

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SANDRO RODRIGUES

GEOMETRIA E SIMULAÇÃO DE ROTATÓRIAS

CURITIBA
2012

SANDRO RODRIGUES

GEOMETRIA E SIMULAÇÃO DE ROTATÓRIAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Liliana Madalena Gramani

Co-Orientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

CURITIBA

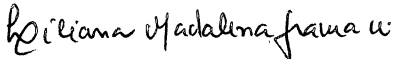
2012


TERMO DE APROVAÇÃO

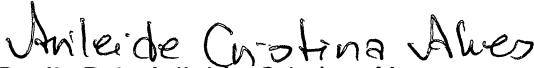
SANDRO RODRIGUES


GEOMETRIA E SIMULAÇÃO DE ROTATÓRIAS

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientadora: 
Prof^a. Dr^a. Liliana Madalena Gramani
Departamento de Matemática, UFPR

Co-Orientador: 
Prof. Dr. Eloy Kaviski
Departamento de Hidráulica e Saneamento, UFPR


Prof^a. Dr^a. Arleide Cristina Alves
Departamento de Matemática, UP


Prof. Dr. Luiz Fernando Lopes
Departamento de Matemática, UTFPR

Curitiba, 24 de fevereiro de 2012.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos, desfrutando, juntos, destes momentos que nos são tão importantes.

Aos meus pais José e Erica; pelo esforço, dedicação e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas.

Em especial, aos meus amigos(as) Fábio, Thais, Lara, Paula, Flávia, Lilian por sempre estarem me ajudando.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas oportunidades que me foram dadas na vida, principalmente por ter conhecido pessoas e lugares interessantes, mas também por ter vivido fases difíceis, que foram matérias-primas de aprendizado.

Não posso deixar de agradecer aos meus pais José e Erica, sem os quais não estaria aqui, e por terem me fornecido condições para me tornar o profissional e Homem que sou.

A minha irmã Simone, que desde pequeno me ensinou diversas coisas.

Aos meus amigos Fábio, Thais, Iara, Paula, Flávia, Lilian, Fabiano, Jean que me forneceram bons momentos de discussão sobre o tema a ser abordado, e material de pesquisa.

Aos meus orientadores: Liliana Madalena Gramani e Eloy Kaviski, pelas boas conversas que tivemos.

Agradeço em especial a secretária do PPGMNE, Maristela Bandil, uma pessoa extremamente prestativa que não mede esforços para que tudo dê certo.

Várias pessoas me auxiliaram neste trabalho. A todos só posso dizer: Muito Obrigado!

A persistência é o menor caminho do êxito.

Charles Chaplin

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um estudo na rotatória que se localiza no trevo Cataratas (Cascavel-Pr), buscando relacionar os congestionamentos com as condições geométricas da rotatória como o número de entradas, saídas, tamanho das pistas entre outras. O modelo utilizado baseia-se no modelo da onda cinética, o qual é um modelo hidrodinâmico, na escala macroscópica. Para a resolução do modelo utilizou-se simulação computacional, sendo que para cálculo da densidade, fluxo e velocidade foi aplicado aproximações por diferenças finitas. Os dados do fluxo de veículos no local foram fornecido pela concessionária de pedágios Ecocataratas que administra a rodovia neste local. Durante as simulações, dois casos foram considerados, um inicialmente com a pista sem veículos e outra com a rotatória contendo veículos. Como resultado verificou-se, que as posições que apresentaram maiores problemas foram, a entradas da rotatória BR-277 sentido Foz do Iguaçu-Curitiba-Pr e o ponto onde encontra-se entradas de veículos da BR 277, BR 369 e PR 163 sentido Curitiba-Cascavel-Pr e que o dimensionamento das saídas pode ser o principal responsável pelos congestionamentos.

Palavras-chave: Simulação, Escala Macroscópica, Diferenças Finitas, Rotatória.

ABSTRACT

In this work presented a study on the roundabout which is located in clover Cataratas (Cascavel-Pr), seeking to relate the congestion with the geometric conditions of the roundabout as the number of entrances, exits, size among other clues. The model is based on the kinetic model of the wave, which is a hydrodynamic model, on a macroscopic scale. To solve the model we used computer simulation, and for calculation of density and flow rate was applied finite difference approximations. The data flow of vehicles at the site were provided by the concessionaire Ecocataratas toll highway that runs this site. During the simulations, two cases were considered, initially with a runway without vehicles and other vehicles with rotary containing. As a result it was found that the positions that had major problems were the entrances to the roundabout towards Foz do Iguaçu-Curitiba-Pr point where you will find entries of vehicles in BR 277, BR 369 and PR 163 towards Curitiba-Cascavel-Pr and the scaling of the outputs can be primarily responsible for congestion.

Key-words: Simulation, Macroscopic Scale, Finite Difference, Roundabout.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉDIA ESPACIAL	19
FIGURA 2 – DIAGRAMA FUNDAMENTAL	20
FIGURA 3 – (A) DIAGRAMA FUNDAMENTAL TEÓRICO E (B) EMPÍRICO	21
FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA MÉDIA TEMPORAL	22
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO VELOCIDADE - DENSIDADE DE GREENSHIELDS	26
FIGURA 6 – MODELO FLUXO - DENSIDADE DE GREENSHIELDS (DIAGRAMA FUNDAMENTAL)	27
FIGURA 7 – MODELO VELOCIDADE - DENSIDADE DE GREENBERG	28
FIGURA 8 – DIAGRAMA FUNDAMENTAL DE GREENBERG	29
FIGURA 9 – DIAGRAMA VELOCIDADE-DENSIDADE DE UNDERWOOD	30
FIGURA 10– DIAGRAMA FUNDAMENTAL DE UNDERWOOD	31
FIGURA 11– VELOCIDADE-DENSIDADE E O DIAGRAMA FUNDAMENTAL ...	32
FIGURA 12– MEDIDAS EXPERIMENTAIS DA VELOCIDADE MÉDIA COMO FUNÇÃO DA DENSIDADE	34
FIGURA 13– REPRESENTAÇÃO DO MODELO FENOMENOLÓGICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE ACORDO COM Bonzani e Mussone (2003)	35
FIGURA 14– CAMPO DE ESCOAMENTOS	37
FIGURA 15– REGIÃO DISCRETIZADA. MALHA COMPUTACIONAL BIDIMENSIONAL	44
FIGURA 16– MALHA DE PONTOS UNIFORMEMENTE ESPAÇADOS	46
FIGURA 17– DIFERENÇA PROGRESSIVA	47
FIGURA 18– DIFERENÇA ATRASADA	48

FIGURA 19– DIFERENÇA CENTRAL	49
FIGURA 20– ESQUEMA EXPLÍCITO	51
FIGURA 21– ESQUEMA IMPLÍCITO DE QUATRO PONTOS	52
FIGURA 22– REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO VELOCIDADE - DEN- SIDADE	55
FIGURA 23– REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO DIAGRAMA FUNDAMENTAL .	55
FIGURA 24– REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA VELOCIDADE-DENSIDADE ...	56
FIGURA 25– ROTATÓRIA LOCALIZA NO TREVO CATARATAS (CASCAVEL - PARANÁ)	57
FIGURA 26– ROTATÓRIA SIMPLIFICADA	57
FIGURA 27– REPRESENTAÇÃO LINEAR DA PISTA DA ROTATÓRIA	58
FIGURA 28– REPRESENTAÇÃO DA DENSIDADE PRIMEIRO MODELO	59
FIGURA 29– REPRESENTAÇÃO DA DENSIDADE SEGUNDO MODELO	59
FIGURA 30– POSIÇÕES DE ENTRADAS E SAÍDAS DA ROTATÓRIA	60
FIGURA 31– FLUXOGRAMA DE $F(T, X, \rho)$	61
FIGURA 32– DIAGRAMA VELOCIDADE-DENSIDADE	64
FIGURA 33– DIAGRAMA FLUXO-DENSIDADE	64
FIGURA 34– DIAGRAMA DENSIDADE-ESPAÇO	65
FIGURA 35– DIAGRAMA VELOCIDADE-DENSIDADE	66
FIGURA 36– DIAGRAMA FLUXO-DENSIDADE	66
FIGURA 37– DIAGRAMA DENSIDADE-ESPAÇO	67
FIGURA 38– DIAGRAMA VELOCIDADE-DENSIDADE	67
FIGURA 39– DIAGRAMA FLUXO-DENSIDADE	68
FIGURA 40– DIAGRAMA FLUXO-DENSIDADE	69
FIGURA 41– DIAGRAMA VELOCIDADE-DENSIDADE	69
FIGURA 42– DENSIDADE-ESPAÇO	70
FIGURA 43– DIAGRAMA FUNDAMENTAL E DIAGRAMA VELOCIDADE - DEN-	

SIDADE	71
FIGURA 44– DENSIDADE-ESPAÇO	71
FIGURA 45– DIAGRAMA FUNDAMENTAL E DIAGRAMA VELOCIDADE - DEN- SIDADE	72
FIGURA 46– DENSIDADE-ESPAÇO	72
FIGURA 47– DIAGRAMA FUNDAMENTAL E DIAGRAMA VELOCIDADE - DEN- SIDADE	73
FIGURA 48– DENSIDADE - ESPAÇO	73
FIGURA 49– DIAGRAMA FUNDAMENTAL E DIAGRAMA VELOCIDADE - DEN- SIDADE	74
FIGURA 50– DIAGRAMA DENSIDADE - ESPAÇO	74

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVOS	14
1.1.1 Objetivo Geral	14
1.1.2 Objetivos Específicos	14
1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO	15
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2 REVISÃO DE LITERATURA	17
2.1 TEORIA DO FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS	17
2.1.1 Conceitos e Definições	18
2.1.2 Escalas de representação para fluxo de tráfego de veículos	23
Escala Microscópica	23
Escala Macroscópica	24
Escala Mesoscópica ou Cinética	25
2.2 MODELOS PARA O FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS	25
2.2.1 Modelo linear de Greenshields	26
2.2.2 Modelo logarítmico de Greenberg	28
2.2.3 Modelo de Underwood	29
2.2.4 Modelos de Regime Simples	31
2.2.5 Modelo de Bonzani e Mussone	33
2.3 FUNDAMENTOS DOS FENÔMENOS DE TRANSPORTE	35
2.3.1 Campos	36
2.3.1.1 Descrição de um Campo de Escoamento	37
2.3.1.2 Movimento do Fluido	38

2.4	MODELOS HIDRODINÂMICOS DE TRÁFEGO	40
2.4.1	Modelos Hidrodinâmicos de Primeira Ordem	40
2.4.2	Modelos Hidrodinâmicos de Segunda Ordem	42
2.5	DIFERENÇAS FINITAS	43
2.5.1	Esquemas Explícitos	50
2.5.2	Esquemas Implícitos	51
3	MATERIAL E MÉTODO	54
3.1	MODELO DA ONDA CINEMÁTICA	54
3.2	EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA	56
3.2.1	Modelos Utilizados	58
	Primeiro modelo	59
	Segundo modelo	59
3.2.2	Características do Problema	60
4	RESULTADOS	63
4.1	PRIMEIRA SIMULAÇÃO	63
4.2	SEGUNDA SIMULAÇÃO	63
4.2.1	Primeiro Modelo	63
4.2.2	Segundo Modelo	68
4.2.3	Comparação dos resultados com os modelos da literatura	70
	Modelo de Greenshields	71
	Modelo Greenberg	72
	Modelo de Underwood	73
	Modelo de Bonzani	74
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	75
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

No decorrer dos últimos anos, pode-se notar um significativo aumento no tráfego de veículos nas rodovias. Isso faz com que sejam realizados vários estudos para o dimensionamento adequado da malha de trânsito, os quais são fundamentais para se garantir uma boa fluidez e coerência nas rodovias. As soluções adotadas para as interseções têm grande importância no projeto de uma estrada, pois podem intervir na segurança e capacidade de tráfego, uma vez que estas obras apresentam custos significativos quando comparado ao custo total da estrada (Pimenta, C. R. T. and Oliveira, M. P., 2001). Com isso, os trechos de interseção são os que se destacam como sendo os mais críticos com relação à segurança, aspectos ambientais e de performance operacional (MONTALVÃO, 2010).

Muitos métodos podem ser encontradas na literatura, os quais nos permitem a avaliação do desempenho de uma rotatória (capacidade, níveis de serviço, etc). Os modelos para análise de rotatória geralmente são divididos em duas categorias: os modelos estatísticos, que são modelos baseados em regressão dos dados coletados (Silva, A. M. B. e Seco, A. J. M., 2004), (DNIT, Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes and UFSC, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008), e os modelos analíticos ou semi-probabilísticos que são modelos baseados na teoria (GALLELLI; VAINA, 2008) e (MING, 2008).

Cada técnica considera alguns aspectos da rotatória em comparação a outras (elementos geométricos, o fluxo de veículos e parâmetros comportamentais). Os resultados obtidos muitas vezes não são comparáveis entre si devido a peculiaridades próprias de cada método, para Gallelli e Vaina (2008) a melhor maneira de resolver este problema é usando um *software* de simulação refinada de circulação de veículos.

Os modelos clássicos de redes de sistema de transportes são considerados está-

ticos, por esta razão esses modelos não permitem uma simulação correta das redes viárias urbanas muito congestionadas. Por isso vários engenheiros de tráfego vem estudando modelos dentro de cada dia, sendo necessária a utilização de avanço da variável tempo (modelos contínuos) (GARAVELLO; PICOLLI, 2006).

Neste trabalho, a rotatória estudada está localizada na BR-277, no município de Cascavel, estado do Paraná, Brasil. A escolha se deve ao intenso tráfego de veículos, que tem causado congestionamentos e um grande número de acidentes (BALBO, 2011).

Foram realizadas simulações considerando-se apenas a rotatória localizada no trevo Cataratas, sendo uma simulação para pista livre e outra para a pista contendo veículos, para analisar as condições de fluxo de veículos. Para cada simulação utiliza-se dois modelos os quais são comparados com modelos conhecidos na literatura.

Após a simulação são apresentados os diagramas velocidade-densidade, diagrama fundamental (fluxo-densidade) e densidade-espço, que podem ser utilizados para realizar possíveis mudanças na geometria da rotatória.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é resolver a equação da continuidade, através de valores da densidade local, desenvolver um modelo matemático para simular a tráfego de veículos em rotatórias, capaz de identificar os locais na rotatória que apresentam problemas, os quais são responsáveis pelos congestionamentos na pista dando uma visão geral desse problema e propor estratégias para solução.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os Objetivos específicos são:

- a) Aplicar o método das diferenças finitas afim de solucionar a equação da conti-

nuidade para determinar valores da densidade e do fluxo de veículos.

- b) Analisar os valores da densidade, fluxo e velocidade, em períodos específicos de tempo e verificar os locais que apresentam maiores problemas em cada simulação.
- c) A partir dos valores da densidade, velocidade e fluxo determinar possíveis causas para problemas de congestionamentos.
- d) Apresentar possíveis soluções para o problema.

1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

A importância deste trabalho está na determinação das relações envolvendo densidade e posição na rodovia, neste caso a rotatória que encontra-se no trevo Cataratas (Cascavel - Pr). Com o modelo proposto neste trabalho, consegue-se resultados objetivos auxiliando engenheiros e arquitetos em seus planejamentos para melhor dimensionamento da rotatória, com o objetivo de reduzir as filas de congestionamentos nos piores locais da rotatória determinados por este trabalho.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em mais quatro capítulos, detalhados a seguir:

No Capítulo 2 é feita uma abordagem dos diversos modelos encontrados na literatura para o estudo do tráfego de veículos, que relacionam a velocidade e densidade sendo apresentado o diagrama fundamental de cada um desses modelos. Realiza-se uma análise dos modelos hidrodinâmicos, conceituando os modelos de primeira e segunda ordem. Descreve-se o desenvolvimento matemático da aproximação por diferenças finitas e são apresentados conceitos de Fenômenos de Transporte que são necessários para um melhor entendimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 é descrita a equação utilizada para a simulação computacional e feita a exposição do problema trabalhado.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do Método das Diferenças Finitas, tais como os gráficos para os diagramas velocidade-densidade, diagrama fundamental e densidade-espaço.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e recomendações para a realização de estudos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 TEORIA DO FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS

Uma das vantagens do uso da simulação na teoria do fluxo de tráfego de veículos é a possibilidade de análise de cenários diversos, algo difícil de ser realizado em condições reais. Esta vantagem permite a análise em um ambiente controlado de um conjunto de configurações geométricas e de diversos níveis de tráfego, permitindo-lhes escolher as melhores soluções para cada caso concreto (FERREIRA *et al.*, 2010).

As teorias de fluxo de tráfego buscam descrever de maneira matemática as interações entre os veículos, vias e componentes de infra-estrutura, como semáforos, sinalizações, entre outros. O estudo da teoria do fluxo de tráfego teve início na década de trinta, na tentativa de relacionar as grandezas de fluxo, densidade e velocidade, pelo cientista Bruce Greenshields (LIMA, 2007).

Em 1950, James Lighthill e Gerald Whithan, especialistas em Dinâmica dos Fluidos, (e independentemente por Richards) pensavam que as equações que descrevem o fluxo de água também poderiam descrever o escoamento do tráfego de automóveis. Essas são equações da Dinâmica dos Fluidos um conjunto de equações diferenciais parciais conhecidas como de Navier-Stokes, que expressam a conservação de massa e quantidade de movimento.

Em trabalhos recentes sobre fluxo de tráfego em rotatórias, pode-se citar alguns como Kusumaa e Koutsopoulosb (2011) que trabalha com lacunas críticas (a tomada de decisão do motorista, se entra ou não na pista, fazendo com isso uma fusão com o tráfego), em uma rotatória de duas pistas localizado na Brommaplan Estocolmo - Suécia. Fouladvand, Sadjadi e Shaebani (2004) construiu um modelo de autômatos celulares estocásticos para descrever o tráfego em uma rotatória sem semáforos. Outros

trabalhos para o fluxo de tráfego em rotatórias que tratam de modelos de autômatos celulares podem ser encontrados em Bai *et al.* (2010), que trabalha com condições de fronteira aberta, Feng *et al.* (2007) e Tavares (2010) usando autômatos celulares para uma mistura binária de veículos longos e curtos.

O estudo do tráfego de veículos, leva em conta grandezas físicas, sendo essas grandezas utilizadas dentro das escalas microscópicas, macroscópicas e mesoscópicas (GRAMANI, 2010). Pode-se representar essas grandezas com diferentes enfoques, os quais serão discutidos na próxima seção.

2.1.1 Conceitos e Definições

As principais grandezas físicas envolvidas na descrição dos modelos de tráfego, como o fluxo, densidade e velocidade podem ser expressas por diferentes enfoques, como em médias espaciais ou em médias temporais.

O desempenho do tráfego pode ser avaliado por grandezas como:

- a densidade $\rho(x,t)$ é o número de veículos por unidade de espaço;
- a velocidade $u(x,t)$ indica a distância percorrida por um veículo em um determinado tempo;
- o fluxo $q(x,t)$ é a taxa de passagem de veículos em uma seção, dado em veículos por unidade de tempo.

Nesta seção serão apresentados diferentes formas para calcular essas grandezas.

O comportamento dessas grandezas podem ser definidos a partir do diagrama espaço-tempo, que representa a trajetória de cada veículo ao longo do tempo. Como as características do tráfego são variáveis do tempo e do espaço, é comum adotar valores médios para essas grandezas, podendo ser médias temporais ou espaciais (LIMA, 2007). Desta forma, existem diferentes expressões para essas grandezas medidas. Quando considera-se uma seção da pista em um determinado intervalo de

tempo, será denominado média temporal, e quando considera-se um trecho da pista em um instante de tempo, que será chamado de média espacial.

• Médias espaciais

Define-se densidade em um trecho da pista de comprimento L , em um intervalo de tempo dt , como o número de trajetórias (veículos) nesse trecho no instante de tempo t_l dividido pelo comprimento L considerado:

$$\rho = \frac{n}{L}, \quad (1)$$

com n sendo o número de veículos presentes nesse trecho L (Figura 1).

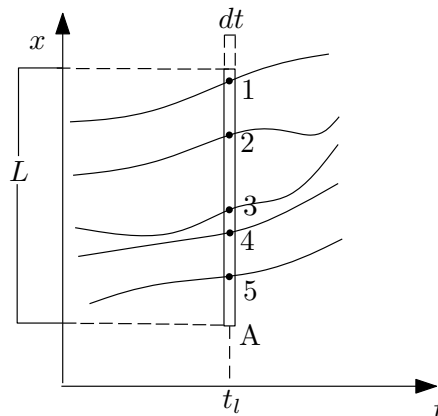


FIGURA 1: Representação geométrica da média espacial

FONTE: O autor (2011)

Assumem-se alguns pontos críticos no percurso, denominados como densidade média ou densidade crítica ρ_{crit} o limite máximo de veículos em um determinado trecho, onde ainda é possível o movimento em tráfego livre, nesse ponto tem-se o fluxo máximo. Faz-se uma distinção para a densidade máxima ρ_{max} , a qual é a máxima densidade admissível nesse trecho (Figura 2).

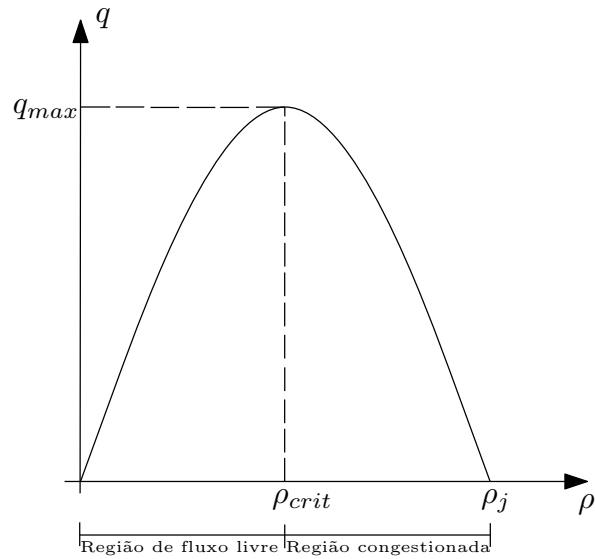


FIGURA 2: Diagrama Fundamental

FONTE: O autor (2011)

A equação da velocidade média dos veículos nesse trecho da via escreve-se como:

$$u = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}, \quad (2)$$

onde u_i é a velocidade instantânea do i -ésimo veículo no trecho considerado. Pode-se também verificar que em regime permanente (fluxo e densidade constantes em relação ao tempo) a velocidade pode também ser determinada por:

$$u = \frac{q}{\rho}, \quad (3)$$

ou seja:

$$q = \rho u, \quad (4)$$

sendo q o fluxo de veículos.

Substituindo as equações (1) e (2), na equação (4), o fluxo pode ser reescrito como:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{L}. \quad (5)$$

O fluxo q está relacionado com as variáveis velocidade e densidade. Assim obtém-se uma relação fundamental para o fluxo de tráfego equação (4). Essa equação é denominada equação fundamental do fluxo de tráfego, e sua representação gráfica é o diagrama fundamental do fluxo, relacionando fluxo e densidade (Figura 2).

O fluxo máximo é representado por q_{max} . Tem-se no ponto correspondente a q_{max} que $\frac{\partial q}{\partial \rho} = 0$, como pode ser observado na figura 2.

De acordo com a teoria clássica, o diagrama fundamental consiste de duas curvas distintas, uma com inclinação positiva iniciando na origem (quando a densidade é zero, o fluxo também é zero) para o fluxo livre, e outra com uma inclinação negativa a partir da densidade crítica (quando a densidade é máxima, o fluxo é zero) para o fluxo congestionado. No entanto, em condições de congestionamento, dados empíricos mostram que é difícil identificar uma curva de representação entre o fluxo e a densidade de veículos.

A figura 3 mostra este fenômeno de transição do fluxo livre para o fluxo congestionado, ou seja, a representação teórica (gráfico a esquerda) e empírica (gráfico a direita) do diagrama fundamental.

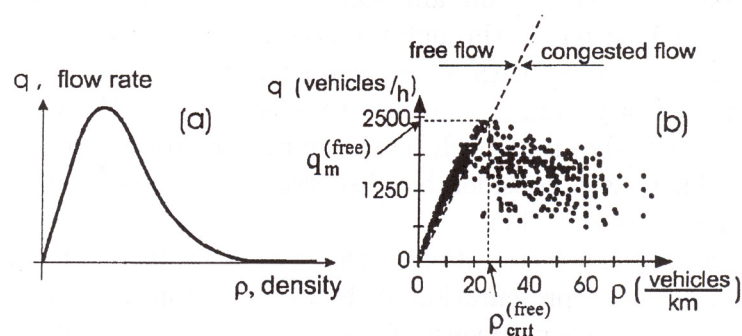


FIGURA 3: (a) Diagrama fundamental teórico e (b) empírico

FONTE: (KERNER, 2004)

• Médias temporais

No caso anterior em um único instante de tempo dispõe-se de um trecho da pista, como em uma foto aérea. Quando deseja-se obter as grandezas a partir de dados reais, utilizam-se detectores de movimento instalados em alguma seção da pista. Com isso, tem-se a necessidade de expressões que considerem várias medições na mesma seção da pista x_k . A figura 4 representa a média temporal, que consiste em considerar uma seção da via x_k em um período tempo T .

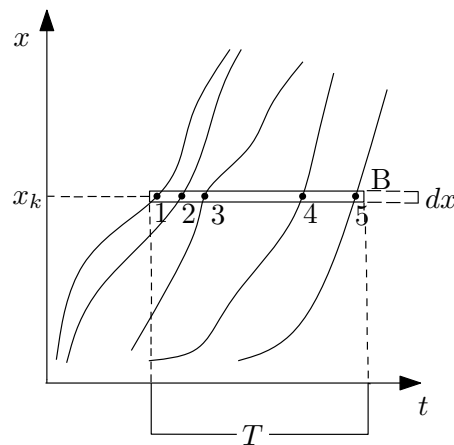


FIGURA 4: Representação geométrica da Média temporal

FONTE: O autor (2011)

O fluxo é dado pelo número de veículos (m) que cruzam uma determinada seção da via em um dado intervalo de tempo T , ou seja:

$$q = \frac{m}{T}. \quad (6)$$

Nesse caso a média das velocidades dos veículos que cruzam uma seção da via é dada por:

$$u = \frac{\sum_{j=1}^m u_j}{m}, \quad (7)$$

com u_j sendo a velocidade do j -ésimo veículo a cruzar esta seção. Substituindo-se as equações (6) e (7) na equação (4) tem-se a densidade média de veículos, nessa

seção da pista, dada por:

$$\rho = \frac{m^2}{T \sum_{j=1}^m u_j}, \quad (8)$$

Essas médias serão utilizadas dentro das escalas de representação que serão descritas a seguir.

2.1.2 Escalas de representação para fluxo de tráfego de veículos

O fenômeno do fluxo de tráfego, como todos os sistemas reais no mundo, pode ser observado e representado por diferentes escalas, entre elas: microscópica, macroscópica, e mesoscópica ou cinética (GRAMANI, 2010). Cada uma destas escalas apresenta uma estrutura matemática própria, que será apresentada a seguir:

Neste trabalho, foi utilizado apenas a escala de representação macroscópica que será detalhada na seção (2.4). As demais escalas serão apresentadas resumidamente. Mais detalhes podem ser encontrados em Kerner (2004) e Prigogine e Herman (1971).

Escala Microscópica

Para a modelagem microscópica todos os veículos são identificados individualmente. Neste caso a posição e a velocidade de cada veículo definem o estado do sistema como variáveis dependentes do tempo. Os modelos matemáticos referentes a esta escala, são representados pelas equações da mecânica newtoniana, ou seja equações diferenciais da dinâmica que descrevem sua evolução geralmente por sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO). A solução do sistema de EDO providencia a descrição das condições de fluxo na estrada.

Os elementos da escala microscópica são:

- $x(t)$ é a posição do veículo em função do tempo;

- $u(t) = \frac{dx}{dt}$ é a velocidade do veículo em função do tempo;
- $a(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ é a aceleração do veículo em função do tempo.

Para condições iniciais referentes ao tempo, a posição e a velocidade, denotadas respectivamente por t_0, x_0 e u_0 , tem-se para o veículo a equação:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t u_0 dt + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t a(t) dt dt. \quad (9)$$

Considerando n veículos na estrada tem-se que a aceleração do i -ésimo veículo é equivalente a:

$$a_i(t) = \frac{du_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} \text{ com } i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias fornece a descrição do escoamento do sistema.

Escala Macroscópica

A modelagem macroscópica descarta a escala microscópica do tráfego em termos das velocidades individuais dos veículos ou as componentes individuais do sistema (tais como as ligações ou os cruzamentos), adotando uma visão macroscópica do tráfego em uma rede. Nesta escala o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, nominalmente a densidade, o momento linear e a energia cinética dos veículos, consideradas como variáveis dependentes do tempo e do espaço. Os modelos matemáticos referentes a esta escala são baseados na teoria hidrodinâmica de fluidos e assumem um fluxo contínuo de veículos. As equações de conservação e modelos fenomenológicos são utilizadas, descrevendo a evolução das variáveis, densidade, momento linear e energia, por sistemas de equações diferenciais parciais. Considerando a dificuldade em se modelar a energia por uma descrição macroscópica os modelos são limitados geralmente às primeiras duas quantidades, a

equação de evolução da densidade de veículos e velocidade como variáveis observáveis do fluxo de veículos.

Escala Mesoscópica ou Cinética

Na modelagem mesoscópica o estado do sistema é ainda identificado pela posição e pela velocidade dos veículos, entretanto esta identificação não refere-se a cada veículo, mas a uma distribuição apropriada de probabilidade sobre o estado microscópico considerado como uma variável aleatória. Os modelos matemáticos referentes a esta escala descrevem a evolução da função de distribuição por equações integro-diferenciais com a estrutura similar à equação de Boltzmann.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial u} = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{colisão}}, \quad (11)$$

onde f representa o função de distribuição de probabilidade de uma partícula, t representa o tempo, u representa a velocidade média das partículas, x representa a posição de cada partícula, F representa a força externa do sistema, m representa a massa da partícula e o termo $\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{colisão}}$ representando a variação total no número esperado de partículas devido a colisões.

Os modelos matemáticos aplicados na teoria cinética foram desenvolvidos, a partir dos livros pioneiros de Prigogine e Herman (1971), para o modelo de fluxo de tráfego veicular sobre estradas e redes de estradas.

2.2 MODELOS PARA O FLUXO DE TRÁFEGO DE VEÍCULOS

Os modelos de tráfego tem como principal objetivo satisfazer se possível algumas condições como: quando o fluxo é nulo a densidade é nula, quando a densidade é máxima ρ_{\max} o fluxo é nulo e a velocidade livre ocorre quando a densidade é nula.

Dentre os modelos mais conhecidos pode-se citar os modelos de Greenshields, Greenberg, Underwood, modelos de Regime Simplese e o modelo de Bonzani e Mus-

sones, que serão descritos nas próximas seções.

2.2.1 Modelo linear de Greenshields

O modelo linear de velocidade-densidade teve sua primeira proposta criada por Greenshields (1935), sendo o primeiro modelo matemático de representação macroscópica do fluxo de tráfego veicular. O modelo possui a seguinte formulação:

$$u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right), \quad (12)$$

onde

- $u(\rho)$ é a velocidade para cada ρ com $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$,
- u_{\max} é a velocidade máxima;
- ρ_{\max} é a densidade máxima admitida por metro quadrado.

Na figura 5, pode ser observada a representação gráfica do modelo onde u_0 é a velocidade média.

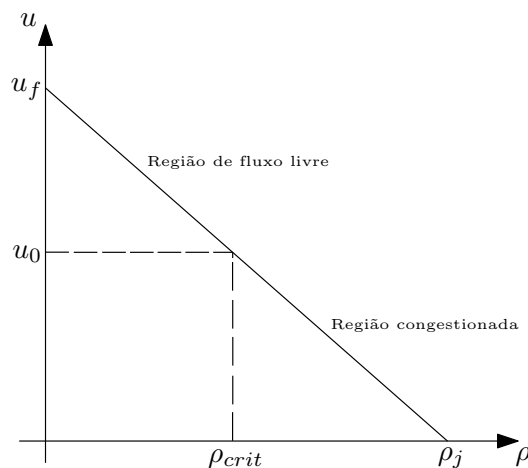


FIGURA 5: Representação gráfica do modelo velocidade - densidade de Greenshields

FONTES: Greenshields (1935)

Ao relacionar o fluxo e a densidade para o modelo de Greenshields (1935), tem-se a seguinte equação:

$$q = \rho u = u_{\max} \left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{\max}} \right), \quad (13)$$

Assim se $q = q_{\max}$ e $\left. \frac{dq}{d\rho} \right|_{\rho_{\text{crit}}} = 0$, então quando

$$u_{\max} \left(1 - 2 \frac{\rho_{\text{crit}}}{\rho_{\max}} \right) = 0, \quad (14)$$

chega-se em

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{\rho_{\max}}{2}. \quad (15)$$

Para calcular u_0 , basta substituir ρ_{crit} por $\frac{\rho_{\max}}{2}$ na equação (12)

$$u_0 \Big|_{\rho=\rho_{\text{crit}}} = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{\max}}{2\rho_{\max}} \right) = \frac{u_{\max}}{2}, \quad (16)$$

Para este modelo observa-se que a velocidade média é exatamente a metade da velocidade máxima, conforme figura 6.

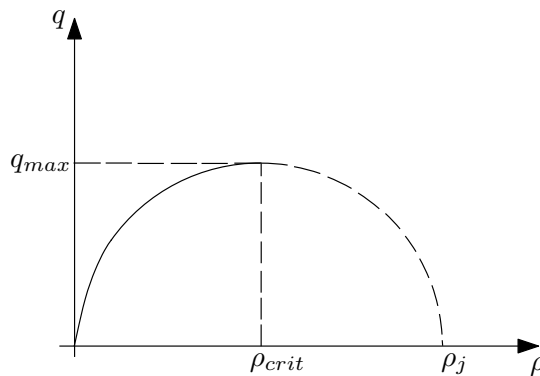


FIGURA 6: Modelo fluxo - densidade de Greenshields (Diagrama Fundamental)

FONTE: Greenshields (1935)

Pode-se calcular o fluxo máximo, a partir das equações (15) e (16), assim para $\rho = \rho_{\text{crit}}$ e $u = u_0$ obtêm-se:

$$q_{\max} = \frac{\rho_{\max} u_{\max}}{4}, \quad (17)$$

representado na figura 6

Apesar do modelo ter vantagem com relação a sua simplicidade, observações de campo revelam que o comportamento linear da curva velocidade-densidade acontece apenas em faixas intermediárias de velocidade e densidade. Devido estas limitações, alguns estudiosos sugeriram novos modelos a fim de superá-las. Um destes modelos foi proposto por Greenberg (1959).

2.2.2 Modelo logarítmico de Greenberg

O modelo de Greenberg (1959) demonstrou ter boa aderência para fluxos congestionados, porem não não sendo satisfatórias para baixas densidades. Para o Modelo de Greenberg a relação velocidade-densidade tem a seguinte formulação:

$$u = u_0 \ln \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho} \right), \quad (18)$$

Pode-se observar na figura 7 que quando $\rho \rightarrow 0$ tem-se $u_f \rightarrow \infty$, o que torna o modelo insatisfatório para baixas densidades.

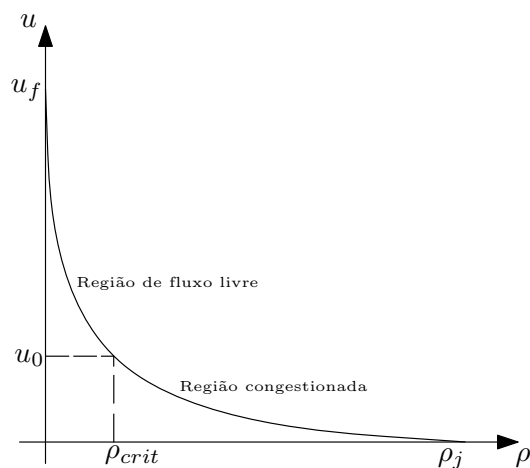


FIGURA 7: Modelo velocidade - densidade de Greenberg

FONTE: Greenberg (1959)

A relação fluxo-densidade é representada por:

$$q = \rho u_0 \ln \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho} \right), \quad (19)$$

Para as condições de q_{\max} , se $q = q_{\max}$ e $\left. \frac{dq}{d\rho} \right|_{\rho_{\text{crit}}} = 0$, logo

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{\rho_{\max}}{e}, \quad (20)$$

portanto

$$q_{\max} = u_0 \left(\frac{\rho_{\max}}{e} \right), \quad (21)$$

o qual está representado na figura 8

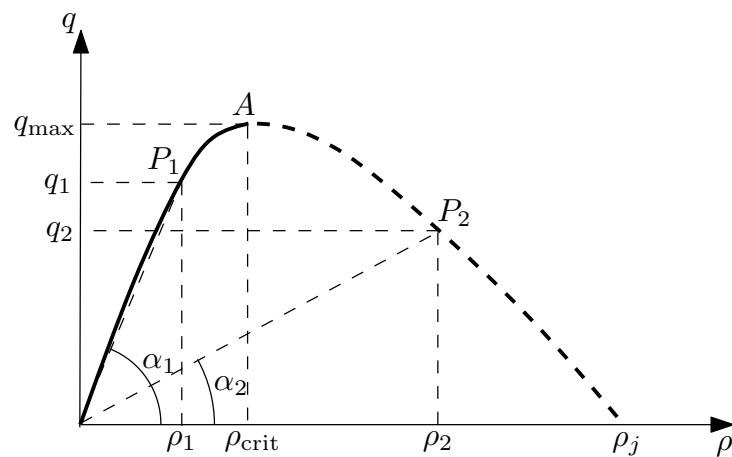


FIGURA 8: Diagrama Fundamental de Greenberg
FONTE: Greenberg (1959)

2.2.3 Modelo de Underwood

Dois anos mais tarde Underwood (1961) propôs um novo modelo, que ao contrário do modelo de Greenberg (1959) apresentou boa aderência para baixas concentrações, mas não para condições de altas concentrações. Este modelo possui a seguinte formulação:

$$u = u_{\max} e^{\left(\frac{-\rho}{\rho_{\text{crit}}} \right)}, \quad (22)$$

Pode-se observar na figura 9 que quando $u \rightarrow 0$ tem-se $\rho_{\max} \rightarrow \infty$, o que torna esse modelo insatisfatório para baixas densidades.

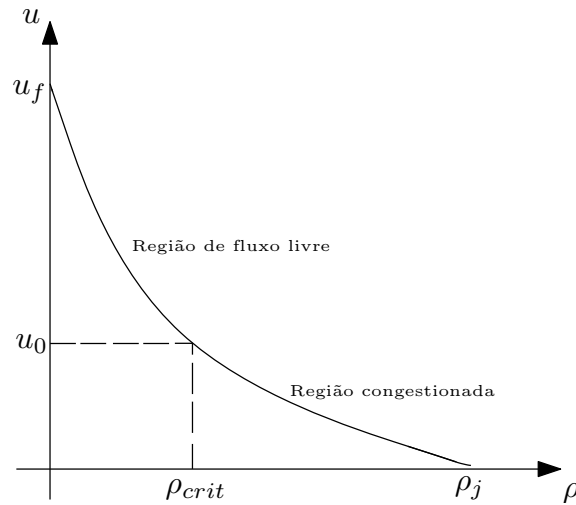


FIGURA 9: Diagrama velocidade-densidade de Underwood
 FONTE: Underwood (1961)

A relação fluxo-densidade para o modelo de Underwood (1961) é representada pela equação (23)

$$q = \rho u_{\max} e^{\left(\frac{-\rho}{\rho_{\text{crit}}}\right)}. \quad (23)$$

Para o fluxo máximo tem-se, se $q = q_{\max} \rightarrow \frac{dq}{d\rho} \Big|_{\rho_{\text{crit}}} = 0$, então

$$u_0 = \frac{u_{\max}}{e}, \quad (24)$$

logo

$$q_{\max} = \rho_{\text{crit}} \left(\frac{u_f}{e}\right), \quad (25)$$

que pode ser observado na figura 10.

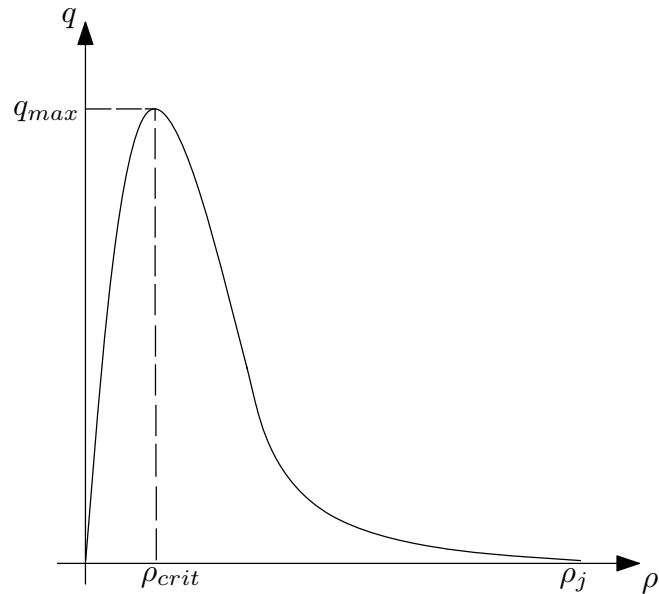


FIGURA 10: Diagrama Fundamental de Underwood
 FONTE: Underwood (1961)

No mesmo ano Edie (1961) propôs o uso misto de modelos, classificado como multi-regime, utilizando o modelo de Underwood (1961) para situações com baixas densidades e o modelo de Greenberg (1959), para as situações com altas densidades.

2.2.4 Modelos de Regime Simples

Esta família de modelos, foi proposta com o objetivo de superar as limitações dos modelos anteriores. O primeiro desse modelos foi proposto por Drew (1965) e possui a seguinte formulação:

$$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{\frac{s+1}{2}} \right], \quad (26)$$

com $s > -1$. Verifica-se que quando $s = 1$ o modelo de Greenshields (1935) torna-se um caso particular do modelo de Drew (1965). Se $s = 0$, a equação (28) reduz-se a:

$$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)} \right], \quad (27)$$

sendo conhecido como modelo parabólico.

Dois anos mais tarde, Drake, Shofer e May (1967) propuseram um modelo com a seguinte formulação:

$$u(\rho) = u_{\max} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2}, \quad (28)$$

Pipes (1967) e Munjal e Pipes (1971), chegaram à seguinte formulação:

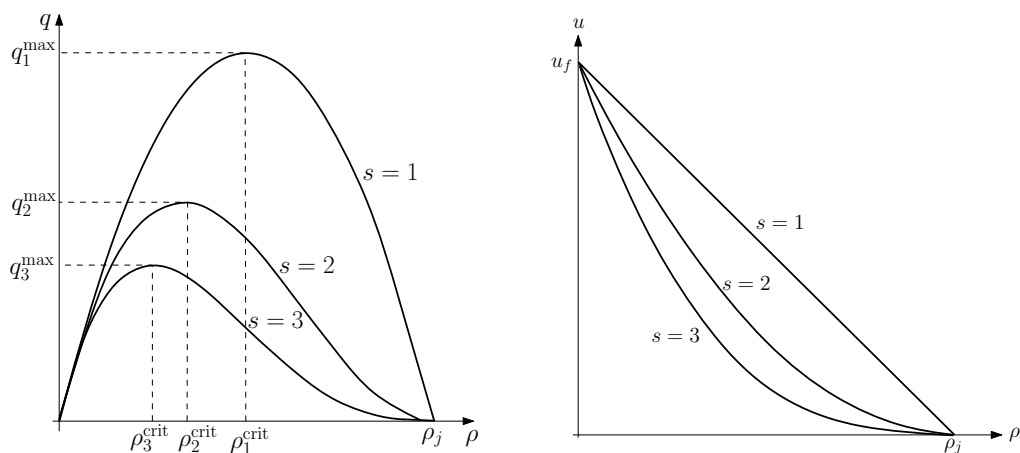
$$u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_j} \right)^s, \quad (29)$$

com $s > 1$. Para $s = 1$ obtém-se o modelo de Greenshields (1935).

Calculando o fluxo, obtém-se:

$$q = \rho u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^s, \quad (30)$$

Os gráficos velocidade-densidade e o diagrama fundamental para o modelo de Munjal e Pipes (1971) para valores de $s = 1, 2, 3$ podem ser observados na figura 11-a e 11-b.



(a) Diagrama fundamental

(b) Modelo velocidade-densidade

FIGURA 11: Velocidade-densidade e o Diagrama fundamental

FONTE: Munjal e Pipes (1971)

2.2.5 Modelo de Bonzani e Mussone

Experiências de Kerner (2004) em auto-estradas da Alemanha, comprovam a figura 3-a mostrando que:

(a) o fluxo dos veículos para valores baixos da densidade local se mantém linear enquanto o valor da densidade crítica não é atingida, ou seja, $\rho < \rho_{crit}$;

(b) o fluxo de veículos atinge o seu máximo quando a densidade local é igual a densidade crítica, $\rho = \rho_{crit}$;

(c) o fluxo de veículos decai com o aumento da densidade local para $\rho \geq \rho_{crit}$ atingindo o seu valor mínimo quando a densidade é máxima.

É importante ressaltar, que a modelagem das condições de fluxo estável através de uma fórmula analítica deveria relacionar apenas um único parâmetro para cada fenômeno específico. Então, o mesmo evento poderá ser descrito por diferentes pares de parâmetros.

Entretanto, Bonzani e Mussone (2003) propuseram um modelo fenomenológico que descreve a relação velocidade-densidade nas condições de fluxo uniforme estável caracterizada por um único parâmetro livre. Este modelo tem como base as medições experimentais na auto-estrada Veneza-Mestre (Itália) em condições de fluxo estacionário uniforme, o qual pode ser visualizado na figura 12.

Considerando a densidade $\rho \in [0, 1]$ e a velocidade $v \in [0, 1]$, várias medidas indicam o seguinte intervalo para a densidade crítica $\rho_{crit} \in [0; 0, 15]$:

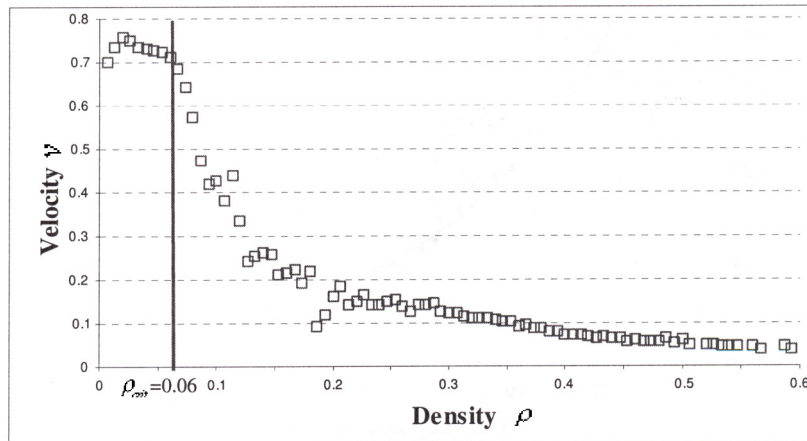


FIGURA 12: Medidas experimentais da velocidade média como função da densidade

FONTES: (BONZANI; MUSSONE, 2003)

Como foi mencionado anteriormente, Bonzani e Mussone (2003) assumiram um modelo analítico no qual a velocidade para $\rho \leq \rho_{crit}$ permanece praticamente constante e decai para $\rho > \rho_{crit}$, tendendo ao valor $v = 0$ para $\rho = 1$ nas condições de fluxo uniforme estável. Assim, a relação exponencial considerada entre a velocidade e a densidade é:

$$u(\rho) = e^{-\alpha \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)}, \quad (31)$$

onde o parâmetro positivo α representa as condições específicas da estrada. Comparações com os resultados experimentais sugerem a seguinte escala deste parâmetro:

$$\alpha \in [1; 2,5]$$

A figura 13 ilustra que este modelo fenomenológico oferece uma aproximação razoável para $\rho \leq 0,5$, quando comparado com resultados experimentais.

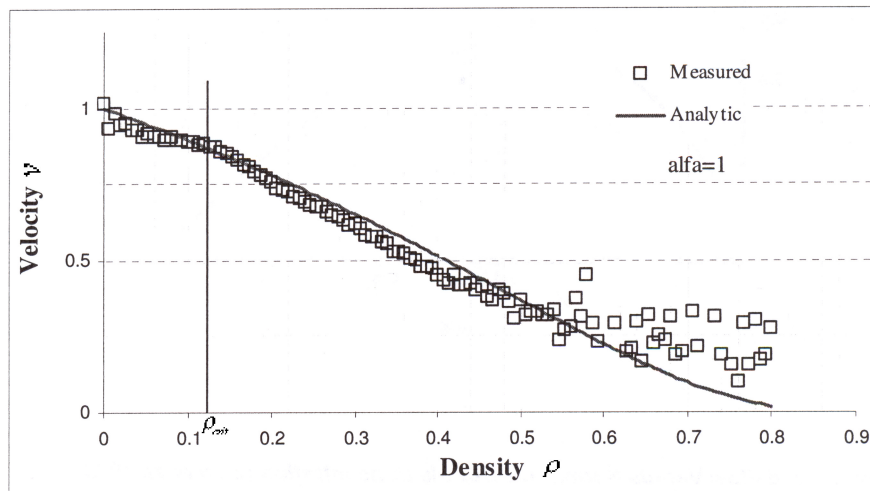


FIGURA 13: Representação do modelo fenomenológico e resultados experimentais de acordo com Bonzani e Mussone (2003)

FONTE: (BONZANI; MUSSONE, 2003)

A equação (31) é um modelo bastante simples, caracterizado por um único parâmetro α que representa as condições ambientais. Este modelo, porém, é capaz de captar os fenômenos descritos por Kerner (2004) nos itens (a), (b) e (c).

Estes modelos descritos não são utilizados diretamente para simulação, mas são utilizados como referências para a formulação do modelo apresentado no capítulo 3.

2.3 FUNDAMENTOS DOS FENÔMENOS DE TRANSPORTE

Ao estudar fenômenos de transporte, depara-se com dois métodos, o lagrangiano e o euleriano. Deve-se escolher o que fornece respostas mais diretas aos nossos problemas físicos. Cada um deles apresenta suas particularidades, brevemente apresentadas a seguir:

- **Método Lagrangiano**

Descreve o comportamento de partículas discretas, ou de massas pontuais, quando elas se movem no espaço. Usa-se o método lagrangiano de análise na mecânica dos sólidos elementar. As leis fundamentais, por exemplo, a segunda

lei de Newton ¹, aplicam-se diretamente as massas discretas que são consideradas. Ao estudar fenômenos de transporte pelo método lagrangiano, deve-se considerar a complexidade de descrever o comportamento de uma partícula de um fluido à medida que ela flui através de uma região no espaço, (SISSOM; PITTS, 1988).

- **Método Euleriano**

A medida em que a partícula de um fluido flui através de uma região no espaço, não é só difícil segui-la, como também sua forma não pode ser determinada, pois pode sofrer variações continuamente. Torna-se mais vantajoso descrever o que acontece num ponto fixo, ou numa região fixa do espaço. O método euleriano, permite observar fenômenos em pontos de interesse, ao invés de tentar seguir a partícula numa região do espaço (SISSOM; PITTS, 1988).

A seguir serão abordadas as definições de campos de escoamento e movimento de fluido. Estas ideias foram utilizadas para a implementação do código computacional que deu origem as simulações analisadas para concretização desse estudo.

2.3.1 Campos

Um campo é uma região do espaço onde acontecem características observáveis. Um campo térmico pode ser descrito em termos das temperaturas em diversos pontos do espaço, um campo elétrico por potenciais pontuais e um campo fluido pelas velocidades do fluido em diferentes pontos do espaço, (SISSOM; PITTS, 1988).

O comportamento de um campo está relacionado com suas grandezas fundamentais. Por exemplo, para um campo fluido essas grandezas podem ser: a massa, a velocidade e a densidade. A interação destas quantidades depende tanto do ponto de vista de um observador, quanto do módulo destas grandezas.

¹**Segunda lei de Newton:** A resultante das forças sobre um corpo produz uma aceleração de tal modo que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, onde \vec{F} é a força aplicada m é a massa do corpo e \vec{a} é a aceleração.

2.3.1.1 Descrição de um Campo de escoamento

- Linha de corrente

Uma linha de corrente é uma linha imaginária em um campo de escoamento, tal que para um dado instante de tempo, a velocidade em qualquer ponto é dada pela tangente obtida a esta linha no ponto. Uma vez que o vetor velocidade é tangente à linha de corrente, a matéria não pode atravessá-la.

- Filamento de corrente

Um filamento de corrente é uma família de linhas de corrente que formam uma passagem de seção reta infinitesimal.

- Tubo de corrente

Um tubo de corrente é limitado por um número infinito de linhas de corrente que formam uma superfície através da qual não existe escoamento. Caso não haja criação, acúmulo ou destruição de massa no interior do tubo de corrente, todo fluido que entra deve sair, ou seja, a massa deve ser conservada.

A figura 14 representa o campo de escoamento. Nela, pode-se observar sua linha de corrente, seu filamento de corrente e seu tubo de corrente.

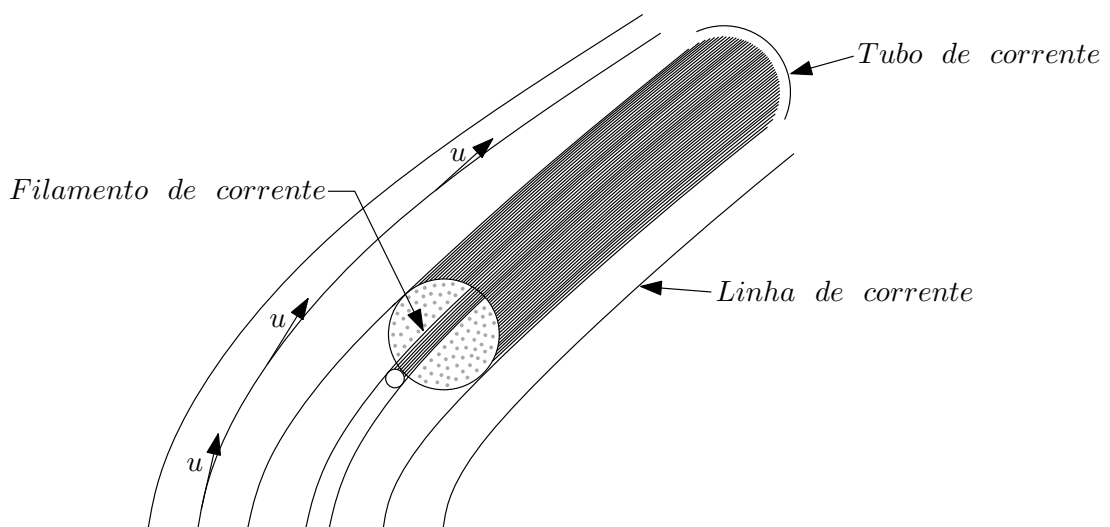


FIGURA 14: Campo de escoamentos

FONTE: O autor (2011)

2.3.1.2 Movimento do Fluido

Costuma-se descrever, na dinâmica dos sólidos, o movimento de partículas e corpos rígidos por meio das velocidades e acelerações do seu centro de massa. Para um número finito de partículas, a velocidade da i -ésima partícula pode ser dada pelas equações escalares:

$$\begin{aligned} u_i &= f_i(t), \\ v_i &= g_i(t), \\ w_i &= h_i(t), \end{aligned} \tag{32}$$

onde i corresponde à partícula. Ao se trabalhar com fluido, deve-se lembrar que existe um número infinito de partículas, cujas características podem variar continuamente, o que tornaria este trabalho infactível. Este tipo de tratamento é denominado de tratamento lagrangiano.

O método euleriano, que é o tratamento mais comum, permite trabalhar em uma região fixa no espaço, sem a necessidade de identificar as partículas da região num dado instante de tempo. Uma observação fornece um quadro instantâneo das velocidades e acelerações de cada partícula. Para isto, basta considerar as coordenadas espaciais como variáveis independentes, em vez de considerá-las dependentes como no método lagrangiano. O campo de velocidades para o método euleriano é dado por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \tag{33}$$

com suas respectivas velocidades em coordenadas cartesianas representadas por:

$$\begin{aligned} u &= f(x, y, z, t), \\ v &= g(x, y, z, t), \\ w &= h(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{34}$$

Utilizando-se o tratamento euleriano, as variações infinitesimais de velocidade de-

vem ser expressas em termos de derivadas parciais, já que cada componente é afetada tanto pelo espaço quanto pelo tempo. Com isso, a diferencial de velocidade na direção x e dada por:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (35)$$

ou, utilizando a regra da cadeia para a derivação parcial, em três dimensões para um acréscimo de tempo, tem-se:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (36)$$

Se as taxas espaciais $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$, forem encaradas como componentes escalares da velocidade do fluxo, pode-se substituí-las pelas suas respectivas componentes da velocidade, obtendo-se:

$$\hat{E} = \frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \left(u \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (37)$$

ou ainda

$$\hat{E} = \frac{D\mathbf{E}}{Dt} = u_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (38)$$

Trata-se de uma derivada total, substancial ou derivada do fluido, pode-se denotá-la por $\frac{D}{Dt}$, para enfatizar que a derivada temporal é tomada seguindo-se a partícula que ocupa uma determinada região do espaço num instante particular. É uma derivada de sistema no sentido em que ela representa a taxa de variação num ponto que se move com o fluido. Os termos entre parenteses fornecem a aceleração convectiva, dependendo do movimento da partícula no espaço. A aceleração local $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, fornece a influência do tempo sobre o comportamento da partícula.

Qualquer propriedade fluida pode ser tratada do ponto de vista euleriano utilizando-se a regra da cadeia. Exemplos que ilustram fisicamente os três tipos de derivadas

citados anteriormente, podem ser encontrados em Sissom e Pitts (1988).

2.4 MODELOS HIDRODINÂMICOS DE TRÁFEGO

Para descrição do comportamento de tráfego em altas densidades, pode-se associar a teoria macroscópica do tráfego com a teoria hidrodinâmica. Comumente consideram-se três leis de conservação da dinâmica dos fluidos: a lei da conservação de massa, do movimento e de invariantes na colisão. Levando-se em consideração os modelos do fluxo de tráfego de veículos, as equações de conservação de massa deve ser fechadas com uma relação fenomenológica que une a velocidade média com a densidade e condições de contorno adequadas.

2.4.1 Modelos Hidrodinâmicos de Primeira Ordem

Os modelos hidrodinâmicos de primeira ordem são obtidos considerando-se apenas a lei da conservação de massa. Esse tipo de modelo é motivado pela sua simplicidade, mesmo apresentando resultados não muito precisos quando comparados com a realidade física ou quando comparados com resultados dos modelos de segunda ordem (GRAMANI, 2010).

A equação diferencial para esse modelo é representada por duas variáveis, a densidade (ρ) e a velocidade (u), como função do tempo e do espaço, sendo fechada com uma relação matemática fenomenológica adicional, a qual representa a velocidade média como função da densidade. Diferentes alternativas para essas relações, resultam em diferentes modelos macroscópicos de primeira ordem.

O problema do fechamento da equação da conservação de massa consiste em analisar e interpretar fenomenologicamente o comportamento do sistema. Para Gramani (2010), o fechamento destas equações, referindo-se aos modelos de primeira ordem, podem ser desenvolvidos através dos seguintes procedimentos:

- I. Fechamento por propriedades da densidade local, a equação analítica:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = u[\rho], \end{cases} \quad (39)$$

ou

II. Fechamento usando a equação da evolução para a velocidade, uma equação dinâmica para a evolução de u , a equação funcional:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f(u[\rho]), \end{cases} \quad (40)$$

Neste trabalho é utilizado um modelo hidrodinâmico de primeira ordem, ele é fechado utilizando o procedimento da equação (39), isto é, utiliza-se funções que relacionam a velocidade e a densidade.

Assim tem-se o fechamento para alguns modelos apresentados na seção (2.2):

1. Fechamento com o modelo de Greenshields (1935).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = u_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_{\max} \end{cases} \quad (41)$$

2. Fechamento com o modelo de Greenberg (1959).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = u_0 \ln \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho}\right), \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_{\max} \end{cases} \quad (42)$$

3. Fechamento com o modelo de Underwood (1961).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = u_f e^{-\frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}}, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_j \end{cases} \quad (43)$$

4. Fechamento com o modelo de Bonzani e Mussone (2003).

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ u = e^{-\alpha\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}-\rho}\right)}, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_{\max} \end{cases} \quad (44)$$

2.4.2 Modelos Hidrodinâmicos de Segunda Ordem

Os modelos hidrodinâmicos de segunda ordem são formados por duas equações da conservação com base na analogia com a Dinâmica de Fluidos unidimensional.

Considera-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = Q[\rho, u], \end{cases} \quad (45)$$

onde

- $\rho(t, x) \in [0, 1]$ é a densidade local,
- $u(t, x) \in [0, 1]$ é a velocidade, e
- Q define a aceleração dos veículos referidos no volume elementar.

A primeira equação representa a conservação de massa e a segunda equação representa a conservação do momento linear (de equilíbrio). Ao trabalhar com esses modelos encontra-se dificuldade em modelar a aceleração Q que fecha a equação do momento por modelos fenomenológicos que descrevem a aceleração.

Introduzindo um modelo com uma equação de aceleração que inclui um termo de relaxamento da velocidade (u) em um determinado período de tempo t para a velocidade de equilíbrio $u_e(\rho)$, Payne (1979) foi o primeiro matemático a utilizar o sistema (39) sugerindo uma ordem superior para relações de estrutura de choque. Representa-se o modelo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c_1}{\rho t} |u'_e(\rho)| \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{c_2}{t} (u_e(\rho) - u), \end{cases} \quad (46)$$

onde, $u \frac{\partial u}{\partial x}$, descreve a variação da velocidade em determinado local da estrada. O termo $-\frac{c_1}{\rho t} |u'_e(\rho)| \frac{\partial \rho}{\partial x}$ representa a ação do motorista para condições de trânsito mais à sua frente e é denominada de termo de antecipação. O termo $\frac{(u_e(\rho) - u)}{t}$ é o termo de relaxação e descreve a tendência de aproximação da velocidade u com a velocidade de equilíbrio $u_e(\rho)$ para alguma densidade e t é uma relação característica para o tempo e c_1 e c_2 são constantes presentes na definição das variáveis adimensionais.

Algumas modificações técnicas foram propostas por Phillips (1979), no entanto, Hauer e Hurdle (1979) afirma que essas mudanças mostram resultados irrealistas para fortes mudanças de densidade. Para superar essa dificuldade Kühne (1984) introduziu o termo de viscosidade, o qual é semelhante ao termo que descreve a viscosidade nas equações da hidrodinâmica clássica. Um estudo mais detalhado das modificações e sobre modelos hidrodinâmicos de segunda ordem, pode ser encontrado em Bonzani e Gramani (2009).

Para resolver os Modelos Hidrodinâmicos de primeira ordem deste trabalho foi utilizada diferenças finitas, que será vista no capítulo a seguir.

2.5 DIFERENÇAS FINITAS

A solução numérica das equações diferenciais usadas neste trabalho foram obtidas pela utilização do Método das diferenças finitas para aproximar as densidades.

O primeiro passo para se calcular a solução numérica para equações diferenciais, independentemente do método, é discretizar a região onde se procura a solução. Para isso define-se uma malha (Figura 15), que é um conjunto finito de pontos, chamados nós da malha.

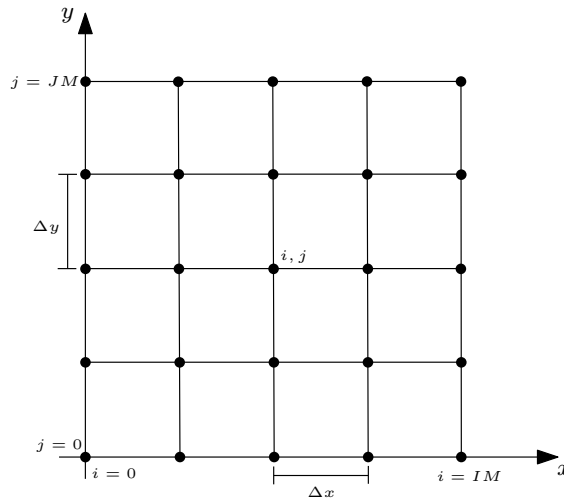


FIGURA 15: Região discretizada. Malha computacional bidimensional

FONTE: O autor (2011)

Os nós da malha estão separados entre si por uma distância Δx e Δy , respectivamente, não necessariamente iguais. Os índices i e j identificam um ponto na i -ésima coluna e na j -ésima linha e o número de pontos nas dimensões x e y são dados por $IM + 1$ e $JM + 1$ respectivamente.

O próximo passo para que seja possível tratar numericamente as equações diferenciais, é que elas devem ser expressas de forma aritmética que o computador possa executar. Esse passo consiste em discretizar as derivadas que estão na equação diferencial. Antes de resolver a equação diferencial de forma numérica, deve-se calcular as respectivas expressões escritas em função dos nós da malha. Essas expressões são denominadas de aproximações de diferenças finitas, e ao final do processo resultam em uma equação algébrica, denominada equação de diferenças finitas (EDF). A EDF é escrita para cada ponto (nó), da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema. Resolvendo-se as EDFs, encontra-se a solução numérica aproximada do problema. Essa solução não é exata, devido a erros de arredondamentos pelos cálculos computacionais, aproximações numéricas das condições auxiliares e até mesmo inerentes ao processo de discretização das equações.

Pode-se pensar nas aproximações de diferenças finitas como o inverso do processo de determinação do limite, utilizado para obter a derivada de uma função f

contínua:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (47)$$

Da definição de derivada da função f contínua, uma aproximação de diferenças finitas para $\frac{df}{dx}$ é dada pelo lado direito da equação (47) sem considerar o limite da equação. Utilizando-se dois valores de f separados por uma distância finita h , e expressão (47) representa a aproximação algébrica para a primeira derivada de f .

Aproximações de diferenças finitas substituem o operador diferencial contínuo, como exemplo $\frac{d}{dx}$ é substituído por uma aproximação discreta, calculadas a partir dos valores de f em um número finito de pontos. Os pontos da figura 15 representam as coordenadas x e y nas quais serão calculados os valores de uma função f , sendo esses valores utilizados na aproximação das derivadas presentes na equação diferencial.

Aproximações por diferenças finitas podem ser obtidas de várias formas, sendo a mais comum a expansão por série de Taylor. Utilizando a série de Taylor de uma função f , com f contínua no intervalo $[a, b]$ de interesse e que possua derivadas até ordem N todas contínuas no intervalo, pode-se escrever, para todo ponto $x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_{x_0} + \dots + R_N \quad (48)$$

em que $\Delta x = x - x_0$ representa o espaçamento das linhas verticais (Figura 15) e R_N é o resto, definido como

$$R_N = \frac{(\Delta x)^N}{N!} \frac{d^N f}{dx^N} \Big|_{\zeta}, \quad \zeta \in [a, b]. \quad (49)$$

Deseja-se determinar a primeira derivada de uma função f no ponto $x_i = i\Delta x$, a qual será denotada por $\frac{f}{dx} \Big|_i$. A figura 16, mostra alguns pontos da malha unidimensional, sendo os pontos uniformemente espaçados.

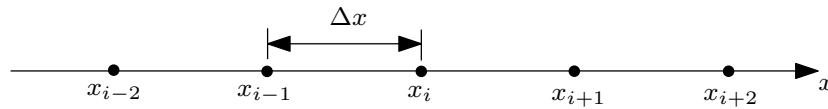


FIGURA 16: Malha de pontos uniformemente espaçados

FONTE: O autor (2011)

Expandindo $f(x_i + \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i , tem-se

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \quad (50)$$

onde os “...” representam os termos restantes da série de Taylor até o resto R_N . Para garantir a existência, as expansões em série de Taylor, deve-se considerar N sempre maior que a maior ordem das derivadas que aparecem na expansão. Assim por exemplo $N > 3$ na expansão (50).

Isolando a primeira derivada, a equação (50) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \left[\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \right] \quad (51)$$

A expansão (51) indica que a primeira derivada é igual ao quociente

$$\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

mais os termos da série de Taylor até R_N , equação (52), a qual é dada o nome de erro local de truncamento (*ELT*). Como não se pode tratar infinitos termos na série de Taylor, esse erro aparece pela utilização de um número finito de termos. A série foi truncada a partir da derivada de segunda ordem.

$$ELT = - \left[\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i + \dots \right] \quad (52)$$

O *ELT* fornece uma medida da diferença entre o valor exato da derivada e sua aproximação numérica, indica também como essa diferença varia com a redução do espaçamento Δx .

Pode-se simplificar a notação e escrever f_i para $f(x_i)$ ou, em geral, $f_{i\pm k}$ para $f(x_i \pm k\Delta x)$. Escrevendo-se a expressão (51) como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (53)$$

A expressão (53) é uma equação de diferenças finitas que representa uma aproximação de primeira ordem (o termo dominante do *ELT*, Δx aparece elevado a primeira potência) para a primeira derivada de f .

Para aproximar a primeira derivada de f pode-se utilizar diferenças progressivas, que é o caso da equação (53), diferenças atrasadas ou diferenças centrais.

• Diferenças Progressivas

Calcula-se a derivada no ponto x_i , utilizando um ponto “adiante” de x_i , no caso x_{i+1} . A inclinação da reta L aproxima a inclinação (primeira derivada) de f em x_i , (Figura 17), ainda percebe-se intuitivamente que, quanto menor o espaçamento Δx mais próximo de $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i$ será a inclinação da reta L .

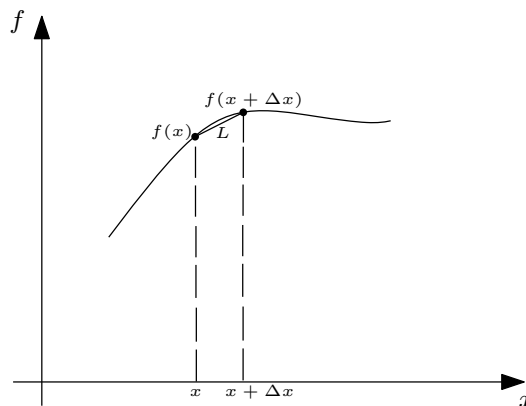


FIGURA 17: Diferença Progressiva

FONTE: O autor (2011)

Essa intuição é confirmada pela análise do *ELT*, (FORTUNA, 2000).

• Diferenças Atrasadas

A aproximação por diferenças atrasadas pode ser obtida através da expansão de

$f(x - \Delta x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_i :

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad (54)$$

Isolando a primeira derivada, tem-se

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (55)$$

sendo outra aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de f . Esta aproximação difere-se da expressão (53), a qual utiliza um ponto adiante de x_i , a expressão (55) utiliza um ponto anterior, o ponto x_{i-1} , ponto este que fica “atrás” de x_i . A inclinação da função f em x_i é aproximada pela inclinação da reta M , ver figura 18.

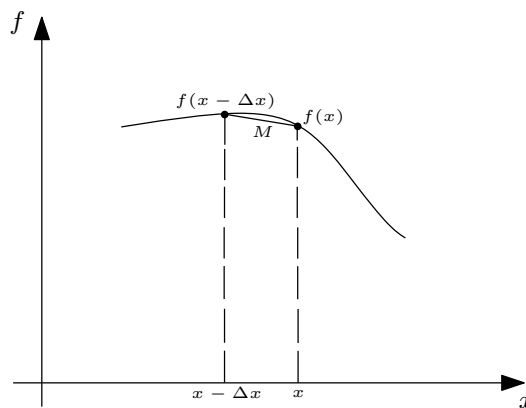


FIGURA 18: Diferença Atrasada

FONTE: O autor (2011)

• Diferenças Centrais

A aproximação por diferença centrais, utiliza os pontos x_{i-1} e x_{i+1} para o cálculo da primeira derivada de f no ponto central, intermediário x_i , ver figura 19. A inclinação de f em x_i , é aproximada pela inclinação da reta N .

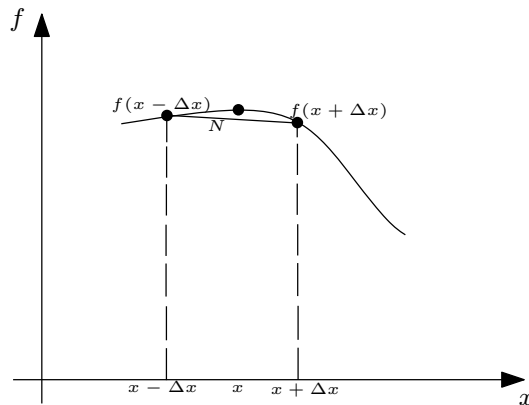


FIGURA 19: Diferença Central

FONTE: O autor (2011)

Utilizando diferenças centrais, obtêm-se uma aproximação de $O(\Delta x)^2$ para a primeira derivada de f , manipulando as expressões em série de Taylor:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad (56)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad (57)$$

Deve-se combinar as expressões (56) e (57) para eliminar a segunda derivada de f . Essa derivada é eliminada ao se calcular

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2(\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad (58)$$

ou

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (59)$$

Pela análise do *ELT*, reduções sucessivas do espaçamento Δx provoca uma redução quadrática do erro da aproximação da primeira derivada de f , (FORTUNA, 2000).

Ao se resolver um determinado problema por diferença finita, regressiva, progres-

siva ou centrada, dois esquemas diferentes podem ser abordados. Se as variáveis em nível de tempo são conhecidas, as equações resultantes podem ser resolvidas diretamente, para cada nó computacional em cada tempo. Esta abordagem é chamado de esquema explícito. Se, por outro lado, a aproximação por diferença finita da derivada espacial for expressa em termos de valores das variáveis na linha de tempo desconhecida, as equações algébricas do sistema inteiro são resolvidas simultaneamente, a abordagem é dita esquema implícito.

2.5.1 Esquemas Explícitos

Os esquemas explícitos apresentam uma limitação que é a condição de estabilidade². Esta limitação torna o processo exaustivo, pois, a condição limita o uso do modelo a intervalos de tempo pequenos de cálculo. Quando as variáveis da equação diferencial mudam rapidamente no tempo, o uso de intervalos pequenos de cálculo é uma necessidade e esta limitação não é tão importante. A equação seguinte representa um esquema explícito:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^k = \Psi \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k \quad (60)$$

Discretizando a equação (60) em nível de tempo k , tem-se

$$\frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} = \Psi \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} + O[(\Delta t), (\Delta x)]. \quad (61)$$

Nota-se que os valores de f_i^{k+1} são relacionados com os valores de f_i^k fazendo-se aproximações da derivada temporal por diferenças progressivas de primeira ordem e o mesmo se dá quando se relaciona as derivadas espaciais f_{i+1}^k e f_i^k , que são aproximadas por diferenças progressivas de primeira ordem. Pode-se escrever a equação (61) como:

²Um método é estável quando para quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Quando presente essa amplificação faz com que o módulo dos valores da solução numérica cresça a cada etapa dos cálculos (FORTUNA, 2000).

$$f_i^{k+1} = f_i^k + (\Delta t)H(\Psi, f^k, \Delta x), \quad (62)$$

onde

$$H = (\Psi, f^k, \Delta x) = \Psi \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x}$$

Pode-se notar que o lado direito de equação (62), depende apenas de valores conhecidos de f conhecidos em nível de tempo k .

A figura seguinte apresenta o estêncil da equação (61)

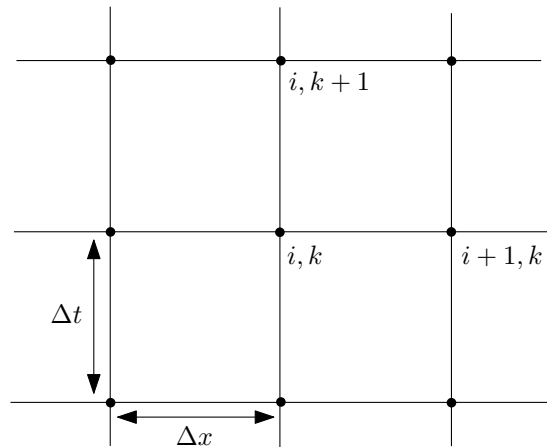


FIGURA 20: Esquema Explícito

FONTE: O autor (2011)

Estes esquemas devem obedecer as condições de Courant, que estabelece uma relação entre os intervalos de tempo e de espaço, para que sejam numericamente estáveis. As vantagens destes esquemas é a facilidade de formulação e programação.

2.5.2 Esquemas Implícitos

Um vantagem do esquema implícito com relação ao esquema explícito é que os esquemas implícitos são computacionalmente estáveis para qualquer Δx ou Δt utilizado, por este motivo diz-se que este tipo de esquema é incondicionalmente estável.

A figura 21 representa o esquema com base em diferenças finitas progressivas ou

regressivas, originam um esquema implícito de quatro pontos.

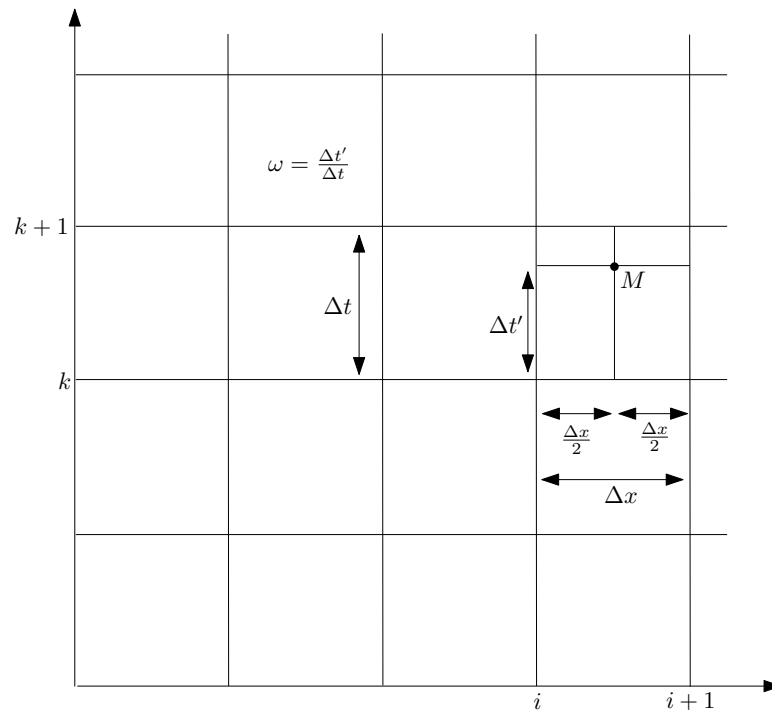


FIGURA 21: Esquema Implícito de quatro pontos

FONTE: O autor (2011)

Na figura apresenta-se um esquema implícito de quatro pontos, sendo uma malha $x-t$. O valor da derivada espacial e dos termos não derivados são proporcionais entre linhas adjacentes, sobre o ponto M , pela ponderação do valor da função dos quatro pontos através do uso do fator ponderador ω , que matematicamente é a razão entre $\Delta t'$ e Δt . Sendo σ uma variável dependente, a derivada espacial, temporal e o valor da função na malha $x-t$ podem ser representados respectivamente pelas equações (63), (64), (65).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\omega(\sigma_{i+1}^{k+1} - \sigma_i^{k+1})}{\Delta x} + \frac{(1-\omega)(\sigma_{i+1}^k - \sigma_i^k)}{\Delta x}, \quad (63)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_{i+1}^{k+1} - \sigma_{i+1}^k)}{\Delta t} + \frac{(\sigma_i^{k+1} - \sigma_i^k)}{\Delta t} \right], \quad (64)$$

$$\sigma = \frac{\omega(\sigma_i^{k+1} + \sigma_{i+1}^{k+1})}{2} + \frac{(1 - \omega)(\sigma_i^k + \sigma_{i+1}^k)}{2}, \quad (65)$$

Neste trabalho o modelo proposto foi resolvido por aproximação por diferenças finitas utilizando o esquema explícito, este modelo é discutido no capítulo seguinte.

3 MATERIAL E MÉTODO

3.1 MODELO DA ONDA CINEMÁTICA

O modelo proposto para simular o tráfego da rotatória baseia-se no modelo da onda cinemática (LI, 1974). Assume-se um modelo analítico, sendo uma relação por partes no qual a velocidade para $\rho \leq \rho_{crit}$ permanece constante e decai para $\rho > \rho_{crit}$, tendendo ao valor de $v = 0$ para $\rho = \rho_{max}$. O modelo possui a seguinte formulação:

$$u(\rho) = \begin{cases} u_0 & se, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{crit}, \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{u_0 \rho_{crit}}{\rho_{max} - \rho_{crit}} \right) (\rho_{max} - \rho) & se, \quad \rho_{crit} < \rho \leq \rho_{max}, \end{cases} \quad (66)$$

onde

- $u(\rho)$ é a velocidade para cada ρ com $0 \leq \rho \leq \rho_{max}$,
- u_0 é a velocidade média da pista,
- ρ_{crit} é a densidade crítica.
- ρ_{max} é a densidade máxima admitida por metro quadrado.

Na figura 22, pode ser observada a representação gráfica do modelo para valores da $\rho_{max} = 1$, $\rho_{crit} = 0.5$ e $u_0 = 10$.

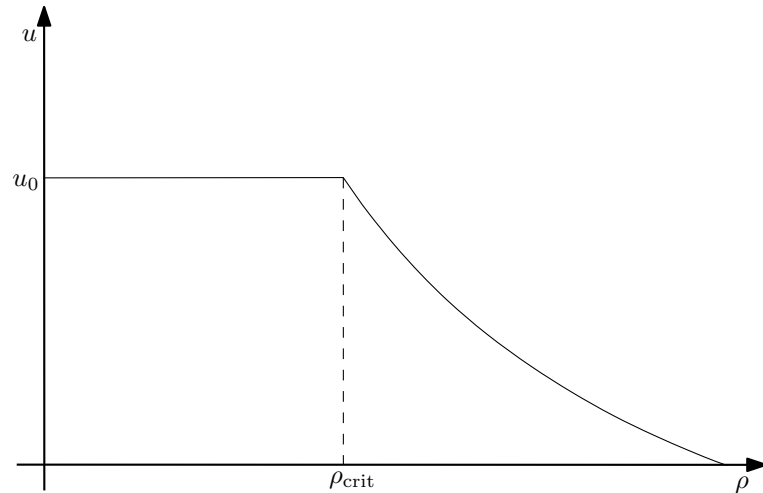


FIGURA 22: Representação gráfica do modelo velocidade - densidade

FONTE: O autor (2011)

Ao relacionar o fluxo e a densidade para o modelo, tem-se a seguinte equação:

$$q(\rho) = \begin{cases} \rho u_0 & \text{se, } 0 \leq \rho < \rho_{\text{crit}}, \\ \frac{u_0 \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\text{max}} - \rho_{\text{crit}}} (\rho_{\text{max}} - \rho) & \text{se, } \rho_{\text{crit}} \leq \rho \leq \rho_{\text{max}}, \end{cases} \quad (67)$$

O diagrama fundamental para o modelo pode ser observado a seguir, para valores da $\rho_{\text{max}} = 1$, $\rho_{\text{crit}} = 0.5$ e $u_0 = 10$:

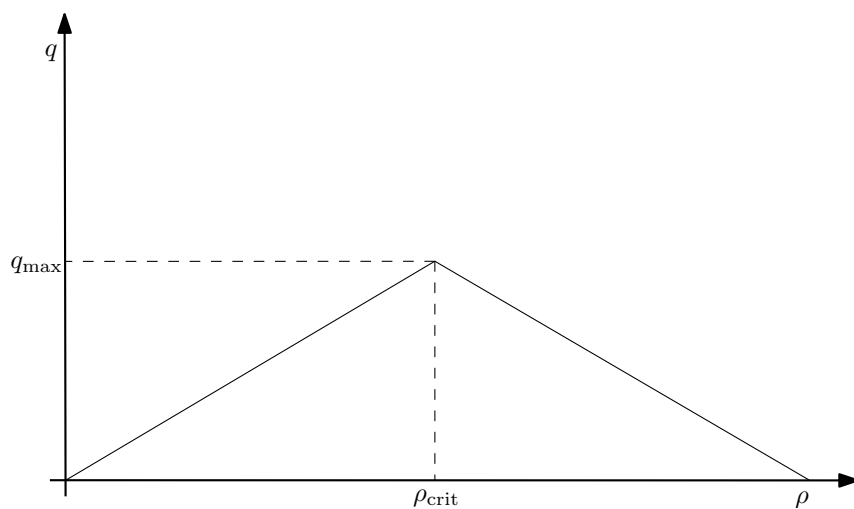


FIGURA 23: Representação gráfica do Diagrama Fundamental

FONTE: O autor (2011)

Para medidas experimentais da velocidade média como função da densidade, retirados de Bonzani e Mussone (2003), com $\rho_{\max} = 1.0$, $\rho_{\text{crit}} = 0.06$ e $u_0 = 0.7$, para $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq u \leq 1$ o diagrama velocidade densidade pode ser visto na figura 24:

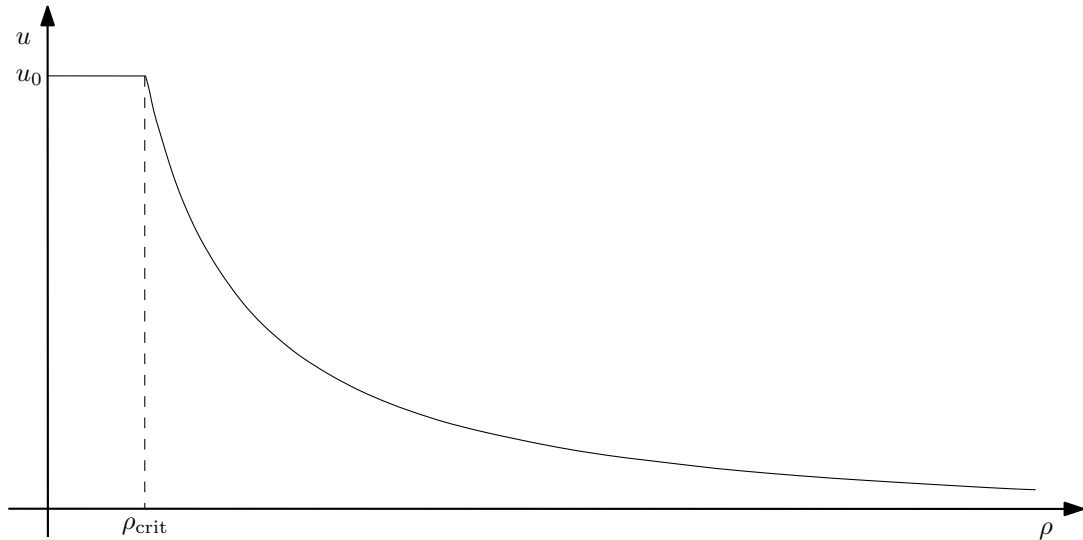


FIGURA 24: Representação gráfica da velocidade-densidade

FONTE: O autor (2011)

Comparado com a figura 12, nota-se que o modelo obteve uma boa aproximação para os dados experimentais.

3.2 EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA

A solução para o modelo matemático é obtida através de simulação computacional, sendo realizadas no espaço e tempo do domínio.

Resolve-se o seguinte modelo prático, considerando-se apenas a rotatória que se localiza no trevo Cataratas (Figura 25), sendo essa rotatória escolhida devido a congestionamentos e o grande número de acidentes (Balbo (2011)), que ocorrem neste local.

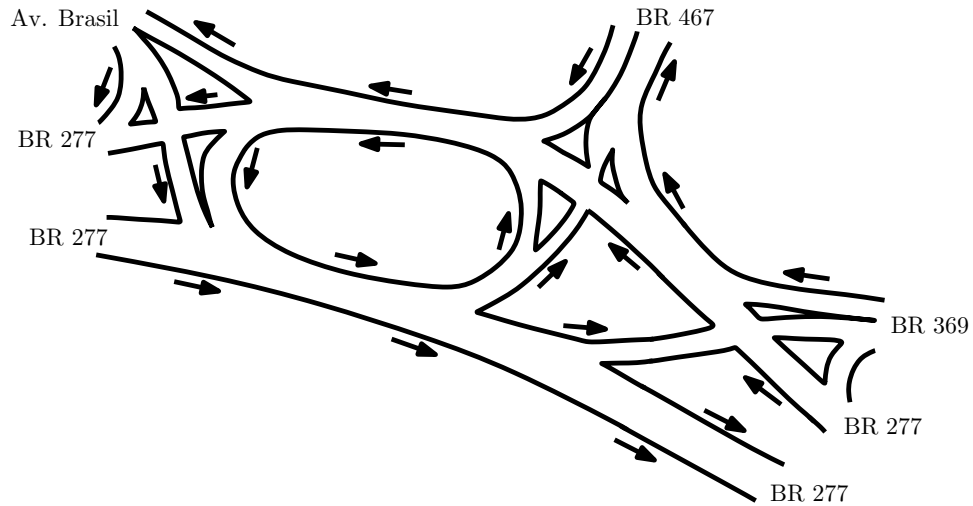


FIGURA 25: Rotatória localizada no trevo Cataratas (Cascavel - Paraná)

FONTE: O autor (2011)

Como considera-se apenas a rotatória localizada no trevo Cataratas, foram realizadas algumas simplificações, resultando no esquema ilustrado na Figura 26.

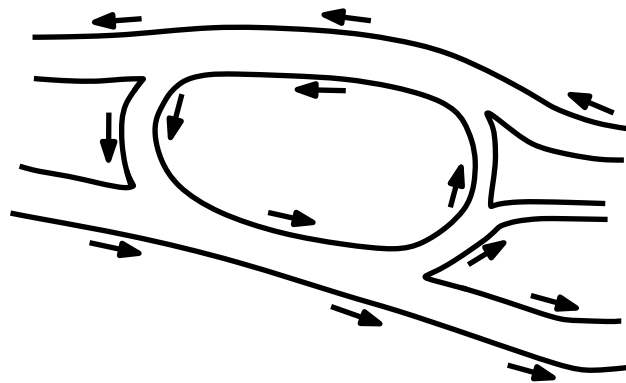


FIGURA 26: Rotatória simplificada

FONTE: O autor (2011)

Ao discretizar a região, ilustrada na figura 26 considera-se uma pista de comprimento L metros, como mostrado na figura 27. Para simular a rotatória usa-se condição de contorno periódica, fazendo com que para o próximo intervalo de tempo Δt , a primeira posição x_0 receba o valor da densidade de x_n na última posição do espaço, no intervalo de tempo anterior.

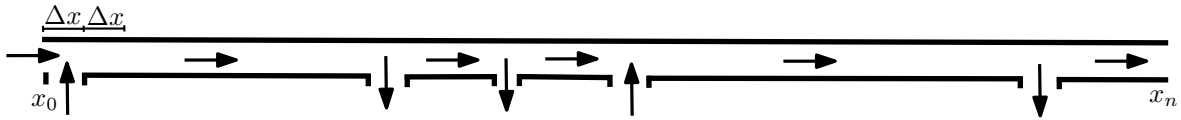


FIGURA 27: Representação linear da pista da rotatória

FONTE: O autor (2011)

Admite-se que a condição de Courant¹ $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ para este modelo vale $\lambda = 0,1$, o que fornece $\Delta t = 0,1\Delta x$, contudo pode-se trabalhar com valores bem maiores, caso fosse desejado que os resultados computacionais fossem obtidos mais rapidamente.

3.2.1 Modelos Utilizados

O modelo computacional é gerado para um tempo total de uma hora. A pista analisada computacionalmente tem 400 metros de comprimento. Realizou-se duas simulações e para cada simulação foram rodados dois modelos, com valores diferentes para a condição inicial.

Para a primeira simulação, para o primeiro modelo em $t = 0$ e $x = 0$ a pista inicia com densidade de 0(zero) veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 0$ e $\rho(x,0) = 0$, para o segundo modelo também iniciou-se com 0(zero) veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 0$ e $\rho(x,0) = 0$.

Para a segunda simulação em $t = 0$ e $x = 0$, a pista inicia com densidade de 1.4 veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 1.4$ e $\rho(x,0) = 1.4$, para o primeiro modelo e com densidade de 0.35 veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 0.35$ e $\rho(x,0) = 0.3$, para o segundo modelo. Para ambos os modelos considerou-se os veículos com dimensão de 4 metros de comprimento.

¹Problemas que envolvem diferenças finitas explícitas necessitam que seja determinada uma ligação entre o intervalo de discretização no espaço Δx e o intervalo de discretização no tempo Δt , como consequência da condição de estabilidade do esquema. Esta ligação normalmente é chamada de condição de Courant-Friedrichs-Lewy - CFL, Fortuna (2000) que pode ser formulada da seguinte forma

$$\lambda \leq 1,$$

onde λ é o número de Courant.

Primeiro modelo

Para o primeiro modelo o comprimento da pista, a velocidade e a dimensão do veículo foram divididos em quatro partes. Para uma pista simples tem-se uma densidade de um veículo para cada metro de pista como pode ser observado na figura 28. Após calculadas as aproximações para as densidades os valores são multiplicados por quatro, resgatando os valores reais do comprimento e velocidade.

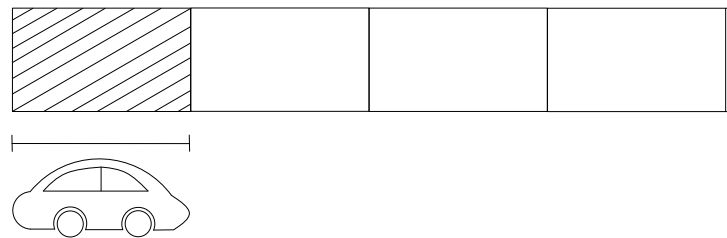


FIGURA 28: Representação da densidade primeiro modelo

FONTE: O autor (2011)

Segundo modelo

Para o segundo modelo o comprimento da pista tem L metros. Sendo que para uma pista simples tem-se uma densidade de $\rho = 0.25$ veículo para cada metro de pista como pode ser observado na figura 29.

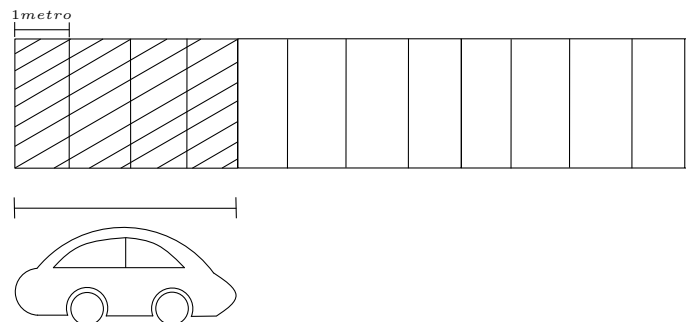


FIGURA 29: Representação da densidade segundo modelo

FONTE: O autor (2011)

3.2.2 Características do Problema

Como trabalha-se com uma pista unidimensional, a pista dupla, tripla, é obtida dobrando ou triplicando respectivamente o valor da densidade nesse espaço. Por exemplo se uma pista simples tem densidade máxima de um veículo por metro, afim de torna-lá uma pista dupla basta aumentar sua densidade máxima para dois veículos por metro.

Para uma primeira análise tem-se que, a partir do instante inicial, os veículos comecem a entrar, ou sair em alguns pontos pelas laterais da pista (Figura 30), representado as entradas e saídas de veículos da rotatória, durante um período de 1 hora.

Essas entradas e saídas, estão numeradas na figura 30 e ocorrem com uma média de:

- 1^a) 1350 veículos a cada hora;
- 2^a) –1080 veículos a cada hora, o sinal “ – ” representa que estão saindo veículos da rotatória;
- 3^a) –216 veículos a cada hora;
- 4^a) 810 veículos a cada hora;
- 5^a) –860 veículos a cada hora.

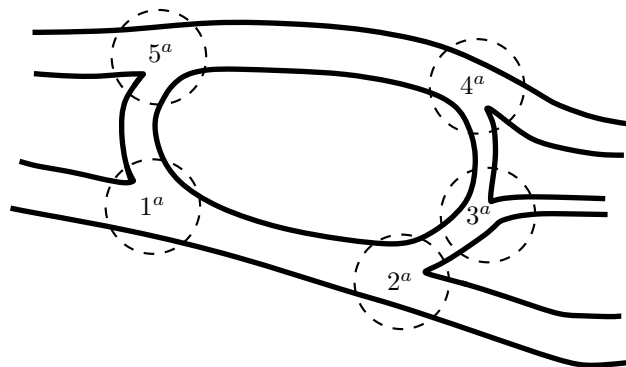


FIGURA 30: Posições de entradas e saídas da rotatória

FONTE: O autor (2011)

Estes dados de entrada e saída, foram fornecidos pela concessionária de pedágio Ecocataratas para o dia 12/05/08 no período das 6:30 às 19:30 horas. Foi escolhido o período com o maior fluxo de veículos, sendo o qual apresenta maiores problemas com congestionamentos. O período está entre 07h30min às 08h30min. Após realizar a simulação obtém-se os gráficos do diagrama fundamental, velocidade-densidade e espaço-densidade. Esse gráficos são utilizados para analisar o comportamento do tráfego de veículos durante o período de simulação. Os resultados da simulação, como as discussões e comentários são abordados no capítulo seguinte.

A programação realizou-se em linguagem Fortran. Usa-se a discretização da equação $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f(t, x, \rho)$, através de diferenças finitas explícitas para se calcular as densidades. A função $f(t, x, \rho)$ nos permite adicionar ou retirar veículos da pista. Ela é dada em número de veículos que entram (ou saem caso possua sinal negativo) na posição x da pista em um de um determinado instante de tempo. O cálculo para essa função pode ser observado na figura 31.

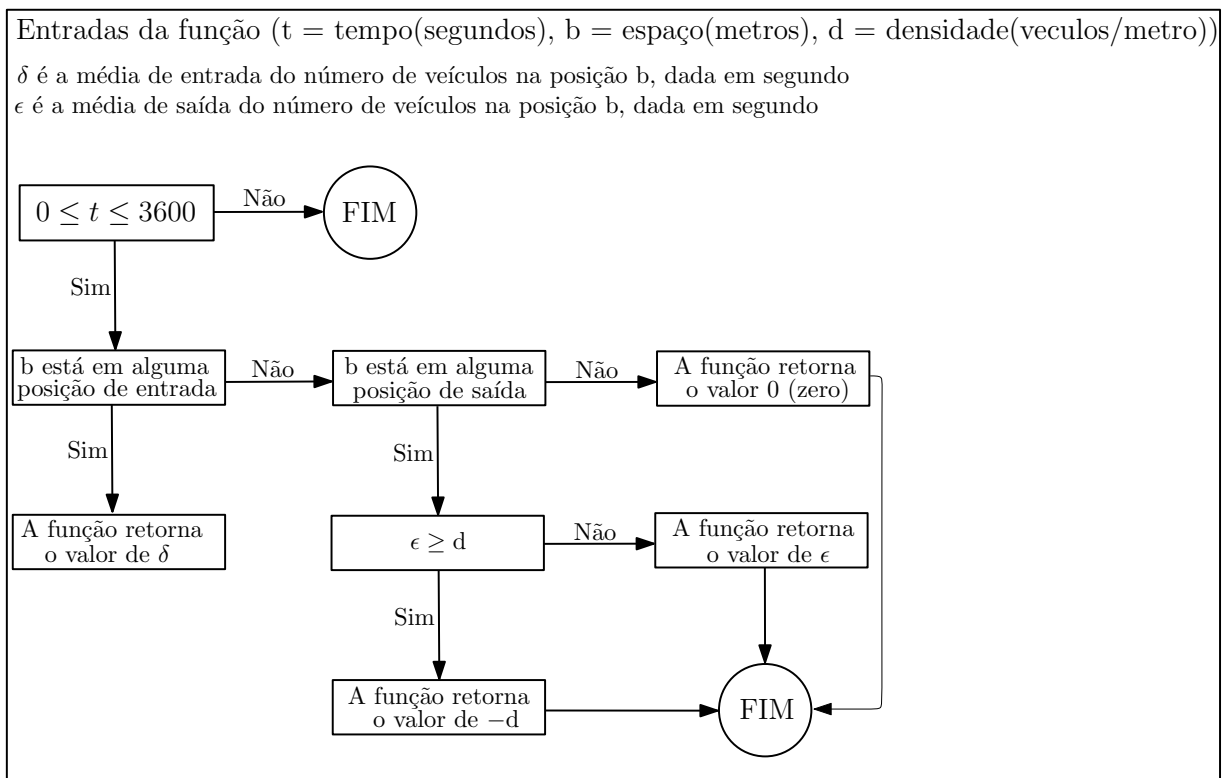


FIGURA 31: Fluxograma de $f(t, x, \rho)$

FONTE: O autor (2011)

Após calculado o valor da densidade para os intervalos de tempo Δx e Δt obtém-se os resultados expostos no capítulo seguinte.

4 RESULTADOS

4.1 PRIMEIRA SIMULAÇÃO

Para a primeira simulação, com pista inicialmente livre, ou seja $\rho(0,t) = 0$ e $\rho(x,0) = 0$, os dois modelos não apresentaram problemas de congestionamentos na rotatória para o tempo de simulação.

4.2 SEGUNDA SIMULAÇÃO

A segunda simulação para $t = 0$ e $x = 0$, a pista inicia com densidade de 1.4 veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 1.4$ e $\rho(x,0) = 1.4$, para o primeiro modelo e com densidade de 0.3 veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 0.35$ e $\rho(x,0) = 0.35$, para o segundo modelo. Esses valores para a densidade, foram escolhidos devido o sistema começar a apresentar problemas de congestionamentos para $\rho > 1.2$ veículos/metro para o primeiro modelo e $\rho > 0.3$ veículos/metro para o segundo.

4.2.1 Primeiro Modelo

Os resultados para o primeiro modelo, como seus gráficos da densidade-velocidade e diagrama fundamental são apresentados a seguir nas figuras 32 e 33.

Pode ser observado na figura 32 que a velocidade permanece constante até chegar a densidade crítica (ρ_{crit}), a partir desse ponto a velocidade começa a cair, com isso a pista começa a congestionar.

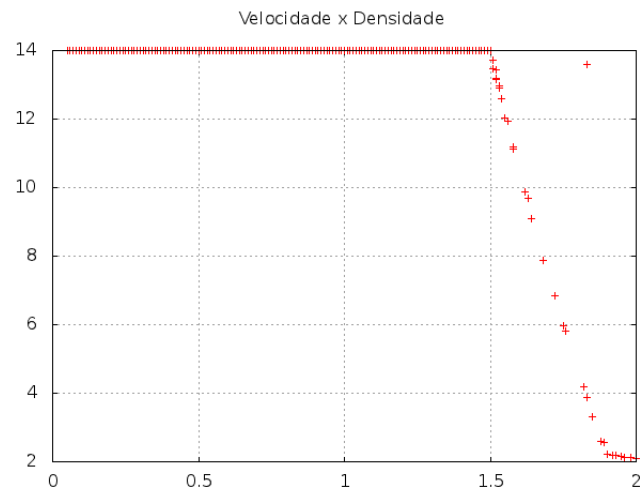


FIGURA 32: Diagrama velocidade-densidade

FONTE: O autor (2011)

Observa-se que a velocidade não chega a zero, isso acontece, pois para uma densidade maior que 1.9 ainda há movimento, mesmo sendo pequeno ele existe. O gráfico do diagrama fundamental pode ser observado na figura 33.

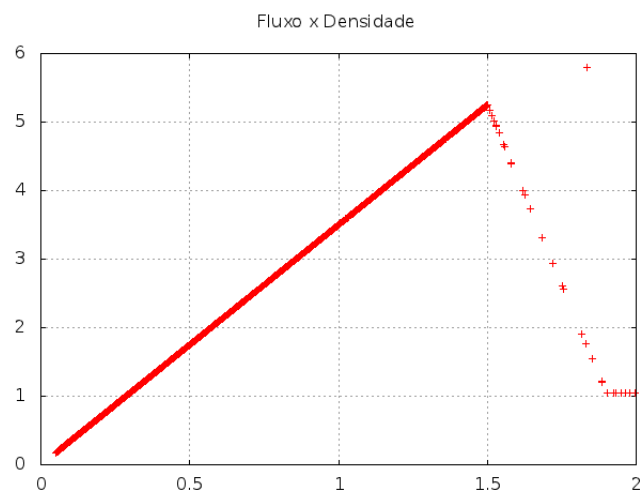


FIGURA 33: Diagrama fluxo-densidade

FONTE: O autor (2011)

Nota-se, na figura 33, que o fluxo aumenta até chegar a densidade máxima e logo após começa a cair. O fluxo não chega a zero para densidades maiores que 1.9 pois sempre existe movimento, ainda que pequeno.

As figuras 32 e 33, mostram que para esse modelo o sistema apresenta congestionamentos, porém, apenas com esse dois diagramas não se sabe que posição da pista está congestionada. Para observar qual a posição apresenta problemas, constrói-se o gráfico de densidade-espço representado na figura 34.

Observando o gráfico da densidade-espço, nota-se que os pontos que apresentam problemas estão na posição 0(zero) metro, 130 metros e 210 metros. Essas posições correspondem a 1^a, 2^a e 4^a entradas conforme a figura 30.

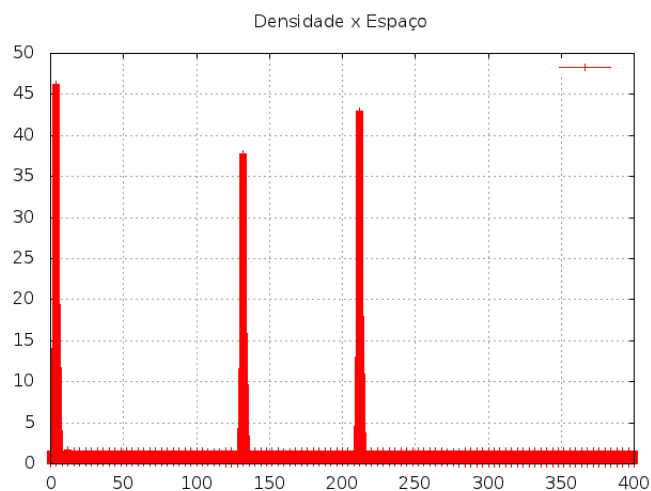


FIGURA 34: Diagrama densidade-Espço

FONTE: O autor (2011)

Analisando o gráfico de densidade-espço, observa-se os postos com maiores problemas e a partir dele pode-se indicar mudanças na geometria da rotatória. Deve-se salientar que mudanças na geometria da rotatória são responsabilidade dos arquitetos ou engenheiros de tráfego, sendo o modelo de simulação uma ferramenta que os auxilia para tomadas de decisão.

A primeira sugestão de mudança na geometria da rotatória está na 3^a entrada figura 30. Essa mudança faz com que a saída que era uma pista simples passe a ser uma pista dupla.

Após a modificação, e uma nova simulação com os mesmos dados de entrada capítulo (3), obtém-se o resultado indicado pelas figuras 35 e 36.

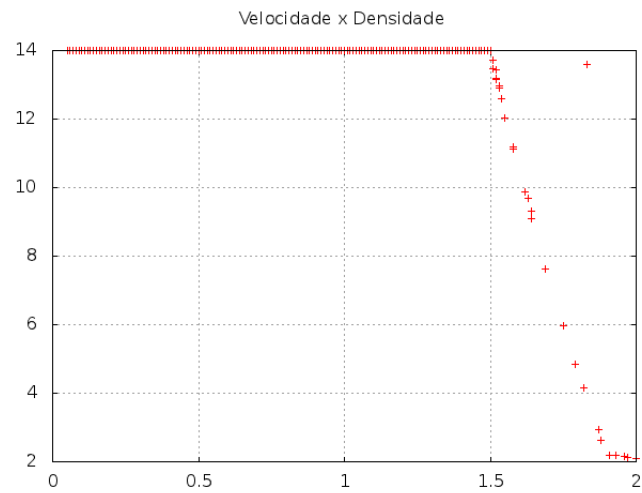


FIGURA 35: Diagrama velocidade-densidade

FONTE: O autor (2011)

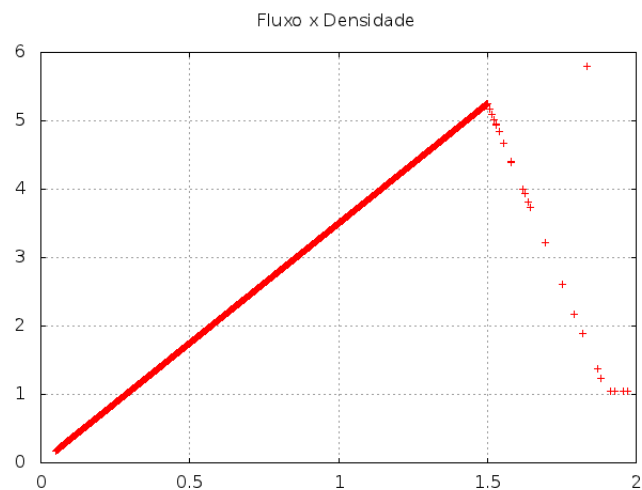


FIGURA 36: Diagrama fluxo-densidade

FONTE: O autor (2011)

Observando o diagrama fundamental e o diagrama densidade-velocidade nota-se que a pista ainda continua congestionada, porém, ao analisar a gráfico densidade-espaço figura 37 notou-se uma melhora, pois agora apenas dois pontos apresentam problemas.

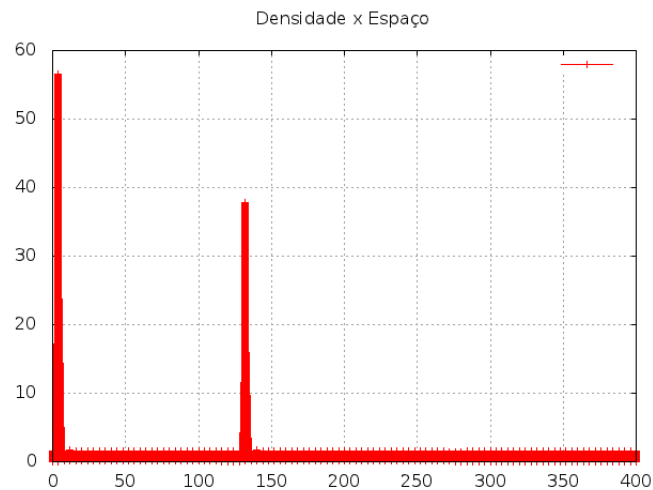


FIGURA 37: Diagrama densidade-espaco

FONTE: O autor (2011)

Os pontos onde se encontram problemas estão na posição 0(zero) metro e 130 metros. Essas posições correspondem a 1^a e 2^a entradas, figura 30.

Como o problema se encontra apenas na parte inferior da rotatória a próxima mudança foi de passar toda a pista inferior de duas pistas para três pistas. Rodando novamente para os mesmos dados de entrada obtém-se os seguintes diagramas figuras 38 e 39.

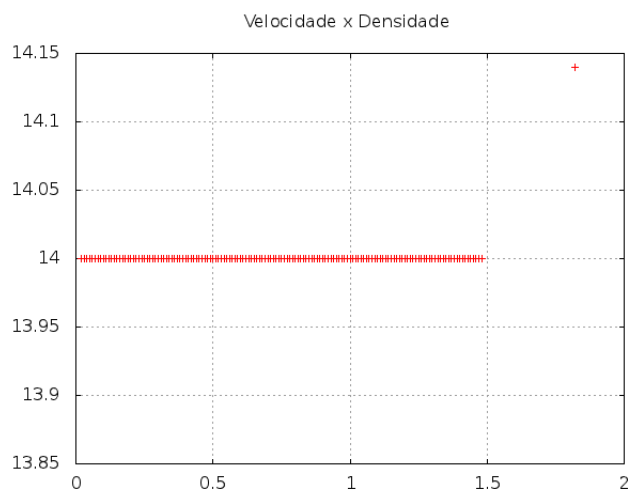


FIGURA 38: Diagrama velocidade-densidade

FONTE: O autor (2011)

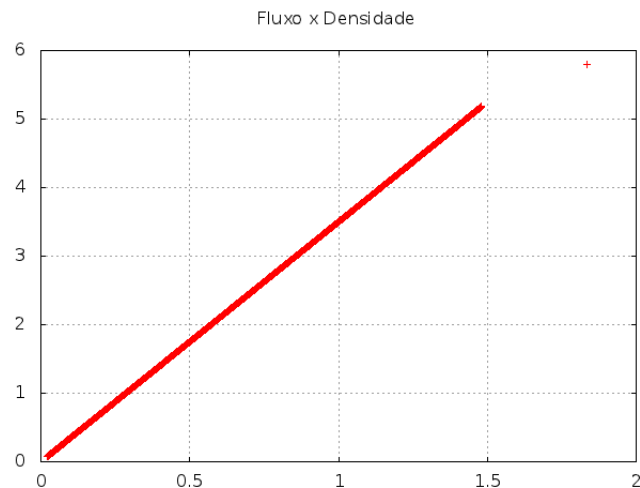


FIGURA 39: Diagrama fluxo-densidade

FONTE: O autor (2011)

Nota-se no diagrama velocidade-densidade que a velocidade dos veículos permanece constante para toda a simulação. No diagrama fluxo-densidade, os dados estão apenas na região fluxo livre, significando com essas mudanças, para esse modelo de rotatória (Figura 26) e para os dados de entrada do capítulo (3), que a rotatória trabalha sem problemas de congestionamentos.

4.2.2 Segundo Modelo

Os resultados para o segundo modelo, como seus gráficos da densidade-velocidade e diagrama fundamental são apresentados nas figuras 40 e 41. Os valores para a velocidade, densidade e fluxo para o segundo modelo assemelha-se aos resultados encontrados para o primeiro modelo.

O gráfico densidade-espaço figura 42, difere do gráfico do primeiro modelo figura 34. Observando o gráfico da densidade-espaço, notamos que os pontos onde se encontram problemas estão na posição 0(zero) metro, 210 metros e 330 metros. Essas posições correspondem a 1^a, 4^a e 5^a entradas, Figura 30.

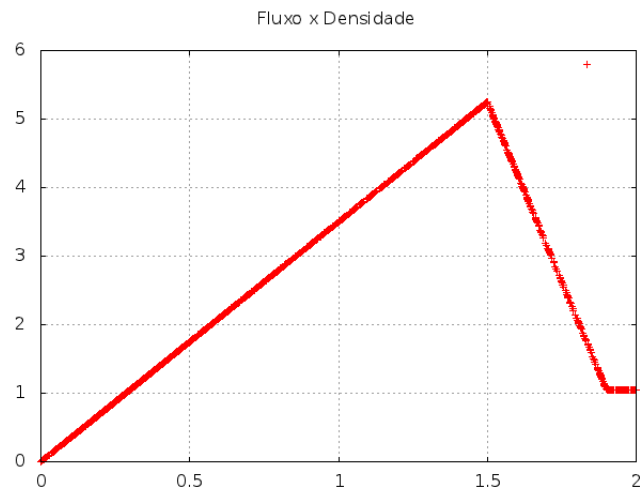


FIGURA 40: Diagrama fluxo-densidade

FONTE: O autor (2011)

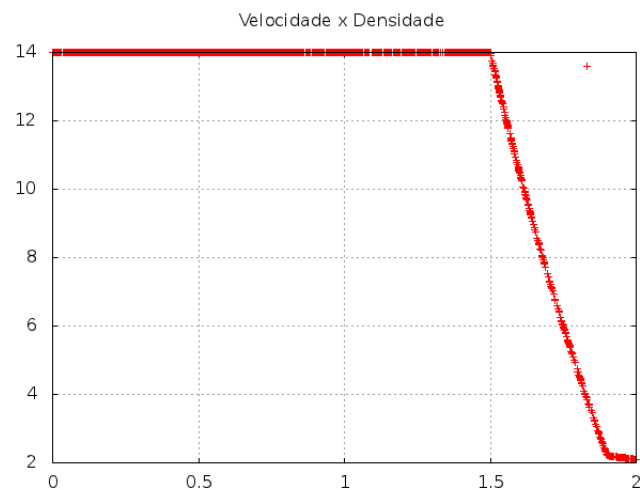


FIGURA 41: Diagrama velocidade-densidade

FONTE: O autor (2011)

Observou-se na figura 42 que a densidade aumenta rapidamente, isso ocorre pois trabalha-se com valores pequenos para a densidade, para esse modelo $\rho_{max} = 0.5$. Devido a esse motivo determinam-se resultados distantes do que ocorre fisicamente.

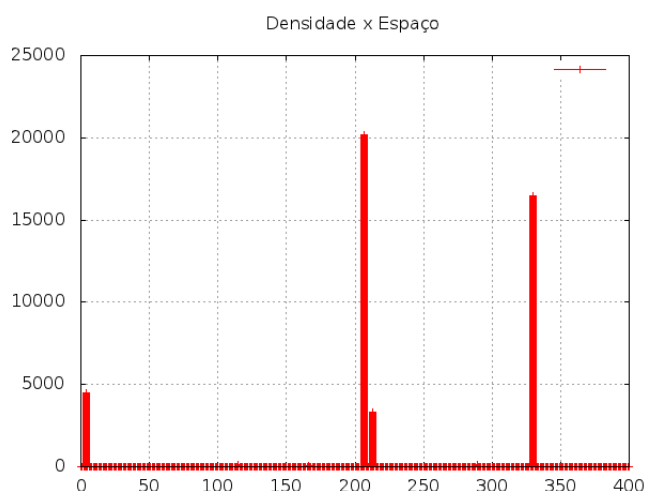


FIGURA 42: Densidade-Espaço

FONTES: O autor (2011)

Por apresentar resultados distantes do que ocorre fisicamente optou-se por aplicar apenas o primeiro modelo para simulação da rotatória.

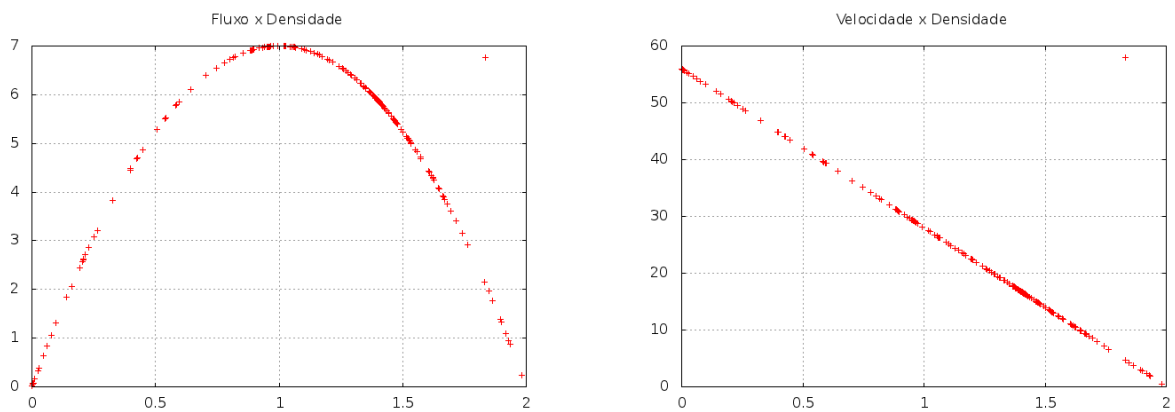
4.2.3 Comparação dos resultados com os modelos da literatura

A seguir são apresentados o diagrama fundamental, diagrama velocidade - densidade e diagrama densidade - espaço, com os mesmos dados utilizados na segunda simulação, primeiro modelo com valores para $t = 0$ e $x = 0$, a pista inicia com densidade de 1.4 veículos/metro, ou seja $\rho(0,t) = 1.4$ e $\rho(x,0) = 1.4$ Figura ??.

Pode-se notar que os diagramas velocidade-densidade e diagrama fundamental (Figuras 43, 45, 47 e 49), aproximam-se quando comparados com modelos existentes na literatura apresentados no Capítulo 2.

Observa-se que para os diagramas densidade - espaço (Figuras 44, 46, 48 e 50), todos apresentaram problemas nas posições 0 (zero) metro e 210 metros, sendo que apenas os modelos de Greenshields e de Greenberg acusam problemas na posição 130 metros, porém com valores menores para a densidade quando comparados com o modelo proposto na dissertação.

Modelo de Greenshields



(a) Diagrama fundamental

(b) Modelo velocidade-densidade

FIGURA 43: Diagrama fundamental e diagrama velocidade - densidade

FONTE: O autor (2011)

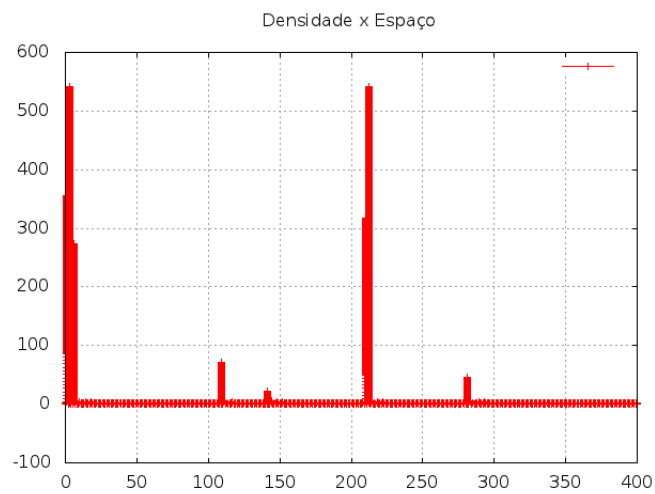
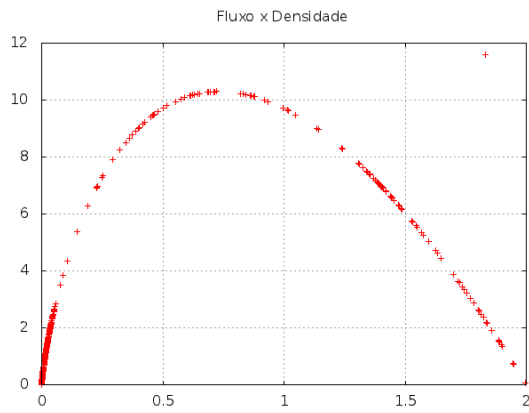


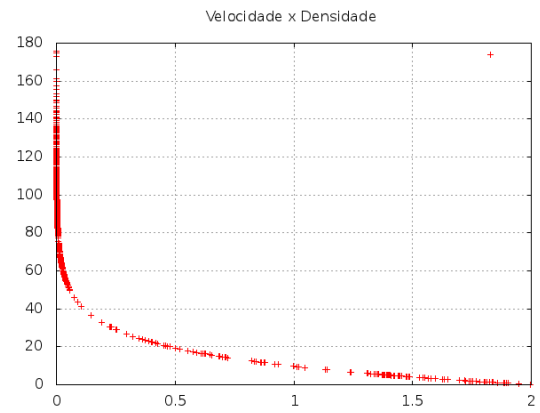
FIGURA 44: Densidade-Espaço

FONTE: O autor (2011)

Modelo Greenberg



(a) Diagrama fundamental



(b) Modelo velocidade-densidade

FIGURA 45: Diagrama fundamental e diagrama velocidade - densidade

FONTE: O autor (2011)

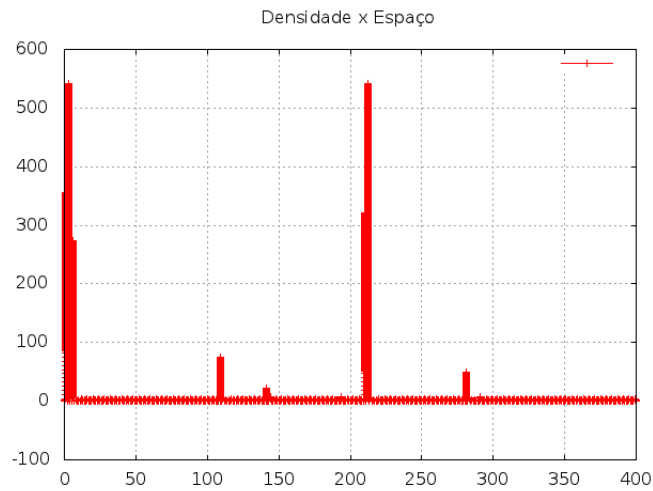
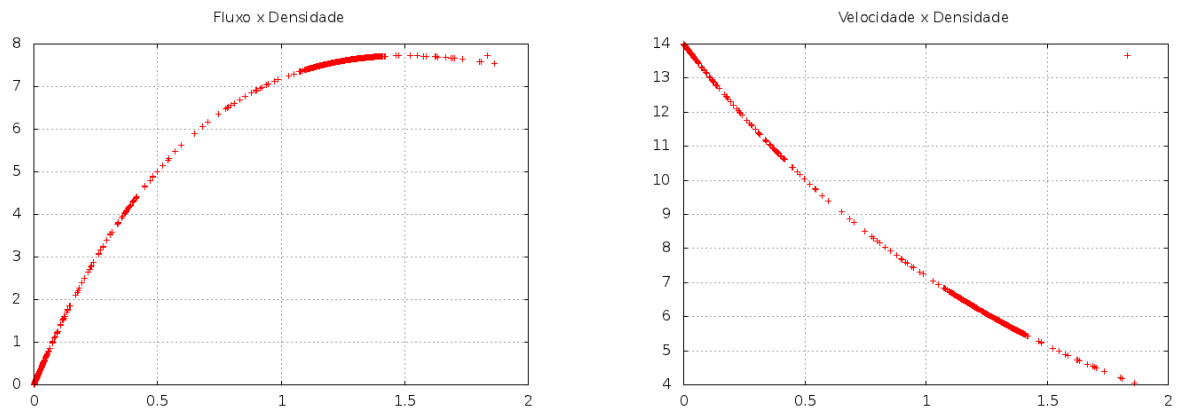


FIGURA 46: Densidade-Espaço

FONTE: O autor (2011)

Modelo de Underwood



(a) Diagrama fundamental

(b) Modelo velocidade-densidade

FIGURA 47: Diagrama fundamental e diagrama velocidade - densidade
 FONTE: O autor (2011)

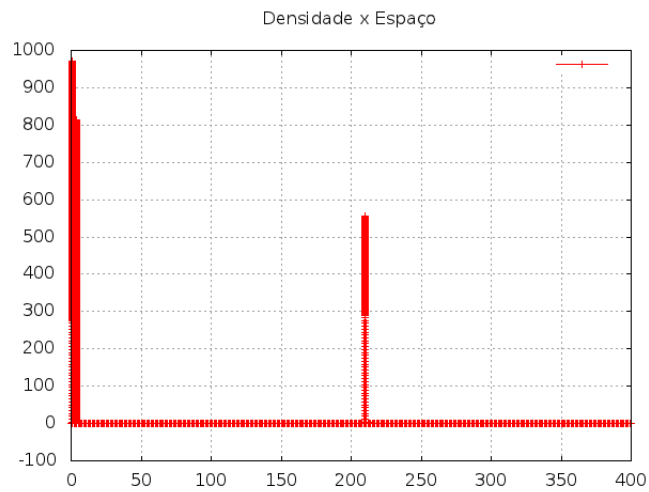


FIGURA 48: Densidade - Espaço
 FONTE: O autor (2011)

Modelo de Bonzani

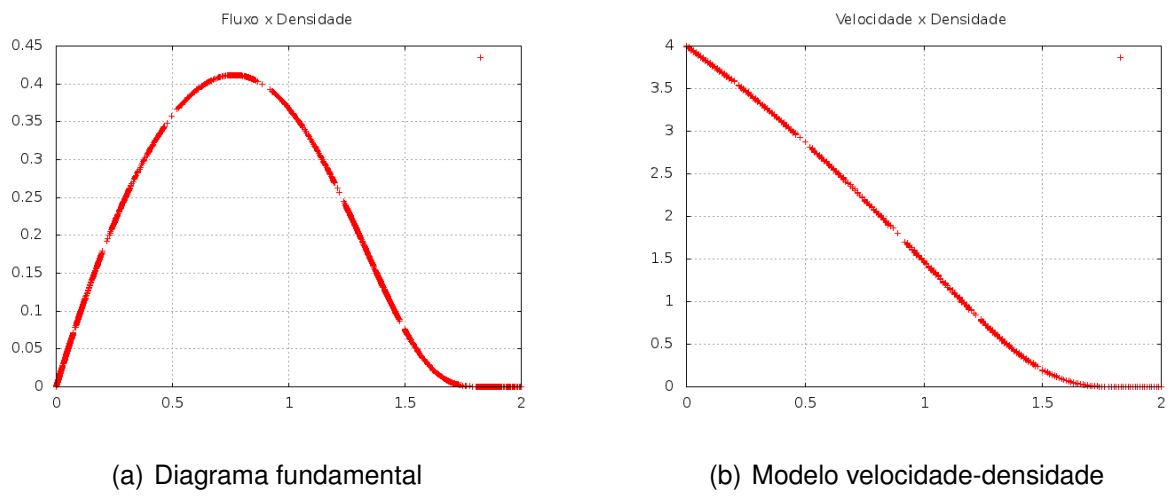


FIGURA 49: Diagrama fundamental e diagrama velocidade - densidade
 FONTE: O autor (2011)

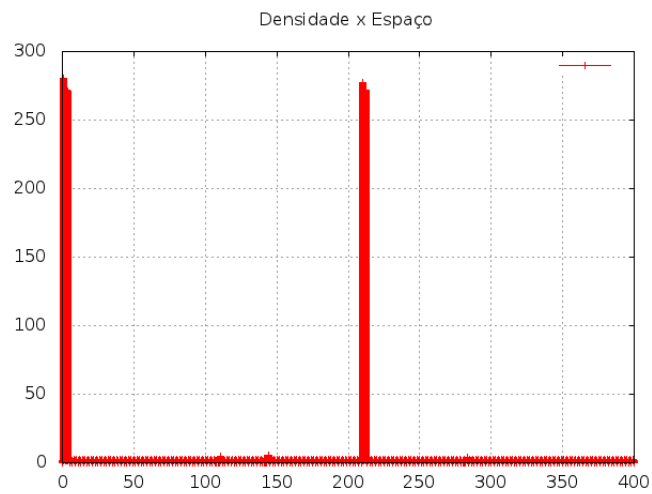


FIGURA 50: Diagrama densidade - Espaço
 FONTE: O autor (2011)

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A partir das simulações com as pistas contendo veículos, tanto para o modelo utilizado na dissertação quanto para os modelos encontrados na literatura, é possível afirmar que o modelo apresentou bom desempenho em diagnosticar as condições da rotatória em estudo, pois verifica-se que todas as análises apresentam resultados semelhantes, ou seja, a maior parte das posições que apresentaram problemas são coincidentes. As posições que mais apresentaram problemas foram a posição 0 (zero), uma das entradas da rotatória BR-277 sentido Foz do Iguaçu-Curitiba-Pr e a posição 210, outra entrada da rotatória, porém com entradas de veículos da BR 277, BR 369 e PR 163 sentido Curitiba-Cascavel-Pr.

Um outro detalhe que se pode observar é que trabalhando-se com densidades baixas, tem-se problemas ao calcular a densidade e fluxo, pois ao realizar-se cálculos com divisões com valores muito pequenos, o resultado tende para valores grandes fazendo com isso que se tenha valores distantes da realidade. Entretanto, para o modelo com densidade da pista 1.4 os resultados mostraram que o modelo se comportou de maneira adequada, respeitando as características de velocidade e densidade, dentro do cenário proposto.

Recomenda-se a partir desses resultados, verificar se existem problemas de planejamento nesses pontos e propor mudanças para minimizar esses congestionamentos.

Sugere-se para trabalhos futuros, a realização de um estudo mais detalhado de todo o trevo, adicionando ao modelo semáforos e as demais interseções. Além disso características das interações com pedestre, devido a se tratar de um perímetro urbano e a influência de veículos menores, como motos e bicicletas.

REFERÊNCIAS

- BAI, K.-Z. *et al.* Traffic flow of a roundabout crossing with an open boundary condition. **Chinese Physics B**, v. 19, n. 4, 2010.
- BALBO, F. A. N. **Análise Multivariada Aplicada aos Acidentes da BR-277 Entre Janeiro de 2007 e Novembro de 2009**. Dissertação (Mestrado) — UFPR, 2011.
- BONZANI, I.; GRAMANI, C. Critical analysis and perspectives on the hydrodynamic approach for the mathematical theory of vehicular traffic. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 50, p. 526–541, 2009.
- BONZANI, I.; MUSSONE, L. From experiments to hydrodynamic traffic flow models: I modelling and parameter identification. **Mathematical and Computer Modeling**, v. 37, n. 12-13, p. 1435–1442, 2003.
- DNIT, Departamento Nacional de Infra-estrutura de Transportes and UFSC, Universidade Federal de Santa Catarina. **Análise e tratamento estatístico dos resultados de contagens de tráfego**. 2008. [Online; acesso em 14-Dezembro-2011]. Disponível em: <http://www.dnit.gov.br/rodovias/operacoes-rodoviaras/convenios-com-a-ufsc/convenio-00562007-p1-f3-produto-5.pdf/at_download/file>.
- DRAKE, L. S.; SHOFER, J. L.; MAY, A. D. A statistical analysis of speed-density hypotheses. **Highway Research Record**, v. 154, p. 53–87, 1967.
- DREW, D. R. Deterministic aspects of freeway operations and control. **Highway Research Record**, v. 99, p. 48–58, 1965.
- EDIE, L. C. Car following and steady-state theory for non-congested. **Operational Research**, v. 9, p. 66–76, 1961.
- FENG, Y. *et al.* Heterogeneous traffic flow model for a two-lane roundabout and controlled intersection. **International Journal of Modern Physics C**, v. 18, n. 1, p. 107 – 117, 2007.
- FERREIRA, G. B. *et al.* O desempenho de rotundas analisado através da microsimulação-um caso de estudo. **PLURIS-2010**, p. 1–8, 2010.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: edusp, 2000.
- FOULADVAND, M. E.; SADJADI, Z.; SHAEBANI, M. R. Characteristics of vehicular traffic flow at a roundabout. **Phys. Rev. E**, v. 70, n. 8, 2004.
- GALLELLI, V.; VAINA, R. Roundabout intersections evaluation of geometric and behavioural features with vissim. **National Roundabout Conference**, p. 1 – 19, 2008.

- GARAVELLO, M.; PICOLLI, B. **Traffic flow on networks**. [S.l.]: American Institute of Mathematical Sciences, 2006.
- GRAMANI, L. M. **Descrições microscópica, macroscópica e cinética do fluxo de tráfego veicular**. São Carlos, SP: SBMAC, 2010.
- GREENBERG, H. An anlysis of traffic flow. **Operationa Research**, v. 7, p. 78–85, 1959.
- GREENSHIELDS, B. D. A study of traffic capacity. **Highway Research Board Proc**, v. 14, p. 448–477, 1935.
- HAUER, E.; HURDLE, V. F. Discussion of the freeway traffic model freflo. **Transpn. Res. Rec.**, v. 722, p. 75–77, 1979.
- KERNER, B. S. **The Physics of Traffic**. Berlim: Springer, 2004.
- KUSUMAA, A.; KOUTSOPOULOSB, N. H. Critical gap analysis of dual lane roundabouts. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, v. 1, n. 5, p. 89 –98, 2011.
- KÜHNE, R. Macroscopic freeway model for dense traffic. **N. Vollmuller, (Ed.), 9th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory**, p. 21–42, 1984.
- LI, R.-M. **Mathematical Modeling of Response From Small Watershed**. Tese (Doutorado) — Colorado State University, 1974.
- LIMA, E. B. **Modelos Microscópicos para simulação do tráfego baseados em autômatos celulares**. Dissertação (Mestrado) — UFF, 2007.
- MING, S. H. **Oportunidades de Conflito de Táfego: Modelos de Previsão**. Dissertação (Mestrado) — USP, 2008.
- MONTALVÃO, E. H. R. Simulação de uma rotatória: Análise crítica e desempenho. **XLII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, XLII, p. 1–10, 2010.
- MUNJAL, P. K.; PIPES, L. A. Propagation of on-ramp density perturbation on unidirectional, and two and three-lane freeways. **Transportation Research**, v. 5, p. 241–255, 1971.
- PAYNE, H. J. Freflo: A macroscopic simulation model of freeway traffic. **Transportation Research Record**, v. 722, p. 68–75, 1979.
- PHILLIPS, W. F. A kinetic model for traffic flow with continuum implications. **Transportation Planning and Technology**, v. 5, p. 131–138, 1979.
- Pimenta, C. R. T. and Oliveira, M. P. **Introdução ao Projeto Geométrico de Interseções Rodoviárias**. 2001. [Online; acesso em 14-Dezembro-2011]. Disponível em: <<http://www.dec.uem.br/site.del/images/users/76/projeto-geometrico-de-vias/proj11-intersecao-rodoviaria.pdf>>.
- PIPES, L. A. Car following models and the fundamental diagram of road traffic. **Transportation Research**, v. 1, p. 21–29, 1967.

PRIGOGINE, I.; HERMAN, R. **Kinetic Theory of Vehicular Traffic**. New York: American Elsevier Pub. Co., 1971.

Silva, A. M. B. e Seco, A. J. M. **Dimensionamento de Rotundas**. 2004. [Online; acesso em 14-Dezembro-2011]. Disponível em: <[http://w3.ualg.pt/mgameiro/Aulas_2006_2007/transportes/rotundas_0420\(prof.Alvaro20Seco\).pdf](http://w3.ualg.pt/mgameiro/Aulas_2006_2007/transportes/rotundas_0420(prof.Alvaro20Seco).pdf)>.

SISSOM, E. L.; PITTS, D. R. **Fenômenos de Transporte**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.

TAVARES, L. D. **Um Simulador de Tráfego Urbano Baseado em Autômatos Celulares**. Dissertação (Mestrado) — UFMG, 2010.

UNDERWOOD, R. T. Speed, volumen and density relationships: quality and theory of traffic flow. **Yale Bureau of Highway traffic**, p. 141–188, 1961.