

CARLITO VIEIRA DE MORAES

**APRIMORAMENTO DA CONCEPÇÃO DO MODELO GEODÉSICO PARA A
CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS NO ESPAÇO GEOMÉTRICO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Departamento de Geomática, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientadores:

Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas

Prof. Dr. Elimar Szaniawski

**CURITIBA
2001**

Moraes, Carlito Vieira de

Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de estremas no espaço geométrico / Carlito Vieira de Moraes. – Curitiba, 2001.

277p. : il.

Orientadores: Sílvio Rogério Correia de Freitas, Elimar Szaniawski.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências da Terra.

1. Geodésia. 2. Coordenadas geográficas. 3. Elipsóide. 4. Pesquisa geodésica. I. Freitas, Sílvio Correia Rogério de. II. Szaniawski, Elimar. III. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências da Terra. IV. Título.

Termos Livres: Direito Imobiliário. Coordenadas geográficas elipsóidicas. Coordenadas polares elipsóidicas. Caracterização de estremas.

CDD 20 526.3

**“APRIMORAMENTO DA CONCEPÇÃO DO MODELO GEODÉSICO
PARA A CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS NO ESPAÇO
GEOMÉTRICO”**

POR

CARLITO VIEIRA DE MORAES

Tese nº 020 aprovada como requisito parcial do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:



Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas - Orientador e Presidente (UFPR)



Prof. Dr. Elimar Szaniawski – Co-Orientador (UFPR)



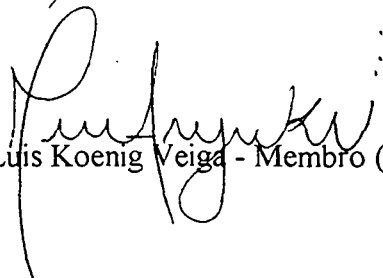
Prof. Dr. Valdemar Antônio Demétrio - Membro (ESALQ/USP)



Prof.ª Dr.ª Maria Francisca Carneiro - Membro (UFPR)



Prof. Dr. Jair Mendes Marques – Membro (UTP)



Prof. Dr. Luis Koenig Veiga - Membro (UFPR)

Dedica-se este trabalho aos
pesquisadores que são
constituídos peritos
agrimensores, peritos
arbitradores, assistentes
técnicos das Fazendas
Públicas e dos requeridos e
aos pesquisadores juristas
no tema **caracterização de
estremas.**

AGRADECIMENTOS

O autor deseja externar seus agradecimentos aos professores, aos profissionais de instituições e aos colaboradores abaixo relacionados.

Ao Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas, Prof. do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, a orientação no conteúdo da parte de Geodésia.

Ao Dr. Elimar Szaniawski, Prof. Adjunto da Faculdade de Direito (Setor de Ciências Jurídicas) da Universidade Federal do Paraná e Advogado, a orientação no conteúdo da parte jurídica.

À Prof^a. Liliana Luisa Pizzolato, Coordenadora da Equipe Técnica que elaborou as Normas para a Apresentação de Documentos Científicos da Universidade Federal do Paraná em 2000, as constantes leituras e as revisões das citações da lista de referências e da lista de documentos consultados.

À MSc. Mary Angélica de Azevedo Olivas, Prof^a. e Chefe do Departamento de Geomática da Universidade Federal do Paraná.

Ao Dr. Édson Aparecido Mitshita, Prof. e Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da UFPR: Camil Gemaél, Carlos Aurélio Nadal, Cláudia Pereira Krueger, François Albert Rosier, Jair Mendes Marques, José Berutti Vieira, Henrique Firkowski, Luís Danilo Damasceno Ferreira, Marcelo Carvalho dos Santos, Quintino Dalmolin, Romualdo Wandresen, Sílvia Helena Soares Schwab, Wanda Cristina Camargo de Menezes.

Ao Dr. Udo Siemens e ao Dr. Klaus Eggensperger, Professores do Curso de Língua Alemã do Departamento de Letras Estrangeiras Modernas da Universidade Federal do Paraná.

Ao Prof. Pedro Luís Faggion, Chefe do Laboratório de Aferição e Instrumentação Geodésica da Universidade Federal do Paraná, a disponibilização de pesquisas no acervo literário desse laboratório e a colaboração dos bolsistas Patrícia de Castro Pedro e Luisnei Martini.

À Sr^a. Verali Mônica Kleuser Reguilin, Secretária do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.

Aos Colegas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas com os quais no período de elaboração da tese foram refletidas a aplicabilidade, a inter- e transdisciplinaridade do tema pesquisado: Alfonso Tierra Criollo, Alex Soria Medina, Alexandre André de Oliveira Pires, Alexandre do Prado, Cláudia Constantina Saltarelli Saraiva, Elaine Cristine Barros de Souza, Elaine Nunes Jordan, Eno Darci Saatkamp, Guataçara dos Santos Júnior, Isabel Franco do Lago, João Hipólito Xavier, José Etanilao Gonzalez Briceño, Jucilei Cordini, Marcelo Costa Napoleão, Marcos Benedito Schimalski, Moisés Ferreira Costa, Niel Nascimento Teixeira, Patrício Jaime Alcota Aguirre, Rodrigo Villela Machado, Sandro Reginato Soares de Lima, Selma Regina Aranha Ribeiro, Sílvia Regina Nunes de Souza, Sílvio Jacks dos Anjos Garnés, Simone Silva e Zuleica Faria de Medeiros.

Ao Prof. Irineu Idoeta, Eng. Agrimensor e diretor técnico da empresa Base Aerofotogrametria e Projetos S. A., Wivear Benedito Herani, Técnico Agrimensor desta empresa, com os quais houve reflexões em torno de aspectos geodésicos do tema desta pesquisa.

Ao Bacharel em Direito e Advogado Arthur Oscar Krüger Passos, a indicação das mais recentes publicações sobre registro de imóveis: Provimento n. 26 da Corregedoria Geral da Justiça do Estado do Paraná, publicado no Diário Oficial da Justiça em 30-8-1999, e da obra Comentários à Lei de Registros Públicos do conceituadíssimo Jurista Wilson de Souza Campos Batalha.

Ao Dr.-Ing. Hubert Schmidt e Dr.-Ing. Wilhelm Benning, Professores do Geodätisches Institut der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, a doação de exemplar da tese do Meßunsicherheit und Vermessungstoleranz bei Ingenieurvermessungen e os artigos dela derivados e da tese do 3D-adjustment of hybrid geodetic measurements, os quais contribuíram para a fundamentação da análise de erros.

Ao Sr. Boris Alexandre César, diretor em 1996 do Departamento de Regularização Fundiária do Instituto de Terras do Estado de São Paulo, atendendo à carta-consulta, forneceu pelo OFÍCIO/ITESP/DRF N. 050/96 listas de referências bibliográficas constantes dos acervos da UNICAMP, USP e UNESP concernentes ao tema da demarcação em regularização fundiária.

Ao Sr. Antônio Garcia Leal e Sr. Antoninho Marmo Marques, Diretor e Engenheiro, respectivamente, do Departamento de Regularização Fundiária do Instituto de Terras do Estado de São Paulo, a concessão de pesquisa mediante o Processo ITESP 118/98.

Aos Profissionais das Divisões de Cadastro Rural, Assentamento e Procuradoria Regional da Superintendência Regional do Paraná do Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária, mediante o OFÍCIO/INCRA/SR(09)/N.247, o fornecimento das coordenadas geográficas elipsóidicas das extremas da Gleba Pó de Serra e de suas parcelas, localizada no município de Londrina-PR, os memoriais de caracterização de extremas da gleba e das parcelas, e as plantas da gleba e das parcelas, os quais tomam os dados reais desta tese.

Aos Profissionais da Biblioteca de Ciências e Tecnologia da UFPR: Adilson Pereira, Altair de Castro Lima, Ângela Pereira de Farias Mengatto, Cristina Pinheiro, Debora C. Ferreira Alves, Dirse Silva, Dulcinéia Gomes Dellatre Levis, Eliane Maria Stroparo, Eliany Maria Barbosa Vieira, Elvirina Macuco Montowski, Ester Barbosa Gouveia, Fernanda Maria Nodari, Giovanna Bianchi Micoski Lucas, Janaína Jéssica R. da Silva, Jennifer da Silva Arruda, José Dias da Costa, Maria Luíza Machado, Milena Dinair da Silva Martins, Onéia Dias de Souza, Otilia Kichijanoski Bento, Pedro Guilherme Iwanowski, Raquel Pinheiro Costa Jordão, Renner Ricardo da Silva, Rosa Maria de Castro, Selma Regina Ramalho Conte, Sueli Cecília Monteiro Reis e Zuleica Inês Kopytowski.

À Bibliotecária Loiri Antonia Spader da Biblioteca de Ciências Jurídicas da Universidade Federal do Paraná, a orientação na consulta dos acervos desta biblioteca assim como na Biblioteca do Congresso Nacional pela InterNet.

À Bibliotecária Helena Maria Vita e Auxiliar de Bibliotecária Mara Senna da Biblioteca do Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza (CEHPAR) da Universidade Federal do Paraná.

Aos Profissionais da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, o benefício da bolsa de estudos.

Als Vermessungskunde oder Geodäsie
(γη = Erde, δαίω = ich teile)
bezeichnet man die Lehre
von der Ausmessung der Erdoberfläche
mit ihren Veränderungen
und ihrer Darstellung
in Verzeichnissen, Karten und Plänen.

Bertold Witte e Hubert Schmidt

A exigência legal é consequência
do princípio da especialidade.

Wilson de Souza Campos Batalha

Der Bestimmtheitsgrundsatz konnte
ebenso wie das Öffentlichkeitsprinzip nur
verwirklicht werden durch ein Vermessungswerk,
das jedes einzelne Grundstück mit Nummern
oder Buschstaben bezeichnet und seinen Umfang
zuverlässig erkennen läßt,
so dass jedes Grundstück im Grundbuch
so genau
beschrieben werden kann,
dass es aufgrund der Angaben
in der Örtlichkeit aufgefunden wird.

Manfred Bengel e Franz Simmerding

Wir Menschen sind klein, sehr klein.
Wir Menschen sind differentiell klein
gegenüber Gott,
aber im Differentiellen sind wir
Menschen gottähnlich.
Und darauf bin ich stolz.

Eberhard Mittermayer

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
LISTA DE FIGURAS	xxi
LISTA DE QUADROS	xxiii
RESUMO	xxiv
ZUSAMMENFASSUNG	xxv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O TEMA: DEFINIÇÃO, DELIMITAÇÃO, IMPORTÂNCIA E JUSTIFICATIVA.....	1
1.1.1 Limites Fundiários Definidos e Realizados.....	4
1.2 MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS: SÍNTESE DA EVOLUÇÃO E ESTADO ATUAL DA QUESTÃO.....	7
1.3 MATERIAIS UTILIZADOS NA PESQUISA.....	9
1.4 OBJETIVOS.....	10
1.5 CONTRIBUIÇÕES E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA.....	14
1.5.1 Contribuições.....	14
1.5.2 Estruturação.....	14
2 FUNDAMENTOS JURÍDICOS QUE VINCULAM O LIMITE FUNDIÁRIO À LINHA GEODÉSICA	16
2.1 SÍNTESE HISTÓRICA DA TERRA NO BRASIL E SUA NATUREZA JURÍDICA.....	16
2.2 CONTEÚDO DAS AÇÕES DEMARCATÓRIA, DIVISÓRIA E DISCRIMINATÓRIA.....	17
2.2.1 Ação Demarcatória.....	17
2.2.2 Ação Divisória.....	18
2.2.3 Ação Discriminatória.....	18
2.2.3.1 Conceito.....	18
2.2.3.2 Procedimento.....	19
2.2.3.2.1 Perímetro.....	21
2.2.3.2.2 Fases.....	24
2.2.4 Tarefas dos Peritos.....	28
2.2.4.1 Tarefas do perito agrimensor.....	29
2.2.4.2 Tarefas dos peritos arbitradores.....	30
2.2.5 Estrutura do Laudo de Arbitramento e do Laudo de Demarcação.....	31
2.2.6 Memorial da Caracterização de Estremas e Memorial da Caracterização de Entes Naturais.....	31
2.3 VÍNCULO DO LIMITE FUNDIÁRIO À LINHA GEODÉSICA.....	32
2.4 NOÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE O SISTEMA BRASILEIRO DE REGISTRO PÚBLICO DE IMÓVEIS.....	35
2.4.1 Origem e Evolução do Registro da Propriedade Imobiliária no Brasil.....	36
2.4.2 Princípios do Registro da Propriedade Imobiliária.....	36
2.4.3 Livros de Registro da Propriedade Imobiliária.....	37
3 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA	39
3.1 FUNDAMENTOS DA ÁLGEBRA LINEAR.....	39
3.1.1 Escalar.....	39
3.1.2 Síntese da Álgebra Vetorial.....	39
3.1.2.1 Vetor base e componentes.....	42

3.1.2.2	Operações com vetores.....	42
3.1.2.3	Espaço Euclidiano de dimensão n	43
3.1.2.4	Produto escalar ou produto interno e produto vetorial.....	44
3.1.2.5	Vetor posição.....	45
3.1.2.6	Norma Euclidiana de vetores.....	46
3.1.2.7	Ortogonalidade e ortonormalidade de vetores.....	47
3.1.2.8	Vetores linearmente dependentes e vetores linearmente independentes	47
3.1.2.9	Base e dimensão de um espaço vetorial.....	48
3.1.3	Síntese da Álgebra Matricial.....	48
3.1.3.1	Operações com matrizes.....	49
3.1.3.2	Matriz nula.....	50
3.1.3.3	Matriz quadrada.....	51
3.1.3.4	Matriz diagonal.....	51
3.1.3.5	Matriz identidade.....	51
3.1.3.6	Transposição.....	51
3.1.3.7	Matriz simétrica.....	52
3.1.3.8	Posto de uma matriz.....	52
3.1.3.9	Determinante de uma matriz.....	52
3.1.3.10	Inversa ordinária de uma matriz.....	53
3.1.3.11	Matriz ortogonal.....	54
3.1.3.12	Problema valor próprio generalizado e problema valor próprio especial	54
3.1.3.13	Teorema da decomposição espectral.....	58
3.1.3.14	Inversa generalizada de Moore-Penrose.....	58
3.1.3.15	Formas bilinear e quadrática.....	60
3.1.3.16	Matriz positiva definida e matriz positiva semidefinida.....	61
3.1.3.17	Matriz raiz quadrada.....	61
3.1.3.18	Matriz idempotente.....	62
3.1.3.19	Matrizes de rotação.....	62
3.1.3.20	Matrizes de reflexão.....	64
3.1.3.21	Produto Kronecker.....	64
3.1.3.22	Produto Khatri-Rao.....	65
3.1.3.23	Operadores vec e vech de matrizes.....	66
3.1.3.24	Traço de matriz.....	67
3.1.4	Diferenciação com Vetores e com Matrizes.....	68
3.1.4.1	Derivada da forma bilinear $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$	69
3.1.4.2	Derivada da forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$	70
3.1.5	Maximização da Forma Quadrática.....	71
3.2	FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA.....	72
3.2.1	Sistemas de Coordenadas.....	72
3.2.1.1	Sistema de coordenadas do espaço de uma dimensão.....	73
3.2.1.2	Sistema de coordenadas do espaço de duas dimensões.....	74
3.2.1.2.1	Sistema de coordenadas paralelas oblíquas.....	74
3.2.1.2.2	Sistema de coordenadas paralelas retangulares.....	75
3.2.1.2.3	Sistema de coordenadas polares.....	77
3.2.1.3	Sistema de coordenadas do espaço de três dimensões.....	78
3.2.1.3.1	Sistema de coordenadas cartesianas.....	78
3.2.1.3.2	Sistema de coordenadas esféricas ou sistema de coordenadas polares do espaço de três dimensões.....	80

3.2.2	Transformação de Coordenadas Cartesianas.....	81
3.2.2.1	Transformação de coordenadas cartesianas do espaço de duas dimensões nas coordenadas cartesianas de outro sistema não-idêntico..	82
3.2.2.1.1	Translação.....	82
3.2.2.1.2	Rotação.....	83
3.2.2.1.3	Combinação de translação com rotação.....	84
3.2.2.2	Transformação de coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões nas coordenadas esféricas.....	85
3.2.2.3	Transformação de coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões nas coordenadas cartesianas de outro sistema não-idêntico...	86
3.2.2.3.1	Translação de eixos.....	86
3.2.2.3.2	Rotação de eixos.....	86
3.2.2.3.3	Combinação de translação com rotação de eixos.....	87
3.2.3	Descrição da Curvatura de uma Curva Plana e do Raio de Curvatura....	89
3.2.4	Descrição dos Elementos de Linha Infinitesimais.....	92
4	FUNDAMENTOS DA ESTATÍSTICA.....	94
4.1	ANÁLISE ESTATÍSTICA UNIVARIADA.....	94
4.1.1	Variável Aleatória.....	94
4.1.2	Valor Esperado ou Esperança Matemática ou Expectância da Variável Aleatória.....	95
4.1.2.1	Propriedades.....	96
4.1.3	Variância, Covariância e Coeficiente de Correlação Linear.....	96
4.1.3.1	Propriedades.....	96
4.1.4	Estatísticas.....	97
4.1.4.1	Média Amostral.....	98
4.1.4.2	Variância amostral e desvio padrão amostral.....	98
4.1.4.3	Variância e desvio padrão amostral da média amostral.....	99
4.1.5	Não-tendenciosidade dos Estimadores Média Amostral e Desvio Padrão Amostral.....	99
4.1.6	Distribuição Contínua de uma Variável Aleatória.....	100
4.1.6.1	Distribuição normal ou gaussiana.....	100
4.1.6.2	Distribuição qui-quadrado central e qui-quadrado não-central.....	102
4.1.6.3	Distribuição t de <i>Student</i> central e t de <i>Student</i> não-central.....	103
4.1.6.4	Distribuição F central e F não-central.....	104
4.1.6.5	Equivalências entre as distribuições de probabilidades.....	105
4.1.7	Inferência Estatística.....	106
4.1.7.1	Enunciação das hipóteses para o teste estatístico.....	106
4.2	ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA.....	107
4.2.1	Vetor Aleatório Multivariado.....	107
4.2.2	Esperança Matemática do Vetor Aleatório.....	107
4.2.3	Matriz Covariância do Vetor Aleatório.....	108
4.2.4	Matriz Desvio Padrão e Matriz Correlação do Vetor Aleatório.....	109
4.2.5	Variância de Combinação Linear de Variáveis Aleatórias.....	109
4.2.6	Amostra do Vetor Aleatório: Matriz de Dados Amostrais.....	110
4.2.7	Vetor Médio, Matriz Covariância, Matriz Desvio Padrão e Matriz Correlação Amostrais.....	110
4.2.8	Variáveis Aleatórias Padronizadas.....	112
4.2.9	Distribuição Normal Multivariada.....	113
4.2.9.1	Propriedade principal.....	114

4.2.10	Distância Quadrática de Mahalanobis.....	114
4.2.10.1	Distância Quadrática de Mahalanobis Amostral.....	116
4.2.11	Análise de Componentes Principais.....	118
4.2.11.1	Componentes principais populacionais.....	121
4.2.11.1.1	Propriedades.....	122
4.2.11.2	Componentes principais obtidas de variáveis aleatórias normais multivariadas.....	125
4.2.11.3	Componentes principais populacionais obtidas de variáveis aleatórias padronizadas.....	127
4.2.11.4	Componentes principais amostrais.....	128
4.2.11.4.1	Propriedades.....	128
4.2.11.4.2	Interpretação geométrica das componentes principais amostrais.....	129
4.2.11.5	Componentes principais amostrais obtidas de variáveis aleatórias normais padronizadas.....	131
5	FUNDAMENTOS DA GEODÉSIA.....	132
5.1	PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	134
5.2	PARÂMETROS DA ELIPSE MERIDIANA.....	136
5.3	SISTEMAS DE COORDENADAS.....	139
5.3.1	Sistemas de Coordenadas Naturais.....	140
5.3.1.1	Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas.....	140
5.3.1.2	Sistema de coordenadas geográficas astronômicas.....	141
5.3.1.3	Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas....	143
5.3.1.4	Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas.....	145
5.3.1.4.1	Conceitos de Linha vertical, vertical e normal do ponto P_0 do topocentro.....	146
5.3.1.4.2	Grandezas de mensuração no ponto P_0 e suas reduções.....	147
5.3.2	Sistemas de Coordenadas Elipsóidicas.....	150
5.3.2.1	Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas.....	150
5.3.2.2	Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas.....	150
5.3.2.3	Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.....	152
5.3.2.4	Sistema de coordenadas polares elipsóidicas.....	154
5.3.2.5	Sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas.....	155
5.3.3	Transformação de Coordenadas.....	155
5.3.3.1	Transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas nas coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas.....	155
5.3.3.2	Transformação das coordenadas cartesianas elipsóidicas nas coordenadas geográficas elipsóidicas.....	159
5.3.3.3	Transformação das coordenadas cartesianas elipsóidicas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas.....	159
5.3.3.4	Transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas.....	161
5.3.3.5	Transformação das coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas...	162
5.4	SUPERFÍCIE DO POLÍGONO SOBRE O ELIPSÓIDE.....	165
5.4.1	Superfície do quadrilátero infinitesimal.....	167
5.4.1.1	Cálculo da diferença angular $\Delta\omega$	177
6	ANÁLISE DA QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA.....	179
6.1	ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DAS MENSURAÇÕES.....	179

6.1.1	Organização dos Dados de Mensuração: Matriz de Dados Amostrais...	181
6.1.2	Estimativas Obtidas a partir da Matriz de Dados.....	182
6.2	ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	182
6.2.1	Medidas de Acurácia.....	185
6.2.1.1	Estimativas das medidas locais de acurácia.....	185
6.2.1.1.1	Acurácia de coordenada isolada.....	185
6.2.1.1.2	Acurácia média de coordenadas.....	186
6.2.1.1.3	Semi-eixos da elipse de erro de ponto, quantidades obtidas da curva podária e semi-eixos da elipse de confiança.....	186
6.2.1.1.4	Semi-eixos da elipse de erro relativa a dois pontos e semi-eixos da elipse de confiança.....	188
6.2.1.1.5	Acurácia de ponto.....	189
6.2.1.1.6	Acurácia de função das coordenadas obtida pela lei de propagação das covariâncias.....	189
6.2.1.1.7	Intervalo da medida de acurácia de uma função das coordenadas obtido pelo quociente Rayleigh.....	190
6.2.1.1.8	Medida de acurácia de distância.....	191
6.2.1.1.9	medida de acurácia de direção.....	191
6.2.1.2	Estimativas das medidas globais de acurácia.....	192
6.2.1.2.1	Semi-eixos do hiperelipsóide de erro e do hiperelipsóide de confiança.....	192
6.2.1.2.2	Quociente Rayleigh.....	192
6.2.1.2.3	Critérios de optimalidade.....	194
6.2.2	Medidas de Confiabilidade.....	196
6.2.2.1	Estatística para detecção de erros grosseiros.....	197
6.2.2.2	Redundância.....	197
6.2.2.3	Medida de confiabilidade interna.....	199
6.2.2.3.1	Localização de erros grosseiros nas observações.....	200
6.2.2.4	Medida de confiabilidade externa.....	200
6.2.3	Medida de Sensibilidade.....	201
7	APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS	204
7.1	INTRODUÇÃO DE PARÂMETROS GEODÉSICOS E ESTATÍSTICOS....	204
7.2	CÁLCULO DAS COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS.....	206
7.3	SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DA SUPERFÍCIE DO PRÉDIO NO ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA.....	217
8	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	229
9	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....	233
	GLOSSÁRIO.....	235
	REFERÊNCIAS.....	240
	DOCUMENTOS CONSULTADOS.....	251
	APÊNDICE 1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA E IDENTIDADES.....	264
	APÊNDICE 2 – FÓRMULAS DO TEOREMA DOS SENOS, DOS COSSENOS E DAS COTANGENTES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	267
	APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO.....	268
	APÊNDICE 4 – PROBLEMA DA CONGRUÊNCIA.....	273
	ÍNDICE REMISSIVO.....	275

LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

al.	:	alemão
art.	:	artigo
compr.	:	comprimento
ed.	:	edição
e.g.	:	lat. <i>exempli gratia</i> (por exemplo)
et al.	:	lat. <i>et alli</i> (e outros); <i>et alia</i> (e outras)
fl.	:	folha
gr.	:	grego
i.e.	:	lat. <i>id est</i> (isto é, isto quer dizer)
lat.	:	latim
lf	:	limite fundiário
máx	:	máximo
mín	:	mínimo
n.	:	número
op. cit.	:	lat. <i>opus citatum</i> (na obra citada)
p.	:	página
qu.	:	quadrante
v.	:	volume ou verso de folha de processo
v. g.	:	lat. <i>verbi gratia</i> (a saber, por exemplo)
ABNT	:	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACP	:	Análise de Componentes Principais
APA	:	Área de Proteção Ambiental
Auf.	:	al. <i>Auflage</i> (edição)
Av.	:	Averbação
BIH	:	<i>Bureau International de l'Heure</i>
CAT	:	Sistema de Coordenadas Cartesianas Astronômicas Topocêntricas
CCB	:	Código Civil Brasileiro (Lei n. 3 071, de 1º de janeiro de 1916)
CE	:	Sistema de Coordenadas Cartesianas Elipsóidicas
CET	:	Sistema de Coordenadas Cartesianas Elipsóidicas Topocêntricas
CG	:	Sistema de Coordenadas Cartesianas Geocêntricas
CIO	:	<i>Conventional International Origin for Polar Motion</i>
Comp.	:	Compilado
CPC	:	Código de Processo Civil (Lei n. 5 869, de 11 de janeiro de 1973)
CTP	:	<i>Conventional Terrestrial Pole</i>
DIN	:	al. <i>Deutsches Institut für Normung</i>
DRF	:	Departamento de Regularização Fundiária
GA	:	Sistema de Coordenadas Geográficas Astronômicas
GE	:	Sistema de Coordenadas Geográficas Elipsóidicas
GPS	:	<i>Global Positioning System</i>
Hrsg	:	al. <i>Herausgeber</i> (editor)
IBGE	:	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IERS	:	<i>International Earth Rotation Service</i>
INCRA	:	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária
ISO	:	<i>International Organization of Standardization</i>
ITC	:	Instituto de Terras do Paraná
ITESP	:	Instituto de Terras do Estado de São Paulo

NBR	:	Norma Brasileira da ABNT
Org.	:	Organizado
PAT	:	Sistema de Coordenadas Polares Astronômicas Topocêntricas
PE	:	Sistema de Coordenadas Polares Elipsóidicas
PET	:	Sistema de Coordenadas Polares Elipsóidicas Topocêntricas
Proc.	:	Processo
R.	:	Registro
RBMC	:	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
SAD	:	<i>South American Datum</i>
SFT	:	Superfície Física Terrestre
SGB	:	Sistema Geodésico Brasileiro
SIRGAS	:	Sistema de Referência Geocêntrico da América do Sul
Trad.	:	Traduzido
UTM	:	<i>Universal Transverse Mercator</i>
WGS	:	<i>World Geodetic System</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Os símbolos de matriz são marcados com letras maiúsculas e em negrito; os símbolos de vetor são marcados com letras minúsculas e em negrito. Os escalares são marcados com letras sejam maiúsculas ou minúsculas, porém sem receber negrito. A consistência notacional é difícil de ser obtida, sobretudo, quando a descrição envolve vários ramos da ciência. O leitor, portanto, atentar-se para o contexto. O símbolo λ pode ser valor próprio ou parâmetro de não-centralidade de distribuições de probabilidade ou longitude geográfica elipsóidica; o símbolo N pode ser o raio de curvatura da seção transversal meridiana do elipsóide de revolução ou o ponto cardinal norte ou a matriz das equações normais do ajustamento de observações.

1 MATEMÁTICA

1.1 SINAIS DE RELAÇÃO ENTRE QUANTIDADES

$=$:	igual a	$ $:	tal que
$\stackrel{\text{def}}{=}$:	igual por definição	$<$:	menor
$\stackrel{!}{=}$:	deve ser	\ll	:	muito menor
\neq	:	diferente, diferente de	\leq	:	menor ou igual
\sim	:	semelhante	$>$:	maior
\approx	:	aproximadamente igual	\gg	:	muito maior
\asymp	:	assimptoticamente igual	\geq	:	maior ou igual
\equiv	:	idêntico a	\triangleq	:	corresponde a
\vee	:	ou	\wedge	:	e

1.2 GRANDEZAS E UNIDADES

Grandeza	Unidade		
	nome	símbolo	definição (exata)
de dimensão 1	um	1	
ângulo plano	radiano	rad	$1 \text{ rad} = \frac{1\text{m}}{\text{m}} = 1$
	grau	°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$
	minuto	'	$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$
	segundo	"	$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$
comprimento	metro	m	<i>"le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde"</i> ¹
superfície	metro quadrado	m ²	
	are	a	$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
	hectare	ha	$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$

FONTE: ISO (1992b, p. 33-35).

NOTA: A unidade are, designada pelo símbolo a, e seu múltiplo hectare, designado pelo símbolo ha são empregados para exprimir as superfícies agrárias. No Brasil, o submúltiplo centiare, designado pelo símbolo ca, $1 \text{ ca} = 1 \text{ m}^2$, também é empregado.

1.3 ÁLGEBRA

0	:	vetor nulo
1	:	vetor somatório
-1	:	indicação da inversa ordinária ou regular de matriz (quando sobrescrito no símbolo)
+	:	indicação da inversa generalizada de Moore-Penrose (quando sobrescrito no símbolo)
\subset	:	é um subconjunto de
\cup	:	união
\cap	:	intersecção
\in	:	é um elemento de
\notin	:	não é um elemento de
$\exists x$:	existe um elemento x
\emptyset	:	conjunto vazio
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	produto interno de 2 vetores
$\ \cdot\ _2$:	norma euclidiana

¹ O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante 1/299 792 458 de segundo.

$ a $:	valor absoluto do número real a , i.e., se $a > 0$, então $ a = a$ e se $a < 0$, então $ a = -a$
$ \mathbf{x} $:	módulo do vetor \mathbf{x} ; no caso dos espaços métricos, o símbolo designa o comprimento do vetor \mathbf{x}
\rightarrow	:	tende para
$a \Rightarrow b$:	implica: se a , então b
$a \Leftrightarrow b$:	equivalente: a correto, se b
\forall	:	para todo
∞	:	infinito
\mathbf{c}_i	:	i -ésimo vetor de constantes
c_{ij}	:	i -ésima componente do j -ésimo vetor de constantes
d	:	número de valores próprios nulos
\det	:	determinante
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:	versores dos eixos coordenados do sistema de coordenadas cartesianas
k	:	posto ou característica de matriz
\mathbf{m}	:	vetor próprio normalizado (coluna da matriz modal \mathbf{M})
$n!$:	n fatorial, i.e., $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$
tr	:	traço, i.e., a soma dos elementos da diagonal da matriz quadrada
\mathbf{C}	:	matriz de constantes
\mathbf{I}	:	matriz identidade
\mathbf{H}	:	indicador de transposta hermitiana de uma matriz (quando sobrescrito no símbolo de matriz)
\mathbf{M}	:	matriz modal, i.e., matriz cujas colunas são os vetores próprios normalizados \mathbf{m}
\mathbb{N}	:	conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$
\mathbb{N}^*	:	conjunto dos números naturais sem o elemento nulo $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$
	:	conjunto dos números racionais
\mathbb{Q}	:	$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ com } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$
	:	conjunto dos números irracionais
\mathbb{Q}'	:	$\mathbb{Q}' = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q} \text{ com } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$
\mathbb{R}	:	conjunto dos números reais, o qual abrange todos os números racionais e todos os números irracionais, i.e., $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$; $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$;
\mathbb{R}^n	:	espaço vetorial euclidiano de dimensão n
\mathbf{T}	:	indicador de transposição quando sobrescrito no símbolo de vetor ou de matriz
\mathbb{Z}	:	conjunto dos números inteiros relativos $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty\}$

1.4 GEOMETRIA

$\angle(.,.)$:	ângulo formado entre dois vetores ou entre duas direções
\perp	:	perpendicular
\parallel	:	paralelo

1.5 FUNÇÕES CIRCULARES

sin	:	seno (lat.: <i>sinu</i>)	cos	:	cosseno
tan	:	tangente	cot	:	cotangente
sec	:	secante	cosec	:	cossecante
arc sin	:	arco seno	arc cos	:	arco cosseno
arc tan	:	arco tangente	arc cot	:	arco cotangente

1.6 ANÁLISE

const.	:	constante
Δ	:	diferença ou incremento, e.g., Δx
$\triangleright \dots \triangleleft$:	demonstração de uma prova
$f(), \varphi()$:	designação de uma função, e.g., $y = f(x), u = \varphi(x, y)$
d, d^n	:	diferenciação simples ou então diferenciação de n-ésima ordem
$\frac{d}{dx}, \frac{d^n}{dx^n}$:	quociente diferencial de 1ª ordem ou então quociente diferencial de n-ésima ordem
$\frac{\partial}{\partial x}$:	1ª derivada parcial
$\int_a^b f(x) dx$:	integral definida da função f entre os extremos a e b
$\lim_{x \rightarrow \infty} (.)$:	limite, quando x tende ao infinito, de $(.)$
\ln	:	logaritmo natural
$\text{sgn} (.)$:	sinal algébrico do argumento $(.)$, i.e., $\text{sgn}(x) = \frac{x}{ x }$
$\sum_{i=1}^k$:	somatório (desde $i = 1$ até k)
$\prod_{i=1}^k$:	produtório (desde $i = 1$ até k)
$[a, b]$:	intervalo fechado, i.e., $a \leq x \leq b$
$]a, b[$:	intervalo aberto, i.e., $a < x < b$

2 ESTATÍSTICA E AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS

$\hat{}$:	estimado (quando sobreposto no símbolo de variável ou de constante)
\sim	:	segue a distribuição, e.g., $x \sim \chi_v^2$, i.e., x segue a distribuição qui-quadrado com graus de liberdade igual a v
a_i	:	semi-eixos do elipsóide de dimensão p
$d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$:	distância quadrática de Mahalanobis populacional
$d^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)$:	distância quadrática de Mahalanobis amostral
cov	:	covariância
fdp	:	função densidade de probabilidade ou, alternativamente, distribuição: é a função que governa a distribuição de dados em uma experiência
l_j	:	j-ésima mensuranda geodésica
l	:	vetor de observação
\bar{l}	:	média do vetor de observação
m_i	:	i-ésimo vetor próprio associado ao i-ésimo valor próprio, obtido da matriz covariância populacional
m_{ij}	:	i-ésima componente do vetor próprio associado ao j-ésimo valor próprio
(m, λ)	:	par (vetor próprio, valor próprio)
n	:	número de observações
p	:	número de variáveis do vetor aleatório
$\rho_{\hat{y}_j, x_i}$:	coeficiente de correlação entre a j-ésima componente principal amostral e a i-ésima componente da variável original
$\rho_{\hat{y}_j, x}$:	vetor de coeficientes de correlação entre a j-ésima componente principal amostral e a i-ésima componente da variável original
$\rho_{\hat{y}_j, z_i}$:	coeficiente de correlação entre a j-ésima componente principal amostral e a i-ésima componente da variável padronizada
u	:	número de coordenadas ajustadas
v	:	resíduo
\mathbf{v}	:	vetor de resíduos
var	:	variância
$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$:	soma quadrática dos resíduos
\mathbf{x}	:	vetor aleatório p variado
\mathbf{x}^a	:	vetor de coordenada ajustadas
x_i	:	i-ésima variável do vetor aleatório p variado
x_{ij}	:	j-ésima observação da i-ésima variável do vetor aleatório p variado
\mathbf{x}°	:	vetor de coordenadas aproximadas
y_i	:	i-ésima componente principal populacional
\mathbf{y}	:	vetor das componentes principais populacionais
\hat{y}_i	:	i-ésima componente principal amostral
$\hat{\mathbf{y}}$:	vetor das componentes principais amostrais

z_i	:	variável padronizada
\mathbf{z}	:	vetor das variáveis padronizadas
\mathbf{A}	:	matriz que contém as derivadas parciais das equações de observação $y = f(x)$, sendo avaliada com o vetor dos valores aproximados y° das incógnitas
$E(\cdot)$:	operador esperança matemática
F_{v_1, v_2}	:	distribuição de probabilidade F central com v_1 graus de liberdade no numerador e v_2 graus de liberdade no denominador
$F'_{v_1, v_2}(\lambda_1)$:	distribuição de probabilidade F não-central com v_1 graus de liberdade no numerador, v_2 graus de liberdade no denominador e parâmetro de não-centralidade λ_1
H_a	:	hipótese alternativa
H_0	:	hipótese nula
\mathbf{L}	:	matriz dos dados amostrais das mensurações geodésicas
$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$:	matriz covariância do vetor de parâmetros estimados $\hat{\mathbf{x}}$
\mathbf{M}	:	matriz de vetores próprios da matriz covariância populacional
$N(0, 1)$:	distribuição normal padronizada
N_p	:	distribuição normal p variada (ou distribuição multinormal ou distribuição normal multivariada)
$N_p(\mu, \mathbf{S})$:	distribuição normal p variada com vetor médio populacional μ e matriz covariância populacional Σ
$N_p(\mathbf{0}, \Lambda)$:	distribuição normal p variada com vetor médio nulo e matriz covariância igual à matriz dos valores próprios
\mathbf{P}	:	matriz dos pesos
Pr	:	probabilidade
\mathbf{Q}_t	:	matriz dos coeficientes de peso das observações, i.e., $(\mathbf{Q}_t)^{-1} = \mathbf{P}$
$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$:	matriz dos cofatores de covariância das incógnitas \mathbf{x}
\mathbf{Q}_v	:	é a matriz de cofatores de covariância dos resíduos v_i
\mathbf{R}	:	matriz dos coeficientes de correlação
$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{z}}$:	matriz que contém os coeficientes de correlação entre as componentes principais e as variáveis padronizadas
\mathbf{S}	:	matriz covariância amostral
$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}}$:	matriz dos desvios padrões amostrais
\mathbf{X}	:	matriz de dados amostrais, i.e., amostra do vetor aleatório \mathbf{x}
α	:	nível de significância
$1 - \alpha$:	nível de confiança
$1 - \beta$:	qualidade ou poder do teste
ε	:	desvio aleatório
λ_i	:	i -ésimo valor próprio da matriz covariância populacional
$\hat{\lambda}_i$:	i -ésimo valor próprio da matriz covariância amostral

$\lambda_{\text{máx}}$:	valor próprio máximo
$\lambda_{\text{mín}}$:	valor próprio mínimo
μ	:	vetor médio populacional
μ_{ℓ_j}	:	média populacional da j-ésima variável ℓ
$\rho_{y_j x_i}$:	coeficiente de correlação entre a j-ésima componente principal populacional e a i-ésima variável original
$\hat{\sigma}_i$:	desvio padrão da i-ésima observação
σ_0^2	:	variância da observação de peso unitário
$\hat{\sigma}_0^2$:	variância estimada da unidade de peso
χ_v^2	:	distribuição de probabilidade qui-quadrado central com v graus de liberdade
$\chi_v^2(\lambda)$:	distribuição de probabilidade qui-quadrado não-central com v graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade λ
Λ	:	matriz diagonal dos valores próprios ou matriz espectral, obtida da matriz covariância populacional
$\hat{\Lambda}$:	matriz diagonal dos valores próprios ou matriz espectral, obtida da matriz covariância amostral
Λ^{-1}	:	inversa ordinária da matriz diagonal dos valores próprios, obtida da matriz covariância populacional
Σ	:	matriz covariância populacional
Σ^{-1}	:	inversa ordinária da matriz covariância populacional
Σ^+	:	inversa de Moore-Penrose ou pseudo-inversa da matriz covariância populacional
$\nabla \ell_i$:	erro grosseiro na observação ℓ_i
$\nabla_0 \ell_i$:	valor limite inferior de um erro grosseiro

3 GEODÉSIA

a	:	semi-eixo maior do elipsóide de revolução (semi-eixo equatorial)
b	:	semi-eixo menor do elipsóide de revolução (semi-eixo polar)
s	:	distância entre dois pontos na superfície do elipsóide
e^2	:	quadrado da 1ª excentricidade da elipse meridiana do elipsóide
e'^2	:	quadrado da 2ª excentricidade da elipse meridiana do elipsóide
d	:	distância entre dois pontos da superfície física terrestre
dφ	:	diferencial da latitude geográfica elipsóidica
dλ	:	diferencial da longitude geográfica elipsóidica
f	:	achatamento da elipse meridiana do elipsóide
g	:	vetor gravidade
h	:	altitude elipsóidica
i	:	deflexão ou desvio da vertical
(x, y, z)	:	terno cartesiano de coordenadas: coordenada x ou abscissa, coordenada y ou ordenada e coordenada z ou cota
A_a	:	azimute astronômico

A_g	:	azimute geodésico (definido no elipsóide)
E	:	centro do elipsóide
G	:	geocentro
H	:	altitude ortométrica
M	:	raio de curvatura da seção meridiana (al. <i>Meridiankrümmungshalbmesser</i>)
N	:	raio de curvatura da seção transversal (al. <i>Querkrümmungshalbmesser</i>)
N'	:	segmento de reta da normal compreendido entre o ponto da elipse meridiana e o semi-eixo maior, i.e., $N' = (1 - e^2)N$
NE	:	quadrante nordeste
NO	:	quadrante noroeste
P_0	:	origem dos sistemas topocêntricos
R	:	raio médio de curvatura gaussiano, i.e., $R = \sqrt{MN}$
R_{A_g}	:	raio de curvatura da seção na direção do azimute A_g
SE	:	quadrante sudeste
SFT	:	superfície física terrestre
SO	:	quadrante sudoeste
β	:	latitude reduzida
γ	:	latitude geocêntrica
δ_1	:	redução do ângulo horizontal devido ao desvio da vertical
z	:	ângulo zenital astronômico
ζ	:	ângulo zenital geodésico
η, ξ, ψ	:	componentes do desvio da vertical em longitude, em latitude e no plano horizontal, respectivamente
λ	:	longitude geográfica elipsóidica
φ	:	latitude geográfica elipsóidica
ω	:	ângulo esférico da esfera unitária de Bessel
ΔN	:	ondulação do Geóide
Λ	:	longitude geográfica astronômica
Φ	:	latitude geográfica astronômica

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	1.1 – LIMITES FUNDIÁRIOS: CONCEITO, ORIGEM, ESPÉCIES E CONSTITUIÇÃO...	6
FIGURA	1.2 – ESTREMA P_0 NA SUPERFÍCIE FÍSICA TERRESTRE.....	11
FIGURA	1.3 – REPRESENTAÇÃO DE UM LIMITE FUNDIÁRIO ENTRE OS DOMÍNIOS A E B....	12
FIGURA	2.1 – PERÍMETRO DA REGULARIZAÇÃO FUNDIÁRIA: SUAS ESTREMAS E SEUS ENTES NATURAIS.....	22
FIGURA	2.2 – CONJUNTO DE PERÍMETROS DA REGULARIZAÇÃO FUNDIÁRIA EM PARTE DA REGIÃO SUL DO ESTADO DE SÃO PAULO.....	23
FIGURA	2.3 – VÍNCULO DOS LIMITES À GEODÉSIA.....	33
FIGURA	2.4 – RELAÇÃO ENTRE CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS, DIREITO IMOBILIÁRIO E GEODÉSIA.....	34
FIGURA	2.5 – ESTRUTURA DO REGISTRO DA PROPRIEDADE IMÓVEL (LIVRO N. 2)..	38
FIGURA	3.1 – ADIÇÃO DE DOIS VETORES MOSTRANDO A LEI COMUTATIVA.....	40
FIGURA	3.2 – ADIÇÃO DE TRÊS VETORES MOSTRANDO A LEI ASSOCIATIVA.....	40
FIGURA	3.3 – SUBTRAÇÃO DE DOIS VETORES.....	41
FIGURA	3.4 – MULTIPLICAÇÃO ESCALAR DE UM VETOR.....	41
FIGURA	3.5 – COMPONENTES E COORDENADAS DE VETORES DOS ESPAÇOS DE UMA, DUAS E TRÊS DIMENSÕES.....	42
FIGURA	3.6 – PRODUTO ESCALAR DE VETORES.....	45
FIGURA	3.7 – PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES.....	45
FIGURA	3.8 – DECOMPOSIÇÃO DO VETOR POSIÇÃO r_0 DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES.....	48
FIGURA	3.9 – ESPECTRO DE MATRIZ.....	56
FIGURA	3.10 – OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO.....	63
FIGURA	3.11 – SISTEMA DE COORDENADAS PARALELAS OBLÍQUAS.....	75
FIGURA	3.12 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES.....	76
FIGURA	3.13 – ÂNGULO DE DIREÇÃO E SINAL EM SEU CÁLCULO.....	76
FIGURA	3.14 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES.....	77
FIGURA	3.15 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES POR COORDENADAS POLARES.....	77
FIGURA	3.16 – OCTANTES.....	79
FIGURA	3.17 – SISTEMA DEXTROGIRO.....	80
FIGURA	3.18 – SISTEMA LEVOGIRO.....	80
FIGURA	3.19 – SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS OU POLARES DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES.....	81
FIGURA	3.20 – TRANSLAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES.....	82
FIGURA	3.21 – COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÃO COM ROTAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES...	84
FIGURA	3.22 – TRANSLAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES.....	86
FIGURA	3.23 – ROTAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES.....	87
FIGURA	3.24 – COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÃO COM ROTAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES.....	88
FIGURA	3.25 – RAIOS DE CURVATURA DE CURVA DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES.....	90
FIGURA	3.26 – CURVA DE CURVATURA CONSTANTE.....	91
FIGURA	3.27 – SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS.....	93
FIGURA	4.1 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA.....	101
FIGURA	4.2 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE χ^2 CENTRAL.....	102

FIGURA	4.3 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE χ^2 NÃO-CENTRAL.....	103
FIGURA	4.4 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE t DE STUDENT.....	103
FIGURA	4.5 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE F CENTRAL.....	104
FIGURA	4.6 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE F NÃO-CENTRAL.....	105
FIGURA	4.7 – ERRO TIPO I, ERRO TIPO II, E QUALIDADE OU PODER DO TESTE.....	106
FIGURA	4.8 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE NORMAL BIVARIADA....	113
FIGURA	4.9 – CONTORNOS DE MESMA DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA PARA COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DISTINTOS.....	116
FIGURA	4.10 – COMPONENTES PRINCIPAIS AMOSTRAIS E ELIPSE DE DISTÂNCIA CONSTANTE.....	130
FIGURA	5.1 – ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO.....	134
FIGURA	5.2 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS.....	141
FIGURA	5.3 – SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ASTRONÔMICAS.....	142
FIGURA	5.4 – COORDENADAS GEOGRÁFICAS ASTRONÔMICAS COMO PARÂMETROS QUE FIXAM A VERTICAL NO ESPAÇO.....	143
FIGURA	5.5 – LIGAÇÃO ENTRE O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS E O SISTEMA DE COORDENADAS ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS.....	144
FIGURA	5.6 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS.....	145
FIGURA	5.7 – CONCEITO DE VERTICAL E CONCEITO DE NORMAL.....	146
FIGURA	5.8 – REDUÇÃO DE DISTÂNCIA.....	148
FIGURA	5.9 – RELAÇÃO DAS QUANTIDADES DE OBSERVAÇÃO DISTÂNCIA E ÂNGULO ZENITAL COM OS VETORES Δx , Δy e Δz	149
FIGURA	5.10 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS.....	150
FIGURA	5.11 – SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS.....	151
FIGURA	5.12 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS TOPOCÊNTRICAS.....	153
FIGURA	5.13 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS.....	154
FIGURA	5.14 – RELAÇÃO ENTRE AS COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS E AS COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS.....	161
FIGURA	5.15 – DISTINÇÃO ENTRE O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS E O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS TOPOCÊNTRICAS.....	164
FIGURA	5.16 – TRIÂNGULO ELIPSÓIDICO.....	165
FIGURA	5.17 – TRIÂNGULO ESFÉRICO.....	165
FIGURA	5.18 – QUADRILÁTERO ELIPSÓIDICO INFINITESIMAL.....	167
FIGURA	5.19 – TRIÂNGULOS ESFÉRICOS AUXILIARES SOBRE A ESFERA UNITÁRIA DE BESSEL.....	169
FIGURA	6.1 – CONCEITOS DA TEORIA CLÁSSICA DE ERROS.....	180
FIGURA	6.2 – PRECISÃO E CORREÇÃO COMO CRITÉRIOS DE ACURÁCIA.....	181
FIGURA	6.3 – MEDIDAS DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA.....	184
FIGURA	6.4 – ELIPSE DE ERRO E SUA CURVA PODÁRIA.....	187
FIGURA	6.5 – REPRESENTAÇÃO DOS VETORES PRÓPRIOS.....	195
FIGURA	6.6 – ESTATÍSTICA PARA AVALIAR AS HIPÓTESES EM SENSIBILIDADE DE REDE GEODÉSICA.....	203
FIGURA	7.1 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS E DE ENTES NATURAIS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EM PROPOSIÇÃO.....	205
FIGURA	7.2 – A GLEBA PÓ DE SERRA E O SEU PARCELAMENTO.....	208
FIGURA	7.3 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS E DE ENTES NATURAIS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: A GLEBA PÓ DE SERRA.....	225

FIGURA	7.4 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS E DE ENTES NATURAIS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: PARCELA 01.....	228
FIGURA	8.1 – MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS DA GLEBA PÓ DE SERRA ELABORADO PELO INCRA.....	230
FIGURA	8.1 – MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS DA PARCELA 01 DA GLEBA PÓ DE SERRA ELABORADO PELO INCRA.....	230
FIGURA	G1 – DERIVADA DE FUNÇÃO VETORIAL DE VARIÁVEL ESCALAR.....	235
FIGURA	A1 – TRIÂNGULO ESFÉRICO E SEUS ELEMENTOS PRINCIPAIS.....	267
FIGURA	A2 – MUDANÇA DE <i>DATUM</i> GEODÉSICO.....	268

LISTA DE QUADROS

QUADRO	1.1 – ESPECIFICAÇÃO DOS DOCUMENTOS UTILIZADOS NA PESQUISA.....	9
QUADRO	1.2 – COORDENADAS DAS ESTREMAS P_0 E P_1 DO LIMITE FUNDIÁRIO.....	12
QUADRO	1.3 – INDICAÇÃO DE LEITURA SEGUNDO OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
QUADRO	2.1 – NORMAS JURÍDICAS MAIS IMPORTANTES DAS TERRAS DEVOLUTAS.....	20
QUADRO	2.2 – SITUAÇÃO JURÍDICA DAS TERRAS CONTIDAS EM PERÍMETRO.....	23
QUADRO	2.3 – SÍNTESE SEQÜENCIAL DA 1ª E DA 2ª FASES DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA.....	25
QUADRO	2.4 – SÍNTESE SEQÜENCIAL DA 1ª E DA 2ª FASES DO PROCEDIMENTO DISCRIMINATÓRIO ADMINISTRATIVO.....	28
QUADRO	2.5 – RELAÇÃO DE IMÓVEIS INSERTOS EM PERÍMETRO.....	30
QUADRO	2.6 – ESTRUTURA DOS LAUDOS DE ARBITRAMENTO E DE DEMARCAÇÃO.....	31
QUADRO	3.1 – DESIGNAÇÃO DOS QUADRANTES E SINAIS DOS SEMI-EIXOS DO SISTEMA DE COORDENADAS PARALELAS OBLÍQUAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES.....	75
QUADRO	3.2 – DESIGNAÇÃO DOS OCTANTES E SINAIS DOS SEMI-EIXOS.....	79
QUADRO	4.1 – TESTES DE HIPÓTESES.....	107
QUADRO	5.1 – SISTEMAS DE COORDENADAS NATURAIS E VERSORES DAS DIREÇÕES DOS EIXOS COORDENADOS.....	140
QUADRO	5.2 – SISTEMAS DE COORDENADAS ELIPSÓIDICAS E VERSORES DOS EIXOS COORDENADOS.....	140
QUADRO	6.1 – CONTROLE DE OBSERVAÇÕES POR REDUNDÂNCIAS PARCIAIS.....	200
QUADRO	7.1 – INTERPRETAÇÃO DO QUADRANTE EM QUE SE SITUA O AZIMUTE...	207
QUADRO	7.2 – COORDENADAS DAS ESTREMAS DA GLEBA PÓ DE SERRA.....	209
QUADRO	7.3 – COORDENADAS DAS ESTREMAS INTERNAS.....	209
QUADRO	7.4 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS l_f DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE.....	210
QUADRO	7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS l_f DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA.....	212
QUADRO	7.6 – SUPERFÍCIE DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE.....	218
QUADRO	7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE.....	220
QUADRO	A1 – FÓRMULAS DO TEOREMA DOS SENOS, DOS COSSENOS E DAS COTANGENTES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.....	267

RESUMO

Análise de conceitos que aprimoram o modelo geodésico da caracterização de extremas no espaço geométrico mediante o emprego de coordenadas geográficas elipsóidicas e por quantidades derivadas destas coordenadas. O propósito principal é a inserção na matrícula imobiliária de quantidades geodésicas e de estimativas de qualidade que interpretem a parte do princípio da especialidade desse registro concernente à individualização do prédio mediante as mensurações geodésicas de suas extremas. Este propósito decorre de a norma jurídica não ter contemplado o desenvolvimento dos conceitos de superfícies de referência para a demarcação de pontos no terreno, assim como o desenvolvimento dos conceitos da análise de dados dos quais obtêm as medidas de acurácia, medidas de confiabilidade e medida de sensibilidade. Expõe como a caracterização de extremas vincula o Direito Imobiliário à Geodésia mediante a descrição sucinta dos procedimentos das ações demarcatória, divisória e discriminatória. Destaca a importância dos memoriais da caracterização de extremas como partes integrantes da sentença homologatória de demarcação que define os limites *de iure* entre prédios, a interpretação da realização do princípio da especialidade dependente de mensurações e a aviventação de limites fundiários. Valoriza a pesquisa metodológica que caracteriza as extremas como objeto comum de ambos os ramos da Ciência. Para este fim descreve sucintamente os fundamentos jurídicos do limite fundiário e os fundamentos da Matemática, da Estatística, da Geodésia e dos critérios para a análise de qualidade de rede geodésica, os quais são essenciais à pesquisa que objetiva a concepção de modelo da Geodésia para a caracterização de extremas no espaço geométrico. Como consequência do aprimoramento do modelo geodésico propõe o aprimoramento do memorial da caracterização de extremas destinado à matrícula imobiliária mediante a descrição dos limites fundiários por coordenadas polares elipsóidicas cujo sistema tem origem nas coordenadas geográficas elipsóidicas das extremas e pela introdução de quantidades estatísticas aprimoradoras, tais como as estimativas de qualidade das mensurações geodésicas e as estimativas dependentes do ajustamento de mensurações geodésicas pelo método dos mínimos quadrados. O azimute do limite fundiário, o perímetro e a superfície do prédio são determinados como função das coordenadas geográficas elipsóidicas. Fornece aos diferentes profissionais envolvidos nessas ações conceitos fundamentais de aprimoramento dos memoriais da caracterização de extremas, razão por que o conteúdo da pesquisa requer formas diferentes de leitura conforme a indicação na seção introdutória. Apóia-se em duas fontes de dados reais. A primeira provém de peças processuais de ações discriminatórias, dentre as quais o laudo de arbitramento, o laudo de demarcação e a homologação do laudo de demarcação. A segunda provém de parcelamento de gleba elaborado pelo Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária (INCRA), que compreendem as coordenadas geográficas elipsóidicas das extremas cujo sistema geodésico de referência é o Sistema Geodésico Brasileiro oficial e os memoriais da caracterização das extremas de gleba e de parcelas.

Palavras-chave: extremas; caracterização de extremas; coordenadas geográficas elipsóidicas; matrícula imobiliária; princípio da especialidade; memoriais da caracterização de extremas; coordenadas polares elipsóidicas; superfície do prédio.

ZUSAMMENFASSUNG

Verfeinerung der Auffassung des geodätischen Modells zur Kennzeichnung des Grenzzeichens im geometrischen Raum

Die vorliegende Dissertation befaßt sich mit der Analyse des Begriffes der Kennzeichnung des Grenzzeichens im geometrischen Raum und ihre Verfeinerung mittels elipsöidischer geographischer Koordinaten mit ihren ableitenden Größen. Der Zweck dieser Arbeit ist die Grundbucheinführung der geodätischen Größen und ihrer Qualitätskriterien, die durch geodätische Vermessungen der Grenzpunkte im Gelände den Bestimmtheitsgrundsatz erläutern können. Dieser Zweck folgt aus keiner Entwicklung, die die Rechtsgrundlagen wie das Zivilgesetzbuch und die Zivilprozeßordnung berücksichtigten, bezüglich der Begriffe des Bezugssystems und -rahmens bei dem vermarkten, sichtbaren Grenzpunkt im Gelände, sowie die Entwicklung der Begriffe der Datenanalyse, deren Genauigkeits-, Zuverlässigkeits- und Sensitivitätsmaße abgeleitet werden können. Grundstücke stehen durch die Kennzeichnung des Grenzzeichens, die mittels, z.B. *Actio finium regundorum*, *actio communi dividundo* und vor allem in der brasilianischen Gerichtssprache in der sogenannten *ação discriminatória* kurz dargestellt wird, mit der Geodäsie in unmittelbarem Zusammenhang. Die Lagebeschreibung der Kennzeichnung des Grenzzeichens im Raum ist wesentlicher Bestandteil einer Gerichtsentscheidung, weil sie die Grenze *de iure* bestimmt. Sie deutet den durchgeführten Bestimmtheitsgrundsatz und kann die Wiederherstellung der vermarkten unsichtbaren oder beschätigten Grenzpunkte ausführen. Eine ausführliche Untersuchung, die das Grenzzeichen bezeichnet, wird den Gegenstand sowohl in der gesetzlichen Grundlage als in der Geodäsie aufwerten. Dazu werden die Rechtsgrundlagen der Grenzen, die Grundlagen der Mathematik, der Statistik, der Geodäsie und die Grundlagen der Qualitätskriterien der Geodäsie dargestellt. Diese Qualitätskriterien sind sehr wichtig für die Untersuchung, die die Auffassung des geodätischen Modells zur Kennzeichnung des Grenzzeichens im geometrischen Raum findet. Dadurch erfolgt die Verfeinerung der Lagebeschreibung des Grenzzeichens durch die Einführung des verfeinerten Bestandteils der Kennzeichnung des Grenzzeichens ins Grundbuch mittels der Grenzdarstellung durch elipsöidische Polarkoordinaten, deren Ursprung des Systems mit elipsöidischen geographischen Grenzpunktkoordinaten zusammenfällt, und durch die Einführung eines statistischen verfeinerten Bestandteils wie ableitende Größen geodätischer Messungen und abhängige Größen der Ausgleichung von der Methode der kleinsten Quadrate. Das Azimut einer Richtung von einer Grenzlinie im Gelände, der Grundstückumfang und der Grundstückflächeninhalt werden als Funktion elipsöidischer geographischer Koordinaten bestimmt. Es zeigt sich, dass die Grundlagen der Verfeinerung bezüglich der in der Einführung dieser Arbeit beschriebenen Punktlagebeschreibung Forscher unterschiedlicher Fachrichtungen bedeutungsvoll sein werden. Diese Forschung stützt sich auf der zwei echte Datenquellen. Die erste Datenquelle erfaßt die gerichtlichen Aktenstücke wie Sachverständigengutachten und das Urteil der Vermarkung. Die zweite Datenquelle erfaßt die elipsöidischen geographischen Koordinaten der Parzellarvermessung und ihre Punktlagebeschreibung für das Grundbuch, die von dem *Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária* (INCRA) bearbeitet wurden.

Schlagwörter: Grenzzeichen; Kennzeichnung des Grenzzeichens; elipsöidische geographische Koordinaten; Grundbuch; Bestimmtheitsgrundsatz; Punktlagebeschreibung für das Grundbuch; elipsöidische Polarkoordinaten; Grundstückflächeninhalt.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES SOBRE O TEMA: DEFINIÇÃO, DELIMITAÇÃO, IMPORTÂNCIA E JUSTIFICATIVA

O termo **estrema** provém do latim *extrēmus* (~ a ~ um) que possui a acepção de situado no fim, de canto e de extremidade; e o verbo **estremar** significa **demarcar por meio de estrema**. Na linguagem jurídica, o termo é utilizado como sinônimo de **marco divisório**. Assim, o ponto de divisa materializado por sinal de demarcação que tem a função de marco divisório, i.e., mostrar ao detentor do domínio os limites de seu prédio, chama-se **estrema**.

Designa-se com a frase **memorial da caracterização de estrema** o documento, comumente denominado **memorial descritivo**, destinado à composição da matrícula imobiliária, no qual o agrimensor descreve o perímetro do prédio.

O adjetivo **fundiário** provém do termo sânscrito *budhnáh* que significa fundo, base, pelo termo grego $\pi\theta\mu\eta'v$ que significa fundo, cepa de uma árvore, pé de uma montanha e pelo termo latino *fundus* que significa qualquer propriedade consistindo de terras. Para os romanos, o bem por excelência era a terra; daí o termo *fundus* passou designar a propriedade imobiliária (FALCÃO, 1995, p. 52). Atribuir-se-á à palavra limite o qualificativo fundiário – para que não haja confusão com o conceito de limite de outros ramos da Ciência – se a palavra limite referir aos aspectos de definição, dimensão e identificação física do imóvel, de modo que forma a expressão **limite fundiário**, a qual doravante é denotada pelo símbolo *lf*. O termo fundiário é distinto do termo agrário, porque este é de significação muito mais ampla que aquele, pois além de abranger o que significa o termo fundiário, abrange também as formas e sistemas de uso, ocupação, exploração e meios de acesso à terra (ASSUMPÇÃO, 1996, p. 101). Com a mesma significação de *fundus*, existe o termo **prédio** (lat. *praedium*) que designa toda espécie de bens de raiz ou de bens imóveis. O adjetivo **imóvel** indica a qualidade de todos os bens que se mostram de natureza imóvel ou da forma que são considerados em lei. Neste contexto, os termos prédios, imóveis, bens imóveis, ou bens de raiz podem ser reconhecidos pela denominação de **terras**. Daqui decorre as expressões comuns: terras públicas, terras devolutas, terras particulares, terras particulares do ente público.

A origem da delimitação de prédios por **estremas** surgiu no Egito, na metade do século dezesseis antes da era cristã, onde se empregavam os monumentos de pedra (BENGEL e SIMMERDING, 2000, p. 216). Hoje o tema **estrema** com a **metodologia de sua caracterização** é importante porque se constitui em um dos suportes do Direito Imobiliário, parte da essência do **princípio da especialidade** (al. *Bestimmtheitsgrundsatz*) do registro público de imóveis concernente à individualização obrigatória de propriedade fundiária, pois a certeza dos limites físicos do prédio é dependente do conteúdo do título de domínio no qual se assentou as quantidades geodésicas e estatísticas, com as quais se caracterizaram as **estremas**; por isso a linha na superfície física terrestre (SFT) definida por **estremas** é o ente geométrico comum, enquanto objeto de definição, dos ramos da Ciência: Geodésia e Direito Imobiliário.

Nas questões de terra, e.g., ação demarcatória, ação discriminatória e ação divisória, o Direito Imobiliário mediante o agrimensor e arbitradores recorre à Geodésia, a fim de que lhe forneça as medidas da SFT, as quais se destinam a instruir processos. A função do agrimensor (lat. *ager + mensor*; *ager* ≡ gr. *αγρο΄ς*: parcela de terras marcada por limites geográficos, e *mensor*: aquele que mensura) é agrimensurar (gr. *γεοδαιτῶ*), e em norma jurídica brasileira antiga vem expressa no Decreto n. 1 318, de 30-01-1854, que regulamentou Lei n. 601, de 18-09-1850, e em norma jurídica recente vem expressa no Capítulo VIII do Livro IV do CPC.

AFONSO FRANCISCO (1999, p. 6) afirma que “... o direito imobiliário é campo em que se tem tudo a questionar e onde os conceitos necessitam ser reapreciados ...” Aqui cabe propor a contribuição da Geodésia ao **princípio da especialidade** do sistema brasileiro de registro e, por conseguinte, justifica-se a escolha do tema. A esse princípio pertencem a individualização do prédio e a determinação do espaço terrestre por ele ocupado. Trata-se do problema para o qual a solução não é exclusivamente do domínio da Ciência Jurídica, mas também da Geodésia. A formação e o desenvolvimento do processo de ação discriminatória são dependentes, em parte, da Geodésia. Há peças deste processo que são exclusivamente da Geodésia, e.g., o laudo de demarcação e o laudo de arbitramento.

Faz mister, ainda, dentro das atividades geodésicas, delimitar o problema da **caracterização de extremas**. As atividades geodésicas encontram-se classificadas, na literatura de língua alemã, sob as designações *Erdmessung*, *Landesvermessung* e *Detailvermessung* (HECK, 1995, p. 16; WITTE e SCHMIDT, 2000, p. 1). A primeira, cujos métodos clássicos são o astrogeodésico, o gravimétrico e o por satélites, trata da criação de um sistema geodésico mundial mediante um conjunto de pontos fixos descritos em um sistema de coordenadas geocêntricas; a segunda trata da criação de um conjunto de pontos fixos como portador de informações geométricas de um país (WOLF, 1983a, p. 1-2) e a terceira trata do detalhamento para as atividades específicas como as que são destinadas à execução de obras de Engenharia de construções e as que são destinadas à definição e à demarcação de limites fundiários entre dois domínios, e.g., A e B. Nesta última classificação se insere o problema da **caracterização de extremas** e dá-se-lhe a delimitação no âmbito da Geodésia.

Acrescente-se, ainda, que **aprimorar o memorial da caracterização de extremas** significa torná-lo capaz de representar, de identificar e de facilitar a aviventação dos limites do prédio, mediante o conhecimento geodésico hodierno.

A Geodésia estabelece a definição de linha da STF, mediante pontos extremos, vinculando-a aos sistemas de coordenadas, pelo cálculo das coordenadas desses pontos, enquanto que o Direito Imobiliário a define como elementos de um conjunto que constitui o perímetro de uma porção individualizada da superfície terrestre – a parcela terrestre como prédio. Este ente geométrico quando representado no elipsóide de revolução é denominado linha geodésica ou, simplesmente, geodésica, e no Direito Imobiliário é denominada linha de divisa, ou linha de limites, ou *discrímen*.

O *lf* quando em fase de definição e materialização no solo é denominado de linha demarcanda (CPC, arts. 948, 950, 956 – 958) cujas finalidades são definir limites:

- a) *de iure* ou aviventar limites apagados que distinguem duas propriedades particulares;
- b) *de iure* que provêm da divisão da propriedade comum, constituindo quinhões, quer decorrentes da sentença da ação divisória, quer da sucessão, quer da divisória extrajudicial;

- c) que separam terras particulares e terras devolutas;
- d) que separam terras devolutas das terras não-discriminadas;
- e) que separam entre si terras devolutas, segundo o bem por excelência seja ou da União ou dos Estados ou dos Municípios.

O traçado das linhas demarcadas definido pelas **estremas** no laudo de arbitramento e laudo de demarcação passam a constituir limites *de iure* segundo a sentença homologatória da demarcação. O *lf* definido e materializado no solo por **estremas** é denominado linha demarcada.

Convém, ainda, esclarecer que nem todos os *lf_s* são constituídos por linhas retas como se afirma em SANTOS (1996, p. 76), pois há aqueles que, em terras devolutas do Estado de São Paulo, são arcos de circunferência cujo centro é definido pelas coordenadas do marco de sede de distrito ou de município, segundo o que a norma jurídica estabelece.

1.1.1 Limites Fundiários Definidos e Realizados

Entende-se, segundo a espécie, por *lf_s* definidos (ou *de iure*) aqueles que constam de títulos ou atos constitutivos e aqueles que constam de títulos ou atos declaratórios. Títulos ou atos constitutivos são, por exemplo, a escritura de compra e venda e a sentença constitutiva de usucapião, e títulos ou atos declaratórios são, por exemplo, os julgados que partilharem imóveis ou os que demarcarem, as escrituras de partilha amigável ou de demarcação (BATALHA, 1999, p. 381).

Entende-se, segundo a espécie, por *lf_s* realizados (ou *de facto*) aqueles cujas **estremas** representam fisicamente no lugar determinado da SFT o conteúdo do título (limites *de iure*). Ainda segundo a espécie, os *lf_s* podem ser **artificiais** (realizados por **estremas**) e **entes naturais**. Os artificiais são constituídos por linhas cujas **estremas** são materializados por metodologia geodésica. Os entes naturais são, por suas próprias naturezas, definidores de limites. São exemplos destes entes naturais: rios, córregos, lagos, linha de festo, i.e., linha de crista ou de cumeada, divisor d'água. No caso da demarcação das **estremas** definidas em sentença da discriminação de terras devolutas são demarcados os *lf_s* que definem:

- a) o perímetro;
- b) o perímetro do distrito;
- c) as terras municipais do distrito;
- d) as terras estaduais do distrito;
- e) as terras devolutas em área municipal do distrito;
- f) as terras devolutas em áreas estadual do distrito;
- g) as terras particulares em área municipal do distrito;
- h) as terras particulares em área estadual do distrito.

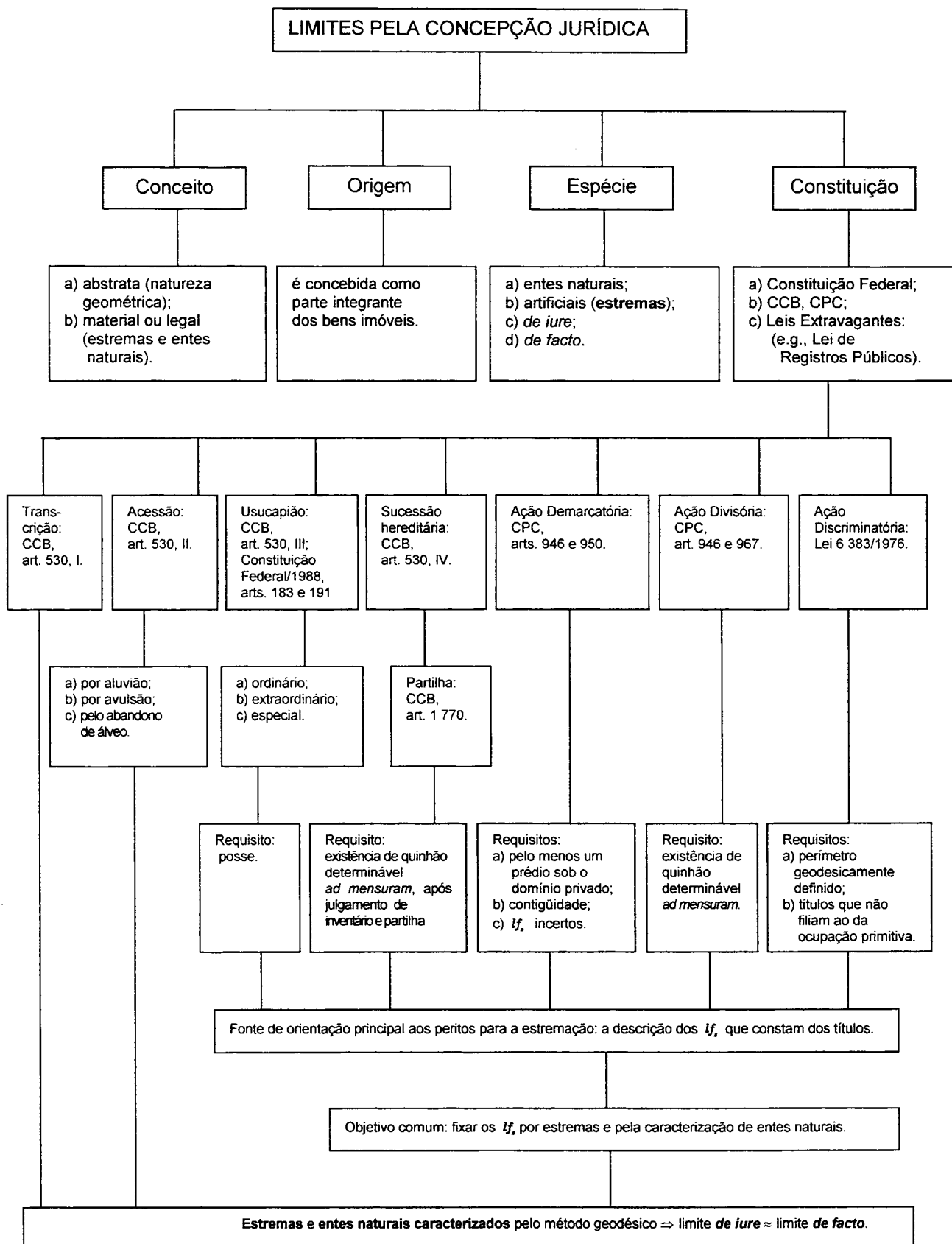
No Direito Imobiliário a ausência ou incerteza do *lf* gera o fenômeno definido como confusão de limites. Esta situação é o pressuposto para a existência de ações judiciais, dentre a quais destacam-se:

- a) ação demarcatória de terras particulares – *actio finium regundorum*;
- b) ação divisória de terras particulares – *actio communi dividundo*;
- c) ação discriminatória.

A expressão **particulares** é empregada devido à existência de terras que, sem serem devolutas, acham-se no domínio da União, dos Estados e dos Municípios e são consideradas de domínio particular do ente público; por serem particulares, estas terras estão sujeitas às ações demarcatória e divisórias (SANTOS, 1986, p. 217-218).

A figura 1.1 mostra o conceito, a origem, as espécies e a constituição dos *lf*. A acessão é forma originária de aquisição de domínio no sentido de que o acessório pertencente a uma pessoa se une à coisa principal pertencente a outra pessoa. As formas de acessão que influem nos limites de um prédio são a aluvião, a avulsão e o abandono de álveo. A aluvião são os acréscimos formados pela deposição natural de terra, os quais passarão a pertencer ao dono do imóvel por eles ampliado. A avulsão é o deslocamento por força natural e violenta, como a enchente, de uma porção de terra que se desloca de um prédio e se junta ao prédio de outra pessoa. O abandono de álveo consiste no terreno descoberto do leito de um rio, motivado pela mudança de leito ou pela extinção das águas; a propriedade de cada confinante se estenderá até a linha que divide o álveo ao meio.

FIGURA 1.1 – LIMITES FUNDIÁRIOS: CONCEITO, ORIGEM, ESPÉCIE E CONSTITUIÇÃO



1.2 MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS: SÍNTESE DA EVOLUÇÃO E ESTADO ATUAL DA QUESTÃO

Analisaram-se alguns memoriais da caracterização de **estremas** destinados ao registro imobiliário, retrocedendo àqueles destinados ao registro paroquial criado pelo Decreto n. 1 318/1854, que obrigou todos os possuidores de terras a fazerem declarações de suas posses e as levarem ao registro. Deles são destacados os elementos caracterizadores e a forma com que princípio da especialidade concernente à individualização do prédio recebeu interpretação.

Nos autos da ação discriminatória do 18º Perímetro de Apiaí há um memorial de caracterização que consta de registro paroquial e cujos *lf_s* foram caracterizados, predominantemente, por entes naturais, sem a fixação de **estremas** e tampouco a estimativa da superfície (APIAÍ. Comarca. Proc. n. 224/37, fl. 311):

... posse de terras lavradas no lugar denominado braço da pescaria cuja posse tem uma légua de comprimento com outro tanto em quadra, cujas divisas são as seguintes: para a parte de cima principia de um córrego seco, ao correr da margem faz divisa em matas virgens, em largura divide em cume de morro pertencente ao braço da mesma pescaria, a margem do rio fica dividindo com terras de (...). Iporanga, 22 de maio de 1856. Registro a fl. 93 do livro de registros da Paróquia a 29 de maio de 1856.

Nos autos da ação discriminatória do 13º Perímetro de Iguape há um memorial de caracterização advindo de escritura pública, de 26 de janeiro de 1928, transcrita no livro 3-H sob n. 4 995 do registro geral de imóveis da Comarca de Iguape. Nesse memorial os elementos caracterizadores são o nome do imóvel, a localização, o nome da pessoa cujo imóvel é confrontante, os *lf_s* que são descritos por coordenadas polares do espaço de duas dimensões (rumo e distância), e os demais *lf_s* são identificados por rios; não há informação da natureza do rumbo (se magnético ou astronômico); a superfície está quantificada em alqueires (MIRACATU. Comarca. Proc. n. 106/73-B, fls. 46, 47, 145).

Nos autos constituídos pelos laudos seguintes: de fls. 486 a 510 da Ação Discriminatória do 18º Perímetro de Apiaí, de fls. 1034 a 1186 da Ação Discriminatória do 51º Perímetro de Apiaí, de fls. 1721 a 1861 da Ação Discriminatória do 13º Perímetro de Iguape e de fls. 1106 a 1175 da Ação Discriminatória do 9º Perímetro de Iguape, na descrição dos *lf_s* são empregadas as coordenadas (E,N) do Sistema de Projeção UTM (*Universal Transverse Mercator*) e

como elipsóide de referência, o Elipsóide Internacional de Hayford. A designação do elipsóide de referência não consta dos memoriais da caracterização de **estremas** das glebas devolutas, as quais são submetidas ao registro imobiliário pela Fazenda Pública. Deste modo o requerente de certidão de uma certa matrícula de imóvel devoluto no Ofício de Registro de Imóveis terá que requerer também a certidão do conteúdo da carta de sentença para fins de registro imobiliário que foi requerida pela Fazenda Pública ou, então, requerer vistas do processo em cartório do Fórum a fim de se certificar do Laudo completo de onde se extraiu aquele memorial.

Um procedimento que deve ser evitado na elaboração do memorial da caracterização de **estremas** é a confusão da natureza das quantidades geodésicas empregadas na descrição dos lf_s . Se, e.g., a **estrema** do início da descrição é caracterizada pelas coordenadas geográficas elipsóidicas (φ, λ) , as coordenadas polares elipsóidicas há que ser de mesma natureza, i. e., distância e o azimute (ou rumo) como função das coordenadas geográficas elipsóidicas, pois cada par de coordenadas geográficas elipsóidicas é a origem do sistema polar e não – o que às vezes é praticado – ter aquela extrema em coordenadas geográficas elipsóidicas e as coordenadas polares serem as quantidades advindas do Sistema de Projeção UTM, i. e., a distância e azimute planos. Junto disto, há um outro problema: a ausência de especificar o modelo matemático que foi empregado para calcular a superfície (S), e.g., $S = f(x, y)$ ou $S = f(E, N)$ ou se $S = f(\varphi, \lambda)$.

Outro procedimento de medição, ainda usual, que gera memorial da caracterização de **estremas** para a composição da matrícula imobiliária é o que obtém as coordenadas cartesianas das **estremas** no espaço de duas dimensões. A origem do sistema cartesiano é arbitrária, e as coordenadas não recebem as estimativas de qualidade das observações geodésicas. Destas coordenadas são calculadas as coordenadas polares (distância e rumo ou azimute) desse espaço.

Como ficou exposto, o sistema de coordenadas polares é o procedimento matemático que tem sido utilizado para descrever os lf_s destinados à composição de parte da matrícula imobiliária em atenção à individualização obrigatória da propriedade fundiária que o princípio da especialidade do registro de imóveis requer. Este sistema permite recuperar o par de coordenadas de cada extrema que é elemento individualizador do prédio.

1.3 MATERIAIS UTILIZADOS NA PESQUISA

Nesta pesquisa foram utilizados os materiais constituídos por peças processuais de ações discriminatórias de três Comarcas do Estado de São Paulo e, como dados numéricos de mensurações geodésicas, os dados do levantamento da Gleba Pó de Serra para fins de parcelamento pelo INCRA. A relação destes materiais encontram-se no quadro 1.1.

QUADRO 1.1 – ESPECIFICAÇÃO DOS DOCUMENTOS UTILIZADOS NA PESQUISA

continua

DOCUMENTO	
1	DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA DO 18º PERÍMETRO DE APIAÍ - PROCESSO N. 224/41 DA COMARCA DE APIAÍ-SP: fls.do processo
	a) sentença da 1ª fase..... 172 a 192
	b) apelação..... 258 a 262
	c) acórdão..... 268 a 269
	d) memorial descritivo de imóvel apresentado ao registro paroquial em 1856..... 311
	e) requerimento para a homologação do marco primordial..... 484 a 485
	f) laudo de demarcação..... 486 a 510
	g) laudo de arbitramento..... 542 a 548
	h) manifestação do assistente técnico da Fazenda Pública do Estado sobre os laudos de arbitramento e de demarcação..... 557
2	DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA DO 51º PERÍMETRO DE APIAÍ - PROCESSO N. 48/39 DA COMARCA DE APIAÍ-SP:
	a) sentença da 1ª fase..... 621 a 632
	b) laudo de arbitramento..... 984 a 991
	c) requerimento dos arbitradores que requirem a exclusão do laudo de arbitramento imóveis julgados particulares por usucapião em data posterior ao julgamento da ação discriminatória que os julgou devolutos..... 1 007 e 1 008
	d) laudo de demarcação..... 1 034 a 1 186
	e) manifestação do assistente técnico da Fazenda Pública do Estado sobre os laudos de arbitramento e de demarcação..... 1 198 a 1 201
	f) sentença homologatória da demarcação pela Corregedoria Geral de Justiça..... 1 259 a 1 260
	g) requerimento de extração de carta de sentença pela Fazenda Pública do Estado, para fins de registro imobiliário..... 1 262
3	DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA DO 13º PERÍMETRO DE IGUAPE - PROCESSO N. 106/73-B DA COMARCA DE MIRACATU-SP:
	a) memorial descritivo de um imóvel apresentado em 1928..... 46, 48 e 145
	b) conceito de terras devolutas na petição inicial..... 125 a 126
	c) conceito de terras particulares na petição inicial..... 134
	d) sentença da 1ª fase..... 423 a 429
	e) apelação..... 434 a 440
	f) fixação do marco de sede de município..... 1 714
	g) fixação do marco de sede de distrito..... 1 715 e 1 716
	h) laudo de demarcação..... 1 721 a 1 861
	i) laudo de arbitramento..... 1 868 a 1 875

QUADRO 1.1 – ESPECIFICAÇÃO DOS DOCUMENTOS UTILIZADOS NA PESQUISA

	conclusão
j) sentença homologatória da demarcação pela Corregedoria Geral de Justiça.....	1 879 e 1 880
l) carta de sentença a favor da Fazenda do Estado de São Paulo, Fazenda Municipal de Miracatu e Fazenda de Juquiá para ser transcrita no registro de imóveis.....	1 914
m) nova carta de sentença.....	1 975
n) mandado de cancelamento de matrícula.....	1 976
o) execução do mandado.....	1 977
p) publicação do cancelamento.....	1 978
4 DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA DO 9º PERÍMETRO DE IGUAPE	
- PROCESSO N. DA COMARCA DE IGUAPE-SP:	
a) laudo de arbitramento.....	1 095 a 1 102
b) laudo de demarcação.....	1 106 a 1 175
c) requerimento de carta de adjudicação em favor da Fazenda Pública do Estado de São Paulo para fins registrários.....	1 411
d) carta de sentença a favor da Fazenda Pública do Estado de São Paulo para fins registrários.....	1 418
e) requerimento de expedição de nova carta de sentença.....	1 427
f) extrato da matrícula n. 114 266 de 10-7-1987.....	1 434
5 DO LEVANTAMENTO DA GLEBA PÓ DE SERRA EM 1998 PELO INCRA:	
a) coordenadas geográficas elipsóidicas das extremas da gleba e das parcelas	
b) memoriais de caracterização de extremas da gleba e das parcelas	
c) plantas da gleba e das parcelas.....	2 785/40

1.4 OBJETIVOS

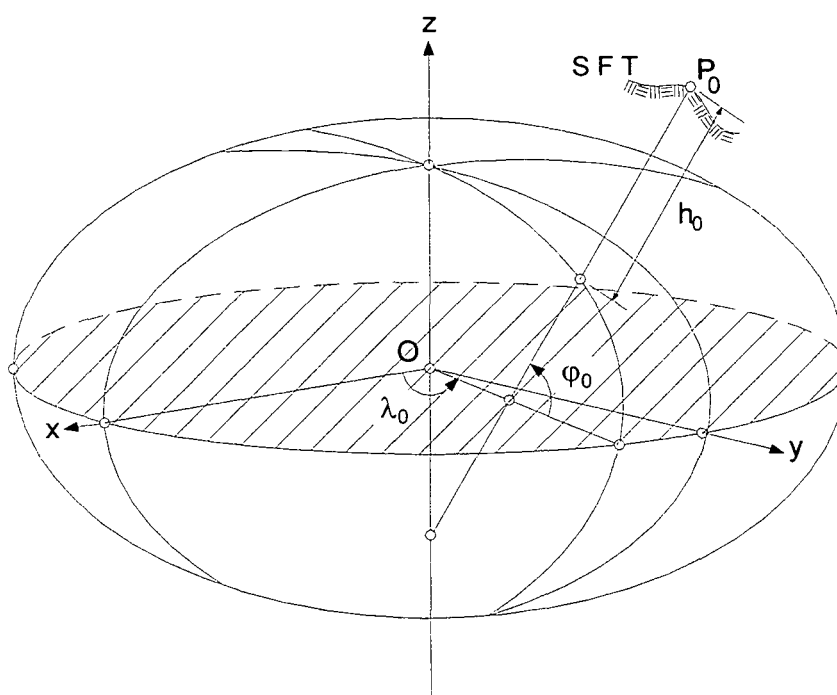
A questão principal em reflexão é: qual pode ser a contribuição do método geodésico à pesquisa científica que busca caracterizar as **estremas** que constituem os lf_s que individualizam o prédio e que o distinguem de outro, de modo que haja o aprimoramento da concepção do modelo, atualmente em prática, empregado na individualização obrigatória de propriedade fundiária, exigência que está contida no princípio da especialidade do registro imobiliário?

O problema principal que surge ao caracterizar, geodesicamente, a **estrema** é a formação do modelo consoante as quantidades geodésicas, advindas das mensurações (e.g., distância, ângulo), juntamente com estimativas obtidas da Estatística, de modo que o modelo seja capaz de fornecer as coordenadas vinculadas ao Sistema Geodésico de Referência (SGR) oficial.

O objetivo geral é aprimorar a concepção do modelo geodésico para a caracterização de **estremas** no espaço geométrico por coordenadas geográficas

elipsóidicas: latitude (φ), longitude (λ). Na Geodésia, a **estrema** P_0 (figura 1.2) é caracterizada pelo par de coordenadas geográficas elipsóidicas (φ_0, λ_0) e a altitude elipsóidica h_0 . O termo **geográficas** (gr. γεωγραφικός), *strictu sensu*, concerne à descrição da Terra, e o termo **elipsóidicas** concerne à figura elipsóide da Matemática. O uso da expressão **coordenadas geográficas elipsóidicas** está consignada na literatura geodésica, e.g., TORGE (1991, p. 45); HECK (1995, p. 191); DIN (1995, p. 24); SCHÖDLBAUER (2000, p. 3).

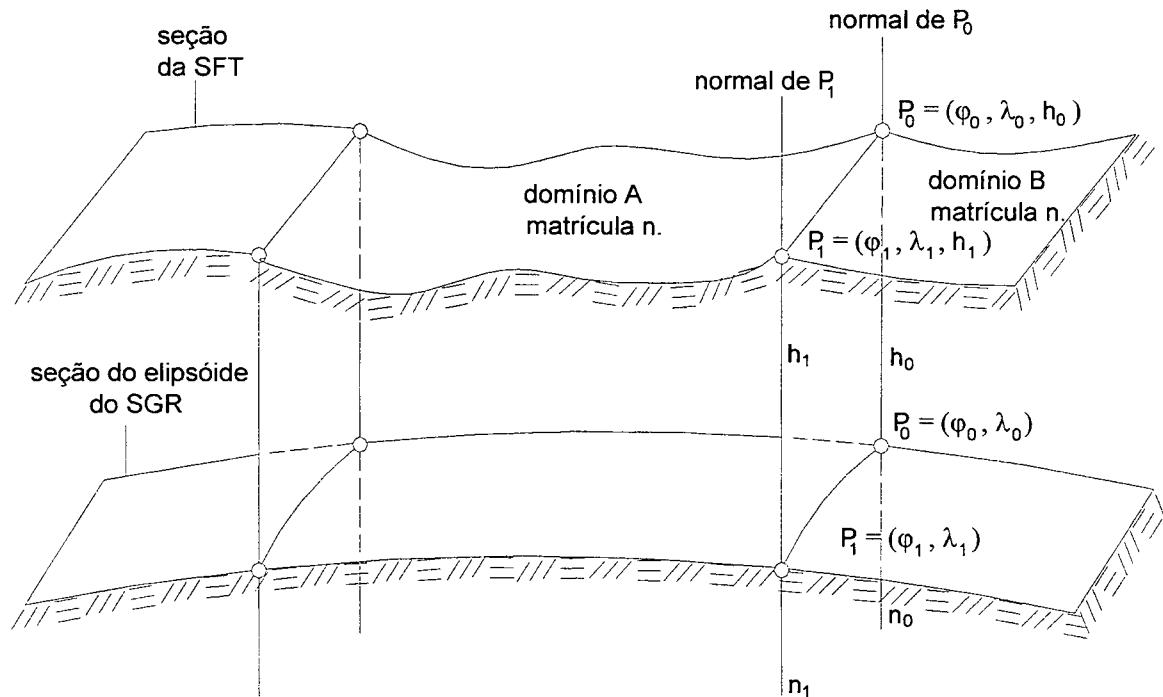
FIGURA 1.2 - ESTREMA P_0 NA SUPERFÍCIE FÍSICA TERRESTRE



Ao estabelecer um dos lf_s que distinguirá o domínio A do domínio B, exemplificado pela figura 1.3 e pelo quadro 1.2, são necessários dois pares (φ_0, λ_0) e (φ_1, λ_1) de coordenadas geográficas elipsóidicas para a caracterização do $lf \widetilde{P_0P_1}$, se tratar de geodésica.

O $lf P_0P_1$ pode ser ainda arco de círculo ou segmento de clotóide; o último concerne àqueles que separam as faixas de domínio em alguns tipos de estradas. Uma tríade de coordenadas para cada **estrema** pode ser constituída pela agregação da altitude elipsóidica.

FIGURA 1.3 - REPRESENTAÇÃO DE UM LIMITE FUNDIÁRIO DOS DOMÍNIOS A E B

QUADRO 1.2 – COORDENADAS DAS ESTREMAS P_0 E P_1 DO LIMITE FUNDIÁRIO

ESTREMA	PAR DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS	ALTITUDE ELIPSÓIDICA	TRÍADE
P_0	(φ_0, λ_0)	h_0	$\{\varphi_0, \lambda_0, h_0\}$
P_1	(φ_1, λ_1)	h_1	$\{\varphi_1, \lambda_1, h_1\}$

A fim de aprimorar o modelo geodésico para a caracterização de **estremas** no espaço geométrico em atenção ao princípio da especialidade do registro de imóveis concernente à individualização obrigatória da propriedade fundiária, serão apresentados os fundamentos metodológicos nas seções 2, 3, 4, 5 e 6 que vise os objetivos específicos de propor:

- a) a estrutura geral da matriz de dados, que consiste de n observações dispostas nas linhas e de p variáveis dispostas nas colunas (CHATFIELD e COLLINS, 1980, p. 6; MARDIA et al., 1982, p. 8; JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 6), na obtenção de dados das mensurações geodésicas, juntamente com a análise dos dados;
- b) análise de qualidade dos dados advindos do ajustamento de observações geodésicas pelo método dos mínimos quadrados, de modo que as estimativas obtidas tornem elementos integrantes da matrícula imobiliária;
- c) os conceitos de confiabilidade interna e externa de redes geodésicas;

- d) o conceito de sensibilidade de rede geodésica;
- e) o assento, na matrícula imobiliária, do nome e dos parâmetros do elipsóide de referência oficial;
- f) a descrição dos lf_s por coordenadas polares elipsóidicas para a composição de parte da matrícula imobiliária;
- g) a superfície do prédio calculada em função das coordenadas geográficas elipsóidicas.

É este, pois, o tema desta pesquisa, que é um esforço de contribuição destinado a mostrar que a **caracterização de extremas** e seu respectivo **memorial** vincula o **princípio da especialidade** do registro de imóveis concernente à individualização obrigatória da propriedade fundiária à Geodésia, a fim de que tais memoriais sejam, realmente, eficientes para a individualização e para a determinação do espaço físico ocupado pelo prédio.

Sob a linguagem da Matemática, pode-se enunciar a proposição: se duas **extremas** P_0 e P_1 são elementos definidores do lf_{01} para o princípio da especialidade do registro de imóveis, e se P_0 e P_1 são elementos da linha geodésica $\widetilde{P_0P_1}$, então existe o **memorial da caracterização de extremas** aprimorado para a matrícula imobiliária, o qual resulta da intersecção dos conteúdos do Direito Imobiliário e da Geodésia. Em síntese:

Hipótese:

$$\exists P_0, P_1 \in \left\{ \begin{array}{l} lf_{01} \text{ para interpretação do princípio da especialidade} \\ \text{do registro de imóveis concernente à individualização} \\ \text{obrigatória da propriedade fundiária.} \end{array} \right\}; \exists P_0, P_1 \in \left\{ \begin{array}{l} \text{linha geodésica} \\ \widetilde{P_0P_1}. \end{array} \right\}$$

Tese:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{o aprimoramento da concepção do modelo} \\ \text{geodésico para a caracterização de extremas} \\ \text{no espaço geométrico, de modo que resulte} \\ lf \text{ de iure} \approx lf \text{ de facto.} \end{array} \right\} \stackrel{!}{=} \{ \text{Direito Imobiliário} \} \cap \{ \text{Geodésia} \}.$$

1.5 CONTRIBUIÇÕES E ESTRUTURAÇÃO DA PESQUISA

1.5.1 Contribuições

Os conteúdos dos objetivos específicos, minuciosamente tratados, conduzem ao Direito Imobiliário quatro contribuições importantes:

- a) o tratamento geodésico do prédio como ente do espaço geométrico: contribuição à metodologia de cálculo aplicados aos dados das mensurações geodésicas a fim de que resulte a caracterização unívoca das **estremas** por coordenadas geográficas elipsóidicas referenciadas ao Sistema Geodésico Brasileiro;
- b) a incorporação de estimativas de qualidade das mensurações geodésicas na descrição das **estremas** que compõem a matrícula imobiliária;
- c) o aprimoramento do conteúdo do laudo de demarcação pela descrição das **estremas**, vinculando-as ao SGB, e a superfície de gleba (ou então de parcela) definida pelas **estremas** no SGB;
- d) a contribuição metodológica aos procedimentos de interpretação do princípio da especialidade do registro de imóveis concernente à individualização obrigatória da propriedade fundiária.

O princípio da especialidade do registro de imóveis abrange a individualização obrigatória do imóvel, para a qual os dados geográficos são requisitos, a fim de determinar o espaço terrestre por ele ocupado (CARVALHO, 1997, p. 203).

1.5.2 Estruturação

O trabalho está dividido em nove seções. Na 2ª seção são expostas as sínteses dos conceitos contidos no Direito Imobiliário que trata o *lf* sob os aspectos da definição geodésica e da definição estatística, e as noções básicas do sistema brasileiro de registro da propriedade imobiliária. Na 3ª seção estão reunidos os teoremas e definições mais importantes da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, os quais são imprescindíveis para o entendimento e o desenvolvimento desta pesquisa.

As grandezas que são mensuradas a partir das quais resultarão as coordenadas das **estremas** são variáveis aleatórias e, por isso, os teoremas e definições mais importantes da Estatística são reunidas na 4ª seção.

Não é suficiente efetuar mensurações que resultam a **caracterização de extremas** que definirão os lf_s cujas coordenadas sejam referenciadas a sistema arbitrário de coordenadas, porque dificultará a aviventação que é um dos pressupostos da norma jurídica da demarcação. Faz-se necessário que tais coordenadas sejam referenciadas ao SGR oficial. Em decorrência disto, há que se elaborar o detalhamento e a aplicação dos conceitos insertos na geometria do elipsóide, o procedimento matemático de cálculo de área de polígonos na superfície do elipsóide e os sistemas de coordenadas para as mensurações terrestres expostos na 5ª seção.

Em virtude de os **memoriais da caracterização de extremas**, na atualidade, não contemplarem critérios para a análise de qualidade das mensurações geodésicas antes do ajustamento e das estimativas obtidas após o ajustamento pelo princípio do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), a 6ª seção trata desses critérios que compreendem as medidas de acurácia, as de confiabilidade e as de sensibilidade. Na 7ª seção expõe-se o **aprimoramento de memorial da caracterização de extremas** e a estrutura proposta da matrícula destinada a conter o aprimoramento. Na 8ª seção elabora-se a análise dos resultados, e na 9ª seção elaboram-se a conclusão e as recomendações.

No tema desta pesquisa, pode-se indicar a leitura segundo objetivos específicos conforme o quadro 1.3.

QUADRO 1.3 – INDICAÇÃO DE LEITURA SEGUNDO OBJETIVOS ESPECÍFICOS

OBJETIVO ESPECÍFICO	SEÇÃO
a) Estremas.....	1, 2 e 7
b) Preparação e composição do memorial da caracterização de extremas..	7
c) Sistemas de coordenadas aplicáveis à caracterização de extremas.....	5.3
d) Transformações de coordenadas.....	3 e 5.3.3
e) Mudança de <i>Datum</i> geodésico (dedução das fórmulas Molodenskii).....	Apêndice 3
f) Estimativas de qualidade.....	4 e 6
g) Superfície do prédio sobre o elipsóide de referência.....	5.4 e 7.3; quadro 7.6
h) Problema da congruência.....	Apêndice 4

2 FUNDAMENTOS JURÍDICOS QUE VINCULAM O LIMITE FUNDIÁRIO À LINHA GEODÉSICA

O *lf*, quer natural quer artificial, é a linha que no terreno separa um prédio de outros que o circundam a fim de que seja possível o exercício pleno e regular do domínio imobiliário. O exercício pleno e regular desse domínio requer a certeza dos limites do prédio. A certeza, por sua vez, deve ser garantida por metodologia capaz de definir, de fixar e de permitir a aviventação em qualquer tempo. Por isso, diz-se que a **caracterização de estremas vincula o limite fundiário à linha geodésica.**

2.1 SÍNTESE HISTÓRICA DA TERRA NO BRASIL E SUA NATUREZA JURÍDICA

Como consequência da ocupação estatal primitiva do território brasileiro ter sido da Coroa Portuguesa e com a Independência do Brasil, as terras terem passado para o Império Brasileiro, há o entendimento jurídico que a origem das terras brasileiras é pública. No transcurso da ocupação, os particulares apossaram terras por vontade própria ou por concessão do Poder Público, e.g., as concessões de sesmaria e as de data. A Lei n. 601/1850 e seu Regulamento (Decreto n. 1 318/1854) disciplinaram a forma de legitimação de posses pelos particulares, separando do domínio público todas as posses que fossem levadas ao livro da Paróquia Católica (registro paroquial, segundo o arts. 91-108 desse Regulamento).

As terras que não foram legitimadas são consideradas devolutas e como tais não se acham transcritas, sendo o seu título de origem apenas a ocupação primitiva do território. Essas terras que não foram assim legitimadas são, na atualidade, objeto de regularização de domínio pela União e pelos Estados; por isso, diz-se, genericamente, **regularização fundiária**. Tanto a União quanto os Estados têm ação, com procedimento próprio, para discriminar suas terras devolutas, segundo os art. 1º e 27 da Lei n. 6 383, de 7-12-1976, e as leis estaduais respectivas. Os Municípios não a têm. Este procedimento chama-se **ação discriminatória**.

Para fins de regularização fundiária as terras estão classificadas em terras públicas, terras particulares e terras não-discriminadas.

As sesmarias concedidas pelo rei português visava a colonização das terras e o descumprimento desse objetivo obrigava a transferência para outros e, se isso não ocorresse, a sesmaria reintegrava-se, como terra devoluta, ao patrimônio real. A Resolução n. 72 de 17 de julho de 1822 determinou:

- a) a suspensão de qualquer concessão de sesmarias;
- b) o reconhecimento da posse de terras públicas por particular;
- c) a constituição de assembléia para a elaboração de lei de terras.

2.2 CONTEÚDO DAS AÇÕES DEMARCATÓRIA, DIVISÓRIA E DISCRIMINATÓRIA

2.2.1 Ação Demarcatória

A demarcatória pressupõe a incerteza da posição das **estremas** que constituem os *lf_s* entre dois prédios, em que pelo menos um seja de domínio privado, e a contigüidade dos prédios. O objetivo da demarcatória é eliminar essa incerteza que resulta, ou do desaparecimento das **estremas**, ou da dificuldade de interpretação dos conteúdos dos títulos de domínio. A eliminação da incerteza requer a definição e a materialização de cada **estrema** certa, de modo que permita ao detentor do domínio saber, com precisão, o conjunto de todas as **estremas** que compõem os *lf_s*, dentro dos quais o seu prédio está individualizado e determinado como porção da SFT. A causa que origina a incerteza não é objeto desta ação.

Diz-se que a demarcatória será total se a incerteza recair sobre todas as **estremas** que singularizam o prédio, e diz-se que a ação demarcatória será parcial se a incerteza recair em pelo menos uma delas.

Há duas fases distintas nesta ação: a primeira que vai até o julgamento da pretensão de demarcar (CPC, art. 958) e a segunda – fase executória – termina com a homologação dos trabalhos materiais da demarcação (CPC, art. 966; SANTOS, 1996, p. 71). Na primeira fase, resolvem-se os problemas em torno da linha demarcanda e, na segunda fase, procede-se à assinalação no solo com marcos.

2.2.2 Ação Divisória

A ação divisória “destina-se a repartir a propriedade entre os condôminos ou comproprietários, atribuindo-lhes parte certa e determinada no imóvel e pondo fim ao condomínio” (MEIRELLES, 1996, p. 271).

Tal como a demarcatória, a divisória é procedimento de duas fases: na primeira, decide-se sobre a pretensão de dividir e na segunda, executam os trabalhos divisórios (SANTOS, 1996, p. 80). A segunda fase do procedimento divisório contém os seguintes atos fundamentais (THEODORO JÚNIOR, 1999, p. 398):

- a) exame e classificação dos títulos dos condôminos, bem como solução de pedidos sobre a constituição de quinhões (CPC, art. 970);
- b) medição do imóvel (CPC, arts. 969 e 972);
- c) classificação e avaliação das terras (CPC, arts. 976 e 977);
- d) plano de divisão (CPC, art. 978);
- e) demarcação dos quinhões pelo Agrimensor e autenticação pelos Arbitradores (CPC, art. 980);
- f) homologação da divisão por sentença (CPC, art. 980).

O parágrafo único do art. 971 do CPC determina que, depois de solucionadas as questões de títulos e quinhões, o juiz ordenará a divisão geodésica do imóvel.

A rigor, a expressão divisão geodésica requer, antes de tudo, a existência das coordenadas geográficas elipsóidicas.

2.2.3 Ação Discriminatória

2.2.3.1 Conceito

A **ação discriminatória** – nome dado à demarcação de terras patrimoniais públicas – destina-se a **estremar** as terras devolutas das terras particulares. Sucintamente diz-se que terras devolutas são as que não estão no domínio dos particulares, nem pertencem ao patrimônio particular da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios. Em princípio são as que não estão transcritas no Registro de Imóveis. Como houve legitimação pela Lei n. 601/1850, há terras que

não são devolutas, apesar de não-transcritas. As terras devolutas não estão sujeitas ao procedimento divisório. Uma forma de o ocupante de imóvel em terras devolutas adquirir o domínio é a legitimação de posses que é um ato administrativo da Fazenda Pública do Estado e se efetua pela transferência de domínio cujo instrumento chama-se título de domínio e, por consequência deste ato, abre-se matrícula para este imóvel e a exclusão na matrícula em que se assentou as terras devolutas. Outra forma é a usucapião que poderá ser constituída administrativamente (SANTOS, 1996, p. 69).

2.2.3.2 Procedimento

Na linguagem jurídica, o termo procedimento designa o modo de o processo se formar e se desenvolver (SANTOS, 1996, p. 1). O procedimento para a demarcação de terras devolutas fundamenta-se nos arts. 956 a 966 do CPC, na Lei n. 6 383/1976, que dispõe sobre o processo discriminatório administrativo e judicial de terras da União, e em normas jurídicas estaduais (ver quadro 2.1).

O art. 23 da Lei n. 6 383/1976 determina que “o processo discriminatório judicial tem caráter preferencial e prejudicial em relação às ações em andamento, referente a domínio ou posse de imóveis situados, no todo ou em parte, na área discriminada...”

No quadro 2.1 estão reunidos algumas das mais importantes normas jurídicas da União e dos Estados, os quais foram criados para a definição e a regulamentação das atividades no âmbito das terras devolutas.

QUADRO 2.1 – NORMAS JURÍDICAS MAIS IMPORTANTES DAS TERRAS DEVOLUTAS

continua

		LEI	DECRETO-LEI	DECRETO	ATO	DATA	
Império		601				18-9-1850	
				1 318		30-1-1854	
				451B		31-5-1890	
União	Constituição					24-2-1891	
				10 105		5-3-1913	
				22 785		31-05-1933	
		9 760				5-9-1946	
		1 167				1-4-1971	
		6 383				7-12-1976	
ESTADOS	Alagoas		3 212			15-10-1946	
	Amazonas	112				28-12-1956	
	Bahia		633			5-11-1945	
	Ceará	1 676				20-3-1946	
	Espírito Santo	617				31-12-1951	
		1 711				18-2-1929	
	Goiás	1 448				12-12-1956	
	Maranhão			385-A		30-7-1946	
	Mato Grosso		550				20-12-1949
			461				10-12-1956
	Minas Gerais		173				04-9-1896
			263				21-8-1899
			269				25-8-1899
			378				11-8-1904
			455				11-9-1907
						2 860	3-12-1909
						4 496	5-1-1916
			675				12-9-1916
			5 012				19-6-1918
						6 019	4-7-1924
			988				20-9-1927
						8 201	31-1-1928
			1 023				20-9-1928
			1 144				5-9-1920
			155				12-9-1930
			1 171				7-10-1930
			9				1-11-1935
						500	27-2-1936
			214				14-11-1936
			171				20-11-1936
				1 775		1-7-1946	
		550				20-12-1949	
		9 681				12-10-1988	
Pará				1 044		19-8-1933	
Paraíba	Constituição					11-6-1947	
	68					20-12-1892	
Paraná				1		8-4-1892	
					35	28-4-1933	
				3 060		26-10-1951	
				7 700		18-11-1952	
		7 055				4-12-1978	
			6 414			4-12-1978	

QUADRO 2.1 – NORMAS JURÍDICAS MAIS IMPORTANTES DAS TERRAS DEVOLUTAS

		conclusão					
		LEI	DECRETO-LEI	DECRETO	ATO	DATA	
E S T A D O S		7 264				10-12-1979	
		8 249				13-1-1986	
	Pernambuco			93		29-12-1949	
	Piauí			1 298		22-8-1931	
	Rio Grande do Norte			351		1-12-1937	
	Rio Grande do Sul			7 677		9-1-1939	
		3 107				8-1-1957	
	Rio de Janeiro			2 666		28-10-1931	
	Santa Catarina			346		11-6-1934	
	Sergipe			904		1-8-1925	
	São Paulo		323				22-6-1895
			545				2-8-1898
			655				23-8-1899
					734		5-1-1900
					5 133		23-7-1931
					6 734		30-5-1934
			14 916			6-8-1945	
			Complementar n. 9			31-12-1969	
			28 389		17-5-1988		

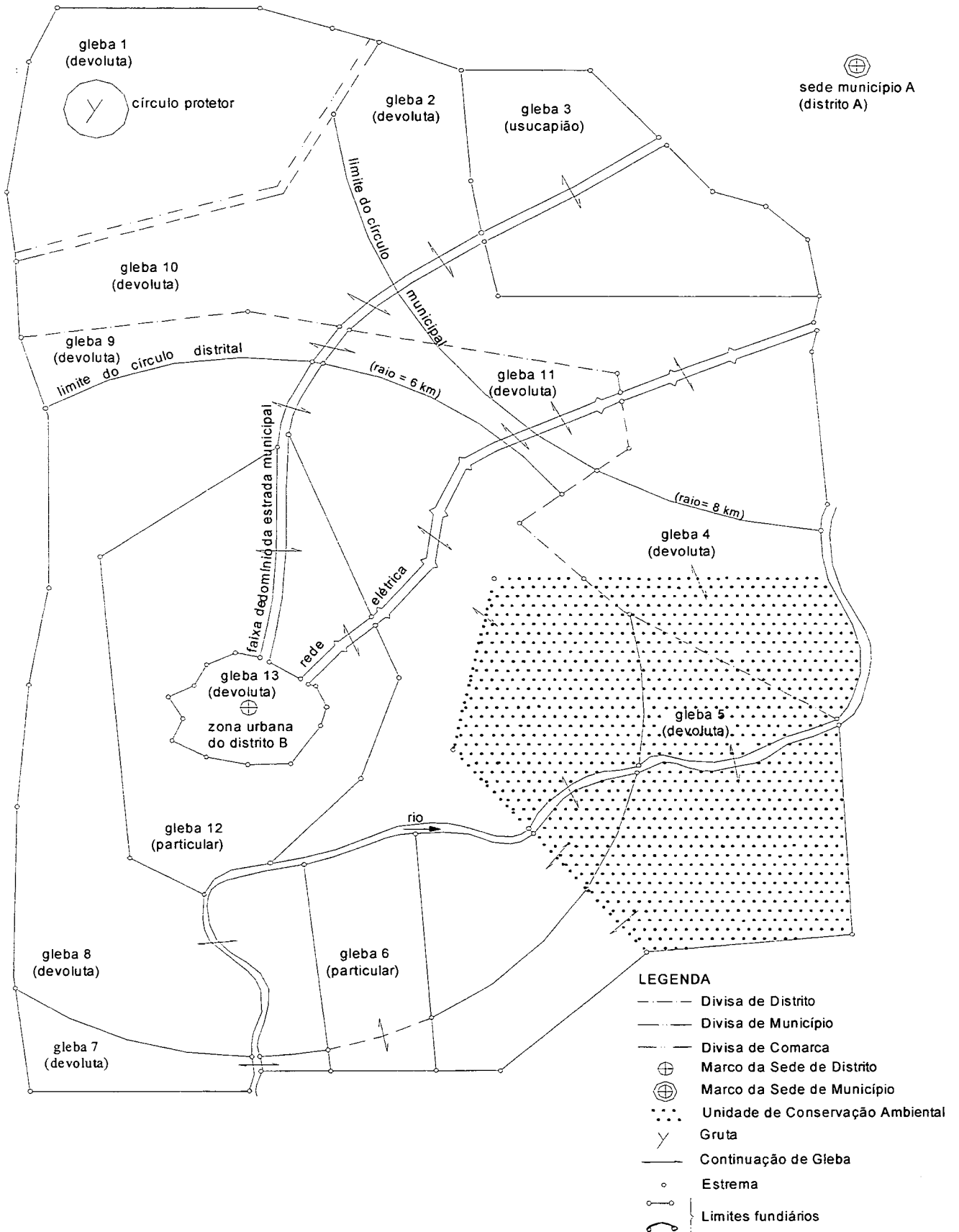
FONTES: FALCÃO (1995); GUGLIELMI (1996) e ITC (1979).

2.2.3.2.1 Perímetro

Os arts. 3 e 20 da Lei n. 6 383/1976 estabelecem que os processos discriminatórios requerem a existência de perímetro, o qual pode ser esboçado nas Cartas do Mapeamento Sistemático de Base. O perímetro é a linha que delimita uma superfície do Estado, na qual estão um conjunto de imóveis (figura 2.1). No Estado de São Paulo, esta prática vem sendo utilizada desde as primeiras décadas do século XX.

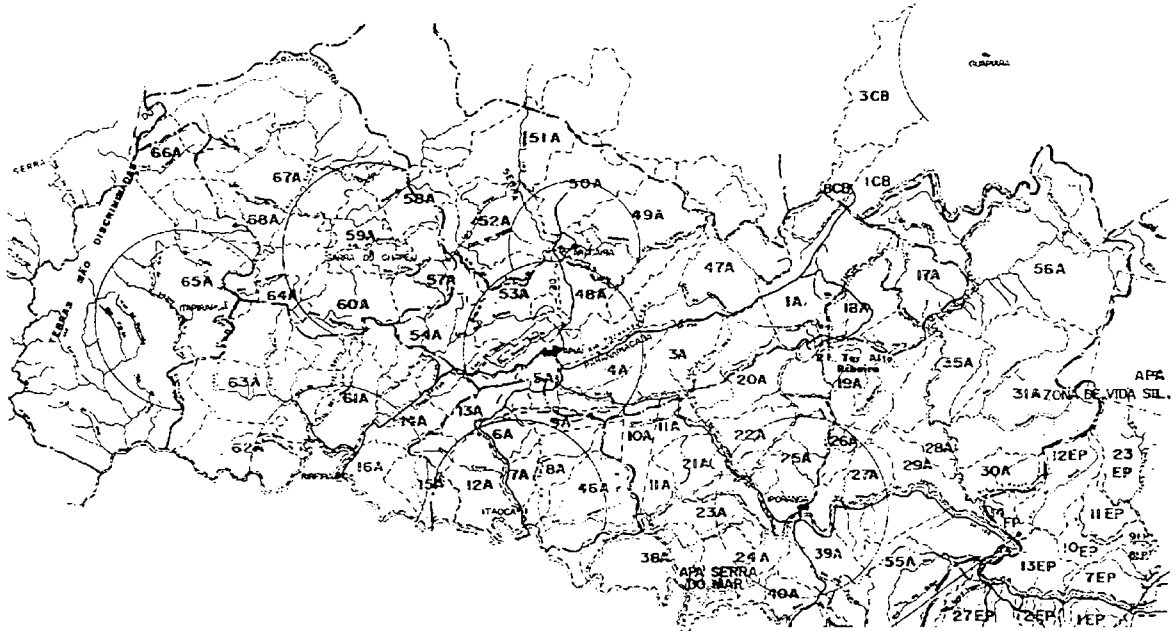
Alguns Estados fizeram doações de terras devolutas de seus domínios a Municípios (SANTOS, 1996, p. 171). O Estado de São Paulo doa terras devolutas de seu domínio pelo disposto no art. 60 da Lei Orgânica dos Municípios (Decreto-Lei Complementar n. 9, de 31-12-1969), segundo o qual pertencem ao patrimônio municipal as terras devolutas contidas no círculo cujas coordenadas de seu centro são as do marco de sede do Município e raio de 8 km e as terras devolutas contidas no círculo cujas coordenadas de seu centro são as do marco de sede do Distrito e raio de 6 km (figura 2.1). Estes marcos de sede são instituídos por decreto ou lei municipal. A legitimação de posses em terras devolutas de domínio do Município é efetuada pelo Município, sendo o instrumento de transferência o título de domínio.

FIGURA 2.1 – PERÍMETRO DA REGULARIZAÇÃO FUNDIÁRIA: SUAS ESTREMAS E SEUS ENTES NATURAIS



A figura 2.2 mostra um conjunto de perímetros da regularização fundiária em parte da região sul do Estado de São Paulo para fins de discriminação de terras. O trabalho geodésico consiste em identificar as linhas que individualizam o perímetro e as linhas que individualizam os imóveis.

FIGURA 2.2 – CONJUNTO DE PERÍMETROS DA REGULARIZAÇÃO FUNDIÁRIA EM PARTE DA REGIÃO SUL DO ESTADO DE SÃO PAULO



FONTE: ITESP(1991).
 NOTA : Extrato de parte do original sob redução.

Cada um destes perímetros possui uma situação jurídica quanto à ação discriminatória e, se esta encerrada, passa-se a falar da destinação das terras devolutas que pode ser a legitimação de posses (quadro 2.2).

QUADRO 2.2 – SITUAÇÃO JURÍDICA DAS TERRAS CONTIDAS EM PERÍMETRO

AÇÃO DISCRIMINATÓRIA	LEGITIMAÇÃO DE POSSES
Ação discriminatória não iniciada	Legitimação de posses a iniciar
Ação discriminatória em que houve desistência	Trabalhos em andamento
Ação discriminatória em que houve improcedência	Títulos expedidos parcialmente
1ª fase da ação discriminatória	Legitimação concluída
2ª fase da ação discriminatória (demarcação) <ul style="list-style-type: none"> • demarcação em andamento • demarcação pendente de homologação • demarcação encerrada 	

FONTE: ITESP(1991).

A prática de aproveitar os acidentes naturais não leva em conta os limites dos imóveis, os limites distritais, os limites municipais e os limites de comarca.

Como consequência o perímetro pode estar contido em mais de um distrito ou mais de um Município e mesmo em mais de uma comarca. Um imóvel pode estar seccionado pelo perímetro e por essas linhas de limites.

2.2.3.2.2 Fases

Duas fases compõem esta ação. A 1ª fase consiste na propositura da ação discriminatória e a 2ª fase, também chamada fase executória, consiste na demarcação das extremas que constituem os lf_s , se a ação for procedente, em que perícias são requeridas. Antes da sentença da 1ª fase do procedimento demarcatório, o agrimensor realiza as operações geodésicas a fim de caracterizar a linha de limites e as variações de interpretação, se houver, de modo a produzir a fonte de informação para o juízo, visando a definição da linha por sentença; na 2ª fase do procedimento, a linha de limites é assinalada no terreno, e haverá outra sentença de natureza homologatória (THEODORO JÚNIOR, 1999, p. 267-276).

É a primeira fase do procedimento discriminatório, que compreende um levantamento expedito de campo quanto às informações cartográficas associado a um levantamento documental cuidadoso dos ocupantes e dos imóveis. Em síntese, estes trabalhos podem ser listados da seguinte maneira²:

- a) perícia extrajudicial no perímetro;
- b) pesquisa e aquisição de informações cartográficas;
- c) preparação das fotografias aéreas;
- d) identificação, reambulação e levantamento expedito dos lf_s dos imóveis rurais e urbanos inseridos no perímetro, elaboração de laudos de identificação fundiária ou boletim de informação cadastral e coleta de cópia de documentos pessoais e dos imóveis;
- e) apresentação de *overlay* das fotografias aéreas trabalhadas ou de mapa em escala adequada (usualmente 1:10 000), rol de ocupantes, numeração dos imóveis e área aproximada;
- f) pesquisa no Ofício de Registro de Imóveis da Comarca a fim de coletar dados visando a elaboração da filiação de cada imóvel.

² Pormenores destes procedimentos podem ser consultados em ITESP (1998a) e em ITESP (1998b).

No quadro 2.3 acham-se ordenados os principais atos de cada uma das fases.

QUADRO 2.3 – SÍNTESE SEQÜENCIAL DA 1ª E DA 2ª FASES DA AÇÃO DISCRIMINATÓRIA

1ª FASE (PROPOSITURA DA AÇÃO)	2ª FASE (EXECUTÓRIA)
<p>a) identificação aproximada do perímetro e dos limites dos imóveis nas cartas disponíveis na escala 1:10.000 ou, no caso contrário, nas fotografias aéreas, nesta escala, com a reambulação;</p> <p>b) memorial descritivo do perímetro (Lei n. 6 383/1976) a ser constituído;</p> <p>c) obtenção de cópias dos títulos dos imóveis identificados;</p> <p>d) petição inicial – instruída pelo conteúdo dos itens a, b, e c – pelo representante legal do Estado;</p> <p>e) juízo (de 1º grau): análise de documentos;</p> <p>f) requerido: contestação;</p> <p>g) juízo (de 1º grau): sentença declaratória de procedência ou de improcedência da ação discriminatória (CPC, art. 958);</p> <p>h) requerido: recurso;</p> <p>i) juízo (de 1º grau): recurso de ofício;</p> <p>j) juízo (de 2º grau): acórdão (também chamado aresto).</p>	<p>a) juízo (de 1º grau): nomeação de peritos, consistindo de 1 agrimensor e de 2 arbitradores (CPC, art. 956);</p> <p>b) tarefa dos peritos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • identificar os limites dos imóveis particulares; • fixar o marco primordial (CPC, art. 963) e das demais estremas nos vértices (CPC, arts. 959 e 963); • elaborar o laudo de arbitramento (CPC, art. 957) pelos arbitradores e do laudo de demarcação (CPC, art. 957 § único) pelo agrimensor; • protocolar esses laudos; <p>c) juízo (de 1º grau): prazo para a manifestação dos requeridos;</p> <p>d) juízo (de 1º grau): lavratura do auto de demarcação (CPC, art. 965) e sentença homologatória da demarcação (CPC, art. 966).</p>

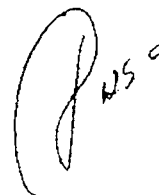
O auto de demarcação é o termo processual que encerra os trabalhos de campo para o agrimensor e para os arbitradores, quando transcorrido o prazo de 10 dias se não houver nenhuma reclamação sobre o laudo do arbitrador ou após rejeitadas todas as reclamações, ou ainda, após as correções terem sido feitas em atendimento às reclamações das partes (THEODORO JÚNIOR, 1999, p. 312). A lavratura do auto de demarcação que é assinado pelo juiz, agrimensor e arbitradores tem por finalidade o preparo da sentença homologatória da demarcação (SANTOS, 1996, p. 77). A sentença homologatória da demarcação é de jurisdição contenciosa e tem natureza declaratória, pois afirma, conforme o determinado, que a linha demarcatória foi implantada por suas **estremas** e que as linhas naturais foram identificadas e caracterizadas. A execução da sentença que outorga a imissão na posse dos titulares do domínio nos seus quinhões respectivos, se neles não estiverem, é consequência dos limites fundiários estabelecidos. A demarcação deverá ser registrada no Registro de Imóveis (Lei n. 6 015/1973, art. 167, I, 23). A matrícula, no entanto, só será conseguida após a sentença transitar em julgado (SANTOS, 1996, p. 176). Veja nas duas páginas seguintes um exemplo de sentença homologatória de demarcação:

CORREGEDORIA GERAL DA JUSTIÇA

1

PROCESSO 48/39

COMARCA DE APIAÍ



VISTOS, ETC.

DECIDO COM BASE NO ARTIGO 10 DA LEI N°
3.947/83.

CUIDA-SE DE AÇÃO DISCRIMINATÓRIA DO 51°
PERÍMETRO. COMARCA DE APIAÍ. EM FASE DE EXECUÇÃO DE
DEMARCAÇÃO.

FORAM ELABORADOS LAUDOS PERICIAIS DE
DEMARCAÇÃO (FLS.1034/1186) E DE ARBITRAMENTO (FLS.984/991).
JÁ TENDO SIDO FIXADO, EM FAVOR DOS "EXPERTS", O VALOR DE SEUS
HONORÁRIOS.

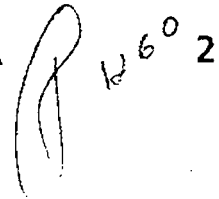
HOUVE, QUANTO À DEMARCAÇÃO, A
CONCORDÂNCIA DA FAZENDA DO ESTADO (FLS.1257v.), DADO O
PARECER DE SEU ASSISTENTE-TÉCNICO (FLS.1198/1201) E NÃO HOUVE
QUALQUER IMPUGNAÇÃO DE QUAISQUER INTERESSADOS.

FOI JULGADA PROCEDENTE A AÇÃO
DEMARCATÓRIA, NA PRIMEIRA FASE, QUE PROCURA DEFINIR *DE JURE*
ENTRE OS PRÉDIOS CONFINANTES.

É O RELATÓRIO DO NECESSÁRIO.

DECIDO



CORREGEDORIA GERAL DA JUSTIÇA

FORAM CONCLUÍDOS OS ESTUDOS DOS PERITOS ARBITRADORES, QUE DELINEARAM QUAL O TRAÇADO DA LINHA DEMARCADA, SEM QUALQUER IMPUGNAÇÃO OU OPOSIÇÃO DE TERCEIROS.

O LAUDO DE DEMARCAÇÃO FOI TAMBÉM ELABORADO, COM COLOCAÇÃO DO MARCO PRIMORDIAL E NOS VÉRTICES DOS ÂNGULOS, NÃO TENDO SURGIDO UMA ÚNICA IMPUGNAÇÃO.

O LAUDO APRESENTADO APRESENTA EVIDENTE PERFEIÇÃO.

PROCEDENTE A AÇÃO DEMARCATÓRIA (FLS.621/631 E 686V.), QUE DEFINIU OS LIMITES DE DIREITO DAS GLEBAS, ACOMPANHARAM AS PARTES TODAS AS FASES DO PROCESSO, APRESENTANDO ESTE REGULARIDADE, CABENDO, SIMPLEMENTE, A HOMOLOGAÇÃO DOS LAUDOS.

ISTO POSTO, COM FUNDAMENTO NO ARTIGO 966 DO CÓDIGO DE PROCESSO CIVIL, HOMOLOGO A DEMARCAÇÃO, ADOTANDO O TRAÇADO DAS LINHAS DEMARCADAS CONSTANTE DOS LAUDOS DE ARBITRAMENTO DE FOLHAS 984/991 E DE DEMARCAÇÃO DE FOLHAS 1034/1186. QUE PASSAM A FAZER PARTE INTEGRANTE DESTA SENTENÇA, PARA OS EFEITOS.

P.R.I.C.

SÃO PAULO, 27 DE ABRIL DE 2000.



MARCELO FORTES BARBOSA FILHO

JUIZ AUXILIAR DA CORREGEDORIA

Administrativamente, o procedimento discriminatório está disciplinado por uma Sistemática de Discriminação de terras da União aprovada pelo INCRA (Portaria n. 407 de 26 de abril de 1977, alterada pela Portaria n. 85 de 14 de abril de 1981) utilizada pelos Estados que não têm elaborado sua própria sistemática (MAIA, 1982, p. 137-167). O conteúdo principal de cada uma das fases encontra-se ordenado no quadro 2.4.

QUADRO 2.4 – SÍNTESE SEQÜENCIAL DA 1ª E DA 2ª FASES DO PROCEDIMENTO DISCRIMINATÓRIO ADMINISTRATIVO

1ª FASE	2ª FASE (DEMARCAÇÃO)
identificação aproximada do perímetro e dos limites dos imóveis nas cartas disponíveis na escala 1:10.000 ou, no caso contrário, nas fotografias aéreas, nesta escala, com a reambulação;	comissão: <ul style="list-style-type: none"> designação de agrimensor
instauração da comissão	agrimensor: <ul style="list-style-type: none"> identificação dos imóveis particulares materialização dos vértices elaboração do laudo apresentação do laudo à comissão
comissão: <ul style="list-style-type: none"> convocação dos interessados 	
requerido: <ul style="list-style-type: none"> apresentação de documentos apresentação de informações apresentação de testemunhas 	comissão: <ul style="list-style-type: none"> lavatura de termo que encerra a discriminatória
comissão: <ul style="list-style-type: none"> análise de documentos pronunciamento lavatura dos termos 	

2.2.4 Tarefas dos Peritos

As atividades periciais em terras devolutas surgiram já no Império Brasileiro com o Regulamento de 8-5-1854. A perícia visa o levantamento da linha demarcanda, i.e., da linha sob definição; por isso, os peritos deverão se orientar pelos títulos que são os dados mais importantes e, por conseguinte, a perícia jamais poderá deixar de propor o traçado dessa linha (SANTOS, 1996, p. 75).

No Direito francês, a perícia compreende (TERRÉ e SIMLER, 1998, p. 199):

- a) l'examen des titres de propriété des parties, afin d'y rechercher la contenance appartenant à chacune d'elles; le juge peut aussi examiner l'état des lieux, la possession actuelle des parties, la configuration des terrains respectifs; les documents cadastraux peuvent également fournir d'utiles indications;
- b) l'arpentage des terrains pour vérifier sur place la contenance réelle de chaque lot; cette opération est confiée à des experts, généralement à des géomètres, dont le choix appartient aux parties et, à défaut d'accord entre elles, au juge;

- c) le tracé de la ligne séparative des fonds, que l'on marque sur le terrain soit par un fossé, soit par une palissade, soit simplement à l'aide de bornes.³

2.2.4.1 Tarefas do perito agrimensor

Para instruir o processo da ação discriminatória, na fase da demarcação do conteúdo da sentença, o agrimensor elabora o laudo de demarcação (ver quadro 1.1) que é caracterizado por dois aspectos fundamentais de demarcação que são o detalhamento da metodologia que permita a reconstituição e os memoriais da **caracterização de estremas** e os memoriais da **caracterização dos entes naturais** que definem limites fundiários. As tarefas do perito agrimensor compreendem:

- a) a demarcação do perímetro, levando em consideração as divisas com os perímetros já discriminados ou em discriminação;
- b) a demarcação das divisas dos Distritos e dos Municípios incidentes no perímetro (se existirem em normas jurídicas de Estado);
- c) a demarcação dos limites de círculos distritais e municipais;
- d) a demarcação dos limites das faixas de domínio;
- e) a demarcação dos limites das Unidades de Conservação Ambiental⁴ (figura 2.1), dentre as quais, as Áreas de Proteção Ambiental (APA), os Parques, as Reservas, as Estações Ecológicas, as Zonas de Vida Silvestre, as Cavernas; da mesma forma deveriam as Reservas Florestais Legais e os que delimitam as florestas e demais formas de vegetação consideradas de **Preservação Permanente**⁵;
- f) a demarcação dos limites das áreas julgadas particulares na Sentença;

3

- a) o exame de títulos dos requeridos a fim de pesquisar a superfície pertencente a cada um deles; o juiz pode, também, examinar o estado do lugar, a posse atual dos requeridos, a configuração dos respectivos terrenos; os documentos cadastrais podem igualmente fornecer indicações úteis;
- b) a medição de terrenos a fim de verificar *in loco* a superfície real de cada prédio; esta operação é confiada aos peritos, geralmente aos geômetras, cuja escolha cabe aos requeridos e, na falta de acordo entre eles, ao juiz;
- c) o traçado da linha separadora entre prédios que é marcada no terreno por meio de vala ou por meio de paliçada (tapumes feitos por estacas) ou por meio de estremas.
Trad. pelo autor.

⁴ Algumas denominações de Unidades de Conservação Ambiental com suas respectivas normas jurídicas de criação encontram-se em ITESP (1998a, p. 69-71, 80-81).

⁵ Arts. 2º e 3º da Lei n. 4 771, de 15-9-1965 (Código Florestal).

- g) a restituição das fotografias aéreas gerando a carta topográfica no Sistema Geodésico Brasileiro oficial (SGB);
- h) a carta contém o quadro de áreas (quadro 2.5), em que estão relacionadas as glebas por Distritos que constituem o Município, numeradas, nominadas e a situação dominial (particular, particular do ente público e devoluto);
- i) nas glebas onde ocorrem faixas de domínio, neste quadro estão relacionadas a área descontada, a área remanescente e a área total da gleba;
- j) indica-se, ainda, neste quadro se as glebas estão fora ou dentro de círculos distritais ou municipais a fim de computar, no caso do patrimônio devoluto, o patrimônio de domínio estadual e o patrimônio de domínio municipal.

QUADRO 2.5 – RELAÇÃO DE IMÓVEIS INSERTOS EM PERÍMETRO

IMÓVEIS E RESPECTIVAS ÁREAS (hectares: ha)							
Distrito	Número da gleba	Área do domínio público		Área do domínio particular		Área da gleba	Nome da gleba
		particular	devoluto	deduzida	remanescente		
nome do Distrito	glebas do círculo						
	subtotal						Terras municipais
Distrito	glebas fora do círculo						
	subtotal						Terras estaduais
							Terras municipais + Terras estaduais
nome do Distrito	glebas do círculo						
	subtotal						Terras municipais
Distrito	glebas fora do círculo						
	subtotal						Terras estaduais
Total							Terras municipais + Terras estaduais
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Total geral							Perímetro

FONTE: MIRACATU. Comarca. Proc. n. 106/73-B, fl. 1 841.

NOTA : Como existem as terras particulares do ente público, acrescentou-se a respectiva coluna.

2.2.4.2 Tarefas dos peritos arbitradores

As principais tarefas dos peritos arbitradores são:

- a) conferir extremas e rumos (ou azimutes), e discorrer sobre divergência ou não da demarcação (CPC, art. 964);

- b) discorrer sobre a metodologia de fixação das linhas demarcandas;
- c) verificar se os trabalhos de campo seguiram a orientação da sentença;
- d) elaborar laudo de arbitramento (ver quadro 1.1).

2.2.5 Estrutura do Laudo de Arbitramento e do Laudo de Demarcação

As principais partes do laudo de arbitramento e as do laudo de demarcação acham-se ordenadas no quadro 2.6.

QUADRO 2.6 – ESTRUTURA DOS LAUDOS DE ARBITRAMENTO E DE DEMARCAÇÃO

LAUDO DE ARBITRAMENTO	LAUDO DE DEMARCAÇÃO
a) considerações iniciais;	a) considerações iniciais;
b) situação;	b) confrontações;
c) limites e confrontações;	c) metodologia de fixação de estremas ;
d) relevo e qualidade das terras;	d) áreas apuradas dentro e fora de círculos: particulares, particulares do ente público e devolutas;
e) águas;	e) quadro de áreas;
f) vias de comunicação;	f) rios principais, limites e confrontações;
g) ocupantes e benfeitorias;	g) memoriais da caracterização de extremas e de memoriais da caracterização dos entes naturais ;
h) terras julgadas particulares;	h) carta topográfica referenciada ao SGB.
i) metodologia de fixação das linhas demarcandas;	
j) conclusões.	

2.2.6 Memorial da Caracterização de Estremas e Memorial da Caracterização dos Entes Naturais

O perito agrimensor elabora os **memoriais**:

- a) da **caracterização de extremas** do perímetro;
- b) da **caracterização de extremas** do Distrito;
- c) da **caracterização de extremas** das terras municipais do Distrito;
- d) da **caracterização de extremas** das terras estaduais do Distrito;
- e) da **caracterização de extremas** das terras devolutas em área municipal do Distrito;
- f) da **caracterização de extremas** das terras devolutas em áreas estadual do Distrito;
- g) da **caracterização de extremas** das terras particulares em área municipal do Distrito;
- h) da **caracterização de extremas** das terras particulares em área estadual do Distrito.

Destaque-se a importância, para o Direito Imobiliário, **dos memoriais da caracterização de extremas** e os memoriais da caracterização dos entes naturais como:

- a) elementos integrantes da Sentença Homologatória da Demarcação (CPC, art. 966) pela Corregedoria Geral de Justiça, mediante a qual os limites *de iure* entre os prédios são definidos;
- b) interpretação da realização do princípio da especialidade do Registro de Imóveis;
- c) aviventação de limites.

2.3 VÍNCULO DO LIMITE FUNDIÁRIO À LINHA GEODÉSICA

A demarcação – tarefa do perito agrimensor – consiste na caracterização duradoura de um ponto no lugar pela construção de sinais de demarcação (PETRAHN, 2000, p. 114). Como elemento desta caracterização deve ser incluída as coordenadas e o sistema geodésico ao qual tais coordenadas se referem. As atividades periciais em limites da propriedade fundiária vem expressa, também, nas funções do *Géomètre-Expert* francês que a ORDRE DES GÉOMÈTRES-EXPERTS (1988, p.18) destaca ao citar o primeiro artigo da Lei n. 46-942, de 7-05-1946, modificada pela Lei n. 87-998, de 15-12-1987:

Le Géomètre-Expert est un technicien exerçant une profession libérale qui, en son propre nom et sous sa responsabilité personnelle:

1° Réalise les études et les travaux topographiques qui fixent les limites des biens fonciers et, à ce titre, lève et dresse, à toutes échelles et sous quelque forme que ce soit, les plans et documents topographiques concernant la définition des droits attachés à la propriété foncière, tels que les plans de division, de partage, de vente et d'échange des biens fonciers, les plans de bornage ou de délimitation de la propriété foncière;

2° Réalise les études, les documents topographiques, techniques et d'information géographique dans le cadre des missions publiques ou privées d'aménagement du territoire, procède à toutes opérations techniques ou études sur l'évaluation, la gestion ou l'aménagement des biens fonciers.⁶

6

O Perito Geômetra é um técnico que exerce uma profissão liberal e que em seu nome próprio e sob sua responsabilidade pessoal:

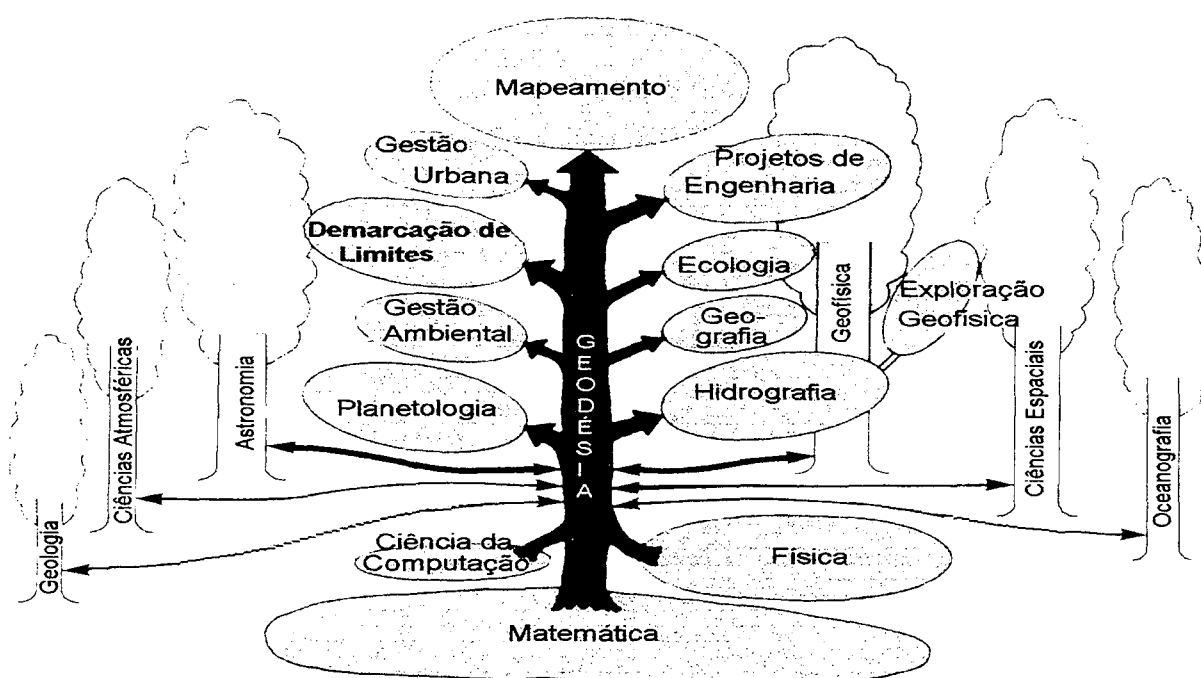
1° Realiza os estudos e os trabalhos topográficos que fixam os limites dos bens fundiários e, para este fim, determina a posição relativa de pontos ou pormenores de um terreno e executa, por todos os meios e sob certa forma, as cartas e documentos topográficos concernentes à definição de direitos vinculados à propriedade fundiária, tais como a carta de divisão, de partilha hereditária, de venda e de permuta de bens fundiários, as cartas de demarcação de limites ou de delimitação da propriedade fundiária;

2° Realiza os estudos, os documentos topográficos, técnicos e de informação geográfica no conjunto das missões públicas ou privadas de ordenação do território, procede a todas as operações técnicas ou estudos sobre avaliação, administração ou ordenação dos bens fundiários.

Trad. pelo autor.

A Geodésia – ciência que obtém quantidades de observação referentes à Terra e que as representa em modelos matemáticos (HEITZ⁷, apud KORTH, 1998, p. 14) – busca estimar os valores dessas quantidades bem como os erros (faltas) a elas inerentes. VANÍČEK e KRAKIWSKY (1986, p. 24) mostram a posição que a disciplina **Demarcação de Limites** ocupa em relação à Geodésia e às outras disciplinas: acha-se vinculada à Geodésia (figura 2.3). Nesta disciplina pode-se incluir o problema da **caracterização de extremas**.

FIGURA 2.3 – VÍNCULO DOS LIMITES À GEODÉSIA



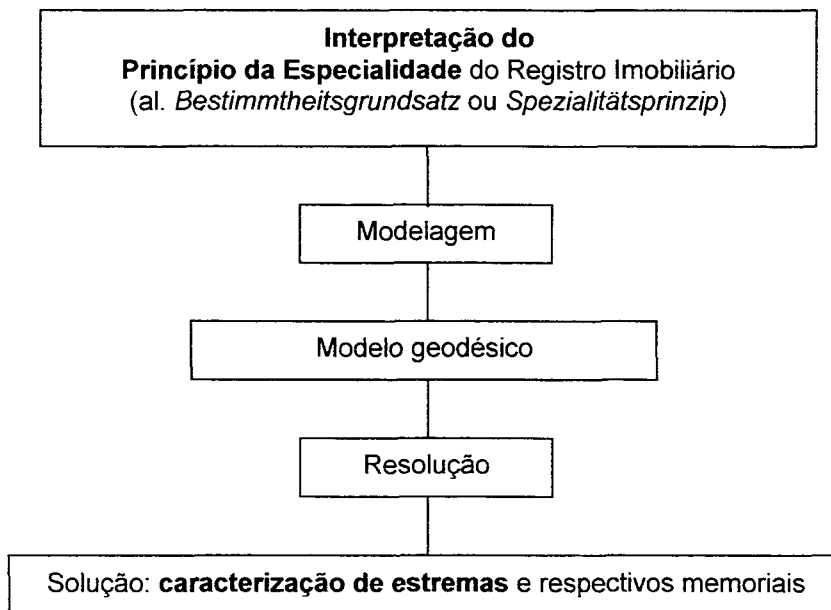
FONTE: VANÍČEK e KRAKIWSKY (1986, p.24).

NOTA : Extrato do original com tradução.

Especificamente no sentido fundiário, a caracterização de extremas vincula o princípio da especialidade do Registro de Imóveis concernente à individualização obrigatória da propriedade fundiária à Geodésia (figura 2.4).

⁷ HEITZ, S. (1991). Einführung in dreidimensionale geometrische Modelle der Geodäsie. **Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn**, n. 79.

FIGURA 2.4 – RELAÇÃO ENTRE CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS, DIREITO IMOBILIÁRIO E GEODÉSIA



O Direito Imobiliário a fim de interpretar o princípio da especialidade, recorre aos trabalhos do agrimensor e arbitradores, e estes devem recorrer à Geodésia da qual obtém os métodos de levantamentos que permitirão caracterizar as **extremas** e os entes naturais que definem limites de forma unívoca.

Os arts. 959 a 966 do CPC que dão diretrizes aos trabalhos do agrimensor e arbitradores e dos quais se obtém orientações às decisões não contemplam critérios de verificação da qualidade de levantamentos geodésicos, pois o desenvolvimento maior de tais critérios ocorreu após o ano de 1976 consoante as publicações na literatura geodésica a que os autores fazem remissão. Por outro lado, o art. 225 da Lei n. 6 015/1973 determina que os tabeliães, escrivães e juízes façam com que nas escrituras e autos judiciais as partes indiquem, com precisão, os característicos, confrontações e a localização dos imóveis. Estes elementos a serem indicados são indispensáveis também para a ação de Registro Torrens (FALCÃO, 1995, p. 116).

A **estrema** tem as características que a norma jurídica atribui, e.g., a característica de ser elemento da linha que separará domínios distintos sobre imóveis distintos, mas a sua definição na superfície física da Terra tem as características que a Geodésia atribui: as coordenadas geográficas elipsóidicas (φ, λ) que dependem da Estatística para a estimação de suas medidas de acurácia

respectivas. A medida de acurácia compreende a precisão e a correção que possui uma parte conhecida e outra parte desconhecida.

O rigor científico aplicado à obtenção e ao cálculo dos dados provenientes das observações de campo é, portanto, inerente aos métodos da Geodésia e aos da Estatística, os quais oferecem a quantificação de estimativas de medidas de qualidade.

A demarcação do perímetro para discriminação de terras é a 2ª fase da formação e do desenvolvimento do processo discriminatório. Os pontos que definem os elementos demarcáveis são materializados no terreno e os documentos gerados em forma de memoriais de caracterização e de mapas são partes do laudo de demarcação, peça desse processo.

A validade destes documentos é a de serem capazes de representar a veracidade dos pontos materializados, i.e., seguir à risca o **princípio da especialidade** e permitirem a reconstituição da situação. São exemplos típicos destes propósitos, a de servirem de base na legitimação de posses, nos assentamentos e na preservação de unidades ambientais.

A porção terrestre individualizada, constitui o objeto do registro no sentido de que assim como a cada imóvel cabe um lugar certo na superfície física da Terra, a cada imóvel cabe também um lugar certo no registro (CARVALHO, 1997, p. 27, 331). Mas o conceito de o lugar certo na superfície física da Terra é objeto da Geodésia. A tarefa de interpretar este conceito e realizá-lo materialmente, mediante a demarcação, são tarefas do agrimensor e dos arbitradores. O modelo matemático à estimação das quantidades geodésicas da demarcação tem sido na consideração da parcela terrestre como ente do espaço bidimensional.

2.4 NOÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE O SISTEMA BRASILEIRO DE REGISTRO PÚBLICO DE IMÓVEIS

O trabalho mais importante do agrimensor é gerar, a partir da identificação das linhas que **estremam** os prédios, os memoriais nos seus laudos, os quais, após a sentença homologatória da demarcação, a Fazenda Pública do Estado requer do Juízo a expedição de carta de sentença para fins de registro imobiliário, na qual consta esses memoriais para a abertura de matrícula, e com os quais a matrícula é composta.

A segunda fase de cada uma das três ações tem elementos comuns no trabalho do agrimensor: a fixação de **estremas** juntamente com a elaboração de laudo minucioso. Uma das partes mais importantes do laudo é a **caracterização das estremas que formam o perímetro**, i.e, a descrição de um conjunto de linhas que estremam o prédio porque, após a sentença de homologação, torna-se objeto de registro.

Após o encerramento da discriminatória, a forma de transferência do domínio de terra devoluta ao ocupante que nela se instalou é denominada de legitimação de posses (MEIRELLES, 1997, p. 225). Trata-se de um ato discricionário ou do Estado, ou do Município – conforme o domínio seja ou do Estado ou do Município – e se faz na forma administrativa mediante o título de domínio registrado.

2.4.1 Origem e Evolução do Registro da Propriedade Imobiliária no Brasil

A origem do registro da propriedade imóvel no Brasil tem início com o Registro Paroquial que foi instituído pelo Decreto n. 1 318/1854. Seguiram os diplomas legais, dentre os mais importantes, citam-se: o Registro Geral instituído pela Lei n. 1 237/1864, o Registro Torrens instituído pelo Decreto n. 451-B/1890, o Código Civil Brasileiro e a Lei n. 6 015 /1973.

2.4.2 Princípios do Registro da Propriedade Imobiliária e Importância

O registro da propriedade imobiliária é regido por princípios que exprimem o conjunto de regras para direcionar a conduta, dentre os quais o princípio da prioridade, o princípio da especialidade, o princípio da presunção, o princípio da legalidade e o princípio da publicidade. O detalhamento destes princípios encontram-se nos na literatura jurídica que trata o registro.

Destaque-se que o princípio da especialidade (al. *Bestimmtheitsgrundsatz*) permite formar o vínculo do Direito Imobiliário à Geodésia, pois tem natureza dúplice em sua concepção. A primeira, estritamente jurídica, diz que a inscrição da propriedade imóvel no registro deve recair sobre um objeto precisamente individualizado (CARVALHO, 1997, p. 203). A segunda é estritamente geodésica,

porque esse princípio só pode ser concretizado pelas mensurações, a fim de que os limites geométricos de cada prédio (al. *Grundstück*) seja tão precisamente descrito, de modo que no lugar seja encontrado (BENGEL e SIMMERDING, 2000, p. 188).

O registro imobiliário se constitui no modo de aquisição da propriedade imóvel (CCB, art. 530, I).

2.4.3 Livros do Registro da Propriedade Imobiliária

Para registrar os atos reconhecidos em lei sobre a propriedade imobiliária, o art. 173 da Lei n. 6 015/1973, exige a existência de livros. O livro n. 2, chamado Registro Geral (figura 2.5), é aquele que conterà, por ocasião da abertura da matrícula, o memorial da caracterização de estremas e entes naturais do perímetro do prédio. “O termo registro possui duas acepções: a primeira, de ofício público, em que se dá a publicidade dos direitos reais; a segunda, do ato ou assento praticado em livro desse ofício para realizar o referido fim” (CARVALHO, 1997, p. 115).

O Livro N. 2 do Registro de Imóveis consiste no conjunto de todos os atos pertinentes ao prédio. Os requisitos peculiares da matrícula são o número de ordem e a descrição do imóvel; este último requisito constitui o núcleo da matrícula (CARVALHO, 1997, p. 340). A descrição que abre a matrícula nem sempre é a definitiva, podendo conter retificações, mediante as averbações, de parte ou mesmo de toda a descrição (ORLANDI NETO, 1997, p. 12). A averbação é a inserção na matrícula ou no registro de ocorrências que, por qualquer modo, os alterem, tais como a correção de erros, a complementação ou a atualização de informação (SWENSSON, 1991, p. 162). Neste sentido, portanto, deverá ser admitido que as estremas de um imóvel seja atualizada através do tempo, considerando a evolução da ciência que lhes seja importante.

FIGURA 2.5 – ESTRUTURA DO REGISTRO DA PROPRIEDADE IMÓVEL (LIVRO N. 2)

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		()º Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 1	Data
<p>IMÓVEL: (memorial da caracterização de estremas e de entes naturais)</p>		
<p>Proprietário:</p> <p>Registro anterior: (Título, Data e Ofício de Registro de Imóveis)</p> <p>R. 01 - (Data e nome do ato)</p> <p>Av. 02 - (Data e nome do ato)</p> <p>Av. 03 -</p> <p>R. 04 -</p> <p>⋮</p> <p>Nota 1:</p> <p>Os registros obedecem às disposições do art. 167, inciso I; as averbações às do art. 167, inciso II, e arts. 246 e 247 e a escrituração do livro 2, às do § 1º do art. 176 da Lei 6 015/1973.</p> <p>Nota 2:</p> <p>Cabe ainda averbar os <i>lf_s</i> que delimitam a Reserva Florestal Legal, e também os <i>lf_s</i> que delimitam as florestas e demais formas de vegetação consideradas de Preservação Permanente segundo os arts. 2º e 3º da Lei n. 4 771/1965 (Código Florestal), cujos memoriais da caracterização de estremas devem estar à disposição do Oficial do Registro.</p>		

3 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Visando fornecer elementos fundamentais aos pesquisadores no tema da caracterização de extremas no espaço geométrico, nesta seção são expostos os conceitos básicos da Matemática, especificamente os da Álgebra Linear e os da Geometria Analítica, mediante os quais dá-se o início à concepção do procedimento que tornam as extremas caracterizadas e, por conseguinte, os lf_s .

Os da Álgebra Linear compreendem os espaços vetoriais, matrizes com seus tipos e propriedades, problema valor próprio generalizado e especial.

Da Geometria Analítica reunir-se-ão os conceitos básicos de sistemas de coordenadas.

3.1 FUNDAMENTOS DA ÁLGEBRA LINEAR

3.1.1 Escalar

As quantidades como comprimento de uma linha, comprimento de um arco e área têm apenas a magnitude, ou módulo, ou comprimento, para caracterizá-las e ficam definidas por um único número do conjunto dos números reais, acrescentando-lhes uma unidade adequada (e.g., metro, radiano, metro quadrado). Uma quantidade deste tipo é uma grandeza escalar, e o número correspondente é um escalar.

3.1.2 Síntese da Álgebra Vetorial

Há quantidades que requerem magnitude (≥ 0) e direção no espaço para caracterizá-las. Um exemplo disto é um lf que tem um comprimento e uma direção denominada **azimute**. Uma quantidade deste tipo é representada por um segmento de reta orientado, i.e., um segmento dotado de uma magnitude e de uma direção. A este segmento de reta orientado é denominado vetor (lat. *vectore* ~ *ōris*, aquele que conduz ou transporta) e ao conjunto cujos elementos são vetores é denominado espaço vetorial. Estes elementos podem ser somados, ou subtraídos, uns com os

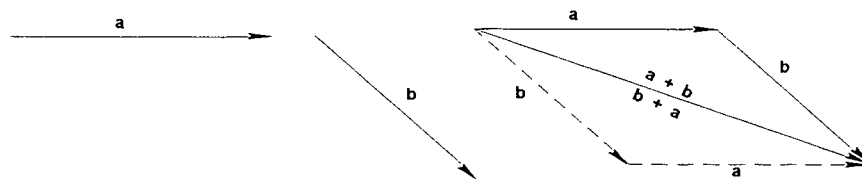
outros e podem ser multiplicados entre si e por escalares. As referidas operações são efetuadas pelas regras comuns do cálculo.

Nos espaços vetoriais são válidas as regras seguintes, nas quais \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} designam os elementos do espaço vetorial, e α e β designam os escalares:

a) lei comutativa da adição:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \quad (3.1)$$

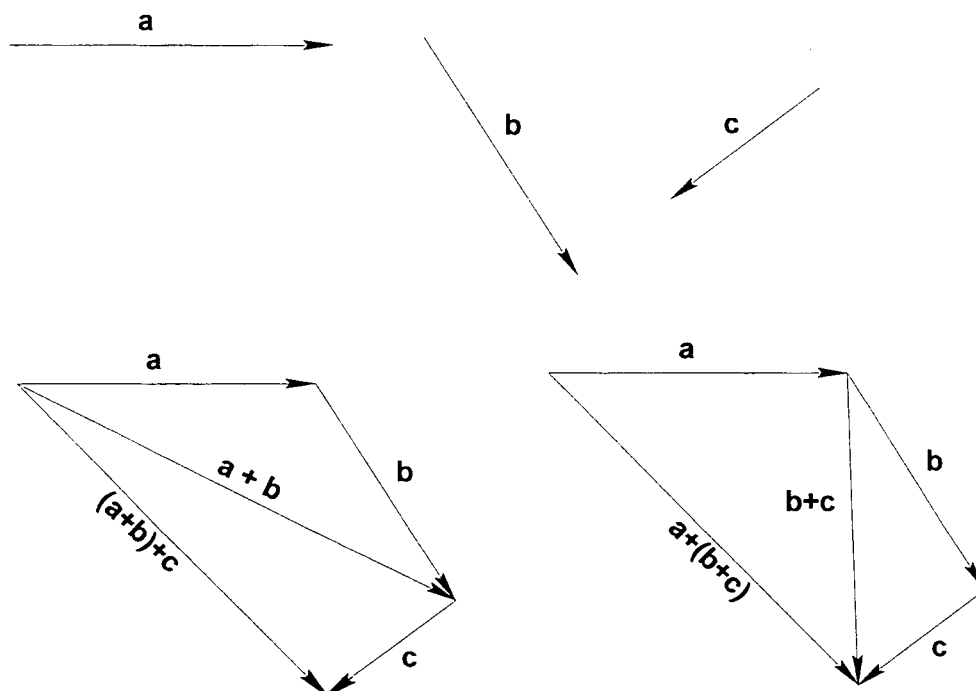
FIGURA 3.1 – ADIÇÃO DE DOIS VETORES MOSTRANDO A LEI COMUTATIVA



b) lei associativa da adição:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \quad (3.2)$$

FIGURA 3.2 – ADIÇÃO DE TRÊS VETORES MOSTRANDO A LEI ASSOCIATIVA



c) lei do elemento nulo:

$$\mathbf{0} \in V, \quad (3.3)$$

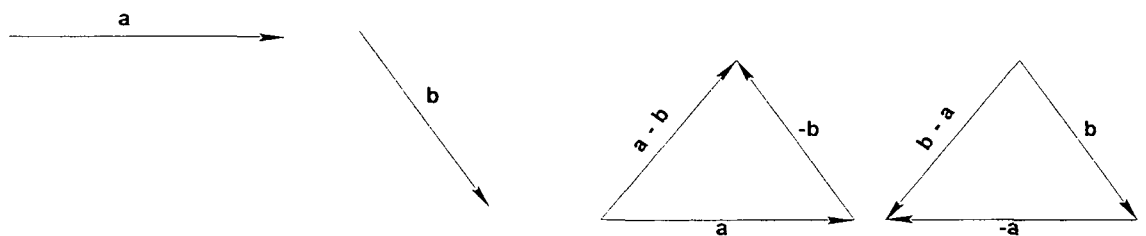
assim para todo \mathbf{a} do espaço vetorial vale

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}; \quad (3.4)$$

d) lei do elemento oposto: para cada elemento \mathbf{a} vale um elemento $-\mathbf{a}$, de modo que vale

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}; \quad (3.5)$$

FIGURA 3.3 – SUBTRAÇÃO DE DOIS VETORES



e) lei associativa da multiplicação:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{a}; \quad (3.6)$$

f) $1\mathbf{a} = \mathbf{a};$ (3.7)

FIGURA 3.4 – MULTIPLICAÇÃO ESCALAR DE UM VETOR



g) 1ª lei distributiva:

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}; \quad (3.8)$$

h) 2ª lei distributiva:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}. \quad (5.9)$$

Cada conjunto, no qual uma adição e uma multiplicação com números estão definidas e para o qual as propriedades 1 a 8 valem, é um espaço vetorial. Os espaços vetoriais são denotados pelo símbolo \mathbf{R}^n . Cada espaço \mathbf{R}^n contém uma coleção de vetores. \mathbf{R}^3 , chamado espaço de dimensão 3, contém todos os vetores coluna com 3 componentes. Uma linha é um espaço de dimensão 1. São exemplos de espaços vetoriais:

a) conjunto de todos os números reais;

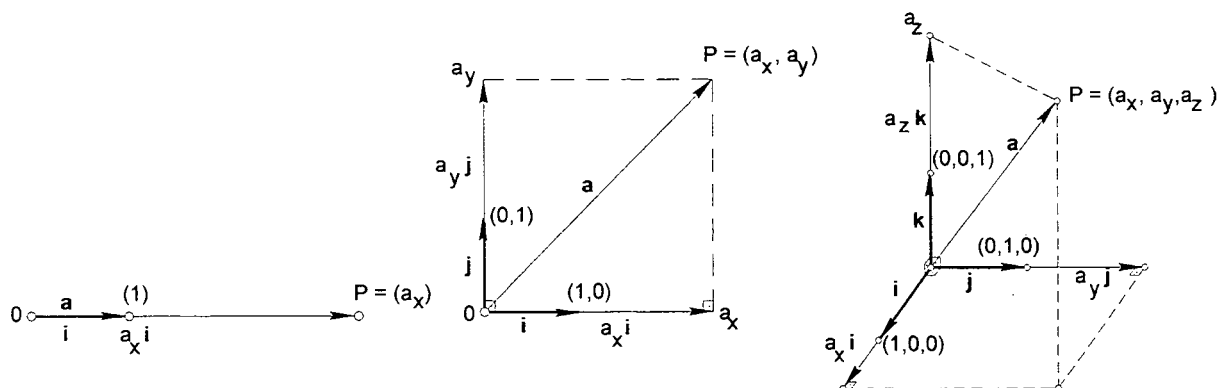
- b) conjunto de todas as n -uplas $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$, nas quais a_i são números reais que formam o espaço vetorial \mathbb{R}^n para cada número natural; para $n=2$, fala-se de par ordenado; para $n=3$, fala-se de terno ordenado; um terno ordenado (a,b,c) é um conjunto de três números $\{a,b,c\}$ em que a é o primeiro número, b é o segundo e c é o terceiro;
- c) conjunto de todas as funções diferenciáveis e integráveis, tais como aquelas provenientes da linearização pela série de Taylor.

3.1.2.1 Vetor base e componentes

Nos espaços de uma, duas, três, cada vetor determina um único número real, um par ordenado de números reais, um terno ordenado de números reais, respectivamente, de modo que há a correspondência biunívoca entre vetores de um espaço e um conjunto ordenado de números reais.

As projeções do vetor nos eixos de coordenadas determinam suas respectivas componentes que são também vetores, e o número real que marca a extremidade da componente define a coordenada (figura 3.5).

FIGURA 3.5 – COMPONENTES E COORDENADAS DE VETORES DOS ESPAÇOS DE UMA, DUAS E TRÊS DIMENSÕES



3.1.2.2 Operações com vetor

Os vetores são caracterizados por duas naturezas: a geométrica e a algébrica; por isso, eles possuem as propriedades da adição, subtração, multiplicação por escalar e multiplicação por vetor.

Define-se a adição por:

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n), \quad (3.10)$$

As componentes obedecem às leis seguintes (KAPLAN, 1972, p. 49):

a) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ se, e somente se,

$$a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z; \quad (3.11)$$

b) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ se, e somente se,

$$a_x = 0, a_y = 0, a_z = 0; \quad (3.12)$$

c) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}; \quad (3.13)$

d) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k}. \quad (3.14)$

Soma e subtração de vetores significam a soma e a subtração de suas coordenadas, respectivamente. A multiplicação de vetor por escalar significa que cada coordenada é multiplicada por escalar.

O módulo ou comprimento de um vetor \mathbf{a} , designado pelo símbolo $|\mathbf{a}|$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das coordenadas

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (3.15)$$

3.1.2.3 Espaço Euclidiano de dimensão n

O espaço Euclidiano que é denotado pelo símbolo \mathbb{R}^n designa o conjunto de números reais $a_1, a_2, \dots, a_1, \dots, a_n$ ordenados. Um espaço vetorial se chama Euclidiano quando a cada par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} corresponde o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, chamado produto escalar que tem as propriedades que caracterizam o espaço vetorial. No espaço Euclidiano são definidos o sistema de coordenadas cartesianas e vários sistemas de coordenadas curvilíneas (ver seções 3.2 e 5).

3.1.2.4 Produto escalar ou produto interno e produto vetorial

O produto escalar de dois vetores, geometricamente representado pela figura 3.6, consiste no produto vetor linha pelo vetor coluna, resultando um escalar.

O produto vetorial resulta o vetor denotado pelo símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (figura 3.7) e expresso pela relação $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$ e pelo módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$.

Considerando $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ com coordenadas $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ com coordenadas $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$, existem os produtos escalares

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_i \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_i b_i + \dots + a_n b_n; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.16)$$

Na notação do produto escalar, também são comuns os símbolos $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ ou $\mathbf{b}^T \mathbf{a}$. (3.17)

São importantes os produtos escalares seguintes, em que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_i^2 + \dots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{a} \rangle = a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 1 + \dots + 1 \times 1 + 1 \times 1 = \sum_{i=1}^n 1 = n; \quad (3.20)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle = a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + \dots + a_i \times 0 + \dots + a_n \times 0 = 0. \quad (3.21)$$

Os vetores cujo produto escalar é nulo são chamados ortogonais, pois $\theta = \pi/2$.

O vetor $\mathbf{1}$, em que cada coordenada vale 1, chama-se vetor somatório (PELZER, 1985a, p. 10; WITTE e SCHMIDT, 2000, p. 147):

$$\mathbf{1}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \dots \ 1]. \quad (3.22)$$

FIGURA 3.6 – PRODUTO ESCALAR DE VETORES

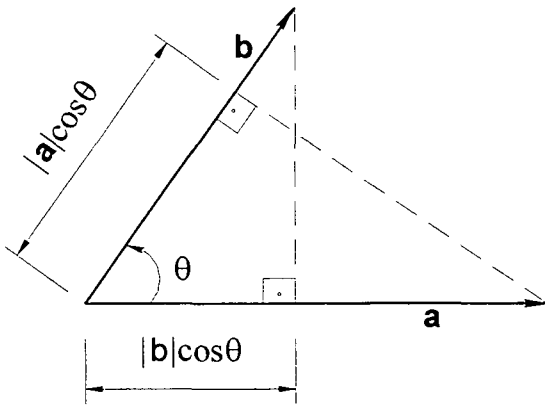
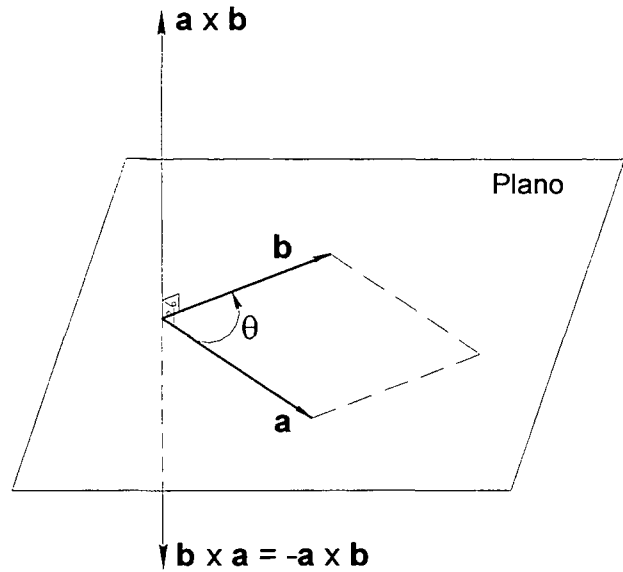


FIGURA 3.7 – PRODUTO VETORIAL DE DOIS VETORES



3.1.2.5 Vetor posição

No espaço há infinitos vetores equivalentes entre si; contudo, para um ponto P do espaço há um único vetor cuja origem é a origem do sistema de coordenadas ao qual está referido. A este vetor dá-se o nome de vetor posição e é denotado pelo símbolo r_0 .

Mediante a introdução dos vetores unitários, também denominados versores,

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

com os produtos escalares

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle &= 1, \\ \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle &= 1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

é obtida a representação do vetor posição no espaço Euclidiano de três dimensões:

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Os parâmetros x , y e z são as coordenadas cartesianas do ponto, i.e., as projeções ortogonais do vetor posição na direção dos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} (MITTERMAYER, 1998, p. 11).

Dá-se nome de vetor unitário, ou versor de uma direção, ao vetor cujo comprimento é igual a unidade, i.e., se $|\mathbf{a}| = 1$. Se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então o vetor unitário \mathbf{u} de mesma direção que \mathbf{a} é escrito como

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}. \quad (3.26)$$

As componentes de um versor de uma direção são os cossenos diretores, as quais são obtidas do produto escalar

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = \cos \alpha, \quad \alpha = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{i}); \quad (3.27)$$

$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = \cos \beta, \quad \beta = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{j}); \quad (3.28)$$

$$a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \cos \gamma, \quad \gamma = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{k}). \quad (3.29)$$

O ângulo α entre o vetor \mathbf{a} e o versor \mathbf{i} é o ângulo entre o vetor \mathbf{a} e o semi-eixo positivo x ; o ângulo β entre o vetor \mathbf{a} e o versor \mathbf{j} é o ângulo entre o vetor \mathbf{a} e o semi-eixo positivo y ; ângulo γ entre o vetor \mathbf{a} e o versor \mathbf{k} é o ângulo entre o vetor \mathbf{a} e o semi-eixo positivo z .

O módulo do vetor \mathbf{a} é escrito na forma

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}. \quad (3.30)$$

e as componentes a_x, a_y e a_z são escritas na forma

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha; \quad (3.31)$$

$$a_y = |\mathbf{a}| \cos \beta; \quad (3.32)$$

$$a_z = |\mathbf{a}| \cos \gamma. \quad (3.33)$$

3.1.2.6 Norma Euclidiana de vetores

Seja $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ um vetor linha de dimensão n , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, então a norma euclidiana desse vetor, denotada pelo símbolo $\|\mathbf{a}\|_2$ é definida por

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad \|\mathbf{a}\|_2 \geq 0, \quad (3.34)$$

em que o índice T indica a transposição do vetor \mathbf{a} .

3.1.2.7 Ortogonalidade e ortonormalidade de vetores

Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são ditos ortogonais se o produto escalar entre eles for nulo, i.e.,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0, \quad (3.35)$$

e são ditos ortonormados se se verificar

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1. \quad (3.36)$$

3.1.2.8 Vetores linearmente dependentes e vetores linearmente independentes

Os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n$ são linearmente dependentes se a equação

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_i \mathbf{a}_i + \dots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

nas variáveis $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n$ só for satisfeita para $c_1 = c_2 = \dots = c_i = \dots = c_n = 0$; caso contrário, chamar-se-ão linearmente independentes.

Os escalares c_i são os coeficientes não todos nulos. Se todos os coeficientes forem nulos, dir-se-á que os vetores são linearmente independentes.

Os teoremas principais da dependência linear são aqui reunidos (REY PASTOR, 1968, p. 3-5):

a) a condição necessária e suficiente para que dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} sejam paralelos é que sejam linearmente dependentes. O vetor nulo é considerado paralelo a qualquer outro e a qualquer plano. Se vários vetores forem paralelos a um mesmo plano, são chamados coplanares, pois podem ser representados em um mesmo plano.

b) $c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}, (c_i \neq 0) \rightarrow \mathbf{a} = -\frac{c_1}{c_2} \mathbf{b}; \quad (3.38)$

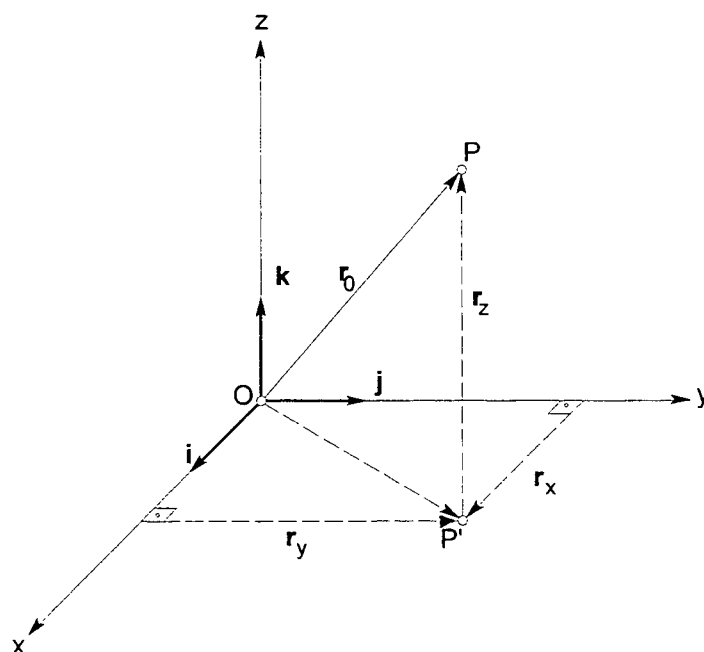
c) dados dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não paralelos, toda combinação linear é coplanar com eles e, reciprocamente, todo vetor \mathbf{r} coplanar com \mathbf{a} e \mathbf{b} pode ser expresso como combinação linear deles;

d) a condição necessária para que três vetores \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} sejam coplanares, é que sejam linearmente dependentes;

- e) dados três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} não paralelos a um mesmo plano, qualquer vetor do espaço Euclidiano de três dimensões pode ser expresso como combinação linear deles.

A figura 3.8 mostra a decomposição do vetor posição \mathbf{r}_0 e a correspondente expressão analítica.

FIGURA 3.8 – DECOMPOSIÇÃO DO VETOR POSIÇÃO \mathbf{r}_0 DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES



3.1.2.9 Base e dimensão de um espaço vetorial

Se os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ são linearmente independentes, então $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ chama-se uma base. A representação de um vetor no espaço vetorial nessa base é inequívoca. O número de vetores de uma base de um espaço vetorial chama-se dimensão.

3.1.3 Síntese da Álgebra Matricial

Nesta seção uma síntese da álgebra matricial será exposta a fim de permitir a compreensão das seções subseqüentes. A demonstração dos teoremas deve ser buscada na literatura indicada.

Uma matriz é um sistema de elementos, e.g., números reais ou complexos, funções, quocientes diferenciais, vetores, os quais em uma tabela consistindo de m

linhas e em n colunas são ordenados (BRONSTEIN et al., 1999, p. 250). Denota-se uma matriz com letra maiúscula e com negrito. Se uma matriz \mathbf{A} tiver m linhas e n colunas, dir-se-á que a matriz \mathbf{A} é de ordem $m \times n$. Uma linha qualquer é designada pela letra i e uma coluna qualquer é designada pela letra j , de modo que o elemento situado na i -ésima linha e na j -ésima coluna é denotado por a_{ij} . A estrutura geral de uma matriz \mathbf{A} qualquer é da forma:

$$\mathbf{A}_{(m,n)} = {}_m\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{ij}]_{m \times n}, \quad (3.39)$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}; i \in \{1, 2, \dots, m\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}; m, n \in \mathbb{N}^*$.

Um vetor é uma matriz com uma única linha ou uma matriz com uma única coluna. O símbolo \mathbf{a} denota, por convenção nesta pesquisa um vetor coluna; enquanto que o vetor linha é denotado por \mathbf{a}^T , denominado vetor transposto de \mathbf{a} que é escrito na forma da 3.22. É comum escrever um vetor na forma vetor coluna, conforme a 3.23. Denota-se um vetor com letra minúscula e com negrito. Se um vetor \mathbf{a} tiver m linhas, dir-se-á que o vetor é de ordem $m \times 1$. O i -ésimo elemento de um vetor \mathbf{a} é denotado por a_i . Um escalar pode ser entendido como uma matriz de ordem 1×1 .

3.1.3.1 Operações com matrizes

Sejam duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$. Define-se soma de \mathbf{A} com \mathbf{B} como sendo a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$, em que cada elemento de \mathbf{C} é a soma dos elementos correspondentes de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Portanto,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.40)$$

Quando as matrizes são de mesma ordem, valem as propriedades da adição:

a) propriedade associativa:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}; \quad (3.41)$$

b) propriedade comutativa:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad (3.42)$$

c) existência do elemento neutro:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}; \quad (3.43)$$

d) existência do elemento simétrico:

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Define-se a diferença entre \mathbf{A} e \mathbf{B} como sendo a soma de \mathbf{A} com a oposta de \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (3.45)$$

Sejam uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e um número real k . Define-se produto de k por \mathbf{A} como sendo a matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$, em que cada elemento de \mathbf{B} é o produto de k pelo respectivo elemento de \mathbf{A} , i.e.,

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} \Leftrightarrow b_{ij} = ka_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.46)$$

Dadas as matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$, define-se produto de \mathbf{A} por \mathbf{B} como sendo a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$, em que cada c_{ij} de \mathbf{C} é a soma dos produtos dos elementos da i -ésima linha de \mathbf{A} pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de \mathbf{B} .

São propriedades do produto:

a) comutatividade (não é válida):

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}, \quad (3.47)$$

o produto \mathbf{AB} pode ser nulo sem que \mathbf{A} seja nula ou \mathbf{B} seja nula;

b) distributividade em relação à soma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}; \quad (3.48)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}; \quad (3.49)$$

c) associatividade

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}). \quad (3.50)$$

3.1.3.2 Matriz nula

Diz-se que uma matriz \mathbf{A} é nula, denotada por $\mathbf{0}$, quando todos os elementos a_{ij} são nulos, i.e.,

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.51)$$

O produto de uma matriz não-nula por matriz nula é nulo.

3.1.3.3 Matriz quadrada

Denomina-se matriz quadrada \mathbf{A} a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas. A ordem da matriz quadrada \mathbf{A} é designada por n :

$$\mathbf{A}_{(n,n)} = {}_n\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1j} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2j} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & \cdots & \mathbf{a}_{ij} & \cdots & \mathbf{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nj} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Os elementos a_{ij} formam a diagonal da matriz quadrada.

3.1.3.4 Matriz diagonal

A matriz será diagonal, se os elementos fora da diagonal forem todos nulos:

$$\mathbf{a}_{ij} = 0, \forall i \neq j; \quad \mathbf{a}_{ij} \neq 0, \forall i = j. \quad (3.53)$$

Em cálculo, a diagonal da matriz diagonal $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]_{n \times n}$ pode ser obtida, sob a forma do vetor $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_i]_{n \times 1}$, pelo produto

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{1} \quad (3.54)$$

3.1.3.5 Matriz identidade

Uma matriz diagonal na qual todos os elementos da diagonal são iguais a 1, chama-se matriz identidade e é denotada pelo símbolo \mathbf{I} :

$$i_{ij} = 1, \forall i = j; \quad a_{ij} = 0, \forall i \neq j. \quad (3.55)$$

O nome identidade é justificado pela propriedade:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}. \quad (3.56)$$

3.1.3.6 Transposição

A transposta de uma matriz \mathbf{A} significa a matriz denotada pelo símbolo \mathbf{A}^T em que cada linha de \mathbf{A} é escrita como coluna de \mathbf{A}^T . São válidas as propriedades:

$$a) (\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T; \quad (3.57)$$

$$b) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \quad (3.58)$$

Pela transposição, um vetor coluna \mathbf{x} de ordem $n \times 1$ é transformado no vetor linha \mathbf{x}^T de ordem $1 \times n$.

3.1.3.7 Matriz simétrica

Uma matriz quadrada é simétrica se todos os elementos a_{ij} são iguais aos elementos correspondentes a_{ji} , i.e.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \text{ se } a_{ij} = a_{ji}, \forall i, \forall j. \quad (3.59)$$

O produto da forma $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ são simétricos; isto vale também para os produtos $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}$, em que \mathbf{Q} é matriz simétrica. Uma matriz simétrica que só contenha elementos reais é hermitiana (BRONSON, 1993, p. 162). A matriz simétrica real \mathbf{A} de ordem n tem exatamente n valores próprios reais λ_i com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

3.1.3.8 Posto de uma matriz

O posto, também chamado característica, denotado pelo símbolo k , é definido como o número máximo de linhas que são linearmente independentes (ou equivalentemente, como o número máximo de colunas que são linearmente independentes). As propriedades do posto são:

$$a) k(\mathbf{A}) = k(\mathbf{AA}^T) = k(\mathbf{A}^T \mathbf{A}); \quad (3.60)$$

$$b) k(\mathbf{A}) \leq \min(m, n), \text{ se } \mathbf{A} \text{ for uma matriz de ordem } m \times n. \quad (3.61)$$

3.1.3.9 Determinante de uma matriz

O determinante de ordem n da matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, denotado pelo símbolo $\det(\mathbf{A})$, é definido pela expressão:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.62)$$

$$\text{em que } C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (3.63)$$

M_{ij} é um determinante de ordem $n-1$ que se obtém de submatrizes de \mathbf{A} . Cada submatriz é obtida eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna de \mathbf{A} . Se $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, o determinante será o próprio escalar a_{11} .

São válidas as propriedades:

$$\text{a) } \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T); \quad (3.64)$$

$$\text{b) } \det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A}); \quad (3.65)$$

$$\text{c) } \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}), \quad (3.66)$$

se as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} tiverem a mesma ordem;

$$\text{d) } \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{AB}^T) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T); \quad (3.67)$$

$$\text{e) } \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}; \quad (3.68)$$

$$\text{f) } \det({}_n\mathbf{A}_n) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}, \text{ se } \mathbf{A} \text{ for diagonal}; \quad (3.69)$$

$$\text{g) } \det(\mathbf{A}) = \pm 1, \text{ se } \mathbf{A} \text{ for matriz ortogonal}. \quad (3.70)$$

3.1.3.10 Inversa ordinária de uma matriz

Para uma matriz \mathbf{A} de ordem n existe a matriz \mathbf{A}^{-1} de ordem n , que é única, tal que

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}, \text{ e } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (3.71)$$

A matriz \mathbf{A}^{-1} chama-se inversa ordinária da matriz \mathbf{A} . Se \mathbf{A}^{-1} existir, dir-se-á que \mathbf{A} é matriz regular ou não-singular, i.e., $\det(\mathbf{A}) \neq 0$; caso contrário, dir-se-á que \mathbf{A} é matriz singular, i.e., $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Sendo \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} matrizes regulares, valem as propriedades

$$\text{a) } (\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}; \quad (3.72)$$

$$\text{b) } (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}; \quad (3.73)$$

$$\text{c) } (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}; \quad (3.74)$$

$$\text{d) } (c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}, \text{ em que } c \text{ é um escalar}; \quad (3.75)$$

e) se \mathbf{A} for simétrica, sê-lo-á também \mathbf{A}^{-1} .

3.1.3.11 Matriz ortogonal

De significação particular são as matrizes ortogonais, visto que as coordenadas de um ponto em dois sistemas de coordenadas retangulares se transformam mediante uma matriz ortogonal. Diz-se que uma matriz \mathbf{A} é ortogonal se for válida a equação

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (3.76)$$

que pode ser escrita na outra forma

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I}, \quad (3.77)$$

a qual é assim interpretada: em uma matriz ortogonal, o produto escalar de linhas (ou colunas) diferentes é sempre nulo, e o produto escalar de uma linha (ou coluna) com ela mesma é igual a um.

São propriedades da matriz ortogonal:

- a) os vetores coluna (ou vetores linha) de uma matriz quadrada real de ordem n formam uma base ortonormal de \mathbf{R}^n e reciprocamente;
- b) produto de duas matrizes ortogonais resulta outra matriz ortogonal;
- c) a inversa e a transposta de uma matriz ortogonal são matrizes ortogonais.

3.1.3.12 Problema valor próprio generalizado e problema valor próprio especial

Dá-se o nome de problema valor próprio generalizado ao problema da determinação de escalares λ e os correspondentes vetores \mathbf{m} que satisfaçam a igualdade (BRONSTEIN et al., 1999, p. 278)

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{m} \quad (3.78)$$

em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes de ordem n .

O escalar λ chama-se valor próprio, e o vetor \mathbf{m} chama-se vetor próprio que também é determinado com um fator c , pois \mathbf{m} e $c\mathbf{m}$ são vetores próprios para λ .

Na literatura encontrará o leitor os sinônimos de valor próprio como autovalor, valor característico, auto-raiz, raiz característica, raiz própria e raiz latente.

Se a matriz \mathbf{B} for substituída pela matriz identidade \mathbf{I} , ter-se-á o problema valor próprio especial (BRONSTEIN et al., 1999, p. 278):

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{m} \text{ ou } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

que é um sistema linear de equações homogêneas, o qual possui solução não-trivial, i.e., $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (3.80)$$

Desenvolvendo a 3.80, obtém-se

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} - \lambda & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (3.81)$$

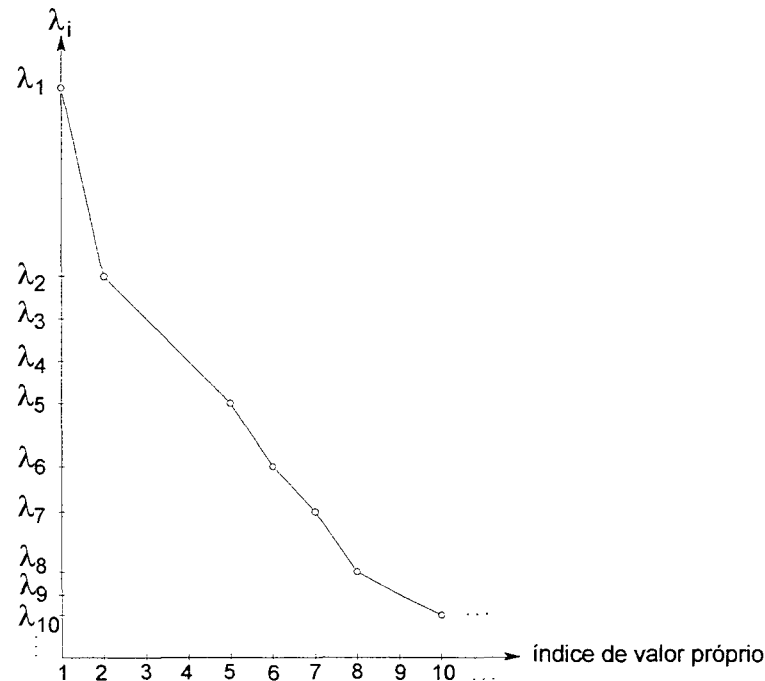
A condição para o valor próprio corresponde, portanto, a uma equação polinomial, a qual é chamada de equação característica. O polinômio $P_n(\lambda)$ é chamado polinômio característico. As raízes da equação característica são os valores próprios de matriz. Portanto, o número λ será valor próprio da matriz, se a diferença $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ for singular.

O conjunto de todos os valores próprios constitui a matriz diagonal Λ que, geometricamente, representa o espectro de matriz segundo a figura 3.9; por isso, a matriz Λ é chamada matriz espectral, a qual é escrita nas formas

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_i). \quad (3.82)$$

$i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

FIGURA 3.9 – ESPECTRO DE MATRIZ



Os vetores próprios não são únicos; eles têm um fator de escala c e devido a isso eles são usados na forma normalizada \mathbf{m}_i , de modo que vale as propriedades

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i = 1; \quad (3.83)$$

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_j = 0 \text{ para } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (3.84)$$

Os vetores próprios são reunidos sob a forma de colunas na matriz \mathbf{M} , a qual é denominada matriz modal:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \quad \mathbf{m}_2 \quad \dots \quad \mathbf{m}_i \quad \dots \quad \mathbf{m}_n] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Como cada coluna da matriz \mathbf{M} é um vetor próprio normalizado \mathbf{m}_i , vale a propriedade

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (3.86)$$

Os mais importantes teoremas e fórmulas da teoria dos valores e vetores próprios estão na seqüência reunidos (ZURMÜHL, 1950, p. 120-133; BRONSTEIN et al., 1999, p. 279, KALTENBACH, 1992, p. 9-11):

- a) se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ são os valores próprios da Matriz \mathbf{A} regular de ordem n , então valem as igualdades

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \quad (3.87)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad (3.88)$$

- b) a matriz \mathbf{A} é chamada regular ou não-singular se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, o que significa que todos os valores próprios são diferentes de zero;
- c) se a matriz \mathbf{A} tiver o defeito d , ela apresentará uma quantidade igual a d valores próprios nulos;
- d) os vetores próprios são sempre linearmente independentes, i.e., $\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_j = 0$ para $i \neq j$; (3.89)
- e) a matriz simétrica real de ordem n , tem exatamente n valores próprios reais λ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e os vetores próprios são reais;
- f) se \mathbf{A} for uma matriz simétrica, então os valores próprios e vetores próprios serão reais;
- g) os vetores próprios \mathbf{m}_i e \mathbf{m}_j correspondentes aos valores próprios λ_i e λ_j , em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, de uma matriz simétrica, são ortogonais entre si, i.e., $\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_j = 0$. (3.90)
- h) se \mathbf{A} for positiva definida, então os valores próprios são positivos; se \mathbf{A} for positiva semidefinida de posto $n < m$, então \mathbf{A} terá valores próprios positivos e $m - n$ valores próprios nulos;
- i) a matriz \mathbf{A}^{-1} tem valores próprios $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_i}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$; (3.91)
- j) a matriz $c\mathbf{A}$ tem valores próprios $c\lambda_1, c\lambda_2, \dots, c\lambda_i, \dots, c\lambda_n$; (3.92)
- l) a diferença matricial $\mathbf{A} - c\mathbf{I}$ tem os valores próprios $\lambda_1 - c, \lambda_2 - c, \dots, \lambda_i - c, \dots, \lambda_n - c$; (3.93)

3.1.3.13 Teorema da Decomposição Espectral

Dá-se o nome de teorema da decomposição espectral à proposição: para cada matriz simétrica real \mathbf{A} , há uma matriz ortogonal \mathbf{M} e uma matriz diagonal Λ que satisfazem a relação

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^T, \quad (3.94)$$

em que \mathbf{M} é a matriz cujas colunas são os vetores próprios normalizados \mathbf{m} , e Λ é a matriz diagonal dos valores próprios λ da matriz \mathbf{A} , i.e.,

$$\mathbf{M}^T\mathbf{A}\mathbf{M} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i); \quad (3.95)$$

$$\mathbf{m}_i^T\mathbf{A}\mathbf{m}_i = \lambda_i; \quad (3.96)$$

$$\mathbf{m}_i^T\mathbf{A}\mathbf{m}_j = 0, \text{ para } i \neq j; \quad (3.97)$$

As relações de ortogonalidade são:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \text{ e } (\mathbf{M}^T)^{-1} = \mathbf{M}; \quad (3.98)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\Lambda\mathbf{M}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T; \quad (3.99)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}\Lambda^{-1}\mathbf{M}^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T. \quad (3.100)$$

Se a matriz \mathbf{A} tem o defeito d , isto é, há d valores próprios nulos, particiona-se a matriz modal \mathbf{M} e a matriz espectral Λ nas partes correspondentes aos valores próprios não-nulos, designadas por \mathbf{M}_1 e Λ_1 , respectivamente, e nas partes correspondentes aos valores próprios nulos, designadas por \mathbf{M}_2 e Λ_2 , respectivamente; assim resulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T \\ \mathbf{M}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{M}_1 \Lambda_1 \mathbf{M}_1^T, \quad (3.101)$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{M}_1 \Lambda_1^{-1} \mathbf{M}_1^T = \sum_{i=1}^{n-d} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T; \quad (3.102)$$

3.1.3.14 Inversa generalizada de Moore-Penrose

A inversa generalizada de Moore-Penrose, também chamada pseudo-inversa, denotada pelo símbolo $+$ sobreposto no símbolo da matriz, é assim definida:

a matriz \mathbf{A}^+ de ordem $n \times m$ é a pseudo-inversa da matriz \mathbf{A} de ordem $m \times n$ se (KOCH, 1980, p. 52; WANG e CHOW, 1994, p. 30):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+; \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+; \quad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}; \quad (3.103)$$

com as propriedades:

$$\text{a) } \mathbf{A}^+ \text{ é única}; \quad (3.104)$$

$$\text{b) } k(\mathbf{A}^+) = k(\mathbf{A}); \quad (3.105)$$

$$\text{c) } (\mathbf{A}^T)^+ = (\mathbf{A}^+)^T, \text{ de modo que, para } \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \text{ resulta } \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^+)^T; \quad (3.106)$$

$$\text{d) } (\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}; \quad (3.107)$$

$$\text{e) } \mathbf{a}^+ = \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|_2^2} = \frac{\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}, \text{ se } \mathbf{a} \text{ for um vetor não-nulo.} \quad (3.108)$$

A inversa ordinária de uma matriz que só existe se o determinante for não-nulo é um caso particular da inversa generalizada de Moore-Penrore. Assim, se \mathbf{A}^{-1} existir, então $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ (STRANG e BORRE, 1997, p. 267).

Supondo uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ singular e posto k , o número de valores próprios nulos d , a decomposição espectral de $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ e a decomposição espectral de $\mathbf{A}^+ = [a_{ij}]_{n \times n}$ são dadas por (KRÜGER, 1980, p. 21; HÖPCKE e KRÜGER, 1981):

$$d = p - k, \quad (3.109)$$

$${}_n \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} {}_n (\mathbf{M}_1)_k & {}_n (\mathbf{M}_2)_d \\ {}_r (\Lambda_1)_k & {}_d \mathbf{0}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_k (\mathbf{M}_1^T)_n \\ {}_d (\mathbf{M}_2^T)_k \end{bmatrix} = {}_n (\mathbf{M}_1)_k {}_k (\Lambda_1)_k {}_k (\mathbf{M}_1^T)_n, \quad (3.110)$$

$${}_n \mathbf{A}_n^+ = {}_n (\mathbf{M}_1)_k {}_k (\Lambda_1^{-1})_k {}_k (\mathbf{M}_1^T)_n, \quad (3.111)$$

nas quais ${}_r (\Lambda_1)_k$ é a matriz cuja diagonal contém os k valores próprios não-nulos e os outros elementos são zero; ${}_d \mathbf{0}_d$ é matriz nula; ${}_k (\mathbf{M}_1)_k$ é a matriz dos r vetores próprios normalizados \mathbf{m}_i correspondentes aos r valores próprios λ_i ; ${}_r (\mathbf{M}_2)_d$ é a matriz dos d vetores próprios normalizados \mathbf{m}_j correspondentes aos d valores próprios λ_j ; e ${}_k (\Lambda_1^{-1})_k$ é a inversa ordinária de ${}_k (\Lambda_1)_k$.

BRONSON (1993, p. 255, 263) analisa fórmulas numericamente estáveis e não-estáveis que calculam a pseudo-inversa; uma numericamente estável é:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}_1^H, \tag{3.112}$$

na qual o índice H significa transposta hermitiana. As instruções para o cálculo são:

- a) determine os valores próprios de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e uma base canônica de vetores ortonormados para $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$;
- b) construa uma matriz diagonal \mathbf{D} cujos elementos da diagonal são os valores singulares positivos de \mathbf{A} (i.e., as raízes quadradas positivas destes valores próprios);
- c) faça $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2]$, em que as colunas de \mathbf{V}_1 são os vetores próprios identificados na alínea a, os quais correspondem aos valores próprios positivos e as colunas de \mathbf{V}_2 são os vetores próprios restantes;
- d) calcule $\mathbf{U}_1 = \mathbf{A} \mathbf{V}_1 \mathbf{D}^{-1}$.

3.1.3.15 Formas bilinear e quadrática

A expressão

$$\mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j y_k, \tag{3.113}$$

em que a_{jk} é um escalar, chama-se forma bilinear das $2n$ variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n .

Desenvolvendo a 3.113 obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + \dots + a_{1n}x_1y_n \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 + \dots + a_{2n}x_2y_n \\ & + a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{313}x_3y_3 + \dots + a_{3n}x_3y_n \\ & + \dots \\ & + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + a_{n3}x_ny_3 + \dots + a_{nn}x_ny_n \end{aligned} \tag{3.114}$$

que é o desenvolvimento do produto

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}. \tag{3.115}$$

Se $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, obtém-se o produto escalar de \mathbf{x} por \mathbf{y} .

Se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, obtém-se a forma quadrática

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (3.116)$$

3.1.3.16 Matriz positiva definida e matriz positiva semidefinida

Uma matriz simétrica de ordem n chama-se positiva definida, se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (3.117)$$

e chama-se positiva semidefinida, se

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (3.118)$$

As propriedades mais importantes destas matrizes (KOCH, 1980, p. 45-46) são:

- uma matriz simétrica será positiva definida, se os valores próprios forem positivos;
- uma matriz simétrica será positiva semidefinida, se os valores próprios forem não-negativos;
- uma matriz positiva definida é regular, i.e., não-singular;
- se \mathbf{A} for uma matriz positiva definida, então $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$ será positiva definida se $k(\mathbf{B}) = k(\mathbf{A})$;
- se \mathbf{A} for uma matriz positiva definida, sê-lo-á também \mathbf{A}^{-1} .

3.1.3.17 Matriz raiz quadrada

Chama-se matriz raiz quadrada de \mathbf{A} , denotada pelo símbolo $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, a matriz

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T = \sum_{i=1}^p \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T \sqrt{\lambda_i}, \quad (3.119)$$

cujas propriedades são:

$$\text{a) } \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right)^T = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}; \quad (3.120)$$

$$\text{b) } \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}; \quad (3.121)$$

$$\text{c) } \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{I}. \quad (3.122)$$

3.1.3.18 Matriz idempotente

A matriz \mathbf{A} de ordem n é idempotente se a condição

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A} \quad (3.123)$$

for satisfeita. Este tipo de matriz é importante para a obtenção das redundâncias parciais para o exame da confiabilidade (ver 6.2.2). Esta matriz possui as propriedades seguintes (KOCH, 1980, p. 47-48; NOBLE e DANIEL, 1986, p. 275; 358; BRONSON, 1993, p. 253, 266):

- a) os valores próprios são ou zero ou 1;
- b) uma condição necessária e suficiente para que uma matriz hermitiana de ordem n seja idempotente é que k de seus valores próprios sejam iguais a 1, e os $n-k$ restantes sejam iguais a zero, em que k é o posto da matriz;
- c) traço de uma matriz hermitiana idempotente \mathbf{A} é igual ao seu posto, i.e., $\text{tr}(\mathbf{A}) = k(\mathbf{A})$; (3.124)
- d) se \mathbf{A} é hermitiana e idempotente, então $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, em que \mathbf{A}^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz \mathbf{A} ;
- e) \mathbf{AA}^+ e $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ e são hermitianas e idempotentes;
- f) se a matriz \mathbf{A} de ordem n com $k(\mathbf{A}) = r$ for idempotente, então a diferença $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ também sê-lo-á com $k(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = n - r$; (3.125)
- g) se \mathbf{A} for idempotente e regular, então será $\mathbf{A} = \mathbf{I}$;
- h) se \mathbf{A} for idempotente e simétrica, então ela será positiva semidefinida.

3.1.3.19 Matrizes de rotação

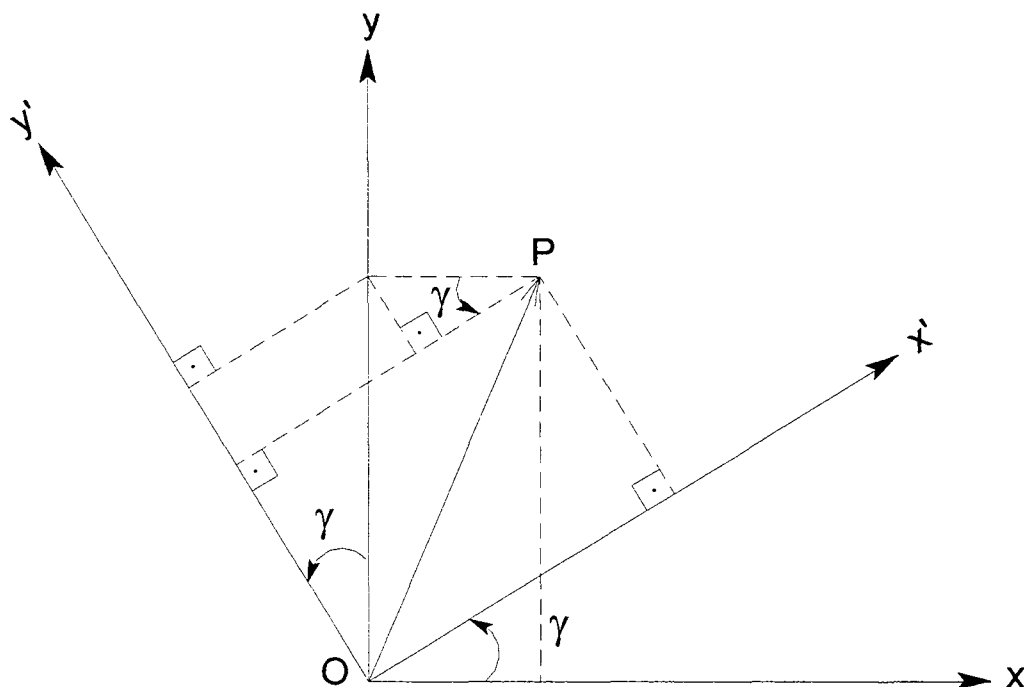
A fim de obter as matrizes de rotação, considere a figura 3.10, em que o sistema $Ox'y'z'$ acha-se girado pelo ângulo γ , no sentido matematicamente positivo, em relação ao sistema $Oxyz$. As coordenadas x', y' e z' do ponto P escritas com as coordenadas do sistema $Oxyz$ são:

$$x' = x \cos \gamma + y \sin \gamma, \quad (3.126)$$

$$y' = -x \sin \gamma + y \cos \gamma, \quad (3.127)$$

$$z' = z. \quad (3.128)$$

FIGURA 3.10 – OBTENÇÃO DAS MATRIZES DE ROTAÇÃO



A matriz transformação ortogonal é

$$\mathbf{R}_{3(\gamma)} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.129)$$

Por conseguinte, o sistema recebe a notação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{3(\gamma)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

Similarmente, pela rotação dos eixos cartesianos pelo ângulo β em torno do eixo y e pelo ângulo α em torno do eixo x, obtém-se, respectivamente, as matrizes de rotação, também chamadas matrizes transformação ortogonal, seguintes:

$$\mathbf{R}_{2(\beta)} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{1(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.131; 3.132)$$

3.1.3.20 Matrizes de reflexão

Mediante a equação

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.133)$$

um sistema dextrogiro é transformado em um sistema levogiro. Trata-se, portanto, de uma reflexão, i.e., a inversão da direção do eixo x, de modo que fique na direção oposta. Esta inversão é realizada mediante a matriz

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Similarmente, as reflexões dos eixos y e z são dadas, respectivamente, pelas matrizes

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.135; 3.136)$$

São propriedades destas matrizes (HECK, 1995, p. 381):

$$\text{a) } \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T = \mathbf{P}_i^{-1}, \quad i \in \{1, 2, 3\}; \quad (3.137)$$

$$\text{b) } \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_3; \quad (3.138)$$

$$\text{c) } \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_1; \quad (3.139)$$

$$\text{d) } \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_3 = -\mathbf{P}_2. \quad (3.140)$$

3.1.3.21 Produto Kronecker

Sejam as matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p \times q}$. A matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{mp \times nq}$ chama-se produto Kronecker das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} cujo símbolo é $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1j}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2j}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}\mathbf{B} & a_{i2}\mathbf{B} & \cdots & a_{ij}\mathbf{B} & \cdots & a_{in}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mj}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

O produto Kronecker tem as propriedades (WANG e CHOW, 1994, p. 52-53):

$$a) \quad \mathbf{0} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}; \quad (3.142)$$

$$b) \quad (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}); \quad (3.143)$$

$$c) \quad \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_2); \quad (3.144)$$

$$d) \quad (a\mathbf{A}) \otimes (b\mathbf{B}) = ab(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}), \text{ em que } a \text{ e } b \text{ são números reais}; \quad (3.145)$$

$$e) \quad (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \otimes (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2); \quad (3.146)$$

$$f) \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T; \quad (3.147)$$

$$g) \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^+ = \mathbf{A}^+ \otimes \mathbf{B}^+; \quad (3.148)$$

$$h) \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}, \text{ se } \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B} \text{ forem regulares}; \quad (3.149)$$

i) se \mathbf{A} for uma matriz de ordem n com valores próprios $\lambda_1^A, \lambda_2^A, \dots, \lambda_i^A, \dots, \lambda_n^A$, e se \mathbf{B} for uma matriz de ordem m com valores próprios $\lambda_1^B, \lambda_2^B, \dots, \lambda_j^B, \dots, \lambda_m^B$, então, os valores próprios de $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ são dados por

$$\lambda_i^A \times \lambda_j^B, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}; \quad (3.150)$$

$$j) \quad \det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \lambda_i^A \lambda_j^B = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^A \right)^m \left(\prod_{j=1}^m \lambda_j^B \right)^n = [\det(\mathbf{A})]^m [\det(\mathbf{B})]^n. \quad (3.151)$$

3.1.3.22 Produto Khatri-Rao

Sejam as matrizes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{p \times r}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{q \times r}$. Sejam $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ os vetores coluna de \mathbf{A} e $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ os vetores coluna de \mathbf{B} . O produto Khatri-Rao formado a partir das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , denotado pelo símbolo $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ é a matriz (KHATRI e RAO, 1968, p. 169)

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{b}_r] \quad (3.152)$$

de ordem $pq \times r$.

Se $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_{ij}]_{s \times r}$ com os vetores coluna $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$, então

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C} = [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{b}_r \otimes \mathbf{c}_r] \quad (3.153)$$

de ordem $pqs \times r$ e com a propriedade

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}). \quad (3.154)$$

A importância deste produto está na formulação de equações lineares para a obtenção do vetor de pesos otimizados (MÜLLER, 1986, p. 161).

3.1.3.23 Operadores vec e vech de matrizes

A matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]_{m \times n}$ pode ser escrita como um vetor constituído pela ordenação das colunas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n$ uma sob a outra. À operação que ordena as colunas uma sob a outra de uma matriz \mathbf{A} , transformando-a em um vetor, dá-se o nome de vetor de colunas da matriz \mathbf{A} e é denotado pelo símbolo $\text{vec}(\mathbf{A})$ (HENDERSON e SEARLE, 1979, p. 65; KOCH, 1980, p. 39; WANG e CHOW, 1994, p. 53-54). Este símbolo significa o vetor formado pelas colunas de \mathbf{A} , o qual é escrito na forma

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}. \quad (3.155)$$

Propriedades:

$$\text{a) } \text{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{vec}(\mathbf{A}) + \text{vec}(\mathbf{B}); \quad (3.156)$$

$$\text{b) } \text{vec}(a\mathbf{A}) = a \text{vec}(\mathbf{A}), \text{ em que } a \text{ é número real}; \quad (3.157)$$

$$\text{c) } \text{vec}(\mathbf{xy}^T) = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}, \text{ em que } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ são, respectivamente,} \quad (3.158)$$

vetores de ordem $n \times 1$ e $m \times 1$;

$$d) \text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}^T) \text{vec}(\mathbf{B}). \quad (3.159)$$

O operador vech cria um vetor a partir de uma matriz simétrica em que os elementos acima da diagonal são desconsiderados. Por exemplo, o operador vech , e.g., da matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}]_{3 \times 3}$ é escrito na forma

$$\text{vech} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{31} \\ \mathbf{a}_{22} \\ \mathbf{a}_{32} \\ \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

O operador vech é importante como estrutura que **aprimora o memorial da caracterização de extremas para a matrícula imobiliária.**

3.1.3.24 Traço de matriz

O traço da matriz \mathbf{A} de ordem n , denotado pelo símbolo $\text{tr}(\mathbf{A})$, é a soma dos elemento diagonais \mathbf{a}_{ii} , i.e.,

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ii}. \quad (3.161)$$

Para o traço de matriz são válidas as propriedades (WELLS, 1971, p. 58-59; WANG e CHOW, 1994, p. 54):

$$a) \text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T). \quad (3.162)$$

$$b) \text{tr}(c\mathbf{A}) = c \text{tr}(\mathbf{A}), \text{ em que } c \text{ é número real}; \quad (3.163)$$

$$c) \text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}); \quad (3.164)$$

$$d) \text{tr}({}_m\mathbf{A}_{n \ n} \mathbf{B}_m) = \text{tr}({}_n\mathbf{B}_{m \ m} \mathbf{A}_n); \quad (3.165)$$

$$e) \text{tr}({}_m\mathbf{A}_{n \ n} \mathbf{B}_{m \ m} \mathbf{C}_r \mathbf{D}_m) = \text{tr}[({}_m\mathbf{C}_r \mathbf{D}_m)({}_m\mathbf{A}_{n \ n} \mathbf{B}_m)] = \text{tr}({}_r\mathbf{D}_{m \ m} \mathbf{A}_{n \ n} \mathbf{B}_{m \ m} \mathbf{C}_r); \quad (3.166)$$

$$f) \text{tr}(\mathbf{AA}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}); \quad (3.167)$$

$$g) \text{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = \text{tr}(\mathbf{B}); \quad (3.168)$$

$$h) \operatorname{tr}({}_n\mathbf{A}_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n; \quad (3.169)$$

$$i) \operatorname{tr}(\mathbf{A}) > 0, \text{ se } \mathbf{A} \text{ for matriz positiva definida,} \quad (3.170)$$

ou se \mathbf{A} for positiva semidefinida com $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$;

$$j) \operatorname{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})\operatorname{tr}(\mathbf{B}); \quad (3.171)$$

$$k) \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = (\operatorname{vec} \mathbf{A}^\top)^\top \operatorname{vec}(\mathbf{B}); \quad (3.172)$$

$$l) \operatorname{tr}(\mathbf{a}^\top \mathbf{A} \mathbf{a}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{a}^\top) = \mathbf{a}^\top \mathbf{A} \mathbf{a}. \quad (3.173)$$

3.1.4 Diferenciação com Vetores e com Matrizes

Seja $f(\mathbf{x})$ uma função contínua dos elementos do vetor

$$\mathbf{x}^\top = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_n] \quad (3.174)$$

cujas 1ª e 2ª derivadas parciais, respectivamente,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \text{ e } \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.175)$$

existem para todo \mathbf{x} no espaço Euclidiano de dimensão n . O vetor operador derivada parcial é definido como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.176)$$

Para a função $f(\mathbf{x})$, o vetor de derivadas parciais resulta a expressão

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.177)$$

As derivadas das seguintes funções são importantes:

a) se $f(\mathbf{x})$ for constante para todo \mathbf{x} , então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}; \quad (3.178)$$

b) se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$, ou $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{a}$, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (3.179)$$

3.1.4.1 Derivada da forma bilinear $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$

Sejam os vetores $\mathbf{x} = [x_i]_{3 \times 1}$ e $\mathbf{y} = [y_i]_{2 \times 1}$ e a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3 \times 2}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}. \quad (3.180; 181; 182)$$

Seja a forma bilinear $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ em que os elementos da matriz \mathbf{A} são constantes, e em que os elementos dos vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são as variáveis.

A derivada parcial

$$\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.183)$$

é um vetor que tem a mesma ordem do vetor \mathbf{x} , e a derivada parcial

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \quad (3.184)$$

é um vetor que tem a mesma ordem do vetor \mathbf{y} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)y_2, \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad (3.186)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial y_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y})}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \quad (3.187)$$

3.1.4.2 Derivada da forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$

Sejam o vetor $\mathbf{x} = [x_i]_{2 \times 1}$, e a matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2 \times 2}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.188; 189)$$

Seja $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ em que os elementos da matriz \mathbf{A} são constantes, e em que os elementos do vetor \mathbf{x} são as variáveis. A derivada parcial

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.190)$$

é um vetor que tem a mesma ordem do vetor \mathbf{x} .

Com efeito,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)x_2, \quad (3.191)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} + a_{21} + a_{12} \\ a_{12} + a_{21} + 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{x}. \quad (3.192)$$

Se a matriz \mathbf{A} for simétrica, i.e., $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, a derivada parcial 3.190 será

$$2\mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (3.193)$$

3.1.5 Maximização da Forma Quadrática

Seja $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p \times p}$ uma matriz positiva definida cujos valores próprios são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ e cujos vetores próprios são $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p$, e seja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. As expressões da maximização da forma quadrática (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 82-84) são dadas por:

$$\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_1, \text{ quando } \mathbf{x} = \mathbf{m}_1; \quad (3.194)$$

$$\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_p, \text{ quando } \mathbf{x} = \mathbf{m}_p; \quad (3.195)$$

$$\max_{\mathbf{x} \perp \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_k} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \lambda_{k+1}, \text{ quando } k = 1, 2, \dots, p-1. \quad (3.196)$$

▷ Prova:

Seja \mathbf{M}_p uma matriz ortogonal cujas colunas são os vetores próprios $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p$ e Λ uma matriz diagonal, cujos elementos são os valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ e seja $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{M}^T$ (ver 3.119) e ainda $\mathbf{y} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}$. Então

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \Lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \Lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^T \mathbf{x}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^T \Lambda \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i y_i^2}{\sum_{i=1}^p y_i^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^p y_i^2}{\sum_{i=1}^p y_i^2} = \lambda_1. \triangleleft \quad (3.197)$$

3.2 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Na Geometria, o ponto é considerado elemento, e os demais entes geométricos, e.g., a reta, o plano, o polígono são considerados conjuntos. Ponto, reta e plano são conceitos primitivos, os quais são aceitos sem definição. Além dos conceitos primitivos, para estudar a Geometria são necessários os postulados ou axiomas e teoremas. Nesta seção são dados os conceitos fundamentais com as respectivas fórmulas, as quais são necessárias à **caracterização de extremas** que compõem os lf_s .

A posição de um ponto P para a Geodésia é definida por coordenadas em espaços de uma, duas, três dimensões.

As coordenadas podem ser reunidas no vetor posição r_0 , de modo que se obtém, para um certo ponto P, as notações:

$$r_0 = [x], \quad r_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad r_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.198; 199; 200)$$

O intervalo entre dois pontos no espaço é definido como segmento de reta que desempenha um papel importante na definição dos lf_s . No espaço de três dimensões, as coordenadas do ponto inicial $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e as do ponto final $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de um segmento podem ser reunidas no vetor

$$r_0^T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2]. \quad (3.201)$$

Vetores assim constituídos ficam implícitos no **memorial da caracterização de extremas**, se os sistemas de coordenadas polares forem empregados.

3.2.1 Sistemas de Coordenadas

Um sistema de coordenadas é a correspondência biunívoca entre pontos do espaço e um subconjunto de números reais, e.g., a correspondência biunívoca de um ponto e um número da reta que contém os números reais

O sistema de coordenadas serve para a descrição quantitativa de pontos do espaço, e.g., do espaço de uma dimensão (a reta), do espaço de duas dimensões (o plano) e do espaço de três dimensões. Os números que determinam ponto são

chamados coordenadas. Os sistemas de coordenadas mais utilizados na Geometria são o sistema de coordenadas retangulares no espaço de duas e de três dimensões e o sistema de coordenadas polares de duas e de três dimensões; este último é também denominado sistema de coordenadas esféricas. Em quaisquer dos sistemas de coordenadas em Geodésia, escolhe-se designar a coordenada por número real, porque o conjunto dos números reais possui as propriedades (BRONSTEIN et al., 1999, p. 2):

- a) o conjunto dos números reais é infinito;
- b) o conjunto dos números reais é ordenado, i.e., para cada dois números reais distintos a e b pode-se indicar qual é o maior ;
- c) o conjunto dos números reais é denso, i.e., entre dois números reais distintos a e b , sendo $a < b$, existe pelo menos um número real c tal que $a < c < b$;
- d) o conjunto dos números reais é contínuo, i.e., para cada ponto da reta numerada corresponde um número real, o que não vale para o conjunto dos números racionais.

3.2.1.1 Sistema de coordenadas do espaço de uma dimensão

Sobre uma reta x , na qual estão reunidos os elementos do conjunto dos números reais, designado pelo símbolo \mathbb{R} , a posição de um ponto P_0 fica definida se sobre ela forem dados a origem (lat. *Origo*) da coordenada e um segmento unitário $u = \overline{O1}$. Se esta reta for dividida em duas semi-retas, uma de orientação positiva $(\overline{O +\infty})$ e outra de orientação negativa $(\overline{O -\infty})$, pelo ponto comum O (denominado origem), se um segmento unitário u for escolhido e se mediante uma seqüência de comprimento u ambas as semi-retas forem marcadas com números reais, então a um dado número real, genericamente designado por a , corresponderá um único ponto (BRONSTEIN et al., 1999, p. 1). A este número a , que representa a distância entre o ponto na semi-reta e a origem, é dado o nome de coordenada do ponto.

3.2.1.2 Sistema de coordenadas do espaço de duas dimensões

No espaço de duas dimensões, i.e., o plano, para fins de mensuração da posição de um ponto P_0 , distinguem-se dois grandes grupos que são constituídos pelo sistema de coordenadas paralelas oblíquas e pelo sistema de coordenadas polares.

3.2.1.2.1 Sistema de coordenadas paralelas oblíquas

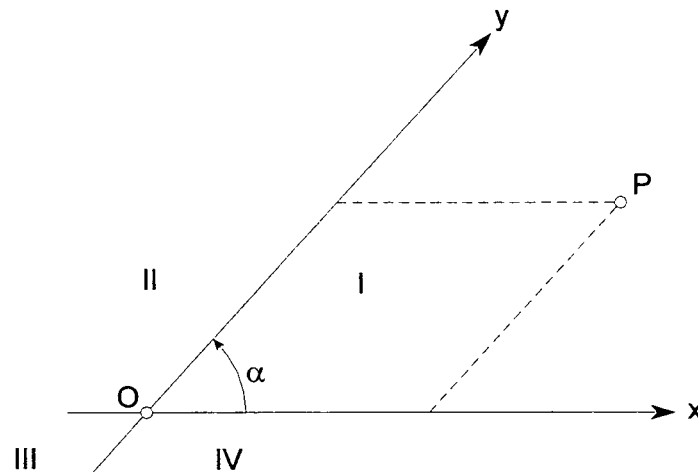
A fim de determinar o ponto no plano são necessárias duas retas numeradas com origens O e O' das coordenadas e os segmentos unitários $u = \overline{O1}$ e $u' = \overline{O'1'}$. Estas retas são ordenadas de modo que as respectivas origens coincidam, e de modo que elas tornem os eixos do sistema de coordenadas. Estes eixos são denominados eixos coordenados ou eixos das coordenadas e designados como eixo x ou eixo das abscissas, e como eixo y ou eixo das ordenadas (lat. *abscindere*, cortar; *ordinare*, ordenar). Os eixos compreendem um ângulo $\alpha < \pi$ de modo que a indicação do eixo no sistema dextrogiro é escolhido de tal modo que um giro do eixo x de um ângulo α no sentido de giro matematicamente positivo (sentido de giro anti-horário) leva-o sobre o eixo y ; no sistema levogiro vale o sentido de giro horário.

Na Matemática, o ângulo é chamado positivo se segue o sentido de giro anti-horário e é chamado negativo se segue o sentido de rotação horário (BRONSTEIN et al., 1999, p.125). Na Geodésia é estabelecido o ângulo positivo pela rotação no sentido horário.

As coordenadas x e y do ponto são também denominadas abscissa e ordenada, respectivamente. Um dos símbolos $P(x,y)$ ou $P=(x,y)$ é usado para designar o ponto P com abscissa x e ordenada y .

O plano xy fica dividido em quatro regiões denominadas quadrantes os quais são contados no sentido de giro matematicamente positivo como primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes (figura 3.11). Em cada um destes quadrantes, os eixos são caracterizados por sinais consoante a exposição no quadro 3.1.

FIGURA 3.11 – SISTEMA DE COORDENADAS PARALELAS OBLÍQUAS



QUADRO 3.1 – DESIGNAÇÃO DOS QUADRANTES E SINAIS DOS SEMI-EIXOS DO SISTEMA DE COORDENADAS PARALELAS OBLÍQUAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES

PONTO NO QUADRANTE	SINAL DA	
	Abscissa (x)	Ordenada (y)
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Pelo ponto P situado em um destes quadrantes, pode-se traçar duas paralelas; uma paralela ao eixo x e a outra, paralela ao eixo y. A intersecção delas com os respectivos eixos definem, cada uma, um ponto e o afastamento deste ponto em relação a origem define uma das coordenadas do ponto P.

3.2.1.2.2 Sistema de coordenadas paralelas retangulares

Se os eixos de coordenadas são perpendiculares um com o outro, i.e., $\alpha = \pi/2$, então, entende-se um sistema de coordenadas paralelas retangulares ou, também, um sistema de coordenadas cartesianas, idealizado pelo filósofo e matemático francês René Descartes, chamado *Cartesius* (1596-1650). O Sistema de coordenadas cartesianas se caracteriza por ser o sistema cujos eixos são perpendiculares entre si e cuja unidade de comprimento é a mesma sobre todos os eixos. O procedimento pelo qual se obtêm das coordenadas de um ponto P_0 situado em um certo quadrante é o mesmo descrito para a obtenção das

coordenadas paralelas oblíquas. Analiticamente, as coordenadas cartesianas resultam do produto escalar entre o vetor posição e os versores dos eixos coordenados i e j , nas formas $x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}$ e $y = \mathbf{y} \cdot \mathbf{j}$.

O sistema de coordenadas cartesianas é empregado em mensurações geodésicas, adotando o sistema levogiro conforme a figura 3.13 em que os quadrantes ficam numerados – a partir de I que é comum com o sistema dextrogiro – no sentido horário.

FIGURA 3.12 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES

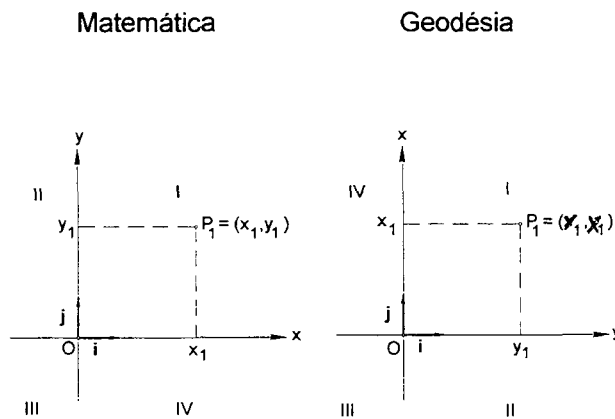
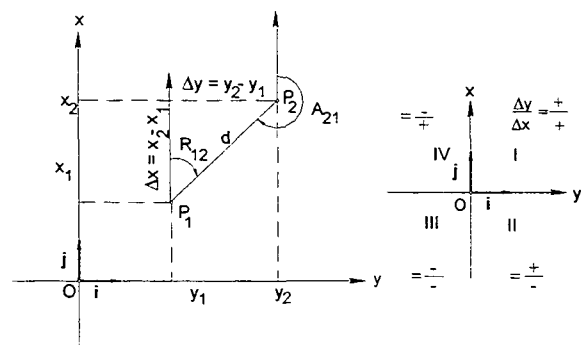


FIGURA 3.13 – ÂNGULO DE DIREÇÃO E SINAL EM SEU CÁLCULO



É comum a adoção do sistema levogiro do espaço de duas dimensões (WITTKE e MECKENSTOCK, 1998, p. 39) para algumas aplicações como a observação de distância d entre dois pontos P_1 e P_2 , o cálculo de suas respectivas coordenadas, e como função destas o ângulo de direção denominado rumo R_{12} e o seu recíproco R_{21} , o qual é definido no quadrante, conforme mostra a figura 3.13. A medida angular de direção A , independente do quadrante, sob a instrução em GRAFAREND et al. (1995, p. 339) é dada por:

$$A = \pi \left[1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(\Delta y) - \frac{1}{2} \text{sgn}(\Delta x) \text{sgn}(\Delta y) \right] + \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{se } \Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0 \quad (3.202)$$

em que o símbolo sgn designa o sinal algébrico do argumento Δx ou de Δy (ISO 1992a, p. 18).

3.2.1.2.3 Sistema de coordenadas polares

A despeito da simplicidade deste sistema (figuras 3.14 e 3.15), a sua importância está na analogia com a concepção do sistema de coordenadas polares elipsóidicas (seção 5.3.2.4); com as coordenadas polares elipsóidicas são os lf_s quantificados e orientados com azimute (quadro 7.4 e figura 7.3).

O sistema de coordenadas polares é definido por um ponto fixo O, chamado ponto origem ou pólo e por um eixo que parte do pólo, chamado eixo polar (figura 3.14). A posição do ponto P_0 do plano fica definida pelo ângulo α que é contado no sentido de giro matematicamente positivo e pelo segmento r_0 que vai do pólo ao ponto P_0 . O ângulo α situa no intervalo $0 \leq \alpha < 2\pi$ quando medido no sentido matematicamente positivo (SIMMONS, 1988, p. 196.); no sentido matematicamente negativo, o intervalo e variação é $-2\pi < \alpha \leq 0$. O segmento r_0 é denominado distância polar ou raio vetor e pode assumir qualquer valor positivo. Os números reais r_0 e α , escritos nesta ordem, os quais formam um par ordenado (r_0, α) são denominados coordenadas polares do ponto.

FIGURA 3.14 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES

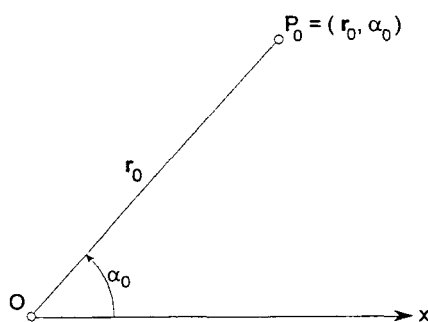
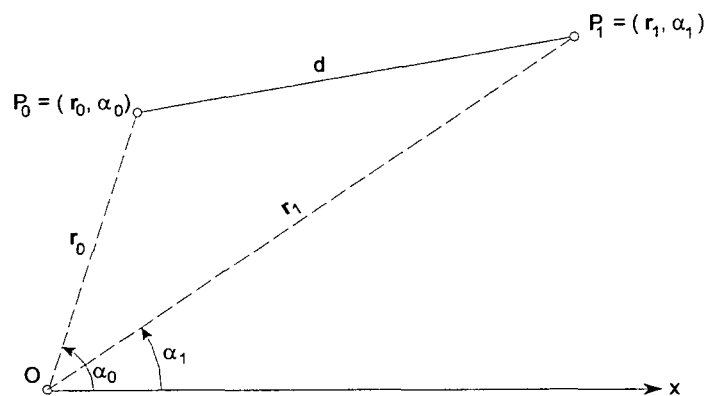


FIGURA 3.15 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES POR COORDENADAS POLARES



Na figura 3.15, a distância d definida pelos pontos $P_0 = (r_0, \alpha_0)$ e $P_1 = (r_1, \alpha_1)$, a qual é obtida pela lei dos cossenos, é escrita

$$|d| = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1 \cos(\alpha_0 - \alpha_1)}. \quad (3.203)$$

As coordenadas cartesianas (x, y) e as coordenadas polares (r_0, α) de um ponto qualquer estão relacionadas pela forma

$$x = r_0 \cos \alpha; \quad y = r_0 \sin \alpha; \quad r_0 = |\mathbf{r}_0| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (3.204; 205; 206)$$

e o ângulo α , contado no sentido matematicamente positivo, pode ser calculado pela 3.202 se forem trocados os argumentos Δx por y e Δy por x .

Sempre é suposto um sistema de coordenadas do espaço de duas dimensões sobreposto a um sistema de coordenadas polares do mesmo espaço, de modo que o semi-eixo x de orientação positiva coincida com o eixo polar. Qualquer ponto do espaço de duas dimensões terá, então, coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r_0, α) .

3.2.1.3 Sistema de coordenadas do espaço de três dimensões

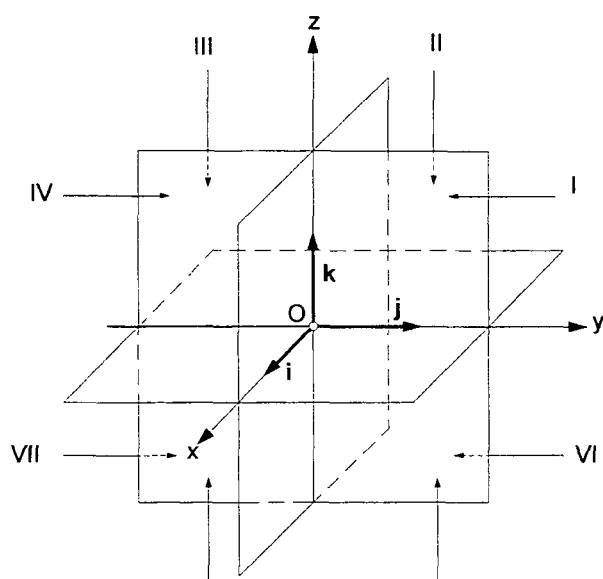
Dois grandes grupos são distinguidos: sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas esféricas ou polares do espaço de três dimensões.

3.2.1.3.1 Sistema de coordenadas cartesianas

A fim de definir um sistema de coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões é escolhido, primeiramente, um ponto fixo O , chamado origem das coordenadas. Neste ponto, são colocadas três eixos coordenados e mutuamente perpendiculares. Os eixos são designados, em geral, com x , y e z , e denominados de eixo das abscissas, das ordenada e das cotas, respectivamente. Os três eixos de coordenadas fixam três planos no espaço, os quais são designados com xy , xz e yz , e dividem o espaço em octantes. Os octantes numerados juntamente com os sinais característicos estão expostos na figura 3.16 e no quadro 3.2.

A orientação do sistema é conseguida mediante a fixação de três versores da direção dos eixos coordenados: no eixo x , o versor \mathbf{i} ; no eixo y , o versor \mathbf{j} e no eixo z , o versor \mathbf{k} . Por estes versores, os eixos de coordenadas são alinhados e o sistema de coordenadas é orientado no espaço. A tríade de versores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, nesta ordem, correspondentes à escolha do sistema de coordenadas x, y, z (sistema dextrogiro) é uma tríade positiva (KAPLAN, 1972, p. 53).

FIGURA 3.16 – OCTANTES



QUADRO 3.2 – DESIGNAÇÃO DOS OCTANTES E SINAIS DOS SEMI-EIXOS

COORDENADAS	OCTANTES							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Em qualquer dos octantes, o ponto P_0 nele situado tem a posição definida por um terço de números reais, os quais são denominados coordenadas retangulares do espaço de três dimensões desse ponto, cuja notação é $P_0(x, y, z)$ ou $P_0 = (x, y, z)$. (3.207)

As coordenadas x , y e z do ponto P_0 resultam do produto escalar entre o vetor posição \mathbf{r}_0 e os versores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} das direções dos eixos coordenados consoante a 3.25.

Segundo a posição da direção positiva dos eixos, dois tipos de sistema são possíveis. O primeiro denomina-se dextrogiro (figura 3.17), i.e., aquele em que o observador situado conforme o semi-eixo Oz vê o semi-eixo Ox coincidir com o semi-eixo Oy após o giro de um ângulo de $\pi/2$ no sentido positivo da trigonometria (i.e., sentido anti-horário); o segundo denomina-se levogiro (figura 3.18), i.e., aquele que girando o semi-eixo Ox no sentido horário de um ângulo $\pi/2$ coincide com o semi-eixo positivo Oy (BRONSTEIN et al., 1999, p. 204).

FIGURA 3.17 – SISTEMA DEXTROGIRO

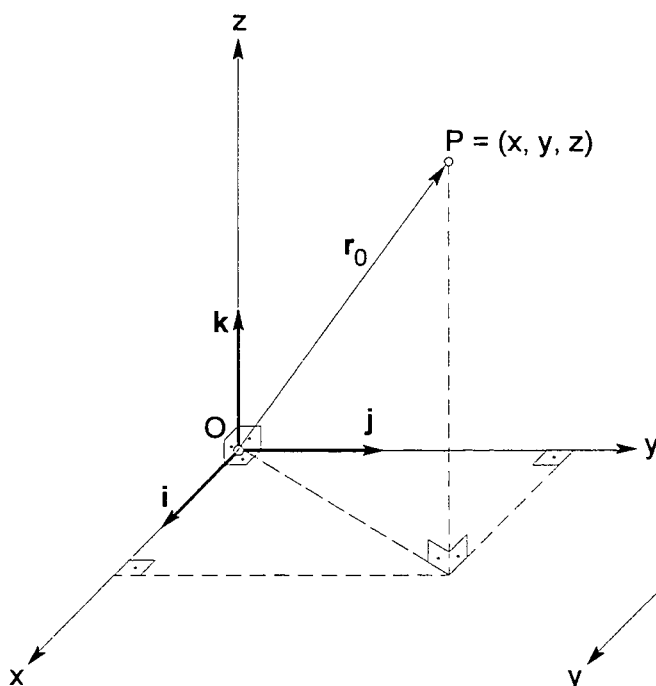
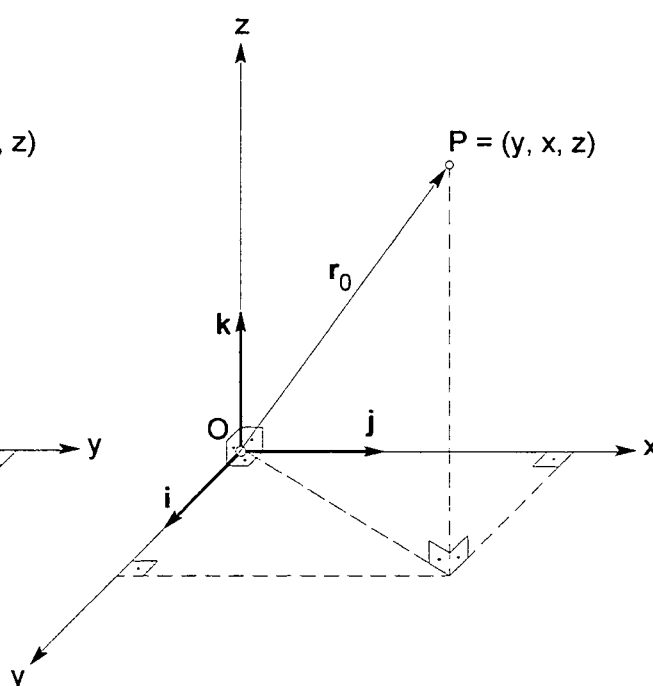


FIGURA 3.18 – SISTEMA LEVOGIRO



A imagem especular de um sistema dextrogiro forma um sistema levogiro.

3.2.1.3.2 Sistema de coordenadas esféricas ou sistema de coordenadas polares do espaço de três dimensões

O ponto P_0 do espaço de três dimensões pode ser determinado, no lugar do termo ordenado (x, y, z) das coordenadas cartesianas, também, de forma unívoca, pelo:

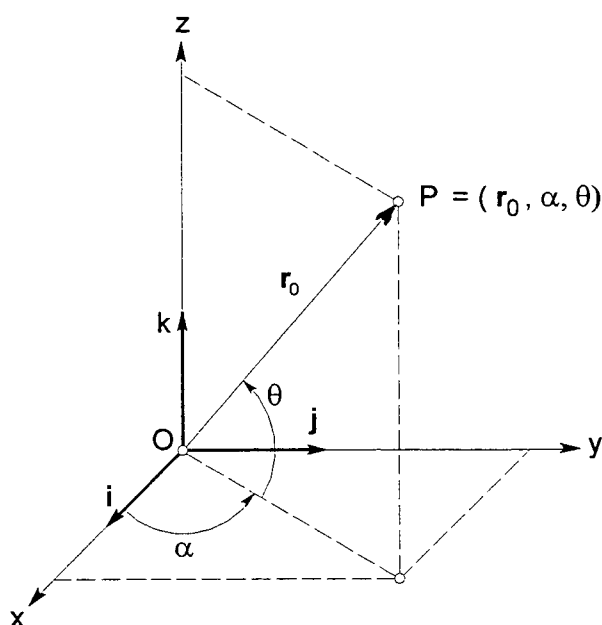
- afastamento $r_0 = |\mathbf{r}_0|$, $0 \leq r_0 < \infty$, do ponto P_0 em relação a origem O ;
- ângulo agudo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, formado entre o segmento OP_0 e a projeção ortogonal de deste segmento no plano xy , a qual é designada pelo símbolo r'_0 ;
- ângulo α , $0 \leq \alpha < 2\pi$, que a projeção do segmento OP_0 sobre o plano xy forma com o semi-eixo positivo x .

A origem de contagem do ângulo θ está na projeção do vetor posição \mathbf{r}_0 no plano xy e, a do ângulo α está na direção do semi-eixo positivo x .

A figura 3.19 ilustra os elementos matemáticos que compõem o sistema de coordenadas esféricas. Sempre é suposto que o sistema de coordenadas esféricas é sobreposto a um sistema de coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões. Observa-se que ao sistema de coordenadas polares do espaço \mathbb{R}^2 foi

acrescentado os eixos y e z . O termo coordenadas esféricas é utilizado porque o gráfico da equação $r_0 = \text{const}$ é uma esfera de centro O .

FIGURA 3.19 – SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS OU POLARES DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES



As coordenadas esféricas do ponto P_0 são dadas pela tríade (r_0, θ, α) . A cada tríade de coordenadas esféricas corresponde um único ponto do espaço de três dimensões. No caso particular em que P_0 se situa no eixo z , só r_0 e $\theta = \pm\pi/2$ são inequivocamente determinados; α é qualquer. As coordenadas esféricas são análogas às coordenadas polares do espaço de duas dimensões e, por isso, são chamadas, também, coordenadas polares do espaço de três dimensões.

O ponto P_0 determinado pelo terno ordenado (x, y, z) das coordenadas cartesianas pode ser expresso com as coordenadas esféricas (r_0, θ, α) :

$$x = r_0 \cos \theta \cos \alpha; \quad y = r_0 \cos \theta \sin \alpha; \quad z = r_0 \sin \theta. \quad (3.208; 209; 210)$$

O vetor posição de P_0 é, analiticamente, escrito

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r_0 \cos \theta (\cos \alpha)\mathbf{i} + r_0 \cos \theta (\sin \alpha)\mathbf{j} + r_0 (\sin \theta)\mathbf{k}. \quad (3.211)$$

3.2.2 Transformação de Coordenadas Cartesianas

Dá-se o nome de transformação de coordenadas ao procedimento de cálculo algébrico que visa conhecer as coordenadas de um ponto em outro sistema

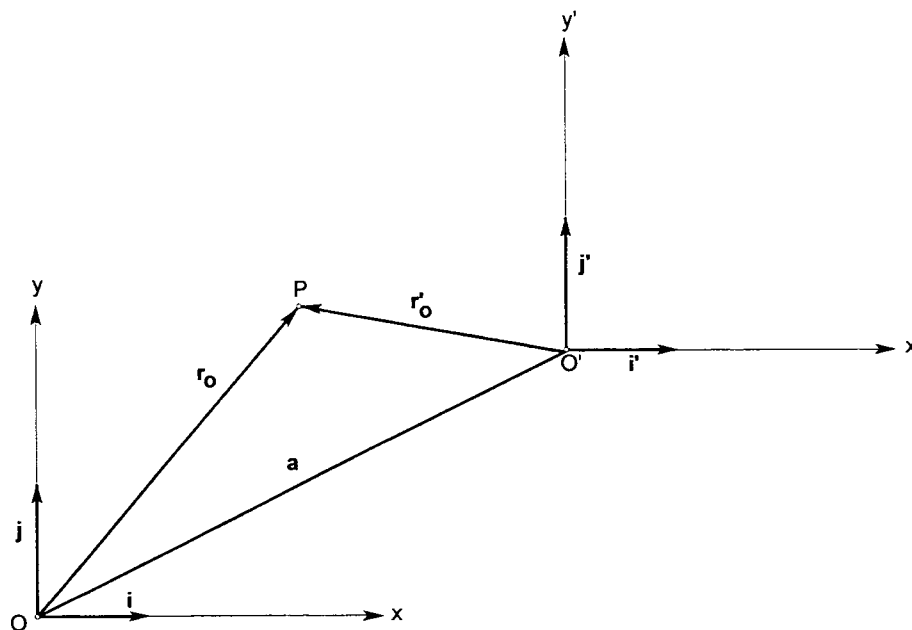
não idêntico com o primitivo. Distinguem-se quatro casos de transformação de coordenadas: translação paralela (ou simplesmente translação); rotação (ou giro); combinação de translação com rotação e a reflexão.

3.2.2.1 Transformação das coordenadas cartesianas do espaço de duas dimensões nas coordenadas de outro sistema não-idêntico

3.2.2.1.1 Translação

Sejam Oxy e $O'x'y'$ dois sistemas de coordenadas retangulares de um mesmo plano; sejam (x,y) e (x',y') os pares das coordenadas retangulares do ponto P no primeiro e segundo sistemas respectivamente, e seja (a_x, a_y) o par ordenado das coordenadas de O' referidas ao primeiro sistema (figura 3.20). Dá-se o nome de translação ao deslocamento paralelo dos eixos homólogos que passam da origem O para a origem O' e que mantêm o mesmo sentido dos eixos primitivos.

FIGURA 3.20 – TRANSLAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES



Na figura 3.20, a translação é efetuada pela soma vetorial

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_0, \quad (3.212)$$

cujas coordenadas são:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.213)$$

3.2.2.1.2 Rotação

Na rotação, a nova origem coincide com a primitiva, mas os eixos homólogos não são paralelos.

Na figura 3.20, fazendo a coincidência das origens, i.e., $O \equiv O'$, obtém-se

$$\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}'_0. \quad (3.214)$$

Exprimindo analiticamente a 3.214, fica

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' \quad (3.215)$$

que multiplicada pelos versores dos eixos coordenados \mathbf{i} e \mathbf{j} , e considerando o produto escalar dos versores (ver 3.24), resulta as duas equações

$$x = x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} \quad (3.216)$$

$$y = y'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \quad (3.217)$$

que podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_{(\alpha)} \mathbf{r}'_0, \quad (3.218)$$

em que

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}'_0 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.219; 220; 221)$$

O ângulo entre os eixos coordenados x e x' é igual ao ângulo entre os eixos coordenados y e y' , logo:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \cos \alpha, \quad (3.222)$$

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad (3.223)$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (3.224)$$

$$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} = \cos \alpha. \quad (3.225)$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \quad (3.226)$$

A transformação inversa é conseguida pela relação

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{R}_{(\alpha)}^T \mathbf{r}_0. \quad (3.227)$$

3.2.2.1.3 Combinação de translação com rotação

Na figura 3.21, que mostra a combinação de translação e rotação, a relação 3.212 expressa analiticamente é

$$xi + yj = a_x i + a_y j + x' i' + y' j'. \quad (3.228)$$

Multiplicando a 3.228 pelos versores dos eixos coordenados i e j :

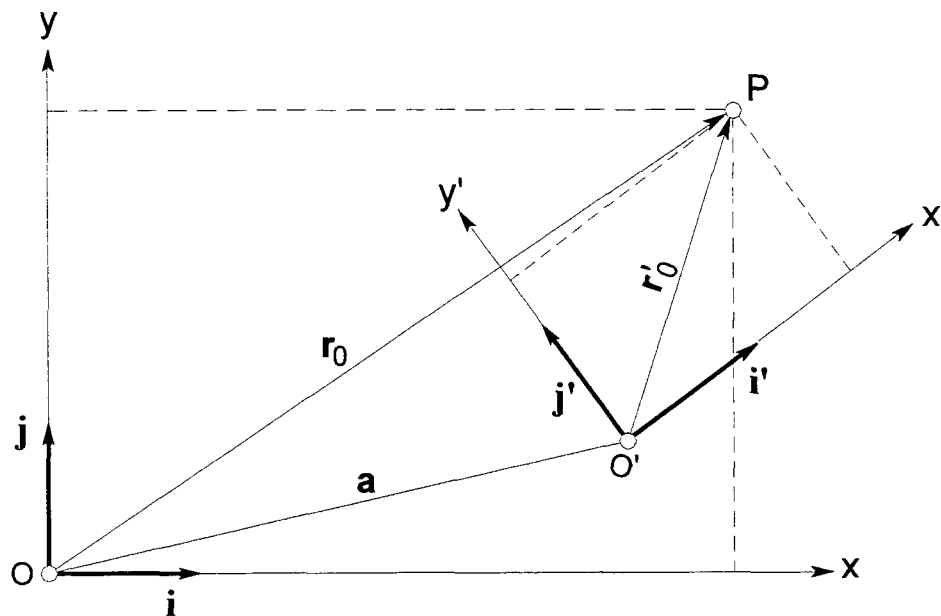
$$x = a_x + x' i' \cdot i + y' j' \cdot i, \quad (3.229)$$

$$y = a_y + y' i' \cdot j + y' j' \cdot j, \quad (3.230)$$

as duas equações podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{R}_{(\alpha)} \mathbf{r}'_0. \quad (3.231)$$

FIGURA 3.21 – COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÃO COM ROTAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES



A transformação inversa é conseguida pela relação

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{R}_{(\alpha)}^T (\mathbf{r}_0 - \mathbf{a}). \quad (3.232)$$

3.2.2.2 Transformação de coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões nas coordenadas esféricas

As coordenadas cartesianas x , y e z de um ponto podem ser calculadas a partir das coordenadas esféricas (r_0, θ, α) . Da figura 3.19, as relações seguintes são obtidas

$$x = r_0 \cos \theta \cos \alpha; \quad y = r_0 \cos \theta \sin \alpha; \quad z = r_0 \sin \theta; \quad (3.233; 234; 235)$$

com

$$r_0 = |\mathbf{r}_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.236)$$

As coordenadas esféricas (r_0, θ, α) são obtidas das coordenadas cartesianas segundo as fórmulas 3.236 e

$$\theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{para } x^2 + y^2 \neq 0; \quad (3.237)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{para } x > 0 \text{ e } y > 0; \end{cases} \quad (3.238)$$

$$\alpha = \begin{cases} \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{para } x < 0 \text{ e } y > 0; \end{cases} \quad (3.239)$$

$$\alpha = \begin{cases} 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{para } x > 0 \text{ e } y < 0. \end{cases} \quad (3.240)$$

O ângulo de orientação α , contado no sentido matematicamente positivo, pode ser calculado pela 5.77, fazendo $\lambda = \alpha$.

Sob a notação matricial, a relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas polares (r_0, θ, α) é escrita

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \alpha \\ \cos \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (3.241)$$

No espaço de duas dimensões, que se caracteriza por possuir $z = 0$, escreve-se

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r_0' \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.242)$$

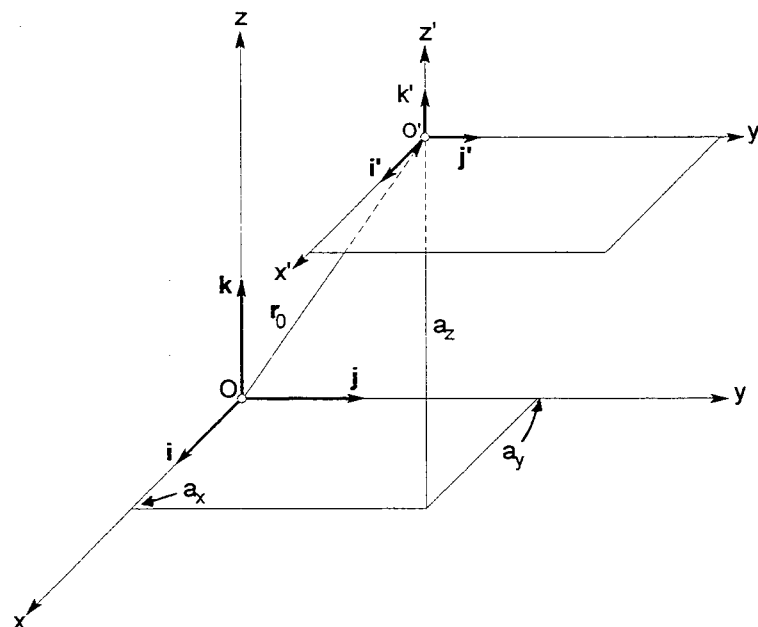
3.2.2.3 Transformação das coordenadas cartesianas do espaço de três dimensões nas coordenadas cartesianas de outro sistema não-idêntico

Ante dois sistemas de coordenadas cartesianas não-idênticos de eixos x, y e z e x', y' e z' surge o problema que consiste calcular, mediante as coordenadas cartesianas (x_0, y_0, z_0) de um ponto P_0 em relação a um dos sistemas, as coordenadas (x', y', z') deste ponto em relação ao outro sistema. Tal conversão de coordenadas é denominada transformação de coordenadas na qual distingue-se três casos: a translação de eixos, a rotação de eixos e uma combinação de ambos.

3.2.2.3.1 Translação de eixos

A translação de um sistema de coordenadas significa o deslocamento da origem do sistema de coordenadas ao longo do vetor r_0 para a origem O' (figura 3.22).

FIGURA 3.22 – TRANSLAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES

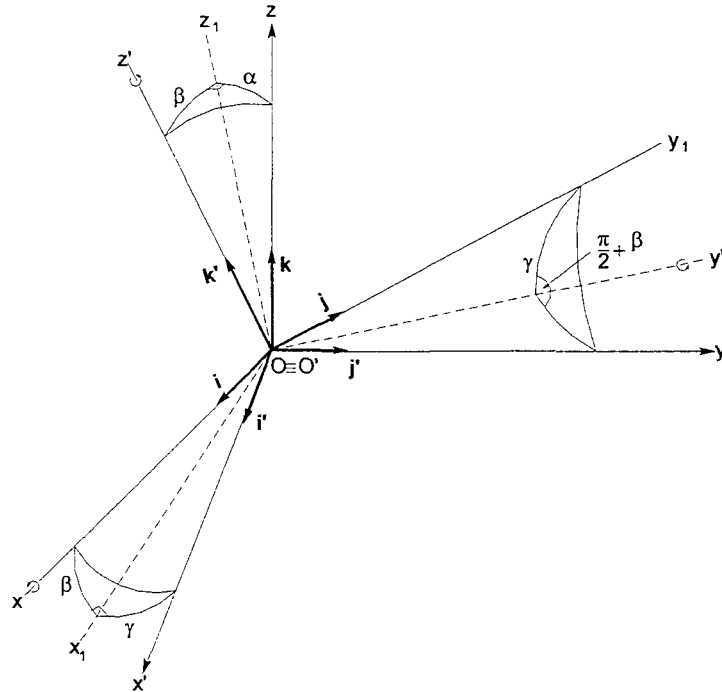


3.2.2.3.2 Rotação de eixos

O sentido de rotação dos eixos, com os ângulos α, β e γ , é o definido positivo matematicamente. Nove triângulos esféricos são formados e resolvidos pelo

teorema dos cossenos da trigonometria (ver Apêndice 2), resultando a matriz de rotação \mathbf{R} , também chamada matriz dos cossenos diretores (expressão 3.259).

FIGURA 3.23 – ROTAÇÃO DE SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES



3.2.2.3.3 Combinação de translação com rotação de eixos

Sejam $Oxyz$ e $O'x'y'z'$ dois sistemas de coordenadas cartesianas de origens O e O' respectivamente, (x, y, z) e (x', y', z') os ternos ordenados das coordenadas do ponto P_0 referidas ao primeiro e ao segundo sistema, respectivamente, e (x_0, y_0, z_0) o terno ordenado das coordenadas da origem O' no primeiro sistema (figura 3.24).

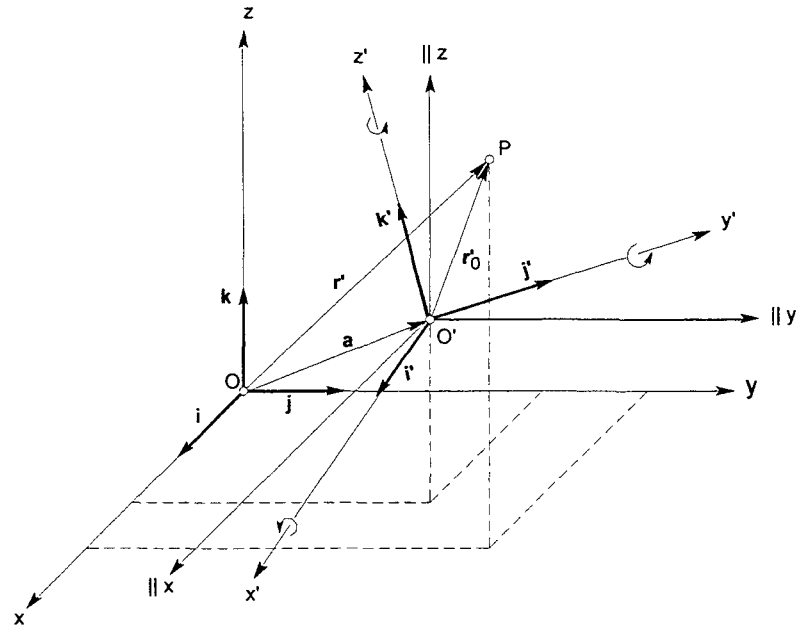
As coordenadas do ponto P_0 referida ao segundo sistema é obtida pela diferença vetorial

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{a}, \quad (3.243)$$

que é reescrita como

$$x'i' + y'j' + z'k' = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k. \quad (3.244)$$

FIGURA 3.24 – COMBINAÇÃO DE TRANSLAÇÃO COM ROTAÇÃO DE SISTEMAS DE COORDENADAS DO ESPAÇO DE TRÊS DIMENSÕES



Efetuada a multiplicação sucessiva pelos versores \mathbf{i}' , \mathbf{j}' e \mathbf{k}' das direções dos eixos coordenados, resultam as fórmulas que transformam as coordenadas do ponto P_0 do sistema $Oxyz$ no sistema $O'x'y'z'$

$$x' = (x - x_0)\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' + (y - y_0)\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' + (z - z_0)\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}', \quad (3.245)$$

$$y' = (x - x_0)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' + (y - y_0)\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' + (z - z_0)\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}', \quad (3.246)$$

$$z' = (x - x_0)\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' + (y - y_0)\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' + (z - z_0)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}', \quad (3.247)$$

as quais podem ser dispostas na forma matricial

$$\mathbf{x}' = \Delta \mathbf{x} \mathbf{R}^T, \quad (3.248)$$

em que

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \end{bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}. \quad (3.249; 250; 251)$$

Reciprocamente, para passar as coordenadas do ponto P_0 do sistema $O'x'y'z'$ para o sistema $Oxyz$, a 3.244 é multiplicada pelos versores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} das direções dos eixos coordenados, resultando:

$$x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i} = x - x_0, \quad (3.252)$$

$$x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j} = y - y_0, \quad (3.253)$$

$$x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = z - z_0. \quad (3.254)$$

Na forma matricial escreve-se

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}', \quad (3.255)$$

em que

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{i.i}' & \mathbf{i.j}' & \mathbf{i.k}' \\ \mathbf{j.i}' & \mathbf{j.j}' & \mathbf{j.k}' \\ \mathbf{k.i}' & \mathbf{k.j}' & \mathbf{k.k}' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (3.256; 257; 258)$$

A matriz \mathbf{R} , denominada matriz dos cossenos diretores ou matriz de rotação, cujos elementos são obtidos pelo teorema dos cossenos da trigonometria esférica (ver Apêndice 2) sobre 9 triângulos esféricos que podem ser formados na figura 3.23 é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (3.259)$$

em que os ângulos α, β e γ são as rotações em torno dos eixos x, y e z , respectivamente.

3.2.3 Descrição da Curvatura de uma Curva Plana e do Raio de Curvatura

Dá-se o nome de curvatura K (al. *Krümmung*) de uma curva plana no ponto A ao limite da razão entre o ângulo $\Delta \alpha$ que formam as direções positivas das tangentes aos pontos A e B e o comprimento do arco (AB) , $AB = \Delta s$ quando $B \rightarrow A$ (figura 3.25) (BARANENKOV et al., 1986, p. 104; BRONSTEIN et al., 1999, p. 227), i. e.,

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (3.260)$$

A curvatura exprime, portanto, a razão de variação do ângulo α com relação ao comprimento de arco s .

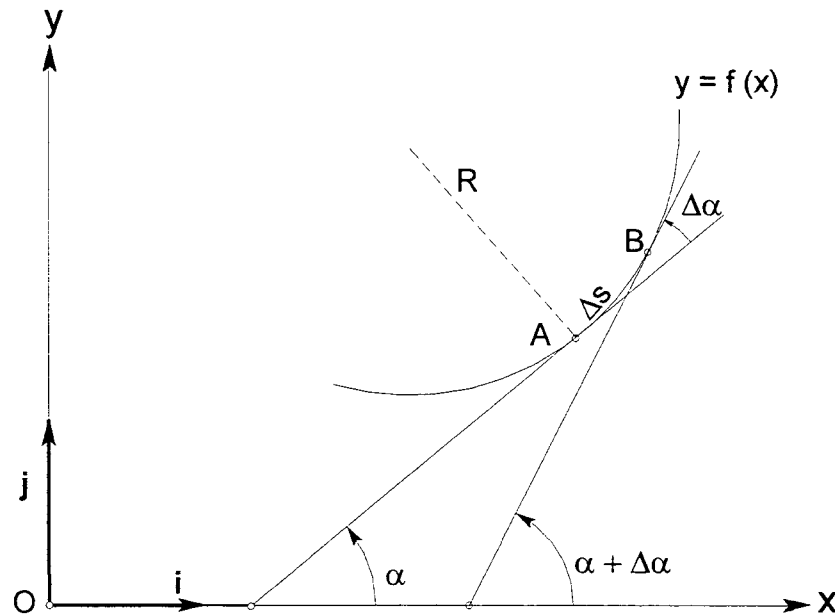
Da figura 3.25, advém

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{dy}{dx}. \quad (3.261)$$

A expressão da diferencial do arco $d\alpha$ é

$$d\alpha = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (3.262)$$

FIGURA 3.25 – RAIOS DE CURVATURA DE CURVA DO ESPAÇO DE DUAS DIMENSÕES



A expressão do elemento de arco infinitesimal ds do espaço de duas dimensões é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (3.263)$$

Dividindo ambos os membros por dx^2 , obtém-se

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (3.264)$$

Substituindo a 3.262 e a 3.264 na 3.260, escreve-se a expressão da curvatura K de uma curva do espaço de duas dimensões como:

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}. \quad (3.265)$$

Dá-se o nome de raio de curvatura R (al. *Krümmungskreisradius*) de uma curva à quantidade inversa do valor absoluto da curvatura K (BRONSTEIN et al., 1999, p. 227). Da 3.265 vem

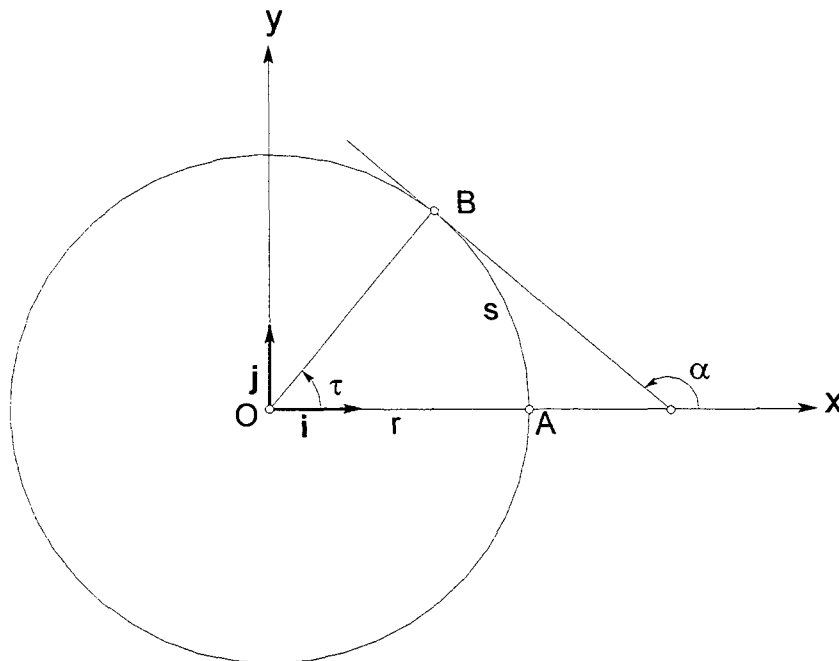
$$R = \frac{1}{|K|} = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right| = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad (3.266)$$

A curvatura K no ponto A é tanto maior quanto menor for o raio de curvatura R . Para uma circunferência de raio r é constante a curvatura $K = 1/r$ e, por conseguinte, o raio de curvatura $R = r$. Para a reta, são $K = 0$ e $R = \infty$. A elipse tem curvatura variável que é calculada pela 3.265 e aplicada ao cálculo do raio de curvatura da seção meridiana M .

A curvatura de uma reta é nula, pois α não varia quando um ponto é deslocado ao longo dessa reta, i.e., $d\alpha = 0$. Para a circunferência de raio r (figura 3.26)

$$\alpha = \tau + \frac{\pi}{2} = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2} \quad (3.267)$$

FIGURA 3.26 – CURVA DE CURVATURA CONSTANTE



e, portanto, a curvatura

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r}. \quad (3.268)$$

Este mesmo resultado é conseguido, sabendo-se que a curvatura da circunferência é constante e que o giro completo do ponto B implica a variação da direção de 2π rad na circunferência de comprimento $2\pi r$; portanto,

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2\pi}{2\pi r} = \frac{1}{r}. \quad (3.269)$$

Assim, aplicando a 3.269 à definição de lf_s que separam terras devolutas estaduais das terras devolutas municipais (seção 2.2.3.2.1), ter-se-ão as curvaturas dos lf_s : igual a 1/6 000 m se no Distrito e igual a 1/8 000 m se no Município.

A curvatura pode ser positiva ou negativa ou nula: $k > 0$, significa que α é crescente quando s cresce (a curva vira para a esquerda da tangente); $k < 0$, significa que α é decrescente quando s cresce (a curva vira para a direita da tangente); e $k = 0$ significa que α é constante quando s cresce.

3.2.4 Descrição dos Elementos de Linha Infinitesimais

Para a descrição da relação de medida entre a superfície original e a superfície de representação é, de significação fundamental, o elemento de linha infinitesimal, denotado pelo símbolo ds . No espaço de três dimensões, em coordenadas cartesianas (figura 3.27), escreve-se:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}, \quad (3.270)$$

em que

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{aligned} \right\}. \quad (3.271)$$

Substituindo a 3.271 na 3.270 resulta

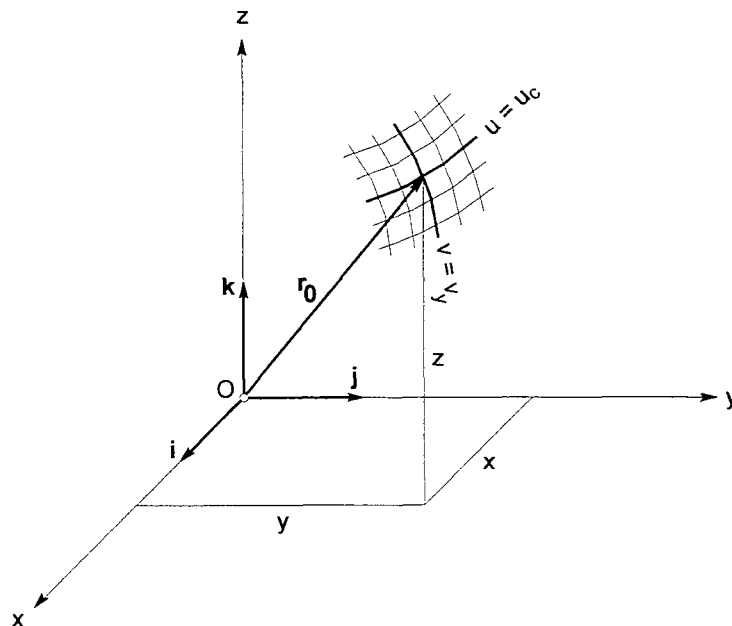
$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2dudv \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \end{aligned} \quad (3.272)$$

que é simplificada pela notação

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}. \quad (3.273)$$

As quantidades e , f e g foram introduzidas por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e são denominadas quantidades fundamentais de primeira ordem (KUNTZ, 1990, p. 5) ou primeiras quantidades fundamentais de Gauss.

FIGURA 3.27 – SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS



4 FUNDAMENTOS DA ESTATÍSTICA

Os métodos da Estatística têm sido um meio de ajuda indispensável na avaliação dos dados de observação geodésicas.

A ciência Estatística trata da organização, descrição, análise e interpretação dos dados amostrais. Está dividida, basicamente, em duas partes: a Estatística Descritiva que trata da descrição e organização dos dados amostrais, e a Estatística Indutiva, também denominada Estatística Inferencial ou Inferência Estatística ou Indução Estatística que trata da análise e interpretação dos dados amostrais cujo objetivo é a obtenção de conclusões sobre populações, com base nos resultados observados em amostras extraídas dessas populações (COSTA NETO, 1977, p. 1-2). A Estatística Descritiva se vale, para descrever os dados, de gráficos, das distribuições de frequência, e das medidas descritivas.

Designa-se com o termo população ou universo o conjunto de elementos dos quais se busca as informações estatísticas como a média aritmética, a variância e o desvio padrão, e designa-se com o termo amostra uma parte da população sobre a qual se limita as observações sob métodos definidos, a fim de servir à inferência estatística. Em virtude de nem sempre ser possível o estudo de uma população, empregam-se as amostras a fim de que as características populacionais que são capazes de ser representadas por números sejam estimadas mediante a análise de amostras.

4.1 ANÁLISE ESTATÍSTICA UNIVARIADA

4.1.1 Variável Aleatória

Dá-se o nome de variável aleatória à função que associa um número real a cada elemento do espaço amostral. O espaço amostral é definido como o conjunto de todos os resultados possíveis para cada experimento. As variáveis aleatórias podem ser contínuas ou discretas. Contínua é a variável que pode assumir qualquer valor real entre dois números distintos, e discreta é a variável que pode assumir somente valores isolados. Os resultados de uma observação precisam ser reprodutíveis, dentro de certos limites, para terem interesse científico. Os resultados

numéricos apresentam variações mesmo quando se tomam os cuidados no sentido de reproduzir as observações, desde que a escala de mensuração não oculte a magnitude desejada.

4.1.2 Valor Esperado ou Esperança Matemática ou Expectância da Variável Aleatória

Seja x uma variável aleatória discreta com valores $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Chama-se valor esperado da variável aleatória x (ou esperança matemática ou expectância da variável aleatória x), denotado por μ ou $E(x)$, as expressões:

$$\mu_x = E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, \infty\}; \quad (4.1)$$

$$\mu_x = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \text{ para } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

A função $f(x_i)$, também escrita $p(x_i)$, é denominada função de probabilidade da variável aleatória x no ponto designado como i . Essa função deve satisfazer às condições (MEYER, 1983, p. 73):

$$f(x_i) \geq 0 \text{ para } \forall i; \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1. \quad (4.3; 4.4)$$

Na 4.2, a variável aleatória x toma um número finito igual a n de valores e é interpretada como uma média ponderada. Se todos os valores x_1, x_2, \dots, x_n forem eqüiprováveis, então a 4.2 se torna a média aritmética para os n valores possíveis (MEYER, 1983, p. 139), a qual é expressa por

$$E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.5)$$

Por isso, o valor esperado de x é também denominado medida de posição central e é expresso na mesma unidade de x . Se a variável aleatória x for contínua com função densidade de probabilidade $f(x_i)$, então o valor esperado de x é definido pela integral imprópria

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (4.6)$$

Diz-se que $E(x)$ existirá se, e somente se,

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \quad (4.7)$$

for finita.

4.1.2.1 Propriedades

Se c e k forem constantes:

$$a) E(c) = c; \quad (4.8)$$

$$b) E(cx) = cE(x); \quad (4.9)$$

$$c) E(k + cx) = k + cE(x); \quad (4.10)$$

$$d) E(x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_i) + \dots + E(x_n). \quad (4.11)$$

4.1.3 Variância, Covariância e Coeficiente de Correlação Linear

Chama-se variância da variável aleatória x , denotada pelo símbolo $\text{var}(x)$ ou σ_x^2 , o número que resulta da expressão

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 \stackrel{\text{def}}{=} E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - \mu_x. \quad (4.12)$$

A raiz quadrada positiva da variância é denominada desvio padrão, cuja denotação é o símbolo σ_x e cuja expressão é

$$|\sigma_x| = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\text{var}(x)}. \quad (4.13)$$

O número variância de x é expresso em unidade elevada ao quadrado da unidade de x , enquanto que o desvio padrão é expresso na unidade original da variável.

4.1.3.1 Propriedades

a) se c for uma constante:

$$\text{var}(c) = E[c - E(c)]^2 = E[c - c]^2 = 0; \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\text{var}(x+c) &= E[(x+c) - E(x+c)]^2 = E[x+c - E(x) - c]^2 \\ &= E[x - E(x)]^2 = \text{var}(x);\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\text{var}(cx) &= E[(cx) - E(cx)]^2 = E(cx)^2 - [E(cx)]^2 = c^2 E(x^2) - c^2 [E(x)]^2 \\ &= c^2 \text{var}(x);\end{aligned}\quad (4.16)$$

b) se x e y forem variáveis aleatórias e independentes:

$$\begin{aligned}\text{var}(x+y) &= E[(x+y) - E(x+y)]^2 \\ &= E(x+y)^2 - [E(x+y)]^2 \\ &= E(x^2 + 2xy + y^2) - [E(x)]^2 - 2E(x)E(y) - [E(y)]^2 \\ &= E(x^2) + 2E(x)E(y) + E(y^2) - [E(x)]^2 - 2E(x)E(y) - [E(y)]^2 \\ &= E(x^2) - [E(x)]^2 + E(y^2) - [E(y)]^2 \\ &= \text{var}(x) + \text{var}(y).\end{aligned}\quad (4.17)$$

A covariância da população é definida pela expressão

$$\text{cov}(x,y) = \sigma_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} E\{[x - E(x)][y - E(y)]\}.\quad (4.18)$$

Desenvolvendo o segundo membro da 4.18, obtém-se

$$E\{[x - E(x)][y - E(y)]\} = E[xy - xE(y) - yE(x) + E(x)E(y)];$$

$$\text{mas } E[xE(y)] = E(x)E(y) \text{ e } E[yE(x)] = E(y)E(x);$$

logo, a 4.18 é reescrita como

$$\text{cov}(x,y) = \sigma_{x,y} = E(xy) - E(x)E(y) = E(xy) - \mu_x \mu_y.\quad (4.19)$$

O coeficiente de correlação linear

$$\rho_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{\text{var}(x)\text{var}(y)}}, \text{ com } \sigma_x \neq 0 \text{ e } \sigma_y \neq 0; \{\rho_{x,y} \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \rho_{x,y} \leq 1\}.\quad (4.20)$$

4.1.4 Estatísticas

Designa-se com o termo estatística os valores calculados em função dos elementos da amostra. São de significação as estatísticas: média amostral \bar{x} , a variância amostral s^2 , desvio padrão amostral s , a variância da média amostral $s_{\bar{x}}^2$ e desvio padrão da média amostral $s_{\bar{x}}$.

4.1.4.1 Média amostral

A média aritmética, também denominada de valor médio aritmético, é uma medida de localização estimada pelo MMQ independentemente da distribuição dos resíduos. Considere a amostra $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, a qual pode ser escrita como $\mathbf{x} = [x_i]_{n \times 1}$, e os respectivos desvios ε_i em relação à média:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} - x_1 \\ \bar{x} - x_2 \\ \vdots \\ \bar{x} - x_i \\ \vdots \\ \bar{x} - x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \mathbf{1}\bar{x} - \mathbf{x} = \varepsilon. \quad (4.21)$$

O princípio do MMQ requer que a soma quadrática dos desvios ε_i seja mínima, a qual é sintetizada pela notação vetorial

$$\varepsilon^T \varepsilon \stackrel{!}{=} \text{mín.} \quad (4.22)$$

O ponto de mínimo da função requer que sua derivada primeira seja nula:

$$\frac{d(\varepsilon^T \varepsilon)}{d\varepsilon} = 2\varepsilon = 0. \quad (4.23)$$

Mas o vetor ε será nulo se, e somente se,

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.24)$$

Portanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{x}. \quad (4.25)$$

4.1.4.2 Variância amostral e desvio padrão amostral

Define-se a variância amostral que estima a variância σ^2 , denotada pelo símbolo s^2 , como o produto escalar (WITTE e SCHMIDT, 2000, p. 148)

$$s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{1}{n-1} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{1}{n} \mathbf{x}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x} \right). \quad (4.26)$$

A quantidade $n-1$ chama-se graus de liberdade. Há somente $n-1$ graus de liberdade no cálculo de s , porque um deles já foi utilizado no cálculo da média, a partir da qual são calculados os desvios.

4.1.4.3 Variância e desvio padrão da média amostral

$$\text{var}(\bar{x}) = s_x^2 = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i) = \frac{1}{n^2} n s_x^2 = \frac{s_x^2}{n}. \quad (4.27)$$

A raiz quadrada positiva da variância da média amostral resulta o correspondente desvio padrão

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (4.28)$$

4.1.5 Não-tendenciosidade dos Estimadores Média Amostral e Desvio Padrão Amostral

O estimador t_n do parâmetro θ será não-tendencioso se

$$E(t_n) = \theta. \quad (4.29)$$

Demonstra-se que a média amostral \bar{x} e a variância amostral s^2 são estimadores não-tendenciosos, respectivamente, da média populacional μ e da variância populacional σ^2 . Sejam \bar{x} e s^2 , a média e variância da amostra aleatória de n observações, as quais foram obtidas de uma população com média μ e desvio padrão σ^2 .

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n} [E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_i) + \dots + E(x_n)] \\ &= \frac{1}{n} [\mu + \mu + \dots + \mu + \dots + \mu] = \mu; \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} E(s^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = E\left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2\right)\right] \\ &= E\left\{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i\right) + \frac{n}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right]\right\} = E\left\{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (n\bar{x})^2\right\} = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(x_i^2) - nE(\bar{x}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] = \frac{1}{n-1} \left[n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1} [n(\sigma^2 + \mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2] = \frac{1}{n-1} [(n-1)\sigma^2] = \sigma^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.1.6 Distribuição Contínua de uma Variável Aleatória

A função $f(x)$ cujo gráfico é a curva de uma série de histogramas é considerada o modelo matemático e recebe o nome de função densidade da variável x . A variável contínua x tem função densidade de probabilidade $f(x)$ se as propriedades seguintes forem satisfeitas:

a) $f(x)$ assume valor singular real e não-negativo para todo valor real de x ;

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1; \quad (4.32)$$

$$c) \int_a^b f(x) dx = \Pr[a < x < b]. \quad (4.33)$$

O símbolo $\Pr[a < x < b]$ denota a probabilidade com que a variável aleatória x situa-se entre dois números reais a e b , sendo $a < b$.

A função distribuição $F(x)$ é definida por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx; \quad \{F(x) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq F(x) \leq 1\}. \quad (4.34)$$

A probabilidade de x situar-se entre dois pontos quaisquer $x = a$ e $x = b$ é:

$$F(a) - F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.35)$$

4.1.6.1 Distribuição normal ou gaussiana

A variável aleatória do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\}$ tem distribuição normal, também denominada distribuição gaussiana, com média μ e variância σ^2 , se sua função densidade de probabilidade (fdp) for dada por

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (4.36)$$

em que o símbolo e é o número de Euler.

Há dois parâmetros μ e σ^2 que devem satisfazer às condições $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. A notação usual: x tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ é empregada se, e somente se, sua distribuição de probabilidade for dada pela 4.36.

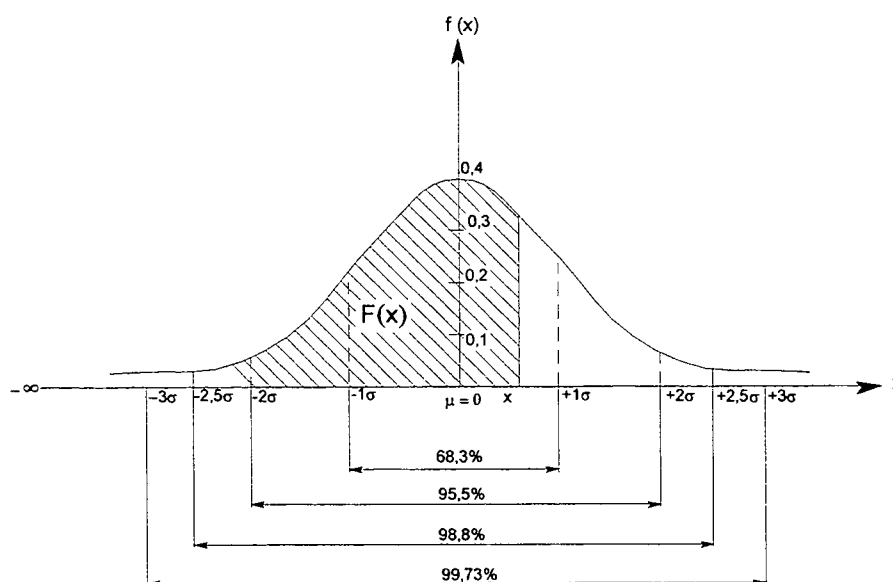
Se a origem do sistema de coordenadas for trasladada para $\mu = 0$, e se for escolhido $\sigma^2 = 1$ como índice sobre o eixo x ter-se-á a distribuição normal padronizada (figura 4.1), que é caracterizada pela expressão

$$f(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.37)$$

Agora existe uma única variável na fdp. Integrando entre os limites $-\infty$ e x , obtém-se a função de distribuição

$$F(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4.38)$$

FIGURA 4.1 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA



Os valores da integral constam dos manuais de Estatística.

Uma variável aleatória y chama-se variável aleatória padronizada se $E(y) = \mu = 0$ e $\text{var}(y) = 1$.

4.1.6.2 Distribuição qui-quadrado central e qui-quadrado não-central

Seja $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ um vetor aleatório $n \times 1$. A variável aleatória y com

$$y = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi_v^2 \quad (4.39)$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição qui-quadrado central, denotada pelo símbolo χ^2 , i.e., com parâmetro de não-centralidade $\lambda = 0$ (figura 4.2), e com ν graus de liberdade; se $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, a variável aleatória y com

$$y = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi_v'^2(\lambda) \quad (4.40)$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição qui-quadrado não-central, denotada pelo símbolo χ'^2 (figura 4.3) com ν graus de liberdade e com parâmetro de não-centralidade (WENDT, 1999, p. 112):

$$\lambda = \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}. \quad (4.41)$$

FIGURA 4.2 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE χ^2 CENTRAL

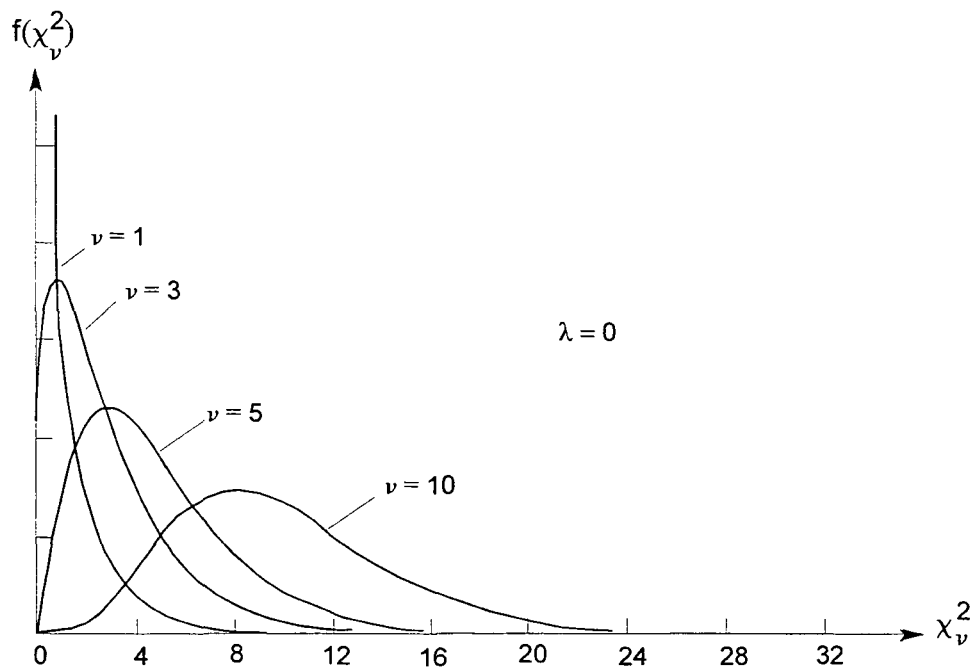
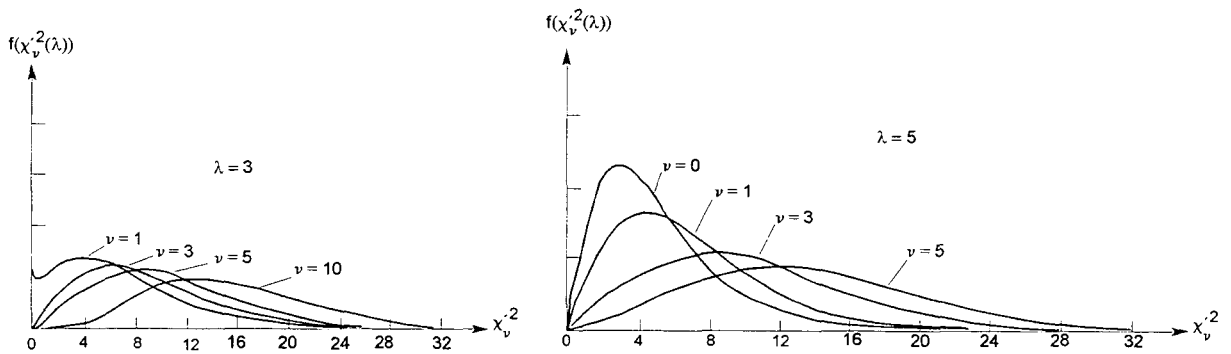


FIGURA 4.3 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE χ^2 NÃO-CENTRAL



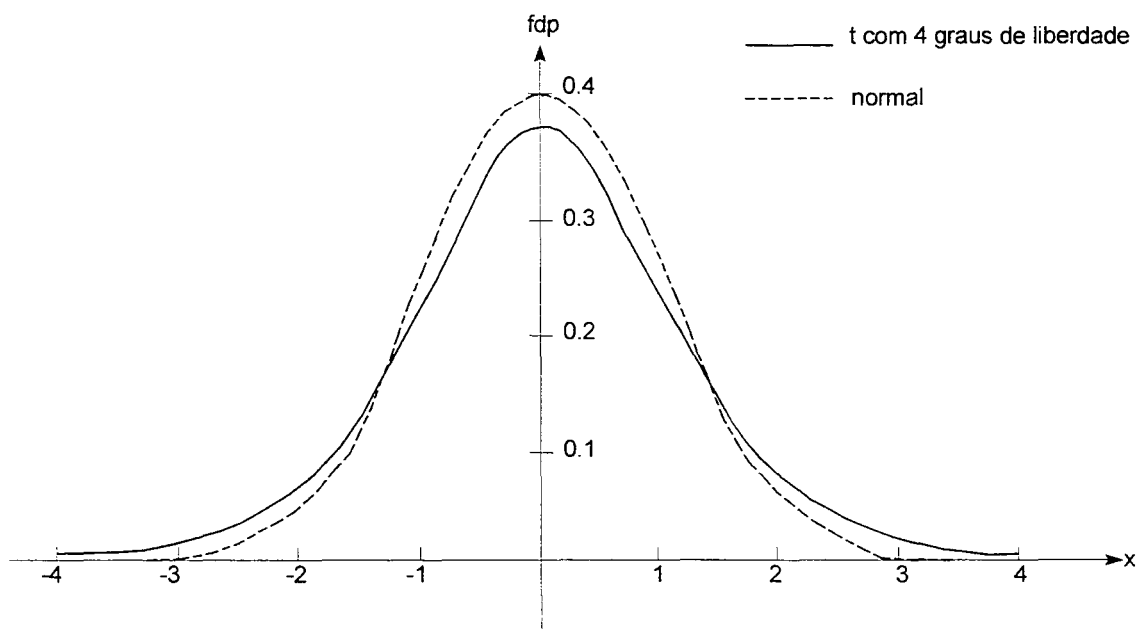
4.1.6.3 Distribuição t de Student central e t de Student não-central

Sejam $x \sim N(0,1)$ e $y \sim \chi_v^2$ variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória t com

$$t = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{v}}} \sim t_v \tag{4.42}$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição t de Student central com ν graus de liberdade (figura 4.4).

FIGURA 4.4 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE t DE STUDENT



Sejam a variável aleatória $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, a média aritmética \bar{x} e o desvio padrão dessa média dado pela 4.28. A estatística

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \sim t_{n-1} \quad (4.43)$$

é uma estatística que segue a distribuição t de *Student* central (i.e. o parâmetro de não-centralidade é nulo) com $n-1$ graus de liberdade.

Sejam $x \sim N(\mu, 1)$ e $y \sim \chi_v^2$ variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória t' com

$$t' = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{v}}} \sim t'_v(\lambda) \quad (4.44)$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição t de *Student* não-central com v graus de liberdade e com o parâmetro de não-centralidade $\lambda = \mu$.

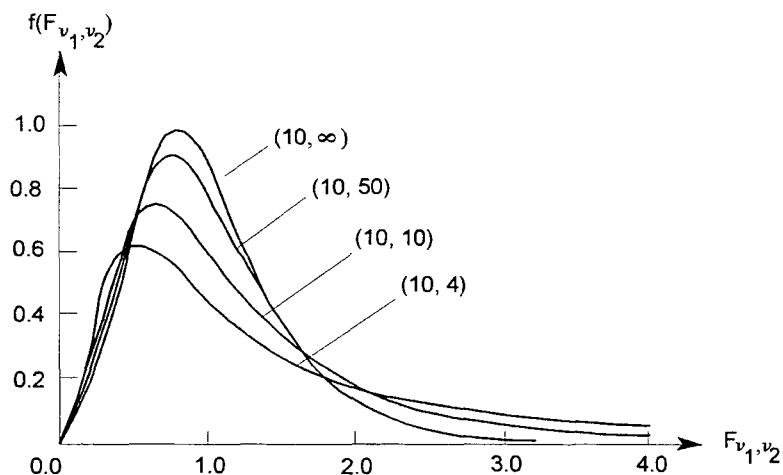
4.1.6.4 Distribuição F central e F não-central

Sejam $x_1 \sim \chi_{v_1}^2$ e $x_2 \sim \chi_{v_2}^2$ variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória F com

$$F = \frac{v_2 X_1}{v_1 X_2} \sim F_{(v_1, v_2)} \quad (4.45)$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição F central com v_1 e v_2 graus de liberdade (figura 4.5).

FIGURA 4.5– FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE F CENTRAL

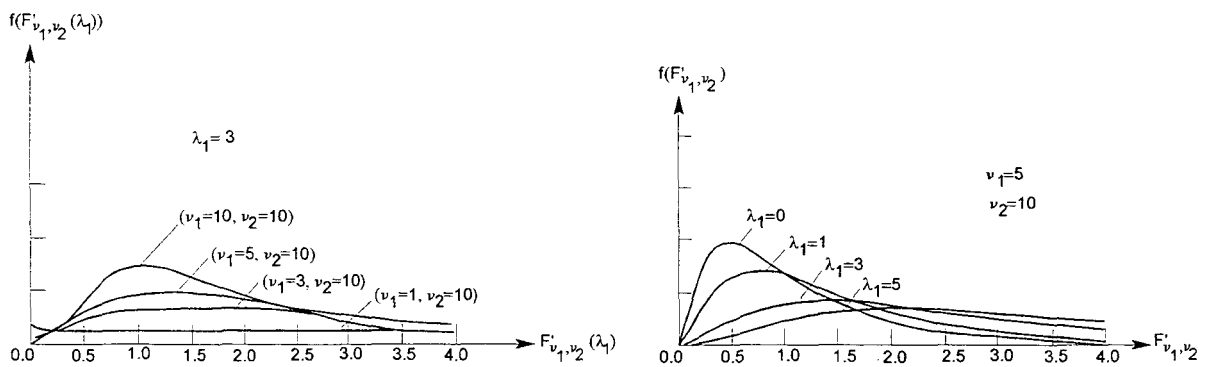


Sejam $x_1 \sim \chi_{v_1}^2(\lambda_1)$ e $x_2 \sim \chi_{v_2}^2(\lambda_2)$ variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória

$$F' = \frac{v_2 X_1}{v_1 X_2} \sim F'_{(v_1, v_2)}(\lambda) \tag{4.46}$$

é chamada variável aleatória que segue a distribuição F não-central com v_1 e v_2 graus de liberdade e com parâmetro de não-centralidade λ (figura 4.6).

FIGURA 4.6 – FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE F NÃO-CENTRAL



4.1.6.5 Equivalências entre as distribuições de probabilidades

As equivalências entre as distribuições de probabilidades Normal, χ^2 e F (PELZER, 1980a, p. 48; HAN e VAN MIERLO, 1986, p. 30;) são:

$$\frac{1}{v} \chi_{v, 1-\alpha}^2 = F_{v, \infty, 1-\alpha}; \tag{4.47}$$

$$t_{v, 1-\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{F_{1, v, 1-\alpha}}; \tag{4.48}$$

$$N(0, 1)_{1-\alpha} = \sqrt{F_{1, \infty, 1-\alpha}} = \sqrt{\chi_{1, 1-\alpha}^2}; \tag{4.49}$$

$$F_{v_1 v_2} = \frac{\frac{\chi_{v_1}^2}{v_1}}{\frac{\chi_{v_2}^2}{v_2}} = \frac{v_2 \chi_{v_1}^2}{v_1 \chi_{v_2}^2}. \tag{4.50}$$

4.1.7 Inferência Estatística

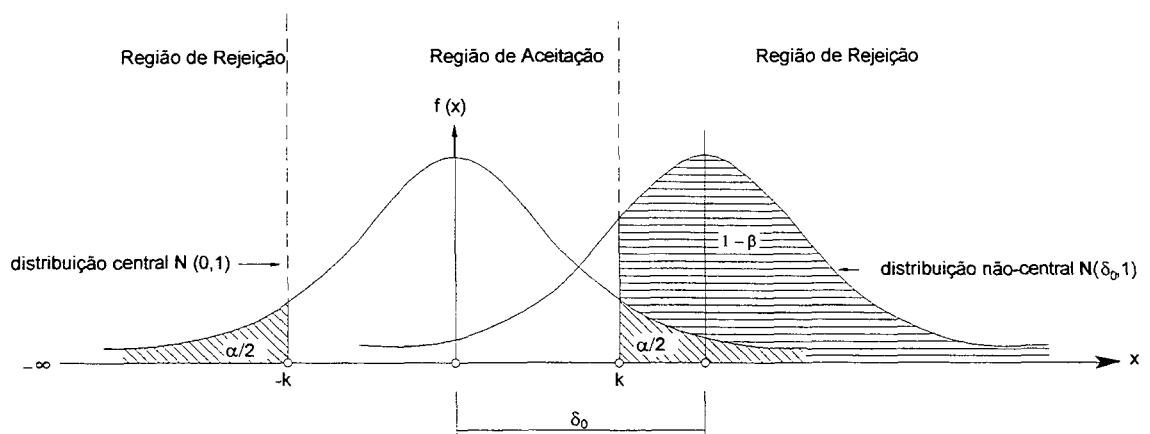
4.1.7.1 Enunciação das hipóteses para o teste estatístico

Dá-se o nome de hipótese nula, denotada pelo símbolo H_0 , à igualdade de duas estatísticas sob uma probabilidade determinada *a priori*, e dá-se o nome de hipótese alternativa, denotada pelo símbolo H_a , à desigualdade dessas mesmas estatísticas sob a mesma probabilidade determinada *a priori*.

Os testes de hipóteses empregados na Estatística servem para decidir e comparar os modelos formulados estatisticamente com a realidade (DEREN, 1986, p. 114). A teoria da confiabilidade de rede geodésica parte dos testes de hipóteses.

A rejeição de observações corretas introduz o erro tipo I cuja probabilidade é determinada *a priori*. A esta probabilidade dá-se o nome de nível de significância α . O erro tipo II envolve a aceitação de observações incorretas. A probabilidade de cometer um erro do tipo II é $(1-\beta)$, i.e., a rejeição da hipótese nula H_0 e a aceitação da hipótese alternativa H_a (figura 4.7). A probabilidade $(1-\beta)$ recebe o nome de qualidade do teste (al. *Testgüte*) ou de poder do teste (al. *Teststärke*).

FIGURA 4.7 – ERRO TIPO I, ERRO TIPO II, E QUALIDADE OU PODER DO TESTE



A busca de erros nos dados de medição emprega a probabilidade α para o erro tipo I e a probabilidade β para o erro do tipo II. O erro tipo I significa que, com a probabilidade α , uma hipótese nula é rejeitada porque a estatística cai na região de

rejeição, embora ela esteja correta (quadro 4.1). A probabilidade α recebe, também, o nome de risco de aceitação.

QUADRO 4.1 – TESTES DE HIPÓTESES

DECISÃO DO TESTE	REALIDADE	
	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
H_0 é rejeitada	Erro Tipo I: $Pr = \alpha$	Decisão correta: $Pr = 1 - \beta$
H_0 é aceita	Decisão correta: $Pr = 1 - \alpha$	Erro Tipo II: $Pr = \beta$

O erro tipo II significa que, com a probabilidade β , a hipótese nula é aceita porque a estatística calculada cai na região de aceitação, embora ela seja falsa. A probabilidade β recebe, também, o nome de probabilidade de não-rejeição. O parâmetro δ_0 chama-se parâmetro de não-centralidade.

4.2 ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA

4.2.1 Vetor Aleatório Multivariado

Dá-se o nome de vetor aleatório ao vetor cujas componentes são variáveis aleatórias. Para o caso geral, o vetor aleatório é simbolizado pela notação

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_p], \quad (4.51)$$

em que p é a quantidade de variáveis aleatórias.

4.2.2 Esperança Matemática do Vetor Aleatório

$$E(\mathbf{x}) = E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_i) \\ \vdots \\ E(x_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}. \quad (4.52)$$

4.2.3 Matriz Covariância do Vetor Aleatório

A matriz covariância do vetor aleatório \mathbf{x} é uma generalização do conceito de variância da distribuição univariada, a qual é designada pelo símbolo Σ e escrita na forma

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= \text{cov}(\mathbf{x}) \\
 &= E[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^2 \\
 &= E(\mathbf{x} - \mu)^2 \\
 &= E[(\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T] \\
 &= \begin{bmatrix} E(x_1 - \mu_1)^2 & E[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)] & \dots & E[(x_1 - \mu_1)(x_i - \mu_i)] & \dots & E[(x_1 - \mu_1)(x_p - \mu_p)] \\ E[(x_2 - \mu_2)(x_1 - \mu_1)] & E(x_2 - \mu_2)^2 & \dots & E[(x_2 - \mu_2)(x_i - \mu_i)] & \dots & E[(x_2 - \mu_2)(x_p - \mu_p)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_i - \mu_i)(x_1 - \mu_1)] & E[(x_i - \mu_i)(x_2 - \mu_2)] & \dots & E(x_i - \mu_i)^2 & \dots & E[(x_i - \mu_i)(x_p - \mu_p)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_p - \mu_p)(x_1 - \mu_1)] & E[(x_p - \mu_p)(x_2 - \mu_2)] & \dots & E[(x_p - \mu_p)(x_i - \mu_i)] & \dots & E[(x_p - \mu_p)(x_p - \mu_p)] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \dots & \text{cov}(x_1, x_i) & \dots & \text{cov}(x_1, x_p) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{var}(x_2) & \dots & \text{cov}(x_2, x_i) & \dots & \text{cov}(x_2, x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_i, x_1) & \text{cov}(x_i, x_2) & \dots & \text{var}(x_i) & \dots & \text{cov}(x_i, x_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_p, x_1) & \text{cov}(x_p, x_2) & \dots & \text{cov}(x_p, x_i) & \dots & \text{var}(x_p) \end{bmatrix}. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Usualmente, a 4.53 é escrita

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1i} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2i} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \sigma_i^2 & \dots & \sigma_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pi} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

Na 4.54, o $\det(\Sigma)$ é a medida denominada variância generalizada e o $\text{tr}(\Sigma)$ é a medida denominada variância total.

4.2.4 Matriz Desvio Padrão e Matriz Correlação do Vetor Aleatório

Dada a matriz covariância Σ , define-se a matriz desvio padrão, denotada pelo símbolo $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$, como

$$\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1^2} & & & & & \\ & \sqrt{\sigma_2^2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{\sigma_i^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{\sigma_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_p \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_p). \quad (4.55)$$

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \Sigma \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1i}}{\sigma_1\sigma_i} & \dots & \frac{\sigma_{1p}}{\sigma_1\sigma_p} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2i}}{\sigma_2\sigma_i} & \dots & \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_2\sigma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{i1}}{\sigma_i\sigma_1} & \frac{\sigma_{i2}}{\sigma_i\sigma_2} & \dots & 1 & \dots & \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_i\sigma_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sigma_p\sigma_1} & \frac{\sigma_{p2}}{\sigma_p\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{pi}}{\sigma_p\sigma_i} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

4.2.5 Variância e Covariância de Combinação Linear de Variáveis Aleatórias

Considere o vetor aleatório $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]$, sua matriz covariância Σ com valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$, o vetor $\mathbf{c}^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_i \ \dots \ c_p]$ e a combinação linear $y_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{ip}x_p$. A variância e a covariância de combinação linear (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 459) são dadas por:

$$\text{var}(y_j) = \text{var}(\mathbf{c}_j^T \mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^T \Sigma \mathbf{c}_j; \quad (4.57)$$

$$\text{cov}(y_i, y_j) = \text{cov}(\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \mathbf{c}_j^T \mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{c}_j. \quad (4.58)$$

A solução normalizada é dada por

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \sum_{i=1}^p c_{ij}^2 = 1. \quad (4.59)$$

4.2.6 Amostra do Vetor Aleatório: Matriz de Dados Amostrais

Uma amostra do vetor aleatório \mathbf{x} pode ser representada pela matriz

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ \mathbf{x}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ij} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{nj} \end{bmatrix}_{n \times p} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

A matriz \mathbf{X} , chamada matriz de dados, representa uma amostra de tamanho n proveniente de uma população p variada. Cada linha desta matriz representa uma observação p variada, que significa uma reunião de medidas obtidas de p variáveis diferentes de um mesmo item, por exemplo, medições lineares de um comprimento, medições angulares de uma direção, medições de temperatura do ar, medições da umidade do ar, medições da pressão atmosférica.

4.2.7 Vetor Médio, Matriz Covariância, Matriz Desvio Padrão e Matriz Correlação Amostrais

Em cada coluna da matriz de dados $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{ij}]$ é aplicada a 4.25, resultando o vetor médio amostral

$$\bar{\mathbf{x}}^T = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_i \quad \dots \quad \bar{x}_p]. \quad (4.61)$$

A expressão

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_{ij}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T], \quad (4.62)$$

com

$$\mathbf{x}_i^T = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{ij} \quad \dots \quad x_{ip}], \quad (4.63)$$

é denominada matriz covariância amostral obtida a partir da 4.60 e 4.61. Na 4.63, cada índice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ representa uma linha da matriz de dados.

Desenvolvendo a 4.62, obtém-se a forma usual

$$\mathbf{S} = [s_{ij}]_{p \times p} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{j1} & s_{j2} & \dots & s_j^2 & \dots & s_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pj} & \dots & s_p^2 \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Na 4.64, o $\det(\mathbf{S})$ é a medida denominada variância generalizada e o $\text{tr}(\mathbf{S})$ é a medida denominada variância total.

A matriz desvio padrão amostral é obtida em analogia a 4.55, em que o desvio padrão populacional σ é estimado pelo desvio padrão amostral s , resultando

$$\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{s_1^2} & & & & & \\ & \sqrt{s_2^2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{s_j^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{s_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & & & & \\ & s_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & s_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_p \end{bmatrix} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_p). \quad (4.65)$$

A matriz correlação amostral advém da 4.56, em que a matriz covariância Σ é estimada pela matriz \mathbf{S} e a matriz desvio padrão \mathbf{V} é estimada pela matriz $\hat{\mathbf{V}}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{S} \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s_{12}}{s_1 s_2} & \dots & \frac{s_{1j}}{s_1 s_j} & \dots & \frac{s_{1p}}{s_1 s_p} \\ \frac{s_{21}}{s_2 s_1} & 1 & \dots & \frac{s_{2j}}{s_2 s_j} & \dots & \frac{s_{2p}}{s_2 s_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{j1}}{s_j s_1} & \frac{s_{j2}}{s_j s_2} & \dots & 1 & \dots & \frac{s_{jp}}{s_j s_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s_{p1}}{s_p s_1} & \frac{s_{p2}}{s_p s_2} & \dots & \frac{s_{pj}}{s_p s_j} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

4.2.8 Variáveis Aleatórias Padronizadas

Freqüentemente as variáveis são padronizadas quando são medidas em diferentes escalas ou em uma escala comum quando as variáveis entre si apresentam grandes diferenças de valores (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 480).

Uma variável padronizada (média = 0 e variância = 1) é designada por z_i de expressão

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \quad \dots \quad z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad \dots \quad z_p = \frac{x_p - \mu_p}{\sigma_p}, \quad (4.67)$$

as quais podem ser reunidas no vetor

$$\mathbf{z} = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \quad (4.68)$$

A esperança de \mathbf{z} é nula:

$$E(\mathbf{z}) = E \left[\left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} E(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} [E(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}] = 0. \quad (4.69)$$

A variância de \mathbf{z} é obtida, aplicando a 4.57:

$$\text{var}(\mathbf{z}) = \text{var} \left[\left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \text{var}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \left(\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \mathbf{R}. \quad (4.70)$$

A 4.70 mostra que a matriz covariância do vetor \mathbf{z} é a matriz correlação.

Similarmente, para as variáveis aleatórias amostrais, a 4.67 se torna

$$\hat{z}_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{s_1}, \quad \hat{z}_2 = \frac{x_2 - \bar{x}_2}{s_2}, \quad \dots, \quad \hat{z}_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s_i}, \quad \dots, \quad \hat{z}_p = \frac{x_p - \bar{x}_p}{s_p}; \quad (4.71)$$

a 4.68,

$$\hat{\mathbf{z}} = \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}); \quad (4.72)$$

e a 4.70,

$$\text{var}(\hat{\mathbf{z}}) = \text{var} \left[\left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right] = \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \text{var}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \mathbf{s} \left(\hat{\mathbf{V}}^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \hat{\mathbf{R}}. \quad (4.73)$$

4.2.9 Distribuição Normal Multivariada

A distribuição normal p variada (ou distribuição multinormal de dimensão p ou ainda distribuição normal multivariada) simbolizada por $N_p(\mu, \Sigma)$ é caracterizada pela função de densidade de probabilidade (JOHNSON e WICHERN, 1998, p.159)

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}}, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (4.74)$$

a qual tem densidade de probabilidade constante em regiões cujos limites são elipses, elipsóides ou hiperelipsóides (chamados contornos de densidade de probabilidade constante) de equação

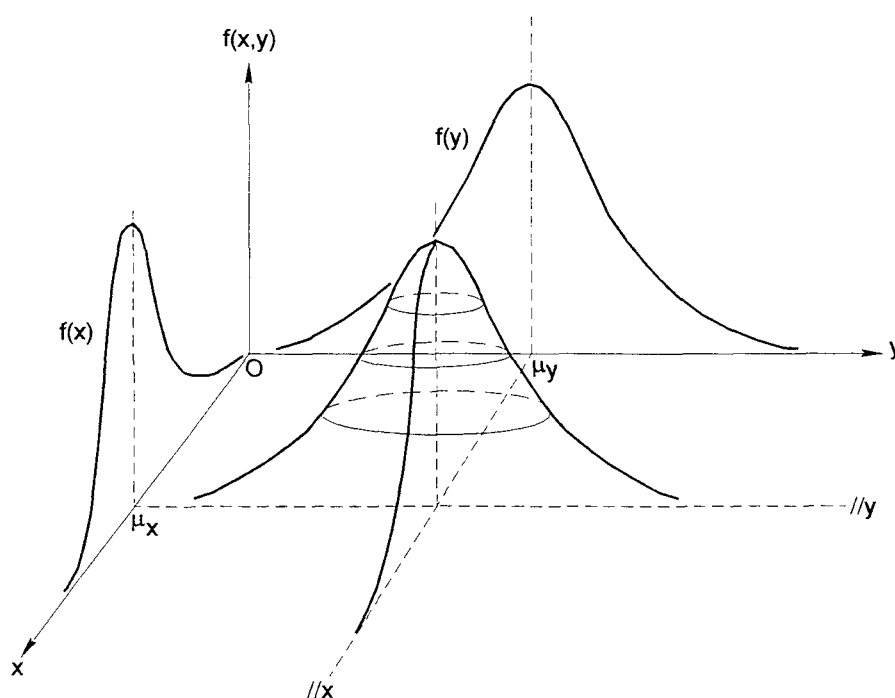
$$(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = d^2(\mathbf{x}, \mu, \Sigma). \quad (4.75)$$

Nas expressões 4.74 e 4.75, \mathbf{x} é o vetor aleatório que tem distribuição normal p variada, e é o número de Euler, Σ é a matriz covariância (matriz positiva definida) com

$$\det(\Sigma) = \prod_{i=1}^p \lambda_i. \quad (4.76)$$

Se $p = 2$, a 4.74 tem a representação gráfica dada pela figura 4.8, após a substituição: x_1 por x e x_2 por y .

FIGURA 4.8 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE NORMAL BIVARIADA



As curvas de mesma densidade de distribuição de probabilidade são elipses.

A densidade da distribuição normal é sempre positiva porque a função exponencial não assume valores negativos e o determinante da matriz positiva definida é maior que zero (KOCH, 1980, p. 110).

A função de densidade de probabilidade de $N_p(\mu, \Sigma)$ envolve a matriz Σ não-singular. Se Σ for singular, o vetor \mathbf{x} p variado tem uma distribuição degenerada (SCHEFFÉ, 1959, p. 416). Neste caso, se o $k(\Sigma) < p$, pode-se definir a densidade singular de \mathbf{x} (MARDIA et al., 1982, p. 41) e para que a inversa generalizada de Σ seja única, $f(\mathbf{x})$ é escrita na forma

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (4.77)$$

na qual $\prod_{i=1}^k \lambda_i$ é o produto dos valores próprios não-nulos.

A matriz Σ^+ é a inversa de Moore-Penrose, também chamada de pseudo-inversa, cujas fórmulas para o cálculo estão na seção 3.1.3.14.

4.2.9.1 Propriedade principal

O expoente da fdp da distribuição normal univariada mede a distância estatística entre x e μ com desvio padrão unitário. Esse expoente pode ser reescrito na forma

$$(x - \mu) \left(\sigma^2 \right)^{-1} (x - \mu) \sim \chi_1^2 \quad (4.78)$$

e generaliza-se para o vetor \mathbf{x} de p variáveis, assumindo a forma

$$(\mathbf{x} - \mu) \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \sim \chi_p^2, \quad (4.79)$$

em que tem o posto $k(\Sigma) = p$ e, por isso, Σ^{-1} existe.

4.2.10 Distância Quadrática de Mahalanobis

Sob a designação distância quadrática de Mahalanobis, introduzido por Mahalanobis em 1930, entende-se um dos conceitos mais fundamentais da Análise Estatística Multivariada: a estatística que traduz a medida da distância estatística

entre duas populações com médias diferentes, mas com matrizes covariâncias idênticas.

Sejam os vetores aleatórios \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , cada um dos quais composto de p componentes e

$$E(\mathbf{x}_1) = \mu_1, \quad E(\mathbf{x}_2) = \mu_2 \quad \text{e} \quad \text{cov}(\mathbf{x}_1) = \text{cov}(\mathbf{x}_2) = \Sigma. \quad (4.80)$$

Se Σ for matriz positiva definida, então a distância quadrática de Mahalanobis entre as médias μ_1 e μ_2 das respectivas populações será (MARDIA, 1977, p. 495):

$$d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma) = (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2). \quad (4.81)$$

Na função de densidade de probabilidade, o expoente é uma constante e medida da distância quadrática de Mahalanobis, que tem distribuição χ_p^2 (MARDIA et al., 1982, p. 39).

Cada valor da distância quadrática de Mahalanobis representa um contorno, cuja forma e orientação são determinadas por Σ , e o tamanho é determinado por $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$ (ANDERSON, 1958, p. 18). Quando $\mu = \mathbf{0}$ e $\Sigma = \mathbf{I}$, os contornos são circunferências para $p=2$, superfícies esféricas para $p=3$ e superfícies hiperesféricas para $p \geq 4$. Analogamente, se $\Sigma \neq \mathbf{I}$ e não-singular, os contornos são elipses para $p=2$, elipsóides para $p=3$ e hiperelipsóides para $p \geq 4$.

O elipsóide tem centro no ponto cujas coordenadas são as do vetor \mathbf{x} . As direções dos semi-eixos são determinadas pelos vetores próprios de Σ , e os comprimentos desses semi-eixos a_i , pela equação

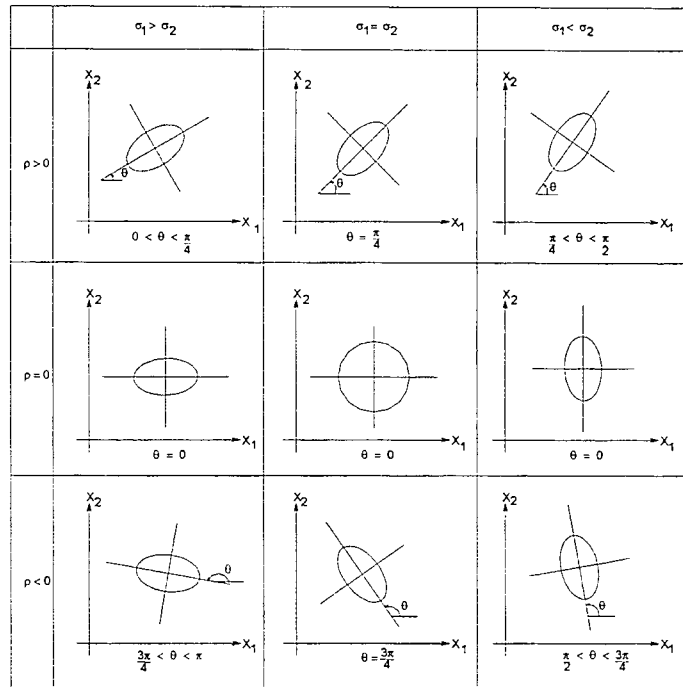
$$a_i = \sigma \sqrt{\lambda_i \chi_{p,1-\alpha}^2}. \quad (4.82)$$

O eixo maior da elipse forma o ângulo

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (4.83)$$

com o eixo x_1 . Se $\rho > 0$ e $\sigma_1 = \sigma_2$, θ será $\pi/4$ e se $\rho = 0$ e $\sigma_1 = \sigma_2$, a equação é a de um círculo. O figura 4.9 mostra as elipses de mesma densidade para coeficientes de correlação distintos. A correlação zero implica independência entre as variáveis de distribuição normal bivariada (KOTZ et al., 2000, p. 255). Diz-se que as variáveis aleatórias x e y são variáveis aleatórias independentes quando o resultado de x não influencia o resultado de y .

FIGURA 4.9 – CONTORNOS DE MESMA DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL BIVARIADA PARA COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DISTINTOS



FONTE: KOTZ et al.(2000, p. 256).

4.2.10.1 Distância quadrática de Mahalanobis amostral

Na prática, as grandezas μ e Σ são desconhecidas e, por isso, essas grandezas precisam ser estimadas. O vetor médio amostral \bar{x} estima o vetor médio populacional μ , e a matriz covariância amostral S estima a matriz covariância populacional Σ . A distância quadrática de Mahalanobis entre x_1 e x_2 , se exprime por:

$$d^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^T S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2). \tag{4.84}$$

Como S deve ser única e cada vetor aleatório possui sua correspondente matriz covariância, então uma única matriz, chamada matriz covariância comum, deve ser estimada pela expressão

$$S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}, \tag{4.85}$$

em que n_1 e n_2 são a quantidade de linha das respectivas matrizes de dados.

A fim de que se obtenha a definição dos limites de uma região de confiança para o vetor de coordenadas, a 4.75 é reescrita (KRAKIWSKY e THOMSON, 1978, p. 30; LEONHARD e NIEMEIER, 1980, p. 489; DUPRAZ e NIEMEIER, 1981, p. 388; VANÍČEK; KRAKIWSKY, 1986, p. 240) na forma

$$(\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}) = d^2(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}), \quad (4.86)$$

na qual: $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor estimado das coordenadas resultante de ajustamento pelo princípio do MMQ; $\tilde{\mathbf{x}}$ é o vetor dos valores admitidos como verdadeiros das coordenadas, e $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}$ é a inversa ordinária da matriz covariância das coordenadas ajustadas.

O elipsóide de dimensão p é centrado em $\hat{\mathbf{x}}$ e qualquer vetor testado que caia dentro do elipsóide é considerado compatível com $\hat{\mathbf{x}}$ na probabilidade $1-\alpha$ (KRAKIWSKY e THOMSON, 1978, p. 30; KUANG, 1996, p. 152); isto permite o cálculo de $d^2(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}})$ a partir dos vetores de coordenadas, substituindo $\tilde{\mathbf{x}}$ por outro vetor do qual se quer obter a estatística.

A estatística $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma) = 1$, isto é, $\chi_p^2 = 1$, representa, para:

- a) $p = 1$, um intervalo unidimensional $[x_i - \hat{\sigma}_i, x_i + \hat{\sigma}_i]$ (SURACE, 1995, p. 185); a probabilidade que o valor estimado esteja contido nesse intervalo é cerca de 68,3%;
- b) $p = 2$, uma elipse de erros de semi-eixos $a_1 = \sqrt{\lambda_1}$ e $a_2 = \sqrt{\lambda_2}$ sendo $\lambda_1 > \lambda_2$ (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 224-227). A interpretação comum da elipse de erros, na hipótese da distribuição normal dos erros, é que ela delimita a porção do plano que com a probabilidade de aproximadamente 39,4% contém a posição admitida como verdadeira do ponto em relação ao ponto considerado livre de erro na rede geodésica (SURACE, 1995, p. 185), isto é, se $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma) = 1$, a probabilidade que um ponto caia dentro do contorno da elipse é a mesma probabilidade $(1-\alpha)$ da estatística $\chi_{2,1-\alpha}^2 \leq 1$;
- c) $p = 3$, o elipsóide de erros de semi-eixos $a_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $a_2 = \sqrt{\lambda_2}$ e $a_3 = \sqrt{\lambda_3}$ sendo $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$; a probabilidade que a posição espacial admitida como verdadeira de um ponto esteja no interior do elipsóide é de aproximadamente 19,9%;
- d) $p \geq 4$, os hiperelipsóides de erros.

A estatística $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma) \neq 1$, isto é, $\chi_p^2 \neq 1$, representa, para:

- a) $p = 1$, uma família de intervalos unidimensionais; para cada valor de $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$ calcula-se a probabilidade que o valor estimado se situe dentro do intervalo, ou calcula-se o intervalo para uma dada probabilidade;
- b) $p = 2$, uma família de elipses com a mesma orientação da elipse dos erros; para cada valor de $d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)$ calcula-se a probabilidade $\{c^2 \leq \chi_{2, 1-\alpha}^2\} = 1 - \alpha$ que as coordenadas se situem dentro da elipse ou calcula-se os semi-eixos $a_i, i \in \{1, 2\}$, da elipse que contenha as coordenadas:

$$a_1 = \sqrt{\lambda_1 d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)} \text{ e } a_2 = \sqrt{\lambda_2 d^2(\mu_1, \mu_2, \Sigma)} ;$$
- c) $p = 3$, uma família de elipsóides cujo tratamento é análogo ao tratamento da família de elipses;
- d) $p \geq 4$, uma família de hiperelipsóides cuja importância se destaca no estudo da análise de componentes principais.

4.2.11 Análise de Componentes Principais

O estudo das componentes principais foi introduzido por Karl Pearson em 1901 para o caso de variáveis não-estocásticas; posteriormente, em 1933, Hotelling generalizou o estudo para o caso de variáveis estocásticas (PRESS, 1982, p. 306-307). Componentes principais são combinações lineares de variáveis aleatórias e têm propriedades especiais em termos de variância (ANDERSON, 1958, p. 272).

Do conjunto de p variáveis originais: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p$, geralmente correlacionadas entre si, é obtido por combinação linear normalizada (a soma dos quadrados dos coeficientes é 1) o novo conjunto de p variáveis: $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_p$ cuja propriedade é serem não-correlacionadas entre si, chamadas componentes principais.

Seja o vetor aleatório p variado $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]$ com vetor médio $E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$ e a matriz covariância

$$E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (4.87)$$

A variância e a covariância da combinação linear $y_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{x}$ (ANDERSON, 1963, p. 122-123) em que \mathbf{m}_i é o i-ésimo vetor próprio normalizado de $\boldsymbol{\Sigma}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{var}(y_i) &= E\left\{\left[\mathbf{m}_i^T \mathbf{x} - E(\mathbf{m}_i^T \mathbf{x})\right]^2\right\} = E\left\{\left[\mathbf{m}_i^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\mathbf{m}_i^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{m}_i\right\} = \mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_i = \lambda_i; \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\text{cov}(y_i, y_j) = E\left\{\left[\mathbf{m}_i^T \mathbf{x} - E(\mathbf{m}_i^T \mathbf{x})\right]\left[\mathbf{m}_j^T \mathbf{x} - E(\mathbf{m}_j^T \mathbf{x})\right]\right\} = \mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_j = 0. \quad (4.89)$$

A i-ésima combinação linear normalizada por $\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i = 1$ que tem variância dada pelo valor próprio máximo λ_i de $\boldsymbol{\Sigma}$ é chamada de i-ésima componente principal do vetor aleatório \mathbf{x} .

Nas componentes principais, os vetores próprios normalizados \mathbf{m}_i (também denominado de versores \mathbf{m}_i) da matriz covariância do vetor de variáveis são os pesos associados com um vetor de variáveis correlacionadas e os valores próprios da matriz covariância do vetor de variáveis são as variâncias das componentes principais. Os vetores próprios correspondentes a diferentes valores próprios são linearmente independentes (BRONSON, 1993, p. 80). Se uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ tem n valores próprios distintos, então existe um conjunto linearmente independente de n vetores próprios (os vetores próprios são linearmente independentes se, e somente se, não têm a mesma direção e sentido ou mesma direção e sentidos opostos), um associado com cada valor próprio, e qualquer vetor próprio de \mathbf{A} é um múltiplo de um destes n vetores próprios (NOBLE e DANIEL, 1986, p.83, 216). \mathbf{A} é simétrica e real se, e somente se, \mathbf{A} tem um conjunto linearmente independente de n vetores próprios que podem ser escolhidos de maneira a formar um conjunto ortonormal (op. cit. p. 249), isto é, $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \mathbf{m}_i \perp \mathbf{m}_j$, ou seja $\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_j = 0$.

As componentes principais são obtidas em ordem decrescente de importância: a 1ª componente principal y_1 é a combinação linear normalizada com

variância máxima $\lambda_1 = \lambda_{\text{máx.}}$; a 2ª componente principal y_2 é a combinação linear normalizada com variância menor λ_2 e assim são obtidas as sucessivas componentes principais até a p-ésima componente principal y_p que é aquela combinação linear normalizada com variância mínima $\lambda_p = \lambda_{\text{mín.}}$. Estes λ_i são os valores próprios da matriz covariância. As componentes principais não pressupõem o conhecimento da distribuição de probabilidades da população.

Os objetivos do método das componentes principais são:

- a) geração de novas variáveis não-correlacionadas, chamadas componentes principais y , que podem expressar a informação contida no conjunto de variáveis originais, geralmente correlacionadas (E. PLA, 1986, p. 15);
- b) redução do número de variáveis a serem tratadas através da eliminação de combinações lineares que contêm poucas informações (variâncias de magnitudes pequenas);
- c) detecção e identificação de *outliers* (HAWKINS, 1974; JACKSON e MUDHOLKAR, 1979; CROSILLA, 1986; MARQUES, 1994); i.e., identificação de observação que aparecem inconsistentes com o resto dos dados (CHATFIELD e COLLINS, 1980, p. 36);
- d) fornecer elementos que possibilitem compor modelos de análise da sensibilidade de rede geodésica (NIEMEIER e HOLLMANN, 1984; NIEMEIER, 1985a, p. 175-178; 1985b, p. 555-557; LEONHARD e NIEMEIER, 1980, p. 490-491; ZHANG e LI, 1990, p. 249) e que permitem descrever a acurácia de vizinhança (BOLJEN, 1991, p.560);
- e) obter elementos de otimização para as redes de detecção de movimentos da crosta terrestre (CROSILLA e MARCHESINI, 1983);
- f) análise de dados geológicos (DAVIS, 1973; ANDRIOTTI, 1997).

As componentes principais resultam da transformação linear (MARDIA et al., 1982, p. 214):

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{M}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \quad (4.90)$$

Na 4.90, \mathbf{M} é da forma da 3.85, em que as colunas são os vetores próprios normalizados \mathbf{m}_i da matriz covariância Σ e de acordo com a 3.95,

$$\mathbf{M}^T \Sigma \mathbf{M} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i). \tag{4.91}$$

Na decomposição espectral de Σ , os p valores próprios são ordenados segundo disposição

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots \lambda_p \geq 0, \tag{4.92}$$

e associados com os respectivos valores próprios $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_p$. Por isso, diz-se que Σ tem pares (vetor próprio, valor próprio) que são denotados pelos símbolos

$$(\mathbf{m}_1, \lambda_1), (\mathbf{m}_2, \lambda_2), \dots, (\mathbf{m}_i, \lambda_i), \dots, (\mathbf{m}_p, \lambda_p). \tag{4.93}$$

4.2.11.1 Componentes Principais Populacionais

Algebricamente, as componentes principais são combinações lineares de p variáveis aleatórias: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p$ como eixos coordenados (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 459). Seja $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]$ o vetor aleatório de dimensão p com vetor de médias μ e a matriz covariância Σ com vetores próprios e valores próprios segundo a 4.93. Sejam as combinações lineares:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{i1}x_i + \dots + c_{p1}x_p \\ y_2 &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} = c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{i2}x_i + \dots + c_{p2}x_p \\ &\vdots \\ y_i &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \dots + c_{ii}x_i + \dots + c_{pi}x_p \\ &\vdots \\ y_p &= \mathbf{c}_p^T \mathbf{x} = c_{1p}x_1 + c_{2p}x_2 + \dots + c_{ip}x_i + \dots + c_{pp}x_p \end{aligned} \right\} \tag{4.94}$$

que são representadas na forma matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \tag{4.95}$$

em que

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_i \ \dots \ y_p]; \tag{4.96}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]; \tag{4.97}$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_i \quad \dots \quad \mathbf{c}_p] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pi} & \dots & c_{pp} \end{bmatrix}, \quad (4.98)$$

com:

$$\text{cov}(y_i, y_i) = \text{var}(y_i) = \mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{c}_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.99)$$

$$\text{cov}(y_i, y_k) = \mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{c}_k, \quad i, k \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (4.100)$$

Para cada equação na 4.94 há um fator de escala arbitrário. A alteração da solução para a solução normalizada depende da condição: a soma dos quadrados das componentes do vetor \mathbf{c} que compõe a matriz \mathbf{C} seja igual a 1.

A j -ésima componente principal normalizada é escrita:

$$y_j = \mathbf{c}_j^T \mathbf{x} = c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \dots + c_{ij}x_i + \dots + c_{pj}x_p, \quad (4.101)$$

com

$$\mathbf{c}_j^T \mathbf{c}_j = \sum_{i=1}^p c_{ij}^2 = 1. \quad (4.102)$$

Na análise de componentes principais, \mathbf{c}_j é substituído pelo vetor próprio normalizado (versor) \mathbf{m}_j de \mathbf{M} , de modo que obedeça às propriedades 3.83 e 3.84.

4.2.11.1.1 Propriedades

As componentes principais y apresentam as seguintes propriedades (MORRISON, 1976, p. 266-299; MARDIA et al., 1982, p. 215; JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 460-461). Seja Σ a matriz covariância do vetor aleatório multivariado, composto de p componentes $\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_p]$ e pares (vetor próprio, valor próprio) segundo a 4.93. Então:

a) a j -ésima componente principal é dada por:

$$y_j = \mathbf{m}_j^T \mathbf{x} = m_{1j}x_1 + m_{2j}x_2 + \dots + m_{ij}x_i + \dots + m_{pj}x_p, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.103)$$

b) as p componentes principais são dadas pela expressão matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^T \mathbf{x}; \quad (4.104)$$

$$c) E(y_j) = \mathbf{m}_j^T E(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_j^T \boldsymbol{\mu}; \quad (4.105)$$

$$d) \text{var}(y_j) = \lambda_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.106)$$

$$\text{var}(y_1) \geq \text{var}(y_2) \geq \dots \geq \text{var}(y_j) \geq \dots \geq \text{var}(y_p). \quad (4.107)$$

▷ Prova: seja \mathbf{c} um vetor não-nulo, a maximização da forma quadrática é escrita

$$\max_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \lambda_{\text{máx}} = \lambda_1, \quad \text{com } \mathbf{c}^T = \mathbf{m}_1, \quad (4.108)$$

e a normalização dos vetores próprios

$$\mathbf{c}^T \mathbf{c} = \mathbf{m}_1^T \mathbf{m}_1 = 1; \quad (4.109)$$

então,

$$\max_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \lambda_1 = \frac{\mathbf{m}_1^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1^T \mathbf{m}_1} = \mathbf{m}_1^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_1 = \text{var}(y_1); \quad (4.110)$$

Similarmente, com $\mathbf{c} \perp \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_k$

$$\max_{\mathbf{c} \perp \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_k} \frac{\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^T \mathbf{c}} = \lambda_{k+1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, p-1\}, \quad (4.111)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}_{k+1}, \quad \text{com } \mathbf{m}_{k+1}^T \mathbf{m}_i = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, p-1\}, \quad (4.112)$$

$$\frac{\mathbf{m}_{k+1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_{k+1}}{\mathbf{m}_{k+1}^T \mathbf{m}_{k+1}} = \mathbf{m}_{k+1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_{k+1} = \text{var}(y_{k+1}); \triangleleft \quad (4.113)$$

$$e) \text{cov}(y_i, y_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (4.114)$$

▷ prova: se $\mathbf{m}_i \perp \mathbf{m}_k$, o produto interno é nulo; assim,

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_k = 0 \Rightarrow \text{cov}(y_i, y_k) = 0, \quad (4.115)$$

pois

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_k = \lambda_k \mathbf{m}_k, \quad (4.116)$$

pré-multiplicando a 4.116 por \mathbf{m}_i^T , resulta:

$$\mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_i^T \lambda_k \mathbf{m}_k = \lambda_k \mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_k = 0, \quad \forall i \neq k; \quad (4.117)$$

portanto,

$$\mathbf{m}_i^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{m}_k = \text{cov}(y_i, y_k) = 0; \triangleleft \quad (4.118)$$

f) traço da matriz covariância Σ é igual ao traço da matriz espectral Λ

$$\text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^p \text{var}(x_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_p^2 = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \text{var}(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \quad (4.119)$$

▷ prova: a decomposição espectral de Σ , de acordo com a 3.91, é

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T = \lambda_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^T + \lambda_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T + \dots + \lambda_p \mathbf{m}_p \mathbf{m}_p^T = {}_p \mathbf{M} {}_p \Lambda {}_p \mathbf{M}^T; \quad (4.120)$$

aplicando a propriedade 3.166 para o traço de produto matricial, vem

$$\text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(\mathbf{M} \Lambda \mathbf{M}^T) = \text{tr}(\Lambda \mathbf{M}^T \mathbf{M}) = \text{tr}(\Lambda \mathbf{I}) = \text{tr}(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p; \quad (4.121)$$

logo,

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^p \text{var}(x_i) = \text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \text{var}(y_i). \quad (4.122)$$

g) $\prod_{i=1}^p \text{var}(y_i) = \det(\Sigma); \quad (4.123)$

h) coeficiente de correlação entre a j -ésima componente principal y_j e a i -ésima variável original x_i é dado por:

$$\rho_{y_j x_i} = m_{ij} \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sigma_i}; \quad (4.124)$$

▷ prova:

$$\rho_{y_j x_i} = \frac{\text{cov}(x_i, y_j)}{\sqrt{\text{var}(y_j) \text{var}(x_i)}}; \quad (4.125)$$

seja o vetor unitário

$$\mathbf{c}_i^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad (4.126)$$

no qual o i -ésimo elemento representa o número 1; este vetor permite a representação de um elemento x_i do vetor \mathbf{x} pela expressão

$$x_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}; \quad (4.127)$$

o numerador da 4.125 pela substituição da 4.127 e 4.103, fica expresso por

$$\text{cov}(x_i, y_j) = \text{cov}(\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \mathbf{m}_j^T \mathbf{x}); \quad (4.128)$$

aplicando a propriedade 4.58 e depois a 4.116, vem

$$\text{cov}(x_i, y_j) = \text{cov}(\mathbf{c}_i^T \mathbf{x}, \mathbf{m}_j^T \mathbf{x}) = \mathbf{c}_i^T \Sigma \mathbf{m}_j = \mathbf{c}_i^T \lambda_j \mathbf{m}_j = \lambda_j m_{ij}; \quad (4.129)$$

portanto,

$$\rho_{y_j x_i} = \frac{\lambda_j m_{ij}}{\sigma_i \sqrt{\lambda_j}} = \frac{m_{ij} \sqrt{\lambda_j}}{\sigma_i}; \triangleright \quad (4.130)$$

- i) a proporção da variância total explicada devido a j-ésima componente principal populacional é dada por:

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} = \frac{\lambda_j}{\text{tr}(\Sigma)}; \quad (4.131)$$

- j) as variáveis originais podem ser expressas pelas componentes principais (KENDALL et al., 1983, p. 326-327):

$$x_i = m_{i1} y_1 + m_{i2} y_2 + \dots + m_{ip} y_p; \quad (4.132)$$

- l) as p componentes do vetor ${}_p \mathbf{x}_1$ são obtidas pela expressão matricial

$${}_p \mathbf{x}_1 = {}_p \mathbf{M}_p {}_p \mathbf{y}_1. \quad (4.133)$$

4.2.11.2 Componentes principais obtidas de variáveis aleatórias normais multivariadas

Seja o vetor aleatório $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]$ com distribuição $N_p(\mu, \Sigma)$. Sabe-se que a densidade de \mathbf{x} é constante no elipsóide (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 464)

$$(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = c^2, \quad (4.134)$$

centrado em μ , cujo comprimento do i-ésimo semi-eixo é calculado pela expressão

$$|a_i| = m_i \sqrt{c^2 \lambda_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (4.135)$$

Efetuada a decomposição espectral de Σ^{-1} , pode-se reescrever a equação do elipsóide utilizando as componentes principais y.

$${}_p \Sigma_p^{-1} = {}_p \mathbf{M}_p \Lambda_p^{-1} {}_p \mathbf{M}_p^T = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_p] \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_p} \end{bmatrix} [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_p]^T$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{p1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1p} & m_{2p} & \dots & m_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & m_{p1} \\ m_{12} & m_{22} & \dots & m_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1p} & m_{2p} & \dots & m_{pp} \end{bmatrix}^T \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^T + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{m}_p \mathbf{m}_p^T. \tag{4.136}
\end{aligned}$$

Introduzindo os termos da decomposição 4.136 na expressão 4.134

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \left(\frac{1}{\lambda_1} \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^T + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_p} \mathbf{m}_p \mathbf{m}_p^T \right) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}), \tag{4.137}$$

$$\mathbf{c}^2 = \frac{1}{\lambda_1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{\lambda_2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \frac{1}{\lambda_p} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{m}_p \mathbf{m}_p^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}); \tag{4.138}$$

mas

$$\mathbf{x}^T \mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i^T \mathbf{x} = y_i \tag{4.139}$$

é a i -ésima componente principal. Substituindo, agora, a 4.139 na 4.138, obtém-se a expressão do elipsóide de confiança por componentes principais y :

$$\mathbf{c}^2 = \frac{1}{\lambda_1} y_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} y_2^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_p} y_p^2 = \sum_{i=1}^p \frac{y_i^2}{\lambda_i}. \tag{4.140}$$

A 4.140 define um elipsóide de confiança de dimensão p ou hiperelipsóide (desde que os valores próprios sejam positivos) em um sistema de coordenadas com eixos $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_p$ situados nas direções de $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_i, \dots, \mathbf{m}_p$, respectivamente. Se λ_1 é o maior valor próprio, então o eixo maior situa-se na direção de \mathbf{m}_1 ; os outros eixos menores situam-se nas direções definidas por $\mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_i, \dots, \mathbf{m}_p$.

Um valor próprio nulo mostra que há uma combinação linear entre as variáveis originais e o número de valores próprios não-nulos fornece a dimensão do espaço no qual estão as observações (BOUROCHE e SAPORTA, 1982, p. 42). Na prática é possível ter situações nas quais um ou mais valores próprios são nulos em decorrência de uma ou mais das variáveis originais terem combinações lineares entre si (JACKSON e MUDHOLKAR, 1979, p. 348), motivo pelo qual resulta Σ

singular. Neste caso, a inversa de Σ é a inversa de Moore-Penrose ou pseudo-inversa, simbolizada por Σ^+ .

4.2.11.3 Componentes principais populacionais obtidas de variáveis aleatórias padronizadas

Seja \mathbf{R} a matriz correlação associada ao vetor de variáveis padronizadas $\mathbf{z}^T = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_j \ \dots \ z_p]$; \mathbf{R} tem pares (vetor próprio, valor próprio) segundo a forma 4.93. Verificam-se as seguintes propriedades (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 466-467):

a) a j -ésima componente principal é dada por

$$y_j = \mathbf{m}_j^T \mathbf{z} = m_{1j}z_1 + m_{2j}z_2 + \dots + m_{pj}z_p, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.141)$$

b) $\text{var}(y_j) = \lambda_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.142)$

c) $\text{var}(y_1) \geq \text{var}(y_2) \geq \dots \geq \text{var}(y_p) \geq 0; \quad (4.143)$

d) $\text{cov}(y_i, y_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (4.144)$

e) traço da matriz correlação \mathbf{R} é igual ao traço da matriz espectral Λ

$$\text{tr}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^p \text{var}(z_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^p \text{var}(y_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = p; \quad (4.145)$$

f) $\prod_{i=1}^p \text{var}(y_i) = \det(\mathbf{R}); \quad (4.146)$

g) coeficiente de correlação entre a j -ésima componente principal y_j e a i -ésima variável padronizada z_i é dado por

$$\rho_{y_j z_i} = m_{ij} \sqrt{\lambda_j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.147)$$

f) a proporção da variância total explicada devido a j -ésima componente principal é dada por

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} = \frac{\lambda_j}{\text{tr}(\mathbf{R})} = \frac{\lambda_j}{p}. \quad (4.148)$$

4.2.11.4 Componentes principais amostrais

Os resultados desenvolvidos são válidos se o vetor de médias μ e a matriz covariância Σ forem conhecidos. Nas ciências experimentais geralmente estas grandezas são desconhecidas, necessitando que sejam estimadas a partir de uma amostra multivariada $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_{ij}]_{n \times p}$, chamada matriz de dados, na qual n e p são, respectivamente, o número de observações e o número de variáveis. As estatísticas empregadas para as estimações de μ e de Σ são, respectivamente, a 4.61 e a 4.62.

4.2.11.4.1 Propriedades

Seja $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_{ij}]_{p \times p}$ a matriz covariância amostral associada ao vetor aleatório p variado $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_p]$. Na decomposição espectral de \mathbf{S} , os p valores próprios são ordenados segundo disposição

$$\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_i \geq \dots \hat{\lambda}_p \geq 0, \quad (4.149)$$

e associados com os respectivos valores próprios $\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\mathbf{m}}_2, \dots, \hat{\mathbf{m}}_1, \dots, \hat{\mathbf{m}}_p$. Por isso, diz-se que \mathbf{S} tem pares (vetor próprio, valor próprio) que são denotados pelos símbolos

$$(\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\lambda}_1), (\hat{\mathbf{m}}_2, \hat{\lambda}_2), \dots, (\hat{\mathbf{m}}_1, \hat{\lambda}_1), \dots, (\hat{\mathbf{m}}_p, \hat{\lambda}_p). \quad (4.150)$$

As seguintes propriedades são válidas.

a) a j -ésima componente principal é dada por:

$$\hat{y}_j = \hat{\mathbf{m}}_j^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \hat{m}_{1j}x_1 + \hat{m}_{2j}x_2 + \dots + \hat{m}_{pj}x_p, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.151)$$

$$b) \text{var}(\hat{y}_j) = \hat{\lambda}_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.152)$$

$$c) \text{var}(\hat{y}_1) \geq \text{var}(\hat{y}_2) \geq \dots \geq \text{var}(\hat{y}_p) \geq 0; \quad (4.153)$$

$$d) \text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (4.154)$$

e) traço da matriz covariância \mathbf{S} é igual ao traço da matriz espectral $\hat{\Lambda}$ e o determinante é o

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^p \text{var}(x_i) = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \dots + \hat{\sigma}_p^2 = \text{tr}({}_p\hat{\Lambda}_p) = \sum_{i=1}^p \text{var}(\hat{y}_i) = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p; \quad (4.155)$$

$$f) \prod_{i=1}^p \text{var}(\hat{y}_i) = \det(\mathbf{S}); \quad (4.156)$$

f) coeficiente de correlação entre a j -ésima componente principal \hat{y}_j e a i -ésima variável original x_i é dado por:

$$\rho_{\hat{y}_j, x_i} = \hat{m}_{ij} \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_j}}{\hat{\sigma}_i}; \quad (4.157)$$

g) a proporção da variância total explicada devido a j -ésima componente principal amostral é dada por:

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p} = \frac{\hat{\lambda}_j}{\text{tr}(\mathbf{S})}. \quad (4.158)$$

4.2.11.4.2 Interpretação geométrica das componentes principais amostrais

Supondo que a distribuição de $\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times p}$ é aproximadamente $N_p(\mu, \Sigma)$, então as componentes principais amostrais $\hat{y}_i = \hat{\mathbf{m}}_i^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ são realizações das componentes principais $y_i = \mathbf{m}_i^T (\mathbf{x} - \mu)$ as quais têm distribuição $N_p(0, \Lambda)$. A partir de valores amostrais x_j , pode-se aproximar μ por $\bar{\mathbf{x}}$ e Σ por \mathbf{S} . Se \mathbf{S} for matriz positiva definida, o contorno consistindo de todos os vetores $\mathbf{x} = [x_i]_{p \times 1}$ satisfazendo

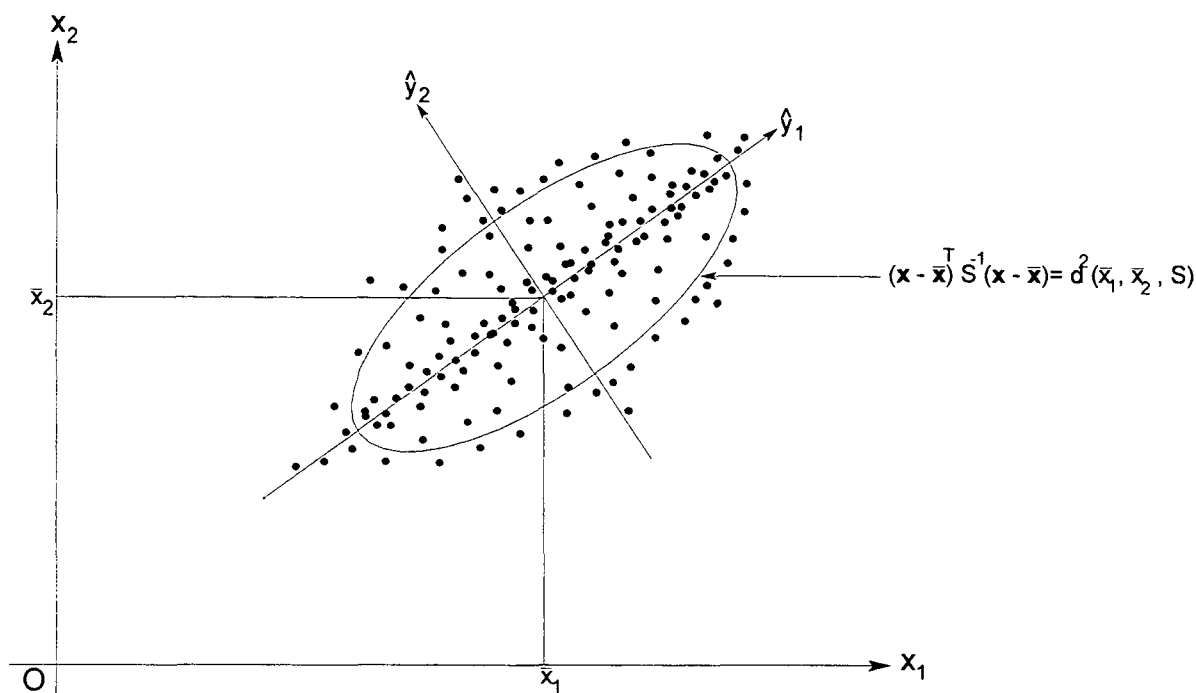
$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = c^2, \quad (4.159)$$

estimar o contorno de densidade constante

$$(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = c^2. \quad (4.160)$$

A interpretação geométrica das componentes principais amostrais fica mostrada pela figura 4.10 para o caso bivariado. A 1ª componente principal amostral situa-se ao longo do eixo da elipse na direção da variância amostral máxima; a 2ª componente principal amostral situa-se ao longo do eixo da elipse na direção da variância amostral mínima. Os contornos circulares indicam que a variação amostral é homogênea em todas as direções.

FIGURA 4.10 – COMPONENTES PRINCIPAIS AMOSTRAIS E ELIPSE DE DISTÂNCIA CONSTANTE



A fim de verificar se os p valores próprios são iguais entre si sob o nível de significância α , aplica-se o teste da igualdade dos valores próprios, também chamado teste de esfericidade, em um subconjunto contendo o número de valores próprios consecutivos igual a b (JACKSON, 1991, p. 33-34, 86-87, 347):

$$H_0 : \hat{\lambda}_{k+1} = \hat{\lambda}_{k+2} = \dots = \hat{\lambda}_{k+b}, \quad (4.161)$$

$$v \left[- \sum_{j=k+1}^{k+b} \ln(\hat{\lambda}_j) + b \ln \left(\frac{\sum_{j=k+1}^{k+b} \hat{\lambda}_j}{b} \right) \right] \sim \chi_{(b-1)(b+2)/2}^2, \quad (4.162)$$

na qual v designa o número de graus de liberdade associado com a matriz covariância amostral e χ^2 tem $(b-1)(b+2)/2$ graus de liberdade. Fixado o nível de significância α , se a estatística calculada for maior que $\chi_{(b-1)(b+2)/2}^2$, rejeita-se a hipótese H_0 .

Para o caso bivariado, o teste da igualdade dos valores próprios, sob a hipótese

$$H_0 : \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2, \quad (4.163)$$

é dado por:

$$F^* = \frac{(n-2)(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)}{8\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2}. \quad (4.164)$$

Na 4.164, F^* é a estatística a ser testada: $F^* \sim F_{2, n-2}$, i.e., a estatística segue distribuição F central com o número de graus de liberdade no numerador igual a 2 e o número de graus de liberdade no denominador igual a $n-2$.

4.2.11.5 Componentes principais amostrais obtidas de variáveis aleatórias normais padronizadas

Seja $\hat{\mathbf{R}}$ a matriz correlação associada ao vetor de variáveis padronizadas $\hat{\mathbf{z}}^T = [\hat{z}_1 \ \hat{z}_2 \ \dots \ \hat{z}_j \ \dots \ \hat{z}_p]$; $\hat{\mathbf{R}}$ tem pares (vetor próprio, valor próprio) segundo a forma 4.150. Verificam-se as seguintes propriedades (JOHNSON e WICHERN, 1998, p. 481-483):

a) a j -ésima componente principal é dada por

$$\hat{y}_j = \hat{\mathbf{m}}_j^T \hat{\mathbf{z}} = \hat{m}_{1j} \hat{z}_1 + \hat{m}_{2j} \hat{z}_2 + \dots + \hat{m}_{pj} \hat{z}_p, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.165)$$

b) $\text{var}(\hat{y}_j) = \hat{\lambda}_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.166)$

c) $\text{var}(\hat{y}_1) \geq \text{var}(\hat{y}_2) \geq \dots \geq \text{var}(\hat{y}_p) \geq 0; \quad (4.167)$

d) $\text{cov}(\hat{y}_i, \hat{y}_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (4.168)$

e) traço da matriz correlação $\hat{\mathbf{R}}$ é igual ao traço da matriz espectral $\hat{\Lambda}$

$$\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_{i=1}^p \text{var}(\hat{z}_i) = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p = \text{tr}(\hat{\Lambda}) = \sum_{i=1}^p \text{var}(\hat{y}_i) = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p = p; \quad (4.169)$$

f) $\prod_{i=1}^p \text{var}(\hat{y}_i) = \det(\hat{\mathbf{R}}); \quad (4.170)$

g) coeficiente de correlação entre a j -ésima componente principal \hat{y}_j e a i -ésima variável padronizada z_i é dado por

$$\hat{\rho}_{y_j z_i} = \hat{m}_{ij} \sqrt{\hat{\lambda}_j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, p\}; \quad (4.171)$$

h) a proporção da variância total explicada devido a j -ésima componente principal é dada por

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \dots + \hat{\lambda}_p} = \frac{\hat{\lambda}_j}{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}})} = \frac{\hat{\lambda}_j}{p}. \quad (4.172)$$

5 FUNDAMENTOS DA GEODÉSIA

A obtenção, o registro, a representação e a utilização do ente topográfico – objeto de mensuração – em relação a informações temáticas que estejam na STF, sob a STF ou acima da STF exigem como sistema de ordenação um sistema de referência geodésico. A realização de tal sistema exige pontos demarcados cujas coordenadas são determinadas por medições geodésicas e representadas em um sistema de coordenadas definido matematicamente.

Na utilização de coordenadas de pontos fixos surge a questão de qual sistema de referência se trata, de modo que não fica distinguido entre a definição, a realização e a representação dos pontos do sistema de referência em um sistema de coordenadas matemático.

Em dependência do objetivo, sistemas de referência definidos distintamente e sistemas de coordenadas matemáticos podem ser empregados. Na Geodésia são empregadas as coordenadas elipsóidicas, cujo sistema se fundamenta no elipsóide de revolução – superfície de referência matemática – que se aproxima à forma natural da Terra que é o Geóide.

No Brasil, o sistema oficial deste tipo é o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) que foi realizado pela implantação de um conjunto de pontos demarcados, denominado rede geodésica, ao longo do território brasileiro e utiliza o elipsóide SAD-69 definido em 1969 para o Sistema Sul-Americano. O SAD-69 é caracterizado pelos parâmetros geométricos: o semi-eixo maior $a = 6\,378\,160\text{m}$, o achatamento $f = 1/298,25$ e pela orientação topocêntrica em relação à Terra no *datum* Chuá, cujas coordenadas elipsóidicas são $\varphi = -19^\circ 45' 41,652\,7''$ e $\lambda = -48^\circ 06' 04,063\,9''$ e cuja ondulação geoidal ΔN foi arbitrada nula (FISHER, 1973, p. 6)

Em virtude de à época de sua realização os métodos utilizados não permitirem a obtenção de acurácia em coordenada como a que é obtida pelo GPS (*Global Positioning System*), o SGB tem sido aprimorado mediante a introdução de estações da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC). Para este fim é empregado o GPS cujo sistema de referência geodésico é o WGS-84 (*World Geodetic System of 1984*) que adota o elipsóide de parâmetros geométricos $a = 6\,378\,137\text{m}$ e achatamento $f = 1/298,257\,223\,563$.

O sistema de coordenadas WGS-84 apresenta as características (NIMA⁸, apud HOOIJBERG, 1997, p. 46):

- a) a origem é o centro de massa da Terra;
- b) o eixo z é a direção do Pólo Terrestre Convencional (CTP), segundo a definição do *Bureau International de l'Heure* (BIH) para a época 1984,0, tendo por base as coordenadas de estações BIH;
- c) o eixo x é a intersecção do plano meridiano de referência do WGS-84 e o plano do equador do CTP, sendo este meridiano o meridiano de origem definido pelo BIH para a época 1984,0, tendo por base as coordenadas de estações BIH;
- d) o eixo y, definido no plano do equador CTP e formando um ângulo $\pi/2$ a leste do eixo x, completa o sistema de coordenadas ortogonal, fixo, centrado na Terra e dextrogiro.

Cada vez mais é efetivada a passagem para a utilização dos sistemas geodésicos de orientação geocêntrica. A RBMC constitui uma parte das estações que realizam o Sistema de Referência Geocêntrico da América do Sul (SIRGAS). Como estes sistemas são definidos matematicamente, parâmetros que transformam as coordenadas de pontos referidas a um sistema para as referidas ao outro sistema precisam ser calculadas, e.g., os parâmetros que transformam as coordenadas referidas ao SIRGAS para as referidas ao SAD-69.

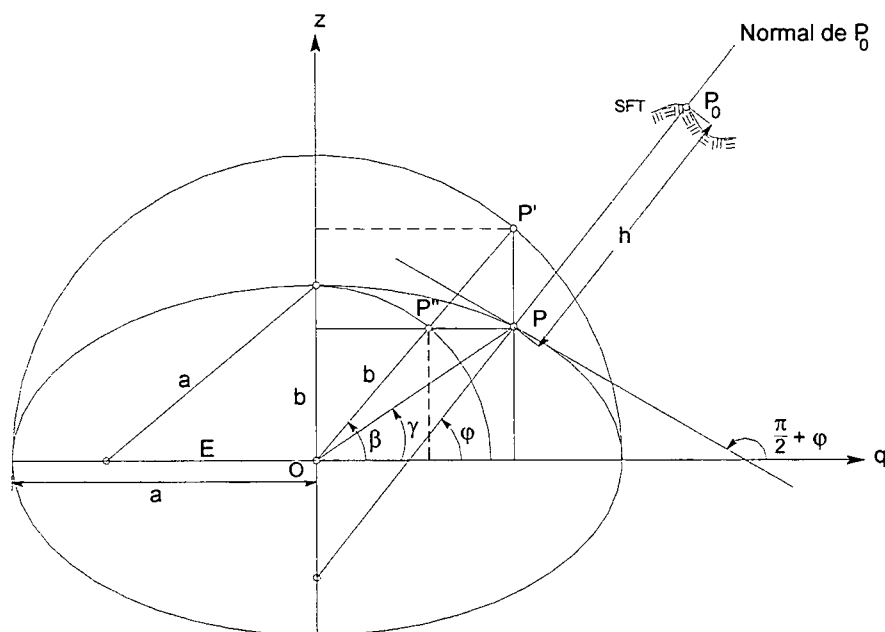
Nesta seção são apresentados os conceitos fundamentais do modelo geométrico da Geodésia, mediante os quais as esternas de lf_s podem ser caracterizadas. Inicialmente são descritos os parâmetros geométricos do elipsóide de revolução; depois, os sistemas de coordenadas e suas transformações, incluindo no Apêndice 3 a dedução das fórmulas completas de Molodenskii, mediante as quais as coordenadas de lf_s que não estejam referenciadas ao SGB possam ser transformadas com os parâmetros oficiais do IBGE, e finalmente o procedimento de cálculo de superfície de polígono elipsóidico como um dos modelos que trazem o aprimoramento à parcela terrestre como prédio.

⁸ NIMA, 1991 (1995). **Department of Defense – World Geodetic System 1984**. Technical Report DMA TR 8 350.2-B. 2.ed. Washington: Defense Mapping Agency.

5.1 PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

O giro de uma elipse em torno do seu eixo menor resulta um elipsóide achatado. O semi-eixo maior que é denotado pelo símbolo a e o semi-eixo menor que é denotado pelo símbolo b definem o tamanho e a forma do elipsóide de revolução, os quais ficam ilustrados pela elipse meridiana da figura 5.1, em que o eixo q contém a intersecção do plano meridiano com o plano do equador. Uma série de outras grandezas características são dependentes dos parâmetros a e b , das quais as mais importantes são definidas na seqüência e as demais encontram-se no Apêndice 1.

FIGURA 5.1 – ELIPSE MERIDIANA DO ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO



Dá-se o nome de excentricidade linear, denotada pelo símbolo E , ao comprimento do segmento de reta que liga o centro do elipsóide e o foco da elipse, i.e., metade da distância focal:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (5.1)$$

Com a excentricidade linear E , são definidas a 1ª e a 2ª excentricidades numéricas, respectivamente, pelas expressões:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E}{a}; \quad (5.2)$$

$$e' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E}{b}. \quad (5.3)$$

Das 5.1 e 5.2, obtém-se a relação entre o semi-eixo menor b , o semi-eixo a e a 1ª excentricidade numérica e dada por:

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \quad (5.4)$$

Dá-se o nome de achatamento, denotado pelo símbolo f , à razão da diferença entre o semi-eixo maior e o semi-eixo menor pelo semi-eixo maior:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a - b}{a}. \quad (5.5)$$

O achatamento situa-se no intervalo $0 \leq f \leq 1$. Quanto mais o comprimento do semi-eixo menor se aproxima do comprimento do semi-eixo maior, mais o achatamento se aproxima de zero, e por conseguinte, mais o elipsóide se aproxima da esfera de raio dado pelo semi-eixo maior, i.e.,

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a - b}{a} = 0. \quad (5.6)$$

Dá-se o nome de relação de comprimento, denotada pelo símbolo n , à razão definida por:

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a - b}{a + b}. \quad (5.7)$$

Dá-se o nome de raio de curvatura polar, denotado pelo símbolo c , à quantidade definida por:

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^2}{b}. \quad (5.8)$$

As quantidades e, e', f, n são utilizadas, nos desenvolvimentos de séries que descrevem a geometria do elipsóide. Essas quantidades situam-se no intervalo $[0; 1]$, o que permitem a convergência numérica rápida e poucos termos tornam a solução satisfatória.

O raio de curvatura da seção transversal, denotado pelo símbolo N , e o raio de curvatura da seção meridiana, denotado pelo símbolo M , são expressos em função do semi-eixo maior, da 1ª excentricidade numérica e da coordenada latitude geográfica elipsóidica, denotada pelo símbolo φ ; o raio do paralelo, denotado pelo símbolo r , e a coordenada longitude geográfica elipsóidica, denotada pelo símbolo λ , são quantidade auxiliares do desenvolvimento.

5.2 PARÂMETROS DA ELIPSE MERIDIANA

A equação do elipsóide de revolução no sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais é

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1. \quad (5.9)$$

Introduzindo as equações na forma paramétrica:

$$x = r \cos \lambda, \quad (5.10)$$

$$y = r \sin \lambda, \quad (5.11)$$

em que r é o raio do paralelo, i.e., $r^2 = x^2 + y^2$, e λ é a longitude geográfica elipsóidica, a 5.9 é reescrita como

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1, \quad (5.12)$$

que é a equação da elipse meridiana.

Da 5.12 retira-se

$$z^2 = b^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (5.13)$$

que derivando em relação a variável r , resulta

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{b^2 r}{a^2 z}. \quad (5.14)$$

Mas

$$\frac{dz}{dr} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cot \varphi = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}; \quad (5.15)$$

então,

$$\frac{b^2 r}{a^2 z} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (5.16)$$

Elevando ambos os membros da 5.16 ao quadrado, obtém-se:

$$b^4 r^2 \sin^2 \varphi - a^4 z^2 \cos^2 \varphi = 0. \quad (5.17)$$

Substituindo a 5.13 na 5.17, após as simplificações, resulta a expressão de r , em função de ambos os semi-eixos e da latitude geográfica elipsóidica, dada por:

$$r = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (5.18)$$

Ainda a 5.18 pode ser simplificada pela substituição da 5.4, resultando a expressão de r em função do semi-eixo maior, da 1ª excentricidade e da latitude:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5.19)$$

Da figura 5.1, retira-se a relação

$$N = \frac{r}{\cos \varphi}, \quad (5.20)$$

na qual substituída a 5.19, resulta a expressão do raio de curvatura da seção transversal:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5.21)$$

O segmento de reta da normal compreendido entre o ponto P da elipse meridiana e o semi-eixo maior, denotado pelo símbolo N' , cuja expressão obtida da figura 5.1 é escrita:

$$N' = \frac{z}{\sin \varphi}. \quad (5.22)$$

Da 5.16, 5.4 e 5.20, obtém-se:

$$z = \frac{b^2}{a^2} r \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = (1 - e^2) r \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = (1 - e^2) N \sin \varphi. \quad (5.23)$$

Substituindo a 5.23 na 5.22 resulta a relação entre N' e N expressa por:

$$N' = (1 - e^2) N. \quad (5.24)$$

A obtenção do raio de curvatura da seção meridiana M é conseguida fazendo $R = M$ na 3. 266 e a substituição da 1ª e 2ª derivadas. Da 5.13 obtém-se

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (5.25)$$

e sua segunda derivada em relação a r

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}. \quad (5.26)$$

Substituindo a 5.25 na 5.14, esta é reescrita como

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{b}{a} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (5.27)$$

Substituindo a 5.26 e 5.27 na 3.266, após as simplificações, obtém-se

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}. \quad (5.28)$$

Para $e = 0$, i.e., a esfera, ter-se-ão as igualdades

$$N = M = a. \quad (5.29)$$

Com M e r , o elemento de arco infinitesimal ds é expresso por

$$|ds| = \sqrt{(Md\varphi)^2 + (rd\lambda)^2}, \quad (5.30)$$

em que $Md\varphi$ é o elemento de arco infinitesimal do meridiano e $rd\lambda$ é o do paralelo.

A figura 5.1 ilustra, ainda, os conceitos de latitude reduzida β e de latitude geocêntrica γ . A primeira é dada pelo ângulo β formado pelo segmento de reta OP e o eixo q ; a segunda é dada pelo ângulo γ formado pelo segmento de reta OP' e o eixo q

$$\tan \gamma = \frac{z}{x} = \frac{N' \sin \varphi}{N \cos \varphi} = \frac{N(1-e^2)}{N} \tan \varphi = (1-f)^2 \tan \varphi; \quad (5.31)$$

$$\tan \gamma = \frac{b}{a} \tan \beta = \sqrt{1-e^2} \tan \beta = (1-f) \tan \beta. \quad (5.32)$$

Igualando a 5.31 e a 5.32, obtém-se a expressão que relaciona a latitude geográfica elipsóidica φ e a latitude reduzida β

$$\tan \beta = \sqrt{1-e^2} \tan \varphi = (1-f) \tan \varphi. \quad (5.33)$$

Logo:

$$\tan \gamma = (1-e^2) \tan \varphi = (1-f)^2 \tan \beta. \quad (5.34)$$

5.3 SISTEMAS DE COORDENADAS

A posição de um ponto definida geodesicamente se constitui na realidade física como pontos do espaço euclidiano de três dimensões da realidade abstrata da Matemática, i.e., cada ponto é caracterizado pelo terno composto pelas coordenadas geográficas astronômicas (Φ, Λ) e altitude ortométrica H , ou pela tríade de coordenadas cartesianas (x, y, z) , ou ainda pelo terno composto pelas coordenadas geográficas elipsóidicas (φ, λ) e altitude elipsóidica h . As tríades (Φ, Λ, H) e (φ, λ, h) são chamadas coordenadas naturais e coordenadas elipsóidicas, respectivamente.

O conceito posição designa ponto do espaço de três dimensões se qualquer uma destas tríades for empregada, ou então, designa ponto da superfície de referência se qualquer um dos pares (Φ, Λ) ou (φ, λ) for empregado.

A fim de descrever um ponto da realidade física e de estabelecer a relação geométrica entre os pontos distintos, os sistemas de coordenadas geodésicas são empregados. Os sistemas de coordenadas geodésicas são uma família de sistemas, da qual o sistema de coordenadas naturais e o sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas são membros.

Para as medições geodésicas terrestres são de significação dois grupos de sistemas de coordenadas (DIN, 1995, p. 16-31): sistemas de coordenadas naturais e sistemas de coordenadas elipsóidicas. O primeiro compreende os sistemas definidos no espaço gravitacional terrestre, e o segundo compreende os sistemas definidos no espaço geométrico que utilizam o elipsóide de revolução. O espaço gravitacional terrestre consiste no conjunto dos vetores de gravidade que, da forma Geometria Euclidiana, paralelamente ao vetor do topocentro ficam deslocados do geocentro, e o espaço geométrico consiste no conjunto dos vetores-posição que ligam o topocentro ao geocentro (GRAFAREND, 1981, 417-418).

Os sistemas de coordenadas naturais e os sistemas de coordenadas elipsóidicas possuem divisões consoante os quadros 5.1 e 5.2. Cada um dos sistemas cartesianos é caracterizado pelo terno ordenado de coordenadas e de versores i, j e k das direções dos eixos coordenados. Cada terno ordenado de coordenadas e os versores dos eixos coordenados são distinguidos por sinais sobrepostos.

QUADRO 5.1 – SISTEMAS DE COORDENADAS NATURAIS E VERSORES DAS DIREÇÕES DOS EIXOS COORDENADOS

SUBDIVISÕES DO SISTEMA	ABREVIATURA	NATUREZA GEOMÉTRICA DAS COORDENADAS		VERSORES DOS EIXOS
		retilínea	angular	
Cartesianas Geocêntricas	CG	x^*, y^*, z^*	—	$\hat{i}^*, \hat{j}^*, \hat{k}^*$
Geográficas Astronômicas	GA	—	Φ, Λ	—
Cartesianas Astronômicas Topocêntricas	CAT	x^{**}, y^{**}, z^{**}	—	$\hat{i}^{**}, \hat{j}^{**}, \hat{k}^{**}$
Polares Astronômicas Topocêntricas	PAT	d	A_a, z	—

QUADRO 5.2 – SISTEMAS DE COORDENADAS ELIPSÓIDICAS E VERSORES DAS DIREÇÕES DOS EIXOS COORDENADOS

SUBDIVISÕES DO SISTEMA	ABREVIATURA	NATUREZA GEOMÉTRICA DAS COORDENADAS			VERSORES DOS EIXOS
		retilínea	angular	geodésica do elipsóide	
Cartesianas Elipsóidicas	CE	$x^\circ, y^\circ, z^\circ$	—	—	$\hat{i}^\circ, \hat{j}^\circ, \hat{k}^\circ$
Geográficas Elipsóidicas	GE	h	φ, λ	—	—
Cartesianas Elipsóidicas Topocêntricas	CET	x^{**}, y^{**}, z^{**}	—	—	$\hat{i}^{**}, \hat{j}^{**}, \hat{k}^{**}$
Polares Elipsóidicas	PE	—	A_g	s	—
Polares Elipsóidicas Topocêntricas	PET	d	A_g, ζ	—	—

5.3.1 Sistema de Coordenadas Naturais

No sistema de coordenadas naturais se efetuam mensurações geodésicas, e.g., o Sistema de Coordenadas Polares Astronômicas Topocêntricas (PAT) em que os instrumentos são posicionados de modo que o seu eixo vertical se aproxime o mais possível da vertical do ponto de modo que a materialize.

5.3.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas geocêntricas

O sistema coordenadas cartesianas geocêntricas (CG), também denominado sistema de coordenadas terrestres fundamentais, é caracterizado pelas propriedades seguintes (TORGE, 1985, p. 314-315; TORGE, 1991, p. 35-37; HECK, 1995, p. 32-3; KLEIN, 1997, p.12; DIN, 1995, p. 16):

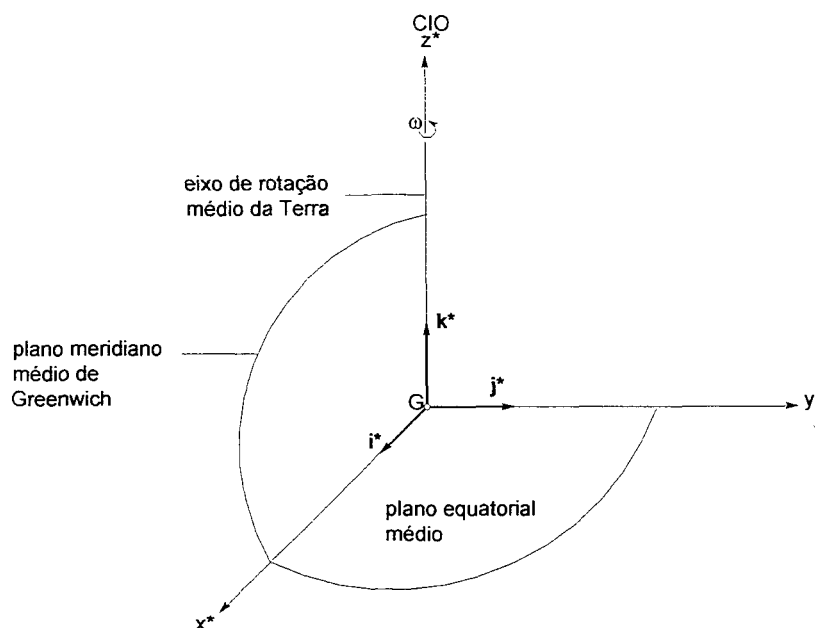
- a) sistema cartesiano do espaço de três dimensões;

- b) global e fixo na Terra;
- c) origem no ponto médio de massa G , definido fisicamente;
- d) eixo z^* é coincidente com o eixo de rotação médio da Terra; o eixo de rotação médio é determinado pelas estações de observação do *International Earth Rotation Service* (IERS) desde 1988 em que o pólo norte definido fica designado como *Conventional Terrestrial Pole* (CTP);
- e) plano x^*z^* é escolhido de tal forma que seja paralelo ao plano meridiano médio de *Greenwich*;
- f) o plano x^*y^* corresponde ao plano equatorial astronômico médio;
- g) os eixos $x^*, y^*,$ e z^* são entre si ortogonais e formam um sistema dextrogiro;
- l) o vetor posição neste sistema pode ser denotado pelo símbolo:

$$\mathbf{r}_0^{*T} = \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Estes elementos característicos estão representados na figura 5.2.

FIGURA 5.2 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS



5.3.1.2 Sistema de coordenadas geográficas astronômicas

O sistema de coordenadas geográficas astronômicas (GA) destina-se à determinação, à fixação ou definição da direção vertical nos pontos (DIN, 1995, p.17).

As coordenadas definidas pelo sistema são a latitude geográfica astronômica Φ e a longitude geográfica astronômica Λ (figura 5.3).

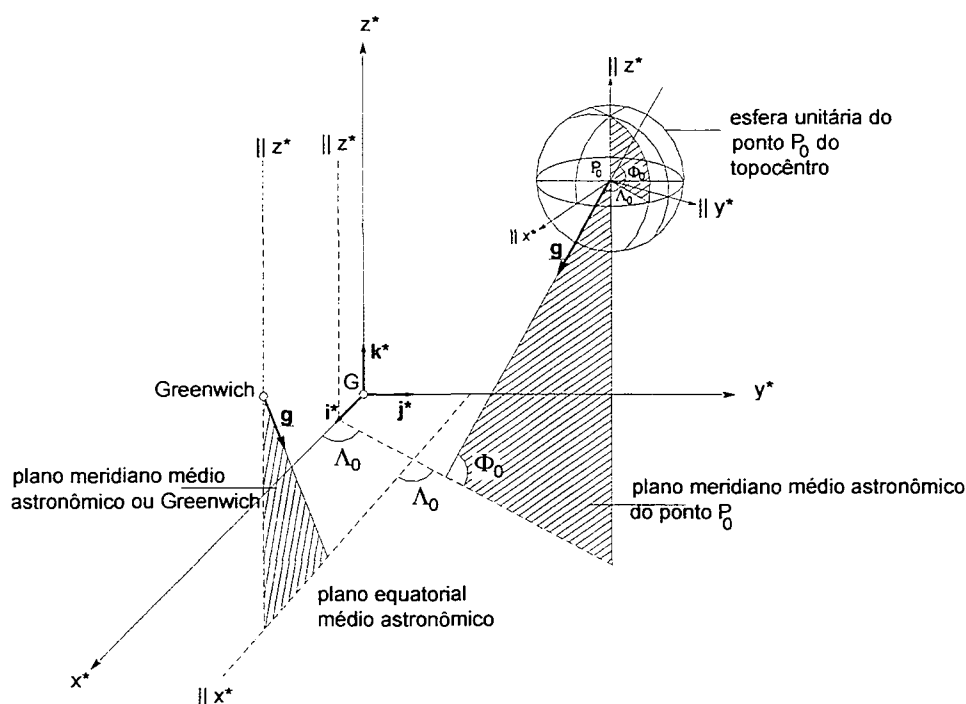
As coordenadas de um ponto

$$P_0 = (\Phi, \Lambda) \quad (5.36)$$

podem ser interpretadas como as coordenadas esféricas da direção da vertical após o deslocamento paralelo dos eixos de coordenadas do CG para o ponto P_0 .

O sistema de coordenadas geográficas astronômicas é um dos mais importantes sistemas de coordenadas em Geodésia, pois é nele que a latitude geográfica astronômica Φ e a longitude geográfica astronômica Λ , denominadas coordenadas naturais, são medidas, as quais fixam a vertical no espaço.

FIGURA 5.3 – SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ASTRONÔMICAS



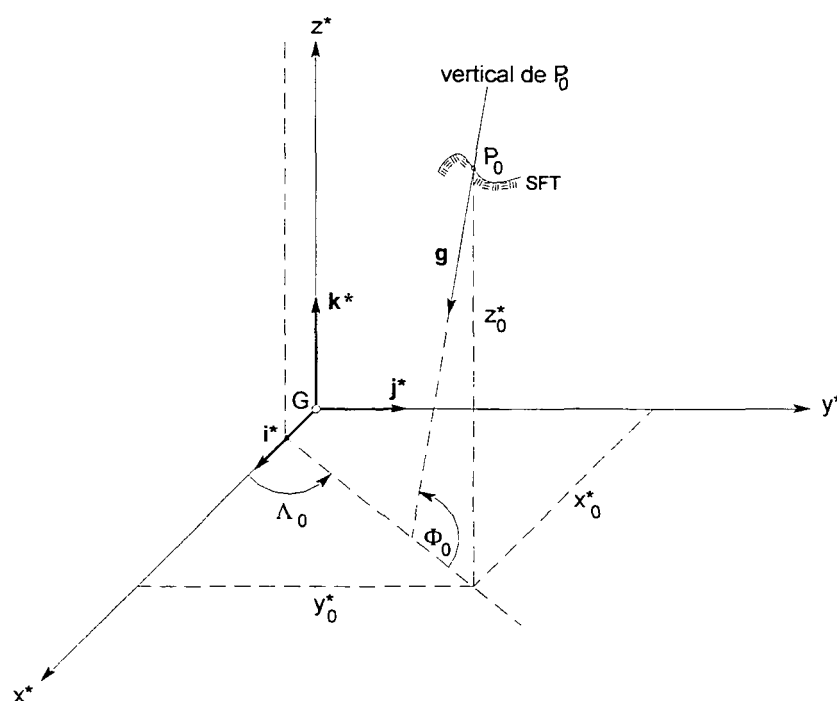
FONTE: HECK (1995, p. 33), adaptada e traduzida pelo autor.

O plano, que contém a vertical (direção do vetor intensidade da gravidade \mathbf{g}) do ponto P_0 , situado na superfície física da Terra e é paralelo ao eixo z^* , conforme mostra a figura 5.3, denomina-se plano meridiano astronômico do ponto P_0 (Heck, 1995, p. 32).

Na figura 5.4, o ângulo formado pela vertical e sua projeção no plano do equador (plano x^*y^*) é latitude geográfica astronômica Φ do ponto P_0 . Conta-se Φ

positivamente do equador para o norte e, negativamente, do equador para o sul, de modo que o intervalo de variação é $-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$.

FIGURA 5.4 – COORDENADAS GEOGRÁFICAS ASTRONÔMICAS COMO PARÂMETROS QUE FIXAM A VERTICAL NO ESPAÇO

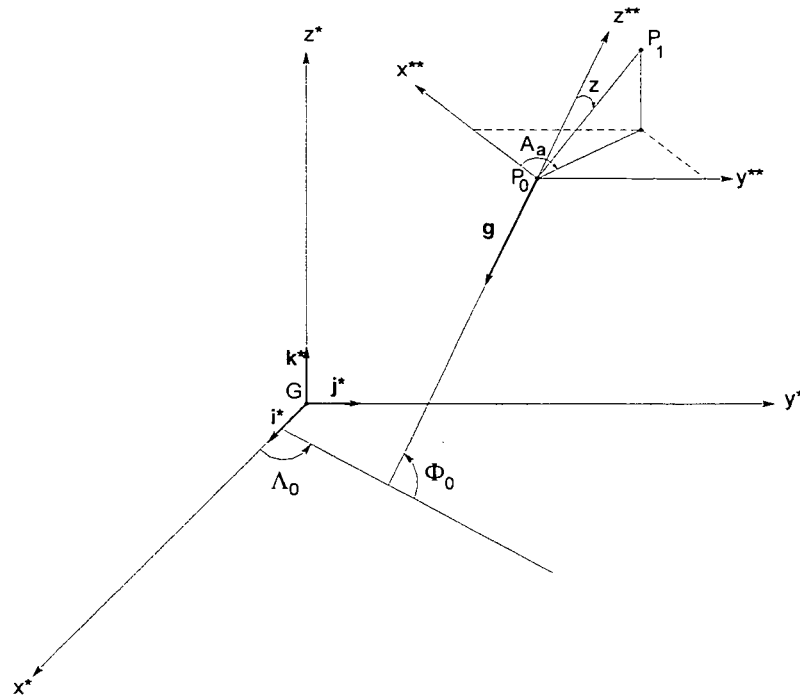


Combinando as figuras 5.4 e 5.3, o ângulo formado pela projeção da vertical do ponto P_0 no plano do equador (plano x^*y^*) e a projeção da vertical de *Greenwich* neste mesmo plano é a longitude geográfica astronômica Λ . Conta-se Λ , no plano do equador, desde a projeção da vertical de *Greenwich*, de duas formas: a primeira, positivamente para o leste no intervalo $0 \leq \Lambda < 2\pi$; e a segunda, positivamente para leste no intervalo $0 \leq \Lambda \leq \pi$ e negativamente para o oeste no intervalo $0 > \Lambda > -\pi$.

5.3.1.3 Sistema de coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas

Junto do CG é de significação o sistema de coordenadas astronômicas topocêntricas, abreviada por CAT, porque as medidas geodésicas terrestres, como a distância entre dois pontos, o ângulo zenital e o azimute astronômico, ilustradas pela figura 5.5, a ele estão ligadas pela direção da vertical do ponto P_0 .

FIGURA 5.5 – LIGAÇÃO ENTRE O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS E O SISTEMA DE COORDENADAS ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS



O CAT é caracterizado pelas seguintes propriedades (TORGE, 1980, p. 117; PELZER, 1985b, p. 495; VANÍČEK e KRAKIWSKY, 1986, p. 294; KLEIN, 1997, p. 13):

- coordenadas cartesianas;
- origem em um ponto P_0 escolhido: o topocentro;
- eixo z^{**} coincide com a direção vertical e é positivo no sentido do zênite do topocentro;
- eixo x^{**} é perpendicular ao eixo z^{**} , está contido no plano do meridiano astronômico do ponto P_0 e é positivo para o sentido do norte astronômico;
- eixo y^{**} é perpendicular aos eixos x^* e z^* e é contado positivamente para o leste astronômico;
- terno astronômico local (x^{**}, y^{**}, z^{**}) forma um sistema cartesiano levogiro;
- o vetor posição neste sistema pode ser denotado pelo símbolo

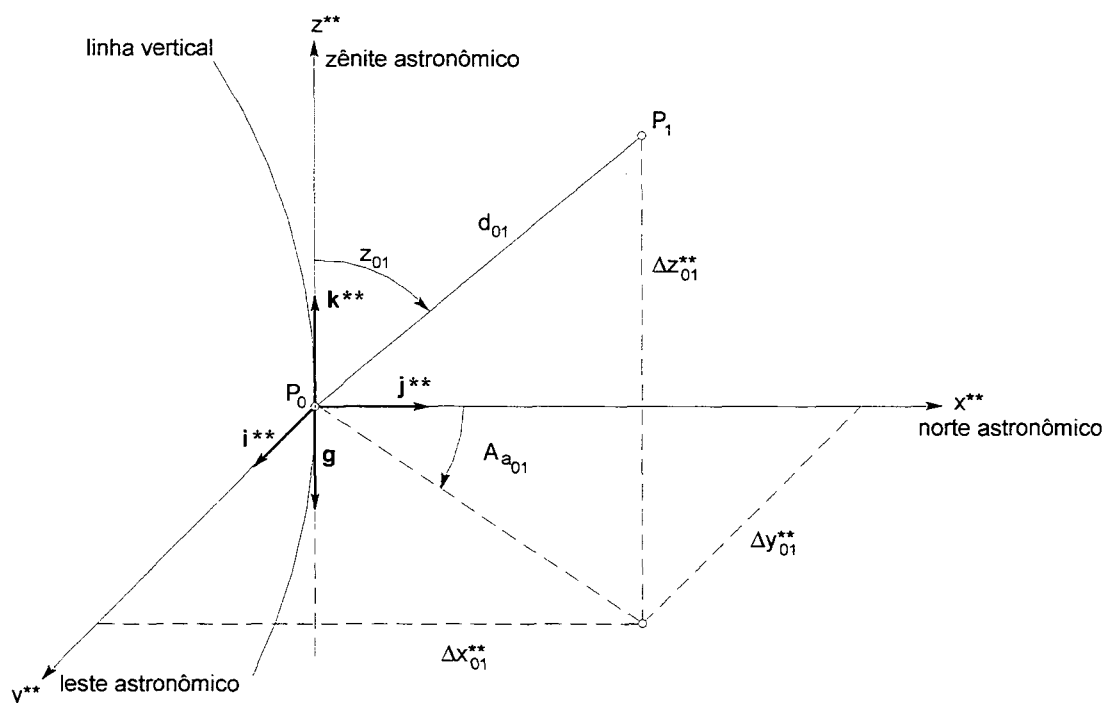
$$\mathbf{r}_0^{**T} = [x^{**} \quad y^{**} \quad z^{**}]. \quad (5.37)$$

5.3.1.4 Sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas

O sistema de coordenadas polares astronômicas topocêntricas (PAT), definido em associação com o CAT, é caracterizado pelas coordenadas polares obtidas no topocentro P_0 após a materialização da vertical pelo instrumento de mensuração: a distância d , o azimute astronômico A_a e o ângulo zenital z , conforme ilustra a figura 5.6. A posição de um ponto qualquer P_1 , e.g. P_1 , em relação à origem (ponto P_0) pode ser descrita com a notação

$$P_1 = (d, A_a, z). \quad (5.38)$$

FIGURA 5.6 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS



O azimute astronômico A_a é o ângulo entre o plano meridiano astronômico do ponto P_0 e o plano vertical que contém a direção vertical e o segmento de reta que liga o ponto P_0 ao ponto P_1 ; A_a é medido no plano horizontal e é contado positivamente do norte para o leste de modo que o intervalo de variação é $0 \leq A_a < 2\pi$.

Em um ponto P_0 , o vetor unitário \mathbf{n} contido na direção vertical e sentido para o zênite astronômico pode ser descrito com ajuda dos vetores unitários do CG,

\hat{i}^* , \hat{j}^* e \hat{k}^* , e das coordenadas geográficas astronômicas Φ e Λ , as quais são interpretadas como coordenadas esféricas ou então polares da direção zenital mediante a transposição dos eixos do CG para o ponto P_0 , de modo que as coordenadas do vetor \mathbf{n} são obtidas no CAT na forma vetorial

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

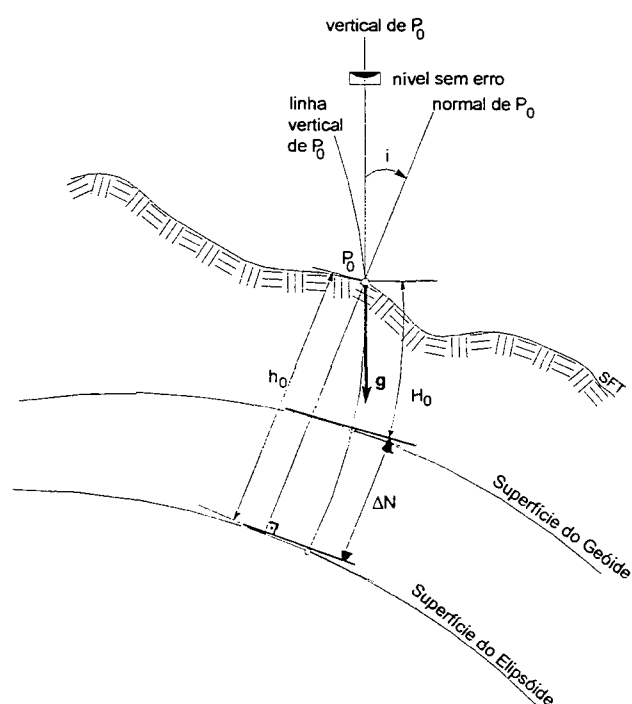
e a expressão cartesiana na forma

$$\mathbf{n} = x^{**}\hat{i}^* + y^{**}\hat{j}^* + z^{**}\hat{k}^* = \cos \Phi (\cos \Lambda)\hat{i}^* + \cos \Phi (\sin \Lambda)\hat{j}^* + (\sin \Phi)\hat{k}^*. \quad (5.40)$$

5.3.1.4.1 Conceitos de Linha vertical, vertical e normal do ponto P_0 do topocentro

A direção vertical (al. *Lotrichtung*) ou, simplesmente, vertical do ponto P_0 é a direção do vetor da intensidade da gravidade \mathbf{g} (al. *Schwereintensität*) nesse ponto.

FIGURA 5.7 – CONCEITO DE VERTICAL E CONCEITO DE NORMAL



A vertical é a referência para os ângulos latitude geográfica astronômica Φ e a longitude geográfica astronômica Λ do ponto P_0 . A direção oposta à direção da vertical do ponto P_0 chama-se direção do zênite astronômico.

O plano que é perpendicular à direção vertical chama-se plano horizontal. Todos os planos que contêm a direção vertical e, por conseguinte, perpendiculares ao plano horizontal são denominados planos verticais. De interesse para as mensurações geodésicas é o plano horizontal tangente no ponto P_0 , pois é neste ponto que a vertical é aproximadamente materializada pelo eixo vertical do instrumento, mediante o qual as grandezas de mensuração geodésicas são obtidas.

A direção de referência para a contagem das direções horizontais pode ser a direção do norte astronômico. Se o Geóide fosse conhecido, i.e, a sua ondulação ΔN e as componentes do desvio da vertical ξ e η , respectivamente em latitude e em longitude, então poder-se-ia obter a passagem das coordenadas naturais para as elipsóidicas mediante as relações aproximadas

$$\Phi \approx \varphi + \xi; \quad (5.41)$$

$$\Lambda \approx \lambda + \eta \cos \varphi; \quad (5.42)$$

$$H \approx h - \Delta N. \quad (5.43)$$

5.3.1.4.2 Grandezas de mensuração no ponto P_0 e suas reduções

Os l_f são medidos no sistema de coordenadas astronômicas topocêntricas, mas precisam ser reduzidos à superfície do elipsóide adotado pelo Sistema Geodésico oficial, e.g., o SGB para que as extremas tornem caracterizadas com as coordenadas geográficas elipsóidicas e que os l_f sejam descritos por coordenadas polares elipsóidicas cuja origem do sistema, em cada estrema, é o par de coordenadas (φ, λ) .

O sistema de coordenadas astronômico topocêntrico é realizado pela horizontalização do instrumento, e.g., teodolito ou taquímetro, em que o eixo vertical deve materializar a vertical do ponto de medição. A vertical em geral desvia da normal ao elipsóide e que contém o ponto de medição. Disto surge a redução necessária da direção horizontal quando se passa esta quantidade obtida no sistema natural para o sistema elipsóidico; assim, os ângulos medidos devem ter a redução, da ordem de centésimos de segundo de arco, devido ao desvio da vertical do ponto, segundo a expressão (ZAKATOV, 1997; WENDT, 1999, p. 55):

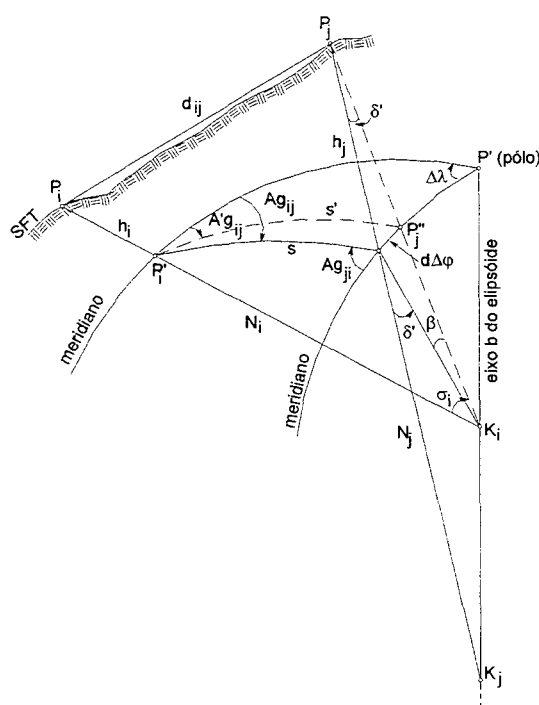
$$\delta_i = (\eta \cos A_a - \xi \sin A_a) \cot z. \quad (5.44)$$

Outra redução concerne às distâncias d_{ij} medidas no sistema de coordenadas astronômico topocêntrico. Na figura 5.8, o plano normal que contém simultaneamente os pontos P_i e P_j secciona o plano meridiano de P_j pelo ponto P_j'' da reta $\overline{P_j K_i}$ assim como a superfície do elipsóide pela seção normal, determinando o arco elíptico $s' = \overline{P_i P_j''}$ e o afastamento $d\Delta\varphi$ sobre o meridiano.

No triângulo plano $P_i K_i P_j$, o ângulo central σ_i é calculado pelo teorema dos cossenos:

$$\sigma_i = \arccos \frac{(N_i + h_i)^2 + (\overline{P_j K_i} + h_j)^2 - d_{ij}^2}{2(N_i + h_i)(\overline{P_j K_i} + h_j)}. \quad (5.45)$$

FIGURA 5.8 – REDUÇÃO DE DISTÂNCIA



O cálculo do segmento $\overline{P_j K_i}$ e, por conseguinte, do arco elíptico $s' = \overline{P_i P_j''}$ foram elaborados por JORDAN-EGGERT (1962b, p. 11):

$$(\overline{P_j K_i})^2 = N_j^2 \left[1 - 2e^2 \left(\sin \varphi_j - \frac{V_j}{V_i} \sin \varphi_i \right) \sin \varphi_j + e^2 \left(\sin \varphi_j - \frac{V_j}{V_i} \sin \varphi_i \right)^2 \right], \quad (5.46)$$

$$s' = N_i \sigma_i \left(1 - \frac{1}{6} \eta_i^2 \cos^2 A'_{g_{ij}} + \frac{1}{8} \sigma_i^3 \eta_i^2 \cos A'_{g_{ij}} \tan \varphi_i \right). \quad (5.47)$$

Na 5.47, η não é a componente do desvio da vertical em longitude, mas a expressão A1.12 (ver Apêndice 1) e V é a expressão A1.15.

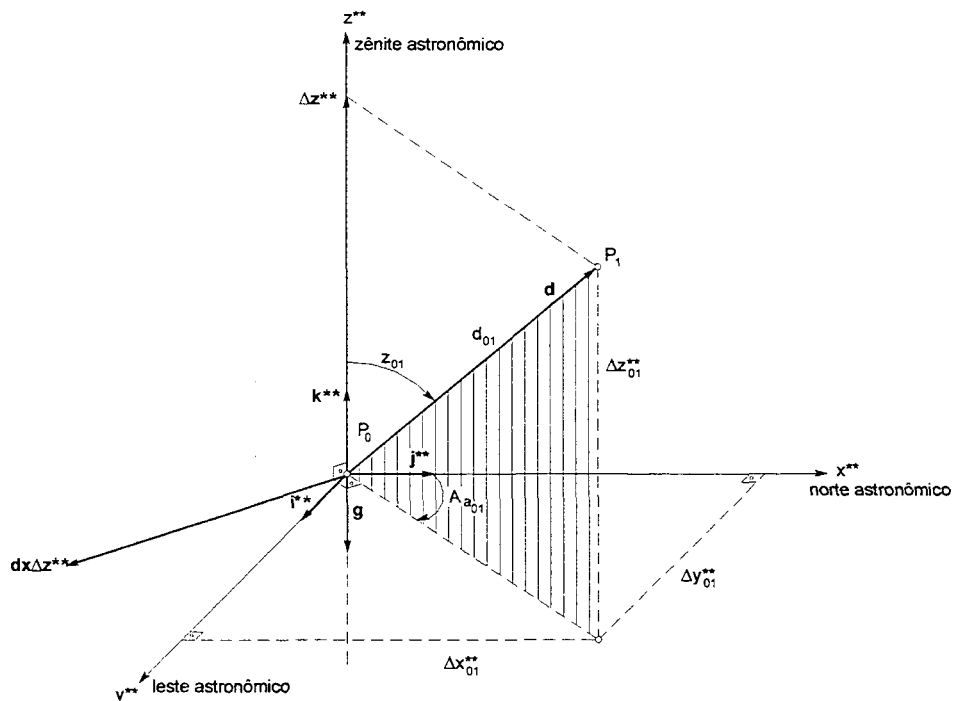
Consoante os fundamentos expostos na seção 3.1, a linha definida pelos pontos extremos P_0 e P_1 e orientada, é um vetor que pode ser representado pela notação $\Delta \mathbf{x}$ cuja expressão cartesiana no CAT é escrita

$$\Delta \mathbf{x}^{**} = \Delta x^{**} \mathbf{i}^{**} + \Delta y^{**} \mathbf{j}^{**} + \Delta z^{**} \mathbf{k}^{**}. \quad (5.48)$$

O azimute astronômico A_a , ilustrado na figura 5.9, pode ainda ser obtido pela relação vetorial (HECK, 1995, p. 94):

$$A_a = \arccos \left(\frac{\langle (\Delta \mathbf{x}^{**} \times \Delta \mathbf{z}^{**}), \Delta \mathbf{y}^{**} \rangle}{\| \Delta \mathbf{x}^{**} \times \Delta \mathbf{z}^{**} \|} \right) = \arcsin \left(\frac{\langle (\Delta \mathbf{z}^{**} \times \Delta \mathbf{x}^{**}), \Delta \mathbf{x}^{**} \rangle}{\| \Delta \mathbf{x}^{**} \times \Delta \mathbf{z}^{**} \|} \right). \quad (5.49)$$

FIGURA 5.9 – RELAÇÃO DAS QUANTIDADES DE OBSERVAÇÃO DISTÂNCIA E ÂNGULO ZENITAL COM OS VETORES $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{y}$ e $\Delta \mathbf{z}$



5.3.2 SISTEMA DE COORDENADAS ELIPSÓIDICAS

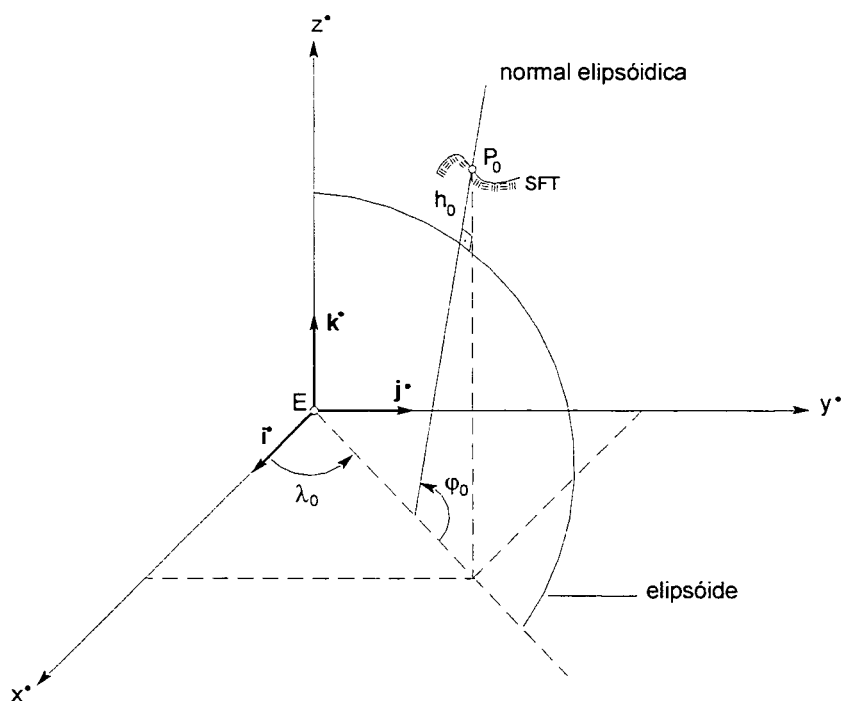
5.3.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas

O sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas, abreviado CE, é definido com respeito ao elipsóide (figura 5.10). Trata-se de um sistema cuja origem não coincide com a origem do CG e cujos eixos são não-paralelos com este.

São propriedades do CE:

- origem coincidente com o centro E do elipsóide;
- eixo z^* coincidente com o eixo de rotação do elipsóide;
- eixo x^* situa-se na intersecção do plano equatorial do elipsóide e o plano meridiano de *Greenwich*;
- eixo y^* é escolhido de forma que o sistema seja dextrogiro.

FIGURA 5.10 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS

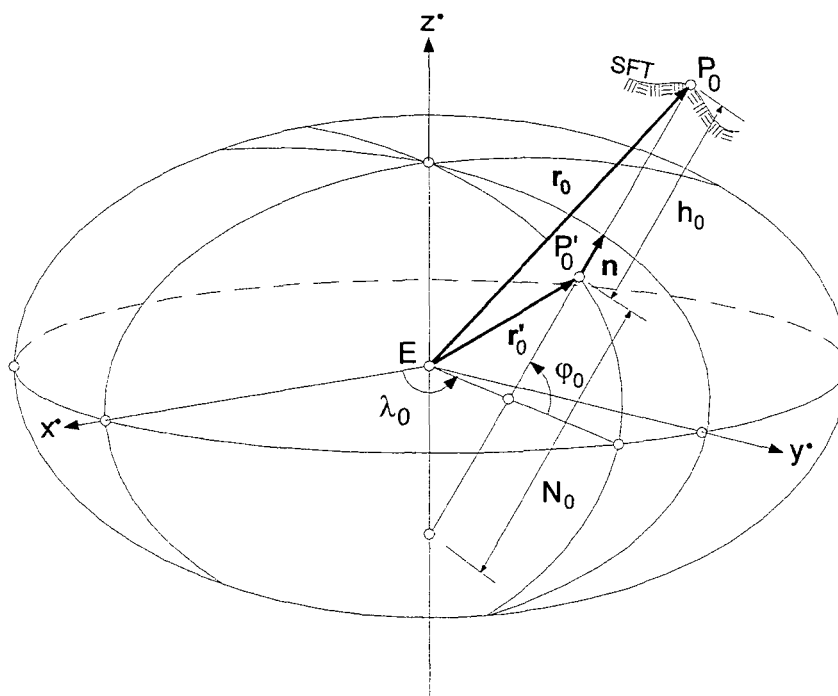


5.3.2.2 Sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas

O sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas (GE) é definido pelos ângulos latitude geográfica elipsóidica φ e longitude geográfica elipsóidica λ (TORGE, 1991, p. 45; DIN, 1995, p. 24).

A posição do ponto P_0 fica definida pelo par de coordenadas (φ, λ) e a coordenada retilínea h (figura 5.11).

FIGURA 5.11 – SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS



A latitude geográfica elipsóidica φ do ponto P_0 é definida como o ângulo entre a normal ao elipsóide deste ponto e o plano equatorial elipsóidico (plano x^*y^*); φ é contada do plano do equador elipsóidico, positivamente para o norte, e negativamente para o sul, de modo que o intervalo de variação é $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

A longitude geográfica elipsóidica λ do ponto P_0 é o ângulo no plano do equador elipsóidico entre eixo x^* e a projeção, sobre o plano x^*y^* , da normal ao elipsóide deste ponto. Conta-se λ , no plano do equador, de duas formas: a primeira, positivamente para o leste no intervalo $0 \leq \lambda < 2\pi$; e a segunda, positivamente para leste no intervalo $0 \leq \lambda \leq \pi$ e negativamente para o oeste no intervalo $0 > \lambda > -\pi$. A fim de determinar a posição espacial de um ponto na superfície física da Terra em relação a superfície do elipsóide, uma terceira coordenada é agrupada com (φ, λ) , a qual é denominada altitude elipsóidica, denotada pelo símbolo h , e definida como o comprimento do segmento da normal situada entre a superfície do elipsóide e o ponto.

O vetor \mathbf{r}_0 que tem origem no centro do elipsóide extremidade no ponto P_0 STF é a soma vetorial

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 + h\mathbf{n}, \quad (5.50)$$

$$\mathbf{r}'_0 = \begin{bmatrix} x'_{P_0} \\ y'_{P_0} \\ z'_{P_0} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ (1-e^2)\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Substituindo a 5.51 e a 5.52 na 5.50, resulta a expressão do vetor posição \mathbf{r}_0 :

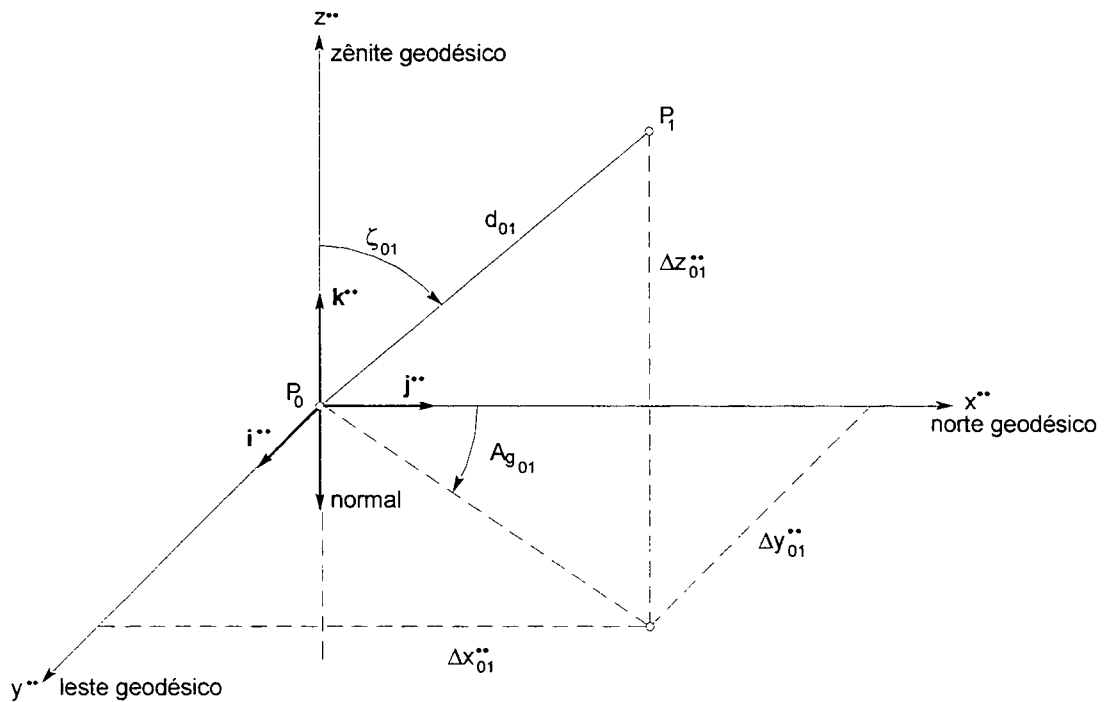
$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_{P_0} \\ y_{P_0} \\ z_{P_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi \cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi \sin\lambda \\ [(1-e^2)N+h]\sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

5.3.2.3 Sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas

Analogamente ao CAT que se vincula com o CG mediante a direção da linha vertical, o sistema de coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas, abreviado CET, ilustrado pela figura 5.12, vincula com o CE mediante a direção da normal do ponto P_0 . São propriedades do CET:

- a) sistema cartesiano levogiro com origem no topocentro;
- b) eixo z^{**} coincide com a direção da normal e tem sentido para o zênite elipsóidico;
- c) eixo x^{**} está contido no plano meridiano elipsóidico e tem sentido para o norte elipsóidico;
- d) eixo y^{**} coincide com a direção leste-oeste elipsóidica e tem sentido positivo para o leste;
- e) o plano $x^{**}y^{**}$ forma o horizonte elipsóidico topocêntrico que é perpendicular à normal do ponto P_0 .

FIGURA 5.12 – SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS TOPOCÊNTRICAS



A fim de definir a posição de um ponto qualquer P_1 em relação ao topocentro P_0 , são utilizados, ou o terno cartesiano (x'', y'', z'') , ou as coordenadas polares (d, A_g, ζ) .

O azimute geodésico A_g da posição de P_1 em relação a posição de P_0 é definido como o ângulo entre o plano meridiano elipsóidico de P_0 e o plano formado pelo eixo z'' e o ponto P_1 ; A_g é contado no plano $x''y''$ e contado positivamente do norte geodésico, pela ordem dos quadrantes NE, SE, SO e NO, de modo que o intervalo de variação é $0 \leq A_g < 2\pi$. O ângulo zenital elipsóidico ζ é o ângulo entre a normal elipsóidica no ponto P_0 e o segmento de reta que liga o ponto P_0 ao ponto P_1 ; ζ situa-se no intervalo $0 \leq \zeta \leq \pi$.

A expressão cartesiana do vetor topocêntrico de P_0 para P_1 pode ser escrita

$$\Delta \mathbf{x}'' = \Delta x'' \mathbf{i}'' + \Delta y'' \mathbf{j}'' + \Delta z'' \mathbf{k}'', \quad (5.54)$$

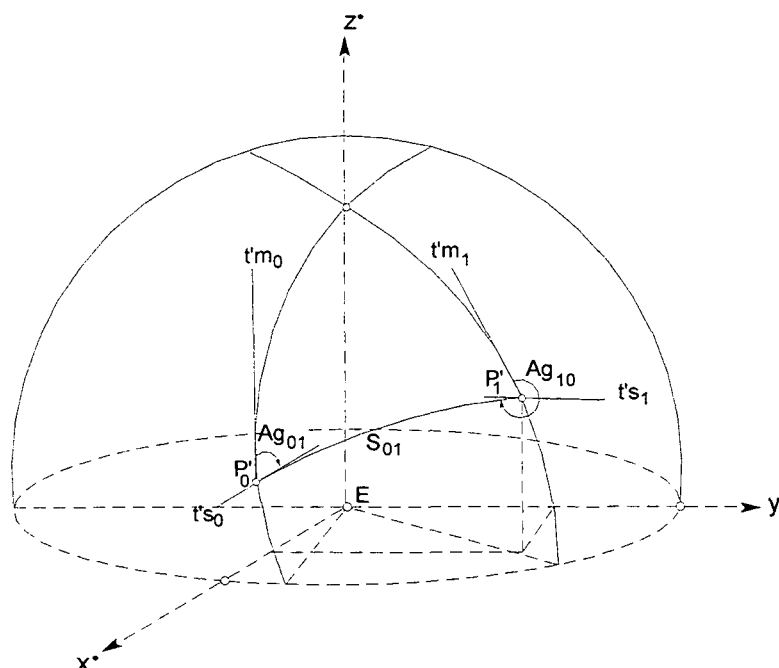
na qual

$$\Delta x'' = d \cos \alpha \sin \zeta, \quad \Delta y'' = d \sin \alpha \sin \zeta \quad \text{e} \quad \Delta z'' = d \cos \zeta. \quad (5.55)$$

5.3.2.4 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas

Em analogia ao sistema de coordenadas polares (seção 3.2.1.2.3), é concebido o sistema de coordenadas polares elipsóidicas cuja origem para a contagem do comprimento da linha geodésica é um ponto com as coordenadas geográficas elipsóidicas (φ, λ) conhecidas e cuja origem para a contagem do ângulo de orientação (azimute A_g) é a tangente ao meridiano do ponto. Como ilustra a figura 5.13, supondo conhecidos no ponto P'_0 as coordenadas geográficas elipsóidicas (φ_0, λ_0) , a linha geodésica s_{01} e o ângulo de orientação dessa linha, definido pelo ângulo (contado no sentido horário) formado entre as tangentes tm_0 e $t's_0$, as coordenadas polares elipsóidicas são s_{01} e $A_{g_{01}}$, mediante as quais possibilitam a determinação das coordenadas do ponto P'_1 que é o extremo de s_{01} e do azimute $A_{g_{10}}$.

FIGURA 5.13 – SISTEMA DE COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS



Disto surgem dois problemas geodésicos principais. O primeiro consiste na determinação das coordenadas geográficas elipsóidicas do ponto extremo da linha geodésica quando são conhecidas as coordenadas geográficas elipsóidicas da origem da linha geodésica e as coordenadas polares referidas a esta origem, e o segundo

consiste em determinar as coordenadas polares a partir do conhecimento das coordenadas geográficas elipsóidicas dos pontos extremos (KLOTZ, 1991, p. 31). A literatura geodésica traz uma variedade de procedimentos de solução de ambos os problemas com as respectivas acurácias. Destaque-se a solução – conforme exposta em SCHMIDT (1999, p. 121-128) – que aplica a integração numérica à integral elíptica que interpreta cada um desses problemas.

5.3.2.5 Sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas

Na figura 5.12 pode ser conceituado o sistema de coordenadas polares elipsóidicas topocêntricas (PET), em analogia ao sistema de coordenadas esféricas ou polares do espaço de três dimensões (ver seção 3.2.1.3.2). As coordenadas são a distância, o ângulo zenital geodésico e o azimute geodésico, de modo que forma a triade (d, A_g, ζ) .

5.3.3 Transformação de Coordenadas

Os entes geométricos podem ser caracterizados por coordenadas de vários sistemas apresentados e podem se tornar lf_s . Em virtude disto surge a necessidade das transformações das coordenadas de suas estemas nas coordenadas geográficas elipsóidicas referenciadas ao Sistema Geodésico oficial. Além disso, há o problema da mudança do *Datum* geodésico o que implica a mudança dos valores das coordenadas (d, A_g, ζ) (ver Apêndice 3).

5.3.3.1 Transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas nas coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas

A posição de um ponto qualquer P_i em relação a posição de um ponto P_0 , que é a origem do CAT, fica caracterizada pelo vetor Δx cujas coordenadas podem ser expressas tanto no CG com no CAT. Ambos os sistemas se interligam pela direção vertical do ponto P_0 de modo que as coordenadas Δx^* , Δy^* e Δz^* a partir das coordenadas Δx^{**} , Δy^{**} e Δz^{**} ou então das coordenadas polares d , A_a e z podem ser deduzidas e invertidas.

A fim de deduzir as relações matemáticas para as transformações, é necessário primeiramente exprimir os versores dos eixos coordenados $\mathbf{i}^{**}, \mathbf{j}^{**}$ e \mathbf{k}^{**} em função dos versores de base $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$ e \mathbf{k}^* dos eixos coordenados. Nisto, o procedimento consiste em deixar os eixos x^*, y^* e z^* do CG paralelos com os respectivos eixos x^{**}, y^{**} e z^{**} do CAT.

Comparando a figura 5.3 com a 5.6, verifica-se que o eixo x^* não é paralelo com o eixo x^{**} pelos dois ângulos Λ e $\frac{\pi}{2} - \Phi$, que o eixo y^* é não-paralelo com o eixo y^{**} pelo ângulo $\frac{\pi}{2} - \Phi$ e que o eixo z^* é não-paralelo com o eixo z^{**} também pelo ângulo $\frac{\pi}{2} - \Phi$.

Por isso gira-se o CG em torno do eixo z^* com o ângulo de rotação Λ no sentido anti-horário; e tomando o novo eixo y como eixo de rotação, efetua-se o rotação pelo ângulo $\frac{\pi}{2} - \Phi$. O sistema resultante distingue-se do CAT apenas no sentido do eixo x que tem sentido norte-sul em vez do sentido oposto; os eixos y e z concordam com os eixos y^{**} e z^{**} . O sentido do eixo x deve ser invertido, portanto. A inversão de sentido é efetuada pela matriz de reflexão. Com este procedimento, o sistema dextrogiro tornou-se um sistema levogiro cujos eixos coordenados são agora paralelos com os eixos coordenados do CAT no topocentro P_0 .

Logo, a expressão que relaciona os versores da direção dos eixos coordenados do CAT com os versores dos eixos coordenados do CG é dada pela igualdade matricial (HECK, 1995, p. 38-39)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}^{**} \\ \mathbf{j}^{**} \\ \mathbf{k}^{**} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) \mathbf{R}_3(\Lambda) \begin{bmatrix} \mathbf{i}^* \\ \mathbf{j}^* \\ \mathbf{k}^* \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

na qual

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ é a matriz de reflexão (seção 3.1.3.20),} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{R}_{2\left(\frac{\pi}{2}-\Phi\right)} = \begin{bmatrix} \sin \Phi & 0 & -\cos \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_{3(\Lambda)} = \begin{bmatrix} \cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.58; 59)$$

O produto matricial $\mathbf{P}\mathbf{R}_{2\left(\frac{\pi}{2}-\Phi\right)}\mathbf{R}_{3(\Lambda)}$ resulta a matriz

$$\mathbf{D}_{(\Phi,\Lambda)} = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda & -\sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \Phi \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

A matriz $\mathbf{D}_{(\Phi,\Lambda)}$ é ortogonal porque a transposta da matriz de rotação é igual a inversa da matriz de rotação e por isso representa-se

$$\mathbf{D}_{(\Phi,\Lambda)}^T = \mathbf{D}_{(\Phi,\Lambda)}^{-1}. \quad (5.61)$$

Agora é possível transformar as coordenadas

$$\Delta x^* \Leftrightarrow \Delta x^{**}, \Delta y^* \Leftrightarrow \Delta y^{**}, \Delta z^* \Leftrightarrow \Delta z^{**}$$

A expressão das componentes do vetor $\Delta \mathbf{x}^*$ em função das coordenadas do vetor $\Delta \mathbf{x}^{**}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta x^* \mathbf{i}^* + \Delta y^* \mathbf{j}^* + \Delta z^* \mathbf{k}^* &= \Delta x^{**} \mathbf{i}^{**} + \Delta y^{**} \mathbf{j}^{**} + \Delta z^{**} \mathbf{k}^{**} \\ &= \Delta x^{**} \left(-\sin \Phi \cos \Lambda \mathbf{i}^* - \sin \Phi \sin \Lambda \mathbf{j}^* + \cos \Phi \mathbf{k}^* \right) \\ &\quad + \Delta y^{**} \left(-\sin \Lambda \mathbf{i}^* + \cos \Lambda \mathbf{j}^* \right) \\ &\quad + \Delta z^{**} \left(\cos \Phi \cos \Lambda \mathbf{i}^* + \cos \Phi \sin \Lambda \mathbf{j}^* + \sin \Phi \mathbf{k}^* \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \Delta x^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta y^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta z^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \Delta x^{**} \left\{ -\sin \Phi \cos \Lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin \Phi \sin \Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \Phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad + \Delta y^{**} \left\{ -\sin \Lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad + \Delta z^{**} \left\{ \cos \Phi \cos \Lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \Phi \sin \Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin \Phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Fazendo as multiplicações, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta z^* \end{bmatrix} = \Delta x^{**} \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda \\ \cos \Phi \end{bmatrix} + \Delta y^{**} \begin{bmatrix} -\sin \Lambda \\ \cos \Lambda \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta z^{**} \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Logo, as coordenadas são expressas por

$$\Delta x^* = -\Delta x^{**} \sin \Phi \cos \Lambda - \Delta y^{**} \sin \Lambda + \Delta z^{**} \cos \Phi \cos \Lambda; \quad (5.65)$$

$$\Delta y^* = -\Delta x^{**} \sin \Phi \sin \Lambda + \Delta y^{**} \cos \Lambda + \Delta z^{**} \cos \Phi \sin \Lambda; \quad (5.66)$$

$$\Delta z^* = +\Delta x^{**} \cos \Phi + \Delta z^{**} \sin \Phi. \quad (5.67)$$

Sob a notação matricial a 5.65, 5.66 e 5.67 se tornam

$$\Delta \mathbf{x}^* = \mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^T \Delta \mathbf{x}^{**}. \quad (5.68)$$

As coordenadas do vetor $\Delta \mathbf{x}^{**}$ são obtidas da 5.68 mediante a inversão da matriz $\mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^T$; mas

$$\left(\mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^T \right)^{-1} = \left(\mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^{-1} \right)^{-1} = \mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}, \quad (5.69)$$

de modo que resulta

$$\Delta \mathbf{x}^{**} = \mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)} \Delta \mathbf{x}^* \quad (5.70)$$

e as coordenadas

$$\Delta x^{**} = -\Delta x^* \sin \Phi \cos \Lambda - \Delta y^* \sin \Phi \sin \Lambda + \Delta z^* \cos \Phi; \quad (5.71)$$

$$\Delta y^{**} = -\Delta x^* \sin \Lambda + \Delta y^* \cos \Lambda; \quad (5.72)$$

$$\Delta z^{**} = +\Delta x^* \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta y^* \cos \Phi \sin \Lambda + \Delta z^* \sin \Phi. \quad (5.73)$$

As coordenadas polares d , A_a e z de um ponto qualquer P_1 podem ser expressas em função das diferenças de coordenadas do CG e dos parâmetros Φ e Λ da direção vertical. Disto escreve-se as quantidades

a) distância pela expressão:

$$|d| = \sqrt{(\Delta x^{**})^2 + (\Delta y^{**})^2 + (\Delta z^{**})^2} = \sqrt{(\Delta x^*)^2 + (\Delta y^*)^2 + (\Delta z^*)^2}; \quad (5.74)$$

b) azimute pela expressão:

$$\begin{aligned} A_a &= \arctan \frac{\Delta y^{**}}{\Delta x^{**}} \\ &= \arctan \frac{-\Delta x^* \sin \Lambda + \Delta y^* \cos \Lambda}{-\Delta x^* \sin \Phi \cos \Lambda - \Delta y^* \sin \Phi \sin \Lambda + \Delta z^* \cos \Phi}; \end{aligned} \quad (5.75)$$

c) ângulo zenital pela expressão:

$$z = \arccos \frac{\Delta z^{**}}{d}$$

$$= \arccos \frac{\Delta x^* \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta y^* \cos \Phi \sin \Lambda + \Delta z^* \sin \Phi}{d}. \quad (5.76)$$

5.3.3.2 Transformação das coordenadas cartesianas elipsóidicas nas coordenadas geográficas elipsóidicas

A transformação inversa, i.e., a obtenção do terno (φ, λ, h) do ponto P_0 a partir do terno ordenado das coordenadas cartesianas (x^*, y^*, z^*) é conseguida pela fórmula da longitude λ (GRAFAREND et al., 1995, p. 339) e pelas fórmulas da latitude φ e da altitude elipsóidica h (BOWRING, 1985, p. 203, 206):

$$\lambda = \pi \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y^*) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(y^*) \operatorname{sgn}(x^*) \right] + \arctan \frac{y^*}{x^*}, \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \lambda < 2\pi\}; \quad (5.77)$$

$$\varphi = \arctan \frac{z^* + e'^2 a(1-f) \sin^3 u}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2 - e'^2 a \cos^3 u}}, \quad \left\{ \varphi \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}; \quad (5.78)$$

$$u = \arctan \left[\frac{z^*(1-f)}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}} \left(1 + \frac{e'^2 a(1-f)}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2}} \right) \right]; \quad (5.79)$$

$$h = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2} \cos \varphi + z^* \sin \varphi - \frac{a^2}{N}, \quad \{h \in \mathbb{R} \mid h \geq 0\}. \quad (5.80)$$

5.3.3.3 Transformação das coordenadas cartesianas elipsóidicas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas

Como o CE e o CET estão ligados um com o outro pela normal elipsóidica, existem relações que permitem expressar as coordenadas de um sistema em função das coordenadas do outro sistema.

Note-se que a relação geométrica que existe entre o CG e o CAT é semelhante a que existe entre o CE e o CET; a distinção se faz pela troca dos argumentos Φ e Λ por φ e λ , respectivamente. Disto segue que a relação existente entre os vetores básicos \vec{i}'' e \vec{i}' (HECK, 1995, p. 46) se exprime por:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \mathbf{R}_3(\lambda) \begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

na qual o produto $\mathbf{P} \mathbf{R}_2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \mathbf{R}_3(\lambda)$ resulta a matriz

$$\mathbf{D}_{(\varphi,\lambda)} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Então, as fórmulas que relacionam os vetores de base são

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix}; \quad (5.83)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi \cos\lambda \\ -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{i}} \\ \underline{\underline{j}} \\ \underline{\underline{k}} \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

Analogamente a 5.68, as coordenadas do vetor $\Delta \mathbf{x}^\bullet$ são obtidas pela expressão

$$\Delta \mathbf{x}^\bullet = \mathbf{D}_{(\varphi,\lambda)}^\top \Delta \mathbf{x}^{\bullet\bullet}, \quad (5.85)$$

cujas componentes são

$$\Delta x^\bullet = -\Delta x^{\bullet\bullet} \sin\varphi \cos\lambda - \Delta y^{\bullet\bullet} \sin\lambda + \Delta z^{\bullet\bullet} \cos\varphi \cos\lambda; \quad (5.86)$$

$$\Delta y^\bullet = -\Delta x^{\bullet\bullet} \sin\varphi \sin\lambda + \Delta y^{\bullet\bullet} \cos\lambda + \Delta z^{\bullet\bullet} \cos\varphi \sin\lambda; \quad (5.87)$$

$$\Delta z^\bullet = +\Delta x^{\bullet\bullet} \cos\varphi + \Delta z^{\bullet\bullet} \sin\varphi. \quad (5.88)$$

Inversamente,

$$\Delta \mathbf{x}^{\bullet\bullet} = \mathbf{D}_{(\varphi,\lambda)} \Delta \mathbf{x}^\bullet, \quad (5.89)$$

$$\Delta x^{\bullet\bullet} = -\Delta x^\bullet \sin\varphi \cos\lambda - \Delta y^\bullet \sin\varphi \sin\lambda + \Delta z^\bullet \cos\varphi; \quad (5.90)$$

$$\Delta y^{\bullet\bullet} = -\Delta x^\bullet \sin\lambda + \Delta y^\bullet \cos\lambda; \quad (5.91)$$

$$\Delta z^{\bullet\bullet} = +\Delta x^\bullet \cos\varphi \cos\lambda + \Delta y^\bullet \cos\varphi \sin\lambda + \Delta z^\bullet \sin\varphi. \quad (5.92)$$

Com estas expressões, obtém-se finalmente a relação entre as coordenadas polares d, A_a e ζ e as coordenadas do CE

$$|d| = \sqrt{(\Delta x^{\bullet\bullet})^2 + (\Delta y^{\bullet\bullet})^2 + (\Delta z^{\bullet\bullet})^2} = \sqrt{(\Delta x^\bullet)^2 + (\Delta y^\bullet)^2 + (\Delta z^\bullet)^2}; \quad (5.93)$$

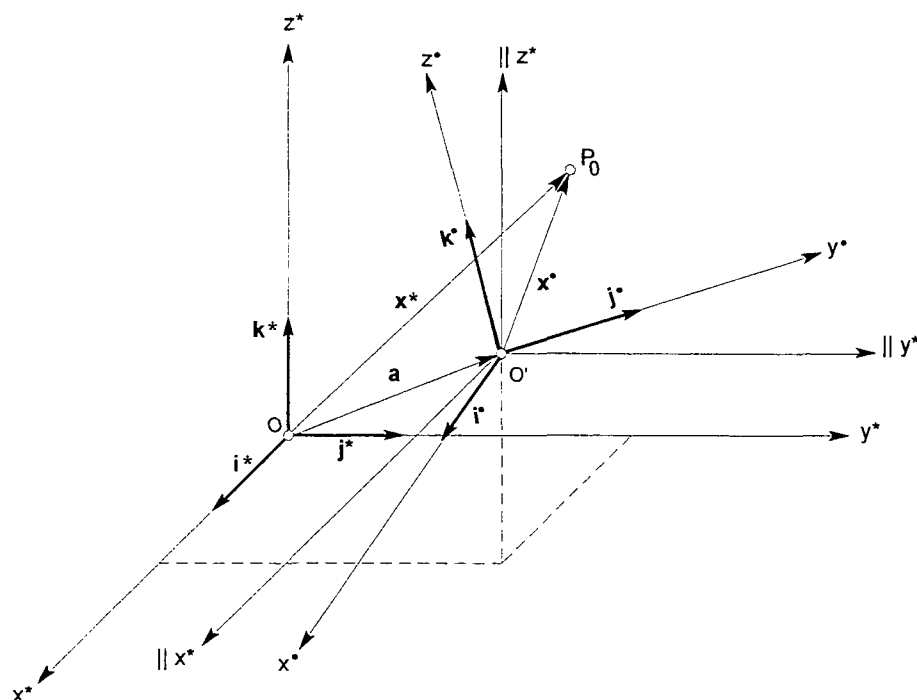
$$A_a = \arctan \frac{\Delta y''}{\Delta x''} = \arctan \frac{-\Delta x' \sin \lambda + \Delta y' \cos \lambda}{-\Delta x' \sin \phi \cos \lambda - \Delta y' \sin \phi \sin \lambda + \Delta z' \cos \phi}; \quad (5.94)$$

$$\zeta = \arccos \frac{\Delta z''}{|d|} = \arccos \frac{\Delta x' \cos \phi \cos \lambda + \Delta y' \cos \phi \sin \lambda + \Delta z' \sin \phi}{|d|}. \quad (5.95)$$

5.3.3.4 Transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas

A figura 5.14 mostra a correspondência entre o CG e o CE, a qual é dada por seis parâmetros que, geometricamente, podem ser interpretados como três deslocamentos da origem nas direções dos eixos assim como três ângulos de rotação para a rotação espacial dos eixos coordenados.

FIGURA 5.14 – RELAÇÃO ENTRE AS COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS E AS COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS



A fim de alinhar os eixos do CE paralelamente aos do CG são necessários três rotações espaciais mediante os ângulos de rotação $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z em torno dos eixos x', y' e z' , respectivamente.

A rotação no espaço do CE no CG fica descrita pelo produto das três matrizes de rotação $R_{1(\varepsilon_x)}, R_{2(\varepsilon_y)}$ e $R_{3(\varepsilon_z)}$ (HECK, 1995, p. 48):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}^* \\ \dot{j}^* \\ \dot{k}^* \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{3(\varepsilon_z)} \mathbf{R}_{2(\varepsilon_y)} \mathbf{R}_{1(\varepsilon_x)} \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{j} \\ \dot{k} \end{bmatrix}. \quad (5.96)$$

O vetor posição \mathbf{x}^* do ponto P_0 é composto pela soma do vetor posição \mathbf{x}° com o vetor \mathbf{a} do deslocamento da origem:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{x}^\circ. \quad (5.97)$$

As coordenadas do vetor \mathbf{x}^* são

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{3(\varepsilon_z)} \mathbf{R}_{2(\varepsilon_y)} \mathbf{R}_{1(\varepsilon_x)} \begin{bmatrix} x^\circ \\ y^\circ \\ z^\circ \end{bmatrix}. \quad (5.98)$$

Da equação 5.97, são obtidas as fórmulas para as diferenças de coordenadas. Sejam os vetores:

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{x}_1^\circ; \quad (5.99)$$

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{x}_2^\circ. \quad (5.100)$$

fazendo a diferença $\mathbf{x}_2^* - \mathbf{x}_1^*$, obtém-se a equação

$$\Delta\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\Delta\mathbf{x}^\circ, \quad (5.101)$$

As coordenadas do vetor \mathbf{x}^* são

$$\begin{bmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta z^* \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{3(\varepsilon_z)} \mathbf{R}_{2(\varepsilon_y)} \mathbf{R}_{1(\varepsilon_x)} \begin{bmatrix} \Delta x^\circ \\ \Delta y^\circ \\ \Delta z^\circ \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

5.3.3.5 Transformação das coordenadas cartesianas astronômicas topocêntricas nas coordenadas cartesianas elipsóidicas topocêntricas

Das seções 5.3.3.1 e 5.3.3.3 são retiradas as equações

$$\Delta\mathbf{x}^* = \mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^T \Delta\mathbf{x}^{**}; \quad (5.103)$$

$$\Delta\mathbf{x}^\circ = \mathbf{D}_{(\varphi, \lambda)}^T \Delta\mathbf{x}^{**}; \quad (5.104)$$

$$\Delta\mathbf{x}^* = \mathbf{R}\Delta\mathbf{x}^\circ. \quad (5.105)$$

Substituindo a 5.104 em 5.105 e, depois, em 5.103, resulta

$$\mathbf{R}\mathbf{D}_{(\varphi, \lambda)}^T \Delta\mathbf{x}^{**} = \mathbf{D}_{(\Phi, \Lambda)}^T \Delta\mathbf{x}^{**}. \quad (5.106)$$

Sob a consideração da 5.61, ambos os membros da 5.106 são premultiplicados por $D_{(\phi, \lambda)}$, obtendo

$$\Delta x^{**} = D_{(\phi, \lambda)} R D_{(\phi, \lambda)}^T \Delta x^{**}. \quad (5.107)$$

O CAT e o CET se distinguem em orientação pelos ângulos de rotação η, ξ e ψ , que descrevem as respectivas rotações em torno dos eixos x^{**}, y^{**} e z^{**} (figura 5.15).

Uma relação equivalente a 5.107 é obtida mediante a transformação do sistema levogiro CET em um sistema dextrogiro a fim de que os ângulos de rotação η, ξ e ψ , possuam um sentido de rotação matematicamente positivo (HECK, 1995, p. 53), o que é conseguida pela reflexão do eixo y^{**} no plano $x^{**}y^{**}$ de modo que a rotação espacial completa é dada pelo produto matricial $P_2 R_{3(\psi)} R_{2(\xi)} R_{1(\eta)}$.

A fim de transformar o sistema dextrogiro resultante no sistema levogiro CAT é necessária a reflexão do eixo y^{**} no plano $x^{**}y^{**}$. Com este procedimento é obtida a equação

$$\begin{bmatrix} x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{bmatrix} = P_2 R_{3(\psi)} R_{2(\xi)} R_{1(\eta)} \begin{bmatrix} x^{**} \\ y^{**} \\ z^{**} \end{bmatrix}. \quad (5.108)$$

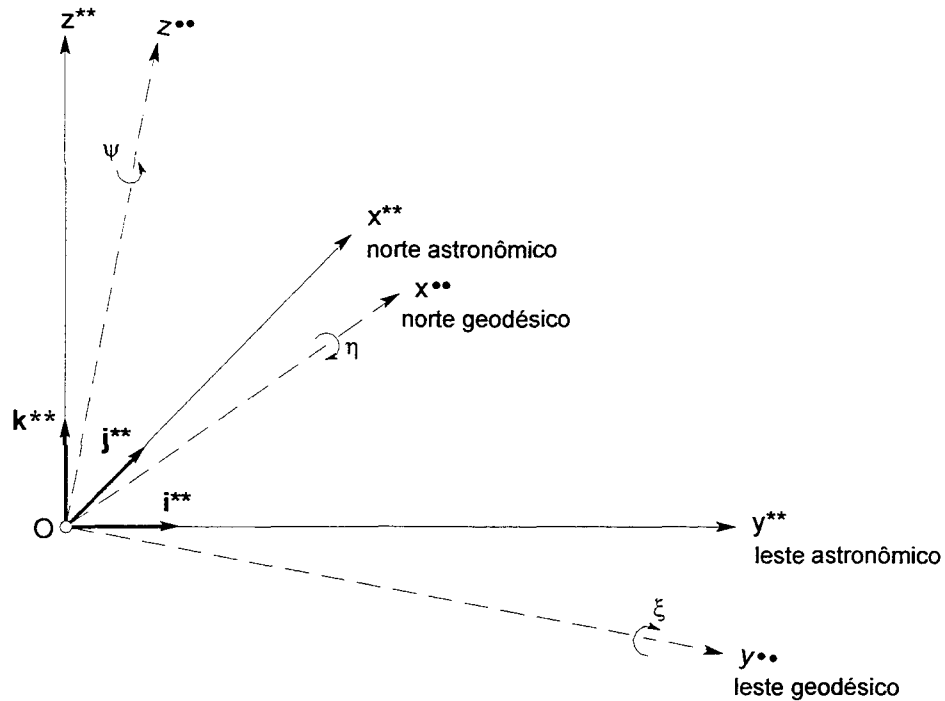
As expressões 5.107 e 5.108 mostram a relação não-linear que há entre as componentes do desvio da vertical, i.e., a componente do desvio da vertical em longitude, a componente do desvio da vertical em latitude e a componente do desvio da vertical no plano horizontal: $\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi - (\varepsilon_x \cos \lambda + \varepsilon_y \sin \lambda) \sin \phi + \varepsilon_z \cos \phi$, $\xi = (\Phi - \phi) + \varepsilon_x \sin \lambda - \varepsilon_y \cos \lambda$ e $\psi = (\Lambda - \lambda) \sin \phi + (\varepsilon_x \cos \lambda + \varepsilon_y \sin \lambda) \cos \phi + \varepsilon_z \sin \phi$, respectivamente, e os ângulos de rotação $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z , assim como os parâmetros ϕ e λ da normal elipsóidica e Φ e Λ da direção zenital no topocentro P_1 (HECK, 1995, p. 53-54):

$$R_{3(\psi)} R_{2(\xi)} R_{1(\eta)} = P_2 P_1 R_{2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} R_{3(\Lambda)} R_{3(\varepsilon_z)} R_{2(\varepsilon_y)} R_{1(\varepsilon_x)} R_{3(\lambda)}^T R_{2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}^T P_1 P_2. \quad (5.109)$$

O primeiro membro da 5.109 pode ser aproximado, dado que os ângulos η, ξ e ψ são pequenos, pela matriz

$$\mathbf{R}_{3(\psi)}\mathbf{R}_{2(\xi)}\mathbf{R}_{1(\eta)} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\xi \\ -\psi & 1 & \eta \\ \xi & -\eta & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.110)$$

FIGURA 5.15 – DISTINÇÃO ENTRE O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ASTRONÔMICAS TOPOCÊNTRICAS E O SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ELIPSÓIDICAS TOPOCÊNTRICAS



O produto $\mathbf{R}_{3(\varepsilon_z)}\mathbf{R}_{2(\varepsilon_y)}\mathbf{R}_{1(\varepsilon_x)}$ também pode ser aproximado, dado que os ângulos $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z são pequenos, pela matriz

$$\mathbf{R}_{3(\varepsilon_z)}\mathbf{R}_{2(\varepsilon_y)}\mathbf{R}_{1(\varepsilon_x)} \approx \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.111)$$

Substituindo na 5.109 a 3.135, a 5.60, a 5.111 e a 5.82, reescreve-se a 5.110 na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\xi \\ -\psi & 1 & \eta \\ \xi & -\eta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\Phi \cos\Lambda & -\sin\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ \cos\Phi \cos\Lambda & \cos\Phi \sin\Lambda & \sin\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.112)$$

5.4 SUPERFÍCIE DO POLÍGONO SOBRE O ELIPSÓIDE

A superfície de um polígono sobre o elipsóide pode ser deduzida a partir da superfície formada pelo lado desse polígono, pelos meridianos dos pontos extremos do lado e o equador.

A comparação da figura 5.16 com a figura 5.17 mostra que a linha geodésica entre os pontos B e C do elipsóide corresponde ao arco de círculo máximo entre os pontos B' e C' da esfera. Nisto as latitudes esféricas dos pontos sobre a esfera são idênticas com as latitudes reduzidas dos pontos sobre o elipsóide. Assim, para cada ponto (φ, λ) da linha geodésica no elipsóide, há o ponto (β, ω) em um círculo máximo.

FIGURA 5.16 – TRIÂNGULO ELIPSÓIDICO

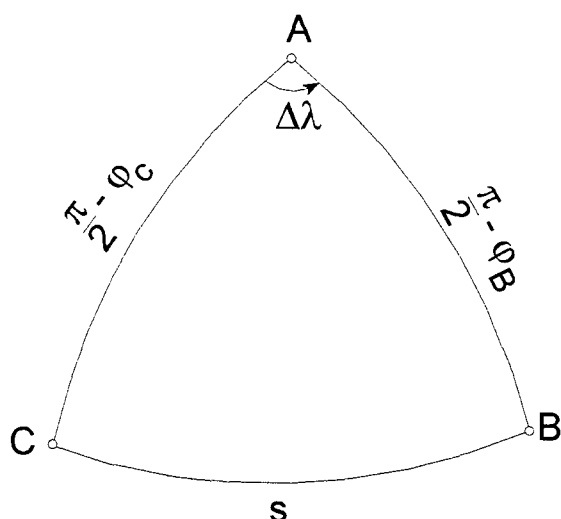
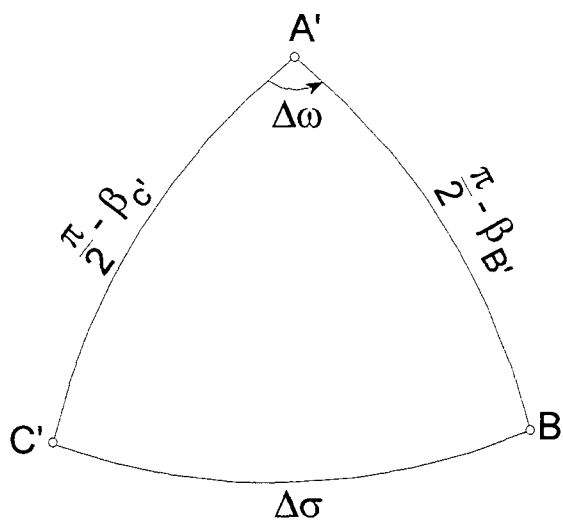


FIGURA 5.17 – TRIÂNGULO ESFÉRICO



Ainda nas figuras 5.16 e 5.17, o triângulo elipsóidico ABC corresponde ao triângulo esférico A'B'C' com o mesmo azimute A_g para as linhas s e $\Delta\sigma$ (RAINSFORD, 1955, p. 13; HECK, 1995, p. 183, 245; WOLFRUM, 1995, p. 413). A latitude reduzida β do ponto B é a mesma do ponto B', e a do ponto C é a mesma de C', mas a distância entre os dois pontos e a diferença de longitude são diferentes (JORDAN-EGGERT, 1962b, p. 110).

O elemento de arco infinitesimal ds expresso

a) na esfera:

$$Rd\sigma \cos A_g = Rd\beta; \quad (5.113)$$

$$Rd\sigma \sin A_g = R \cos \beta d\omega; \quad (5.114)$$

b) no elipsóide:

$$ds \cos A_g = M d\varphi; \quad (5.115)$$

$$ds \sin A_g = N \cos \varphi d\lambda. \quad (5.116)$$

A relação entre a longitude geográfica elipsóidica λ e o ângulo ω é a razão entre a 5.113 e a 5.115:

$$\frac{R d\beta}{M d\varphi} = \frac{R d\sigma}{ds} \Rightarrow \frac{d\beta}{d\varphi} = M \frac{d\sigma}{ds} \quad (5.117)$$

e entre a 5.114 e a 5.116:

$$\frac{R \cos \beta d\omega}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{R d\sigma \sin A_g}{ds \sin A_g} \Rightarrow \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{N \cos \varphi}{\cos \beta} \frac{d\sigma}{ds} = \frac{N \cos \varphi}{M \cos \beta} \frac{d\beta}{d\varphi} = V^2 \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \frac{d\beta}{d\varphi}. \quad (5.118)$$

Como

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{V \sqrt{1-e^2}}; \quad (5.119)$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta}; \quad (5.120)$$

então

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \beta} = V \sqrt{1-e^2}. \quad (5.121)$$

A relação diferencial entre φ e β , a qual vem da 5.33 é

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} d\beta = \sqrt{1-e^2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \Rightarrow \frac{d\beta}{d\varphi} = \sqrt{1-e^2} \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi}. \quad (5.122)$$

Reescrevendo a 5.119 na forma:

$$\frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{V^2 (1-e^2)} \quad (5.123)$$

que substituída na 5.122 resulta o quociente diferencial entre $\frac{d\beta}{d\omega}$:

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{1}{V^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (5.124)$$

Substituindo a 5.124 na 5.118 encontra-se o quociente diferencial entre $d\lambda$ e $d\omega$:

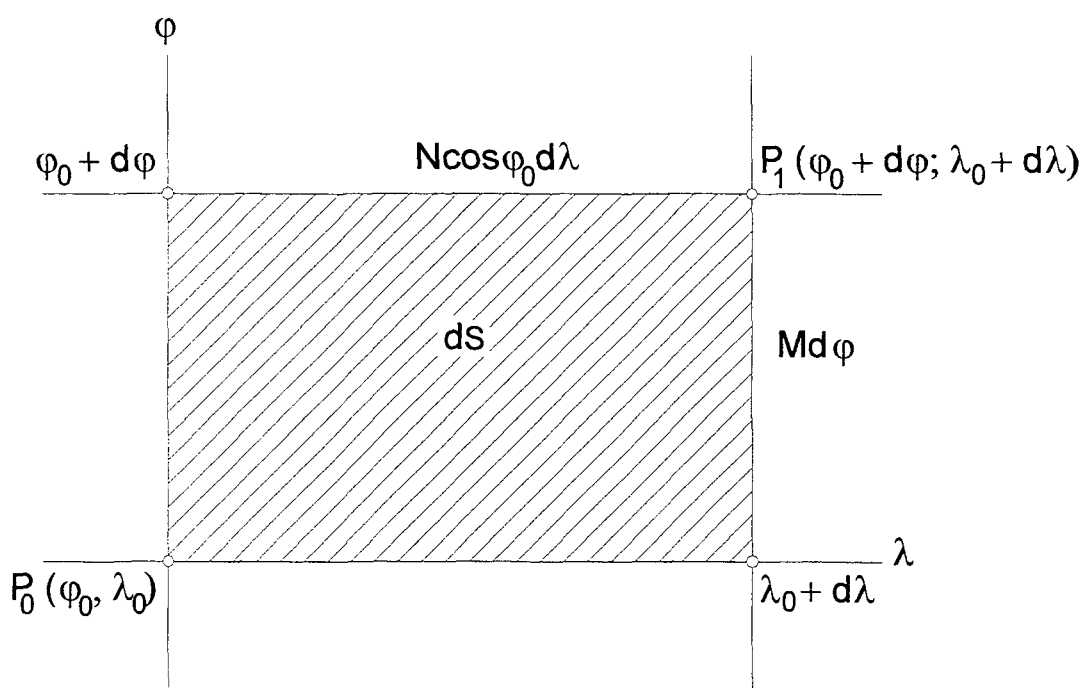
$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{1}{V} = \sqrt{1-e^2} \cos^2 \beta = \sqrt{1 - \frac{e'^2}{1+e'^2} (1-\sin^2 \beta)} = \sqrt{\frac{1+e'^2 \sin^2 \beta}{1+e'^2}} = (1-f) \sqrt{1+e'^2 \sin^2 \beta}. \quad (5.125)$$

5.4.1 Superfície do quadrilátero infinitesimal

Da figura 5.18, a superfície dS de um quadrilátero infinitesimal na superfície do elipsóide é expressa por:

$$dS = (Md\varphi)(N\cos\varphi d\lambda) = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cos\varphi d\varphi d\lambda = \frac{a^2(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} \cos\varphi d\varphi d\lambda. \quad (5.126)$$

FIGURA 5.18 - QUADRILÁTERO ELIPSÓIDICO INFINITESIMAL



Utilizando do Apêndice 1 as identidades

$$a = b\sqrt{1+e'^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1+e'^2 \Rightarrow a^2 = b^2(1+e'^2); \quad 1 = (1-e^2)(1+e'^2); \quad e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2};$$

$$\sin\varphi = V\sin\beta; \quad V^2 = \frac{1+e'^2}{1+e'^2\sin^2\beta}; \quad 0 = e'^2 - e^2 - e^2e'^2; \quad d\varphi = \frac{V^2}{\sqrt{1+e'^2}} d\beta;$$

e substituindo-as na 5.126, vem a expressão da superfície infinitesimal dS em função da latitude reduzida β e da diferencial $d\omega$:

$$dS = b^2(1+e'^2\sin^2\beta)(\cos\beta)d\beta d\omega. \quad (5.127)$$

Fazendo

$$t = \sqrt{1+e'^2\sin^2\beta}; \quad (5.128)$$

a 5.127 resulta

$$dS = b^2 t t' (\cos \beta) d\beta d\omega; \quad (5.129)$$

em que t' diz respeito à esfera.

Mediante a 5.129, a integração é efetuada sobre a esfera (DANIELSEN, 1989, p. 62). A superfície S compreendida pela linhas: equador, geodésica e os meridianos é a intergral:

$$S = b^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} t' d\omega \int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta; \quad (5.130)$$

em que

$$\int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta = \int_0^{\beta_1} \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \beta} \cos \beta d\beta. \quad (5.131)$$

Fazendo as substituições:

$$e' \sin \beta = x; \quad (5.132)$$

$$\frac{dx}{d\beta} = e' \cos \beta \Rightarrow \frac{1}{e'} dx = \cos \beta d\beta; \quad (5.133)$$

$$e' \sin \beta_1 = y; \quad (5.134)$$

a 5.131 é reescrita como

$$\int_0^{\beta_1} t \cos \beta d\beta = \frac{1}{e'} \int_0^y \sqrt{1 + x^2} dx. \quad (5.135)$$

O integrando $\sqrt{1+x^2}$ é desenvolvido em série pela fórmula do binômio com expoente $m > 0$ (BRONSTEIN et al., 1999, p. 1011):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (5.136)$$

que resulta

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} \dots \quad (5.137)$$

Então a solução da integral 5.135 é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e'} \int_0^y \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} + \dots \right) dx \\ &= \frac{1}{e'} \left(y + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{40}y^5 + \frac{1}{112}y^7 - \frac{5}{1152}y^9 + \frac{7}{2816}y^{11} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.138)$$

Multiplicando a 5.138 por

$$t' = \sqrt{1+y^2} = 1 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{16}y^6 - \frac{5}{128}y^8 + \frac{7}{256}y^{10} \dots \quad (5.139)$$

resulta, após a eliminação dos termos de potência superiores a 11,

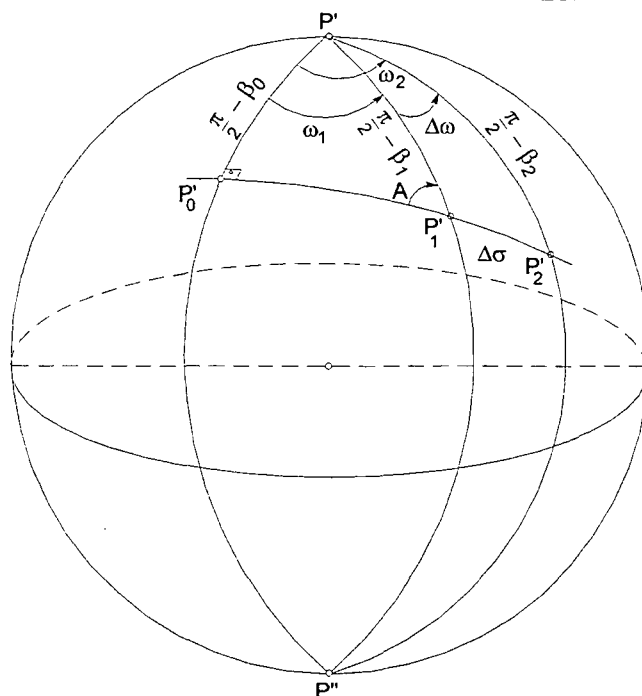
$$\frac{1}{e'} \left(y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + \frac{4}{105}y^7 - \frac{8}{315}y^9 + \frac{64}{3465}y^{11} + \dots \right). \quad (5.140)$$

Substituindo a 5.140 na 5.130, a expressão da superfície se torna

$$S = \frac{b^2}{e'} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + \frac{4}{105}y^7 - \frac{8}{315}y^9 + \frac{64}{3465}y^{11} + \dots \right) d\omega. \quad (5.141)$$

Mas $y = e' \sin \beta_1$. É necessário exprimir o $\sin \beta_1$ em função dos argumentos ω e β_0 (figura 5.19).

FIGURA 5.19 – TRIÂNGULOS ESFÉRICOS AUXILIARES SOBRE A ESFERA UNITÁRIA DE BESSEL



No triângulo esférico retângulo $P'P'_0P'_1$ sobre a esfera unitária de Bessel (HECK, 1995, p. 246), o ponto P'_0 possui a máxima latitude reduzida e ω é contado a partir do meridiano deste ponto.

Aplicando o teorema dos senos (ver Apêndice 2), obtém-se

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_1\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta_0\right)}{\sin A} \Rightarrow \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0} = \frac{1}{\sin A}. \quad (5.142)$$

Aplicando o teorema das cotangentes (ver Apêndice 2), obtém-se

$$\cos A = \sin\omega \sin\beta_0. \quad (5.143)$$

Elevando cada membro da 5.143 ao quadrado,

$$\cos^2 A = \sin^2\omega \sin^2\beta_0 \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \sin^2\omega \sin^2\beta_0}. \quad (5.144)$$

Substituindo a 5.144 na 5.142, esta é reescrita como

$$\frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\omega \sin^2\beta_0}}. \quad (5.145)$$

Aplicando o teorema das cotangentes ao triângulo $P'P_0P_2'$, obtém-se

$$\cos\omega = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right) \cot\beta_0; \quad (5.146)$$

$$\tan\beta_2 = \tan\beta_0 \cos\omega; \quad (5.147)$$

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_0 \cos\omega \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_0}. \quad (5.148)$$

Portanto,

$$y = e' \sin\beta_2 = e' \frac{\sin\beta_0 \cos\omega}{\sqrt{1 - \sin^2\beta_0 \sin^2\omega}}. \quad (5.149)$$

Fazendo

$$\sin\theta = \sin\beta_0 \sin\omega; \quad (5.150)$$

obtem as identidades:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\beta_0 \sin^2\omega}; \quad (5.151)$$

$$\cos\omega = \frac{1}{\sin\beta_0} \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta_0}; \quad (5.152)$$

que permitem reescrever a 5.149 como

$$y = e' \frac{\sin\beta_0 \cos\omega}{\cos\theta} = e' \frac{1}{\cos\theta} \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\beta_0}. \quad (5.153)$$

Diferenciando as funções $\sin\omega$ e $\sin\theta$ da 5.150:

$$\cos\theta d\theta = \sin\beta_0 \cos\omega d\omega; \quad (5.154)$$

obtem-se a diferencial $d\omega$ expressa por:

$$d\omega = \frac{\cos \theta}{\sin \beta_0 \cos \omega} d\theta. \quad (5.155)$$

Substituindo a 5.152 na 5.155 obtém-se:

$$d\omega = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta. \quad (5.156)$$

Com a 5.153 e 5.156, a integral da soma dada pela 5.141 é resolvida na forma:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} y d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta = e' \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta = e' [\theta]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (5.157)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^3 d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^3 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta \\ &= e'^3 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0) d\theta \\ &= e'^3 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - e'^3 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = e'^3 \left[\theta - \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \right] = e'^3 \left[\theta - c^2 l_2 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (5.158) \end{aligned}$$

com

$$c^2 = \cos^2 \beta_0; \quad (5.159)$$

$$l_2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^5 d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^5 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta \\ &= e'^5 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^2 d\theta \\ &= e'^5 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} (\cos^4 \theta - 2\cos^2 \theta \cos^2 \beta_0 + \cos^4 \beta_0) d\theta \\ &= e'^5 \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 2e'^5 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + e'^5 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta = e'^5 \left[\theta - 2c^2 l_2 + c^4 l_4 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad (5.161) \end{aligned}$$

com

$$c^4 = \cos^4 \beta_0; \quad (5.162)$$

$$l_4 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta. \quad (5.163)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^7 d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^7 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta \\ &= e'^7 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^3 d\theta \\ &= e'^7 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} (\cos^6 \theta - 3\cos^4 \theta \cos^2 \beta_0 + 3\cos^2 \theta \cos^4 \beta_0 - \cos^6 \beta_0) d\theta \\ &= e'^7 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \theta d\theta - 3e'^7 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 3e'^7 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - e'^7 \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta \\ &= e'^7 \left[\theta - 3c^2 l_2 + 3c^4 l_4 - c^6 l_6 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \end{aligned} \quad (5.164)$$

com

$$c^6 = \cos^6 \beta_0; \quad (5.165)$$

$$l_6 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta. \quad (5.166)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^9 d\omega &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^9 \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta \\ &= e'^9 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^4 d\theta \\ &= e'^9 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} (\cos^8 \theta - 4\cos^6 \theta \cos^2 \beta_0 + 6\cos^4 \theta \cos^4 \beta_0 - 4\cos^2 \theta \cos^6 \beta_0 + \cos^8 \beta_0) d\theta \\ &= e'^9 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \theta d\theta - 4e'^9 \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 6e'^9 \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - 4e'^9 \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta \\ &\quad + e'^9 \cos^8 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta = e'^9 \left[\theta - 4c^2 l_2 + 6c^4 l_4 - 4c^6 l_6 + c^8 l_8 \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \end{aligned} \quad (5.167)$$

com

$$c^8 = \cos^8 \beta_0; \quad (5.168)$$

$$l_8 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta. \quad (5.169)$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^{11} dy &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(e' \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0} \right)^{11} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0}} d\theta \\ &= e'^{11} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^{10} \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \beta_0)^5 d\theta \\ &= e'^{11} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^{10} \theta} \left(\cos^{10} \theta - 5 \cos^8 \theta \cos^2 \beta_0 + 10 \cos^6 \theta \cos^4 \beta_0 \right. \\ &\quad \left. - 10 \cos^4 \theta \cos^6 \beta_0 + 5 \cos^2 \theta \cos^8 \beta_0 - \cos^{10} \beta_0 \right) d\theta \\ &= e'^{11} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\theta - 5e'^{11} \cos^2 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta + 10e'^{11} \cos^4 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta - 10e'^{11} \cos^6 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta \\ &\quad + 5e'^{11} \cos^8 \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta - e'^{11} \cos^{10} \beta_0 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^{10} \theta} d\theta \\ &= e'^{11} \left[\begin{array}{l} \theta - 5c^2 l_2 + 10c^4 l_4 - 10c^6 l_6 + 5c^8 l_8 \\ -c^{10} l_{10} \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}. \end{aligned} \quad (5.170)$$

com

$$c^8 = \cos^8 \beta_0; \quad (5.171)$$

$$l_{10} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\cos^{10} \theta} d\theta. \quad (5.172)$$

Substituindo as 5.157, 5.158, 5.161, 5.164, 5.167 e 5.170 na 5.141, obtém-se:

$$S = \frac{b^2}{e'} \left[\begin{array}{l} e'\theta \\ + \frac{2}{3} e'^3 (\theta - c^2 l_2) \\ - \frac{1}{15} e'^5 (\theta - 2c^2 l_2 + c^4 l_4) \\ + \frac{4}{105} e'^7 (\theta - 3c^2 l_2 + 3c^4 l_4 - c^6 l_6) \\ - \frac{8}{315} e'^9 (\theta - 4c^2 l_2 + 6c^4 l_4 - 4c^6 l_6 + c^8 l_8) \\ + \frac{64}{3465} \theta - 5c^2 l_2 + 10c^4 l_4 - 10c^6 l_6 + 5c^8 l_8 - c^{10} l_{10} \end{array} \right]_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$= b^2 \begin{bmatrix} \theta \left(1 + \frac{2}{3} e^{\theta^2} - \frac{1}{15} e^{\theta^4} + \frac{4}{105} e^{\theta^6} - \frac{8}{315} e^{\theta^8} + \frac{64}{3465} e^{\theta^{10}} \right) \\ -c^2 l_2 \left(\frac{2}{3} e^{\theta^2} - \frac{2}{15} e^{\theta^4} + \frac{4}{35} e^{\theta^6} - \frac{32}{315} e^{\theta^8} + \frac{64}{693} e^{\theta^{10}} \right) \\ -c^4 l_4 \left(\frac{1}{15} e^{\theta^4} - \frac{4}{35} e^{\theta^6} + \frac{16}{105} e^{\theta^8} - \frac{128}{693} e^{\theta^{10}} \right) \\ -c^6 l_6 \left(\frac{4}{105} e^{\theta^6} - \frac{32}{315} e^{\theta^8} + \frac{128}{693} e^{\theta^{10}} \right) \\ -c^8 l_8 \left(\frac{8}{315} e^{\theta^8} - \frac{64}{693} e^{\theta^{10}} \right) \\ -c^{10} l_{10} \frac{64}{3465} e^{\theta^{10}} \end{bmatrix} \quad (5.174)$$

A solução das integrais l_2 , l_4 , l_6 , l_8 e l_{10} é obtida da fórmula geral (BRONSTEIN, 1999, p. 1040):

$$\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}, \text{ com } n > 1 \text{ e } a = \text{const.} \quad (5.175)$$

Fazendo $a = 1$, $x = \theta$ e $n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ obtém-se a fórmula de recorrência

$$\int \frac{d\theta}{\cos^n \theta} = \frac{1}{n-1} J_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} l_{n-2}, \quad J_{n-1} = \frac{\sin \theta}{\cos^{n-1} \theta}. \quad (5.176)$$

Portanto,

$$n = 2 \Rightarrow l_2 = \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = J_1; \quad (5.177)$$

$$n = 4 \Rightarrow l_4 = \int \frac{1}{\cos^4 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{2}{3} l_2 = \frac{1}{3} J_3 + \frac{2}{3} J_1; \quad (5.178)$$

$$n = 6 \Rightarrow l_6 = \int \frac{1}{\cos^6 \theta} d\theta = \frac{1}{5} \frac{\sin \theta}{\cos^5 \theta} + \frac{4}{5} l_4 = \frac{1}{5} J_5 + \frac{4}{15} J_3 + \frac{8}{15} J_1; \quad (5.179)$$

$$n = 8 \Rightarrow l_8 = \int \frac{1}{\cos^8 \theta} d\theta = \frac{1}{7} \frac{\sin \theta}{\cos^7 \theta} + \frac{6}{7} l_6 = \frac{1}{7} J_7 + \frac{6}{35} J_5 + \frac{8}{35} J_3 + \frac{16}{35} J_1; \quad (5.180)$$

$$n = 10 \Rightarrow l_{10} = \int \frac{1}{\cos^{10} \theta} d\theta = \frac{1}{9} \frac{\sin \theta}{\cos^9 \theta} + \frac{8}{9} l_8 = \frac{1}{9} J_9 + \frac{8}{63} J_7 + \frac{16}{105} J_5 + \frac{64}{315} J_3 + \frac{128}{315} J_1. \quad (5.181)$$

Substituindo a 5.177, a 5.178, a 5.179 e a 5.180 na 5.174 e após a ordenação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{2}{3}e^{r^2} - \frac{1}{15}e^{r^4} + \frac{4}{105}e^{r^6} - \frac{8}{315}e^{r^8} + \frac{64}{3465}e^{r^{10}} \right)^{\omega_2} \\
 & \left[\left(\frac{2}{3}e^{r^2} - \frac{2}{15}e^{r^4} + \frac{4}{35}e^{r^6} - \frac{32}{315}e^{r^8} + \frac{64}{693}e^{r^{10}} \right) \right. \\
 & \quad + c^2 \left(\frac{2}{45}e^{r^4} - \frac{8}{105}e^{r^6} + \frac{32}{315}e^{r^8} - \frac{256}{2079}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad - c^2 J_1 + c^4 \left(\frac{32}{1575}e^{r^6} - \frac{256}{4725}e^{r^8} + \frac{1024}{10395}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad + c^6 \left(\frac{128}{11025}e^{r^8} - \frac{1024}{24255}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad \left. + c^8 \frac{8192}{1091475}e^{r^{10}} \right] \\
 & S = b^2 \left\{ -c^4 J_3 \left[\left(\frac{1}{45}e^{r^4} - \frac{4}{105}e^{r^6} + \frac{16}{315}e^{r^8} - \frac{128}{2079}e^{r^{10}} \right) \right. \right. \\
 & \quad + c^2 \left(\frac{16}{1575}e^{r^6} - \frac{128}{4725}e^{r^8} + \frac{512}{10395}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad + c^4 \left(\frac{64}{11025}e^{r^8} - \frac{512}{24255}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad \left. + c^6 \frac{4096}{1091475}e^{r^{10}} \right] \\
 & \quad - c^6 J_5 \left[\left(\frac{4}{525}e^{r^6} - \frac{32}{1575}e^{r^8} + \frac{128}{3465}e^{r^{10}} \right) \right. \\
 & \quad \quad c^2 \left(\frac{16}{3675}e^{r^8} - \frac{128}{8085}e^{r^{10}} \right) \\
 & \quad \quad \left. c^4 \frac{1024}{363825}e^{r^{10}} \right] \\
 & \quad - c^8 J_7 \left[\left(\frac{8}{2205}e^{r^8} - \frac{64}{4851}e^{r^{10}} \right) \right. \\
 & \quad \quad \left. c^2 \frac{512}{218295}e^{r^{10}} \right] \\
 & \quad - c^{10} J_9 \frac{64}{31185}e^{r^{10}} \\
 & \left. \right\}^{\omega_1}
 \end{aligned} \tag{5.182}$$

Da 5.150, faz-se

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arcsin(\sin\beta_0 \sin\omega_2) - \arcsin(\sin\beta_0 \sin\omega_1); \quad (5.183)$$

$$\Delta J_{n-1} = \frac{\sin\theta_2}{\cos^{n-1}\theta_2} - \frac{\sin\theta_1}{\cos^{n-1}\theta_1}; \quad (5.184)$$

e representando as parcelas que estão entre parênteses por k_{ij} , em que i e j são o expoente da constante c que está fora e dentro dos colchetes, respectivamente, obtém-se

$$\left. \begin{aligned} k_{00} &= 1 + \frac{2}{3}e^{r^2} - \frac{1}{15}e^{r^4} + \frac{4}{105}e^{r^6} - \frac{8}{315}e^{r^8} + \frac{64}{3465}e^{r^{10}} \\ k_{20} &= \frac{2}{3}e^{r^2} - \frac{2}{15}e^{r^4} + \frac{4}{35}e^{r^6} - \frac{32}{315}e^{r^8} + \frac{64}{393}e^{r^{10}} \\ k_{22} &= \frac{2}{45}e^{r^4} - \frac{8}{105}e^{r^6} + \frac{32}{315}e^{r^8} - \frac{256}{2079}e^{r^{10}} \\ k_{24} &= \frac{32}{1575}e^{r^6} - \frac{256}{4725}e^{r^8} + \frac{1024}{10395}e^{r^{10}} \\ k_{26} &= \frac{128}{11025}e^{r^8} - \frac{1024}{24255}e^{r^{10}} \\ k_{28} &= \frac{8192}{1091475}e^{r^{10}} \\ k_{40} &= \frac{1}{45}e^{r^4} - \frac{4}{105}e^{r^6} + \frac{16}{315}e^{r^8} - \frac{128}{2079}e^{r^{10}} \\ k_{42} &= \frac{16}{1575}e^{r^6} - \frac{128}{4725}e^{r^8} + \frac{512}{10395}e^{r^{10}} \\ k_{44} &= \frac{64}{11025}e^{r^8} - \frac{512}{24255}e^{r^{10}} \\ k_{46} &= \frac{4096}{1091475}e^{r^{10}} \\ k_{60} &= \frac{4}{525}e^{r^6} - \frac{32}{1575}e^{r^8} + \frac{128}{3465}e^{r^{10}} \\ k_{62} &= \frac{16}{3675}e^{r^8} - \frac{128}{8085}e^{r^{10}} \\ k_{64} &= \frac{1024}{363825}e^{r^{10}} \\ k_{80} &= \frac{8}{2205}e^{r^8} - \frac{64}{4851}e^{r^{10}} \\ k_{82} &= \frac{512}{218295}e^{r^{10}} \\ k_{100} &= \frac{64}{31185}e^{r^{10}} \end{aligned} \right\} \quad (5.185)$$

$$|S| = a^2 (1-f)^2 \begin{bmatrix} k_{00} \Delta\theta \\ -(k_{20} + k_{22}c^2 + k_{24}c^4 + k_{26}c^6 + k_{28}c^8) c^2 \Delta J_1 \\ -(k_{40} + k_{42}c^2 + k_{44}c^4 + k_{46}c^6) c^4 \Delta J_3 \\ -(k_{60} + k_{62}c^2 + k_{64}c^4) c^6 \Delta J_5 \\ -(k_{80} + k_{82}c^2) c^8 \Delta J_7 \\ -(k_{100}) c^{10} J_9 \end{bmatrix} \quad (5.186)$$

5.4.1.1 Cálculo da diferença angular $\Delta\omega$

A diferença angular $\Delta\omega$ é calculada pelo procedimento em SODANO (1958, p. 15-18):

$$\Delta\omega = |\Delta\lambda| + x, \quad (5.187)$$

em que x é dado pela série de Helmert:

$$x = \frac{e^2 C}{128} \begin{bmatrix} 128nF & + & 128e^2 n^2 C^2 F & - & 8hF & - & 8h \sin F \cos F \\ + & 128e^2 n^2 P F^2 & + & 16e^2 P \sin^2 F & + & 128e^4 n^3 C^4 F & - & 24e^2 n h C^2 F \\ + & 3h^2 F & - & 8e^2 n h C^2 \sin F \cos F & + & 5h^2 \sin F \cos F & - & 64e^4 n^3 C^2 m F^3 \\ - & 2h^2 \sin^3 F \cos F & + & (16e^2 e'^2 n + 448e^4 n^3) C^2 P F^2 & - & 16e^2 n h P F^2 & + & 16e^2 e'^2 n C^2 P \sin^2 F \\ - & 8e'^2 h P \sin^2 F & - & 16n h P F \sin F \cos F & - & 192e^4 n^3 C^2 P F^3 \cot F & - & 8e'^2 h P \sin^2 F \cos^2 F \\ + & 128e^4 n^3 P^2 F^3 & + & 32e^2 e'^2 n P^2 F \sin^2 F & + & 8e^4 P^2 \sin^3 F \cos F \end{bmatrix} \quad (5.188)$$

em que

$$n = \frac{e'}{e' + e}; \quad (5.189)$$

$$A = \sin \beta_1 \sin \beta_2; \quad (5.190)$$

$$B = \cos \beta_1 \cos \beta_2; \quad (5.191)$$

$$F = \arccos(A + B \cos \Delta\lambda); \quad (5.192)$$

$$C = \frac{B \sin |\Delta\lambda|}{\sin F}; \quad (5.193)$$

$$m = 1 - C^2; \quad (5.194)$$

$$h = e'^2 m; \quad (5.195)$$

$$P = \frac{m}{\tan F} - \frac{A}{\sin F}. \quad (5.196)$$

Calculado $\Delta\omega$, calcula-se, agora, ω_1 pela solução dos triângulos esféricos retângulos $P'P'_0P'_1$ e $P'P'_0P'_2$.

Aplicando o teorema das cotangentes ao triângulo $P'P_0P_1$, obtém-se:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) \cos \omega_1 + \sin \omega_1 \cot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \beta_0 = \frac{\tan \beta_1}{\cos \omega_1}. \quad (5.197)$$

Analogamente para o triângulo $P'P_0P_2$, obtém-se:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) \cos \omega_2 + \sin \omega_2 \cot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \beta_0 = \frac{\tan \beta_2}{\cos \omega_2}. \quad (5.198)$$

Igualando as expressões

$$\frac{\cos \omega_2}{\cos \omega_1} = \frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1},$$

$$\frac{\cos(\omega_1 + \Delta\omega)}{\cos \omega_1} = \frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1},$$

$$\frac{\cos \omega_1 \cos \Delta\omega - \sin \omega_1 \sin \Delta\omega}{\cos \omega_1} = \frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1},$$

$$\cos \Delta\omega - \tan \omega_1 \sin \Delta\omega = \frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1},$$

$$\omega_1 = \arctan \left[\frac{1}{\sin \Delta\omega} \left(\cos \Delta\omega - \frac{\tan \beta_2}{\tan \beta_1} \right) \right]. \quad (5.199)$$

Finalmente, obtém-se:

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega. \quad (5.200)$$

6 ANÁLISE DA QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA

Nesta seção apresentam-se as denominações, os conceitos, os procedimentos matemáticos e estatísticos pelos quais as estimativas de qualidade são obtidas. No sistema de coordenadas astronômicas topocêntricas dá-se o início à caracterização do lf mediante as observações das quantidades, e.g., distância, ângulo horizontal e ângulo zenital, as quais estão sujeitas a critérios da verificação de qualidade. Essas observações devem ser consideradas como amostras de um vetor aleatório multivariado.

As estimativas de qualidade são alguns dos elementos aprimoradores da **caracterização de extremas** como objeto de análise em **memorial da caracterização de extremas** da matrícula imobiliária. São expostas as estimativas que podem ser deduzidas da matriz covariância amostral na fase da análise dos dados advindos das mensurações e as estimativas que podem ser deduzidas da matriz covariância dos parâmetros ajustados e da matriz covariância dos resíduos.

Os critérios de verificação da qualidade de rede geodésica são expostos e sugeridos que integrem as documentações fundiárias: **o laudo de demarcação e o laudo de arbitramento no processo de discriminação de terras devolutas, o plano geral de legitimação de posses em terras devolutas e o laudo de demarcação de quinhões.**

6.1 ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DAS MENSURAÇÕES

A fim de caracterizar uma grandeza de mensuração, a teoria clássica de erros faz a distinção entre valor medido x_i e valor verdadeiro \tilde{x} de uma grandeza. A diferença entre estes dois valores é chamada desvio verdadeiro η que permanece desconhecido. A diferença entre o i -ésimo valor medido x_i de uma amostra composta de n valores medidos $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ sobre a grandeza x e o seu valor esperado $E(x) = \mu$ é chamado desvio aleatório ε_i , que se estima a partir da realização do valor esperado que é efetuada pelo valor médio \bar{x} dos n valores medidos. A diferença entre o valor esperado e o valor verdadeiro é chamado desvio sistemático (“*bias*”) δ que possui uma parte conhecida δ_c e outra parte

desconhecida δ_d . Estes conceitos podem ser ilustrados pela (figura 6.1) e formulados.

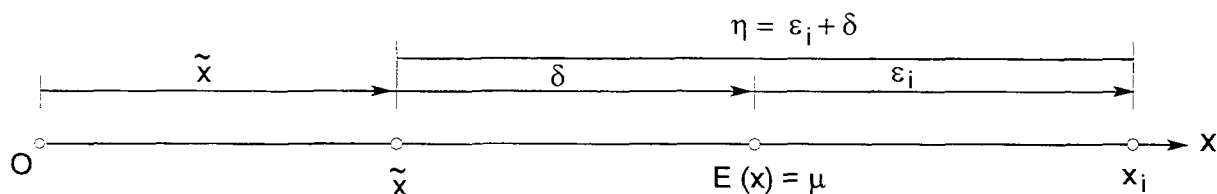
$$\varepsilon_i = x_i - \mu; \quad (6.1)$$

$$\delta = \mu - \tilde{x} = \delta_c + \delta_d. \quad (6.2)$$

Então comporá a realização da grandeza de mensuração x_i , as partes:

$$x_i = \varepsilon_i + \mu = \varepsilon_i + \delta + \tilde{x}. \quad (6.3)$$

FIGURA 6.1 – CONCEITOS DA TEORIA CLÁSSICA DOS ERROS



Os valores estimados de variância, de covariância e, por conseguinte, de correlação não são influenciados pelos desvios sistemáticos, pois

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad (6.4)$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; \quad (6.5)$$

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i + \delta_x) - (\bar{x} + \delta_x)][(y_i + \delta_y) - (\bar{y} + \delta_y)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]; \quad (6.6)$$

$$r = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y}. \quad (6.7)$$

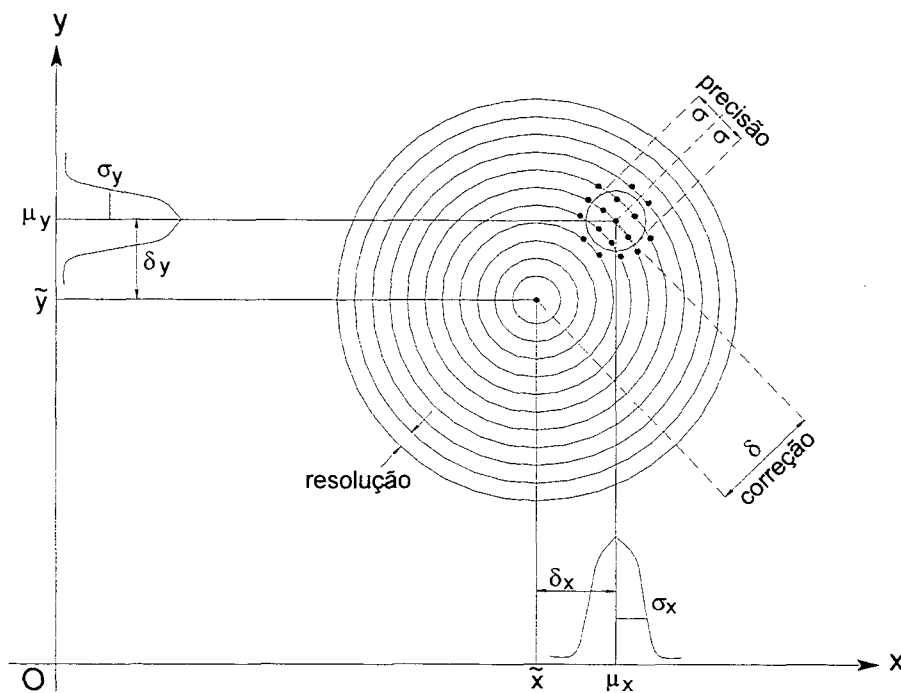
O termo *acurácia* (lat. *accuratio*; al. *Genauigkeit*) é a designação qualitativa para o tamanho da aproximação proveniente do resultado da determinação para o valor de referência em que pode estar conforme com a definição ou convenção do valor verdadeiro, do valor correto ou do valor esperado (DIN, 1987, p. 3).

Neste sentido, a *acurácia* é o grau de conformidade de um certo resultado com um padrão no que diz respeito à qualidade. Segundo o padrão de referência, os atributos absoluto, relativo, interno e externo podem adjetivar o termo *acurácia* (WENDERLEIN, 1988, p. 147).

A medida de *acurácia* depende de dois critérios: a *precisão* e a *correção*, conforme esclarece a figura 6.2, em que a *precisão* é medida de dispersão das

observações em torno de um valor médio e a correção é a medida do afastamento deste valor médio em relação ao valor verdadeiro.

FIGURA 6.2 – PRECISÃO E CORREÇÃO COMO CRITÉRIOS DE ACURÁCIA



FONTE: SCHMIDT(1997, p. 215).

NOTA : Adaptada e traduzida do original pelo autor.

6.1.1 Organização dos Dados de Mensuração: Matriz de Dados Amostrais

A finalidade das observações geodésicas é determinar os parâmetros incógnitos, e.g., as coordenadas dos pontos. O termo mensuração designa o processo pelo qual um número é associado à variável aleatória, e a observação é o resultado numérico de uma certa mensuração. Cada valor numérico l_{ij} é entendido como a realização da variável aleatória l_j . Doravante, esta notação é utilizada. Nas ciências experimentais, freqüentemente, há um conjunto de variáveis a serem medidas, o qual pode ser expresso pelo vetor aleatório multivariado

$$\boldsymbol{l}^T = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_j \quad \dots \quad l_n]. \quad (6.8)$$

Uma amostra do vetor aleatório \boldsymbol{l} , na qual cada uma das n variáveis m vezes é medida, denomina-se matriz de dados amostrais ou, simplesmente, matriz de dados, a qual é denotada pelo símbolo \mathbf{L} , e é expressa como:

$$\mathbf{L} = [l_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1j} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2j} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{ij} & \dots & l_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mj} & \dots & l_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

6.1.2 Estimativas Obtidas a partir da Matriz de Dados

Da matriz de dados \mathbf{L} advém o vetor médio amostral – que estima o vetor médio populacional μ (ver seção 4.2.2) – denotado pelo símbolo $\bar{\ell}$, cuja expressão é da forma 4.61 em que os \bar{x}_i são substituídos pelos $\bar{\ell}_i$. A matriz covariância amostral – que estima a matriz covariância populacional Σ (ver seção 4.2.3) – denotada pelo símbolo \mathbf{S} é a 4.64. Os semi-eixos do hiperelipsóide são dados pela 4.82 mediante a decomposição espectral de \mathbf{S} . A Matriz correlação amostral é a 4.66. A distância quadrática de Mahalanobis amostral é 4.84.

6.2 ANÁLISE DOS DADOS ADVINDOS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A análise de rede geodésica depende do conhecimento das coordenadas dos pontos, do plano das medições e da acurácia. No ajustamento das observações geodésicas em que é empregado o modelo Gauss-Markov (WELSCH et al. 2000, p. 140-141):

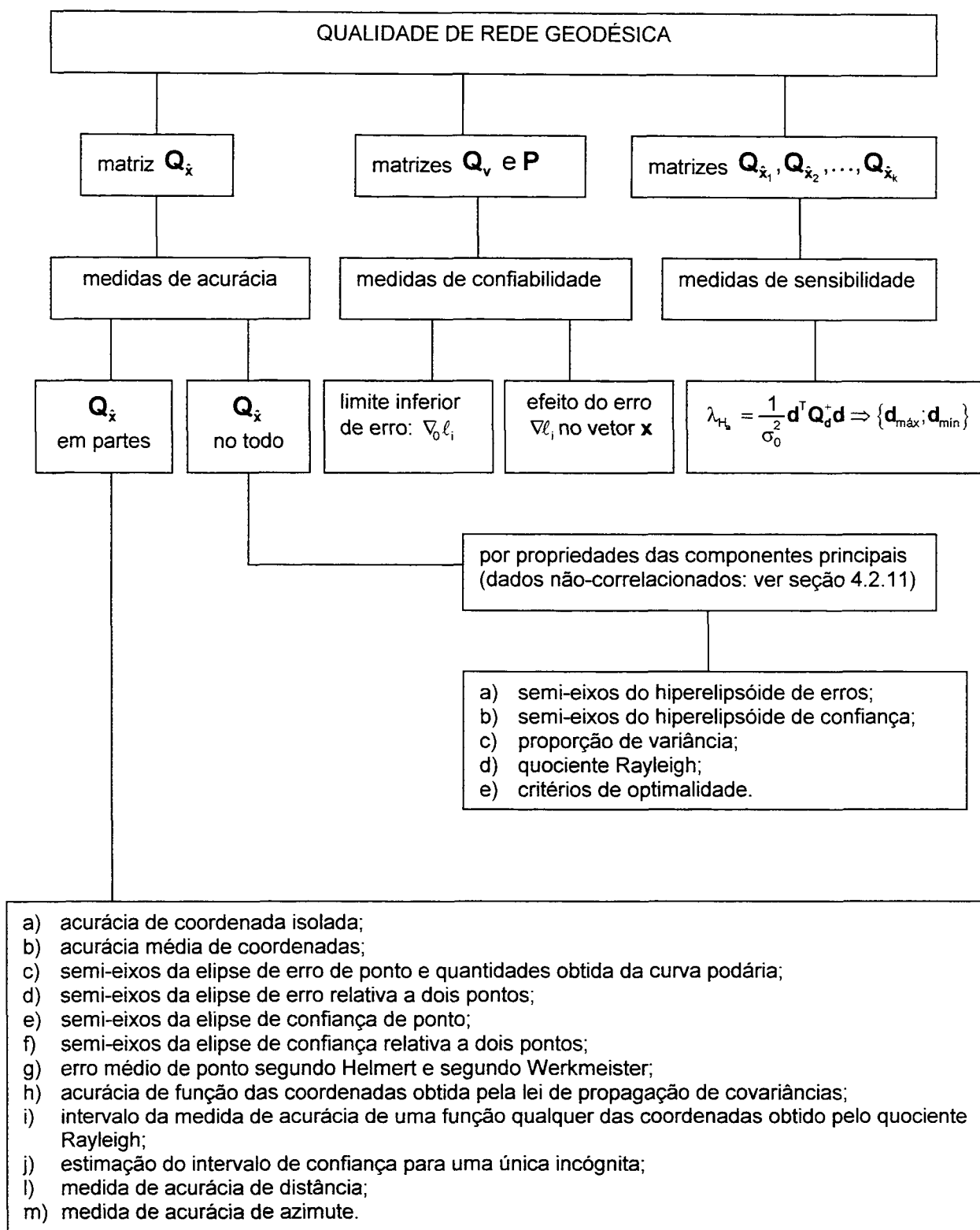
$$E(\ell) = \mathbf{Ax} \text{ ou } \ell = \mathbf{Ax} + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad E(\varepsilon\varepsilon^T) = \text{cov}(\varepsilon) = \text{cov}(\ell), \quad (6.10)$$

as coordenadas estimadas encontram-se no vetor \hat{x} e suas acurácias na matriz de cofatores de covariância das incógnitas $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$ que é a inversa da matriz dos coeficientes das incógnitas das equações normais \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = (\mathbf{A}^T \mathbf{PA})^{-1}. \quad (6.11)$$

Na 6.11 a matriz \mathbf{A} compreende as derivadas parciais das equações de observação $y = f(x)$, sendo avaliada com o vetor dos valores aproximados y° das incógnitas, de forma:

FIGURA 6.3 – MEDIDAS DE QUALIDADE DE REDE GEODÉSICA



6.2.1 Medidas de Acurácia

A qualidade de um ajustamento de rede é caracterizado pelas medidas de acurácia e pelas medidas de confiabilidade. Estas medidas definem a região em que o valor verdadeiro ou valor de referência se situa com uma probabilidade pretendida. O conceito de confiabilidade vincula a detecção dos erros grosseiros, que podem falsificar os resultados, às observações geodésicas.

Segundo o modo de a matriz Q_x ser empregada, são distinguidas as medidas de acurácia, para uma rede, em medidas locais e em medidas globais (LEONHARD e NIEMEIER, 1980, p. 488-489; DUPRAZ e NIEMEIER, 1981, p. 394; NIEMEIER, 1985a, p. 160, 171; JÄGER e BILL, 1986, p. 75 -79; MARSHAL, 1989, p. 98 -112).

As medidas locais de acurácia são aquelas obtidas das submatrizes da matriz de cofatores de covariância das incógnitas, conforme ilustra a figura 6.3; cada submatriz utilizada é a portadora da informação de acurácia das incógnitas de um ponto ou de dois pontos da rede geodésica.

As medidas globais de acurácia são aquelas obtidas da matriz completa de cofatores das incógnitas, a qual é a portadora das informações de acurácia da rede geodésica como um todo.

6.2.1.1 Estimativas de medidas locais de acurácia

Nesta seção apresentam-se os conceitos para rede do espaço de duas dimensões. Nas estimativas de medidas locais de acurácia sob o nível de significância α , a variância de uma observação de peso unitário *a priori*, denotada pelo símbolo σ_0^2 , é igual à variância de uma observação de peso unitário *a posteriori*, denotada pelo símbolo $\hat{\sigma}_0^2$; esta última é obtida do ajustamento.

6.2.1.1.1 Acurácia de coordenada isolada

A medida de acurácia de coordenada isolada é o desvio padrão:

$$\hat{\sigma}_{y_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{y_i y_i}} \quad (6.15)$$

6.2.1.1.2 Acurácia média de coordenadas

Na 6.14 sejam calculados, separadamente, a média das variâncias das coordenadas y e x . A raiz quadrada de cada média é a medida de acurácia média de coordenadas; suas expressões são:

$$\hat{\sigma}_y = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{u_y}} \sqrt{\sum_{i=1}^u q_{y_i y_i}}; \quad \hat{\sigma}_x = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{u_x}} \sqrt{\sum_{i=1}^u q_{x_i x_i}}, \quad (6.16; 17)$$

em que u_y e u_x designam o número de coordenadas y e x , respectivamente.

6.2.1.1.3 Semi-eixos da elipse de erro de ponto, quantidades obtidas da curva podária e semi-eixos da elipse de confiança

A expressão dos semi-eixos a e b , e do ângulo de orientação θ da elipse são dadas por:

$$a = \hat{\sigma}_{\max} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} + w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad (6.18)$$

$$b = \hat{\sigma}_{\min} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i} - w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad (6.19)$$

em que

$$w = \sqrt{(q_{y_i y_i} - q_{x_i x_i})^2 + 4q_{y_i x_i}^2}, \quad (6.20)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{y_i x_i}}{q_{x_i x_i} - q_{y_i y_i}}. \quad (6.21)$$

O ângulo $\theta \leq \pi$ é o azimute da direção do semi-eixo a e $\theta + \pi/2$ é o azimute da direção do semi-eixo b .

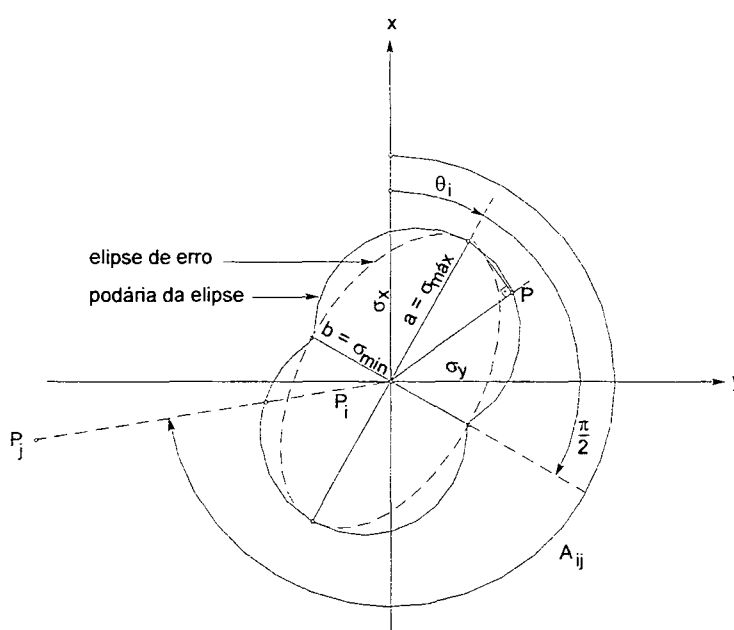
A interpretação geométrica da elipse de erro, na hipótese da distribuição normal dos erros, é que ela delimita a porção do plano que, com 39% de probabilidade, contém a posição verdadeira do ponto (SURACE, 1995, p. 185).

A condição de isotropicidade de erros sob um nível de significância α é a equivalência entre a curva podária e a elipse de erro. Quanto mais esta

elipse se aproxima de uma circunferência, tanto mais a curva podária e elipse tendem a se equivaler.

Define-se matematicamente a curva podária – também denominada curva pedal (al. *Fußpunktskurve*) e curva de erro de um ponto – de uma curva em relação a um ponto P_i , como o lugar geométrico dos pés das perpendiculares (P) traçadas pelo ponto P_i às tangentes a curva, conforme a figura 6.4 ilustra.

FIGURA 6.4 – ELIPSE DE ERRO E SUA CURVA PODÁRIA



A equação da curva podária em coordenadas polares (JORDAN-EGGERT, 1962a, p. 444; PROCHÁZKA, 1966, p. 143) é

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sqrt{a^2 \cos^2(A_{ij} - \theta_i) + b^2 \sin^2(A_{ij} - \theta_i)}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (6.22)$$

em que os símbolos a e b designam o semi-eixo maior e semi-eixo menor da elipse de erro, respectivamente, A_{ij} é o azimute da direção ij e θ_i é o ângulo de direção da elipse. Para qualquer direção dada por A_{ij} , a 6.22 fornece a medida de acurácia das coordenadas do ponto. Se A_{ij} for igual a θ_i , então $\hat{\sigma}_{ij}$ será igual ao semi-eixo maior da elipse; se $(A_{ij} - \theta_i)$ for igual a $\pi/2$, então $\hat{\sigma}_{ij}$ será igual ao semi-eixo menor da elipse.

O quadrado dos semi-eixos da elipse de confiança resulta pela multiplicação dos semi-eixos da elipse de erro de ponto por quantil da

distribuição de probabilidade de qui-quadrado central sob o nível de confiança $1-\alpha$. Deste modo obtém-se

$$a_c = a\sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}; \quad b_c = b\sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}; \quad (6.23; 24)$$

6.2.1.1.4 Semi-eixos da elipse de erro relativa a dois pontos e semi-eixos da elipse de confiança

Ao cálculo dos semi-eixos da elipse relativa a dois pontos precede a determinação da matriz covariância da diferença de coordenadas homônimas de dois pontos. Sejam

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [y_1 \quad x_1 \quad y_2 \quad x_2] \quad (6.25)$$

o vetor de coordenadas estimadas pelo ajustamento e sua respectiva matriz de cofatores de covariância

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} q_{y_1y_1} & q_{y_1x_1} & q_{y_1y_2} & q_{y_1x_2} \\ q_{x_1y_1} & q_{x_1x_1} & q_{x_1y_2} & q_{x_1x_2} \\ q_{y_2y_1} & q_{y_2x_1} & q_{y_2y_2} & q_{y_2x_2} \\ q_{x_2y_1} & q_{x_2x_1} & q_{x_2y_2} & q_{x_2x_2} \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

O vetor das diferenças das coordenadas homônimas dos dois pontos é dada por

$$\Delta = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(y_1, y_2) \\ f(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

A matriz covariância da variável aleatória Δ é obtida por propagação

$$\mathbf{K}_{\Delta} = \mathbf{G}\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{G}^T = \hat{\sigma}_0^2\mathbf{Q}_{\Delta}, \quad (6.28)$$

na qual

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta y}{\partial y_1} & \frac{\partial \Delta y}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta y}{\partial y_2} & \frac{\partial \Delta y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Delta x}{\partial y_1} & \frac{\partial \Delta x}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta x}{\partial y_2} & \frac{\partial \Delta x}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{Q}_{\Delta} = \begin{bmatrix} q_{\Delta y \Delta y} & q_{\Delta y \Delta x} \\ q_{\Delta x \Delta y} & q_{\Delta x \Delta x} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Os semi-eixos são dados

$$a_r = \hat{\sigma}_{\text{máx}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{\Delta y \Delta y} + q_{\Delta x \Delta x} + w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\text{máx}}}, \quad (6.31)$$

$$b_r = \hat{\sigma}_{\min} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{1}{2}(q_{\Delta y \Delta y} + q_{\Delta x \Delta x} - w)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_{\min}}, \quad (6.32)$$

em que

$$w = \sqrt{(q_{\Delta y \Delta y} - q_{\Delta x \Delta x})^2 + 4q_{\Delta y \Delta x}^2}, \quad (6.33)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{\Delta y \Delta x}}{q_{\Delta x \Delta x} - q_{\Delta y \Delta y}}. \quad (6.34)$$

O quadrado dos semi-eixos da elipse de confiança relativa a dois pontos resulta pela multiplicação dos semi-eixos da elipse erro relativa a dois pontos por quantil da distribuição de probabilidade de qui-quadrado central sob o nível de confiança $1-\alpha$. Deste modo obtém-se

$$a_{rc} = a_r \sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}; \quad b_{rc} = b_r \sqrt{\chi_{2,1-\alpha}^2}; \quad (6.35;36)$$

6.2.1.1.5 Acurácia de ponto

Crítérios escalares para a medidas da acurácia de ponto são o traço e o determinante da matriz covariância $\mathbf{K} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q} = \hat{\sigma}_0^2 [q_{ij}]_{2 \times 2}$, os quais são designados por acurácia de ponto segundo Helmert e segundo Werkmeister, respectivamente:

$$\hat{\sigma}_i^H = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\hat{\lambda}_{\max} + \hat{\lambda}_{\min}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{y_i y_i} + q_{x_i x_i}}; \quad (6.37)$$

$$\hat{\sigma}_i^W = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{\hat{\lambda}_{\max} \times \hat{\lambda}_{\min}} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{y_i y_i} q_{x_i x_i} - q_{y_i x_i}^2}. \quad (6.38)$$

6.2.1.1.6 Acurácia de função das coordenadas obtida pela lei da propagação das covariâncias

A lei da propagação de covariâncias recebe o nome, freqüentemente, de lei geral da propagação de erros (PELZER, 1985a, p.57). Se n incógnitas y_i forem funções de u variáveis x_j , as quais são escritas nas formas

$$y_i = f(x_j), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, u\} \quad (6.39)$$

e

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ \vdots \\ f_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u) \end{bmatrix}; \quad (6.40)$$

de acordo com a lei da propagação de covariâncias, a matriz covariância das n incógnitas y_i é escrita

$$\mathbf{K}_y = \mathbf{A} \mathbf{K}_x \mathbf{A}^T. \quad (6.41)$$

Se houver somente uma incógnita y como função de u variáveis, a qual é expressa por $y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u)$, a lei da propagação de covariâncias fornece o escalar $\hat{\sigma}_y^2$, o qual é expresso na forma matricial

$$\hat{\sigma}_y^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_x \mathbf{a}, \quad (6.42)$$

na qual

$$\mathbf{a}^T = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_j} \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_u} \right]. \quad (6.43)$$

A produto matricial 6.42 desenvolvido mostra a fórmula da propagação de covariâncias:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y^2 = & \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_u} \right)^2 \hat{\sigma}_{x_u}^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \hat{\sigma}_{x_1 x_2} + 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_3} \hat{\sigma}_{x_1 x_3} + \dots \\ & + 2 \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_1 x_u} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_3} \hat{\sigma}_{x_2 x_3} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_2 x_u} + \dots + 2 \frac{\partial y}{\partial x_{u-1}} \frac{\partial y}{\partial x_u} \hat{\sigma}_{x_{u-1} x_u}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

As derivadas parciais são calculadas com os valores aproximados das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u$.

6.2.1.1.7 Intervalo da medida de acurácia de uma função das coordenadas obtido pelo quociente Rayleigh

O quociente Rayleigh para uma função $y = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_u)$ é

$$0 \leq \hat{\lambda}_{\min} \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \leq \hat{\sigma}_y^2 \leq \hat{\lambda}_{\max} \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{a}^T \mathbf{a}), \quad (6.45)$$

em que o vetor \mathbf{a} é dado pela 6.43.

Para um conjunto de funções $y_i = f(x_j)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, u\}$, este quociente é escrito

$$0 \leq \hat{\lambda}_{\min} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{a}) \leq \hat{\sigma}_y^2 \leq \hat{\lambda}_{\max} \hat{\sigma}_0^2(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{a}). \quad (6.46)$$

6.2.1.1.8 Medida de acurácia de distância

Seja a variável

$$d = f(\Delta y, \Delta x) = \left[(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.47)$$

que representa a distância entre pontos quaisquer ij . A variância da distância $\hat{\sigma}_d^2$ é calculada por propagação a partir de \mathbf{K}_Δ , pela expressão

$$\hat{\sigma}_d^2 = \mathbf{D} \mathbf{K}_\Delta \mathbf{D}^T, \quad (6.48)$$

em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial \Delta y} & \frac{\partial d}{\partial \Delta x} \end{bmatrix} = \frac{1}{d} [\Delta y \quad \Delta x]. \quad (6.49)$$

6.2.1.1.9 Medida de acurácia de direção

Seja R uma direção qualquer ij é expressa por:

$$R = f(\Delta y, \Delta x) = \arctan \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (6.50)$$

A medida de acurácia será

$$\hat{\sigma}_R^2 = \mathbf{D} \mathbf{K}_\Delta \mathbf{D}^T, \quad (6.51)$$

em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \Delta y} & \frac{\partial R}{\partial \Delta x} \end{bmatrix} = \frac{1}{d^2} [\Delta x \quad -\Delta y]. \quad (6.52)$$

6.2.1.2 Estimativas das medidas globais de acurácia

6.2.1.2.1 Semi-eixos do hiperelipsóide de erro e do hiperelipsóide de confiança

Com a decomposição espectral de $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, os vetores próprios e valores próprios são ordenados conforme a 4.93, e os semi-eixos são calculados pela 4.135. Pela propriedade de proporção de variância em componentes principais (ver 4.131), podem ser considerados somente os semi-eixos representativos. Neste hiperelipsóide, pode o teste de esfericidade dado pela 4.161 ser aplicado.

A matriz $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ define um elipsóide de dimensão u , no qual os semi-eixos são calculados pela raiz quadrada positiva dos valores próprios, e a orientação é dada pelos vetores próprios.

O valor próprio máximo ($\lambda_{\text{máx}}$) pode ser associado com o vetor próprio que o corresponde na decomposição espectral.

A região de confiança para a incógnita x_i pode ser generalizada para o vetor \mathbf{x} que contém as u incógnitas da rede geodésica, como:

$$\Pr\left[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^+ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) < \chi_{r,1-\alpha}^2\right] = 1 - \alpha, \quad (6.53)$$

na qual r é o posto de $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^+$, a qual pode ser calculada por decomposição espectral, e $\chi_{r,1-\alpha}^2$ é o valor crítico da distribuição qui-quadrado central.

6.2.1.2.2 Quociente Rayleigh

Seja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ um vetor qualquer de ordem $n \times 1$ e $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz simétrica com os valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \geq \lambda_n$ e respectivos os vetores próprios normalizados $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_r, \dots, \mathbf{m}_n$. A expressão

$$R_h = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (6.54)$$

é denominada quociente Rayleigh (ZURMÜHL, 1950, p. 135).

Procura-se os valores extremos de R_h para a variável \mathbf{x} , i.e., $\lambda_n \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \leq \lambda_1$

(MATHAI e PROVOST, 1992, p. 20). A condição necessária é que a primeira derivada da função R_h em relação a variável \mathbf{x} seja nula:

$$\frac{\partial R_h}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (6.55)$$

Com efeito,

$$\frac{\partial R_h}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} 2\mathbf{Ax} - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^2} 2\mathbf{x} = \frac{2}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} (\mathbf{Ax} - R_h \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} \neq 0. \quad (6.56)$$

Então

$$\mathbf{Ax} - R_h \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (6.57)$$

O número real R_h pode ser escrito com base no valor próprio λ , o que toma a forma de um problema valor próprio especial (seção 3.1.3.12):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (6.58)$$

Os valores extremos do quociente Rayleigh procurados são o valor próprio máximo $\lambda_{\text{máx}}$ e o valor próprio mínimo $\lambda_{\text{mín}}$. Pré-multiplicando a 6.57 por \mathbf{x}^T , vem

$$R_h = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (6.59)$$

Da 6.59 advém os extremos do quociente Rayleigh que podem ser escritos nas formas (KLEIN, 1997, p. 121):

$$R_h = \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ se } \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ para } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad (6.60)$$

ou então,

$$R_h = \begin{cases} \text{máx} \\ \text{mín} \end{cases} \text{ se } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \begin{cases} \text{mín} \\ \text{máx} \end{cases} \text{ para } \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = 1. \quad (6.61)$$

Para uma função linear ou não-linear $\varphi = \mathbf{f}^T \mathbf{x}$ ou então $\varphi = f(\mathbf{x})$ resulta a variância σ_φ^2 pela lei da propagação de covariâncias (REISSMANN, 1980, p. 82, 177):

$$\sigma_\varphi^2 = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{f}. \quad (6.62)$$

em que

$$f = f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = f_0 + \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \quad (6.63)$$

$$\mathbf{f}^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right], \quad (6.64)$$

$$\mathbf{x}^T = [dx \quad dy \quad dz], \quad (6.65)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} q_{xx} & & \\ q_{xy} & q_{yy} & \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix}_{\text{Simétrica.}} \quad (6.66)$$

$$f_0 = f(x_0, y_0, z_0). \quad (6.67)$$

Uma estimativa de σ_φ^2 é obtida com ajuda do quociente Rayleigh pela expressão

$$\mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\min} \leq \sigma_\varphi^2 \leq \mathbf{f}^T \mathbf{f} \lambda_{\max}. \quad (6.68)$$

A expressão fornece o limite superior para a variância da função φ , o qual depende do valor próprio máximo de $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$. Disto decorre a exigência: o valor próprio máximo deve ser mínimo. Quanto menor for λ_{\max} , melhor será a acurácia das funções e, por conseguinte, da rede sob apreciação.

6.2.1.2.3 Critérios de optimalidade

A acurácia de uma rede é tanto mais alta quanto menor for o máximo valor próprio obtido da matriz $\mathbf{K}_{\hat{x}}$. Geometricamente, calcula-se pela 6.53 um elipsóide de confiança de dimensão p que contém a posição do vetor \mathbf{x} de todos os pontos com uma probabilidade conhecida $(1-\alpha)$. Alguns dos mais importantes critérios de optimalidade para a rede geodésica (DUPRAZ e NIEMEIER, 1979, p. 70-71; PELZER, 1980b, p.57; DUPRAZ e NIEMEIER, 1981, p. 387-389) são:

$$\text{a) } \det(\mathbf{Q}_{\hat{x}}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_1 \times \dots \times \lambda_u = \prod_{i=1}^u \lambda_i \stackrel{!}{=} \text{mín}; \quad (6.69)$$

$$\text{b) } \text{tr}(\mathbf{Q}_{\hat{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_1 + \dots + \lambda_u = \sum_{i=1}^u \lambda_i \stackrel{!}{=} \text{mín}; \quad (6.70)$$

$$\text{c) } \lambda_{\max} \stackrel{!}{=} \text{mín}; \quad (6.71)$$

$$\text{d) } \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \stackrel{!}{=} 1; \quad (6.72)$$

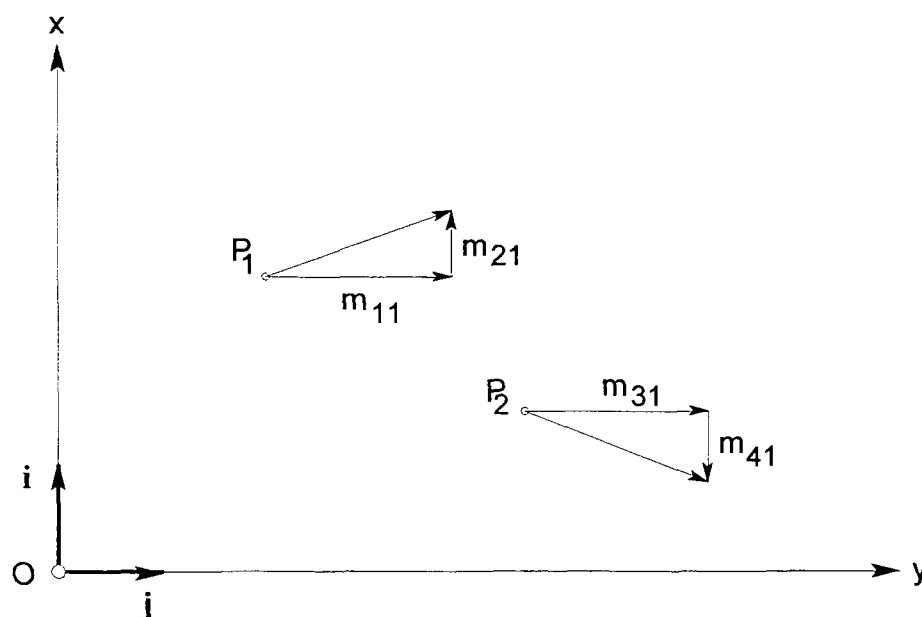
$$\text{e) } \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \text{mín}; \quad (6.73)$$

$$\text{f) } \mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{\max}}. \quad (6.74)$$

A 6.69 é denominada critério volume de confiança que deve ser mínimo. O volume do elipsóide de confiança é proporcional ao produto de seus semi-eixos e por isso é empregado como uma das medidas de acurácia (PELZER, 1980b, p. 275). A 6.70 significa que a soma dos quadrados dos semi-eixos deve ser mínima; a 6.71 significa que o quadrado do semi-eixo maior deve ser mínimo; a 6.72 é a condição de isotropia, i.e., a medida de acurácia do ponto é a mesma em todas as direções; a 6.73 é a condição de homogeneidade, i.e., as elipses têm a mesma forma, o mesmo semi-eixo maior e o mesmo semi-eixo menor e a 6.74, na qual \mathbf{m}_1 é o vetor próprio correspondente a $\lambda_{\text{máx}}$, tem as componentes que representam o comprimento da projeção do semi-eixo maior no eixo das variáveis.

As componentes do vetor dado pela 6.74 é uma representação unidimensional – projeção nos eixos das coordenadas originais, conforme ilustra a figura 6.5 – do semi-eixo maior do elipsóide dimensão u nas quais $\sqrt{\lambda_1}$ é o comprimento do semi-eixo maior e as componentes do vetor \mathbf{m}_1 são os cossenos diretores e, por conseguinte, os ângulos diretores podem ser calculados.

FIGURA 6.5 – REPRESENTAÇÃO DOS VETORES PRÓPRIOS



No caso de uma rede geodésica horizontal, à cada coordenada é associada uma componente do vetor $\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{\text{máx}}}$ (BAIXIANG e MINYI, 1993, p. 243). Por exemplo, da 6.74 retiram-se as componentes $\mathbf{m}_1 \sqrt{\lambda_{\text{máx}}}$ que é a projeção do semi-

eixo do elipsóide de dimensão p no eixo x , $m_1\sqrt{\lambda_{\max}}$ que é a projeção do semi-eixo desse elipsóide no eixo y e assim sucessivamente para os demais pontos. A resultante dessas projeções indicam a direção ao longo da qual existe “fraqueza” na rede geodésica.

Na otimização de rede geodésica para a detecção de movimento da crosta terrestre, o vetor \mathbf{p}_j , com $\lambda_j = \lambda_{\max}$, define a direção crítica ao longo da qual o movimento real de um ponto terá que ser grande para que seja separado de um pseudo-movimento (CROSILLA e MARCHESINI, 1983, p. 309).

Os valores próprios representam a medida para o juízo quantitativo de rede geodésica e seus vetores próprios representam as grandezas geométricas qualitativas correspondentes (JÄGER, 1988, p. 83). Se o $\det(\mathbf{Q}_x)$ for nulo, o critério utilizará o produto dos $\lambda_i \neq 0$ (KUANG, 1996, p. 154).

6.2.2 Medidas de Confiabilidade

A teoria da confiabilidade serve para a decisão se um erro é detectável e qual influência tem o erro não-detectável nos resultados do ajustamento. Portanto é parte de um conceito para a avaliação da qualidade do resultado do ajustamento.

Os erros que não foram eliminados das observações ocasionam a alteração dos resultados, e.g., a alteração das coordenadas. Por isso são necessárias medidas que representem o quanto são confiáveis as observações. A essas medidas dá-se o nome de medidas de confiabilidade.

O conceito de medidas de confiabilidade introduzido por BAARDA (1967, 1968) se subdivide em confiabilidade interna e confiabilidade externa. A primeira quantifica a menor porção do erro existente na observação que pode ser localizado com uma dada probabilidade. A segunda quantifica a influência dos erros não-detectáveis nas coordenadas dos pontos. Na seqüência, os conceitos de estimativas de confiabilidade interna e confiabilidade externa serão apresentados resumidamente.

6.2.2.1 Estatística para a detecção de erros grosseiros

A fim de inspecionar o modelo estocástico empregado, calcula-se a estatística

$$T = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r \sim \chi_r^2 \quad (6.75)$$

para a detecção de erros grosseiros, em que r é o número de graus de liberdade do ajustamento, i.e., o número de equações superabundantes do sistema de equações normais. A variância de uma observação de peso unitário *a priori* σ_0^2 , sob o nível de significância α , deve ser testada estatisticamente com a variância de uma observação de peso unitário *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$.

6.2.2.2 Redundância

O número de equações superabundantes r do sistema de equações normais oriundas do modelo linear $\ell + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ é a diferença entre o número de observações n , que é igual ao número de equações de observação, e o número dos parâmetros u , que estão sendo estimados. Ao número $r = n - u$ dá-se o nome de redundância do sistema. A contribuição de cada observação ℓ_i à redundância r recebe o nome de redundância parcial r_i (FÖRSTNER, 1979, p. 64) e é expresso pela relação:

$$r_i = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii}, \quad (6.76)$$

em que \mathbf{Q}_v é a matriz de cofatores de covariância dos resíduos v_i contidos no vetor \mathbf{v} , \mathbf{P} é a matriz dos pesos das observações ℓ_i contidas no vetor ℓ , e o subíndice ii indica o i -ésimo elemento da diagonal.

O produto matricial $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$ resulta uma matriz idempotente cujo traço é a redundância r :

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n r_i = r. \quad (6.77)$$

A 6.77 é obtida mediante a matriz dos cofatores de covariância dos resíduos

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_\ell - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T, \quad (6.78)$$

a qual é pós-multiplicada pela matriz \mathbf{P} :

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{P} = \mathbf{Q}_l \mathbf{P} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}, \quad (6.79)$$

e pela propriedade 3.166 de traço, vem

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{I}) - \text{tr} \left[\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \right] = n - \text{tr} \left[(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \right] = n - u = r. \quad (6.80)$$

Os elementos da diagonal do produto $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$, os quais são denotados por $r_i = (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii}$ mostram a distribuição da redundância nas observações (FÖRSTNER, 1985, p. 1139). O número r_i é positivo porque a matriz dos pesos é matriz diagonal, situa-se no intervalo $0 \leq r_i \leq 1$ e chama-se redundância parcial. Este intervalo é obtido da 6.78, somando os seus membros por $-\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{Q}_v - \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}_l - \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (6.81)$$

$$= -\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T; \quad (6.82)$$

multiplicando a 6.82 por \mathbf{P} , vem

$$\mathbf{Q}_v \mathbf{P} - \mathbf{I} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}. \quad (6.83)$$

Na 6.83, o i -ésimo elemento da diagonal é escrito

$$(\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} - 1 = - \left[\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \right]_{ii}. \quad (6.84)$$

Os elementos da diagonal do produto $\mathbf{Q}_v \mathbf{P}$ são todos positivos. O produto $\mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ é matriz de cofatores de covariância; por isso, os elementos de sua diagonal são todos positivos. Os elementos da diagonal da matriz \mathbf{P} são, também, todos positivos. Então, a 6.84 fornece a desigualdade:

$$0 \leq (\mathbf{Q}_v \mathbf{P})_{ii} \leq 1 \text{ ou } 0 \leq r_i \leq 1 \quad (6.85)$$

A partir da solução

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (6.86)$$

obtém-se a expressão do vetor dos resíduos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l} = (\mathbf{Q}_l - \mathbf{Q}_v) \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l} \\ &= -\mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{Q}_l \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{l} = -\mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

6.2.2.3 Medida de confiabilidade interna

Sob o conceito de confiabilidade interna de uma rede geodésica são reunidos todos os critérios que servem para a detecção de erros grosseiros. A confiabilidade interna indica o erro mínimo que se encontra em uma observação (GRIMM-PITZINGER e HANKE, 1988) que é sensível ao teste.

Para o erro grosseiro $\nabla \ell_i$, presente na i -ésima observação ℓ_i , que o teste pode detectar corretamente com segurança mínima, a confiabilidade é descrita pela quantidade

$$\nabla_0 \ell_i. \quad (6.88)$$

O valor limite inferior depende (FÖRSTNER, 1979, p. 66; BENNING, 1983, p. 221):

- a) da acurácia das observações, a qual é descrita pelo desvio-padrão σ_ℓ ;
- b) da geometria da rede juntamente com as observações, a qual é descrita pela redundância parcial r_i ;
- c) do nível de significância α para o erro tipo I (ver seção 4.1.7.1);
- d) da qualidade ou poder do teste, i.e., da probabilidade para detectar a observação com erro grosseiro;
- e) do parâmetro de não-centralidade δ_0 (figura 4.7).

O valor limite inferior é definido pela expressão:

$$\nabla_0 \ell_i = \sigma_\ell \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}}, \quad (6.89)$$

a qual indica que quanto menor for a redundância parcial r_i tanto maior será o erro grosseiro. A redundância parcial é calculada a partir do resíduo q_{v_i} e do peso da observação p_i :

$$r_i = q_{v_i} p_i. \quad (6.90)$$

No quadro 6.1 estão os intervalos recomendados para a orientação da decisão sobre a controlabilidade de observações mediante as redundâncias parciais.

QUADRO 6.1 – CONTROLE DE OBSERVAÇÕES POR REDUNDÂNCIAS PARCIAIS

INTERVALO	CONTROLABILIDADE
$0 \leq r_i < 0,01$	não há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	ruim
$0,1 \leq r_i \leq 0,3$	suficiente
$0,3 \leq r_i < 1$	boa

FONTE: MÜRLE e BILL (1984; p. 48).

NOTA : Traduzido do original pelo autor.

Na figura 4.7, em que k designa o valor crítico específico conforme o nível de significância α adotado, a região indicada por $1-\beta$ permite especificar a qualidade ou o poder do teste para a detecção de erros grosseiros:

- os erros grosseiros são detectados em $100(1-\beta)\%$ dos casos, e
- os erros grosseiros permanecem não detectados em $100\beta\%$ dos casos.

6.2.2.3.1 Localização de erros grosseiros nas observações

A estatística do teste de erros grosseiros para a i -ésima observação – teste *data snooping* de Baarda – é designada por w_i e tem a expressão:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{\ell_i} \sqrt{q_{v_i}}}, \quad (6.91)$$

$$\text{com } w_i \sim \begin{cases} \sqrt{F_{1,\infty}} = N(0,1) \text{ sob } H_0, & (6.92) \\ \sqrt{F'_{1,\infty;\lambda_0}} = N(\delta_0, 1) \text{ sob } H_a. & (6.93) \end{cases}$$

Sob a hipótese nula, segundo a qual nenhum erro grosseiro existe na observação ℓ_i , a estatística $(w_i)^2$ possui distribuição F central (ver seção 4.1.6.4); caso contrário, a hipótese alternativa, segundo a qual existe erro na observação ℓ_i , é correta, a estatística $(w_i)^2$ possui distribuição F não-central (HAHN et al., 1989, p. 237).

6.2.2.4 Medida de confiabilidade externa

Os efeitos de erros grosseiros sobre os parâmetros incógnitos e sobre as funções destes parâmetros são averiguados sob o conceito da confiabilidade interna.

O vetor das correções \mathbf{x} (que é a solução das equações normais no ajustamento de observações geodésicas pelo modelo 6.10) na presença de um erro grosseiro $\nabla\ell_i$ é expresso por:

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{N}\mathbf{A}^T\mathbf{P}(\boldsymbol{\ell} - \mathbf{e}_i\nabla\ell_i) = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\ell} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{e}_i\nabla\ell_i = -\mathbf{x} + \nabla\mathbf{x}, \quad (6.94)$$

em que \mathbf{N} é a matriz dos coeficientes das equações normais, \mathbf{A} é a matriz das derivadas das equações de observação em relação às incógnitas, \mathbf{P} é a matriz dos pesos das observações, $\boldsymbol{\ell}$ é o vetor da diferença entre o vetor dos valores calculados e vetor dos valores observados e \mathbf{e}_i é a i -ésima coluna de uma matriz identidade $n \times n$. Portanto, o efeito do erro grosseiro $\nabla\ell_i$ no vetor solução é dado por:

$$\nabla\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{e}_i\nabla\ell_i. \quad (6.95)$$

6.2.3 Medida de Sensibilidade

A fim de determinar os deslocamentos da posição de uma **estrema** do terreno com procedimentos geodésicos, é necessária a discretização do terreno por um número definido de pontos, cujo conjunto é designado por rede. A rede é medida em momentos distintos. A análise geodésica dos deslocamentos baseia-se na avaliação das medidas repetidas. Se houver deslocamento da **estrema**, entre duas épocas, significará a existência de mudança na geometria da rede e, por conseguinte, a variação da posição dos pontos.

O objetivo da análise de deslocamentos é detectar variações nas posições dos pontos, as quais situam na ordem de grandeza da acurácia das observações. Como observações geodésicas clássicas podem ser chamadas distâncias, direções angulares, diferenças de altitude e coordenadas obtidas do GPS.

Para as redes geodésicas de controle deve ser examinado se o movimento de pontos são detectáveis. Neste sentido define-se sensibilidade de rede geodésica como a habilidade para detectar deslocamentos com probabilidades dadas a partir de observações em duas épocas (NIEMEIER e HOLLMANN, 1984, p. 47). Para cada época são calculados o vetor das incógnitas coordenadas \mathbf{x} e a respectiva matriz de cofatores de covariância das incógnitas $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$. Sejam as épocas denominadas 1 e 2, das quais se obtém os respectivos vetores $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$ das

incógnitas coordenadas e as respectivas matrizes de cofatores de covariância $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1}$ e $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2}$. À questão, se existe deslocamento significativo de ponto entre as duas épocas, requer a formulação das hipóteses nula e alternativa:

$$H_0 : E\{\mathbf{d}\} = 0; \quad (6.96)$$

$$H_A : E\{\mathbf{d}\} \neq 0. \quad (6.97)$$

nas quais o vetor

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (6.98)$$

é chamado vetor deslocamento.

A matriz de cofatores de covariância do vetor \mathbf{d} , considerando que os vetores $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$ das incógnitas são não-correlacionados, é expressa por:

$$\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2}. \quad (6.99)$$

A estatística empregada para avaliar as hipóteses formulada na 6.96 e 6.97 tem a expressão (NIEMEIER, 1985b, p. 549)

$$T = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}}{r \hat{\sigma}_0^2}. \quad (6.100)$$

e a representação gráfica pela figura 6.6.

Na 6.100, \mathbf{Q}_d^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose ou pseudo-inversa de \mathbf{Q}_d (ver seção 3.1.3.14), r é o posto da matriz \mathbf{Q}_d e $\hat{\sigma}_0^2$ é o valor comum estimado, a partir de ambas as épocas, para a variância de uma observação de peso unitário *a priori* (NIEMEIER e HOLLMANN, 1984, p.48).

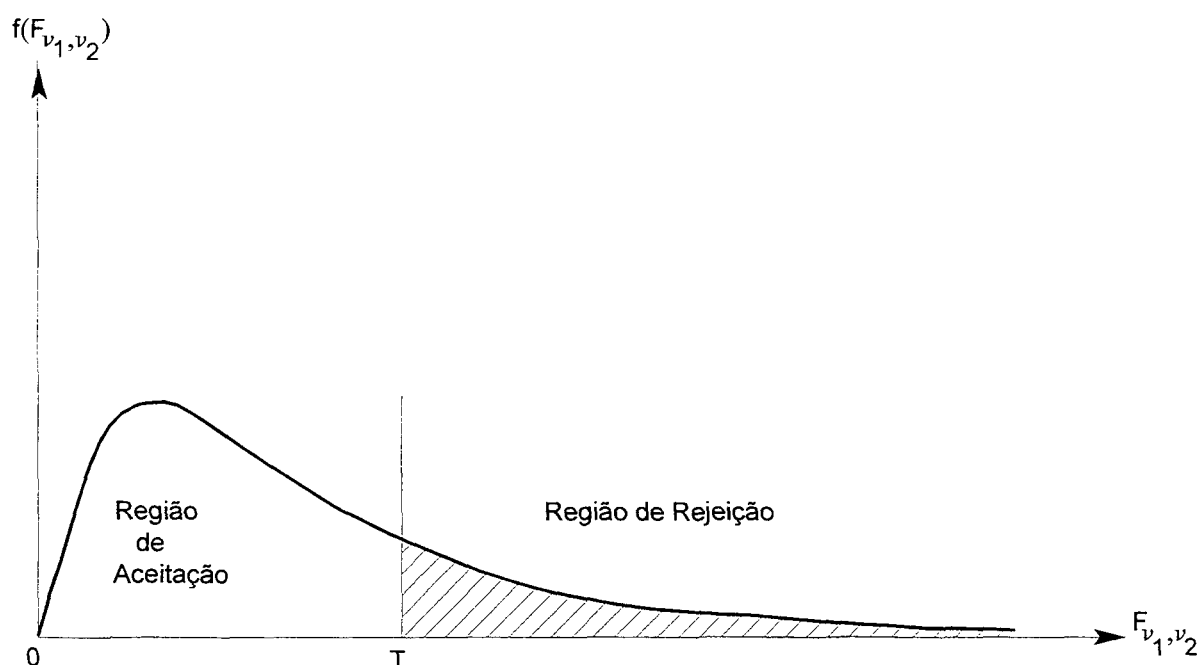
A estatística T segue a distribuição F central com r graus de liberdade no numerador e $f_1 + f_2$ graus de liberdade no denominador: f_1 é o número de graus de liberdade que estimou $\hat{\sigma}_0^2$ na época 1 e f_2 é o número de graus de liberdade que estimou $\hat{\sigma}_0^2$ na época 2. A hipótese nula H_0 será válida se, e somente se, $T < F_{r, f_1+f_2, \alpha}$ (WELSCH, 1980, p. 387; SALER, 1995, p. 78).

Caso seja válida a hipótese alternativa H_A , a estatística T segue a distribuição F não-central, com parâmetro de não-centralidade:

$$\lambda_{H_A} = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^+ \mathbf{d}. \quad (6.101)$$

Para cada ponto, uma direção crítica pode ser definida. Nessa direção, qualquer movimento real de ponto deve ser separado de um pseudo-movimento a fim de evitar erros.

FIGURA 6.6 – ESTATÍSTICA PARA AVALIAR AS HIPÓTESES EM SENSIBILIDADE DE REDE GEODÉSICA



O vetor deslocamento \mathbf{d} pode ser escrito (ZHANG e LI, 1990, p. 248):

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\mathbf{g}, \quad (6.102)$$

em que \mathbf{a} é a norma do vetor \mathbf{d} , e \mathbf{g} é o vetor unitário que indica a direção de \mathbf{d} .

Substituindo a 6.102 na 6.101 vem

$$a = \sigma_0^2 \sqrt{\frac{\lambda_{H_a}}{\mathbf{g}^T \mathbf{Q}_d \mathbf{g}}}. \quad (6.103)$$

Efetuada a decomposição espectral de \mathbf{Q}_d (ver seção 3.1.3.13) e tomando o valor próprio máximo $\lambda_{\text{máx}}$ e o valor próprio mínimo $\lambda_{\text{mín}}$ juntamente com seus respectivos vetores próprios \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_u , obtém-se o vetor deslocamento máximo $\mathbf{d}_{\text{máx}}$ e o vetor deslocamento mínimo $\mathbf{d}_{\text{mín}}$:

$$\mathbf{d}_{\text{máx}} = a_{\text{máx}} \mathbf{m}_1 = \sigma_0 \sqrt{\lambda_{H_a} \lambda_{\text{máx}}} \mathbf{m}_1; \quad (6.104)$$

$$\mathbf{d}_{\text{mín}} = a_{\text{mín}} \mathbf{m}_u = \sigma_0 \sqrt{\lambda_{H_a} \lambda_{\text{mín}}} \mathbf{m}_u. \quad (6.105)$$

7 APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS

Com os fundamentos jurídicos que vinculam o *lf* à linha geodésica sucintamente apresentados na seção 2 e com os fundamentos metodológicos apresentados nas seções 3, 4, 5 e 6, torna possível propor, agora, o **aprimoramento do memorial da caracterização de extremas** com dados numéricos reais, fornecidos pelo INCRA, referentes à gleba denominada Pó de Serra e ao seu parcelamento que totalizam 68 *lf_s*. São mostrados o procedimento que obtém as coordenadas polares elipsóidicas de cada *lf* e o procedimento que obtém a superfície da gleba, e também das parcelas, como função das coordenadas geográficas elipsóidicas.

Atendendo ao que determina, quanto à escrituração do Livro n. 2, o art. 176, §1º, II,3 da Lei n. 6 015/1973: “a identificação do imóvel feita, mediante indicação de suas características e confrontações, localização, área e denominação, se rural, ou logradouro e número, se urbano, e sua designação cadastral, se houver”, o **memorial aprimorado da caracterização de extremas** desta gleba é inserido na matrícula.

7.1 INTRODUÇÃO DE PARÂMETROS GEODÉSICOS E ESTATÍSTICOS

Os sistemas de coordenadas destinados à **caracterização de extremas** devem pertencer também à família de sistemas de coordenadas geodésicos, e para que haja uniformização, devem pertencer ao Sistema Geodésico Brasileiro. Por isso, cada memorial deve conter os parâmetros geométricos do elipsóide de referência para este Sistema e as coordenadas de **estrema** e a superfície do prédio devem ser obtidas como função destes parâmetros.

As coordenadas de **estrema** que definem o *lf* resulta do modelo matemático no qual o vetor médio amostral \bar{l} e a respectiva matriz covariância **S** são introduzidos. Do ajustamento das observações geodésicas pelo princípio do MMQ resulta a matriz covariância dos parâmetros K_x e a matriz covariância dos resíduos K_v . Com os elementos da matriz K_x , as coordenadas podem ser escritas

com suas respectivas acurácias bem como os azimutes mediante a lei de propagação de covariâncias. A controlabilidade das observações será possível com a aplicação do teste *data snooping* de Baarda e para isto são necessários a matriz covariância dos resíduos, a matriz dos pesos das observações, o nível de significância α e a qualidade ou poder do teste $1-\beta$.

FIGURA 7.1 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS E DE ENTES NATURAIS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EM PROPOSIÇÃO

continua

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		()º Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 1	Data
CARACTERIZAÇÃO DAS ESTREMAS DO IMÓVEL NO SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO OFICIAL		
PARÂMETROS DO ELIPSÓIDE: $\left\{ \begin{array}{l} \text{semi-eixo maior: } a = \\ \text{achatamento : } f = \end{array} \right.$		
DENOMINAÇÃO DO IMÓVEL:		
ESTREMA QUE INICIA O PERÍMETRO EM COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS: $(\varphi, \lambda) =$		
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO POR COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS (AZIMUTE E COMPRIMENTO DE lf)		
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO DE SUPERFÍCIES A SEREM EXCLUÍDAS DO REGISTRO		
SUPERFÍCIE REMANESCENTE DA GLEBA $S = f(\varphi, \lambda) =$		
DADOS COMPLEMENTARES PARA A INTERPRETAÇÃO DO PRINCÍPIO DA ESPECIALIDADE		
1 DADOS INSTRUMENTAIS		
a) medidas de acurácia interna nominais $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{linear} = \\ \sigma_{angular} = \end{array} \right.$		
b) cálculo do desvio padrão de uma observação segundo a NBR 13 133, p. 33-35 em ABNT (1994)		
c) calibração		

FIGURA 7.1 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS E DE ENTES NATURAIS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EM PROPOSIÇÃO

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		() ^o Ofício de Registro de Imóveis de ...	conclusão
Matrícula (número)	Ficha 2	Data	
<p>2 ESTIMATIVAS DAS MENSURAÇÕES</p> <p>a) vetor médio amostral</p> $\bar{l}^T = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \dots \quad \bar{l}_j \quad \dots \quad \bar{l}_p]$ <p>b) matriz covariância amostral</p> $\text{VECH}^T(\mathbf{S}_t) = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{21} & \dots & s_{p1} & s_2^2 & \dots & s_{p2} & \dots & s_j^2 & \dots & s_{pj} & \dots & s_p^2 \end{bmatrix}$ <p>3 ESTIMATIVAS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA A IDENTIFICAÇÃO E A AVIVENTAÇÃO</p> <p>a) variância de uma observação de peso unitário <i>a priori</i> $\sigma_0^2 =$</p> <p>b) variância de uma observação de peso unitário <i>a posteriori</i> $\hat{\sigma}_0^2 =$</p> <p>c) $\text{vech}^T(\mathbf{Q}_x) =$</p> <p>d) $\text{vech}^T(\mathbf{Q}_v) =$</p> <p>e) $\text{diag}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) =$</p> <p>f) nível de significância $\alpha =$</p> <p>g) qualidade ou poder do teste $1 - \beta =$</p> <p>parâmetro de não-centralidade da distribuição normal $\delta_0 =$</p>			
<p>Proprietário:</p> <p>Registro anterior:</p> <p>R. 01 –</p> <p>Av. 02 –</p> <p>Av. 03 –</p> <p>R. 04 –</p> <p>⋮</p>			

7.2 CÁLCULO DAS COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS

As fórmulas⁹ aqui empregadas para o cálculo das coordenadas polares elipsóidicas (azimute e comprimento de lf) são as de SODANO (1958, p. 16-19):

⁹ Ver SCHMIDT (1999, p. 126-128) que aplica a integração numérica à integral elíptica que calcula as coordenadas polares elipsóidicas.

$$s = a(1-f) + \frac{1}{2}(2C + hC - e^2 CPF)x + \frac{1}{2}Px^2 + \left[\begin{array}{l} \frac{1}{64} \left(\begin{array}{l} 64F + 16hF + 16h \sin F \cos F - 32e^2 P \sin^2 F - 3h^2 F \\ -5h^2 \sin F \cos F + 2h^2 \sin^3 F \cos F + 8e^2 h P \sin^2 F \\ + 8e^2 h P \sin^2 F \cos^2 F - 8e^4 P^2 \sin^3 F \cos F \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (7.1)$$

em que F é a 5.192, h é a 5.195, P é a 5.196, C é a 5.193 e x é a 5.188. O azimute depende do cálculo do rumo R que tem expressões:

$$\cot R_{12} = U_1 - \frac{U_2 \cos \beta_1}{\sin \Delta \lambda \cos \beta_2} x + \left(\frac{U_1}{2 \sin^2 \Delta \lambda} + \frac{U_2 \cos \Delta \lambda \cos \beta_1}{2 \sin^2 \Delta \lambda \cos \beta_2} \right) x^2, \quad (7.2),$$

$$\cot R_{21} = U_2 - \frac{U_1 \cos \beta_2}{\sin \Delta \lambda \cos \beta_1} x + \left(\frac{U_2}{2 \sin^2 \Delta \lambda} + \frac{U_1 \cos \Delta \lambda \cos \beta_2}{2 \sin^2 \Delta \lambda \cos \beta_1} \right) x^2, \quad (7.3)$$

em que

$$U_1 = \frac{\tan \beta_2 \cos \beta_1 - \cos \Delta \lambda \sin \beta_1}{\sin \Delta \lambda}, \quad (7.4)$$

$$U_2 = \frac{\sin \beta_2 \cos \Delta \lambda - \cos \beta_2 \tan \beta_1}{\sin \Delta \lambda} \quad (7.5)$$

e a interpretação do quadrante de R está no quadro 7.1.

QUADRO 7.1 – INTERPRETAÇÃO DO QUADRANTE EM QUE SE SITUA O AZIMUTE

QUADRANTE DE R_{12}				QUADRANTE DE R_{21}			
$\text{sgn}(\Delta \lambda)$				$\text{sgn}(\Delta \lambda)$			
+		-		-		+	
$\text{sgn}(\cot)$		$\text{sgn}(\cot)$		$\text{sgn}(\cot)$		$\text{sgn}(\cot)$	
+	-	+	-	+	-	+	-
I	II	III	IV	I	II	III	IV
AZIMUTE							
QUADRANTE							
I		II		III		IV	
$A_g = R$		$A_g = \pi + R$		$A_g = \pi + R$		$A_g = 2\pi + R$	

NOTA 1: no II e IV quadrantes R é negativo.

NOTA 2: Interpretação elaborada com base em SODANO (1965, p. 74).

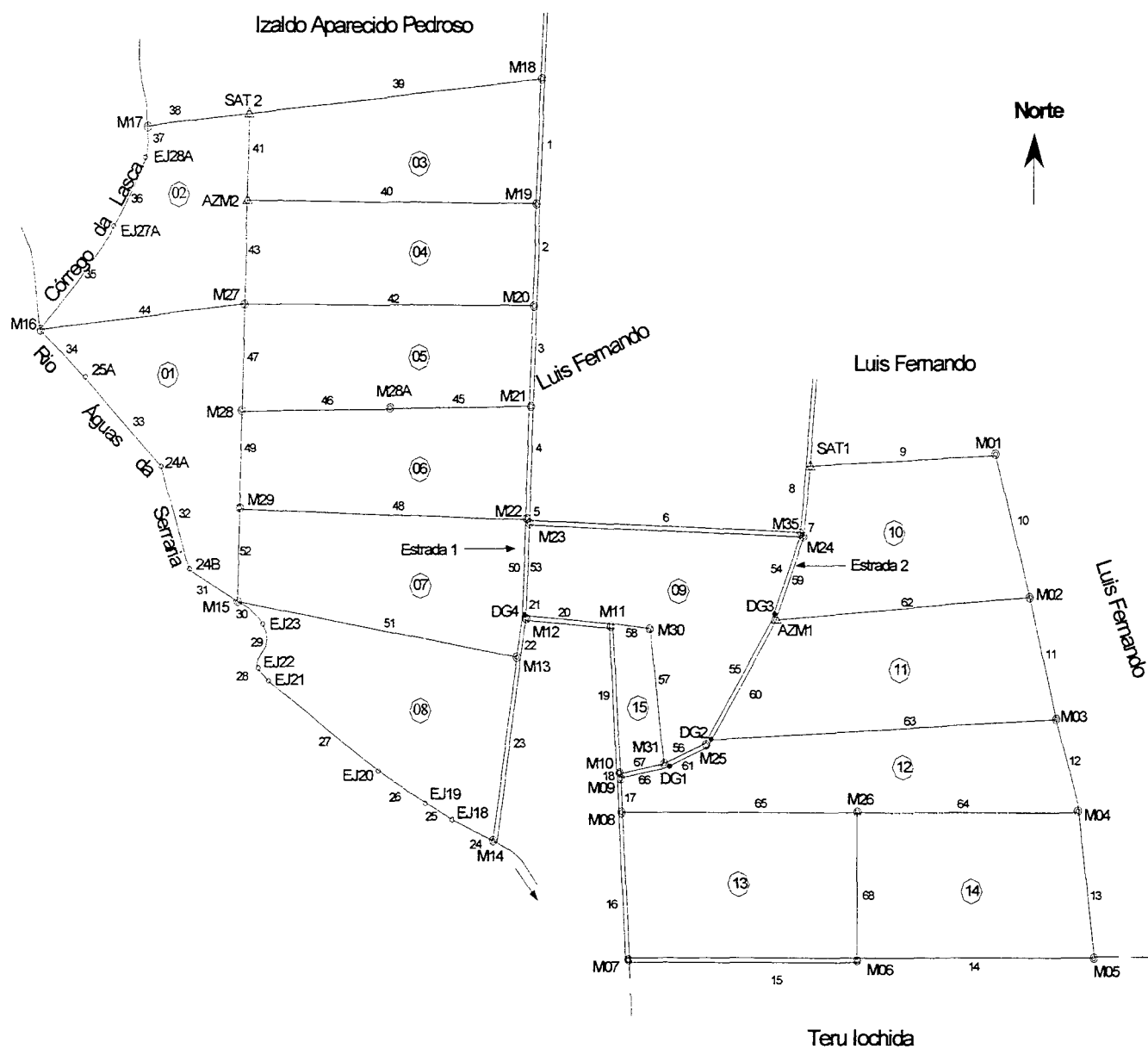
Em analogia à 3.202, as expressões que calculam os azimutes sem a preocupação com o quadrante são:

$$A_{g_{12}} = \pi \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Delta\lambda) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}^2(\Delta\lambda) \operatorname{sgn}(\cot) \right] + \operatorname{arc} \cot R_{12} \quad (7.6)$$

e

$$A_{g_{21}} = \pi \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\Delta\lambda) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}^2(\Delta\lambda) \operatorname{sgn}(\cot) \right] + \operatorname{arc} \cot R_{21}. \quad (7.7)$$

FIGURA 7.2 – A GLEBA PÓ DE SERRA E O SEU PARCELAMENTO



FONTE: INCRA (1998b).

NOTA : Extrato do original sob redução e com o acréscimo da numeração dos t_f .

QUADRO 7.2 – COORDENADAS DAS ESTREMAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

NOME DA ESTREMA	COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS REFERENCIADAS AO SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO OFICIAL:	
	PARÂMETROS DO ELIPSÓIDE: a = 6 378 160 m, f = 1/298,25	
	Latitude ϕ	Longitude λ
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"
M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"
M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"
M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"
M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"
SAT1	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"
M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"
M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"
M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"
M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"
M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"
M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"
M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"
DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"
M13	-23° 45' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"
M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"
EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"
EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"
EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"
EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"
M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"
24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"
24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"
25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"
M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"
EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"
EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"
SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"

FONTE: INCRA (1998a)

QUADRO 7.3 – COORDENADAS DAS ESTREMAS INTERNAS

NOME DA ESTREMA	COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS REFERENCIADAS AO SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO OFICIAL:	
	PARÂMETROS DO ELIPSÓIDE: a = 6 378 160 m, f = 1/298,25	
	Latitude ϕ	Longitude λ
AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"
M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"
M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"
M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"
M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"
M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"
M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"
DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"
DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"
AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"
M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"
DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"
M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"

FONTE: INCRA (1998a)

QUADRO 7.4 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS lf , DA GLEBA PÓ DE SERRA

continua

ESTRE MAS	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			lf	CON- FRON- TANTE
	Latitude ϕ	Longitude λ		sgn($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"	209,018	-	3°	180° 35' 10,8"	1	Terras de Estrada
M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"						
M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"	174,182	-	3°	180° 00' 33,9"	2	
M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"						
M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"	177,632	-	3°	181° 25' 19,8"	3	
M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"						
M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"	194,169	-	3°	181° 12' 15,4"	4	
M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"						
M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	5,796	+	1°	79° 53' 53,5"	5	
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"						
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"	535,232	+	2°	91° 27' 32,7"	6	
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"						
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	12,752	+	1°	89° 54' 42,9"	7	
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"						
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"	114,840	+	1°	5° 39' 18,7"	8	
SAT1	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"						
SAT1	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"	390,161	+	1°	86° 52' 07,5"	9	
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"						
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"	243,748	+	2°	162° 53' 17,6"	10	
M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"						
M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"	214,601	+	2°	164° 26' 18,9"	11	
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"						
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"	142,545	+	2°	161° 04' 35,4"	12	
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"						
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"	263,183	+	2°	170° 33' 23,1"	13	
M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"						
M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"	495,776	-	3°	269° 54' 50,6"	14	
M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"						
M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	455,223	-	3°	269° 07' 45,6"	15	
M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"						
M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	239,678	-	4°	354° 38' 36,0"	16	
M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"						
M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	66,707	-	4°	357° 00' 16,3"	17	
M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"						
M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	15,579	-	4°	359° 34' 20,6"	18	
M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"						
M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	232,653	-	4°	355° 32' 25,7"	19	
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"						
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"	178,588	-	4°	272° 23' 26,8"	20	
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"						
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"	5,768	-	3°	260° 20' 09,7"	21	
DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"						
DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	65,491	-	3°	192° 24' 51,9"	22	
M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"						
M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	312,121	-	3°	187° 41' 41,6"	23	
M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"						

QUADRO 7.4 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓDICAS DOS l_f , DA GLEBA PÓ DE SERRA

ESTRE MAS	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			l_f	CON- FRON- TANTE
	Latitude φ	Longitude λ		sgn($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	142,553	-	4°	294° 15' 56,2"	24	Rio Águas da Serraria
EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"						
EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"	89,694	-	4°	297° 44' 25,2"	25	
EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"						
EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"	112,211	-	4°	301° 50' 58,9"	26	
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"						
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"	169,097	-	4°	302° 10' 31,0"	27	
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"						
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"	45,914	-	4°	322° 42' 19,4"	28	
EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"						
EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"	61,673	+	1°	12° 45' 43,1"	29	
EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"						
EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"	73,202	-	4°	308° 06' 09,1"	30	
M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"						
M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	109,669	-	4°	297° 30' 24,6"	31	
24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"						
24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"	196,519	-	4°	338° 54' 20,1"	32	
24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"						
24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"	138,684	-	4°	312° 44' 00,1"	33	
25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"						
25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"	187,242	-	4°	311° 58' 50,8"	34	
M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"						
M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	224,311	+	1°	30° 36' 01,7"	35	
EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"						
EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"	126,386	+	1°	38° 51' 50,9"	36	
EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"						
EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"	61,677	+	1°	15° 50' 21,7"	37	
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"						
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"	214,588	+	1°	83° 42' 44,9"	38	
SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"						
SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"	590,019	+	1°	83° 27' 05,6"	39	
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"						
$\sum_{l_f=1}^{39} = 7\,288,882 \text{ m}$								

QUADRO 7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS I_f DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

PAR-CELA	ES-TREMA	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			I_f	CONFRON-TANTE
		Latitude ϕ	Longitude λ		sgn ($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
01	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	182,129	-	3°	180° 59' 29,1"	47	Parcela 05
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"						
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	169,712	-	3°	181° 18' 00,6"	49	Parcela 06
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"						
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"	152,910	-	3°	180° 44' 54,8"	52	Parcela 07
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"						
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	109,669	-	4°	297° 30' 24,6"	31	Rio Águas da Serraria
	24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"						
	24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"	196,519	-	4°	338° 54' 20,1"	32	
	24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"						
	24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"	138,684	-	4°	312° 44' 00,1"	33	
	25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"						
	25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"	187,242	-	4°	311° 58' 50,8"	34	
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"						
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	421,810	+	1°	83° 04' 06,1"	44	Parcela 02
M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"							
02	SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"	145,314	-	3°	180° 33' 38,9"	41	Parcela 03
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"						
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"	177,859	-	3°	181° 08' 12,0"	43	Parcela 04
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"						
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	421,810	-	3°	263° 04' 00,1"	44	Parcela 01
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"						
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	224,311	+	1°	30° 36' 01,7"	35	Córrego da Lasca
	EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"						
	EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"	126,386	+	1°	38° 51' 50,9"	36	
	EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"						
	EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"	61,677	+	1°	15° 50' 21,7"	37	
	M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"						
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"	214,588	+	1°	83° 42' 44,9"	38	Terras de Isaldo Ap. Pedroso	
SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"							
03	M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"	209,018	-	3°	180° 35' 10,8"	1	Terras de estrada
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"						
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"	585,403	-	3°	269° 38' 45,5"	40	Parcela 04
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"						
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"	145,314	+	1°	0° 33' 39,0"	41	Parcela 02
	SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"						
	SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"	590,019	+	1°	83° 27' 05,6"	39	Terras de Isaldo Ap. Pedroso
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"							
04	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"	174,182	-	3°	182° 00' 33,9"	2	Terras de estrada
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"						
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"	582,965	-	3°	269° 14' 49,6"	42	Parcela 05
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"						
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	177,859	+	1°	1° 08' 12,1"	43	Parcela 02
AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"							

continua

QUADRO 7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS l_f , DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

PAR CELA	ES TREMA	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			l_f	CONFRON TANTE
		Latitude ϕ	Longitude λ		sgn ($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
	AZM2	-23° 43' 34,2019"	-50° 58' 42,185 3"	585,403	+	1°	89° 38' 53,9"	40	Parcela 02
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"						
05	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"	177,632	-	3°	181° 25' 19,8"	3	Terras de estrada
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"						
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"	319,672	-	3°	268° 47' 27,9"	45	Parcela 06
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"						
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"	262,048	-	3°	268° 49' 13,4"	46	
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"						
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	182,129	+	1°	0° 59' 29,1"	47	Parcela 01
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"						
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	582,965	+	1°	89° 14' 57,8"	42	Parcela 04
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"						
06	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"	194,169	-	3°	181° 12' 15,4"	4	Terras de estrada
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"						
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	581,497	-	4°	271° 12' 37,9"	48	Parcela 07
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"						
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"	169,712	+	1°	1° 18' 00,7"	49	Parcela 01
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"						
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	262,048	+	1°	88° 49' 17,1"	46	Parcela 01
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"						
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"	319,672	+	1°	88° 47' 32,4"	45	
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"						
07	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"	581,497	+	2°	91° 12' 46,2"	48	Parcela 06
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"						
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	161,405	-	3°	182° 26' 31,2"	50	Terras de estrada
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"						
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	65,491	-	3°	192° 24' 51,9"	22	
	M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"						
	M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	568,803	-	4°	278° 26' 04,7"	51	Parcela 08
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"						
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	152,910	+	1°	0° 44' 54,8"	52	Parcela 01
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"						
08	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	568,803	+	2°	98° 26' 12,7"	51	Parcela 07
	M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"						
	M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	312,121	-	3°	187° 41' 41,7"	23	Terras de estrada
	M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"						
	M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	142,553	-	4°	294° 15' 56,2"	24	Rio Águas da Serraria
	EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"						
	EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"	89,694	-	4°	297° 44' 25,2"	25	
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"						
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"	112,211	-	4°	301° 50' 58,9"	26	
	EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"						
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"	169,097	-	4°	302° 10' 31,0"	27		
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"							

continuação

QUADRO 7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS I_f DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

PAR CELA	ES TREMA	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			I_f	CONFRON TANTE
		Latitude ϕ	Longitude λ		sgn ($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
	EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"	89,694	-	4°	297° 44' 25,2"	25	Rio Águas da Serraria
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"						
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"	112,211	-	4°	301° 50' 58,9"	26	
	EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"						
	EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"	169,097	-	4°	302° 10' 31,0"	27	
	EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"						
	EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"	45,914	-	4°	322° 42' 19,4"	28	
	EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"						
	EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"	61,673	+	1°	12° 45' 43,1"	29	
	EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"						
	EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"	73,202	-	4°	308° 06' 09,1"	30	
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"						
09	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"	535,232	+	2°	91° 27' 32,7"	6	Terras de estrada
	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"						
	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	152,706	-	3°	202° 01' 21,7"	54	
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"						
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"	228,805	-	3°	212° 58' 57,8"	55	
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"						
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"	84,090	-	3°	244° 07' 11,5"	56	
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"						
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	209,807	-	4°	350° 26' 04,5"	57	
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"						
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"	71,022	-	4°	276° 59' 25,6"	58	
	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"						
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"	178,588	-	4°	272° 23' 26,8"	20		
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"							
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"	161,656	+	1°	2° 27' 01,2"	53		
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"							
10	M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"	243,748	+	2°	162° 53' 17,6"	10	Terras de Luís Fernando
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"						
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"	533,622	-	3°	264° 39' 15,2"	62	Parcela 11
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"						
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	158,684	+	1°	21° 42' 01,9"	59	Terras de estrada
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"						
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"	144,840	+	1°	5° 39' 18,7"	8	
	SAT1	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"						
SAT1	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"	390,161	+	1°	86° 52' 07,5"	9	Terras de Luís Fernando	
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"							
11	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"	214,601	+	2°	164° 26' 18,9"	11	Terras de Luís Fernando
	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"						
	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"	715,089	+	3°	267° 06' 54,3"	63	Parcela 12
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"						
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	230,041	+	1°	32° 58' 58,1"	60	Terras de estrada

continuação

QUADRO 7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS l_f DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

PARCELA	ESTREMA	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			l_f	CONFRONTANTE
		Latitude ϕ	Longitude λ		sgn ($\Delta\lambda$)	qu.	valor		
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	533,622	+	1°	86° 52' 07,5"	62	Parcela 10
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"						
12	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"	142,545	+	2°	161° 04' 35,4"	12	Terras de Luís Fernando
	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"						
	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"	455,490	-	3°	267° 45' 09,7"	64	Parcela 14
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"						
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"	475,247	-	3°	268° 44' 21,2"	65	Parcela 13
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"						
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	66,707	-	4°	357° 00' 16,3"	17	Terras de estrada
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"						
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	91,533	+	1°	78° 38' 55,2"	66	
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"						
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"	93,686	+	1°	63° 19' 04,8"	61	
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"						
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	715,089	+	1°	87° 07' 04,5"	63	Parcela 11
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"							
13	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"	242,190	+	2°	179° 25' 11,2"	68	Parcela 14
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"						
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	455,223	-	3°	269° 07' 45,6"	15	Terras de estrada
	M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"						
	M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	239,679	-	4°	354° 38' 36,0"	16	
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"						
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	475,247	+	1°	88° 44' 28,0"	65	Parcela 12
M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"							
14	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"	263,183	+	2°	170° 33' 23,1"	13	Terras de Luís Fernando
	M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"						
	M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"	495,776	-	3°	269° 54' 50,6"	14	Terras de Teru lochida
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"						
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	242,190	-	4°	359° 25' 11,2"	68	Parcela 13
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"						
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"	455,490	+	1°	87° 45' 16,2"	64	Parcela 12
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"							
15	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"	71,022	+	2°	96° 59' 26,6"	58	Parcela 09
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"						
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"	209,807	+	2°	170° 26' 05,0"	57	
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"						
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	89,284	-	3°	259° 18' 53,1"	67	Terras de Estrada
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"						
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	232,653	-	4°	355° 32' 25,7"	19	
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"							
Estrada 01	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"	161,656	-	3°	182° 27' 01,1"	53	Parcela 09
	M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"						
	M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"	5,768	-	3°	260° 20' 09,7"	21	Estrada
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"						

continuação

QUADRO 7.5 – COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS DOS l_f DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA

PARCELA	ES TREMA	COORDENADAS		COMPR. (m)	AZIMUTE			conclusão	
		Latitude φ	Longitude λ		sgn ($\Delta\lambda$)	qu.	valor	l_f	CONFRONTANTE
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	161,405	+	1°	2° 26' 31,3"	50	Parcela 07
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"						
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	5,796	+	1°	79° 53' 53,5"	5	Estrada
	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"						
Estrada 02	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"	158,684	-	3°	201° 42' 01,0"	59	Parcela 10
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"						
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	230,041	-	3°	212° 58' 56,3"	60	Parcela 11
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"						
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	93,686	-	3°	243° 19' 03,6"	61	Parcela 12
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"						
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"	91,533	-	3°	258° 38' 53,9"	66	
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"						
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	15,579	-	4°	359° 34' 20,6"	18	Estrada
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"						
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	89,284	+	1°	79° 18' 54,3"	67	Parcela 15
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"						
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	84,090	+	1°	64° 07' 12,6"	56	Parcela 09
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"						
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"	228,805	+	1°	32° 58' 59,6"	55	
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"						
DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"	152,706	+	1°	22° 01' 22,5"	54		
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"							
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	12,752	+	1°	89° 54' 42,9"	7	Estrada	
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"							

7.3 SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DA SUPERFÍCIE DO PRÉDIO NO ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA

A superfície de um polígono constituído por p lados, e.g., um prédio, no elipsóide advém do somatório das p superfícies dos p polígonos que são formados pela linha geodésica, pelos meridianos dos pontos extremos da geodésica e pelo equador. Há superfícies que são excluídas, as quais recebem no somatório sinal negativo (ver quadro 7.6).

A seqüência de obedece à ordenação seguinte. Primeiramente, os dados de entrada que são

- a) semi-eixo maior e o achatamento do elipsóide;
- b) o módulo das coordenadas elipsóidicas das extremas do lf , sob a restrição $|\varphi_i| \geq |\varphi_{i+1}|$.

Depois, a solução do $|S|$ de acordo com a 5.186 que depende do cálculo:

- a) das séries dada pela 5.185;
- b) do valor absoluto da diferença de longitude geográfica elipsóidica:

$$|\Delta\lambda| = \lambda_2 - \lambda_1;$$
- c) do valor absoluto da latitude reduzida: $|\beta| = \arctan[(1-f)\tan\varphi]$;
- d) de x dado pela 5.203;
- e) da diferença angular $\Delta\omega$ dada pela 5.187, valor sempre positivo;
- f) do valor absoluto de ω_1 pela 5.199
- g) de ω_2 pela 5.200;
- h) de β_0 dado pela 5.197;
- i) dos ângulos θ_1 e θ_2 e da diferença angular $\Delta\theta$, esta em radianos, dados pela 5.183;
- j) de ΔJ_{n-1} , com $n = 2, 4, 6, 8, 10$, dado pela 5.184;
- l) de $c^n = \cos^n \beta_0$ com $n = 2, 4, 6, 8, 10$;
- m) do $|S|$, cuja unidade resulta em m^2 ou, então, em ha se $|S| \times 10^{-4}$.

QUADRO 7.6 – SUPERFÍCIE DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

ESTREMAS: $ \varphi_i \geq \varphi_{i+1} $	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO $ S $	sgn	N. DO lf
	Latitude φ	Longitude λ			
M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"	5 977 290,9	+	1
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"			
M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"	17 062 914,8	+	2
M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"			
M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"	12 321 547,5	+	3
M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"			
M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	11 413 696,9	+	4
M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"			
M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	15 934 105,5	-	5
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"			
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	1 495 865 707,3	-	6
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"			
M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	33 555 171,4	-	7
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"			
M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"	31 598 299,9	-	8
SAT01	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"			
SAT01	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"	1 089 428 643,3	-	9
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"			
M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"	200 680 311,4	-	10
M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"			
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"	161 024 067,5	-	11
M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"			
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"	129 232 720,9	-	12
M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"			
M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"	120 631 625,1	-	13
M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"			
M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	1 386 720 892,5	+	14
M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"			
M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	1 273 056 478,5	+	15
M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"			
M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	62 585 368,1	+	16
M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"			
M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	9 813 287,1	+	17
M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"			
M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	277 349,6	+	18
M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"			
M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	50 594 585,7	+	19
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"			
M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"	498 990 738,4	+	20
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"			
DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	15 863 730,3	+	21
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"			
M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	38 705 391,8	+	22
DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"			
M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	116 852 515,6	+	23
M13	-23° 43' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"			

continua

QUADRO 7.6 – SUPERFÍCIE DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

ESTREMAS: $ \varphi_i \geq \varphi_{i+1} $	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO $ S $	sgn	conclusão N. DO lf
	Latitude φ	Longitude λ			
M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	364 173 676,7	+	24
EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"			
EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"	221 861 814,9	+	25
EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"			
EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"	266 538 263,4	+	26
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"			
EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"	400 371 020,5	+	27
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"			
EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"	79 962 966,6	+	28
EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"			
EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"	38 048 324,8	-	29
EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"			
EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"	161 797 246,1	+	30
M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"			
M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	272 529 935,5	+	31
24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"			
24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"	197 813 728,1	+	32
24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"			
24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"	285 880 261,8	+	33
25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"			
25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"	389 177 785,9	+	34
M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"			
M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	319 363 121,7	-	35
EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"			
EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"	221 456 947,8	-	36
EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"			
EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"	46 952 061,1	-	37
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"			
M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"	596 440 876,1	-	38
SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"			
SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"	1 638 568 507,2	-	39
M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"			

$S = 1561996,2 \text{ m}^2 = 156,1996 \text{ ha}$

QUADRO 7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

PARCELA	ESTREMAS	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO S	sgn	N. DO lf
		Latitude φ	Longitude λ			
01	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	8 806 469,1	+	47
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"			
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"	10 770 656,8	+	49
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"			
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	5 592 543,6	+	52
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"			
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	272 529 935,5	+	31
	24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"			
	24B	-23° 43' 54,745 3"	-50° 58' 46,068 9"	197 813 728,1	+	32
	24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"			
	24A	-23° 43' 48,784 2"	-50° 58' 48,566 7"	285 880 261,8	+	33
	25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"			
	25A	-23° 43' 45,713 8"	-50° 58' 52,176 7"	389 177 785,9	+	34
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"			
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	1 170 465 848,9	-	44
M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"				
S = 105 531,9 m ² = 10,553 2 ha						
02	AZM02	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"	3 972 793,7	+	41
	SAT02	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"			
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	9 874 637,0	+	43
	AZM02	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"			
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	1 170 465 848,9	+	44
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"			
	M16	-23° 43' 41,642 6"	-50° 58' 57,091 3"	319 363 121,7	-	35
	EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"			
	EJ27A	-23° 43' 35,364 1"	-50° 58' 53,058 1"	221 456 947,8	-	36
	EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"			
	EJ28	-23° 43' 32,168 8"	-50° 58' 50,261 2"	46 952 061,1	-	37
	M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"			
	M17	-23° 43' 30,244 5"	-50° 58' 49,668 2"	596 440 876,1	-	38
SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"				
S = 100 272,9 m ² = 10,027 3 ha						
03	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"	5 977 290,9	+	1
	M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"			
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"	1 636 669 321,7	+	40
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"			
	AZM2	-23° 43' 34,201 9"	-50° 58' 42,185 3"	3 972 793,7	-	41
	SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"			
	SAT2	-23° 43' 29,480 3"	-50° 58' 42,135 1"	1 638 568 507,2	-	39
	M18	-23° 43' 27,292 7"	-50° 58' 21,439 5"			
S=105 311,7 m ² = 10,531 2 ha						
04	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"	17 062 914,7	+	2
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"			
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	1 629 582 595,1	+	42
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"			

continua

QUADRO 7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

continuação

PARCELA	ESTREMAS	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO S	sgn	N. DO lf
		Latitude ϕ	Longitude λ			
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	9 874 637,0	-	43
	AZM2	-23° 43' 34,2019"	-50° 58' 42,185 3"			
	AZM2	-23° 43' 34,2019"	-50° 58' 42,185 3"	1 636 669 321,7	-	40
	M19	-23° 43' 34,084 7"	-50° 58' 21,515 0"			
S = 101 551,1 m ² = 10,155 1 ha						
05	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"	12 321 547,5	+	3
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"			
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"	893 545 784,7	+	45
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"			
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	732 625 834,4	+	46
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"			
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	8 806 469,1	-	47
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"			
	M27	-23° 43' 39,988 0"	-50° 58' 42,310 0"	1 629 582 595,1	-	42
	M20	-23° 43' 39,739 4"	-50° 58' 21,730 5"			
S = 104 102,4 m ² = 10,410 2 ha						
06	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	11 413 696,9	+	4
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"			
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	1 625 636 175,1	+	48
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"			
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"	10 770 656,8	-	49
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"			
	M28	-23° 43' 45,903 8"	-50° 58' 42,421 2"	732 625 834,4	-	46
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"			
	M28A	-23° 43' 45,728 5"	-50° 58' 33,169 7"	893 545 784,7	-	45
	M21	-23° 43' 45,509 4"	-50° 58' 21,886 1"			
S = 107 596,1 m ² = 10,759 6 ha						
07	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	19 237 363,8	+	50
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"			
	M13	-23° 45' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	38 705 391,8	+	22
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"			
	M13	-23° 45' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	1 573 394 671,1	+	51
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"			
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"	5 592 543,6	-	52
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"			
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	1 625 636 175,1	-	48
	M29	-23° 43' 51,420 3"	-50° 58' 42,557 2"			
S = 108 708,0 m ² = 10,870 8 ha						
08	M13	-23° 45' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"	1 573 394 671,1	-	51
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"			
	M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	116 852 515,6	+	23
	M13	-23° 45' 59,107 2"	-50° 58' 22,761 8"			
	M14	-23° 44' 09,158 9"	-50° 58' 24,237 1"	364 173 676,7	+	24
	EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"			

QUADRO 7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

continuação

PARCELA	ESTREMAS	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO S	sgn	N. DO lf
		Latitude ϕ	Longitude λ			
	EJ18	-23° 44' 07,250 9"	-50° 58' 28,834 7"	221 861 814,9	+	25
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"			
	EJ19	-23° 44' 05,894 8"	-50° 58' 31,635 7"	266 538 263,4	+	26
	EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"			
	EJ20	-23° 44' 03,970 3"	-50° 58' 35,000 8"	400 371 020,5	+	27
	EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"			
	EJ21	-23° 44' 01,042 6"	-50° 58' 40,055 7"	79 962 966,6	+	28
	EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"			
	EJ22	-23° 43' 59,822 3"	-50° 58' 41,065 3"	38 048 324,8	-	29
	EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"			
	EJ23	-23° 43' 57,869 7"	-50° 58' 40,584 9"	161 797 246,1	+	30
	M15	-23° 43' 56,394 9"	-50° 58' 42,627 8"			
S = 114 507,9 m ² = 11,450 8 ha						
09	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	1 495 865 707,3	-	6
	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"			
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"	160 414 819,3	+	54
	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"			
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"	348 529 742,5	+	55
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"			
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	212 175 832,3	+	56
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"			
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	97 459 581,0	+	57
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"			
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"	197 715 073,1	+	58
	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"			
	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"	498 990 738,4	+	20
	M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"			
M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"	19 308 985,9	-	53	
M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"				
S = 111 093,4 m ² = 11,109 3 ha						
10	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"	200 680 311,4	-	10
	M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"			
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	1 485 829 244,1	+	62
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"			
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	164 010 375,1	-	59
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"			
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"	31 598 299,9	-	8
	SAT01	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"			
	SAT01	-23° 43' 48,519 5"	-50° 58' 02,118 0"	1 089 428 643,3	-	9
	M01	-23° 43' 47,826 5"	-50° 57' 48,361 2"			
S = 111 614,4 m ² = 11,1614 ha						
11	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"	161 024 067,5	-	11
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"			
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	1 997 305 056,8	+	63
	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"			

QUADRO 7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

PARCELA	ESTREMAS	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO S	sgn	N. DO lf
		Latitude ϕ	Longitude λ			
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	350 328 370,5	-	60
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"			
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	1 485 829 244,1	-	62
	M02	-23° 43' 55,403 9"	-50° 57' 45,827 2"			
S = 123 374,7 m ² = 12,337 5 ha						
12	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"	129 232 720,9	-	12
	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"			
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"	1 272 829 446,2	+	64
	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"			
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	1 328 670 111,9	+	65
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"			
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	9 813 287,1	+	17
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"			
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	250 546 563,1	-	66
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"			
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"	234 116 557,6	-	61
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"			
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,011 1"	1 997 305 056,8	-	63
	M03	-23° 44' 02,124 9"	-50° 57' 43,794 1"			
S = 111946,8 m ² = 11,194 7 ha						
13	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	6 862 188,4	-	68
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"			
	M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	1 273 056 478,5	+	15
	M06	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"			
	M07	-23° 44' 15,183 2"	-50° 58' 14,216 1"	62 585 368,1	+	16
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"			
	M08	-23° 44' 07,426 0"	-50° 58' 15,006 2"	1 328 670 111,9	-	65
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"			
S = 109 546,3 m ² = 10,954 6 ha						
14	M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"	120 631 625,1	-	13
	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"			
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	1 386 720 892,5	+	14
	M05	-23° 44' 14,934 7"	-50° 57' 40,639 6"			
	M06	-23° 44' 14,958 6"	-50° 57' 58,145 3"	6 862 188,4	+	68
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"			
	M26	-23° 44' 07,086 4"	-50° 57' 58,231 9"	1 272 829 446,2	-	64
	M04	-23° 44' 06,506 1"	-50° 57' 42,162 5"			
S = 122 009,6 m ² = 12,2010 ha						
15	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"	197 715 073,2	-	58
	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"			
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	97 459 581,0	-	57
	M30	-23° 43' 57,556 0"	-50° 58' 13,276 0"			
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	244 596 971,7	+	67
M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"				

QUADRO 7.7 – SUPERFÍCIE DAS PARCELAS DA GLEBA PÓ DE SERRA NO ELIPSÓIDE

PARCELA	ESTREMAS	COORDENADAS		INTEGRAÇÃO S	conclusão	
		Latitude φ	Longitude λ		sgn	N. DO lf
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	50 594 585,7	+	19
	M11	-23° 43' 57,274 2"	-50° 58' 15,772 4"			
S = 16 903,2 m ² = 1,690 3 ha						
ESTRADA 01	M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"	19 308 985,9	+	53
	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"			
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	15 863 730,3	+	21
	M12	-23° 43' 57,032 0"	-50° 58' 22,072 8"			
	DG4	-23° 43' 57,063 4"	-50° 58' 22,273 1"	19 237 363,8	-	50
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"			
	M22	-23° 43' 51,820 0"	-50° 58' 22,030 2"	15 934 105,5	-	5
	M23	-23° 43' 51,787 0"	-50° 58' 21,829 0"			
S = 1246,9 m ² = 0,124 7 ha						
ESTRADA 02	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"	164 010 375,1	+	59
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"			
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,0111"	350 328 370,5	+	60
	AZM1	-23° 43' 57,019 7"	-50° 58' 04,587 9"			
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"	234 116 557,7	+	61
	M25	-23° 44' 03,294 2"	-50° 58' 09,0111"			
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	250 546 563,1	+	66
	DG1	-23° 44' 04,661 7"	-50° 58' 11,966 9"			
	M09	-23° 44' 05,246 3"	-50° 58' 15,130 1"	277 349,6	+	18
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"			
	M10	-23° 44' 04,814 6"	-50° 58' 15,133 6"	244 596 971,7	-	67
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"			
	M31	-23° 44' 04,278 2"	-50° 58' 12,045 5"	212 175 832,3	-	56
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"			
	DG2	-23° 44' 03,081 8"	-50° 58' 09,366 7"	348 529 742,5	-	55
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"			
	DG3	-23° 43' 56,839 6"	-50° 58' 04,966 2"	160 414 819,3	-	54
	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"			
	M35	-23° 43' 52,229 6"	-50° 58' 02,940 7"	33 555 171,3	-	7
	M24	-23° 43' 52,229 0"	-50° 58' 02,517 0"			
S = 6 678,9 m ² = 0,667 9 ha						
Total: $\sum_{1}^{17} = 1561996,2 \text{ m}^2 = 156,199 6 \text{ ha}$						

FIGURA 7.3 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: A GLEBA PÓ DE SERRA

continua

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		() ° Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 1	Data
CARACTERIZAÇÃO DAS ESTREMAS DO IMÓVEL NO SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO OFICIAL		
PARÂMETROS DO ELIPSÓIDE: semi-eixo maior $a = 6\,378\,160\text{m}$; achatamento $f = 1/298,25$.		
DENOMINAÇÃO DO IMÓVEL: Gleba Pó de Serra.		
ESTREMA QUE INICIA O PERÍMETRO EM COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS: M18 = $(\varphi; \lambda) = (-23^{\circ}43'27,292\,7''; -50^{\circ}58'21,439\,5'')$.		
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO POR COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS (AZIMUTE E COMPRIMENTO DE lf)		
Da estrema M18 , segue confrontando com terras de uma estrada com as triades: ($180^{\circ}35'10,8''$; 209,018m; M19), ($180^{\circ}00'33,9''$; 174,182m; M20), ($181^{\circ}25'19,8''$; 177,632m; M21), ($181^{\circ}12'15,4''$; 194,169m; M22), ($79^{\circ}53'53,5''$; 5,796m; M23), ($91^{\circ}27'32,7''$; 535,232m; M35), ($89^{\circ}54'42,9''$; 12,752m; M24), ($5^{\circ}39'18,7''$; 114,840m; SAT1).		
Da estrema SAT1 segue confrontando com terras de Luís Fernando com as triades: ($86^{\circ}52'07,5''$; 390,161m; M01), ($162^{\circ}53'17,6''$; 243,748m; M02), ($164^{\circ}26'18,9''$; 214,601m; M03), ($161^{\circ}04'35,4''$; 142,545m; M03), ($170^{\circ}33'23,1''$; 263,183m; M05).		
Da estrema M05 , segue confrontando com terras de Teru lochida com as triades: ($269^{\circ}54'50,6''$; 495,776m; M06) e ($269^{\circ}07'45,6''$; 455,223m; M07).		
Da estrema M07 segue confrontando com terras de uma estrada com as triades: ($354^{\circ}38'36,0''$; 239,678m; M08), ($357^{\circ}00'16,3''$; 66,707m; M09), ($359^{\circ}34'20,6''$; 15,579m; M10), ($355^{\circ}32'25,7''$; 232,653m; M11), ($272^{\circ}23'26,8''$; 178,588m; M12), ($260^{\circ}20'09,7''$; 5,768m; DG4), ($192^{\circ}24'51,9''$; 65,491m; M13), ($187^{\circ}41'41,6''$; 312,121m; M14).		
Da estrema M14 segue confrontando com o rio Águas da Serraria com as triades: ($294^{\circ}15'56,2''$; 142,553m; EJ18), ($297^{\circ}44'25,2''$; 89,694m; EJ19), ($301^{\circ}50'58,9''$; 112,211m; EJ20), ($302^{\circ}10'31,0''$; 169,097m; EJ21),		

FIGURA 7.3 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: A GLEBA PÓ DE SERRA

continuação

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		()º Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 2	Data
<p>(322°42'19,4" ; 45,914m; EJ22), (12°45'43,1" ; 61,673m; EJ23), (308°06'09,1" ; 73,202m; M15), (297°30'24,6" ; 109,669m; 24B), (338°54'20,1" ; 169,519m; 24A), (312°44'00,1" ; 138,684m; 25A), (311°58'50,8" ; 187,242m; M16).</p> <p>Da estrema M16 segue confrontado com o Córrego da Lasca com as tríades: (30°36'01,7" ; 224,311m; EJ27A), (38°51'50,9" ; 126,386m; EJ28) e (15°50'21,7" ; 61,677m; M17).</p> <p>Da estrema M17 segue confrontando com terras de Izaldo Aparecido Pedroso com as tríades: (83°42'44,9" ; 214,588m; SAT2) e (83°27'05,6" ; 590,019m; M18).</p> <p>QUANTIFICAÇÃO DO PERÍMETRO: 7 288,882 m</p> <p>QUANTIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE: $S = f(\varphi; \lambda) = 156,199\ 6\text{ha}$.</p> <p>DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO DE SUPERFÍCIES A SEREM EXCLUÍDAS DO REGISTRO Excluem-se desta superfície as terras de estradas delimitadas por dois perímetros distintos. O primeiro inicia na estrema M23 = (-23° 43' 51,787 0"; -50° 58' 21,829 0") e segue com as tríades: (182°27'01,1" ; 161,656m; M12), (260°20'09,7" ; 5,768m; DG4), (2° 26' 31,3" ; 161,656m; M22), (79°53'53,5" ; 5,796m; M23).</p> <p>Este perímetro delimita a superfície $S = f(\varphi; \lambda) = 0,124\ 7\text{ha}$.</p> <p>O segundo inicia na estrema M24 = (-23° 43' 52,229 0"; -50° 58' 02,517 0") e segue com as tríades: (201°42'01,0" ; 158,684m; AZM1); (212°58'56,3" ; 230,041m; M25); (243°19'03,6" ; 93,686m; DG1); (258°38'53,9" ; 91,533m; M09); (359°34'20,6" ; 15,579m; M10); (79°18'54,3" ; 89,284m; M31); (64°07'12,6" ; 84,090m; DG2); (32°58'59,6" ; 228,805; DG3); (22°01'22,5" ; 152,706m; M35) e (89°54'42,9" ; 12,752m; M24).</p> <p>Este perímetro delimita a superfície $S = f(\varphi; \lambda) = 0,667\ 9\text{ha}$.</p> <p>SUPERFÍCIE REMANESCENTE DA GLEBA: $S = f(\varphi; \lambda) = 155,407\ 0\text{ha}$.</p>		

FIGURA 7.3 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: A GLEBA PÓ DE SERRA¹⁰

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		conclusão
		()º Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 3	Data
DADOS COMPLEMENTARES PARA A INTERPRETAÇÃO DO PRINCÍPIO DA ESPECIALIDADE		
1 DADOS INSTRUMENTAIS		
a) medidas de acurácia interna nominais $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{linear}} = \\ \sigma_{\text{angular}} = \end{array} \right.$		
b) cálculo do desvio padrão de uma observação segundo a NBR 13 133, p. 33-35 em ABNT (1994)		
c) calibração		
2 ESTIMATIVAS DAS MENSURAÇÕES		
a) vetor médio amostral		
$\bar{l}^T = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \dots \quad \bar{l}_j \quad \dots \quad \bar{l}_U]$		
b) matriz covariância amostral		
$\text{VECH}^T(\mathbf{S}_t) = [s_1^2 \quad s_{21} \quad \dots \quad s_{11} \quad \dots \quad s_{p1} \quad s_2^2 \quad \dots \quad s_{12} \quad \dots \quad s_{p2} \quad \dots \quad s_1^2 \quad \dots \quad s_{pj} \quad \dots \quad s_p^2]$		
3 ESTIMATIVAS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA A IDENTIFICAÇÃO E A AVIVENTAÇÃO		
variância de uma observação de peso unitário <i>a priori</i> $\sigma_0^2 =$		
variância de uma observação de peso unitário <i>a posteriori</i> $\hat{\sigma}_0^2 =$		
$\text{vech}^T(\mathbf{Q}_x) =$		
$\text{vech}^T(\mathbf{Q}_v) =$		
$\text{diag}(\mathbf{Q}_v \mathbf{P}) =$		
nível de significância $\alpha =$		
qualidade ou poder do teste $1 - \beta =$		
parâmetro de não-centralidade da distribuição normal $\delta_0 =$		

¹⁰ Ver a figura 8.1 que mostra o memorial da caracterização de extremas desta gleba, objeto de aprimoramento.

FIGURA 7.4 – APRIMORAMENTO DO MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS PARA A MATRÍCULA IMOBILIÁRIA EXEMPLIFICADO PARA O CASO REAL: PARCELA 01¹¹

LIVRO N. 2 – REGISTRO GERAL		()º Ofício de Registro de Imóveis de ...
Matrícula (número)	Ficha 1	Data
CARACTERIZAÇÃO DAS ESTREMAS DO IMÓVEL NO SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO OFICIAL		
PARÂMETROS DO ELIPSÓIDE: semi-eixo maior $a = 6\,378\,160\text{m}$; achatamento $f = 1/298,25$		
DENOMINAÇÃO DO IMÓVEL: Parcela 01		
ESTREMA QUE INICIA O PERÍMETRO EM COORDENADAS GEOGRÁFICAS ELIPSÓIDICAS: M27 = $(-23^{\circ}43'39,988\,0''; -50^{\circ}58'42,4212'')$		
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO POR COORDENADAS POLARES ELIPSÓIDICAS (AZIMUTE E COMPRIMENTO DE lf)		
Da estrema M27 segue confrontando com a Parcela 05 com a tríade constituída pelas coordenadas polares elipsóidicas (azimute e comprimento de lf) e estrema: $(180^{\circ}59'29,1''; 182,129\text{m}; \mathbf{M28})$.		
Da estrema M28 segue confrontando com a Parcela 06 com a tríade $(181^{\circ}18'00,6''; 169,712\text{m}; \mathbf{M29})$.		
Da estrema M29 segue confrontando com a Parcela 07 com a tríade $(180^{\circ}44'54,8''; 152,910\text{m}; \mathbf{M15})$.		
Da estrema M15 segue confrontando com o Rio Águas da Serraria com as seguintes tríades: $(297^{\circ}30'24,6''; 109,669\text{m}; \mathbf{24B})$; $(338^{\circ}54'20,1''; 196,519\text{m}; \mathbf{24A})$; $(312^{\circ}44'00,1''; 138,684\text{m}; \mathbf{25A})$; $(311^{\circ}58'50,8''; 187,242\text{m}; \mathbf{M16})$.		
Da estrema M16 segue confrontando com a Parcela 02 com a tríade $(83^{\circ}04'06,1''; 421,810\text{m}; \mathbf{M27})$.		
SUPERFÍCIE DA PARCELA: $S = f(\varphi; \lambda) = 10,553\,2\text{ha}$		

O mesmo procedimento é aplicado para as demais parcelas; e em todos os memoriais são incluídos dados complementares para a interpretação do princípio da especialidade concernente à individualização obrigatória da propriedade imóvel, conforme a figura 7.3.

¹¹ Ver a figura 8.2 que mostra o **memorial da caracterização de estremas** desta parcela, objeto de aprimoramento.

8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O modelo geodésico proposto – sob a ênfase da utilização das coordenadas geográficas elipsóidicas transformadas nas coordenadas polares elipsóidicas que descrevem os lf_s e sob a ênfase da utilização das coordenadas geográficas elipsóidicas com as quais a superfície do prédio é determinada conforme exposto na seção 5.4 e a sua seqüência de cálculo didaticamente exposta na seção 7.3 – demonstrado numericamente, na seção 7, com dados reais e representado, como conteúdo aprimorado quanto à obrigatoriedade da individualização da propriedade fundiária, em uma matrícula imobiliária.

Os pares de coordenadas polares elipsóidicas precedendo a **estrema** e, portanto, formando uma tríade, é o procedimento analítico de expor as coordenadas geográficas elipsóidicas de cada **estrema**, conforme a figura 7.3.

Em decorrência da natureza das observações geodésicas – objeto da Estatística – o modelo requer dados complementares em sua concepção (figura 7.1).

As quantidades geodésicas e estatísticas na composição da matrícula, conforme ilustradas na figura 7.3, constituem o aprimoramento buscado que contribui para a caracterização de imóveis concernentes aos seus lf_s , fornecendo procedimentos que podem ser aplicáveis ao art. 225 da Lei 6 015/1973, segundo o qual:

Os tabeliães, escrivães e juízes farão com que, nas escrituras e nos autos judiciais, as partes indiquem, com precisão, os característicos, as confrontações e as localizações dos imóveis, mencionando os nomes dos confrontantes e, ainda, quando se tratar só de terreno, se esse fica do lado par ou do lado ímpar do logradouro, em que quadra e a que distância métrica da edificação ou da esquina mais próxima, exigindo dos interessados certidão do registro imobiliário.

§ 1º As mesmas minúcias, com relação à caracterização do imóvel, devem constar dos instrumentos particulares apresentados em cartório para o registro.

§ 2º Consideram irregulares para efeito de matrícula, os títulos nos quais a caracterização do imóvel não coincida com a que consta do registro anterior.

O procedimento de interpretação deste artigo proposto na figura 7.1 é exemplificado pelo **memorial da caracterização de extremas** da Gleba Pó de Serra na figura 7.3. Esta exemplificação mostra como o **memorial da caracterização de extremas** pode ser aprimorado em comparação com aqueles que tem sido elaborado. A gleba Pó de Serra e a parcela 01 representadas pela figura 7.2 e as coordenadas geográficas elipsóidicas constantes dos quadros 7.2 e 7.3 têm suas **extremas** caracterizadas com o conteúdo da figura 8.1 e 8.2, respectivamente.

FIGURA 8.1 – MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS DA GLEBA PÓ DE SERRA ELABORADO PELO INCRA¹²

MEMORIAL DESCRITIVO			
LOTE:	GER	ÁREA:	155,894 5 ha
GLEBA:	PROJETO DE ASSENTAMENTO PÓ DE SERRA	PERÍMETRO:	7 286,84 m
MUNICÍPIO:	LONDRINA	UF:	PR
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO			
<p>Partindo do marco M18 de coordenadas geográficas Latitude 23°43'27"S e Longitude 50°58'21"W, cravado à margem de uma estrada; deste, segue pela referida estrada com distância de 1422,41 metros, indo até o SAT 01; deste, segue por linhas secas confrontando com terras de Luís Fernando com os seguintes azimutes e distâncias: 86°52'55" e 390,22 metros, indo até o M01; 162°54'11" e 243,92 metros, indo até o M02; 164°27'12" e 214,64 metros, indo até o M03; 161°05'29" e distância de 142,49 metros, indo até o M04 e 170°34'18" e 262,87 metros, indo até o M05; deste, segue por linha seca confrontando com terras de Teru lochida com azimute de 269°55'47" e distância de 495,79 metros, indo até o M06, cravado à margem de uma estrada; deste, segue pela referida estrada com distância de 1568,81 metros, indo até o M14, cravado à margem do Rio Água de Serraria; deste, segue pelo referido rio no sentido de sua montante com distância de 1329,02 metros, indo até o M16, cravado na barra do rio citado acima com o Córrego da Lasca; deste, segue pelo referido córrego no sentido de sua montante com distância de 412,20 metros, indo até o M17; deste, segue por linhas secas confrontando com terras de Izaldo Aparecido Pedroso com os seguintes azimutes e distâncias: 83°43'12" e 214,66 metros, indo até o SAT02 e 83°27'37" e 590,04 metros, indo até o M18; ponto inicial da descrição deste perímetro.</p>			

FONTE: INCRA (1998a)

FIGURA 8.2 – MEMORIAL DA CARACTERIZAÇÃO DE ESTREMAS DA PARCELA 01 DA GLEBA PÓ DE SERRA ELABORADO PELO INCRA¹³

MEMORIAL DESCRITIVO			
LOTE:	01	ÁREA:	10,251 3 ha
GLEBA:	PROJETO DE ASSENTAMENTO PÓ DE SERRA	PERÍMETRO:	1 559,33 m
MUNICÍPIO:	LONDRINA	UF:	PR
DESCRIÇÃO DO PERÍMETRO			
<p>Partindo do marco M27 de coordenadas geográficas Latitude 23°43'39"S e Longitude 50°58'42"W; deste, segue por linha seca confrontando com o lote 05 com o azimute de 181°00'01" e distância de 182,03 metros, indo até o M28; deste, segue por linha seca confrontando com o lote 06 com o azimute de 181°18'34" e distância de 169,76 metros, indo até o M29; deste, segue por linha seca confrontado com o lote 07 com o azimute de 180°45'23" e distância de 153,06 metros, indo até o M15 cravado à margem do Rio da Serraria; deste, segue pelo referido rio no sentido de sua montante com distância de 632,92 metros, indo até o M16; deste, segue por linha seca confrontando com o lote 02 com azimute 83°04'31" e distância de 421,74 metros, indo até o M27, ponto inicial deste perímetro</p>			

FONTE: INCRA (1998a)

¹² Ver a figura 7.3 que mostra o **memorial da caracterização de extremas** desta gleba aprimorado.

¹³ Ver a figura 7.4 que mostra o **memorial da caracterização de extremas** desta parcela aprimorado.

A interpretação do art. 225 da Lei 6015/1973 nos **memoriais da caracterização de extremas** (e também de entes naturais), consiste no emprego das quantidades geodésicas e estatísticas segundo o modelo da figura 7.3. Estes memoriais, se estiverem em matrícula, tornarão as primitivas – já que os peritos devem se orientar pelo conteúdo dos títulos – disponíveis para as mensurações necessárias para as demarcatórias, divisórias, discriminatórias, entre outras. Na ação divisória, se houver quinhões determináveis *ad mensuram*, é requerido do agrimensor que proceda à divisão geodésica do imóvel (SANTOS, 1996, p. 86).

A sentença em cada uma dessas ações é dependente do laudo de agrimensor que, em parte, é composto pelos memoriais da caracterização de extremas. A perícia geodésica (THEODORO JÚNIOR, 1999, p. 281) é indispensável (CPC, art. 956), pois a sentença de procedência da demarcação – ato da 1ª fase do procedimento demarcatório – tem de determinar o traçado da linha demarcanda (CPC, art. 958). A falta desta diligência acarreta a nulidade da sentença (THEODORO JÚNIOR, 1999, p. 281; SANTOS, 1996, p. 76). Na 2ª fase, as **extremas** são fixadas, os **memoriais da caracterização de extremas e da caracterização de entes naturais** são gerados e tornam parte integrante da sentença homologatória da demarcação (e.g., APIÁI. Comarca. Proc. n. 048/39, fls. 1 259 e 1 260).

O conteúdo da escrituração do Livro n. 2, determinado pelo o art. 176, §1º, II,3 da Lei n. 6 015/1973: “a identificação do imóvel feita, mediante indicação de suas características e confrontações, localização, área e denominação, se rural, ou logradouro e número, se urbano, e sua designação cadastral, se houver”, é dependente da interpretação do art. 225 desta lei e este, por sua vez, é dependente dos procedimentos de mensuração dos lf_s .

Neste sentido o conteúdo da seção 5 desta pesquisa é justificado pelo argumento que entes geométricos podem ser caracterizados por coordenadas de vários sistemas apresentados e podem se tornar lf_s , inclusive com elipsóide de referência diferente. Por isso há a necessidade dos modelos de transformação de coordenadas de suas extremas nas coordenadas geográficas elipsóidicas referenciadas ao Sistema Geodésico oficial assim como modelo de mudança de *Datum* geodésico.

O conteúdo da seção 6 – dependente do conteúdo da seção 4 – que apresenta o procedimento de obtenção das estimativas de qualidade dos dados advindos das mensurações em que se empregou a matriz de dados e o procedimento de análise dos dados advindos do ajustamento de observações geodésicas pelo método dos mínimos quadrados, em que mostra a necessidade de serem dados: a variância de uma observação de peso unitário *a priori* σ_0^2 , a variância de uma observação de peso unitário *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$, $\text{vech}^T(\mathbf{Q}_x)$, $\text{vech}^T(\mathbf{Q}_v)$, $\text{diag}(\mathbf{Q}_v\mathbf{P})$, o nível de significância α , a qualidade ou poder do teste $1-\beta$ e o parâmetro de não-centralidade da distribuição normal δ_0 .

Nas ações discriminatórias encerradas há imóveis declarados devolutos por sentença, os quais tornam objeto de registro. Em virtude disto, as Fazendas Públicas requerem a extração de carta de sentença para fins registrários (e.g., MIRACATU. Comarca. Proc. n. 106/73-B, fls. 1914) em que faz parte o laudo de demarcação. Como para cada imóvel é aberta uma matrícula, deveria constar desta matrícula a **caracterização de estremas** no Sistema Geodésico Brasileiro oficial, conforme proposto na figura 7.1 e exemplificado pelo **memorial da caracterização de estremas** da Gleba Pó de Serra na figura 7.3.

A aviventação de limites apagados a que se refere o art. 959 do CPC depende da interpretação correta do princípio da especialidade; este, por sua vez, é a interpretação do art. 225 da Lei 6 016/73 que depende da caracterização de estremas e de entes naturais. A caracterização de estremas depende, por sua vez, de Sistema Geodésico de Referência.

9 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O objetivo desta pesquisa consistiu em apresentar e analisar fundamentos abrangentes que aprimorem a concepção do modelo geodésico que interprete parte do princípio da especialidade concernente à individualização obrigatória da propriedade fundiária por suas **estremas**, no espaço geométrico, sob o emprego de coordenadas geográficas elipsóidicas e a transformação destas em coordenadas polares elipsóidicas.

O ponto de partida da atenção foi a exposição, na seção 1.4, do argumento que a caracterização de **estremas** vincula a individualização obrigatória de propriedade fundiária que está contido no princípio da especialidade do registro imobiliário à Geodésia, pois o problema do posicionamento de uma linha na superfície física da Terra – um dos objetos da Geodésia – também é um dos objetos, e.g., da ação demarcatória (*actio finium regundorum*), da ação divisória (*actio communi dividundo*) – se nesta houver quinhão determinável *ad mensuram* – e da ação discriminatória.

Cada uma destas ações requer um laudo que busca a interpretação do princípio da especialidade do registro imobiliário mediante mensurações geodésicas, consignando-a em memorial da caracterização de **estremas** e a caracterização de entes naturais tidos como definidores de lf_s .

Neste vínculo, os sistemas de coordenadas têm papel destacado e, em particular, o sistema de coordenadas geográficas elipsóidicas e o sistema de coordenadas polares elipsóidicas mediante os quais os lf_s são descritos.

A tese fundamental da investigação resultou da constatação, nos documentos consultados que estão listados no quadro 1.1, que os memoriais da caracterização de **estremas**, em seu conteúdo, podem receber aprimoramento advindos da contribuição dos conceitos da Geodésia concernente à determinabilidade de linhas da superfície física terrestre e dos conceitos de estimativa de qualidade de rede geodésica.

A fim de justificar esta tese, apresentaram-se na seção 2 os fundamentos jurídicos, na seção 3 os fundamentos matemáticos, na seção 4 os fundamentos estatísticos, na seção 5 os fundamentos geodésicos com destaques para os sistemas de coordenadas geodésicas destinadas às medições terrestres e para a

determinação da superfície do polígono elipsóidico e na seção 6 os conceitos de análise de qualidade de rede geodésica.

Como a mudança do nome do confrontante não constitui irregularidade no registro, recomenda-se, em atenção ao princípio da especialidade, sempre quando possível, a substituição do nome pelo número da matrícula do imóvel confrontante.

Recomenda-se ao perito agrimensor que cada gleba, na 2ª fase do procedimento demarcatório, contenha a caracterização das **estremas** no Sistema Geodésico Brasileiro oficial, sempre que possível, conforme proposto na figura 7.1 e exemplificado na figura 7.3 cujos dados complementares para a interpretação do princípio da especialidade só será possível se for adotado como procedimento o conteúdo da seção 6.

Recomenda-se aos juízes que nas ações que dependam de **memorial da caracterização de extremas**, e.g., na ação demarcatória (*actio finium regundorum*), na ação divisória (*actio communi dividundo*) e na ação discriminatória haja como norma a adoção dos procedimentos geodésicos e estatísticos da forma proposta na figura 7.1 e exemplificado na figura 7.3 a fim de que o princípio da especialidade torne interpretado com rigor científico, contribuindo também como procedimento que interpreta o conteúdo do art. 959 do CPC.

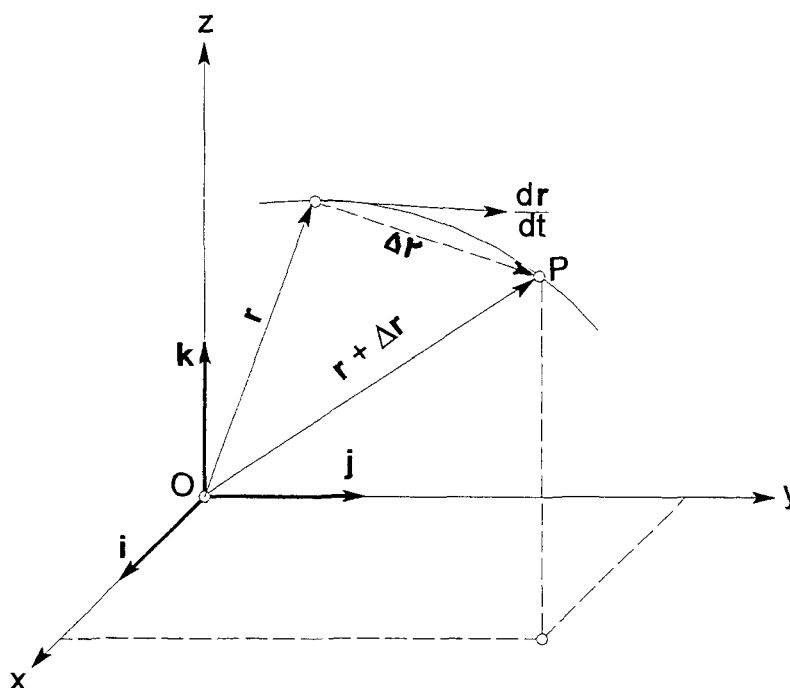
GLOSSÁRIO

Alfabeto grego

A	α	άλφα	alfa	N	ν	νι	ni
B	β	βήτα	beta	Ξ	ξ	ξι	csi
Γ	γ	γάμμα	gama	Ο	\omicron	όμικρον	ômicron
Δ	δ	δέλτα	delta	Π	π	πι	pi
E	ϵ	έψιλον	épsilon	P	ρ	ρο	ro
Z	ζ	ζήτα	zeta	Σ	σ, ς	σίγμα	sigma
H	η	ήτα	eta	T	τ	ταυ	tau
Θ	θ, ϑ	θήτα	teta	Υ	υ	ύψιλον	ípsilon
I	ι	ιώτα	ióta	Φ	ϕ	φι	fi
K	κ	κάπα	capa	X	χ	χι	qui
Λ	λ	λάμδα	lambda	Ψ	ψ	ψι	psi
M	μ	μι	mi	Ω	ω	ωμέγα	oméga

Derivada de uma função vetorial de variável escalar. Um vetor variável \mathbf{a} é denominado função vetorial ou função-vetor da variável escalar t , se para cada valor de t corresponder um valor do vetor \mathbf{a} . Esta função-vetor é denotada pela expressão $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$ ou, em componentes, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ em que $a_x = f_x$, $a_y = f_y$ e $a_z = f_z$. A figura G1 mostra que o vetor variável na forma de raio vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ do ponto P descreve a curva hodógrafa da função vetorial ao variar t .

FIGURA G1 – DERIVADA DE FUNÇÃO VETORIAL DE VARIÁVEL ESCALAR



A derivada da função-vetor $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$ em relação é uma nova função de t definida

pelo limite $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$ (BRONSTEIN e SEMENDIAEV, 1984, p. 719).

A derivada do raio vetor $\frac{dr}{dt}$ é o vetor tangente à hodógrafa no ponto. As regras das derivadas para vetor são :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \pm \mathbf{c} \pm \dots) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{b}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{c}}{dt} \pm \dots;$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0}, \text{ se } \mathbf{a} \text{ for vetor de constantes;}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Equação. Denomina-se equação à igualdade que somente é válida para certos valores definidos.

Expressão algébrica. Denomina-se expressão algébrica à coleção de quantidades algébricas (números ou letras conectados pelos sinais de operação +, -, $\sqrt{\quad}$, dentre outros) com parênteses, colchetes e chaves, indicando a sucessão das operações.

Expressão analítica do erro de uma função. Seja a função $w = f(x, y, z)$. Se dx , dy e dz são os erros das observações x , y e z , o erro dw é dado por $dw = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$.

Formas da representação analítica de uma curva plana. As curvas planas podem ser representadas em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares (BRONSTEIN et al., 1999, p. 223): a) representação em coordenadas cartesianas pela forma implícita: $f(x, y) = 0$; pela forma explícita: $y = f(x, y)$; pela forma paramétrica: $x = x(t)$, $y = y(t)$; b) pela representação em coordenadas polares $r = f(\theta)$.

Formas da representação analítica de uma função matemática. As funções matemáticas de uma variável ou de várias variáveis podem ser escritas de modos diferentes (BRONSTEIN et al., 1999, p. 120-121): a) representação explícita: uma função é representada ou definida na forma explícita, se ela for expressa pelas u variáveis independentes, as quais são denominadas de argumentos $y = f(x_1, x_2, \dots, x_u)$; b) representação implícita: uma função é representada ou definida na forma implícita, se os argumentos e a função por uma equação do tipo seguinte estão ligados $f(x_1, x_2, \dots, x_u, y) = 0$; c) representação na forma paramétrica: uma função é representada na forma

paramétrica, se os u argumentos e a função forem escritos explicitamente; para uma função de duas variáveis, representa-se $x = \varphi(r,s)$, $y = \psi(r,s)$.

Formas da representação analítica de uma superfície.

- a) forma implícita: $f(x,y,z) = 0$;
- b) forma explícita: $z = f(x,y)$;
- c) forma paramétrica: $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$;
- d) forma vetorial: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ ou $\mathbf{r} = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$.

Fórmulas diferenciais aproximadas. Nos cálculos geodésicos quando o acréscimo a uma função é considerado pequeno, i.e., quando o produto dois a dois pode ser negligenciado (TARDI e LACLAVÈRE, 1951, p. 16), pode-se substituir o acréscimo pela diferencial total. Por exemplo, para a função $w = f(x,y,z)$, em

vez de $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$, emprega-se a relação aproximada:

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z + \dots \text{ termos de ordem superiores.}$$

Função de uma variável. Diz-se que uma quantidade y é uma função de uma quantidade variável x , se para um dado valor de x , a quantidade y assume um valor definido. Escreve-se: $y = f(x)$. A variável y é denominada de variável dependente e a variável x é denominada de variável independente.

Geocentro. Denomina-se geocentro ao ponto médio de massa da Terra (GRAFAREND, 1981, p. 418).

Gleba. (lat. gleba: chão, terreno). Designa o imóvel em relação à sua caracterização fundiária, podendo receber ou não o parcelamento.

Identidade. Denomina-se identidade à igualdade de duas expressões algébricas.

Linearização pela série de Taylor. A estimação das coordenadas são obtidas por funções não-lineares. Considerando a função não-linear de uma única variável independente $y = f(x)$, a expansão em série de Taylor é

$$y = f(x_0) + \frac{dy}{dx} \Big|_{x_0} dx + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x_0} dx^2 + \dots$$

Para uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$ é

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{dz}{dx} \Big|_{x_0, y_0} dx + \frac{dz}{dy} \Big|_{x_0, y_0} dy + \frac{1}{2!} \frac{d^2 z}{dx^2} \Big|_{x_0, y_0} dx^2 + \frac{1}{2!} \frac{d^2 z}{dy^2} \Big|_{x_0, y_0} dy^2 + \dots$$

A generalização da expansão de função multivariada, em que n funções relacionam com u variáveis,

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_u) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_u) \end{bmatrix},$$

com a matriz de derivadas parciais de n linhas e u colunas, chamada matriz jacobiana,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, a forma linearizada é

$$\mathbf{z} = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0} d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0} d\mathbf{y} + \dots$$

O número de colunas das matrizes $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$ e são o número de componentes do vetor \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente; o número de linhas é igual ao número de componentes do vetor \mathbf{z} .

Matriz Hermitiana. Uma matriz simétrica que só contenha elementos reais é hermitiana (BRONSON, 1993, p. 162).

Parcela. Terra que resulta do desmembramento ou de loteamento de gleba.

Quantil. Valor para o qual a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória admite um valor pretendido (DIN, 1984, p. 6) e. g., o quantil q da função de distribuição normal padronizada

$$F(u) = \Pr(y \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad -\infty < u < \infty, \text{ com } y \text{ distribuído segundo } N(0,1)$$

$$\text{é } F(u_q) = q.$$

Teoria matemática dos erros. Quando uma grandeza é medida, cometem-se erros independentemente do equipamento e do operador. A teoria dos erros pretende classificar os possíveis erros que podem acontecer nas medições para estudá-los e, principalmente, evitá-los ou, pelo menos, torná-los tão pequenos que possam ser ignorados. Dessa forma os erros podem ser classificados em grosseiros, sistemáticos e acidentais. Os erros grosseiros são devidos à distração do operador. Os erros sistemáticos podem ser classificados em erro de truncamento, erro de arredondamento e erro nos dados. O erro sistemático pode ser controlado. Dado o número decimal $x = a, a_1 a_2 \dots a_n b$, em que a, a_1, a_2, \dots, a_n e b são algarismos. A supressão do algarismo b dá o número aproximado

$x' = a, a_1 a_2 \dots a_n$, se $b < 5$ ou $x' = a, a_1 a_2 \dots (a_n + 1)$, se $b \geq 5$. Em qualquer dos casos, o erro de arredondamento ε_a é $\varepsilon_a \leq \frac{5}{10^{(n+1)}}$. Os erros nos dados devem-se às próprias medidas, à natureza matemática dos números (e.g.: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$; $e = 2,7182\dots$; $\pi = 3,1416\dots$) e ao modelo matemático empregado. Os erros acidentais são devidos a causas desconhecidas e, conseqüentemente, impossíveis de serem previstos e eliminados.

Erro absoluto e erro relativo. Seja x e x' , respectivamente, o valor exato e o valor aproximado de um número. Chama-se erro absoluto a diferença. $\varepsilon(x) = x - x'$. Se $\varepsilon(x) < 0$, o erro absoluto será por excesso; se $\varepsilon(x) > 0$, o erro absoluto será por falta. O erro absoluto mede a diferença entre dois números, mas não estabelece relação com a grandeza envolvida. A fim de obter essa relação, define-se o erro relativo $\varepsilon_r(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{x - x'}{x}$. O valor exato ou verdadeiro, em todos os procedimentos de medição, é intingível. Isto implica que tanto o erro absoluto como o erro relativo são estabelecidos *a priori* pela unidade de medida da grandeza.

Algarismos significativos. Na medida $1,237 \pm 0,001m$, os algarismos 1, 2 e 3 são corretos, e o algarismo 7 é duvidoso, porque pode ser 6 ou 8. Os algarismos corretos e o duvidoso se chamam algarismos significativos.

Propagação dos erros nas operações elementares. Sejam x' e y' , os valores aproximados dos números exatos x e y , respectivamente, e sejam Δx e Δy os respectivos erros absolutos, i.e., $x' - \Delta x \leq x \leq x' + \Delta x$, $y' - \Delta y \leq y \leq y' + \Delta y$.

Adição. O erro absoluto da soma é a soma dos erros absolutos: $x + y = (x' + y') \pm (\Delta x + \Delta y)$.

Subtração. O erro absoluto da diferença é a soma dos erros absolutos: $x - y = (x' - y') \pm (\Delta x + \Delta y)$.

REFERÊNCIAS

- ABNT. (1994). **NBR 13 133: Execução de levantamento topográfico – procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT.
- AFONSO FRANCISCO, C. (1999). **Do registro de imóveis e seu cancelamento**. São Paulo: Juarez de Oliveira.
- ANDERSON, T. W. (1958). **An introduction to multivariate statistical analysis**. New York: J. Wiley.
- ANDERSON, T. W. (1963). Asymptotic theory for principal component analysis. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 34, p. 122-148.
- ANDRIOTTI, J. L. S. (1997). Análise de componentes principais: fundamentos de uma técnica de análise de dados multivariada aplicável a dados geológicos. **Acta Geológica Leopoldensia**, São Leopoldo, v. 20, n. 44, p. 27-50.
- APIAÍ. Comarca. Ação Discriminatória do 51º Perímetro de Apiaí. Proc. n. 048/39.
- APIAÍ. Comarca. Ação Discriminatória do 18º Perímetro de Apiaí. Proc. n. 224/37.
- ASSUMPÇÃO, C. E. (1996). **Vocabulário agrário**. Curitiba: Open English House.
- BAARDA, W. (1967). **Statistical concepts in Geodesy**. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. New Series, Delft, v. 2, n. 4.
- BAARDA, W. (1968). **A testing procedure for use in geodetic networks**. Netherlands Geodetic Commission. Publications on Geodesy. New Series, Delft, v. 2, n. 5.
- BAIXIANG, L.; MINYI, C. (1993). A problem in the application of the error ellipsoid. **Survey Review**, Bristol, v. 32, n.250, p. 239-243.
- BARANENKOV, G. et al. (1986). **Problemas e exercícios de análise matemática**. 5. ed. Moscou: Mir.
- BATALHA, W. S. C. (1999). **Comentários à Lei de Registros Públicos** 4. ed. Rio de Janeiro: Forense.
- BENGEL, M.; SIMMERDING, F. (2000). **Grundbuch, Grundstück, Grenze: Handbuch zur Grundbuchordnung unter Berücksichtigung katasterrechtlicher Fragen**. 5. erweiterte Auflage. Berlin: Luchterhand.
- BENNING, W. (1983). Tunneldurchschlagsprognosen mittels Pseudostrecken. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 108, n. 6, p. 220-226.

BOLJEN, J. (1991). Die Beurteilung der Nachbarschaftsgenauigkeit geodätischer Netze mit Hilfe der effektiven Eigenwerte. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 116, n. 12, p. 552-560.

BOWRING, B. R. (1985). The accuracy of geodetic latitude and height equations. **Survey Review**, Bristol, v. 28, n. 218, p. 202-206.

BOUROCHE, J-M.; SAPORTA, G.(1982). **Análise de dados**. Rio de Janeiro: Zahar.

BRASIL. Lei n. 601 de 18 de setembro de 1850. Dispõe sobre as terras devolutas do Império, e acerca das que são possuídas por títulos de sesmarias sem preenchimento das condições legais, bem como por simples títulos de posse mansa e pacífica; e determina que, medidas e demarcadas as primeiras, sejam elas cedidas a título oneroso, assim para empresas particulares, como para o estabelecimento de colônias de nacionais e de estrangeiros, autorizado o governo a promover a colonização estrangeira na forma que se declara. In: VASCONCELLOS, J. M. P. (Org.) (1874). **Livro das terras**. 3. ed. Rio de Janeiro: Eduardo & Henrique Laemmert, p. 7-23.

BRASIL. Regulamento de 8 de maio de 1854. dispõe sobre a execução do art. 3, § 2 do Decreto n. 1 318 de 30-1-1854. In: VASCONCELLOS, J. M. P. (Org.) (1874). **Livro das terras**. 3. ed. Rio de Janeiro: Eduardo & Henrique Laemmert, p. 82-108.

BRASIL. Regulamento de 30 de janeiro de 1854 (Decreto n. 1.318). Manda executar a Lei n. 601 de 18 de setembro de 1850. In: VASCONCELLOS, J. M. P. (Org.) (1874). **Livro das terras**. 3. ed. Rio de Janeiro: Eduardo & Henrique Laemmert, p. 24-81.

BRASIL. Lei n. 3 071 de 1º de janeiro de 1916. Institui o Código Civil. In: OLIVEIRA, J. de (Org.) (1996). **Código Civil**. 47. ed. São Paulo: Saraiva.

BRASIL. Lei n. 4 771 de 15 de setembro de 1965. Institui o Novo Código Florestal. In: FARIAS, G. L.; LIMA, M. C. (Comp.) (1990). **Coletânea de legislação ambiental federal e estadual**. Curitiba: Secretaria de Estado do Desenvolvimento Urbano e do Meio Ambiente, Coordenadoria de Estudos e Defesa do Meio Ambiente.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil. Publicada no Diário Oficial da União n. 191-A, de 5 de outubro de 1988. In: OLIVEIRA, J. de (Org.) (1996). **Código Civil**. 47. ed. São Paulo: Saraiva.

BRASIL. Lei n. 5 869 de 11 de janeiro de 1973. Institui o Código de Processo Civil. In: OLIVEIRA, J. de (Org.) (1992). **Código de Processo Civil**. 23. ed. São Paulo: Saraiva.

BRASIL. Lei n. 6 015 de 31 de dezembro de 1973. Dispõe sobre os Registros Públicos e dá outras providências. In: BATALHA, W. S. C. (Org.) (1999). **Comentários à Lei de Registros Públicos** 4. ed. Rio de Janeiro: Forense.

BRONSON, R. (1993). **Matrizes**. Lisboa: McGraw-Hill.

BRONSTEIN, I.; SEMENDIAEV, K. (1984). **Manual de matemática para engenheiros e estudantes**. 2. ed. Tradução do original russo. Moscovo: Mir.

BRONSTEIN, I. N. et al. (1999). **Taschenbuch der Mathematik**. 4. überarbeitete und erweiterte Auflage. Frankfurt am Main: Harri Deutsch.

CARVALHO, A. (1997). **Registro de imóveis**. 4. ed. Rio de Janeiro: Forense.

CHATFIELD, C.; COLLINS, A. J. (1980). **Introduction to multivariate analysis**. (reimpressão de 1996). London: Chapman & Hall.

COSTA NETO, P. L. O. (1977). **Estatística**. 17. reimpressão. São Paulo: E. Blücher.

CROSILLA, F. (1986). Improving the outlier separability in geodetic networks according to the generalized orthomax criterion. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 11, n. 1, p. 38-47.

CROSILLA, F.; MARCHESINI, C. (1983). Geodetic Network optimization for the detection of crustal movements using a mekometer. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 42, n. 3, p. 301-315.

DANIELSEN, J. (1989). The area under the geodesic. **Survey Review**, Bristol, v. 30, n. 232, p. 61-66.

DAVIS, J. C. (1973). **Statistical and data analysis in Geology**. New York: J. Wiley.

DEREN, L. (1986). Trennbarkeit und Zuverlässigkeit bei zwei verschiedenen Alternativhypothesen im Gauß-Markoff-Modell. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 111, n. 3, p. 114-128.

DIN. (1984). **DIN 18 709**: Teil 4: Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen - Ausgleichsrechnung und Statistik, Berlin.

DIN. (1987). **DIN 55 350**: Teil 13: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnisse, Berlin.

DIN. (1995). **DIN 18 709**: Teil 1: Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen, Berlin.

DUPRAZ, H.; NIEMEIER, W. (1979). Un critère pour l'analyse des réseaux géodésiques de controle. **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik / Mensuration, Photogrammetrie, Génie rural**, Baden-Dätwill, n. 4, p. 70-76.

DUPRAZ, H.; NIEMEIER, W. (1981). Beurteilungskriterien für geodätischer Netze. In: INTERNATIONALEN SYMPOSIUM ÜBER DEFORMATIONSMESSUNGEN MIT GEODÄTISCHEN METHODEN, 2., 1978, Bonn. **Beiträge zum**. Stuttgart: K. Wittwer, p. 386-400.

- E. PLA, L. (1986). **Analisis multivariado**: método de componentes principales. Washington: The General Secretariat of the Organization of American States.
- FALCÃO, I. M. (1995). **Direito agrário brasileiro**: doutrina jurisprudência, legislação, prática. São Paulo: Edipro.
- FISHER, I. (1973). The basic framework of the south american datum of 1969. In: PAN AMERICAN CONSULTATION ON CARTOGRAPHY, 12., Panama. **Presented paper**. Panama: Pan American Institute of Geography and History, p. 1-18.
- FÖRSTNER, W. (1979). Das Programm TRINA zur Ausgleichung und Gütebeurteilung geodätischer Lagenetze. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 104, n. 2, p. 61-72.
- FÖRSTNER, W. (1985). **The reliability of block triangulation**. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, v. 51, n. 6, p. 1137-1149.
- GRAFAREND, E. W. (1981). Die Beobachtungsgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie im Geometrie- und Schwereraum. Ein Beitrag zur operationellen Geodäsie. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 106, n. 8, p. 411-429.
- GRAFAREND, E. W.; KRUMM, F.; OKEKE, F. (1995). Curvilinear geodetic datum transformations. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 120, n. 7, p. 334-350.
- GRIMM-PITZINGER, A.; HANKE, K. (1988). Zur äußeren Zuverlässigkeit in ingenieurgeodätischen Netzen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 113, n. 3, p. 134-137.
- GUGLIELMI, V. J. (1996). **As terras devolutas e seu registro**. São Paulo: Instituto de Terras do Estado de São Paulo. Série Palestras, v.1, n. 1.
- HAHN, VON M.; VAN MIERLO, J. (1986). Statistische Grundlagen für die Analyse von Ausgleichungsergebnissen. In: UNIVERSITÄT KARLSRUHE. Geodätisches Institut. **Beurteilung geodätischer Netze**. Stuttgart, p. 22-46.
- HAHN, VON M. et al. (1989). Ein Verfahren zur Abstimmung der Signifikanzniveaus für allgemeine $F_{m,n}$ -verteilte Teststatistiken. – Teil I: Theorie. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 114, n. 5, p. 234-248.
- HAWKINS, D. M. (1974). The detection of errors in multivariate data using principal components. **Journal of American Statistical Association**, v. 69, n. 346, p. 340-344.
- HECK, B. (1995). **Rechenverfahren und Auswertmodelle der Landsvermessung**. 3. Auf. Heidelberg: Wichmann.

HENDERSON, H. V.; SEARLE, S.R. (1979). Vec and vech operators for matrices, with some uses in Jacobians and multivariate statistics. **Canadian Journal of Statistics**, v. 7, n.1, p. 65-81.

HOOIJBERG, M. (1997). **Practical geodesy: using computers**. Berlin: Springer.

HÖPCKE, W.; KRÜGER, J. (1981). Zur Berechnung der Pseudoinversen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 106, n. 10, p. 543-553.

IGUAPE. Comarca. Ação discriminatória do 9º perímetro de Iguape.

INCRA. (1998a). **Projeto de assentamento Pó de Serra**.

INCRA. (1998b). **Projeto de assentamento Pó de Serra: Planta cadastral 2 785/40**. Escala 1:10 000.

ISO. (1992a). ISO 31: Partie 11: Signes et symboles mathématiques à employer dans les sciences physiques et dans la technique, p. 1-27. In: ISO. **Grandeurs et unités 3**. éd. Genève, 1993, p. 244-270.

ISO. (1992b). ISO 31: Partie 1: Espace et temps, p. 1-11. In: ISO. **Grandeurs et unités 3**. éd. Genève, 1993, p. 29-41.

ITC. (1979). **Terras devolutas: processo discriminatório**. Curitiba: ITC.

ITESP. (1991). **Mapa de localização de perímetros**. Escala 1:250 000. São Paulo: Departamento de Regularização Fundiária.

ITESP. (1998a). **Terra e cidadãos: aspectos da ação de regularização fundiária no Estado de São Paulo**. São Paulo: ITESP. Cadernos ITESP, n. 4.

ITESP. (1998b). **Técnicas e rumos: sistemática aplicada ao cadastro técnico rural e demarcação de assentamentos**. São Paulo: ITESP. Cadernos ITESP, n. 5.

JACKSON, J. E. (1991). **A user's guide to principal componentes**. New York: J. Wiley.

JACKSON, J. E.; MUDHOLKAR, G. S. (1979). Control procedures for residuals associated with principal component analysis. **Technometrics**, v. 21, n. 3, p. 341-349.

JÄGER, R. (1988). Analyse und Optimierung geodätischer Netze nach spektralen Kriterien und mechanische Analogien. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 342.

JÄGER, R.; BILL, R. (1986). Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmasse in Verdichtungsnetzen. In: UNIVERSITÄT KARLSRUHE. Geodätisches Institut. **Beurteilung geodätischer Netze**. Stuttgart, p. 70-98.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. (1998). **Applied multivariate statistical analysis**. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

JORDAN-EGGERT. (1962a). **Jordan's handbook of Geodesy (Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde)**. Washington: Corps of engineers, U. S. Army - Army Map Service. English translation by Martha W. Carta, v. 1.

JORDAN-EGGERT. (1962b). **Jordan's handbook of Geodesy (Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde)**. Washington: Corps of engineers, U. S. Army - Army Map Service. English translation by Martha W. Carta, v. 3.

KALTENBACH, H. (1992). Optimierung geodätischer Netze mit spektralen Zielfunktionen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, 393.

KAPLAN, W. (1972). **Cálculo avançado**. São Paulo: E. Blücher, v. 1.

KHATRI, C. G.; RAO, C. R. (1968). Solution to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions. **Shankhyā: The Indian Journal of Statistics**, v. 30A, p. 167-180.

KENDALL, M.; STUART, A.; ORD, J. K. (1983). **The advanced theory of Statistics**. 4th ed. London: Charles Griffin, v. 3: design and analysis, and time-series.

KLEIN, U. (1997). Analyse und Vergleich unterschiedlicher Modelle der dreidimensionalen Geodäsie. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 479.

KOCH, K. R. (1980). **Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen**. Bonn: Dümmler.

KOCH, K. R.; POPE, A. J. (1969). Least squares adjustment with zero variances. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 94, n. 10, p. 390-393.

KORTH, W. (1998). Bestimmung von Oberflächengeometrie, Punktbewegungen und Geoid in einer Region der Antarktis. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 505.

KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. ; JOHNSON, N. L. (2000). **Continuous multivariate distributions**. 2nd ed. New York: J. Wiley, v. 1: models and applications.

KLOTZ, J. (1991). Eine analytische Lösung kanonischer Gleichungen der geodätischer Linie zur transformation ellipsoidischer Flächenkoordinaten. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 385.

KRAKIWSKY, E. J.; THOMSON, D. B. (1978). **Mathematical models for horizontal geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Lecture notes, n. 48.

KRÜGER, J. (1980). Matrizenalgebra. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 3-23.

KUANG, S. (1996). **Geodetic network analysis and optimal design: concepts and applications**. Chelsea: Ann Arbor Press.

KUNTZ, E. (1990). **Kartennetzentwurfslehre: Grundlagen und Anwendungen**. 2. Auf. Karlsruhe: Wichmann.

LEONHARD, T.; NIEMEIER, W. (1980). **Diagnosis of Trans-Canada-Levelling nets by principal components analysis**. In: Proceedings Second International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Vertical Geodetic Networks Ottawa, May 26-30, p. 485-503.

MAIA, A. S. (1982). **Curso de direito agrário: discriminação de terras**. Brasília: Fundação Petrônio Portella.

MARDIA, K. V. (1977). **Mahalanobis distances and angles**. In: 4th International Symposium on Multivariate Analysis, Amsterdam: North-Holland, p. 495-511.

MARDIA, K. V.; KENT, J. T.; BIBBY, J. M. (1982). **Multivariate analysis**. 3th printing. London: Academic Press.

MARQUES, J. M. (1994). **O método da análise de componentes principais na detecção e identificação de outliers múltiplos em fototriangulação**. Curitiba, 1994. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) - Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.

MARSHALL, R. A. (1989). **Network design and optimization in close range photogrammetry**. Kensington: School of Surveying, University of New South Wales. UNISURV, Report S-36.

MATHAI, A. M.; PROVOST, S. B. (1992). **Quadratic forms in random variables: theory and applications**. New York: Dekker.

MEIRELLES, H. L. (1996). **Direito de construir**. 7. ed. São Paulo: Malheiros.

MEIRELLES, H. L. (1997). **Direito municipal brasileiro**. 9. ed. São Paulo: Malheiros.

MEYER, P. L. (1983). **Probabilidade: aplicações à estatística**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. (1981). **Analysis and adjustment of survey measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold.

MIRACATU. Comarca. Ação discriminatória do 13º perímetro de Iguape. Proc. n. 106/73-B.

MITTERMAYER, E. (1998). **Die Kugel: Geometrie, Kinematik, Kraft**. 2. erweiterte Auflage. Berlin: Wissenschaft und Technik.

MORRISON, D. F. (1976). **Multivariate statistical methods**. 2nd Tokyo: McGraw-Hill.

MÜRLE, M.; BILL, R. (1984). Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 2, p. 45-62.

MÜLLER, H. (1986). Zur Berücksichtigung der Zuverlässigkeit bei der Gewichtsoptimierung geodätische Netze. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 111, n. 4, p. 157-169.

NIEMEIER, W. (1981). Statistical tests for detecting movements in repeatedly measured geodetic networks. **Tectonophysics**, Amsterdam, v. 71, p. 335-351.

NIEMEIER, W. (1985a). Netzqualität und Optimierung. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 153-224.

NIEMEIER, W. (1985b). Anlage von Überwachungsnetzen. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 527-558.

NIEMEIER, W.; HOLLMANN, R. (1984). **Hauptkomponenten- und Sensitivitätsanalyse geodätischer Netze aufgezeigt am Überwachungsnetz "Varna"**. In: Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, n. 133.

NOBLE, B.; DANIEL, J. W. (1986). **Álgebra linear aplicada**. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil.

ORDRE DES GÉOMÈTRES-EXPERTS (1988). **Guide du Bornage**. Paris: Publi-Topex.

ORLANDI NETO, N. (1997). **Retificação do registro de imóveis**. São Paulo: Oliveira Mendes.

PELZER, H. (1980a). Fehlerlehre und Statistik. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 25-77.

PELZER, H. (1980b). Beurteilung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit geodätischer Netze. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 273-304.

PELZER, H. (1980c). Some criteria for accuracy and the reliability of networks. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, n. 252, p. 55-67.

PELZER, H. (1985a). Grundlagen der mathematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 3-120.

PELZER, H. (1985b). Lokale dreidimensionale Netze. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 489-505.

PETRAHN, von G. (2000). **Taschenbuch Vermessung**: Grundlagen der Vermessungstechnik. 2. Auf. Berlin: Cornelsen.

PIEROZZI, M. (1989). Alcune considerazioni sulla trasformazione dal sistema WGS 84 ad un sistema geodetico locale. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 48, n. 1, p. 45-55.

PRESS, S. J. (1982). **Applied multivariate analysis**: using bayesian and frequentist methods of inference. 2nd ed. Malabar: Robert E. Krieger.

PROCHÁZKA, E. (1966). Die Verschiebungsellipse und ihre Beziehungen zur Fehlerellipse und Fehlerkurve. **Studia Geophysica et Geodaetica**, v. 10, n. 2, p. 137-146.

RAINSFORD, H. F. (1955). Long geodesics on the ellipsoid. **Bulletin Géodésique**, v. 37, p. 12-22

REISSMANN, G. (1980). **Die Ausgleichsrechnung**: Grundlagen und Anwendungen in der Geodäsie. 5. Auflage. Berlin: Verlag für Bauwesen.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; A. TREJO, C. (1968). **Análisis matemático: cálculo infinitesimal de varias variables**: aplicaciones. 7. ed. Buenos Aires: Kapelusz, v. 2.

SALER, H. (1995). Erweiterte Modellbildung zur Netzausgleichung für die deformationsanalyse dargestellt am Beispiel der Geotraverse Venezolanische Anden. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 447.

SANTOS, E. F. (1986). **Comentários ao Código de Processo Civil**. 2. ed. Rio de Janeiro: Forense, v. 6 (arts. 890 – 1.102).

SANTOS, E. F. (1996). **Manual de direito processual civil**. 4. ed. São Paulo: Saraiva, v. 3.

SCHÖDLBAUER, A. (2000). **Geodätische Astronomie: Grundlagen und Konzepte**. Berlin: W. de Gruyter.

SCHEFFÉ, H. (1959). **The analysis of variance**. New York: J. Wiley.

SCHMIDT, H. (1997). Was ist Genauigkeit? – Zum Einfluss systematischer Abweichung auf Mess- und Ausgleichungsergebnisse –. **Vermessungswesen und Raumordnung**. Bonn, v. 59, n. 4, p. 212-228.

SCHMIDT, H. (1999). Lösung der geodätischen Hauptaufgaben auf dem Rotationsellipsoid mittels numerischer Integration. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 124, n. 4, p. 221-128.

SIMMONS, G. F. (1988). **Cálculo com geometria analítica**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, v. 2.

SODANO, E. M. (1958). A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics. **Bulletin Géodésique**, n. 48, p. 13-25.

SODANO, E. M. (1965). General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems. **Bulletin Géodésique**, n. 75, p. 69-89.

STRANG, G.; BORRE, K. (1997). **Linear algebra, Geodesy and GPS**. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.

SURACE, L. (1995). Analisi delle precisioni della rete geodetica fondamentale nel sistema IGM 83. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 54, n. 2, p. 177-208.

SWENSSON, W. C. (1991). **Manual de registro de imóveis**. São Paulo: Saraiva.

TARDI, P.; LACLAVÈRE, G. (1951). **Traité de Géodésie**. Tome I: Triangulations, fascicule I: Les fondements mathématiques de la Géodésie, opérations sur les terrain. Paris: Gauthier-Villars.

TERRÉ, F.; SIMLER, P. (1998). **Droit civil: les biens**. 5^e. Paris: Dalloz.

THEODORO JÚNIOR, H. (1999). **Terras particulares: demarcação, divisão, tapumes**. 4. ed. São Paulo: Saraiva.

TORGE, W. (1980). Drei- und zweidimensionale Modellbildung. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 113-130.

TORGE, W. (1985). Dreidimensionale Netze. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 313-333.

TORGE, W. (1991). **Geodesy**. 2.nd ed. Berlin: de Gruyter.

VANÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. J. (1986). **Geodesy: the concepts**. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V.

WANG, S.-G.; CHOW, S.-C. (1994). **Advanced linear models: theory and applications**. New York: M. Dekker.

WELLS, D. E. (1971). **Matrices**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Lecture Notes, n. 15.

WELSCH, W. (1980). Numerische Untersuchungen zur Signifikanz- und Sensitivitätsanalyse von Überwachungsnetzen. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 385-398.

WENDERLEIN, W. (1988). Zum Begriff Genauigkeit in der Geodäsie. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 95, n. 4, p. 147-148.

WELSCH, W.; HEUNECKE, O.; KUHLMANN, H. (2000). **Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen**. Heidelberg: Wichmann. (Handbuch Ingenieurgeodäsie).

WENDT, J. (1999). Zur Geokinematik im sächsischen Vogtland. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 517.

WITTE, B.; SCHMIDT, H. (2000). **Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen**. 4.,neubearbeitete Auflage. Stuttgart: K. Wittwer.

WITTKÉ, H.; MECKENSTOCK, H. J. (1998). **Geodätische Rechen-Übungen**. Bonn: Dümmler.

WOLF, H. (1983a). Erdmessung und Landesvermessung in ihren heutigen Wechselbeziehungen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 108, n. 1, p. 1-7.

WOLFRUM, O. (1995). Differential relations in the system of geographical coordinates. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 20, p. 413-420.

ZAKATOV, P. S. (1997). **Curso de Geodesia superior**. Tradução do original russo de 1976. Madrid: Rubiños-1860.

ZHANG, Z.; LI, X. (1990). A new optimization method for monitoring networks based on the sensitivity criterion. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 115, n. 6, p. 247-255.

ZURMÜHL, R. (1950). **Matrizen: eine Darstellung für Ingenieure**. Berlin: Springer.

DOCUMENTOS CONSULTADOS

- ABD-ELMOTAAL, H.; EL-TOKHEY, M. (1997). The role of the geoid in the coordinate transforation. **Survey Review**, Bristol, v. 34, n. 263, p. 31-40.
- ABNT. (1998). **NBR 14 166: Rede de referência cadastral municipal – procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT.
- ACKERMANN, F. (1981). Zuverlässigkeit photogrammetrischer Blöcke. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 106, n. 8, p. 401-411.
- ACKERMANN, F. (1982). Reliability and gross error detection in photogrammetric blocks. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, n. 258/5, p. 49-67.
- ADUOL, F. W. O. (1989). Integrierte geodätische Netzanalyse mit stochastischer Vorinformation über Schwerefeld und Referenzellipsoid. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 351.
- ADUOL, F. W. O. (1997). A model for a four-dimentinal regional geodesic reference datum. **Survey Review**, Bristol, v. 34, n. 264, p. 91-100.
- ALMEIDA, G. (1997). **Sistema Internacional de Unidades (SI): grandezas e unidades físicas - terminologia, símbolos e recomendações**. 2. ed. Lisboa: Plátano.
- ARINGER, K.(1994). Geodätische Hauptaufgaben auf Flächen in kartesischen Koordinaten. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 421.
- ASSIS, J. (1978). **Ação discriminatória**. Rio de Janeiro: Forense.
- AUGATH, W. (1982). Accuracy and reliability measures concerning design and qualification of densification networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 51-63.
- AUGATH, W. (1985a). Lagenetze. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 373-431.
- AUGATH, W. (1985b). Höhenetze. In: Pelzer, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 433-456.
- BAESCHLIN, C. F. (1948). **Lehrbuch der Geodäsie**. Zürich: Orell Füssli.
- BÄHR, H-G.(1972). Eine Abschätzung bei der Fehlerfortpflanzung. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 97, n.9, p. 393-396.
- BAILLY, A. (1950). **Dictionaire Grec-Français**. Paris: Hachette.

BALCERZAK, J. (1997). Ellipsoid surface geodesic co-ordinates transfer trigonometric series by means of the Bessel method. **Geodezja I Kartografia**, Varsóvia, v. 46, n. 2, p.133-148.

BARBARELLA, M.; GATTI, M. (1993). Note sulla trasformazione da sistema geocentrico a sistema ellissoidico. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 52, n. 2, p. 109-132.

BAUMANN, E. (1972). Die Anwendung statistischer Methoden bei der Untersuchung geodätischer Netze. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 175.

BELUCH, J. (1997). A generalized method for determination of point displacements in control networks, based on the modified method of observation differences. **Geodezja I Kartografia**, Varsóvia, v. 46, n. 2, p. 149-162.

BENZAO, T.; SHAORONG, Z. (1995). Optimal design of monitoring networks with prior deformation information. **Survey Review**, Bristol, v. 33, n. 258, p. 231-246.

BERBERAN, A. (1995). Multiple outlier detection. A real case study. **Survey Review**, Bristol, v. 33, n. 255, p. 41-49.

BERBERAN, A. (1992). Outlier detection and heterogeneous observations: a simulation case study. **Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying**, v. 56, p. 49-61.

BETHGE, F. (1997). Genauigkeit geometrischer Größen aus Vektordaten. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 473.

BIEGLER-KÖNIG, F. W. (1981). A Newton iteration process for inverse eigenvalue problems. **Numerische Mathematik**, n. 37, p. 349-354.

BILL, R. (1984a). Eine Strategie zur Ausgleichung und Analyse von Verdichtungsnetzen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 295.

BILL, R. (1984b). Zur Qualität geodätischer Überwachungsnetze. In: **INTERNATIONALER KURS FÜR INGENIEURVERMESSUNG**, 9., 1984, **Beiträge zum**. Graz, B 9/1 - B 9/11.

BIRZULIS, E. I. (1999). Land surveying in Latvia. **The Australian Surveyor**, Sydney, v. 44, n. 1, p. 44-45.

BLAHA, G. (1971). Inner adjustment constraints with emphasis on range observations. **Reports of the Department of Geodetic Science**, Columbus, n. 148.

BLAHA, G. (1973). Étude sur l'exactitude des polygonaux régulières en fonction de la précision des observations. **The Canadian Surveyor. Le Géomètre Canadien**, v. 27, n. 1, p. 10-22.

BLEICH, P.; ILLNER, M. (1989). Strenge Lösung der räumlichen Koordinatentransformation durch iterative Berechnung. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 96, n. 4, p. 133-144.

BOLDRINI, J.L. et al. (1978). **Álgebra linear**. 3.ed. São Paulo: Harper & Row.

BOLJEN, J. (1990). Aufbau des Koordinatenkatasters durch die Einrechnung vorhandener Unterlagen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 115, n. 4, p. 137-145.

BOWRING, B. R. (1984). The direct and inverse solutions for the great elliptic line on the reference ellipsoid. **Bulletin Géodésique**, Paris, v. 58, p. 101-108.

BROWN, C. M.; ROBILLARD, W. G.; WILSON, D. A. (1995). **Brown's boundary control and legal principles**. 4th ed. New York: J. Wiley.

CASPARY, W.; SCHWINTZER, P. (1981). Bestimmung von Einzelpunktbewegungen und von Relativbewegungen zweier Netzteile in geodätischen Deformationsnetzen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 106, n. 6, p. 277-288.

CHEN, J. Y. (1980). On the geodetic problem of long geodesics in two different projections. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 105, n. 6, p. 256-271.

CHEN, Y.-Q.; CHZARNOWSKI, A.; SECORD, J. M. (1990): A strategy for the analysis of the stability of reference points in deformations surveys. **CISM Journal ACSGC**, v. 44, n. 2, p. 141-149.

CHEN, Y.-Q.; WANG, J.-L. (1996). Reliability measures for correlated observations. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 121, n. 5, p. 211-219.

CORREGEDORIA GERAL DA JUSTIÇA (ESTADO DO PARANÁ). Provimento n. 26 de 30 de agosto de 1999. 1. Aprovar a revisão e atualização do Código de Normas da Corregedoria Geral da Justiça, em anexo, que regula o exercício da função correicional e estabelece as normas de serviço para o foro judicial e extrajudicial. 2. Estabelecer que todas as alterações futuras do Código de Normas deverão ser efetivadas através de Provimentos, os quais serão incorporados oportunamente, visando preservar a sistematização, mantida tanto quanto possível a numeração original. 3. Revogar os atos normativos em vigor e, em especial, os Provimentos n. 7/96, 8/96, 9, 10/96, 11, 12/97, 13/97, 1/98 (Emenda 14), 2/98 (Emenda 15), 3/98 (Emenda 16), 4/98 (Emenda 17), 1/99 (Emenda 18), 2/99 (Emenda 19), 3/99 (Emenda 20), 4/99 (Emenda 21), 5/99 (Emenda 22), 6/99 (Emenda 23) e 7/99 (Emenda 24). Corregedor-Geral da Justiça: OSIRIS FONTOURA. **Diário da Justiça**, Curitiba, 30 ago. 1999. Capítulo 16 – REGISTRO DE IMÓVEIS, p. 182-192.

CROCETTO, N.; RUSSO, P. (1996). Deflection of the vertical and refraction in threedimensional adjustment of terrestrial networks. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 70, p. 681-695.

CROSILLA, F. (1982). A criterion matrix for the second order design of control networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 143-157.

CROSS, P. A.; PRICE, D. R. (1985). A strategy for the distinction between single and multiple e gross errors in geodetic networks. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 10, n. 3, p. 172-178.

DEL FRATE, R.; LA CAVA, F. (1985). Transformazione fra due sistemi di coordinate geografiche. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 44, n. 3, p. 217-236.

DEREN, L.; YIONGQIAN, Z. (1991). Optimization and design of geodetic networks in consideration of accuracy and reliability. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 8, p. 27-33.

DING, X.; COLEMAN, R. (1996). Sensitivity analysis in Gaus-Markov models. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 70, n. 8, p. 480-488.

EHLERT, D. (1983). Die Bessel-Helmertsche Lösung der beiden geodätischen Hauptaufgaben. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 108, n. 11, p. 495-500.

EL-HAKIM, S. F. (1981). A pratical study of gross-error detection in bundle adjustment. **The Canadian Surveyor**, v. 35, n. 4, p. 373-386.

EL-HAKIM, S. F. (1982). **Data snooping with weighted observations**. International Society for Photogrammetry and Remote Sensing-Comission III- International Archives of Photogrammetry - III. Proceedings of the Symposium Mathematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control.Heilsinki University of Technology, Otaniemi, Finland, june 7-11, v. 24:126-133.

ESTADOS UNIDOS. Department of Commerce. Coast and Geodetic Survey (1948). **Definitions of terms used in geodetic and other surveys**. Washington DC.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DES GÉOMÈTRES. **Dictionaire Multilingue de la FIG**. Amsterdam: Argus.

FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 51-63.

FÖRSTNER, W. (1980). The theoretical reliability of photogrammetric coordinates. In: CONGRESS OF THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR PHOTOGRAMMETRY, 14., 1980, Hamburg. **Presented paper**. Hamburg: Commission III, v. 23, pt. 3, p. 223-235.

FÖRSTNER, W. (1983). Reliability and discernability of extended Gauss-Markov models. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série A, n.98, p. 79-99.

FRIEDLAND, S.; NOCEDAL, J.; OVERTON, M. L. (1987). The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems. **Siam J. Numerical Anal.**, v. 24, n. 3, p. 635-667.

FUBARA, D. M. J. (1973). Geodetic numerical and statistical analysis of data. **Bulletin Géodésique**, n. 108, p. 157-185.

GEMAEL, C. (1994). **Introdução ao ajustamento de observações**: aplicações geodésicas. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

GLARE, P. G. W. (Ed.) (1996). **Oxford latin dictionary**. Oxford: Clarendon Press.

GONZAGA, V. (1995). **Divisão & demarcação de terras**: doutrina e processo. Campinas: Julex.

GRAFAREND, E. (1972). Genauigkeitsmasse geodätischer Netze. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série A, n. 73.

GRAFAREND, E. (1974). Optimization of geodetic networks. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 33, n. 4, p. 351-406.

GRAFAREND, E. W. et al. (1979). **Optimierung geodätischer Messoperationen**. Karlsruhe: Wichmann.

GRAFAREND, E. W. (1987). Der Einfluß der Lotrichtung auf lokale geodätische Netze. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 112, n. 8, p. 413-424.

GRAFAREND, E.; HARLAND, P. (1973). Optimales Design geodätischer Netze I. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série A, n. 74.

GRAFAREND, E. W.; SCHAFFRIN, B. (1979). Kriterion-Matrizen I: zweidimensionale homogene und isotrope geodätische Netze. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 104, n. 4, p. 133-149.

GUIDE pour l'expression de l'incertitude de mesure (1995). Genève: Organisation internationale de normalisation, 105 p.

HADELER, K. P. (1968). Ein Inverse Eigenwertproblem. **Linear Algebra and Its Applications**, n.1, p. 83-101.

HAHN, M.; JÄGER, R. (1987). Zuverlässigkeitbeschreibung bei der partitionierung von Netzen. **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik / Mensuration, Photogrammetrie, Génie rural**, Baden-Dätwill, n. 3, p. 102-105.

HECK, B.(1986). Sensitivitätsanalyse geodätischer Deformationsnetze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 93, n. 5, p. 169-181.

HEIKKINEN, M. (1982). Geschlossene Formeln zur Berechnung räumlicher geodätischer Koordinaten aus rechtwinkligen Koodinaten. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 107, n. 5, p. 207-211.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. (1967). **Physical Geodesy**. San Francisco: W. H. Freeman.

HEISSLER, R. (1989). Einrichtung eines Liegenschaftskatasters in Paraná, Brasilien. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 114, n. 7/8, p. 398-402.

ISO (1992). ISO 31: Partie 11: Signes et symboles mathématiques à employer dans les sciences physiques et dans la technique. In: _____. **Grandeurs et unités** 3. éd. Genève, 1993, p. 244-270.

HEITZ, S. (1988). **Coordinates in Geodesy**. Berlin: Springer.

HEKIMOGLU, S. (1995). Generalized iterative solution for geodetic coordinates from cartesian coordinates. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 54, n. 2, p. 109-120.

HELENE, O; TSAI, S. P.; TEIXEIRA, R. R. P. (1990). **O que é uma medida?** São Paulo: Instituto de Física da Universidade de São Paulo, p. 1-17.

HENNECKE, F.; MÜLLER, G.; WERNER, H. (Hrsg.) (1994). **Handbuch Ingenieurvermessung**. Heidelberg: Wichmann. v. 1, Grundlagen.

HEUS, H. (1982a). Data snooping in control networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 211-224.

HEUS, H. (1982b). Quality related problems of densification networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 225-237.

HILDEBRANDT, H. (1962). Die Lösung der Geodätischen Hauptaufgabe auf dem Bruns'schen Niveausphäroid mit Hilfe der Legendre'schen Reihen. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 87, n. 8, p. 299-306.

HOPPE, H.; KATENBACH, H. (1989). Gewichtsoptimierung angeschlossener geodätischer Netze. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série A, n. 105.

HRARDILEK, H. (1982). Horizontal and vertical survey control by three-dimensional triangulation. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 239-244.

HUAXUE, T.; YAN, J. (1990). Die dynamische Optimierung mehrerer Qualitätskriterien in Überwachungsnetzen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 97, n. 11-12, p. 412-419.

ILLNER, I. (1985). Datumsfestlegung in freien Netzen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 309.

JÄGER, R.; KALTENBACH, H. (1990). Spectral analysis and optimization of geodetic networks based on eigenvalues and eigenfunctions. **Manuscripta Geodaetica**, Berlin, v. 15, n. 5, p. 302-311.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. ; (1994). **Continuous univariate distributions**. 2nd ed. New York: J. Wiley, v. 1

JONES, P. B. (1970). The notion of a permissible misclosure in traversing. **The Australian Surveyor**, Sydney, v. 23, n. 3, p. 184-207.

KALTENBACH, H.; VAN MIERLO, J. (1988). Fehler dritter Art bei der Deformationsanalyse geodätischer Lagenetze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 95, n. 1, p. 31-41.

KAVOURAS, M. (1982). **On the detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks**. Fredericton: University of New Brunswick, Department of Surveying Engineering. Technical Report, n. 87.

KENDALL, M.; BUCKLAND, W. R. (1971). **A dictionary of statistical terms**. 3. ed. The International Statistical Institute.

KILPELÄ, E.; HEIKKILÄ, J.; INKILÄ, K. (1982). **Some results of gross error detection tests in relative orientation and scale transfer**. International Society for Photogrammetry and Remote Sensing - Commission III - International Archives of Photogrammetry - III. Proceedings of the Symposium Mathematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control. Helsinki University of Technology, Otaniemi, Finland, June 7-11, v. 24, p. 9-11.

KISTLER, E. (1994). Konzeptstudie für die Berechnungsarbeiten bei der Erneuerung geodätischer Netze. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 424.

KRACK, K. (1982). Rechnerunterstützte Ableitung der Legendreschen Reihen und Abschätzung ihrer ellipsoidischen Hauptaufgabe auf Bezugsellipsoiden. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 107, v. 3, p. 118-125.

KREYSZIG, E. (1993). **Advanced engineering Mathematics**. 7th ed. New York: J. Wiley.

KRÜGER, H.; HAUBENTHAL, A. (1972). Lösung der ersten geodätischen Hauptaufgabe mit dem Tischrechner Hewlett-Packard. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 97, n. 3, p. 114-117.

KUANG, M.; FIDIS, C.; THOMAS, F. (1996). Modeling of local geoid with GPS and leveling-a case study. **Surveying and land information systems**, Bethesda, v. 56, n. 2, p. 75-88.

LEICK, A. (1995). **GPS: Satellite surveying**. 2. ed. New York: J. Wiley.

LIDDELL, H. G.; SCOTT, R. (Comp.) (1996). **A Greek-English lexicon**. 9th. ed. Oxford: Clarendon Press.

MATTHIAS, H. J.; KASPER, P.; SNEIDER, D. (1988). **Amtliche Vermessungswerke**. Band 3: Parzellarvermessung. Salzburg: Sauerländer.

MÜLLER, I. I. (1985). Reference coordinate systems and frames: concepts and realization. **Bulletin Géodésique**, v. 59, n. 2, p. 181-188.

MIRANDA, P. (1977). **Comentários ao Código de Processo Civil**. Rio de Janeiro: Forense, t. 13 (arts. 890 – 981).

MITTERMAYER, E. (1972). Zur Ausgleichung freier Netze. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 97, n. 11, p. 481-489.

MÖLLERING, H. (1985). Das neue Niedersächsische Vermessungs- und Katastergesetz. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 110, n. 11, p. 513-522.

MOLODENSKII, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. (1962). **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.

MÜLLER, H. (1982). Dreidimensionale Netzausgleichung in einem kartesischen Koordinatensystem. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 89, n. 5, p. 207-223.

MÜRLE, M.; BILL, R. (1984). Zuverlässigkeits- und Genauigkeitsuntersuchung ebener geodätischer Netze. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 91, n. 2, p. 45-62.

NIEMEIER, W. (1982). **Principal component analysis and geodetic networks - some basic considerations**. In: BORRE, K. e WELSCH, W. M. (Hrsg.): *Proceedings Survey Control Networks*. Schriftenreihe Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, n. 7, p. 275-291.

NIEMEIER, W. (1980). Kongruenzprüfung in geodätischen Netzen. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 5, p. 511-527.

NIEMEIER, W. (1985c). Deformationsanalyse. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 559-623.

NIEMEIER, W.; TESKEY, W. F.; LYALL, R. G. (1982). Precision, reability and sensitivity aspects of an open pit monitoring network. **Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying**, n. 37, p. 1-27.

NOGUEIRA, M. F. P. (1983). **1000 perguntas**: direito agrário. Rio de Janeiro: Rio.

NOUVEAU code de procédure civile: textes, jurisprudence, annotatios (2000). Paris: Dalloz .

OKEKE, F. I. (1998). The curvilinear datum transformation modell. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 481.

PACHECO, J. E. de C. (1980) (ed.). **Jurisprudência brasileira**: demarcação e divisão. Curitiba: Juruá, v. 42.

PATTERSON, R. (1984). The interpretation of error ellipses with special reference to simultaneous probability statements. **UNISURV G an Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry e Surveying**, Sydney, n. 24, p. 1-20.

PATTERSON, R. C. (1976). The effect of an estimated variance factor on the size of error ellipses. **Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying**, n. 41, p. 37-60.

PEARSON, E. S.; TIKU, M.L. (1970). Some notes on the relationship between the distributions of central and non-central F. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 175-179.

PECÁR, J.(1988). On the possibility of combining functional optimality criteria in a geodetic net. **Studia Geophysica et Geodaetica**, Praga, v. 32, v. 4, p. 333-344.

PELZER, H. (1982). **Influence of sitematic effects in stochastic and functional models**. In: BORRE, K. e WELSCH, W. M. (Hrsg.): Proceedings Survey Control Networks. Schriftenreihe Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, n. 7, p. 309-320.

PELZER, H. (1983). Genauigkeit, Meßunsicherheit, Toleranz: sprechen Geodäten, Meßtechniker und Bauingenieure noch – oder wieder – einegemeisame Sprache? **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 108, n. 12, p. 574-577.

PEROVÍČ, G. (1982). Some estimable functions in geidetic networks. In: INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. **Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 321-326.

PERRIER, G. G. (1939). **Petite Histoire de la Géodésie**. Paris: Alcan.

PETTA, A. (1954). **Considerações em torno da demarcação e da divisão da propriedade agrícola**. Tese (Doutorado). Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz da Universidade de São Paulo.

PIEROZZI, M. (1989). Alcune considerazioni sulla trasformazione dal sistema WGS 84 ad un sistema geodetico locale. **Bolletino di Geodesia e Scienze Affini**, Firenze, v. 48, n. 1, p. 45-55.

PIZZETTI, P.; NOIREL, H. (1993). Triangulation géodésique. In: **ENCYCLOPÉDIE des Sciences Mathématiques pures et Appliquées**. Édition française. Paris: Gauthier-Villars. Versão francesa de Jules Molk e Ch. Lallemand. Original alemão, v. 6, p. 1-101.

QUANWEI, L. (1996). Modern adjustment of geodetic network considering the elimination both of the systematic errors and blunders. **Surveying Science in Finland**. v. 14, n. 1-2, p. 47-55.

RAMSAYER, K. (1969). Spatial triangulation in a local astronomical oriented cartesian co-ordinate system. **Bulletin Géodésique**, n. 92, p. 123-137.

SACHS, L. (1969). **Statistische Auswertungsmethoden**. 2. Auflage. Berlin: Springer-Verlag.

SCHAFFERT, D. (1980). Aufgaben des Geodäten in Ballungsgebieten. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 105, n. 12, p. 555-566.

SCHMIDT, H. (1995). Meßabweichungen, korrelationen und Meßunsicherheit. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 120, n. 11, p. 545-555.

SCHNÄDELLBACH, K. (1985). Zur Berechnung langer Ellipsoidsenen und geodätischer Linien. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 92, n. 11-12, p. 503-510.

SCHNÄDELLBACH, K. (1988). Zur Berechnung von Ellipsoidübergang und Anfelderung mit Hilfe des Helmertschen Verfahrens. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série B, n. 287, p. 182-188.

SCHNÄDELLBACH, K. (1989). Genauigkeitsmaße zwischen Punkten in dreidimensionalen Netzen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 96, n. 7, p. 257-264.

SCHREIBER, R. (1991). Ein klassifizierender Beitrag zur Abbildungstheorie und numerischen Genauigkeit von geodätischen Datumsübergängen. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 377.

SCHWARTZMAN, S. (1994). **The words of Mathematics**: an etymological dictionary of mathematical terms used in English. Washington: The Mathematical Association of America.

SILVA, De Plácido e. (2000). **Vocabulário jurídico**. 17. ed. Rio de Janeiro: Forense.

SILVA, L. O. (1996). **Terras devolutas e latifúndio**: efeitos da Lei de 1850. Campinas: UNICAMP.

SILVA, L. P. (1995). **Julgados de retificação de área**. Bauru: Edipro.

SILVEIRA, C. A. A.; LEAL, A. J. (2000). **Inventário e partilha**: doutrina, prática e jurisprudência. Leme: Editora de Direito.

SODANO, E. M. (1967). Supplement to inverse solution of long geodesics. **Bulletin Géodésique**, n. 85, p. 233-236.

TEIXEIRA, S. F. (1996). **Código de Processo Civil anotado**. 6. ed. São Paulo: Saraiva.

TESKEY, W. F.; GRUENDIG, L. (1985). Improving the quality of traverses. **The Canadian Surveyor**, v. 39, n. 3, p. 211-222.

TESKEY, W. F.; MACLEOD, J. W. (1988). Application of statistical testing to cadastral survey traverses. **CISM Journal ACSGC**, v. 42, n. 1, p. 17-21.

TIKU, M. (1985). Noncentral chisquare distribution. In: **ENCYCLOPEDIA of statistical sciences**. New York: J. Wiley, v. 6, p. 277-280.

TORGE, W. (1985). Dreidimensionale Netze. In: PELZER, H. (Hrsg.). **Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II**. Stuttgart: K. Wittwer, v. 13, p. 313-333.

VAN MIERLO, J. (1982). Difficulties in defining the quality of geodetic networks. In: **INTERNATIONAL FEDERATION OF SURVEYORS, 1982, München. Proceedings survey control networks**. München: Schriftenreihe, n. 7, p. 259-274.

VAN MIERLO, J. (1979). Statistical analysis of geodetic measurements for the investigation of crustal movements. **Tectonophysics**, Amsterdam, v. 52, p. 457-467.

VERESS, S. A. (1973). Measures of accuracy for analysis and design of survey. **Surveying and Mapping**, v. 33, n. 4, p. 435-442.

VINCENT, T. (1975). Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. **Survey Review**, Bristol, 22, n. 176, p. 88-93.

VINCENT, T. (1980). Zur räumlich-ellipsoidischen Koordinaten-Transformation. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 105, n. 11, p. 519-521.

- VUOLO, J. R. (1992). **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: E. Blücher.
- WELSCH, W. (1982). Zur Beschreibung homogenen homogenen Strains oder Einige Betrachtungen zur affinen Transformation. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 107, n. 5, p. 173-182.
- WELSCH, W. (1979). A posteriori Varianzschätzung nach Helmert. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 86, n. 2, p. 55-63.
- WENDERLEIN, W. (1990). Von Genauigkeit zu Genauigkeit. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 97, n. 5, p. 194-197.
- WENDERLEIN, W. (1998). Die Nichtverläßlichkeit von Messungen - und wie wir damit umgehen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 105, n. 1, p. 1-4.
- WIMMER, H. (1981). Ein Beitrag zur Gewichtsoptimierung geodätischer Netze. **Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften**, München, série C, n. 269.
- WINE, R. L. (1964). **Statistics for scientists and engineers**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- WOLF, H. (1963a). Dreidimensionale Geodäsie: Herkunft, Methodik und Zielsetzung. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 88, n. 3, p. 109-116.
- WOLF, H. (1963b). Die Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, Stuttgart, v. 88, n. 6, p. 225-233.
- WOLF, H. (1966). Die Beurteilung der "äusseren" und "inneren" Messgenauigkeit als ein statistisches Problem. **Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica**, Budapest, v. 1, n. 1-2, p. 215-223.
- WOLF, H. (1983b). Neues Altes in der Ausgleichsrechnung. **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik / Mensuration, Photogrammetrie, Génie rural**, Baden-Dätwill, n. 7, p. 233-240.
- WOLFRUM, O. (1981). Zur geometrischen Streckenreduktion für große Entfernungen. **Allgemeine Vermessungs-Nachrichten**, Karlsruhe, v. 88, n. 5, p. 178-188.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA E IDENTIDADES.....	264
APÊNDICE 2 – FÓRMULAS DO TEOREMA DOS SENOS, DOS COSSENOS E DAS COTANGENTES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA...	267
APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE <i>DATUM</i> GEODÉSICO.....	268
APÊNDICE 4 – PROBLEMA DA CONGRUÊNCIA.....	274

APÊNDICE 1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA E IDENTIDADES

continua

$$a = b\sqrt{1+e'^2} = \frac{b}{1-f} \quad (\text{A1.1})$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} = a(1-f) \quad (\text{A1.2})$$

$$c = \frac{a^2}{b} = a\sqrt{1+e'^2} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{b}{1-e^2} = M_{\varphi=\pm 90^\circ} = N_{\varphi=\pm 90^\circ} \quad (\text{A1.3})$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e'^2}{1+e'^2} = 2f - f^2 = 1 - (1-f)^2 \quad (\text{A1.4})$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{e^2}{(1-f)^2} \quad (\text{A1.5})$$

$$f = \frac{a-b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \quad (\text{A1.6})$$

$$p = N \cos \varphi \quad (\text{A1.7})$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{\sqrt{(1-e'^2 \cos^2 \varphi)^3}} = \frac{c}{\sqrt{(1-\eta^2)^3}} = \frac{c}{V^3} \quad (\text{A1.8})$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1-f)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{A1.9})$$

$$= \frac{M(1-e^2 \sin^2 \varphi)}{1-e^2} = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1+\eta^2}} = \frac{c}{V} = \frac{a}{W} \quad (\text{A1.10})$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{-1+\sqrt{1+e'^2}}{1+\sqrt{1+e'^2}} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{f}{2-f} \quad (\text{A1.11})$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = V^2 - 1 \quad (\text{A1.12})$$

NOTA: a expressão A1.12 não é a componente do desvio da vertical em longitude

APÊNDICE 1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA E IDENTIDADES

continuação

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{c}{V^2} = \frac{b}{W^2} \quad (\text{A1.13})$$

$$\frac{1}{R_{A_g}} = \frac{\cos^2 A_g}{M_m} + \frac{\sin^2 A_g}{N_m} = \frac{N}{1+e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 A_g} = \frac{M}{1-e^2 \cos^2 \beta \sin^2 A_g} \quad (\text{A1.14})$$

$$V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \quad (\text{A1.15})$$

$$V^2 = \frac{N}{M} = 1+e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{1-e^2 \cos^2 \beta} = \frac{1+e'^2}{1+e'^2 \sin^2 \beta} \quad (\text{A1.16})$$

$$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad (\text{A1.17})$$

$$W^2 = (1-e^2)V^2 = \frac{V^2}{1+e'^2} \quad (\text{A1.18})$$

$$\frac{V}{W} = \frac{c}{a} = \frac{a}{b} = \sqrt{1+e'^2} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \quad (\text{A1.19})$$

$$1 = (1-e^2)(1+e'^2) = f + \sqrt{1-e^2} = f + \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \quad (\text{A1.20})$$

$$1-e^2 = (1-f)^2 \quad (\text{A1.21})$$

$$0 = e'^2 - e^2 - e^2 e'^2 \quad (\text{A1.22})$$

$$\tan \beta = (\tan \varphi) \sqrt{1-e^2} = (\tan \varphi)(1-f) \quad (\text{A1.23})$$

$$\tan \varphi = (\tan \beta) \sqrt{1+e'^2} \quad (\text{A1.24})$$

$$\sin \varphi = V \sin \beta \quad (\text{A1.25})$$

$$\cos \varphi = (\cos \beta) V \sqrt{1-e^2} \quad (\text{A1.26})$$

APÊNDICE 1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE MERIDIANA E IDENTIDADES

conclusão

$$\cos \beta = \frac{(\cos \varphi) \sqrt{1+e'^2}}{V} \quad (\text{A1.27})$$

$$\cos(\varphi - \beta) = \frac{(\sin 2\varphi) \left(1 - \sqrt{1-e'^2}\right)}{2V\sqrt{1-e'^2}} = \frac{f \sin 2\varphi}{2W} = \frac{fV}{2} \sin 2\beta \quad (\text{A1.28})$$

$$\tan \gamma = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1+e'^2}} = \frac{\tan \varphi}{1+e'^2} \quad (\text{A1.29})$$

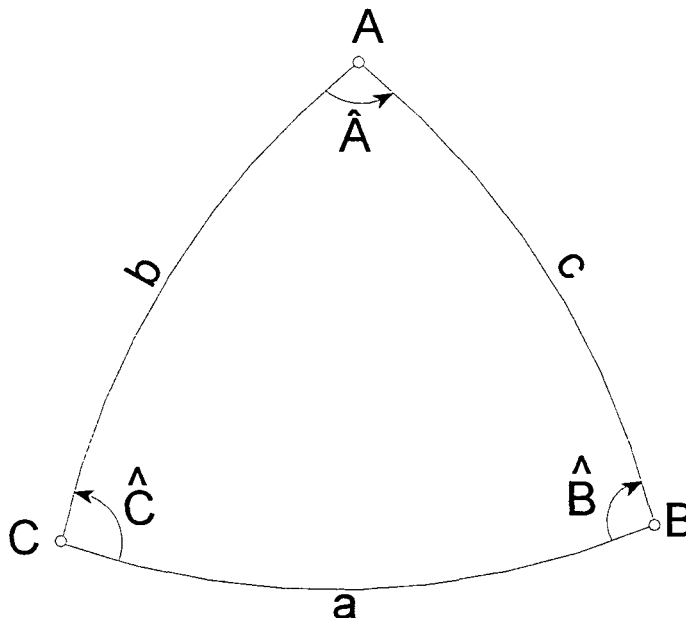
$$\tan(\varphi - \beta) = \frac{\tan \varphi - \tan \beta}{1 + \tan \varphi \tan \beta} = \frac{\left(-1 + \sqrt{1+e'^2}\right) \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \left(-1 + \sqrt{1+e'^2}\right) \cos^2 \varphi} = \frac{f \sin 2\varphi}{2(1 - f \sin^2 \varphi)} \quad (\text{A1.30})$$

$$\tan(\varphi - \gamma) = \frac{\tan \varphi - \tan \gamma}{1 + \tan \varphi \tan \gamma} = \frac{e'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\eta^2 \tan \varphi}{V^2} = \frac{e'^2 \sin 2\varphi}{2(1 + e'^2 \cos^2 \varphi)} \quad (\text{A1.31})$$

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-e'^2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \beta} = \frac{V^2}{\sqrt{1+e'^2}} = \frac{W^2}{\sqrt{1-e'^2}} \quad (\text{A1.32})$$

APÊNDICE 2 – FÓRMULAS DO TEOREMA DOS SENOS, DOS COSSENOS E DAS
COTANGENTES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

FIGURA A1 – TRIÂNGULO ESFÉRICO E SEUS FELEMENTOS PRINCIPAIS



QUADRO A1 – FÓRMULAS DO TEOREMA DOS SENOS, DOS COSSENOS E DAS
COTANGENTES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

TEOREMA DOS SENOS	TEOREMA DAS COTANGENTES
$\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$	$\sin a \cot c = \sin \hat{B} \cot \hat{C} + \cos a \cos \hat{B},$
	$\sin a \cot b = \sin \hat{C} \cot \hat{B} + \cos a \cos \hat{C},$
	$\sin b \cot a = \sin \hat{C} \cot \hat{A} + \cos b \cos \hat{C},$
	$\sin b \cot c = \sin \hat{A} \cot \hat{C} + \cos b \cos \hat{A},$
	$\sin c \cot a = \sin \hat{B} \cot \hat{A} + \cos c \cos \hat{B},$
	$\sin c \cot b = \sin \hat{A} \cot \hat{B} + \cos c \cos \hat{A}.$
TEOREMA DOS COSSENOS	
$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}$	
$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \hat{B}$	
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C}$	

APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO

continua

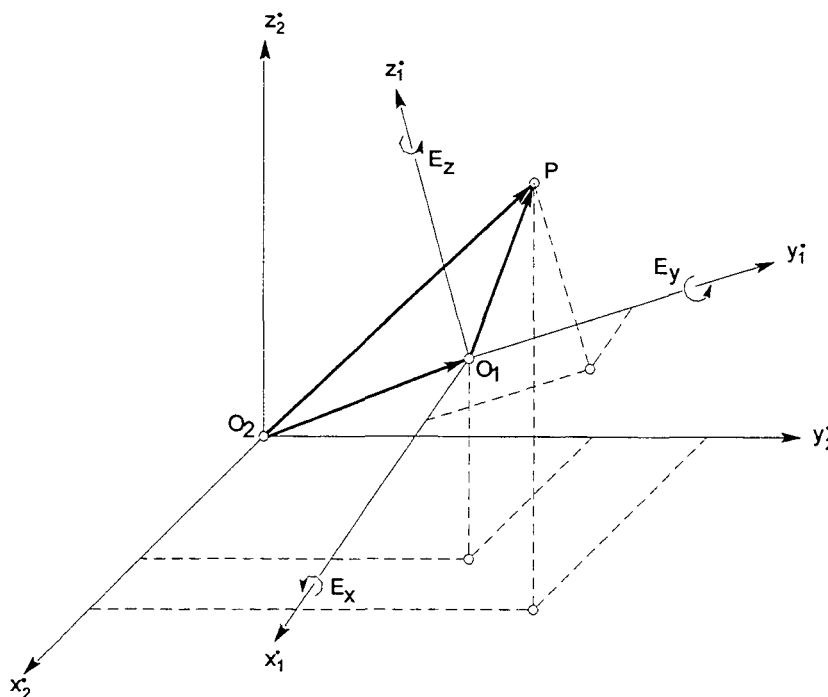
As fórmulas de Molodenskii fornecem as diferenciais $d\varphi, d\lambda$ e dh das coordenadas φ, λ e h , respectivamente, de um ponto do sistema cujo elipsóide tem os parâmetros $\{a, f\}$ a fim de obter as coordenadas correspondentes φ', λ' e h' no outro sistema cujo elipsóide tem os parâmetros $\{a', f'\}$.

O modelo mais simples para a mudança de Datum parte dos sistemas cartesianos com rotação, translação e fator de escala (PIEROZZI, 1989, p. 46):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} + (1+k) \mathbf{R}_{(E_x, E_y, E_z)} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.1})$$

e conforme a figura A2

FIGURA A2 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO



$(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ é o terno de coordenadas cartesianas de um ponto no 1º sistema;

$(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ é o terno de coordenadas cartesianas do mesmo ponto no 2º sistema;

$(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ é o terno de coordenadas cartesianas, expresso no 2º sistema, da origem do 1º sistema;

APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO

continuação

1+K é o fator de escala;

E_x, E_y, E_z são as rotações em torno dos respectivos eixos do 1º sistema, expressos em radianos e giro anti-horário.

As diferenciais da A3.1 calculadas no ponto $(0, \mathbf{x})$ são:

$$d\mathbf{x}_2^{\circ} = d\mathbf{x}_0^{\circ} + dk \mathbf{x}_1^{\circ} + (d\mathbf{R})_0 \mathbf{x}_1^{\circ} + d\mathbf{x}_1^{\circ}. \quad (\text{A3.2})$$

Fixando o ponto no 2º sistema, i.e., $d\mathbf{x}_2^{\circ} = 0$, reescreve-se a A3.2, assumindo a forma:

$$d\mathbf{x}_1^{\circ} = -d\mathbf{x}_0^{\circ} - dk \mathbf{x}_1^{\circ} - (d\mathbf{R})_0 \mathbf{x}_1^{\circ}. \quad (\text{A3.3})$$

As diferenciais das equações 5.53 são

$$dx^{\circ} = \frac{\partial x^{\circ}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x^{\circ}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x^{\circ}}{\partial h} dh + \frac{\partial x^{\circ}}{\partial a} da + \frac{\partial x^{\circ}}{\partial f} df, \quad (\text{A3.4})$$

$$dy^{\circ} = \frac{\partial y^{\circ}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y^{\circ}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y^{\circ}}{\partial h} dh + \frac{\partial y^{\circ}}{\partial a} da + \frac{\partial y^{\circ}}{\partial f} df, \quad (\text{A3.5})$$

$$dz^{\circ} = \frac{\partial z^{\circ}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z^{\circ}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z^{\circ}}{\partial h} dh + \frac{\partial z^{\circ}}{\partial a} da + \frac{\partial z^{\circ}}{\partial f} df. \quad (\text{A3.6})$$

As A3.4, A3.5 e A3.6 são separadas nas matrizes

$$d\mathbf{x}^{\circ} = \begin{bmatrix} dx^{\circ} \\ dy^{\circ} \\ dz^{\circ} \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.7})$$

$$\mathbf{JC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{\circ}}{\partial \varphi} & \frac{\partial x^{\circ}}{\partial \lambda} & \frac{\partial x^{\circ}}{\partial h} \\ \frac{\partial y^{\circ}}{\partial \varphi} & \frac{\partial y^{\circ}}{\partial \lambda} & \frac{\partial y^{\circ}}{\partial h} \\ \frac{\partial z^{\circ}}{\partial \varphi} & \frac{\partial z^{\circ}}{\partial \lambda} & \frac{\partial z^{\circ}}{\partial h} \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.8})$$

$$d\mathbf{L} = \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.9})$$

APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO

continuação

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial a} & \frac{\partial x^*}{\partial f} \\ \frac{\partial y^*}{\partial a} & \frac{\partial y^*}{\partial a} \\ \frac{\partial z^*}{\partial a} & \frac{\partial z^*}{\partial a} \end{bmatrix}, \quad (\text{A3.10})$$

$$d\mathbf{a} = \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix}. \quad (\text{A3.11})$$

A equação na forma matricial é

$$d\mathbf{x}^* = \mathbf{JC}(d\mathbf{L}) + \mathbf{D}(d\mathbf{a}). \quad (\text{A3.12})$$

As diferenciais dx^* , dy^* , dz^* do vetor $d\mathbf{x}^*$ são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial \varphi} &= -(M+h) \sin \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial y^*}{\partial h} &= \cos \varphi \cos \lambda; \\ \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} &= -(N+h) \cos \varphi \sin \lambda; & \frac{\partial y^*}{\partial a} &= \frac{N}{a} \cos \varphi \sin \lambda; \\ \frac{\partial x^*}{\partial h} &= \cos \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial y^*}{\partial f} &= \frac{M}{1-f} \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \lambda; \\ \frac{\partial x^*}{\partial a} &= \frac{N}{a} \cos \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial z^*}{\partial \varphi} &= (M+h) \cos \varphi; \\ \frac{\partial x^*}{\partial f} &= \frac{M}{1-f} \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} &= 0; \\ \frac{\partial y^*}{\partial \varphi} &= -(M+h) \sin \varphi \sin \lambda; & \frac{\partial z^*}{\partial h} &= \sin \varphi; \\ \frac{\partial y^*}{\partial \lambda} &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda; & \frac{\partial z^*}{\partial f} &= (1-f)(M \sin^2 \varphi - 2N) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na expressão do produto \mathbf{JC} que fica

$$\mathbf{JC} = \begin{bmatrix} -(M+h) \sin \varphi \cos \lambda & (N+h) \cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -(M+h) \sin \varphi \sin \lambda & (N+h) \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ +(M+h) \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{A3.13})$$

APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO

continuação

que separado, advém para

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \cos\lambda \\ -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda \\ +\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}; \quad (\text{A3.14})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \text{N+h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A3.15})$$

Mas

$$\mathbf{JC}(d\mathbf{L}) + \mathbf{D}(da) = -d\mathbf{x}_0^\circ - (dk)\mathbf{x}^\circ - (d\mathbf{R})_0 \mathbf{x}^\circ. \quad (\text{A3.16})$$

Isolado $d\mathbf{L}$, sua expressão é

$$d\mathbf{L} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T \left[d\mathbf{x}_0^\circ + (dk)\mathbf{x}^\circ + (d\mathbf{R})_0 \mathbf{x}^\circ + \mathbf{D}(da) \right]. \quad (\text{A3.17})$$

$$-\mathbf{C}^{-1} \mathbf{J}^T = - \begin{bmatrix} \frac{1}{(\text{M+h})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\text{N+h})\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda & -\sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ +\cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{-\sin\varphi \cos\lambda}{\text{M+h}} & \frac{-\sin\varphi \sin\lambda}{\text{M+h}} & \frac{\cos\varphi}{\text{M+h}} \\ \frac{-\sin\lambda}{(\text{N+h})\cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{(\text{N+h})\cos\varphi} & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (\text{A3.18})$$

$$\left[d\mathbf{x}_0^\circ + (dk)\mathbf{x}^\circ + (d\mathbf{R})_0 \mathbf{x}^\circ + \mathbf{D}(da) \right] =$$

APÊNDICE 3 – MUDANÇA DE DATUM GEODÉSICO

conclusão

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} + dk \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ [N(1-f)^2+h]\sin\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & dE_z & -dE_y \\ -dE_z & 0 & dE_x \\ dE_y & -dE_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ [N(1-f)^2+h]\sin\varphi \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{N}{a}\cos\varphi\cos\lambda & \frac{M}{1-f}\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\lambda \\ \frac{N}{a}\cos\varphi\sin\lambda & \frac{M}{1-f}\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\lambda \\ \frac{N(1-f)^2}{a}\sin\varphi & (1-f)(M\sin^2\varphi-2N)\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix} \quad (A3.19)
\end{aligned}$$

Agora calculam-se as coordenadas $d\varphi$, $d\lambda$ e dh do vetor dL :

$$\begin{aligned}
d\varphi &= \frac{\sin\varphi\cos\lambda}{M+h}dx_0 + \frac{\sin\varphi\sin\lambda}{M+h}dy_0 - \frac{\cos\varphi}{M+h}dz_0 + \frac{\left(\frac{a^2}{N}+h\right)\sin\lambda}{M+h}dE_x - \frac{\left(\frac{a^2}{N}+h\right)\cos\lambda}{M+h}dE_y \\
&+ \frac{N[1-(1-f)^2]\sin\varphi\cos\varphi}{M+h}\left(dk + \frac{1}{a}da\right) + \frac{[M+(1-f)^2N]\sin\varphi\cos\varphi}{M+h}\frac{1}{1-f}df. \quad (A3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\lambda &= \frac{\sin\lambda}{(N+h)\cos\varphi}dx_0 - \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi}dy_0 - \frac{[N(1-f)^2+h]\tan\varphi\cos\lambda}{N+h}dE_x \\
&- \frac{[N(1-f)^2+h]\tan\varphi\sin\lambda}{N+h}dE_y + dE_z; \quad (A3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dh &= -(\cos\varphi\cos\lambda)dx_0 - (\cos\varphi\sin\lambda)dy_0 - (\sin\varphi)dz_0 + N[1-(1-f)^2](\cos\varphi\sin\varphi\sin\lambda)dE_x \\
&- N[1-(1-f)^2](\cos\varphi\sin\varphi\cos\lambda)dE_y - \left(\frac{a^2}{N}+h\right)dk - \frac{a}{N}da + N(1-f)^2(\sin^2\varphi)\frac{1}{1-f}df. \quad (A3.22)
\end{aligned}$$

As diferenciais da e df podem ser assimiladas pelas diferenças Δa e Δf , respectivamente.

APÊNDICE 4 – PROBLEMA DA CONGRUÊNCIA

continua

As variações da geometria de um objeto constituem uma das tarefas fundamentais das mensurações geodésicas, as quais junto com os modelos matemáticos permitem interpretar a realidade física.

As mudanças de geometria dos lf_s constituídos podem ocorrer como consequência do deslocamento ou desaparecimento das **estremas** que os definem por coordenadas e que os materializam por sinais de demarcação na SFT. Em decorrência disto o art. 946, I do CPC determina a fixação de novos lf_s ou a avivitação dos lf_s apagados. Se estes lf_s forem caracterizados conforme a metodologia desta pesquisa em duas ou mais épocas surgirá, então, o **problema da congruência**.

Dá-se o nome de problema de congruência ao problema na mudança da geometria, para o qual duas formas de modelo de ajustamento – a forma geral e a forma simplificada – são apresentadas (NIEMEIER, 1981, p. 335-339).

A4.1 FORMAS GERAIS DOS MODELOS MATEMÁTICOS

O modelo funcional é dado por:

$$\ell_i + v_i = \mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (\text{A4.1})$$

A equação A4.1 é a forma concisa de

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_i \\ \vdots \\ \ell_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1j} & \dots & \mathbf{A}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2j} & \dots & \mathbf{A}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i1} & \dots & \mathbf{A}_{ij} & \dots & \mathbf{A}_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \dots & \mathbf{A}_{kj} & \dots & \mathbf{A}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_i \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}, \quad (\text{A4.2})$$

em que ℓ_i é o vetor de observação, v_i é o vetor dos resíduos, \mathbf{A}_{ij} é a matriz que contém as derivadas parciais das equações de observação $y = f(x)$, sendo avaliada com o vetor dos valores aproximados y^0 das incógnitas, $\hat{\mathbf{x}}_i$ é o vetor dos parâmetros estimados, i é a i -ésima época e k é o número total de épocas.

APÊNDICE 4 – PROBLEMA DA CONGRUÊNCIA

conclusão

O modelo estocástico é dado por:

$$\mathbf{K}_\ell = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_\ell = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \dots & \mathbf{Q}_{1j} & \dots & \mathbf{Q}_{1k} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \dots & \mathbf{Q}_{2j} & \dots & \mathbf{Q}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{i1} & \mathbf{Q}_{i1} & \dots & \mathbf{Q}_{ij} & \dots & \mathbf{Q}_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_{k1} & \mathbf{Q}_{k2} & \dots & \mathbf{Q}_{kj} & \dots & \mathbf{Q}_{kk} \end{bmatrix}, \quad (\text{A4.3})$$

em que \mathbf{K}_ℓ é a matriz covariância para as observações de todas as épocas, σ_0^2 é a variância de uma observação de peso unitário *a priori*, \mathbf{Q}_ℓ é a matriz de cofatores de covariância para as observações de todas as épocas e \mathbf{Q}_{ij} é a matriz de cofatores de covariância dos vetores de observação ℓ_i e ℓ_j .

O vetor $\hat{\mathbf{x}}_i$ das correções advém da solução das equações normais

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^+ \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \ell_i, \quad (\text{A4.4})$$

com a matriz dos cofatores de covariância das incógnitas $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i}$ dada por:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^+ \quad (\text{A4.5})$$

e com o valor estimado para a variância da observação de peso unitário *a priori* $\hat{\sigma}_{0i}^2$:

$$\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{\Omega_i}{r_i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i}{r_i}, \quad (\text{A4.6})$$

em que r_i é a redundância.

A2 FORMAS SIMPLIFICADAS DOS MODELOS MATEMÁTICOS

A simplificação consiste na consideração

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0}, \quad \forall i \neq j, \quad (\text{A4.7})$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{0}, \quad \forall i \neq j. \quad (\text{A4.8})$$

ÍNDICE REMISSIVO

Ação

- demarcatória 2, 5, 6, 17, 18, 25, 231, 233, 234
 - * 1ª fase (propositura) 17
 - * 2ª fase (executória) 17
- divisória 2, 3, 5, 6, 18, 231, 233, 234
 - * 1ª fase (propositura) 18
 - * 2ª fase (executória) 18
 - * quinhão 6, 18
- discriminatória 2, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 18, 23, 24, 28, 29, 36, 231, 232, 233, 234
 - * 1ª fase (propositura) 24, 25
 - * 2ª fase (executória) 24, 25

Acurácia

- critério
 - * conceito 180, 181
 - * etimologia 180
 - * correção 181
- medida 183, 184, 185

Agrimensor

- etimologia 2
- função 18, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 34, 35, 36

Altitude

- elipsóidica 11
- ortométrica 139, 147, 146

Aprimoramento

- do memorial 3, 204, 205, 225

Arco

- de clotoide 11
- elemento infinitesimal de 138, 165
- elíptico 148

Averbação 37, 38

Azimute

- astronômico 143, 145
- cálculo sem quadrante 76, 207
- geodésico elipsóidico 153, 155
- sob notação vetorial 149

Bessel

- esfera unitária de 169

Círculo

- distrital
 - * raio 21, 29, 30, 22, 23
- municipal
 - * raio 21, 29, 30, 22, 23

Combinação linear

- variância e covariância 109, 119

Componentes principais 118, 119, 120

- amostrais 128
 - * propriedades 128
 - * interpretação geométrica 129
- populacionais 121, 127
 - * propriedades 122
- de variáveis padronizadas 131
 - * propriedades 131

Confiabilidade 196

- externa 196, 200
- interna 196, 199

Congruência

- problema da 273

Decomposição

- de vetor posição 48
- espectral 58

Demarcação

- auto de 25
- sentença homologatória de 4, 9, 10, 25, 32, 35, 231

Elementos de linha infinitesimais 92

Elipse

- de erros 184, 186, 187, 188
- meridiana do elipsóide 134
- parâmetros da elipse meridiana 136, 264

Elipsóide

- de confiança 192, 194, 195, 184
- de rotação 11, 150, 151

Erro 238

- grosseiro 197, 199, 200, 201
- tipo I 106, 107
- tipo II 106, 107

Esperança matemática 95, 107

Estatísticas 97

Estrema

- conceito 1, 2, 22, 34
- etimologia 1
- caracterização
 - * memoriais 1, 7, 8, 10, 31, 34

Forma quadrática

- maximização 71

Função densidade de probabilidade

- equivalência 105

- F
 - * central 104, 131
 - * não-central 104, 105
- normal ou gaussiana 100
- normal padronizada 101
- normal multivariada 113
- qui-quadrado
 - * central 102
 - * não-central 102
- t de Student
 - * central 103, 104
 - * não-central 103, 104

Geodésia

- conceito vi, 33
- * etimologia vi

Gleba 208, 237

Hipótese

- alternativa 106
- nula 106

Imóvel

- conceito 1

Khatri-Rao

- produto 65

Kronecker

- produto 64, 65

Latitude

- geográfica astronômica 142, 146
- geográfica elipsóidica 11, 135, 136, 138, 150, 151
- reduzida 138, 165, 167
- geocêntrica 138

Laudo

- de arbitramento 25, 31
- de demarcação 25, 29, 31, 35

Limite fundiário

- conceito 1, 3, 22
- constituição 6
- espécies
 - * *de iure* 3, 4, 6
 - * *de facto* 4, 6
- origem 6

Linha

- geodésica 11, 32, 154, 165
- vertical 146

Longitude

- geográfica astronômica 142, 143, 146
- geográfica elipsóidica 135, 136, 150, 151

Mahalanobis

- distância quadrática de 114, 116

Matrícula imobiliária

- conteúdo 37, 38, 205, 225

Matriz

- correlação 109
- covariância do vetor aleatório 108
- de cofatores de covariância das incógnitas 183
- de dados 110, 181
- de pesos 197
- de rotação 87, 89, 62, 63
- de reflexão 64
- desvio padrão 109
- dos cossenos diretores 87, 89
- formas bilinear 60
 - * derivada 69
- forma quadrática 60, 71
 - * derivada 70
- diagonal 51, 55, 58, 59, 60, 67
- idempotente 62
- identidade 51, 55
- inversa generalizada de Moore-Penrose 58, 62
- inversa ordinária 53, 59
- nula 50, 59
- ortogonal 54, 58, 71
- positiva definida 61, 71
- positiva semidefinida 61
- posto 52, 57, 59
- determinante 52, 53
- quadrada 51, 52, 54
- raiz quadrada 61
- simétrica 52, 57
- traço 67
- transposição 46, 51, 52
- vec 66
- vech 66

Molodenskii

- fórmulas de 268

Mudança de datum geodésico 26'

Normas jurídicas

- relação de 20, 241

Octantes 79

Optimalidade 194

Outliers 120

Parcela terrestre

- como prédio 3

Perímetro

- em regularizaçã
- de gleba 208 /

- de parcela 208

Peritos

- agrimensor
 - * tarefas 18, 25, 29, 31, 32, 34
- arbitradores
 - * tarefas 18, 25, 30, 34
- *géomètre-expert* 32

Podária

- conceito 186
- da elipse 187, 184

Prédio 1, 5

Princípio da especialidade 2, 7, 8, 13, 33, 34, 36

- interpretação do 34
 - * dados complementares 205

Qualidade de rede geodésica 184

- medidas de acurácia 183, 184, 185, 195
- medidas de confiabilidade 184, 185, 196
- medidas de sensibilidade 184, 201

Quantil 189, 238

Redundância 197

- parcial 197, 198, 199, 200

Registro imobiliário 36

- princípios do 36
- Livro N. 2 (Registro Geral) 37, 38, 205, 225

Rumo

- no elipsóide 207
- no plano 76

Sensibilidade de rede geodésica 184, 201

- estatística 203

Série

- * fórmula do binômio 168
- * para o cálculo de superfície no elipsóide 176

Sistema de coordenadas 72

- do espaço de uma dimensão 73
- do espaço de duas dimensões 74
- do espaço de três dimensões 78
- naturais 139, 140, 142
 - * cartesianas astronômicas topocêntricas 140, 143
 - * cartesianas geocêntricas 140, 141
 - * geográficas astronômicas 139, 140, 141
- elipsóidicas 132, 139, 140, 150
 - * cartesianas elipsóidicas 140, 150, 152, 153
 - * cartesianas elipsóidicas topocêntricas 140, 143, 155, 162

- * geográficas elipsóidicas 139, 140, 147, 150

- * polares elipsóidicas 140, 147, 154, 206

Superfície

- de gleba no elipsóide 217, 218
- de parcela no elipsóide 228
- de polígono qualquer no elipsóide 177
- de quadrilátero infinitesimal elipsóidico 167

Raio

- de curvatura de uma curva 90, 91
- de curvatura da seção meridiana 135, 137
- de curvatura da seção transversal 135, 137
- do paralelo 136

Teoremas da Trigonometria Esférica

- das cotangentes 267
- dos cossenos 267
- dos senos 267

Terras

- devolutas 1, 4, 16, 22, 30
 - * do círculo distrital 21, 30
 - * do círculo municipal 21, 30
 - * fora de círculos 21, 30
- particulares 1, 30
- particulares do ente público 1, 30

Teste

- de hipótese 107
- de esfericidade 130

Unidade de Conservação Ambiental 22, 29

Valor

- próprio 39, 54, 55
 - * sinônimos 54

Variância 96, 99

Variável aleatória 94

Vetor 39

- aleatório multivariado 107
- da direção dos eixos coordenados 78
- derivada de 68, 235
- deslocamento 202
- etimologia 39
- norma 46
- posição 45, 48, 72, 79, 80, 81, 141, 144, 152
 - * expressão analítica 48
- produto escalar 43, 44, 45, 46, 47, 54, 60, 76, 79, 83, 149
- produto vetorial 44, 45, 149
- próprio 54
 - * sinônimos 54
 - * normalizado 56
- somatório 44