

REGINALDO DE OLIVEIRA

**OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS  
PELO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Departamento de Geomática, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Quintino Dalmolin

CURITIBA

2003

**Oliveira, Reginaldo de**

**Otimização dos pesos das observações geodésicas pelo problema de valor próprio inverso / Reginaldo de Oliveira. — Curitiba, 2003. xiv, 95 f. : il., grafs., tabs.**

**Orientador: Quintino Dalmolin**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências da Terra.**

**1. Redes (Geodesia). I. Dalmolin, Quintino. II. Título.**

**TERMOS LIVRES: Valor próprio inverso. Otimização dos pesos.**

**CDD 20. 526.33**

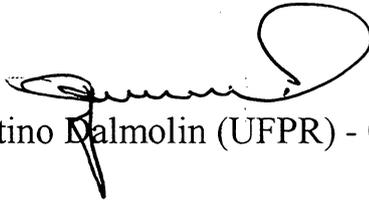
**“OTIMIZAÇÃO DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES  
GEODÉSICAS PELO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO  
INVERSO“**

**POR**

**REGINALDO DE OLIVEIRA**

Dissertação nº 164 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

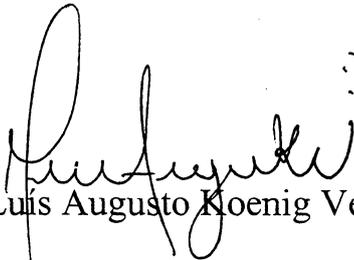
Curitiba, 14 de fevereiro de 2003.



Prof. Dr. Quintino Dalmolin (UFPR) - Orientador e Presidente



Prof. Dr. Sílvio Jacks dos Anjos Garnés - Membro (UNIDERP)



Prof. Dr. Luís Augusto Koenig Veiga – Membro (UFPR)

vida por mim vivida  
há de vir a ir  
o dia  
em que passe a ser idéia  
por mim tida  
que possa ser dita  
e só por isso  
acontec  
ida

(Arnaldo Antunes)

## AGRADECIMENTOS

A **Deus** pela força diária.

Aos meus pais, Nélio S. de Oliveira e Marlene de Oliveira, e irmãs Cleide de Oliveira e Neide de Oliveira, pelo apoio e compreensão na minha ausência.

Ao Professor Dr. Quintino Dalmolin pela pessoa humana e compreensiva e pela dedicação na orientação, auxiliando no aprimoramento e aprofundamento deste trabalho.

À Ângela Maria de Oliveira (fifonha) pelo incentivo e auxílio na obtenção de bibliografia.

Ao Dr. Carlito Vieira de Moraes pelo apoio pessoal e incentivo.

Ao Professor Guataçara dos Santos Junior (CEFET/PR-PG) pelas discussões que enriqueceram este trabalho.

Ao Professor Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira pelo companheirismo e idéias sugeridas.

Ao Eng<sup>o</sup> Eddie Andretto Junior pelo auxílio quando precisei.

Ao Professor Dr. Silvio Rogério Correia de Freitas ao incentivo quando do ingresso no Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas.

Ao Coordenador do Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas Edson Aparecido Mitishita.

À Secretária do Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas Verali Mônica Keluser Reguilin, pela presteza de seus serviços.

Aos professores Camil Gemael e Romualdo Wandressen.

Ao Dr. Antonio Marcos Batista Professor do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Ao diretor do Colégio Estadual Dr. Munhoz da Rocha (distrito de Guaragi, Ponta Grossa-Pr.), Professor José Carlos das Neves, pelo auxílio na licença para minha qualificação.

Aos docentes, funcionários e discentes do Colégio Estadual Dr. Munhoz da Rocha, pelo trabalho que realizam no aprimoramento da educação.

Aos profissionais da biblioteca de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Aos colegas do Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas com os quais, no período de elaboração da dissertação, discutiu-se o tema pesquisado: Alfonso Tierra Criollo, Alteni Fidelis Pimenta, Andréia Faria, Andréia Tedesco, Elaine Cristine Barros de Souza, Jaime Freiburger Junior, José Nonato, Moisés Ferreira Costa, Niel Nascimento Teixeira, Regiane Dalazoana, Sandro Reginato Soares de Lima e a todos os colegas que neste período auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq pela concessão da bolsa de estudo.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS E QUADROS</b> .....	viii
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	ix
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	x
<b>RESUMO</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O PROBLEMA .....	2
1.3 PLANEJAMENTO DE SEGUNDA ORDEM .....	4
1.4 OBJETIVOS .....	5
1.4.1 Objetivo Geral .....	5
1.4.2 Objetivos Específicos .....	5
1.5 CONTRIBUIÇÃO E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA .....	5
<b>2 CONCEITOS BÁSICOS</b> .....	7
2.1 CONCEITOS DA ÁLGEBRA MATRICIAL .....	7
2.1.1 Matriz .....	7
2.1.1.1 Operações com matrizes .....	8
2.1.1.2 Determinante .....	9
2.1.1.3 Inversa ordinária .....	10
2.1.1.4 Matriz ortogonal .....	11
2.1.1.5 Inversa generalizada de Moore-Penrose .....	11
2.1.1.6 Problema de valor próprio geral e valor próprio especial .....	12
2.1.1.7 Diagonalização .....	15
2.1.1.8 Decomposição de valor singular .....	17
2.2 FUNDAMENTOS DA ESTATÍSTICA .....	18
2.2.1 Estatística Univariada .....	18
2.2.1.1 Variável aleatória .....	18
2.2.1.2 Esperança matemática .....	18
2.2.1.2.1 Propriedades .....	19
2.2.1.3 Variância .....	19
2.2.1.3.1 Propriedades .....	20
2.2.2 Estatística Multivariada .....	20
2.2.2.1 Vetor aleatório multivariado .....	20
2.2.2.2 Matriz de covariâncias .....	21
2.2.2.3 Distribuição Normal Multivariada .....	22
2.3 MATRIZ DOS PESOS .....	23
2.4 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NA FORMA PARAMÉTRICA .....	28
2.5 MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS .....	31
2.6 CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO .....	35
2.7 CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE PARA REDES GEODÉSICAS .....	36
2.8 TESTE PARA A IGUALDADE DE VALORES PRÓPRIOS .....	38
<b>3 PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO</b> .....	40
3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO .....	40

3.1.1 Problema Aditivo de Valor Próprio Inverso .....	40
3.2 DIFERENCIAÇÃO DOS VALORES PRÓPRIOS E VETORES PRÓPRIOS .....	42
<b>4 PROBLEMA DE PRÓPRIO INVERSO APLICADO NA OTIMIZAÇÃO DE PESOS EM LEVANTAMENTOS GEODÉSICOS .....</b>	<b>47</b>
4.1 CONDIÇÕES PARA OTIMIZAÇÃO DE PESOS COM BASE EM VALORES PRÓPRIOS .....	47
4.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO APLICADO ÀS EQUAÇÕES NORMAIS .....	48
4.2.1 Solução do Problema de Valor Próprio Inverso pelo Método de Newton .....	49
<b>5 EXPERIMENTOS E RESULTADOS .....</b>	<b>54</b>
5.1 EXPERIMENTO 1 .....	54
5.2 EXPERIMENTO 2 .....	60
5.3 EXPERIMENTO 3 .....	64
5.4 EXPERIMENTO 4 .....	69
5.5 EXPERIMENTO 5 .....	73
<b>6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>76</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>79</b>
<b>DOCUMENTOS CONSULTADOS .....</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS .....</b>	<b>87</b>
<b>APÊNDICE 2 – LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS .....</b>	<b>92</b>
<b>APÊNDICE 3 – MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS OBTIDA PELA LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS .....</b>	<b>94</b>

## LISTA DE TABELAS E QUADROS

QUADRO 2.1	– CLASSIFICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO GEODÉSICA.....	36
TABELA 5.1	– COORDENADAS HORIZONTAIS I .....	55
TABELA 5.2	– INFLUÊNCIA DE $x_0$ NA QUALIDADE GLOBAL DA REDE .....	57
TABELA 5.3	– COORDENADAS HORIZONTAIS II .....	61
TABELA 5.4	– PRECISÃO OBTIDA COM A INVERSÃO DA MATRIZ DOS PESOS .....	63
TABELA 5.5	– COORDENADAS HORIZONTAIS III .....	65
TABELA 5.6	– PESOS OBTIDOS COM A OTIMIZAÇÃO .....	66
TABELA 5.7	– PRECISÃO REQUERIDA PARA AS OBSERVAÇÕES .....	67
TABELA 5.8	– ELIPSES DE ERROS LOCAL .....	68
TABELA 5.9	– PESOS OBTIDOS NA REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE .....	70
TABELA 5.10	– PRECISÃO REQUERIDA NA REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE .....	71
TABELA 5.11	– ELIPSES DE ERRO LOCAL COM REDUÇÃO DA FORMA FRACA PRINCIPAL .....	72
TABELA 5.12	– PESOS OBTIDOS NO PROJETO MODIFICADO .....	74
TABELA 5.13	– PRECISÃO PARA AS OBSERVAÇÕES NO PROJETO MODIFICADO .....	74

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	– FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE BIVARIADA .....	23
FIGURA 2.2	– REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL .....	27
FIGURA 2.3	– REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESPECTRO DE UMA MATRIZ .....	33
FIGURA 2.4	– FORMA DE FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE .....	34
FIGURA 2.5	– REDE HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA .....	38
FIGURA 5.1	– REDE HORIZONTAL .....	54
FIGURA 5.2	– CÍRCULOS DE ERRO LOCAL .....	58
FIGURA 5.3	– REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE UM PONTO EM COORDENADAS CARTESIANAS .....	60
FIGURA 5.4	– REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE DOIS PONTOS EM COORDENADAS CARTESIANAS .	64
FIGURA 5.5	– REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE .....	69
FIGURA 5.6	– PROJETO MODIFICADO DA REDE .....	73
FIGURA A1	– REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO AZIMUTE DA DIREÇÃO $i-j$ .....	88
FIGURA A2	– OBSERVAÇÃO DE ÂNGULO .....	90

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	: indica o elemento de uma matriz, posicionado na $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna
$\mathbf{c}, \mathbf{p}$	: vetor de parâmetros
$c_k$	: $k$ -ésimo elemento do vetor de parâmetros $\mathbf{c}$
cm	: centímetro
$\ln$	: logaritmo neperiano
m	: metro
$\mathbf{p}$	: vetor de pesos
$p_j$	: $j$ -ésimo elemento do vetor de pesos $\mathbf{p}$
ppm	: partes por milhão
det	: determinante de uma matriz
tr	: traço de uma matriz
$\mathbf{x}_a$	: vetor dos parâmetros ajustados
$\mathbf{l}_b$	: vetor de valores observados
$l_i$	: $i$ -ésima componente do vetor de valores observados
$\mathbf{m}$	: vetor próprio
$\mathbf{m}_i(\mathbf{c})$	: $i$ -ésimo vetor próprio associado ao vetor dos parâmetros
t	: indicação da transposta de uma matriz, quando sobrescrito no símbolo de matriz
k	: quando sobrescrito indica o passo em que se encontra um processo iterativo
$\mathbf{v}$	: vetor dos resíduos
$\mathbf{x}$	: vetor que designa a coordenada dos pontos
F	: distribuição de probabilidade
$F^*$	: distribuição de probabilidade calculada para teste de hipótese
E	: operador esperança matemática
A	: matriz
$\mathbf{A}(\mathbf{c})$	: matriz cujos elementos são funções do vetor de parâmetros $\mathbf{c}$

$\mathbf{Q}_x$	: matriz de cofatores de covariâncias dos parâmetros
$\mathbf{I}$	: matriz identidade
$\mathbf{N}$	: matriz dos coeficientes das equações normais
$\mathbf{P}$	: matriz dos pesos
$\mathbf{Q}$	: matriz dos coeficientes de peso
$\mathbf{T}$	: indica uma transformação linear
$T_A(\mathbf{m})$	: $T$ é uma função de $\mathbf{m}$
$\alpha$	: nível de significância
$1-\alpha$	: nível de confiança
$\lambda$	: valor próprio de uma matriz
$\lambda(\mathbf{c})$	: vetor cujas componentes são valores próprios associados ao vetor do parâmetro $\mathbf{c}$
$\lambda_i(\mathbf{c})$	: $i$ -ésima componente do vetor $\lambda(\mathbf{c})$
$\lambda(\mathbf{p})$	: Vetor próprio associado a matriz dos coeficientes de covariância
$\lambda_i(\mathbf{p})$	: $i$ -ésimo valor próprio associado a matriz dos coeficientes de covariância
$\lambda^*$	: vetor cujas componentes são valores próprios pretendidos
$\lambda_i^*$	: $i$ -ésima componente do vetor $\lambda^*$
$\lambda_{\text{máx}}$	: valor próprio máximo
$\lambda_{\text{mín}}$	: valor próprio mínimo
$\mu$	: vetor de médias
$\mu_i$	: valor próprio associado à matriz de covariâncias
$\sigma_i^2$	: variância da $i$ -ésima observação
$\sigma_0^2$	: variância a priori da observação de peso unitário
$\hat{\sigma}_0^2$	: variância a posteriori da observação de peso unitário
$\chi_p^2$	: distribuição de probabilidade Qui-quadrado com graus de liberdade igual a $p$
$\Lambda$	: matriz diagonal formada por valores próprios
$\nabla$	: operador Nabla

- $\prod_{i=1}^p$  : produtório (desde i até p)  
 $\sum_{i=1}^p$  : somatório (desde i até p)  
 $\Sigma_{\ell_b}$  : matriz de covariâncias do vetor das observações  
 $\Sigma_{x_a}$  : matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados  
 $-1$  : indicação da inversa ordinária ou regular de uma matriz (quando sobrescrito no símbolo de matriz)  
 $+$  : indicação da inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa quando sobrescrito no símbolo de matriz  
 $\in$  : indicação de relação de pertinência  
 $!$  : deve ser  
 $=$   
 $\leq$  : menor ou igual  
 $\mathbf{0}$  : vetor nulo  
 $\sim$  : segue (em estatística)  
 $\partial$  : indicação de derivada parcial  
 $\|\bullet\|$  : norma euclidiana de um vetor qualquer  
 $\forall$  : para todo

## RESUMO

Nesta dissertação apresenta-se o problema de valor próprio inverso, aplicado à otimização dos pesos das observações geodésicas. Discorre-se sobre o emprego de valores próprios da matriz de covariâncias que dentre outras aplicações, existe aquela que indica a qualidade das redes geodésicas. O problema de valor próprio inverso amplia estas aplicações possibilitando a determinação dos pesos a fim de que se escolha os instrumentos adequados para efetuar as mensurações. O propósito principal do trabalho é avaliar a aplicabilidade de tal problema quando se pretende que a rede geodésica apresente precisão pré-estabelecida e ainda apresente condições aos valores próprios da matriz de covariâncias quando estes são tomados como função objetivo em uma otimização de pesos. Apresentam-se ainda os conceitos teóricos que conduzem à formulação e solução do problema de valor próprio inverso através do método de Newton.

Palavras-chave: otimização de redes geodésicas; planejamento de segunda ordem; valor próprio; valor próprio inverso; teste de igualdade de valores próprios.

## ABSTRACT

In this dissertation, the inverse eigenvalue problem is presented and applied to the optimization of the geodesic observation weights. It is explained the use of the covariance matrix eigenvalues. Among several applications, the one that indicates the quality of the geodesic networks is presented. The inverse eigenvalue problem enlarges these applications making easier the determination of the weights so that it is chosen suitable instrumentation to do measurements. The main purpose of the work is the evaluation of the usefulness of such problem when it is intended that the geodesic network shows the pre-established precision besides the conditions to the covariance matrix eigenvalues when they are taken as objective function in an optimization of weights. The theoretical concepts that drive to the formulation and solution of the inverse eigenvalue problem through Newton's method are also shown.

Key-words: geodesic networks optimization; second order design; eigenvalue; inverse eigenvalue; eigenvalues equality test.

## 1 INTRODUÇÃO

A Geodésia é a ciência que tem por objetivo determinar a forma e as dimensões da Terra e os parâmetros definidores do campo de gravidade (GEMAEL, 1994, p. 15).

Qualquer medida tomada apresenta erros, erros estes provenientes de causas como, falhas humanas, condições ambientais e equipamentos imperfeitos. Para minimizar tais erros repete-se a mensuração várias vezes. Com a pluralidade e discrepância deste conjunto de observações obriga-se a extrair um resultado único e que apresente maior confiança na grandeza medida. Isto é possível por meio de técnicas que levam as observações obedecer a um modelo matemático (ajustamento de observações), os quais permitem a obtenção de um resultado único e com alto grau de confiabilidade.

Muitas vezes as observações não apresentam o mesmo grau de confiança, então, pode-se atribuir pesos diferenciados para elas valorizando as que possuem maior confiabilidade, com o objetivo de melhorar o ajustamento. A atribuição de pesos às observações pressupõe o conhecimento da precisão de cada medida. Por exemplo, sejam duas distâncias observadas e em média chegou-se a  $s_1 = s_2 = 1000$  m. Para a média  $s_1$  efetuou-se 10 medidas e o desvio padrão foi de 10 mm e para a média  $s_2$  também usou-se 10 medidas e o desvio padrão foi de 8 mm. Percebe-se que para o segundo conjunto de medidas a dispersão entre elas é menor, sendo razoável que para medidas desse conjunto seja dado maior peso no ajustamento. Esta situação, colocada de modo simples, desempenha um papel importante no ajustamento de observações.

O problema de otimização de pesos é conhecido na literatura geodésica como planejamento de segunda ordem, no qual se conhece a matriz planejamento  $A$  e os pesos são tratados como incógnitas.

A partir daí pode-se obter pesos otimizados para as observações fazendo-se uso de modelos para a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados. Matrizes essas que refletem, por exemplo, uma situação de homogeneidade e isotropia como é o caso da matriz de covariâncias de Taylor Karman (KUANG, 1996, p.209). Essas matrizes refletem uma condição desejada para os parâmetros. Conhecendo-se a matriz  $A$  que

contém informações sobre a geometria da rede, pode-se determinar os pesos, os quais, de forma geral, conduzirão à situação desejada. Uma discussão sobre as condições e os procedimentos para solução do problema de segunda ordem baseado em matriz-critério são expostos em GRAFAREND e SANSONE (1985, p. 74).

Uma outra possibilidade de otimização de pesos é o uso de valores próprios. Tendo em vista que o uso dos valores próprios e vetores próprios é um diagnóstico da qualidade de um ajustamento, pode-se formular a otimização de pesos das observações geodésicas por meio de condições impostas aos valores próprios da matriz de covariâncias, ou seja, os valores próprios da matriz de covariâncias apresentam-se como função objetivo. Em suma pretende-se que a rede apresente valores próprios pré-estabelecidos. Esta situação tem resolução através da solução iterativa de um Problema de Valor Próprio Inverso aplicado sobre a matriz dos coeficientes das equações normais.

Alguns métodos para solução do problema de valor próprio inverso podem ser encontrados em FRIEDLAND et. al (1987, p. 639-643). Neste trabalho utiliza-se o método de Newton.

## 1.2 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O PROBLEMA

Uma rede geodésica é constituída por um conjunto de pontos materializados no terreno, com suas posições referenciadas a um sistema de referência. Sua determinação é feita por meio das medições geodésicas (observações de ângulos, direções, distâncias, diferenças de níveis associado à observação gravimétrica ou observações GPS) envolvendo estes pontos. O projeto de uma rede tem sua importância vinculada à precisão das posições obtidas através de medições efetuadas.

De posse dos valores observados realiza-se o cálculo das posições, mediante um ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados. Com a rede estabelecida realiza-se a análise de qualidade. Com esta análise, pode-se encontrar falhas ou fragilidades na rede.

A partir da detecção de falhas surgem os questionamentos a respeito do trabalho realizado: como essas falhas podem ser removidas? Deve-se efetuar um novo levantamento de campo? O plano de observações foi adequado? A instrumentação utilizada foi coerente? Quais observações cooperaram para tais falhas? A precisão final é aceitável?

Melhorar o conhecimento sobre a rede na fase de planejamento e minimizar tais falhas antes de qualquer campanha de medição, é parte da Otimização do Projeto de Redes Geodésicas, que fornece as informações à cerca do trabalho a ser realizado, de tal forma que seja possível projetar e conceber melhor a rede. A Otimização do Projeto de Redes Geodésicas também é denominada pré-análise, uma vez que é realizada sem que se efetue qualquer operação de medição nem o conseqüente ajustamento (SÁ, 1985, p. 9).

Em vista da complexidade de abordagem do problema de forma geral, tal tema é dividido em quatro classes (KALTENBACH, 1992, p. 40):

- 1) Projeto de Ordem Zero (*Zero Order Design*): que trata da seleção de um sistema de referência;
- 2) Projeto de Primeira Ordem (*First Order Design*): trata da obtenção de uma melhor configuração para a rede;
- 3) Projeto de Segunda Ordem (*Second Order Design*): trata da escolha dos pesos das observações;
- 4) Projeto de Terceira Ordem (*Third Order Design*): trata do melhoramento de uma rede já existente, por meio da introdução de novos pontos ou de novas observações.

Métodos para a solução de projetar uma rede de forma otimizada têm sido buscados, por exemplo, nos trabalhos de CROSS e THAPA (1979), SCHAFFRIN (1981), JÄGER (1988), ZHANG e LI (1990), DEREN e YIONQLAN (1991), KALTENBACH (1992), KUANG (1996), SCHMITT (1997), SCHWIEGER (2001) e STOPAR (2001), os quais se ocuparam com o projeto de segunda ordem.

Este trabalho visa o estudo do problema projeto de segunda ordem, ou obtenção dos pesos das observações geodésicas mediante um problema de valor próprio inverso.

### 1.3 PLANEJAMENTO DE SEGUNDA ORDEM

O Projeto de Segunda Ordem em redes geodésicas é definido como o problema para determinar a precisão ótima das observações concordando com os requerimentos ótimos da rede ( SCHMITT, 1985, p. 6 ).

De acordo com KUANG (1996, p.195), o primeiro passo a fim de estabelecer uma rede geodésica é o planejamento dela.

O propósito de um planejamento otimizado de uma rede geodésica é compreendido em termos gerais como o planejamento da configuração e do plano de observações, os quais devem satisfazer um conjunto de critérios ótimos. As técnicas de otimização servem para ajudar a tomar decisões como, por exemplo, instrumentos que podem ser selecionados dentre os modelos disponíveis, onde eles podem ser posicionados e como a rede pode ser concebida com o intuito de estimar os parâmetros incógnitos e ainda apresentar a qualidade desejada.

A precisão é o critério mais importante na otimização de pesos em redes geodésicas. O uso de matrizes-critérios é um procedimento adotado para se extrair pesos otimizados. A idéia é estabelecer critérios de precisão na forma de uma matriz-critério ideal e solucionar a equação  $Q_x = (A^t P A)^{-1}$  em que  $P$  é a incógnita,  $Q_x$  é a matriz-critério e  $A$  que inclui a configuração da rede é fixa.

Outra possibilidade de se obter pesos otimizados, é o uso dos valores próprios associados à matriz dos cofatores de covariância dos parâmetros ajustados, em termos de Componentes Principais, os quais possuem informações sobre a qualidade da rede. A idéia é estabelecer valores próprios que conduzam a matriz de covariâncias à apresentação de uma estrutura ideal e de forma que possua os valores próprios requeridos.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia para a otimização de pesos em levantamentos geodésicos pelo problema de valor próprio inverso.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- a) explicitar conceitos teóricos utilizados na construção de modelos matemáticos que conduzem a formulação e solução do problema de valor próprio inverso;
- b) pormenorizar a utilização do problema de valor próprio inverso na otimização de levantamentos geodésicos;
- c) verificar condições para otimizar os pesos por meio de uma função objetivo;
- d) apresentar uma metodologia para a solução do problema de valor próprio inverso.

## 1.5 CONTRIBUIÇÃO E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA

Com este trabalho pretende-se contribuir com uma metodologia para a otimização de pesos em levantamentos geodésicos, quando estes necessitam de uma precisão pré-estabelecida. Na literatura há a necessidade do tratamento do planejamento e controle de levantamentos geodésicos com qualidade pré-definida. Esta dissertação torna facilitado o estudo deste tema, a qual está estruturada da seguinte forma:

O segundo capítulo apresenta os conceitos básicos necessários ao desenvolvimento do assunto;

No terceiro capítulo apresenta-se o conceito de valor próprio inverso bem como os conceitos teóricos para a sua formulação e solução;

No quarto capítulo é apresentado o problema de valor próprio inverso aplicado ao problema de otimização dos pesos em levantamentos geodésicos;

No quinto capítulo são apresentados, os experimentos e seus resultados;

No sexto capítulo as conclusões e recomendações.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo estão tratados os tópicos da Álgebra Matricial incluindo o problema de valor próprio e suas propriedades principais, conceitos da Estatística, o ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados expresso na forma paramétrica, a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados e os conceitos relacionados ao valor próprio dessa matriz. Estes conceitos estão relacionados à aplicabilidade do problema de valor próprio inverso na otimização dos pesos das observações geodésicas.

### 2.1 CONCEITOS DA ÁLGEBRA MATRICIAL

#### 2.1.1 Matriz

Uma matriz é um arranjo retangular de números, distribuídos em linhas e colunas, representado da seguinte forma :

$${}_m \mathbf{A}_n = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde:

$m$  e  $n$  representam, respectivamente, o número de linhas e de colunas que define a dimensão da matriz;

$a_{i,j}$  são os elementos da matriz, os quais ocupam uma determinada posição definida por  $i$  e  $j$  com  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Convencionalmente representa-se a matriz por letras maiúsculas e seus elementos, em geral, por letras minúsculas.

Uma matriz  $1 \times n$  é um vetor linha e uma matriz  $m \times 1$  é um vetor na forma de coluna. Caso não haja nenhuma notação contrária, os vetores usados nesse trabalho serão vetores na forma de colunas.

Uma matriz  $m \times m$ , com o número de linhas igual ao número de colunas, é denominada matriz quadrada, e em caso contrário, a matriz é dita retangular.

Uma matriz quadrada da forma:

$${}_m \mathbf{A}_m = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

com zeros fora da diagonal principal, é denominada matriz diagonal. Um caso particular de uma matriz diagonal é a matriz identidade denotada pelo símbolo  $\mathbf{I}$ , que possui em sua diagonal principal somente a unidade no valor de seus elementos.

A transposta da matriz  $\mathbf{A}$ , de ordem  $m \times n$ , dada na equação (2.1) é uma matriz  $n \times m$  como segue

$$({}_m \mathbf{A}_n)^t = {}_n \mathbf{A}_m = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

As  $n$  linhas de  $\mathbf{A}^t$  são as  $n$  colunas de  $\mathbf{A}$ .

Uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  é simétrica se  $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ .

### 2.1.1.1 Operações com matrizes

Seja  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  duas matrizes de mesma dimensão  $m \times n$  e  $c$  uma constante real. Duas matrizes são iguais,  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  se  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i$  e  $j$ . As seguintes operações entre matrizes são básicas:

(1) adição:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij}) \quad (2.4)$$

(2) subtração:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij} - b_{ij}) \quad (2.5)$$

(3) multiplicação por escalar

$$c\mathbf{A} = \mathbf{A}c = (ca_{ij}) \quad (2.6)$$

Seja  $\mathbf{C} = (c_{ij})$  uma matriz de dimensão  $n \times r$ . O produto  $\mathbf{AC}$  é dado por,

$$\mathbf{AC} = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} \right) \quad (2.7)$$

cuja dimensão é  $m \times r$ .

Se o número de colunas de  $\mathbf{A}$  é igual ao número de linhas de  $\mathbf{C}$ , então  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  podem ser multiplicadas; em caso contrário o produto não é factível. No produto  $\mathbf{AC}$ , a matriz  $\mathbf{C}$  é pré-multiplicada por  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}$  é pós-multiplicada por  $\mathbf{C}$ .

Supondo que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  sejam matrizes com a mesma dimensão, e  $c$  é um escalar então as seguintes operações são válidas :

$$a) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad (2.8)$$

$$b) (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}); \quad (2.9)$$

$$c) \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}; \quad (2.10)$$

$$d) c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}; \quad (2.11)$$

$$e) \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}, \text{ a igualdade ocorre somente em casos particulares}; \quad (2.12)$$

$$f) (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}); \quad (2.13)$$

$$g) (\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t; \quad (2.14)$$

$$h) \mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}; \quad (2.15)$$

$$i) \mathbf{AA}^t \text{ e } \mathbf{A}^t \mathbf{A} \text{ são matrizes simétricas.} \quad (2.16)$$

### 2.1.1.2 Determinante

O determinante de uma matriz quadrada  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , de ordem  $m \times m$ , é um número que se obtém da soma dos produtos resultantes da multiplicação dos elementos de qualquer linha (coluna) por seus respectivos cofatores:

$$\det {}_m \mathbf{A}_m = a_{i1}\Delta_{i1} + \dots + a_{im}\Delta_{im}, \quad (2.17)$$

$$\det {}_m\mathbf{A}_m = \sum_{j=1}^m a_{ij} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}, \quad (2.18)$$

$$\det {}_m\mathbf{A}_m = a_{ij} \Delta_{ij}. \quad (2.19)$$

Ao número  $\Delta_{ij}$  (que é o determinante afetado pelo sinal  $(-1)^{i+j}$  da submatriz  $\mathbf{A}_{ij}$ , obtida de  $\mathbf{A}$  retirando-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna) chama-se cofator ou complemento algébrico do elemento  $a_{ij}$ .

Para as matrizes  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})$ , ambas de dimensão  $m \times m$ , e  $c$  um escalar são válidas as seguintes propriedades:

- (a) o determinante de uma matriz identidade é igual a 1;
- (b) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz diagonal,  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\dots a_{mm}$ ;
- (c) se  $\mathbf{A}$  é uma matriz triangular inferior ou superior  $\det \mathbf{A} = a_{11}\dots a_{mm}$ ;
- (d) se  $\mathbf{A}$  contém pelo menos uma linha ou coluna de zeros, seu determinante será nulo;
- (e) se  $\mathbf{A}$  tem duas linhas ou colunas idênticas seu determinante será nulo;
- (f)  $\det(c\mathbf{A}) = c^m \det(\mathbf{A})$ , onde  $m$  é a dimensão de  $\mathbf{A}$ ;
- (g)  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ .

### 2.1.1.3 Inversa ordinária

Uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de dimensão  $m \times m$  é não-singular ou regular ou inversível se existe uma única matriz  $\mathbf{B}$  de dimensão  $m \times m$  tal que  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ . A matriz  $\mathbf{B}$  é denotada por  $\mathbf{A}^{-1}$ , e diz-se que  $\mathbf{B}$  é a inversa de  $\mathbf{A}$  e vale a relação:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2.20)$$

A partir do determinante da matriz  $\mathbf{A}$  e da matriz de cofatores de  $\mathbf{A}$ , obtém-se sua inversa pela relação:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathbf{A}^*, \quad (2.21)$$

onde  $\mathbf{A}^*$  denota a matriz cofatora de  $\mathbf{A}$ .

Observa-se a partir de (2.21) que se  $\det(\mathbf{A})=0$ ,  $\mathbf{A}$  não possui inversa ordinária.

#### 2.1.1.4 Matriz ortogonal

Uma matriz real  $\mathbf{A}$  é ortogonal se for válida a relação,

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1} \quad (2.22)$$

ou de forma equivalente

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2.23)$$

Uma matriz ortogonal é necessariamente quadrada e inversível, tendo em vista a definição (2.22)

A condição  $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$  mostra que as colunas de  $\mathbf{A}$  formam um conjunto ortonormal de vetores.

#### 2.1.1.5 Inversa generalizada de Moore-Penrose

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz de dimensão  $m \times n$ . Qualquer matriz  $\mathbf{B}$  satisfazendo  $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}$  é uma inversa generalizada de  $\mathbf{A}$ . Em geral uma inversa generalizada não é única.

Uma matriz  $\mathbf{B}$  é chamada inversa generalizada de Moore-Penrose de  $\mathbf{A}$  ou pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , se satisfaz as quatro condições seguintes (RAO e MITRA, 1971, p. vii):

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}, \quad (2.25)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^t = \mathbf{A}\mathbf{B}, \quad (2.26)$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{A})^t = \mathbf{B}\mathbf{A}. \quad (2.27)$$

A inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , denotada pelo símbolo  $\mathbf{A}^+$ , existe para qualquer matriz  $m \times n$  e é única.

Propriedades da pseudo-inversa:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}, \text{ se } \mathbf{A} \text{ é não-singular,} \quad (2.28)$$

$$(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}; \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{A}^t)^+ = (\mathbf{A}^+)^t; \quad (2.30)$$

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t; \quad (2.31)$$

$$\mathbf{A}^t (\mathbf{A}^+)^t \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^t \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^+; \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^+)^t; \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^+; \quad (2.34)$$

$$\mathbf{a}^+ = \frac{\mathbf{a}^t}{\|\mathbf{a}\|_2^2} = \frac{\mathbf{a}^t}{\mathbf{a}^t \mathbf{a}}, \text{ se } \mathbf{a} \text{ é um vetor não nulo.} \quad (2.35)$$

A pseudo-inversa, do ponto de vista prático, responde uma pergunta bastante natural que ocorre em diferentes aplicações. Se é impossível encontrar  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , então quais são os vetores  $\mathbf{x}$  tais que o erro  $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$  é o menor possível e qual entre esses vetores  $\mathbf{x}$  é a solução ótima, ou seja, tem a menor norma?

A pseudo-inversa pode ser usada em redes livres, ou seja, uma rede que possa ser ajustada sem a fixação de nenhuma injunção inicial. A rede livre produz singularidade na matriz das equações normais, isto é, não admite a inversa ordinária.

#### 2.1.1.6 Problema de valor próprio geral e valor próprio especial

Dois problemas de valor próprio são definidos: o problema de valor próprio especial e o problema de valor próprio generalizado (ZURMÜHL, 1950, p.120).

Dada uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de ordem  $n$ , sobre o corpo  $C$ . Diz-se que um escalar  $\lambda \in C$  é um valor próprio de  $\mathbf{A}$  se existe um vetor não nulo  $\mathbf{m} \in C^n$  para o qual

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m}, \mathbf{m} \neq \mathbf{0} \quad (2.36)$$

Todo vetor  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$  que satisfaz (2.36) é chamado vetor próprio de  $\mathbf{A}$  associado ao valor próprio  $\lambda$ .

Na literatura encontram-se sinônimos de valor próprio como autovalor, valor característico, auto raiz, raiz característica, raiz própria e raiz latente.

A expressão,

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

é equivalente a (2.36) e representa um sistema linear de equações homogêneas.

Escrevendo a (2.37) explicitamente obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.38)$$

Na (2.38) chamando de  $\mathbf{B}$  a primeira matriz, e de  $\mathbf{m}$  o primeiro vetor, então

$$\mathbf{Bm} = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

$$\text{Se o } \det(\mathbf{B}) \neq 0, \quad (2.40)$$

sabe-se que o posto da matriz  $\mathbf{B}$  é  $n$  e, portanto, o sistema de equações lineares homogêneo (2.39) tem solução única, e será  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ . Assim, a única maneira de serem obtidos vetores próprios  $\mathbf{m}$ , com  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$  é ter

$$\det(\mathbf{B}) = 0, \quad (2.41)$$

ou seja

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (2.42)$$

Impondo a condição (2.42), determina-se, primeiramente, os valores próprios  $\lambda$  que satisfazem a equação e, depois, os vetores próprios a eles associados.

Tem-se que

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad (2.43)$$

$$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) + \text{termos de grau menor que } n \quad (2.44)$$

é um polinômio de grau  $n$ . Como a equação algébrica do  $n$ -ésimo grau tem-se exatamente  $n$  raízes reais ou complexas, os valores próprios procurados são as raízes do polinômio.

$P(\lambda)$  é chamado polinômio característico da matriz  $A$  e o conjunto de todos os valores próprios da matriz  $A$  é chamado de espectro de  $A$ .

Os vetores próprios são determinados após a substituição do valor próprio em (2.37). O vetor próprio associado a um valor próprio não é único, ou seja, se  $\mathbf{m}_i$  é um vetor próprio, qualquer escalar  $c$  multiplicado por  $\mathbf{m}_i$  será solução de (2.37).

Obtém-se vetores próprios normalizados pela normalização  $\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i = 1$  dos vetores próprios.

Os vetores próprios desta forma normalizados são chamados versores.

Se em vez da matriz identidade em (2.37) tiver uma matriz  $C$ , haverá como ampliação do problema de valor próprio especial o problema de valor próprio geral definido por:

$$(A - \lambda C)\mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$

em que  $A$  e  $C$  possuem as mesmas dimensões,  $n \times n$ . Em particular, no caso em que  $C$  for não-singular será possível reconduzir (2.45) a um problema de valor próprio especial. Com efeito, pré- multiplicando ambos os membros da equação (6.44) por  $C^{-1}$

$$(C^{-1}A - \lambda C^{-1}C)\mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

fazendo  $C^{-1}A = D$  e ainda como  $C^{-1}C = I$  tem-se

$$(D - \lambda I)\mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Na seqüência estão reunidos princípios e fórmulas da teoria sobre valor e vetor próprio:

- a) os valores próprios da matriz  $A$ , de dimensão  $n \times n$ , são  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ ;
- b) o produto dos  $n$  valores próprios da matriz  $A$  é o determinante de  $A$

$$\det A = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_i \times \dots \times \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \quad (2.48)$$

- c) a soma dos  $n$  valores próprios da matriz  $A$  é o traço de  $A$

$$\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad (2.49)$$

- d) a matriz  $A$  é regular quando  $\det A \neq 0$ , o que significa que todos os valores próprios são diferentes de zero;
- e) a matriz  $A$  tem deficiência  $d$  quando apresentar  $d$  valores próprios nulos;

- f) os vetores próprios associados a valores próprios distintos  $\lambda_i$  são sempre linearmente independentes;
- g) todos os valores próprios de uma matriz simétrica são reais;
- h) dois vetores próprios pertencentes a valores próprios distintos de uma matriz simétrica são, um para com o outro, ortogonais, e ainda levando em conta a normalização tem-se,

$$\mathbf{m}_i^\dagger \mathbf{m}_j = 0 \quad \text{para } \lambda_i \neq \lambda_j \quad (2.50)$$

$$\mathbf{m}_i^\dagger \mathbf{m}_j = 1 \quad \text{para } \lambda_i = \lambda_j; \quad (2.51)$$

- i) com essas considerações, reunindo os vetores próprios de uma matriz simétrica em uma matriz, a qual será chamada matriz modal  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \cdots \mathbf{m}_i \cdots \mathbf{m}_n)$  e considerando (2.50) e (2.51) vale a seguinte propriedade:

$$\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (2.52)$$

### 2.1.1.7 Diagonalização

Diz-se que uma matriz  $\mathbf{A}$   $n \times n$  é diagonalizável se existirem uma matriz inversível  $\mathbf{X}$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  satisfazendo

$$\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{D}. \quad (2.53)$$

Observações:

- Se  $\mathbf{A}$  é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz  $\mathbf{X}$  que diagonaliza  $\mathbf{A}$  são vetores próprios de  $\mathbf{A}$  e os elementos diagonais de  $\mathbf{D}$  são os valores próprios associados aos vetores próprios.
- A matriz  $\mathbf{X}$  não é única. Trocando-se a ordem das colunas de uma matriz diagonalizante  $\mathbf{X}$ , ou multiplicando-as por escalares não nulos, obtém-se outra matriz diagonalizante.
- Se  $\mathbf{A}$  é  $n \times n$  e tem  $n$  valores próprios distintos, então  $\mathbf{A}$  é diagonalizável. Se os valores próprios não forem distintos, então  $\mathbf{A}$  pode ser ou não diagonalizável, dependendo se  $\mathbf{A}$  tem ou não  $n$  vetores próprios linearmente independentes.

d) Se  $\mathbf{A}$  é diagonalizável, então  $\mathbf{A}$  pode ser fatorada como,

$$\mathbf{XDX}^{-1} = \mathbf{A} \quad (2.54)$$

Se  $\mathbf{A}$ , de dimensão  $n \times n$ , é uma matriz real e simétrica, então existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{M}$  que diagonaliza  $\mathbf{A}$  (LEON J.L., 1999, p. 247),

$$\mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

ou

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \Lambda \mathbf{M}^t, \quad (2.56)$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal formada pelos valores próprios da matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{M}$  é a matriz cujas colunas são os vetores próprios normalizados (versores).

Observações :

a) da relação de ortogonalidade tem-se  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^t$  e  $(\mathbf{M}^t)^{-1} = \mathbf{M}$  e da (2.56) escreve-se

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M} \Lambda^{-1} \mathbf{M}^t; \quad (2.57)$$

b) a representação (2.56), onde a matriz  $\mathbf{A}$  deve ser regular, é chamada representação espectral da matriz  $\mathbf{A}$  e a expressão (2.57) é a expressão da sua inversa  $\mathbf{A}^{-1}$ ;

c) denotado a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{M}$  por  $\mathbf{m}_i$  e usando (2.56) pode-se

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \Lambda \mathbf{M}^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t; \quad (2.58)$$

d) a expressão (2.57) colocada em forma de somatório torna-se

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t \text{ com } \mu_i = \frac{1}{\lambda_i}; \quad (2.59)$$

e) particionando-se a matriz modal  $\mathbf{M}$  e a matriz espectral  $\Lambda$  nas partes pertencentes aos valores próprios nulos e valores próprios não nulos  $\mathbf{M}_1, \Lambda_1 = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{M}_2$  e  $\Lambda_2$  a matriz  $\mathbf{A}$  pode ser escrita como,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^t \\ \mathbf{M}_2^t \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

### 2.1.1.8 Decomposição de valor singular

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz real de dimensão  $m \times n$ , então existe uma matriz ortogonal  $\mathbf{U}$  de dimensão  $m \times m$  e  $\mathbf{V}$  de dimensão  $n \times n$ , de modo que

$$\Sigma = \mathbf{U}^t \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (2.61)$$

é uma matriz  $m \times n$  na forma

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

com  $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_i \quad \dots \quad \sigma_r)$ ,  $\sigma_i > 0$ .

O posto da matriz  $\mathbf{A}$  é designado por  $r$  e  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_r$  são os valores singulares diferentes de zero da matriz  $\mathbf{A}$ . Entre o valor singular  $\sigma_i$  da matriz  $\mathbf{A}$  e o valor próprio  $\lambda_i$  da matriz  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  tem-se a relação

$$\sigma_i^2 = \lambda_i. \quad (2.63)$$

Chama-se decomposição de valor singular da matriz  $\mathbf{A}$ , a decomposição

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^t, \quad (2.64)$$

na forma de somatório

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t. \quad (2.65)$$

As colunas de  $\mathbf{V}$  são os vetores próprios de  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  e as colunas de  $\mathbf{U}$  são os vetores próprios de  $\mathbf{A} \mathbf{A}^t$ .

Denotando por  $\Sigma^+$  a matriz  $n \times m$  cujos elementos não nulos da diagonal principal são o inverso dos valores singulares, ou seja,  $\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_i}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}$  a

pseudo-inversa de  $\mathbf{A}$ , representada por  $\mathbf{A}^+$ , é dada pela expressão

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^t \quad (2.66)$$

ou então

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^t. \quad (2.67)$$

A solução do sistema de equações lineares  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , com o uso da pseudo-inversa, ou seja,  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$  corresponde à solução de comprimento mínimo, isto é,  $\|\mathbf{x}^+\|_2 = \text{mínimo}$ .

## 2.2 FUNDAMENTOS DA ESTÁTISTICA

### 2.2.1 Estatística Univariada

#### 2.2.1.1 Variável aleatória

Chama-se variável aleatória a função que associa um número real a cada elemento de um espaço amostral, ou seja, uma função que assume um valor real em cada ponto de um espaço amostral. O espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis para cada experimento. Uma variável aleatória é contínua se essa assume qualquer valor real entre dois números distintos, e será discreta se assume somente valor pontual ou isolado.

#### 2.2.1.2 Esperança matemática

Seja  $x$  uma variável aleatória discreta com valores  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ .

Chama-se esperança matemática da variável aleatória  $x$ , a expressão,

$$\mu_x = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.68)$$

onde  $f(x_i)$ , também escrita como  $p(x_i)$ , designa a função de probabilidade associada à variável aleatória  $x$  no ponto  $i$  e deve satisfazer as seguintes condições:

$$f(x_i) \geq 0 \text{ para } \forall i; \quad (2.69)$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1. \quad (2.70)$$

A (2.68) é interpretada como uma média ponderada. Se todos os valores  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  forem equiprováveis então (2.68) se torna a média aritmética dos  $n$  valores,

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.71)$$

Se a variável aleatória  $x$  for contínua com função de densidade de probabilidade  $f(x_i)$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , então o valor esperado de  $x$  é definido pela integral imprópria

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (2.72)$$

se esta existir.

### 2.2.1.2.1 Propriedades

Se  $c$  e  $k$  forem constantes:

$$a) E(c) = c; \quad (2.73)$$

$$b) E(cx) = cE(x); \quad (2.74)$$

$$c) E(k + cx) = k + cE(x); \quad (2.75)$$

$$d) E(x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_i) + \dots + E(x_n). \quad (2.76)$$

### 2.2.1.3 Variância

Chama-se variância da variável aleatória  $x$  o número resultante da expressão:

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2. \quad (2.77)$$

A raiz quadrada positiva da variância é denominada desvio padrão, cuja expressão é,

$$\sigma_x = |\sigma_x| = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\text{var}(x)}. \quad (2.78)$$

A unidade do desvio padrão é expressa na unidade original da variável.

### 2.2.1.3.1 Propriedades

$$\text{a) } \text{var}(c) = 0; \quad (2.79)$$

$$\text{b) } \text{var}(x + c) = \text{var}(x); \quad (2.80)$$

c) se  $x$  e  $y$  forem variáveis aleatórias independentes:

$$\text{v}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y). \quad (2.81)$$

## 2.2.2 Estatística Multivariada

### 2.2.2.1 Vetor aleatório multivariado

Ao vetor

$$\mathbf{x}^t = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_p] \quad (2.82)$$

cujas componentes são  $p$  variáveis aleatórias dá-se o nome de vetor aleatório. Se cada  $x_i$  é de tamanho  $n$ , tem-se uma amostra de tamanho  $n$  proveniente de uma população  $p$  variada. E uma amostra do vetor aleatório  $x$  pode ser representada por uma matriz, chamada matriz de dados.

A matriz de dados é representada como,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

A matriz  $\mathbf{X}$  contém  $n$  observações de  $p$  variáveis.

A esperança matemática do vetor aleatório p-variado, generalizando o conceito dado em (2.68) ou (2.71), torna-se

$$E(\mathbf{x}) = E \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_i) \\ \vdots \\ E(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \quad (2.84)$$

### 2.2.2.2 Matriz de covariâncias

Generalizando o conceito de variância de uma distribuição unidimensional ou univariada, chega-se ao conceito de matriz de covariâncias representada pelo símbolo  $\Sigma$  e escrita da seguinte forma

$$\Sigma = E[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^2 = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t] \quad (2.85)$$

sendo  $\mathbf{x}$  um vetor p-variado.

A (2.85) é usualmente representada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1i} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2i} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_i^2 & \cdots & \sigma_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pi} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

onde  $\sigma_i^2$  representa a variância da i-ésima observação e  $\sigma_{pi}$  representa a covariância entre a p-ésima e a i-ésima observação.

Na (2.86) o  $\det(\Sigma)$  é a medida denominada variância generalizada e o  $\text{tr}(\Sigma)$  é a medida denominada variância total (MORAES, 2001, p. 108).

### 2.2.2.3 Distribuição Normal Multivariada

A distribuição normal p-variada é uma generalização da distribuição univariada. A distribuição normal univariada com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  tem a seguinte função de densidade de probabilidade,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} \quad \text{com } -\infty < x < \infty \quad (2.87)$$

E para o caso geral tem-se

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t}}{(2\pi)^{p/2} (\det \boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \quad (2.88)$$

onde  $-\infty < x_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, p$ .

Simboliza-se a distribuição normal p-variada por

$$N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.89)$$

Analogamente ao caso univariado, em que a área sob a curva da função de densidade de probabilidade é unitária, o volume sob a superfície da função de densidade multivariada é unitário. No caso multivariado as probabilidades são representadas por volumes sob a superfície sobre regiões definidas por intervalos dos valores de  $x_i$ .

Da expressão (2.88) para a função de densidade de probabilidade p-variada, tem-se densidade de probabilidade constantes em regiões cujos limites são elipses, elipsóides ou hiperelipsóides, chamados contornos de densidade de probabilidade constante. Isto é, a função de densidade normal multivariada é constante em superfícies onde o quadrado da distância  $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$  é constante (JOHNSON e WICHERN, 1998, p.160).

Os eixos de cada elipsóide de densidade constante estão na direção do vetor próprio de  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ , e seus comprimentos são proporcionais ao recíproco da raiz quadrada dos valores próprios de  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ .

Os contornos de densidades constantes para a distribuição normal p-variada são elipsóides definidos por  $\mathbf{x}$  tal que,

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2. \quad (2.90)$$

Estes elipsóides são centrados em  $\boldsymbol{\mu}$  e têm a expressão dos eixos dado por  $\pm c\sqrt{\lambda_i} \mathbf{m}_i$ ,

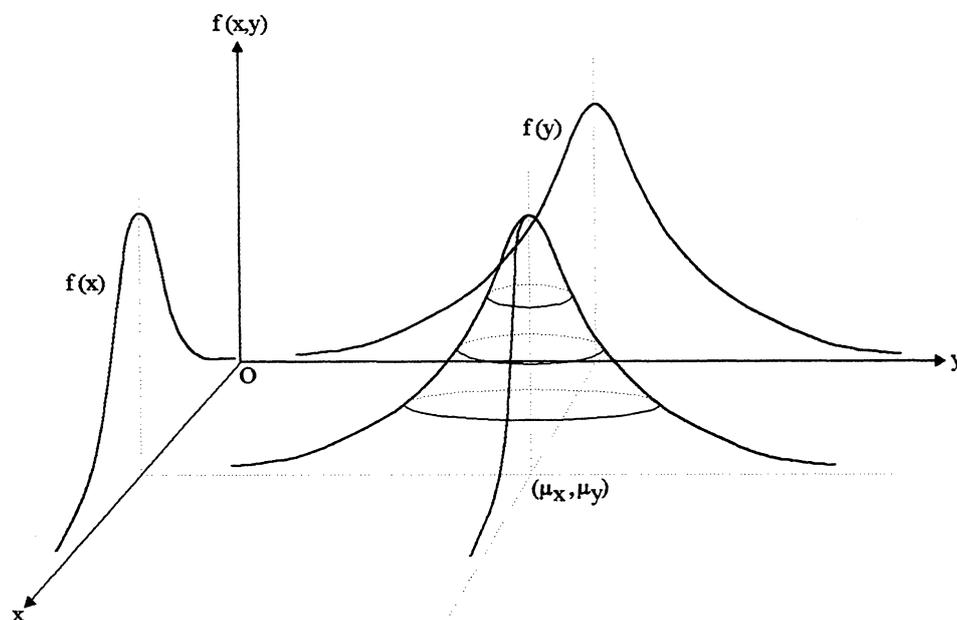
$$(2.91)$$

onde

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_i = \lambda_i \mathbf{m}_i \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (2.92)$$

A representação gráfica para os contornos de densidade constantes da distribuição bivariada ( $p = 2$ ) é dada pela figura 2.1

FIGURA 2.1 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE BIVARIADA



As curvas de mesma densidade de distribuição de probabilidade são elipses.

### 2.3 MATRIZ DOS PESOS

Diz-se que a precisão de uma medida é tanto melhor quanto menor for sua variância, refletindo o grau de cuidado e refinamento instrumental. Inversamente, uma medida com baixa precisão tem uma variância maior.

Outra medida usada que quantifica a qualidade da observação é o peso dado a uma observação. Assim sendo, para qualquer medida ou observação, maiores pesos refletem uma melhor precisão, em contrapartida pesos menores refletem menor precisão.

Desta maneira o peso  $p$  dado a uma observação é definido como uma quantidade que é inversamente proporcional a variância desta observação (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 66), ou seja, tem-se mais confiança nas observações com menor variância. De forma geral,

$$p = \frac{k}{\sigma^2}, \quad (2.93)$$

onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

Se é atribuído a uma observação peso unitário ( $p = 1$ ), sua variância é definida pelo símbolo  $\sigma_0^2$ . Desta maneira de (2.93) decorre,

$$1 = \frac{k}{\sigma_0^2} \quad (2.94)$$

com isso

$$k = \sigma_0^2. \quad (2.95)$$

Substituindo (2.95) em (2.93) o peso dado a observação é definido como,

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}. \quad (2.96)$$

Desta forma, a constante de proporcionalidade  $\sigma_0^2$  é a variância da observação de peso unitário. Esta variância é referida por outras designações tais como, variância da unidade de peso e fator de variância.

Quando duas ou mais grandezas observadas estão envolvidas (como distância e ângulos), outras quantidades chamadas covariâncias podem ser determinadas. A covariância expressa a dependência entre as observações, por exemplo, a dependência entre a observação de uma distância e de um ângulo. Para trabalhos práticos onde a covariância não é completamente determinada assume-se que as observações são não correlacionadas, ou seja, as covariâncias são iguais a zero.

Considerando um conjunto de medidas não correlacionadas,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com suas respectivas variâncias  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , a matriz de covariâncias das observações é assumida ser uma matriz diagonal, como

$$\Sigma_{\ell b} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Os pesos dados, concordando com a equação (2.97), para estas medidas não correlacionadas são:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}. \quad (2.98)$$

Sendo  $\sigma_0^2$  uma constante de proporcionalidade obtém-se considerando (2.91) a seguinte relação:

$$p_1 \sigma_1^2 = p_2 \sigma_2^2 = \dots = p_n \sigma_n^2 = \sigma_0^2. \quad (2.99)$$

Colocando os pesos em uma matriz diagonal e designando-a por  $\mathbf{P}$ , chamada matriz dos pesos, tem-se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Em vista do exposto em (2.98) a matriz  $\mathbf{P}$  torna-se,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Fatorando  $\sigma_0^2$  na (2.101) resulta,

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Com isso escreve-se (2.102) como,

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell_b}^{-1}. \quad (2.103)$$

A relação (2.103) é geral e aplica-se igualmente para observações correlacionadas e não correlacionadas (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 68; GEMAEL, 1994, p. 105).

No caso particular em que  $\sigma_0^2 = 1$ , caso que é assumido no estágio de planejamento de uma rede geodésica (KUANG, 1996, p. 221), a relação (2.103) torna-se

$$\mathbf{P} = \Sigma_{\ell_b}^{-1} \quad (2.104)$$

ou seja, o peso dado a cada observação é estritamente o inverso da variância da observação. Esta condição permite considerar a variância da observação e em conseqüência sua precisão como incógnita, em processos de otimização de levantamentos geodésicos.

SCHMITT (1985, p.76) apresenta o peso dado, a uma observação, associado ao número de repetições efetuadas sobre a grandeza medida,

$$p_i = n \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (2.105)$$

a qual possibilita obter o número de repetições necessárias à observação em situações de planejamento.

O exemplo abaixo consta de GRAFAREND e SANZO (1985, p. 75) e ilustra a aplicação de (2.105) na otimização de pesos.

Uma rede deve ser densificada a partir do ponto 4 como na figura 2.2. Três observações de distância são planejadas sendo que as distâncias 1-4, 2-4 e 3-4 medindo respectivamente 13580,00 m, 9150,00 m e 6940,00 m.

A precisão requerida para os parâmetros é um círculo de raio 1 cm. Com isso a matriz critério de covariâncias é dada pela matriz identidade

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

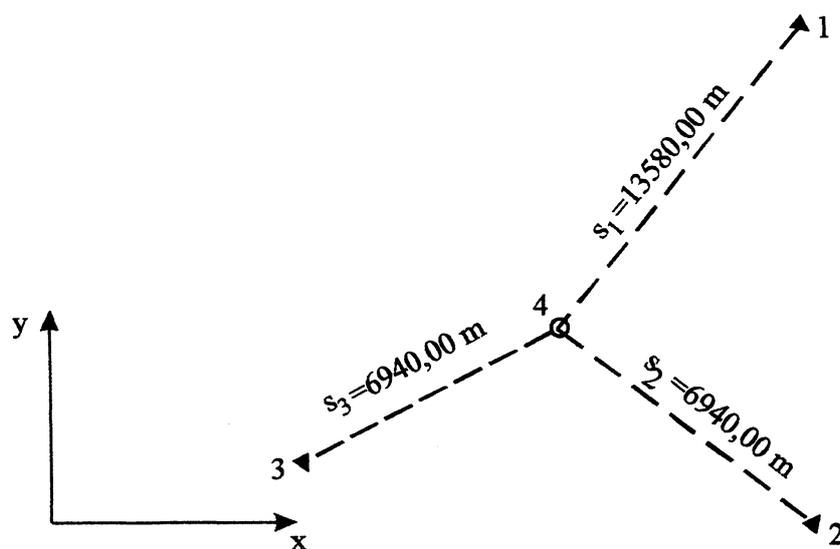
Dada

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{Q}_x^{-1}$$

com a matriz planejamento obtida das derivadas parciais das equações de observação de distância (ver Apêndice 1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,454 & -0,891 \\ -0,809 & 0,588 \\ 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}.$$

FIGURA 2.2 – REDE GEODÉSICA BIDIMENSIONAL



FONTE: ADAPTADA DE SHMITT (1985, p. 74).

Aplicando a otimização de pesos, com base em matriz critério, obtém-se os pesos dados a cada observação

$p_1 = 0,511$ ;  $p_2 = 0,974$  e  $p_3 = 0,515$  respectivamente.

Supondo que o equipamento à disposição possua a precisão de  $\sigma_i = (0,5 + 1 \text{ ppm}) \text{ cm}$ , para uma única medida, pode-se medir as três distâncias com precisão de 1,86 cm, 1,42 cm e 1,19 cm. Usando a relação (2.105) chega-se ao número necessário de repetições com base no planejamento otimizado 1,76, 1,96 e 0,73 respectivamente, as quais aproximadas para inteiros tornam-se 2, 2 e 1.

## 2.4 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NA FORMA PARAMÉTRICA

Um dos objetivos das medições geodésicas é a determinação de parâmetros como, por exemplo, as coordenadas de pontos sobre a superfície da Terra.

A aplicação do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados na forma paramétrica possibilita calcular quantidades indiretamente, se estas se vinculam matematicamente a outras medidas as quais são obtidas de forma direta. Em geral os parâmetros têm valores aproximados no início do ajustamento e obtêm-se melhores estimativas ao final do procedimento. Estes parâmetros representam incógnitas funcionais e são tratados como variáveis aleatórias.

O modelo funcional que representa a ligação entre as  $m$  observações e as  $n$  incógnitas ou parâmetros é

$$\ell_a = f(\mathbf{x}_a) \quad (2.106)$$

onde:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o modelo funcional,  $\ell_a$  representa o vetor dos valores observados ajustados e  $\mathbf{x}_a$  vetor dos parâmetros ajustados.

No modelo (2.106) os valores observados ajustados são expressos explicitamente como função dos parâmetros ajustados, modelo que caracteriza a forma paramétrica do método dos mínimos quadrados.

Designando por  $\mathbf{v}$  o vetor dos resíduos que conduzem os valores observados em valores ajustados rescreve-se a (2.106) como

$$\ell_b + \mathbf{v} = f(\mathbf{x}_a). \quad (2.107)$$

A função do segundo membro em (2.107) normalmente é não-linear, neste caso, poderá ser linearizada em algum ponto  $\mathbf{x}_0$  pelo desenvolvimento da função em

série de Taylor, desprezando os termos de ordem igual e superior a dois. Assim a equação (2.107) se torna

$$\ell_b + \mathbf{v} = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_a} \right|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0} \mathbf{x}, \quad (2.108)$$

onde  $\mathbf{x}_0$  representa os valores aproximados e  $\mathbf{x}$  vetor das correções os quais transformam os parâmetros aproximados em ajustados.

Designando a função dos parâmetros aproximados por

$$f(\mathbf{x}_0) = \ell_0 \quad (2.109)$$

e por  $\mathbf{A}$  a matriz dos coeficientes, cujos elementos são derivadas parciais,

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_a} \right|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0}. \quad (2.110)$$

Pode-se reescrever a (2.108) como,

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell_0 - \ell_b. \quad (2.111)$$

Fazendo

$$\ell_0 - \ell_b = \ell \quad (2.112)$$

a equação (2.111) torna-se

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \ell. \quad (2.113)$$

Impondo a condição de mínimos quadrados ponderado

$$\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \text{mínimo} \quad (2.114)$$

ao sistema (2.113), obtém-se

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell \quad (2.115)$$

como solução geral do sistema (2.113).

Os parâmetros aproximados são convertidos em ajustados por

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \quad (2.116)$$

O tratamento do método dos mínimos quadrados linear e não linear pode ser encontrado, por exemplo, em GARNÉS (2001).

Na fase preparatória usam-se valores aproximados  $\mathbf{x}_0$  dos parâmetros  $\mathbf{x}_a$  como ponto de expansão da função  $f(\mathbf{x}_a)$  em série de Taylor, e , com o objetivo de

linearizar a função, tomam-se apenas os dois primeiros termos da série. Tem-se consciência do erro de aproximação introduzido com esta linearização, erro este tanto menor quanto melhor forem os valores aproximados do vetor  $\mathbf{x}_0$  (DALMOLIN, 2002, p. 94).

Melhora-se as estimativas de  $\mathbf{x}_0$  com iterações, sendo os primeiros resultados obtidos utilizados como valores aproximados melhorados na solução seguinte, e assim sucessivamente até que o processo atinja, caso exista, a convergência.

Após a obtenção dos parâmetros ajustados, calcula-se a sua matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados, a qual permitirá a análise do ajustamento.

As observações efetuadas podem ser compreendidas como a realização de uma variável aleatória. Do ponto de vista estatístico as observações provém de uma amostra de uma população de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , cujos parâmetros amostrais que estimam a média e a variância da população respectivamente são  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$ . Com essas considerações o vetor  $\ell = [\ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_i \quad \dots \quad \ell_n]^t$  é interpretado como um vetor aleatório n-dimensional cujas propriedades estatísticas estão descritas na matriz de covariâncias  $\Sigma_{\ell_b}$  a qual reúne as variâncias e covariâncias das componentes isoladas  $\ell_i$ . Se as observações não são correlacionadas tem-se para  $\Sigma_{\ell_b}$  uma matriz com covariâncias nulas e variâncias não nulas na diagonal principal.

Admita-se que as observações não possuam a mesma confiabilidade, então faz-se necessária a atribuição de pesos a essas observações, com a finalidade de valorizar as observações que inspiram maior confiabilidade. Se as observações inspiram a mesma confiança os pesos dados são iguais. Neste caso, cada peso pode ser a unidade.

A matriz dos coeficientes de peso é dada por:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\ell_b} \quad (2.117)$$

A matriz dos pesos será

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{\ell_b}^{-1} \quad (2.118)$$

Obtém-se pela lei de propagação de covariâncias (ver Apêndice 2) a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados, que para o caso geral, é expressa por (ver Apêndice 3):

$$\Sigma_{x_a} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ = \sigma_0^2 \mathbf{N}^+ \quad (2.119)$$

O valor estimado da variância da unidade de peso  $\sigma_0^2$  é obtida após ajustamento pela expressão

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}, \quad (2.120)$$

onde  $n - u$  representa o número de graus de liberdade.

## 2.5 MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS

As informações a respeito da precisão de uma rede geodésica estão contidas na matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados dada pela equação (2.119).

Todas as modificações na geometria da rede e na precisão das observações agem diretamente sobre (2.119), desta forma os critérios de análise recaem sobre esta matriz.

A análise da matriz de covariâncias divide-se em medida de acurácia local e global (DUPRAZ e NIEMEIER, 1981, p.394).

O critério de acurácia local é dependente das submatrizes da matriz de covariâncias e descreve a situação de acurácia de um ponto ou de dois pontos. Como representantes das medidas locais tem-se por exemplo: elipse de erros, elipse de confiança, elipse de erro relativa e elipse de confiança relativa.

O critério de acurácia global é dependente da matriz de covariâncias completa e apresenta o comportamento estocástico da rede geodésica como um todo. Como representante das medidas globais citam-se: hiperelipsóide de confiança, quociente Rayleigh, critério valor próprio e análise de componentes principais.

A decomposição espectral completa da matriz dos cofatores de covariância  $\mathbf{Q}_x$ , representada por

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{M}^t \Lambda \mathbf{M} \quad \text{com } \Lambda = \text{diag}(0, \dots, 0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-d}) \quad (2.121)$$

ou então

$$\sum_{i=d+1}^n \mu_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^t, \quad (2.122)$$

onde  $d$  representa o defeito da rede, ou seja,  $\mathbf{Q}_x$  sendo singular apresenta  $d$  valores próprios iguais a zero (KALTENBACH, 1992, p. 26). Sendo  $d = 0$ ,  $\mathbf{Q}_x$  possui posto completo.

Dos valores próprios resultam os comprimentos dos semi-eixos do hiperelipsóide  $(n-d)$ -dimensional e os vetores próprios  $\mathbf{m}_i$  indicam as direções dos semi-eixos  $\mu_i$ .

A expressão,

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)^t \mathbf{Q}_x^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_a) = c^2 \quad (2.123)$$

representa o elipsóide de confiança  $n$ -dimensional, para  $n = 2$  representa um grupo de elipses, elipsóides para  $n = 3$  ou hiperelipsóides para  $n \geq 4$  centrados em  $\mathbf{x}_a$ , onde o grupo de parâmetros  $c^2$  tem distribuição  $\chi_n^2$  (JOHNSON e WICHERN, 1998, p.164) dado por,

$$c^2 = \chi_{n,1-\alpha}^2, \quad (2.124)$$

na qual  $n$  designa o número de parâmetros e  $\alpha$  o nível de significância.

Qualquer vetor  $\mathbf{x}$  testado, que seja interno ao elipsóide  $n$ -dimensional, é considerado compatível com  $\mathbf{x}_a$  na probabilidade  $1-\alpha$  (KUANG, 1996, p.152), ou seja

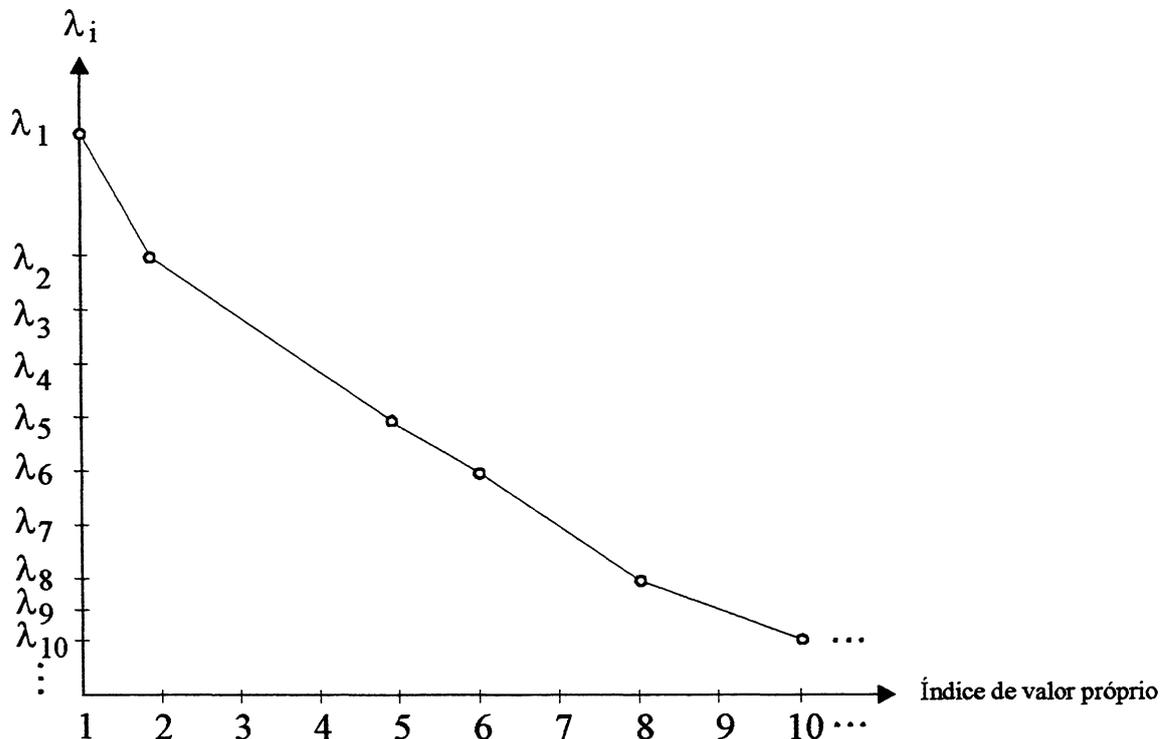
$$P[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)^t \mathbf{Q}_x^+ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) < \chi_{r,1-\alpha}^2] = 1 - \alpha. \quad (2.125)$$

onde  $r$  é o posto da matriz  $\mathbf{Q}_x^+$  e  $\chi_{r,1-\alpha}^2$  é o valor crítico da distribuição qui-quadrado.

Uma representação gráfica do espectro da matriz de covariâncias, como na figura 2.3, é um recurso utilizado para análise da situação de acurácia global da rede geodésica.

Quanto maior um valor próprio, comparativamente em relação aos outros elementos do espectro, mais desfavorável e não homogêneo é a acurácia da rede.

FIGURA 2.3 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESPECTRO DE UMA MATRIZ



Para uma função linear ou não linear  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  resulta a variância correspondente  $\sigma_y^2$  através da lei de propagação de covariâncias como,

$$\sigma_y^2 = \mathbf{f}^t \mathbf{Q}_x \mathbf{f}. \quad (2.126)$$

Com o auxílio do Quociente Rayleigh é obtida uma estimativa para  $\sigma_y^2$  pela expressão

$$\mathbf{f}^t \mathbf{f} \lambda_{\min} \leq \sigma_y^2 \leq \mathbf{f}^t \mathbf{f} \lambda_{\max}, \quad (2.127)$$

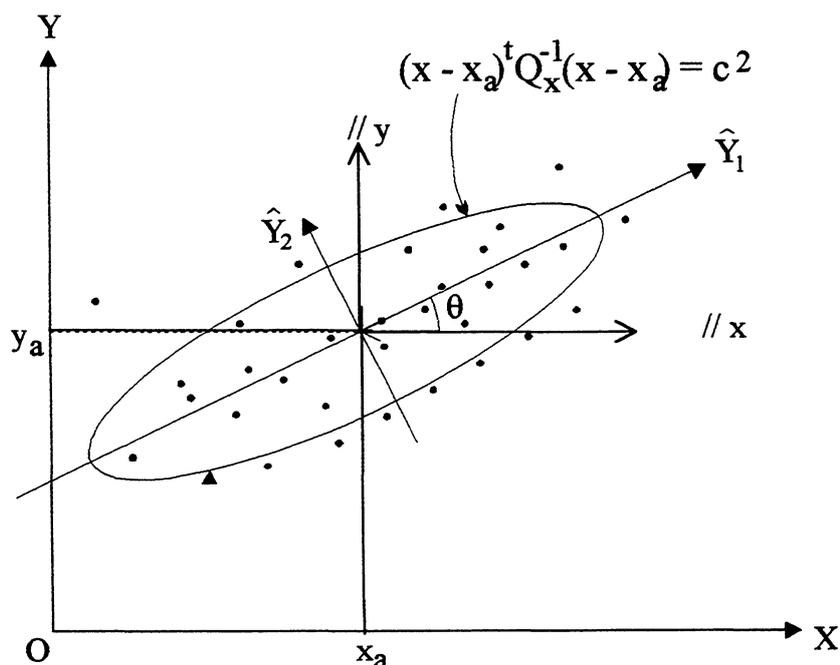
o qual fornece o limite superior para a variância da função  $y$ . Este valor é dependente do valor próprio máximo de  $\mathbf{Q}_x$ . Disto decorre a exigência que o valor próprio máximo deve ser mínimo.

Considerando  $\mu_1 = \mu_{\max}$  como valor próprio dominante e a expressão de somatório dada em (2.59), a matriz de cofatores  $\mathbf{Q}_x$  pode ser descrita pela parte

dominante, isto é,  $\mathbf{Q}_x \cong \mu_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^t$ , onde o vetor próprio  $\mathbf{m}_1$  corresponde a chamada forma de fraqueza principal da rede (KALTENBACH, 1992, p. 27).

A forma de fraqueza principal, como na figura 2.4, indica a direção  $\theta$  na qual os pontos são piores determinados, e pode ser obtida através da análise das componentes principais.

FIGURA 2.4 – FORMA DE FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE



A primeira componente principal é dada por (NIEMEIER, 1982, p.281),

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\mu_1} \quad \text{com } \mu_1 = \mu_{\text{máx}} \quad (2.128)$$

as componentes de  $\mathbf{p}_1$  fixam em comprimento e direção o semi eixo maior da elipse de erros.

A decomposição espectral da submatriz referente ao  $i$ -ésimo ponto é representada por,

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{M}_i^t \Lambda_i \mathbf{M}_i \quad (2.129)$$

Para uma rede bi-dimensional  $Q_i$  é de dimensão  $2 \times 2$ , possuindo dois valores próprios e dois vetores próprios. Para os semi-eixos da elipse de erros em um ponto  $P_i$  vale,

$$a_i^2 = \sigma_0^2(\mu_1)_i \quad e \quad b_i^2 = \sigma_0^2(\mu_2)_i \quad (2.130)$$

ou então

$$a_i^2 = \hat{\sigma}_0^2(\mu_1)_i \quad e \quad b_i^2 = \hat{\sigma}_0^2(\mu_2)_i \quad (2.131)$$

conforme o fator de variância aplicado.

Analogamente ao hiperelipsóide de erros, os valores próprios definem o comprimento e os vetores próprios definem a orientação do semi-eixo da elipse de erro de ponto.

## 2.6 CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Em geral uma rede geodésica é estabelecida dentro de uma seqüência de atividades ou passos descritos aqui de forma simplificada. Após o reconhecimento no campo a rede é projetada, os pontos são materializados e as medições executadas. Finalmente as coordenadas dos vértices são calculadas resolvendo-se o sistema de equações superabundante, empregando o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados e por fim interpretam-se os resultados.

A otimização de redes geodésicas visa obter um planejamento ótimo da rede quanto à acurácia, à confiabilidade e aos custos.

A classificação dos problemas de otimização de redes geodésicas baseia-se na estrutura da matriz de cofatores de covariância

$$N^+ = Q_x = (A^t P A)^+ \quad (2.132)$$

o planejamento da rede geodésica está subdividida nas ordens de zero a três, como exposto no quadro 2.1.

QUADRO 2.1 - CLASSIFICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO GEODÉSICA

<b>PLANEJAMENTO</b>	<b>GRANDEZA(S) FIXA(S)</b>	<b>GRANDEZAS VARIÁVEIS</b>
zero ordem	<b>A , P</b>	fixação de um sistema de referência , isto é, <b>x</b> e <b>Q<sub>x</sub></b>
Primeira ordem	<b>P</b>	A, isto é, -posição de ponto; -estrutura de entrelaçamento dos pontos da rede (gráfico de rede); -tipo de observação.
Segunda ordem	<b>A</b>	<b>P</b>
Terceira ordem	<b>A, P parcialmente</b>	<b>A, P parcialmente</b>

FONTE: KALTENBACH, 1992, p.40.

No quadro 2.1, **A** é a matriz planejamento, **P** é a matriz dos pesos, **x** é o vetor das correções aos parâmetros aproximados do ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados e **Q<sub>x</sub>** é a matriz de cofatores de covariância dos parâmetros ou correções.

## 2.7 CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE PARA REDES GEODÉSICAS

Em geral, os critérios de otimalidade para precisão são descritos pelas medidas de precisão usadas para descrever a qualidade da rede. Na fase de planejamento da rede geodésica é possível avaliar o tamanho e a forma do elipsóide de confiança, visto que estas grandezas são dependentes apenas dos valores próprios e vetores próprios da matriz  $\Sigma_{Xa}$  ( PELZER, 1980, p. 57) .

No caso onde os requerimentos de precisão não são facilmente definidos, alguns conceitos de rede ideal são propostos.

Alguns dos mais importantes critérios de otimalidade e exigências para a rede geodésica (DUPRAZ & NIEMEIER, 1981, p. 387-389; WELSH et al. 2000, p.133-134) são:

$$\prod_{i=1}^p \lambda_i = \det(\Sigma_{x_a}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_p \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (2.133)$$

é a medida denominada variância generalizada que deve ser mínima;

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{tr}(\Sigma_{x_a}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (2.134)$$

é a medida denominada variância total e deve ser mínima;

$$\lambda_{\max} \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (6.135)$$

significa que o quadrado do semi-eixo maior deve ser mínimo, indicando que a acurácia de uma rede será tanto mais alta quanto menor for o valor próprio máximo da matriz de covariância do vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}_a$ ;

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (2.136)$$

é conhecida como a condição de isotropia, ou seja, a medida de acurácia do ponto é a mesma em todas as direções;

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (2.137)$$

é a condição de homogeneidade, ou seja, as elipses se aproximam de uma circunferência e

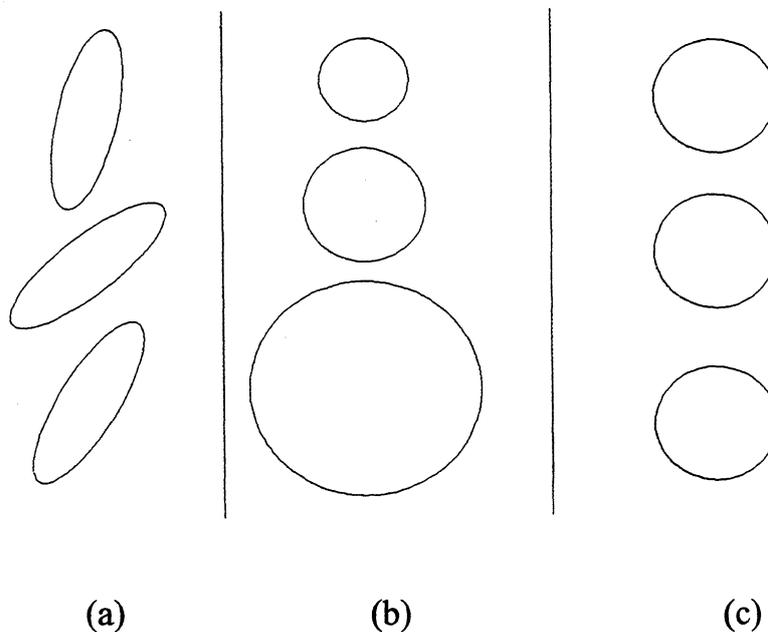
$$p_1 = m \sqrt{\lambda_{\max.}} \quad (2.138)$$

fornece a direção e o comprimento do semi-eixo maior do elipsóide de confiança em termos da primeira componente principal.

Uma rede que é somente homogênea (figura 2.5 a), as elipses (ou elipsóides) de erro locais são os mesmos em todos os pontos. Uma rede que é apenas isotrópica (figura 2.5 b), as elipses (ou elipsóides) variam de ponto para ponto, embora sejam todas reduzidas a círculos (redes bidimensionais) ou esferas (redes tridimensionais).

Assumindo-se uma rede geodésica bidimensional como sendo homogênea e isotrópica (figura 2.5 c), então as elipses de erro locais reduzem-se a círculos de mesmo raio.

FIGURA 2.5 – REDE HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA



Os valores próprios representam a medida para o juízo quantitativo da rede geodésica e seus vetores próprios representam as grandezas geométricas qualitativas correspondentes (JÄGER, 1988, p. 83).

## 2.8 TESTE PARA A IGUALDADE DE VALORES PRÓPRIOS

A fim de verificar se, sob um nível de significância  $\alpha$ , existe um conjunto de  $p$  valores próprios iguais entre si utiliza-se o teste da igualdade de valores próprios. Tem-se o conjunto  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$ . O teste pode ser usado para qualquer subconjunto consecutivo de valores próprios. Se um subconjunto de  $b$  valores próprios é dado,  $\lambda_{k+1} \leq \lambda_{k+2} \leq \dots \leq \lambda_{k+b}$ , a hipótese nula é (JACKSON, 1991, p.86-87):

$$\mathbf{H}_0 : \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_{k+b}$$

Para esta hipótese, a estatística é

$$v \left[ - \sum_{j=k+1}^{k+b} \ln(\lambda_j) + b \ln \left( \sum_{j=k+1}^{k+b} \frac{\lambda_j}{b} \right) \right] \sim \chi^2, \quad (2.139)$$

onde  $v$  denota o número de graus de liberdade associado com a matriz de covariâncias e a distribuição  $\chi^2$  tem  $(b-1)(b+2)/2$  graus de liberdade. Fixado o nível de significância  $\alpha$ , se a estatística calculada for maior que a estatística  $\chi_{(b-1)(b+2)/2}^2$ , rejeita-se a hipótese nula.

Para o caso em que  $p=2$ , caso bivariado, o teste da igualdade dos valores próprios sob a hipótese nula é:

$$\mathbf{H}_0 : \lambda_1 = \lambda_2$$

tem a estatística

$$F^* = \frac{(n-2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{8\lambda_1\lambda_2} \quad (2.140)$$

Na (2.134) a estatística  $F^*$  a ser testada tem distribuição F central com número de graus de liberdade no numerador igual a 2 e o número de graus de liberdade no denominador  $n-2$ , ou seja,  $F^* \sim F_{2, n-2}$  e  $n$  é o número de observações.

### 3 PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO

Um problema de valor próprio inverso diz respeito à construção de uma matriz com dados espectrais pré-estabelecidos. Os dados espectrais podem consistir de informações parciais ou completas dos valores próprios ou dos vetores próprios. O objetivo principal de um problema de valor próprio inverso é obter uma matriz que preserve as propriedades espectrais dadas.

No problema de valor próprio determinam-se os valores próprios para uma matriz quadrada. Em se tratando de valor próprio inverso o problema consiste em determinar uma matriz que possua valores próprios pretendidos, ou seja, se o problema é direto os valores próprios serão incógnitas e no problema inverso a matriz será a incógnita.

#### 3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO

Seja  $A(\mathbf{c})$  uma matriz  $n \times n$ , simétrica e real cujos elementos são funções de um vetor  $\mathbf{c}$ . Sendo  $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k \ \dots \ c_n]^t$  tem-se como valores próprios e vetores próprios de  $A(\mathbf{c})$ ,  $\lambda(\mathbf{c}) = [\lambda(\mathbf{c})_1 \ \lambda(\mathbf{c})_2 \ \dots \ \lambda(\mathbf{c})_i \ \dots \ \lambda(\mathbf{c})_n]^t$  e  $\mathbf{m}(\mathbf{c})_1, \mathbf{m}(\mathbf{c})_2, \dots, \mathbf{m}(\mathbf{c})_n$ , respectivamente. O problema consiste em encontrar os parâmetros  $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_n$  tal que a matriz  $A(\mathbf{c})$ , apresente os valores próprios pretendidos  $\lambda^* = [\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \dots \ \lambda_i^* \ \dots \ \lambda_n^*]$ .

##### 3.1.1 Problema Aditivo de Valor Próprio Inverso

O problema aditivo de valor próprio inverso é escrito na forma (NOCEDAL e OVERTON, 1983, p. 213):

$$A(\mathbf{c}) = A_0 + \sum_{i=1}^n c_i A_i . \quad (3.1)$$

Desenvolvendo o somatório escreve-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \mathbf{A}_0 + c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2 + \cdots + c_k \mathbf{A}_k + \cdots + c_n \mathbf{A}_n. \quad (3.2)$$

Na expressão (3.1) considerando  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$  obtém-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{A}_i. \quad (3.3)$$

O problema aditivo de valor próprio inverso dado em (3.3) é o fundamento da aplicabilidade de tal problema na otimização de pesos no planejamento de levantamentos geodésicos, quando se utiliza de valores próprios.

A fim de exemplificar a definição acima, considera-se o caso simples aplicado a uma matriz diagonal de dimensão  $2 \times 2$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^2 c_i \mathbf{A}_i, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{A}_i$  é uma matriz diagonal. Por exemplo, pretende-se que  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$  apresente os valores próprios  $\lambda_1^* = 14$  e  $\lambda_2^* = 20$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = c_1 \begin{bmatrix} 3 & \\ & 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 & \\ & 3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 3c_1 + 2c_2 & \\ & 4c_1 + 3c_2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Os valores próprios de uma matriz diagonal coincidem com os elementos da diagonal principal, obtém-se desta forma um sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} 3c_1 + 2c_2 = 14 \\ 4c_1 + 3c_2 = 20 \end{cases} \quad (3.7)$$

com solução  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 4$ .

O problema de valor próprio inverso torna-se menos simples à medida que as matrizes  $\mathbf{A}_i$  tenham seus elementos não nulos ou ainda que a quantidade de parâmetros a determinar difere do número de valores próprios pretendidos. Desta forma o problema aditivo de valor próprio inverso é considerado no contexto de mínimos quadrados.

### 3.2 DIFERENCIAÇÃO DOS VALORES PRÓPRIOS E VETORES PRÓPRIOS

O procedimento numérico para a formulação e solução do problema de valor próprio inverso necessita das expressões diferenciais dos valores próprios  $\lambda_i(\mathbf{c})$  e dos vetores próprios  $\mathbf{m}_i(\mathbf{c})$  em relação ao parâmetro  $c_k$ . As deduções são indicadas para o caso do valor próprio especial. Para efeito de simplicidade utiliza-se a seguinte notação:  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_k} = \lambda_{i,k}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial c_k} = \mathbf{m}_{i,k}$  e  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c_k} = \mathbf{A}_k$  e ainda, que  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{m}_i$  e  $\mathbf{A}$  são funções do vetor  $\mathbf{c}$ .

Para a variação do valor próprio  $\lambda_i$  em relação ao parâmetro  $c_k$  parte-se da relação de normalidade entre dois vetores

$$\mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_i = 1. \quad (3.8)$$

Multiplicando (3.8) por  $\lambda_i$

$$\mathbf{m}_i^t \lambda_i \mathbf{m}_i = \lambda_i. \quad (3.9)$$

Da definição de valor próprio

$$\mathbf{A} \mathbf{m}_i = \lambda_i \mathbf{m}_i. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9) tem-se

$$\mathbf{m}_i^t \mathbf{A} \mathbf{m}_i = \lambda_i. \quad (3.11)$$

Diferenciando ambos os membros da relação (3.8) em relação ao parâmetro  $c_k$

$$\frac{\partial(\mathbf{m}_i^t)}{\partial c_k} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \frac{\partial(\mathbf{m}_i)}{\partial c_k} = 0 \quad (3.12)$$

ou

$$\mathbf{m}_{i,k}^t \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_{i,k} = 0 \quad (3.13)$$

tem-se então da propriedade (2.14)

$$\mathbf{m}_{i,k}^t \mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_{i,k} \quad (3.14)$$

e (3.13) escreve-se

$$\mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_{i,k} = 0. \quad (3.15)$$

Logo (3.15) indica que  $\mathbf{m}_i^t$  e  $\mathbf{m}_{i,k}$  são ortogonais.

Diferenciando a relação (3.11), obtém-se a variação do valor próprio  $\lambda_i$  em relação  $c_k$ . Com efeito

$$\frac{\partial(\mathbf{m}_i^t \mathbf{A} \mathbf{m}_i)}{\partial c_k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_k} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{m}_i^t)}{\partial c_k} \mathbf{A} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \frac{\partial(\mathbf{A})}{\partial c_k} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A} \frac{\partial(\mathbf{m}_i)}{\partial c_k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_k} \quad (3.17)$$

ou então,

$$\mathbf{m}_{i,k}^t \mathbf{A} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A} \mathbf{m}_{i,k} = \lambda_{i,k}. \quad (3.18)$$

Substitui-se (3.10) em (3.18)

$$\mathbf{m}_{i,k}^t \lambda_i \mathbf{m}_i + \lambda_i \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_{i,k} + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i = \lambda_{i,k}. \quad (3.19)$$

Sendo  $\lambda_i$  um escalar rescreve-se a (3.19) como

$$\lambda_i \mathbf{m}_{i,k}^t \mathbf{m}_i + \lambda_i \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_{i,k} + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i = \lambda_{i,k}. \quad (3.20)$$

Substitui-se (3.15) em (3.20) obteém-se

$$\mathbf{m}_i^t \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\partial c_k} \mathbf{m}_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_k}. \quad (3.21)$$

A (3.21) indica a variação do valor próprio  $\lambda_i$  em relação ao parâmetro  $c_k$ , sendo o fundamento para a otimização de redes geodésicas, com base em valor próprio, quando aplicada às equações normais.

A derivação dos vetores próprios segue-se a partir do problema de valor próprio especial

$$(\mathbf{A}(\mathbf{c}) - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{m}_i = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Efetua-se a diferenciação total de (3.22) em relação ao parâmetro  $c_k$

$$\frac{\partial[(\mathbf{A}(\mathbf{c}) - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{m}_i]}{\partial c_k} = \frac{\partial(\mathbf{0})}{\partial c_k} \quad (3.23)$$

$$(\mathbf{A}_k - \lambda_{i,k} \mathbf{I}) \mathbf{m}_i + (\mathbf{A}(\mathbf{c}) - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{m}_{i,k} = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$

E ainda da (3.24) segue-se a igualdade



$$\mathbf{m}_{i,k} = \frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial c_k} = -\mathbf{F}_i^+ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\partial c_k} \mathbf{m}_i = -(\mathbf{A}(\mathbf{c}) - \lambda_i \mathbf{I})^+ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{c})}{\partial c_k} \mathbf{m}_i. \quad (3.33)$$

A diferencial  $\mathbf{m}_{i,k}$  pode ser também escrita como (LANCASTER, 1964, p.380; KALTENBACH, 1992, p. 16):

$$\mathbf{m}_{i,k} = \sum_{j=1}^n (a_{ikj} \mathbf{m}_j). \quad (3.34)$$

O p-ésimo coeficiente é obtido substituindo a equação (3.34) na equação (3.25) e multiplicando a esquerda por  $\mathbf{m}_p^t$  segue-se que

$$a_{ikp} = \frac{\mathbf{m}_p^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i}{\lambda_i - \lambda_p} \text{ com } p \neq i \text{ e } \lambda_i \neq \lambda_p. \quad (3.35)$$

Inserindo a equação (3.35) na (3.34) resulta,

$$\mathbf{m}_{i,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{m}_j \text{ e } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (3.36)$$

O cálculo da segunda derivada  $\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial c_k \partial c_p} = \lambda_{i,k,p}$  é obtida após a diferenciação

total de (3.21)

$$\lambda_{i,k,p} = \mathbf{m}_{i,p}^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_{k,p} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_{i,p} \quad (3.37)$$

ou então

$$\lambda_{i,k,p} = \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_{k,p} \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_{i,p}^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_{i,p} \quad (3.38)$$

na qual  $\mathbf{A}_{k,p}$  e  $\mathbf{m}_{i,p}$  significam a derivação de  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{m}_i$  em relação a  $c_p$  respectivamente.

Substituindo a equação (3.37) na (3.38) obtém-se a expressão

$$\lambda_{i,k,p} = \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_{k,p} \mathbf{m}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_p \mathbf{m}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_k \frac{\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_p \mathbf{m}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \mathbf{m}_j \quad (3.39)$$

ou então pela propriedade (2.14), a expressão

$$\lambda_{i,k,p} = \mathbf{m}_i^t \mathbf{A}_{k,p} \mathbf{m}_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_p \mathbf{m}_i)(\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i)}{\lambda_i - \lambda_j} \quad \text{com } \lambda_i \neq \lambda_j \quad (3.40)$$

No caso em que  $\mathbf{A}(\mathbf{c})$  é uma função afim, tem-se

$$\mathbf{A}_{k,p} = 0 \quad (3.41)$$

e (3.40) torna-se

$$\lambda_{i,k,p} = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_p \mathbf{m}_i)(\mathbf{m}_j^t \mathbf{A}_k \mathbf{m}_i)}{\lambda_i - \lambda_j} \quad \text{com } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (3.42)$$

Estas equações serão úteis na formulação e solução do problema de valor próprio inverso e em caso específico quando aplicado à matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados.

#### 4 PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO APLICADO NA OTIMIZAÇÃO DE PESOS EM LEVANTAMENTOS GEODÉSICOS

Considere-se a matriz dos coeficientes das equações normais

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}_u)^t \mathbf{P}_n \mathbf{A}_u \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{A}_u$  é matriz de planejamento conhecida e  $\mathbf{P}$  é matriz diagonal tomada como incógnita.

A matriz  $\mathbf{N}$  assim definida é função dos elementos diagonais da matriz  $\mathbf{P}$ , por

exemplo, sejam as matrizes  ${}_3\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e  ${}_3\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & p_2 & \\ & & p_3 \end{bmatrix}$ .

Substituindo essas matrizes em (4.1) resulta

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} p_1 + p_3 & -p_3 \\ -p_3 & p_2 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

A matriz  $\mathbf{N}$  é função dos elementos diagonais de  $\mathbf{P}$  e escreve-se  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ . As modificações nos elementos diagonais de  $\mathbf{P}$  agem diretamente sobre a magnitude dos valores próprios da matriz  $\mathbf{N}$  e como conseqüência em  $\mathbf{Q}_x$ , os quais são usados em análises da qualidade de redes geodésicas. Com isso podem ser formuladas condições para tais valores próprios e determinar os pesos que levam a (4.2) a apresentar características ótimas em termos de valores próprios.

##### 4.1 CONDIÇÕES PARA OTIMIZAÇÃO DE PESOS COM BASE EM VALORES PRÓPRIOS

O problema de valor próprio inverso quando aplicado na otimização de redes geodésicas responde a seguinte questão: quais pesos devem ser atribuídos às observações para que  $\mathbf{Q}_x$  apresente valores próprios pré-determinados?

Para isto consideram-se os valores próprios  $\lambda_i$  de  $\mathbf{N}$  e  $\mu_i$  de  $\mathbf{Q}_x$ , onde pela (2.126) vale a seguinte relação,

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \text{ com } \mu_i \neq 0. \quad (4.3)$$

Com base em (4.3) é formulada a otimização relativa à matriz dos coeficientes das equações normais. Mediante observação de (4.3), verifica-se que um aumento no valor próprio  $\lambda_i$  de  $\mathbf{N}$  corresponde a um decréscimo no valor próprio  $\mu_i$  de  $\mathbf{Q}_x$ , ou seja, para  $\mu_i$  tendendo para seu valor máximo tem-se  $\lambda_i$  tendendo para seu valor mínimo. Como critério para a qualidade de uma rede ou como função objetivo em uma otimização pode ser exigido, por exemplo, que os critérios de otimalidade (ver seção 2.7) sejam satisfeitos.

Baseando-se nos critérios de otimalidade e no teste de igualdade de valores próprios são formuladas as condições, em um sentido ótimo, para os valores próprios de  $\mathbf{Q}_x$ .

A formulação e solução do problema de valor próprio inverso têm o seu desenvolvimento baseado nas expressões diferenciais dos valores próprios e vetores próprios expressos em função dos pesos das observações.

#### 4.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR PRÓPRIO INVERSO APLICADO ÀS EQUAÇÕES NORMAIS

Seja  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  uma matriz de dimensão  $u \times u$ , real e simétrica, cujos elementos são funções do vetor  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j \ \dots \ p_n]^t$ ,  $p_j$  é o peso atribuído a  $j$ -ésima observação. Tem-se como valores próprios e vetores próprios de  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$   $\lambda(\mathbf{p}) = [\lambda_1(\mathbf{p}) \ \lambda_2(\mathbf{p}) \ \dots \ \lambda_i(\mathbf{p}) \ \dots \ \lambda_u(\mathbf{p})]^t$  e  $\mathbf{m}_1(\mathbf{p}), \mathbf{m}_2(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{m}_u(\mathbf{p})$  respectivamente. O problema consiste em determinar o vetor  $\mathbf{p}$  tal que a matriz  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  apresente valores próprios pretendidos  $\lambda^* = [\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \dots \ \lambda_i^* \ \dots \ \lambda_u^*]$ .

Para determinar o vetor de pesos  $\mathbf{p}$  que conduz (4.1) a ter os valores próprios pretendidos tem-se a seguinte situação: em geral devem existir pesos  $\mathbf{p}$  tais que

$$F(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}) - \lambda_1^* \\ \lambda_2(\mathbf{p}) - \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_i(\mathbf{p}) - \lambda_i^* \\ \vdots \\ \lambda_u(\mathbf{p}) - \lambda_u^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Para cada vetor de pesos  $\mathbf{p}$ , em geral, existe um conjunto de valores próprios  $\lambda_i(\mathbf{p})$ . Então, qual vetor de pesos  $\mathbf{p}$  conduz (4.4) a zero ou próximo de zero sob um critério de aproximação pré-estabelecido?

A obtenção dos valores próprios pretendidos requer a solução do sistema de equações não-lineares (4.4).

#### 4.2.1 Solução do Problema de Valor Próprio Inverso pelo Método de Newton

Uma das técnicas sugerida por FRIEDLAND et al (1987, p. 639) para solucionar o sistema (4.4) é através do Método de Newton.

O método de Newton é, na sua forma básica, um método iterativo local, no sentido que se pode garantir convergência a uma solução usando como ponto inicial uma aproximação suficientemente boa, isto é, deve-se partir de uma vizinhança da solução. Se o ponto inicial não for suficientemente bom não haverá garantia de solução. Em geral afirmações no sentido que o ponto inicial está próximo da solução tem sentido teórico pois, em geral, não se conhece a priori a solução e nem sequer de quão próximo pode-se estar desta solução. Portanto, partindo-se de um ponto inicial, o método pode convergir ou não.

A aplicação do método de Newton na solução de um problema de valor próprio inverso, aplicado ao problema dos pesos das observações geodésicas tem seu desenvolvimento baseado nas seguintes considerações.

A partir da relação de normalidade (3.8) tem-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) = 1, \quad (4.5)$$

em que  $\mathbf{m}_i(\mathbf{p})$  é o vetor próprio, em função de  $\mathbf{p}$ , correspondente ao valor próprio  $\lambda_i(\mathbf{p})$ .

Multiplicando (4.5) por  $\lambda_i(\mathbf{p})$  tem-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \lambda_i(\mathbf{p}) \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) = \lambda_i(\mathbf{p}). \quad (4.6)$$

Aplicando a definição de valor próprio (2.36) na (4.6) obtém-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \mathbf{N}(\mathbf{p}) \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) = \lambda_i(\mathbf{p}). \quad (4.7)$$

Escrevendo  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  na forma de produto,

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{a}_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$  escrita na forma de vetor coluna e  $p_j$  é um escalar e corresponde ao  $j$ -ésimo peso atribuída a  $j$ -ésima observação.

Substituindo a (4.7) em (4.6) tem-se

$$\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \right] \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) = \lambda_i(\mathbf{p}). \quad (4.9)$$

Inserindo (4.9) no sistema de equações (4.4) vem

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^t(\mathbf{p}) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \right] \mathbf{m}_1(\mathbf{p}) - \lambda_1^* \\ \mathbf{m}_2^t(\mathbf{p}) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \right] \mathbf{m}_2(\mathbf{p}) - \lambda_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \right] \mathbf{m}_i(\mathbf{p}) - \lambda_i^* \\ \vdots \\ \mathbf{m}_u^t(\mathbf{p}) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \right] \mathbf{m}_u(\mathbf{p}) - \lambda_u^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

O  $k$ -ésimo passo do método de Newton é definido como (RUGGIERO e LOPES, 1996, p.198; MARTINEZ e SANTOS, 1995, p. 75):

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}_k) d\mathbf{p}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{p}_k), \quad (4.11)$$

em que

$\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)$  é a matriz de Jacobi ou a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_k)$  que avaliada no  $k$ -ésimo passo  $\mathbf{dp}_k$  fica

$$\mathbf{dp}_k = \begin{bmatrix} p_1^{k+1} - p_1^k \\ p_2^{k+1} - p_2^k \\ \vdots \\ p_i^{k+1} - p_i^k \\ \vdots \\ p_n^{k+1} - p_n^k \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

e o segundo membro da igualdade (4.11) fica

$$-\mathbf{F}(\mathbf{p}^v) = \mathbf{d}\lambda = - \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{p}_k) - \lambda_1^* \\ \lambda_2(\mathbf{p}_k) - \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_i(\mathbf{p}_k) - \lambda_i^* \\ \vdots \\ \lambda_u(\mathbf{p}_k) - \lambda_u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^* - \lambda_1(\mathbf{p}_k) \\ \lambda_2^* - \lambda_2(\mathbf{p}_k) \\ \vdots \\ \lambda_i^* - \lambda_i(\mathbf{p}_k) \\ \vdots \\ \lambda_u^* - \lambda_u(\mathbf{p}_k) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Para aplicação do método de Newton faz-se uso das derivadas parciais de  $\lambda_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$  que são denominadas vetor gradiente de  $\lambda_i(\mathbf{p})$  e será denotado doravante por  $\nabla\lambda_i(\mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, u$ :

$$\nabla\lambda_i(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial\lambda_i(\mathbf{p})}{\partial p_1}, \frac{\partial\lambda_i(\mathbf{p})}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial\lambda_i(\mathbf{p})}{\partial p_n} \right)^t \quad (4.14)$$

A formação da matriz Jacobiano de  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  requer-se a diferenciação da a (4.9) em relação a  $p_j$ . Assim

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial p_j} = \mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \mathbf{a}_j^t \mathbf{m}_i(\mathbf{p}), \quad (4.15)$$

em que  $\mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^t \mathbf{m}_i(\mathbf{p})$ .

Rescrevendo a (4.15) com essa consideração tem-se

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = \left[ \mathbf{m}_i^t(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right]^2 \quad i = 1, 2, \dots, u \quad e \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

e a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  torna-se

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \nabla \lambda_1(\mathbf{p})^t \\ \nabla \lambda_2(\mathbf{p})^t \\ \vdots \\ \nabla \lambda_u(\mathbf{p})^t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_n)^2 \\ (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_n)^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A (4.11) considerando a (4.17), (4.12) e (4.13) escreve-se:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_j)^2 & \dots & (\mathbf{m}_1^t \mathbf{a}_n)^2 \\ (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_j)^2 & \dots & (\mathbf{m}_2^t \mathbf{a}_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{m}_i^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_i^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_i^t \mathbf{a}_j)^2 & \dots & (\mathbf{m}_i^t \mathbf{a}_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_1)^2 & (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_2)^2 & \dots & (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_j)^2 & \dots & (\mathbf{m}_u^t \mathbf{a}_n)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ \vdots \\ dp_j \\ \vdots \\ dp_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ \vdots \\ d\lambda_i \\ \vdots \\ d\lambda_u \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde  $d\lambda_i = \lambda_i^* - \lambda_i^k$ ,  $dp_i = p_i^{k+1} - p_i^k$  e  $\mathbf{a}_j$  representa a  $j$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$  escrita como vetor na forma decoluna e  $k$  representa o passo da iteração. A (4.18) pode ser escrita de forma simplificada como  $d\lambda = \mathbf{U} d\mathbf{p}$ .

Uma iteração do método de Newton consiste nos passos seguintes:

- 1) Escolha do vetor inicial  $\mathbf{p}^0$ , cálculo de  $\mathbf{N}(\mathbf{p}^0)$  e os valores próprios e vetores próprios correspondentes.

Para  $k = 0, 1, 2, \dots$

- 2) Formação de  $\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_k)$  e obter  $d\mathbf{p}_k$  solucionando o sistema

$$[\mathbf{J}(\mathbf{p}_k)] d\mathbf{p}_k = d\lambda.$$

A fim de obter os pesos no  $k$ -ésimo passo da iteração faz-se  $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + d\mathbf{p}_k$

- 3) Cálculo de  $\mathbf{N}(\mathbf{p}_k)$ ,  $\lambda_i(\mathbf{p}_k)$  e  $\mathbf{m}_i(\mathbf{p}_k)$ .
- 4) Como critério de parada tem-se:

Se  $\|\lambda(\mathbf{p}_k) - \lambda^*\| = \|\mathbf{d}\lambda(\mathbf{p}_k)\| \leq \varepsilon$  para o processo iterativo, onde  $\varepsilon$  representa a qualidade da aproximação, dado em um critério de parada estabelecido e  $\|\bullet\|$  é qualquer norma de um vetor.

Como em qualquer processo iterativo, necessita-se estabelecer critérios de parada para se aceitar um ponto  $\mathbf{p}_k$  como aproximação de uma solução  $\mathbf{p}$ . O critério de parada adotado no passo 4 acima é equivalente a verificar se o módulo de  $\mathbf{F}(\mathbf{p}_k)$  é suficiente pequeno.

Outro critério de parada é verificar se  $\|\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k\|$  está próximo de zero, ou seja,  $\mathbf{p}_{k+1}$  é escolhido como aproximação de  $\mathbf{p}$ , por exemplo,  $\|\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k\| < \varepsilon$ .

Com a finalidade de se interromper o processo iterativo, considerando que há divergência, pode ser usado o critério que para algum  $k$ ,  $\|\mathbf{d}\lambda\|$  é maior que uma tolerância permitida, por exemplo  $\|\mathbf{d}\lambda\| > 10^8$ .

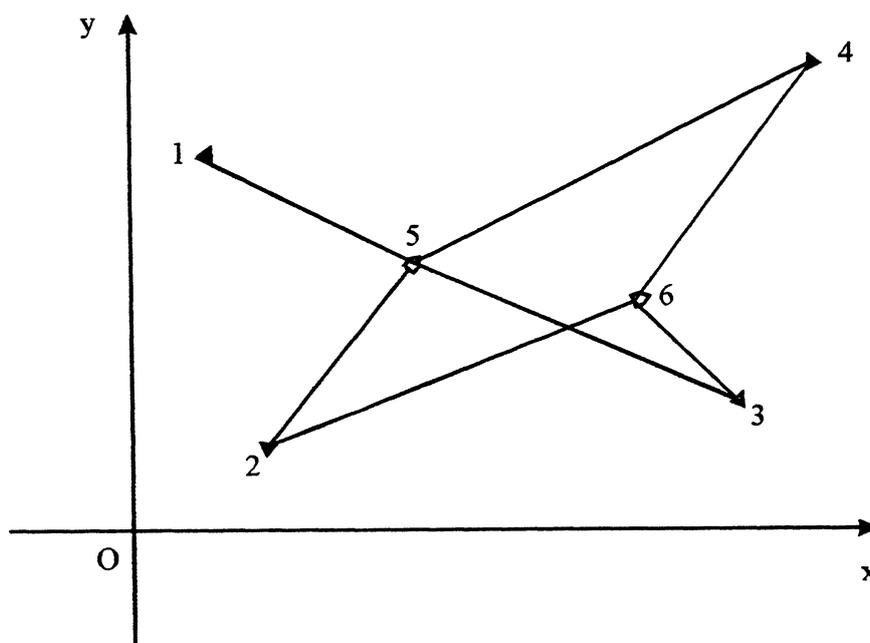
## 5 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

### 5.1 EXPERIMENTO 1

O sistema não-linear dado na (4.10) é influenciado pelo estabelecimento da matriz planejamento  $A$ . Definida a geometria da rede, ou o tipo de observação que será feita, a obtenção da matriz  $A$  é dependente da escolha do vetor dos parâmetros iniciais. Tendo em vista que iterações não são possíveis no planejamento de segunda ordem, verificou-se neste experimento a influência do vetor dos parâmetros iniciais na precisão de uma rede horizontal.

A configuração geométrica da rede é dada na figura 5.1. A rede foi ajustada, pelo método dos mínimos quadrados na forma paramétrica, a partir de 7 observações de distância.

FIGURA 5.1 – REDE HORIZONTAL



As 7 observações de distância foram consideradas de mesma precisão ( $\sigma_i = 1\text{ mm}$ ). As coordenadas dos pontos fixos 1, 2, 3 e 4 (consideradas isentas de erros) e as coordenadas aproximados dos pontos 5 e 6 estão constando na tabela 5.1.

TABELA 5.1 – COORDENADAS HORIZONTAIS I

Ponto	Coordenadas Fixas	
	x (m)	y (m)
1	8	44
2	19	17
3	57	24
4	48	52
Ponto	Coordenadas Aproximadas	
5	26	36
6	44	31

A matriz de covariâncias e as submatrizes que fornecem subsídios para análise do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados e da qualidade da rede estão descritas a seguir.

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ = \begin{bmatrix} 0,4040 & -0,0242 & 0 & 0 \\ -0,0242 & 0,6596 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6323 & -0,1015 \\ 0 & 0 & -0,1015 & 0,7394 \end{bmatrix},$$

As submatrizes que fornecem a situação da acurácia local são:

$$\mathbf{Q}_{x5} = \begin{bmatrix} 0,4040 & -0,0242 \\ -0,0242 & 0,6596 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_{x6} = \begin{bmatrix} 0,6323 & -0,1015 \\ -0,1015 & 0,7394 \end{bmatrix}$$

As matrizes que definem a decomposição espectral completa da matriz  $\mathbf{Q}_x$  (ver equação 2.121) são,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,9956 & -0,0936 & 0 & 0 \\ 0,0936 & 0,9956 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8563 & -0,5166 \\ 0 & 0 & -0,5166 & 0,8563 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} 0,4017 & & & \\ & 0,6619 & & \\ & & 0,5711 & \\ & & & 0,8006 \end{bmatrix}$$

O número de valores próprios fornece a dimensão do hiperelipsóide de confiança. Neste caso são 4, as componentes principais.

Aplicando (2.128), a primeira componente principal é dada por :

$$\mathbf{p}_1 = \sqrt{0,8006} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5166 \\ 0,8563 \end{bmatrix}.$$

A fim de verificar se a rede é homogênea e isotrópica aplicou-se o teste da igualdade de valores próprios cuja hipótese nula é:

$$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 .$$

A estatística  $\chi^2$  ( ver equação 2.139) com  $\nu=3$  e  $b=4$  forneceu o resultado 0,3671 a um nível de significância de 5% e a estatística calculada  $\chi_{9,0.95}^2 = 16,92$ . Da desigualdade  $0,3671 < 16,92$  tem-se que a hipótese nula não é rejeitada e, portanto, a rede é homogênea e isotrópica. Com essa situação as submatrizes que fornecem a acurácia local da rede, apresentam círculos de erros para cada ponto ajustado e para a acurácia global uma hipersfera de erro.

Quando o peso é fixado, a influência do vetor dos parâmetros aproximados  $\mathbf{x}_0$  na qualidade global da rede com iteração e sem iteração está mostrado na tabela 5.2 indicando que no planejamento de segunda ordem necessita-se de estimativas melhoradas para o vetor dos parâmetros iniciais, de forma que os pesos das observações sejam obtidos com o mínimo de influência da matriz planejamento  $\mathbf{A}$ .

TABELA 5.2 – INFLUÊNCIA DE  $x_0$  NA QUALIDADE GLOBAL DA REDE

CRITÉRIO	SEM ITERAÇÃO	COM ITERAÇÃO
$\lambda_{\text{máximo}}$	6,6031	0,8006
Determinante	0,9032	0,1216
Traço	8,5125	2,4354
$\frac{\lambda_{\text{máximo}}}{\lambda_{\text{mínimo}}}$	21,1096	1,993

Estimativas melhoradas para os parâmetros iniciais podem ser obtidas, por exemplo, por transporte de coordenadas, ver por exemplo Santos Jr (2002), com base em observações provisórias ou então extraídas de uma carta. As estimativas para  $x_0$  serão melhoradas após se efetivar o ajustamento com iterações.

Por meio da aplicação da estatística  $\chi^2$  (ver equação 2.139) os valores próprios da situação sem iteração definem uma hiperesfera de erro, fato que ocorre também quando se aplica a iteração. Com o uso dos critérios de optimalidade porém verifica-se que a melhora no vetor dos parâmetros aproximados implica numa melhor concepção da rede.

Decompondo espectralmente a submatriz  $Q_{x5}$  e aplicando a (2.56) tem-se,

$$M = \begin{bmatrix} 0,9956 & -0,0936 \\ 0,0936 & 0,9956 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} 0,4017 & \\ & 0,6619 \end{bmatrix}.$$

as componentes principais são escritas através da equação (2.128) da seguinte forma:

a) primeira componente principal  $p_1 = \sqrt{0,6619} \begin{bmatrix} -0,0936 \\ 0,9956 \end{bmatrix}$ . Analisando as

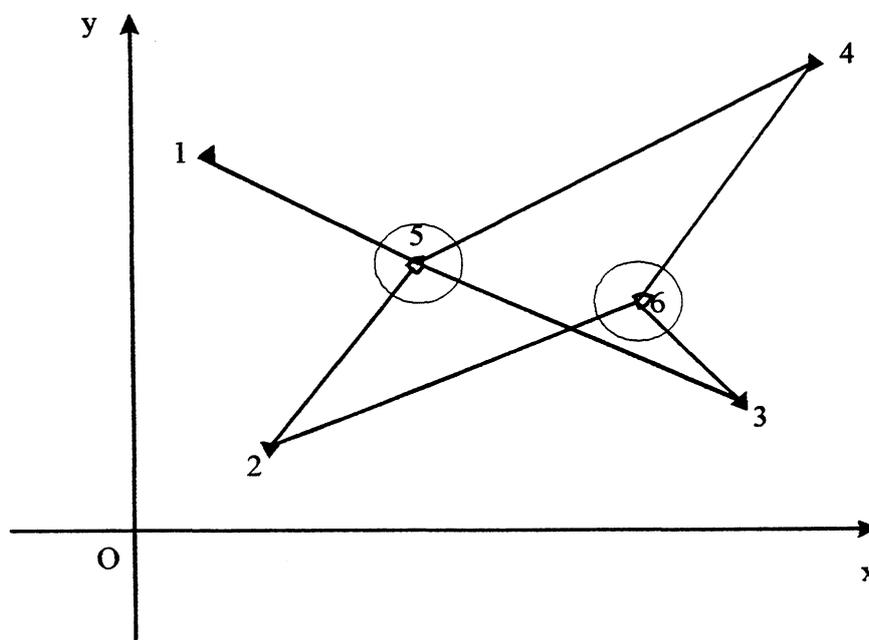
componentes deste vetor (cosseno diretor) observa-se que este encontra-se no segundo quadrante da circunferência trigonométrica com um ângulo de rotação, em relação ao eixo original, igual  $95,37^\circ$ , e comprimento do semi-eixo maior da elipse igual a  $\sqrt{0,6619}$ .

Os parâmetros  $x_5$  e  $y_5$  estão pior determinados na direção  $95,37^\circ$  em relação à base original cuja direção apresenta a variância máxima igual a 0,6619.

b) segunda componente principal  $\mathbf{p}_2 = \sqrt{0,4017} \begin{bmatrix} 0,9956 \\ 0,0936 \end{bmatrix}$ . Analisando as componentes deste vetor (cosseno diretor) observa-se que este se encontra no primeiro quadrante da circunferência trigonométrica com um ângulo de rotação, em relação ao eixo original, igual a  $5,37^\circ$ . Esta direção representa a melhor determinação dos parâmetros com variância mínima igual a 0,4017.

A figura 5.2 mostra a representação geométrica das elipses de erro local, elipses estas que se degeneraram em círculos de erro em vista da aplicação da estatística (2.133).

FIGURA 5.2 – CÍRCULOS DE ERRO LOCAL



As componentes principais se apresentam de acordo com a análise global ou local requerida. A matriz de covariâncias completa permite a análise global do ajustamento enquanto as submatrizes obtidas da matriz de covariâncias completa permitem a análise local da rede, ou seja, pontualmente.

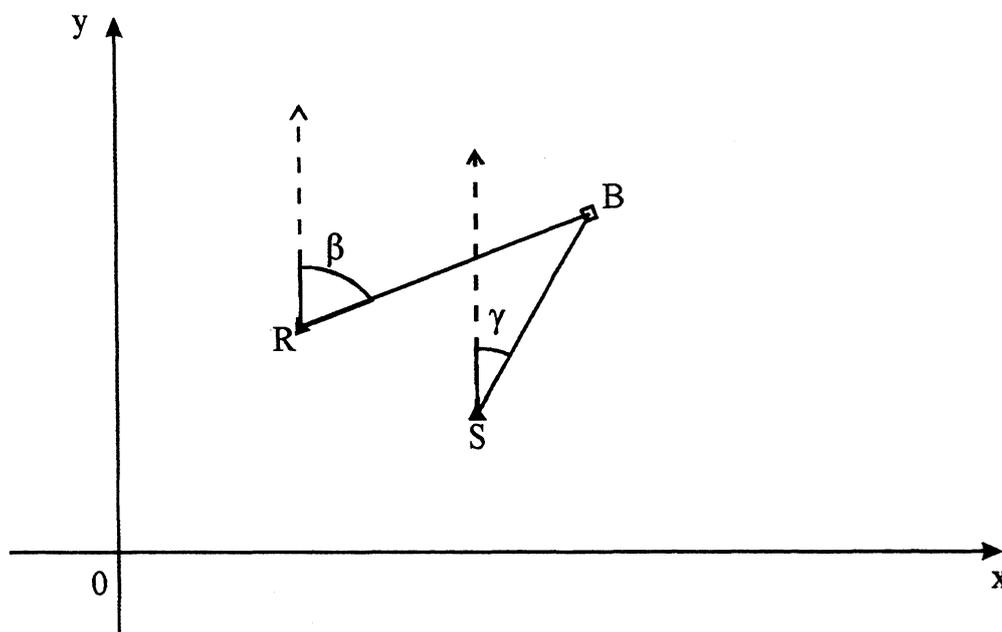
Segundo o teste realizado verifica-se que quando as estimativas são melhoradas para os parâmetros iniciais, melhor é a concepção da rede. Em situações de planejamento recomenda-se “boas estimativas” para os parâmetros iniciais, visto que estes influenciam na obtenção do peso dado a modificação, que estes efetuam, na matriz planejamento A.

## 5.2 EXPERIMENTO 2

Neste experimento estuda-se a otimização dos pesos das observações geodésicas com o problema de valor próprio inverso aplicado à matriz das equações normais. O problema de valor próprio inverso será aplicado ao projeto para ajustar as coordenadas cartesianas de um ponto a partir de quatro observações. Avaliar-se-á a solução na obtenção dos pesos pelo processo iterativo utilizando valores iniciais  $\mathbf{p}^0$  distintos.

A representação geométrica do planejamento é dada na figura 5.3, sendo as observações planejadas constituídas de duas observações de distância e duas de direção.

FIGURA 5.3 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE UM PONTO EM COORDENADAS CARTESIANAS



Os valores próprio máximo e mínimo tolerados para o ponto B são  $\lambda_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$  e  $\lambda_{\text{mín}} = \sigma_{\text{mín}}^2 = 0,000064 \text{ m}^2$  sendo estes os valores próprios pretendidos para a matriz de covariâncias das coordenadas do ponto A.

As coordenadas conhecidas dos pontos R e S e as coordenadas aproximadas do ponto A são dados na tabela 5.3.

TABELA 5.3 – COORDENADAS HORIZONTAIS II

Ponto	Coordenadas	
	x (m)	y (m)
R	200	500
S	400	300
Ponto	Coordenadas aproximadas	
B	600	582

A matriz de planejamento  $\mathbf{A}$  é obtida das derivadas parciais das equações de observação (Apêndice 1), avaliadas nas coordenadas aproximadas do ponto A. Para a rede representada pela figura 5.3 é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,97963 & 0,20082 \\ 0,57850 & 0,81568 \\ 0,00049 & -0,00240 \\ 0,00236 & -0,00167 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se que a matriz dos coeficientes das equações normais apresente os valores próprios  $\lambda_1 = 15625$  e  $\lambda_2 = 10000$ , os quais são obtidos através da relação 4.3.

O sistema de equações não-lineares, para este caso, é

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^t(\mathbf{p})\mathbf{N}(\mathbf{p})\mathbf{m}_1(\mathbf{p}) - 15625 \\ \mathbf{m}_2^t(\mathbf{p})\mathbf{N}(\mathbf{p})\mathbf{m}_2(\mathbf{p}) - 10000 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Na aplicação do método de Newton, dois pesos iniciais distintos são escolhidos com a finalidade de buscar a solução para o valor próprio pretendido.

A escolha dos pesos iniciais deu-se de forma aleatória com intuito de verificar soluções distintas para o mesmo planejamento.

O peso inicial dado é

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 879878787 & & & \\ & 7944578789 & & \\ & & 1023639948 & \\ & & & 5417483453 \end{bmatrix}.$$

A solução obtida com  $\|d\lambda\| < 10^{-8}$  foi

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2316,29681 & & & \\ & 16206,36005 & & \\ & & -1225051773,88439 & \\ & & & 2280842996,20493 \end{bmatrix}$$

que apresentou dois valores negativos para os pesos. Neste caso a recomendação é que se escolha um novo peso inicial. Escolheu-se então,

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

e a solução obtida com  $\|d\lambda\| < 10^{-8}$  foi,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6892,5712 & & & \\ & 9769,9167 & & \\ & & 507262383,0921 & \\ & & & 707580180,6211 \end{bmatrix}.$$

A primeira solução com dois pesos negativos, não tem sentido prático, tendo em vista a definição de peso dada pela relação (2.104), onde  $\Sigma_{\ell_b}$  é uma matriz de covariâncias. Então, a melhor solução, do ponto de vista prático, entre as duas é a segunda, pois possibilita com a inversão da matriz dos pesos,  $\mathbf{P}$ , o cálculo da variância de cada observação planejada. A precisão requerida para cada observação é mostrada na tabela 5.4.

TABELA 5.4 – PRECISÃO OBTIDA COM A INVERSÃO DA MATRIZ  
DOS PESOS

<b>observação planejada</b>	<b>precisão</b>
<b>distância</b>	<b>(milímetros)</b>
R-B	1,20
S-B	1,01
<b>direção</b>	<b>precisão</b>
	<b>(segundos)</b>
$\beta$	9,16
$\gamma$	7,75

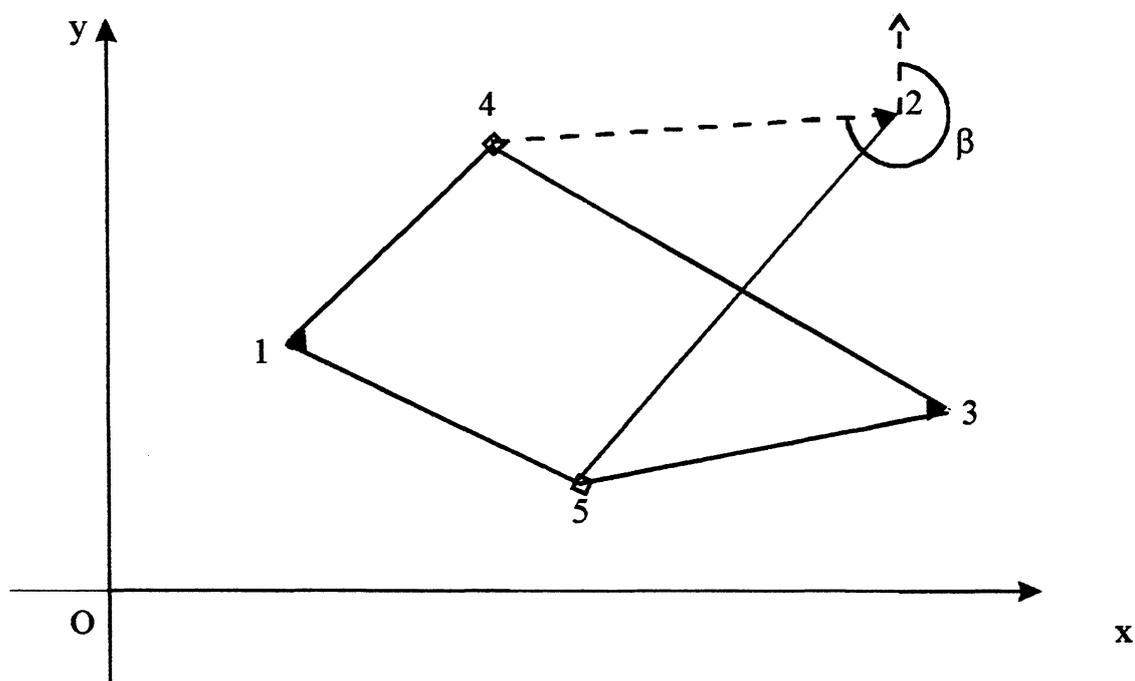
Para a determinação de diferentes soluções, pode-se escolher diferentes valores iniciais para  $\mathbf{p}^0$ . A obtenção de diferentes soluções pode ser utilizada para se evitar pesos negativos, como exposto no experimento acima.

### 5.3 EXPERIMENTO 3

Neste experimento, a otimização dos pesos será aplicada em uma rede horizontal com o propósito de densificá-la a partir de 3 pontos conhecidos. O projeto prevê dois pontos novos a serem determinados, com precisão previamente estabelecida mantendo as características de homogeneidade e isotropia da rede.

Considera-se o projeto, cuja configuração geométrica é dada na figura 5.4, com os pontos 1, 2 e 3 sendo fixos (considerados isentos de erros) e os pontos 4 e 5 a serem determinados, por meio de cinco observações de distância e uma de direção  $\beta$ .

FIGURA 5.4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO PLANEJAMENTO DE DOIS PONTOS EM COORDENADAS CARTESIANAS



O projeto prevê como valores próprios para a matriz de covariâncias  $\mu_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $\mu_2 = 6,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $\mu_3 = 10^{-4} \text{ m}^2$  e  $\mu_4 = 1,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  e ainda que a rede apresente características de homogeneidade e isotropia.

As coordenadas conhecidas para os pontos 1, 2 e 3 e as coordenadas aproximadas dos pontos 4 e 5 são dados na tabela 5.5.

TABELA 5.5 – COORDENADAS HORIZONTAIS III

Ponto	Coordenadas	
	x (m)	y (m)
1	400	500
2	810	900
3	1100	400
Ponto	Coordenadas aproximadas	
4	600	700
5	700	300

A matriz planejamento  $A$  é definida pelo tipo de observação que será feita, representada pela sua equação de observação e as coordenadas aproximadas, a qual para a rede representada na figura 5.4 é obtida pela equação (2.104), após serem determinadas as equações de observação (ver Apêndice 1).

$$A = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8320 & -0,5547 \\ 0 & 0 & -0,9701 & -0,2425 \\ -0,8575 & 0,5145 & 0 & 0 \\ -0,0024 & 0,0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1803 & -0,9836 \end{bmatrix}.$$

A condição de homogeneidade e isotropismo pode ser aplicada na fase de planejamento, visto que a estatística  $\chi^2$  (ver equação 2.139) é dependente dos valores próprios pretendidos para a matriz de covariâncias e o número de graus de liberdade definido pelo projeto da rede.

A condição de homogeneidade e isotropismo é testada com a aplicação da estatística  $\chi^2$  (ver equação 2.139) com  $\nu = 2$ ,  $b = 4$  e  $\alpha = 5\%$ , cuja hipótese nula é

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4,$$

da qual resulta

$$\chi^2 = 0,51 \text{ e } \chi_{9,0,95}^2 = 16,92;$$

tem-se que

$$\chi^2 < \chi_{9,0,95}^2.$$

A condição de homogeneidade e isotropismo não é rejeitada a um nível de confiança de 95%.

Na aplicação do problema de valor próprio inverso, os valores próprios pretendidos para a matriz dos coeficientes das incógnitas determinados pela relação 4.3 são  $\lambda_1 = 20000$ ,  $\lambda_2 = 15625$ ,  $\lambda_3 = 10000$  e  $\lambda_4 = 8000$ .

Os pesos obtidos com a aplicação do problema de valor próprio inverso são mostrados na tabela 5.6.

TABELA 5.6 – PESOS OBTIDOS COM A OTIMIZAÇÃO

<b>Observações planejadas distâncias</b>	<b>pesos</b>
1-4	17758,883
1-5	5978,827
3-5	5975,374
3-4	9849,763
5-2	6045,798
<b>direção</b>	<b>peso</b>
2-4	674175376,357

Os resultados apresentados indicam que somente duas observações (1-4 e 3-4), necessitam uma precisão melhor comparativamente com as demais. A matriz dos pesos obtida como solução do problema de valor próprio inverso representa a qualidade das observações, que devem ser obtidas no levantamento. A precisão a ser alcançada para cada observação é definida com a inversão da matriz dos pesos  $\mathbf{P}$ , e esta exposta na tabela 5.7, visto a definição de peso dada pela relação (2.104).

TABELA 5.7 – PRECISÃO REQUERIDA PARA AS OBSERVAÇÕES

<b>Observação planejada</b>	<b>precisão</b>
<b>distâncias</b>	<b>(milímetros)</b>
1-4	7,50
1-5	12,93
3-5	12,94
3-4	10,08
5-2	12,86
<b>distâncias</b>	<b>precisão</b>
	<b>(segundos)</b>
2-4	7,94

A matriz de covariâncias obtidas com os pesos otimizados é

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 5,0209 & -0,16977 & 0 & 0 \\ -0,16977 & 6,3791 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0,35142 \\ 0 & 0 & 0,35142 & 12 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

cujos valores próprios e vetores próprios são, respectivamente,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4,999 & & & \\ & 6,4 & & \\ & & 10 & \\ & & & 12,5 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,9950 & -0,1222 & 0 & 0 \\ -0,1222 & 0,9950 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9899 & -0,1420 \\ 0 & 0 & 0,1420 & -0,9899 \end{bmatrix}$$

admitindo o critério de parada do método de Newton como  $\|d\lambda\| < 10^{-8}$ .

Na tabela 5.8 são apresentadas as situações dos semi-eixos maiores e menores e também a orientação das elipses dos erros para as submatrizes obtidas da matriz de covariâncias completa.

TABELA 5. 8 – ELIPSES DE ERRO LOCAL

<b>Ponto</b>	<b>Semi-eixo maior (mm)</b>	<b>Semi-eixo menor (mm)</b>	<b>Orientação do semi-eixo maior (<sup>o</sup>)</b>
4	8	7	97,018
5	11,2	10	81,838

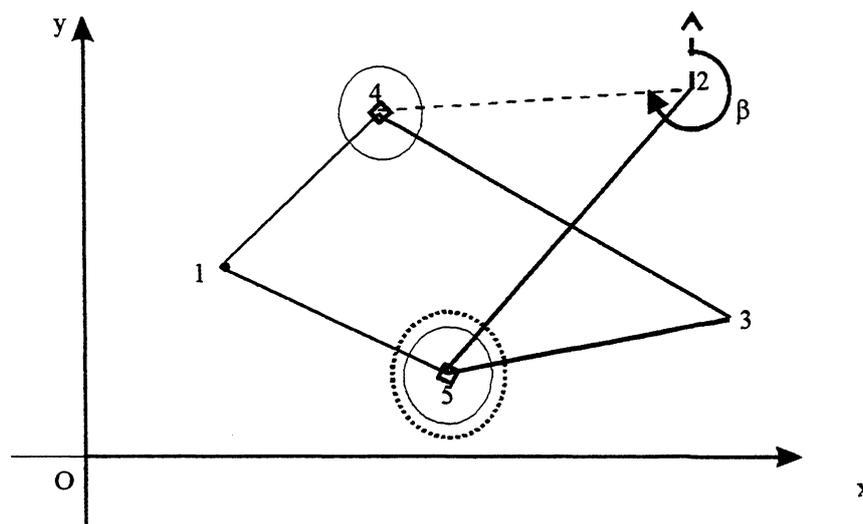
Os resultados obtidos concordam com a situação pretendida inicialmente para o planejamento, sendo que os desvios padrão, máximo e mínimo, tolerados para os parâmetros podem ser obtidos com os pesos dados na tabela 5.6.

## 5.4 EXPERIMENTO 4

Neste experimento o problema de valor próprio inverso será aplicado para reduzir a forma de fraqueza principal da rede, considerando o projeto dado no experimento 3. Pretende-se reduzir a fraqueza principal da rede  $(\lambda_3, \mathbf{m}_3)$  e  $(\lambda_4, \mathbf{m}_4)$ , referentes ao ponto 5, em torno de 20% , e conseqüentemente melhorar a precisão dela. Aplicando a otimização dos pesos calculam-se os pesos que conduzirão a situação pretendida.

A forma de fraqueza principal da rede é dada pelos maiores valores próprios, que neste caso são  $\mu_3$  e  $\mu_4$  . A figura 5.5 apresenta a representação geométrica da redução da fraqueza principal da rede, onde a elipse pontilhada representa a situação atual da precisão e as elipses não pontilhadas a situação pretendida na otimização.

FIGURA 5.5 – REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE



A matriz de covariâncias deve apresentar após a otimização os valores próprios,  $\mu_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $\mu_2 = 6,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ,  $\mu_3 = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2$  e  $\mu_4 = 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Para a otimização dos pesos a fim de alcançar a situação acima descrita, pretende-se que a matriz dos coeficientes das equações normais apresente os seguintes

valores próprios:  $\lambda_1 = 20000$ ,  $\lambda_2 = 15625$ ,  $\lambda_3 = 12500$  e  $\lambda_4 = 10000$ , obtidos com o uso da relação 4.3.

Na aplicação do método de Newton para este experimento os pesos iniciais dados, no processo iterativo, foram os constantes da tabela 5.5.

Os pesos resultantes da aplicação da otimização dos pesos pelo problema de valor próprio inverso, com solução pelo método de Newton estão apresentados na tabela 5.9.

TABELA 5.9 – PESOS OBTIDOS NA REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE

<b>Observações planejadas</b>	<b>pesos</b>
<b>distâncias</b>	
1-4	17758,885
1-5	7473,534
3-5	7469,218
3-4	9849,76
5-2	7557,248
<b>direção</b>	<b>Peso</b>
2-4	674175376,357

Comparativamente com a situação anterior os pesos de três observações, duas de distâncias que são 1-4 e 3-4, e uma de direção não variaram, às quais podem ser atribuídos os mesmos pesos da rede representada pela figura 5.4. Sendo que 3 observações que são 1-5, 3-5 e 5-2 devem ser refeitas com uma precisão melhor do que as anteriores (ver tabela 5.10) devido ao acréscimo dado aos pesos em relação à situação anterior.

A precisão para cada observação, calculada com a inversão da matriz dos pesos obtida no processo de otimização esta mostrada na tabela 5.10.

TABELA 5.10 – PRECISÃO REQUERIDA NA REDUÇÃO DA FRAQUEZA PRINCIPAL DA REDE

<b>Observação planejada</b>	<b>Precisão</b>
<b>distância</b>	<b>(milímetros)</b>
1-4	7,50
1-5	11,57
3-5	11,57
3-4	10,08
5-2	11,50
<b>Direção</b>	<b>Precisão</b>
	<b>(segundos)</b>
2-4	7,94

A matriz de covariâncias obtidas com os pesos otimizados constantes da tabela 5.9, é

$$Q_x = \begin{bmatrix} 5,0209 & -0,16977 & 0 & 0 \\ -0,16977 & 6,3791 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,040 & 0,2811 \\ 0 & 0 & 0,2811 & 9,9597 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

cujos valores próprios e vetores próprios são, respectivamente,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 6,4 & & \\ & & 8 & \\ & & & 10 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

$$M = \begin{bmatrix} -0,9950 & -0,1222 & 0 & 0 \\ -0,1222 & 0,9950 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9899 & -0,1420 \\ 0 & 0 & 0,1420 & -0,9899 \end{bmatrix}$$

adotando-se como critério de parada do processo iterativo como  $\|d\lambda\| < 10^{-8}$ .

Na tabela 5.11 são apresentadas as situações dos semi-eixos maiores e menores e também a orientação das elipses dos erros para as submatrizes obtidas da matriz de covariâncias completa.

TABELA 5.11 – ELIPSES DE ERRO LOCAL COM REDUÇÃO DA FORMA FRACA PRINCIPAL

<b>Ponto</b>	<b>Semi-eixo maior (mm)</b>	<b>Semi-eixo menor (mm)</b>	<b>Orientação do semi- eixo maior ( ° )</b>
4	8	7	97,018
5	10	9	81,838

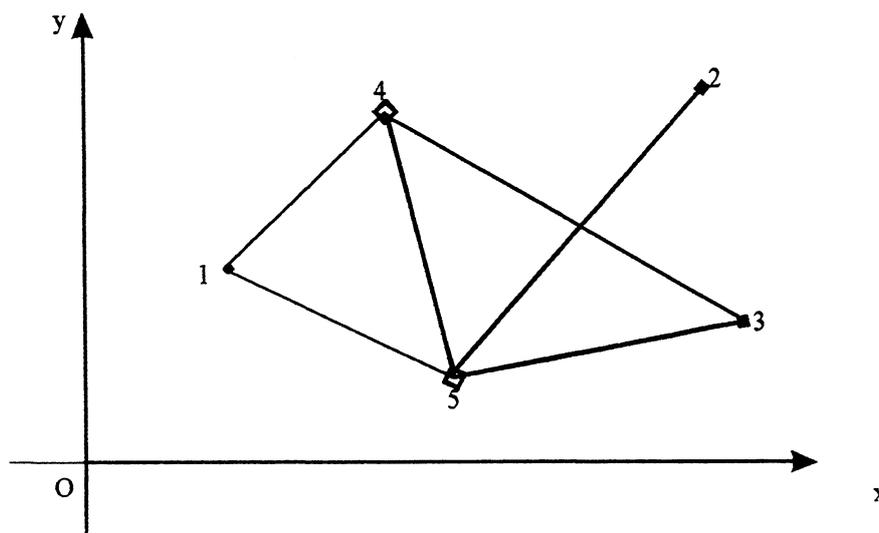
Os pesos obtidos com a otimização dados na tabela 5.9 satisfazem os requerimentos pré-estabelecidos para a rede. E a tabela 5.11 mostra esta situação onde os valores próprios das submatrizes obtidas da matriz de covariâncias calculadas com pesos otimizados da tabela 5.9 apresentam a situação pré-definida no planejamento.

## 5.5 EXPERIMENTO 5

Neste experimento será analisado a influência de uma observação feita entre os dois pontos variáveis, 4 e 5, da rede dada pela figura 5.5. Pretende-se que a rede apresente os valores próprios pretendidos do experimento 4, contudo o projeto de uma observação de direção é substituída por uma de distância entre os pontos 4 e 5.

O novo projeto para a rede é dado na figura 5.6. As coordenadas aproximadas e as dos pontos fixos são as constantes da tabela 5.4.

FIGURA 5.6 – PROJETO MODIFICADO DA REDE



A matriz planejamento  $A$ , obtida após serem determinadas as equações de observação (ver Apêndice 1) que para o projeto atual é,

$$A = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8321 & -0,5547 \\ 0 & 0 & -0,9701 & -0,2425 \\ -0,8575 & 0,5145 & 0 & 0 \\ -0,2425 & 0,9701 & 0,2425 & -0,9701 \\ 0 & 0 & -0,1803 & -0,9836 \end{bmatrix}.$$

A solução obtida após a otimização, cujos pesos iniciais dados foi a unidade e o critério de parada  $\|d\lambda\| < 10^{-8}$ , é dado na tabela 5.12.

TABELA 5.12 – PESOS OBTIDOS NO PROJETO MODIFICADO

<b>Observações planejadas distâncias</b>	<b>pesos</b>
1-4	13173,390
1-5	7947,330
3-5	7471,818
3-4	17013,432
4-5	2826,857
2-5	6865,316

Os resultados na tabela 5.12 indicam que a observação planejada 4-5 é a observação, que comparativamente em relação às demais, é a que menos coopera para a precisão. Este fato decorre desta observação conectar dois pontos variáveis. As observações relacionadas ao ponto 4 apresentam os maiores pesos. Observando o projeto da rede verifica-se que as observações planejadas que se relacionam ao ponto 4 estão em menor número do que as planejadas para o ponto 5. Com isso as observações conectadas ao ponto 4 necessitam maiores pesos.

Com os pesos obtidos no processo de otimização obtém-se a precisão necessária a cada observação para que se alcance a precisão requerida para a rede como mostra a tabela 5.13.

TABELA 5.13 – PRECISÃO PARA AS OBSERVAÇÕES NO PROJETO MODIFICADO

<b>Observações planejadas distâncias</b>	<b>Precisão (milímetros)</b>
1-4	8,71
1-5	11,22
3-5	11,57
3-4	7,67
4-5	18,81
2-5	12,07

Neste projeto a matriz de covariâncias dos parâmetros é

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0,5244 & 0,0572 & 0,0021 & -0,0159 \\ 0,00572 & 0,7662 & -0,02171 & 0,1617 \\ 0,0021 & -0,0217 & 0,7836 & 0,0824 \\ -0,0159 & 0,1617 & 0,0824 & 0,8659 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

A qual apresenta as covariâncias entre os pontos 4 e 5, covariância esta fornecida pela observação de distância entre estes pontos. No projeto anterior as observações relacionadas ao ponto 4 e as relacionadas ao ponto 5 são independentes, fato que não ocorre no projeto atual.

## 6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O objetivo desta pesquisa consistiu em apresentar fundamentos sobre a formulação e a solução do problema de valor próprio inverso aplicado à otimização dos pesos em levantamentos geodésicos.

O planejamento de segunda ordem ou obtenção dos pesos das observações geodésicas, neste trabalho, foi estudado sob o enfoque do problema de valor próprio inverso. Verificou-se a aplicabilidade deste procedimento por meio de experimentos realizados em redes geodésicas horizontais.

Uma das vantagens em se trabalhar com valores próprios pré-estabelecidos é que se pode determinar, em regra, os pesos a partir da definição da precisão pretendida para os levantamentos geodésicos, por exemplo, os definidos em lei. Desta forma a otimização dos pesos com o problema de valor próprio inverso indica por meio da inversão da matriz dos pesos, tipos de instrumentos que poderão ser usados para efetuar as mensurações.

Os critérios de otimalidade da rede integrado com o teste de igualdade de valores próprios formam um conjunto de ferramentas auxiliares à tomada de decisões sobre as características da rede que se pretende estabelecer.

O teste de igualdade de valores próprios permite que as características de homogeneidade e isotropia sejam verificadas previamente ainda na fase de planejamento, visto que a utilização de tal teste é dependente do projeto da rede, o qual inclui o número de graus de liberdade e os valores próprios pretendidos.

No método de Newton aplicado, a tomada do ponto inicial para a solução não garante a priori, se haverá convergência ou não. Se houver convergência, não se sabe também para qual solução o ponto inicial conduzirá e tampouco se o ponto inicial está próximo da solução. Como não há informação a priori se o ponto inicial escolhido conduzirá o problema a uma solução, recomenda-se após a falha na convergência fazer outras tentativas com outros valores iniciais, porém como exposto acima a falha na busca pela solução pode ocorrer sucessivamente. Portanto, para o peso inicial tomado na busca da solução do problema de valor próprio inverso, o método de Newton não garante a convergência para a solução.

Recomenda-se para trabalhos futuros, a aplicação de métodos globalmente convergentes, a fim de solucionar o problema de valor próprio inverso, visto que independem do ponto inicial utilizado como aproximação da solução.

As observações que se apresentam, a partir de uma otimização, com pesos pequenos têm um menor significado quanto à realização da precisão pretendida valendo também para observações com pesos negativos. STOPAR (2001) propõe a eliminação das observações com pesos negativos, condicionadas ao número de graus de liberdade, refazendo a otimização e desconsiderando-as do planejamento inicial.

Para evitar pesos negativos recomenda-se ainda como critério adicional à otimização a controlabilidade das observações representadas pelo seu número de redundância, visto que estas são dependentes dos pesos das observações.

Nos experimentos realizados pode-se ainda extrair as seguintes conclusões:

Quando a geometria de uma rede é fixada, caso do planejamento de segunda ordem, a precisão dela é função do vetor dos parâmetros iniciais. Como mostra o experimento 1, necessita-se de estimativas melhoradas para os parâmetros iniciais a fim de se obter os pesos em um procedimento de otimização.

Ao se aplicar o problema de valor próprio inverso na matriz das equações normais deve-se utilizar valores iniciais  $p^0$  que não conduzam à solução com pesos negativos. Ao se obter pesos negativos em uma solução recomenda-se arbitrar outros valores iniciais  $p^0$  a fim de buscar soluções distintas para os valores próprios pretendidos.

O problema de valor próprio inverso se comporta muito bem no planejamento e na configuração geométrica para garantir a densificação de redes com precisão pré-estabelecidas como se comprovou no experimento 3.

No experimento 4 comprovou-se a aplicabilidade da metodologia para melhorar a rigidez de redes a fim de atender situações pré-definidas no planejamento.

No experimento 5 é mostrado que a inserção de observações entre pontos variáveis pode não contribuir na precisão de uma rede, visto que os extremos destas observações não apresentam rigidez geométrica.

Com base nos experimentos realizados, pode-se ainda concluir que a otimização de pesos com o problema de valor próprio inverso pode ser aplicado em situações onde se faz necessário definir a qualidade do ajustamento antes de se realizar qualquer observação na rede. Estas aplicações estendem-se ainda a redes de monitoramento e as redes de controle que necessitam de levantamentos em épocas diferentes.

## REFERÊNCIAS

CHRZANOSWKI, A.(1977). **Design and erros analysis of surveying projects**. Lectures Notes. v. 47, Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick.

CROSS, P. A.; THAPA, T. (1979). The optimal design of levelling networks . **Survey Review**, v. 25, n. 192, p. 68-79.

DALMOLIN, Q. (2002). **Ajustamento por mínimos quadrados**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná. CPCG, 176 pp.

DEREN, L.; YIONGQIAN, Z. (1991). Otimization and design of geodetic networks in consideration of accuracy and reliability. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 8, p. 48-488.

DUPRAZ, H. ; NIEMEIER, W. (1981). **Beurteilungskriterien für Geodätischer Netze**. In: Beiträge zum II. Internationalen Symposium über Deformationsmessungen mit Geodätischen Methoden. Bonn 25-28. September 1978. Herausgegeben von Ludger Hallermann, Bonn. Stuttgart: Wittwer, S., 386-400.

FRIEDLAND,S.; NOCEDAL, J.; OVERTON, M. L. (1987). The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. **SIAM J. Numer. Anal.**,v. 24, n. 3, p. 634-667.

GARNÉS, S. J. A. (2001). **Resolução das ambigüidades GPS para linhas de base curta: análise dos algoritmos de otimização**. Curitiba, 2001. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná

GEMAEL, C.(1994). **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

GRAFAREND, E. W. ; SANZO F. (1985). **Optimization and design of geodetic networks**. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio

JACKSON, J. E. (1991). **A user's guide to principal componentes**. New York. J. Wiley.

JÄGER, R. (1988). Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 342.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. (1998). **Applied multivariate statistical analysis**. 4<sup>th</sup> ed. Upper Saddle River: Praticce Hall.

KUANG, S. (1996). **Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications**. Chelsea: Ann Arbor Press.

KALTENBACH, H. (1992). Optimierung geodätischer Netze mit spektralen Zielfunktionen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 393.

LANCASTER, P. (1964). On eigenvalues of matrices dependent on a parameter. **Numerische Mathematik**, n. 6, p. 377-387.

LEON, J. L. (1999). **Álgebra linear com aplicações**. 4<sup>a</sup> edição. São Paulo: Ed. LTC.

MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. (1995). **Métodos computacionais de otimização**. In: Colóquio Brasileiro de Matemática, 20, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada . 24-28 julho, 256 pp.

MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. (1981). **Analysis and adjustment of survey measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold.

MORAES, C. V. (2001). **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. Curitiba. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

NIEMEIER, W. (1982). **Principal component analisys and geodetic networks – some basic considerations**. In: BORRE, K; WELSCH, W. M. (Hrsg.): Proceedings Survey Control Network. Schriftenreihe Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswerh München, n. 7, p. 275-291.

NOCEDAL, J.; OVERTON, M. L. (1983). **Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems**. Lectures Notes in Mathematic. n. 1005, ed. Springer-Verlag, New York-Berlin, p.212-226.

PELZER, H. (1980). Some criteria for the accuracy and the reability of networks. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, p.55-67.

RAO, C. R. ; MITRA, S. K. (1971) **Generalized inverse of matrices and its applications**. New York. J. Wiley.

RUGGIERO, M. A. G.;LOPES, V. L. R. (1996). **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Ed. Makron Books.

SÁ, C. C. P. (1985). **Otimização de observações em redes geodésicas horizontais**. Rio de Janeiro, Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia de Sistemas) – Instituto Militar de Engenharia.

SANTOS JR, G. (2002). **Utilização da integral elíptica para a solução dos problemas direto e inverso da Geodésia**. Curitiba, 2001. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas)- Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

SCHAFFRIN, B.(1981). Some proposals concerning the diagonal second order design of geodetic network. **Manuscripta Geodetica**. Berlin v. 6, p. 303-326

SCHMITT, G. (1997). Spectral analysis and optimization of two dimensional networks. **Geomatics Research Australasia**. n. 67, p. 47-64.

SCHIMITT, G. (1985). Second order design. In: GRAFAREND, E. W. ; SANZO F. (Orgs.). **Optimization and design of geodetic networks**. Spring Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio.

SCHWIEGER, V. (2001). Zur Konstruktion synthetischer Kovarianzmatrizen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart. n. 3, p. 143-150.

STOPAR, B. (2001). Second order design of horizontal GPS net. **Survey Review**, v. 36, n. 279, p. 44-53.

ZURMÜHL, R.(1950). **Matrizen**: eine Darstellung für Ingenieure. Berlin: Springer.

ZHANG, Z.; LI. X. (1990). A new optimization method for monitoring networks based on the sensitivity criterion. **Zeitschrift für Vermessungswesen**. Stuttgart, v. 115, n. 6, p. 247-255.

WELSCH, W. ;HEUNECKE, O. ;KUHLMANN, H. (2000). **Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen**. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie).

## DOCUMENTOS CONSULTADOS

ACKERMANN, F. (1982). Reliability and gross error detection in photogrametric blocks. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, n. 258/5, p. 49-67.

BIEGLER-KÖNIG, F. W. (1981). A newton iteration process for inverse eigenvalue problem. **Numerische Mathematik**. V. 37 p. 349-354.

BAARDA, W. (1967). **Statistical concepts in Geodesy**. Netherlands Geodetic Commision. Publications on Geodesy. New Series, Delft, v. 2, n. 4.

BAARDA, W. (1968). **A testing procedure for use in geodetic networks**. Netherlands Geodetic Commision. Publications on Geodesy. New Series, Delft, v. 2, n. 5.

BENZAIO, T.; SHAORONG, Z. (1995). Optimal design of monitoring networks with prior deformation information. **Survey Review**, Bristol, v. 33, n. 258, p. 231-246.

BERBERAN, A. (1995). Multiple outlier detection. A real case study. **Survey Review**, Bristol, v. 33, n. 255, p. 41-49.

BOLDRINI, J. L. et al. (1978). **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row.

BOLEY, D.; GOLUB, G. H. (1987). A survey of matrix inverse eigenvalue problems. **Inverse Problems**. v. 3, p. 595-622

BRONSON, R. (1993). **Matrizes**. Lisboa: McGaw-Hill.

COSTA NETO, P. L. O. (1977). **Estatística**. 17. reimpressão. São Paulo: E. Blücher.

CROSSILLA, F. (1986). Improving the outlier separability in geodetic networks according to the generalized orthomax criterion. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 11, n. 1, p. 38-47.

CROSSILLA, F. (1982). A criterion matrix for the second order design of control networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 143-157.

CROSSILA, F.; MARCHESINI, C. (1983). Geodetic network optimization for the detection of crustal movements using mekometer. **Boletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 42, n. 3, p.301-315.

DENNIS Jr., J. E.; SCHNABEL, R. B. (1983). **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

DEREN, L.; YONGQIAN, Z. (1991). Optimization and design of geodetic network in consideration of accuracy and reliability. **Allgemeine Vermessung-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 8, p. 27-33.

DING, X.; COLEMAN, R. (1996). Sensitivity analysis in Gauss-Markov models. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 70, n. 8, p. 480-488.

HALD, O. (1976). Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices. **Linear Algebra Applications**. V. 8, p. 63-85.

HAWKINS, D. M. (1974). The detection of errors in multivariate data using principal components. **Journal of American Statistical Association**, v. 69, n. 346, p. 340-344.

HENDERSON, H. V.; SEARLE, S.R. (1979). Vec and vech operators for matrices, with some uses in Jacobians and multivariate statistics. **Canadian Journal of Statistics**, v. 7, n. 1, p. 65-81.

JACKSON, J. E.; MUDHOLKAR, G. S. (1979). Control procedures for residuals associated with principal component analysis. **Technometrics**, v. 21, n. 3, p. 341-349.

JÄGER, R.; KALTENBACH, H. (1990). Spectral analysis and optimization of geodetic networks based on eigenvalue and eigenfunctions. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 15, n. 5, p. 302-311.

KAVOURAS, M. (1982). **On detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Technical Report, n. 87.

MARQUES, J. M. (1994). **O método da análise de componentes principais na detecção e identificação de outliers múltiplos em fototriangulação**. Curitiba, 1994. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas)- Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

MARSHAL, R. A (1989). **Network design and optimization in close range photogrammetry**. Kensington: School of Surveying, University of New South Wales. UNISURV. Report S-36.

PENROSE, R. (1955). On best approximate solutions of linear matrix equations. **Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 52. p 17-19.

SCHEFFÉ, H. (1959). **The analysis of variance**. New York: J. Wiley.

STRANG, G.; BORRE, K. (1997). **Linear algebra, Geodesy and GPS**. Wellesley: Wellesley-ambridge Press.

SUN, J.-G. (1985). Eigenvalues and eigenvectors of a matrix dependent on several parameters. **Journal of Computational Mathematics**, v. 3 p. 351-364.

TOMAN, S.; PLIVIA, J. (1966). The multiplicity of solutions of the inverse secular problem. **Journal of Molecular Spectroscopy**, v. 21. p. 362-371.

VAN MIERLO, J. (1982). Difficulties in defining the quality of geodetic network. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München, **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 259-274.

VANICEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. (1986) **Geodesy: the concepts**. 2<sup>nd</sup> ed. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

WANG, S. G.; CHOW, S. C. (1994). **Advanced linear models: theory and applications**. New York: M. Dekker.

ZAKATOV, P. S. (1997). **Curso de Geodesia superior**. Tradução do original russo de 1976. Madrid: Ribíños-1986.

## APÊNDICES

- APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS  
FÓRMULAS DIFERENCIAIS**
- APÊNDICE 2 – LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS**
- APÊNDICE 3 – MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS  
AJUSTADOS OBTIDA PELA LEI DE PROPAGAÇÃO  
DE COVARIÂNCIAS**

## APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS

O ajustamento pelo Método de Variação de Coordenadas enquadra-se no ajustamento de observações indiretas ou na forma paramétrica. Nele as coordenadas finais dos vértices são obtidas no próprio processo de ajustamento. As incógnitas são as correções a serem somadas às coordenadas provisórias dos vértices.

O método de variação de coordenadas pode ser interpretado como a aplicação da forma paramétrica do método dos mínimos quadrados à triangulação, trilateração ou à combinação de ambos.

As equações de observação, uma para cada observação, assumirão diferentes aspectos de acordo com a natureza da grandeza observada; dessa forma podem existir em um mesmo ajustamento, equações de observação relativas a distâncias, direções, ângulos e azimutes.

As equações de observação no método de variação de coordenadas representam um modelo matemático que envolve as incógnitas, que são as correções às coordenadas provisórias e a diferença entre os valores observados e calculados, de forma geral expressa por

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{i}{i} dx_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{i}{i} dy_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{i}{i} dx_k + \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{i}{i} dy_k + \ell_i^0 - \ell_i^c, \quad (\text{A1.1})$$

onde  $k$  representa o número de vértices,  $\ell_i^0$  valor observado da  $i$ -ésima equação e  $\ell_i^c$  valor correspondente calculado na  $i$ -ésima equação. O resíduo  $v_i$  é decorrente dos erros de observação os quais deverão ser minimizados.

Cada equação reúne, como incógnitas, as correções das coordenadas dos vértices envolvidos: dois vértices no caso de distância, azimute ou direção observada ou três vértices no caso de ângulos. O termo independente de qualquer equação poder representado simbolicamente por

$$\ell_i^0 - \ell_i^c. \quad (\text{A1.2})$$

As equações normais são obtidas como na forma paramétrica, sendo o seu número igual ao número de vértices a determinar.

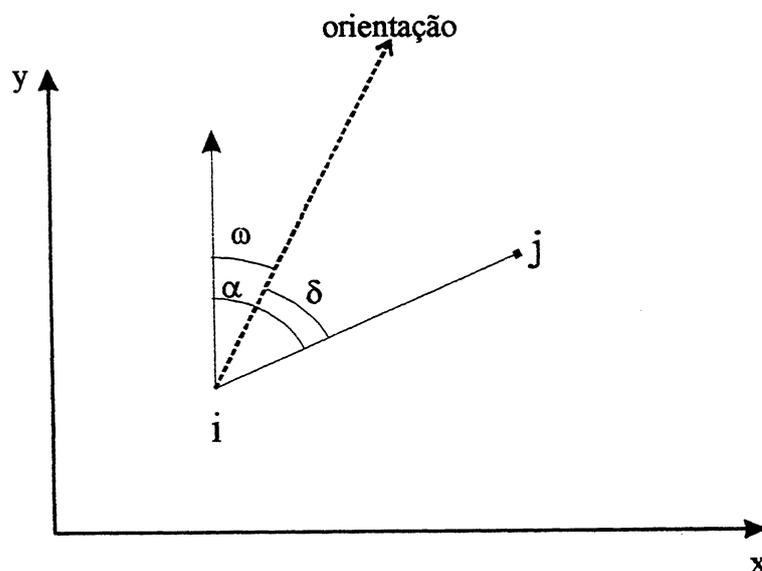
## APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS

As fórmulas diferenciais usadas em Geodésia em termos da variação das coordenadas elipsóidicas podem ser encontradas em GEMAEL (1994, p.216). O desenvolvimento das fórmulas a seguir está em função da variação de coordenadas planas que constam de CHRZANOSWKI (1977, p. 22). As equações de observação apresentadas representam seus respectivos modelos funcionais.

### 1) Observação de distância entre os pontos i e j

Da figura A1

FIGURA A1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO AZIMUTE DA DIREÇÃO i - j



$$s_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (A1.3)$$

e sua expressão diferencial é dada por

$$ds_{ij} = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}} dx_j + \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}} dy_j - \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}} dx_i - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}} dy_i \quad (A1.4)$$

## APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS

2) Observação de azimute entre i e j

Da figura A1 decorre,

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) \quad (\text{A1.5})$$

e a expressão diferencial

$$ds = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_j - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dy_j + \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dy_i - \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_i \quad (\text{A1.6})$$

3) Observação da direção entre i e j

Decorre da figura A1 que,

$$\theta = \alpha - \omega = \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) - \omega \quad (\text{A1.7})$$

diferenciando (A1.7) obtém-se,

$$ds = \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_j - \frac{(y_j - y_i)}{s_{ij}^2} dy_j + \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dy_i - \frac{(x_j - x_i)}{s_{ij}^2} dx_i - d\omega \quad (\text{A1.8})$$

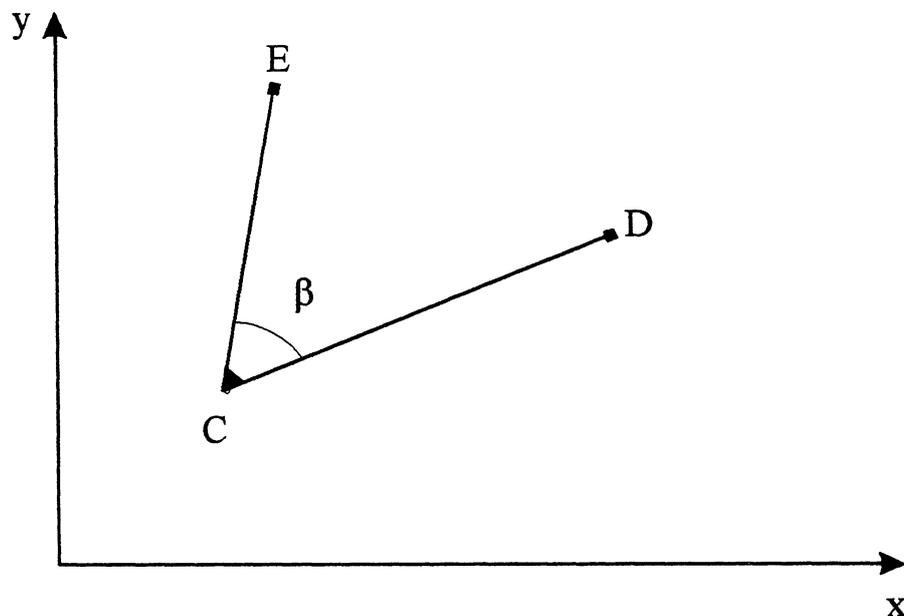
O ângulo de orientação  $\omega$  adiciona uma incógnita a mais, em consequência uma coluna a mais na matriz **A** com coeficiente igual a  $-1$  para cada grupo de direções medidas.

4) Observação de ângulo

Na figura A2, considera-se o ponto E com coordenadas  $(x_e, y_e)$  como ponto visado à esquerda do ponto C, e o ponto D cujas coordenadas é representado por  $(x_d, y_d)$  como ponto visado à direita de C

## APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS

FIGURA A2 – OBSERVAÇÃO DE ÂNGULO



$$\beta = \alpha_d - \alpha_e = \arctan\left(\frac{x_d - x_c}{y_d - y_c}\right) - \arctan\left(\frac{x_e - x_c}{y_e - y_c}\right) \quad (\text{A1.9})$$

e a correspondente expressão diferencial

$$d\beta = \frac{(y_d - y_c)}{s_d^2} dx_d - \frac{(x_d - x_c)}{s_d^2} dy_d - \frac{(y_e - y_c)}{s_e^2} dx_e + \frac{(x_e - x_c)}{s_e^2} dy_e + \left(\frac{(y_e - y_c)}{s_e^2} - \frac{(y_d - y_c)}{s_d^2}\right) dx_c + \left(-\frac{(x_e - x_c)}{s_e^2} + \frac{(x_d - x_c)}{s_d^2}\right) dy_c \quad (\text{A1.10})$$

No caso de equação de observação de ângulo a constante de orientação é eliminada. Este fato decorre que a constante de orientação é a mesma para ambas as direções, resultando em

$$\beta = \alpha_d - \omega - (\alpha_e - \omega). \quad (\text{A1.11})$$

$$\beta = \alpha_d - \omega - \alpha_e + \omega \quad (\text{A1.12})$$

logo

$$\beta = \alpha_d - \alpha_e. \quad (\text{A1.13})$$

## **APÊNDICE 1 – MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS – FÓRMULAS DIFERENCIAIS**

Os coeficientes das equações são os elementos da matriz **A**. Nota-se que se uma observação é feita para um ponto fixo ( considerado isento de erro) na rede, as derivadas parciais de suas coordenadas são nulas e as colunas correspondentes na matriz **A** são omitidas.

## APÊNDICE 2 – LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS

Sejam duas variáveis aleatórias n-dimensionais representadas por  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , ligadas por um modelo linear,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{GX} + \mathbf{C}. \quad (\text{A2.1})$$

Aplicando o operador esperança matemática a ambos os membros tem-se

$$E\{\mathbf{Y}\} = E\{\mathbf{GX} + \mathbf{C}\} \quad (\text{A2.2})$$

usando as propriedades deste operador, dado na seção 2.2, obtém-se

$$E\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{GE}\{\mathbf{X}\} + \mathbf{C}. \quad (\text{A2.3})$$

Da (2.70),

$$\Sigma_y = E\{(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))^t\}. \quad (\text{A2.4})$$

Substituindo  $\mathbf{Y}$  e  $E(\mathbf{Y})$  por seus respectivos valores dado em (A2.1) e (A2.3) na (A2.4), decorre

$$\Sigma_y = E\{[\mathbf{GX} - \mathbf{GE}\{\mathbf{X}\}][\mathbf{GX} - \mathbf{GE}\{\mathbf{X}\}]^t\} \quad (\text{A2.5})$$

$$\Sigma_y = E\{[\mathbf{G}[\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}][\mathbf{G}[\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}]]^t\} \quad (\text{A2.6})$$

$$\Sigma_y = E\{\mathbf{G}[\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}][\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}]\mathbf{G}^t\} \quad (\text{A2.7})$$

$$\Sigma_y = \mathbf{GE}\{[\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}][\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}]\mathbf{G}^t\} \quad (\text{A2.8})$$

onde

$$\Sigma_x = E\{[\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}][\mathbf{X} - E\{\mathbf{X}\}]^t\} \quad (\text{A2.9})$$

a qual representa a matriz de covariâncias da variável aleatória  $\mathbf{X}$ , com isso rescreve-se (A2.8)

$$\Sigma_y = \mathbf{G}\Sigma_x\mathbf{G}^t. \quad (\text{A2.10})$$

Da (A2.10) resulta a interpretação que, obtém-se a matriz de covariâncias da variável aleatória  $\mathbf{Y}$  a partir do conhecimento da matriz de covariâncias da variável aleatória  $\mathbf{X}$ .

A expressão (A2.10) pode ser generalizada para o caso não linear. Para isso considera-se o modelo não linear,

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}). \quad (\text{A2.11})$$

## APÊNDICE 2 – LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS

e linearizando o modelo (A2.11), utilizando o desenvolvimento em série de Taylor, em um ponto  $\mathbf{x}_0$ , e ainda desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois,

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A2.12})$$

Procedendo de forma análoga a anterior obtém-se,

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = \mathbf{D} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^t \quad (\text{A2.13})$$

onde

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_1} & \frac{\partial y_j}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_j}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} \quad (\text{A2.14})$$

na qual  $m$  representa o número de equações e  $n$  o número de incógnitas.

### APÊNDICE 3 – MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS OBTIDA PELA LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS.

Após a aplicação do método paramétrico e a obtenção dos parâmetros, resta calcular a matriz de covariâncias destes parâmetros a fim de analisar os resultados do ajustamento.

Sabe-se que,

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \quad (\text{A3.1})$$

ou

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell \quad (\text{A3.2})$$

substituindo  $\ell$  por (2.106),

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell_0 + (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell_b \quad (\text{A3.3})$$

fazendo

$$\mathbf{C} = \mathbf{x}_0 - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \ell_0 \quad \text{e} \quad (\text{A3.4})$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \quad (\text{A3.5})$$

rescreve-se (A3.3) como

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{G} \ell_b + \mathbf{C}. \quad (\text{A3.6})$$

Tem-se por analogia a (A2.13)

$$\Sigma_{\mathbf{x}_a} = \mathbf{G} \Sigma_{\ell_b} \mathbf{G}^t \quad (\text{A3.7})$$

A expressão da matriz de covariâncias dos parâmetros é obtida após substituição de (A3.5) na (A3.7),

$$\Sigma_{\mathbf{x}_a} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \Sigma_{\ell_b} \left( (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \right)^t \quad (\text{A3.8})$$

Da (2.96) resulta

$$\sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} = \Sigma_{\ell_b} \quad (\text{A3.9})$$

substituí-se (A3.9) na (A3.8)

**APÊNDICE 3 – MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS OBTIDA PELA LEI DE PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS.**

$$\Sigma_{x_a} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \left( (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \right)^t \quad (\text{A3.10})$$

e com a aplicação das propriedades dadas na seção 2.1.1 resulta

$$\Sigma_{x_a} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{A3.11})$$

e para o caso geral, caso em , esta apresentar deficiência de posto

$$\Sigma_{x_a} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \quad (\text{A3.12})$$

com

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v}}{S} \quad (\text{A3.13})$$

e  $S = n - u$  o número de graus de liberdade associado a matriz de covariâncias.

A expressão (A3.12) acima é a matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados.