

JOÃO FRANCISCO GALERA MONICO

Ajustamento e Análise Estatística de Observações Aplicados na Detecção de Deformações

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para a obtenção do Título de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA
1988

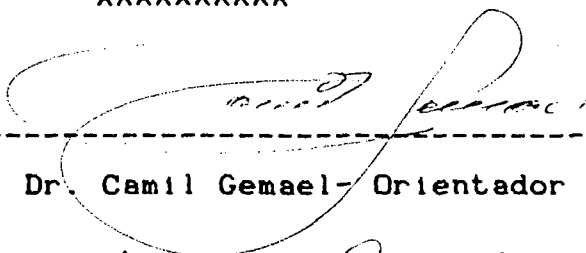
**AJUSTAMENTO E ANÁLISE ESTATÍSTICA DE
OBSERVAÇÕES APLICADOS NA DETECÇÃO DE
DEFORMAÇÕES**

DISSERTAÇÃO

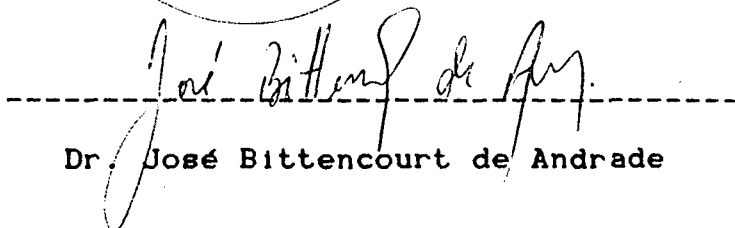
Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

Por

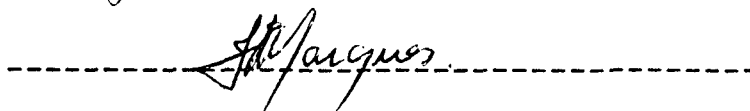
João Francisco Galera Monico, Engenheiro Cartógrafo



Dr. Camil Gemael - Orientador



Dr. José Bittencourt de Andrade



MSc. Jair Mendes Marques

Curitiba, 25 de março de 1988.

AGRADECIMENTOS

Quero externar meus agradecimentos a

O Prof. Dr. Camil Gemael, pela orientação deste trabalho.

O Departamento de Cartografia do IPEA/UNESP, Presidente Prudente-Sp, pela concessão do afastamento necessário à realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmãs, pelo carinho.

Aos amigos, pelo incentivo.

Aos Engenheiros Cartógrafos José Milton Arana, João Fernando Custódio da Silva, Julio K. Hasegawa e Antonio Maria Garcia Tomazelli, com os quais muito se discutiu a respeito deste trabalho.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A El El.

CONTEUDO

| | |
|---|------|
| TERNO DE APROVAÇÃO | 11 |
| AGRADECIMENTOS | 111 |
| CONTEUDO | iv |
| LISTA DE FIGURAS | vi |
| LISTA DE TABELAS | vii |
| RESUMO E ABSTRACT | viii |
| | |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Definição do Assunto | 1 |
| 1.2 Objetivos | 3 |
| 1.3 Metodologia | 3 |
| | |
| 2. AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES | 5 |
| 2.1 Introdução | 5 |
| 2.2 Matriz de Observações | 6 |
| 2.3 Modelo matemático | 9 |
| 2.4 Equações de Observações linearizadas | 11 |
| 2.5 Aplicação do método dos mínimos quadrados | 15 |
| 2.5.1 Solução de mínimos quadrados para um sistema consistente com solução única | 16 |
| 2.6 Injunções e singularidade | 18 |
| 2.6.1 Injunções funcionais | 18 |
| 2.6.2 Injunções internas ou ajustamento livre | 21 |
| 2.7 Ajustamento com conhecimento a priori sobre os pa- râmetros aproximados | 26 |
| 2.8 Modelo paramétrico multivariado | 29 |
| 2.9 Matriz variância-covariância dos parâmetros ajusta- dos | 30 |
| 2.10 Fator de variância a posteriori | 32 |
| | |
| 3. ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS DEFORMAÇÕES | 35 |
| 3.1 Introdução | 35 |
| 3.2 Distribuições de probabilidade | 36 |
| 3.2.1 Distribuição normal | 36 |
| 3.2.2 Distribuição qui-quadrado (χ^2) | 38 |
| 3.2.3 Distribuição F de Snedecor | 39 |
| 3.2.4 Distribuição t de Student | 40 |
| 3.2.5 Distribuição de Wishart | 41 |
| 3.3 Distribuição das formas quadráticas nos modelos univariado e multivariado | 42 |
| 3.3.1 Modelo univariado | 42 |
| 3.3.2 Modelo multivariado | 44 |
| 3.4 Testes de Hipóteses | 45 |
| 3.5 Aplicação dos testes de hipóteses na análise de de- formações | 52 |
| 3.6. Análise estatística de deformações em função dos deslocamentos padronizados | 58 |
| | |
| 4. EXPERIÊNCIAS | 61 |
| 4.1 Introdução | 61 |
| 4.2 Metodologia utilizada | 61 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.6. | Análise estatística de deformações em função dos deslocamentos padronizados. | 58 |
| 4. | EXPERIÊNCIAS | 61 |
| 4.1 | Introdução | 61 |
| 4.2 | Metodologia utilizada | 61 |
| 4.2.1 | Geração das observações | 61 |
| 4.4 | Ajustamento das observações e análise estatística das deformações | 62 |
| 4.3 | Aplicações à redes de nivelamento | 64 |
| 4.4 | Resultados | 69 |
| 5. | COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES | 81 |
| 5.1 | Comentários | 81 |
| 5.2 | Conclusões | 82 |
| 5.3 | Recomendações | 83 |
| 6. | NOTAS DE REFERÊNCIAS | 84 |
| 7. | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 88 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Fig. 01: Relação linear entre os espaços matemáticos envolvidos | 09 |
| Fig. 02: Tres vértices de uma rede com quatro tipos de observações | 12 |
| Fig. 03: Espaços usados para solucionar problemas com junções | 20 |
| Fig. 04: Ilustração do erro tipo I e tipo II | 46 |
| Fig. 05: Rede 01 | 65 |
| Fig. 06: Rede 02 | 66 |
| Fig. 07: Rede 03 | 67 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tab. 01 : Altitudes atribuidas aos pontos da rede 01- | |
| Situação 01- | 65 |
| Tab. 02 : Altitudes atribuidas aos pontos da rede 02- | |
| Situação 02- | 66 |
| Tab. 03 : Altitudes atribuidas aos pontos da rede 02 | 67 |
| Tab. 04 : Altitudes atribuidas aos pontos da rede 03- | |
| Situação 01- | 68 |
| Tab. 05 : Altitudes atribuidas aos pontos da rede 03- | |
| Situação 02- | 69 |
| Tab. 06 : Resultados obtidos para a situação 01 da rede 01. | 72 |
| Tab. 07 : Resultados obtidos para a situação 02 da rede 01. | 73 |
| Tab. 08 : Resultados obtidos para a rede 02 | 74 |
| Tab. 09 : Resultados obtidos para a situação 01 da rede 03. | 75 |
| Tab. 10 : Resultados obtidos para a situação 02 da rede 03. | 76 |
| Tab. 11 : Comparação entre os pontos fixos e os detectados como fixos pelos diversos testes de hipóteses, a um nível de significância $\alpha = 5\%$ | 77 |
| Tab. 12 : Resultados obtidos para o ajustamento com conhe- cimento a priori sobre os parâmetros | 78 |
| Tab. 13 : Exemplo do processo iterativo para detecção de pontos fixos | 79 |

RESUMO

Foram apresentados os ajustamentos clássico e livre para detecção de deformações, sendo que para o caso livre apresentou-se também o modelo multivariado. Para decidir se as deformações obtidas são resultantes de deslocamentos ou das flutuações probabilística das observações, apresentou-se os testes de hipóteses tratados como injunções do ajustamento e os baseados na estatística t . O ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados foi também objeto de análise. Ao final, simulou-se diversas redes de nivelamento com o objetivo de aplicar os métodos propostos. Em função dos resultados apresentou-se algumas conclusões e recomendações.

ABSTRACT

The classic and free adjustment were presented to detect deformations, and that for the free case the multivariate model was also presented. To decide whether the deformations obtained are resulting of displacement or of the probabilistic fluctuations of the observations, hypothesis test were presented, as constrains of the adjustment and those established in the t statistic. The adjustment with aprior knowledge about the approximated parameters, was also object of analisis. In the end, several levelling networks were simulated with the objective of aplicating the proposed methods. In function of the obtained results, some conclusions and recomendations were presented.

INTRODUÇÃO

1.1 Definição do Assunto

As grandes estruturas de engenharia estão sujeitas a deslocamentos e deformações com o transcorrer do tempo. Se os deslocamentos forem de dimensão superior ao limite de segurança admissível, providências devem ser tomadas para evitar grandes danos de natureza material e humana. Um plano de monitoração é então indispensável, não somente durante a fase construtiva, mas também ao longo de toda sua vida útil. Isto possibilita a adoção de medidas preventivas e/ou corretivas que eventualmente se façam necessárias, além de propiciar subsídios para projetos futuros.

Os métodos de determinação das variações pontuais em estrutura dividem-se em dois grupos básicos: internos e externos¹.

Os métodos internos, também denominados mecânicos-físicos², recorrem a aparelhos e dispositivos instalados na própria obra, sendo que a medida dos deslocamentos é relativa. A maioria destes métodos tem como característica o fornecimento de somente uma ou duas dimensões dos deslocamentos.

Os métodos externos propiciam a determinação de deslocamentos absolutos e geralmente situam os equipamentos de medição fora da obra. Com estes métodos os deslocamentos podem ser fornecidos em até três dimensões, nas épocas previamente estabelecidas. Os métodos geodésico e fotogramétrico representam uma sub-divisão dos métodos externos.

As observações coletadas por estes métodos em geral são superabundantes e sujeitas a flutuações probabilísticas. Elas devem então ser ajustadas com o objetivo de proporcionar coordenadas única para os pontos de interesse. Os deslocamentos serão a princípio as diferenças de coordenadas de uma época com relação a outra, as quais devem ser analisadas estatisticamente para decidir se as diferenças de coordenadas representam dentro de um determinado nível de significância, os deslocamentos propriamente dito ou as flutuações probabilísticas das observações. O ajustamento e a análise estatística serão tratados neste trabalho.

O ajustamento será efetuado pelo método dos mínimos quadrados, o que proporcionará nas épocas previamente estabelecidas, as coordenadas ajustadas dos pontos de interesse com a respectiva matriz variância-covariância. Em 1031 cita-se que o ajustamento livre não soluciona o problema da deficiência de posição e orientação nas redes implantadas para detectar deslocamentos, razão pela qual se utiliza o ajustamento clássico. Entretanto, em 1041 e 1051 afirma-se que as redes geodésicas estabelecidas para detectar deslocamentos são em geral redes livres.

A análise estatística pode ser efetuada considerando-se os testes de hipóteses como injunções do ajustamento ou por testes de hipóteses formulados após o ajustamento.

1.2 Objetivos

Os dois objetivos principais desta pesquisa são: analisar entre os ajustamentos clássico e livre, qual apresenta melhores resultados na detecção de deslocamentos e verificar qual tipo de teste de hipótese proporciona maior número de decisões corretas para o caso em questão. Um outro aspecto em análise neste trabalho, trata de verificar se os resultados do ajustamento clássico são melhorados nas situações em que se tem uma avaliação da precisão com que são obtidos os parâmetros aproximados.

1.3 Metodologia

No capítulo 2 serão apresentados os ajustamentos clássico e livre. Para o clássico, aborda-se também o caso em que se tem conhecimento sobre a precisão com que os parâmetros aproximados foram obtidos. No ajustamento livre, apresenta-se as soluções pela pseudo-inversa e inversa generalizada reflexiva simétrica (I.G.R.S.). O modelo paramétrico multivariado com solução pela I.G.R.S. é também objeto deste capítulo.

A análise estatística dos deslocamentos será abordada no capítulo 3. Serão apresentados os testes de hipóteses como injunções no modelo paramétrico multivariado e os testes de hipóteses para o modelo univariado. Nestes últimos, os testes serão dados em função do deslocamento padronizado, o qual representa a razão entre o deslocamento e o respectivo desvio-padrão.

Para alcançar os objetivos propostos para este trabalho, os assuntos abordados nos capítulos 2 e 3 serão aplicados em várias redes de nivelamento simuladas, nas quais os deslocamentos são conhecidos. Estas experiências serão descritas no capítulo 4. Com base nos resultados obtidos, alguns comentários, conclusões e recomendações serão apresentados no capítulo 5.

AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES

2.1 Introdução

As observações obtidas pelo método geodésico ou fotogramétrico visando detectar deslocamentos entre várias épocas, proporcionam as coordenadas dos pontos de interesse nas épocas estabelecidas e as diferenças entre elas serão em princípio os deslocamentos.

Para determinar as coordenadas (planimétricas e altimétricas) dos pontos de interesse, dispõe-se em geral de um número de observações maior que o mínimo necessário para esse fim. Cuidados especiais cercam a fase de obtenção das observações, podendo-se esperar que as influências resultantes sobre elas sejam apenas aleatórias. Pode-se portanto efetuar o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, visando estimar os valores mais prováveis dos parâmetros incógnitos, sua precisão e a eventual correlação entre eles. No método fotogramétrico o ajustamento é efetuado tridimensionalmente, enquanto que no método geodésico pode-se ajustar a planimetria separadamente da altimetria, ou então, ajusta-se também tridimensionalmente.

Neste capítulo trata-se dos ajustamentos livre e clássico. Em todos os casos serão estabelecidas as expressões que proporcionam as influências de informações adicionais; designadas por injunções funcionais. Ao final apresentar-se-á a solução multivariada para o ajustamento livre.

Uma vez obtida a parte determinística das observações, pode-se avaliar sua componente estocástica, a qual é designada por v . Segundo Iø81, os resíduos estocásticos podem ser decompostos em

$$v = r + s, \quad (2.4)$$

sendo que r representa o resíduo estatisticamente independente e s o resíduo estatisticamente dependente; ambos com média zero. O resíduo s é algumas vezes denominado de sinal, sendo muito útil em predição. No transcorrer deste trabalho, o resíduo s será considerado inexistente, de modo que o resíduo v será tratado como estatisticamente independente para cada série temporal de observações.

As séries de observações que geram a matriz (2.3) devem ser analisadas individualmente antes de introduzi-las no modelo matemático a ser adotado. Elas podem ser testadas sobre dois pontos de vista diferentes: o primeiro verifica a função densidade de probabilidade postulada e o segundo examina cada observação de uma série; verificando se a mesma é compatível com as demais. Estes procedimentos encontram-se em Iø91. A rejeição de uma série de observações requer a realização de uma nova série. Deve-se portanto efetuar esta análise praticamente em tempo real.

Após a análise, dispõe-se da parte determinística da série de cada tipo de observação e uma avaliação da variância da parte estocástica, a qual pode ser a mesma estabelecida na pré-análise; caso a série seja aceita. As covariâncias entre

cada série de observações numa época e épocas distintas, serão consideradas nulas. Cada coluna da matriz (2.3) refere-se as observações de uma dada época, podendo-se a medida que elas são disponíveis, introduzi-las no modelo matemático para avaliar os deslocamentos dos pontos de interesse.

2.3 Modelo Matemático

O modelo matemático é uma relação funcional entre observações e parâmetros (incógnitas). A figura 01 ilustra os espaços matemáticos envolvidos e as ligações entre eles. Nesta figura, X^* e L^* representam respectivamente todos os valores possíveis de X e L .

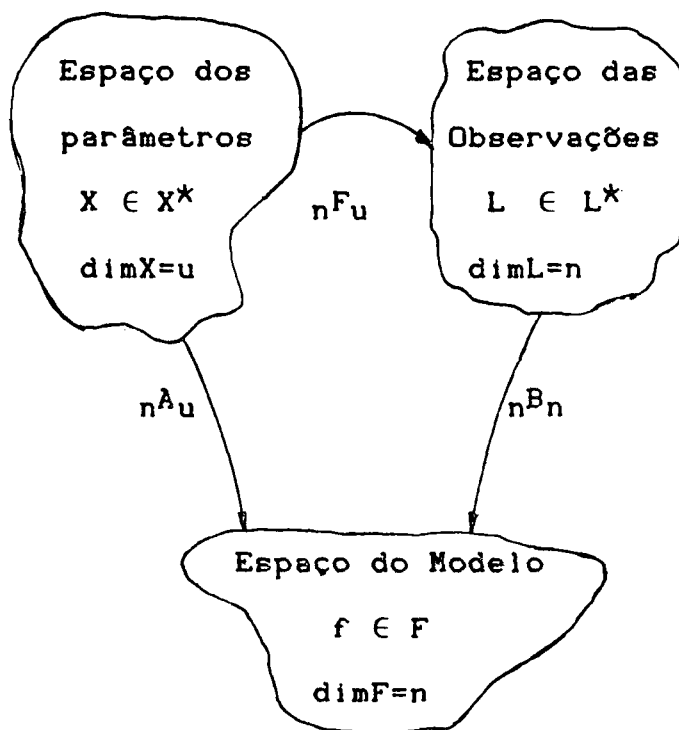


Fig.01 Relação linear entre os espaços matemáticos envolvidos.

Neste trabalho trata-se do modelo explícito em L e formulado no espaço das observações, comumente denominado de método paramétrico. Cada observação l_i proporcionará uma equação f_i , em geral não linear, envolvendo todos ou parte dos parâmetros. A função

$$L_a = F(X_a) \quad (2.5)$$

representa o referido modelo. Nesta expressão ${}_nL_a$ é o vetor das observações ajustadas, ${}_uX_a$ é o vetor dos parâmetros ajustados e F transforma X em L .

O modelo matemático expresso por (2.5), se não for linear, deve no entanto ser linearizável. A linearização é feita pela série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior à primeira. Substituindo L_a e X_a por $L_b + V$ e $X_o + X$ respectivamente, tem-se:

$$L_b + V = F(X_o + X). \quad (2.6)$$

Efetuando-se a linearização obtém-se:

$$V = F(X_o) - L_b + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_o} X, \quad (2.7)$$

na qual fazendo

$$F(X_o) - L_b = L_o - L_b = L \quad (2.8)$$

e

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_o} = A, \quad (2.9)$$

chega-se a

$$V = AX + L. \quad (2.10)$$

A expressão acima representa n equações de observações linearizadas envolvendo u parâmetros, onde:

${}_nV_1$ é o vetor dos resíduos das observações em uma época qualquer,

${}_nA_u$ é a matriz de projeção de X em F ,

${}_uX_{01}$ é o vetor dos parâmetros aproximados,

${}_uX_1$ é o vetor das correções aos parâmetros aproximados,

${}_nLb_1$ é o vetor das observações numa determinada época, correspondendo a uma coluna da matriz (2.3),

${}_nLo_1$ é o vetor das observações calculadas em função dos parâmetros aproximados e

${}_nL_1$ é um vetor constante dado por (2.8).

A matriz B da figura 01, a qual transforma L em F , neste caso é igual a $-I$ (matriz identidade).

Os parâmetros aproximados ${}_uX_{01}$ podem ser obtidos em uma carta ou por um transporte preliminar de coordenadas, fazendo-se uso de fórmulas abreviadas. Os elementos do vetor ${}_nLo_1$ devem no entanto ser calculados com todo rigor.

2.4 Equações de observações linearizadas

Nesta seção transcreve-se as equações de observações linearizadas dos diversos tipos de observações que normalmente são efetuadas. Tomando-se como base a figura 02, tem-se equa-

ções de direção, ângulo, distância e orientação, as quais são obtidas pelo método geodésico. Estas expressões podem ser obtidas a partir de consultas em [10] e [11].

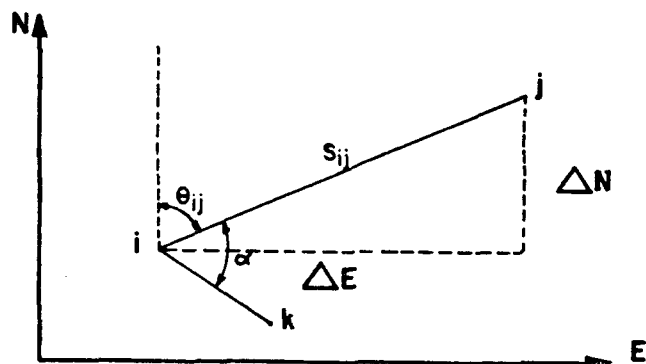


Fig.02 Três vértices de uma rede com 04 tipos de observações.

a) Direção D_{ij}

$$V_{ij} = (S_{ij}^2 \text{sen}(1''))^{-1} [(E_j^0 - E_i^0) dN_i - (N_j^0 - N_i^0) dE_i - (E_j^0 - E_i^0) dN_j + (N_j^0 - N_i^0) dE_j] - dZ_i + (\theta_{ij}^0 - \theta_{ij}^b) \quad (2.11)$$

Nesta expressão, dZ_i é a correção à constante de orientação,

$$\theta_{ij}^0 = \text{arctg}[(E_j^0 - E_i^0) / (N_j^0 - N_i^0)] \quad (2.12)$$

representa o azimute da direção calculado em função dos parâmetros aproximados,

$$\theta_{ij}^b = D_{ij} + Z_i \quad (2.13)$$

é o azimute observado; sendo que Z_i é a constante de orientação no vértice i e

$$S_{ij}^0 = [(N_j^0 - N_i^0)^2 + (E_j^0 - E_i^0)^2]^{0.5} \quad (2.14)$$

é a distância entre os dois vértices, calculada em função dos parâmetros aproximados. E_i^0, E_j^0, N_i^0 e N_j^0 são as coordenadas aproximadas em cada vértice e dE_i, dE_j, dN_i e dN_j são as correções às coordenadas aproximadas.

b) Ângulo

$$V_{jik} = D_{ik} - D_{ij} \quad (2.15)$$

c) Azimute ou Orientação θ_{ij}

$$V_{ij} = (S_{ij}^0 \text{sen}(1''))^{-1} [(E_j^0 - E_i^0) dN_i - (N_j^0 - N_i^0) dE_i - (E_j^0 - E_i^0) dN_j + (N_j^0 - N_i^0) dE_j] + (\theta_{ij}^0 - \theta_{ij}^b) \quad (2.16)$$

d) Distância S_{ij}

$$V_{ij} = (S_{ij}^0)^{-1} [-(N_j^0 - N_i^0) dN_i - (E_j^0 - E_i^0) dE_i + (N_j^0 - N_i^0) dN_j + (E_j^0 - E_i^0) dE_j + (S_{ij}^0 - S_{ij}^b)] \quad (2.17)$$

onde S_{ij}^0 e S_{ij}^b representam respectivamente a distância calculada com (2.14) e a distância observada reduzida ao plano de projeção.

Considerando-se ainda a figura 02 e admitindo-se por exemplo que as coordenadas N_i^b, E_i^b e H_i^b são conhecidas de um ajustamento anterior ou estabelecidas arbitrariamente, pode-se introduzir três equações de observações posicionais [12].

e) Posições N_1 , E_1 e H_1

$$Vn_1 = dN_1 + (N_1^{\circ} - N_1^b), \quad (2.18)$$

$$Ve_1 = dE_1 + (E_1^{\circ} - E_1^b) \text{ e} \quad (2.19)$$

$$Vh_1 = dH_1 + (H_1^{\circ} - H_1^b). \quad (2.20)$$

f) Diferença de Altitude ΔH_{1J}

Estes tipos de observações ocorrem no nivelamento geométrico. No nivelamento trigonométrico, embora a diferença de altitude não seja observada diretamente, ela é tratada como no nivelamento geométrico. Tem-se então conforme [13],

$$Vh_{1J} = dH_J - dH_1 + (\Delta H_{1J}^{\circ} - \Delta H_{1J}^b) \quad (2.21)$$

onde dH_J e dH_1 são respectivamente as correções as altitudes aproximadas de H_1° e H_J° , ΔH_{1J}^b é a diferença de altitude observada entre os pontos 1 e J e ΔH_{1J}° é a diferença entre H_J° e H_1° .

Quando se trata do método fotogramétrico para quantificar deslocamentos e deformações de estruturas de engenharia, geralmente usa-se a fotogrametria analítica, cujo método consiste da ressecção e intersecção espacial, tendo-se como modelo matemático a equação de colinearidade. O desenvolvimento do modelo matemático, visando obter as equações de observações linearizadas neste método, pode ser encontrado em [14] e [15].

2.5 Aplicação do método dos mínimos quadrados

Na expressão (2.10) tem-se $(n+u)$ incógnitas, (n resíduos e u parâmetros) ligadas por n equações. A introdução de ${}_nV_1$ tem como finalidade tornar o sistema consistente, pois o mesmo apresentava anteriormente um número de equações maior que o de incógnitas. Tem-se agora uma situação inversa, com solução indeterminada.

A solução normalmente escolhida nos trabalhos geodésicos é a solução de mínimos quadrados, determinada no espaço das observações, o qual torna-se um espaço Euclidiano afim. Um tensor métrico é selecionado baseado na inversa da matriz variância-covariância das observações Σ_{Lb} ; tendo-se portanto uma conotação estatística. A solução de mínimos quadrados é obtida minimizando a distância entre ${}_nV_1$ e ${}_nO_1$, sendo que o último representa o vetor nulo. Desta forma tem-se:

$$\phi = v^t \Sigma_{Lb}^{-1} v = (AX+L)^t \Sigma_{Lb}^{-1} (AX+L) = \text{mínimo.} \quad (2.22)$$

Nas aplicações práticas da técnica de mínimos quadrados, em geral somente a medida relativa entre os elementos de Σ_{Lb} é disponível, restando ainda determinar o fator de escala. Atribuindo uma escala arbitrária para Σ_{Lb}^{-1} , obtém-se a matriz dos pesos ${}_nP_n$ das observações, ou seja:

$$P = \sigma_o^2 \Sigma_{Lb}^{-1} \quad (2.23)$$

que substitui Σ_{Lb}^{-1} em (2.22). Esta substituição não afeta o vetor de parâmetros e o de resíduos. O fator de escala σ_0^2 é designado fator de variância ou variância da unidade de peso a priori. Seu valor pode ser estimado após o ajustamento.

A minimização de (2.24) pode ser efetuada no espaço do modelo ou das observações, proporcionando a mesma solução

$$(A^tPA)\hat{X} = -A^tPL. \quad (2.24)$$

A expressão (2.24) é designada sistema de equações normais e geralmente é representada por:

$$N\hat{X} = -U \quad (2.25)$$

onde,

$$N = A^tPA \quad (2.26)$$

é a matriz dos coeficientes e

$$U = A^tPL \quad (2.27)$$

é um vetor constante.

2.5.1 Solução de mínimos quadrados para um sistema consistente com solução única

O sistema de equações normais (2.25) será consistente quando a característica da matriz aumentada $(N;U)$ for igual à característica de N . Se a matriz N apresentar grau de singularidade nulo, sua característica e ordem serão iguais e as equações normais terão solução única. Sua solução pode ser dada por métodos diretos ou indiretos. A solução simbólica de (2.25) será expressa por

$$X = -N^{-1}U, \quad (2.28)$$

sempre que se deseja expressar a inversão de matrizes não singulares.

A estimativa de mínimos quadrados dos resíduos é dada pela expressão

$$\hat{V} = A\hat{X} + L, \quad (2.29)$$

que adicionada ao vetor Lb proporciona as observações ajustadas. O vetor dos parâmetros ajustados é dado por:

$$\hat{X}_a = X_0 + \hat{X}. \quad (2.30)$$

Em razão da linearização do modelo matemático, iterações devem ser efetuadas até que \hat{X} tenda à zero ou seja desprezível para a precisão requerida. Isto possibilita obter a expressão (2.29) sem fazer uso da matriz A , haja visto que o vetor L em (2.8) tenderá ao vetor \hat{V} ; circunstância que pode ser explorada computacionalmente.

O caso em questão, em razão de ter-se admitido grau de singularidade nulo, representa o ajustamento clássico. Todas as informações necessárias (posição, orientação e escala) são introduzidas no ajustamento.

2.6 Injunções e singularidade

Podem ocorrer casos em que além das informações contidas no modelo matemático principal (2.5), dispõe-se de informações adicionais sobre os parâmetros incógnitos. Por outro lado, ocorre também o caso em que o referido modelo não apresenta a solução clássica, em razão da singularidade. Ambos os casos podem ser tratados como injunções; no primeiro denomina-se injunções funcionais, enquanto que no segundo trata-se das injunções internas.

As expressões (2.18), (2.19) e (2.20) são comumente tratadas como observações adicionais, denominadas de pseudo-observações, injunções relativas posicionais ou injunções com peso. Neste trabalho quando se trata do caso clássico, admite-se que elas já fazem parte do modelo principal, sendo tratadas como equações de observações.

2.6.1 Injunções funcionais

As injunções funcionais são aplicadas sobre o modelo principal. Trata-se do caso quando os parâmetros envolvidos no ajustamento, ou parte deles, obedecem determinada função matemática ou uma lei física. Tais injunções são conhecidas como

injunções absolutas [16]. Pode-se também apresentar uma solução em que essas informações adicionais são tratadas como observações associada a um peso, o qual torna-se grande quando deseja-se que a injunção seja absoluta [17].

As informações adicionais sobre o modelo matemático (2.5) são expressas pela função

$$G_f(X_a) = 0 \quad (2.31)$$

em geral não linear, denominada modelo auxiliar.

Admitindo-se as mesmas considerações sobre (2.5) e a existência de s injunções funcionais, obtém-se após a linearização

$$\frac{\partial G_f}{\partial x_a} \Big|_{X_0} X + G_f(X_0) = 0. \quad (2.32)$$

Fazendo

$$\frac{\partial G_f}{\partial x_a} \Big|_{X_0} = C_f \text{ e} \quad (2.33)$$

$$G_f(X_0) = W_f, \quad (2.34)$$

a (2.31) passa a ser representada por:

$$C_f X + W_f = 0, \quad (2.35)$$

a qual representa s injunções funcionais linearizadas. A matriz ${}_s C_f u$ projeta X em G_f e o vetor ${}_s W_f 1$ representa o erro de

fechamento. A figura 03 ilustra este procedimento.

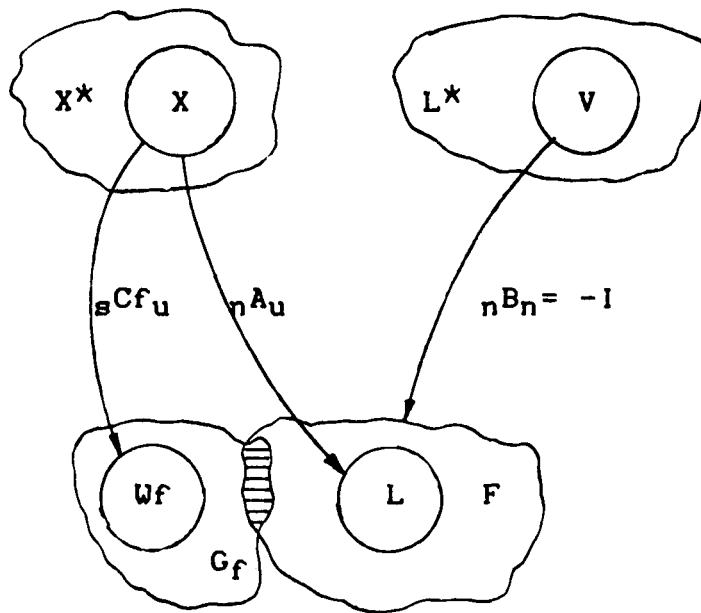


Fig.03- Espaços usados para solucionar problemas com injunções.

As equações normais são obtidas aplicando o M.M.Q. à expressão

$$v^t p v - 2k_f^t (C_f x + W_f) = \text{mínimo}, \quad (2.36)$$

na qual k_f é o vetor dos Lagrangianos.

A minimização de (2.36) proporciona

$$\begin{bmatrix} N & C_f^t \\ C_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ k_f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} U \\ W_f \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

a qual representa um sistema de $(u+s)$ equações normais. Se apenas o modelo matemático (2.5) proporciona característica integral ao sistema de equações normais e não há injunções de-

pendentes, pode-se obter \hat{X}_f a partir do vetor \hat{X} solucionado apenas com o modelo principal. De (2.37) obtém-se:

$$\hat{K}_f = [CfN^{-1}Cf^t]^{-1} [Wf - CfN^{-1}U] \quad e \quad (2.38)$$

$$N\hat{X}_f + Cf^t\hat{K}_f + U = 0. \quad (2.39)$$

Substituindo a (2.38) em (2.39) tem-se:

$$\hat{X}_f = \hat{X} - N^{-1}Cf^t[CfN^{-1}Cf^t]^{-1} [Cf\hat{X} + Wf] \quad (2.40)$$

com \hat{X} sendo obtido pela (2.28).

A correção $(\hat{X}_f - \hat{X})$ representa a influência da injunção. Pode-se constatar que se trata de expressões seqüenciais, representando um caso particular da filtragem Kalman quando se considera o modelo estático [18]. Os testes de hipóteses que serão apresentados no próximo capítulo podem ser tratados como injunções funcionais.

2.6.2 Injunções internas ou Ajustamento livre

Quando o sistema de equações normais (2.25) apresenta deficiência de característica e a causa refere-se ao fato de não se ter atribuído as injunções mínimas necessárias (posição, orientação e escala), trata-se do ajustamento livre. Neste caso, todos os parâmetros envolvidos na rede a ser ajustada podem sofrer correções, sendo que a solução para este tipo de problema é obtida utilizando-se as inversas generaliza-

das.

Tendo-se em vista que o sistema de equações normais é simétrico, há interesse pelas inversas generalizadas de matrizes simétricas, em especial a reflexiva simétrica e a pseudo-inversa. Esta última, também denominada inversa de Moore Penrose, além de proporcionar solução de mínimos quadrados, impõe a condição de norma mínima a todos os parâmetros envolvidos no ajustamento [19], ou seja:

$$X^t X = \text{mínimo.} \quad (2.41)$$

Desta forma, a definição do datum da rede recebe contribuição de todos os parâmetros. Nestas circunstâncias, a solução do sistema de equações normais é dada por:

$$\hat{X}_i = -N^+ U, \quad (2.42)$$

onde N^+ é a pseudo-inversa, a qual entre todas as inversas, apresenta traço mínimo [20].

Quando a condição (2.41) é restrita somente a parte dos parâmetros envolvidos no ajustamento, trata-se da I.G.R.S.. A solução neste caso é

$$\hat{X}_{rs} = -N_{rs}^+ U \quad (2.43)$$

e a definição do datum recebe contribuição apenas dos parâmetros sujeitos a condição (2.41). Convém ressaltar que a solução obtida pela (2.43) é também solução de mínimos quadra-

dos.

Diversos métodos para o cálculo de inversas generalizadas são apresentados em 1211 e 1221.

Outra forma de solucionar o problema de singularidade é pela imposição de uma série mínima de injunções particulares, as quais são tratadas de maneira semelhante as injunções funcionais. As injunções satisfazendo a condição

$$AC_i^t = 0, \quad (2.44)$$

são denominadas injunções internas mínimas. As colunas de ${}_g C_{i_u}$ formam uma base para o espaço nulo de A .

A solução neste caso é dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{K}_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N & C_i^t \\ C_i & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U \\ W_c \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

sendo ${}_g W_{c_1}$ geralmente um vetor nulo. Esta solução pode ser interpretada como resultante da introdução das injunções

$$C_i X = 0. \quad (2.46)$$

Isto pode ser verificado facilmente consultando as expressões (2.35) e (2.37) apresentadas anteriormente.

A inversa em (2.45) é uma das opções de determinar a pseudo-inversa apresentada em 1231. Pode-se portanto interpretar a pseudo-inversa como resultante do conjunto mínimo de injunções representadas por (2.46).

A matriz ${}_{7}C_{1u}$ para uma rede tridimensional estabelecida apenas por medidas de ângulos e sem escala, segundo [24], é dada por:

$${}_{7}C_{1u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & z_1 & -y_1 & 0 & z_2 & -y_2 & \dots \\ -z_1 & 0 & x_1 & -z_2 & 0 & x_2 & \dots \\ y_1 - x_1 & 0 & y_2 & -x_2 & 0 & 0 & \dots \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

onde x_i , y_i e z_i são as coordenadas aproximadas dos parâmetros. Para a mesma circunstância, porém tratando-se de uma rede estabelecida no plano tem-se:

$${}_{4}C_{1u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \dots \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Quando se trata de uma rede de nivelamento, a referida matriz é dada por:

$${}_{1}C_{1u} = [1 \quad 1 \quad 1, \quad \dots] \quad (2.49)$$

Substituindo (2.47) em (2.46), constata-se que o centro de massa da rede torna-se um ponto fixo [25].

Em [26] e [27] encontra-se uma interpretação geométrica das injunções internas mínimas para o caso de uma triangulação, a partir das quais obtém-se facilmente as matrizes (2.47), (2.48) e (2.49).

A matriz C_i para cada caso apresentado acima pode sofrer algumas mudanças, conduzindo a solução do tipo (2.43). É o que ocorre quando uma ou mais colunas destas matrizes são compostas de elementos nulos. Isto significa que os parâmetros correspondentes a estas colunas não estão sujeitos às condições (2.41) e (2.46), podendo-se portanto variar livremente. Na detecção de deformações, tais parâmetros referem-se aos pontos não considerados fixos. Quando se aplica o ajustamento livre na detecção de deformações fazendo-se uso da pseudo-inversa, todos os pontos participam da definição do datum e a matriz C_i não sofre qualquer alteração.

Considerando-se agora que o modelo com deficiência de característica dispõe de injunções funcionais semelhantes às expressas por (2.31), procedendo-se de modo análogo obtém-se:

$$\hat{\chi}_{1f} = \hat{\chi}_1 - N^+ C_f^t [C_f N^+ C_f^t]^{-1} [C_f \hat{\chi}_1 + W_f] \quad (2.50)$$

quando se usa a pseudo-inversa e

$$\hat{\chi}_{rsf} = \hat{\chi}_{rs} - N_{rs}^- C_f^t [C_f N_{rs}^- C_f^t]^{-1} [C_f \hat{\chi}_{rs} + W_f] \quad (2.51)$$

no caso da I.G.R.S.. Segundo [28], para que as inversas ordinárias de $[C_f N_{rs}^- C_f^t]$ e $[C_f N^+ C_f^t]$ existam, a matriz $[C_i^t, C_f^t]$ deve ser de característica integral. As expressões (2.50) e (2.51) são sequenciais e serão exploradas quando do tratamento de testes de hipóteses sobre o modelo com deficiência de característica.

2.7 Ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados.

O desenvolvimento apresentado até aqui pressupõe apenas o conhecimento da matriz variância-covariância das observações Σ_{Lb} e as injunções funcionais e internas foram tratadas como absolutas. Os parâmetros aproximados foram introduzidos no modelo matemático considerando-se a não existência de uma matriz variância-covariância Σ_{X_0} associada à sua determinação; o que muitas vezes é incorreto do ponto de vista estatístico. É razoável admitir que uma vez determinados tais parâmetros, pode-se ter uma avaliação de Σ_{X_0} .

Em 1291 é apresentada uma solução em que além de Σ_{Lb} , dispõe-se também de Σ_{X_0} e as injunções funcionais não são tratadas como absolutas, podendo-se portanto admiti-las como associadas a uma Σ_G . Pode-se então definir as matrizes peso independentemente para observações, parâmetros aproximados e injunções; todos tratados como observações. Quando um parâmetro, injunção ou observação deve ser tomado como absoluto, atribui-se-lhe um peso "grande".

Nesta seção tratar-se-á da questão acima mencionada de acordo com 1301, a qual é designada por "problemas com conhecimento a priori sobre os parâmetros". Tem-se então duas matrizes de variância-covariância, a Σ_{X_0} e a Σ_{Lb} . Há quatro diferentes casos para o problema, os quais baseiam-se no conhecimento ou não dos fatores de variância a priori $\sigma_{0,Lb}^2$ e σ_{0,X_0}^2 . Dentre estas situações, apresentar-se-á o caso em que os dois fatores de variância são iguais, porém incógnitos.

A solução pode ser dada pelo método dos correlatos (os parâmetros aproximados são tratados como observações) ou paramétrico. Neste último, além da expressão (2.5) tem-se:

$$X_o^a = X_a \quad (2.52)$$

representando u equações de observações denominadas pseudo-observações. Substituindo X_o^a e X_a por $X_o + V_r$ e $X_o + X_r$ respectivamente, tem-se:

$$V_r = X_r + X_o - X_o \quad (2.53)$$

Fazendo

$$L_r = X_o - X_o, \quad (2.54)$$

chega-se a

$$V_r = X_r + L_r. \quad (2.55)$$

O vetor constante ${}_u L_{r1}$ é geralmente nulo na primeira etapa do ajustamento, pois toma-se o vetor dos parâmetros aproximados ${}_u X_{o11}$ igual ao vetor ${}_u X_{o1}$, o qual contém os próprios parâmetros aproximados, porém com a designação de observações. Quando se efetua iterações, L_r passa a ser a diferença entre os parâmetros ajustados da iteração anterior (${}_u X_{o11(i-1)}$) e ${}_u X_{o1}$. O vetor ${}_u X_{r1}$ representa as correções aos parâmetros aproximados ${}_u X_{o1}$ e ${}_u V_{r1}$, os resíduos de ${}_u X_{o1}$.

As equações normais são obtidas aplicando o M.M.Q. a expressão

$$V^t p_V + V_r^t P_r V_r = \text{mínimo}, \quad (2.56)$$

com

$$P_r = \sigma_{\theta, X_0}^2 \sum X_0^{-1}. \quad (2.57)$$

A solução é dada por:

$$\hat{X}_r = -\bar{N}^{-1} \bar{U} \quad (2.58)$$

onde,

$$\bar{N} = N + P_r \quad e \quad (2.59)$$

$$\bar{U} = U + P_r L_r. \quad (2.60)$$

Referindo-se novamente as expressões (2.18), (2.19) e (2.20), pode-se dizer que o assunto abordado nesta seção trata-se do caso em que as referidas expressões são aplicadas a todos os parâmetros da rede. Nota-se portanto que se trata do caso clássico, quando se estima variância para os parâmetros aproximados.

2.8 Modelo paramétrico multivariado.

Quando as n observações coletadas em todas p épocas são sempre as mesmas, isto é, as componentes de cada linha da matriz (2.3) representam a média amostral de uma mesmo conjunto de observações obtidos em épocas diferentes, trata-se de um modelo multivariado. Sua principal aplicação em Estatística é a análise multivariada da variância e em Geodésia, a análise de observações repetidas [31]. A matriz de observação (2.3) é então representada por nL_{mp} .

Tomando-se em cada época os mesmos valores para os parâmetros aproximados, tem-se como modelo linearizado

$$V_m = AX_m + L_m. \quad (2.61)$$

Nesta expressão, nV_{mp} representa a matriz dos resíduos, nX_{mp} a matriz das correções aos parâmetros aproximados e nL_{mp} , a diferença entre nL_{mop} e nL_{mp} ; a primeira sendo as observações calculadas em função dos parâmetros aproximados. As observações de uma mesma época e entre épocas diferentes são obtidas independentemente. Admitindo-se também que as precisões são idênticas em todas épocas, a matriz variância-covariância das observações é apresentada em [32], a partir da qual se obtém a matriz dos pesos

$$P_m = \sum_{om} \otimes \sum_{Lb}^{-1}. \quad (2.62)$$

Na expressão acima, Θ representa o produto de Kronecker e $p.\Sigma_{0mp}$ é a matriz dos fatores de variâncias a priori.

Para o caso clássico tem-se como solução

$$\hat{\chi}_m = -N^{-1}U_m \quad (2.63)$$

onde uU_{mp} é uma matriz de termos constantes.

Quando se trata do ajustamento livre a solução é:

$$\hat{\chi}_{i_m} = -N^+U_m \quad \text{ou} \quad (2.64)$$

$$\hat{\chi}_{rs_m} = -N\bar{r}sU_m. \quad (2.65)$$

Se informações adicionais são incluídas tem-se:

$$\hat{\chi}_{if_m} = \hat{\chi}_{i_m} - N^+Cf^t [CfN^+Cf^t]^{-1} [Cf\hat{\chi}_{i_m} + Wf_m] \quad \text{ou} \quad (2.66)$$

$$\hat{\chi}_{rsf_m} = \hat{\chi}_{rs_m} - N\bar{r}sCf^t [CfN\bar{r}sCf^t]^{-1} [Cf\hat{\chi}_{rs_m} + Wf_m]. \quad (2.67)$$

Para o caso do ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados, a solução multivariada é dada por:

$$\hat{\chi}_{r_m} = -\bar{N}^{-1}\bar{U}_m. \quad (2.68)$$

2.9 Matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados.

Após obter a estimativa dos parâmetros e observações ajustadas nos diversos casos apresentados, deve-se estimar a

matriz variância-covariância (MVC) dos parâmetros ajustados ($\sum X_a$) e das observações ajustadas ($\sum L_a$). Isto é indispensável para a análise estatística dos resultados. A avaliação destas matrizes é obtida pela lei de propagação das covariâncias, a qual é apresentada em [33]. Neste trabalho será apresentada apenas a M.V.C. para os parâmetros ajustados.

Aplicando-se a lei de propagação de covariâncias na expressão (2.30) para os casos em que \hat{X} é dado por (2.28) e (2.40), tem-se respectivamente

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} e \quad (2.69)$$

$$\sum X_{a_f} = \hat{\sigma}_0^2 [N^{-1} - N^{-1} C_f^t (C_f N^{-1} C_f^t)^{-1} C_f N^{-1}] \quad (2.70)$$

para o caso clássico.

Quando se trata do ajustamento livre com soluções dadas pelas expressões (2.42) e (2.43), tem-se:

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_0^2 N^+ e \quad (2.71)$$

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_0^2 N_{RS}^- . \quad (2.72)$$

Se informações adicionais são introduzidas nestes casos, obtém-se:

$$\sum X_{a_{IF}} = \hat{\sigma}_0^2 [N^+ - N^+ C_f^t (C_f N^+ C_f^t)^{-1} C_f N^+] e \quad (2.73)$$

$$\sum X_{a_{RSF}} = \hat{\sigma}_0^2 [N_{RS}^- - N_{RS}^- C_f^t (C_f N_{RS}^- C_f^t)^{-1} C_f N_{RS}^-] . \quad (2.74)$$

Para o caso do ajustamento apresentado na seção 2.7, tem-se a estimativa aproximada

$$\sum \chi_a^2 = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}, \quad (2.75)$$

quando se aplica a propagação de covariâncias em (2.58).

Resta ainda estimar as M.V.Cs. para o modelo paramétrico multivariado referente as expressões (2.63) à (2.68). Entretanto elas corresponderão às expressões apresentadas nesta seção, bastando para tal substituir $\hat{\sigma}_0^2$ por $\sum \omega_{00}$.

Deve-se ressaltar que as M.V.Cs. apresentadas são exatas apenas para modelos lineares, porém na maioria dos casos elas apresentam uma indicação correta da exatidão dos parâmetros [34].

2.10 Fator de variância a posteriori.

Conforme já citou-se, o fator de variância a priori em (2.23) é arbitrário e não afeta os parâmetros e observações ajustadas, influenciando entretanto as M.V.Cs.. Deve-se então avaliá-lo após o ajustamento. Em [35] mostra-se que

$$\hat{\sigma}_0^2 = S/g.l., \quad (2.76)$$

com

$$S = \hat{V}^t P \hat{V} = (A\hat{X}+L)^t P (A\hat{X}+L) \quad (2.77)$$

é uma estimativa imparcial de σ_0^2 . Na expressão (2.76), g.l. representa o número de graus de liberdade.

Nos casos em que foram introduzidas injunções adicionais, muitas vezes não se tem interesse pela influência destas injunções diretamente sobre os resíduos e parâmetros;

mas sim pela influência sobre $\hat{\sigma}_0^2$ e Σ_{0m} . Isto é explorado quando os testes de hipóteses, assunto do próximo capítulo, são tratados como injunções do ajustamento. Em 1361 e 1371 mostra-se que

$$R = (Cf\hat{X}-Wf)^t [CfN^{-1}Cf^t]^{-1} (Cf\hat{X}-Wf) \quad (2.78)$$

representa tal influência para o caso clássico. Na expressão acima, \hat{X} é o resultado das correções aos parâmetros sem influência das injunções funcionais. O fator de variância a posteriori, para os casos em que informações adicionais foram introduzidas sobre os parâmetros, é dado por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = (S + R)/(n-u+s). \quad (2.79)$$

Quando se trata do caso clássico com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados, obtém-se:

$$\hat{\sigma}_0^2 = (\hat{V}^t P \hat{V} + \hat{V}_r^t P_r \hat{V}_r)/n. \quad (2.80)$$

No modelo paramétrico multivariado, a expressão que representa uma estimativa imparcial de Σ_{0m} é

$$\Sigma_{0m} = S_m/g.l. \quad (2.81)$$

com

$$S_m = \hat{V}_m^t P_m \hat{V}_m = (A\hat{X}_m + L_m)^t P_m (A\hat{X}_m + L_m). \quad (2.82)$$

O escalar $|\Sigma_{om}|$ é designado variância generalizada, sendo análogo à σ_0^2 .

Conforme já citou-se, a expressão (2.78) trata-se do caso clássico. Para os demais casos, basta substituir X e a inversa de N correspondente a cada situação. No caso do modelo multivariado tem-se:

$$R_m = (Cf\hat{X}_m - Wf_m)^t [CfN^- Cf^t]^{-1} (Cf\hat{X}_m - Wf_m), \quad (2.83)$$

na qual N^- representa N^+ ou $N\bar{r}_s$.

ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS DEFORMAÇÕES

3.1 Introdução

Nas estimativas dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados apresentadas no capítulo anterior, não foi necessário conhecer a função densidade de probabilidade (f.d.p.) das observações. Entretanto, para a análise estatística é indispensável tal conhecimento.

Muitas evidências experimentais mostram que a maioria das observações geodésicas apresentam uma f.d.p. normal, ou então, muito se aproxima desta¹³⁸. Em 1391 é citado que as distâncias medidas com um instrumento eletro-óptico podem ser assumidas como tendo distribuição normal. Muitas conclusões obtidas dos testes de hipóteses baseados nesta distribuição, não são seriamente afetados quando há um afastamento desta, desde que a distribuição tenha uma curva com aparência de "sino"¹⁴⁰.

Em razão das considerações citadas acima, as observações L_b , ou equivalentemente os resíduos V , serão considerados como normalmente distribuídos. Isto se faz necessário para a técnica estatística a ser apresentada neste capítulo. Deve-se então ressaltar que ao admitir V com distribuição normal, a solução de mínimos quadrados é também solução de máxima verossimilhança, a qual requer o conhecimento da f.d.p. das observações.

Neste capítulo são apresentados os testes de hipóteses, os quais possibilitam a verificação de informações adicio-

nais sobre os parâmetros incógnitos, podendo-se tratá-los como injunções funcionais. No caso em questão, o interesse particular é verificar se as diferenças de coordenadas entre as diversas épocas refletem o movimento dos pontos a serem monitorados, ou as variações causadas pela matriz variância-covariância das observações. Os testes de hipóteses podem ser formulados admitindo-se a igualdade das coordenadas nas diferentes épocas, ou então, postulando-se uma hipótese em que as diferenças de coordenadas podem deslocar-se num determinado intervalo antes de contribuir para a inferência estatística. No primeiro caso não há um retrato da realidade, visto que os erros de observações nas diferentes épocas proporcionam coordenadas diferentes, mesmo se os pontos permanecerem fixos. Quanto ao segundo caso, o intervalo deve ser estabelecido de modo que seja inferior ao resultante dos desvios-padrão médio das observações.

3.2 Distribuições de probabilidades.

Nesta seção, apresenta-se as distribuições de probabilidade que serão utilizadas na análise estatística para detecção de deslocamentos.

3.2.1 Distribuição normal

Esta distribuição é uma das mais importantes e mais frequentemente usada em estatística, a partir da qual outras importantes distribuições são derivadas.

Diz-se que uma variável aleatória x apresenta distribuição normal unidimensional com média u e variância σ^2 , se sua f.d.p. for dada por

$$\phi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-0,5} e^{-(x-u)^2 / 2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.1)$$

A notação usada é

$$x \sim N(u, \sigma). \quad (3.2)$$

Diversas propriedades desta distribuição são dadas em 1411. A tabulação de (3.1), em razão da dependência de dois parâmetros, torna-se trabalhosa. Efetuando-se a mudança de variável

$$z = (x-u)/\sigma, \quad (3.3)$$

obtem-se a distribuição normal reduzida, que tem notação

$$z \sim N(0, 1) \quad (3.4)$$

e f.d.p. dada por

$$\phi(z) = (2\pi)^{-0,5} e^{-0,5z^2}. \quad (3.5)$$

A tabela que proporciona a área sob a curva normal reduzida, com z variando de 0 à 2,99, pode ser encontrada em 1421, a qual é dada pela f.d.p. acumulada

$$\int_{-\infty}^{z_p} \phi(z) dz = P(z < z_p). \quad (3.6)$$

Quando se tem uma variável aleatória $n_1 X_1$, diz-se que esta variável tem distribuição normal com média $n_1 U_1$ e matriz variância-covariância $n_1 \Sigma_{n_1}$ definida positiva, se sua f.d.p. for dada por

$$\phi(x) = [(2\pi)^{n_1/2} |\Sigma_{n_1}|^{-1/2}]^{-1} e^{-0,5(x-U)^t \Sigma_{n_1}^{-1}(x-U)}, \quad (3.7)$$

a qual é denominada distribuição normal n_1 -dimensional, cuja notação usual é $N(U, \Sigma X)$.

3.2.2 Distribuição Qui-Quadrado (χ^2)

Se uma variável aleatória $n_1 X_1$ é normalmente distribuída, isto é, $X \sim N(0, 1)$, então a soma dos quadrados

$$V = X^t X = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 \quad (3.8)$$

tem distribuição $\chi^2(n_1)$, onde n_1 é o número de graus de liberdade. A forma funcional da distribuição é dada por:

$$\phi(v) = [v^{(n_1/2)-1} e^{-v/2}] / [2^{n_1/2} \Gamma(n_1/2)] \quad p/ \quad 0 < v < \infty \quad (3.9)$$

com $\phi(v) = 0$ para $v \leq 0$. Na expressão acima, Γ é a função gama, a qual consta em [43]. O percentil desta distribuição para valores pré-fixados da probabilidade e vários graus de liberdade pode ser obtido em [44].

Quando a variável aleatória X tem distribuição $N(U, 1)$, a soma dos quadrados em (3.8) tem distribuição $\chi^2(n_1, \lambda)$ não central, onde λ é o parâmetro de não-centralidade, o qual é dado por:

$$\lambda = U^2 U. \quad (3.10)$$

A f.d.p. para a distribuição qui-quadrado não central pode ser encontrada em [45].

3.2.3 Distribuição F de Snedecor.

Tomando-se as variáveis aleatórias independentes $Z \sim \chi^2(n_1)$ e $V \sim \chi^2(m_1)$, então a variável aleatória

$$W = (Z/n_1)/(V/m_1), \quad (3.11)$$

tem distribuição $F(n_1, m_1)$, onde n_1 e m_1 são respectivamente o número de graus de liberdade do numerador e do denominador. A f.d.p. é dada por:

$$f(w) = \frac{\Gamma(n_1/2 + m_1/2) n_1^{n_1/2} m_1^{m_1/2} w^{n_1/2 - 1}}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(m_1/2) (m_1 + n_1 w)^{n_1/2 + m_1/2}} \quad p/0 < w < \infty \quad (3.12)$$

e $f(w) = 0$ para $w \leq 0$. Para a obtenção dos percentis da distribuição F em função dos graus de liberdade m_1 e n_1 com diversos níveis de significância, sugere-se [46]. É útil saber que é válida a relação

$$F(n_1, m_1, \alpha) = 1/[F(m_1, n_1, 1-\alpha)]. \quad (3.13)$$

Se as variáveis aleatórias Z e V , com $Z \sim \chi^2(n_1, \lambda)$ e $V \sim \chi^2(m_1)$ são independentes, então a variável aleatória dada por (3.11) tem a distribuição $F'(n_1, m_1, \lambda)$ não central, isto é,

$$(Z/n_1)/(V/m_1) \sim F'(n_1, m_1, \lambda), \quad (3.14)$$

a qual é de grande importância na obtenção da potência dos testes de hipóteses [47].

3.2.4 Distribuição t de Student.

Tomando-se as variáveis aleatórias independentes $Z \sim N(0, 1)$ e $V \sim \chi^2(n_1)$, então a variável aleatória

$$t = Z/(V/n_1)^{0,5} \quad (3.15)$$

tem f.d.p. dada por

$$\phi(t) = \frac{\Gamma(0,5(n_1+1))}{\Gamma(0,5n_1) (\pi n_1)^{0,5} (1+t^2/n_1)^{0,5(n_1+1)}} \quad (3.16)$$

$p/-\infty < t < \infty$.

Se uma amostra de tamanho n , extraída de uma população normal, tem média \bar{x} e desvio-padrão $\hat{\sigma}_x$, então a estimativa

$$t = (\bar{x}-u)/\hat{\sigma}_x, \quad (3.17)$$

segue a distribuição dada pela (3.16) com $n_1=(n-1)$. Ela distribui-se simetricamente com média 0, porém não normalmente. .

Em 1481 encontra-se a tabela que proporciona os percentis desta distribuição para valores pré-fixados da probabilidade e vários graus de liberdade.

3.2.5 Distribuição de Wishart.

Na distribuição qui-quadrado tinha-se uma variável aleatória X n_1 -dimensional. Esta variável é agora representada por uma matriz $n_1 \times p$ com $p \leq n_1$. Supondo-se que os elementos de cada coluna desta matriz são independentes e que tenha distribuição $N(0, \Sigma)$, então a variável

$$p \times p = X^t X \quad (3.18)$$

tem distribuição de Wishart central 1491, isto é,

$$V \sim W(n_1, \Sigma) \quad (3.19)$$

sendo que n_1 representa o número de graus de liberdade. Pode-se notar que quando $p=1$, a distribuição (3.19) corresponde a (3.8). A expressão representada por (3.18) constitui uma generalização matricial da distribuição qui-quadrado e tem muitas propriedades similares a ela1501. Quando os elementos das colunas da matriz $n_1 \times p$ são independentes, porém com distribuição $N(U, \Sigma)$, a (3.18) passa a ter distribuição de Wishart não central, a qual não será abordada neste trabalho.

Se as variáveis pU_p e pV_p com distribuições $U \sim U(n_1, \Sigma)$ e $V \sim U(m_1, \Sigma)$ são independentes, segundo [54], a distribuição da variável

$$\hat{\Lambda}_{p, m_1, n_1} = |U| / |U+V| \quad (3.20)$$

pode ser aproximada por:

$$\frac{(1 - \hat{\Lambda}_{p, m_1, n_1}^{1/r})(o-2t)}{(\hat{\Lambda}_{p, m_1, n_1}^{1/r})^{m_1 p}} \sim F(m_1 p, o-2t), \quad (3.21)$$

onde,

$$o = n_1 + 1/2(m_1 - p - 1), \quad (3.22)$$

$$r = [(m_1^2 p^2 - 4) / (m_1^2 + p^2 - 5)]^{0,5} \text{ e} \quad (3.23)$$

$$t = (m_1 p - 2) / 4. \quad (3.24)$$

Nota-se portanto que a distribuição da variável $\hat{\Lambda}$ pode ser obtida a partir da distribuição F. A tabela que proporciona os valores de $\hat{\Lambda}_{\alpha, p, m_1, n_1}$ para $\alpha = 5\%$, encontra-se em [52].

3.3 Distribuição das formas quadráticas nos modelos univariado e multivariado.

3.3.1 Modelo univariado

Quando as observações, ou equivalentemente os resíduos, apresentam distribuição normal, isto é,

$$V \sim N(AX+L, \sigma_o^2 P^{-1}) \quad (3.25)$$

com característica de λ

$$r(A) = q \leq u ; \quad (3.26)$$

conforme 1531 e 1541, a forma quadrática $V^t \Sigma_L^{-1} V$ tem distribuição χ^2 com $(n-q)$ graus de liberdades, os quais correspondem ao número de observações superabundantes. Tomando-se as expressões (2.23) e (2.77) do capítulo anterior, tem-se que

$$S/\sigma_o^2 \sim \chi^2_{(n-q)} \quad (3.27)$$

ou, utilizando-se a (2.76) chega-se a

$$(n-q)\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 \sim \chi^2_{(n-q)} \quad (3.28)$$

com o parâmetro λ de não centralidade nulo.

Pode-se também determinar a distribuição da forma quadrática R expressa por (2.78), a qual representa as influências das injunções funcionais; aqui consideradas lineares. Em 1551 mostra-se que

$$R/\sigma_0^2 \sim \chi'^2(s, \lambda) \quad (3.29)$$

onde λ é dado por :

$$\lambda = (1/\sigma_0^2) [(CfX - Wf)^t (CfN^{-1} Cf^t)^{-1} (CfX - Wf)], \quad (3.30)$$

na qual N^{-1} representa a inversa utilizada no modelo principal para cada caso considerado (N^{-1}, N^+, N_{rS}^-).

Em 1561 mostra-se que S/σ_0^2 e R/σ_0^2 são independentes.

Tem-se então a partir da (3.14) que

$$(R/s)/(S/(n-q)) \sim F'(s, n-q, \lambda). \quad (3.31)$$

3.3.2 Modelo multivariado.

As formas quadráticas (2.82) e (2.83) no modelo paramétrico multivariado, segundo 1571, tem distribuição de Wishart, isto é:

$$S_m \sim W(n-q, \Sigma) \text{ e} \quad (3.32)$$

$$R_m \sim W(s, \Sigma). \quad (3.33)$$

A (3.33) tem distribuição de Wishart central, desde que

$$CfX_m - Wf_m = 0. \quad (3.34)$$

Pode ser mostrado que S_m e R_m são independentes. Tem-se então

$$\wedge_{p,s,n-q} = |S_m|/|S_m+R_m| \quad (3.35)$$

com a distribuição aproximada dada à (3.20).

3.4 Testes de hipóteses.

Os testes de hipóteses são caracterizados pela formulação de uma hipótese a ser testada e uma hipótese alternativa sobre os parâmetros da população em análise. A primeira, também designada hipótese nula, é representada por H_0 , enquanto que a hipótese alternativa representa-se por H_1 . A decisão de aceitar ou rejeitar H_0 é baseada nas observações, de modo que a decisão é um evento aleatório. O procedimento do teste é obtido pela divisão do espaço de probabilidade da amostra em duas regiões: uma de aceitação R_A e outra da rejeição R_R .

Dois tipos de erros podem ser cometidos com a aceitação ou rejeição de H_0 :

a) erro tipo I, que ocorre quando se rejeita H_0 e esta é verdadeira;

b) erro tipo II, quando se aceita H_0 e esta é falsa.

Deseja-se que a probabilidade de se cometer estes dois tipos de erros seja mínima. Entretanto, para um determinado número de graus de liberdade, diminuindo-se a probabilidade de ocorrência de um tipo de erro, aumenta-se a do outro. $P(I)$ e $P(II)$ representam respectivamente a probabilidade de cometer o erro tipo I e tipo II, os quais são ilustrados na

figura 04. A curva A é a f.d.p. da amostra extraída de uma população quando H_0 é verdadeira e a B, representa a f.d.p. quando H_1 é verdadeira [58].

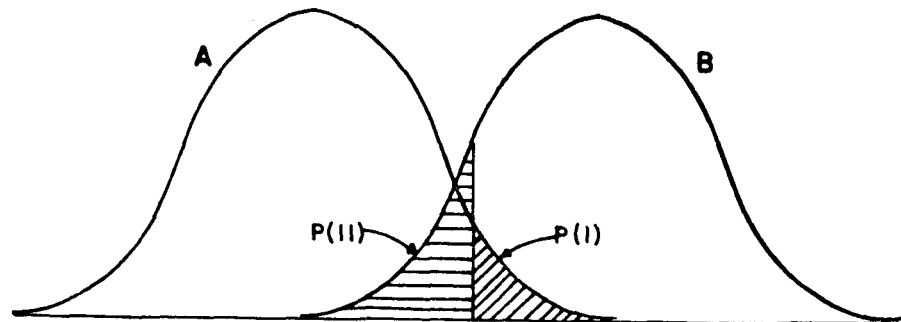


Fig. 04 Ilustração do erro tipo I e tipo II.

Utiliza-se em geral a potência do teste ao invés de $P(II)$, a qual é dada por:

$$\beta = 1 - P(II) \quad (3.36)$$

e deve ser tão grande quanto possível. Admitindo-se a hipótese

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad (3.37)$$

a potência do teste $\beta(\theta^*)$ é a probabilidade de rejeitar H_0 quando o parâmetro θ é igual a θ^* [59].

Nota-se portanto que quando β aumenta, $P(I)$ também aumenta e vice-versa. Introdúz-se então a condição

$$P(I) \leq \alpha \quad (3.38)$$

para H_0 verdadeira e maximiza $P(I)$ para H_0 falsa. Na expressão acima, α é o nível de significância. A literatura científica recomenda que seja utilizado nos testes de hipóteses estatísticas, $\alpha=5\%$ ou 1% . Um teste é dito ser uniformemente mais potente se para todas hipóteses alternativas possíveis, sua potência é máxima. Este tipo de teste somente é possível em poucos casos.

Os melhores testes em muitos casos são obtidos pelo teste da razão da máxima verossimilhança. Neste caso, a decisão de aceitar ou rejeitar H_0 é baseada numa função de observações, a qual é chamada critério do teste. Em 1601 apresenta-se este método, o qual possui muitas propriedades desejáveis. Entre elas tem-se que quando existe um teste uniformemente mais potente, ele é dado frequentemente pelo teste da razão de verossimilhança.

Em 1611 mostra-se que no teste de hipótese

$$H_0 : C_f X = W_f \text{ contra } H_1 : C_f X \neq W_f, \quad (3.39)$$

ao ser tratado como injunção no método paramétrico, o critério da razão da verossimilhança é dado por:

$$\lambda(y) = (1/(1+R/S))^{n/2}. \quad (3.40).$$

Esta expressão aumenta monotonicamente com o decréscimo de R/S . Pode-se então usar como critério do teste a expressão

$$T = (R/s)/(S/(n-q)), \quad (3.41)$$

cuja distribuição é dada por (3.31).

Tem-se então de conformidade com (2.76) e (2.78) que

$$T = (s\hat{\sigma}_0^2)^{-1} (CfX-Wf)^t (CfN-Cf)^{-1} (CfX-Wf), \quad (3.42)$$

com

$$T \sim F(s, n-q) \text{ para } H_0 : Cf\hat{X} = Wf \text{ e} \quad (3.43)$$

$$T \sim F'(r, n-q, \lambda) \text{ para } H_1 : Cf\hat{X} = \bar{W}_f \neq Wf, \quad (3.44)$$

e parâmetro de não centralidade dado por:

$$\lambda = (1/\hat{\sigma}_0^2) (\bar{W}_f - Wf)^t (CfN-Cf)^{-1} (\bar{W}_f - Wf). \quad (3.45)$$

A variável T aumenta a medida que $\lambda(y)$ diminui. Desta forma, a região de rejeição de H_0 é $F(1-\alpha; s, n-q) < T < \infty$. A hipótese nula será rejeitada se

$$T > F(1-\alpha; s, n-q) \quad (3.46)$$

pois

$$P(1) = P(T) > F(1-\alpha; s, n-q) = \alpha. \quad (3.47)$$

A potência do teste, de acordo com [62], é dada por:

$$\beta = 1 - \int_0^{F(1-\alpha; s, n-q)} F(s, n-q, \lambda) dT. \quad (3.48)$$

Nota-se portanto que para o cálculo da potência do teste é necessária a tabulação da distribuição $F(s, n-q, \lambda)$, a qual geralmente não é disponível.

Algumas hipóteses especiais serão agora obtidas a partir de (3.39), as quais são apresentadas em 1631. Tomando-se a hipótese

$$H_0 : X_i = X_{0i} \text{ contra } H_1 : \hat{X}_i \neq X_{0i}, \quad (3.49)$$

onde X_{0i} é um valor dado, tem-se que

$${}_s W f_1 = {}_s X_{0i} \quad (3.50)$$

com $s=1$ e

$${}_1 C f_u = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]. \quad (3.51)$$

Trata-se portanto de testar se o parâmetro estimado \hat{X}_i é igual ao parâmetro dado X_{0i} . De acordo com (3.39), o critério de teste será dado por:

$$T = (\hat{X}_i - X_{0i})^2 / \hat{\sigma}_i^2, \quad (3.52)$$

na qual

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}_0^2 \sigma_{11}. \quad (3.53)$$

σ_{11} é o i -ésimo elemento da diagonal da inversa de N para o caso considerado. A hipótese nula será rejeitada se

$$T > F_{(1-\alpha; 1, n-q)}. \quad (3.54)$$

Na hipótese

$$H_0 : X_i = X_{0i} \text{ contra } H_1 : X_i \neq X_{0i} \text{ para } i = j, j+1, \dots, k \quad (3.55)$$

tem-se :

$$sWf_1 = [X_{0j}, X_{0j+1}, \dots, X_{0k}]^t, \quad (3.56)$$

com $s = (k-j+1)$ e Cf formada pela matriz identidade entre as colunas j e k e contendo elementos nulos nas demais posições. O critério de teste será dado por:

$$T = [(k-j+1)\hat{\sigma}_0^2]^{-1} (\hat{X}_{j\dots k} - X_{0j\dots k})^t (N^-)^{-1}_{j\dots k} (\hat{X}_{j\dots k} - X_{0j\dots k}). \quad (3.57)$$

A hipótese nula será rejeitada se

$$T > F_{(1-\alpha; k-j+1, n-q)}. \quad (3.58)$$

Tomando-se agora o modelo paramétrico multivariado, a hipótese geral multivariada

$$H_0 : CfX_m = Wf_m \text{ contra } H_1 : CfX_m \neq Wf_m \quad (3.59)$$

é também tratada como injunção. Ao aplicar o teste da razão da verossimilhança resulta no caso apresentado pela (3.35). Rejeita-se H_0 se

$$\Lambda_{p,s,n-q} < \Lambda_{\alpha;p,s,n-q}. \quad (3.60)$$

O teste expresso pela (3.59) permite testar hipóteses que envolvam somente parâmetros de uma mesma época. Quando se interessa em testar parâmetros de diferentes épocas, a (3.59) é dada por:

$$H_0 : CfX_m U = Wf_m \text{ contra } H_1 : CfX_m U \neq Wf_m \quad (3.61)$$

Nesta expressão, pU_t é uma matriz com característica

$$r(U) = t_1 \leq p. \quad (3.62)$$

O critério do teste é obtido pela expressão (3.35), na qual as formas quadráticas passam a ser

$$S_m = U^t \hat{V}_m P_m \hat{V}_m U = U^t (A \hat{X}_m - Lm)^t P_m (A \hat{X}_m - Lm) U \text{ e} \quad (3.63)$$

$$R_m = (Cf \hat{X}_m U - Wf_m)^t (Cf N - Cf^t)^{-1} (Cf \hat{X}_m U - Wf_m). \quad (3.64)$$

Considerando-se agora a expressão (3.28), pode-se testar a hipótese

$$H_0 = \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \text{ contra } H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2, \quad (3.65)$$

sendo que o critério do teste

$$T = (n-q) \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 \quad (3.66)$$

conduz a rejeição do teste se

$$T > \chi_{1-\alpha/2; n-q} \text{ ou } T < \chi_{\alpha/2; n-q}. \quad (3.67)$$

Este teste é bilateral e comumente utilizado para a análise da qualidade do ajustamento [62].

3.5 Aplicação dos testes de hipóteses na análise de deformações

Os testes de hipóteses apresentados na seção anterior serão agora aplicados na análise de medidas geodésicas para detectar deformações. Se em todas épocas estas medidas foram obtidas segundo um mesmo planejamento, isto é, os mesmos tipos de medidas foram efetuados em todas épocas, utiliza-se o modelo paramétrico multivariado descrito na seção 2.8. Se ocorreram mudanças na obtenção das medidas, ou novos pontos foram introduzidos, o modelo multivariado não é compatível.

Neste caso a solução é dada a partir do modelo linearizado

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

onde A_i ($i=1, \dots, p$) são as matrizes dos coeficientes de cada época, x_i é o vetor dos parâmetros correspondente a época e L_i é o vetor das observações calculados em função dos parâmetros aproximados subtraído do vetor das observações Lb_i . A matriz dos pesos será dada por:

$$P = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \sum Lb_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum Lb_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum Lb_p^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Neste caso, de acordo com [65], uma quantidade maior de cálculo se faz necessária, aliada ao fato de negligenciar as covariâncias de medidas repetidas. A solução de (3.68) ao aplicar o M.M.Q. equivale a solucionar separadamente os sistemas de equações correspondente a cada época.

Na análise de deformações, primeiramente deve-se detectar os movimentos e em seguida, os movimentos devem ser modelados. O assunto que se diz respeito a esta modelagem não será tratado neste trabalho.

Os movimentos são detectados pelas diferenças de coordenadas dos pontos entre as diferentes épocas. Os pontos considerados fixos entre todas épocas devem definir o datum. Esta definição segue a metodologia descrita na seção (2.6.2). Deve-se testar hipóteses que confirmem a suposição de que es-

tes pontos são realmente fixos. Os testes a serem apresentados nesta seção resultaram de consultas em 1661.

Coletando-se as coordenadas dos pontos que definem o datum, nas diferentes épocas, nos vetores Xf_1, Xf_2, \dots, Xf_p , os quais devem ser "idênticos" em todas épocas, obtém-se o seguinte teste de hipótese no modelo multivariado:

$$\begin{aligned} H_0 &: |Xf_1 - Xf_2, Xf_2 - Xf_3, \dots, Xf_{p-1} - Xf_p| = |0, 0, \dots, 0| \\ &\text{contra} \\ H_1 &: |Xf_1 - Xf_2, Xf_2 - Xf_3, \dots, Xf_{p-1} - Xf_p| \neq |0, 0, \dots, 0|, \end{aligned} \quad (3.70)$$

o qual corresponde ao teste expresso pela (3.61), com critério do teste dado por:

$$\hat{t}_{1,s,n-q} = |S_m| / |S_m + R_m|. \quad (3.71)$$

A decisão de aceitar ou rejeitar H_0 é baseada em (3.60). A matriz ${}_s C_f_u$ será composta de elementos nulos, exceto na posição correspondente ao parâmetro em análise, na qual terá o elemento unitário. O valor de s será igual ao número de parâmetros analisados em cada época.

Após analisar a hipótese anterior, deve-se testar a hipótese de que estes pontos não se movimentaram em relação a época 1. Esta hipótese é dada por:

$$H_0 : Xf_1 - Xf_m = 0 \text{ contra } H_1 : Xf_1 - Xf_m \neq 0 \quad (3.72)$$

com o critério do teste

$$T = [s(\hat{\sigma}_1^2 - 2\hat{\sigma}_{1m} + \hat{\sigma}_m^2)]^{-1} (\hat{X}f_1 - \hat{X}f_m)' t [(N_{rs}^-)_f]^{-1} (\hat{X}f_1 - \hat{X}f_m) \quad (3.73)$$

segundo a distribuição $F_{(s, n-q)}$. $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_{1m}$ e $\hat{\sigma}_m^2$ são obtidos da (2.81) e $(N_{rs}^-)_f$ é obtida a partir da matriz N_{rs}^- , de onde são retirados apenas os elementos referentes aos pontos em análise. Com base em (3.46) decide-se sobre a aceitação ou rejeição de H_0 .

Para o caso correspondente a (3.68), a qual trata-se do modelo univariado, a hipótese equivalente a (3.70) é

$$H_0 : \begin{bmatrix} Xf_1 - Xf_2 \\ Xf_2 - Xf_3 \\ \vdots \\ Xf_{p-1} - Xf_p \end{bmatrix} = 0 \text{ contra } \begin{bmatrix} Xf_1 - Xf_2 \\ Xf_2 - Xf_3 \\ \vdots \\ Xf_{p-1} - Xf_p \end{bmatrix} \neq 0, \quad (3.74)$$

que corresponde a hipótese (3.39) com

$$Cf = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & & & & & \dots & & \dots & & \dots \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

O critério do teste para este caso é dado de acordo com (3.42). Se a hipótese é restrita a apenas duas épocas, como em (3.72), o critério do teste é dado por:

$$T = (s \hat{\sigma}_0^2)^{-1} (\hat{X}f_1 - \hat{X}f_m)' t [(N_1^-)_f + (N_m^-)_f]^{-1} (\hat{X}f_1 - \hat{X}f_m), \quad (3.76)$$

onde $(N_1^-)_f$ e $(N_m^-)_f$ referem-se a partição de $(N_1^-)_{rs}$ e $(N_m^-)_{rs}$ associada aos pontos em análise. A aceitação ou rejeição da hipótese é baseada em (3.46).

Se as hipóteses apresentadas são aceitas, conclui-se que os pontos definidores do datum são fixos. Entretanto, a medida que mais épocas entram na hipótese (3.70) ou mais pontos entram nas hipóteses (3.70) ou (3.72), os testes de hipóteses reagem menos sensivelmente, podendo-se em alguns casos aceitar uma hipótese que apresenta muitas evidências de ser rejeitada. Se somente um ponto é testado, o teste torna-se mais sensível. Neste caso, a hipótese (3.70) é dada por:

$$H_0 : |X_{i1}-X_{i2}, X_{i2}-X_{i3}, \dots, X_{i(p-1)}-X_{ip}| = |0, 0, \dots, 0|$$

contra

$$H_1 : |X_{i1}-X_{i2}, X_{i2}-X_{i3}, \dots, X_{i(p-1)}-X_{ip}| \neq |0, 0, \dots, 0| \quad (3.77)$$

Para a obtenção do critério do teste como em (3.71) tem-se:

$$S_m = U^t (A\hat{X}_{mi} - L_m)^t P_{mi} (A\hat{X}_{mi} - L_m) U \quad e \quad (3.78)$$

$$R_m = (Cf\hat{X}_{mi}U - Wf_m)^t (CfN^{-1}Cf)^{-1} (Cf\hat{X}_{mi}U - Wf_m). \quad (3.79)$$

A decisão de aceitar ou rejeitar H_0 também é baseada em (3.60).

Quando o caso apresentado restringe-se somente as época 1 e m, tem-se:

$$H_0 : |X_{i1}-X_{im}| = 0 \text{ contra } H_1 : |X_{i1}-X_{im}| \neq 0 \quad (3.80)$$

com o critério do teste dado por:

$$T = [s(\hat{\sigma}_1^2 - 2\hat{\sigma}_{1m} + \hat{\sigma}_m^2)]^{-1} (\hat{X}_{i1} - \hat{X}_{im})^t [(N_{rB})_{i1}]^{-1} (\hat{X}_{i1} - \hat{X}_{im}), \quad (3.81)$$

quando trata-se do modelo multivariado e

$$T = (s\hat{\sigma}_0^2)^{-1} (\hat{X}_{i1} - \hat{X}_{im})^t [(N_{rB})_{i1} + (N_{rB})_{im}]^{-1} (\hat{X}_{i1} - \hat{X}_{im}) \quad (3.82)$$

para o modelo univariado. A aceitação ou rejeição da hipótese (3.80) para ambos os casos é baseada em (3.46). Para redes unidimensional, bidimensional e tridimensional, tem-se respectivamente $s=1, 2$, e 3 .

As hipóteses apresentadas, em razão de admitir igualdade de coordenadas nas épocas analisadas, não retratam o que realmente ocorre na prática. Sabe-se que a centragem dos instrumentos e a obtenção das observações não são isentas de erros. Deve-se então postular hipóteses, as quais permitam que as diferenças de coordenadas entre as diferentes épocas possam deslocar-se dentro de um intervalo, antes de contribuir para a inferência estatística. Estes aspectos são tratados pela inferência Bayesiana, porém não serão abordados neste trabalho. Para consulta sobre o assunto, sugere-se 1671.

As hipóteses visando detectar os pontos fixos são analisadas em função dos parâmetros estimados, estando portanto a aceitação ou rejeição de H_0 vinculada a definição do datum. Deve-se então postular hipóteses que sejam invariantes com respeito a definição do datum, pois no início da análise

não se sabe quais pontos mantiveram-se fixos. Em 1681 mostra-se que os testes (3.70) e (3.72) assim os são, se os pontos a serem testados, ou um sub-grupo destes, participam da definição do datum. Quando os testes são formulados para pontos que não definem o datum, eles irão depender desta definição; caso das hipóteses (3.77) e (3.80). Consequentemente, quando se detecta um ponto fixo em adição aos usados na definição do datum, deve-se redefinir o datum com o acréscimo deste ponto. Trata-se portanto de um processo iterativo, continuamente acompanhado da redifinição do datum. Um aspecto importante a ressaltar é que como os testes de hipóteses são tratados como injunções, deve-se evitar a dependência linear entre as injunções resultantes da definição do datum e as, dos testes de hipóteses. Isto é obtido diminuindo-se o número de testes de hipóteses, mas de forma que eles continuem invariantes. O número de testes a ser diminuído é igual à deficiência de característica da matriz de equações normais.

3.6 Análise estatística de deformações em função dos deslocamentos padronizados.

Em 1691 apresenta-se um procedimento mais simples para detectar deslocamentos. As observações em cada época são ajustadas pelo método paramétrico clássico, o que exige que se tenha um conjunto mínimo de pontos fixos conhecidos, os quais propiciam introduzir as injunções mínimas necessárias para tornar o sistema de equações normais com característica integral.

Considerando-se as épocas (i+1) e i, e que o ajustamento foi efetuado tridimensionalmente, para um ponto k qualquer tem-se:

$$\Delta X^k = X_{i+1}^k - X_i^k, \quad (3.83)$$

$$\Delta Y^k = Y_{i+1}^k - Y_i^k \text{ e} \quad (3.84)$$

$$\Delta Z^k = Z_{i+1}^k - Z_i^k. \quad (3.85)$$

Nas expressões acima, X, Y e Z são as coordenadas do ponto k nas épocas correspondentes, as quais são associadas a uma matriz variância-covariância Σ_k . O quadrado do deslocamento é dado por:

$$\Delta_k^2 = (\Delta X^k)^2 + (\Delta Y^k)^2 + (\Delta Z^k)^2. \quad (3.86)$$

Aplicando a lei de propagação de covariâncias obtém-se:

$$\sigma^2 \Delta_k = (1/\Delta_k^2) [\Delta X^k, \Delta Y^k, \Delta Z^k] \Sigma_k [\Delta X^k, \Delta Y^k, \Delta Z^k]^t \quad (3.87)$$

a qual representa a variância do deslocamento.

A análise estatística é efetuada testando-se a hipótese

$$H_0 : \Delta_k = 0 \text{ contra } H_1 : \Delta_k \neq 0, \quad (3.88)$$

com critério do teste dado por:

com critério do teste dado por:

$$T = (\hat{\Delta}_k - \Delta_k) / \hat{\sigma}_{\Delta_k} \quad (3.89)$$

A expressão acima é denominada de deslocamento padronizado, sempre que Δ_k for igual a zero. Ela possui distribuição t de Student, haja visto que o número de graus de liberdade, em geral, é pequeno. A hipótese (3.88) será rejeitada se

$$|T| > t_{(n-q), \alpha} \quad (3.90)$$

Todos os pontos, com exceção dos considerados fixos a priori, serão testados por esta hipótese.

O procedimento apresentado nesta seção será também aplicado ao ajustamento livre com solução pela pseudo-inversa e I.G.R.S.. Para esta última, os pontos sujeitos à condição (2.41) serão os que foram considerados fixos no caso clássico.

EXPERIÊNCIAS

4.1 Introdução

Neste capítulo, com a finalidade de testar os ajustamentos clássico e livre na detecção de deformações e de verificar os testes de hipóteses apresentados, são efetuadas várias simulações. O ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados será também alvo de exame.

As situações a serem apresentadas serão restritas a redes de nivelamento, cujas observações serão geradas aleatoriamente.

4.2 Metodologia utilizada

4.2.1 Geração das observações

As observações relativas às diversas épocas, geradas aleatoriamente, foram obtidas a partir de um programa em Fortran, utilizando-se o microcomputador Softec EGO PCXT.

A partir de altitudes atribuídas aos pontos nas diversas épocas, foram geradas observações para cada desnível na época correspondente e a média aritmética simples passou a representar a observação do desnível. O desvio-padrão atribuído a cada população foi utilizado para montar a matriz peso. Na geração das observações, obrigou-se que estas não se afastassem em relação ao seu valor verdadeiro, mais que três vezes o desvio-padrão atribuído.

4.2.2 Ajustamento das observações e análise estatística das deformações.

A metodologia utilizada refere-se aos assuntos tratados nos capítulos 2 e 3.

Foram elaborados quatro programas em linguagem Fortran para o microcomputador Softec EGO PCXT.

O primeiro programa refere-se ao modelo paramétrico multivariado, onde os testes de hipóteses dados pelas expressões (3.70), (3.72), (3.77) e (3.80) são tratados como injunções. Este programa, quando não se tem um conhecimento a priori dos pontos fixos, soluciona o problema pela pseudo-inversa e identifica os dois pontos com deslocamentos menores. Eles passam a definir o datum inicial e um novo ajustamento é efetuado, desta vez utilizando a I.G.R.S.. Os dados para testar as hipóteses são fornecidos e se os dois pontos não são aceitos para definir o datum, dois novos pontos devem ser selecionados para este fim. Uma vez determinado estes dois pontos, deve-se verificar se outros pontos são considerados fixos. Isto é verificado pelos testes de hipóteses (3.77) e (3.80), cujos dados para este fim são fornecidos para todos os pontos. Se isto ocorrer, estes pontos são também introduzidos na definição do datum e um novo ajustamento é efetuado. Este processo iterativo encerra-se quando pelo menos um dos testes de hipóteses passa a ser rejeitado a medida que novos pontos são introduzidos na definição do datum. Caso no início da análise existam alguns pontos supostos fixos, utiliza-os para definir o datum inicial e inicializar o processo iterativo.

O ajustamento clássico que consta do segundo programa é solucionado de acordo com a expressão (2.63); porém o fator de variância a posteriori é obtido individualmente para cada época pela expressão (2.76), sem considerar a correlação entre eles, a qual consta da expressão (2.81). O ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados é também obtido por este programa, bastando informar que equações do tipo (2.20) existem para todos os pontos. Isto equivale a expressão (2.58) quando $\sum X_0$ é tomada sem correlação em (2.57). A inversa ordinária da matriz dos coeficientes das equações normais é obtida pela subrotina Versol. Os deslocamentos padronizados para a análise estatística são fornecidos pelo programa.

O terceiro e quarto programas solucionam respectivamente o problema de acordo com as expressões (2.64) e (2.65), isto é, o ajustamento livre via pseudo-inversa e I.G.R.S.. Para o último, os pontos tratados como fixos foram os mesmos do caso clássico. Os dados para a análise estatística são fornecidos de acordo com o segundo programa. O fator de variância a posteriori para cada época é obtido como no ajustamento clássico.

Para o cálculo da pseudo-inversa e I.G.R.S., programou-se a expressão

$$(N + D^t D)^{-1} - C^t [C D^t D C^t]^{-1} C, \quad (4.1)$$

na qual N é a matriz dos coeficientes das equações normais, que neste caso é singular. A matriz C para o caso de nivela-

mento é dada por (2.49). Se as matrizes C e D forem iguais, obtém-se a pseudo-inversa, caso contrário, trata-se da I.G.R.S.. Os elementos da matriz D que diferem de C, correspondem aos pontos sujeitos a deslocamentos e serão elementos nulos. A inversa ordinária que consta em (4.1) é também obtida pela subrotina Versol.

Os programas citados nesta seção encontram-se gravados em minidisco, podendo ser executado em micro computadores compatíveis à linha PC.

4.3 Aplicações à redes de nivelamento.

Visando aplicar a metodologia descrita neste trabalho, foram geradas observações para três tipos de redes diferentes.

A figura 05 refere-se a primeira rede de nivelamento, onde numa primeira situação considerou-se que apenas dois pontos mantiveram-se fixos nas três épocas de observações. A tabela 01 apresenta as altitudes atribuídas aos pontos nas diversas épocas, a partir das quais foram gerados três conjuntos de observações com desvios-padrão de 0,2, 0,5 e 1,0 mm. Outra situação criada com base nesta mesma figura considerou-se que apenas os pontos 4 e 7 tinham deslocamentos, não obstante ter atribuído deslocamentos de pequena monta nos pontos 5,6 e 8. O conjunto de observações para esta situação foram gerados com desvios-padrão iguais aos da situação anterior. As altitudes atribuídas aos pontos nas diversas épocas encontram-se na tabela 02.

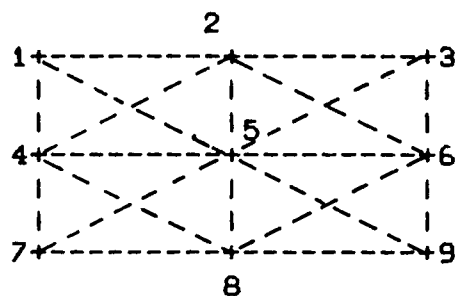


Fig. 05- Rede 01

Tabela 01- Altitudes atribuídas aos pontos da rede 01- situação 01.

| Pontos | Altitudes(m) | | |
|--------|--------------|----------|----------|
| | época 01 | época 02 | época 03 |
| 01 | 100,0000 | 100,0000 | 100,0000 |
| 02 | 101,0000 | 101,0008 | 101,0010 |
| 03 | 99,5082 | 99,5086 | 99,5094 |
| 04 | 102,0008 | 102,0012 | 102,0022 |
| 05 | 102,4823 | 102,4823 | 102,4828 |
| 06 | 103,9482 | 103,9483 | 103,9487 |
| 07 | 104,0001 | 104,0020 | 104,0021 |
| 08 | 104,0834 | 104,0838 | 104,0840 |
| 09 | 105,0000 | 105,0000 | 105,0000 |

Tabela 02- Altitudes atribuidas aos pontos da rede
01- situação 02,

| Pontos | Altitudes(m) | | |
|--------|--------------|----------|----------|
| | época 01 | época 02 | época 03 |
| 01 | 100,0000 | 100,0000 | 100,0000 |
| 02 | 101,0000 | 101,0000 | 101,0000 |
| 03 | 99,5082 | 99,5082 | 99,5082 |
| 04 | 102,0008 | 102,0012 | 102,0022 |
| 05 | 102,4823 | 102,4823 | 102,4826 |
| 06 | 103,9482 | 103,9483 | 103,9483 |
| 07 | 104,0001 | 104,0020 | 104,0021 |
| 08 | 104,0834 | 104,0835 | 104,0834 |
| 09 | 105,0000 | 105,0000 | 105,0000 |

Tendo-se em vista que a rede mostrada na figura 05 apresenta boa geometria e que o número de observações superabundantes é superior ao que normalmente ocorre na prática, gerou-se outra rede, a qual é mostrada na figura 06. A tabela 03 contém as altitudes atribuidas aos pontos nas diversas épocas. Gerou-se dois conjuntos de observações com desvios-padrão de 0,5 e 1,0mm respectivamente.

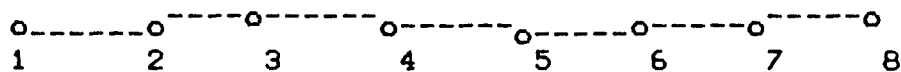


Fig. 06- Rede 02

Tabela 03- Altitudes atribuídas aos pontos da rede 02

| Pontos | Altitudes(m) | | |
|--------|--------------|----------|----------|
| | época 01 | época 02 | época 03 |
| 01 | 12,0000 | 12,0000 | 12,0000 |
| 02 | 13,5000 | 13,5008 | 13,5001 |
| 03 | 9,0000 | 9,0004 | 9,0007 |
| 04 | 10,4000 | 10,4005 | 10,4008 |
| 05 | 10,8000 | 10,8001 | 10,8002 |
| 06 | 7,3000 | 7,3008 | 7,3010 |
| 07 | 8,4000 | 8,4015 | 8,4020 |
| 08 | 10,0000 | 10,0000 | 10,0000 |

Uma situação intermediária foi estabelecida com base na figura 07. Três conjuntos de observações foram gerados com desvios-padrão de 0,3, 0,5 e 0,8mm. A tabela 04 contém as altitudes atribuídas aos pontos nas épocas em análise. Uma outra situação foi criada com base nesta figura, cujas altitudes nas épocas correspondentes estão contidas na tabela 05. Os dados gerados para esta situação apresentam desvio-padrão de 2,0mm.

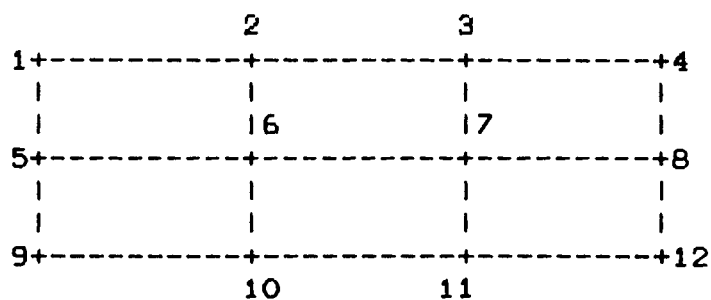


Fig. 07- Rede 03

Tabela 04- Altitudes atribuídas aos pontos da rede
03- situação 01.

| Pontos | Altitudes(m) | | |
|--------|--------------|----------|----------|
| | época 01 | época 02 | época 03 |
| 01 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 02 | 2,0400 | 2,0410 | 2,0415 |
| 03 | 1,8070 | 1,8062 | 1,8060 |
| 04 | 2,3080 | 2,3083 | 2,3080 |
| 05 | 1,5080 | 1,5088 | 1,5090 |
| 06 | 2,5072 | 2,5072 | 2,5072 |
| 07 | 3,4020 | 3,4015 | 3,4011 |
| 08 | 5,8070 | 5,8075 | 5,8080 |
| 09 | 1,5070 | 1,5080 | 1,5082 |
| 10 | 2,3080 | 2,3075 | 2,3075 |
| 11 | 1,8070 | 1,8085 | 1,8090 |
| 12 | 1,7045 | 1,7045 | 1,7045 |

Tabela 05- Altitudes atribuídas aos pontos da rede
03- Situação 02

| Pontos | Altitudes(m) | | |
|--------|--------------|----------|----------|
| | época 01 | época 02 | época 03 |
| 01 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 02 | 2,0400 | 2,0410 | 2,0415 |
| 03 | 1,8070 | 1,8100 | 1,8160 |
| 04 | 2,3080 | 2,3083 | 2,3080 |
| 05 | 1,5080 | 1,5118 | 1,5148 |
| 06 | 2,5072 | 2,5052 | 2,5072 |
| 07 | 3,4020 | 3,4005 | 3,4000 |
| 08 | 5,8120 | 5,8175 | 5,8080 |
| 09 | 1,5070 | 1,5100 | 1,5112 |
| 10 | 2,3080 | 2,3075 | 2,3075 |
| 11 | 1,8070 | 1,8175 | 1,8190 |
| 12 | 1,7045 | 1,7045 | 1,7045 |

4.4 Resultados

Tendo em vista que um dos objetivos deste trabalho é verificar entre os ajustamentos clássico e livre, qual apresenta melhores resultados na detecção de deslocamentos, nas tabelas 06 e 07 apresenta-se respectivamente os deslocamentos verdadeiros (D.V.) e os obtidos por estes ajustamentos para as situações 01 e 02 da rede 01. São apresentados também os deslocamentos padronizados (D.P.), em função dos quais será feita a análise estatística baseada na distribuição t de Student. Os desvios-padrão das observações (D.P.O.) para cada situação e os pontos fixos (P.F.) conhecidos a priori estão in-

dicados nas tabelas. Para as redes 02 e 03 tais resultados são apresentados respectivamente nas tabelas 08,09 e 10. Os desvios-padrão médio dos parâmetros (δ_m) para cada caso, a região de aceitação (R.A.) dos testes de hipóteses e o número de graus de liberdade (g.l.) estão indicados nas tabelas.

Um outro aspecto em análise neste trabalho é com respeito a aplicabilidade dos testes de hipóteses (3.70), (3.72), (3.77) e (3.80) como injunções, com a finalidade de detectar os pontos que não se deslocaram. Estes testes são tratados no ajustamento pelo modelo paramétrico multivariado com solução pela I.G.R.S.. Para esta análise, na tabela 11 apresenta-se para cada rede e situações particulares, o conjunto de pontos detectados como fixos pelos testes de hipóteses no caso multivariado e pelos testes baseados no D.P. para os casos clássico e livre. Todos estes testes foram efetuados a um nível de significância de 5%. Nesta tabela indica-se também, baseando-se nos desvios-padrão médio dos parâmetros, os pontos que devem ser detectados como fixo pelos testes de hipóteses.

O ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados foi aplicado à rede 03 na situação 01 com D.P.O. igual a 0,3mm e para a situação 02 com D.P.O. igual a 2,0mm. Admitiu-se $\sum X_0$ sem correlação e com valores iguais para todos os parâmetros aproximados. Na tabela 12 apresenta-se os resultados obtidos para diversos desvios-padrão atribuídos aos parâmetros aproximados (D.P.P.).

Na tabela 13 apresenta-se um exemplo do procedimento iterativo de detecção de pontos fixos, no qual os testes de

hipóteses são tratados como injunções. Este exemplo refere-se a apenas uma das situações em estudo neste trabalho. Para os demais casos o procedimento foi idêntico. Ao final da tabela apresenta-se os deslocamentos verdadeiros e os obtidos ao final do ajustamento.

Tabela 6 - Resultados obtidos para a situação 01 da Rede 01.

| PONTOS | | Rede 01/Situação 01 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----------|---------------------|------------|---------------------|------------|-------------------|------------|--------------|------------|---------------------|------------|-------------------|------------|--------------|------------|---------------------|------------|-------------------|------------|------|--|
| | | D.P.O. = 0,2mm | | | | | | | | D.P.O. = 0,5mm | | | | | | D.P.O. = 1,0mm | | | | | |
| | | P.F. = 1/9 | | | | P.F. = 1/9 | | | | P.F. = 1/9 | | | | P.F. = 1/9 | | | | P.F. = 1/9 | | | |
| | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | | |
| ÉPOCAS | D.V. (mm) | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | | |
| 1 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | 0,1 | 0,33 | -0,3 | 1,77 | 0,1 | 0,26 | 0,2 | 0,55 | -0,1 | 0,18 | 0,1 | 0,26 | 0,5 | 0,69 | 0,3 | 0,44 | |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,03 | 0,1 | 0,23 | -0,8 | 4,87 | 0,0 | 0,16 | 0,1 | 0,35 | -0,7 | 1,84 | 0,1 | 0,19 | 0,3 | 0,50 | -0,6 | 0,76 | |
| 2 | 1-2 | 0,8 | 0,6 | 4,02 | 0,7 | 2,09 | 0,3 | 2,47 | 0,5 | 1,02 | 0,5 | 1,01 | 0,2 | 0,66 | 0,1 | 0,10 | 0,2 | 0,19 | 0,0 | 0,06 | |
| | 1-3 | 1,0 | 1,1 | 6,52 | 1,1 | 3,34 | 0,2 | 2,05 | 1,2 | 2,62 | 1,2 | 2,44 | 0,3 | 1,16 | 1,4 | 1,52 | 1,4 | 1,65 | 0,5 | 0,83 | |
| 3 | 1-2 | 0,4 | 0,3 | 1,52 | 0,3 | 0,91 | -0,1 | 0,40 | 0,3 | 0,57 | 0,3 | 0,54 | 0,0 | 0,04 | 0,2 | 0,16 | 0,2 | 0,17 | 0,0 | 0,06 | |
| | 1-3 | 1,2 | 1,1 | 5,29 | 1,1 | 3,16 | 0,3 | 1,68 | 0,9 | 1,67 | 0,9 | 1,58 | 0,1 | 0,15 | 0,6 | 0,56 | 0,6 | 0,58 | -0,3 | 0,40 | |
| 4 | 1-2 | 0,4 | 0,4 | 2,19 | 0,4 | 1,17 | 0,0 | 0,00 | 0,3 | 0,58 | 0,3 | 0,60 | 0,0 | 0,02 | 0,1 | 0,13 | 0,2 | 0,22 | 0,1 | 0,10 | |
| | 1-3 | 1,4 | 1,5 | 9,23 | 1,5 | 4,71 | 0,7 | 5,73 | 1,7 | 3,73 | 1,7 | 3,46 | 0,8 | 2,84 | 2,0 | 2,21 | 2,0 | 2,38 | 1,1 | 1,88 | |
| 5 | 1-2 | 0,0 | -0,1 | 1,07 | -0,1 | 0,48 | -0,5 | 5,87 | -0,3 | 0,76 | -0,3 | 0,68 | -0,6 | 2,70 | -0,6 | 0,81 | -0,6 | 1,87 | -0,8 | 1,72 | |
| | 1-3 | 0,5 | 0,4 | 3,11 | 0,4 | 1,38 | 0,4 | 4,50 | 0,3 | 0,83 | 0,3 | 0,74 | -0,5 | 2,40 | 0,1 | 0,18 | 0,1 | 0,19 | -0,8 | 1,77 | |
| 6 | 1-2 | 0,1 | 0,1 | 0,83 | 0,1 | 0,35 | -0,3 | 2,19 | 0,2 | 0,40 | 0,1 | 0,30 | -0,2 | 0,51 | 0,3 | 0,30 | 0,2 | 0,24 | 0,1 | 0,14 | |
| | 1-3 | 0,5 | 0,7 | 4,18 | 0,7 | 2,07 | -0,2 | 1,37 | 0,9 | 2,09 | 0,1 | 1,87 | 0,1 | 0,21 | 1,4 | 1,58 | 1,4 | 1,60 | 0,4 | 0,76 | |
| 7 | 1-2 | 1,9 | 1,7 | 8,38 | 1,7 | 5,01 | 1,3 | 8,65 | 1,6 | 2,88 | 1,6 | 2,72 | 1,3 | 3,30 | 1,1 | 1,02 | 1,1 | 1,06 | 1,0 | 1,28 | |
| | 1-3 | 2,0 | 2,1 | 10,12 | 2,1 | 6,05 | 1,2 | 8,06 | 2,1 | 3,90 | 2,1 | 3,69 | 1,3 | 2,08 | 2,3 | 2,08 | 2,3 | 2,15 | 1,4 | 1,74 | |
| 8 | 1-2 | 0,4 | 0,4 | 2,18 | 0,3 | 1,04 | 0,0 | 0,36 | 0,2 | 0,42 | 0,2 | 0,32 | -0,1 | 0,47 | -0,0 | 0,01 | -0,1 | 0,09 | -0,2 | 0,34 | |
| | 1-3 | 0,6 | 0,7 | 3,80 | 0,6 | 1,88 | -0,2 | 1,88 | 0,5 | 1,18 | 0,5 | 1,04 | -0,3 | 1,17 | 0,5 | 0,56 | 0,5 | 0,54 | -0,5 | 0,78 | |
| 9 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | -0,1 | 0,33 | -0,5 | 3,05 | -0,1 | 0,26 | -0,2 | 0,55 | -0,5 | 1,36 | -0,1 | 0,26 | -0,5 | 0,69 | -0,6 | 0,77 | |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,03 | -0,1 | 0,23 | -0,9 | 5,76 | 0,0 | 0,16 | -0,1 | 0,35 | -1,0 | 2,52 | -0,1 | 0,19 | -0,3 | 0,50 | -1,3 | 1,63 | |
| Ôm | | 0,12mm | | 0,23mm | | 0,09mm | | 0,34mm | | 0,35mm | | 0,24mm | | 0,7mm | | 0,6mm | | 0,5mm | | | |
| α = 5% | | g.L. 13 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | g.L. 13 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | g.L. 13 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | g.L. 12 | RA. OP < | | |

Tabela 7 - Resultados obtidos para a situação 02 da rede 01.

| | | | Rede 01 / Situação 02 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|--------|-----------|-----------------------|---------------|---------------------|---------------|-------------------|---------------|----------------|---------------|---------------------|---------------|-------------------|---------------|----------------|---------------|---------------------|---------------|-------------------|---------------|
| | | | D.P.O. : 0,2mm | | | | | | D.P.O. : 0,5mm | | | | | | D.P.O. : 1,0mm | | | | | |
| | | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | | P.F. : 1/9 | |
| | | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | |
| PONTOS | ÉPOCAS | D.V. (mm) | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. |
| 1 | 1-2 | 0,0 | -0,0 | 0,22 | 0,1 | 0,23 | -0,3 | 2,11 | -0,1 | 0,26 | 0,2 | 0,55 | 0,1 | 0,25 | 0,1 | 0,26 | 0,5 | 0,69 | 0,6 | 0,66 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,03 | 0,0 | 0,04 | -0,4 | 2,40 | 0,0 | 0,16 | 0,1 | 0,35 | -0,3 | 0,86 | 0,1 | 0,19 | 0,3 | 0,50 | -0,2 | 0,27 |
| 2 | 1-2 | 0,0 | 0,1 | 0,41 | 0,1 | 0,27 | -0,3 | 2,61 | -0,3 | 0,74 | -0,3 | 0,61 | -0,4 | 1,46 | -0,7 | 0,78 | -0,6 | 0,74 | -0,6 | 1,01 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,18 | 0,0 | 0,11 | -0,3 | 2,93 | 0,2 | 0,41 | 0,2 | 0,41 | -0,3 | 0,93 | 0,4 | 0,42 | 0,4 | 0,49 | -0,1 | 0,21 |
| 3 | 1-2 | 0,0 | 0,2 | 0,97 | 0,2 | 0,64 | -0,2 | 1,14 | -0,1 | 0,15 | -0,1 | 0,14 | -0,2 | 0,56 | -0,2 | 0,20 | -0,2 | 0,21 | -0,1 | 0,24 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,15 | 0,0 | 0,10 | -0,4 | 2,26 | -0,3 | 0,51 | -0,3 | 0,48 | -0,8 | 1,97 | -0,6 | 0,53 | -0,6 | 0,55 | -1,1 | 1,46 |
| 4 | 1-2 | 0,4 | 0,6 | 2,93 | 0,6 | 1,77 | 0,2 | 1,43 | 0,3 | 0,58 | 0,3 | 0,60 | 0,2 | 0,54 | 0,1 | 0,13 | 0,2 | 0,22 | 0,2 | 0,38 |
| | 1-3 | 1,4 | 1,2 | 6,12 | 1,2 | 3,64 | 0,8 | 6,56 | 1,7 | 3,73 | 1,7 | 3,46 | 1,2 | 4,11 | 2,0 | 2,21 | 2,0 | 2,38 | 1,5 | 2,52 |
| 5 | 1-2 | 0,1 | 0,2 | 0,90 | 0,2 | 0,50 | -0,2 | 2,75 | -0,3 | 0,76 | -0,3 | 0,68 | -0,4 | 1,95 | -0,6 | 0,81 | -0,6 | 0,87 | -0,6 | 1,35 |
| | 1-3 | 0,1 | 0,3 | 1,95 | 0,3 | 1,07 | 0,0 | 0,62 | 0,1 | 0,32 | 0,1 | 0,29 | -0,4 | 1,60 | -0,1 | 0,08 | -0,1 | 0,08 | -0,6 | 1,38 |
| 6 | 1-2 | 0,1 | 0,2 | 0,21 | 0,2 | 0,69 | -0,2 | 1,48 | 0,2 | 0,40 | 0,1 | 0,30 | 0,0 | 0,05 | 0,3 | 0,30 | 0,2 | 0,24 | 0,2 | 0,42 |
| | 1-3 | 0,1 | 0,1 | 0,73 | 0,1 | 0,43 | -0,2 | 2,08 | 0,5 | 1,20 | 0,5 | 1,06 | 0,0 | 0,14 | 1,0 | 1,14 | 1,0 | 1,14 | 0,4 | 0,72 |
| 7 | 1-2 | 1,9 | 2,2 | 9,70 | 2,2 | 6,44 | 1,8 | 11,67 | 1,6 | 2,88 | 1,6 | 2,72 | 1,4 | 3,73 | 1,1 | 1,02 | 1,1 | 1,06 | 1,2 | 1,50 |
| | 1-3 | 2,0 | 1,9 | 8,18 | 1,9 | 5,42 | 1,5 | 9,52 | 2,1 | 3,90 | 2,1 | 3,69 | 1,7 | 4,29 | 2,3 | 2,08 | 2,3 | 2,15 | 1,7 | 2,23 |
| 8 | 1-2 | 0,1 | 0,1 | 0,66 | 0,1 | 0,37 | -0,3 | 2,35 | -0,1 | 0,24 | -0,1 | 0,28 | -0,3 | 0,92 | -0,3 | 0,34 | -0,4 | 0,44 | -0,3 | 0,57 |
| | 1-3 | 0,0 | -0,1 | 0,53 | -0,1 | 0,31 | -0,5 | 4,09 | -0,1 | 0,15 | -0,1 | 0,17 | 0,6 | 0,91 | -0,1 | 1,10 | -0,1 | 0,15 | -0,7 | 1,15 |
| 9 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,22 | -0,1 | 0,23 | -0,5 | 3,00 | -0,1 | 0,26 | -0,2 | 0,56 | -0,4 | 0,94 | -0,1 | 0,26 | -0,5 | 0,69 | -0,4 | 0,55 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | 0,0 | 0,04 | -0,4 | 2,55 | 0,0 | 0,16 | -0,1 | 0,35 | -0,7 | 1,62 | -0,1 | 0,19 | -0,3 | 0,50 | -0,9 | 1,14 |
| σm | | | 0,14mm | | 0,23mm | | 0,09mm | | 0,34mm | | 0,35mm | | 0,24mm | | 0,7mm | | 0,6mm | | 0,5mm | |
| α : 5 % | | | q.L. 13 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < | q.L. 13 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < | q.L. 13 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < | q.L. 12 | R.A. D.P. < |

Tabela 9 - Resultados obtidos para a situação 01 da rede 03.

| | | | REDE 03 / Situação 01 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--------|-----------|-----------------------|--------------|---------------------|--------------|-------------------|--------------|----------------|--------------|---------------------|--------------|-------------------|--------------|----------------|--------------|---------------------|--------------|-------------------|--------------|
| | | | D.P.O. = 0,3mm | | | | | | D.P.O. = 0,5mm | | | | | | D.P.O. = 0,8mm | | | | | |
| | | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | | P.F. = 1/12 | |
| | | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | A. LIVRE (PSEUDO) | |
| PONTOS | ÉPOCAS | D.V. (mm) | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | | |
| 1 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,35 | 0,4 | 1,09 | 0,3 | 0,54 | 0,0 | 0,13 | -0,4 | 0,76 | -0,7 | 1,27 | -0,0 | 0,08 | -0,2 | 0,25 | -1,2 | 1,37 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,12 | 0,1 | 0,36 | 0,0 | 0,09 | 0,0 | 0,15 | -0,5 | 0,91 | -1,0 | 1,69 | -0,1 | 0,22 | -0,5 | 0,65 | -1,4 | 1,48 |
| 2 | 1-2 | 1,0 | 0,8 | 2,36 | 0,9 | 2,14 | 0,8 | 1,80 | 1,4 | 2,68 | 1,3 | 2,05 | 1,0 | 2,16 | 2,2 | 2,35 | 2,1 | 2,31 | 1,1 | 1,53 |
| | 1-3 | 1,5 | 1,3 | 4,00 | 1,4 | 3,16 | 1,3 | 2,86 | 1,5 | 2,86 | 1,3 | 2,16 | 0,9 | 1,94 | 2,3 | 2,43 | 2,1 | 2,28 | 1,3 | 1,80 |
| 3 | 1-2 | -0,8 | -1,1 | 3,00 | -1,1 | 2,48 | -1,3 | 2,84 | 0,0 | 0,03 | 0,0 | 0,02 | -0,3 | 0,71 | 0,3 | 0,32 | 0,3 | 0,33 | -0,7 | 0,98 |
| | 1-3 | -1,0 | -1,3 | 3,52 | -1,3 | 2,91 | -1,4 | 3,20 | -0,2 | 0,37 | -0,2 | 0,33 | -0,7 | 1,54 | 0,1 | 0,05 | 0,0 | 0,05 | -0,9 | 1,22 |
| 4 | 1-2 | 0,3 | 0,2 | 0,47 | 0,1 | 0,22 | 0,0 | 0,02 | -0,4 | 0,59 | -0,3 | 0,42 | -0,6 | 1,10 | 2,2 | 1,81 | 2,2 | 1,88 | 1,2 | 1,27 |
| | 1-3 | 0,0 | -0,6 | 1,34 | -0,6 | 1,20 | -0,7 | 1,23 | 0,2 | 0,29 | 0,3 | 0,42 | -0,1 | 0,26 | 0,8 | 0,70 | 0,9 | 0,80 | 0,1 | 0,11 |
| 5 | 1-2 | 0,8 | 0,4 | 1,33 | 0,6 | 1,42 | 0,5 | 1,06 | 0,6 | 1,06 | 0,4 | 0,62 | 0,1 | 0,20 | 1,0 | 1,07 | 1,0 | 0,99 | -0,1 | 0,11 |
| | 1-3 | 1,0 | 0,6 | 1,92 | 0,7 | 1,60 | 0,6 | 1,30 | 1,1 | 1,99 | 0,9 | 1,35 | 0,4 | 0,84 | 1,3 | 1,38 | 1,1 | 1,18 | 0,3 | 0,41 |
| 6 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,10 | 0,1 | 0,24 | 0,0 | 0,06 | 0,3 | 0,56 | 0,2 | 0,39 | -0,1 | 0,19 | 1,1 | 1,17 | 1,1 | 1,19 | 0,0 | 0,06 |
| | 1-3 | 0,0 | -0,2 | 0,66 | -0,2 | 0,46 | -0,3 | 0,78 | -0,2 | 0,35 | -0,3 | 0,45 | -0,7 | 2,01 | 0,5 | 0,50 | 0,4 | 0,44 | -0,4 | 0,71 |
| 7 | 1-2 | -0,5 | -0,8 | 2,41 | -0,9 | 2,05 | -1,0 | 2,71 | 0,0 | 0,10 | 0,0 | 0,02 | -0,3 | 0,79 | 0,2 | 0,16 | 0,2 | 0,20 | -0,9 | 1,47 |
| | 1-3 | -0,9 | -1,1 | 3,45 | -1,2 | 2,76 | -1,3 | 3,45 | -0,4 | 0,75 | -0,3 | 0,54 | -0,8 | 2,15 | -0,4 | 0,39 | -0,3 | 0,33 | -1,1 | 1,91 |
| 8 | 1-2 | 0,5 | 0,5 | 1,31 | 0,3 | 0,60 | 0,1 | 0,30 | 0,1 | 0,15 | 0,3 | 0,42 | 0,0 | 0,07 | 1,6 | 1,64 | 1,7 | 1,70 | 0,6 | 0,80 |
| | 1-3 | 1,0 | 0,7 | 1,99 | 0,6 | 1,39 | 0,5 | 1,10 | 1,1 | 1,89 | 1,3 | 1,95 | 0,8 | 1,64 | 1,5 | 1,58 | 1,7 | 0,76 | 0,9 | 1,15 |
| 9 | 1-2 | 1,0 | 0,5 | 1,12 | 0,6 | 1,13 | 0,4 | 0,80 | 0,6 | 0,81 | 0,5 | 0,63 | 0,2 | 0,31 | 1,4 | 1,20 | 1,4 | 1,20 | 0,4 | 0,39 |
| | 1-3 | 1,2 | 0,7 | 1,57 | 0,7 | 1,39 | 0,6 | 1,09 | 1,4 | 1,99 | 1,3 | 1,70 | 0,8 | 1,46 | 1,6 | 1,38 | 1,6 | 1,33 | 0,7 | 0,80 |
| 10 | 1-2 | -0,5 | -0,3 | 0,76 | -0,3 | 0,62 | -0,4 | 0,91 | 0,0 | 0,06 | 0,0 | 0,06 | -0,3 | 0,77 | 0,4 | 0,42 | 0,4 | 0,43 | -0,6 | 0,84 |
| | 1-3 | -0,5 | -0,7 | 1,84 | -0,7 | 1,52 | -0,7 | 1,76 | -0,7 | 1,10 | -0,7 | 1,02 | -1,1 | 2,57 | 0,2 | 1,16 | 0,2 | 0,16 | -0,7 | 0,93 |
| 11 | 1-2 | 1,5 | 1,3 | 3,99 | 1,2 | 2,70 | 1,0 | 2,34 | 1,2 | 2,28 | 1,4 | 2,21 | 1,0 | 2,36 | 2,1 | 2,23 | 2,1 | 2,31 | 1,1 | 1,53 |
| | 1-3 | 2,0 | 1,4 | 5,21 | 1,7 | 3,91 | 1,6 | 3,58 | 1,9 | 3,47 | 2,0 | 3,28 | 1,6 | 3,49 | 2,1 | 2,22 | 2,2 | 2,41 | 1,4 | 1,96 |
| 12 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,35 | -0,4 | 1,09 | -0,6 | 0,98 | 0,1 | 0,13 | 0,4 | 0,76 | 0,1 | 0,20 | 0,0 | 0,08 | 0,2 | 0,25 | -0,8 | 0,93 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,12 | -0,1 | 0,36 | -0,2 | 0,41 | 0,1 | 0,15 | 0,5 | 0,90 | 0,0 | 0,05 | 0,1 | 0,22 | 0,5 | 0,65 | -0,3 | 0,33 |
| σ _m | | | 0,3mm | | 0,3mm | | 0,25mm | | 0,4mm | | 0,5mm | | 0,34mm | | 0,7mm | | 0,7mm | | 0,5mm | |
| α = 5% | | | q.L. = 7 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < | q.L. = 7 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < | q.L. = 7 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < | q.L. = 6 | R.A. DPI < |
| | | | 2,36 | 2,45 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,45 | 2,36 | 2,45 | 2,45 |

Tabela 10 - Resultados obtidos para a Situação 02 da Rede 03.

| | | | Rede 03 / Situação 02 | | | | | |
|------------------|--------|------------|-----------------------|---|---------------------|---|-------------------|---|
| | | | D.P.O. = 2,00mm | | | | | |
| | | | P.F. = 1/12 | | | | A. LIVRE (PSEUDO) | |
| | | | A. CLÁSSICO | | A. LIVRE (I.G.R.S.) | | | |
| PONTOS | ÉPOCAS | D.V. (m.m) | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. |
| 1 | 1-2 | 0,0 | -0,0 | 0,05 | -0,6 | 0,20 | -4,8 | 2,11 |
| | 1-3 | 0,0 | -0,1 | 0,15 | -1,6 | 0,56 | -5,3 | 2,31 |
| 2 | 1-2 | 1,0 | 4,6 | 2,16 | 4,4 | 1,42 | 0,2 | 0,12 |
| | 1-3 | 1,5 | 3,9 | 1,83 | 3,3 | 1,07 | -0,3 | 0,17 |
| 3 | 1-2 | 3,0 | 6,4 | 2,56 | 6,4 | 1,94 | 2,2 | 1,23 |
| | 1-3 | 9,0 | 11,9 | 4,78 | 12,0 | 3,62 | 8,3 | 4,65 |
| 4 | 1-2 | 0,3 | 5,9 | 2,05 | 6,0 | 1,66 | 1,8 | 0,78 |
| | 1-3 | 0,0 | 2,5 | 0,88 | 2,9 | 0,80 | -0,8 | 0,33 |
| 5 | 1-2 | 3,8 | 4,5 | 2,01 | 4,2 | 1,31 | 0,0 | 0,00 |
| | 1-3 | 6,8 | 7,8 | 3,52 | 7,1 | 2,22 | 3,5 | 1,80 |
| 6 | 1-2 | -2,0 | 1,3 | 0,60 | 1,2 | 0,40 | 3,0 | 2,02 |
| | 1-3 | 0,0 | 1,4 | 0,66 | 1,2 | 0,38 | 2,5 | 1,67 |
| 7 | 1-2 | -1,5 | 0,4 | 0,20 | 0,5 | 0,17 | 3,7 | 2,50 |
| | 1-3 | -2,0 | -0,4 | 0,19 | -0,2 | 0,05 | 3,8 | 2,58 |
| 8 | 1-2 | 5,5 | 8,7 | 3,91 | 9,0 | 2,79 | 4,8 | 2,46 |
| | 1-3 | -4,0 | -2,5 | 1,12 | -1,8 | 0,56 | -5,4 | 2,80 |
| 9 | 1-2 | 3,0 | 4,2 | 1,48 | 4,1 | 1,14 | -0,1 | 0,05 |
| | 1-3 | 4,2 | 5,5 | 1,92 | 5,1 | 1,42 | 1,5 | 0,65 |
| 10 | 1-2 | -0,5 | 2,3 | 0,91 | 2,3 | 0,69 | -1,9 | 1,08 |
| | 1-3 | -0,5 | 1,4 | 0,57 | 1,4 | 0,43 | -2,2 | 1,25 |
| 11 | 1-2 | 10,5 | 12,2 | 5,67 | 12,4 | 3,98 | 8,2 | 4,85 |
| | 1-3 | 12,0 | 12,0 | 5,60 | 12,6 | 4,05 | 9,0 | 5,02 |
| 12 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,05 | 0,6 | 0,20 | -3,4 | 1,60 |
| | 1-3 | 0,0 | 0,1 | 0,15 | 1,6 | 0,56 | -2,0 | 0,89 |
| $\hat{\sigma}_m$ | | | 1,7 mm | | 2,3 mm | | 1,4 mm | |
| $\alpha = 5\%$ | | | $\sigma_{L.} = 7$ | $R.A. \left \frac{D.P.}{\sigma_{L.}} \right < 2,36$ | $\sigma_{L.} = 6$ | $R.A. \left \frac{D.P.}{\sigma_{L.}} \right < 2,45$ | $\sigma_{L.} = 6$ | $R.A. \left \frac{D.P.}{\sigma_{L.}} \right < 2,45$ |

Tabela 11 - Comparação entre os pontos fixos e os detectados como fixos pe los diversos testes de hipóteses, a um nível de significância $\alpha = 5\%$

| | PONTOS FIXOS | AJUSTAMENTO CLASSICO | AJUSTAMENTO LIVRE (LG.R.S.) | AJUSTAMENTO LIVRE (PSEUDO) | AJUSTAMENTO MULTIVARIADO |
|-------------------------------------|---------------------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| Rede 01/Situação 01 D.P.O.=0,2mm | 1,9 | 1,9 | 1,5,8,9,6 | 3,8 | 1,9 |
| Rede 01/Situação 01 D.P.O.=0,5mm | 1,5,6,8,9 | 1,3,5,6,8,9 | 1,3,5,6,8,9 | 1,2,3,6,8 | 1,3,5,6,8,9 |
| Rede 01/Situação 01 D.P.O.=1,0mm | 1,2,3,4,5, 6,8,9 | 1,2,3,5,6,7, 8,9 | 1,2,3,5,6,7, 8,9 | 1,2,3,4,5,6, 7,8,9 | 1,2,3,4,5,6, 7,8,9 |
| Rede 01/Situação 02 D.P.O.=0,2mm | 1,2,3,5,6, 8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 6, | 1,2,3,5,6,8,9 |
| Rede 01/Situação 02 D.P.O.=0,5mm | 1,2,3,5,6, 8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 |
| Rede 01/Situação 02 D.P.O.=1,0mm | 1,2,3,4,5, 6,8,9 | 1,2,3,5,6,7,8, 9 | 1,2,3,5,6,7, 8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 | 1,2,3,5,6,8,9 |
| Rede 02 D.P.O.=0,5mm | 1,8,5 | 1,3,4,5,8 | 1,2,3,4,5,6,8 | 1,2,3,4,5,6,7, 8 | 1,8,5 |
| Rede 02 D.P.O.=1,0mm | 1,2,3,4,5, 6,8 | 1,2,3,4,5,6,8 | 1,2,3,4,5,6,7, 8 | 1,2,3,4,5,6,7, 8 | 1,2,3,4,5,6,8 |
| Rede 03/Situação 01 D.P.O.=0,3mm | 1,4,6,10,12 | 1,4,5,6,8,9, 10,12 | 1,4,5,6,8,9, 10,12 | 1,4,5,6,8,9, 10,12 | 1,4,6,12 |
| Rede 03/Situação 01 D.P.O.=0,5mm | 1,3,4,5,6, 7,8,10,12 | 1,3,4,5,6,7, 8,9,10,12 | 1,2,3,4,5,6, 7,8,9,10,12 | 1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10,12 | 1,3,4,5,6,7, 8,10,12 |
| Rede 03/Situação 01 D.P.O.=0,8mm | 1,3,4,5,6, 7,8,9,10,12 | 1,3,4,5,6,7, 8,9,10,11,12 | 1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10,11,12 | 1,2,3,4,5,6,7, 8,9,10,11,12 | 1,3,4,5,6,7, 8,9,10,12 |
| Rede 03/Situação 02 D.P.O.=2,0mm | 1,2,4,6,7, 9,10,12 | 1,2,4,6,7,9, 10,12 | 1,2,4,5,6,7, 9,10,12 | 1,2,4,5,6,9, 10,12 | 1,2,4,6,7,9, 10,12 |

Tabela 12 - Resultados obtidos para o Ajustamento com conhecimento a priori sobre os parâmetros

| PONTOS | REDE O3 / SITUAÇÃO O1 / D.P.O. = 0,3 mm | | | | | | | | REDE O3 / SITUAÇÃO O2 / D.P.O. = 2,0 mm | | | | | | | | | |
|--------|---|--------------|--|------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|------|---|--------------|--|-----------------------------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------------------------|--|--|
| | ÉPOCAS | D.V. (mm) | D.P.P. = 3 mm | | D.P.P. = 10 mm | | D.P.P. = 50 mm | | ÉPOCAS | D.V. (mm) | D.P.P. = 5 mm | | D.P.P. = 15 mm | | D.P.P. = 50 mm | | | |
| | | | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | | | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | DESLOC. (mm) | D.P. | | |
| 1 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,13 | 0,0 | 0,35 | 0,0 | 0,35 | 1-2 | 0,0 | -0,2 | 0,27 | -0,1 | 0,09 | 0,0 | 0,05 | | |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | 0,0 | 0,12 | 0,0 | 0,12 | 1-3 | 0,0 | -0,3 | 0,38 | -0,1 | 0,19 | -0,1 | 0,15 | | |
| 2 | 1-2 | 1,0 | 0,8 | 1,45 | 0,8 | 2,36 | 0,8 | 2,36 | 1-2 | 1,0 | 3,3 | 1,67 | 4,4 | 2,08 | 4,6 | 2,15 | | |
| | 1-3 | 1,5 | 1,3 | 2,47 | 1,3 | 4,00 | 1,3 | 4,00 | 1-3 | 1,5 | 2,6 | 1,34 | 3,7 | 1,75 | 3,9 | 1,82 | | |
| 3 | 1-2 | -0,8 | -1,1 | 1,84 | -1,1 | 3,00 | -1,1 | 3,00 | 1-2 | 3,0 | 4,4 | 2,02 | 6,1 | 2,48 | 6,4 | 2,56 | | |
| | 1-3 | -1,0 | -1,3 | 2,16 | -1,3 | 3,52 | -1,3 | 3,52 | 1-3 | 9,0 | 10,0 | 4,57 | 11,6 | 4,47 | 11,9 | 4,77 | | |
| 4 | 1-2 | 0,3 | 0,2 | 0,30 | 0,2 | 0,47 | 0,2 | 0,47 | 1-2 | 0,3 | 3,7 | 1,48 | 5,5 | 1,97 | 5,8 | 2,04 | | |
| | 1-3 | 0,0 | -0,6 | 0,81 | -0,6 | 1,34 | -0,6 | 1,34 | 1-3 | 0,0 | 1,1 | 0,43 | 2,3 | 0,81 | 2,5 | 0,88 | | |
| 5 | 1-2 | 0,8 | 0,4 | 0,80 | 0,4 | 1,33 | 0,4 | 0,33 | 1-2 | 3,8 | 3,2 | 1,59 | 4,3 | 1,94 | 4,4 | 2,00 | | |
| | 1-3 | 1,0 | 0,6 | 1,18 | 0,6 | 1,92 | 0,6 | 1,92 | 1-3 | 6,8 | 6,4 | 3,16 | 7,6 | 3,46 | 7,8 | 3,51 | | |
| 6 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,05 | 0,0 | 0,10 | 0,0 | 0,10 | 1-2 | -2,0 | -0,2 | 0,08 | 1,1 | 0,50 | 1,3 | 0,60 | | |
| | 1-3 | 0,0 | -0,2 | 0,41 | -0,2 | 0,66 | -0,2 | 0,66 | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,00 | 1,2 | 0,56 | 1,4 | 0,65 | | |
| 7 | 1-2 | -0,5 | -0,8 | 1,48 | -0,8 | 2,41 | -0,8 | 2,41 | 1-2 | -1,5 | -1,2 | 0,64 | 0,2 | 0,07 | 0,4 | 0,18 | | |
| | 1-3 | -0,9 | -1,2 | 2,13 | -1,2 | 3,45 | -1,2 | 3,45 | 1-3 | -2,0 | -1,7 | 0,93 | -0,6 | 0,30 | -0,4 | 0,20 | | |
| 8 | 1-2 | 0,5 | 0,5 | 0,84 | 0,4 | 1,31 | 0,5 | 1,31 | 1-2 | 5,5 | 7,0 | 3,49 | 8,4 | 3,85 | 8,7 | 3,90 | | |
| | 1-3 | 1,0 | 0,7 | 1,24 | 0,7 | 1,99 | 0,7 | 1,99 | 1-3 | -4,0 | -3,3 | 1,64 | -2,6 | 1,20 | -2,5 | 1,12 | | |
| 9 | 1-2 | 1,0 | 0,5 | 0,67 | 0,5 | 1,12 | 0,5 | 1,12 | 1-2 | 3,0 | 2,6 | 1,01 | 3,9 | 1,41 | 4,2 | 1,47 | | |
| | 1-3 | 1,2 | 0,7 | 0,95 | 0,7 | 1,57 | 0,7 | 1,57 | 1-3 | 4,2 | 3,6 | 1,44 | 5,2 | 1,85 | 5,4 | 1,91 | | |
| 10 | 1-2 | -0,5 | -0,3 | 0,47 | -0,3 | 0,76 | -0,3 | 0,76 | 1-2 | -0,5 | 0,6 | 0,28 | 2,0 | 0,82 | 2,2 | 0,90 | | |
| | 1-3 | -0,5 | -0,7 | 1,13 | -0,7 | 1,84 | -0,7 | 1,84 | 1-3 | -0,5 | -0,2 | 0,09 | 1,2 | 0,47 | 1,4 | 0,56 | | |
| 11 | 1-2 | 1,5 | 1,3 | 2,45 | 1,3 | 4,00 | 1,3 | 4,00 | 1-2 | 10,5 | 10,4 | 5,36 | 11,9 | 5,63 | 12,2 | 5,67 | | |
| | 1-3 | 2,0 | 1,4 | 3,20 | 1,7 | 5,28 | 1,4 | 5,28 | 1-3 | 12,0 | 10,4 | 5,36 | 11,8 | 5,56 | 12,0 | 5,60 | | |
| 12 | 1-2 | 0,0 | 0,0 | 0,13 | 0,0 | 0,35 | 0,0 | 0,35 | 1-2 | 0,0 | -0,2 | 0,22 | 0,0 | 0,01 | 0,0 | 0,05 | | |
| | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | 0,0 | 0,12 | 0,0 | 0,12 | 1-3 | 0,0 | 0,0 | 0,04 | 0,1 | 0,12 | 0,1 | 0,15 | | |
| | | | $\hat{\sigma}_m = 0,4 \text{ mm}$ | | $\hat{\sigma}_m = 0,3 \text{ mm}$ | | $\hat{\sigma}_m = 0,3 \text{ mm}$ | | | | | $\hat{\sigma}_m = 1,5 \text{ mm}$ | | $\hat{\sigma}_n = 1,7 \text{ mm}$ | | $\hat{\sigma}_m = 1,7 \text{ mm}$ | | |
| | | | $\alpha = 5\%, \text{g.l.} = 17, \text{RA: } \text{D.P.} < 2,11$ | | | | | | | | $\alpha = 5\%, \text{g.l.} = 17, \text{RA: } \text{D.P.} < 2,11$ | | | | | | | |

Tabela 13: Exemplo do processo Iterativo para detecção de pontos fixos.

| Rede 03/Situação 02/D.P.O.=2,0mm | | $\alpha=5\%$ nº épocas $-1=p=2$ | | |
|----------------------------------|--|--|--|--|
| | Teste Hipótese 3.70 | Teste Hipótese 3.72 | Teste Hipótese 3.77 | Teste Hipótese 3.80 |
| Pontos que definem o Datum | R.A.: $\Lambda > \Lambda_{2,5,6}$ S=nº pontos fixos | R.A.: $T_{1,j} < F(S,6)$ j=época 2 ou 3 | R.A.: $\Lambda_1 \geq 0,301715$ i=nº do ponto | R.A.: $T1_{(1,j)} < 5,99$ |
| 1,12 | $\Lambda = 0,860377$ $\Lambda_{2,2,6} = 0,174902$ | $T_{1,2} = 0,085$ $T_{1,3} = 0,466$ $F(2,6) = 5,14$ | $\Lambda_1 = 0,860377$ $\Lambda_{12} = 0,860377$ | $T1_{(1,2)} = 0,170$; $T1_{(1,3)} = 0,933$ $T12_{(1,2)} = 0,170$; $T12_{(1,3)} = 0,933$ |
| 1,7,12 | $\Lambda = 0,838738$ $\Lambda_{2,3,6} = 0,114450$ | $T_{1,2} = 0,081$ $T_{1,3} = 0,328$ $F(3,6) = 4,76$ | $\Lambda_1 = 0,884822$ $\Lambda_7 = 0,978735$ $\Lambda_{12} = 0,861122$ | $T1_{(1,2)} = 0,228$; $T1_{(1,3)} = 0,691$ $T7_{(1,2)} = 0,105$; $T7_{(1,3)} = 0,007$ $T12_{(1,2)} = 0,080$; $T12_{(1,3)} = 0,963$ |
| 1,6,7,12 | $\Lambda = 0,688922$ $\Lambda_{2,4,6} = 0,083463$ | $T_{1,2} = 0,229$ $T_{1,3} = 0,530$ $F(4,6) = 4,53$ | $\Lambda_1 = 0,834689$ $\Lambda_6 = 0,871431$ $\Lambda_7 = 0,978768$ $\Lambda_{12} = 0,918193$ | $T1_{(1,2)} = 0,420$; $T1_{(1,3)} = 0,998$ $T6_{(1,2)} = 0,556$; $T6_{(1,3)} = 0,527$ $T7_{(1,2)} = 0,006$; $T7_{(1,3)} = 0,105$ $T12_{(1,2)} = 0,008$; $T12_{(1,3)} = 0,529$ |
| 1,6,7,10,12 | $\Lambda = 0,606190$ $\Lambda_{2,5,6} = 0,063180$ | $T_{1,2} = 0,372$ $T_{1,3} = 0,451$ $F(5,6) = 4,39$ | $\Lambda_1 = 0,793683$ $\Lambda_6 = 0,935249$ $\Lambda_7 = 0,958891$ $\Lambda_{10} = 0,796126$ $\Lambda_{12} = 0,935357$ | $T1_{(1,2)} = 0,723$; $T1_{(1,3)} = 1,170$ $T6_{(1,2)} = 0,176$; $T6_{(1,3)} = 0,325$ $T7_{(1,2)} = 0,063$; $T7_{(1,3)} = 0,235$ $T10_{(1,2)} = 1,402$; $T10_{(1,3)} = 0,388$ $T12_{(1,2)} = 0,019$; $T12_{(1,3)} = 0,338$ |
| 1,6,7,9,10,12 | $\Lambda = 0,358262$ $\Lambda_{2,6,6} = 0,049481$ | $T_{1,2} = 0,0726$ $T_{1,3} = 1,200$ $F(6,6) = 4,28$ | $\Lambda_1 = 0,672676$ $\Lambda_6 = 0,99497$ $\Lambda_7 = 0,833975$ $\Lambda_9 = 0,479555$ $\Lambda_{10} = 0,905237$ $\Lambda_{12} = 0,955633$ | $T1_{(1,2)} = 1,389$; $T1_{(1,3)} = 2,159$ $T6_{(1,2)} = 0,014$; $T6_{(1,3)} = 0,004$ $T7_{(1,2)} = 0,471$; $T7_{(1,3)} = 0,965$ $T9_{(1,2)} = 3,312$; $T9_{(1,3)} = 4,623$ $T10_{(1,2)} = 0,623$; $T10_{(1,3)} = 0,011$ $T12_{(1,2)} = 0,199$; $T12_{(1,3)} = 0,030$ |
| 1,2,6,7,9,10,12 | $\Lambda = 0,186907$ $\Lambda_{2,7,6} = 0,039834$ | $T_{1,2} = 1,963$ $T_{1,3} = 1,729$ $F(7,6) = 4,21$ | $\Lambda_1 = 0,589610$ $\Lambda_2 = 0,556667$ $\Lambda_6 = 0,945329$ $\Lambda_7 = 0,747878$ $\Lambda_9 = 0,554276$ $\Lambda_{10} = 0,969020$ $\Lambda_{12} = 0,823991$ | $T1_{(1,2)} = 2,258$; $T1_{(1,3)} = 2,842$ $T2_{(1,2)} = 4,243$; $T2_{(1,3)} = 1,376$ $T6_{(1,2)} = 0,309$; $T6_{(1,3)} = 0,099$ $T7_{(1,2)} = 1,081$; $T7_{(1,3)} = 1,388$ $T9_{(1,2)} = 2,179$; $T9_{(1,3)} = 3,669$ $T10_{(1,2)} = 0,154$; $T10_{(1,3)} = 0,010$ $T12_{(1,2)} = 0,459$; $T12_{(1,3)} = 0,001$ |
| 1,2,4,6,7,9,10,12 | $\Lambda = 0,135835$ $\Lambda_{2,8,6} = 0,032772$ | $T_{1,2} = 2,458$ $T_{1,3} = 1,590$ $F(8,6) = 4,15$ | $\Lambda_1 = 0,547535$ $\Lambda_2 = 0,654590$ $\Lambda_4 = 0,577169$ $\Lambda_6 = 0,844740$ $\Lambda_7 = 0,634921$ $\Lambda_9 = 0,628938$ $\Lambda_{10} = 0,992978$ $\Lambda_{12} = 0,855218$ | $T1_{(1,2)} = 3,134$; $T1_{(1,3)} = 2,931$ $T2_{(1,2)} = 2,667$; $T2_{(1,3)} = 1,110$ $T4_{(1,2)} = 4,387$; $T4_{(1,3)} = 0,311$ $T6_{(1,2)} = 1,059$; $T6_{(1,3)} = 0,188$ $T7_{(1,2)} = 2,374$; $T7_{(1,3)} = 1,837$ $T9_{(1,2)} = 1,180$; $T9_{(1,3)} = 3,028$ $T10_{(1,2)} = 0,001$; $T10_{(1,3)} = 0,042$ $T12_{(1,2)} = 0,984$; $T12_{(1,3)} = 0,002$ |

Tabela 13 - (Continuação)

| | | | | |
|-------------------------|--|--|--|--|
| 1,2,4,5,6,7,9, 10,12 | $\Lambda = 0,073850$ $\Lambda_{2,9,6} = 0,027240$ | $T_{1,2} = 2,697$ $T_{1,3} = 3,026$ $F_{(9,6)} = 4,10$ | $\Lambda_1 = 0,473164$ $\Lambda_2 = 0,726479$ $\Lambda_4 = 0,620225$ $\Lambda_5 = 0,377883$ $\Lambda_6 = 0,747952$ $\Lambda_7 = 0,565140$ $\Lambda_9 = 0,694901$ $\Lambda_{10} = 0,943784$ $\Lambda_{12} = 0,837396$ | $T1_{(1,2)} = 3,834$; $T1_{(1,3)} = 4,335$ $T2_{(1,2)} = 2,142$; $T2_{(1,3)} = 0,435$ $T4_{(1,2)} = 3,645$; $T4_{(1,3)} = 0,068$ $T5_{(1,2)} = 1,665$ * $T5_{(1,3)} = 9,497$ $T6_{(1,2)} = 1,576$; $T6_{(1,3)} = 0,867$ $T7_{(1,2)} = 2,717$; $T7_{(1,3)} = 2,931$ $T9_{(1,2)} = 0,974$; $T9_{(1,3)} = 2,180$ $T10_{(1,2)} = 0,038$; $T10_{(1,3)} = 0,353$ $T12_{(1,2)} = 1,158$; $T12_{(1,3)} = 0,106$ * o ponto não é aceito como fixo. |
| Pontos | Épocas | D.V. (mm) | Desl. Ajustados | OBS.: A um nível de significância $\alpha = 5\%$, os pontos fixos para esta rede são: 1,2,4,6,7,9,10,12. |
| 3 | 1-2 | 3,0 | 4,1 | |
| | 1-3 | 9,0 | 10,2 | |
| 5 | 1-2 | 3,8 | 1,9 | |
| | 1-3 | 6,8 | 5,4 | |
| 8 | 1-2 | 5,5 | 6,6 | |
| | 1-3 | -4,0 | -3,5 | |
| 11 | 1-2 | 10,5 | 10,1 | |
| | 1-3 | 12,0 | 10,9 | |

COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 Comentários

Em todos os casos citados no capítulo anterior, efetuou-se o teste de hipótese (3.65) para verificar a qualidade do ajustamento. Os resultados apresentados foram obtidos após o ajustamento ser aceito por esta análise, a um nível de significância de 5%. Nos casos em que o ajustamento não foi aceito, constatou-se que se tratava de uma estimativa incorreta da M.V.C. das observações. Nestas circunstâncias, embora os deslocamentos obtidos fossem os mesmos que nos casos em que o ajustamento foi aceito, para os casos clássico e livre os resultados da análise estatística para detecção de pontos fixos sofreram alterações. Para o modelo paramétrico multivariado, os resultados permaneceram inalterados.

Um outro aspecto que deve ser chamado a atenção, é com respeito à definição inicial do datum, em situações que não se tem um conhecimento prévio dos dois pontos fixos, necessários para inicializar o processo iterativo de detecção de pontos fixos. Nestes casos, o ajustamento multivariado é solucionado usando-se a pseudo inversa e define-se como fixos, os dois pontos com deslocamentos padronizados menores; podendo-se entretanto incorrer em erros. Cuidados especiais devem ser tomados para evitar que pontos que se movimentaram contribuam na definição inicial do datum. Estes dois pontos devem ser testados ao final, escolhendo-se para tal, dois pontos diferentes para a definição inicial do datum. Deve-se entretanto ressal-

tar, que casos deste tipo geralmente não ocorrem na prática.

No que se diz respeito ao processo iterativo de detecção de pontos fixos, deve-se notar, conforme consta da tabela 13, que no momento em que um teste é rejeitado, o processo é encerrado.

5.2 Conclusões

Das tabelas 06, 07, 08, 09 e 10, constata-se que o ajustamento livre com a pseudo inversa não proporciona deslocamentos corretos na maioria das vezes. No ajustamento livre com a I.G.R.S., obtém-se praticamente os mesmos valores que no caso clássico; os quais são bem próximos dos reais.

Na tabela 11 pode-se constatar que na análise estatística para o ajustamento livre, os resultados não foram satisfatórios. Para os casos clássico e multivariado, há uma melhoria considerável, a qual é mais acentuada para o ajustamento multivariado. Neste caso comete-se 04 (quatro) erros, dos quais 02 (dois) são erros do tipo I e 02 (dois) do tipo II, contra 12 (doze) erros no caso clássico, 02 (dois) do tipo I e 10 (dez) do tipo II.

Quanto ao ajustamento clássico com conhecimento a priori sobre os parâmetros aproximados, pôde-se constatar que não há melhoria com relação ao ajustamento clássico; os deslocamentos e pontos detectados como fixos são os mesmos. Isto pode ser constatado ao analisar a tabela 12 e compará-la aos resultados obtidos para o ajustamento clássico para os mesmos casos.

5.3 Recomendações

Tendo-se em vista os comentários e conclusões apresentados, recomenda-se a aplicação do ajustamento multivariado com solução pela I.G.R.S., no qual trata-se os testes de hipóteses como injunções, sempre que se efetue um levantamento visando detectar deformações; quer seja de uma estrutura ou da superfície terrestre.

Recomenda-se também o estudo do modelo paramétrico multivariado clássico na detecção de deformações, tratando os testes de hipóteses como injunções.

NOTAS DE REFERÊNCIAS

- 1011 SILVA, A.S. Controle de estruturas de engenharia pelo método fotogramétrico. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1983. p.01.
- 1021 FALCÃO, M.S. Caracterização das observações geodésicas de barragens e outras grandes obras. Revista do Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa, 1983. p.21.
- 1031 ASHKENAZI, V. & DODSON, A.H. Measurement of deformations by surveying techniques- Compendium of formulae. Nottinhgham, University of Nottinhgham, 1978. p.16.
- 1041 PAPO, H.B. Extended free net adjustment constrains. Bulletin Géodésique, 59(4), 1985. p.378.
- 1051 KOCH, K.R. Statistical analysis of geodetic data with application for deformation analysis. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1985. p.01.
- 1061 SILVA, T.F. Novos métodos geodésicos na medição de deformação e deslocamentos. Notas não publicada. p.02.
- 1071 VANÍCEK, P. & KRAKIWSKY, E.J. Geodesy: the concepts. Amsterdam, North-Holland, 1982. p.182.
- 1081 Ibid. p.183-184.
- 1091 Ibid. p.225-231.
- 1101 WOLF, P.R. Adjustment Computations. Madison, P.B.L., 1981. p.25-29.
- 1111 GEMAEL, C. Ajustamento: variação de coordenadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. p.5-6.
- 1121 ASHKENAZI & DODSON, p.2.
- 1131 WOLF, P.R. p.79-81.
- 1141 SILVA, A.S. p.12-29.
- 1151 EREZ, M.T. Analytical Terrestrial photogrammetry applied to the measurement of deformations in large engineering structures. Quebec, Laval University, Doctoral Thesis, 1971. p.26-40.
- 1161 VANÍCEK & KRAKIWSKY, p.269-270.

- 1171 SCHMID, H.H. & SCHMID E. A generalized least squares solution for hybrid measuring systems. The Canadian Surveyor, 19(1), 1965. p.32.
- 1181 VANÍCEK & KRAKIWSKY, p.277.
- 1191 RAO, C.R. & MITRA, S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York, John Wiley, 1971. p. 50-51.
- 1201 KOCH, K.R. p.16.
- 1211 RAO & MITRA, p.207-211.
- 1221 BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, T.N.E. Generalized inverses: theory and application. New York, John Wiley, 1983. p. 283-290.
- 1231 MOURA, J.O.DE. Aplicação do ajustamento livre a fotogrametria. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. p.55-56.
- 1241 KOCH, K.R. p.64-65.
- 1251 Ibid. p.66.
- 1261 ASHKENAZI, V. Criteria for optimization: a practical assessment of a free network adjustment. Buletino di Geodésia e Scienze Affini, 33(1), 1974. p.12-13.
- 1271 BLAHA, G. Inner adjustment constrains with emphasis on range observations. Report of the Department of Geodetic Science, The Ohio State University, 148, 1971. p. 73-76.
- 1281 KOCH, K.R. p.71.
- 1291 SCHMID & SCHMID, p.31-36.
- 1301 VANÍCEK & KRAKIWSKY, p.264-269.
- 1311 KOCH, K.R. p.72.
- 1321 RAO, C.R. Linear statistical inference and its applications. 2 Edição, New York, John Wiley, 1973. p.544.
- 1331 GEMAEL, C. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1984. p.4.13-4.17.
- 1341 VANÍCEK & KRAKIWSKY, p.211.
- 1351 HAMILTON, W. C. Statistics in physical science. New York, Ronald Press, 1964. p.129-130.

- 1361 Ibid. p.138.
- 1371 KOCH, K.R. p.57.
- 1381 VANÍCEK & KRAKIWSKY, p.215.
- 1391 KOCH, K.R. p.31.
- 1401 HAMILTON, K.R. p.67.
- 1411 GEMAEL, C. Introdução ... p.3.11.
- 1421 HAMILTON, W.C. p.205.
- 1431 GEMAEL, C. Introdução ... p.3.14.
- 1441 HAMILTON, W.C. p.207.
- 1451 GRAYBILL, F.A. An introduction to linear statistical models. New York, Macgraw-Hill, 1961. p.74-77.
- 1461 Ibid. p.425-443.
- 1471 Ibid. p.77-79.
- 1481 HAMILTON, W.C. p.206.
- 1491 KOCH, K.R. p.39-40.
- 1501 MARDIA, K.V. et alii. Multivariate analysis. London, Academic Press, 1979. p.66.
- 1511 RAO, C.R. p.556.
- 1521 KOCH, K.R. p.86-88.
- 1531 Ibid. p.77.
- 1541 HAMILTON, W.C. p.136.
- 1551 KOCH, K.R. p.78.
- 1561 GRAYBILL, F.A. p.130.
- 1571 KOCH, K.R. p.78-79.
- 1581 HAMILTON, W.C. p.49.
- 1591 GRAYBILL, F.A. p.41.
- 1601 Ibid. p.43-45.
- 1611 KOCH, K.R. p.81.
- 1621 Ibid. p.82.

- 1631 Ibid. p.82-91.
- 1641 GEMAEL, C. Introdução ... p.7.11.
- 1651 KOCH, K.R. Derivations from the null hypothesis to be detected by statistical tests. Bulletin Géodésique, 55(1), 1981. p.47.
- 1661 KOCH, K.R. Statistical... p.111-117.
- 1671 KOCH, K.R. & RIESMEIER, K. Bayesian inference for the derivations of less sensitives hypothesis tests. Bulletin Géodésique, 59(2), 1985. p.167-179.
- 1681 KOCH, K.R. Statistical... p.117-120.
- 1691 ASHKENAZI & DODSON, p.17.
- 1701 KOCH, K.R. Statistical... p.14.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1011 ASHKENAZI, V. Criteria for optimization: a practical assessment of a free network adjustment. Buletino di Geodésia e Scienze Affini, 33(1), 1974. p.07-90.
- 1021 ASHKENAZI, V. & DODSON, A.H. Measurement of deformations by surveying techniques- Compendium of formulae. Nottingham, University of Nottingham, 1978. 30p.
- 1031 BEN-ISRAEL, A. & GREVILLE, T.N.E. Generalized inverses: teory and aplication. New York, John Wiley, 1983. 395p.
- 1041 BLAHA, G. Inner adjustment constrains with emphasis on range observations. Report of the Department of Geodetic Science, The Ohio State University, 148, 1971. p. 01-85.
- 1051 EREZ, M.T. Analytical Terrestrial photogrammetry applied to the measurement of deformations in large engineering structures. Quebec, Laval University, Doctoral Thesis, 1971. 150p.
- 1061 FALCÃO, M.S. Caracterização das observações geodésicas de barragens e outras grandes obras. Revista do Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa, 1983. p.21-28.
- 1071 GEMAEL, C. Ajustamento: variação de coordenadas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 50p.
- 1081 ----. Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1984. 205p.
- 1091 GRAYBILL, F.A. An introduction to linear statistical models. New York, Macgraw-Hill, 1961. 463p.
- 1101 HAMILTON, W. C. Statistics in physical science. New York, Ronald Press, 1964. 230p.
- 1111 KOCH, K.R. Derivations from the null hypothesis to be detected by statistical tests. Bulletin Géodésique, 55(1), 1981. p.41-48.
- 1121 ----. Statistical analysis of geodetic data with aplicação for deformation analysis. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodsicas, 1985. 125p.
- 1131 KOCH, K.R. & RIESMEIER, K. Bayesian inference for the derivations of less sensitives hypothesis tests. Bulletin Géodésique, 59(2), 1985. p.167-179.

- 1141 MARDIA, K.V. et alii. Multivariate analysis. London, Academic Press, 1979. 521p.
- 1151 MOURA, J.O.DE. Aplicação do ajustamento livre a fotogrametria. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. 122p.
- 1161 PAPO, H.B. Extended free net adjustment constrains. Bulletin Géodésique, 59(4), 1985. p.378-390.
- 1171 RAO, C.R. Linear statistical inference and its applications. 2 Edição, New York, John Wiley, 1973. 625p.
- 1181 RAO, C.R. & MITRA, S.K. Generalized inverse of matrices and its applications. New York, John Wiley, 1971. 240p.
- 1191 SCHMID, H.H. & SCHMID E. A generalized least squares solution for hybrid measuring systems. The Canadian Surveyor, 19(1), 1965. p.27-41.
- 1201 SILVA, A.S. Controle de estruturas de engenharia pelo método fotogramétrico. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1983. 89p.
- 1211 SILVA, T.F. Novos métodos geodésicos na medição de deformação e deslocamentos. Notas não publicada. 22p.
- 1221 VANÍCEK, P. & KRAKIWSKY, E.J. Geodesy: the concepts. Amsterdam, North-Holland, 1982. 691p.
- 1231 WOLF, P.R. Adjustment Computations. Madison, P.B.L., 1981, 284 p.