GERMANO BRUNO AFONSO

DETERMINAÇÃO DOS VALORES DA VARIAÇÃO NA ROTAÇÃO DA TERRA E DO CONSEQÜENTE AFASTAMENTO DA LUA

Tese para obtenção do grau de
"Mestre em Ciências"

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS - U.F.P.

Curitiba, Janeiro de 1977

À meus pais

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Camil Gemael, pelo incentivo e apoio.

- Ao Professor Liu Kai, pela atenção e colaboração.

- Ao Professor Nelson de Luca, pela orientação e dedicação.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

- Às pessoas que, direta ou indiretamente, cooperaram na realização deste trabalho.

O AUTOR

SINÓPSE

Valores experimentais mostram existir diminuição na velocidade de rotação da Terra, devida, principalmente, à força de atração exercida pela Lua, a qual, conseqüentemente, se afasta da Terra.

Este trabalho é um estudo desses fenômenos, baseado em evidências astronômicas e paleontológicas.

RÉSUMÉ D'AUTEUR

Des valeurs expérimentales montrent l'existence d'un ralentissement de la vitesse de rotation de la Terre, dûe surtout à la force d'attraction exercée par la Lune, laquelle, par conséquent, s'écarte de la Terre.

Ce travail constitue une étude de ces phénomènes, basée sur des évidences astronomiques et paléontologiques.

C O N T E Ú D O

INTRODUÇÃO

Através de antigas observações de eclipses, os astrônomos concluiram que havia uma inexplicável aceleração na longitude da Lua |18|.

Halley, em 1695, tentou a explicação sugerindo ser esse fenômeno devido às perturbações de outros planetas sobre a Lua, e falhou. Laplace, em 1787, obteve um prêmio da Academia Francesa por explicar a causa dessa anomalia: em virtude da ação do Sol sobre a excentricidade da órbita lunar, resultava uma perturbação de período muito longo no movimento da Lua, a qual lhe imprimia uma aceleração. Isso, de início, pareceu uma boa solução para o problema. Adams, de Cambridge, em 1853, refazendo os cálculos de Laplace, percebeu que, de acordo com a Teoria Gravitacional, somente metade da anomalia poderia tornar-se inteligível. Para esse valor misterioso da aceleração no movimento da Lua, sem explicação gravitacional, os astrônomos, perplexos, utilizaram uma possível explicação dada, em 1754, por Kant e revivida por Delaunay, em 1865. Ele sugeriu que essa aparente aceleração da Lua era originada pelo atrito devido às marés produzidas pela Lua |10| e |18|.

O princípio da conservação do momento angular requer a compensação de uma perda de momento angular de rotação da Terra por um ganho de momento angular orbital da Lua. Portanto, a velocidade angular da Lua e sua distância relativamente à Terra alteram-se na ocorrência de uma real desaceleração da Lua. Quando os astrônomos falam da aceleração da Lua, Sol, Vênus ou Mercúrio, eles estão comparando as posições desses objetos com posições calculadas baseadas na Teoria Gravitacional, usando unidades de tempo fornecidas pela rotação da Terra. Nessa Teoria, admite-se que a unidade de tempo é constante; no entanto, um retardamento na rotação da Terra pode prolongar a unidade de tempo. A aparente aceleração da longitude lunar é devida ao fato do prolongamento da unidade de tempo ser maior que a real aceleração negativa (desaceleração), devida à variação da órbita da Lua. Observações telescópicas precisas, através dos últimos três ou quatro séculos, fornecem medidas, das diferenças entre as posições calculadas com base na Teoria Gravitacional e as posições observadas |10|.

Outros fatores, tais como a não constância do momento de inércia da Terra e o irregular acoplamento entre o núcleo líquido condutor elétrico e o manto terrestre semi-condutor, também alteram a velocidade de rotação da Terra |18|. No entanto, seus efeitos são insignificantes quando comparados com os do atrito produzidos pelas marés |11|.

Os intervalos de tempo que regulam a vida terrestre são o ano trópico, o mês sinódico e o dia solar. Portanto, a paleontologia aparece como um auxílio nos cálculos e análises desses intervalos de tempo astronômicos, uma vez que os animais de vida marítima, tais como os corais rugosos do Devoniano Médio(370 milhões de anos atrás, aproximadamente),registram esses valores: Ma |13|,em 1958, sugeriu que o crescimento anual das faixas desses corais era passível de identificação. Por sua vez, Wells |19|, em 1963, sugeriu que o crescimento da epiteca, nos corais rugosos do Devoniano Médio, era diário. Ele contou o número de dias correspondentes a um ano e encontrou uma média de 400 dias solares. Uma nova dimensão do problema foi apresentado por Scrutton |20|, em 1964, o qual identificou faixas mensais nesses corais, encontrando 30,6 dias solares no mês do Devoniano Médio.

Enquanto Munk e MacDonald |10|determinaram o torque exercido pela Lua sobre a Terra, através de dados astronômicos, Runcorn |18| obteve o mesmo resultado, através de dados paleontológicos.

Apresentamos, neste trabalho, um método que permite determinar os valores aproximados da duração de um dia, da velocidade média de rotação da Terra e da distância média Terra-Lua, para qualquer período geológico.

O interesse na determinação da duração de um dia no passado geológico da Terra repousa na circunstância disto permitir conhecer melhor as consequências do atrito produzido pelas marés e a história do sistema Terra-Lua.

Este trabalho é um estudo das causas e efeitos decorrentes das interações gravitacionais no sistema Terra-Lua.

No Capítulo I, são feitas algumas considerações sobre o Tempo Universal, o Tempo das Efemérides e o Tempo Atômico. Em virtude de ser um dos objetivos o provar a não constância do Tempo Universal, são mostradas as relações existentes entre dia solar, dia sideral, mês sinódico, mês sideral, ano trópico e ano sideral.

O Capítulo II encerra um pequeno estudo das marés produzidas na Terra pela Lua, levando em consideração causas e efeitos.

No Capítulo III é calculado o torque produzido pela Lua sobre a Terra, através de dois métodos:o primeiro, utilizando dados astronômicos; o segundo, paleontológicos. Demonstra-se, ainda, aí, que os efeitos produzidos pelo Sol e outros planetas sobre a Terra, podem ser negligenciados, neste contexto.

No Capítulo IV apresentamos um método que, baseado nos valores do número de dias solares em um ano e do número de tais dias em um mês sinódico, permite determinar a duração média do dia, a velocidade média de rotação da Terra, em torno de seu eixo, e a distância média Terra-Lua, para esse mesmo ano.

CAPÍTULO I

MEDIDAS DE TEMPO

Baseando-nos na rotação da Terra ao redor de seu eixo, na revolução da Terra em torno do Sol e nas mudanças quânticas nos estados dos átomos, obtemos as três principais espécies de Tempo: o Tempo Rotacional, o Tempo das Efemérides e o Tempo Atômico, respectivamente.

Em função do movimento de rotação da Terra, do movimento orbital da Lua relativamente à Terra e do movimento orbital da Terra em torno do Sol, temos o dia, mês e o ano, respectivamente. No entanto, de acordo com o referencial considerado, esses intervalos de tempo tem durações diferentes, resultando daí a necessidade dos conceitos seguintes:

Dia solar: intervalo de tempo decorrido durante uma rotação da Terra, tendo-se o Sol como referência.

Dia sideral: intervalo de tempo decorrido durante uma rotação da Terra, considerando-se uma estrela fixa, relativamente àquela, como referência.

Mês sinódico: período orbital da Lua, registrado por um observador na Terra (intervalo de tempo entre duas fases da Lua).

Mês sideral: período orbital da Lua, como seria visto por um observador em uma estrela distante, fixa relativamente à Terra.

Ano trópico: intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas da Terra pelo ponto vernal, em sua órbita em torno do Sol.

Ano sideral: intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas da Terra por um ponto fixo, em seu movimento orbital.

A diferença entre o ano sideral e o ano trópico é de apenas 50,2'', existente porque o ponto vernal, em virtude da precessão dos equinócios, desloca-se desse valor, em sentido contrário ao movimento orbital da Terra. Para efeito dos cálculos que seguem, essa diferença pode ser negligenciada e o ano trópico confundido com o ano sideral.

Devemos observar que o período sideral da Lua é o intervalo de tempo que ela necessita para fazer uma volta de 360° em sua órbita, em torno da Terra, e que o período sinódico é o intervalo de tempo em que se vê fechar a órbita, observada da Terra, maior que 360°, uma vez que o movimento de revolução da Terra tem o mesmo sentido que o movimento orbital da Lua. A mesma observação é válida no que concerne aos dias sideral e solar, em virtude do Sol não se comportar como uma estrela fixa,quando visto da Terra, devido ao movimento orbital da Terra ao seu redor.

Os intervalos de tempo que regulam a vida terrestre são o dia solar, o mês sinódico e o ano trópico; mas, nos cálculos dinâmicos, consideram-se os dia, mês e ano siderais, sendo útil, portanto, obter relações entre esses valores.

No transcurso de um ano, um observador registraria n voltas da Terra ao redor de seu eixo, se tomasse o Sol como referência. Considerando uma estrela fixa relativamente à Terra como referência, ele registraria n + 1 voltas, em virtude de, nesse intervalo de tempo, ela ter dado uma volta completa em torno do Sol, no próprio sentido de sua rotação. Conseqüentemente, a amplitude do dia solar é maior que a do dia sideral e o número de dias siderais, em um ano, deve ser maior do que o número de dias solares, de uma unidade. Então, podemos escrever:

$$Y = nt' \qquad (1.1)$$

e

$$Y = (n+1)t, \qquad (1.2)$$

onde:

Y = amplitude do ano;

n = número de rotações da Terra, em um ano, tendo-se o Sol como referência;

t' = amplitude do dia solar;

t = amplitude do dia sideral.

Das equações (1.1) e (1.2), obtemos:

$$t = \frac{t'}{1 + \frac{t'}{Y}} \qquad (.13)$$

e isto nos mostra ser a amplitude do dia sideral muito aproximadamente igual à amplitude do dia solar.

Mutatis mutandis, no transcurso de um ano, a Lua dará N voltas em torno da Terra, para um observador terrestre; para um observador em uma estrela distante e fixa, dará N + 1 voltas, em virtude da Terra girar de uma volta em torno do Sol, nesse mesmo intervalo de tempo e no mesmo sentido do movimento orbital da Lua. Então:

$$Y = NT' \tag{1.4}$$

e

$$Y = (N + 1)\ T, \tag{1.5}$$

onde:

N = número de revoluções da Lua, registrado por um observador na Terra;

T' = amplitude do mês sinódico;

T = amplitude do mês sideral.

Das equações (1.4) e (1.5), obtemos, analogamente:

$$T = \frac{T'}{1 + \frac{T'}{Y}} \tag{1.6}$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$W = NS \tag{1.7}$$

e

$$W = (N + 1)s' \tag{1.8}$$

onde:

W = número de dias solares em um ano;

S = número de dias solares em um mês sinódico;

s' = número de dias solares em um mês sideral.

Nas equações (1.7) e (1.8), obtemos:

$$s' = \frac{S}{1 + \frac{S}{W}} \tag{1.9}$$

A equação (1.9) permite-nos calcular o número de dias solares em um mês sideral, conhecidos o número de dias solares em um mês sinódico e o número de dias solares em um ano. Para calcularmos o correspondente número de dias siderais em um ano, que representaremos por w, basta usarmos a equação:

$$w = W + 1, \tag{1.10}$$

uma vez que a Terra, em um ano, dá uma rotação a mais ao redor de seu eixo, quando o referencial for uma estrela distante e fixa, do que quando o referencial for o Sol.

Tendo em vista que:

$$\frac{Y}{T} = \frac{W}{s'} = \frac{w}{s}, \tag{1.11}$$

onde s representa o número de dias siderais em um mês sideral, teremos:

$$s = \frac{w}{W} s', \tag{1.12}$$

A unidade de tempo é o segundo. Primitivamente, o segundo era definido como sendo a fração 1/86.400 do dia solar médio. A definição exata do "dia solar médio" fora deixada aos cuidados dos astrônomos, porém seus trabalhos demonstraram que o dia solar médio não apresentava as garantias de exatidão requeridas, por causa das irregularidades na rotação da Terra, entre outras causas.

Ilustra isto o fato de que, examinando corais rugosos do Devoniano Médio (aproximadamente 370 milhões de anos atrás), Wells determinou o número de dias (presumidamente solares) em um ano, como sendo igual a 400 e Scrutton encontrou 30,59 dias no mês (presumidamente sinódico). Utilizando as equações (1.9), (1.10) e (1.12), temos 28,5 dias siderais no mês sideral e 401 dias siderais no ano sideral. Para conferir maior precisão à definição da unidade de tempo, a 11a. Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM-1960) sancionou outra definição, fornecida pela União Astronômica Internacional e baseada no ano trópico:

"O segundo é a fração 1/31556925,9747 do ano trópico para 1900 janeiro 0 às 12 horas do tempo das efemérides".

O Tempo Universal e o Tempo das Efemérides, são, ambos determinados por observações astronômicas, que se estendem por diversos dias. Para contornar essa dificuldade e para atender à necessidade de um melhor padrão de tempo, têm sido desenvolvidos os relógios atômicos em diversos países, usando-se a frequência periódica de emissão das ondas como padrão. Dos muitos átomos e moléculas que podem ser usados teòricamente, o átomo do césio tem demonstrado ser um dos melhores na prática. A estrutura do átomo do césio consiste de um núcleo central pesado, circundado por 55 elétrons, 54 dos quais ocupam uma camada fechada interna, estável. Ambos, o elétron desemparelhado externo e o núcleo, tem um momento angular de spin igual a 1/2. Estes spins podem apontar ora em um sentido ora em sentido oposto. Cada uma dessas situações está associada a um certo estado de energia (definindo um determinado nível hiperfino), de modo que a transição de um estado para outro é acompanhada pela emissão de uma onda de rádio tendo como frequência, segundo medidas recentes, igual a 9.192.631.770 hertz, que corresponde a um comprimento de onda de aproximadamente 3 cm, sendo esse valor muito conveniente do ponto de vista dos circuitos eletrônicos |04|.

A 13a. CGPM (1967), decidiu substituir a definição de segundo pela seguinte:

"O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo do césio 133" - (13a. CGPM-1967, Resolução 1).

Essa definição é temporária em virtude dos relógios atômicos estarem em fase de rápido desenvolvimento. O relógio de césio fornece um erro de um segundo em 5.000 anos de funcionamento enquanto que o hidrogênio "maser", por exemplo, promete a produção de um relógio com um erro de sómente um segundo em 33.000.000 de anos.

CAPÍTULO II

MARÉS - CAUSAS E EFEITOS

Representemos o centro da massa da terra pelo ponto C, a Lua pelo ponto L e uma partícula, na superfície da Terra, pelo ponto-massa P; suas respectivas massas, por m_1, m_2 e m

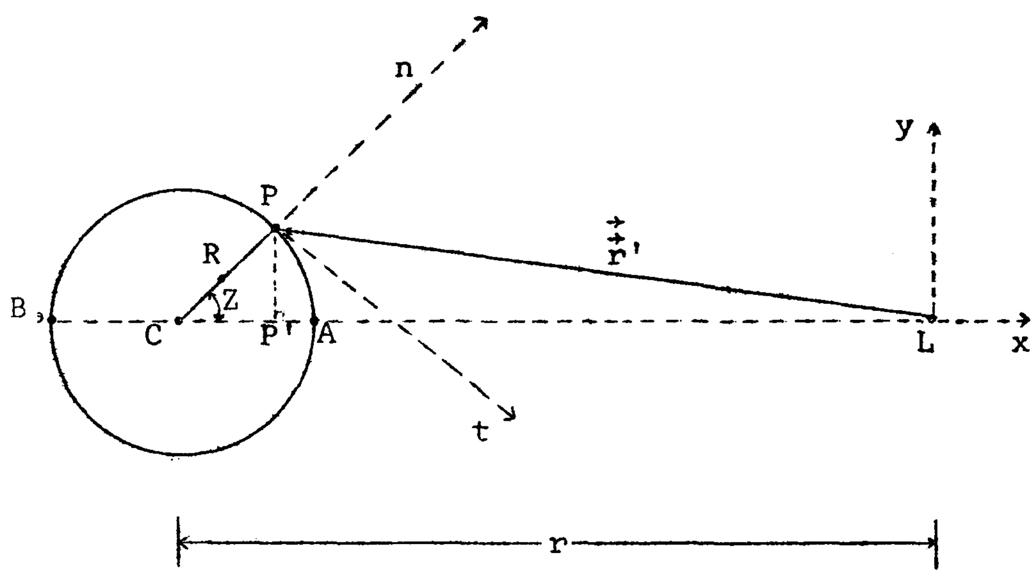

FIGURA 1

As forças atuantes no ponto C, são:

a. a força de atração gravitacional, de intensidade igual a Gm_2m_1/r^2, paralela e equiversa ao eixo x, exercida pela Lua e

b. a força centrífuga, devida à órbita da Terra em torno da Lua, de intensidade igual a m_1v^2/r, paralela e contraversa ao eixo x.

Em virtude da Terra encontrar-se em equilíbrio orbital, temos:

$$Gm_2m_1/r^2 = m_1v^2/r,$$

onde G representa a constante newtoniana da gravitação e v o módulo da velocidade tangencial da Terra.

As forças, por unidade de massa, atuantes no ponto P, são:

i. a força de intensidade igual a Gm_2/r'^2, devida à atração gravitacional exercida pela Lua, orientada do ponto P para a Lua e

ii. a força centrífuga, de intensidade igual a Gm_2/r^2, semelhante àquela atuante no ponto C, pelo fato de considerarmos a Terra como sendo rígida |8|.

A resultante das forças atuantes no ponto P é a causa do fenômeno das marés.

O potencial no ponto P, será:

$$V = V_a - V_c, \tag{2.1}$$

onde V_a representa o potencial criado pela força de atração e V_c representa o potencial criado pela força centrífuga. Logo:

$$V_a = -Gm_2/r' \tag{2.2}$$

e

$$V_c = Gm_2(r-R\cos Z)/r^2 = Gm_2 R\cos Z/r^2, \tag{2.3}$$

tendo em vista que no potencial as constantes não possuem nenhum significado físico:

$$V_c = -Gm_2 R\cos Z/r^2, \tag{2.4}$$

Do triângulo CP1, obtemos:

$$1/r' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R^m}{r^{m+1}} P_m(\cos Z), \qquad (2.5)$$

onde $P_m(\cos Z)$ são os polinômios de Legendre de grau m. Então:

$$V_a = -Gm_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{R^m}{r^{m+1}} P_m(\cos Z), \qquad (2.6)$$

Ou desenvolvendo $m=0$ e $m=1$

$$V_a = -Gm_2/r - Gm_2 R\cos Z/r^2 - Gm_2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^m}{r^{m+1}} P_m(\cos Z), \qquad (2.7)$$

negligenciando-se a constante Gm_2/r e substituindo-se a equação (2.7) e a equação (2.4) na equação (2.1), teremos:

$$V = -Gm_2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^m}{r^{m+1}} P_m(\cos Z), \qquad (2.8)$$

Considerando-se apenas o grau $m=2$, o potencial fica:

$$V = -\frac{Gm_2 R^2}{2r^3}(3\cos^2 Z - 1), \qquad (2.9)$$

ou

$$V = -\frac{3Gm_2 R^2}{2r^3}\left(\cos^2 Z - \frac{1}{3}\right) \qquad (2.10)$$

Derivando o potencial das marés nos sentidos da tangente e da normal à superfície da Terra, no ponto em que se encontra a partícula considerada, obtemos:

$$F_t = \frac{3Gm_2}{2r^3} R\operatorname{sen}^2 Z \qquad (2.11)$$

e

$$F_n = \frac{Gm_2}{r^3} R(3\cos^2 Z - 1) \qquad (2.12)$$

onde F_t e F_n são as componentes da força causadora das marés F_m, cuja expressão vetorial é:

$$\vec{F}_m = \frac{Gm_2 R}{r^3}\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 Z\vec{t} + (3\cos^2 Z - 1)\vec{n}\right] \qquad (2.13)$$

Muitas vezes é interessante conhecer as variações das marés com a localização na superfície da Terra e com o tempo; para isso expressamos a distância zenital Z da Lua (ou de qualquer outro corpo celeste) como uma função de sua posição e da posição do ponto P na superfície da Terra. Usando o triângulo náutico, podemos escrever |12|:

$$\cos Z = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\delta + \cos\delta \cos\phi \cos t, \qquad (2.14)$$

onde:

ϕ = latitude do ponto P

δ = latitude da Lua

t = diferença de longitude entre o ponto P e a Lua.

*

A trigonometria mostra que:

$$\cos^2 Z - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left[\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2t + \right.$$

$$+\mathrm{sen}2\phi\ \mathrm{sen}2\delta\ \cos t +$$

$$\left. +3(\mathrm{sen}^2\phi - \frac{1}{3})(\mathrm{sen}^2\delta - \frac{1}{3})\right], \qquad (2.15)$$

Então, o potencial devido às marés pode ser reescrito como:

$$V = -\frac{3Gm_2R^2}{4r^3}\left[\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2t + \right.$$

$$+ \mathrm{sen}2\phi\ \mathrm{sen}2\delta\ \cos t +$$

$$\left. + 3(\mathrm{sen}^2\phi - \frac{1}{3})(\mathrm{sen}^2\delta - \frac{1}{3})\right], \qquad (2.16)$$

e as suas três componentes podem ser tratadas individualmente, assim:

$$V = S + T + Z \qquad (2.17)$$

onde:

$$S = \frac{-3Gm_2R^2}{4r^3}\cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2t, \qquad (2.18)$$

$$T = \frac{-3Gm_2R^2}{4r^3}\operatorname{sen}2\phi\operatorname{sen}2\delta\cos t, \qquad (2.19)$$

e

$$Z = \frac{-9Gm_2R^2}{4r^3}(\operatorname{sen}^2\phi - \tfrac{1}{3})(\operatorname{sen}^2\delta - \tfrac{1}{3}), \qquad (2.20)$$

são conhecidas como as funções sectorial, tesseral e zonal respectivamente.

Considerando-se a órbita da Lua como sendo circular, o potencial das marés contem duas variáveis dependentes do tempo que são δ e t.

Isso mostra que existe três variações periódicas na força produtora das marés. Por causa da rotação diária da Terra em torno do seu eixo, o primeiro termo compreende uma completa variação duas vezes em um dia: esse termo então produz a maré semi-diurna. Similarmente o segundo termo compreende uma variação completa uma vez ao dia, produzindo a maré diurna. O terceiro termo compreende uma variação completa duas vezes ao mês em virtude da revolução orbital da Lua |13|.

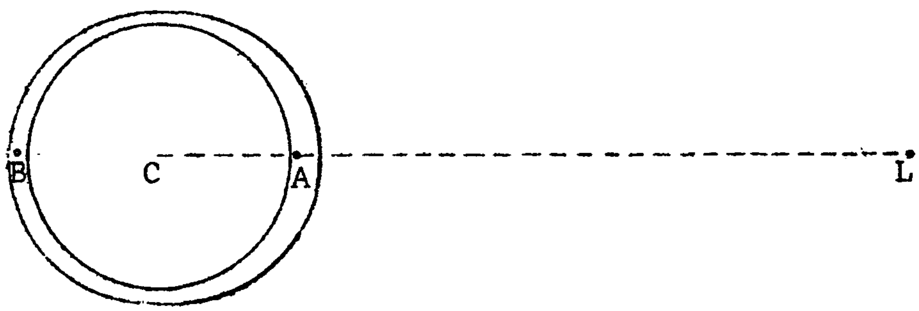

FIGURA 2

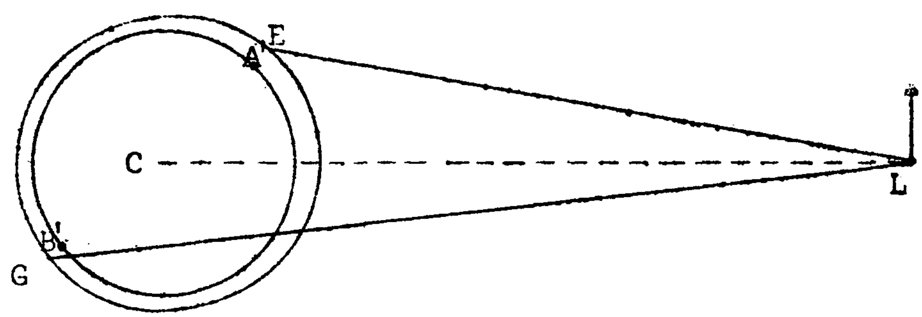

FIGURA 3

A força tangencial resultante, dada pela equação (2.11), deslocaria as moléculas de água para os pontos A ou B formando as protuberâncias aquosas,tal como vistas na FIGURA 2; que resultam no fato peculiar de duas marés altas, uma no ponto sublunar e outra no ponto antípoda, respectivamente.

Contrário ao senso comum, a força gravitacional da Lua não pode produzir uma elevação das águas no ponto A, em virtude da atração do centro de massa da Terra ser aproximadamente 9 milhões de vezes maior, Portanto, a intensidade da força normal dada pela equação (2.12), pode ser totalmente negligenciada e o levantamento das águas ser considerado devido à componente tangencial da atração.

Apesar da massa do Sol ser muito maior que a da Lua, esta provoca uma influência muito maior sobre as marés, o que está de acordo com a Teoria da Gravitação Universal, tendo em vista que a distância Terra-Lua é muito menor que a Terra-Sol e a teoria afirma que a intensidade de atração é diretamente proporcional à massa e inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Consideremos a Terra não como um sólido perfeito e as águas não como um fluído perfeito. Portanto, em virtude do movimento das águas e do movimento de rotação da

Terra no mesmo sentido da revolução da Lua, ocorrerá o atrito; logo, as duas protuberâncias não mais ocorrerão nos pontos A e B, mas, sim, nos pontos A' e B' como mostra a FIGURA 3.

Consideremos a atração exercida pelas marés sobre a Lua. Para simplicidade, as duas protuberâncias serão substituídas por duas partículas pesadas em E e G, conforme mostrado na FIGURA 3. A atração de E sobre a Lua é ao longo da reta EL e a de G ao longo da reta GL. A atração da partícula E é maior pois ela está mais próxima da Lua que a partícula G. Então, existe, de um modo geral, uma força resultante atuando sobre a Lua, no sentido de seu movimento de revolução.

O atrito diminui a velocidade de rotação da Terra e produz uma dissipação de energia, enquanto que,a força atuante na Lua afasta-a da Terra.

CAPÍTULO III

CÁLCULO DOS MOMENTOS DO SISTEMA TERRA - LUA

O momento angular total do sistema Terra-Lua é constituído de duas parcelas. Uma devida ao momento angular de rotação da Terra ao redor de seu eixo e outra, devida ao momento angular orbital da Terra e da Lua em torno do centro de massa desses dois corpos. Então:

$$L = L_r + L_o, \tag{3.1}$$

onde:

L = momento angular total do sistema Terra-Lua;

L_r = momento angular rotacional da Terra;

L_o = momento angular orbital do sistema Terra-Lua.

O momento angular rotacional da Terra em torno de seu eixo de rotação é:

$$L_r = Cn_1, \tag{3.2}$$

onde:

C = momento de inércia da Terra em relação ao seu eixo de rotação;

n_1 = velocidade angular da Terra em torno desse eixo.

O momento angular orbital total do sistema Terra-Lua, em relação ao centro de massa desse sistema, é:

$$L_o = L_1 + L_2 \tag{3.3}$$

onde:

L_1 = momento angular orbital da Terra;

L_2 = momento angular orbital da Lua.

Os momentos angulares orbitais da Terra e da Lua, relativamente ao centro de massa desse sistema, são respectivamente:

$$L_1 = m_1 v_1 r_1 \tag{3.4}$$

e

$$L_2 = m_2 v_2 r_2 \tag{3.5}$$

onde:

m_1 = massa da Terra;

m_2 = massa da Lua;

v_1 = velocidade tangencial da Terra;

v_2 = velocidade tangencial da Lua;

r_1 = distância do centro de massa da Terra ao centro de massa do sistema;

r_2 = distância do centro de massa da Lua ao centro de massa do sistema.

Considerando-se o conceito de velocidade angular média de revolução, podemos escrever:

$$n = \frac{2\pi}{P} \tag{3.6}$$

e

$$n = \frac{v}{r}\ , \tag{3.7}$$

onde:

n = velocidade angular média;

P = período de revolução.

No caso do sistema Terra-Lua, relativamente ao centro de massa, temos:

$$n_1 = n_2 = n, \tag{3.8}$$

decorrendo daí:

$$L_1 = m_1 r_1^2 n \tag{3.9}$$

e

$$L_2 = m_2 r_2^2 n \tag{3.10}$$

Demonstra-se facilmente |5| que:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \tag{3.11}$$

e

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \tag{3.12}$$

onde r representa a distância do centro de massa da Lua ao centro de massa da Terra.

Substituindo as equações (3.11) e (3.12), nas equações (3.9) e (3.10), respectivamente, temos:

$$L_1 = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 nr^2 \tag{3.13}$$

e

$$L_2 = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 nr^2 \tag{3.14}$$

que nos fornecem os momentos angulares orbitais da Terra e da Lua, relativamente ao centro de massa do sistema, respectivamente, em função da distância geocêntrica da Lua.

Fazendo-se uso das equações (3.1),(3.13) e (3.14), o momento angular orbital total do sistema Terra-Lia, pode ser escrito:

$$L_o = \frac{m_1 \, m_2}{m_1+m_2} \, nr^2 \tag{3.15}$$

e o momento angular total, é:

$$L = u \, nr^2 + Cn, \tag{3.16}$$

onde $u = \frac{m_1 \, m_2}{m_1+m_2}$ é a massa reduzida.

A derivada do momento angular de um sistema material, em relação ao tempo, é igual ao momento polar das forças externas atuantes no sistema; se o polo for fixo no referencial dado ou se coincidir com o centro de massa do sistema, fixo ou móvel, com movimento arbitrário,então, podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = M, \tag{3.17}$$

onde M representa o momento polar das forças externas atuantes no sistema.

Considerando-se o sistema Terra-Lua como um sistema isolado (isto é, supondo que a resultante das forças externas sobre ele atuantes, seja nula), haverá conservação do momento angular total. Em virtude disto, com base na equação (3.17), teríamos:

$$\frac{dL}{dt} = 0,$$

$$L = \text{constante},$$

donde atendida a equação (3.3):

$$\frac{d(L_o + L_r)}{dt} = 0 \tag{3.18}$$

e

$$\frac{dL_o}{dt} = -\frac{dL_r}{dt} \tag{3.19}$$

A equação (3.19), põe em destaque ser a variação do momento angular orbital simétrica da variação do momento angular rotacional, em função do tempo; ou em forma equivalente, se a Lua ganha momento angular orbital relativamente à Terra, a Terra deve perder a mesma quantidade em momento angular rotacional; logo, temos:

$$M_2 = - M_1$$

se

$$M_2 = \frac{dL}{dt}o \qquad (3.20)$$

e

$$M_1 = - \frac{dL}{dt}r,$$

sendo:

M_2 = variação do momento angular orbital da Lua relativamente à Terra;

M_1 = variação do momento angular rotacional da Terra em torno de seu eixo de rotação.

Essas duas grandezas seriam iguais a zero se considerassemos esses dois corpos (a Terra e a Lua) como partículas. No entanto, suas dimensões não são negligenciáveis e verifica-se, teórica e experimentalmente, que os valores desses dois momentos são diferentes de zero |10|, determinemos, pois, o valor da variação do momento angular da Lua relativamente a Terra.

Na equação (3.15) os valores de n e r variam com o tempo; portanto:

$$M_2 = u \frac{d(nr^2)}{dt} \qquad (3.22)$$

Uma equação que mostra serem n e r variá - veis dependentes entre sí é a obtida da terceira Lei de Kepler, que diz: "Os quadrados dos períodos orbitais dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos (ou eixos) maiores de suas órbitas". Isto posto, temos:

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\,\Pi^2} = C, \qquad (3.23)$$

onde C representa um valor constante.

Em virtude da equação (3.6), podemos escrever a equação (3.23) como segue:

$$r^3 n^2 = G(m_1+m_2) = C, \qquad (3.24)$$

então:

$$r = \left(\frac{C}{n^2}\right)^{1/3} \qquad (3.25)$$

e

$$r^2 = C^{2/3}\, n^{-4/3} \qquad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.26) na equação (3.22), teremos:

$$M_2 = u\, C^{\frac{2}{3}}\, \frac{d\, n^{-1/3}}{dt} \,. \qquad (3.27)$$

Derivando, obtemos:

$$M_2 = u \left(-\frac{1}{3}\right) C^{\frac{2}{3}} n^{-4/3} \frac{dn}{dt}, \qquad (3.28)$$

$$\boxed{M_2 = -\frac{1}{3} u r^2 \dot{n}} \qquad (3.29)$$

onde $\dot{n}$ representa a aceleração orbital da Lua.

Teorias e observações nos mostram que as acelerações orbitais do Sol e Mercúrio são completamente negligenciáveis quando comparadas com a aceleração orbital da Lua, cujo valor é:

$$\dot{n} = -1,09 \times 10^{-23} \text{ rd.s}^{-2}. \quad |10|$$

Conseqüentemente, o momento polar produzido pela Terra sobre a Lua, é:

$$\boxed{M_2 = 3,9 \times 10^{15} \text{ N.m},}$$

valor igual ao do momento polar atuante na Terra, devido à presença da Lua.

Esse mesmo estudo pode ser feito com base em registros paleontológicos.

A segunda Lei de Képler afirma: "O raio vetor que une o centro do Sol ao centro de um planeta qualquer do sistema solar, descreve superfícies de áreas iguais em tempos iguais". Matemáticamente, isto se escreve:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} , \qquad (3.30)$$

onde:

$\frac{dA}{dt}$ = velocidade areal do corpo que sofre a atração;

θ = azimute;

r = distância radial.

Mas,

$$\ell = mr^2 n = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \qquad (3.31)$$

onde representa o momento angular orbital do corpo atraído de massa m, em relação ao centro do corpo de massa M, que exerce a atração gravitacional.

Muitas vezes, o corpo atraente é chamado de primário e o atraído de secundário.

Através da equação (3.31) e da equação (3.30), obtemos a equação:

$$dA = \frac{1}{2}\frac{\ell}{m}\,dt. \tag{3.32}$$

Considerando-se a órbita do corpo atraído como sendo circular e integrando a equação (3.32) para um período,obtemos:

$$r^2 = \frac{\ell}{2\,\Pi\,m}\,P \tag{3.33}$$

Com base na equação (3.23), a terceira Lei de Képler pode ser escrita:

$$r^3 = \frac{G(M+m)}{4\,\Pi^2}\,P^2 \tag{3.34}$$

Eliminando-se r das equações (3.33) e (3.34), e, depois, eliminando-se P dessas mesmas equações,obtemos, respectivamente:

$$\left[G^2(M+m)^2\ m^3\right]\ P = 2\,\Pi\,\ell^3 \tag{3.35}$$

e

$$\left[G(M+m)\ m^2\right]\ r = \ell^2 \tag{3.36}$$

equações essas que nos fornecem o período e a distância , respectivamente, em função do momento angular orbital, mostrando-nos que se o momento angular orbital aumentar, o período de revolução aumenta e, conseqüentemente, o secundário afasta-se do primário.

Considerando-se a Terra como o primário e a Lua como o secundário, com base na equação (3.35), podemos escrever:

$$\left[G^2(m_1+m_2)^2 m_2^3\right] T = 2\,\Pi\,\ell_2^3 \qquad (3.37)$$

onde:

T = período de revolução da Lua em torno da Terra;

ℓ_2= momento angular orbital da Lua em relação à Terra.

Considerando-se o Sol como o primário e a Terra como o secundário, teremos:

$$\left[G^2(m_3+m_1)^2 m_1^3\right] Y = 2\,\Pi\,\ell_1^3 \qquad (3.38)$$

onde:

Y = período de revolução da Terra em torno do sSol;

ℓ_1= momento angular orbital da Terra em relação ao Sol;

m_3= massa do Sol.

Seguindo-se a convenção de que os símbolos com sufixo representam valores do passado(neste caso do De voniano Médio) e os sem sufícos valores atuais, podemos escrever, com base nas duas últimas equações:

$$\left[G^2(m_1+m_2)^2 m_2^3\right] T_o = 2 \Pi \ell_{o2}^3 \qquad (3.39)$$

e

$$\left[G^2(m_3+m_1)^2 m_1^3\right] Y_o = 2 \Pi \ell_{o2}^3 \qquad (3.40)$$

Dividindo-se a equação (3.37) pela (3.39) e a equação (3.38) pela (3.40), obtemos respectivamente:

$$\frac{T}{T_o} = \frac{\ell_2^3}{\ell_{o1}^3} \qquad (3.41)$$

e

$$\frac{Y}{Y_o} = \frac{\ell_2^3}{\ell_{o1}^3} \qquad (3.42)$$

Das equações (3.41) e (3.42), tiramos, mediante divisão, *membro a membro*:

$$\frac{T\ Y_o}{Y\ T_o} = \frac{\ell_2^3\ \ell_{o1}^3}{\ell_1^3\ \ell_{o1}^3} \qquad (3.43)$$

Supondo que haja conservação do momento angular orbital da Terra em torno do Sol, podemos escrever:

$$Y = Y_0 \tag{3.44}$$

e

$$\ell_1 = \ell_{01} \tag{3.45}$$

então:

$$\frac{TY_0}{YT_0} = \frac{\ell_2^3}{\ell_{02}^3} \tag{3.46}$$

Mas, de conformidade com o Capítulo I, teremos para o Devoniano Médio:

$$\frac{Y_0}{T_0} = \frac{w_0}{s_0'} = \frac{W_0}{s_0}, \tag{3.47}$$

logo:

$$\ell_{02} = \ell_2 \sqrt[3]{\frac{W\ s_0}{s\ W_0}}\ , \tag{3.48}$$

então:

$$\ell_{02} = 0{,}9843\,\ell_2 \tag{3.49}$$

Através dessa equação,verificamos que o momento angular orbital da Lua tem aumentado desde o Devoniano Médio; conseqüentemente, o momento angular rotacional da Terra tem diminuido.

Atualmente o valor do momento angular orbital da Lua, relativamente à Terra, é:

$$\ell_2 = 2{,}8907 \times 10^{32}\ kg.m^2.s^{-1};$$

conseqüentemente, em virtude da equação (3.48), o valor do momento angular orbitaldda Lua no Período Devoniano Médio, era:

$$\ell_{02} = 2{,}8454 \times 10^{32}\ kg.m^2.s^{-1},$$

sendo a diferença:

$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell_{02} = 4{,}5283 \times 10^{30} kg.m^2.s^{-1}.$$

Considerando-se a variação do tempo, desde esse período, $3{,}7 \times 10^8$ anos atrás, podemos escrever:

$$\Delta t = 1{,}1676 \times 10^{16}\ s.$$

O momento polar médio, definido por:

$$M = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \tag{3.50}$$

é, então:

$$\boxed{M = 3{,}9 \times 10^{15}\ N.m,}$$

valor esse que coincide com o obtido astronômicamente.

A variação na energia total da Terra em relação ao tempo $\dot{E}$, produzida por esse torque, é igual a:

$$-\dot{E} = M(n_1 - n_2) = 2,7 \times 10^{12}\ j.s^{-1}.$$

Essa energia pode estar sendo dissipada todo segundo no interior da Terra ou dos oceanos |10|.

Devemos observar que o primeiro dos valores do momento polar das forças atuantes na Lua é instantâneo e o segundo é médio; levando-nos a concluir que esse valor ou é constante ou sofre flutuações em torno do valor médio, desde o Devoniano.

O valor utilizado na equação (3.29) para a aceleração em longitude da Lua é negativo, isso significa que na realidade a Lua tem uma desaceleração orbital.

As protuberâncias marítimas imprimem à Lua uma força, no sentido de seu movimento em torno da Terra; portanto, ela tende a escapar pela tangente. Em virtude da não ocorrência desse fato, ela continua em equilíbrio orbital sob a ação das forças externas nela atuantes, Logo, a cada instante, a força centrífuga deve ser modularmente igual à força de atração gravitacional terrestre. Isto posto, teremos:

$$v^2 r = cte \tag{3.51}$$

e

$$dv = \frac{-vdr}{2r} \tag{3.52}$$

portanto, o equilíbrio é reestabelecido por uma diminuição da velocidade tangencial da Lua e um afastamento relativamente à Terra.

O motivo de admitir-se, antigamente, que a Lua possuia uma aceleração, é devido ao fato de ser o aumento da unidade de tempo astronômico em virtude das irregularidades na rotação da Terra, maior que a diminuição da aceleração da Lua, de acordo com as equações (3.35), (3.36) e (3.51) que nos fornecem:

$$P \propto \ell^3$$

$$r \propto \ell^2$$

e

$$v^2 \propto \frac{1}{r} \rightarrow v \propto \frac{1}{\ell} .$$

C A P Í T U L O   I V

A N Á L I S E   E   R E S U L T A D O S

Os valores da distância Terra - Lua e da velocidade de rotação da Terra, podem ser determinados em qualquer época, desde que conheçamos o número de dias solares no ano e número de dias solares no mês sinódico na época considerada, da seguinte maneira:

Transformamos o número de dias solares no ano (W) em número de dias siderais no ano (w):

$$w = W + 1 \qquad (4.1)$$

O número de dias solares no mês sideral (s'), em função do número de dias solares no mês sinódico (S), é obtido pela equação:

$$s' = \frac{S}{1 + \frac{S}{W}} \qquad (4.2)$$

O número de dias siderais no mês sideral (s) é obtido assim:

$$s = \frac{w}{W} s' \qquad (4.3)$$

As amplitudes do dia e do mês siderais, representados por t e T, respectivamente, são obtidas através das equações:

$$t = \frac{Y}{w} \tag{4.4}$$

e

$$T = st \tag{4.5}$$

onde Y representa a amplitude do ano, considerada constante.

A velocidade de rotação da Terra ao redor de seu eixo (n_1) e da Lua em torno da Terra (n_2), são obtidas respectivamente pelas equações:

$$n_1 = \frac{2\ \Pi}{t} \tag{4.6}$$

e

$$n_2 = \frac{2\ \Pi}{T} \tag{4.7}$$

Das segunda e terceira leis de Kepler, obtemos a equação:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G(m_1+m_2)}{n_2^2}} \tag{4.8}$$

onde:

r = distância Terra-Lua

G = constante da gravitação universal

m_1 = massa da Terra

m_2 = massa da Lua

As equações (4.6) e (4.8), nos permitem determinar os valores da velocidade de rotação da Terra e da distância Terra-Lua.

No Devoniano Médio, segundo as contagens realizadas por Wells e Scrutton |19| e |20|, tínhamos:

$$W = 400$$

e

$$S = 30,6$$

Atualmente |7|, temos:

$$W = 365,25636$$

e

$$S = 29,53059$$

Substituindo os valores correspondentes à época atual e ao Devoniano Médio nas equações acima, podemos construir o seguinte quadro comparativo:

QUADRO I - Estudo comparativo dos valores de grandezas na época atual e no Devoniano Médio.

GRANDEZAS	VALORES ATUAIS	VALORES NO DEVONIANO	DIFERENÇA
Número de dias solares no ano	365,25636	400	- 34,7 (8,7%)
Número de dias solares no mês sinódico	29,53059	30,6	- 1,07 (3,5%)
Número de dias siderais no ano	366,25636	401	- 34,7 (8,7%)
Número de dias solares no mês sideral	27,32166	28,4	- 1,08 (3,8%)
Número de dias siderais no mês sideral	27,39646	28,5	- 1,10 (3,9%)
Amplitude do dia sideral (horas)	23,93447	21,86	2,07 (9,5%)
Amplitude do mês sideral (dias siderais)	27,39646	28,5	- 1,10 (3,9%)
Velocidade média de rotação da Terra ($rd.s^{-1}$)	$7,292x10^{-5}$	$7,98x10^{-5}$	$-0,69x10^{-5}$ (8,6%)
Velocidade angular média da Lua ($rd.s^{-1}$)	$2,662x10^{-6}$	$2,80x10^{-6}$	$-0,14x10^{-6}$ (5,0%)
Distância Média Terra-Lua (km)	384.700	371.800	12.900 (3,5%)

C O N C L U S Ã O

Baseados em evidências astronômicas e paleontológicas, inferimos o retardamento na velocidade de rotação da Terra e, pelo princípio da conservação do momento angular, aplicado ao sistema Terra - Lua, explicamos o afastamento da Lua, em relação à Terra. A causa principal do retardamento na velocidade de rotação da Terra é atribuída ao atrito produzido pelas marés, resultado da interação entre a Terra e a Lua. Acredita-se que outras possíveis caucas, tais como a variação do momento de inércia da Terra e o acoplamento magnético imperfeito entre o núcleo e o manto terrestre, sejam de importância secundária.

Admitindo-se, ainda, que:

a) a órbita da Terra, em torno do Sol, manteve - se constante, desde o Devoniano Médio;

b) a órbita da Lua seja circular;

c) as massas da Terra e da Lua permaneceram constantes, desde o Devoniano Médio, e

d) a constante universal da gravitação não variou;tendo em vista que, de acordo com a teoria cosmológica de Dirac, ela varia inversamente proporcional à idade do Universo o que, segundo Dicke, acarretaria uma discrepância entre o Tempo Universal e o Tempo das Efemérides; podemos concluir o que segue:

1. a velocidade de rotação da Terra tem diminuido e a distância Terra-Lua aumentado, desde o Devoniano, devido, principalmente, à interação Terra-Lua;

2. o Tempo Universal não serve como padrão de intervalo de tempo, devido às irregularidades na rotação da Terra, servindo, no entanto, para medida de instantes; por sua vez, o Tempo Atômico apresenta-se com o melhor padrão de intervalos, não servindo, entretanto, para medida de instantes;

3. as variações na rotação da Terra são de interesse da gravimetria, pois isso altera a força da gravidade efetiva;

4. o método que apresentamos no Capítulo IV,que nos permite determinar a velocidade de rotação da Terra e a distância Terra-Lua para qualquer período geológico, é válido, dentro de seus limites de precisão, pois nos permite reportar ao passado, conhecendo melhor a história do sistema Terra-Lua.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

|1| DIRAC,P.A.M. - The Cosmological Constants. Nature, London, número 139, página 323, 1937.

|2| TELLER,E. - On the Change of Physical Constants. Physical Review, volume 73, número 7, página 801, 1948.

|3| DICKE,R.H. - New Research on Old Gravitation. Science, New York, volume 129, página 621, 1959.

|4| ESSEN,L. - Accurate Measurement of Time. Physics Today, New York, página 26, julho, 1960.

|5| LANDAU,L. et LIFCHITZ,E. - Mécanique. Éditions Mir, Moscou, 1966.

|6| MELCHIOR,P. - Physique et Dinamique Planétaires. Vander, Bruxelles, 1973.

|7| ROBINSON,J.H. - Astronomy Data Book. David and Charles Limited, Devon, 1972.

|8| GODIN,Gabriel - The Analises of Tides. University of Toronto Press, 1972.

|9| JEFFREYS,H. - The Earth. Cambridge at the University Press, 1959.

|10| MUNK,W.H. and MACDONALD,G.J.F. - The Rotation of the Earth. Cambridge at the University Press, 1960.

|11| MARSDEN,B.G. and CAMERON,A.G.W. - The Earth-Moon System. Plenum Press, New York, 1966.

|12| VANICEK,P. - The Earth Tides. University of New Brunswick, Fredericton, 1973.

|13| HORSFIELD,Edgar - Cause of the Earth Tides. Am. J. Phys. Volume 44, número 8, August 1976.

|14| RUNCORN,S.K. - Changes in the Earth's Moment of Inertia. Nature, London, volume 204, 1964.

|15| RUNCORN,S.K. - Middle Devonian Day and Month. Science, New York, volume 154, página 292, 1966.

|16| RUNCORN,S.K. - Fossil Bivalve Shells and the Length of Month and Year in the Cretaceos. Nature, London, volume 118, página 459, 1968.

|17| RUNCORN,S.K. - Tidal Friction and Time. Science, New York, volume 163, página 1227, 1969.

|18| RUNCORN,S.K. - Palaeontological Measurement of the Changes in the Rotation Rates of Earth and Moon and the Rate of Retreat of the Moon from the Earth. Palaeogeophysics, Academic Press, New York, capítulo 3, 1970.

|19| WELLS,J.W. - Coral Growth and Geochronometry. Nature, London, volume 197, página 948, 1963.

|20| SCRUTTON,C.T. - Evidence for a Monthly Periodicity in the Growth of Some Corals. Palaeogeophysics, Academic Press, New York, capítulo 2, 1970.