

NELSI CÔGO DE SÁ

APROXIMAÇÕES EM GEODÉSIA FÍSICA
PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Dissertação apresentada ao Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geoo
désicas para a obtenção do Grau
de Mestre em Ciências pela Uni-
versidade Federal do Paraná.

CURITIBA

1979

NELSI CÔGO DE SÃ

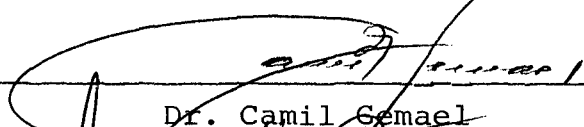
APROXIMAÇÕES EM GEODÉSIA FÍSICA
PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

Dissertação apresentada ao Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geo
désicas para a obtenção do Grau
de Mestre em Ciências pela Uni-
versidade Federal do Paraná.

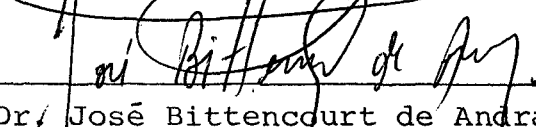
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Edson Barcelos Stédile - Orientador



Dr. Camil Gemael



Dr. José Bittencourt de Andrade

AGRADECIMENTOS

Ao professor Edson Barcelos Stédile pela orientação e pelas valiosas sugestões,

ao Doutor Camil Gemael pelos incentivos e sugestões,

ao Doutor Nelson de Luca pelos conselhos na fase inicial deste trabalho,

à CAPES pela bolsa de estudos concedida,

à Elza T. T. de Oliveira pelo trabalho de datilografia,

a todos os colegas que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

SINOPSE

Este trabalho consiste na aplicação da teoria das equações integrais ao problema de valor de contorno da Geodésia física para a obtenção de soluções aproximadas.

Inicialmente são apresentados os conceitos básicos das equações diferenciais parciais elípticas, das identidades de Green, das equações integrais de Fredholm e dos problemas de valor de contorno da teoria do potencial, de modo a manter a notação no problema de contorno geodésico. O mesmo pode ser dito em relação aos conceitos do potencial gravitacional e centrífugo, e às definições dos elementos fundamentais na formulação do problema.

Com isso, é estabelecida uma equação integral segundo a teoria de Graff-Hunter e Molodenskii. A partir desta, são obtidas as equações integrais relativas aos problemas de Stokes, de Moiseev e de Molodenskii como casos particulares.

A equação integral correspondente ao problema de Stokes é resolvida inicialmente para a esfera e depois para o elipsóide de revolução. A equação integral relativa ao problema de Moiseev é resolvida para a esfera e as reduções gravimétricas, admitidas a priori no problema de Stokes, são obtidas a partir desta equação integral. A equação integral referente ao problema de Molodenskii é resolvida numa aproximação linear em relação aos elementos possíveis de serem desenvolvidos em séries de potências. São obtidas também as reduções gravimétricas relativas à teoria moderna, a partir desta equação.

SYNOPSIS

This work consists on the application of integral equations theory to the boundary value problem of physical geodesy in order to obtain approximated solutions.

At first, the basic concepts of elliptic partial differential equations, of Green's identities, of Fredholm's integral equations and of boundary value problem of potential theory are presented in order to maintain the same notation in the geodetic boundary value problem. The same can be said with respect the concepts of gravitational and centrifugal potentials and to the definitions of fundamental elements in the formulation of the problem.

An integral equation according to Graff-Hunter and Molodenskii's theory is established. Integral equations related to the Stokes, Moiseev and Molodenskii's problems are found as particular cases.

The integral equation corresponding to the Stokes' problem is solved initially for the case of a sphere as well as for the case of an ellipsoid of revolution. The integral equation related to the Moiseev's problem is solved for a sphere and the gravity reductions, that are admitted a priori in the Stokes' problem, are obtained from this integral equation. The integral equation corresponding to the Molodenskii's problem is solved as a linear approximation with respect to the elements that can be developed in power of series. The gravity reductions of the modern theory are obtained from this integral equation.

SUMÁRIO

TÍTULO	ii
AGRADECIMENTOS	iii
SINOPSE	iv
SYNOPSIS	v
SUMÁRIO	vi

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO	1
----------------------	---

CAPÍTULO II

CONCEITOS E DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

2.1 Notação	4
2.2 Equações e operadores diferenciais parciais de segunda ordem	6
2.3 Teorema da divergência	10
2.4 Funções harmônicas e identidades de Green .	11
2.5 Equações integrais de Fredholm	
2.5.1 Definições	17
2.5.2 Resolução das equações integrais lineares de segunda espécie por aproximações sucessivas	18
2.6 Harmônicos esféricos	
2.6.1 Definições	20
2.6.2 Fórmulas integrais	21
2.6.3 Desenvolvimento de uma função em série de har mônicos esféricos. Teorema da adição	25

2.6.4	Equação integral dos harmônicos esféricos totalmente normalizados	26
2.7	Problemas de valor de contorno associados à equação de Laplace	
2.7.1	Conceituação	27
2.7.2	Aplicação da teoria das equações integrais .	29

CAPÍTULO III

FUNÇÕES POTENCIAIS

3.1	Potencial de atração gravitacional	32
3.2	Potencial devido à força centrífuga	36

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA FÍSICA

4.1	Definições	38
4.2	Conceituação do problema	40
4.3	Equação Fundamental	43
4.4	Relações entre as funções aproximadas e as funções verdadeiras	45
4.5	Equação integral do potencial anômalo - forma geral	49

CAPÍTULO V

PROBLEMA DO COGEÓIDE

5.1	Fórmula de Stokes para a esfera	
5.1.1	Equação integral do potencial anômalo relativa à esfera	52
5.1.2	Resolução da equação integral relativa à esfera	55

5.2	Fórmula de Stokes para o elipsóide de revolução	
5.2.1	Equação integral do potencial anômalo relativa ao elipsóide de revolução	58
5.2.2	Resolução da equação integral relativa ao elipsóide	61

CAPÍTULO VI

PROBLEMA DO GEÓIDE

6.1	Equação integral do potencial anômalo para a esfera	66
6.2	Resolução da equação integral relativa à esfera	67
6.3	Reduções gravimétricas na teoria convencional	68

CAPÍTULO VII

PROBLEMA DA SUPERFÍCIE FÍSICA DA TERRA

7.1	Equação integral de Molodenskii para o potencial anômalo	71
7.2	Aproximações	
7.2.1	Aproximação esférica	72
7.2.2	Aproximação plana	74
7.2.3	Aproximação linear	76
7.3	Resolução da equação integral aproximada	77
7.4	Reduções gravimétricas na teoria moderna	78

CAPÍTULO VIII

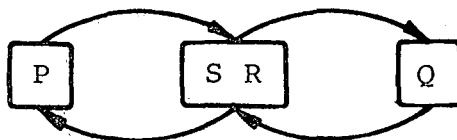
	CONCLUSÃO	84
--	---------------------	----

APÊNDICE I	
OPERADORES DIFERENCIAIS DE MOLODENSKII	86
APÊNDICE II	
EXPRESSÃO DA DISTÂNCIA ZENITAL PARA A CORDA DE UM ARCO ELIPSOIDAL	92
APÊNDICE III	
RELAÇÕES ENTRE OS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DOS SISTE- MAS GEODÉSICO E GEOCÊNTRICO NO ELIPSÓIDE DE REVOLU- ÇÃO	96
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102
ÍNDICE	105

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O problema geodésico fundamental consiste no posicionamento de pontos da superfície física da Terra. Isto significa que a determinação da superfície, normalmente conhecida nos problemas de valor de contorno da teoria do potencial, constitui a primeira etapa no problema geodésico. Devido à complexidade na representação matemática desta superfície, é necessário introduzir um sistema de referência e estabelecer uma relação biunívoca entre os pontos de toda a superfície terrestre. Portanto, o problema consiste em determinar um sistema de referência SR, e a ele associar todos os pontos da superfície física, de modo que fique definida uma relação do tipo



entre dois pontos quaisquer P e Q da superfície terrestre. Assim, para que um sistema geodésico de referência seja realmente satisfatório, é necessário que admita uma representação matemática simples, e seja o mais representativo possível da superfície topográfica. Estas características do sistema conduzem à utilização de duas superfícies: a de um elipsóide de revolução, que constitui o modelo matemático, sobre a qual se processam todos os cálculos; e uma superfície intermediária, a do geóide na teoria convencional ou a do teluróide na teoria moderna, que

constitui o modelo topográfico. Naturalmente, para que um sistema geodésico fique perfeitamente definido, é necessário ainda estabelecer uma relação entre os pontos do modelo matemático e do modelo topográfico. Na teoria convencional, esta relação pode ser estabelecida por três métodos: o astro-geodésico, o astro-gravimétrico e o gravimétrico. Os dois primeiros têm caráter relativo, pois dependem da orientação do elipsóide no DATUM; o terceiro tem caráter absoluto, pois, neste caso, o geóide é concêntrico ao elipsóide adotado e, a menos de um fator de escala, pode ser determinado a partir de dados gravimétricos. Na teoria moderna, a relação entre os pontos de tais modelos se restringe ao método gravimétrico.

Com o advento dos satélites artificiais, surgiu outra possibilidade, que tem sido amplamente explorada para estabelecer a relação entre os modelos na teoria convencional. Este método consiste na interpretação das perturbações orbitais de um satélite, relativas às variações do campo da gravidade. Tal como acontece no método gravimétrico convencional, o resultado é a determinação do potencial das massas anômalas do geóide em relação ao elipsóide. Este aspecto propiciou o desenvolvimento do chamado método combinado, que já é qualificado como o método ideal. As razões podem ser facilmente entendidas; pois, a dificuldade na obtenção de dados gravimétricos de forma suficientemente densa e homogênea sobre toda a superfície terrestre, tem sido um dos maiores obstáculos nas aplicações globais tanto do método gravimétrico convencional quanto do moderno. Por outro lado, a insensibilidade de variações regionais do campo da gravidade na órbita de um satélite artificial, torna o método das perturbações orbitais pouco eficiente nas aplicações regionais;

daí a importância e o pleno vigor do método gravimétrico em Geodésia.

O que pretendemos, neste trabalho, é uma aplicação sistemática da teoria das equações integrais visando obter soluções aproximadas explícitas no problema de valor de contorno da Geodésia física, tanto na forma convencional quanto na moderna.

A teoria das equações integrais vem sendo aplicada neste problema desde a terceira década do nosso século. Iniciou com os trabalhos de Moiseev e seguiram, entre outras, as investigações de Malkin e as de Molodenskii [13]. Estudos mais gerais foram desenvolvidos por Molodenskii [13], Levallois [11], Graff-Hunter [7] e, mais recentemente por Moritz [14], [15]. No entanto, alguns pontos que são fundamentais na obtenção de soluções aproximadas explícitas, não têm sido suficientemente enfatizados. É o que ocorre, por exemplo, com a transformação do problema de Hilbert da teoria do potencial, à uma equação integral de Fredholm. Na realidade, esta transformação representa o primeiro passo na aplicação da teoria das equações integrais ao problema de valor de contorno da Geodésia física. Os pontos mais importantes, entretanto, estão na forma geral com que este problema pode ser formulado em termos de equações integrais, nas soluções particulares que podem ser obtidas segundo diferentes hipóteses e aproximações, e também na interpretação de diversas reduções aplicadas aos dados gravimétricos observados que, de outra forma, seriam consideravelmente mais difíceis e obscuras.

CAPÍTULO II

CONCEITOS E DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

2.1 NOTAÇÃO

Se X é um conjunto, e $A \subset X$, representaremos por $X \setminus A$ o complementar de A em relação a X .

Denotaremos por $f: X \rightarrow Y$ uma função definida em X com valores em Y . Se $A \subset X$ ($B \subset Y$), então a imagem de A por f (a imagem inversa de B por f) é o conjunto $f(A)$ ($f^{-1}(B)$) definido, respectivamente, por

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ com } f(x) = y\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Se $f: X \rightarrow Y$, e $A \subset X$, representaremos por $f|_A$ a restrição de f ao conjunto A , isto é, $f|_A: A \rightarrow Y$, definida por

$$f|_A(x) = f(x),$$

para todo $x \in A$.

Se X é um conjunto topológico, e $A \subset X$, designaremos por \bar{A} a aderência de A , e por ∂A a fronteira de A , isto é,

$$\partial A = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A}).$$

Naturalmente ∂A é um conjunto fechado.

Seja X um espaço métrico com distância d , x um ponto de X ,

e $r > 0$ um número real. Então, designaremos por $B(x;r)$, $\bar{B}(x;r)$ e $S(x;r)$, respectivamente, a bola aberta, a bola fechada e a esfera com centro em x e raio r , definidas por

$$B(x;r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\},$$

$$\bar{B}(x;r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\},$$

$$S(x;r) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}.$$

Convém lembrar que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais \mathbb{R} ; então se $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e se $a \in \mathbb{R}$, temos

$$(x+y) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

e

$$ax = (ax_1, \dots, ax_n).$$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, a norma de x será dada pela expressão

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

e a distância euclidiana por

$$d(x,y) = |x-y| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2},$$

de modo que o \mathbb{R}^n sempre será munido desta distância.

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, representaremos o produto escalar de x por y na forma

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Denotaremos por $C^m(\Omega)$ o conjunto das funções m vezes continuamente deriváveis em Ω ; e por $C^m(\bar{\Omega})$ o conjunto das funções

$u \in C^m(\Omega)$, tais que

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

sejam funções contínuas em Ω , para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq m$. Diremos ainda que tais funções são de classe C^m .

Cabe ainda uma observação quanto ao critério adotado na numeração das expressões. Em todos os capítulos, as expressões foram numeradas com algarismos arábicos segundo o capítulo, a seção e a ordem da expressão. Para evitar confusão, nas expressões dos apêndices foram usados algarismos romanos e arábicos para indicar, respectivamente, o apêndice e a ordem da expressão.

2.2 EQUAÇÕES E OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Uma equação diferencial parcial em n variáveis independentes e de segunda ordem é uma relação da forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0, \quad (2.2.1)$$

onde a variável dependente u é uma função de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A função F , que vamos supor contínua, está definida em um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ de uma função de n variáveis.

Uma função $u \in C^2(\Omega)$ será solução da equação (2.2.1) em Ω se, para todo $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, chamando de \mathbf{y}^0 a $(n+2)$ -upla

$$\mathbf{y}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, u(x_0), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x^0)) \quad (2.2.2)$$

tivermos

$$F(y^0) = 0, \quad \text{para todo } y^0 \in \Omega. \quad (2.2.3)$$

A equação (2.2.1) é dita linear em Ω se tiver a forma

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = P(x, D) - f(x), \quad (2.2.4)$$

onde $P(x, D)$ é um operador diferencial parcial de segunda ordem, definido sobre o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e que tem a expressão

$$P(x, D) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad (2.2.5)$$

sendo a_{ij} , b_i , c e f funções contínuas em Ω . Nesse caso, a equação (2.2.1) pode ser representada por

$$P(x, D) = f(x). \quad (2.2.6)$$

Na equação (2.2.4), daí a razão de ser chamada linear, a aplicação

$$F: v \in C^2(\Omega) \rightarrow F[v] \in C(\Omega) \quad (2.2.7)$$

é linear entre espaços vetoriais, isto é, para todo $v_1, v_2 \in C^2(\Omega)$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, temos

$$F[c_1 v_1 + c_2 v_2] = c_1 F[v_1] + c_2 F[v_2], \quad (2.2.8)$$

para

$$F[v](x) = P(x, D).$$

A equação é dita homogênea se $F[v](x) = 0$, e não homogênea se $F[v](x) = f(x)$.

Seja $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $T: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ uma transformação de coordenadas de classe C^2 . Fazendo

$$y = T(x), \quad y_i = y_i(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $x^0 \in \Omega$ e $y^0 = T(x^0)$, o operador $P(x, D)$ nas novas coordenadas y , toma a forma

$$\tilde{P}(y, D)v = \sum_{i, j=1}^n \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(y) \frac{\partial v}{\partial y_i} + \tilde{c}(y)v, \quad (2.2.9)$$

onde

$$\tilde{a}_{ij}(y) = \sum_{k, \ell=1}^n a_{k\ell}(x(y)) \frac{\partial y_i}{\partial x_\ell}(x(y)) \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(x(y)), \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{b}_i(y) = \sum_{k=1}^n b_k(x(y)) \frac{\partial y_i}{\partial x_k}(x(y)) + \sum_{k, \ell=1}^n a_{k\ell}(x(y)) \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_\ell}(x(y)), \quad (2.2.11)$$

$$\tilde{c}(y) = c(x(y)). \quad (2.2.12)$$

Isto significa que, se $u \in C^2(\Omega)$ e $v(y) = u(x(y))$, isto é, $v = u \circ T^{-1}$, então

$$P(x, D)u = [\tilde{D}(y, D)v] \circ T. \quad (2.2.13)$$

A matriz jacobiana $J(x) = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) \right)$ de T é real e inversível no ponto x . Então, fazendo $C = {}^t J$ e $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{ij}(y))$ em (2.2.10) obtemos uma expressão matricial da forma

$$\tilde{A}(y) = {}^t C(x(y)) A(x(y)) C(x(y)), \quad (2.2.14)$$

onde ${}^t C$ é a transposta de C .

Em particular,

$$\tilde{A}(y^0) = {}^t C(x^0) A(x^0) C(x^0); \quad (2.2.15)$$

logo $A(x^0)$ e $\tilde{A}(y^0)$ assim como as formas quadráticas associadas q e \tilde{q} , são matrizes simétricas congruentes por meio de C , que é real e inversível. Então, existe uma transformação de coordena

das, tal que, o novo operador \tilde{P} tenha coeficientes a_{ij} satisfazendo às seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_{ij}(y^0) &= 0 \quad \text{se } i \neq j, \\ \tilde{a}_{ij}(y^0) &= 1 \quad \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ \tilde{a}_{ij}(y^0) &= -1 \quad \text{se } r+1 \leq i \leq r+s, \\ \tilde{a}_{ij}(y^0) &= 0 \quad \text{se } r+s+1 \leq i \leq m, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

isto é, a parte principal de \tilde{P} tem a forma

$$\tilde{P}(y^0, D) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - \sum_{i=r+1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}. \quad (2.2.17)$$

Assim, o operador diferencial (2.2.5) e a equação diferencial associada (2.2.4), com coeficientes reais em Ω , podem ser classificados, segundo a forma quadrática q da matriz (a_{ij}) em: elípticos, parabólicos, parabólicos normais, hiperbólicos, ou hiperbólicos normais.

Para coeficientes constantes a_{ij} , de $P(x, D)$, existe uma transformação de coordenadas tal que, em todo o seu domínio de definição, o operador $\tilde{P}(y, D)$ assume a forma

$$\tilde{P}(y, D) = \begin{cases} \Delta \\ -\Delta \end{cases}, \quad (2.2.18)$$

onde

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}. \quad (2.2.19)$$

é o operador de Laplace.

Em particular, se $\tilde{b}_i = \tilde{c} = 0$, temos a equação de Poisson, na forma de operador.

$$\Delta = f. \quad (2.2.20)$$

e, para a equação homogênea a ela associada, temos a equação de Laplace.

$$\Delta = 0. \quad (2.2.21)$$

2.3 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $F = (F_1, \dots, F_n)$. Dizemos que $F \in C^m(\Omega)$ ($F \in C^m(\bar{\Omega})$) se $F_i \in C^m(\Omega)$ ($F_i \in C^m(\bar{\Omega})$), respectivamente, para $i = 1, \dots, n$. Então, se $F \in C^1(\Omega)$, a divergência de F é uma função escalar $\text{div } F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\text{div } F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega. \quad (2.3.1)$$

Convém notar que, se $F \in C^m(\Omega)$ ($F \in C^m(\bar{\Omega})$), com $m \geq 1$, então $\text{div } F \in C^{m-1}(\Omega)$ ($\text{div } F \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$), respectivamente.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado, cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1 ; se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $F \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $\text{div } F \in C(\bar{\Omega})$; então, o teorema da divergência pode ser representado simbolicamente por

$$\int_{\Omega} \text{div } F dx = \int_{\partial\Omega} F_n dS. \quad (2.3.2)$$

onde $dx = dx_1, \dots, dx_n$; dS é um elemento de $\partial\Omega$; $n = (n_1, \dots, n_n)$ é a normal unitária exterior a Ω ; e F_n é a componente de F na direção de n , isto é,

$$F_n = (F|n) = \sum_{i=1}^n F_i n_i. \quad (2.3.3)$$

Naturalmente dx tem dimensão n e dS tem dimensão $(n-1)$.

2.4 FUNÇÕES HARMÔNICAS E IDENTIDADES DE GREEN

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto; uma função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita harmônica em Ω se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω .

Sejam $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Fazendo

$$F_j = u \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad F = (F_1, \dots, F_n),$$

temos de (2.3.1) a seguinte identidade em Ω :

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = u \Delta v + (\operatorname{gradu} | \operatorname{grad} v), \quad (2.4.1)$$

onde

$$(\operatorname{gradu} | \operatorname{grad} v) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right).$$

Observando que $\operatorname{div} F \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e supondo que $\operatorname{div} F \in C(\Omega)$, obtemos, com a expressão do teorema da divergência (2.3.2)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} (\operatorname{gradu} | \operatorname{grad} v) dx &= \int_{\partial \Omega} u \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) n_j \right) dS = \\ &= \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Logo, se $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, temos a primeira identidade de Green

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} (\operatorname{gradu} | \operatorname{grad} v) dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS. \quad (2.4.3)$$

Em particular, se $u \equiv 1$ em Ω , $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e $v \in C(\bar{\Omega})$, vem

$$\int_{\Omega} \Delta v dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial n} dS; \quad (2.4.4)$$

além disso, se $\Delta v = 0$,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0. \quad (2.4.5)$$

Sejam u e v pertencentes a $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Aplicando (2.4.3) a u e v dos dois modos possíveis e subtraindo uma expressão da outra, obtemos a segunda identidade de Green

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) dS, \quad (2.4.6)$$

com $\Delta u, \Delta v \in C(\bar{\Omega})$.

Pode ser demonstrado [6] que:

- se u é uma função harmônica em Ω , que depende apenas de $\ell = |\mathbf{x}|$, então

$$u'' + \frac{n-1}{\ell} u' = 0; \quad (2.4.7)$$

- se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$u(\ell) = c_1 + \frac{c_2}{\ell^{n-2}}, \quad n > 2. \quad (2.4.8)$$

Isso proporciona de imediato o seguinte resultado: a função $u_a: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por

$$u_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell}, \quad (2.4.9)$$

com $\ell = |\mathbf{x}-\mathbf{a}|^{n-2}$, $n > 2$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Então, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1 e se $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$; como consequência de (2.4.6), temos

$$\int_{\Omega} u_a \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} (u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n}) dS, \quad (2.4.10)$$

com Δu_a e Δv pertencentes a $C(\bar{\Omega})$, $\Delta u_a \in C^2(\Omega)$.

Suponhamos agora que $\mathbf{a} \in \Omega$. Neste caso a função u_a não é de classe C^2 em Ω , pois é descontínua em \mathbf{a} , portanto a identida

de (2.4.6) não se verifica para u_a . Entretanto, é possível obtermos uma nova identidade que seja válida para u_a , com $a \in \Omega$. Seja então $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, com $\Delta v \in C(\bar{\Omega})$ e $u_a \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$. Como Ω é aberto e $a \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $\bar{B}(a; r) \subset \Omega$. Logo, para $0 < \varepsilon \leq r$, $\bar{B}_\varepsilon = \bar{B}(a; \varepsilon) \subset \Omega$; chamando $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$, temos v e u_a pertencentes a $C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon) \cap C^2(\Omega_\varepsilon)$, com Δv e Δu_a em $C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$. Podemos então aplicar (2.4.6) a u_a e v em Ω_ε , para obtermos

$$\int_{\partial \Omega_\varepsilon} (u_a \Delta v - v \Delta u_a) dx = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS. \quad (2.4.11)$$

Mas, $\Delta u_a = 0$ em Ω_ε ; $\partial \Omega_\varepsilon = (\partial \Omega \cup \partial B_\varepsilon)$; $\Omega \cap B_\varepsilon = S_\varepsilon = S(a; \varepsilon)$ e, além disso, a normal em um ponto de S_ε , exterior a Ω_ε , é interior a B_ε . Logo, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_a \Delta v dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS - \int_{S_\varepsilon} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS, \quad (2.4.12)$$

onde a normal a S_ε é considerada exterior a B_ε .

Para obtermos o limite desta identidade quando ε tende a zero, notemos que $y \in S_\varepsilon$ se $|y-a| = \varepsilon$; evidentemente u_a é constante em S_ε e vale ε^{2-n} , $n > 2$. Por outro lado, sendo S_ε uma superfície esférica, a normal n tem a direção e o sentido do vetor $y-a$; logo $n = n(y) = \frac{y-a}{|y-a|}$. Lembrando que

$$\frac{\partial u_a}{\partial n}(y) = ((\text{grad } u_a)(y) |n(y)|)$$

e

$$\frac{\partial u_a}{\partial n_i}(y) = (2-n)(y_i - a_i) |y-a|^{-n},$$

temos

$$\frac{\partial u_a}{\partial n}(y) = (2-n) |y-a|^{-n+1}.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, a identidade (2.4.12) pode ser escrita

na forma

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_a \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS - \epsilon^{-n+2} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial v}{\partial n} dS + (2-n) \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v dS. \quad (2.4.13)$$

Inicialmente vamos obter o limite da integral $\epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v dS$, quando ϵ tende a zero.

Para isso, vamos escrevê-la na forma

$$\epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v dS = \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v(a) dS(y) + \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} [v(y) - v(a)] dS(y);$$

representando por S_n a área da superfície esférica unitária no \mathbb{R}^n , isto é,

$$\int_{S_\epsilon} 1 dS = \epsilon^{-n+1} S_n,$$

com

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

onde

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} (\alpha-1)!, & \text{com } \alpha = \frac{n}{2} \text{ se } n \text{ for par,} \\ \frac{(2\alpha)! \sqrt{\pi}}{4^\alpha \alpha!}, & \text{com } \alpha = \frac{n-1}{2} \text{ se } n \text{ for ímpar;} \end{cases}$$

assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v dS = v(a) S_n + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} [v(y) - v(a)] dS(y)$$

ou

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-n+1} \int_{S_\epsilon} v dS = v(a) S_n. \quad (2.4.14)$$

Consideremos agora a integral

$$\epsilon^{-n+2} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

Se $y \in S_\epsilon$, temos

$$\frac{\partial v}{\partial n}(y) = ((\text{grad } v)(y) | n(y)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial n_i}(y) \frac{y_i - a_i}{|y-a|}.$$

Sendo $\frac{\partial v}{\partial n_i}$ contínuas em Ω , existe um número real M tal que, para todo $x \in \bar{B}(a;r)$, e para todo $i = 1, \dots, n$,

$$\left| \frac{\partial v}{\partial n_i}(x) \right| < M.$$

Assim, para todo $y \in S_\epsilon$ e todo ϵ com $0 < \epsilon < r$, teremos

$$\left| \frac{\partial v}{\partial n_i}(y) \right| < nM, \text{ logo para } 0 < \epsilon < r, \text{ temos}$$

$$\left| \epsilon^{-n+2} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial v}{\partial n} dS \right| < \epsilon^{-n+2} \int_{S_\epsilon} nM dS = nM S_n \epsilon ;$$

então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-n+2} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0, \quad n > 2. \quad (2.4.15)$$

Finalmente, por definição de integral imprópria [3]

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_a \Delta v dx = \int_{\Omega} u_a \Delta v dx. \quad (2.4.16)$$

Portanto, com (2.4.14), (2.4.15) e (2.4.16) obtemos, como limite de (2.4.13) quando ϵ tende a zero,

$$\int_{\Omega} u_a \Delta v dx = (2-n) S_n v(a) + \int_{\partial \Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS. \quad (2.4.17)$$

Para o caso em que $y \in \partial \Omega$, a dedução é semelhante.

Logo, as três alternativas da pertinência de a em relação a Ω , podem ser representadas por

$$\int_{\Omega} u_a \Delta v dx = p v(a) + \int_{\partial \Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS . \quad (2.4.18)$$

onde

$$p = \begin{cases} \frac{S_n}{2-n} & \text{se } a \in \Omega, \\ \frac{S_n}{2(2-n)} & \text{se } a \in \partial \Omega, \\ 0 & \text{se } a \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega), \text{ com } n > 2, \end{cases} \quad (2.4.19)$$

que é a terceira identidade de Green.

Seja a função $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$; $w \in C^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$, com $\Delta w \in C(\bar{\Omega})$; então aplicando (2.4.6) a v e w , temos

$$\int_{\Omega} (v \Delta w - w \Delta v) dx = \int_{\partial \Omega} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS . \quad (2.4.20)$$

Subtraindo (2.4.20) de (2.4.19), vem

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta w) dx = p v(a) + \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS , \quad (2.4.21)$$

com

$$u = u_a + w. \quad (2.4.22)$$

Naturalmente se u_a e v estiverem definidas em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, a expressão (2.4.18) terá a forma

$$\int_{\Omega} u_a \Delta v dx = p v(a) - \int_{\partial \Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) dS , \quad (2.4.23)$$

pois, neste caso, a normal será interior a $\partial \Omega$.

2.5 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM

2.5.1 DEFINIÇÕES

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. A equação integral de Fredholm é uma relação da forma [19]

$$\alpha u(x) - \lambda \int_{\Omega} F(x,y,u(y)) dy = f(x), \quad (2.5.1.1)$$

onde a função u , em $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, é a função incôgnita; f e F são funções conhecidas tais que para todo $x, y \in \Omega$ e para toda a variável $u \in [a, b]$, $f(x)$ e $F(x, y, u)$ sejam funções reais de classe $C(\Omega)$; α é uma constante e λ o parâmetro da equação.

Uma equação integral de Fredholm é dita linear se tiver a forma

$$\alpha u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy = f(x), \quad (2.5.1.2)$$

onde a função k , chamada núcleo da equação, é uma função conhecida para todo $x, y \in \Omega$. Se $\alpha=0$, temos a equação integral dita de primeira espécie

$$\lambda \int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy = d(x); \quad (2.5.1.3)$$

se $\alpha=1$, a de segunda espécie

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy = f(x). \quad (2.5.1.4)$$

Se $f \equiv 0$, temos a equação homogênea

$$\alpha u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy = 0, \quad (2.5.1.5)$$

que pode ser de primeira ou segunda espécie.

2.5.2 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS LINEARES DE SEGUNDA ESPÉCIE POR APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

O método das aproximações sucessivas para resolução das equações de segunda espécie consiste em substituir em (2.5.1.4) $u(y)$ por uma função aproximada $u_0(y)$, que poderia ser $f(x)$. Então,

$$u_1(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x,y) u_0(y) dy + f(x), \quad (2.5.2.1)$$

a partir da qual obtemos outra aproximação por substituição análoga. Na n -ésima substituição, teremos

$$u_n(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x,y) u_{n-1}(y) dy + f(x), \quad (2.5.2.2)$$

que será solução de (2.5.1.4) se tender uniformemente a uma função limite, o que pode ser verificado efetuando-se as substituições indicadas, ou seja,

$$u_2(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x,y) f(y) dy + \lambda^2 \int_{\Omega} \left[k(x,s) \int_{\Omega} k(s,y) u_0(y) dy \right] ds + f(x). \quad (2.5.2.3)$$

Usando o operador integral κ , definido por

$$\kappa f(x) = \int_{\Omega} k(x,y) f(y) dy \quad (2.5.2.4)$$

em (2.5.1.4) e (2.5.2.2) vem

$$u(x) = \lambda \kappa u(x) + f(x) \quad (2.5.2.5)$$

e

$$u_n(x) = \lambda \kappa u_{n-1}(x) + f(x). \quad (2.5.2.6)$$

Nesse caso, as aproximações sucessivas são da forma

$$u_1(x) = \lambda \kappa u(x) + f(x),$$

$$u_2(x) = \lambda \kappa u(x) + \lambda^2 \kappa^2 u_0(x) + f(x),$$

$$u_3(x) = \lambda \kappa u(x) + \lambda^2 \kappa^2 u_0(x) + \lambda^3 \kappa^3 u_0(x) + f(x).$$

A expressão geral para a n -ésima substituição será

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \lambda^m \kappa^m f(x) + R_n(x) + f(x), \quad (2.5.2.7)$$

onde

$$R_n(x) = \lambda^n \kappa^n u_0(x). \quad (2.5.2.8)$$

Se $\lim R_n(x) = 0$, a solução de (2.5.2.4) será

$$u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \kappa^n f(x) + f(x). \quad (2.5.2.9)$$

Isso realmente ocorre se forem satisfeitas as seguintes condições |1|

$$|k(x,y)| \leq M, \quad M \text{ constante, para } x,y \in \Omega;$$

$$|f(x)| \leq L \text{ e } |u_0(x)| < C, \quad C \text{ constante, para } x \in \Omega.$$

Com efeito, usando essas condições em (2.5.2.4), temos

$$|\kappa u_0(x)| = \left| \int_{\Omega} k(x,y) u_0(y) dy \right| < MVC,$$

onde V é a medida de Ω .

Por iterações, chegamos à expressão geral

$$|\kappa^n u_0(x)| < M^n V^n C, \quad (2.5.2.10)$$

e, analogamente

$$|\kappa^n f(x)| < M^n V^n L. \quad (2.5.2.11)$$

Usando (2.5.2.8) e (2.5.2.10) podemos escrever

$$|R_n(x)| < |\lambda|^n M^n V^n C, \quad (2.5.2.12)$$

que tende a zero se

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}. \quad (2.5.2.13)$$

Além disso, por (2.5.2.11), a série cujos termos são os módulos dos termos de (2.5.2.9) tem como majorante a série geométrica

$$L(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n_M n_V n}), \quad (2.5.2.14)$$

que converge quando λ satisfaz (2.5.2.13) e, nessas condições, (2.5.2.9) converge absoluta e uniformemente em Ω e constitui so lução de (2.5.1.4).

2.6 HARMÔNICOS ESFÉRICOS

2.6.1 DEFINIÇÕES

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função harmônica em Ω e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação de coordenadas de classe C^2 , dada por

$$f(q) = (f_1(q), f_2(q), f_3(q)), \quad q = (r, \theta, \lambda);$$

sendo r, θ, λ coordenadas polares.

Então, para

$$x_k = f_k(q), \quad k = 1, 2, 3;$$

a equação (2.2.21) toma a forma

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (2.6.1.1)$$

A solução geral desta equação é dada por [4, vol.1]

$$u(r, \theta, \lambda) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} Y_n(\theta, \lambda), & \text{se } r \leq R, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda), & \text{se } r > R, R \text{ constante;} \end{cases} \quad (2.6.1.2)$$

com

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta), \quad (2.6.1.3)$$

onde a_{nm} e b_{nm} são coeficientes constantes; e P_{nm} são as funções associadas de Legendre, expressas por |5|

$$P_{nm}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad t = \cos \theta. \quad (2.6.1.4)$$

Para cada $n \in I$, sendo I o conjunto dos números inteiros, essas soluções são polinômios homogêneos de grau n quando expressos em coordenadas cartesianas x_i , $i = 1, 2, 3$.

Os polinômios $u(r, \theta, \lambda)$ são chamados harmônicos esféricos sólidos e os polinômios $Y_n(\theta, \lambda)$ são chamados harmônicos esféricos de superfície de grau n e ordem m , sendo $m \leq n$.

2.6.2 FÓRMULAS INTEGRAIS

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma superfície de classe C^1 ; sejam u_n e v_s harmônicos sólidos em Ω , e $Y_n(\theta, \lambda)$ e $Y_s(\theta, \lambda)$ os harmônicos esféricos de superfície a eles associados, isto é,

$$\left. \begin{aligned} u_n &= r^n Y_n(\theta, \lambda), \\ v_s &= r^s Y_s(\theta, \lambda), \quad \text{com } n \neq s. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2.1)$$

Seja $S(O; R) = \partial S_R \subset \Omega$, onde O representa a origem do \mathbb{R}^3 e a normal n em um ponto de ∂S_R é exterior, isto é,

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial R}.$$

Então, introduzindo (2.6.2.1) em (2.4.6) obtemos, sobre uma superfície esférica de raio unitário $\partial\sigma$

$$(n-s)R^{n+s+1} \int_{\partial\sigma} Y_n(\theta, \lambda) Y_s(\theta, \lambda) d\sigma = 0, \quad (2.6.2.2)$$

onde

$$\int_{\partial\sigma} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi}; \quad dS = R^2 \text{sen}\theta d\theta d\lambda = R^2 d\sigma. \quad (2.6.2.3)$$

Foi suposto $n \neq s$, então

$$\int_{\partial\sigma} Y_n(\theta, \lambda) Y_s(\theta, \lambda) d\sigma = 0; \quad (2.6.2.4)$$

logo, fazendo

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \text{sen} m\lambda,$$

temos

$$\left. \begin{aligned} \int_{\partial\sigma} R_{nm} R_{sr} d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\sigma} R_{nm} S_{sr} d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\sigma} S_{nm} R_{nr} d\sigma &= 0, \quad \text{se } n \neq s. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2.5)$$

Multiplicando dois harmônicos esféricos de superfície de mesmo grau e integrando sobre a esfera, resulta |12|

$$\left. \begin{aligned} \int_{\partial\sigma} R_{nm} R_{nr} d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\sigma} R_{nm} S_{nr} d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\sigma} S_{nm} S_{nr} d\sigma &= 0, \quad \text{se } m \neq r; \\ \int_{\partial\sigma} R_{nm} S_{nm} d\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2.6)$$

Com as propriedades das funções associadas de Legendre, obtêm-se ainda

$$\left. \begin{aligned} \int_{\partial\sigma} (R_{n0})^2 d\sigma &= \frac{4}{2n+1}, \\ \int_{\partial\sigma} (S_{n0})^2 d\sigma &= 0, \\ \int_{\partial\sigma} (R_{nm})^2 d\sigma &= \int_{\partial\sigma} (S_{nm})^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \text{ se } m \neq 0 \end{aligned} \right\} (2.6.2.7)$$

Consideremos agora os harmônicos esféricos de volume

$$\left. \begin{aligned} v_s &= r^s Y_s(\theta, \lambda), \\ u_n &= \frac{1}{\ell}, \end{aligned} \right\} (2.6.2.8)$$

onde os harmônicos esféricos de superfície a eles associados são de mesmo grau, e (Fig. 2.6.2.1)

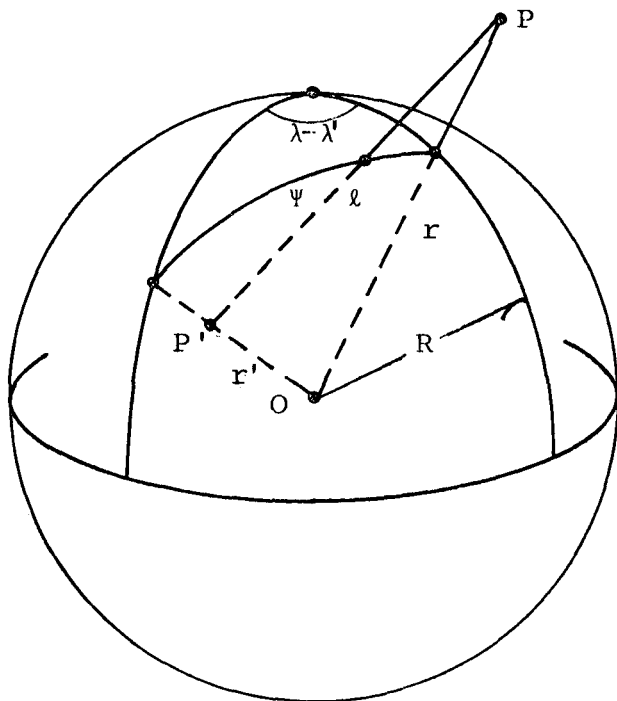


Fig. 2.6.2.1

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\ell} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\Psi), \quad \text{se } r' < r \\ \frac{1}{\ell} &= \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{R}\right)^n P_n(\cos\Psi), \quad \text{se } P \in \partial S_R. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2.9)$$

Então introduzindo (2.6.2.8) em (2.4.18) e notando que $p = -4\pi$, vem

$$\left(\frac{r'}{R}\right)^s Y_s(\theta', \lambda') = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s+1) \left(\frac{r'}{R}\right)^n Y_s(\theta, \lambda) P_n(\cos\Psi) d\sigma. \quad (2.6.2.10)$$

Integrando a série do segundo membro, encontramos

$$\left(\frac{r'}{R}\right)^s Y_s(\theta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r'}{R}\right)^n, \quad (2.6.2.11)$$

onde

$$C_n = \frac{n+s+1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} Y_s(\theta, \lambda) P_n(\cos\Psi) d\sigma. \quad (2.6.2.12)$$

Logo, de (2.6.2.11), temos

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq s \\ Y_n(\theta', \lambda') & \text{se } n = s. \end{cases} \quad (2.6.2.13)$$

Então, com esses valores a expressão (2.6.2.11) pode ser escrita na forma

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} Y_n(\theta, \lambda) P_n(\cos\Psi) d\sigma \quad (2.6.2.14)$$

ou, pela ortogonalidade entre Y e P

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} Y(\theta, \lambda) P_n(\cos\Psi) d\sigma. \quad (2.6.2.15)$$

2.6.3 DESENVOLVIMENTO DE UMA FUNÇÃO EM SÉRIE DE HARMÔNICOS ESFÉRICOS. TEOREMA DA ADIÇÃO.

Seja $S(0;R) \subset \mathbb{R}^3$ e $f: S_R \rightarrow \mathbb{R}$, com $f \in C(S_R)$. Nestas condições, a função f pode ser uniformemente aproximada por uma combinação linear de harmônicos esféricos. Assim,

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)], \quad (2.6.3.1)$$

onde a_{nm} e b_{nm} são coeficientes a determinar. Para isso, multipliquemos ambos os membros da expressão (2.6.3.1) por $R_{sr}(\theta, \lambda)$ e $S_{sr}(\theta, \lambda)$. A integração sobre a esfera das expressões assim obtidas proporciona a_{sr} e b_{sr} na seguinte forma

$$\int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) \begin{Bmatrix} R_{sr} \\ S_{sr} \end{Bmatrix}(\theta, \lambda) d\sigma = \begin{Bmatrix} a_{sr} \\ b_{sr} \end{Bmatrix} \int_{\partial\sigma} \left[\begin{Bmatrix} R_{sr} \\ S_{sr} \end{Bmatrix}(\theta, \lambda) \right]^2 d\sigma. \quad (2.6.3.2)$$

Então usando (2.6.2.5), (2.6.2.6) e (2.6.2.7), obtemos

$$\left. \begin{aligned} a_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) d\sigma, \quad \text{se } m = 0 \\ a_{nm} &= \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma, \\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.3.3)$$

Inicialmente, para obtermos a expressão do teorema da adição, vamos multiplicar (2.6.3.1) por $P_n(\cos\psi)\sin\theta$ e integrar sobre a esfera, o que nos dá, por (2.6.2.14)

$$\int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) P_n(\cos\psi) d\sigma = \frac{4\pi Y_n(\theta', \lambda')}{2n+1}. \quad (2.6.3.4)$$

Desenvolvendo $Y_n(\theta', \lambda')$ por (2.6.3.1), com os coeficientes expressos por (2.6.3.3), encontramos

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} [f(\theta, \lambda) P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') d\theta + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{\partial\sigma} f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos\theta) P_{nm}(\cos\theta') \cos m(\lambda - \lambda') d\sigma]$$

ou, usando (2.6.2.14) e (2.6.3.1)

$$P_n(\cos\Psi) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos\theta) P_{nm}(\cos\theta') \\ \cos m(\lambda - \lambda'), \quad (2.6.3.5)$$

onde, da Fig. 2.6.2.1

$$\cos\Psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda'). \quad (2.6.3.6)$$

2.6.4 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA HARMÔNICOS ESFÉRICOS TOTALMENTE NORMALIZADOS

Seguindo a terminologia de Heiskanen e Moritz [8], chamaremos harmônicos esféricos totalmente normalizados à função F_{nm} , definida por

$$F_{nm}(\theta, \lambda) = \sqrt{2n+1} P_n(\cos\theta), \quad \text{se } m = 0, \\ F_{nm}(\theta, \lambda) = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda, \end{cases} \quad (2.6.4.1)$$

naturalmente satisfazendo às condições:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} [F_{nm}(\theta, \lambda)]^2 d\sigma = 1, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} F_{nm}(\theta, \lambda) F_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0, \\ \text{se } n \neq s, m \neq r \text{ ou ambos.} \quad (2.6.4.2)$$

Introduzindo (2.6.4.1) em (2.6.3.5), vem

$$P_n(\cos \psi) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n F_{nm}(\theta, \lambda) F_{nm}(\theta', \lambda'); \quad (2.6.4.3)$$

e, por (2.4.2.9)

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n F_{nm}(\theta, \lambda) F_{nm}(\theta', \lambda'), \quad r > r'. \quad (2.6.4.4)$$

Multiplicando ambos os membros desta expressão por $F_{sr}(\theta', \lambda')$, integrando sobre a esfera e usando (2.6.4.2), resulta

$$\int_{\partial \sigma} \frac{F_{nm}(\theta', \lambda') d\sigma}{\ell} = \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \frac{4\pi}{2n+1} F_{nm}(\theta, \lambda), \quad (2.6.4.5)$$

ou, para $r' = r = R$

$$\int_{\partial \sigma} \frac{F_{nm}(\theta', \lambda') d\sigma}{\ell} = \frac{4\pi}{R(2n+1)} F_{nm}(\theta, \lambda). \quad (2.6.4.6)$$

2.7 PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO ASSOCIADOS À EQUAÇÃO DE LA PLACE

2.7.1 CONCEITUAÇÃO

De modo geral as equações diferenciais do tipo (2.2.6) admitem uma infinidade de soluções. Cabe então a seguinte pergunta: Que condições determinariam uma solução unívoca de tais equações? São as denominadas condições de contorno e condições iniciais, normalmente impostas por uma realidade física. Os problemas de valor de contorno propriamente ditos, são associados às equações diferenciais do tipo elítico enquanto os problemas de valor inicial e mistos são associados às equações diferenciais do tipo hiperbólico e parabólico.

Os três problemas clássicos de valor de contorno, associa

dos à equação de Laplace (2.2.21), podem ser formulados do seguinte modo: Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com fronteira $\partial\Omega$, e uma função contínua $v_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, determinar uma função $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, harmônica em Ω , tal que:

- PRIMEIRO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO OU DE DIRICHLET

$$v|_{\partial\Omega} = v_0 \text{ em } \partial\Omega; \quad (2.7.1.1)$$

- SEGUNDO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO OU DE NEUMANN

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = v_0 \text{ em } \partial\Omega; \quad (2.7.1.2)$$

- TERCEIRO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO OU DE HILBERT

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v\right) \Big|_{\partial\Omega} = v_0 \text{ em } \partial\Omega; \quad (2.7.1.3)$$

onde a função $\alpha: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que vamos supor não ser idênticamente nula, para não recair no problema de Neumann, é contínua e positiva.

Para um problema de equação diferencial ser de fato satisfatório, tem que ser o que se convencionou chamar desde Hadamard, bem posto e, como tal, deve satisfazer às condições de: |4, vol. 2|

- existência de soluções;
- unicidade de soluções com condições de contorno dadas;
- dependência contínua das soluções em relação a essas condições de contorno.

Assim, se um fenômeno físico admite uma representação matemática, a solução não deve conduzir à propriedades mutuamente

contraditórias, nem admitir ambigüidades inadmissíveis na situação física. Além disso, se essa representação matemática descreve um fenômeno natural observável, é necessário que exista dependência contínua entre o modelo matemático e os valores observados. Quando essas condições não são satisfeitas, o problema é dito mal posto.

2.7.2 APLICAÇÃO DA TEORIA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

O método de separação de variáveis é de grande importância em estudos de classes de funções da Física matemática. Entretanto, como recurso para a resolução de problemas de valor de contorno, tem aplicações limitadas, principalmente porque se restringe a contornos de formas particulares. Além disso, mesmo no caso de superfícies simétricas, as condições de contorno fixadas devem ser consideravelmente simples. Com este método, tanto o problema de Dirichlet como o de Neumann relativos à teoria do potencial, por exemplo, admitem soluções de forma relativamente simples. Enquanto que, para o problema de Hilbert, torna-se difícil chegar a uma solução explícita para a determinação dos coeficientes.

Neste aspecto, é extremamente vantajosa a aplicação da teoria das equações integrais na resolução de problemas de valor de contorno. Por outro lado, a maioria destes problemas pode ser formulada em termos de equações integrais e, desta forma, os métodos para resolução de equações integrais podem ser aplicados na resolução de problemas de valor de contorno em condições mais gerais que aquelas sob as quais as soluções são obtidas por separação de variáveis ou determinação explícita da função de

Green.

Consideremos o problema de Hilbert para uma função v em R^3 . Isto significa que procuramos uma função v em um aberto e limitado $\Omega \subset R^3$, tal que

$$\Delta v = 0 \quad \text{em } \Omega$$

e

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v\right) \Big|_{\partial \Omega} = v(b) \quad \text{em } \partial \Omega,$$

onde $v(b)$ representa o valor de v em $b \in \partial \Omega$

Introduzindo v em (2.4.18), temos

$$\int_{\Omega} u_a \Delta v dx = pv(x) + \int_{\partial \Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n}\right) dS, \quad (2.7.2.1)$$

onde $x \in \Omega$ é um ponto qualquer.

Supomos que $\Delta v = 0$ em Ω , então

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \left(u_a \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_a}{\partial n}\right) dS, \quad (2.7.2.2)$$

que, somando e subtraindo $u_a v \alpha$ no integrando, toma a forma

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} \left[u_a \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v\right) - v \left(\frac{\partial u_a}{\partial n} + \alpha u_a\right) \right] dS$$

ou, separando os termos conhecidos

$$v(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} v \left(\frac{\partial u_a}{\partial n} - \alpha u_a\right) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} u_a \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v\right) dS. \quad (2.7.2.3)$$

Fazendo $k(x,b) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u_a}{\partial n} - \alpha u_a\right)$ e

$$f(b) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \Omega} u_a \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \alpha v\right) dS,$$

temos

$$v(x) - \int_{\partial \Omega} k(x,b) v(b) dS = f(b), \quad (2.7.2.4)$$

que é uma equação integral para $v(x)$ e, portanto, do tipo (2.5.1.2). Com isso, o problema de valor de contorno dado inicialmente constituído de uma equação diferencial parcial e uma condição de contorno, se constitui agora na solução da equação integral (2.7.2.4).

CAPÍTULO III

FUNÇÕES POTENCIAIS

3.1 POTENCIAL DE ATRAÇÃO GRAVITACIONAL

Segundo a lei de Newton, da gravitação, a força de atração gravitacional entre uma partícula de massa m e uma partícula de massa unitária, atuante na direção da reta que as une, é dada por

$$F = K \frac{m}{\ell^2}, \quad (3.1.1)$$

onde k é a constante gravitacional e ℓ a distância entre as partículas.

Em simbolismo vetorial, a expressão (3.1.1) toma a forma

$$\vec{F} = -K \frac{m}{\ell^3} \vec{\ell}. \quad (3.1.2)$$

As componentes de \vec{F} são (Fig. 3.1.1)

$$F_i = -K \frac{m}{\ell^3} (x_i - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.1.3)$$

com

$$\ell = |\vec{\ell}| = \left[\sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.4)$$

onde ξ_i e x_i são as coordenadas da massa m e da massa unitária, respectivamente.

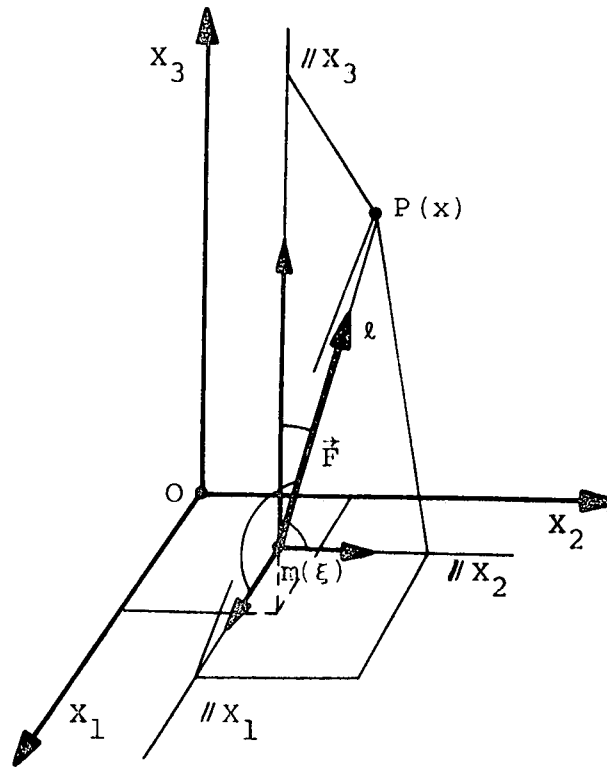


Fig. 3.1.1

A força gravitacional \vec{F} pode ser expressa em termos de uma função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, chamada função potencial, definida por

$$V = \frac{Km}{\ell}. \quad (3.1.5)$$

Neste caso, as componentes de \vec{F} são dadas pelas derivadas parciais de (3.1.5); assim

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = - \frac{Km}{\ell^3} (x_i - \xi_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1.6)$$

Logo ,

$$\vec{F} = \text{grad}V, \quad (3.1.7)$$

que é a função vetorial representativa do campo gravitacional gerado pela partícula de massa m .

A função potencial relativa a um conjunto com n partícu-

las de massas m_i é dada pela soma das contribuições, representadas em (3.1.5)

$$V = K \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\ell_i} . \quad (3.1.8)$$

Consideremos uma distribuição contínua de massas em um volume Ω (Fig. 3.1.2) cuja densidade representaremos por uma função $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\rho = \frac{dm}{dv} , \quad (3.1.9)$$

onde dm é um elemento de massa e dv um elemento de volume. Então, se ρ for limitada e integrável em Ω , a função potencial representada em (3.1.8), pode ser expressa na forma da integral

$$V = K \int_{\Omega} \frac{\rho}{\ell} dv, \quad (3.1.10)$$

com $dv = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

A função vetorial que representa o campo gravitacional produzido pelas massas contidas Ω , fica definida por suas componentes.

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -K \int_{\Omega} \frac{\rho}{\ell^3} (x_i - \xi_i) dv, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1.11)$$

e, portanto, depende das derivadas parciais de V em relação às variáveis de P . Temos assim, dois casos a considerar: $P \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ e $P \in (\Omega \cup \partial\Omega)$. No primeiro $\ell \neq 0$ sempre, e a expressão (3.1.11) será contínua, anulando-se quando P tende ao infinito. As derivadas parciais de segunda ordem, obtidas de (3.1.11), satisfazem a equação de Laplace.

$$\Delta V = 0. \quad (3.1.12)$$

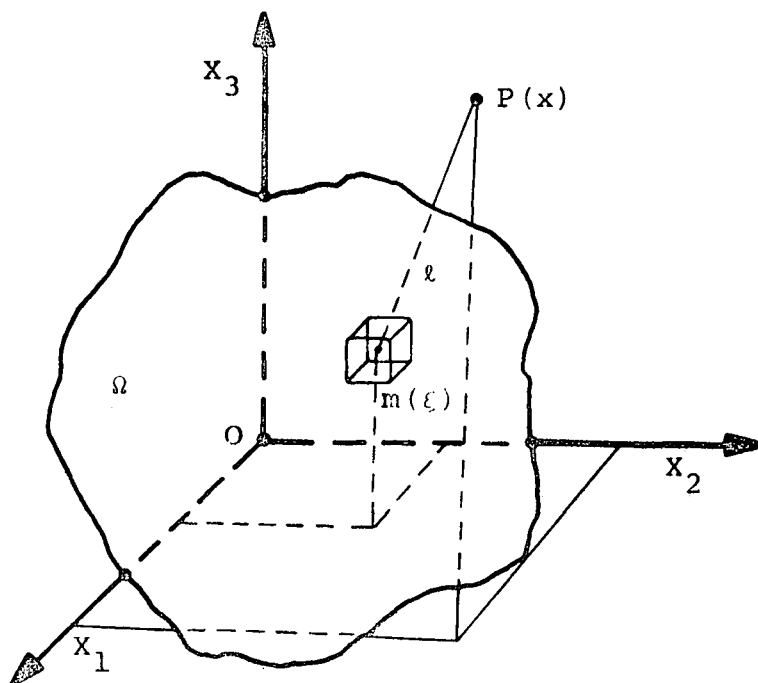


Fig. 3.1.2

No segundo caso, ρ assume o valor zero, resultando singularidades isoladas para a função (3.1.10) e suas derivadas parciais de primeira e segunda ordens. Entretanto, como ρ é limitada e integrável em Ω , as integrais representadas em (3.1.11) são da forma

$$I = \int_{\Omega} f(x) dv,$$

que convergem se $\alpha < 3$, com

$$|f(x)| < C\rho^{-\alpha}, \quad (3.1.13)$$

onde C é uma constante e ρ dada por (3.1.4).

As derivadas parciais de segunda ordem serão contínuas se

$$|\rho(x) - \rho(\xi)| < C\rho^\lambda, \quad (3.1.14)$$

com $0 < \lambda < 1$. Nessas condições, as derivadas parciais de segunda ordem satisfazem à equação de Poisson [10]

$$\Delta V = -4\pi K\rho . \quad (3.1.15)$$

3.2 POTENCIAL DEVIDO À FORÇA CENTRÍFUGA

A velocidade de uma partícula de massa unitária, situada no ponto P de um corpo com velocidade angular constante w (Fig. 3.2.1) é dada por

$$v = wr, \quad (3.2.1)$$

onde

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} .$$

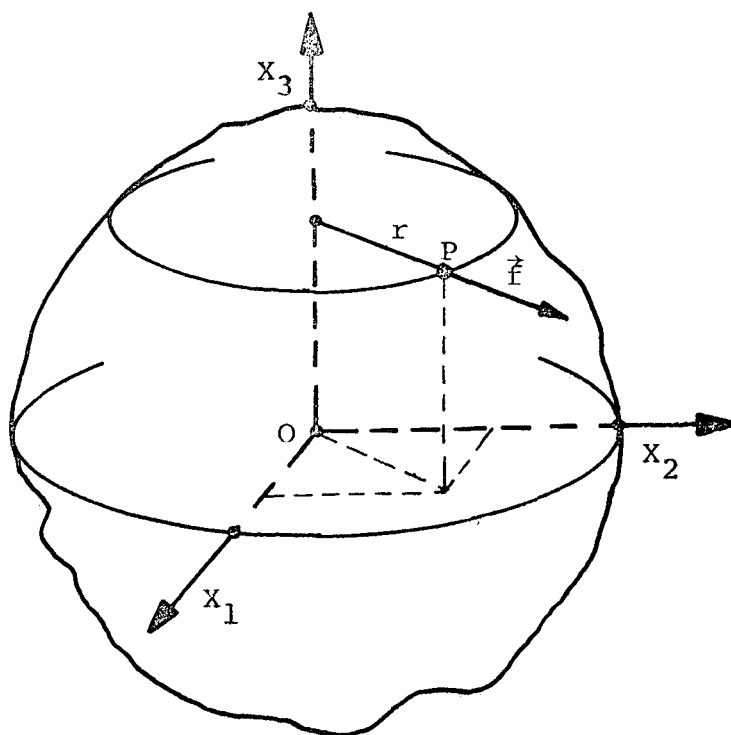


Fig. 3.2.1

As componentes da aceleração da partícula em relação à sua trajetória, são

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{r} = w^2 r, \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

sendo a_n e a_t as componentes normal e tangencial, respectivamente. Portanto, a força de natureza não gravitacional, que atua sobre essa partícula, é a força centrífuga, dada pela expressão

$$\vec{f} = w^2 \vec{r}. \quad (3.2.3)$$

A força \vec{f} pode ser associada a função potencial $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\phi = \frac{w^2 r^2}{2} \quad (3.2.4)$$

e tal que

$$\vec{f} = \text{grad}\phi, \quad (3.2.5)$$

que é a função vetorial representativa do campo gerado pela força centrífuga, que atua sobre a partícula de massa unitária situada em P.

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA FÍSICA

4.1 DEFINIÇÕES

Esta seção reúne as definições dos elementos fundamentais do problema de valor de contorno da Geodésia física, a ser tratado neste e nos capítulos seguintes.

Superfície física da Terra (∂F) - é a superfície limitante do relevo topográfico.

Força da gravidade (\vec{g}) - é a resultante da força gravitacional e da força centrífuga, que atuam em um corpo em repouso na superfície da Terra.

Aceleração da gravidade (\vec{g}) - é a aceleração produzida pela força da gravidade. Denominamos simplesmente gravidade (g) o módulo da aceleração da gravidade.

Geopotencial (W) - é o potencial do campo da gravidade

$$\vec{g} = \text{grad}W. \quad (4.1.1)$$

À superfície na qual o geopotencial é constante chamamos superfície geopotencial ou geope.

Vertical (v) - é uma linha de força no campo geopotencial.

Superfície geoidal (∂G) - é a superfície geopotencial que coincide com o nível médio dos mares, não perturbados.

Geóide (G) - é a forma geométrica das massas limitadas pela superfície geoidal.

Terra normal (E) - é o modelo de uma terra homogênea não perturbada, cuja forma é a de um elipsóide de revolução, com a mesma massa e o mesmo volume do geóide, tal que, o centro coincide com o centro de massa da Terra real e está sujeita à mesma rotação.

Aceleração da gravidade normal ($\vec{\gamma}$) - é a aceleração da gravidade da terra normal. Denominamos simplesmente gravidade normal (γ) o módulo da aceleração da gravidade normal.

Esferopotencial (U) - é o potencial do campo da gravidade normal

$$\vec{\gamma} = \text{grad}U. \quad (4.1.2)$$

À superfície na qual o esferopotencial é constante chamamos superfície esferopotencial ou esferope.

Normal (n) - é uma linha de força no campo esferopotencial.

Superfície do teluróide (∂T) - é a superfície cujo esferopotencial, em cada um de seus pontos, é igual ao geopotencial de um ponto correspondente na superfície física da Terra.

Potencial anômalo (T) - é a diferença entre o potencial produzido pela Terra real e o potencial produzido pela terra nor

mal, relativos a um mesmo ponto

$$T = W - U . \quad (4.1.3)$$

Altura geoidal (N) - é a distância, contada sobre a normal, entre um ponto sobre o geóide e sua projeção sobre o elipsóide. As alturas geoidais caracterizam as ondulações geoidais sobre o elipsóide.

Altitude de um ponto (H) - é a denominação genérica da distância compreendida entre o ponto e uma superfície de referência. Esta distância é contada ao longo de uma linha de força ou sobre sua tangente.

Vetor anomalia da gravidade ($\vec{\Delta g}$) - é a diferença entre a aceleração da gravidade em um ponto sobre o geóide, e a aceleração da gravidade normal na projeção desse ponto sobre o elipsóide.

$$\vec{\Delta g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q , \quad (4.1.4)$$

sendo Q a projeção de P.

Anomalia da gravidade (Δg) - é o módulo do vetor anomalia da gravidade

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q . \quad (4.1.5)$$

4.2 CONCEITUAÇÃO DO PROBLEMA

De modo geral, a solução do problema geodésico fundamental envolve três etapas (Fig. 4.2.1):

- estabelecer uma terra teórica E , e o campo de gravidade exterior a ela;
- introduzir uma superfície de referência $\partial\Omega$ e determinar suas deformações em relação a ∂E , de modo a definir uma correspondência biunívoca entre os pontos dessas superfícies;
- determinar as deformações de ∂F em relação a $\partial\Omega$ definindo, também, uma correspondência biunívoca entre seus pontos.

Então, na sua forma mais geral, o problema de valor de contorno geodésico pode ser formulado do seguinte modo: Determinar a superfície de referência $\partial\Omega$, e o geopotencial W , exterior a $\partial\Omega$, sendo conhecidos:

- o vetor da gravidade \vec{g} e o seu potencial W em todos os pontos de $\partial\Omega$;
- o potencial V_e , das massas exteriores a $\partial\Omega$.

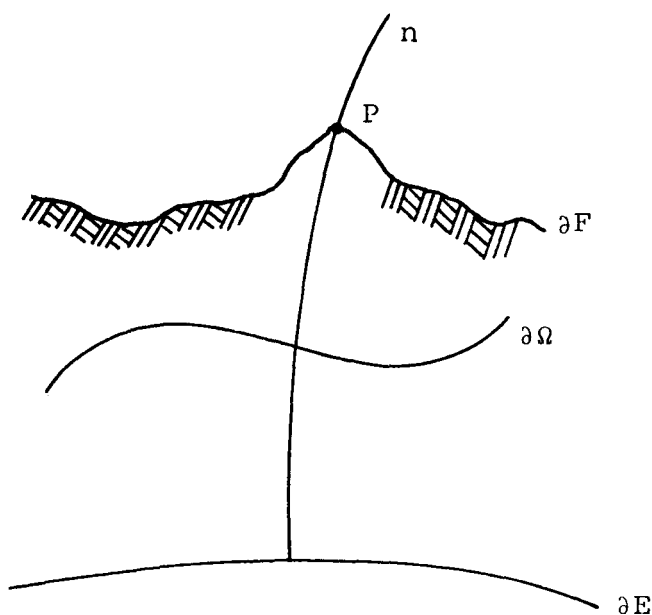


Fig. 4.2.1

Neste problema foram desenvolvidas duas teorias: a convencional, devida a Stokes, e a moderna, devida a Molodenskii; que diferem nas condições adicionais quanto a natureza da superfície de referência $\partial\Omega$ e quanto ao valor do potencial das massas exteriores V_e .

Na teoria convencional de Stokes, desenvolvida em 1849 [20], o problema foi proposto na seguinte forma: Dado \vec{g} e supondo que $V_e=0$ sobre a superfície equipotencial ∂G , determinar esta superfície e o geopotencial W , exterior a ∂G .

A teoria convencional foi substancialmente enriquecida com trabalhos de inúmeros geodestas deste século, explorando a teoria das equações integrais; mas o pioneirismo coube a Moiseev, citado por Molodenskii [13] que, por volta de 1933, deu ao problema a seguinte proposição: Dados \vec{g} e V_e sobre a superfície equipotencial ∂G , determinar esta superfície e o geopotencial W , exterior a ∂G .

Na teoria moderna, que se efetivou em 1945 com os trabalhos de Molodenskii [13], também com base na teoria das equações integrais, o problema foi proposto do seguinte modo: Dados \vec{g} e W sobre a superfície física da Terra ∂F , determinar esta superfície e o geopotencial W , exterior a ∂F .

Em princípio, por não ser conhecida a superfície de referência, o problema de valor de contorno geodésico não pode ser comparado àqueles da teoria do potencial. Entretanto, se a superfície for determinada, os problemas serão análogos. O problema fundamental, então, é a determinação da superfície de referência, que será assunto das próximas seções, com base na teoria das equações integrais, aplicadas ao problema de Hilbert (2.7.1.3)

4.3 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

Seja $\partial\Omega$ uma superfície arbitrária em relação à superfície física da Terra ∂F . O potencial gravitacional V , em um ponto $P \in \partial\Omega$ pode ser expresso a partir do potencial V_i , das massas interiores e do potencial V_e , das massas exteriores à $\partial\Omega$ (Fig. 4.3.1). Assim,

$$V = V_i + V_e. \quad (4.3.1)$$

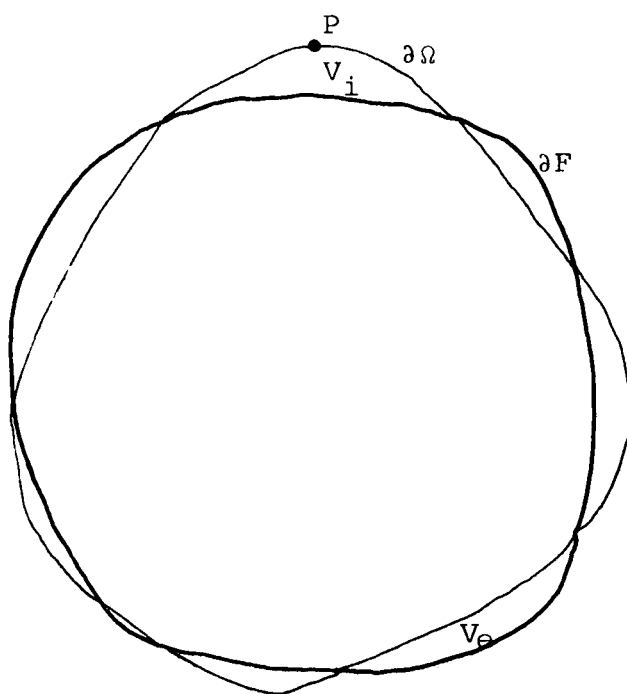


Fig. 4.3.1

O potencial da gravidade W no mesmo ponto será

$$W = V + \phi = V_i + V_e + \phi, \quad (4.3.2)$$

onde ϕ é o potencial devido à força centrífuga.

O potencial das massas interiores é uma função harmônica

em $R^3 \setminus \Omega$ e o potencial das massas exteriores é uma função harmônica em Ω .

Então, aplicando (2.4.23) e (2.4.18) a V_i e V_e , respectivamente, e notando que $p = -2\pi$, obtemos

$$2\pi V_i = \int_{\partial\Omega} \left[V_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_i}{\partial n} \right] dS, \quad (4.3.3)$$

$$2\pi V_e = - \int_{\partial\Omega} \left[V_e \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_e}{\partial n} \right] dS. \quad (4.3.4)$$

Como $P \in \partial\Omega$, temos ainda o potencial devido à força centrífuga. Então, por (2.4.18), vem

$$2\pi\phi = - \int_{\partial\Omega} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS - 2w^2 \int_{\Omega} \frac{dv}{\ell}, \quad (4.3.5)$$

sendo w a velocidade de rotação da Terra. Introduzindo essas expressões de V_i , V_e e ϕ em (4.3.2), obtemos a relação de $\partial\Omega$ com W , V_e e $\frac{\partial W}{\partial n}$ na forma de uma equação integral não linear.

$$-2\pi(W - 2V_e) + \int_{\partial\Omega} \left[W \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS + 4\pi\phi + 2w^2 \int_{\Omega} \frac{dv}{\ell} = 0, \quad (4.3.6)$$

que representa a equação fundamental do problema de valor de contorno da geodésia física, segundo a teoria de Graff-Hunter [7] e Molodenskii [13]. O geopotencial W , a menos de um fator de escala W_0 , pode ser determinado por nivelamento de precisão [2], combinado com medições gravimétricas e relacionados da seguinte forma [8]

$$W = W_0 - \int_0^P g dH, \quad (4.3.7)$$

onde dH é um elemento da distância entre as superfícies geopotenciais $W=W_0$ e $W=W_P$, contada sobre a vertical que passa por P . O fator de escala W_0 pode ser determinado por processos indiretos, especialmente medições de distâncias. A componente do geopotencial $\frac{\partial W}{\partial n}$ é expressa em termos de \vec{g} , cujo módulo é o valor

medido e cuja direção é fixada por coordenadas astronômicas (ϕ, λ) .

4.4 RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES APROXIMADAS E AS FUNÇÕES VERDADEIRAS

Inicialmente a equação (4.3.6) deve ser linearizada. Para isso, o esferopotencial U substitui o geopotencial W , e a superfície do teluróide, que vamos representar por ∂T , substitui $\partial \Omega$. Vamos então obter as relações necessárias.

O esferopotencial em P será (Fig. 4.4.1)

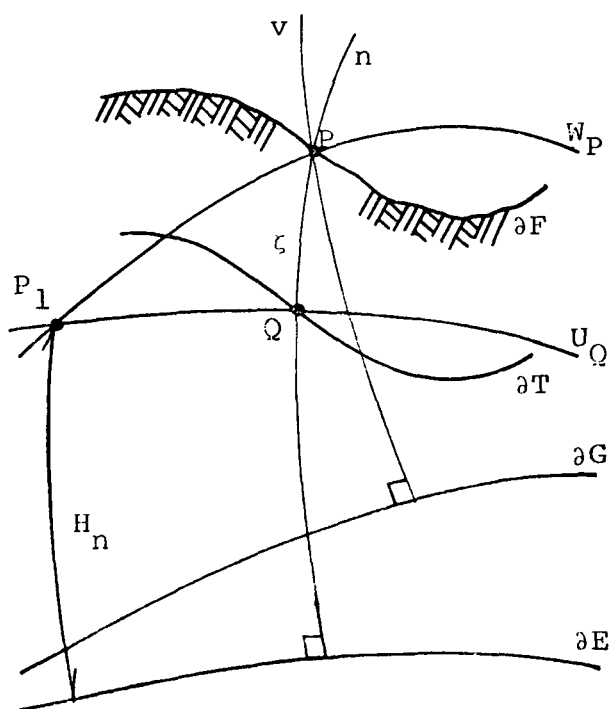


Fig. 4.4.1

$$U_P = U_Q + \frac{\partial U}{\partial h} \zeta = U_Q - \gamma \zeta, \quad (4.4.1)$$

onde h é normal à superfície esferopotencial em Q .

Por definição de potencial anômalo,

$$T = W_P - U_P, \quad (4.4.2)$$

ou, usando (4.4.1)

$$T = W_P - U_Q + \gamma \zeta \quad (4.4.3)$$

e, com a definição da superfície do teluróide

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}, \quad (4.4.4)$$

que é a fórmula de Brun, relacionando a anomalia de altitude ζ com o potencial anômalo T e a gravidade normal γ .

É necessário ainda expressarmos as componentes principais do desvio da vertical, em função do potencial anômalo. Da Fig. 4.4.2 tiramos

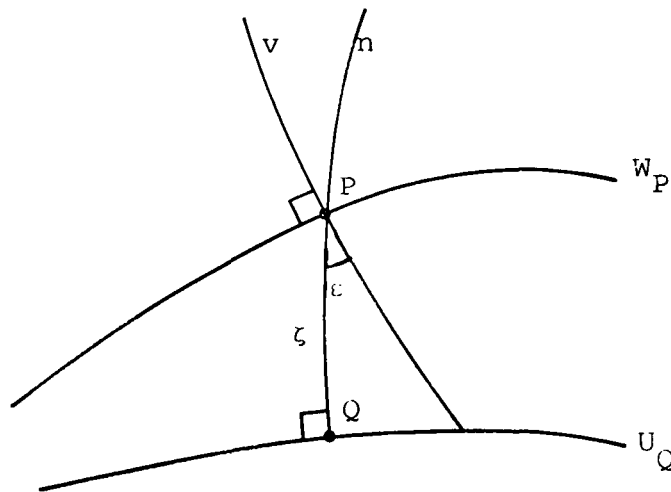


Fig. 4.4.2

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{\partial W}{\partial s}}{\frac{\partial W}{\partial n}}, \quad (4.4.5)$$

onde $W = U + T$ é o geopotencial em Q .

Mas

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s}, \quad (4.4.6)$$

pois, para $x_3 = n$, $\frac{\partial x_3}{\partial s} = 0$. Como a direção de s está contida no plano $x_1 x_2$, tangente à superfície esferopotencial $U_0 = \text{cte}$, então $\frac{\partial U}{\partial s} = 0$ e, em vez de (4.4.6), podemos escrever

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (4.4.7)$$

O denominador de (4.4.5) pode ainda ser escrito na forma

$$\frac{\partial W_0}{\partial n} = -g_p \cos \varepsilon \approx -\gamma_Q. \quad (4.4.8)$$

Fazendo $\text{tg} \varepsilon \approx \varepsilon$, encontramos

$$\varepsilon = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (4.4.9)$$

De (4.4.4), temos

$$T = \gamma \zeta$$

ou, derivando em relação a s

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \zeta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial s} \approx \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial s}. \quad (4.4.10)$$

Substituindo (4.4.10) em (4.4.9), vem

$$\varepsilon = -\frac{\partial \zeta}{\partial s};$$

de modo que as componentes principais do desvio da vertical sobre a superfície esferopotencial $U=W_0$, são

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = \xi &= -\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_2 = \eta &= -\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.11)$$

A anomalia de altitude ζ entretanto se refere à superfície do te luróide; logo, devemos expressar ξ e η em relação a esta super fície. Inicialmente vamos obter a componente normal do poten-

cial anômalo. Derivando (4.4.3) em relação a x_3 , vem

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial T}{\partial h} = -g_P + \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \zeta$$

ou ainda

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = -\Delta g + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{T}{\gamma}. \quad (4.4.12)$$

A superfície $U=W_P$, na vizinhança de Q, é dada por

$$x_3 = 0.$$

Então, representando a superfície do teluróide em Q por

$$x_3 = h(x_1, x_2),$$

a anomalia de altitude pode ser expressa na forma

$$\zeta = \zeta(x_1, x_2, h(x_1, x_2)). \quad (4.4.13)$$

As derivadas de (4.4.13) ao longo da superfície do teluróide são

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \Big|_{\partial T} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \Big|_{U=W_P} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \operatorname{tg} \beta_1, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \Big|_{\partial T} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \Big|_{U=W_P} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \operatorname{tg} \beta_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.14)$$

onde

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

Mas, de (4.4.4),

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{T}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x_3} - \frac{T}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_3} \quad (4.4.15)$$

ou, usando (4.4.12)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} = -\frac{\Delta g}{\gamma}, \quad (4.4.16)$$

onde

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q \cdot$$

Introduzindo (4.4.16) em (4.4.14), vem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \Big|_{\partial T} - \frac{\Delta g}{\gamma} \operatorname{tg} \beta_1' \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \Big|_{\partial T} - \frac{\Delta g}{\gamma} \operatorname{tg} \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.17)$$

ou, por (4.4.11)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= - \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \Big|_{\partial T} - \frac{\Delta g}{\gamma} \operatorname{tg} \beta_1' \\ \eta &= - \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \Big|_{\partial T} - \frac{\Delta g}{\gamma} \operatorname{tg} \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.4.18)$$

É necessário ainda obtermos a derivada do potencial anômalo em relação à normal. Para isso, vamos aplicar (I.30) a T e h

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} - \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3, \quad (4.4.19)$$

com $\tilde{D}(T, h)$ dado por (I.32)

$$\tilde{D}(T, h) = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \frac{\partial h}{\partial x_2}. \quad (4.4.20)$$

Usando (4.4.12) em (4.4.19), obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\cos \beta_3} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T - \Delta g \right) - \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3. \quad (4.4.21)$$

4.5 EQUAÇÃO INTEGRAL DO POTENCIAL ANÔMALO - FORMA GERAL

A equação integral básica (4.3.6) pode agora ser linearizada. Para isso, vamos supor que o esferopotencial U seja uma

função harmônica em $R^3 \setminus (\Omega \cap E)$, isto significa que $V_e = 0$ para o campo da gravidade normal. Então, aplicando (4.3.6) ao potencial normal, temos

$$-2\pi U + \int_{\partial\Omega} \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS + 2\pi\phi + 2w^2 \int_{\Omega} \frac{dv}{\ell} = 0. \quad (4.5.1)$$

Subtraindo esta de (4.3.6) e usando (4.4.2), vem

$$-2\pi (T - V_e) + \int_{\partial T} \left[T \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} \right] dS = 0, \quad (4.5.2)$$

onde ∂T é a superfície aproximada para $\partial\Omega$. Com (4.4.21), podemos escrever ainda

$$2\pi (T - 2V_e) - \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \right] T dS = \int_{\partial T} \frac{\Delta g}{\ell \cos \beta_3} dS + \int_{\partial T} \frac{1}{\ell} \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3 dS. \quad (4.5.3)$$

Por (I.25), temos

$$\int_{\partial T} \frac{1}{\ell} \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3 dS = \int_{\partial T} \tilde{D} \left(\frac{T}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 dS - \int_{\partial T} T \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3, \quad (4.5.4)$$

mas de (I.27)

$$\int_{\partial T} \frac{1}{\ell} \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3 dS = - \int_{\partial T} \frac{T}{\ell} \Delta_2(h) \cos \beta_3 dS,$$

então, usando esta em (4.5.4), fica

$$\int_{\partial T} \frac{1}{\ell} \tilde{D}(T, h) \cos \beta_3 dS = - \int_{\partial T} \frac{T}{\ell} \Delta_2(h) \cos \beta_3 dS - \int_{\partial T} T \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 dS. \quad (4.5.5)$$

Finalmente, introduzindo (4.5.5) em (4.5.3), encontramos

$$T - 2V_e - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] T dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{\Delta g}{\ell \cos \beta_3} dS, \quad (4.5.6)$$

que é uma equação integral de Fredholm, linear e de segunda espécie, para o potencial anômalo T .

CAPÍTULO V

PROBLEMA DO COGEÓIDE

5.1 FÓRMULA DE STOKES PARA A ESFERA

5.1.1 EQUAÇÃO INTEGRAL DO POTENCIAL ANÔMALO RELATIVA À ESFERA

Consideremos a superfície equipotencial limitante da Terra cujas massas topográficas tenham sido removidas, denominada superfície do cogeóide, que representaremos por ∂C . Então, no exterior desta superfície, será nulo o potencial V_e . Além disso, como se trata de uma superfície horizontal, $h=0=\beta$, de modo que a equação (4.5.6), aplicada ao cogeóide, toma a forma.

$$T_C \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] T_C dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{\Delta g_C}{\ell} dS, \quad (5.1.1.1)$$

onde a integração, neste caso, é conduzida sobre a superfície do elipsóide.

Esta é a equação integral do potencial anômalo relativa ao problema clássico. Para obtermos a aproximação esférica desta equação, vamos desenvolver o raio vetor de um ponto sobre o elipsóide de revolução, em série de potências, e desprezar os termos contendo o quadrado da segunda excentricidade. Da Fig. 5.1.1.1, tiramos

$$r = \frac{a}{(1+e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.1.1.2)$$

onde

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (5.1.1.3)$$

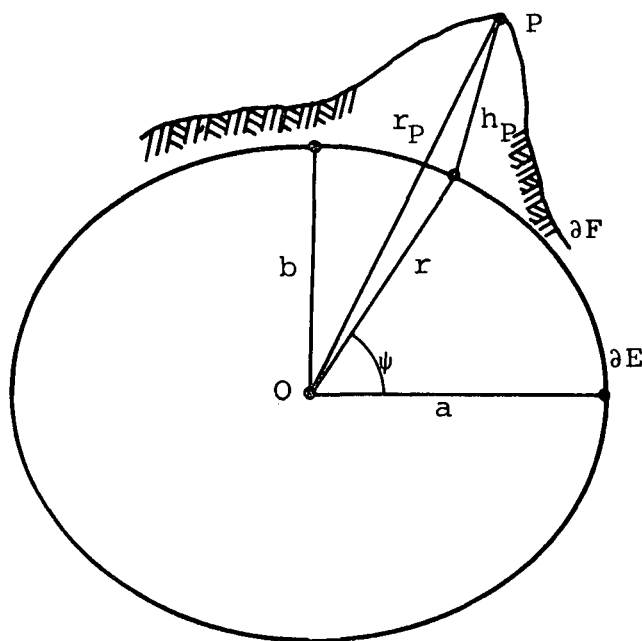


Fig. 5.1.1.1

Desenvolvendo (5.1.1.2) em série binomial temos, para o vetor-posição de P

$$r_p = a \left(1 - \frac{e'^2 \operatorname{sen}^2 \psi}{2} + \dots \right) + h_p. \quad (5.1.1.4)$$

A expressão de a, em função do raio R, da esfera com o mesmo volume do elipsóide de revolução, é dada por

$$a = R(e'^2 + 1)^{\frac{1}{6}}, \quad (5.1.1.5)$$

ou ainda, desenvolvendo em série binomial

$$a = R \left(1 + \frac{e'^2}{6} - \dots \right). \quad (5.1.1.6)$$

Usando (5.1.1.6) em (5.1.1.4), encontramos

$$r_P = R \left(1 + \frac{e'^2}{6} - \frac{e'^2 \sin^2 \psi}{2} - \dots \right) + h_P. \quad (5.1.1.7)$$

Isto significa que desprezando os termos em e'^2 , o elipsóide as sume a forma de uma esfera de raio R .

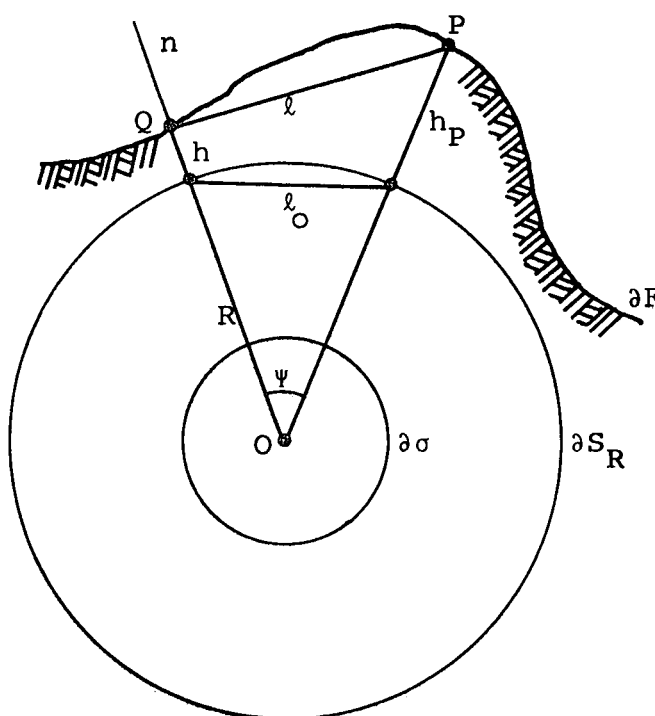


Fig. 5.1.1.2

Na Fig. 5.1.1.2 temos

$$\frac{1}{\ell} = (r^2 + r_P^2 - 2rr_P \cos \psi)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.1.1.8)$$

onde, como aproximação esférica

$$\begin{aligned} r &= R + h, \\ r_P &= R + h_P. \end{aligned} \quad (5.1.1.9)$$

Se $P, Q \in \partial S_R$, a direção de n coincide com a direção de r , então

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\ell} \right) = - \frac{r - r_p \cos \psi}{\ell^3} ; \quad (5.1.1.10)$$

como, nesse caso, $r = r_p = R$, por (5.1.1.8), temos

$$\ell_0 = 2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \quad (5.1.1.11)$$

que, substituindo em (5.1.1.10) resulta

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell_0} \right) = - \frac{1}{2R\ell_0} \quad (5.1.1.12)$$

Além disso,

$$\gamma \approx \frac{KM}{R^2} , \quad (5.1.1.13)$$

onde K é a constante gravitacional e M a massa da Terra. Como

$\frac{\partial \gamma}{\partial R} = - \frac{2\gamma}{R}$, podemos escrever

$$- \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} = - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{2}{R} . \quad (5.1.1.14)$$

Então, com (5.1.1.12) e (5.1.1.14), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell_0} \right) - \frac{1}{\ell_0 \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{3}{2R\ell_0} . \quad (5.1.1.15)$$

Usando (5.1.1.14) e (5.1.1.15) em (5.1.1.1), vem

$$T_C(\phi, \lambda) - \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial \sigma} \frac{T_C(\phi', \lambda')}{\ell_0} d\sigma = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial \sigma} \frac{\Delta g_C(\phi', \lambda')}{\ell_0} d\sigma, \quad (5.1.1.16)$$

que é a equação integral do potencial anômalo, relativa à fórmula de Stokes para esfera.

5.1.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DO POTENCIAL ANÔMALO RELATIVA À ESFERA

Para resolver a equação integral (5.1.1.16) vamos desen-

volver T_C e Δg_C em série de harmônicos esféricos totalmente normalizados

$$\left. \begin{aligned} T_C(\phi, \lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} (T_C)_n(\phi, \lambda), \\ \Delta g_C(\phi', \lambda') &= \sum_{n=2}^{\infty} (\Delta g_C)_n(\phi', \lambda'), \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2.1)$$

onde $n \neq 1$, pois o centro do elipsóide coincide com o centro de massa da Terra.

Introduzindo (5.1.2.1) em (5.1.1.16), vem

$$(T_C)_n = \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{(T_C)_n}{\ell_0} d\sigma = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{(\Delta g_C)_n}{\ell_0} d\sigma. \quad (5.1.2.2)$$

Além disso, de (2.6.4.6), temos

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{R(2n+1)} (T_C)_n &= \int_{\partial\sigma} \frac{(T_C)_n}{\ell_0} d\sigma \\ e \\ \frac{4\pi}{R(2n+1)} (\Delta g_C)_n &= \int_{\partial\sigma} \frac{(\Delta g_C)_n}{\ell_0} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.2.3)$$

Usando (5.1.2.3) em (5.1.2.2), encontramos

$$(T_C)_n = R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\Delta g_C)_n}{n-1} \quad (5.1.2.4)$$

ou, por (2.6.2.15)

$$T_C = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta g_C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) d\sigma. \quad (5.1.2.5)$$

Fazendo

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \quad (5.1.2.6)$$

ou ainda

$$S(\psi) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos\psi) + 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n-1} P_n(\cos\psi), \quad (5.1.2.7)$$

onde (Fig. 5.1.2.1)

$$\alpha = \frac{r'}{r}.$$

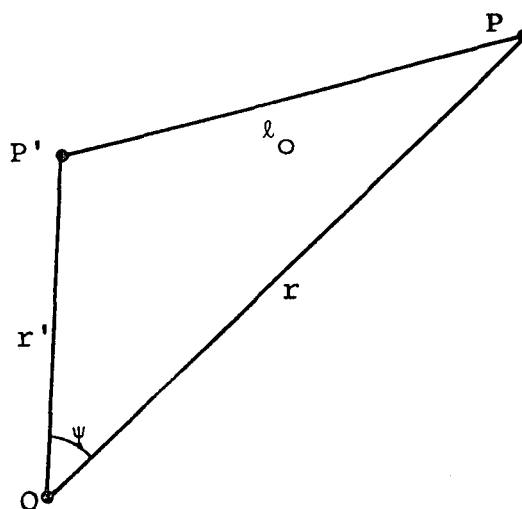


Fig. 5.1.2.1

Mas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos \psi) = 1 + \cos \psi + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos \psi) = (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-\frac{1}{2}};$$

então

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos \psi) = (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-\frac{1}{2}} - 1 - \cos \psi. \quad (5.1.2.8)$$

Por outro lado

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{n-2} P_n(\cos \psi) = \alpha^{\frac{1}{2}} \left[(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-\frac{1}{2}} - 1 - \cos \psi \right],$$

que integrando no intervalo $(0, \alpha)$ e efetuando operações algébricas, resulta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n-1} P_n(\cos \psi) = - (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{\frac{1}{2}} - \alpha \cos \psi \ell \frac{1 - \alpha \cos \psi + (1 - \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{\frac{1}{2}}}{2} - \alpha \cos \psi. \quad (5.1.2.9)$$

Introduzindo (5.1.2.8) e (5.1.2.9) em (5.1.2.7), vem

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \Psi) = 2(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi)^{-\frac{1}{2}} + 1 - 5\cos \Psi - 3\alpha \cos \Psi \ell_n \frac{1 - \alpha \cos \Psi + (1+\alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi)}{2}. \quad (5.1.2.10)$$

Em particular, se $P, Q \in \partial S_R$, temos

$$S(\Psi) = \frac{1}{\sin \frac{\Psi}{2}} - 6 \sin \frac{\Psi}{2} + 1 - 5 \cos \Psi - 3 \cos \Psi \ell_n \left(\sin^2 \frac{\Psi}{2} + \sin \frac{\Psi}{2} \right). \quad (5.1.2.11)$$

Então, podemos escrever (5.1.2.5) na forma

$$T_C = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial \sigma} \Delta g_C' S(\Psi) d\sigma, \quad (5.1.2.12)$$

que é a solução de (5.1.1.16), com $S(\Psi)$ dada por (5.1.2.11). Com a fórmula de Brun (4.4.4), aplicada ao cogeóide, obtemos

$$N_C = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\partial \sigma} \Delta g_C' S(\Psi) d\sigma, \quad (5.1.2.13)$$

para as alturas da superfície do cogeóide.

5.2 FÓRMULA DE STOKES PARA O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

5.2.1 EQUAÇÃO INTEGRAL DO POTENCIAL ANÔMALO RELATIVA AO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

A solução da equação integral (5.1.1.1), obtida na seção anterior, foi limitada a uma aproximação esférica pelo truncamento das séries dos elementos geométricos do elipsóide de revolução. Nesta seção o problema será tratado até termos da ordem de e'^2 .

Vamos estabelecer a equação integral do potencial anômalo, começando pela obtenção da derivada normal do inverso da distância entre P' e P (Fig. 5.2.1.1)

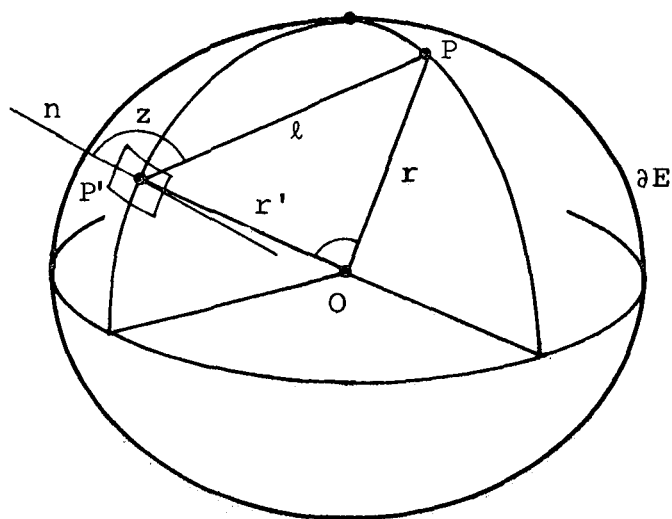


Fig. 5.2.1.1

Da expressão (II.12), temos

$$\frac{1}{\ell} = - \frac{1}{2N' \cos z} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \alpha_3 \right); \quad (5.2.1.1)$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) = - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial \ell}{\partial n} = \frac{1}{\ell^2} \cos z$$

ou

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) \frac{\ell}{\cos z} .$$

Comparando esta com (5.2.1.1) vem

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) = - \frac{1}{2\ell N'} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \alpha_3 \right), \quad (5.2.1.2)$$

onde, de (II.2)

$$\cos \alpha_3 = \frac{1}{\ell} \left(\frac{b}{a} \right)^2 (N \sin \phi - N' \sin \phi').$$

O esferopotencial sobre a terra normal é dado por

$$U = V + \phi, \quad (5.2.1.3)$$

onde V é o potencial gravitacional e ϕ o potencial devido à força centrífuga. A equação generalizada de Poisson nos dá

$$\Delta U = -4\pi K\rho + 2w^2, \quad (5.2.1.4)$$

sendo ρ a densidade da distribuição de massa, e w a velocidade angular.

As derivadas parciais de primeira ordem do esferopotencial $U(x_1, x_2, x_3)$, relativas ao sistema $X_1 X_2 X_3$, são

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos\alpha_i = \gamma \cos\alpha_i, \quad i=1,2,3; \quad (5.2.1.5)$$

as de segunda ordem, obtidas a partir destas, proporcionam

$$\Delta U = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \cos\alpha_i - \gamma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \cos\alpha_i}{\partial x_i}, \quad (5.2.1.6)$$

onde γ é a gravidade normal e $\cos\alpha_i$, $i=1,2,3$; os co-senos diretores da normal à superfície

$$U(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \text{cte.}$$

Notando que $|3|, |18|$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \cos\alpha_i = \frac{\partial \gamma}{\partial n},$$

e

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \cos\alpha_i}{\partial x_i} = 2K = \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{N'}\right),$$

podemos escrever (5.2.1.6) na forma

$$\Delta U = - \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{N'}\right), \quad (5.2.1.7)$$

onde

$$\frac{1}{M'} = \frac{a^2 b^2}{p^3},$$

$$\frac{1}{N'} = \frac{a^2}{p},$$

com

$$p^2 = a^2 \cos^2 \phi' + b^2 \sin^2 \phi'.$$

Comparando (5.2.1.7) com (5.2.1.4), encontramos

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \gamma \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{N'} \right) - 4\pi K\rho + 2w^2. \quad (5.2.1.8)$$

Com a remoção das massas topográficas, exteriores a ∂E , temos $\rho = 0$, então

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \gamma \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{N'} \right) + 2w^2. \quad (5.2.1.9)$$

Introduzindo (5.2.1.2) e (5.2.1.9) em (5.1.1.1), obtemos

$$T_C - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{2N'} + \frac{2w^2}{\gamma} - \frac{e'^2 \cos^2 \alpha_3}{2N'} \right) T_C dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{\Delta g_C}{\ell} dS, \quad (5.2.1.10)$$

que é a equação integral do potencial anômalo, para o elipsóide de revolução.

5.2.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL RELATIVA AO ELIPSÓIDE

Para a resolução da equação (5.2.1.10), até termos de segunda ordem em relação a e' , é necessário que se estabeleça uma correspondência biunívoca dos pontos do elipsóide de revolução com os pontos de uma esfera auxiliar. A representação desses pontos sobre a esfera pode ser obtida a partir das coordenadas (ϕ, λ) , (β, λ) , ou (ψ, λ) , onde ϕ, β, ψ são as latitudes geodésicas

ca, reduzida e geocêntrica, respectivamente, e λ é a longitude. Dependendo das coordenadas adotadas o raio da esfera poderá ser: o raio terrestre médio [16] ou o semi-eixo maior do elipsóide de revolução [13]. Vamos usar coordenadas geocêntricas por meio das fórmulas do Apêndice III. Portanto, usando (III.22), (III.23), (III.24), (III.25) e (III.26) em (5.2.1.10), vem

$$\begin{aligned} T_C(1 - \frac{e'^2}{4} \text{sen}^2 \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \left[\frac{3}{4\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}} + e'^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{5\text{sen}^2 \psi'}{3} + \frac{4m}{3e'^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\text{sen} \psi - \text{sen} \psi')^2}{12\text{sen}^2 \frac{\psi}{2}} - \frac{3}{4\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}} T_C(1 - \frac{e'^2 \text{sen}^2 \psi'}{4}) \right] d\sigma = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{a\Delta g_C(1 - \frac{3e'^2 \text{sen}^2 \psi}{4})}{2\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}} d\sigma, \end{aligned} \quad (5.2.2.1)$$

onde $d\sigma = \cos \psi' d\psi' d\lambda'$ e, portanto com a integração sobre a esfera de raio unitário.

Fazendo

$$\tilde{T}(\psi, \lambda) = T_C(\psi, \lambda) (1 - \frac{e'^2}{4} \text{sen}^2 \psi), \quad (5.2.2.2)$$

$$\tilde{T}(\psi', \lambda') = T_C(\psi', \lambda') (1 - \frac{e'^2}{4} \text{sen}^2 \psi'), \quad (5.2.2.3)$$

$$\Delta \tilde{g}(\psi', \lambda') = \Delta g_C(\psi', \lambda') (1 - \frac{3e'^2}{4} \text{sen}^2 \psi'), \quad (5.2.2.4)$$

$$f_0 = \frac{3}{4\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}}, \quad (5.2.2.5)$$

$$f_1 = \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \text{sen}^2 \psi + \frac{4m}{3e'^2} - \frac{(\text{sen} \psi - \text{sen} \psi')^2}{12\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}} \right] f_0; \quad (5.2.2.6)$$

e substituindo em (5.2.2.1), temos

$$\tilde{T} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} (f_0 + e'^2 f_1) \tilde{T} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{a\Delta \tilde{g}}{2\text{sen}^{\frac{\psi}{2}}} d\sigma. \quad (5.2.2.7)$$

Vamos escrever \tilde{T} como uma série de potências em e'

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 + e'^2 \tilde{T}_1 + e'^4 \tilde{T}_2 + \dots, \quad (5.2.2.8)$$

onde \tilde{T}_0 representa o potencial anômalo sobre uma esfera de raio igual ao semi-eixo maior.

Introduzindo (5.2.2.8) em (5.2.2.7), encontramos

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 + e'^2 \tilde{T}_1 + \dots - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} (f_0 + e'^2 f_1) (\tilde{T}_0 + e'^2 \tilde{T}_1 + \dots) d\sigma = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{a\Delta\tilde{g}}{2\text{sen}\frac{\psi}{2}} d\sigma; \end{aligned}$$

e, comparando os termos de mesma potência em e' , vem

$$\tilde{T}_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} f_0 \tilde{T}_0 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{a\Delta\tilde{g}}{2\text{sen}\frac{\psi}{2}} d\sigma, \quad (5.2.2.9)$$

$$\tilde{T}_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} f_1 \tilde{T}_1 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} f_0 \tilde{T}_1 d\sigma. \quad (5.2.2.10)$$

A equação (5.2.2.9) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 - \frac{3}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_0}{2\text{sen}\frac{\psi}{2}} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{a\Delta\tilde{g}}{2\text{sen}\frac{\psi}{2}} d\sigma \\ \text{ou} \\ \tilde{T}_0 - \frac{3a}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_0}{\ell} d\sigma = \frac{a^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\Delta\tilde{g}}{\ell} d\sigma, \end{aligned} \quad (5.2.2.11)$$

que é uma equação integral em \tilde{T}_0 para uma esfera de raio a , com a mesma forma da equação (5.1.1.16). Então a solução de (5.2.2.11) é dada por

$$\tilde{T}_0 = \frac{a}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta\tilde{g} S(\psi) d\sigma. \quad (5.2.2.12)$$

Substituindo (5.2.2.5) e (5.2.2.6) em (5.2.2.10), vem

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 - \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_1}{\text{sen}\frac{\psi}{2}} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_0}{\text{sen}\frac{\psi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \text{sen}^2 \psi' + \frac{m}{e'^2} - \right. \\ \left. - \frac{(\text{sen}\psi - \text{sen}\psi')^2}{16\text{sen}^2 \frac{\psi}{2}} \right] d\sigma; \end{aligned}$$

fazendo

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_0}{\text{sen}^{\frac{\Psi}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \text{sen}^2 \psi + \frac{m}{e, 2} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_0 (\text{sen}\psi - \text{sen}\psi')}{8 \text{sen}^3 \frac{\Psi}{2}} d\sigma, \quad (5.2.2.13)$$

resulta

$$\tilde{T}_1 - \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\tilde{T}_1}{\text{sen}^{\frac{\Psi}{2}}} d\sigma = F, \quad (5.2.2.14)$$

cuja solução pode ser obtida diretamente se \tilde{T}_1 e F forem representados pelas séries

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} (\tilde{T}_1)_n, \\ F &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2.15)$$

Substituindo (5.2.2.15) em (5.2.2.14) e notando que [18]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\Psi) = \frac{1}{2 \text{sen} \frac{\Psi}{2}},$$

obtemos

$$(\tilde{T}_1)_n - \frac{3}{4\pi} \int_{\partial\sigma} (\tilde{T}_1)_n P_n(\cos\Psi) d\sigma = F_n,$$

ou, por (2.4.2.14)

$$\tilde{T}_1 = F + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} F_n. \quad (5.2.2.16)$$

Usando (2.6.2.15), encontramos

$$\tilde{T}_1 = F + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} F \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\Psi) d\sigma,$$

de modo que

$$\tilde{T}_1 = F + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} FS(\Psi) d\sigma, \quad (5.2.2.17)$$

é solução de (5.2.2.14).

De (5.2.2.2) e (5.2.2.8), podemos escrever

$$T = \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi\right) \bar{T}_0 + e'^2 \bar{T}_1;$$

e, introduzindo (5.2.2.12) e (5.2.2.4) chegamos a

$$\begin{aligned} T_C = & \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi\right) \frac{a}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta g_C S(\Psi) d\sigma - \frac{3ae'^2}{16\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta g_C \operatorname{sen}^2 \psi' S(\Psi) d\sigma + \\ & + e'^2 \left[F + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} FS(\Psi) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.2.2.18)$$

De (5.2.2.13), (5.2.2.12) e (5.2.2.4), vem

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} T_0 \left(1 - \frac{5}{2} \operatorname{sen}^2 \psi' + \frac{m}{e'^2}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma} T_0 \frac{(\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \psi')^2}{8 \operatorname{sen}^3 \frac{\psi}{2}} d\sigma, \quad (5.2.2.19)$$

com

$$T_0 = \frac{a}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta g_C S(\Psi) d\sigma.$$

Na expressão (5.2.2.19) foram omitidos os termos em e'^2 pois todos os termos que contêm F , em (5.2.2.18) estão multiplicados por e'^2 .

Então, por (5.2.2.19) a expressão (5.2.2.17) pode ser escrita na forma

$$T_C = \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi\right) T_0 + e'^2 \left\{ F + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} \left[F - \frac{a}{2} \Delta g_C \operatorname{sen}^2 \psi' S(\Psi) \right] d\sigma \right\}, \quad (5.2.2.20)$$

que é a solução aproximada de (5.2.1.16). Pela fórmula de Brun (4.4.4), as alturas do cogeóide são

$$N_C = \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi\right) \frac{T_0}{\gamma} + \frac{e'^2}{\gamma} \left\{ F + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} \left[F - \frac{a}{2} \Delta g_C \operatorname{sen}^2 \psi' S(\Psi) \right] d\sigma \right\}. \quad (5.2.2.21)$$

CAPÍTULO VI

PROBLEMA DO GEÓIDE

6.1 EQUAÇÃO INTEGRAL DO POTENCIAL ANÔMALO PARA A ESFERA

Na teoria de Moiseev, a condição de inexistência das massas topográficas não é inserida no problema de valor de contorno. Isto significa que não é necessário fixar a priori um tipo de redução aos valores medidos, nem considerar este como um problema separado e independente. O processo de redução aos valores medidos é uma decorrência da estrutura da equação original e suas transformações subsequentes. Este é um aspecto importante, pois, com as reduções gravimétricas vinculadas ao problema de contorno, é possível introduzir simplificações que, por outro método, seriam consideravelmente mais difíceis e obscuras.

Então, segundo esta teoria, $V_e \neq 0$ em $R^3 \setminus G$ e, por se tratar da superfície geoidal, que é uma superfície horizontal, $h = 0 = \beta_3$. Então, a equação (4.5.6), neste caso, toma a forma

$$T_G - 2V_e - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell} \right] T_G dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{g_G - \gamma_G}{\ell} dS, \quad (6.1.1)$$

onde ∂E representa uma superfície aproximada de ∂G . Notando que V_e é uma função harmônica em G , a expressão (2.4.18) nos dá

$$V_e + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} V_e \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{\partial V_e}{\partial n} dS. \quad (6.1.2)$$

Vamos representar por V_t o potencial das massas exteriores transferidas para o interior do geóide. Trata-se, então, de uma fun

ção harmônica em $R^3 \setminus G$. Desta forma, com (2.4.23), podemos escrever

$$V_t - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} V_t \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) dS = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_t}{\partial n} dS. \quad (6.1.3)$$

Combinando (6.1.1), (6.1.2) e (6.1.3), e introduzindo as expressões

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\ell} dS = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\ell} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} dS,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_t}{\ell} dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\ell} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_t}{\gamma} dS,$$

obtemos

$$T_G - (V_e - V_t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\ell} \right] \left[T_G - (V_e - V_t) \right] dS =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\ell} \left(g_G + \frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_t}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e - V_t}{\gamma} - \gamma_G \right) dS. \quad (6.1.4)$$

6.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL RELATIVA À ESFERA

Consideremos inicialmente o caso em que não há transferência de massas. Então $V_t = 0$, e a equação (6.1.4) toma a forma

$$T_G - V_e - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\ell} \right] (T_G - V_e) dS$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \frac{1}{\ell} \left(g_G + \frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G \right) dS. \quad (6.2.1)$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
 T_C &= T_G - V_e \\
 e \\
 g_G + \frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G &= g + C_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G'
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T_C &= T_G - V_e \\ e \\ g_G + \frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G &= g + C_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G' \end{aligned}} \right\} (6.2.2)$$

obtemos

$$T_C - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{1}{\ell} \right] T_C dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial E} \left(g + C_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G \right) dS, \quad (6.2.3)$$

que é uma equação integral com a forma da equação (5.1.1.1).

Então, sua solução para a esfera, é dada por

$$T_C = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial \sigma} \left(g + C_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G \right) S(\psi) d\sigma. \quad (6.2.4)$$

Portanto, usando a fórmula de Brun (4.4.4) na primeira expressão de (6.2.2), obtemos as alturas geoidais

$$N_G = N_C + \frac{V_e}{\gamma} \quad (6.2.5)$$

6.3 REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS NA TEORIA CONVENCIONAL

A substituição (6.2.2) pode ser interpretada do seguinte modo: g_G é o valor da gravidade sobre o geóide, que equivale ao valor obtido com a redução completa de Bouguer [8] se as massas removidas, representadas por $\frac{\partial V_e}{\partial n}$, forem recolocadas sobre o ponto em estudo. Isto foi expresso analiticamente por

$$g_G + \frac{\partial V_e}{\partial n} = g + C_b, \quad (6.3.1)$$

onde C_b é a correção completa de Bouguer. Com a remoção das massas topográficas cujo potencial é V_e , o potencial anômalo assume a forma

$$T_C = T_G - V_e,$$

que é o potencial anômalo sobre a superfície do cogeóide, cuja

deformação em relação à superfície do geóide, em função da gravidade teórica, é dada por $\frac{V_e}{\gamma}$. Os valores da gravidade, obtidos com a redução de Bouguer se referem ao geóide e, portanto, devem ser reduzidos ao cogeóide. A rigor, na expressão (6.2.4) a gravidade teórica γ é que foi reduzida a uma superfície deformada por $\frac{V_e}{\gamma}$, em relação à superfície do elipsóide, e no sentido inverso ao da gravidade g , sobre a superfície do cogeóide (Fig. 6.3.1)

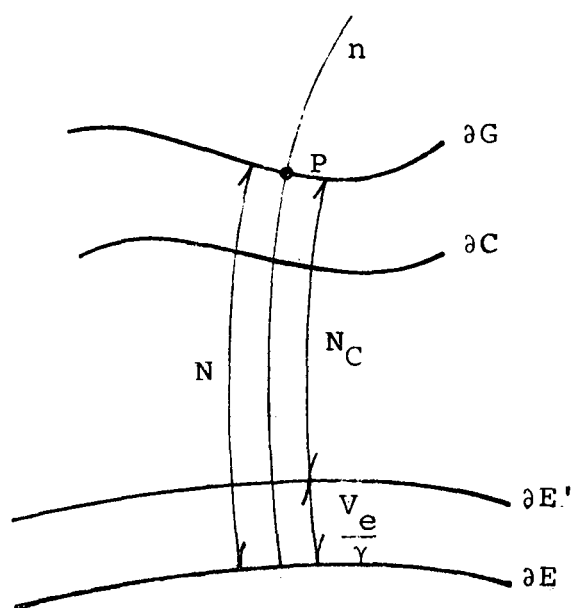


Fig. 6.3.1

Então, o valor da gravidade sobre o cogeóide será

$$g_C = g + C_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma} - \gamma_G' \quad (6.3.2)$$

ou, em função da anomalia de Bouguer

$$g_C = \Delta g_b - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e}{\gamma}, \quad (6.3.4)$$

onde

$$\Delta g_b = g + C_b - \gamma_G. \quad (6.3.5)$$

Consideremos, agora, o caso de haver transferência das massas externas, para o interior do geóide, segundo princípios da isostasia. Neste caso, $V_t = V_{is}$, e temos a anomalia isostática

$$\Delta g_{is} = g + C_b - \frac{\partial V_{is}}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{V_e - V_{is}}{\gamma} - \gamma_G. \quad (6.3.6)$$

Outra possibilidade é a condensação das massas externas em uma camada material sobre o geóide, que pode ser considerada um caso limite da redução isostática, sendo nula a camada de compensação.

Finalmente, a transferência de todas as massas topográficas para o interior do geóide, isto é, $V_t = V_e$, sem que haja alteração nesta superfície, caracteriza a anomalia de Rudski.

$$\Delta g_r = g + C_b - \frac{\partial V_r}{\partial n} - \gamma_G. \quad (6.3.7)$$

CAPÍTULO VII

PROBLEMA DA SUPERFÍCIE FÍSICA DA TERRA

7.1 EQUAÇÃO INTEGRAL DE MOLODENSKII PARA O POTENCIAL ANÔMALO

A teoria de Molodenskii, por envolver uma superfície de referência não equipotencial, se distingue do método convencional, tanto na forma original de Stokes quanto na versão de Moiseev.

Vamos obter a equação integral de Molodenskii, para o potencial anômalo, aplicando (4.5.6) à superfície física da Terra. Então $V_e = 0$ e, neste caso, temos.

$$\begin{aligned} T - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - \bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] T dS = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{\Delta g}{\ell \cos \beta_3} dS, \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

onde a superfície do teluróide ∂T , representa uma aproximação de ∂F .

Com (I.24) podemos expressar $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right)$ por

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) = \frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 \quad (7.1.2)$$

Então, usando (7.1.2) em (7.1.1), vem

$$\begin{aligned} T - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - 2\bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \right. \\ \left. - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] T dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{\Delta g}{\ell \cos \beta_3} dS. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Trata-se, portanto, de uma equação integral não linear mais complexa que a equação integral relativa ao problema convencional.

7.2 APROXIMAÇÕES

A resolução da equação integral (7.1.3) envolve três aproximações: esférica, plana e linear.

7.2.1 APROXIMAÇÃO ESFÉRICA

Vamos iniciar a aproximação esférica utilizando a expressão (5.1.1.10); observando que $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h}$.

Então

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) = - \frac{r - r_P \cos \psi}{\ell^3}, \quad (7.2.1.1)$$

ou, usando (5.1.1.8).

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) = - \frac{1}{2r\ell} + \frac{r_P^2 - r^2}{2r\ell^3}; \quad (7.2.1.2)$$

logo, com (7.2.1.2) e (5.1.1.14), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{\ell} = \frac{3}{2r\ell} + \frac{r_P^2 - r^2}{2r\ell^3}. \quad (7.2.1.3)$$

Naturalmente os operadores diferenciais $\tilde{D}(\frac{1}{\ell}, h)$ e $\Delta_2 h$ de (7.1.3) também devem ser expressos como aproximação esférica. Para tal, vamos escrever a expressão de um arco elementar ds em termos de coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) [13]

$$ds^2 = (M+h)^2 d\phi^2 + (N+h)^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 + dh^2, \quad (7.2.1.4)$$

onde M e N são os raios das secções meridiana e primeiro vertical, respectivamente. Comparando (7.2.1.4) com (I.7), temos

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \phi, & h_1 &= M + h, \\
 q_2 &= \lambda, & h_2 &= (N+h) \cos \phi, \\
 q_3 &= h, & h_3 &= 1.
 \end{aligned}$$

Usando estes valores em (I.20) e (I.28), encontramos, respectivamente

$$\begin{aligned}
 \bar{D}\left(\frac{1}{\ell}, h\right) &= \frac{1}{(M+h)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial \phi} + \frac{1}{(N+h)^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda} \\
 \Delta_2(h) &= \frac{1}{(M+h)(N+h) \cos \phi} \frac{\partial^2}{\partial \phi} \left[\frac{(N+h) \cos \phi}{M+h} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi} \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial \lambda} \left[\frac{M+h}{(N+h) \cos \phi} \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda} \right].
 \end{aligned}$$

Introduzindo a aproximação esférica $M=N=R$, com $\phi=90^\circ-\theta$, e observando que $\frac{1}{\ell}$ e h são funções de superfície da forma (I.19), vem

$$\bar{D}\left(\frac{1}{\ell}, h\right) = \frac{1}{(R+h)^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right], \quad (7.2.1.5)$$

$$\Delta_2(h) = \frac{1}{(R+h)^2} \left(-\frac{\partial h}{\partial \phi} \operatorname{tg} \phi + \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} \right). \quad (7.2.1.6)$$

Na aproximação de (5.1.1.9) foi negligenciado o termo $\left(\frac{1}{6} - \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{2}\right) e^{\cdot 2} R$ e retido h , que é da ordem da metade do valor máximo do primeiro. Isto pode ser explicado do seguinte modo: h é uma função vinculada à inclinação do terreno β_3 , que em regiões montanhosas, pode ultrapassar 45° e, portanto, não poderá ser negligenciada quando ocorrer em expressões tais como

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \frac{h_P - h_O}{\ell_O},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \operatorname{tg} \beta_1,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \operatorname{tg} \beta_2.$$

Este aspecto justifica a aproximação plana.

7.2.2 APROXIMAÇÃO PLANA

A expressão do quadrado da distância entre dois pontos da superfície física da Terra é dada por (5.1.1.8)

$$\ell^2 = r^2 + r_p^2 - 2 r r_p \cos \psi \quad (7.2.2.1)$$

ou, usando (5.1.1.9)

$$\ell^2 = (R+h)^2 + (R+h_p)^2 - 2(R+h)(R+h_p) \cos \psi.$$

Notando que

$$\cos \psi = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2},$$

podemos escrever ainda

$$\ell^2 = (2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2})^2 \left[1 + \frac{h+h_p}{R} + \frac{hh_p}{R^2} + \left(\frac{h-h_p}{2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} \right)^2 \right].$$

Mas, de (5.1.1.11)

$$\ell_o = 2R \operatorname{sen} \frac{\psi}{2};$$

então

$$\ell^2 = \ell_o^2 \left[1 + \frac{h+h_p}{R} + \frac{hh_p}{R^2} + \left(\frac{h-h_p}{\ell_o} \right)^2 \right], \quad (7.2.2.2)$$

que é a aproximação esférica para (7.2.2.1).

A aproximação plana consiste em desprezar os termos em $\frac{h}{R}$ ou $\frac{h_p}{R}$, o que nos dá para (7.2.2.2)

$$\ell^2 = \ell_o^2 \left[1 + \left(\frac{h-h_p}{\ell_o} \right)^2 \right]. \quad (7.2.2.3)$$

Para obtermos a aproximação plana da derivada normal, vamos escrever (7.2.1.3) na forma

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell} = \frac{3}{2r\ell} - \frac{(h-h_P)(r_P-r)}{2r\ell^3}.$$

Fazendo $r=r_P=R$, vem

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell} = \frac{3}{2r\ell} - \frac{h-h_P}{\ell^3}. \quad (7.2.2.4)$$

com ℓ dado por (7.2.2.3)

Os operadores (7.2.1.5) e (7.2.1.6), neste caso podem ser escritos em função das coordenadas polares (R, θ, λ)

$$\bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\ell} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\ell} \right) \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right], \quad (7.2.2.5)$$

$$\Delta_2(h) = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \cotg \theta + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} \right], \quad (7.2.2.6)$$

com $\theta = 90^\circ - \phi$;

ou do azimute A e do ângulo ψ , em relação a um ponto fixo P (Fig. 7.2.2.1)

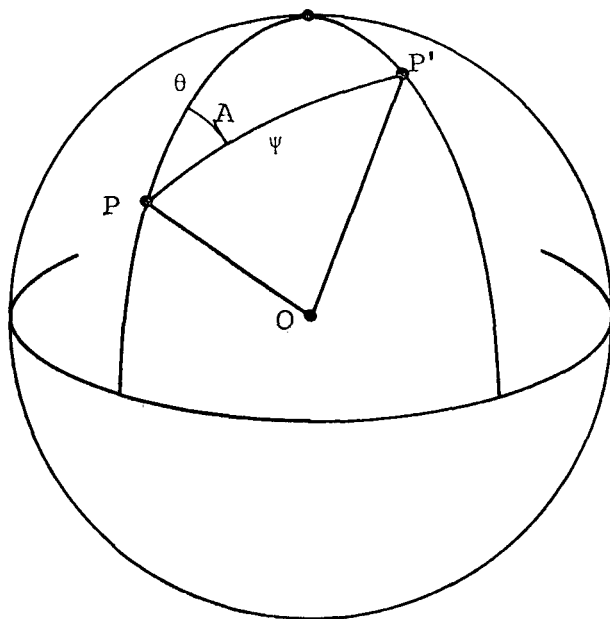


Fig. 7.2.2.1

$$\tilde{D}\left(\frac{1}{\ell}, h\right) = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial h}{\partial \Psi} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Psi} \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{\ell}\right) \frac{\partial h}{\partial A} \right], \quad (7.2.2.7)$$

$$\Delta_2(h) = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \Psi} \cotg \Psi + \frac{\partial^2 h}{\partial \Psi^2} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Psi} \frac{\partial^2 h}{\partial A^2} \right]. \quad (7.2.2.8)$$

7.2.3 APROXIMAÇÃO LINEAR

A aproximação plana proporciona expressões que podem ser desenvolvidas como série de potências em relação a $\frac{h-h_P}{\ell_0}$, $\text{tg} \beta_3$ ou quantidades similares. Isto sugere uma aproximação linear, em que são retidos somente os termos de primeira ordem relativos a tais quantidades. Então, a aproximação linear de (7.2.2.3) será

$$\ell = \ell_0 = R \text{sen} \frac{\Psi}{2}, \quad (7.2.3.1)$$

com a qual obtemos as aproximações de (7.2.2.4) e (7.2.2.7), respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\ell}\right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell_0} = \frac{3}{3R\ell_0} - \frac{h-h_P}{\ell_0}, \quad (7.2.3.2)$$

$$\tilde{D}\left(\frac{1}{\ell_0}, h\right) = \frac{\text{sen} \Psi}{\ell_0} \frac{\partial h}{\partial \Psi}. \quad (7.2.3.3)$$

Escrevendo $\cos \beta_3$ em função da tangente

$$\cos \beta_3 = (1 + \text{tg} \beta_3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\text{tg}^2 \beta_3}{2} + \dots;$$

então, como aproximação linear, temos

$$\cos \beta_3 = 1. \quad (7.2.3.4)$$

Neste caso, um elemento de superfície será dado por

$$dS = R^2 d\sigma, \quad (7.2.3.5)$$

onde $d\sigma$ é o elemento de uma superfície esférica de raio unitário.

Introduzindo essas expressões lineares em (7.1.3), obtemos

$$T - \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{T}{\ell_0} d\sigma = \frac{2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{1}{\ell_0} \left[\Delta g - T \Delta_2(h) \right] d\sigma - \\ - \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{1}{\ell_0} \left(h - h_P - 2 \operatorname{sen} \psi \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) d\sigma, \quad (7.2.3.6)$$

que é a equação integral linearizada, relativa ao problema de Molodenskii.

7.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL APROXIMADA

A equação (7.2.3.6) contém termos corretivos lineares que vamos representar por |15|

$$C_1 = -T \Delta_2(h), \quad (7.3.1)$$

$$C_2 = - \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{1}{\ell_0} \left(h - h_P - 2 \operatorname{sen} \psi \frac{\partial h}{\partial \psi} \right) T d\sigma. \quad (7.3.2)$$

Com estas expressões, a equação original pode ser escrita na forma

$$T - \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{T}{\ell_0} d\sigma = \frac{R}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\Delta g + C_1}{\ell_0} d\sigma + C_2. \quad (7.3.3)$$

Esta equação sugere uma solução do tipo

$$T = T_0 + T_1, \quad (7.3.4)$$

onde T_0 representa a solução aproximada de (7.3.3) para $C_2=0$, a partir da qual pode ser determinado T_1 , com $C_2 \neq 0$.

Então, para $C_2 = 0$, temos

$$T_0 - \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{T_0}{\ell_0} d\sigma = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{\Delta g + C_1}{\ell_0} d\sigma, \quad (7.3.5)$$

que é uma equação integral do tipo (5.1.2.2) portanto, sua solução é dada por

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} (\Delta g + C_1) S(\Psi) dS. \quad (7.3.6)$$

Substituindo (7.3.4) em (7.3.3) e usando (7.3.6), vem

$$T_1 - \frac{3R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{T_1}{\ell_0} d\sigma = C_2, \quad (7.3.7)$$

cuja solução é dada por |8|

$$T_1 = C_2 + \frac{3}{8\pi} \int_{\partial\sigma} C_2 S(\Psi) d\sigma. \quad (7.3.8)$$

Logo, usando (7.3.6) e (7.3.8) em (7.3.4), e desprezando $\frac{3C_2}{2R}$ como aproximação plana |15|, a solução linear de (7.2.3.6) fica

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} [\Delta g - T\Delta_2(h)] S(\Psi) d\sigma - \frac{R^2}{2\pi} \int_{\partial\sigma} \frac{1}{\ell_0} (h - h_P - 2\text{sen}\Psi \frac{\partial h}{\partial \Psi}) T d\sigma, \quad (7.3.9)$$

onde T, para a determinação de C_1 e C_2 , pode ser obtido com auxílio da integral de Stokes

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\partial\sigma} \Delta g S(\Psi) d\sigma. \quad (7.3.10)$$

7.4 REDUÇÕES GRAVIMÉTRICAS NA TEORIA MODERNA

Retornemos à equação (7.1.3) para analisar a anomalia da gravidade

$$\Delta g = g - \gamma.$$

O valor da gravidade real g se refere à superfície física da Terra; portanto, trata-se do valor diretamente medido. A gravidade teórica γ , entretanto, se refere à superfície do teluróide; logo, deve ser obtida a partir de γ_E , calculada sobre a superfície do elipsóide, o que pode ser feito aplicando a γ a redução ar-livre no sentido oposto ao que normalmente consideramos; assim

$$\gamma = \gamma_E + \frac{\partial \gamma}{\partial h} H^n, \quad (7.4.1)$$

onde a gravidade normal sobre o teluróide γ e a altitude normal H^n podem ser obtidas com auxílio das fórmulas de Hirvonen [9] , de modo que

$$\Delta g = g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H^n - \gamma_E. \quad (7.4.2)$$

Isto significa que a redução da gravidade na teoria moderna se processa na gravidade teórica e independe de hipóteses quanto à distribuição de massas. Um inconveniente deste método é que a anomalia ar-livre não é tão representativa como, por exemplo, a anomalia isostática, o que pode ser entendido aplicando à equação (7.1.3) uma transformação similar a que foi aplicada à equação (6.1.1). Então, representando por V_e o potencial das massas em (F-E), (Fig. 7.4.1), e aplicando (2.4.23) a V_e em $R^3 \setminus F$, obtemos

$$-V_e + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[V_e \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\ell} \frac{\partial V_e}{\partial n} \right] dS = 0, \quad (7.4.3)$$

onde ∂T é aproximação de ∂F .

Por (I.24), temos

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial V_e}{\partial h} - \bar{D}(V_e, h) \cos \beta_3. \quad (7.4.4)$$

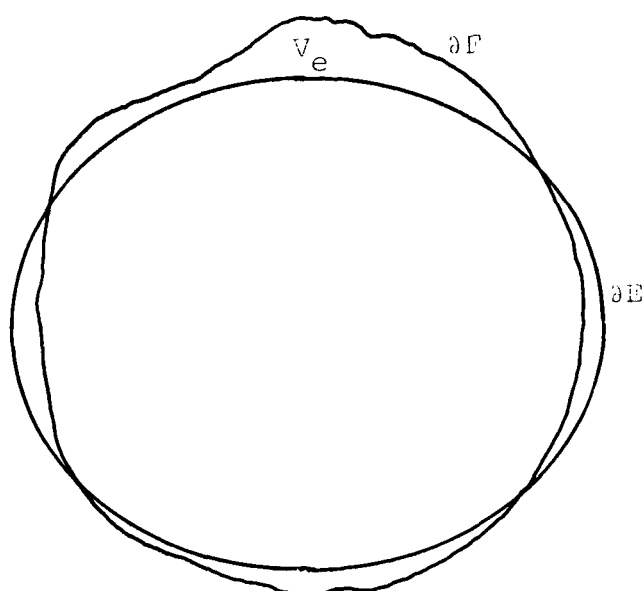


Fig. 7.4.1

Então, substituindo (7.4.4) em (7.4.3), vem

$$\begin{aligned}
 & -V_e + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[V_e \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \bar{D}(V_e, h) \frac{\cos \beta_3}{\ell} \right] dS = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \frac{\partial V_e}{\partial h} dS,
 \end{aligned}$$

que por (I.25) e depois (I.27), toma a forma

$$\begin{aligned}
 & -V_e + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \Delta_2(h) \frac{\cos \beta_3}{\ell} \right] V_e dS = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \frac{\partial V_e}{\partial h} dS. \tag{7.4.5}
 \end{aligned}$$

Vamos chamar de V_t o potencial das massas exteriores, transferidas para o interior do elipsóide. Procedendo como no caso de V_e e subtraindo a expressão em V_t , assim obtida, de (7.4.5), vem

$$-(V_e - V_t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \bar{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \Delta_2(h) \frac{\cos \beta_3}{\ell} \right] (V_e - V_t) dS =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \frac{\partial}{\partial h} (V_e - V_t) dS. \quad (7.4.6)$$

Combinando (7.4.6) com (7.4.3) e notando que

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} (V_e - V_t) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \frac{\partial \gamma}{\partial h} (V_e - V_t) dS,$$

encontramos

$$\begin{aligned} T - (V_e - V_t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \right. \\ \left. - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] [T - (V_e - V_t)] dS = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \left[g + \frac{\partial (V_e - V_t)}{\partial h} - \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{(V_e - V_t)}{\gamma} \right] dS. \quad (7.4.7) \end{aligned}$$

Naturalmente, se não houver transferência de massas, $V_t = 0$, e a equação (7.4.7) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \gamma \left(\zeta - \frac{V_e}{\gamma} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \right. \\ \left. - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] \gamma \left(\zeta - \frac{V_e}{\gamma} \right) dS = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \left(g + \frac{\partial V_e}{\partial h} - \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{V_e}{\gamma} \right) dS. \quad (7.4.8) \end{aligned}$$

Esta é uma equação do tipo (7.1.3), onde ζ está representado por $\zeta - \frac{V_e}{\gamma}$, g por $g + \frac{\partial V_e}{\partial h}$ e γ por $\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{V_e}{\gamma}$; e pode ser interpretado seguinte modo: as massas relativas ao potencial V_e são removidas, conseqüentemente o valor de g sobre a superfície terrestre é transformado em $g + \frac{\partial V_e}{\partial h}$ e o potencial da gravidade W em $W - V_e$.

Para o ponto Q sobre a superfície do teluróide (Fig. 7.4.2) isto acarreta uma elevação, dada por $\frac{V_e}{\gamma}$, logo, a gravidade normal γ deve ser reduzida a esse teluróide modificado, e passa a ser expressa por $\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{V_e}{\gamma}$.

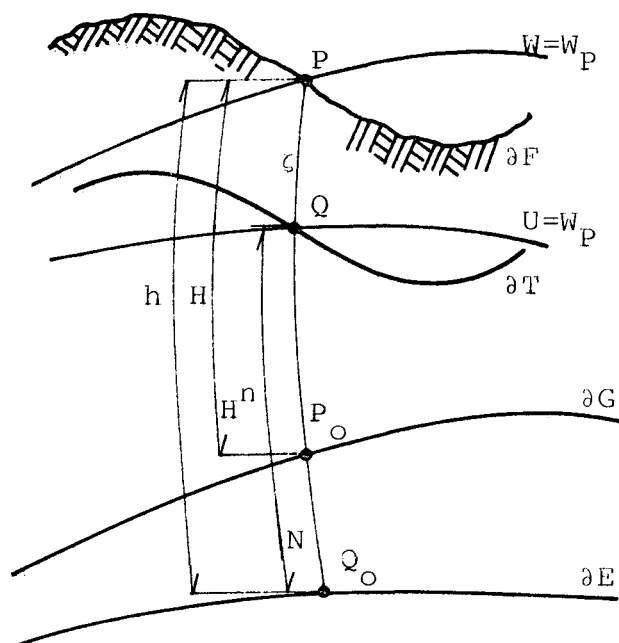


Fig. 7.4.2

Naturalmente, o processo que foi utilizado na obtenção de (7.4.8) corresponde à redução de Bouguer. Por outro lado, as massas removidas podem ser representadas por massas auxiliares cujo potencial de atração gravitacional representaremos por v . Assim, podemos admitir que essas massas auxiliares representam as massas transferidas do exterior para o interior do geóide segundo postulados da isostasia de modo a resultar uma crosta com densidade uniforme. Então, substituindo V_e por $V_e - v$ em (7.4.8), obtemos a equação

$$\begin{aligned} \gamma \left(\zeta - \frac{V_e - v}{\gamma} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} - \tilde{D} \left(\frac{1}{\ell}, h \right) \cos \beta_3 - \right. \\ \left. - \frac{\cos \beta_3}{\ell} \Delta_2(h) \right] \gamma \left(\zeta - \frac{V_e - v}{\gamma} \right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{1}{\ell \cos \beta_3} \left(g + \frac{\partial V_e}{\partial h} - \gamma - \right. \\ \left. - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{V_e - v}{\gamma} \right) dS, \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

cuja interpretação é análoga a da equação (7.4.8); isto é, as massas que estão no exterior do elipsóide são transferidas, por redução isostática, para o interior, o que produz variação na gravidade, no potencial e conseqüentemente na superfície do teluróide. Com isso, a anomalia de altitude passa a ser

$$\zeta = \frac{V_e - v}{\gamma};$$

e a anomalia da gravidade

$$\Delta g_{is} = g + \frac{\partial (V_e - v)}{\partial h} - \left(\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{V_e - v}{\gamma} \right), \quad (7.4.10)$$

que pode ser considerada como anomalia isostática. Esta, possui menor correlação com o relevo topográfico e é mais representativa do que a anomalia ar-livre. É necessário ressaltar que a anomalia isostática na teoria convencional se refere à superfície do geóide enquanto que na moderna se refere à superfície física da Terra.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÃO

A forma geral com que o problema de valor de contorno da Geodésia física pode ser formulada em termos de equações integrais, tem aspectos relevantes na obtenção de soluções aproximadas e na interpretação das reduções gravimétricas que são necessárias tanto na teoria convencional quanto na moderna.

Naturalmente, como se trata de uma forma geral, apresenta também certos inconvenientes em relação à complexidade na notação e na estrutura de algumas equações integrais. Entretanto, é necessário ressaltar que as dificuldades estão na resolução da equação (5.2.1.10), da teoria convencional para o elipsóide de revolução, e da equação (7.1.3), da teoria moderna para a determinação direta da superfície física da Terra. O problema convencional para a esfera, por exemplo, representado na equação (5.1.1.16), pode ser resolvido em condições mais gerais e de forma relativamente simples, conforme está expresso na equação (6.1.4) e na sua solução dada por (6.2.4).

O método das aproximações sucessivas que pode ser aplicado às equações integrais mais complexas tais como (5.2.1.10) e (7.1.3), constitui uma possibilidade de introduzir refinamentos nas soluções mais simples, sem acarretar grandes modificações no aspecto computacional. O tratamento numérico dessas soluções ainda é um campo aberto e provavelmente terá sua importância na

medida em que os dados disponíveis e os métodos de interpolação permitirem aplicações práticas mais amplas.

APÊNDICE I

OPERADORES DIFERENCIAIS DE MOLODENSII

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto, e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação inversível de classe C^1 , dada pelas coordenadas curvilíneas ortogonais q_i , $i = 1, 2, 3$; tal que

$$f(q) = (f_1(q), f_2(q), f_3(q)), \quad q = (q_1, q_2, q_3). \quad (\text{I.1})$$

Então, as coordenadas de um ponto $x \in \Omega$ podem ser expressas por

$$x_k = f_k(q), \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{I.2})$$

Para a transformação inversa $g: \Omega_1 \rightarrow \Omega$, temos

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)), \quad x = (x_1, x_2, x_3); \quad (\text{I.3})$$

sendo

$$q_i = g_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{I.4})$$

O elemento linear de uma curva s no sistema x_k é dado por

$$ds^2 = \sum_{k=1}^3 dx_k^2; \quad (\text{I.5})$$

mas, por (I.2)

$$dx_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial q_i},$$

portanto

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_i dq_j. \quad (\text{I.6})$$

Para um sistema ortogonal, temos

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0, \quad \text{se } i \neq j;$$

logo

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \right)^2 dq_i^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 dq_i^2, \quad (\text{I.7})$$

ou, supondo que q_i varia ao longo de s_i

$$ds_i = h_i dq_i. \quad (\text{I.8})$$

Seja $q_3 = h(q_1, q_2)$ a equação de uma superfície ∂S de classe C^2 . Então

$$dq_3 = \frac{\partial h}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial h}{\partial q_2} dq_2$$

e, por (I.8)

$$\frac{ds_3}{h_3} - \frac{\partial h}{\partial q_1} \frac{ds_1}{h_1} - \frac{\partial h}{\partial q_2} \frac{ds_2}{h_2} = 0. \quad (\text{I.9})$$

A normal à superfície é perpendicular a ds ; então

$$\sum_{i=1}^3 ds_i \cos(\beta_i) = 0, \quad (\text{I.10})$$

onde β_i são os ângulos que essa normal forma com q_i . Comparando (I.10) e (I.9), obtemos

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_1 &= - \frac{1}{Ah_1} \frac{\partial h}{\partial q_1}, \\ \cos \beta_2 &= - \frac{1}{Ah_2} \frac{\partial h}{\partial q_2}, \\ \cos \beta_3 &= \frac{1}{Ah_3}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.11})$$

onde

$$A^2 = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{h}{q_1}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{h}{q_2}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2} . \quad (\text{I.12})$$

Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 , definida por

$$F = F(q_1, q_2, q_3).$$

A derivada desta função, na direção da normal à superfície, é

$$\frac{\partial F}{\partial n} dn = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial n_i} dn_i, \quad (\text{I.13})$$

sendo dn_i as projeções de dn sobre q_i , isto é,

$$dn_i = h_i q_i = dn \cos \beta_i. \quad (\text{I.14})$$

Combinando (I.12), (I.13) e (I.14), vem

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} - \frac{h_3}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} - \frac{h_3}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} \right) \cos \beta_3. \quad (\text{I.15})$$

A projeção de um elemento da superfície ∂S , sobre o plano tangente na origem, é dada por

$$dS \cos \beta_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$

Assim, por (I.15), temos

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS = \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} - \frac{h_3}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} - \frac{h_3}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} \right) h_1 h_2 dq_1 dq_2,$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial n} dS = \left[\frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3} - D(F, h) \right] h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (\text{I.16})$$

onde

$$D(F, h) = \frac{h_3}{h_1^2} \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{\partial h}{\partial q_1} - \frac{h_3}{h_2^2} \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{\partial h}{\partial q_2}. \quad (\text{I.17})$$

é o primeiro operador diferencial de Molodenskii.

Sobre a superfície ∂S , a função F toma a forma

$$F = F(q_1, q_2, h(q_1, q_2)).$$

Suas derivadas parciais em relação a q_i , ao longo dessa superfície, são

$$\frac{\partial_2 F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_3} \frac{\partial h}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{I.18})$$

Naturalmente, se $F = F(q_1, q_2)$, então

$$\frac{\partial_2 F}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{I.19})$$

Usando (I.18) em (I.17), vem

$$\tilde{D}(F, h) = \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial_2 F}{\partial q_1} \frac{\partial_2 h}{\partial q_1} + \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial_2 F}{\partial q_2} \frac{\partial_2 h}{\partial q_2}, \quad (\text{I.20})$$

que é o segundo operador diferencial de Molodenskii.

Substituindo (I.18) em (I.20), obtemos

$$D(F, h) = \tilde{D}(F, h) - \frac{F}{h} D(h, h), \quad (\text{I.21})$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial F}{\partial q_3}. \quad (\text{I.22})$$

Com (I.17) e (I.22), a expressão (I.15) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \left[\frac{\partial F}{\partial h} - D(F, h) \right] \cos \beta_3, \quad (\text{I.23})$$

ou, por (I.21)

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial F}{\partial h} - \tilde{D}(F, h) \cos \beta_3. \quad (\text{I.24})$$

Se F for definida como o produto das funções F_1 e F_2 , então

$$\tilde{D}(F_1 F_2, h) = F_1 \tilde{D}(F_2, h) + F_2 \tilde{D}(F_1, h) \quad (\text{I.25})$$

que, com (I.21), fica

$$\tilde{D}(F_1 F_2, h) = F_1 D(F_2, h) + F_2 D(F_1, h) + \frac{\partial}{\partial h} (F_1 F_2) D(h, h). \quad (\text{I.26})$$

Integrando (I.20) por partes, vem |13|

$$\int_{\partial S} \tilde{D}(F, h) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = \int_{\partial S} \tilde{D}(h, F) h_1 h_2 dq_1 dq_2,$$

ou

$$\int_{\partial S} \tilde{D}(F, h) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = - \int_{\partial S} F \nabla_2(h) h_1 h_2 dq_1 dq_2, \quad (\text{I.27})$$

$$\nabla_2(h) = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial_2}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial_2 F}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial_2}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial_2 F}{\partial q_2} \right) \right], \quad (\text{I.28})$$

que é o terceiro operador diferencial de Molodenskii.

Para um sistema de coordenadas locais $x_1 x_2 x_3$, com x_3 na direção da normal, x_1 dirigido para o norte e x_2 para o este, a expressão (I.15) toma a forma

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \cos \beta_3, \quad (\text{I.29})$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{\cos \beta_3} \frac{\partial F}{\partial x_3} - \tilde{D}(F, h) \cos \beta_3. \quad (\text{I.30})$$

Nesse caso,

$$D(F, h) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad (\text{I.31})$$

$$\tilde{D}(F, h) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \frac{\partial h}{\partial x_2}, \quad (\text{I.32})$$

$$\nabla_2(h) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}. \quad (\text{I.33})$$

APÊNDICE II

EXPRESSÃO DA DISTÂNCIA ZENITAL DA CORDA DE UM ARCO ELIPSOIDAL

Consideremos os pontos P' e P sobre um elipsóide de revolução (Fig.II.1)

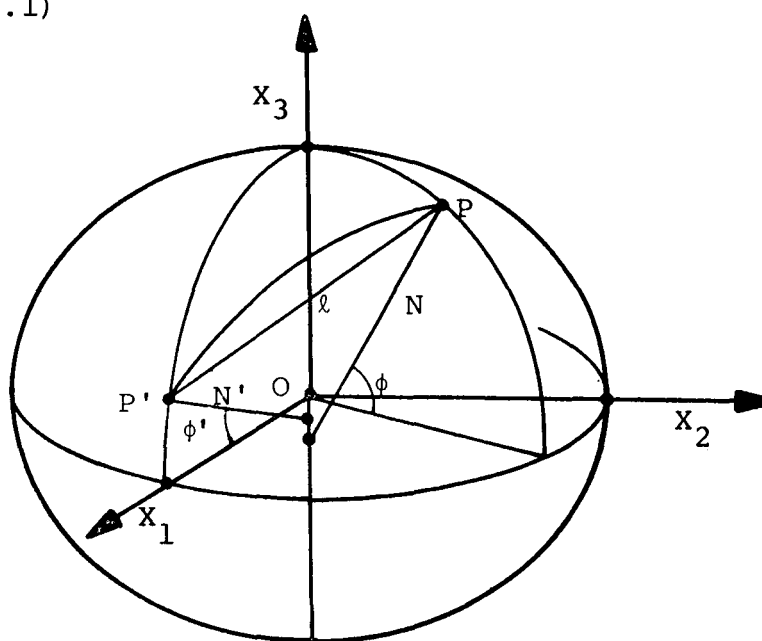


Fig. II.1

O comprimento da corda l , que vamos supor sempre no sentido de P' para P , tem a expressão

$$l = \frac{x_1 - x'_1}{\cos \alpha_1} = \frac{x_2 - x'_2}{\cos \alpha_2} = \frac{x_3 - x'_3}{\cos \alpha_3}, \quad (\text{II.1})$$

ou, em coordenadas elipsoidais

$$\left. \begin{aligned} l \cos \alpha_1 &= N \cos \phi \cos \lambda - N' \cos \phi', \\ l \cos \alpha_2 &= N \cos \phi \operatorname{sen} \lambda, \\ l \cos \alpha_3 &= \frac{b^2}{a} N \operatorname{sen} \phi - \frac{b^2}{a} N' \operatorname{sen} \phi', \end{aligned} \right\} (\text{II.2})$$

onde a e b são, respectivamente, o semi-eixo maior e menor do elipsóide de revolução; e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ os ângulos formados pela direção de ℓ e os eixos cartesianos para os índices correspondentes.

As coordenadas cartesianas (x'_1, x'_2, x'_3) de P' e (x_1, x_2, x_3) de P , devem satisfazer à equação do elipsóide, então

$$\left(\frac{x'_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{b}\right)^2 = 1 \quad (\text{II.3})$$

e, por (II.1)

$$\left(\frac{x'_1 + \ell \cos \alpha_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'_2 + \ell \cos \alpha_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x'_3 + \ell \cos \alpha_3}{b}\right)^2 = 1. \quad (\text{II.4})$$

Comparando (II.3) e (II.4)

$$\ell^2 \left[\left(\frac{\cos \alpha_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha_3}{b}\right)^2 \right] + 2\ell \left(\frac{x'_1 \cos \alpha_1}{a^2} + \frac{x'_2 \cos \alpha_2}{a^2} + \frac{x'_3 \cos \alpha_3}{b^2} \right) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Vamos obter os co-senos diretores de ℓ à partir dos triângulos esféricos QX_1S , QX_2S e QX_3S , respectivamente, (Fig. II.2)

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \phi' \cos z - \sin \phi' \operatorname{sen} z \cos A, \\ \cos \alpha_2 &= \operatorname{sen} z \operatorname{sen} A, \\ \cos \alpha_3 &= \sin \phi' \cos z + \cos \phi' \operatorname{sen} z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6})$$

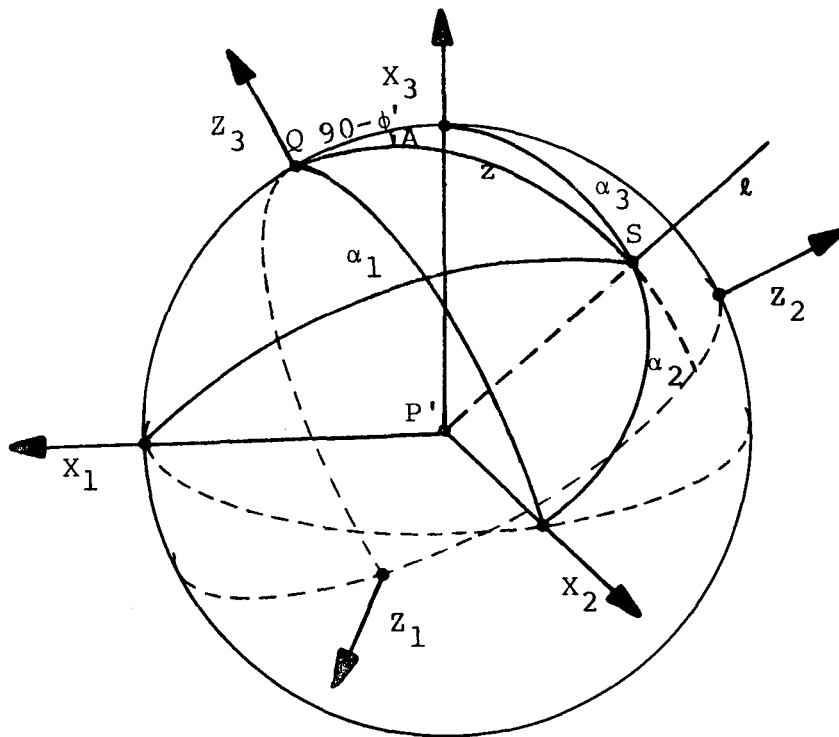


Fig. II.2

Então, introduzindo coordenadas elipsoidais em (II.5) e observando que podemos fazer $\lambda' = 0$, vem

$$l \left[\left(\frac{\cos \alpha_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha_2}{a} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha_3}{b} \right)^2 \right] = - 2N' \left(\frac{\cos \alpha_1 \cos \phi'}{a^2} + \frac{\cos \alpha_3 \sin \phi'}{a^2} \right), \quad (\text{II.7})$$

sendo N' a grande normal em P' . Somando e subtraindo $(l \frac{\cos \alpha_3}{a})^2$ ao primeiro membro de (II.7), obtemos

$$l \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \alpha_3 \right) = - 2N' (\cos \alpha_1 \cos \phi' + \cos \alpha_3 \cos \phi'). \quad (\text{II.8})$$

Para obtermos a distância zenital z e o azimute A , em função dos co-senos diretores, vamos multiplicar a primeira expressão de (II.6) por $(-\sin \phi')$ e a última por $\cos \phi'$, e combinar essas expressões, assim

$$\cos z \cos A = \cos \alpha_3 \cos \phi' - \cos \alpha_1 \sin \phi'. \quad (\text{II.9})$$

Dividindo (II.9) pela segunda expressão de (II.6), encontramos a fórmula para o azimute

$$\cotg A = \frac{\cos \alpha_3 \cos \phi' - \cos \alpha_1 \sin \phi'}{\cos \alpha_2}. \quad (\text{II.10})$$

Multiplicando a primeira expressão de (II.6) por $\cos \phi'$ e a terceira por $\sin \phi'$, obtemos

$$\cos z = \cos \alpha_1 \cos \phi' + \cos \alpha_3 \sin \phi'. \quad (\text{II.11})$$

Com (II.11), podemos escrever (II.8) na forma

$$\cos z = \frac{\ell}{2N'} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \alpha_3 \right), \quad (\text{II.12})$$

que é a expressão da distância zenital da corda de um arco elipsoidal.

APÊNDICE III

RELAÇÕES ENTRE OS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DOS SISTEMAS GEODÉSICO E
GEOCÊNTRICO NO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

A ordenada de um ponto P sobre o elipsóide de revolução é dada por (Fig.III.1)

$$x_3 = N \cos \phi \operatorname{tg} \psi$$

ou

$$x_3 = N_p \operatorname{sen} \phi ,$$

(III.1)

onde ϕ é a latitude geodésica e ψ a latitude geocêntrica.

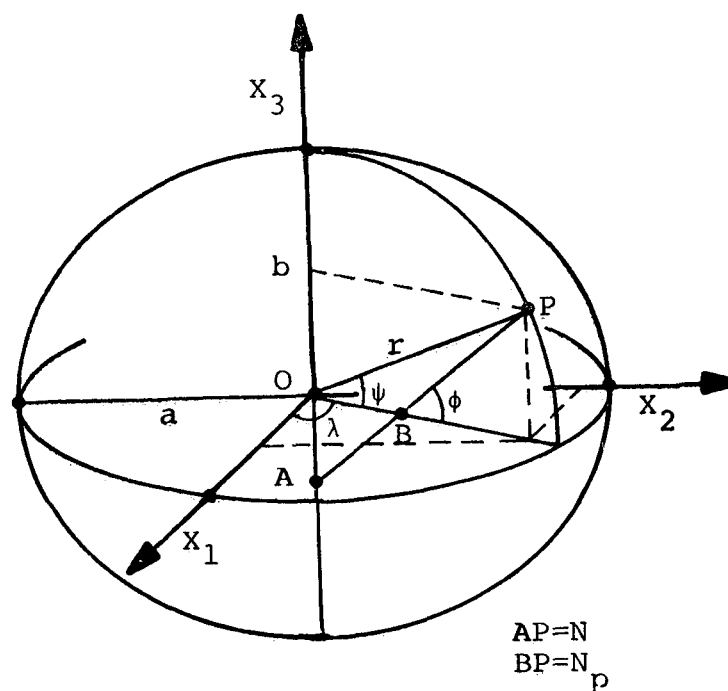


Fig. III.1

Mas

$$N_p = (1 - e^2)N = \frac{a^2}{b^2}, \quad (\text{III.2})$$

onde e é a primeira excentricidade do elipsóide de revolução, definida por

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (\text{III.3})$$

Então, comparando as expressões de (III.1) e usando (III.2), obtemos

$$\text{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2} \text{tg}\phi, \quad (\text{III.4})$$

que é a relação entre as latitudes geodésica e geocêntrica.

As coordenadas cartesianas de P devem satisfazer à equação do elipsóide de revolução

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1; \quad (\text{III.5})$$

usando as coordenadas geocêntricas (r, ψ, λ) , com

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \psi \cos \lambda, \\ x_2 &= r \cos \psi \sin \lambda, \\ x_3 &= r \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6})$$

vem

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2}, \quad (\text{III.7})$$

ou, em função da tangente

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2 (1 + \text{tg}^2 \psi)} + \frac{1}{b^2 (1 + \text{tg}^2 \psi)};$$

por (III.4), obtemos ainda

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \phi}{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \phi},$$

que vamos escrever na forma simplificada

$$\frac{1}{r^2} = \frac{p^2}{q^4}, \quad (\text{III.8})$$

onde

$$p^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad (\text{III.9})$$

$$q^4 = a^4 \cos^2 \phi + b^4 \operatorname{sen}^2 \phi. \quad (\text{III.10})$$

Escrevendo (III.10) em função da tangente e usando (III.4), obtemos q^4 em termos da latitude geocêntrica

$$q^4 = \frac{a^4 b^4}{b^4 \cos^2 \psi + a^4 \operatorname{sen}^2 \psi}. \quad (\text{III.11})$$

Com (III.11), obtemos de (III.4)

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{q^2}{b^2} \operatorname{sen} \psi,$$

e

$$\operatorname{cos} \phi = \frac{q^2}{a^2} \operatorname{cos} \psi.$$

} (III.12)

Da fig. III.1, tiramos

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = N^2 \cos^2 \phi + N_p^2 \operatorname{sen}^2 \phi,$$

e por (III.2), temos

$$r^2 = N^2 \cos^2 \phi + \frac{a^4}{b^4} N^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad (\text{III.13})$$

ou, usando (III.10)

$$\frac{1}{N} = \frac{q^2}{a^2 r}. \quad (\text{III.14})$$

Lembrando que

$$\frac{1}{M} = \frac{p^2}{Nb^2},$$

por (III.8) e (III.3) encontramos

$$\frac{1}{M} = \frac{q^6}{a^2 b^2 r^3}. \quad (\text{III.15})$$

Vamos obter a relação entre $d\psi$ e $d\phi$ derivando (III.4) em relação a ψ

$$\sec^2 \psi = \frac{b^2}{a} \sec^2 \phi \frac{d\phi}{d\psi},$$

que pode ser escrita na forma

$$d\psi (1 + \text{tg}^2 \psi) = \frac{b^2}{a} (1 + \text{tg}^2 \phi) d\phi,$$

ou, por (III.4) e (III.10)

$$d\psi = \frac{a^2 b^2}{q^4} d\phi. \quad (\text{III.16})$$

Um elemento da superfície do elipsóide tem a expressão

$$dS = MN \cos \phi d\phi d\lambda.$$

Então, por (III.12), (III.14), (III.15) e (III.16), temos

$$dS = \frac{r^4}{q^2} \cos \psi d\psi d\lambda. \quad (\text{III.17})$$

A segunda excentricidade do elipsóide de revolução é definida por

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (\text{III.18})$$

com a qual vamos obter expressões para elementos do elipsóide, na forma de séries. De (III.18), temos

$$b^2 = \frac{a^2}{1 + e'^2},$$

o que nos dá

$$b^2 = a^2(1 - e'^2 + \dots). \quad (\text{III.19})$$

Introduzindo (III.18) em (III.17) e (III.11), vem

$$r = a\left(1 - \frac{e'^2}{2} \operatorname{sen}^2 \psi + \dots\right), \quad (\text{III.20})$$

$$q^2 = a^2(1 - e'^2 \operatorname{sen}^2 \psi + \dots). \quad (\text{III.21})$$

A partir de (III.14), (III.15) e (III.16), usando (III.20) e (III.21), encontramos

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{e'^2}{2} \operatorname{sen}^2 \psi + \dots\right), \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{a}\left(1 + e'^2 - \frac{3e'^2}{2} \operatorname{sen}^2 \psi - \dots\right), \quad (\text{III.23})$$

$$dS = a^2(1 - e'^2 \operatorname{sen}^2 \psi - \dots) \cos \psi d\psi d\lambda. \quad (\text{III.24})$$

Da fig. III.2 tiramos

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi,$$

ou

$$l = \left[(r - r')^2 + 4rr' \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$(r - r')^2 \text{ é da ordem de } e'^4.$$

Então,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} \frac{1}{\sqrt{rr'}},$$

que, por (III.20), toma a forma

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2a \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2}} \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi\right) \left(1 + \frac{e'^2}{4} \operatorname{sen}^2 \psi'\right). \quad (\text{III.25})$$

De (II.2), encontramos

$$\cos \alpha_3 = \frac{1}{\ell} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (N \operatorname{sen} \phi - N' \operatorname{sen} \phi'),$$

ou, usando (III.12), (III.14) e (III.25)

$$\cos^2 \alpha_3 = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\Psi}{2}} \frac{1}{rr'} (r \operatorname{sen} \psi - r' \operatorname{sen} \psi')^2;$$

observando que $\frac{r}{r'} \approx \frac{r'}{r} \approx 1$, temos

$$\cos^2 \alpha_3 = \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\Psi}{2}} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \psi'). \quad (\text{III.26})$$

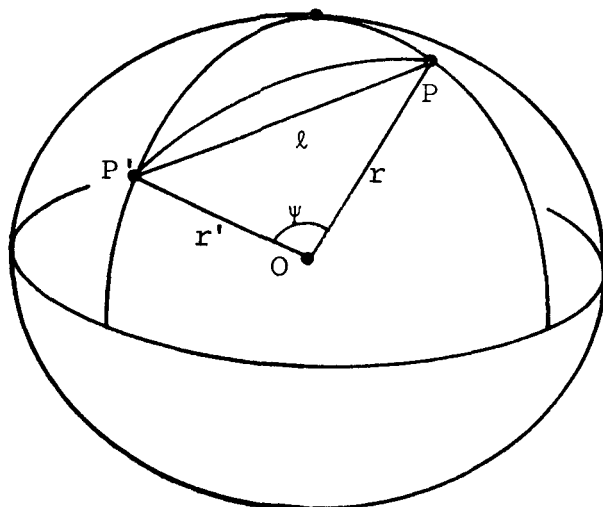


Fig. III.2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1| BARSOTTI, L. Introdução às equações integrais lineares. Boletim da Universidade Federal do Paraná: Geodésia, nº 15, 1973.
- | 2| BOMFORD, G. Geodesy, 3rd ed., New York, Oxford at the Clarendon Press, 1975.
- | 3| BUDAK, B.M. & FOMIN, S.V. Multiple integrals, field theory and series. Moskow, Mir Publishers, 1973.
- | 4| COURANT, R. & HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics. New York, Interscience Publishers, 1966, volumes 1-2.
- | 5| GEMAEL, C. Spherical harmonics in Geodesy. Boletim da Universidade Federal do Paraná: Geodésia, nº12, 1977.
- | 6| GIGLIOLI, A. Equações diferenciais parciais elípticas. Poços de Caldas, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1975.
- | 7| GRAFF-HUNTER, J. de. The shape of the earth's surface expressed in terms of gravity at ground level. Bulletin Geodesique, nº56, 1959.
- | 8| HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. Physical Geodesy. San Francisco, W.H. Freeman & Co., 1967.
- | 9| HIRVONEN, R.A. New theory of the gravimetric geodesy. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, nº32, 1960.

- |10| KELLOG, O.D. Foundation of potential theory. New York, Dover Publications, 1953.
- |11| LEVALLOIS, J.J. Sur une équation intégrale tré générale de la gravimetrie. Bolletín Geodesique, n°50, 1958.
- |12| MACMILLAN, W.D. The theory of the potential. New York, Dover Publications, 1958.
- |13| MOLODENSKII, M.S.; EREMEEV, V.F.; YURKINA, M.I. Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth. OTS 61-31207, translated from Russian, Washington, Department of Commerce, 1962.
- |14| MORITZ, H. The boundary value problem of physical geodesy. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, n°50, 1965.
- |15| _____. Linear solutions of the geodetic boundary-value problem. Report of the Dep. of Geod. Sci., Ohio State University, n°79, 1966.
- |16| _____. Precise gravimetric geodesy. Report of the Dep. of Geod. Sci., Ohio State University, n°219, 1974.
- |17| _____. Recent developments in the geodetic boundary -value problem. Report of the Dep. of Geod. Sci. Ohio State University, n°266, 1977.
- |18| PICK, M.; PICHA, J.; VYSKOCIL, V. Theory of the earth's gravity field. New York, Elsevier Scientific Publishing Co., 1973.
- |19| TRICOMI, F.G. Integral equations. London, Interscience Publishers, 1957.

|20| STOKES, G.G. On the variations of gravity and the surface of the earth. In: _____. Mathematical and Physical Papers, New York, Jhonson Reprint Corporation, 1966, volume 2.

ÍNDICE

Altitude

anomalia de, ver anomalia

de um ponto, 40

Altura geoidal, 40

Anomalia

da gravidade, 40

ar-livre, 79

Bouguer, 69

isostática, 70

Rudski, 70

de altitude, 46

Aproximação

esférica

na teoria de Moiseev, 66

na teoria de Molodenskii, 72

na teoria de Stokes, 52

linear, 76

plana, 74

Brun

fórmula de, 46, 65, 68

Campo da gravidade

normal, 39

real, 38

Cogeóide, 52

Dirichlet

problema de, ver problema de valor de contorno

Divergência

Teorema da, 10

Equação integral

de Fredholm, 17

do problema de Hilbert, 30

do potencial anômalo

na forma geral, 49, 50

para a esfera, 52, 66

para a superfície física da Terra, 71

para o elipsóide de revolução, 58

Esferopotencial, 39**Função**

harmônica, 11

potencial, 32

Geopotencial, 38**Graff-Hunter**

equação integral de, 44

teoria de, 44

Gravidade

aceleração da, 38

anomalia da, ver anomalia

força da, 38

normal, 39

real, 38, 79

redução da, 68, 78

na teoria convencional, 68

na teoria moderna, 78

Green

identidade de, 11, 12, 16

Harmônico esférico

de superfície, 21

fórmula integral de um, 21, 22, 23

sólido, 21

teorema da adição, 25

totalmente normalizado, 26

Moiseev,

equação integral de, 66, 67

teoria de, 42

Molodenskii

equação integral de, 72

operador diferencial de, ver operador diferencial

teoria de, 42

Neumann

problema de, ver problema de valor de contorno

Normal, 39

Ondulação geoidal, ver altura geoidal

Operador diferencial

de Laplace, 9

de Molodenskii, 88, 89, 90

Potencial

anômalo, 40

da gravidade, 43

normal, ver esferopotencial

real, ver geopotencial

de atração gravitacional, 33

devido à força centrífuga, 37

Problema de valor de contorno

da Geodésia física

na forma geral, 40, 41

na teoria convencional, 42

na teoria moderna, 42

da teoria do potencial, 27, 28

primeiro ou de Dirichlet, 28

segundo ou de Neumann, 28

terceiro ou de Hilbert, 28

Solução

do problema convencional

para a esfera, 58, 68

para o elipsóide de revolução, 65

do problema moderno,

para a superfície física da Terra, 78

Superfície

do Teluróide, 39

esferopotencial, 39

física da Terra, 38

geoidal, 39

geopotencial, 38

Stokes

equação integral para a fórmula de, 55

fórmula de, 58

teoria de, 42

Teluróide, ver superfície

Terra

normal, 39

superfície física da, ver superfícid

Vertical

desvio da, 46

componentes do, 47.