitas convergentes (mas isso Newton já conhecia antes do manuscrito de *De Quadratura Curvarum* (1691)); *(ii)* integrar (Newton já sabia como obter um valor aproximado para isso desde do *De methodis* (1671)); e *(iii)* equacionar adequadamente a curva (e isso, segundo Panza, Newton não sabia porque seu método sintético é limitado; foi neste ponto que ele inevitavelmente falhou). Depois de uma longa demonstração do trabalho de Lagrange a qual Panza contrapõe as duas edições do *Théorie des fonctions analytiques* (de 1797 e de 1813) para se calcular analiticamente $\frac{r_t}{g} = \lim\limits_{\omega\to 0}\frac{(FG-kl)CF}{4(FG)^2}$, e encontrar o resultado equivocado $\frac{2}{3}\frac{r_t}{g}$. Ora, se o limite for tirado chega-se ao valor correto, para esse caso em específico:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{CF(fg-kl)}{4(FG)^2} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(v_t\theta + o(\theta))\left(\frac{gr_t}{v_t}\theta^3 + o(\theta^3)\right)}{g^2\theta^4 + o(\theta^4)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{r_t g\theta^4 + o(\theta^4)}{g^2\theta^4 + o(\theta^4)} \to \frac{r_t}{g}.$$

Se o erro foi isolado adequadamente, conforme os itens *(a)* a *(f)*, então, "não requer tanto fazer agir a resistência pontual ao longo da direção vertical[7] $[\rho = -g\frac{de}{ds}]$ quanto conceituar que $\lim\limits_{\theta\to 0}\left[\frac{FH}{FG}\right]$ depende da variação da resistência e da velocidade".[8]

[7]Panza, neste momento, dialoga com Whiteside na consideração que esse fez a respeito da componente resistiva vertical, que por meio dela chega-se diretamente ao fator numérico corretivo $\frac{3}{2}$ [vide seção 3.5].

[8]Panza, 1988, pp.468-9.

6 Considerações finais

Só depois de percorrermos os textos históricos de Newton e dos Bernoulli, e de verificarmos as três interpretações (ou seja, as de Lagrange, Whiteside e Panza) é que podemos apresentar algum parecer sobre o erro de Newton. Voltemos à nossa pergunta de pesquisa: Quais as circunstâncias do erro de Newton? Partimos de uma causa de ordem técnica – ora, não poderia ser diferente – e precisavamos especificar melhor, ou seja, compreender a origem e as consequências de tal falha. Agora, com as contribuições de Lagrange, Whiteside e Panza, a tarefa de responder a essa pergunta torna-se factível.

Já de início, gostaria de dividir as três interpretações em dois grupos: um formado por Lagrange e Whiteside, outro, é claro, formado por Panza. Essa divisão, creio, é evidente pelo fato de Whiteside ter assumido a mesma explicação de Lagrange. Na contracorrente, Panza usa também a explicação de Lagrange, mas para oferecer uma interpretação alternativa. Contudo, os três possuem algo em comum (uns com mais intensidade que outros): todos eles admitem a tradutibilidade do método das fluxões ao cálculo diferencial. Não tenho a pretensão de analisar essa escolha, apenas constato que aqui é o caso. Posso, ainda, ou, na verdade devo, acrescentar os primeiros intérpretes da prop. X, Johann e Nikolaus (I) Bernoulli, como o terceiro grupo. Afinal, foram eles que revelaram o erro para a comunidade matemática. Porém, seus interesses, como sabemos, extrapolaram questões esotéricas ou motivadoras internas à comunidade. Mesmo que o interesse dos Bernoulli fosse o de provar a superioridade do cálculo leibniziano em detrimento do método das fluxões, é inquestionável a contribuição deles com respeito ao trabalho de Newton. A falha não poderia ser mais grave, pois conduzia a solução original à uma contradição (que a velocidade do móvel sobre a trajetória semicircular dada era ao mesmo tempo uniforme e variável). Ora, o fator numérico corretivo bernoulliano $\frac{3}{2}$ foi obstinadamente perseguido por Newton, pois, como vimos, é esse fator que desfaz a contradição.

Temos, portanto, três grupos que nos auxiliaram a responder a pergunta deste trabalho, comecemos pelos Bernoulli. A maior contribuição partiu de Johann, pois foi ele quem revelou que havia uma contradição a ser desfeita. Sua solução alternativa via cálculo diferencial leibniziano revelou o fator numérico $\frac{3}{2}$ faltante na solução de Newton para a relação entre a resistência do meio e a gravidade $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2} = \frac{3}{2}\frac{OB(=a)}{OK(=n)}$. O acesso a esse resultado foi por meio de uma equação diferencial que levou em conta as componentes tangenciais das grandezas envolvidas (gravidade, resistência e velocidade) e a solução se deu diretamente (vide seção 3.3). A justificativa, porém, não cumpriu com seu papel porque Nikolaus (I) aproveitou-se de uma combinação numérica fortuita aplicada à expansão em série infinita e convergente usada por Newton para determinar uma ordenada e seus elementos geométricos. Ora, dessa contribuição saliento apenas o trabalho de Johann que, de fato, foi relevante e contribuiu para os eventos históricos seguintes. Contudo, por meio de seu trabalho, não é possível apontar qual a causa do erro, ou seja, até esse momento sabemos que existe um erro nos comptos de Newton que o levaram a uma contradição, porém não se tem explicações para a causa de erro. Não temos mais o que avaliar a respeito do trabalho dos Bernoulli, além do que já foi exposto até aqui.

Penso que as avaliações de Lagrange e de Whiteside têm mais a contribuir neste momento. Começo pelo primeiro, Lagrange o qual somente dispertou meu interesse devido à justificação de Whiteside com respeito à igualdade indevida $FG = fg$. Ao apresentar claramente a causa do erro de Newton, ele a atribui à diferença *ex sagittis* $\delta_1 = FG - fg$. Lagrange não deixou de demonstrar, via cálculo diferencial, a diferença entre essas duas quedas galileanas, que incide sobre a terceira ordem diferencial $\left(\frac{1}{3}\frac{g\rho}{v}\theta^3\right)$ que, por sua vez, denuncia a existência da componente resistiva incidente ao longo do eixo gravitacional. Ele considera que o método das fluxões permite o acesso a essa diferença apenas indiretamente, mas não explicita como isso ocorre. Contudo, Whiteside não deixa de apresentar como isso acontece, em estrita concordância com Lagrange, porque justifica a diferença fazendo uso dos incrementos de base $BD(= o)$ e $Bd(= p)$. Ora foi somente na diferença das expansões em séries infinitas convergentes com respeito a esses incrementos que Whiteside pôde demonstrar que $(p - o) = \frac{3}{2}\frac{S}{R}o^2 \ldots$ E, ainda, se essa consideração fosse aplicada à equação $\frac{Cf-CF}{FG}$ na *editio princeps*, Newton teria chegado *recte* a solução correta para a relação entre a gravidade e a resistência, ou seja, com o fator numérico $\frac{3}{2}$.

Diferentemente de Lagrange, Whiteside aliou essa sua justificativa emprestada do matemático francês às fontes primárias, quais sejam, aos manuscritos de Newton. E essa sustentação historiográfica, penso, fornece muito mais credibilidade ao comentador. Ora, desse modo, Whiteside pôde mostrar que a cada momento em que Newton tentou salvar sua solução original, recaiu na *idée fixe* da igualdade entre FG e fg. Contudo, ele não se limitou a isso, pois apresentou uma outra causa para o erro. Essa outra causa não tem relação com a transformação da equação $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{Cf-CF}{FG}$ para $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{CF\times(FG-kl)}{4FG^2}$ mediante a consideração $FG = fg$; na verdade, ela é anterior a isso. Ocorre justamente quando Newton chegou à relação primeira $\frac{Cf-CF}{FG}$ ausente da correta proporção '[2]' no denominador, ou seja, não conforme com o princípio de Galileu para a queda dos corpos. Essa ausência foi ainda mais persistente que a igualdade incorreta anterior – que Newton deixou de considerá-la a partir do momento em que começou a modificar a estrutura matemática de sua solução.

Foi, segundo Whiteside, somente na sexta tentativa de correção que Newton veio a perceber a falta da proporção '[2]' nas quedas galileanas por ele consideradas – diferentemente de $FG = fg$ pois não há registros de que Newton tenha percebido essa falha em específico. Whiteside mostra que foi no recompto da equação do movimento construída na sexta tentativa, mais precisamente em Add.3965.f.197^r, que Newton percebeu essa sua falha e, em seguida, nos manuscritos dessa tentativa (de Add.3965.f.219^r a f.220^r) ele foi acrescentando '[2]' às quedas galileanas e às equações dependentes delas. Pelo símbolo † contido na primeira página e na última dessa coleção de manuscritos, Newton interliga as equações carentes da proporção numérica (f.219^r) da reconstrução dos cálculos considerando à referida proporção (f.220^r) [vide Anexo A - Manuscritos de Newton]. Ora, e foi somente assim, sob essas considerações, que Newton chegou à solução correta.

Whiteside nos mostrou que Newton poderia ter salvo sua solução orginal (na verdade quase salvou), pois – depois de já ter impresso a segunda edição dos *Principia* com sua solução modificada – retomou esses cálculos quando estava preparando o *Commercium Epistolicum*, num momento em que seus esforços não estavam mais voltados à solução desse problema, e sim, para a controvérsia a respeito da prioridade do cálculo, logo após acrescentar suas considerações à carta de Leibniz a Wallis de 28 de maio de 1697. Ao meu ver, a maior contribuição de Whiteside foi apresentar no fragmento Add.3968.41-132^v o momento em que Newton retomou a equação primeira de sua solução original $\frac{Cf-CF}{[2]FG}$ acrescida da correta proporção devido à queda da tangente, e refez seu cálculos. Contudo, ele não chegou ao resultado esperado porque cometeu um erro trivial ao efetuar a transliteração equivocada $\left(1 + \frac{3So}{2R} \rightarrow 1 + \frac{3go}{f}\right)$ na equação do tempo de passagem do ponto C sobre os arcos gC e lC. Whiteside reforça que Newton só pôde perceber a falta da correta proporção '[2]' para as quedas galileanas depois de ter modificado a estrutura da solução original. Lembremos da afirmativa de Whiteside logo acima, qual seja, que a imprecisão da igualdade $FG = fg$ ocorre devido à falta do elemento resistivo presente no eixo gravitacional o qual se apresenta somente quando considerada a terceira ordem diferencial. Mas o que dizer do acesso direto que a primeira formulação de Newton $\frac{Cf-CF}{[2]FG}$, devidamente ajustada, tem à correta solução $\frac{3}{2}\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}$? Neste momento chamo o Prof. Herman Erlichson que apresentou uma bela análise acerca da prop. XV, livro II dos *Principia*, onde nosso matemático inglês estuda um movimento em espiral.[1] Ele afirma:

> Newton sabia que, pelo princípio do vetor do corolário I de suas leis do movimento, sua escolha de direções de componentes não-retangulares o permitiria pensar nas ações independentes da força resistiva e da força centrípeta. O movimento do corpo seria a soma do movimento tangente devido à inércia e à resistência do fluido, e do movimento centrípeto devido à força centrípeta. Newton tinha uma maneira estranha de descrever essa independência dos movimentos tangencial e centrípeto (ERLICHSON, 1994, p.284).

Essa mesma estranheza de Erlichson eu também experimentei. Contudo, esse "novo" modo de considerar os movimentos em eixos não-retangulares (tangencial e ortogonal ao horizonte) não impede que se monte adequadamente equações do movimento, pois Newton já havia estabelecido a independência dos movimentos subdivididos em eixos distintos. Assim, a composição de $\frac{Cf-CF}{[2]FG}$ não contradiz o corolário I das leis dos movimentos pois apresenta uma relação entre duas grandezas (resistência e gravidade) que agem conjuntamente em cada um dos eixos escolhidos para descrever o movimento, o que não impede que se tenha a presença de uma componente resistiva no eixo gravitacional (Oy) e de uma componente gravitacional no eixo tangencial. A escolha de eixos para descrição de um movimento qualquer é arbitrária, exige-se somente uma coerência nas equações que exprimem tal movimento com respeito a essa escolha de eixos.

Parece-me, então, que a falha de Newton em não considerar a correta proporção '[2]' foi mais fundamental que a igualdade equivocada entre FG e fg. Ora, Newton apresentou em seus cálculos inciais uma série de proporções das quais derivou suas primeiras equações que deram origem às soluções requeridas pela prop. X, livro II. Em sua primeira proporção $\mathcal{R} \propto \frac{FH}{FG}$, sabendo que $CF \propto Cf - CF$, então, ao substitur essa última na primeira, tem-se $\mathcal{R} \propto \frac{Cf-CF}{FG}$. Agora, no momento de transformar essa proporção em uma igualdade (ou seja, uma equação), é preciso acrescentar o fator numérico faltante, para apresentar $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{Cf-CF}{[2]FG}$ corretamente.[2] Parece-me que essa falha foi capital! Assim, proponho que a causa desse erro de Newton não pode se sustentar apenas no fator numérico '[2]' devido à queda FG; mais que isso, proporções não se comprometem com escalares e a falta deles em estruturas matemáticas fundamentadas em proporções não

[1] Cf. Erlichson, H., 1994. *Resisted onverse-square centripetal force motion along newton's great look-alike, the equiangular spiral.* Centaurus, Blackwell Publishing Ltd, v.37, n.4, pp.279-303.

gera erros. Contudo, quando se trabalha com equações, é necessário acrescentar escalares para se manter a exatidão. Isso, parece-me ser, de fato, a causa do erro de Newton. Esse equívoco não põe em risco o método de Newton, qual seja, o método sintético. Ora, se assim fosse, ou seja, se essa abordagem fosse imprecisa como de Morgan afirmou – e como Panza asseverou – então, estaria todo os *Principia* fadado ao insucesso, mas não é o caso. Por que tão somente em poucas passagens (como por exemplo na prop. X, livro II) em que "a base infinitesimal evidentemente surge" de forma patente, como considerado por esses pesquisadores, Newton tentou obscurecer sua abordagem, para, assim, trivialmente, alocar uma outra, uma abordagem analítica?

Ora, ele não abandona seu método das fluxões na segunda edição dos *Principia*, nem mesmo sua estrutura fundamentada em proporções geométricas. Lembremos que na montagem de sua equação do movimento na *editio secunda* Newton escreveu o seguinte:[3] "... a resistência está para a gravidade assim como $\frac{t.GH}{T} - HI + \frac{2MI.NI}{HI}$ está para $2NI$", como também em sua solução corrigida,[4] "... a resistência está para a gravidade assim como $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+Q^2}$ está para $2Roo$, isto é, como $3S\sqrt{1+Q^2}$ está para $4RR$". É evidente que a equação surge na aplicação da propriedade fundamental das proporções (produto dos meios é igual ao produto dos extremos). Agora, voltemos às fluxões: afirmo que Newton não abandonou seu método, sequer obscureceu esta tal base infinitesimalista, pois ela jamais existiu. Vejamos o famoso Lem.II do livro II, onde Newton apresenta o que são momentos (o):

> Estas quantidades estão como indeterminadas, considere-as como se fossem um fluxo perpétuo de um movimento crescente ou descrescente, estão esses incrementos ou decrementos momentâneos sob o nome de momentos. Assim, por incrementos, entendo como momentos aditivos ou positivos e, de outro lado, por decrementos, [momentos] subtrativos ou negativos. Cuidado, porém, não os considere como partículas finitas (NEWTON, 1687, p.157).

Essa passagem não sofre quaisquer modificações em sua segunda edição.[5] Está muito claro que momentos são gerados no tempo em um fluxo contínuo de quantidades que nascem ou evanescem. Ora, como entender, nessa passagem, momentos como infinitesimais? A menos que se apresente de forma muito clara a adoção de Newton de uma

[2] A gravidade é acrescida no denominador do primeiro membro da igualdade sem que haja erros porque ao final a solução encontrada por Newton é proporcional a unidade. Isso é um forte indício de Newton ter inserido a gravidade nesta expressão por uma espécie de terceira proporcional *a posteriori*, ou seja, que se revela apenas na solução final.

[3] Cf. Newton, 2008, p.36.

[4] Ibid., p.37.

[5] Cf. Newton, 2008, p.27.

base infinitesimalista e sua mudança intencional de um método sintético para um método analítico, então adotarei a tese de Augustus de Morgan. Qualquer um que tenha analisado os manuscritos de Newton teria de minimamente duvidar de tal asserção.

Agora, vamos às considerações de Panza.[6] Ele adota uma estratégia diferente das apresentadas até aqui. Panza considera que o erro de Newton, está oculto na adoção de um artifício matemático que consiste em extrair das equações trabalhadas a variável tempo (opção também adotada por Lagrange). Para Panza, essa má adequação ligada à tentativa de Newton transcrever a relação entre a resistência pontual e a gravidade, não mais em termos do Cf dependente de um incremento de base (p) diferente daquele (o) do arco CF – contidos de maneira indireta na expressão $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{Cf - CF}{[2]FG}$ – mas agora em termos do mesmo incremento (o) na expressão $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^4}$, traz consigo mais do que a falha na igualdade equivocada $FG = fg$. Pois, se nessa transformação inadequada for aplicado o $\lim\limits_{\omega \to 0} \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^4}$, encontrar-se-á um resultado também equivocado, qual seja, $\frac{-y_x''' \sqrt{1 + [y_x']^2}}{3[y_x'']^2}$.[7] Mas, se aplicar o $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{CF \times (FG - kl)}{4FG^4}$, agora em função do tempo, retorna-se inadequadamente a $\frac{2}{3}\frac{\mathcal{R}}{g}$ (e isso Lagrange não fez). Então, Panza propõe aplicar $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{CF \times (fg - kl)}{4FG^4}$, e, assim, retornou corretamente a $\frac{\mathcal{R}}{g}$. Logo, o domínio do tempo mostrou mais do que uma diferença entre FG e fg que incide na componente resistiva contida no eixo da gravidade, tal como Lagrange denunciou. Para Panza, o erro de Newton só pode ser explicitado quando além de retomar-se o domínio do tempo, também leva-se em conta a expressão geradora $\frac{\mathcal{R}}{g} = \frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2}$. Dela reconhece-se que a falha não está em considerar $\delta = (FG - kl)$ no lugar de $\delta^* = (fg - kl)$, quanto em considerar as corretas variações de velocidade e resistência conforme itens (a) a (f) [vide subseção 5.3.4] em função do tempo.

Ora, para Panza, Newton até poderia conhecer essas diferenças $(FG - kl)$ e $(fg - kl)$ via método sintético (ou o que dá no mesmo, por relações estritamente geométricas entre BD e Bd). Porém sua compreensão não passaria de uma mera indeterminação. O próprio Newton não poderia reconhecer que combinou uma igualdade geométrica a uma mecânica, devido às propriedades do movimento retrógrado, por meio do método sintético somente. Para isso, ele teria que dispor do método analítico – embora, nem mesmo Johann Bernoulli soube expressar essa sutilieza por ter usado um método infinitesimalista implícito ao seu cálculo diferencial, nem Lagrange soube exprimir isso por meio de seu método analítico e obviamente extrínseco ao de Newton.

[6]Lembremos que Panza se apresenta em seu texto adepto a tese de Augustus e Morgan.

[7]Inconsistência, que segundo Panza e segundo Lagrange, implícita no método sintético. Só se pode conhecê-la via método analítco, ou seja, quando se toma o limite dessa expressão.

[8]Cf. Panza, 1988, pp.468-9.

Não me parece que do resultado de $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{CF(fg-kl)}{4(FG)^2} \to \frac{r_t}{g}$ em relação a $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{CF\times(FG-kl)}{4FG^4} \to \frac{2}{3}\frac{r_t}{g}$ se segue que a solução adequada ao problema "não requer tanto fazer agir a resistência pontual ao longo da direção vertical quanto conceituar que o limite de $\frac{FH}{FG}$ depende da variação da resistência e da velocidade".[8] Panza não deixa claro a que variação ele se refere. Num primeiro momento, (i) relacionei ao itens (a) a (f) que expressam os termos da relação $\frac{HF}{FG}$ na equação transformada cujas expressões são dependentes da velocidade e da resistência pontuais; num segundo momento, (ii) atribuí a série infinita convergente (5.47) que representa o tempo em que o móvel está submetido a um movimento livre de gravidade tornando-se dependente da resistência e da velocidade; ou ainda, num terceiro momento, (iii) as variações podem ser velocidade e resistência quando Newton considera o movimento reverso; entre outras possibilidades.

Outra colocação feita por Panza diz respeito ao fato de que para ele somente um processo analítico é capaz de avaliar uma igualdade $FG = fg$ a qual combina parâmetros geométricos (do diagrama) com parâmetros mecânicos (do movimento imaginário regresso). Mas a que Panza atribui os parâmetros geométricos e a que ele atribui os parâmetros mecânicos, neste problema em específico? Tendo a interpretar todos os elementos dispostos nos diagramas de Newton como geométrico-dinâmicos. Geométrico porque possuem uma parcela apresentada pela própria forma a qual estabelece relações de proporcionalidade, e dinâmico (ou mecânico) porque no uso do método das fluxões – quando analisadas as quantidades nascentes (ou evanescentes) – avalia-se um movimento contínuo. Então neste caso, por que Panza insiste que a identidade $FG = fg$ é ela mesma, digamos "especial" pois combina parâmetros geométricos e mecânicos por meio do movimento regresso imaginário? Não seriam então todas as expressões apresentadas por Newton dessa forma especiais? Por que o método sintético "de Newton" pode até ser capaz de determinar diferenças de incrementos de base para os arcos Cg e CG (tal como Whiteside fez), mas é incapaz de determinar diferenças entre $FG - kl$ e $fg - kl$ (pois detecta apenas que são iguais até a segunda ordem diferencial)?

Ora, a diferença entre incrementos de base, por serem proporcionais às quedas das tangentes, já não é capaz de determinar diferenças mínimas como essa da terceira ordem diferencial? Se não fosse o método sintético capaz disso, Whiteside não teria chegado ao resultado correto por esse caminho (vide seção 3.5), depois de ter tomado o limite para o tendendo a zero. Aliás, Panza não deixa claro o que ele entende por método sintético e por método analítico. Apenas se resume a falar que o clássico método do "indeterminado" equivale ao sintético, e o método de "tudo evidente", ao analítico; porém, em seu trabalho, parece que ele tende a relacionar sintético a geométrico. Resta saber o que é o método analítico a que Panza se refere. Seria a distinção analítico-sintética capaz de explicar o sucesso de Newton em sua segunda edição dos *Principia* e o seu fracasso na primeira edição? Creio que não. Toda essa discussão a respeito dos métodos analítico e sintético, brevemente apresentada aqui, se desfaz quando se consultam os manuscritos de Newton. Ele alterou a estrutura matemática, mas manteve a sua abordagem. Newton não abandonou quaisquer bases (neste caso tal como defendido por de Morgan, a base infinitesimalista) para adotar uma outra (indefinida). Não vejo como isso o aproximaria do método analítico em detrimento do método sintético. Aliás, todo esse dabate mais obscurece do que auxilia a compreensão de qual foi o erro de Newton na prop. X, livro II. Neste caso, creio que o melhor a se fazer é abandonar esse debate e se ater ao problema em específico. Whiteside e Lagrange souberam muito bem fazer isso.

Saliento, e esse é o último ponto que apresento nesta consideração final, que a mudança na estrutura matemática da prop. X não nos dá condições para concluir que Newton só conseguiu resolver adequadamente o problema porque ele compreendeu melhor as questões físicas envolvidas, como se este processo de mudança de argumentação o aproximasse de um modelo físico mais adequado. De fato, na *editio princeps*, o acréscimo de um movimento imaginário regresso exige uma maior abstração em comparação com a *editio secunda*, que faz uso de um único movimento no sentido horário, que se assemelha a um lançamento oblíquo. Todavia, ambas são, para mim, duas estruturas equivalentes, posto tudo o que já foi apresentado até aqui. O acesso aos elementos matemáticos mais básicos desse problema ocorre tanto para o método das fluxões (nas duas edições) quanto para o cálculo diferencial (leibniziano ou contemporâneo). Não há uma abordagem privilegiada, para esse caso. O que há de fato é um equívoco fundamental na passagem de proporções para equações: onde houver escalares, eles devem ser inseridos sob a pena de perda de exatidão quando não ocorrer; e isso não caracteriza uma limitação de uma abordagem geométrica-dinâmica newtoniana, apenas um cuidado que essa abordagem exige.

Referências

BERNOULLI, J. Extrait d'une lettre de m. bernoulli [...] touchant la manierre de trouver les forces centrales dans des milieux resistans en raison composées de leurs densités e des puissances quelconques des vitesses du mobile. *Histoire de l'Académie royale des sciences ... avec les mémoires de mathématique & de physique... tirez des registres de cette Académie*, Paris, p. 47–54, 1714.

BERNOULLI, N. Addition de m. (nicolas) bernoulli, neveu de l'acteur de ce memoire-cy. *Histoire de l'Académie royale des sciences ... avec les mémoires de mathématique & de physique... tirez des registres de cette Académie*, Paris, p. 54–56, 1714.

COHEN, I. B. *Isaac Newton The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy; a new translation.* London: University of California Press, 1999.

COLLINS, J. *Commercium Epistolicum D Johannis Collins: Et Aliorum, de Analysi Promota (1722).* : Kessinger Publishing, 2010.

ERLICHSON, H. Resisted inverse-square centripetal force motion along newton's great look-alike, the equiangular spiral. *Centaurus*, Blackwell Publishing Ltd, v. 37, n. 4, p. 279–303, 1994.

GERHARDT, K. I. *Leibnizens mathematische Schriften.* Halle: H.W.Schmidt, 1859. Collection of University of Michigan.

GUICCIARDINI, N. *Reading the Principia: the debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736.* United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.

HALL, A. R. Newton versus leibniz: from geometry to metaphysics. In: COHEN I.B. E SMITH, G. (Ed.). *The Cambridge Companion to Newton.* United Kingdom: Cambridge University Press, 2002a. cap. 15, p. 431–54.

HALL, A. R. *Philosophers at War: The quarrel between Newton and Leibniz.* United Kingdom: Cambridge University Press, 2002b.

KEILL, J. Jo. keill ex aede christi oxoniensis, a. m. epistola ad clarissimum virum edmundum halleium geometriae professorem savilianum, de legibus virium centripetarum. *Philosophical Transactions*, v. 26, n. 313–24, p. 174–88, 1708.

LAGRANGE, J. L. Théorie des fonctions analytiques. In: . Paris: Gauthier-Villars, 1867-1892, 1813, (14). p. 360–76.

LEIBNIZ, G. W. In: *Communicatio Silæ Pariter, Duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curva celerrimi descensus a Dn. Jo. Bernoullio Geometris publice* *propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem posteaproprositi.* Lipsiæ: Prostant apud Joh. Grossii Hæredes & Frid. Groschuf, 1697. p. 201–5.

LEIBNIZ, G. W. In: *Responsio ad Dn. Fatii Duillerii imputaiones. Accessit nova Artis Analytica promotio specimine indicatta; dum Designatione per Numeros assumtitios loco literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit.* Lipsiæ: Prostant apud Joh. Grossii Hæredes & Frid. Groschuf, 1700. p. 198–208.

LEIBNIZ, G. W. In: *Isaaci Newtoni Tractatus duo, de speciebus & magnitudine figurarum curvilinearum.* Lipsiæ: Prostant apud Joh. Grossii Hæredes & Frid. Groschuf, 1705. p. 30–6. Escrito anonimamente.

NAUENBERG, M. Proposition 10, book 2, in the *Principia*, revisited. *Springer-Verlag*, p. 567–587, 2011. DOI: 10.1007/s00407-011-0085-2.

NEWTON, I. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Londini: S.PEPYS, Regalis Societatis Londiniensis PRÆSES, 1687. The Project Gutenberg Ebook.

NEWTON, I. *Principia: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.* São Paulo: Editora da Univesidade de São Paulo (Edusp), 2008. Tradução de Ricci, Trieste et al da edição inglesa de Motte, Andrew de 1729 acrescida pelas notas de Cajori, Florian em 1934.

NEWTON, I.; HALL, A.; TILLING, L. *The Correspondence of Isaac Newton.* : Cambridge University Press, 2008. (The Correspondence of Isaac Newton 7 Volume Paperback Set, v.5-6).

PANZA, M. Eliminare il tempo : Newton, lagrange e il problema inverso del moto resistente. In: GALUZZI, M. (Ed.). *Giornate di storia della matematica.* Cetraro, Itália: Commenda di Rende (Consenza), 1988. p. 437–87. Actes du colloque de Cetraro.

PANZA, M. *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666.* Paris: Albert Blanchard, 2005.

STEWART, J. *Sir Isaac Newton's Two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equations of an infinite Number of Terms, explained.* London: James Bettenham, 1745. The treatises themselves, translated into English, with a large commentary; in which the Demonstrations are supplied where wanting, the Doctrine illustrated, and the whole accommodated to the Capacities of Beginners, for whom it is chiefly designed.

WHITESIDE, D. T. *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* New York: Cambridge University Press, 1967–1981. (The Mathematical Papers of Isaac Newton 8 Volume Paperback Set).

APÊNDICE A – Solução para a equação de Bernoulli

No artigo apresentado por Johann Bernoulli à *Académie des Sciences* consta em sua primeira parte o desenvolvimento da famosa equação diferencial que acabou recebendo o nome dessa ilustre família. Tal equação foi desenvolvida por seu irmão, Jakob. A equação diferencial de Bernoulli possui solução a qual será aqui apresentada em seus detalhes. Seu desenvolvimento não é condição necessária para a compreensão do argumento matemático utilizado por Johann para objetar Newton no episódio histórico que essa pesquisa cerca. Contudo, apreciar o desenvolvimento da solução da equação diferencial de Bernoulli evidencia como a matemática do século XVIII possuia um refinamento que mais tarde se manteve nos trabalhos da geração seguinte de matemáticos europeus, como foi o caso de Euler.

Retomando a equação [vide nota 4, seção 3.3],

$$\frac{v^2}{r}\frac{dx}{dy}dS \pm \tau v^n dS = -vdv$$

passando todos os termos para o membro esquerdo e dividindo toda equação por v^2, tem-se

$$\frac{dv}{v} + \frac{dxdS}{rdy} \pm \tau v^{n-2} dS = 0$$

chamando $p = \frac{dS}{rdy}$ e $qdx = \tau dS$, obtem-se a equação de Bernoulli numa forma mais geral.

$$\frac{dv}{v} + pdx \pm v^{n-2} qdx = 0 \tag{A.1}$$

Para iniciar o desenvolviimento da solução da equação de Bernoulli, chama-se

$$v = M.N$$

a diferencial de v torna-se

$$dv = NdM + MdN$$

substituindo na equação A.1,

$$\frac{NdM + MdN}{MN} + pdx \pm (MN)^{n-2} qdx = 0$$

efetuando algumas simplificações,

$$\frac{NdM}{MN} + \frac{MdN}{MN} + pdx \pm M^{n-2}N^{n-2}qdx = 0$$

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + pdx \pm M^{n-2}N^{n-2}qdx = 0$$

rearranjando a equação de cima e chamando a primeira parte do membro de A e a segunda de B.

$$\underbrace{\frac{dM}{M} + pdx}_{A} + \underbrace{\frac{dN}{N} \pm M^{n-2}N^{n-2}qdx}_{B} = 0$$

Sendo $A + B = 0$, então, pode-se inferir que $A = 0$ e $B = 0$, ou seja, para A:

$$\frac{dM}{M} + pdx = 0$$

$$\frac{dM}{M} = -pdx$$

Integrado os dois lados da equação,

$$\int \frac{dM}{M} = -\int pdx$$

tem-se,

$$lnM = -\int pdx$$

reescrevendo de outra forma.

$$M = e^{-\int pdx} \tag{A.2}$$

Efetuando o mesmo processo para B,

$$\frac{dN}{N} \pm M^{n-2}N^{n-2}qdx = 0,$$

mas $M = e^{-\int pdx}$, então, substituindo,

$$\frac{dN}{N} \pm \left(e^{-\int pdx}\right)^{n-2} N^{n-2}qdx = 0$$

preparando a equação para integrar.

$$\frac{dN}{N} = \mp e^{-(n-2)\int pdx} N^{n-2}qdx$$

$$\frac{dN}{N.N^{n-2}} = \mp e^{(2-n)\int pdx} qdx$$
$$\frac{dN}{N^{n-1}} = \mp e^{(2-n)\int pdx} qdx$$
$$N^{-(n-1)}dN = \mp e^{(2-n)\int pdx} qdx$$
$$N^{1-n}dN = \mp e^{(2-n)\int pdx} qdx$$

Integrando os dois lados da equação,

$$\int N^{1-n}dN = \mp \int e^{(2-n)\int pdx} qdx$$

tem-se,

$$\frac{N^{2-n}}{2-n} = \mp \int e^{(2-n)\int pdx} qdx$$

isolando o termo em N.

$$N^{2-n} = \mp(2-n) \int e^{(2-n)\int pdx} qdx$$

$$N = \sqrt[2-n]{\mp(2 \pm n) \int e^{(2-n)\int pdx} qdx}$$

Sabendo que $v = MN$, chega-se.

$$v = \left\{ e^{-\int pdx} \right\} \left\{ \sqrt[2-n]{\mp(2 \pm n) \int e^{(2-n)\int pdx} qdx} \right\} \tag{A.3}$$

Lembrando da equação 3.13, $f = \frac{v^2 dS}{rdy}$, e $p = \frac{dS}{rdy}$. Substituindo um no outro, chega-se a $f = pv^2$. Assim, substituindo nesta última a equação A.3 chega-se a,

$$f = p \left[\left\{ e^{-\int pdx} \right\} \left\{ \sqrt[2-n]{\mp(2 \pm n) \int e^{(2-n)\int pdx} qdx} \right\} \right]^2$$

elevando ao quadrado o segundo membro da equação e fazendo alguns ajustes.

$$f = p.e^{-2\int pdx} \sqrt[\frac{2-n}{2}]{\mp(2 \pm n) \int e^{(2-n)\int pdx} qdx}$$

Finalmente, chega-se a solução da equação de Bernoulli conforme apresentada por Johann em (BERNOULLI, 1714a). No entanto, ainda naquele período, o número de Euler e não tinha tal alcunha, então, no artigo desse autor no lugar de e Johann coloca uma constante c. Ficando, portanto,

$$f = p.c^{-2\int pdx} \sqrt[1-\frac{n}{2}]{\mp(2 \pm n) \int c^{(2-n)\int pdx} qdx} \tag{A.4}$$

ANEXO A – Manuscritos de Newton

Para ilustrar as descrições de Whiteside seguem os manuscritos de Newton citados por ele. A Figura 29 ilustra a seção 5.1: A interpretação de Whiteside; a Figura 30, a seção 3.5; e as Figuras 31, 32 e 34 ilustram a seção 4.7: Sexta tentativa.

Figura 29: Fragmento de texto Add.3968.41-132^v

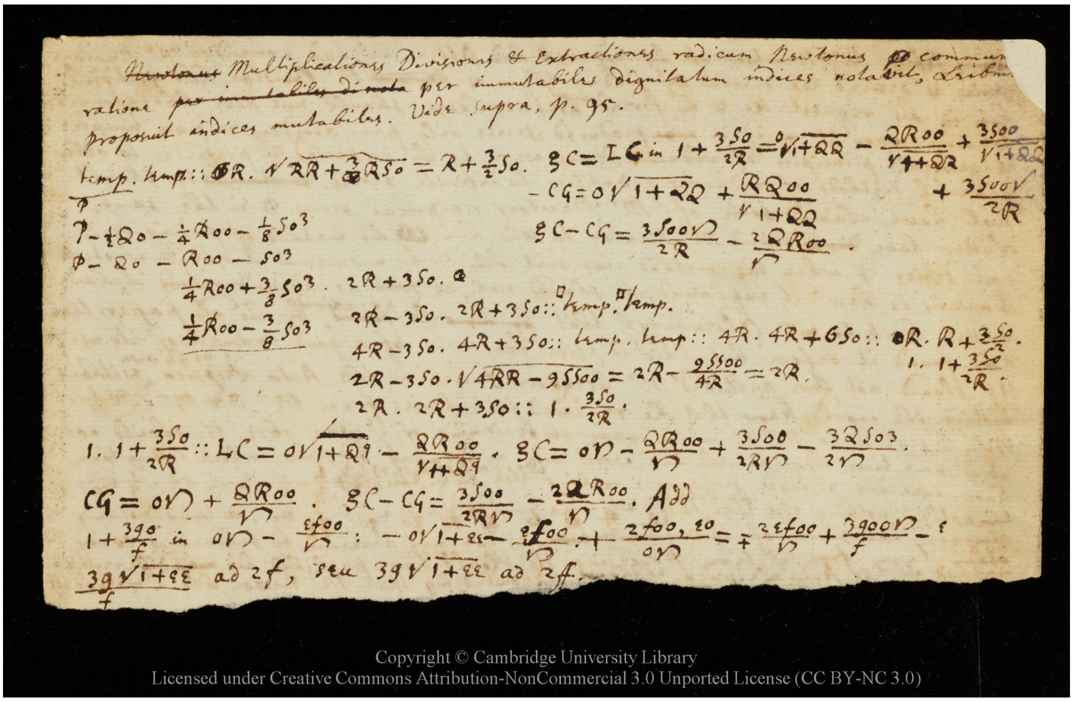


Figura 30: Fragmento de texto Add.3965.109^r

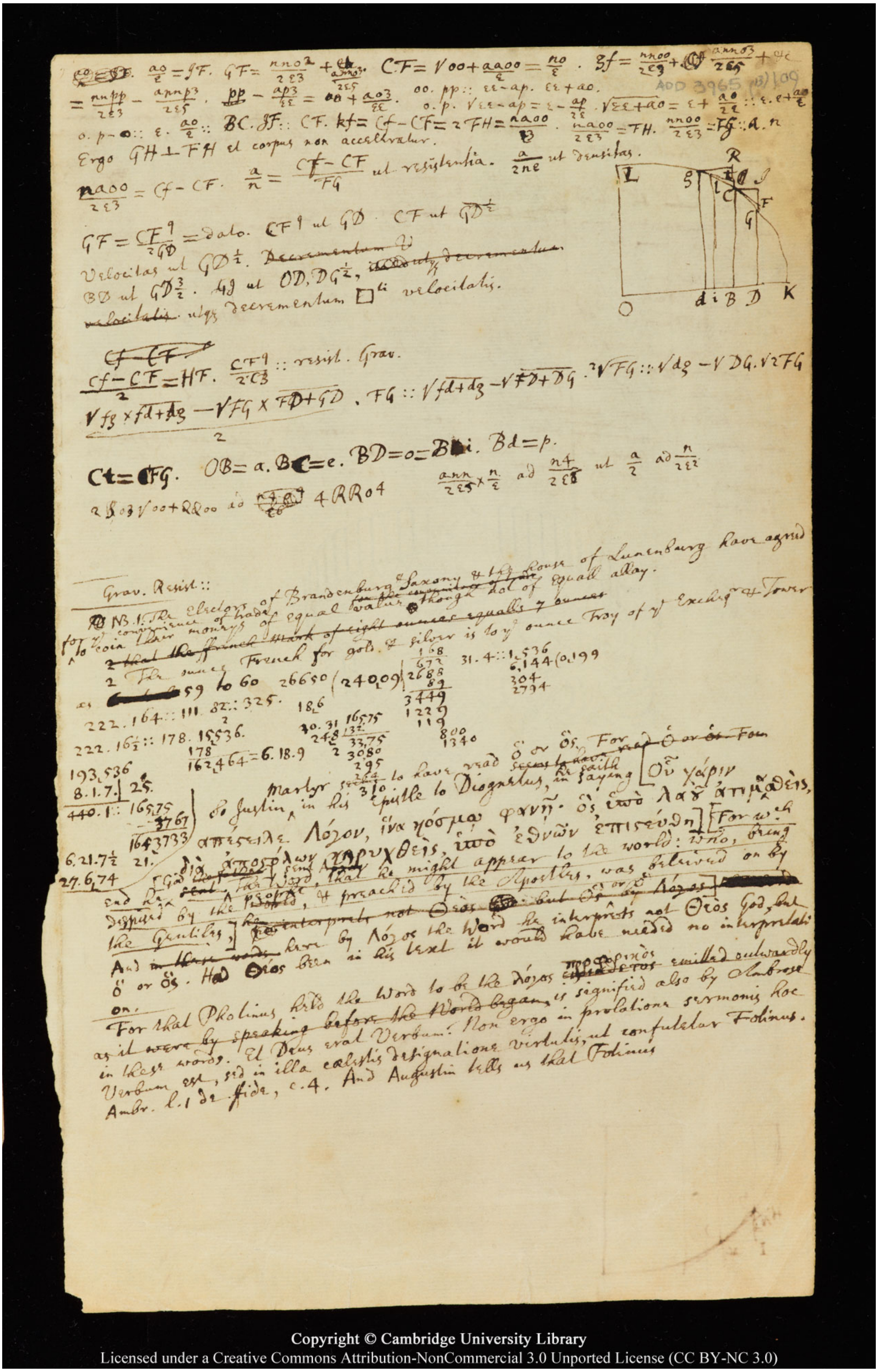
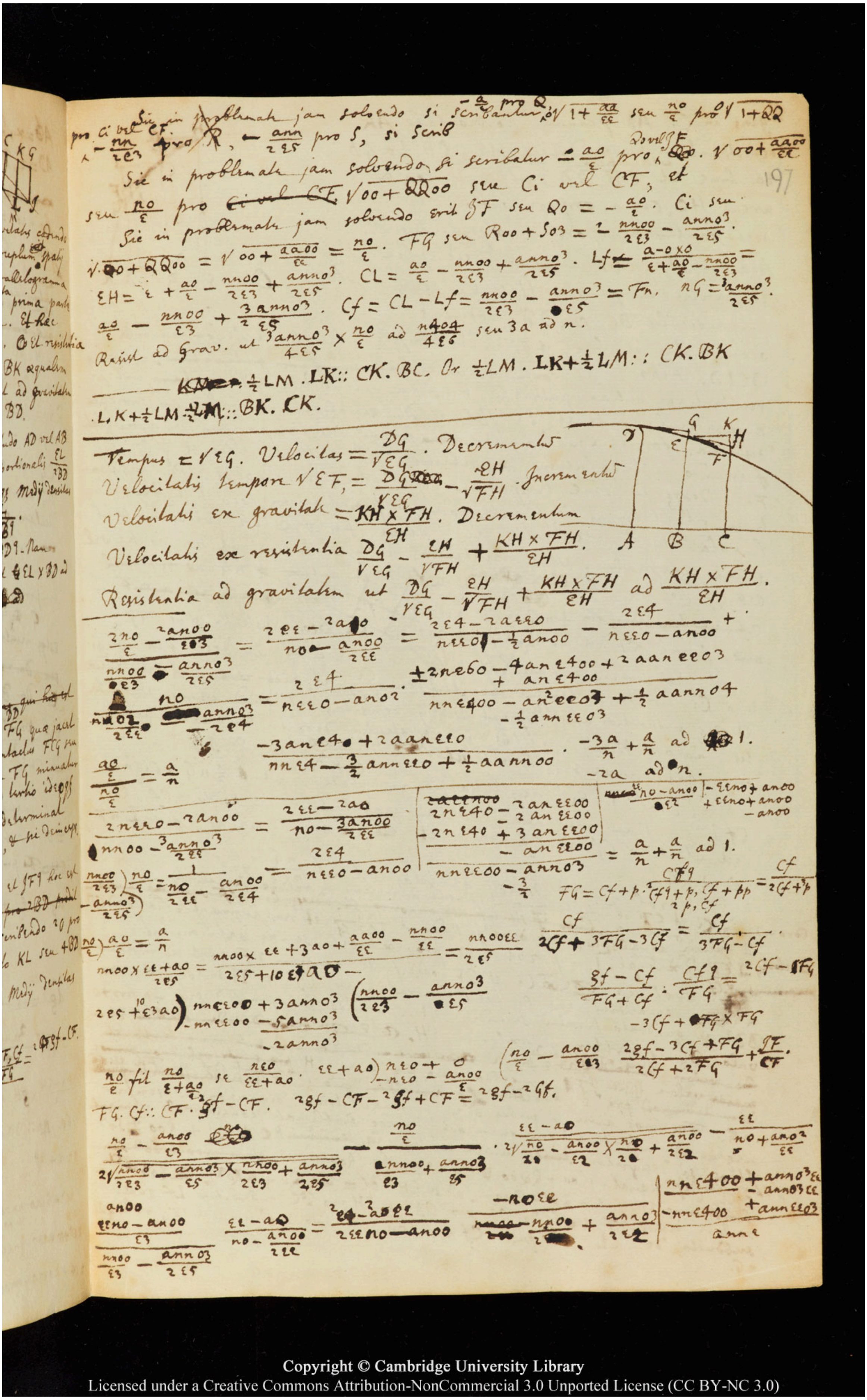


Figura 31: Manuscrito Add.3965.f.197^r


Sic in problemate jam solvendo si scribatur $-\frac{ao}{\varepsilon}$ pro Q

Tempus $= \sqrt{EG}$. Velocitas $= \frac{DG}{\sqrt{EG}}$. Decrementum Velocitatis tempore $\sqrt{EF} = \frac{DG}{\sqrt{EG}} - \frac{EH}{\sqrt{FH}}$. Incrementum Velocitatis ex gravitate $= \frac{KH \times FH}{EH}$. Decrementum Velocitatis ex resistentia $\frac{DG}{\sqrt{EG}} - \frac{EH}{\sqrt{FH}} + \frac{KH \times FH}{EH}$.

Resistentia ad gravitatem ut $\frac{DG}{\sqrt{EG}} - \frac{EH}{\sqrt{FH}} + \frac{KH \times FH}{EH}$ ad $\frac{KH \times FH}{EH}$.

Figura 32: Manuscrito Add.3965.f.219^r

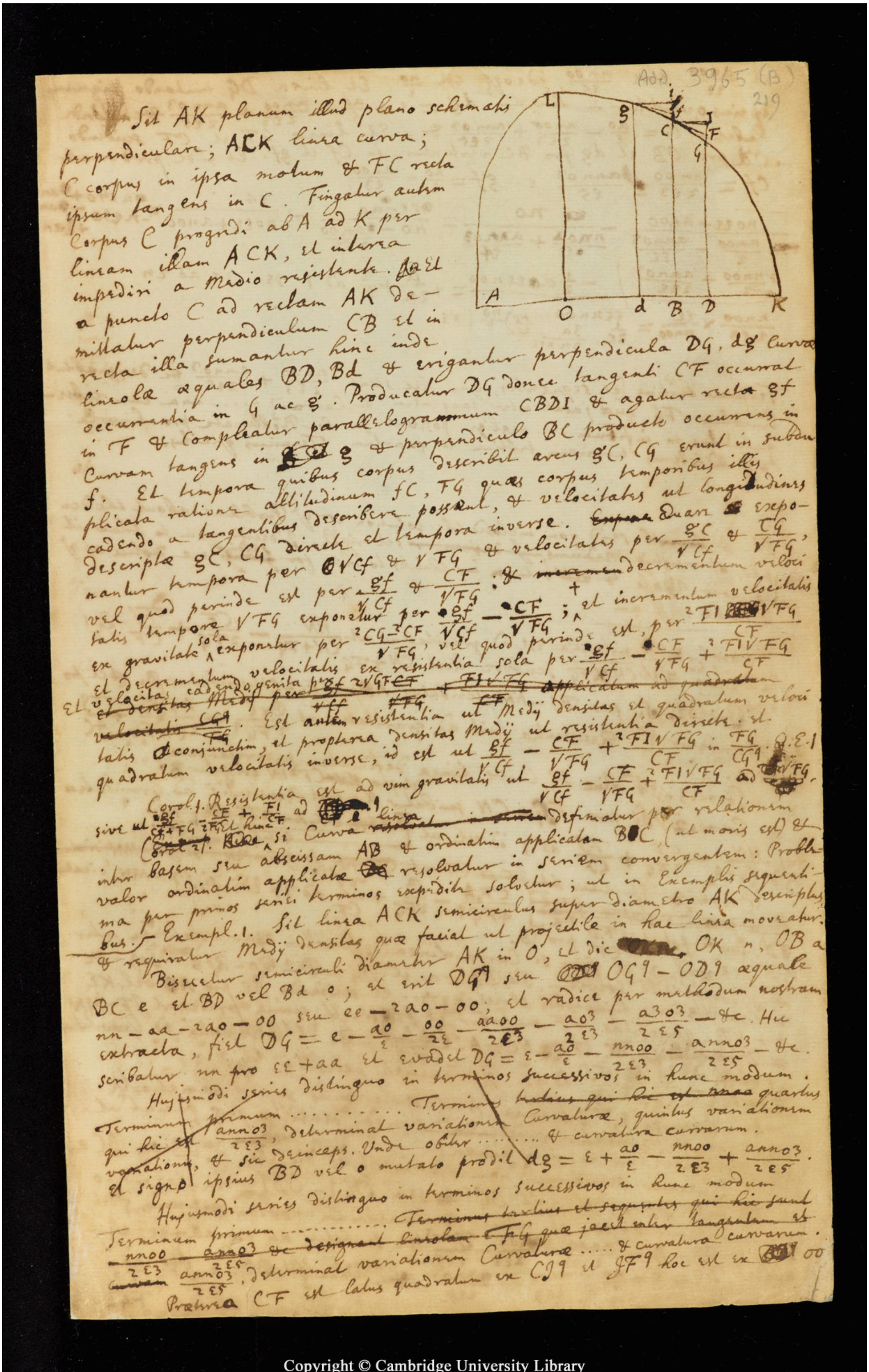


Figura 33: Manuscrito Add.3965.f.219^v

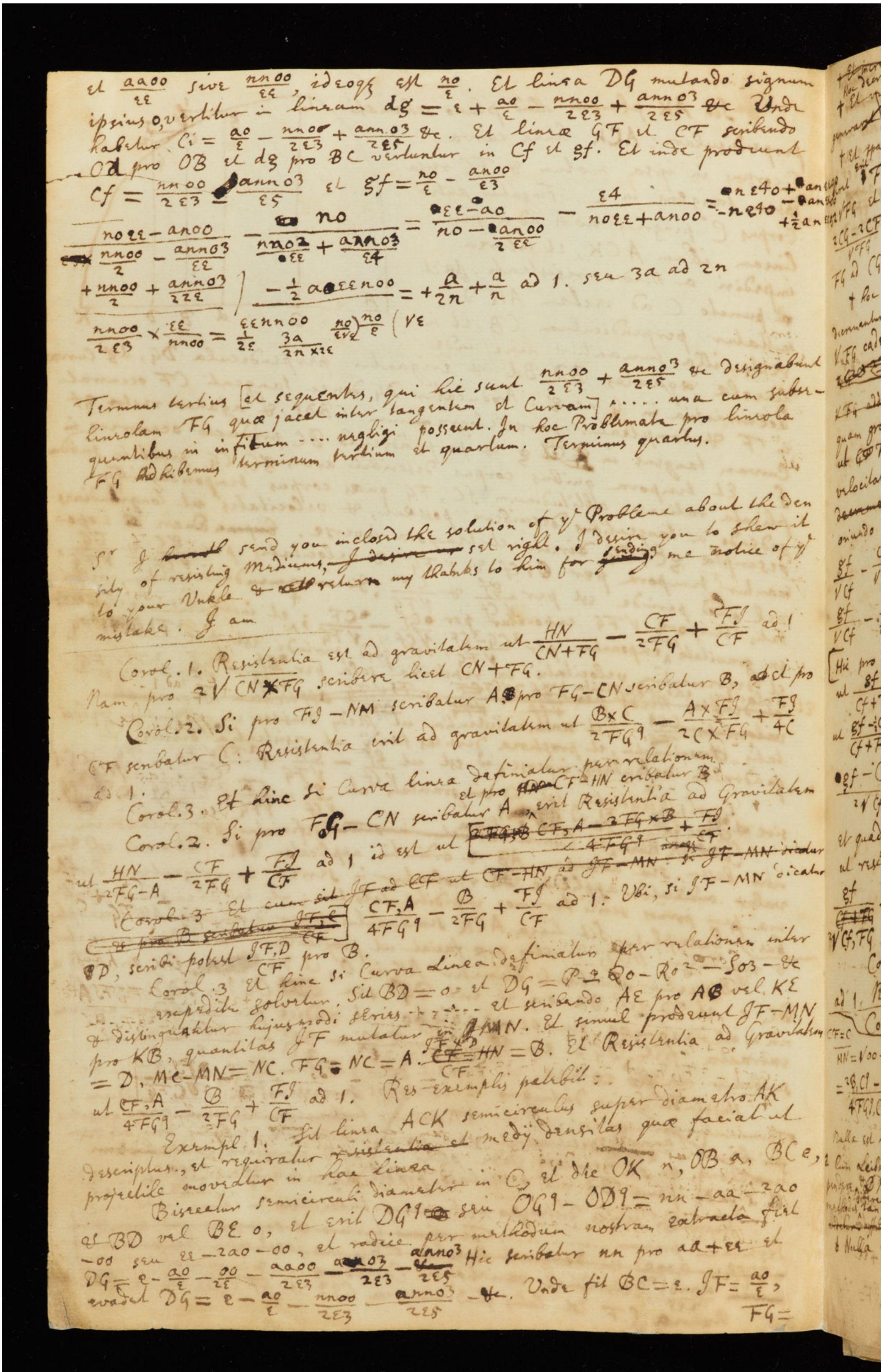
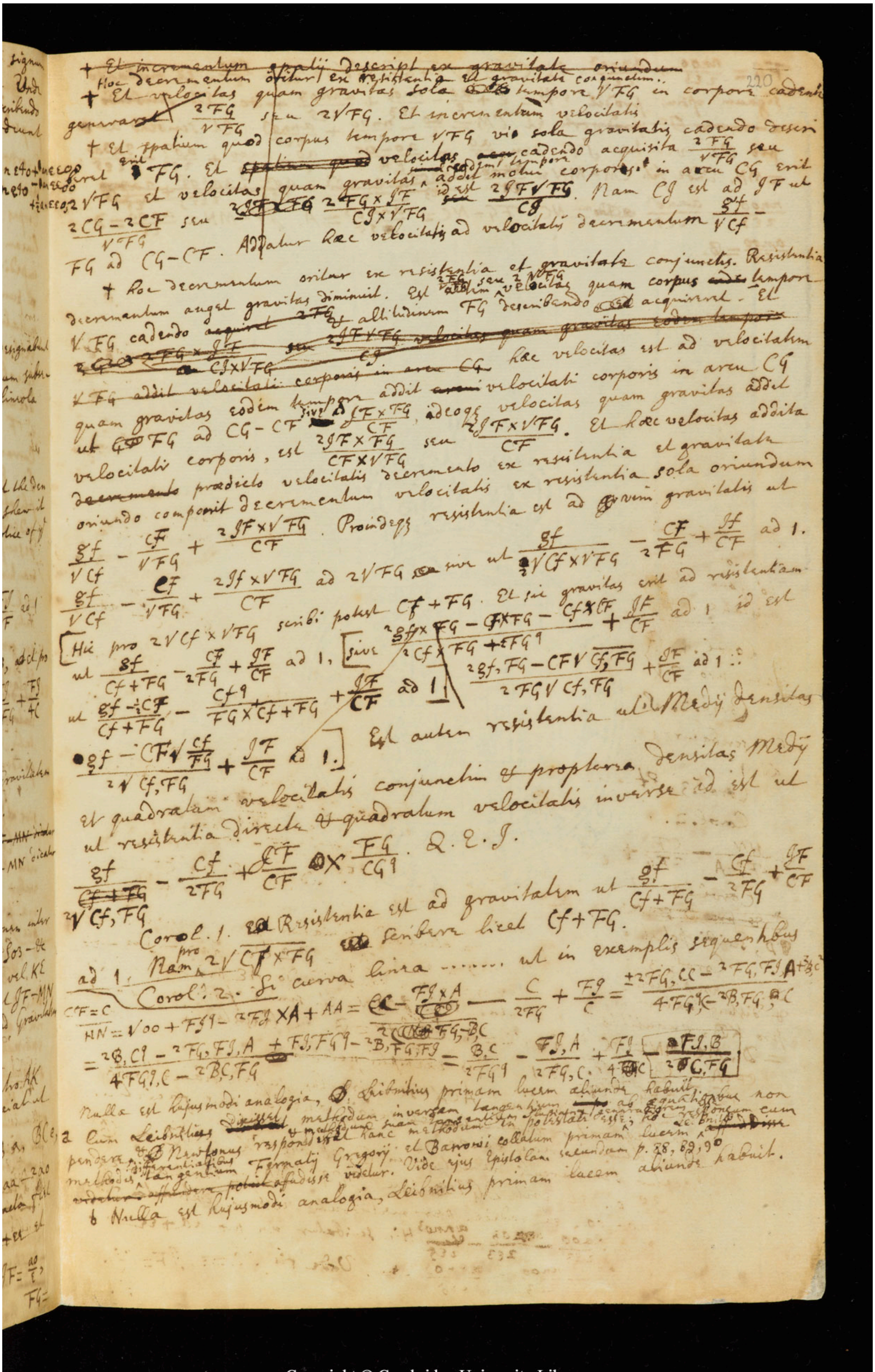


Figura 34: Manuscrito Add.3965.f.220^r



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS HUMANAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA - MESTRADO

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: METAFÍSICA E EPISTEMOLOGIA

Por decisão do Colegiado do Programa o aluno deverá atender as solicitações da banca, quando houver, e anexar este ao final da dissertação como versão definitiva aprovada pelo orientador, que neste momento estará representando a Banca Examinadora.

Curitiba, 08 de abril de 2014

Prof. Dr. Eduardo O. O. Barra Assinatura: E O O Barra