

CARLITO VIEIRA DE MORAES

## **APLICAÇÃO DO AJUSTAMENTO ÀS POLIGONAIS**

Dissertação apresentada como requisito  
parcial à obtenção do grau de Mestre.  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geo-  
désicas. Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas.

Co-orientador: Prof. Dr. Camil Gemael.

CURITIBA

1997

# APLICAÇÃO DO AJUSTAMENTO ÀS POLIGONAIS

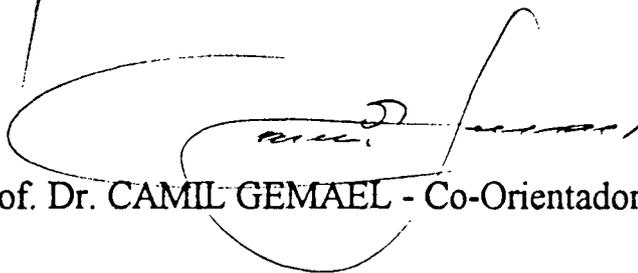
POR

**CARLITO VIEIRA DE MORAES**

Tese aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:



Prof. Dr. SÍLVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS - Orientador  
Presidente



Prof. Dr. CAMIL GEMAEL - Co-Orientador



Prof. MSc ROMUALDO WANDRESEN- Membro



Prof. Dr. QUINTINO DAL MOLIN

*Para Platão .... As Idéias são os modelos das coisas empíricas, as quais devem a sua maneira de ser, a sua essência peculiar, à sua "participação" nas idéias.*

Johannes Hessen

## **AGRADECIMENTOS**

O autor deseja externar seus agradecimentos aos seguintes professores, instituições e colaboradores, abaixo relacionados:

Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas, coordenador do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela orientação desta dissertação;

Prof. Dr. Camil Gemaël, professor do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela co-orientação desta dissertação;

Prof<sup>a</sup> Lúcia Peixoto Cherem, professora de língua francesa no Departamento de Letras Estrangeiras Modernas da Universidade Federal do Paraná, revisora do resumo desta dissertação no idioma francês;

Prof<sup>a</sup> Leimin Kou, professora de língua inglesa no Departamento de Letras Estrangeiras Modernas da Universidade Federal do Paraná, revisora do resumo desta dissertação no idioma inglês;

Prof. Jandir Qeveha, professor de língua alemã, redator do resumo desta dissertação para o idioma alemão;

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, que forneceu dados de medições de poligonal geodésica;

Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, pela bolsa de estudos concedida;

Universidade Federal do Paraná, pelo apoio logístico;

Rui N. Ferreira, Marcelo Costa e Rogério Strojsa pelos trabalhos de edição.

## SUMÁRIO

|          |   |              |
|----------|---|--------------|
|          | <b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....</b>   | <b>x</b>     |
|          | <b>LISTA DE QUADROS .....</b>   | <b>xi</b>    |
|          | <b>LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS.....</b>  | <b>xiii</b>  |
|          | <b>RESUMO .....</b>   | <b>xx</b>    |
|          | <b>RÉSUMÉ.....</b>  | <b>xxi</b>   |
|          | <b>ABSTRACT .....</b>   | <b>xxii</b>  |
|          | <b>ZUSAMMENFASSUNG .....</b>  | <b>xxiii</b> |
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO.....</b>  | <b>1</b>     |
| <b>2</b> | <b>TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE<br/>FECHAMENTO .....</b>                         | <b>9</b>     |
| 2.1      | INTRODUÇÃO .....  | 9            |
| 2.2      | SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DO TESTE .....   | 10           |
| 2.3      | SIMULAÇÃO COM A SEQÜÊNCIA 2.2.....  | 13           |
| <b>3</b> | <b>AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO<br/>MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS.....</b> | <b>19</b>    |
| 3.1      | INTRODUÇÃO .....  | 19           |
| 3.2      | PRIMEIRA DEDUÇÃO .....  | 20           |
| 3.2.1    | Equação Diferencial No Plano Para A Distância $S_{ij}$ .....  | 21           |
| 3.2.2    | Equação Diferencial No Plano Para O Azimute $A_{ij}$ .....  | 22           |
| 3.2.3    | Equação Diferencial No Plano Para O Ângulo $a_{jik}$ .....  | 23           |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3      | SEGUNDA DEDUÇÃO .....   | 24        |
| 3.3.1    | Equação De Distância Observada $S_{ik}$ .....   | 24        |
| 3.3.2    | Equação De Ângulo Observado $a_{jik}$ .....   | 27        |
| 3.4      | SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO.....  | 32        |
| 3.4.1    | Primeira Etapa.....   | 32        |
| 3.4.2    | Iteração.....   | 35        |
| 3.5      | SIMULAÇÃO COM A SEQÜÊNCIA 3.4.1.....  | 36        |
| 3.5.1    | Primeira Etapa.....   | 36        |
| <b>4</b> | <b>AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO<br/>MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO.....</b> | <b>44</b> |
| 4.1      | INTRODUÇÃO.....   | 44        |
| 4.2      | DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO NO PLANO....   | 45        |
| 4.3      | SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO.....  | 46        |
| 4.3.1    | Primeira Etapa.....   | 46        |
| 4.3.2    | Iteração.....   | 52        |
| 4.4      | SIMULAÇÃO COM SEQÜÊNCIA 4.3.1 .....   | 53        |
| 4.4.1    | Primeira Etapa.....   | 53        |
| <b>5</b> | <b>AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO<br/>MÉTODO COMBINADO.....</b>                | <b>62</b> |
| 5.1      | INTRODUÇÃO.....   | 62        |
| 5.2      | DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES .....  | 62        |
| 5.3      | SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO.....  | 64        |
| 5.3.1    | Primeira Etapa.....   | 64        |
| 5.3.2    | Iteração.....   | 67        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.4      | SIMULAÇÃO COM A SEQUÊNCIA 5.3.1.....  | 69        |
| 5.4.1    | Primeira Etapa.....   | 69        |
| 5.4.2    | Iteração.....   | 78        |
| <b>6</b> | <b>VARIÂNCIA DA ÁREA DEFINIDA PELA POLIGONAL NO PLANO TOPOGRÁFICO .....</b>           | <b>79</b> |
| 6.1      | INTRODUÇÃO.....   | 79        |
| 6.2      | FÓRMULA GERAL PARA O CÁLCULO DE ÁREA EM FUNÇÃO DE COORDENADAS RETANGULARES.....       | 79        |
| 6.3      | VARIÂNCIA DA ÁREA.....  | 80        |
| 6.4      | SIMULAÇÃO.....  | 81        |
| <b>7</b> | <b>AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS GEODÉSICAS PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO.....</b> | <b>82</b> |
| 7.1      | INTRODUÇÃO.....   | 82        |
| 7.2      | TRANSPORTE DE COORDENADAS E DE AZIMUTE NO ELIPSÓIDE....                               | 83        |
| 7.2.1    | Cálculo da Latitude.....  | 84        |
| 7.2.2    | Cálculo da Longitude.....   | 86        |
| 7.2.3    | Cálculo do Azimute.....   | 87        |
| 7.3      | TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA.....   | 89        |
| 7.3.1    | Redução Dos Ângulos ao Solo.....  | 89        |
| 7.3.2    | Cálculo da Altitude Ortométrica.....  | 90        |
| 7.3.3    | Ajustamento do Nivelamento Trigonométrico por Equações de Condição.....               | 91        |
| 7.3.3.1  | Primeira etapa.....   | 91        |
| 7.3.3.2  | Iterações.....  | 94        |
| 7.3.4    | Cálculo da Altitude Geométrica.....   | 94        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 7.4      | REDUÇÃO DOS VALORES OBSERVADOS .....   | 94         |
| 7.4.1    | Redução Geométrica da Distância .....  | 95         |
| 7.4.2    | Redução Geométrica de Ângulos Horizontais .....  | 96         |
| 7.4.3    | Redução Física de Ângulos Horizontais .....  | 100        |
| 7.5      | AJUSTAMENTO DA POLIGONAL GEODÉSICA .....   | 101        |
| 7.5.1    | Primeira Etapa .....   | 101        |
| 7.6      | APLICAÇÃO .....  | 107        |
| 7.6.1    | Ajustamento do Nivelamento Trigonométrico .....  | 111        |
| 7.6.1.1  | Primeira etapa .....   | 111        |
| 7.6.1.2  | Iteração .....   | 117        |
| 7.6.2    | Cálculo da Altitude Geométrica .....   | 121        |
| 7.6.3    | Cálculo do Ajustamento da Poligonal .....  | 122        |
| 7.6.3.1  | Primeira etapa .....   | 127        |
| 7.6.3.2  | Iteração .....   | 141        |
| <b>8</b> | <b>ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>  | <b>147</b> |
| 8.1      | TESTE QUI-QUADRADO DO ERRO DE FECHAMENTO E OS MÉTODOS<br>DE AJUSTAMENTO APLICADOS À POLIGONAL TOPOGRÁFICA..... | 147        |
| 8.2      | MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO APLICADO À POLIGONAL<br>GEODÉSICA .....  | 148        |
| 8.3      | ANÁLISE MEDIANTE APLICAÇÃO DAS RELAÇÕES DO TESTE<br><i>DATA SNOOPING</i> .....                                 | 149        |
| 8.3.1    | Fundamentação Teórica do Teste .....   | 151        |
| 8.3.1.1  | Contribuição do erro observacional para o resíduo .....  | 151        |
| 8.3.1.2  | Número-redundância .....   | 152        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 8.3.1.3  | Resíduo padronizado.....                    | 153        |
| 8.3.1.4  | Teste de hipóteses.....                     | 153        |
| 8.3.2    | Exemplo Numérico da Aplicação do Teste..... | 154        |
| <b>9</b> | <b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>      | <b>157</b> |
| 9.1      | CONCLUSÕES.....                             | 157        |
| 9.2      | RECOMENDAÇÕES.....                          | 158        |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>      | <b>159</b> |

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|  |     |
|--|-----|
| FIGURA 1.1 - POLIGONAL FECHADA DESENVOLVIDA NO PLANO TOPOGRÁFICO .....                 | 2   |
| FIGURA 1.2 - POLIGONAL ABERTA DESENVOLVIDA NO PLANO TOPOGRÁFICO .....                  | 3   |
| FIGURA 1.3 - POLIGONAL GEODÉSICA .....   | 4   |
| FIGURA 2.1 - POLIGONAL TOPOGRÁFICA FECHADA COM DADOS OBSERVADOS .....                  | 14  |
| FIGURA 2.2 - GRÁFICO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE QUI-QUADRADO<br>PARA $v=2$ ..... | 18  |
| FIGURA 3.1 - DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E AZIMUTES NO PLANO .....                             | 21  |
| FIGURA 3.2 - DISTÂNCIA OBSERVADA .....   | 24  |
| FIGURA 3.3 - ÂNGULO OBSERVADO .....  | 28  |
| FIGURA 7.1 - TRANSPORTE DE COORDENADAS NO ELIPSÓIDE .....                              | 83  |
| FIGURA 7.2 - POLIGONAL GEODÉSICA .....   | 88  |
| FIGURA 7.3 - REDUÇÃO GEOMÉTRICA DE DISTÂNCIA .....                                     | 95  |
| FIGURA 7.4 - ÂNGULO SECÇÃO NORMAL-GEODÉSICA .....                                      | 97  |
| FIGURA 7.5 - EFEITO DA ALTURA DO SINAL .....   | 99  |
| FIGURA 7.6 - ESBOÇO DA POLIGONAL OBSERVADA PELO IBGE .....                             | 109 |

## LISTA DE QUADROS

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| QUADRO 2.1  | - DADOS OBSERVADOS E CALCULADOS PROVISORIAMENTE .....                                       | 14  |
| QUADRO 7.1  | - DADOS DAS OBSERVAÇÕES DE UMA POLIGONAL DO IBGE .....                                      | 108 |
| QUADRO 7.2  | - RESUMO DAS MONOGRAFIAS DOS VÉRTICES PARA O APOIO DA<br>POLIGONAL NO SGR .....             | 109 |
| QUADRO 7.3  | - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS PARA O NIVELAMENTO<br>TRIGONOMÉTRICO.....         | 110 |
| QUADRO 7.4  | - ÂNGULOS VERTICAIS REDUZIDOS AO SOLO .....   | 111 |
| QUADRO 7.5  | - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES<br>OBSERVADOS REDUZIDOS .....           | 113 |
| QUADRO 7.6  | - ELEMENTOS DA MATRIZ B DA 1ª ETAPA .....   | 114 |
| QUADRO 7.7  | - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES<br>AJUSTADOS DA 1ª ETAPA.....           | 117 |
| QUADRO 7.8  | - ELEMENTOS DA MATRIZ B DA 1ª ITERAÇÃO .....  | 117 |
| QUADRO 7.9  | - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES<br>AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO .....       | 121 |
| QUADRO 7.10 | - ALTITUDE GEOMÉTRICA .....   | 121 |
| QUADRO 7.11 | - DISTÂNCIAS REDUZIDAS AO ELIPSÓIDE .....   | 123 |
| QUADRO 7.12 | - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO A DISTÂNCIA<br>REDUZIDA AO ELIPSÓIDE ..... | 124 |
| QUADRO 7.13 | - REDUÇÃO ANGULAR (CÁLCULO DO ÂNGULO ELIPSÓIDICO).....                                      | 125 |

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| QUADRO 7.14 | - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO ÂNGULOS<br>E DISTÂNCIAS ELIPSÓIDICOS .....                       | 126 |
| QUADRO 7.15 | - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO VALORES<br>AJUSTADOS DA 1ª ETAPA .....                           | 140 |
| QUADRO 7.16 | - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO VALORES<br>AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO .....                        | 146 |
| QUADRO 8.1  | - DIFERENÇA ENTRE VALORES AJUSTADOS NA 1ª ETAPA E<br>1ª ITERAÇÃO .....  | 148 |
| QUADRO 8.2  | - COMPARAÇÃO ENTRE VALORES AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO E VALORES<br>OBTIDOS A PARTIR DAS COORDENADAS AJUSTADAS ..... | 149 |
| QUADRO 8.3  | - TIPOS DE ERROS GROSSEIROS .....   | 150 |
| QUADRO 8.4  | - NÍVEIS DE CONFIANÇA E VALORES CRÍTICOS PARA O TESTE<br><i>DATA SNOOPING</i> .....                               | 154 |

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

|            |  |
|------------|--|
| $a$        | - SEMI-EIXO EQUATORIAL DO ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA  |
| $a_i$      | - ÂNGULO HORIZONTAL  |
| $a'_{jik}$ | - ÂNGULO HORIZONTAL SOBRE A SECÇÃO NORMAL PARA AS POLIGONAIS<br>GEODÉSICAS                                     |
| $a_{jk}$   | - ÂNGULO HORIZONTAL PARA O MÉTODO VARIAÇÃO DE COORDENADAS;<br>ÂNGULO ELIPSÓIDICO PARA AS POLIGONAIS GEODÉSICAS |
| diag       | - DIAGONAL (REFERENTE À MATRIZ DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES)  |
| $dx, dy$   | - CORREÇÕES (INCÓGNITAS DAS EQUAÇÕES NORMAIS NO MÉTODO VARIAÇÃO<br>DE COORDENADAS)                             |
| $e^2$      | - QUADRADO DA EXENTRICIDADE DO ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA   |
| $f$        | - ACHATAMENTO DO ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA   |
| índice a   | - AJUSTADO   |
| índice o   | - APROXIMADO   |
| índice c   | - CALCULADO  |
| índice i   | - VÉRTICE OCUPADO DA POLIGONAL   |
| índice j   | - VÉRTICE ANTERIOR   |
| índice k   | - VÉRTICE POSTERIOR  |
| índice n   | - NÚMERO DE OBSERVAÇÕES (ÂNGULOS E DISTÂNCIAS)   |
| índice r   | - NÚMERO DE EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO = NÚMERO DE OBSERVAÇÕES<br>SUPERABUNDANTES = NÚMERO DE GRAU DE LIBERDADE      |

|                    |  |
|--------------------|--|
| índice $u$         | - NÚMERO DE INCÓGNITAS ( $x, y$ )  |
| índice $T$         | - TRANSPOSTA DA MATRIZ   |
| $l_i$              | - OBSERVAÇÃO   |
| $m_i$              | - MERIDIANO GEODÉSICO  |
| $p$                | - LADO DE POLIGONAL TOPOGRÁFICA  |
| $p_i$              | - PESO DA OBSERVAÇÃO $l_i$   |
| rad                | - Radianos   |
| $r_i$              | - NÚMERO REDUNDÂNCIA OU REDUNDÂNCIA PARCIAL NO TESTE <i>DATA SNOOPING</i>  |
| $s$                | - ÁREA DA SUPERFÍCIE DEFINIDA PELA POLIGONAL FECHADA   |
| $t$                | - TANGENTE   |
| $w_i$              | - RESÍDUO PADRONIZADO NO TESTE <i>DATA SNOOPING</i>  |
| $x, y$             | - COORDENADAS FIXAS DE UM PONTO $P$ DA POLIGONAL   |
| $\hat{x}, \hat{y}$ | - COORDENADAS PROVISÓRIAS DE UM PONTO $P$ DA POLIGONAL, OBTIDAS COM VALORES OBSERVADOS   |
| $z'$               | - ÂNGULO VERTICAL OBSERVADO  |
| $z$                | - ÂNGULO VERTICAL REDUZIDO AO SOLO   |
| $z^a$              | - ÂNGULO VERTICAL AJUSTADO   |
| $\alpha$           | - NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA (PROBABILIDADE DE REJEITAR A HIPÓTESE NULA SENDO ESTA VERDADEIRA)                                     |
| $\alpha_0$         | - AZIMUTE GEODÉSICO INICIAL (i. e., DA BASE DE PARTIDA)  |
| $\alpha_f$         | - AZIMUTE GEODÉSICO FINAL (i. e., DA BASE DE CHEGADA)  |
| $\alpha_{ik}$      | - AZIMUTE GEODÉSICO DA LINHA GEODÉSICA $S_{ik}$ (NESTA DISSERTAÇÃO TEM ORIGEM CONVENCIONADA A PARTIR DO SUL E SENTIDO HORÁRIO) |

|   |  |
|---|--|
| $\alpha_{ki}$   | - AZIMUTE GEODÉSICO RECÍPROCO DA LINHA GEODÉSICA $S_{ik}$  |
| $\chi^2$  | - ESTATÍSTICA DA DISTRIBUIÇÃO DE QUI-QUADRADO  |
| $\chi^{*2}$   | - ESTATÍSTICA CALCULADA DA DISTRIBUIÇÃO DE QUI-QUADRADO  |
| $\delta$  | - CORREÇÃO AO ÂNGULO HORIZONTAL, NO CASO DA POLIGONAL GEODÉSICA,<br>DEVIDO À ALTITUDE GEOMÉTRICA |
| $\epsilon_i$  | - ERRO OBSERVACIONAL   |
| $\epsilon_h$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM ALTITUDE ORTOMÉTRICA   |
| $\epsilon_x$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM COORDENADA x   |
| $\epsilon_y$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM COORDENADA y   |
| $\epsilon_A$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM AZIMUTE TOPOGRÁFICO  |
| $\epsilon_\alpha$   | - ERRO DE FECHAMENTO EM AZIMUTE GEODÉSICO  |
| $\epsilon_\varphi$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM LATITUDE   |
| $\epsilon_\lambda$  | - ERRO DE FECHAMENTO EM LONGITUDE  |
| $\eta$  | - COMPONENTE 1º VERTICAL DO DESVIO DA VERTICAL   |
| $\varphi$   | - LATITUDE   |
| $\lambda$   | - LONGITUDE  |
| $\nu$   | - NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DA DISTRIBUIÇÃO DE QUI-QUADRADO                                   |
| $\theta$  | - ÂNGULO ENTRE AS SECÇÕES NORMAIS  |
| $\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \cong \frac{1}{\text{sen } 1''} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right)$ | - FATOR QUE TRANSFORMA QUANTIDADES DADAS EM<br>RADIANOS PARA QUANTIDADES EM SEGUNDOS DE ARCO     |
| $\sigma_a^2$  | - VARIÂNCIA DO ÂNGULO a  |
| $\sigma_S^2$  | - VARIÂNCIA DA DISTÂNCIA S   |

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $\sigma_s^2$             | - VARIÂNCIA DA ÁREA S  |
| $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ | - VARIÂNCIA DAS COORDENADAS x e y  |
| $\sigma_{l_i}$           | - DESVIO-PADRÃO DA OBSERVAÇÃO $l_i$  |
| $\sigma_{v_i}$           | - DESVIO-PADRÃO DOS RESÍDUOS $v_i$   |
| $\sigma_{xy}$            | - COVARIÂNCIA DAS COORDENADAS x e y  |
| $\sigma_o^2$             | - VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO A PRIORI  |
| $\hat{\sigma}_o^2$       | - VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO A POSTERIORI  |
| $\tau$                   | - CORREÇÃO AO ÂNGULO HORIZONTAL, NO CASO DA POLIGONAL GEODÉSICA,<br>DEVIDO AO ÂNGULO SECÇÃO NORMAL-GEODÉSICA |
| $\xi$                    | - COMPONENTE MERIDIANA DO DESVIO DA VERTICAL   |
| $A_0$                    | - AZIMUTE TOPOGRÁFICO INICIAL (i. e., DA BASE DE PARTIDA)  |
| ABNT                     | - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS   |
| $A_f$                    | - AZIMUTE TOPOGRÁFICO FINAL (i. e., DA BASE DE CHEGADA)  |
| $A_{ik}, A_{ij}$         | - AZIMUTE TOPOGRÁFICO, CONTADO NO SENTIDO HORÁRIO A PARTIR DO<br>NORTE                                       |
| AI                       | - ALTURA DO INSTRUMENTO NA ESTAÇÃO DE OBSERVAÇÃO   |
| AS                       | - ALTURA DO ALVO DE VISADA RELATIVA À ESTAÇÃO DE OBSERVAÇÃO  |
| ${}_nA_u$                | - MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO   |
| ${}_rB_n$                | - MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO   |
| $C_i, C_k$               | - CORREÇÃO AO ÂNGULO VERTICAL OBSERVADO PARA REDUZÍ-LO AO SOLO   |
| $C_{ik}$                 | - CORDA ENTRE OS PONTOS I E K (NA REDUÇÃO DE DISTÂNCIA)  |
| ${}_2E_1$                | - VETOR ERRO DE FECHAMENTO DAS COORDENADAS x E y DO p-ésimo PONTO  |
| $H_i$                    | - ALTITUDE GEOMÉTRICA  |

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $H_0, H_1$               | - HIPÓTESE NULA E HIPÓTESE ALTERNATIVA NO TESTE DE HIPÓTESES  |
| IBGE                     | - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA   |
| $rK_1$                   | - VETOR DOS CORRELATOS (MULTIPLICADORES DE LAGRANGE) NO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO OU DOS CORRELATOS E NO MÉTODO COMBINADO |
| $nL_1$                   | - VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO   |
| $nL_1^a$                 | - VETOR DOS VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS  |
| $nL_1^b$                 | - VETOR DOS VALORES OBSERVADOS  |
| $rM_r$                   | - MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES NORMAIS NO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO OU DOS CORRELATOS E NO MÉTODO COMBINADO       |
| $M_i$                    | - RAIOS DE CURVATURA DA SECÇÃO MERIDIANA  |
| MVC                      | - MATRIZ VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA  |
| NBR                      | - NORMA BRASILEIRA  |
| $uN_u$                   | - MATRIZ DOS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES NORMAIS NO MÉTODO VARIAÇÃO DE COORDENADAS  |
| $N_i$                    | - GRANDE NORMAL OU ONDULAÇÃO GEOIDAL  |
| $nP_n$                   | - MATRIZ DOS PESOS DAS OBSERVAÇÕES  |
| $R_{ik}$                 | - RAIOS DE CURVATURA DE UMA SECÇÃO NORMAL (DADO PELO TEOREMA DE EULER)  |
| $S_{ij}, S_{ik}, d_{ik}$ | - DISTÂNCIA   |
| SAD                      | - SOUTH AMERICAN DATUM  |
| SGB                      | - SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO  |
| SGR                      | - SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA   |
| $uU_1$                   | - VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES DAS EQUAÇÕES NORMAIS NO MÉTODO   |

## VARIAÇÃO DE COORDENADAS

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $V_s, V_a$            | - RESÍDUO DA DISTÂNCIA, RESÍDUO DO ÂNGULO  |
| ${}_nV_1$             | - VETOR DOS RESÍDUOS, OBTIDO DO AJUSTAMENTO, PARA A CORREÇÃO DAS OBSERVAÇÕES                                   |
| ${}_uX_1$             | - VETOR DAS CORREÇÕES (SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NORMAIS: VALORES DE $dx$ E $dy$ NO MÉTODO VARIAÇÃO DE COORDENADAS) |
| ${}_uX_1^a$           | - VETOR DOS PARÂMETROS AJUSTADOS NO MÉTODO VARIAÇÃO DE COORDENADAS   |
| ${}_rW_1$             | - VETOR "ERRO DE FECHAMENTO" NO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO OU DOS CORRELATOS E NO MÉTODO COMBINADO        |
| $\Delta h_{ik}$       | - DIFERENÇA DE ALTITUDE ORTOMÉTRICA ENTRE OS PONTOS $i$ E $k$  |
| $\Delta M$            | - CORREÇÃO DE NATUREZA FÍSICA AO ÂNGULO HORIZONTAL   |
| $\Delta_{\alpha ik}$  | - CONVERGÊNCIA MERIDIANA RELATIVA AOS PONTOS $i$ E $k$   |
| $\Delta \phi_{ik}$    | - DIFERENÇA DE LATITUDE ENTRE OS PONTOS $i$ E $k$  |
| $\Delta \lambda_{ik}$ | - DIFERENÇA DE LONGITUDE ENTRE OS PONTOS $i$ E $k$   |
| $\Sigma a$            | - MVC DOS ÂNGULOS  |
| $\Sigma yx$           | - MVC DAS COORDENADAS $x$ E $y$ DE UM PONTO DA POLIGONAL   |
| $\Sigma_A$            | - MVC DOS AZIMUTES   |
| $\Sigma L^a$          | - MVC DOS VALORES OBSERVADOS AJUSTADOS   |
| $\Sigma L^b$          | - MVC DOS VALORES OBSERVADOS   |
| $\Sigma s$            | - MVC DAS DISTÂNCIAS   |
| $\Sigma_{s, A}$       | - MVC DAS DISTÂNCIAS E AZIMUTES  |
| $\Sigma V$            | - MVC DOS RESÍDUOS   |

|          |                   |
|----------|-------------------|
| $\equiv$ | - COINCIDENTE     |
| $\cong$  | - APROXIMADAMENTE |
| $\neq$   | - DIFERENTE       |
| $\in$    | - PERTENCE        |
| $\Delta$ | - DIFERENÇA       |

## RESUMO

Dadas as necessidades do controle da propagação de erros e da unicidade de solução nos levantamentos por poligonais, nesta dissertação realiza-se uma pesquisa que sistematiza os procedimentos de cálculo mediante a aplicação dos seguintes métodos de ajustamento fundamentado no princípio dos mínimos quadrados: variação de coordenadas, equações de condição ou dos correlatos e combinado às poligonais topográficas precedidos do teste qui-quadrado ( $\chi^2$ ) da forma quadrática do erro de fechamento e sucedidos do cálculo da variância da área para as poligonais fechadas. Às poligonais geodésicas estuda-se a aplicação do método das equações de condição ou dos correlatos utilizando a fórmula do transporte de azimute e as fórmulas do transporte de coordenadas geodésicas para estabelecer tais equações. É verificada a unicidade de resultado entre os métodos mediante valores numéricos simulados para as poligonais topográficas. Dados de observações resultantes das medições de uma poligonal pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) no Estado de Santa Catarina, Brasil, são utilizados para exemplificar o ajustamento pelo método das equações de condição ou dos correlatos. Verifica-se também aplicações decorrentes da teoria do teste *data snooping* para as poligonais topográficas.

## RÉSUMÉ

Puisqu' il y a la nécessité du contrôle de la propagation des erreurs et de l'unicité de résoudre dans les levés de terrains par les polygonales, dans cette dissertation a été effectuée une recherche qui systématise les procédures de calcul à travers de l'application des méthodes de compensation basées sur le principe des moindres carrés, c'est-à-dire, la méthode des variations de coordonnées, la méthode des équations de condition et la méthode combinée pour les polygonales topographiques précédées du test chi-carré ( $\chi^2$ ) de la forme quadratique de l'erreur de fermeture et succédées du calcul de la variance de l'aire pour les polygonales fermées. Sur les polygonales géodésiques a été étudiée l'application de la méthode des équations de condition en utilisant la formule du transport de azimuth géodésique et les formules du transport de coordonnées géodésiques pour l'établissement de telles équations. On vérifie l'unicité de résultats entre les méthodes à travers des valeurs numériques simulées pour les polygonales topographiques. Les données d'observations en resultants des mensurations d'une polygonal faites par l'*IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)* dans l'État de *Santa Catarina*, Brésil, sont utilisées pour exemplifier la compensation pour la méthode des équations de condition. Pareillement on fait la vérification des applications retirée de la théorie du test *data snooping* pour les polygonales topographiques.

## ABSTRACT

Due to the requirements of the control of error propagation and of the singleness in solution in the surveyings by methods of traverses, a research is described in this dissertation which systmatizes the procedures of calculus through the use of following adjustment methods by the least-squares principle, i. e., variation of coordinates method, also known as differential displacements method, condition equations method, also known as correlates method and combined method. The chi-square ( $\chi^2$ ) test of the quadratic form of misclosures is applied before the adjustment for the topographical traverses and in relation to the closed traverses it is provided the estimation of area variance after the adjustment. For the geodetic traverses, the method of condition equations (or correlates method) is applied using the geodetic azimuth transport formula and the godetic coordinate transport formulae in order to set up its equations. The unvarying of results is examined among the above methods through the numerical values provided in the case of the topographical traverses. The observed data of surveying measurements by the *IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)* in the State of *Santa Catarina*, Brazil, are employed to illustrate the adjustment by the method of condition equations (or correlates method). There is an evaluation applications of the theory in the data snooping test for the topographical traverses.

## ZUSAMMENFASSUNG

Durch die Notwendigkeit der Kontrolle der Fehlerfortpflanzung und der Einheitlichkeit der Lösung in den Vermessungen durch Polygone, wird in dieser Dissertation eine Forschung gemacht, die das Verfahren der Berechnung durch die Verwendung der Ausgleichsmethoden kraft der Methode der kleinsten Quadrate systematisiert: Koordinaten Variation, Equationen der Kondition oder der Korrelaten und Kombiniert zu den vorgängigen topografischen Polygonen vom Test Chi-Quadrate ( $\chi^2$ ) der quadratischen Form des Fehlerabschlusses und gefolgt von den Varianzrechnungen der Fläche zu den geschlossenen Polygonen. Zu den geodätischen Polygonen überlegt man sich die Verwendung der Equationen oder der Korrelaten, und benutzt dafür die Azimut transport Formel und die geodätisch Koordinierten transport Formel um solche Equationen herzustellen. Die Einheitlichkeit der Ergebnisse wird unter den Methoden durch den numerisch simulierten Werte zu den topografischen Polygonen festgestellt. Daten der Beobachtung der Messungsergebnisse des *IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)* einer geodätischen Polygonen werden im Bundesstaat *Santa Catarina*, Brasilien, verwendet um die Ausgleichung durch der Methode der Konditionsequationen oder Korrelaten darzustellen. Man Beobachtet auch Verwendungen die die Theorie des *Data Snooping* Tests folgen zu den topografischen Polygonen.

## 1 INTRODUÇÃO

As poligonais são objeto de estudo em duas das três divisões de Torge<sup>1</sup> para a Geodésia. Trata-se de o mais simples tipo de levantamento que permite a obtenção das coordenadas horizontais de pontos sendo aplicada, por exemplo, nos levantamentos cadastrais, no fornecimento do controle sobre uma base local de apoio a levantamentos topográficos por métodos terrestres ou fotogramétricos, a projetos de engenharia civil, e até mesmo nos levantamentos geodésicos (TESKEY *and* GRUENDIG, 1985).

Existem muitas situações geométricas distintas que representam uma poligonal conforme são tratadas nas seguintes publicações: JORDAN (1944, p. 454, 457); ASHKENAZI *et al.* (1972); FAIG (1972, p. 27); BLAHA (1973); SCHENK (1975); PAPO *and* PERLMUTTER (1977); PAPO *and* PELED (1977); BRANDSTÄTTER (1987); TESKEY *and* MACLEOD (1988) e ABNT (1994, p. 18, item 6.5.1).

Nesta dissertação o objeto de estudo ficará restrito às poligonais representadas pelas figuras (1.1), (1.2) e (1.3). Estas poligonais possuem as seguintes características fundamentais:

- a) forma geométrica (JORDAN 1944, p. 454, 457; ASHKENAZI *et al.*, 1972; FAIG, 1972, p. 27; TESKEY *and* MACLEOD, 1988), dividindo-se em poligonais fechadas (figura 1.1) e em poligonais abertas (figuras 1.2 e 1.3);

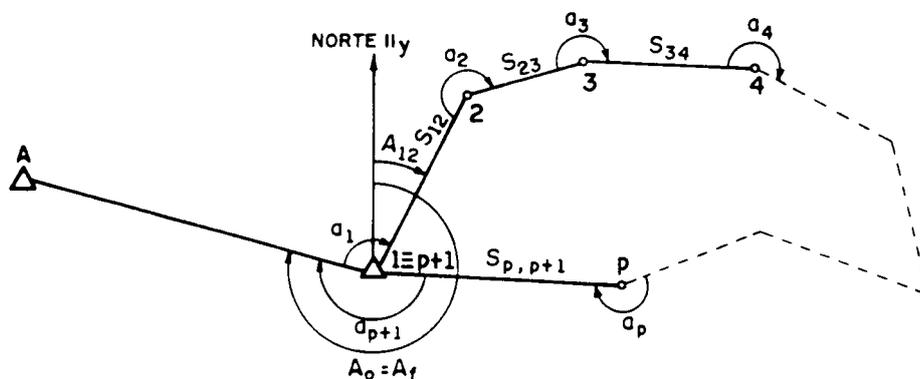
---

<sup>1</sup> A Geodésia pode ser dividida em: (a) Geodésia Global, responsável pela determinação da forma da Terra incluindo o campo da gravidade externo completo; (b) Levantamento Geodésico, que leva em consideração a curvatura da Terra, responsável pela definição da superfície de uma região por coordenadas de pontos de controle e (c) Levantamento Plano (levantamento topográfico, levantamento cadastral, levantamento de engenharia) onde se obtém os detalhes da superfície do terreno referenciados, em geral, a um plano horizontal (TORGE, 1980, p. 1).

- b) superfície sobre a qual se desenvolvem, dividindo-se em poligonais topográficas (figuras 1.1 e 1.2) e em poligonais geodésicas (figura 1.3);
- c) sistema de referência no qual se apoiam ou são controladas (figuras 1.1, 1.2 e 1.3); e
- d)  $p$  distâncias medidas e  $(p+1)$  ângulos medidos, sendo  $p$  o número total de segmentos ou de lados (PAPO *and* PERLMUTTER, 1977).

A poligonal fechada desenvolvida no plano topográfico (figura 1.1) é o caso particular das poligonais abertas desenvolvidas nesse mesmo plano. Os pontos 1 e  $(p+1)$  são respectivamente os pontos de início e de término do desenvolvimento;  $a_1, \dots, a_{p+1}$  são os ângulos horizontais observados no sentido horário;  $S_{12}, \dots, S_{p, p+1}$  são os comprimentos das linhas definidoras dos lados; os pontos A e 1 têm coordenadas fixas (são pontos que definem uma base da rede de controle);  $A_0$  e  $A_f$  são respectivamente os azimutes<sup>2</sup> topográficos inicial e final.

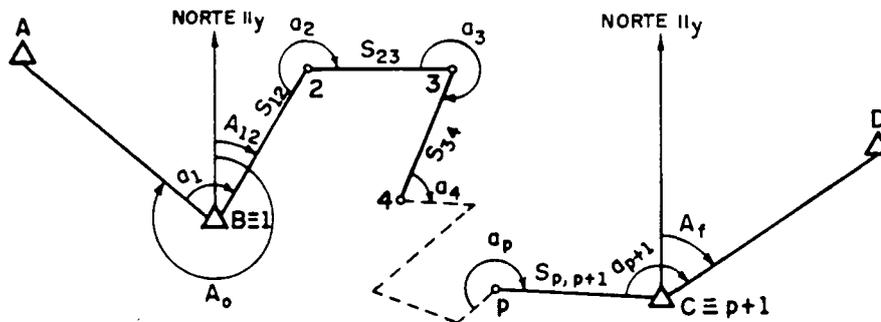
FIGURA 1.1 - POLIGONAL FECHADA DESENVOLVIDA NO PLANO TOPOGRÁFICO.



<sup>2</sup> O azimute topográfico  $A_{ik}$  da linha de extremos  $i$  e  $k$  é definido como o ângulo entre as projeções do meridiano e da linha  $ik$  no plano tangente em  $i$ .  $A_{ik}$  tem origem na direção norte, tem sentido horário e situa-se no intervalo  $0 \leq A_{ik} \leq 360^\circ$ .

A poligonal aberta desenvolvida no plano topográfico (figura 1.2) possui todos os elementos da poligonal fechada acrescentando uma outra base da rede de controle representada pela linha definida pelos pontos C e D

FIGURA 1.2 - POLIGONAL ABERTA DESENVOLVIDA NO PLANO TOPOGRÁFICO.



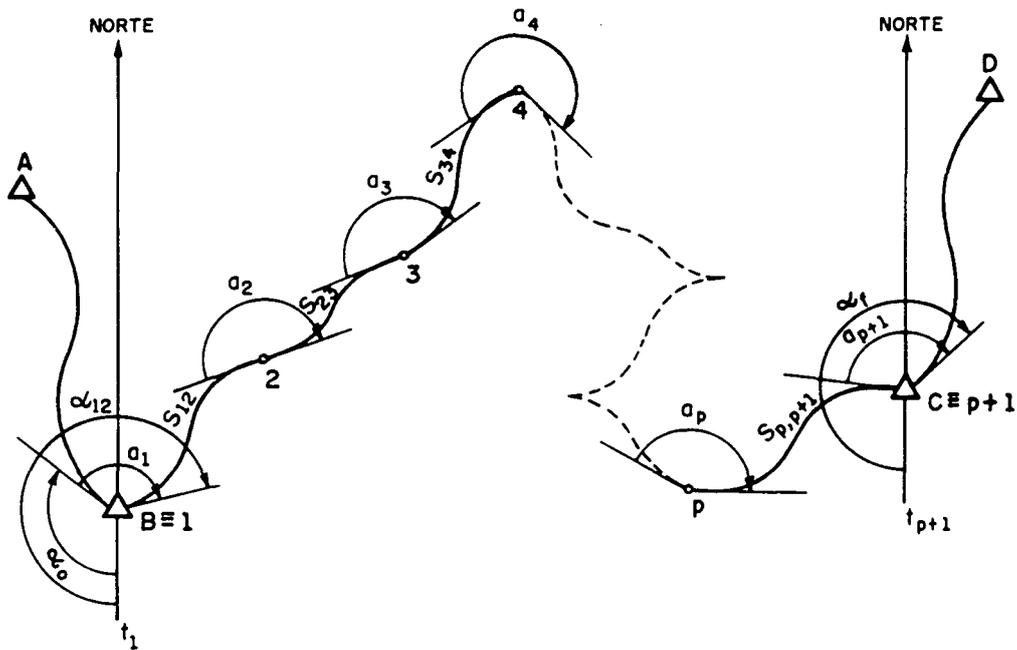
A poligonal geodésica desenvolvida na superfície do elipsóide (figura 1.3) está apoiada em duas bases distintas do Sistema Geodésico de Referência (SGR) definidas pelos pontos A, B e C, D. Os pontos 1 e (p+1) são, respectivamente, os pontos de início e de término do desenvolvimento da poligonal coincidentes, respectivamente com os pontos B e C;  $a_1, \dots, a_{p+1}$  são os ângulos elipsóidicos obtidos dos ângulos horizontais horários medidos na superfície física da Terra após as reduções de natureza geométrica que compreendem as reduções denominadas de ângulo secção normal-geodésica e efeito da altura do sinal, e a redução de natureza física (devido à inclinação da linha vertical);  $S_{12}, \dots, S_{p, p+1}$  são os comprimentos das geodésicas<sup>3</sup>;  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$  são respectivamente os azimutes<sup>4</sup> geodésicos inicial e final;  $t_1$  é a projeção do meridiano<sup>5</sup> geodésico do ponto  $B \equiv 1$  no plano tangente neste ponto e  $t_{p+1}$  é a projeção do meridiano geodésico do ponto  $C \equiv (p+1)$  no plano tangente neste ponto.

<sup>3</sup> A geodésica está definida na seção 7.2.

<sup>4</sup> O azimute geodésico está definido na seção 7.2.3

<sup>5</sup> O meridiano geodésico está definido na seção 7.2.3

FIGURA 1.3 - POLIGONAL GEODÉSICA.



O plano sobre o qual a poligonal topográfica se desenvolve é perpendicular à vertical em um ponto de altitude ortométrica  $h$  (situado acima, sobre ou abaixo da superfície física da Terra) e possui pontos genéricos  $i$  e  $k$  cuja convergência meridiana ( $\Delta\alpha_{ik}$ ) representa, em valor absoluto, o maior valor desprezível.

A altitude ortométrica de um ponto  $i$  ( $h_i$ ) é a distância contada ao longo da vertical desde o ponto  $i$  até o geóide.

A superfície física da Terra é a borda entre as massas sólidas ou líquida e a atmosfera (TORGE, 1980, p. 2).

A convergência meridiana relativa aos pontos  $i$  e  $k$  ( $\Delta\alpha_{ik}$ ) é a diferença entre o azimute da linha  $ik$  no ponto  $k$  e o azimute dessa mesma linha no ponto  $i$ . A sua expressão é dada por:

$$\Delta\alpha_{ik} = f(\varphi_i, \varphi_k, \lambda_i, \lambda_k) = \Delta\lambda_{ik} \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta\varphi_{ik}}{2} + \frac{(\Delta\lambda_{ik})^3}{12} \operatorname{sen} \varphi_i \cos^2 \varphi_i,$$

onde:  $\varphi_i$  e  $\varphi_k$  são as latitudes dos pontos i e k;

$\lambda_i$  e  $\lambda_k$  são as longitudes dos pontos i e k;

$$\Delta\lambda_{ik} = \lambda_k - \lambda_i, \Delta\varphi_{ik} = \varphi_k - \varphi_i \text{ e } \varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_k);$$

$\operatorname{sen} \varphi_m$  e  $\operatorname{sen} \varphi_i$  são negativos no hemisfério sul.

Esta expressão resulta valores no intervalo  $0 \geq \Delta\alpha_{ik} > 0$ .

Verifica-se que  $\Delta\alpha_{ik} = 0$  quando  $\varphi_i = \varphi_k = 0$  ou quando  $\lambda_i = \lambda_k = 0$ . Portanto, em outras situações  $\Delta\alpha_{ik} \neq 0$ .

Limita-se um plano topográfico por pontos i e k quando o maior valor para  $|\Delta\alpha_{ik}|$  possa ser considerado nulo.

As poligonais geodésicas são aquelas cujos valores observados são calculados sobre a superfície do modelo geométrico mediante reduções de natureza geométrica e física, e a convergência meridiana relativa a dois pontos i e k é considerada.

As poligonais abertas e fechadas recebem um único tratamento matemático.

O que se busca com esta dissertação é sistematizar os procedimentos de cálculo dos dados de poligonal de modo que haja unicidade de solução com estimativas, mediante a aplicação dos métodos de ajustamento:

- a) variação de coordenadas;
- b) equações de condição ou dos correlatos; e
- c) combinado.

Enfatiza-se a aplicação do teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento antes do ajustamento a fim de estimar a variância das coordenadas do último ponto mediante a

propagação das variâncias pré-estabelecidas e dos erros decorrentes do processo de medição (presentes nos valores observados) para o último ponto e após a  $i$ -ésima iteração do ajustamento, aplica-se o teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos. Espera-se que o nível de significância ( $\alpha$ ) adotado para o teste antes do ajustamento se mantenha para o teste após a  $i$ -ésima iteração do ajustamento.

Tendo em vista a utilização das poligonais fechadas para levantamentos destinados à regularização fundiária, procede-se ao estudo do cálculo da variância da área, estimativa não menos importante que, junto com as demais estimativas de acurácia obtidas no processo do ajustamento podem ser integradas nas documentações que dependam desses levantamentos.

A acurácia é uma palavra usada para descrever quanto o valor experimental está próximo do valor verdadeiro da grandeza; quanto menor for a soma de todos os erros sistemáticos e estatísticos, tanto maior é a acurácia do resultado (VUOLO, 1992, p. 69). Os erros sistemáticos estão relacionados a equipamentos incorretamente ajustados e/ou calibrados, ao uso de um procedimento incorreto pelo experimentador ou a uma falha conceitual; erros estatísticos, também chamados "erros aleatórios" ou "erros acidentais", são aqueles causados por variações incontroláveis e aleatórias dos instrumentos de medida, e de condições externas tais como temperatura, umidade do ar, etc. (HELENE e VANIN, 1991, p.1-2). A precisão, palavra utilizada sempre com relação aos erros estatísticos, indica de quanto as medidas são reprodutíveis; quanto menor for o erro estatístico, tanto maior é a precisão da medida (VUOLO, 1992, p. 69).

Introduz-se a aplicação do teste *data snooping* ao cálculo das poligonais topográficas.

Cada etapa desta dissertação é exemplificada com dados simulados (figuras 2.1 e quadro 2.1) referente aos métodos de ajustamento aplicado às poligonais topográficas e com

dados reais fornecidos pelo IBGE para exemplificar o cálculo do ajustamento de poligonal geodésica pelo método das equações de condição ou dos correlatos.

Uma preocupação constante nesta dissertação é expor com objetividade e clareza a fim de que haja contribuição também à formação dos alunos dos cursos de engenharia afins com as ciências geodésicas.

No capítulo 2 é estudado o teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento e sua aplicação às poligonais topográficas. A exemplificação com dados simulados encontra-se no final do capítulo.

No capítulo 3 é estudado o ajustamento de poligonais no plano topográfico pelo método de variação de coordenadas.

No capítulo 4 é estudado o ajustamento de poligonais no plano topográfico pelo método das equações de condição.

No capítulo 5 é estudado o ajustamento de poligonais no plano topográfico pelo método combinado.

Desenvolveu-se as equações que caracterizam cada um destes métodos aplicados a uma poligonal topográfica e sistematizou-se as iterações. A exemplificação com dados simulados para cada método encontra-se no final dos respectivos capítulos.

No capítulo 6 é estudada a variância da área definida pela poligonal no plano topográfico. A exemplificação numérica com dados simulados encontra-se no final do capítulo.

No capítulo 7 é estudado o ajustamento de poligonais geodésicas pelo método das equações de condição utilizando as coordenadas e azimute geodésicos. A exemplificação com dados reais de uma poligonal geodésica observada pelo IBGE no Estado de Santa Catarina encontra-se no final do capítulo.

No capítulo 8 é feita a análise de resultados compreendendo o teste qui-quadrado do erro de fechamento e os métodos de ajustamento aplicados à poligonal topográfica, o método das equações de condição aplicado à poligonal geodésica e a análise mediante a aplicação do teste *data snooping* às poligonais topográficas.

No capítulo 9 são feitas as conclusões e as recomendações decorrentes desta pesquisa.

## 2 TESTE QUI-QUADRADO DA FORMA QUADRÁTICA DO ERRO DE FECHAMENTO

### 2.1 INTRODUÇÃO

O teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento permite levar em conta os erros acidentais e por isso é adequado para as poligonais que se apoiam nas redes de controle (TESKEY *and* MACLEOD, 1988) como uma maneira segura de avaliá-la, dado um nível de significância ( $\alpha$ ).

O teste  $\chi^2$  da forma quadrática de erro de fechamento (JONES, 1970; KRAKIWSKY *and* THOMSON, 1978, p. 30; VANICEK *and* KRAKIWSKY, 1986, p. 237; TESKEY *and* MACLEOD, 1988) aplicado ao último ponto de uma poligonal (figura 2.1) é definido pela expressão:

$$q = E^T \sum_{y,x}^{-1} E \quad (2.1)$$

sendo:

$$E^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde:  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_x$  são, respectivamente, os "erros de fechamento" em coordenada y e em coordenada x, expressos por:

$$\varepsilon_y = \hat{y} - y \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_x = \hat{x} - x \quad (2.4)$$

onde:  $y$  e  $x$  são as coordenadas fixas do último ponto da poligonal,  $\hat{y}$  e  $\hat{x}$  são as coordenadas provisórias do último ponto da poligonal, obtidas com valores observados.

A matriz variância-covariância das coordenadas  $(y, x)$  é dada pela expressão:

$$\Sigma_{y,x} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde:  $\sigma_y^2, \sigma_x^2$  são, respectivamente, as variâncias das coordenadas  $y$  e  $x$ , e  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$  é a covariância das coordenadas  $y$  e  $x$ .

Os elementos de  $\Sigma_{y,x}$  podem ser calculados (GEMAEL, 1994, p.56-58) conforme exposto na seqüência.

## 2.2 SEQÜÊNCIA DE CÁLCULO DO TESTE

a) MVC dos azimutes:

Esta matriz é obtida mediante a aplicação da lei de propagação das covariâncias:

$$\Sigma_A = G \Sigma_a G^T \quad (2.6)$$

Onde:

$\Sigma_A$  é a matriz variância-covariância dos azimutes;

$\Sigma_a$  é a matriz variância-covariância dos ângulos;

$G$  é a matriz das derivadas parciais da função:  $A_{ik} = f(a_i)$

$$G = \frac{\partial A_{ik}}{\partial a_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{12}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_p} \\ \frac{\partial A_{23}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial A_{p,p+1}}{\partial a_p} \end{bmatrix}; i = 1, \dots, p; k = i + 1 \quad (2.7)$$

Onde:  $A_{ik}$  é o azimute de qualquer lado da poligonal, definido pelos pontos  $i$  e  $k$ , dado pela expressão:

$$A_{ik} = A_0 + \sum_{j=1}^i a_j - (i-1)180^\circ \quad j = 1, 2, \dots, i; k = i + 1 \quad (2.8)$$

onde:  $a_j$  são os ângulos horizontais horários observados nas estações.

A matriz variância-covariância dos ângulos horizontais, cujos valores numéricos são obtidos das especificações do instrumento, é expressa em sua forma geral por:

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{a_2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{a_{p+1}}^2 \end{bmatrix} (")^2 \quad (2.9)$$

$\Sigma_a$  é uma matriz diagonal se as medições forem não correlacionadas.

b) MVC das distâncias:

A matriz variância-covariância das distâncias, cujos valores numéricos são obtidos das especificações do instrumento, é expressa em sua forma geral por:

$$\Sigma_{S_{ik}} = \begin{bmatrix} \sigma_{S_{12}}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{S_{23}}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{S_{p,p+1}}^2 \end{bmatrix} (m^2) \quad (2.10)$$

c) MVC das distâncias e azimutes:

A matriz variância-covariância das distâncias e azimutes consiste em reunir as matrizes variância-covariâncias da distância e do azimute em uma única matriz. A sua forma geral é expressa por:

$$\Sigma_{S, A} = \begin{bmatrix} \Sigma_S & 0 \\ 0 & \Sigma_A \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

d) MVC das coordenadas do último ponto:

Aplicando ainda a lei de propagação das covariâncias (2.6) para as coordenadas do último ponto, a matriz variância-covariância das coordenadas do último ponto resulta a forma:

$$\Sigma_{y, x} = D \Sigma_{S, A} D^T \quad (2.12)$$

Onde:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{12}} & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{23}} & \dots & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial S_{p,p+1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{12}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{23}} & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial y_{p+1}}{\partial A_{p,p+1}} \\ \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{12}} & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{23}} & \dots & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial S_{p,p+1}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{12}} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{23}} & \dots & \frac{1}{\rho} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial A_{p,p+1}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{p+1} &= y_1 + \sum_{i=1}^p S_{ik} \cos A_{ik} \\ x_{p+1} &= x_1 + \sum_{i=1}^p S_{ik} \operatorname{sen} A_{ik} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, p; k = i+1 \quad (2.14)$$

O fator  $\frac{1}{\rho} = \frac{\pi}{648000} \left( \frac{\text{rad}}{''} \right)$  foi introduzido na (2.13) para que os valores de  $\Sigma_A$

expressos em ( $''$ )<sup>2</sup> se convertam em radianos, quando for calculada a (2.12).

e) Aplicação do teste:

A poligonal será aceita, se:

$$\chi_{v; 0,5\alpha}^2 < q < \chi_{v; 1-0,5\alpha}^2 \quad (2.15)$$

Onde:

$v = 2$  graus de liberdade;

$\alpha =$  nível de significância adotado.

### 2.3 SIMULAÇÃO COM A SEQUÊNCIA 2.2

Uma poligonal, representada por sua caderneta de campo (quadro 2.1) e por seu esboço (figura 2.1) é apresentada para exemplificar a aplicação do teste, adotando  $\alpha = 1\%$

As coordenadas fixas do ponto  $1 \equiv (p+1)$  valem  $x = y = 10000,00$  m

O azimute fixo da linha 1-A vale  $315^\circ 00' 00,0''$

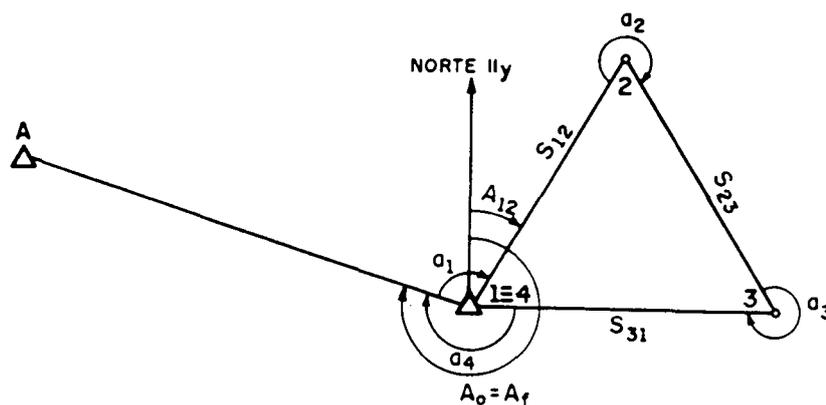
Os desvios-padrão das distâncias  $S_{ik}$  são dados por  $\sigma_s = (5 \text{ mm} + 5E-6 \times S)$

Os desvios-padrão dos ângulos  $a_i$  valem  $\sigma_a = 0,8''$ .

QUADRO 2.1 - DADOS OBSERVADOS E CALCULADOS PROVISORIAMENTE.

| Ponto<br>i | Ângulo $a_i$<br>Observado | $\sigma_a^2$<br>( $''$ ) <sup>2</sup> | Linha<br>$ik$ | Distância<br>$S_{ik}$<br>Observada<br>(m) | $\sigma_s^2$<br>(m <sup>2</sup> ) | Azimute $A_{ik}$<br>Provisório | Ponto<br>i | Coordenadas             |                        |
|------------|---------------------------|---------------------------------------|---------------|---|-----------------------------------|--------------------------------|------------|-------------------------|------------------------|
|            |                           |                                       |               |   |                                   |                                |            | $\hat{x}$               | $\hat{y}$              |
| 1          | 90°00'01,0"               | 0,64                                  |               |   |                                   |                                |            |                         |                        |
| 2          | 300°00'00,1"              | 0,64                                  | 1-2           | 1000,000                                  | 0,0001                            | 45°00'01,0"                    | 2          | 10707,11021             | 10707,10335            |
| 3          | 300°00'00,8"              | 0,64                                  | 2-3           | 1000,005                                  | 0,0001                            | 165°00'01,1"                   | 3          | 10965,92540             | 9741,17132             |
| 4          | 210°00'00,0"              | 0,64                                  | 3-4           | 1000,010                                  | 0,0001                            | 285°00'01,9"                   | 4          | 9999,99230              | 10000,00185            |
|            |                           |                                       | 4-A           |   |                                   | 315°00'01,9"                   |            |                         |                        |
|            |                           |                                       |               |   |                                   | $\epsilon_A = +1,9''$          |            | $\epsilon_x = -0,00770$ | $\epsilon_y = 0,00185$ |

FIGURA 2.1 - POLIGONAL TOPOGRÁFICA FECHADA COM DADOS OBSERVADOS.



Para uma poligonal fechada as coordenadas do último ponto ( $p+1$ ) são iguais às do primeiro (1), o que não ocorre calculando-as com os valores observados. O ajustamento das observações fornecerá essa igualdade.

a) Matriz  $\Sigma_A$ :

$$\Sigma_A = G \Sigma_a G^T$$

$$G = \frac{\partial A_{ik}}{\partial a_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{12}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{12}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial A_{23}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{23}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{31}}{\partial a_1} & \frac{\partial A_{31}}{\partial a_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{ik} = A_0 + \sum_{j=1}^i a_j - (i-1)180^\circ \quad j = 1, 2, \dots, i ; k = i+1$$

$$A_{12} = A_0 + a_1 \quad - 0 \times 180^\circ = 45^\circ 00' 01,0''$$

$$A_{23} = A_0 + a_1 + a_2 \quad - 1 \times 180^\circ = 165^\circ 00' 01,1''$$

$$A_{31} = A_0 + a_1 + a_2 + a_3 \quad - 2 \times 180^\circ = 285^\circ 00' 01,9''$$

Logo:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do quadro (2.1), obtém-se:

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0,64 \end{bmatrix} (")^2$$

Substituindo as matrizes  $G$  e  $\Sigma_a$  na (2.6), obtém-se:

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,64 & 0,64 & 0,64 \\ 0,64 & 1,28 & 1,28 \\ 0,64 & 1,28 & 1,92 \end{bmatrix} (")^2$$

b) Matriz  $\Sigma_s$ :

Do quadro (2.1), obtém-se:

$$\Sigma_s = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix} (\text{m})^2$$

c) Matriz  $\Sigma_{s,A}$ :

Substituindo  $\Sigma_s$  e  $\Sigma_A$  na (2.11):

$$\Sigma_{s,A} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64 & 0,64 & 0,64 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64 & 1,28 & 1,28 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64 & 1,28 & 1,92 \end{bmatrix}$$

d) Matriz  $\Sigma_{y,x}$ :

Derivando a (2.14), substituindo na (2.13) e fazendo a transposta da matriz D,

obtem-se:

$${}_6D_2^T = \begin{bmatrix} \cos A_{12} & \text{sen } A_{12} \\ \cos A_{23} & \text{sen } A_{23} \\ \cos A_{31} & \text{sen } A_{31} \\ -\frac{1}{\rho} S_{12} \text{sen } A_{12} & \frac{1}{\rho} S_{12} \cos A_{12} \\ -\frac{1}{\rho} S_{23} \text{sen } A_{23} & \frac{1}{\rho} S_{23} \cos A_{23} \\ -\frac{1}{\rho} S_{31} \text{sen } A_{31} & \frac{1}{\rho} S_{31} \cos A_{31} \end{bmatrix}$$

Substituindo os correspondentes valores numéricos, a matriz  $D^T$  resultante será:

$${}_6D_2^T = \begin{bmatrix} 7,07103353028E-1 & 7,07110209329E-1 \\ -9,6592720654E-1 & 2,58813893857E-1 \\ 2,58827942682E-1 & -9,65923442146E-1 \\ -3,42816703534E-3 & 3,42813379505E-3 \\ -1,25477143985E-3 & -4,68297066162E-3 \\ 4,68297582584E-3 & 1,25484582499E-3 \end{bmatrix}$$

Efetuada o produto (2.12), obtém-se:

$$\Sigma_{y,x} = \begin{bmatrix} 0,000172 & -0,000004 \\ -0,000004 & 0,000159 \end{bmatrix}$$

e) Aplicação do Teste:

$$q = E^T \Sigma_{y,x}^{-1} E$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00185 \\ -0,00770 \end{bmatrix} (m)$$

$$q = \begin{bmatrix} 0,00185 & -0,00770 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,000172 & -0,000004 \\ -0,000004 & 0,000159 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,00185 \\ -0,00770 \end{bmatrix}$$

$$q = 0,390214 \cong 0,39$$

Para o nível de significância  $\alpha = 1\%$ .

$\chi^2$  teórico com  $\alpha = 1\%$

$$0,5 \alpha = 0,005$$

$$1 - 0,5\alpha = 0,995$$

$\nu = 2$  graus de liberdade

$$\chi^2_{2; 0,005} = 0,01$$

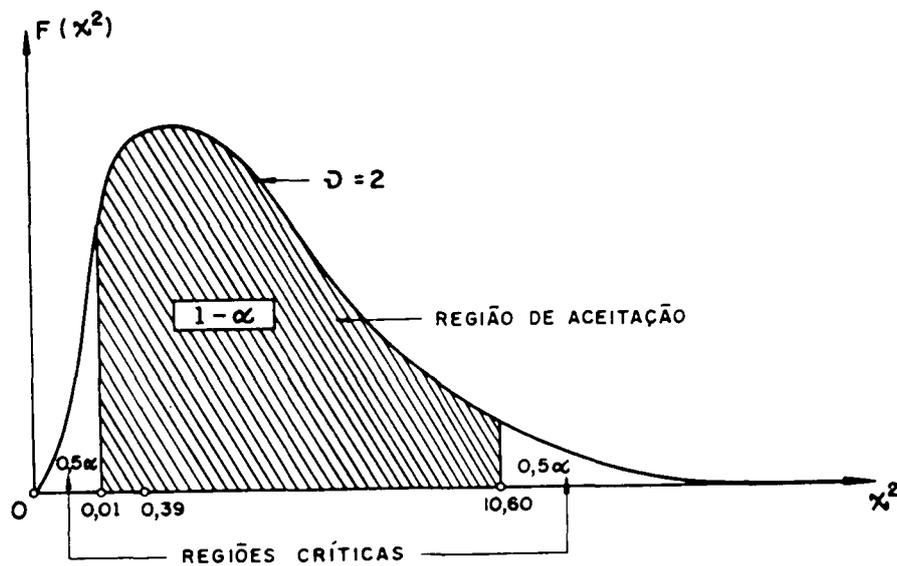
$$\chi^2_{2; 0,995} = 10,60$$

$$\chi^2_{\nu; 0,5\alpha} < q < \chi^2_{\nu; 1-0,5\alpha}$$

$$0,01 < 0,39 < 10,60$$

A poligonal será aceita ao nível de significância de 1%. Este nível de significância é mantido no teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos que compara a variância da unidade de peso *a priori* com a variância da unidade de peso *a posteriori* no ajustamento.

FIGURA 2.2 - GRÁFICO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE QUI-QUADRADO PARA  $\nu = 2$ .



### 3 AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO MÉTODO DE VARIAÇÃO DE COORDENADAS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O método de variação de coordenadas é uma aplicação do método paramétrico ao ajustamento de triangulação, trilateração, poligonal ou combinação de tais processos de levantamento permitindo obter as coordenadas finais dos vértices mediante as correções ( $dx_i$  e  $dy_i$ ) que são adicionadas às coordenadas provisórias, calculadas com os valores observados (GEMAEL, 1994, p. 213).

Em uma poligonal desenvolvida no plano topográfico são observados ângulos e distâncias. Isto requer que equações de observação de distância e de ângulo sejam estabelecidas a fim de propiciar o ajustamento tanto das coordenadas ( $x$  e  $y$ ) como dos valores observados. O estabelecimento das equações de observação no plano topográfico, uma para cada observação, se fundamenta nas fórmulas diferenciais que exprimem a variação do azimute ou do comprimento do lado quando variam as coordenadas dos pontos extremos.

Essas equações de observação no plano (BLACHUT *et al.*, 1979, p. 123-126; SHEPHERD, 1981, p. 43-45; GEMAEL, 1994, p. 214-215) são desenvolvidas com base na figura (3.1)

Ao final do ajustamento, o teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos (VANICEK *and* KRAKIWSKY, 1986, p. 237) é aplicado para fazer a comparação entre a variância de

unidade de peso *a priori* e a variância de unidade de peso *a posteriori*. Esta comparação é um indicador da qualidade do ajustamento.

Estuda-se neste capítulo duas deduções matemáticas que conduzem ao modelo linearizado.

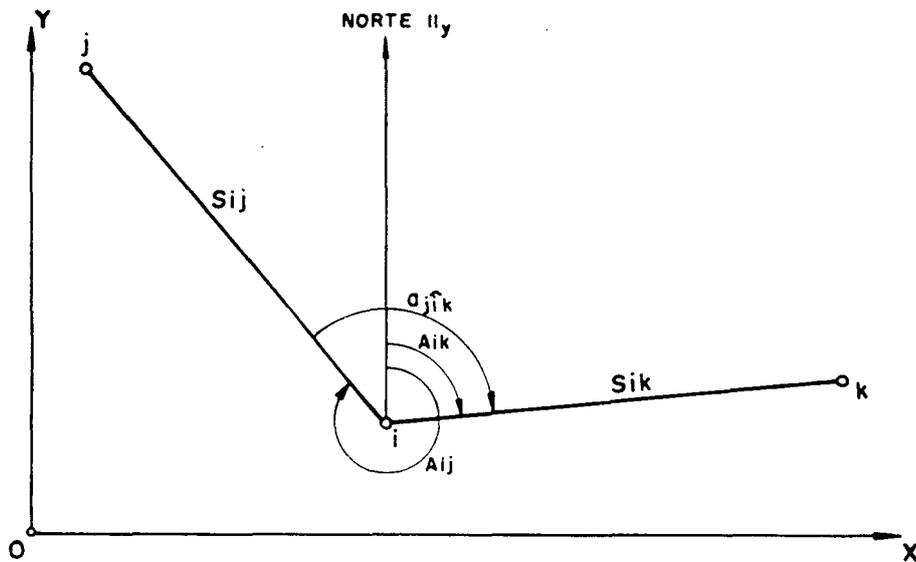
A exemplificação numérica é feita com dados simulados oriundos da poligonal apresentada pela figura (2.1) e dados numéricos apresentados pelo quadro (2.1).

### 3.2 PRIMEIRA DEDUÇÃO

A figura (3.1) apresenta as estações genéricas (j, i, k) de um levantamento no plano topográfico, em cujo ponto (i) considera-se os instrumentos medidores de distância e de ângulo estacionados, observando o ponto situado atrás (j) por uma distância ( $S_{ij}$ ), e observando o ponto situado a frente (k) por uma distância ( $S_{ik}$ ) e ângulo horizontal horário ( $a_{jik}$ ); observa-se também a orientação<sup>6</sup> da linha (ij) mediante o azimute ( $A_{ij}$ ) e a orientação da linha (ik) mediante o azimute ( $A_{ik}$ ). Sobre esta geometria se estabelecem as equações de observação fundamentais para o ajustamento pelo método de variação de coordenadas desenvolvidas a seguir.

<sup>6</sup> A orientação de uma linha mediante o azimute pode ser feita transportando o azimute fixo da base de apoio da poligonal que é calculado utilizando as coordenadas dos pontos extremos dessa base.

FIGURA 3.1 - DISTÂNCIAS, ÂNGULOS E AZIMUTES NO PLANO.



### 3.2.1 Equação De Observação No Plano Para A Distância $S_{ij}$

A equação de observação da distância  $S_{ij}$ , é dada por:

$$S_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad (3.1)$$

Diferenciando a (3.1):

$$2S_{ij} dS_{ij} = 2(x_j - x_i)(dx_j - dx_i) + 2(y_j - y_i)(dy_j - dy_i)$$

$$dS_{ij} = \frac{(x_j - x_i)(dx_j - dx_i)}{S_{ij}} + \frac{(y_j - y_i)(dy_j - dy_i)}{S_{ij}}$$

$$= \text{sen} A_{ij}(dx_j - dx_i) + \text{cos} A_{ij}(dy_j - dy_i)$$

$$dS_{ij} = -\text{sen} A_{ij} dx_i - \text{cos} A_{ij} dy_i + \text{sen} A_{ij} dx_j + \text{cos} A_{ij} dy_j \quad (3.2)$$

mas,

$$dS_{ij} = S_{ij}^a - S_{ij}^c + V_{s_{ij}} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) na (3.2) e fazendo a simplificação (SHEPHERD, 1981, p. 44):

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} &= \text{sen } A_{ij} = K_{ij} \\ \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} &= \text{cos } A_{ij} = L_{ij} \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

a equação de observação da distância se torna:

$$f_i = -K_{ij} dx_i - L_{ij} dy_i + K_{ij} dx_j + L_{ij} dy_j + S_{ij}^C - S_{ij}^o = V_{S_{ij}} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Equação De Observação No Plano Para O Azimute $A_{ij}$

A equação para o azimute  $A_{ij}$  é dada por:

$$\text{tg } A_{ij} = \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (3.6)$$

Diferenciando a (3.6):

$$\frac{1}{\cos^2 A_{ij}} dA_{ij} = \frac{(y_j - y_i)(dx_j - dx_i) - (x_j - x_i)(dy_j - dy_i)}{(y_j - y_i)^2}$$

$$dA_{ij} = \frac{\cos^2 A_{ij} (y_j - y_i)(dx_j - dx_i) - \cos^2 A_{ij} (x_j - x_i)(dy_j - dy_i)}{(y_j - y_i)^2}, \quad (3.7)$$

mas:

$$\frac{\cos^2 A_{ij}}{(y_j - y_i)^2} = \frac{1}{S_{ij}^2} \quad (3.8)$$

e:

$$\left. \begin{aligned} y_j - y_i &= S_{ij} \text{cos } A_{ij} \\ x_j - x_i &= S_{ij} \text{sen } A_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Substituindo a (3.8) e a (3.9) na (3.7) e simplificando:

$$dA_{ij} = \frac{1}{S_{ij}} \left[ \cos A_{ij} (dx_j - dx_i) - \operatorname{sen} A_{ij} (dy_j - dy_i) \right] \quad (3.10)$$

Exprimindo a (3.10) em segundos de arco:

$$d''A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} \left[ \cos A_{ij} (dx_j - dx_i) - \operatorname{sen} A_{ij} (dy_j - dy_i) \right] \quad (3.11)$$

$$d''A_{ij} = \frac{648000}{\pi S_{ij}} (-\cos A_{ij} dx_i + \cos A_{ij} dx_j + \operatorname{sen} A_{ij} dy_i - \operatorname{sen} A_{ij} dy_j), \quad (3.12)$$

mas:

$$d''A_{ij} = A_{ij}^{o''} - A_{ij}^{c''} + V_{A_{ij}}'' \quad (3.13)$$

Substituindo a (3.4) e a (3.13) na (3.12) e fazendo a simplificação (op. cit, p. 44):

$$\left. \begin{aligned} \frac{648000}{\pi} \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} &= \frac{648000}{\pi S_{ij}} \cos A_{ij} = P_{ij} \\ \frac{648000}{\pi} \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} &= \frac{648000}{\pi S_{ij}} \operatorname{sen} A_{ij} = Q_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

a equação de observação no plano para o azimute  $A_{ij}$  resulta:

$$f_i = -P_{ij} dx_i + P_{ij} dx_j + Q_{ij} dy_i - Q_{ij} dy_j + A_{ij}^{c''} - A_{ij}^{o''} = V_{A_{ij}}'' \quad (3.15)$$

### 3.2.3 Equação De Observação No Plano Para O Ângulo $a_{jik}$

É obtida pela diferença entre as equações dos azimutes  $A_{ik}$  e  $A_{ij}$ , considerando a partir de um vértice ocupado  $i$ , como vértice atrás,  $j$  e como vértice à frente,  $k$ .

Conforme a (3.15), exprime-se a equação de observação para o azimute  $A_{ik}$ :

$$-P_{ik} dx_i + P_{ik} dx_k + Q_{ik} dy_i - Q_{ik} dy_k + A_{ik}^{c''} - A_{ik}^{o''} = V_{A_{ik}}'' \quad (3.16)$$

Efetuada a diferença: (3.16) menos (3.15) encontra-se a equação de observação para o ângulo  $a_{jik}$ :

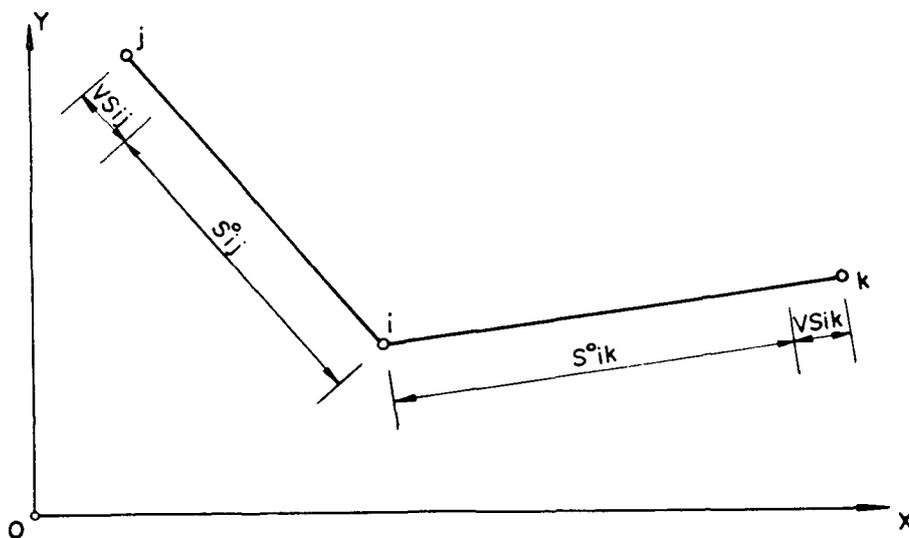
$$\begin{aligned} f_i = & (P_{ij} - P_{ik})dx_i + (Q_{ik} - Q_{ij})dy_i - P_{ij}dx_j + Q_{ij}dy_j + P_{ik}dx_k \\ & - Q_{ik}dy_k + a_{jik}^c - a_{jik}^o = V_{a_{jik}}'' \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.3 SEGUNDA DEDUÇÃO

#### 3.3.1 Equação De Observação De Distância

A equação de observação de distância dada a seguir, é escrita uma para cada lado  $p$  de uma poligonal. Na figura (3.2),  $S_{ij}^o$  é o comprimento observado da linha  $ij$  e  $V_{S_{ij}}$  é o resíduo na observação.

FIGURA 3.2 - DISTÂNCIA OBSERVADA.



Desta forma, a equação de observação da distância  $S_{ik}$  é dada por:

$$(S_{ik}^o + V_{S_{ik}}) = \left[ (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

então:

$$(S_{ik}^{\circ} + V_{S_k}) = F(x_i, y_i, x_k, y_k) = \left[ (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

A (3.19) é uma equação não-linear e pode ser linearizada por expansões das séries de Taylor, desprezando todos os termos de 2ª ordem e maior (WOLF, 1969), resultando:

$$F(x_i, y_i, x_k, y_k) = F(x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}) + \frac{\partial F}{\partial x_i^{\circ}} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i^{\circ}} dy_i + \frac{\partial F}{\partial x_k^{\circ}} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k^{\circ}} dy_k \quad (3.20)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i^{\circ} + dx_i \\ y_i &= y_i^{\circ} + dy_i \\ x_k &= x_k^{\circ} + dx_k \\ y_k &= y_k^{\circ} + dy_k \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Observações:

- $x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}$  são as coordenadas provisórias dos vértices, obtidas mediante o transporte e valores observados.
- $dx_i, dy_i, dx_k, dy_k$  são as incógnitas e representam as correções a serem adicionadas às coordenadas provisórias dos vértices para a obtenção das coordenadas finais.
- $\frac{\partial F}{\partial x_i}$  é a derivada parcial de F com relação a  $x_i$  avaliada para  $x_i^{\circ}$ ; analogamente para as outras derivadas.

Calculando as derivadas parciais da (3.19):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \left[ (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} 2(x_k - x_i) = -\frac{x_k - x_i}{S_{ik}} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{y_k - y_i}{S_{ik}} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = -\frac{x_i - x_k}{S_{ik}} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = -\frac{y_i - y_k}{S_{ik}} \quad (3.25)$$

Substituindo a (3.22), a (3.23), a (3.24) e a (3.25) na (3.20):

$$\begin{aligned} F(x_i, y_i, x_k, y_k) = & F(x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}) + \frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_i + \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_i \\ & + \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_k + \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_k \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{mas } F(x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}) = S_{ik}^c \quad (3.27)$$

Substituindo a (3.19) e a (3.27) na (3.26):

$$S_{ik}^c + V_{s_{ik}} = S_{ik}^c + \frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_i + \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_i + \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_k + \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_k \quad (3.28)$$

Ordenando os termos:

$$\frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_i + \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_i + \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dx_k + \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} dy_k + S_{ik}^c - S_{ik}^{\circ} = V_{s_{ik}} \quad (3.29)$$

Matricialmente, as equações de observação de distância podem ser expressas por:

$${}_n A_u \quad {}_u X_l + {}_n L = {}_n V_l \quad (3.30)$$

onde:

${}_n A_u$  é a matriz de tamanho  $(n \times u)$  dos coeficientes das incógnitas, dada por:

$${}_n A_u = \frac{\partial F}{\partial X_i^a} \bigg|_{X_i^{\circ}} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} & \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} & \frac{x_k^{\circ} - x_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} & \frac{y_k^{\circ} - y_i^{\circ}}{S_{ik}^{\circ}} \end{array} \right] \quad (3.31)$$

${}_u X_1$  é o vetor de tamanho  $(u \times 1)$  das incógnitas dado por:

$${}_u X_1 = \begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

${}_n L_1$  é o vetor de tamanho  $(n \times 1)$  dos termos independentes das equações de observação de distância, dado por:

$${}_n L_1 = [S_{ik}^c - S_{ik}^o] \quad (3.33)$$

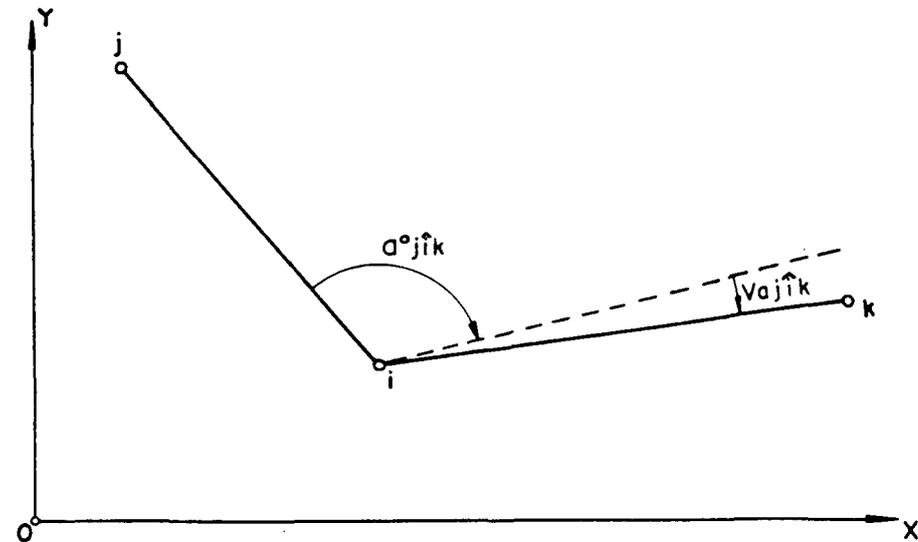
${}_n V_1$  é o vetor de tamanho  $(n \times 1)$  dos resíduos das distâncias observadas, dado por:

$${}_n V_1 = [V_{s_{ik}}] \quad (3.34)$$

### 3.3.2 Equação De Observação De Ângulo

A equação de observação de ângulo dada a seguir, é escrita uma para cada ângulo  $(a_{jik})$  de uma poligonal. Na figura (3.3),  $a_{jik}^o$  é o ângulo observado entre as linhas  $ij$  e  $ik$  e  $V_{a_{jik}}$  é o resíduo na observação.

FIGURA 3.3 - ÂNGULO OBSERVADO.



Desta forma, a equação de observação do ângulo  $a_{jik}$  é dada por:

$$a_{jik}^{\circ} + Va_{jik} = F(x_j, y_j, x_i, y_i, x_k, y_k) = \arctg \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} - \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad (3.35)$$

Da mesma maneira que a (3.19), a (3.35) é uma equação não-linear e pode ser linearizada por expansões das séries de Taylor, desprezando todos os termos de 2ª ordem e maior (op. cit.), resultando:

$$F(x_j, y_j, x_i, y_i, x_k, y_k) = F(x_j^{\circ}, y_j^{\circ}, x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}) + \frac{\partial F}{\partial x_j^{\circ}} dx_j + \frac{\partial F}{\partial y_j^{\circ}} dy_j \\ + \frac{\partial F}{\partial x_i^{\circ}} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i^{\circ}} dy_i + \frac{\partial F}{\partial x_k^{\circ}} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k^{\circ}} dy_k \quad (3.36)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_j} &= - \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)^2} \right] \frac{1}{y_j - y_i} = - \left[ \frac{1}{\frac{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \right] \frac{1}{(y_j - y_i)} = \\
&= - \frac{y_j - y_i}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2} = - \frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} = + \frac{y_i - y_j}{S_{ij}^2} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_j} &= - \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)^2} \right] \left[ -(y_j - y_i)^{-2} \cdot (x_j - x_i) \right] = \\
&= + \frac{x_j - x_i}{(y_j - y_i)^2 + \frac{(x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} = - \frac{x_i - x_j}{S_{ij}^2} \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left( \frac{x_k - x_i}{y_k - y_i} \right)^2} \left( - \frac{1}{y_k - y_i} \right) - \frac{1}{1 + \left( \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)^2} \left( - \frac{1}{y_j - y_i} \right) = \\
&= - \frac{1}{\frac{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2}{(y_k - y_i)^2}} \frac{1}{(y_k - y_i)} + \frac{1}{\frac{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \frac{1}{(y_j - y_i)} \\
&= - \frac{y_k - y_i}{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} + \frac{y_j - y_i}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2} \\
&= \frac{y_i - y_k}{S_{ik}^2} - \frac{y_i - y_j}{S_{ij}^2} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)^2} \left[ (y_k - y_i)^{-2} (x_k - x_i) \right] - \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \\
&\quad \left[ (y_j - y_i)^{-2} (x_j - x_i) \right] = \frac{x_k - x_i}{(y_k - y_i)^2 + \frac{(x_k - x_i)^2 (y_k - y_i)^2}{(y_k - y_i)^2}} \\
&\quad - \frac{x_j - x_i}{(y_j - y_i)^2 + \frac{(x_j - x_i)^2 (y_j - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} = \frac{x_k - x_i}{S_{ik}^2} - \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)^2} \left( \frac{1}{y_k - y_i} \right) = \frac{1}{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} \left( \frac{1}{y_k - y_i} \right) = \\
&= -\frac{y_i - y_k}{S_{ik}^2} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_k} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right)^2} \left[ -(y_k - y_i)^{-2} (x_k - x_i) \right] = \\
&= -\frac{x_k - x_i}{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} = +\frac{x_i - x_k}{S_{ik}^2} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Substituindo a (3.27), a (3.38), a (3.39), a (3.40), a (3.41) e a (3.42) na (3.36):

$$\begin{aligned}
F(x_j, y_j, x_i, y_i, x_k, y_k) &= F(x_j^{\circ}, y_j^{\circ}, x_i^{\circ}, y_i^{\circ}, x_k^{\circ}, y_k^{\circ}) + \frac{y_i^{\circ} + y_j^{\circ}}{(S_{ij}^{\circ})^2} dx_j - \frac{x_i^{\circ} - x_j^{\circ}}{(S_{ij}^{\circ})^2} dy_j + \left( \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{(S_{ik}^{\circ})^2} - \frac{y_i^{\circ} - y_j^{\circ}}{(S_{ij}^{\circ})^2} \right) dx_i \\
&\quad + \left( \frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{(S_{ik}^{\circ})^2} - \frac{x_i^{\circ} - x_j^{\circ}}{(S_{ij}^{\circ})^2} \right) dy_j - \frac{y_i^{\circ} - y_k^{\circ}}{(S_{ik}^{\circ})^2} dx_k + \frac{x_i^{\circ} - x_k^{\circ}}{(S_{ik}^{\circ})^2} dy_k \tag{3.43}
\end{aligned}$$

mas,

$$F(x_j^\circ, y_j^\circ, x_i^\circ, y_i^\circ, x_k^\circ, y_k^\circ) = a_{jik}^c \quad (3.44)$$

substituindo a (3.35) e a (3.44) na (3.43):

$$\begin{aligned} a_{jik}^\circ + Va_{jik} &= a_{jik}^c + \frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} dx_j - \frac{x_i^\circ - x_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} dy_j + \left( \frac{y_i^\circ - y_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} - \frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} \right) dx_i \\ &\quad + \left( \frac{x_k^\circ - x_i^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} - \frac{x_j^\circ - x_i^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} \right) dy_i - \frac{y_i^\circ - y_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} dx_k + \frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} dy_k \end{aligned} \quad (3.45)$$

ordenando:

$$\begin{aligned} &\frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} dx_j + \frac{x_j^\circ - x_i^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} dy_j + \left( \frac{y_i^\circ - y_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} - \frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} \right) dx_i + \left( \frac{x_i^\circ - x_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} - \frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} \right) dy_i \\ &+ \frac{y_k^\circ - y_i^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} dx_k + \frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} dy_k + a_{jik}^c - a_{jik}^\circ = Va_{jik} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nesta expressão  $a_{jik}^c$ ,  $a_{jik}^\circ$  e  $Va_{jik}$  são medidos em radianos; para converter em segundos de arco, os coeficientes das incógnitas são multiplicados por

$$\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \cong \frac{1}{\text{sen } 1''} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right).$$

Matricialmente, as equações de observação de ângulo podem se expressas por:

$${}_n A_u \quad {}_u X_1 + {}_n L_1 = {}_n V_1 \quad (3.47)$$

onde:

${}_n A_u$  é a matriz de tamanho  $(n \times u)$  dos coeficientes das incógnitas dada por:

$${}_n A_u = \left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} & \frac{x_j^\circ - x_i^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} & \frac{y_i^\circ - y_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} & -\frac{y_i^\circ - y_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} & \frac{x_i^\circ - x_j^\circ}{(S_{ij}^\circ)^2} & -\frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} & \frac{y_k^\circ - y_i^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} & \frac{x_i^\circ - x_k^\circ}{(S_{ik}^\circ)^2} \end{array} \right] \quad (3.48)$$

${}_u X_1$  é o vetor de tamanho  $(u \times 1)$  das incógnitas dado por:

$${}_u X_1 = \begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \\ dx_i \\ dy_i \\ dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

${}_n L_1$  é o vetor de tamanho  $(n \times 1)$  dos termos independentes das equações de observação de ângulo, dado por:

$${}_n L_1 = \left[ a_{jik}^c - a_{jik}^\circ \right] \quad (3.50)$$

${}_n V_1$  é o vetor de tamanho  $(n \times 1)$  dos resíduos dos ângulos observados, dado por:

$${}_n V_1 = \left[ Va_{jik} \right] \quad (3.51)$$

### 3.4 SEQUÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO

#### 3.4.1 Primeira Etapa

As expressões matriciais utilizadas nesta secção tem suas deduções em GEMAEL (1994, cap. 7).

a) Modelo matemático natural:

$$F(x^a) = L^a \quad (3.52)$$

Os valores observados ajustados são função explícita das coordenadas ajustadas.

$${}_u X_i^a = \begin{bmatrix} x_i^a \\ y_i^a \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

b) Modelo matemático linearizado:

$${}_n A_u \quad {}_u X_i + {}_n L_i = {}_n V_i \quad (3.54)$$

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_i^a} \right|_{X_i^o} \quad (3.55)$$

c) Equações Normais:

$${}_u A_n^T P_n A_u \quad {}_u X_i + {}_u A_n^T P_n L_i = {}_u 0_i \quad (3.56)$$

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L, \quad (3.57)$$

fazendo:

$$N^{-1} = (A^T P A)^{-1} \quad (3.58)$$

$$U = A^T P L, \quad (3.59)$$

então:

$$X = -N^{-1} U \quad (3.60)$$

d) Coordenadas ajustadas:

$$X^a = X^o + X \quad (3.61)$$

e) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{X^T U + L^T P L}{n - u} \quad (3.62)$$

$$V = AX + L \quad (3.63)$$

f) MVC das coordenadas ajustadas:

$$\Sigma X^a = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (3.64)$$

g) Valores observados ajustados:

$$L^a = L^b + V \quad (3.65)$$

h) MVC dos valores observados ajustados:

$$\Sigma L^a = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^T \quad (3.66)$$

i) MVC dos resíduos:

$$\Sigma V = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} - \Sigma L^a \quad (3.67)$$

j) Teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos:

A comparação entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  se baseia no fato de que a forma quadrática  $V^T P V$  tem distribuição  $\chi^2$  com  $(n - u)$  graus de liberdade (GEMAEL, 1994, p. 123) e tem por finalidade verificar se estatisticamente  $\sigma_0^2$  é igual a  $\hat{\sigma}_0^2$ ; esta última é obtida do ajustamento.

Estabelece-se o teste de hipótese:

$$\text{Hipótese básica (H}_0\text{)} \longrightarrow H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$\text{Hipótese alternativa (H}_1\text{)} \longrightarrow H_1: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Calcula-se:

$$\chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (n - u), \text{ com } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}$$

$$\therefore \chi^{*2} = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2}, \text{ que comparado com os valores teóricos:}$$

$\chi_{v; 0,5\alpha}^2$  e  $\chi_{v; 1-0,5\alpha}^2$ , fornece o resultado final do teste.

$H_0$  é aceita, ao nível de significância  $\alpha$ , se:

$$\chi_{v; 0,5\alpha}^2 < \chi^{*2} < \chi_{v; 1-0,5\alpha}^2$$

### 3.4.2 Iteração

Em virtude de ter feito a linearização (3.20) e (3.36), far-se-ão necessárias as iterações (GEMAEL, 1994, p. 179-180) e são calculadas até que o vetor das correções se anule, fixado um dado número de decimais.

A seqüência de cálculo é mostrada a seguir:

a) 1ª iteração:

$$X^* = X1^0 \qquad N1^{-1} = (A1^T P A1)^{-1} \qquad X1^* = X1^0 + X1$$

$$A1 = \left. \frac{\partial F}{\partial X^*} \right|_{X1^0} \qquad U1 = A1^T P L1 \qquad V1 = A1 X1 + L1$$

$$L1 = F(X1^0) - L^b \qquad X1 = -N1^{-1} U1 \qquad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{V1^T P V1}{n - u}$$

b) 2ª Iteração:

$$\begin{aligned}
 X1^a &= X2^o & N2^{-1} &= (A2^T P A2)^{-1} & X2^a &= X2^o + X2 \\
 A2 &= \left. \frac{\partial F}{\partial X^a} \right|_{X2^o} & U2 &= A2^T P L2 & V2 &= A2 X2 + L2 \\
 L2 &= F(X2^o) - L^b & X2 &= -N2^{-1} U2 & \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{V2^T P V2}{n - u}
 \end{aligned}$$

c) i-ésima iteração:

$$\begin{aligned}
 X_{i-1} &= X_i^o & N_i^{-1} &= (A_i^T P A_i)^{-1} & X_i^a &= X_i^o + X_i \\
 A_i &= \left. \frac{\partial F}{\partial X^a} \right|_{X_i^o} & U_i &= A_i^T P L_i & V_i &= A_i X_i + L_i \\
 L_i &= F(X_i^o) - L^b & X_i &= -N_i^{-1} U_i & \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{V_i^T P V_i}{n - u}
 \end{aligned}$$

### 3.5 SIMULAÇÃO COM A SEQUÊNCIA 3.4.1

Na poligonal apresentada pela figura (2.1) e dados de observação do quadro (2.1), há 7 observações (3 distâncias e 4 ângulos) o que implica a existência de 7 equações de observação, compreendendo 3 equações de observação de distância e 4 equações de observação de ângulo.

#### 3.5.1 Primeira Etapa

Inicialmente se estabelecem essas 7 equações de observação.

As equações de observação de distância são obtidas da (3.5):

$$\text{Vértice 2:} \quad f_1 = -K_{21}dx_2 - L_{21}dy_2 + K_{21}dx_1 + L_{21}dy_1 + S_{21}^C - S_{21}^0 = V_{S_{21}}$$

$$\text{Vértices 3:} \quad f_2 = -K_{32}dx_3 - L_{32}dy_3 + K_{32}dx_2 + L_{32}dy_2 + S_{32}^C - S_{32}^0 = V_{S_{32}}$$

$$\text{Vértice 1} \equiv 4: \quad f_3 = -K_{13}dx_1 - L_{13}dy_1 + K_{13}dx_3 + L_{13}dy_3 + S_{13}^C - S_{13}^0 = V_{S_{13}}$$

As equações de observação de ângulo são obtidas da (3.17):

$$\begin{aligned} \text{Vértice 1} \equiv 4: \quad f_4 = & (P_{1A} - P_{12})dx_1 + (Q_{12} - Q_{1A})dy_1 - P_{1A}dx_A + Q_{1A}dy_A \\ & + P_{12}dx_2 - Q_{12}dy_2 + a_{A12}^{C''} - a_{A12}^{o''} = V_{a_{A12}}'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vértice 2:} \quad f_5 = & (P_{21} - P_{23})dx_2 + (Q_{23} - Q_{21})dy_2 - P_{21}dx_1 + Q_{21}dy_1 \\ & + P_{23}dx_3 - Q_{23}dy_3 + a_{123}^{C''} - a_{123}^{o''} = V_{a_{123}}'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vértice 3:} \quad f_6 = & (P_{32} - P_{31})dx_3 + (Q_{31} - Q_{32})dy_3 - P_{32}dx_2 + Q_{32}dy_2 \\ & + P_{31}dx_1 - Q_{31}dy_1 + a_{231}^{C''} - a_{231}^{o''} = V_{a_{231}}'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vértice 1} \equiv 4: \quad f_7 = & (P_{13} - P_{1A})dx_1 + (Q_{1A} - Q_{13})dy_1 - P_{13}dx_3 + Q_{13}dy_3 \\ & + P_{1A}dx_A - Q_{1A}dy_A + a_{31A}^{C''} - a_{31A}^{o''} = V_{a_{31A}}'' \end{aligned}$$

Nos vértices fixos as correções são nulas e considerando as identidades:

$K_{ij} = -K_{ji}$ ,  $L_{ij} = -L_{ji}$ ,  $P_{ij} = -P_{ji}$ ,  $Q_{ij} = -Q_{ji}$ ,  $P_{ik} = -P_{ki}$  e  $Q_{ik} = -Q_{ki}$ , as equações de observação, finalmente, resultam:

$$f_1 = K_{12}dx_2 + L_{12}dy_2 + 0 + 0 + S_{12}^C - S_{12}^0 = V_{S_{12}}$$

$$f_2 = -K_{23}dx_3 - L_{23}dy_3 + K_{23}dx_2 + L_{23}dy_2 + S_{23}^C - S_{23}^0 = V_{S_{23}}$$

$$f_3 = 0 + 0 - K_{31}dx_1 - L_{31}dy_1 + S_{31}^C - S_{31}^0 = V_{S_{31}}$$

$$f_4 = P_{12} dx_2 - Q_{12} dy_2 + 0 + 0 + a_{A12}^{C''} - a_{A12}^{O''} = V_{a_{12}}''$$

$$f_5 = (-P_{12} - P_{23}) dx_2 + (Q_{23} + Q_{12}) dy_2 + P_{23} dx_3 - Q_{23} dy_3 + a_{123}^{C''} - a_{123}^{O''} = V_{a_{231}}''$$

$$f_6 = P_{23} dx_2 - Q_{23} dy_2 + (-P_{23} - P_{31}) dx_3 + (Q_{31} + Q_{23}) dy_3 + a_{231}^{C''} - a_{231}^{O''} = V_{a_{231}}''$$

$$f_7 = 0 + 0 + P_{31} dx_3 - Q_{31} dy_3 + a_{31A}^{C''} - a_{31A}^{O''} = V_{a_{31A}}''$$

a) Matriz  ${}_7A_u$ :

Os elementos desta matriz são os coeficientes das incógnitas  $dx_2$ ,  $dy_2$ ,  $dx_3$  e  $dy_3$ .

$${}_7A_u = \frac{\partial F}{\partial X_i^a} \Bigg|_{X_i^o} = \begin{matrix} & dx_2 & dy_2 & dx_3 & dy_3 \\ \begin{matrix} K_{12} \\ -K_{23} \\ 0 \\ P_{12} \\ (-P_{12} - P_{23}) \\ P_{23} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} L_{12} \\ -L_{23} \\ 0 \\ -Q_{12} \\ (Q_{23} + Q_{12}) \\ -Q_{23} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ K_{23} \\ -K_{31} \\ 0 \\ P_{23} \\ (-P_{23} - P_{31}) \\ P_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ L_{23} \\ -L_{31} \\ 0 \\ -Q_{23} \\ (Q_{31} + Q_{23}) \\ -Q_{31} \end{matrix} \end{matrix} \Bigg|_{X_i^o}$$

Introduzindo os valores observados (ângulos e distâncias):

$${}_7A_u = \begin{bmatrix} 7,07110209329E-1 & 7,0710335302E-1 & 0 & 0 \\ -2,58813893857E-1 & 9,65927206547E-1 & 2,58813893857E-1 & -9,65927206547E-1 \\ 0 & 0 & 9,65923442146E-1 & -2,58827942682E-1 \\ 145,850536109 & -145,851950323 & 0 & 0 \\ 53,38525582 & 199,235881074 & -199,235791928 & -53,3839307507 \\ -199,235791928 & -53,3839307507 & 145,849230345 & -145,850088553 \\ 0 & 0 & 53,3865615831 & 199,234019304 \end{bmatrix}$$

b) Matriz dos pesos:

Os elementos são obtidos do quadro (2.1):

$${}_7P_7 = \sigma_0^2 \left( {}_7\Sigma L_7^b \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,64 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5625 \end{bmatrix}$$

Com  $\sigma_0^2 = 1$

c) Vetor dos termos independentes:

$${}_7L_1 = \begin{bmatrix} S_{12}^C - S_{12}^o \\ S_{23}^C - S_{23}^o \\ S_{31}^C - S_{31}^o \\ a_{A\hat{1}2}^C - a_{A\hat{1}2}^o \\ a_{1\hat{2}3}^C - a_{1\hat{2}3}^o \\ a_{2\hat{3}1}^C - a_{2\hat{3}1}^o \\ a_{3\hat{1}A}^C - a_{3\hat{1}A}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 999,99999833 - 1000,000 \\ 1000,004995 - 1000,005 \\ 1000,00208198 - 1000,010 \\ 90^\circ 00' 01,00054'' - 90^\circ 00' 01,0'' \\ 300^\circ 00' 00,09872'' - 300^\circ 00' 00,1'' \\ 300^\circ 00' 00,84311'' - 300^\circ 00' 00,8'' \\ 209^\circ 59' 58,05763'' - 210^\circ 00' 00,0'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000001667\text{m} \\ -0,000005440\text{m} \\ -0,007918020\text{m} \\ 0,00054'' \\ -0,00128'' \\ 0,04311'' \\ -1,94237'' \end{bmatrix}$$

d) Vetor das incógnitas (correções às coordenadas provisórias):

$${}_4X_1 = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00112 \\ 0,00439 \\ 0,00585 \\ 0,00579 \end{bmatrix} (\text{m})$$

e) Vetor das coordenadas ajustadas:

$${}_4X_1^a = X^o + X = \begin{bmatrix} x_2^o \\ y_2^o \\ x_3^o \\ y_3^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10707,11021 \\ 10707,10335 \\ 10965,92540 \\ 9741,17132 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00112 \\ 0,00439 \\ 0,00585 \\ 0,00579 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10707,11133 \\ 10707,10774 \\ 10965,93125 \\ 9741,7711 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

f) Vetor dos resíduos:

$${}_7V_1 = AX + L = \begin{bmatrix} V_{s_{12}} \\ V_{s_{23}} \\ V_{s_{34}} \\ V_{a_1} \\ V_{a_2} \\ V_{a_3} \\ V_{a_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00389\text{m} \\ -0,00013\text{m} \\ -0,00376\text{m} \\ -0,47675'' \\ -0,54183'' \\ -0,40467'' \\ -0,47675'' \end{bmatrix}$$

g) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{1,71825}{7 - 4} = 0,57275$$

h) MVC das coordenadas ajustadas:

$${}_4\Sigma X_4^a = \hat{\sigma}_o^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2 y_2} & \sigma_{x_2 x_3} & \sigma_{x_2 y_3} \\ & \sigma_{y_2}^2 & \sigma_{y_2 x_3} & \sigma_{y_2 y_3} \\ & & \sigma_{x_3}^2 & \sigma_{x_3 y_3} \\ \text{simétrica} & & & \sigma_{y_3}^2 \end{bmatrix}$$

$${}_4\Sigma X_4^a = \begin{bmatrix} 0,000014876 & 0,000007408 & 0,0000134142 & -0,000004362 \\ & 0,000012562 & 0,000012405 & -0,000000790 \\ & & 0,000020713 & -0,000002702 \\ \text{simétrica} & & & 0,000006726 \end{bmatrix} (\text{m}^2)$$

i) Vetor dos valores observados ajustados:

$${}_7L_1^a = L^b + V = \begin{bmatrix} 1000,000 \\ 1000,005 \\ 1000,010 \\ 90^\circ 00' 01,0'' \\ 300^\circ 00' 00,1'' \\ 300^\circ 00' 00,8'' \\ 210^\circ 00' 00,0'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00389 \\ -0,00013 \\ -0,00376 \\ -0,47675'' \\ -0,54183'' \\ -0,40467'' \\ -0,47675'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000,004\text{m} \\ 1000,005\text{m} \\ 1000,006\text{m} \\ 90^\circ 00' 00,5'' \\ 299^\circ 59' 59,6'' \\ 300^\circ 00' 00,4'' \\ 209^\circ 59' 59,5'' \end{bmatrix}$$

j) MVC dos valores observados ajustados:

$${}_7\Sigma L_7^a = \hat{\sigma}_o^2 AN^{-1}A^T = \begin{bmatrix} \sigma_{S_1} & \sigma_{S_1S_2} & \sigma_{S_1S_3} & \sigma_{S_1a_1} & \sigma_{S_1a_2} & \sigma_{S_1a_3} & \sigma_{S_1a_4} \\ & \sigma_{S_2}^2 & \sigma_{S_2S_3} & \sigma_{S_2a_1} & \sigma_{S_2a_2} & \sigma_{S_2a_3} & \sigma_{S_2a_4} \\ & & \sigma_{S_3}^2 & \sigma_{S_3a_1} & \sigma_{S_3a_2} & \sigma_{S_3a_3} & \sigma_{S_3a_4} \\ & & & \sigma_{a_1}^2 & \sigma_{a_1a_2} & \sigma_{a_1a_3} & \sigma_{a_1a_4} \\ & & & & \sigma_{a_2}^2 & \sigma_{a_2a_3} & \sigma_{a_2a_4} \\ & & & & & \sigma_{a_3}^2 & \sigma_{a_3a_4} \\ & & & & & & \sigma_{a_4}^2 \end{bmatrix}$$

Simétrica

$${}_7\Sigma L_7^a = \begin{bmatrix} 0,000021 & 0,000018 & 0,000018 & 0,000239 & 0,000250 & -0,000727 & 0,000239 \\ & 0,000022 & 0,000018 & -0,000477 & 0,000477 & 0,000477 & -0,000477 \\ & & 0,000021 & 0,000239 & -0,000727 & 0,000250 & 0,000239 \\ & & & 0,268510 & -0,085230 & -0,085230 & -0,098051 \\ & & & & 0,259759 & -0,089299 & -0,085230 \\ & & & & & 0,259758 & -0,085230 \\ \text{Simétrica} & & & & & & 0,268510 \end{bmatrix}$$

k) MVC dos resíduos:

$${}_7\Sigma V_7 = \begin{bmatrix} 0,000036 & -0,000018 & -0,000018 & -0,000239 & -0,000250 & 0,000727 & -0,000239 \\ & 0,000036 & -0,000018 & 0,000477 & -0,000477 & -0,000477 & 0,000477 \\ & & 0,000036 & -0,000239 & 0,000727 & -0,000250 & -0,000239 \\ & & & 0,098051 & 0,085230 & 0,085230 & 0,098051 \\ & & & & 0,106802 & 0,089299 & 0,085230 \\ & & & & & 0,106802 & 0,085230 \\ \text{Simétrica} & & & & & & 0,098051 \end{bmatrix}$$

l) Teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos:

Hipótese básica:  $H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa:  $H_1: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

$$\chi^2 \text{ calculado: } \chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} (n - u) = \hat{\sigma}_0^2 (n - u) = 0,57275(7 - 4) = 1,71825 \cong 1,72$$

$\chi^2$  teórico com  $\alpha = 1\%$

$$0,5 \quad \alpha = 0,005$$

$$1 - 0,5 \quad \alpha = 0,995$$

$$\chi^2_{3; 0,005} = 0,07$$

$$\chi^2_{3; 0,995} = 12,84$$

$$0,07 < 1,72 < 12,84$$

Logo,  $H_0$  é aceita ao nível de significância de 1%.

Verifica-se que o nível de significância adotado para o teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento é mantido no teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos que compara  $\sigma_0^2$  com  $\hat{\sigma}_0^2$ .

## 4 AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

### 4.1 INTRODUÇÃO

O modelo matemático deste método envolve apenas os valores observados ajustados. As coordenadas (x, y) ajustadas são obtidas pelas fórmulas de transporte utilizando os valores observados ajustados. Diferentemente do método variação de coordenadas, a matriz variância-covariância das coordenadas não é fornecida no processo do ajustamento; ela é obtida aplicando-se a lei de propagação de covariâncias.

O modelo matemático da propagação de covariâncias segue os princípios expostos em BLACHUT *et al.* (1979, p. 59), MIKHAIL *and* GRACIE (1981, cap. 6), GEMAEL (1994, p.44-45) e SURACE (1995).

A exemplificação numérica é feita para poligonal fechada utilizando os dados simulados apresentados pela figura (2.1) e quadro (2.1).

As poligonais de p lados da forma das figuras (1.1) e (1.2) satisfazem a ( $r=3$ ) equações de condição ligando ( $n=2p+1$ ) incógnitas (os valores observados ajustados).

Para estabelecer as equações de condição, utiliza-se as fórmulas do transporte de azimute e do transporte de coordenadas.

## 4.2 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO NO PLANO

As poligonais desenvolvidas no plano, ilustradas pelas figuras (1.1) e (1.2), satisfazem a três equações de condição (ASHKENAZI *et al.*, 1972): uma de transporte de azimute, uma de transporte de coordenada y e uma de transporte de coordenada x .

As equações de condição não envolvem as coordenadas (x, y) mas tão-somente as observações que para as poligonais são observações angulares e lineares.

O ajustamento fornece as correções a serem adicionadas às observações. Essas correções devem minimizar a forma quadrática fundamental  $V^T P V$  e as observações ajustadas devem satisfazer as equações de condição a seguir.

As equações que caracterizam o método para as poligonais de p lados, compreendendo um conjunto de observações composto de p distâncias e (p+1) ângulos, apoiadas nos pontos fixos 1 e (p+1) e nas direções fixas  $A_0$  e  $A_f$ , são dadas por:

a) 1ª equação: equação de condição do transporte do azimute:

$$f_1 = A_0 + a_1^a + a_2^a + \dots + a_{p+1}^a - p \times 180^\circ - A_f = 0 \quad (4.1)$$

b) 2ª equação: equação de condição do transporte da coordenada y.

$$f_2 = y_1 + S_{12}^a \cos(A_0 + a_1^a) + S_{23}^a \cos(A_0 + a_1^a + a_2^a - 180^\circ) + \dots \\ + S_{p,p+1} \cos[A_0 + a_1^a + a_2^a + \dots + a_p^a - (p-1)180^\circ] - y_{p+1} = 0 \quad (4.2)$$

c) 3ª equação: equação de condição do transporte da coordenada x:

$$f_3 = x_1 + S_{12}^a \operatorname{sen}(A_0 + a_1^a) + S_{23}^a \operatorname{sen}(A_0 + a_1^a + a_2^a - 180^\circ) + \dots \\ + S_{p,p+1}^a \operatorname{sen}[A_0 + a_1^a + a_2^a + \dots + a_p^a - (p-1)180^\circ] - x_p = 0 \quad (4.3)$$

Generalizando, as (4.1), (4.2) e (4.3) podem ser reescritas como:

$$f_1 = A_0 + \sum_{i=1}^{p+1} a_i^a - p180^\circ - A_f = 0 \quad i = 1, \dots, p+1 \quad (4.4)$$

$$f_2 = y_1 + \sum_{i=1}^p S_{ik}^a \cos\left(A_0 + \sum_{j=1}^i a_j^a - (i-1)180^\circ\right) - y_{p+1} = 0 \quad (4.5)$$

$$f_3 = x_1 + \sum_{i=1}^p S_{ik}^a \operatorname{sen}\left(A_0 + \sum_{j=1}^i a_j^a - (i-1)180^\circ\right) - x_{p+1} = 0 \quad (4.6)$$

para a (4.5) e a (4.6):  $i = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, i$ ;  $k = i+1$

### 4.3 SEQUÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO

As expressões resolutivas para o método das equações de condição apresentadas a seguir sem dedução, estão deduzidas em GEMAEL (1994, cap.8).

#### 4.3.1 Primeira Etapa

a) Modelo matemático natural:

$$F(L^*) = 0 \quad (4.7)$$

Esta expressão informa que os valores observados ajustados ligam-se através de equações de condição.

b) Modelo matemático linearizado:

$${}_r B_n \cdot V_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1, \quad (4.8)$$

$$\text{onde: } {}_r B_n = \frac{\partial F}{\partial L^a} \Big|_{L^b}, \quad (4.9)$$

$${}_r W_1 = F(L^b) = \text{"erro de fechamento"} \quad (4.10)$$

c) Vetor "Erro de Fechamento":

Este vetor mostra o "erro de fechamento" em azimute, o "erro de fechamento" em coordenada y e o "erro de fechamento" em coordenada x obtidos quando os valores observados (ângulos e distâncias) são substituídos nas (4.4), (4.5) e (4.6). A expressão geral do vetor é dada por:

$${}_r W_1 = F(L^b) = \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^{p+1} a_i - p180^\circ - A_r \\ \sum_{i=1}^p (S_{ik} \cos A_{ik}) - (y_{p+1} - y_1) \\ \sum_{i=1}^p (S_{ik} \sen A_{ik}) - (x_{p+1} - x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

d) Equações Normais:

As equações normais na forma matricial são dadas por:

$${}_r M_r \cdot {}_r K_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1 \quad (4.12)$$

$${}_r K_1 = - {}_r M_r^{-1} \cdot {}_r W_1 \quad (4.13)$$

$${}_r M_r = {}_r B_n \cdot P_n^{-1} \cdot B_r^T \quad (4.14)$$

e) Matriz  ${}_3B_n$ :

A (4.9) pode ser generalizada, assumindo a seguinte forma:

$${}_3B_n = \frac{\partial F}{\partial L^b} \Big|_{L^b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial a_p} & \frac{\partial f_1}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial S_{p,p+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial a_p} & \frac{\partial f_2}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial S_{p,p+1}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial a_p} & \frac{\partial f_3}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial S_{p,p+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

que calculados seus elementos resulta:

$${}_3B_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\sum_{i=1}^p S_{ik} \operatorname{sen} A_{ik} & -\sum_{i=2}^p S_{ik} \operatorname{sen} A_{ik} & \dots & -\sum_{i=p}^p S_{ik} \operatorname{sen} A_{ik} & 0 & \cos A_{ik} & \dots & \cos A_{p,p+1} \\ \sum_{i=1}^p S_{ik} \cos A_{ik} & \sum_{i=2}^p S_{ik} \cos A_{ik} & \dots & \sum_{i=p}^p S_{ik} \cos A_{ik} & 0 & \operatorname{sen} A_{ik} & \dots & \operatorname{sen} A_{p,p+1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Para que os resíduos a serem adicionados aos ângulos do vetor  $L^b$  resulte na unidade de segundos de arco, as derivadas de  $f_2$  e  $f_3$  com relação aos ângulos devem ser

$$\text{divididas por } \rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right).$$

f) Matriz dos pesos:

A matriz dos pesos das observações é dada por:

$${}_n P_n = \sigma_0^2 \left( {}_n \Sigma L_n^b \right)^{-1} \rightarrow {}_n P_n^{-1} = {}_n \Sigma L_n^b$$

com  $\sigma_0^2 = 1$ , que se reduz a uma matriz diagonal quando as observações são não-correlacionadas entre si.

$${}_n P_n^{-1} = \operatorname{diag} \left\{ \sigma_{a_1}^2 \dots \sigma_{a_{p+1}}^2 \quad \sigma_{S_{12}}^2 \dots \sigma_{S_{p,p+1}}^2 \right\} \quad (4.17)$$

g) Vetor dos resíduos:

$${}_n \mathbf{V}_1 = {}_n \mathbf{P}_n^{-1} {}_n \mathbf{B}_r^T {}_r \mathbf{K}_1 \quad (4.18)$$

h) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{{}_1 \mathbf{V}_n^T {}_n \mathbf{P}_n {}_n \mathbf{V}_1}{r} = \frac{-{}_1 \mathbf{K}_r^T {}_r \mathbf{W}_1}{r} \quad (4.19)$$

i) Teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos:

A comparação entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  se fundamenta no princípio de que a forma quadrática tem distribuição  $\chi^2$  com  $r$  graus de liberdade.

Estabelece-se, então, o teste de hipótese:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hipótese básica} \quad (H_0) \rightarrow H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \\ \text{Hipótese alternativa} \quad (H_1) \rightarrow H_1: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$$\text{Calcula-se: } \chi^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} = \frac{-\mathbf{K}^T \mathbf{W}}{\sigma_0^2} \quad (4.21)$$

Que comparado com os valores teóricos  $\chi_{v; 0,5\alpha}^2$  e  $\chi_{v; 1-0,5\alpha}^2$  fornece o resultado final do teste.

$H_0$  é aceita ao nível de significância  $\alpha$ , se:

$$\chi_{v; 0,5\alpha}^2 < \chi^{*2} < \chi_{v; 1-0,5\alpha}^2 \quad (4.22)$$

j) Vetor dos valores observados ajustados:

$${}_nL_1^a = {}_nL_1^b + {}_nV_1 = \begin{bmatrix} a_1'' \\ a_2'' \\ \vdots \\ a_{p+1}'' \\ S_{12} \\ S_{23} \\ \vdots \\ S_{p,p+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Va_1'' \\ Va_2'' \\ \vdots \\ Va_{p+1}'' \\ V_{S_{12}} \\ V_{S_{23}} \\ \vdots \\ VS_{p,p+1} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

k) Azimutes ajustados:

O azimute  $A_{ik}^a \in [0^\circ; 360^\circ]$ , de qualquer lado definido pelos pontos  $i$  e  $k$ , é dado

pela expressão:

$$\left. \begin{aligned} A_{ik}^a &= A_0 + \sum_{j=1}^i a_j^a - (i-1)180^\circ, \quad j = 1, 2, \dots, i \\ \text{ou} \\ A_{ik}^a &= A_{i-1, i} + a_i^a \pm 180^\circ \\ \text{onde: } &+180^\circ, \text{ se } (A_{i-1, i} + a_i^a) < 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

l) Coordenadas ajustadas:

$$\left. \begin{aligned} x_k^a &= x_i^a + S_{ik}^a \operatorname{sen} A_{ik}^a \\ y_k^a &= y_i^a + S_{ik}^a \operatorname{cos} A_{ik}^a \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

m) MVC dos valores observados ajustados:

$${}_n \Sigma L_n^* = \hat{\sigma}_0^2 \left( {}_n P_n^{-1} - {}_n P_n^{-1} {}_n B_n^T {}_r M_r^{-1} {}_r B_n {}_n P_n^{-1} \right) \quad (4.26)$$

n) MVC dos resíduos:

$${}_n \Sigma V_n = \hat{\sigma}_0^2 {}_n P_n^{-1} {}_n B_n^T {}_r M_r^{-1} {}_r B_n {}_n P_n^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 {}_n P_n^{-1} - {}_n \Sigma L_n^* \quad (4.27)$$

Esta matriz é fundamental para o estudo do teste *data snooping*.

o) MVC das coordenadas ajustadas:

É obtida pela aplicação da lei de propagação de covariâncias.

$${}_u \Sigma x_u^* = {}_u D_n {}_n \Sigma L_n^* {}_u D_u^T \quad (4.28)$$

Onde D é uma matriz cujos elementos são as derivadas parciais das (4.25) com relação aos valores observados ajustados (MÔNICO, 1989), expressa por:

$${}_u D_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial s_{12}} & \frac{\partial x_1}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{p,p+1}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial a_1} & \frac{\partial y_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial y_1}{\partial s_{12}} & \frac{\partial y_1}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial s_{p,p+1}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{12}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial s_{p,p+1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a_1} & \frac{\partial y_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial y_2}{\partial s_{12}} & \frac{\partial y_2}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial s_{p,p+1}} \\ \frac{\partial x_{p+1}}{\partial a_1} & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial s_{12}} & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial x_{p+1}}{\partial s_{p,p+1}} \\ \frac{\partial y_{p+1}}{\partial a_1} & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial s_{12}} & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial s_{23}} & \dots & \frac{\partial y_{p+1}}{\partial s_{p,p+1}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

## 4.3.2 Iteração

As iterações (GEMAEL, 1994, p. 181-182) são necessárias até que o vetor dos resíduos  ${}_nV_1$  se estabilize, visto que o vetor dos valores observados ajustados  ${}_nL_1^*$  depende de  ${}_nV_1$ , e os azimutes ajustados e coordenadas ajustadas dependem do vetor  ${}_nL_1^*$ .

a) 1ª iteração:

$$L^* = L1^\circ$$

$$B1 = \left. \frac{\partial F}{\partial L^*} \right|_{L1^\circ}$$

$$W1 = B1(L^b - L1^\circ) + F(L1^\circ)$$

$$M1 = B1 P^{-1} B1^T$$

$$K1 = -M1^{-1} W1$$

$$V1 = P^{-1} B1^T K1$$

$$L1^* = L^b + V1$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V1^T P V1}{r} = -\frac{K1^T W1}{r}$$

b) 2ª iteração:

$$L^* = L2^\circ$$

$$B2 = \left. \frac{\partial F}{\partial L^*} \right|_{L2^\circ}$$

$$W2 = B2(L^b - L2^\circ) + F(L2^\circ)$$

$$M2 = B2 P^{-1} B2^T$$

$$K2 = -M2^{-1} W2$$

$$V2 = P^{-1} B2^T K2$$

$$L2^* = L^b + V2$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V2^T P V2}{r} = -\frac{K2^T W2}{r}$$

c) i-ésima iteração:

$$L_{i-1}^* = Li^\circ$$

$$Bi = \left. \frac{\partial F}{\partial L^*} \right|_{Li^\circ}$$

$$Wi = Bi(L^b - Li^\circ) + F(Li^\circ)$$

$$Mi = Bi P^{-1} Bi^T$$

$$Ki = -Mi^{-1} Wi$$

$$Vi = P^{-1} Bi^T Ki$$

$$Li^* = L^b + Vi$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{Vi^T P Vi}{r} = -\frac{Ki^T Wi}{r}$$

#### 4.4 SIMULAÇÃO COM A SEQUÊNCIA 4.3.1

Utilizar-se-á a poligonal apresentada pela figura (2.1) e dados numéricos do quadro (2.1), onde se tem 4 observações angulares e 3 observações lineares, e portanto  $n = 7$ .

##### 4.4.1 Primeira Etapa

a) Equações de condição:

Conforme as (4.4), (4.5) e (4.6), as equações de condição para a poligonal são:

$$f_1 = A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + a_4^a - 3 \times 180^\circ - A_r = 0$$

$$f_2 = y_1 + S_{12}^a \cos A_{12}^a + S_{23}^a \cos A_{23}^a + S_{34}^a \cos A_{34}^a - y_4 = 0$$

$$f_3 = x_1 + S_{12}^a \sin A_{12}^a + S_{23}^a \sin A_{23}^a + S_{34}^a \sin A_{34}^a - x_4 = 0$$

onde:

$$A_{12}^* = A_0 + a_1^*$$

$$A_{23}^* = A_0 + a_1^* + a_2^* - 180^\circ$$

$$A_{34}^* = A_0 + a_1^* + a_2^* + a_3^* - 2 \times 180^\circ$$

b) Vetor erro de fechamento:

Calculando a (4.11), obtém-se:

$${}_3W_1 = F(L^b) = \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 01,9'' \\ 0,0018478\text{m} \\ -0,007704125\text{m} \end{bmatrix}$$

c) Matriz dos pesos:

Substituindo os dados do quadro (2.1) na (4.17), obtém-se a inversa da matriz dos pesos:

$${}_7P_7^{-1} = \text{diag}\{0,64 \quad 0,64 \quad 0,64 \quad 0,64 \mid 0,0001 \quad 0,0001 \quad 0,0001\}$$

d) Matriz  ${}_rB_n$ :

A (4.16) adequada para que o vetor dos resíduos resulte correções aos ângulos na unidade de segundos de arco é escrita na forma:

$${}_3B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 S_{ik} \text{sen } A_{ik} & -\frac{1}{\rho} \sum_{i=2}^3 S_{ik} \text{sen } A_{ik} & -\frac{1}{\rho} \sum_{i=3}^3 S_{ik} \text{sen } A_{ik} & 0 & \cos A_{12} & \cos A_{23} & \cos A_{34} \\ \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 S_{ik} \cos A_{ik} & \frac{1}{\rho} \sum_{i=2}^3 S_{ik} \cos A_{ik} & \frac{1}{\rho} \sum_{i=3}^3 S_{ik} \cos A_{ik} & 0 & \text{sen } A_{12} & \text{sen } A_{23} & \text{sen } A_{34} \end{bmatrix} L^b$$

resultando:

$${}_3B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3,73506520098E-8 & 3,428204386E-3 & 4,68297582586E-3 & 0 & 7,07103353028E-1 & -9,65927206547E-1 & 2,58827942682E-1 \\ 8,95841628837E-9 & -3,42812483665E-3 & 1,25484582499E-3 & 0 & 7,07110209329E-1 & 2,58813893857E-1 & -9,65923442146E-1 \end{bmatrix}$$

e) Equações normais:

$${}_3M_3 - {}_3K_1 + {}_3W_1 = 0$$

$${}_3M_3 = {}_3B_7 \cdot {}_7P_7^{-1} \cdot {}_7B_3^T$$

$${}_3M_3 = \begin{bmatrix} 2,56 & 5,19117924001E-3 & -1,39089283408E-3 \\ & 1,71557265068E-4 & -3,76091184466E-6 \\ \text{simétrica} & & 1,5852883147E-4 \end{bmatrix}$$

$${}_3K_1 = -{}_3M_3^{-1} \cdot {}_3W_1$$

$${}_3K_1 = \begin{bmatrix} -7,44921221978E-1 \\ 12,6986379057 \\ 42,3631323454 \end{bmatrix}$$

f) Vetor dos resíduos:

Calculando a (4.18), obtém-se:

$${}_7V_1 = \begin{bmatrix} Va_1 \\ Va_2 \\ Va_3 \\ Va_4 \\ Vs_{12} \\ Vs_{23} \\ Vs_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4767'' \\ -0,5418'' \\ -0,4047'' \\ -0,4767'' \\ +0,003893 \text{ m} \\ -0,000130 \text{ m} \\ -0,003763 \text{ m} \end{bmatrix}$$

g) Variância  $\hat{\sigma}_0^2$ :

Calculando a (4.19), obtém-se:

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,572752$$

h) Tese  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos:

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_1: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

$$\chi_{\text{calculado}}^2: \chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} r = \frac{0,5727}{1} \times 3 = 1,7182 \cong 1,72$$

$$\chi_{\text{teórico}}^2 \text{ com } \alpha = 1\% : 0,5\alpha = 0,005; 1 - 0,5\alpha = 0,995$$

$$\chi_{3; 0,005}^2 = 0,07; \chi_{3; 0,995}^2 = 12,84$$

$$0,07 < 1,72 < 12,84$$

Portanto,  $H_0$  é aceita ao nível de significância de 1%.

i) Vetor dos valores observados ajustados:

Da (4.23), obtém-se:

$${}_7L_1^a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Va_1 \\ Va_2 \\ Va_3 \\ Va_4 \\ V_{S_{12}} \\ V_{S_{23}} \\ V_{S_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ 00' 01,0'' \\ 300^\circ 00' 00,1'' \\ 300^\circ 00' 00,8'' \\ 210^\circ 00' 00,0'' \\ 1000,000 \text{ m} \\ 1000,005 \text{ m} \\ 1000,010 \text{ m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,4767'' \\ -0,5418'' \\ -0,4047'' \\ -0,4767'' \\ +0,003893 \text{ m} \\ -0,000130 \text{ m} \\ -0,003763 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ 00' 00,523'' \\ 299^\circ 59' 59,5582'' \\ 300^\circ 00' 00,3953'' \\ 209^\circ 59' 59,5233'' \\ 1000,003893 \text{ m} \\ 1000,004870 \text{ m} \\ 1000,006237 \text{ m} \end{bmatrix}$$

J) Valores observados, azimutes e coordenadas ajustados:

| Ponto<br>i | Ângulo $a_i$    | Linha<br>ik | Distância $S_{ik}$<br>(m) | Azimute $A_{ik}$          | Ponto<br>i | Coordenadas              |                          |
|------------|-----------------|-------------|---------------------------|---------------------------|------------|--------------------------|--------------------------|
|            |                 |             |                           |                           |            | x (m)                    | y (m)                    |
| 1          | 90°00'01,5233"  | A-1         |                           | 135°00'00,0"              | 1          | 10000,000                | 10000,000                |
| 2          | 299°59'59,5582" | 1-2         | 1000,003891               | 45°00'00,5233"            | 2          | 10707,111326             | 10707,107739             |
| 3          | 300°00'00,3953" | 2-3         | 1000,004870               | 165°00'00,0815"           | 3          | 10965,931250             | 9741,177106,             |
| 4          | 209°59'00,5233" | 3-4         | 1000,006239               | 285°00'00,4768"           | 4          | 9999,999996              | 9999,999999              |
|            |                 | 4-A         |                           | 315°00'01,0001"           |            |                          |                          |
|            |                 |             |                           | $\epsilon_A = + 0,0001''$ |            | $\epsilon_x = -0,000004$ | $\epsilon_y = -0,000001$ |

k) MVC dos valores observados ajustados:

Da (4.26), obtém-se:

$${}_7\Sigma L_7^* = \begin{bmatrix} 0,268511 & -0,085230 & -0,085230 & -0,098051 & 0,000239 & -0,000477 & 0,000239 \\ & 0,259759 & -0,089299 & -0,085230 & 0,000250 & 0,000477 & -0,000727 \\ & & 0,259759 & -0,085230 & -0,000727 & 0,000477 & 0,000250 \\ & & & 0,268510 & 0,000239 & -0,000477 & 0,000239 \\ & & & & 0,000021 & 0,000018 & 0,000018 \\ & & & & & 0,000022 & 0,000018 \\ \text{simétrica} & & & & & & 0,000021 \end{bmatrix}$$

l) MVC dos resíduos:

Da (4.27), obtém-se:

$${}_7\Sigma V_7 = \begin{bmatrix} 0,098051 & 0,085230 & 0,085230 & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & 0,106802 & 0,089299 & 0,085230 & -0,000250 & -0,000477 & 0,000727 \\ & & 0,106802 & 0,085230 & 0,000727 & -0,000477 & -0,000250 \\ & & & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & & & & 0,000036 & -0,000018 & -0,000018 \\ & & & & & 0,000036 & -0,000018 \\ \text{simétrica} & & & & & & 0,000036 \end{bmatrix}$$

m) MVC das coordenadas ajustadas:

As coordenadas incógnitas são  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $x_3$  e  $y_3$ , portanto  $u = 4$ .

Então a matriz  ${}_u D_n$  na (4.29) tem as dimensões  $4 \times 7$ .

$${}_4D_7 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} & \frac{\partial x_2}{\partial a_4} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{12}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{23}} & \frac{\partial x_2}{\partial s_{31}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a_1} & \frac{\partial y_2}{\partial a_2} & \frac{\partial y_2}{\partial a_3} & \frac{\partial y_2}{\partial a_4} & \frac{\partial y_2}{\partial s_{12}} & \frac{\partial y_2}{\partial s_{23}} & \frac{\partial y_2}{\partial s_{31}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} & \frac{\partial x_3}{\partial a_4} & \frac{\partial x_3}{\partial s_{12}} & \frac{\partial x_3}{\partial s_{23}} & \frac{\partial x_3}{\partial s_{31}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial a_1} & \frac{\partial y_3}{\partial a_2} & \frac{\partial y_3}{\partial a_3} & \frac{\partial y_3}{\partial a_4} & \frac{\partial y_3}{\partial s_{12}} & \frac{\partial y_3}{\partial s_{23}} & \frac{\partial y_3}{\partial s_{31}} \end{bmatrix}$$

As expressões de x e y em função dos valores observados ajustados são:

$$x_2^* = x_1^* + S_{12}^* \text{sen} A_{12}^*$$

$$y_2^* = y_1^* + S_{12}^* \text{cos} A_{12}^*$$

$$x_3^* = x_1^* + S_{12}^* \text{sen} A_{12}^* + S_{23}^* \text{sen} A_{23}^*$$

$$y_3^* = y_1^* + S_{12}^* \text{cos} A_{12}^* + S_{23}^* \text{cos} A_{23}^*$$

Derivando com relação aos valores observados ajustados e introduzindo o fator

$\frac{1}{\rho}$  para a conversão da unidade da variância dos ângulos que está em ( $''$ )<sup>2</sup>.

$${}_4D_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho}(S_{12}^* \text{cos} A_{12}^*) & 0 & 0 & 0 & \text{sen} A_{12} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho}(S_{12}^* \text{sen} A_{12}^*) & 0 & 0 & 0 & \text{cos} A_{12} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho}(S_{12}^* \text{cos} A_{12}^* + S_{23}^* \text{cos} A_{23}^*) & \frac{1}{\rho}(S_{23}^* \text{cos} A_{23}^*) & 0 & 0 & \text{sen} A_{12} & \text{sen} A_{23} & 0 \\ -\frac{1}{\rho}(S_{12}^* \text{sen} A_{12}^* + S_{23}^* \text{sen} A_{23}^*) & -\frac{1}{\rho}(S_{23}^* \text{sen} A_{23}^*) & 0 & 0 & \text{cos} A_{12} & \text{cos} A_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

que calculados seus elementos, resulta:

$${}_4D_7 = \begin{bmatrix} 3,42815506369E-3 & 0 & 0 & 0 & 7,07108575135E-1 & 0 & 0 \\ -3,42817245881E-3 & 0 & 0 & 0 & 7,07104987233E-1 & 0 & 0 \\ -1,2548087951E-3 & -4,6829638588E-3 & 0 & 0 & 7,07108575135E-1 & 2,58818663441E-1 & 0 \\ -4,68296685979E-3 & -1,25479440099E-3 & 0 & 0 & 7,07104987233E-1 & -9,65925928555E-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto (4.28):

$${}_4\Sigma X_4^* = \begin{bmatrix} 0,000014876 & 0,000007408 & 0,000013142 & -0,000004362 \\ & 0,000012562 & 0,000012405 & -0,000000790 \\ & & 0,000020713 & -0,000002702 \\ \text{simétrica} & & & 0,000006726 \end{bmatrix}$$

## **5 AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS NO PLANO TOPOGRÁFICO PELO MÉTODO COMBINADO**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

O método combinado é um caso mais geral que os dois métodos anteriores estudados. Permite obter, no próprio processo do ajustamento as coordenadas ajustadas e a matriz variância-covariância (MVC) das coordenadas ajustadas, facilitando a obtenção da variância da área delimitada por uma poligonal fechada.

O número de graus de liberdade no método combinado ( $S = r - u$ ) e a condição necessária ( $n > r - u$ ) são relacionados com o número de lados ( $p$ ) de poligonal. Isto permite verificar a existência ou não de uma poligonal quando os dados são fornecidos.

É dada a seqüência de cálculo cujas fórmulas (GEMAEL, 1994, cap. 10) são apresentadas sem dedução, e é dada uma sistematização para as iterações necessárias.

A simulação da 1ª etapa do ajustamento utiliza os dados do quadro (2.1) e a figura (2.1).

### **5.2 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES**

As equações que caracterizam o método combinado em uma poligonal topográfica são obtidas das expressões do transporte de azimute e do transporte de coordenadas.

Utilizando as figuras (1.1) e (1.2), as equações que caracterizam o método combinado para uma poligonal de  $p$  lados que se apóia nos pontos fixos 1 e  $(p+1)$  e nas direções fixas  $A_0$  e  $A_f$  são escritas da seguinte forma:

a) Equação do transporte de azimute:

$$f_1 = A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_{p+1}^a - p \times 180^\circ - A_f = 0 \quad (5.1)$$

b) Equações do transporte de coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= x_1 + S_{12}^a \operatorname{sen}(A_0 + a_1^a) - x_2^a = 0 \\ f_3 &= y_1 + S_{12}^a \cos(A_0 + a_1^a) - y_2^a = 0 \\ f_4 &= x_2^a + S_{23}^a \operatorname{sen}(A_0 + a_1^a + a_2^a - 180^\circ) - x_3^a = 0 \\ f_5 &= y_2^a + S_{23}^a \cos(A_0 + a_1^a + a_2^a - 180^\circ) - y_3^a = 0 \\ f_6 &= x_3^a + S_{34}^a \operatorname{sen}(A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a - 2 \times 180^\circ) - x_4^a = 0 \\ f_7 &= y_3^a + S_{34}^a \cos(A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a - 2 \times 180^\circ) - y_4^a = 0 \\ \dots & \\ f_{2p} &= x_p^a + S_{p,p+1}^a \operatorname{sen}[A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_p^a (p-1)180^\circ] - x_{p+1}^a = 0 \\ f_{2p+1} &= y_p^a + S_{p,p+1}^a \cos[A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_p^a (p-1)180^\circ] - y_{p+1}^a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{2p} &= x_p^a + S_{p,p+1}^a \operatorname{sen}[A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_p^a (p-1)180^\circ] - x_{p+1}^a = 0 \\ f_{2p+1} &= y_p^a + S_{p,p+1}^a \cos[A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + \dots + a_p^a (p-1)180^\circ] - y_{p+1}^a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Generalizando a (5.1) e a (5.3):

$$f_1 = A_0 + \sum_{i=1}^{p+1} a_i^a - p \ 180^\circ - A_f = 0 \quad (i = 1, \dots, p+1) \quad (5.4)$$

$$f_{2i} = x_i^a + S_{ik}^a \operatorname{sen}\left[A_0 + \sum_{j=1}^i a_j^a - (i-1)180^\circ\right] - x_k = 0 \quad (5.5)$$

$$i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, i; \quad k = i+1$$

$$f_{2i+1} = y_i^a + S_{ik}^a \cos\left[A_0 + \sum_{j=1}^i a_j^a - (i-1)180^\circ\right] - y_k = 0 \quad (5.6)$$

$$i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, i; \quad k = i+1$$

As poligonais de  $p$  lados da forma das figuras (1.1) e (1.2) apresentam:

$$\begin{array}{l}
 n = (2p + 1) \text{ observações (ângulos e distâncias)} \\
 u = (2p - 2) \text{ coordenadas (x, y) a serem determinadas} \\
 r = (2p + 1) \text{ equações}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} n \\ u \\ r \end{array}} \right\} \quad (5.7)$$

No método combinado, tem-se  $S = r - u$  graus de liberdade, sendo necessário que  $n > r - u$  (GEMAEL, 1994, p. 166). Isto aplicado às poligonais resulta  $S = 3$ , sendo necessário que  $p > 1$ .

### 5.3 SEQUÊNCIA DE CÁLCULO PARA O AJUSTAMENTO

#### 5.3.1 Primeira Etapa

a) Modelo matemático natural:

$$F(X^a, L^a) = 0 \quad (5.8)$$

Esta expressão mostra que as coordenadas ajustadas  $X^a$  e os valores observados ajustados  $L^a$  estão ligados por uma função não explícita.

b) Modelo matemático linearizado:

$${}_r A_u \cdot {}_u X_1 + {}_r B_n \cdot {}_n V_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1 \quad (5.9)$$

onde:

$${}_r A_u = \left. \frac{\partial F}{\partial X^a} \right|_{X^0} \quad (5.10)$$

$${}_r B_n = \left. \frac{\partial F}{\partial L^a} \right|_{L^b} \quad (5.11)$$

$X^0$  é o vetor de tamanho  $(u \times 1)$  das coordenadas provisórias, obtido mediante o transporte de coordenadas utilizando os valores observados.

$L^b$  é o vetor de tamanho  $(n \times 1)$  das observações, que compreende ângulos e distâncias.

${}_u X_1$  é o vetor das correções às coordenadas provisórias;

${}_n V_1$  é o vetor dos resíduos;

${}_r W_1$  é o vetor "erro de fechamento".

c) Vetor "erro de fechamento":

Este vetor mostra o "erro de fechamento" em azimute, o "erro de fechamento" em coordenada x e o "erro de fechamento" em coordenada y, obtidos quando os valores (ângulos e distâncias) são substituídos nas (5.4), (5.5) e (5.6). A expressão geral do vetor é dada por:

$${}_r W_1 = F({}_n L_1^b) \quad (5.12)$$

d) Equações normais:

$${}_r A_u {}_u X_1 + {}_r M_r {}_r K_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1 \quad (5.13)$$

onde:

$${}_r M_r = {}_r B_n {}_n P_n^{-1} {}_n B_r^T \quad (5.14)$$

$${}_u X_1 = -({}_u A_r^T {}_r M_r^{-1} {}_r A_u)^{-1} {}_u A_r^T {}_r M_r^{-1} {}_r W_1 \quad (5.15)$$

$${}_r K_1 = -{}_r M_r^{-1} ({}_r A_u {}_u X_1 + {}_r W_1) \quad (5.16)$$

OBS:  ${}_u X_1$  é chamado de vetor das correções;

${}_r K_1$  é chamado de vetor dos correlatos.

e) Matriz dos pesos:

$${}_n \mathbf{P}_n = \sigma_0^2 \left( {}_n \Sigma \mathbf{L}_n^b \right)^{-1} \rightarrow {}_n \mathbf{P}_n^{-1} = {}_n \Sigma \mathbf{L}_n^b \quad (5.17)$$

com  $\sigma_0^2 = 1$  (adimensional)

${}_n \Sigma \mathbf{L}_n^b$  é a matriz variância-covariância dos valores observados.

Admitindo que as observações sejam não-correlacionadas, a matriz dos pesos será diagonal.

$$\therefore {}_n \mathbf{P}_n^{-1} = \text{diag} \left\{ \sigma_{s_1}^2 \quad \cdots \quad \sigma_{s_{p+1}}^2 \quad \Big| \quad \sigma_{s_{12}}^2 \quad \cdots \quad \sigma_{s_{p,p+1}}^2 \right\} \quad (5.18)$$

f) Vetor dos resíduos:

$${}_n \mathbf{V}_1 = {}_n \mathbf{P}_n^{-1} {}_n \mathbf{B}_r^T {}_r \mathbf{K}_1 \quad (5.19)$$

g) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{{}_1 \mathbf{V}_n^T {}_n \mathbf{P}_n {}_n \mathbf{V}_1}{r - u} = - \frac{{}_1 \mathbf{K}_r^T {}_r \mathbf{W}_1}{r - u} \quad (5.20)$$

h) Teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos:

A comparação entre  $\sigma_0^2$  e  $\hat{\sigma}_0^2$  segue os procedimentos estudados nos dois métodos anteriores.

i) Vetor das coordenadas ajustadas:

$${}_u \mathbf{X}_1^* = {}_u \mathbf{X}_1^o + {}_u \mathbf{X}_1 \quad (5.21)$$

j) MVC das coordenadas ajustadas:

$${}_u\Sigma X_u^* = \hat{\sigma}_0^2 \left( {}_uA_r^T {}_rM_r^{-1} {}_rA_u \right)^{-1} \quad (5.22)$$

k) MVC dos valores observados ajustados:

$${}_n\Sigma L_n^* = \hat{\sigma}_0^2 \left[ P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \right] \quad (5.23)$$

l) MVC dos resíduos:

$${}_n\Sigma V_n = \hat{\sigma}_0^2 {}_nP_n^{-1} - {}_n\Sigma L_n^* \quad (5.24)$$

### 5.3.2 Iteração

A iteração no método combinado (GEMAEL, 1994, p. 182-183) sistematizada abaixo é necessária até que, sob um dado número de decimais, o vetor  ${}_uX_1$  se anule, e se estabilize o vetor das coordenadas  ${}_uX_1^*$ .

a) 1ª iteração:

$$L^* = L1^0; X^* = X1^0$$

$$M1 = B1 P^{-1} B1^T$$

$$A1 = \frac{\partial F}{\partial X^*} \Bigg|_{X1^0, L1^0}$$

$$X1 = -(A1^T M1^T A1)^{-1} A1^T M1^{-1} W1$$

$$K1 = -M1^{-1} (A1 X1 + W1)$$

$$X1^* = X1^0 + X1$$

$$B1 = \frac{\partial F}{\partial L^*} \Bigg|_{X1^0, L1^0}$$

$$V1 = P^{-1} B1^T K1$$

$$L1^* = L^b + V1$$

$$W1 = B1(L^b - L1^\circ) + F(X1^\circ, L1^\circ)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V1^T P V1}{r-u} = \frac{-K1^T W1}{r-u}$$

$$X1 = -(A1^T M1^{-1} A1)^{-1} A1^T M1^{-1} W1$$

b) 2ª iteração:

$$L1^* = L2^\circ; X1^* = X2^\circ$$

$$M2 = B2 P^{-1} B2^T$$

$$A2 = \frac{\partial F}{\partial X^*} \Bigg|_{X2^\circ, L2^\circ}$$

$$X2 = -(A2^T M2^{-1} A2)^{-1} A2^T M2^{-1} W2$$

$$K2 = -M2^{-1} (A2 X2 + W2)$$

$$B2 = \frac{\partial F}{\partial L^*} \Bigg|_{X2^\circ, L2^\circ}$$

$$X2^* = X2^\circ + X2$$

$$V2 = P^{-1} B2^T K2$$

$$L2^* = L^b + V2$$

$$W2 = B2(L^b - L2^\circ) + F(L2^\circ, X2^\circ)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V2^T P V2}{r-u} = \frac{-K2^T W2}{r-u}$$

c) i-ésima iteração:

$$L_{i-1}^* = L_i^0; X_{i-1}^* = X_i^0$$

$$M_i = B_i P^{-1} B_i^T$$

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial X^*} \Bigg|_{X_i^0, L_i^0}$$

$$X_i = -(A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i$$

$$K_i = -M_i^{-1} (A_i X_i + W_i)$$

$$X_i^* = X_i^0 + X_i$$

$$B_i = \frac{\partial F}{\partial L^*} \Bigg|_{X_i^0, L_i^0}$$

$$V_i = P^{-1} B_i^T K_i$$

$$L_i^* = L^b + V_i$$

$$W_i = B_i(L^b - L_i^0) + F(X_i^0, L_i^0)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V_i^T P V_i}{r - u} = \frac{-K_i^T W_i}{r - u}$$

$$X_i = - (A_i^T M_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T M_i^{-1} W_i$$

#### 5.4 SIMULAÇÃO COM A SEQUÊNCIA 5.3.1

Para exemplificar o ajustamento de uma poligonal pelo método combinado, utilizar-se-á a poligonal apresentada pela figura (2.1) e quadro (2.1).

Há 3 lados ( $p = 3$ ) e 7 observações ( $n = 7$ ), o que implica, conforme a (5.7), na existência de 7 equações ( $r = 7$ ) e 4 coordenadas ( $u = 4$ ).

##### 5.4.1 Primeira Etapa

Inicialmente se estabelecem as 7 equações:

a) Equações:

$$f_1 = A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a + a_4^a - 3 \times 180^\circ - A_f = 0$$

$$f_2 = x_1 + S_{12}^a \operatorname{sen} A_{12}^a - x_2^a = 0, \text{ com } A_1^a = A_0 + a_1^a$$

$$f_3 = y_1 + S_{12}^a \cos A_{12}^a - y_2^a = 0$$

$$f_4 = x_2^a + S_{23}^a \operatorname{sen} A_{23}^a - x_3^a = 0, \text{ com } A_{23}^a = A_0 + a_1^a + a_2^a - 180^\circ$$

$$f_5 = y_2^a + S_{23}^a \cos A_{23}^a - y_3^a = 0$$

$$f_6 = x_3^a + S_{31}^a \operatorname{sen} A_{31}^a - x_1 = 0, \text{ com } A_{31}^a = A_0 + a_1^a + a_2^a + a_3^a - 2 \times 180^\circ$$

$$f_7 = y_3^a + S_{31}^a \cos A_{31}^a - y_1 = 0$$

b) Vetor "erro de fechamento":

A obtenção do vetor  ${}_7W_1$  consiste em calcular as equações com os valores observados ( ${}_nL_1^b$ ).

Então,

$${}_7W_1 = F({}_7L_1^b) = \begin{bmatrix} f_1({}_7L_1^b) \\ f_2({}_7L_1^b) \\ f_3({}_7L_1^b) \\ f_4({}_7L_1^b) \\ f_5({}_7L_1^b) \\ f_6({}_7L_1^b) \\ f_7({}_7L_1^b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9'' \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ -0,007704125 \text{ m} \\ 0,0018478 \text{ m} \end{bmatrix}$$

c) Matriz  ${}_7A_4$ :

$${}_7A_4 = \frac{\partial F}{\partial X^*} \Big|_{X^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial y_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial y_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_7}{\partial x_2} & \frac{\partial f_7}{\partial y_2} & \frac{\partial f_7}{\partial x_3} & \frac{\partial f_7}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Matriz  ${}^7B_n$ :

$${}^7B_7 = \frac{\partial F}{\partial L^a} \Big|_{L^b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1}{\partial a_3} & \frac{\partial f_1}{\partial a_4} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_3} & \frac{\partial f_2}{\partial a_4} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} & \frac{\partial f_3}{\partial a_4} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4}{\partial a_3} & \frac{\partial f_4}{\partial a_4} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_5}{\partial a_1} & \frac{\partial f_5}{\partial a_2} & \frac{\partial f_5}{\partial a_3} & \frac{\partial f_5}{\partial a_4} & \frac{\partial f_5}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_5}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_5}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_6}{\partial a_1} & \frac{\partial f_6}{\partial a_2} & \frac{\partial f_6}{\partial a_3} & \frac{\partial f_6}{\partial a_4} & \frac{\partial f_6}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_6}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_6}{\partial S_{31}} \\ \frac{\partial f_7}{\partial a_1} & \frac{\partial f_7}{\partial a_2} & \frac{\partial f_7}{\partial a_3} & \frac{\partial f_7}{\partial a_4} & \frac{\partial f_7}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_7}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_7}{\partial S_{31}} \end{bmatrix}_{L^b}$$

Para obter os resíduos dos ângulos em segundos de arco, as derivadas com relação

aos ângulos são divididas por  $\rho = \frac{648000}{\pi} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right)$  para as (5.5) e as (5.6).

$${}^7B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_{12} \cos A_{12}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \text{sen } A_{12} & 0 & 0 \\ -\frac{S_{12} \text{sen } A_{12}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \cos A_{12} & 0 & 0 \\ \frac{S_{23} \cos A_{23}}{\rho} & \frac{S_2 \cos A_{23}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \text{sen } A_{23} & 0 \\ -\frac{S_{23} \text{sen } A_{23}}{\rho} & -\frac{S_{23} \text{sen } A_{23}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \cos A_{23} & 0 \\ \frac{S_{31} \cos A_{31}}{\rho} & \frac{S_{31} \cos A_{31}}{\rho} & \frac{S_{31} \cos A_{31}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \text{sen } A_{31} \\ -\frac{S_{31} \text{sen } A_{31}}{\rho} & -\frac{S_{31} \text{sen } A_{31}}{\rho} & -\frac{S_{31} \text{sen } A_{31}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \cos A_{31} \\ \rho & \rho & \rho & & & & \end{bmatrix}_{L^b}$$

$${}_7\mathbf{B}_7 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3,42813379507\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & 7,07110209329\text{E} - 1 & 0 & 0 \\
-3,42816703535\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & 7,07103353028\text{E} - 1 & 0 & 0 \\
-4,68297066164\text{E} - 3 & -4,68297066164\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & 2,58813893857\text{E} - 1 & 0 \\
-1,25477143986\text{E} - 3 & -1,25477143986\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & -9,65927206547\text{E} - 1 & 0 \\
1,25484582499\text{E} - 3 & 1,25484582499\text{E} - 3 & 1,25484582499\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & -9,65923442146\text{E} - 1 \\
4,68297582586\text{E} - 3 & 4,68297582586\text{E} - 3 & 4,68297582586\text{E} - 3 & 0 & 0 & 0 & 2,58827942682\text{E} - 1
\end{bmatrix}$$

e) Matriz dos pesos:

$${}_7\mathbf{P}_7^{-1} = \text{diag}\{\sigma_{a_1}^2, \sigma_{a_2}^2, \sigma_{a_3}^2, \sigma_{a_4}^2, \sigma_{s_{12}}^2, \sigma_{s_{23}}^2, \sigma_{s_{31}}^2\}$$

Do quadro 2.1, retira-se:

$$\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{a_2}^2 = \sigma_{a_3}^2 = \sigma_{a_4}^2 = 0,64^{(")^2}$$

$$\sigma_{s_{12}}^2 = \sigma_{s_{23}}^2 = \sigma_{s_{31}}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$$

logo,

$${}_7\mathbf{P}_7^{-1} = \text{diag}\{0,64 \ 0,64 \ 0,64 \ 0,64 \ 0,0001 \ 0,0001 \ 0,0001\}$$

f) Equações normais:

$${}_7\mathbf{M}_7 = {}_7\mathbf{B}_7 \quad {}_7\mathbf{P}_7^{-1} \quad {}_7\mathbf{B}_7^T$$

$${}_7M_7 = \begin{bmatrix} 2,56 & 2,19400562884E-3 & -2,19402690262E-3 & -5,9942024469E-3 & -1,60610744302E-3 & 2,40930398398E-3 & 8,99131358565E-3 \\ & 5,75218296565E-5 & 4,24785822255E-5 & -1,02744639913E-5 & -2,75297560196E-6 & 2,75313880335E-6 & 1,02744753217E-5 \\ & & 5,75210058886E-5 & 1,02745636158E-5 & 2,75300229569E-6 & -2,75316549867E-6 & -1,02745749463E-5 \\ & & & 3,47691373641E-5 & -1,74781841158E-5 & -7,52179991464E-6 & -2,80707051541E-5 \\ & & & & 9,53168345836E-5 & -2,01541721936E-6 & -7,5213623294E-6 \\ & & & & & 9,63241146541E-5 & -1,37180854178E-5 \\ & & & & & & 4,88052945556E-5 \end{bmatrix}$$

simétrica

$${}_4X_1 = -({}_4A_7^T {}_7M_7^{-1} {}_7A_4)^{-1} {}_4A_7^T {}_7M_7^{-1} {}_7W_1$$

$${}_4X_1 = \begin{bmatrix} Cx_2 \\ Cy_2 \\ Cx_3 \\ Cy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001119 \\ 0,004387 \\ 0,005855 \\ 0,005791 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

$${}_7K_1 = -{}_7M_7^{-1} ({}_7A_4 {}_4X_1 + {}_7W_1)$$

$${}_7K_1 = \begin{bmatrix} -7,44921221991E-1 \\ 42,3631323431 \\ 12,6986379085 \\ 42,3631323435 \\ 12,6986379048 \\ 42,3631323462 \\ 12,6986379092 \end{bmatrix}$$

g) Vetor dos resíduos:

$${}_7V_1 = {}_7P_7^{-1} {}_7B_7^T {}_7K_1$$

$${}_7V_1 = \begin{bmatrix} V_{s_1} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \\ V_{s_4} \\ V_{s_{12}} \\ V_{s_{23}} \\ V_{s_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4767'' \\ -0,5418'' \\ -0,4047'' \\ -0,4767'' \\ +0,003893 \text{ m} \\ -0,000130 \text{ m} \\ -0,003763 \text{ m} \end{bmatrix}$$

h) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{{}_1V_7^T {}_7P_7 {}_7V_1}{r-u} = -\frac{{}_1K_7^T {}_7W_1}{r-u}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1,718257}{3} = \frac{1,718257}{3} = 0,572752 \quad (\text{adimensional})$$

O valor de  $\hat{\sigma}_0^2$  resultou equivalente aos dois métodos anteriores, o que implica no mesmo resultado para o teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos visto que  $\sigma_0^2$  também é o mesmo.

i) Vetor das coordenadas ajustados:

$${}_4X_1^* = {}_4X_1^0 + {}_4X_1$$

${}_4X_1^0$  são as coordenadas calculadas com valores observados do quadro (2.1).

$${}_4X_1^* = \begin{bmatrix} x_2^0 \\ y_2^0 \\ x_3^0 \\ y_3^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Cx_2 \\ Cy_2 \\ Cx_3 \\ Cy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^* \\ y_2^* \\ x_3^* \\ y_3^* \end{bmatrix}$$

$${}_4X_1^* = \begin{bmatrix} 10707,11021 \\ 10707,10335 \\ 10965,92540 \\ 9741,17132 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,001119 \\ 0,004387 \\ 0,005855 \\ 0,005791 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10707,111329 \\ 10707,107737 \\ 10965,931255 \\ 9741,177111 \end{bmatrix} \quad (\text{m})$$

j) Vetor dos valores observados ajustados:

$${}_7L_1^* = {}_7L_1^b + {}_7V_1$$

$${}_7L_1^a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Va_1 \\ Va_2 \\ Va_3 \\ Va_4 \\ V_{S_{12}} \\ V_{S_{23}} \\ V_{S_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^a \\ a_2^a \\ a_3^a \\ a_4^a \\ S_{12}^a \\ S_{23}^a \\ S_{31}^a \end{bmatrix}$$

$${}_7L_1^a = \begin{bmatrix} 90^\circ 00' 01,0'' \\ 300^\circ 00' 00,1'' \\ 300^\circ 00' 00,8'' \\ 210^\circ 00' 00,0'' \\ 1000,000 \text{ m} \\ 1000,005 \text{ m} \\ 1000,010 \text{ m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,4767'' \\ -0,5418'' \\ -0,4047'' \\ -0,4767'' \\ +0,003893 \text{ m} \\ -0,000130 \text{ m} \\ -0,003763 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ 00' 00,5233'' \\ 299^\circ 59' 59,5582'' \\ 300^\circ 00' 00,3953'' \\ 209^\circ 59' 59,5233'' \\ 1000,003893 \text{ m} \\ 1000,004870 \text{ m} \\ 1000,006237 \text{ m} \end{bmatrix}$$

k) MVC das coordenadas ajustadas:

$${}_4\Sigma X_4^a = \hat{\sigma}_0^2 ({}_4A_7^T {}_7M_7^{-1} {}_7A_4)^{-1}$$

$${}_4\Sigma X_4^a = \begin{bmatrix} 0,000014876 & 0,000007408 & 0,000013142 & -0,000004362 \\ & 0,000012562 & 0,000012405 & -0,000000790 \\ & & 0,000020713 & -0,000002702 \\ \text{simétrica} & & & 0,000006726 \end{bmatrix} (\text{m})^2$$

l) MVC dos valores observados ajustados:

Calculando a (5.23), obtém-se:

$${}_7\Sigma L_7^a = \begin{bmatrix} 0,268511 & -0,085230 & -0,085230 & -0,098051 & 0,000239 & -0,000477 & 0,000239 \\ & 0,259759 & -0,089299 & -0,085230 & 0,000250 & 0,000477 & -0,000727 \\ & & 0,259759 & -0,085230 & -0,000727 & 0,000477 & 0,000250 \\ & & & 0,268510 & 0,000239 & -0,000477 & 0,000239 \\ & & & & 0,000021 & 0,000018 & 0,000018 \\ & & & & & 0,000022 & 0,000018 \\ \text{simétrica} & & & & & & 0,000021 \end{bmatrix}$$

m) MVC dos resíduos:

$${}_7\Sigma V_7 = \hat{\sigma}_0^2 \cdot {}_n P_n^{-1} \cdot {}_7\Sigma L_7^a$$

$${}_7\Sigma V_7 = \begin{bmatrix} 0,098051 & 0,085230 & 0,085230 & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & 0,106802 & 0,089299 & 0,085230 & -0,000250 & -0,000477 & 0,000727 \\ & & 0,106802 & 0,085230 & 0,000727 & -0,000477 & -0,000250 \\ & & & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & & & & 0,000036 & -0,000018 & -0,000018 \\ & & & & & 0,000036 & -0,000018 \\ \text{simétrica} & & & & & & 0,000036 \end{bmatrix}$$

#### 5.4.2 Iteração

A rigor, considerar-se-á ajustada uma poligonal quando os valores finais obtidos dos cálculos são aqueles da *i*-ésima iteração necessária, conforme exposto na secção (5.3.2).

Havendo a necessidade de concisão neste trabalho de dissertação, os resultados numéricos das iterações não são apresentados.

## 6 VARIÂNCIA DA ÁREA DEFINIDA PELA POLIGONAL NO PLANO TOPOGRÁFICO

### 6.1 INTRODUÇÃO

Em qualquer um dos métodos de ajustamento estudado neste trabalho, o vetor dos valores observados ajustados ( ${}_n L_1^A$ ) é fornecido no próprio processo do ajustamento, isto é, na última iteração necessária à estabilização do vetor dos resíduos ( ${}_n V_1$ ). Desta forma, a poligonal fica geometricamente definida e, no caso das poligonais fechadas, obtém-se a área com a unicidade de resultado quando empregadas as fórmulas exatas. A variância da área ( $\sigma_s^2$ ) é calculada mediante a fórmula da lei de propagação de covariâncias, utilizando a fórmula geral para o cálculo de área em função de coordenadas retangulares e a matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas advinda do ajustamento.

### 6.2 FÓRMULA GERAL PARA O CÁLCULO DE ÁREA EM FUNÇÃO DE COORDENADAS RETANGULARES

A poligonal fechada de  $(p+1)$  pontos tem sua área ( $s$ ) expressa em função das coordenadas retangulares de seus vértices (CICCONETTI, 1938, p.464) dada por:

$$s = f(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^p x_i y_k - \sum_{i=1}^p x_k y_i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad ; \quad k = i + 1 \quad (6.1)$$

Desenvolvendo os somatórios:

$$s = f(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_p y_{p+1} - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_{p+1} y_p| \right\} \quad (6.2)$$

### 6.3 VARIÂNCIA DA ÁREA

A variância da área ( $\sigma_s^2$ ) é dada pela lei de propagação de covariâncias:

$$\sigma_s^2 = {}_1 D_u \quad {}_u \Sigma X_u^a \quad {}_u D_1^T \quad (6.3)$$

onde:

$${}_1 D_u = \frac{\partial s}{\partial F} = \left[ \frac{\partial s}{\partial x_1} \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} \quad \dots \quad \frac{\partial s}{\partial x_p} \quad \frac{\partial s}{\partial y_p} \right] \quad (6.4)$$

$$F = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

${}_u \Sigma X_u^a$  é a matriz variância-covariância das coordenadas obtida no processo do ajustamento pelos métodos variação de coordenadas e combinado e, por propagação de covariâncias, no método das equações de condição.

## 6.4 SIMULAÇÃO

Para exemplificar o cálculo da variância da área ( $\sigma_s^2$ ), utilizar-se-á a poligonal apresentada pela figura (2.1), o vetor de coordenadas ajustadas ( ${}_u X_1^*$ ) e a matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas ( ${}_u \Sigma X_u^*$ ), ambos da secção (5.4.1), supondo que o vetor dos resíduos ( ${}_n V_1$ ) está estabilizado.

Para a poligonal da figura (2.1), a (6.2) resulta:

$$s = \frac{1}{2} \{ |x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3| \} (m^2)$$

Derivando  $s = f(x, y)$  com relação às coordenadas ajustadas ( $x_2, y_2, x_3, y_3$ ), a (6.4) resulta:

$${}_1 D_4 = \left[ \frac{\partial s}{\partial x_2} \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} \quad \frac{\partial s}{\partial x_3} \quad \frac{\partial s}{\partial y_3} \right] = \frac{1}{2} [y_3 - y_1 \quad x_1 - x_3 \quad y_1 - y_2 \quad x_2 - x_1] (m)$$

Introduzindo os valores das coordenadas ajustadas retiradas da secção 5.4.1 (item i):

$${}_1 D_4 = \frac{1}{2} [-258,822889 \quad -965,931255 \quad -707,107737 \quad 707,111329] (m)$$

Efetuada o produto (6.3), obtém-se o valor numérico procurado para a variância da área ( $\hat{\sigma}_s^2$ ):

$$\sigma_s^2 = \frac{37,053875}{4} = 9,263469 (m^4)$$

A área (s) calculada a partir da (6.1) utilizando as coordenadas ajustadas resulta:

$$s = 433017,0305 (m^2)$$

O desvio-padrão da área obtido a partir de  $\sigma_s^2$  é  $\sigma_s = 3,043594 (m^2)$  o que representa 0,001% sobre a área calculada com as coordenadas ajustadas.

## **7 AJUSTAMENTO DE POLIGONAIS GEODÉSICAS PELO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO**

### **7.1 INTRODUÇÃO**

Antes de ajustar uma poligonal geodésica é necessário conhecer a altitude ortométrica das estações novas mediante o transporte da altitude ortométrica do vértice de apoio da poligonal no Sistema Geodésico de Referência (SGR). Essas altitudes são ajustadas.

O conhecimento das altitudes ortométricas ajustadas das estações novas e o conhecimento da ondulação geoidal na posição desses pontos permitem obter as respectivas altitudes geométricas necessárias para a redução das distâncias à superfície do elipsóide de referência, isto é, conhecer o comprimento das linhas geodésicas correspondente às distâncias observadas na superfície física da Terra após minimizados os erros devido ao operador, à imperfeição dos equipamentos e aos efeitos do ambiente.

Os ângulos horizontais observados são reduzidos à superfície do elipsóide mediante duas reduções de natureza geométrica (ângulo seção normal-geodésica e efeito da altura do sinal) e uma redução de natureza física (estudados nas secções 7.4.2 e 7.4.3), permitindo conhecer os ângulos elipsóidicos correspondentes.

Conhecidos os comprimentos das linhas geodésicas e os ângulos elipsóidicos, as coordenadas do vértice de uma base do SGR e o azimute correspondente são transportados para as estações novas até atingir uma outra base do SGR a fim de obter os "erros de fechamento" em coordenadas e em azimute.

O ajustamento de poligonal geodésica pelo método das equações de condição utiliza as fórmulas de transporte de coordenadas e de transporte de azimute como equações de condição.

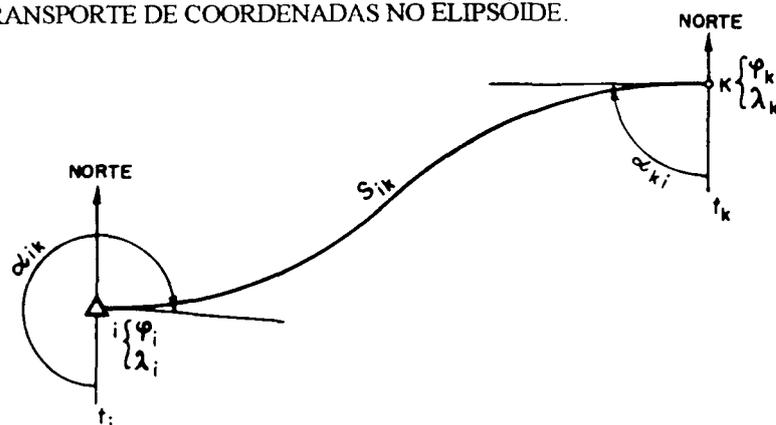
## 7.2 TRANSPORTE DE COORDENADAS E DE AZIMUTE NO ELIPSÓIDE

O estudo do transporte de coordenadas e de azimute no elipsóide pode ser verificado nas seguintes publicações: CICCONETTI (1938, cap.VII); GEMAEL (1959, cap. 11); MINISTÉRIO DO EXÉRCITO ( 1976a, cap. 4); MINISTÉRIO DO EXÉRCITO (1976b, cap. 12); TORGE (1980, p. 218-220) e GEMAEL (1988, cap. 8). Consiste em calcular as coordenadas do ponto  $k$  ( $\varphi_k, \lambda_k$ ) conhecendo-se:

- as coordenadas do ponto  $i$  ( $\varphi_i, \lambda_i$ );
- o comprimento da geodésica  $S_{ik}$ ; a geodésica em uma superfície é a curva na qual a normal principal de cada um de seus pontos coincide com a normal à superfície (ZAKATOV, 1981, p. 63); e
- o azimute  $\alpha_{ik}$  da geodésica  $S_{ik}$ .

Após efetuados os cálculos das coordenadas do ponto  $k$  obtém-se os elementos necessários para calcular o azimute recíproco  $\alpha_{ki}$  conforme mostra a figura (7.1).

FIGURA 7.1 - TRANSPORTE DE COORDENADAS NO ELIPSÓIDE.



Para calcular as coordenadas  $(\varphi_k, \lambda_k)$  e o azimute recíproco  $(\alpha_{ki})$  conforme mostra a figura (7.1), utilizar-se-ão, neste trabalho, as clássicas fórmulas de Puissant (GEMAEL, 1959, cap. 11; MINISTÉRIO DO EXÉRCITO, 1976a, cap. 4; MINISTÉRIO DO EXÉRCITO, 1976b, cap. 12; GEMAEL, 1988, cap. 8).

### 7.2.1 Cálculo da Latitude

$$\varphi_k = \varphi_i + \Delta\varphi_{ik} \quad (7.1)$$

$$\Delta\varphi_{ik} = \delta\varphi_{ik} + D(\delta\varphi_{ik})^2 \quad (7.2)$$

$$\delta\varphi_{ik} = BS_{ik} \cos\alpha_{ik} + CS_{ik}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{ik} - hES_{ik}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{ik} + \dots \quad (7.3)$$

$$\Delta\varphi_{ik} = BS_{ik} \cos \alpha_{ik} + CS_{ik}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{ik} + (\delta\varphi_{ik})^2 D - hES_{ik}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{ik} + \dots \quad (7.4)$$

onde:

$$B = \frac{1}{M_i} \quad (7.5)$$

$$C = \frac{\operatorname{tg}\varphi_i}{2M_i N_i} \quad (7.6)$$

$$D = \frac{3e^2 \operatorname{sen}\varphi_i \cos\varphi_i}{2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i)} \quad (7.7)$$

$$E = \frac{1 + 3\operatorname{tg}^2 \varphi_i}{2N_i^2} \quad (7.8)$$

$$h = \frac{S_{ik} \cos\alpha_{ik}}{M_i} \quad (7.9)$$

$$M_i = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_i)^{3/2}} \quad (7.10)$$

$$N_i = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i)^{1/2}} \quad (7.11)$$

Observação:

- a) C e D são negativos no hemisfério sul;
- b)  $M_i$  é o raio de curvatura da seção meridiana;
- c)  $N_i$  é a grande normal.

Para as poligonais cujos lados não excedem 25 km, isto é,  $S_{ik} \leq 25 \text{ km}$ ,  $(\delta\varphi_{ik})^2$  pode ser substituído por  $h^2$  (MINISTÉRIO DO EXÉRCITO, 1976b, cap. 12).

Substituindo as (7.5), (7.6), (7.7), (7.8) e (7.9) na (7.4), obtém-se:

$$\Delta\varphi_{ik} = \frac{S_{ik} \cos\alpha_{ik}}{M_i} + \frac{S_{ik}^2 \sin^2 \alpha_{ik} \operatorname{tg}\varphi_i}{2N_i M_i} + \frac{3e^2 \sin\varphi_i \cos\varphi_i S_{ik}^2 \cos^2 \alpha_{ik}}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi_i) M_i^2} - \frac{(1 + 3\operatorname{tg}^2 \varphi_i) S_{ik}^3 \cos\alpha_{ik} \sin^2 \alpha_{ik}}{6N_i^2 M_i} \quad (7.12)$$

A unidade de  $\Delta\varphi_{ik}$  é radiano; a expressão para transformá-la em segundos de arco é dada por:

$$\Delta\varphi_{ik}'' = \rho \Delta\varphi_{ik} \left( \frac{''}{\text{rad}} \right) \quad (7.13)$$

Foi visto o transporte da latitude ( $\varphi_i$ ) conhecida, de um extremo i da linha geodésica para o seu outro extremo k.

Mas como se exprime uma fórmula matemática do transporte de  $\varphi$  para várias linhas geodésicas sequencialmente ligadas, como é o caso das poligonais geodésicas?

A expressão do transporte da latitude para o ponto extremo da última geodésica é dada por:

$$\varphi_{p+1} = \varphi_1 + \sum_{i=1}^p \Delta\varphi_{ik} ; i = 1, \dots, p ; k = i+1 \quad (7.14)$$

onde  $\varphi_1$  é a latitude conhecida do 1º ponto.

### 7.2.2 Cálculo da Longitude

$$\lambda_k = \lambda_i + \Delta\lambda_{ik} \quad (7.15)$$

$$\Delta\lambda_{ik} = A \sec \varphi_k \left[ S_{ik} \operatorname{sen} \alpha_{ik} + \frac{2}{3} S_{ik}^3 \operatorname{sen}^3 \alpha_{ik} \left( \frac{C}{B} \right)^2 - 4,095E-15 \right. \\ \left. \times S_{ik}^3 \cos^2 \alpha_{ik} \operatorname{sen} \alpha_{ik} \right] \quad (7.16)$$

$$\text{onde: } A = \frac{1}{N_k} \quad (7.17)$$

Substituindo a (7.17), (7.6) e a (7.5) na (7.16), obtém-se:

$$\Delta\lambda_{ik} = \frac{1}{N_k \cos \varphi_k} \left( S_{ik} \operatorname{sen} \alpha_{ik} + \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_i S_{ik}^3 \operatorname{sen}^3 \alpha_{ik}}{6N_i^2} - 4,095E-15 \right. \\ \left. \times S_{ik}^3 \operatorname{sen} \alpha_{ik} \cos^2 \alpha_{ik} \right) \quad (7.18)$$

A unidade de  $\Delta\lambda_{ik}$  é radiano.

Analogamente a (7.14), a expressão do transporte da longitude para o último ponto de uma poligonal geodésica é dada por:

$$\lambda_{p+1} = \lambda_1 + \sum_{i=1}^p \Delta\lambda_{ik} ; i = 1, \dots, p ; k = i+1 \quad (7.19)$$

onde  $\lambda_1$  é a latitude conhecida do 1º ponto.

### 7.2.3 Cálculo do Azimute

O azimute geodésico  $\alpha_{ik}$  da linha geodésica de extremos i e k (figuras 7.1, 7.2, 7.4 e 7.5) é definido como o ângulo entre duas linhas: a projeção do meridiano geodésico ( $m_i$ ) no plano tangente ao elipsóide de referência em i e a tangente à projeção da linha geodésica ik no mesmo plano tangente (VANICEK, 1975, p. 147).

O meridiano geodésico  $m_i$  é a linha geodésica no elipsóide de referência que contém os pólos elipsoidais e o ponto i (op. cit., p. 147).

Devido à convergência meridiana relativa aos pontos i e k ( $\Delta\alpha_{ik}$ ), o azimute  $\alpha_{ik}$  da linha geodésica ik e o azimute recíproco  $\alpha_{ki}$  não diferem de  $180^\circ$ , exceto para quaisquer dois pontos da linha equatorial e quaisquer dois pontos de um mesmo meridiano; nestes dois casos, tem-se, portanto  $\Delta\alpha_{ik} = 0$ .

Desta forma a expressão que relaciona o azimute  $\alpha_{ik}$  e seu recíproco  $\alpha_{ki}$  é dada por:

$$\alpha_{ki} = \alpha_{ik} + 180^\circ + \Delta\alpha_{ik} \quad (7.20)$$

onde:

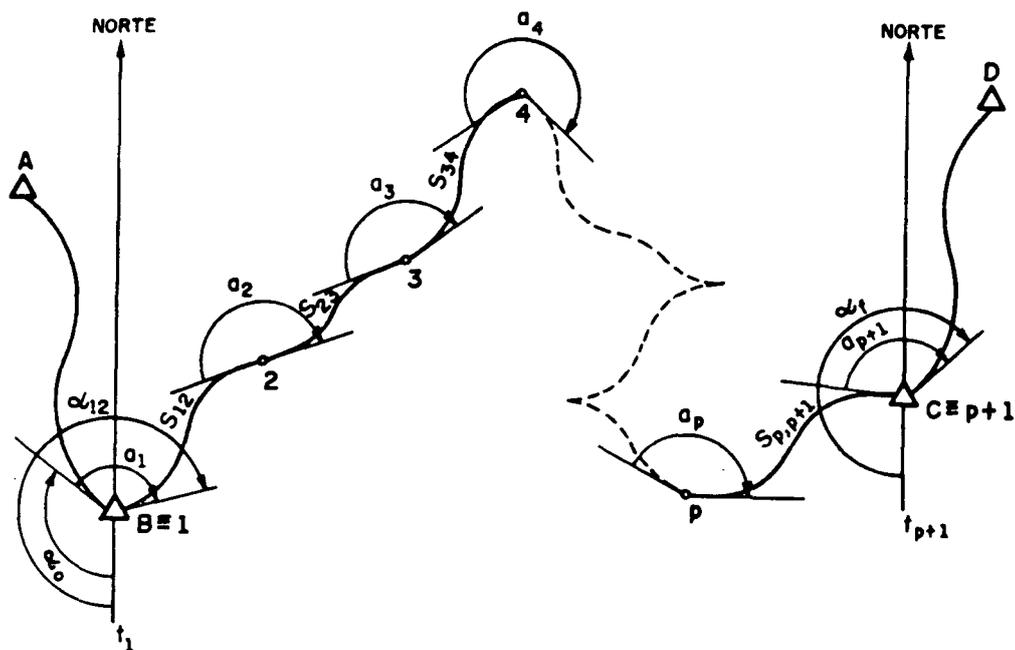
$$\Delta\alpha_{ik} = \Delta\lambda_{ik} \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta\varphi_{ik}}{2} + \frac{(\Delta\lambda_{ik})^3}{12} \operatorname{sen} \varphi_i \cos^2 \varphi_i \quad (7.21)$$

onde  $\varphi_m$  é a latitude média dos pontos extremos i e k.

A unidade de  $\Delta\alpha_{ik}$  é radiano.

Para obter a expressão do transporte do azimute em uma poligonal geodésica, recorrer-se-á à figura 7.2.

FIGURA 7.2 - POLIGONAL GEODÉSICA.



Na figura (7.2), para o efeito da dedução da expressão geral do transporte do azimute em uma poligonal geodésica, todos os elementos (azimutes  $\alpha$ , ângulos  $a$  e comprimentos das geodésicas  $S$ ) são considerados conhecidos.

Então,

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{12} &= \alpha_0 + a_1 \\
 \alpha_{23} &= \alpha_{21} + a_2 = \alpha_{12} + 180^\circ + \Delta\alpha_{12} + a_2 \\
 &= \alpha_0 + a_1 + 180^\circ + \Delta\alpha_{12} + a_2 \\
 \alpha_{34} &= \alpha_{32} + a_3 = \alpha_{23} + 180^\circ + \Delta\alpha_{23} + a_3 \\
 &= \alpha_{21} + a_2 + 180^\circ + \Delta\alpha_{23} + a_3 \\
 \alpha_{45} &= \alpha_{43} + a_4 = \alpha_{34} + 180^\circ + \Delta\alpha_{34} + a_4 \\
 &= \alpha_{32} + a_3 + 180^\circ + \Delta\alpha_{34} + a_4
 \end{aligned} \right\} (7.22)$$

Considerando o intervalo  $[0^\circ \leq \alpha_{ik} \leq 360^\circ]$ , a (7.22) é reescrita como:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_0 + a_1 \\ \alpha_{23} &= \alpha_0 + a_1 + \Delta\alpha_{12} + a_2 - 180^\circ \\ \alpha_{34} &= \alpha_0 + a_1 + \Delta\alpha_{12} + a_2 + \Delta\alpha_{23} + a_3 - 2 \times 180^\circ \\ \alpha_{45} &= \alpha_0 + a_1 + \Delta\alpha_{12} + a_2 + \Delta\alpha_{23} + a_3 + \Delta\alpha_{34} + a_4 \\ &\quad - 3 \times 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Da expressão (7.23) infere-se que a expressão para o azimute da última linha geodésica de uma poligonal é dada por:

$$\alpha_{p,p+1} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^{p-1} \Delta\alpha_{ik} - (p-1) \times 180^\circ \quad (7.24)$$

$$\alpha_{p,p+1} \in [0^\circ; 360^\circ]$$

## 7.3 TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA

### 7.3.1 Redução Dos Ângulos Verticais ao Solo

As expressões que reduzem os ângulos verticais recíprocos e simultâneos (MINISTÉRIO DO EXÉRCITO, 1975, cap. 2; GEMAEL, 1988, cap. 9) observadas em duas estações genéricas i e k são dadas por:

$$z_i = z'_i + C_i \quad (7.25)$$

$$z_k = z'_k + C_k \quad (7.26)$$

onde:

$$C_i'' = \rho \frac{AS_k - AI_i}{S} \text{sen } z_i' \quad (7.27)$$

$$C_k'' = \rho \frac{AS_i - AI_k}{S} \text{sen } z_k' \quad (7.28)$$

$z_i, z_k$  são ângulos verticais reduzidos;

$z_i', z_k'$  são ângulos verticais observados;

$C_i, C_k$  são as correções a serem adicionadas, respectivamente aos ângulos observados  $z_i'$  e  $z_k'$ ;

$AS_k, AS_i$  são as alturas dos alvos em relação ao topo dos marcos, respectivamente das estações  $k$  e  $i$ ;

$AI_i, AI_k$  são as alturas do teodolito em relação ao topo dos marcos, respectivamente estacionados em  $i$  e  $k$ .

### 7.3.2 Cálculo da Altitude Ortométrica

A diferença de altitude ou desnível ( $\Delta h$ ) no modelo esférico (GEMAEL, 1959, p. 216; GEMAEL, 1988, cap. 9) é dada por:

$$\Delta h_{ik} = 2(R_{ik} + h_i) \left( \text{tg} \frac{z_k - z_i}{2} \right) \frac{\frac{S_{ik}}{2R_{ik}} + \frac{S_{ik}^3}{24R_{ik}^3}}{1 - \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} \text{tg} \frac{z_k - z_i}{2}} \quad (7.29)$$

onde:

$R_{ik}$  é o raio de curvatura de uma secção normal  $ik$  de azimute  $\alpha_{ik}$  e é obtido mediante o teorema de Euler expresso por:

$$\frac{1}{R_{ik}} = \frac{\cos^2 \alpha_{ik}}{M_m} + \frac{\text{sen}^2 \alpha_{ik}}{N_m} \quad (7.30)$$

O índice  $m$  indica a utilização da latitude média dos extremos da geodésica  $S_{ik}$  e  $h_i$  é a altitude ortométrica conhecida do extremo  $i$  da linha geodésica  $S_{ik}$ .

A expressão genérica do transporte de altitude ortométrica para o último ponto de uma poligonal geodésica é dada por:

$$h_{p+1} = h_1 + \sum_{i=1}^p \Delta h_{ik} \quad ; \quad i = 1, \dots, p \quad ; \quad k = i+1 \quad (7.31)$$

### 7.3.3 Ajustamento do Nivelamento Trigonométrico por Equações de Condição

#### 7.3.3.1 Primeira etapa

a) Modelo matemático:

$$\text{natural:} \quad F(L^a) = O \quad (7.32)$$

$$\text{linearizado:} \quad {}_r B_n \quad {}_n V_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1 \quad (7.33)$$

onde:  $r$  = número de equações

$n$  = número de observações

b) Equações de condição:

A equação de condição para uma linha de nivelamento trigonométrico que inicia e termina em pontos de altitude ortométrica conhecidos 1 e  $(p+1)$  em cujo trecho encontram-se os pontos aos quais serão transportadas a altitude do ponto inicial (1), é dada por:

$$f = h_1 + \sum_{i=1}^p \Delta h_{ik}^a - h_{p+1} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, p \quad ; \quad k = i+1 \quad (7.34)$$

onde,  $\Delta h_{ik}$  é substituído pela (7.29).

c) Vetor erro de fechamento:

$${}_r W_1 = F(L^b) \quad (7.35)$$

$L^b$  representa o vetor de tamanho  $n \times 1$  das observações depuradas dos erros sistemáticos (ângulos verticais reduzidos ao solo e distâncias observadas);  ${}_r W_1$  é obtido substituindo em (7.34) os valores de  $L^b$ .

d) Equações normais:

$${}_r M_r \quad {}_r K_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1 \quad (7.36)$$

$${}_r K_1 = -{}_r M_r^{-1} \quad {}_r W_1 \quad (7.37)$$

$${}_r M_r = {}_r B_n \quad {}_n P_n^{-1} \quad {}_n B_r^T \quad (7.38)$$

e) Matriz  ${}_r B_n$ :

$${}_r B_n = \frac{\partial f}{\partial L^b} \quad (7.39)$$

$${}_r B_n = \left[ \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial S_{12}} \quad \dots \right] \quad (7.40)$$

Derivando a (7.29):

$$\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i} = -2(R_{ik} + h_i) \left( \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} + \frac{S_{ik}^3}{24R_{ik}^3} \right) \left[ \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{z_k - z_i}{2}}{1 - \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2}} + \frac{\frac{S_{ik}}{4R_{ik}} \sec^2 \frac{z_k - z_i}{2} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2}}{\left( 1 - \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2} \right)^2} \right] \quad (7.41)$$

$$\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_k} = - \frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i} \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial S_{ik}} = 2(R_{ik} + h_i) \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2} \left[ \frac{\frac{1}{2R_{ik}} + \frac{S_{ik}^2}{8R_{ik}^3}}{1 - \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2}} + \frac{\left( \frac{1}{2R_{ik}} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2} \right) \left( \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} + \frac{S_{ik}^3}{24R_{ik}^3} \right)}{\left( 1 - \frac{S_{ik}}{2R_{ik}} \operatorname{tg} \frac{z_k - z_i}{2} \right)^2} \right] \quad (7.43)$$

f) Matriz dos pesos:

Como  $\Delta h = f(z, S)$ , a inversa da matriz dos pesos é obtida analogamente a (4.17), substituindo os elementos diagonais da variância do ângulo horizontal pela variância do ângulo vertical.

g) Vetor dos resíduos:

$${}_n V_1 = {}_n P_n^{-1} {}_n B_r^T {}_r K_1 \quad (7.44)$$

h) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = - \frac{{}_r K_r^T {}_r W_1}{{}_r} = \frac{{}_r V_n^T {}_n P_n {}_n V_1}{{}_r} \quad (7.45)$$

i) Vetor dos valores observados reduzidos ajustados:

$${}_n L_1^* = {}_n L_1^b + {}_n V_1 \quad (7.46)$$

### 7.3.3.2 Iterações

As iterações, que precisam ser calculadas, seguem a seqüência exposta no capítulo 4, secção (4.3.2).

### 7.3.4 Cálculo da Altitude Geométrica

A altitude geométrica ( $H_i$ ) de um ponto  $i$  na superfície física da Terra é a distância sobre a normal desde o elipsóide até o ponto  $i$ , e pode ser obtida (GEMAEL, 1987, cap. 1; GEMAEL, 1988, cap. 9) aproximadamente por:

$$H_i \cong N_i + h_i \quad (7.47)$$

onde:

$N_i$  é a ondulação do geóide;

$h_i$  é a altitude ortométrica; e o sinal de aproximação é devido a não colinearidade entre as altitudes geométrica e ortométrica.

Pode-se assumir essa colinearidade, quando o desvio da vertical possui valor de até 5", isto não causa erro significativo (cerca de 0,01 m) na altitude para distâncias entre pontos de até 30 km (ZAKATOV, 1981, p. 380).

## 7.4 REDUÇÃO DOS VALORES OBSERVADOS

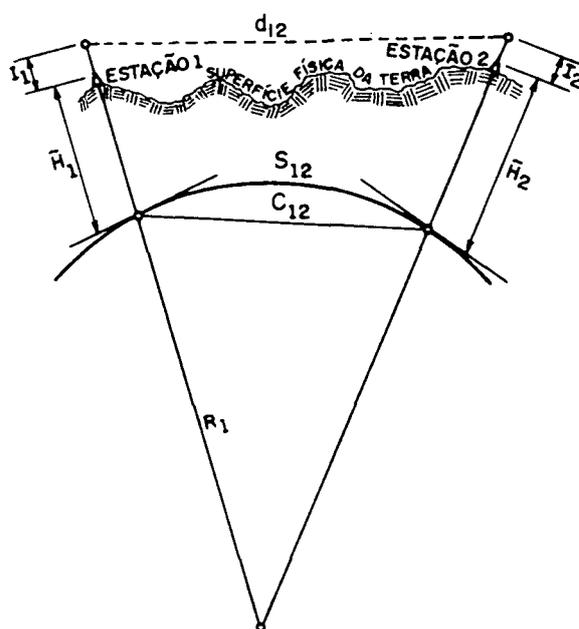
As observações se processam na superfície física da Terra, enquanto que os cálculos são efetuados sobre a superfície do elipsóide. Esta transferência, denominada redução,

de uma dada grandeza de uma superfície para outra implica correções. Há as reduções de naturezas geométrica e física.

#### 7.4.1 Redução Geométrica da Distância

Para esta redução é necessário conhecer a altitude geométrica dos pontos extremos da distância observada.

FIGURA 7.3 - REDUÇÃO GEOMÉTRICA DA DISTÂNCIA.



Na figura (7.3),  $(\tilde{H}_1 + I_1)$  e  $(\tilde{H}_2 + I_2)$  são as altitudes geométricas aproximadas dos pontos extremos da distância observada  $d_{12}$ ;  $C_{12}$  e  $S_{12}$  são, respectivamente o comprimento da corda e do arco na esfera de raio  $R_1$  correspondente à distância observada  $d_{12}$ .

As expressões de  $C_{12}$  e  $S_{12}$  (BLACHUT *et al.*, 1979, p. 116; ZAKATOV, 1981, p. 445) são dadas por:

$$C_{12}^2 = \frac{d_{12}^2 - (H_1 - H_2)^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_1}\right) \left(1 + \frac{H_2}{R_1}\right)} \quad (7.48)$$

onde:

$$H_1 \approx \tilde{H}_1 + I_1$$

$$H_2 \approx \tilde{H}_2 + I_2$$

$R_1$  é calculado pela (7.30) e

$$S_{12} = C_{12} + \frac{C_{12}^3}{24R_1^2} + \frac{3C_{12}^5}{640R_1^4} \quad (7.49)$$

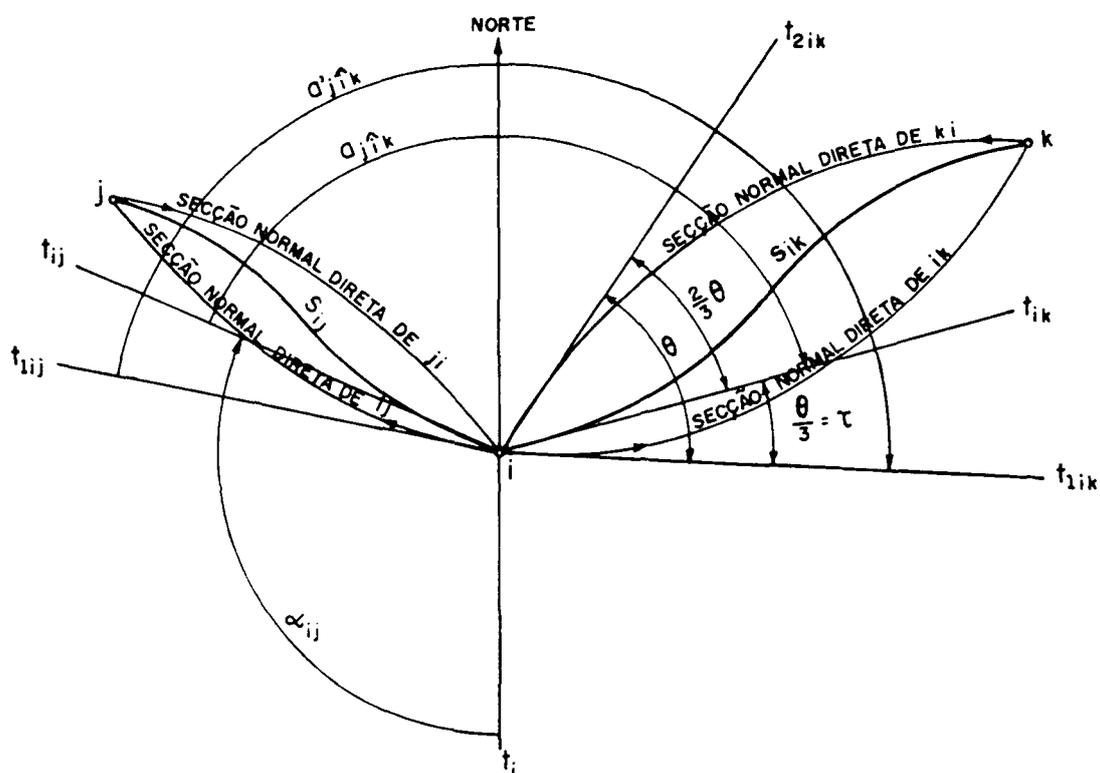
#### 7.4.2 Redução Geométrica de Ângulos Horizontais

a) Ângulo secção normal-geodésica:

O conhecimento do ângulo secção normal-geodésica  $\left(\tau = \frac{\theta}{3}\right)$  permite que as observações angulares efetuadas sobre a normal se transformem em observações angulares da correspondente linha geodésica.

Na figura (7.4),  $t_{1ij}$  e  $t_{1ik}$  são as direções das visadas de um suposto teodolito de eixo normalizado na estação  $i$ , em alvos situados, respectivamente, nas estações  $j$  e  $k$ ;  $t_{ij}$  e  $t_{ik}$  são as direções correspondentes às linhas geodésicas  $S_{ij}$  e  $S_{ik}$ .

FIGURA 7.4 - ÂNGULO SECÇÃO NORMAL-GEODÉSICA.



No ponto  $i$ , o ângulo compreendido entre as direções  $t_{lk}$  e  $t_{ik}$  é chamado de ângulo secção normal-geodésica ( $\tau$ ) e vale  $\frac{1}{3}$  do ângulo ( $\theta$ ) entre duas secções normais recíprocas.

Analogamente se aplica para as direções  $t_{lj}$  e  $t_{ij}$ .

Desta maneira, o ângulo da estação  $i$  ( $\alpha'_{jik}$ ) definido pelas direções  $t_{lk}$  e  $t_{lj}$  sobre as respectivas secções normais  $ik$  e  $ij$  se transforma no ângulo  $\alpha_{jik}$  definido pelas direções  $t_{ik}$  e  $t_{ij}$  sobre as respectivas linhas geodésicas  $S_{ik}$  e  $S_{ij}$  mediante o conhecimento do ângulo  $\frac{\theta}{3}$ .

A expressão que calcula  $\tau$  (BOMFORD, 1983, p. 109; GEMAEL, 1987, cap. 4) é dada por:

$$\tau = \frac{\theta}{3} = (\alpha'_{ik} - \alpha_{ik}) = \frac{e^2 S_{ik}^2}{12 N_i^2} \left( \cos^2 \varphi_i \sin 2\alpha_{ik} - \frac{S_{ik} \sin 2\varphi_i \sin \alpha_{ik}}{2 N_i} \right) \quad (7.50)$$

onde:

$\alpha'_{ik}$  e  $\alpha_{ik}$  são, respectivamente, os azimutes geodésicos (com origem no norte) da secção normal e da linha geodésica. Quando se considera o azimute geodésico com origem no sul, o sinal (-) que antecede a parcela  $\frac{S_{ik} \sin 2\varphi_i \sin \alpha_{ik}}{2 N_i}$  precisa ser trocado.

Esta correção é positiva se k estiver a noroeste ou sudeste de i (BOMFORD, 1983, p. 109).

Se  $\varphi_i = 23^\circ$  sul,  $S = 15000$  m e  $\alpha_{ik} = 45^\circ$  tem-se  $\tau = 0,001''$ .

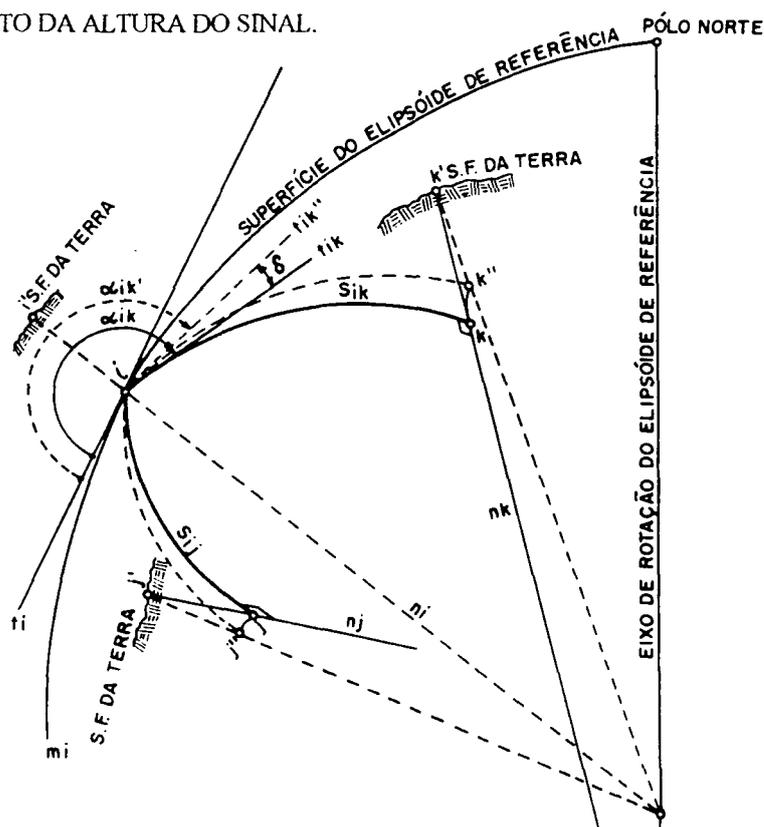
Ao longo do meridiano,  $\tau = 0$ .

b) Efeito da altura do sinal:

Esta correção é devido à altitude geométrica ( $H_k$ ) do ponto visado; a altitude geométrica ( $H_i$ ) da estação não exerce influência, pois a secção normal da estação independe da altitude deste ponto.

Na figura (7.5), a estação  $i'$  da superfície física da Terra se projeta, segundo a normal  $n_i$ , em  $i$  na superfície do elipsóide; o ponto visado  $k'$  da superfície física da Terra se projeta, segundo a normal  $n_k$  em  $k$  na superfície do elipsóide; a visada  $ik'$  é feita pela tangente  $t_{ik}$  ao plano  $in_{ik}$ .

FIGURA 7.5 - EFEITO DA ALTURA DO SINAL.



Mas, considerando  $k$  na superfície do elipsóide, isto é,  $H_k = 0$ , a visada será dada pela tangente  $t_{ik}$  ao plano  $in_i k$ .

Nestas condições o azimute  $\alpha_{ik}'$  deve receber uma correção  $\delta$  para se transformar no azimute  $\alpha_{ik}$  da linha geodésica  $S_{ik}$ .

A expressão de  $\delta$  (GEMAEL, 1987, cap. 4) é dada por:

$$\delta = \frac{e^2 H_k'}{2N_i} \left( \cos^2 \varphi_i \operatorname{sen} 2\alpha_{ik} - \frac{S_{ik} \operatorname{sen} 2\varphi_i \operatorname{sen} \alpha_{ik}}{2N_i} \right) \quad (7.51)$$

A mesma consideração quanto a origem de  $\alpha_{ik}$  para a (7.50) é aplicada na (7.51).

A correção  $\delta$  é positiva se  $k$  está a sudoeste ou nordeste de  $i$  (BOMFORD, 1983, p. 107).

Se  $\varphi_i = 23^\circ$  sul,  $H_k' = 900$  m,  $S_{ik} = 15000$  m tem-se  $\delta = 0,083''$ .

Ao longo do meridiano,  $\delta = 0$ .

### 7.4.3 Redução Física de Ângulos Horizontais

O ângulo observado na superfície física da Terra é determinado por um ângulo diedro, cuja aresta é a linha que coincide com o eixo vertical do instrumento, isto é, com a vertical; o ângulo no ponto correspondente na superfície do elipsóide é medido com um ângulo diedro cujos lados são planos normais e sua aresta é a normal à superfície do elipsóide e, desta forma, devido à inclinação da vertical com relação à normal há a necessidade de introduzir a correção  $\Delta M$  na direção observada (ZAKATOV, 1981, p. 440) dada por:

$$\Delta M = \frac{\eta \cos \alpha_{ik} - \xi \operatorname{sen} \alpha_{ik}}{\operatorname{tg} z_i} \quad (7.52)$$

onde:

$\eta$  é a componente (projeção) do desvio total da linha vertical no primeiro vertical;

$\xi$  é a componente (projeção) do desvio total da linha vertical no meridiano, e

$\alpha_{ik}$  é o azimute geodésico (origem no norte).

O valor numérico de  $\Delta M$  é da ordem de centésimos de segundos e deve ser considerado, sobretudo, nas regiões montanhosas onde a inclinação da linha vertical alcança algumas dezenas de segundos (op. cit., p. 441-442).

Para o valor máximo de  $\cos \alpha_{ik}$ , com  $z_i = 89^\circ 00'$  e  $z_i = 89^\circ 30'$  em um ponto  $i$  onde  $\eta = 3''$ , tem-se respectivamente  $\Delta M = 0,052''$  e  $\Delta M = 0,026''$ .

Na secção (7.6), quadro (7.13) os valores de  $\Delta M$  não serão considerados por não dispor de  $\eta$  e  $\xi$  como dados para calcular a poligonal.

## 7.5 AJUSTAMENTO DA POLIGONAL GEODÉSICA

### 7.5.1 Primeira Etapa

a) Modelo matemático:

$$\text{natural: } F(L^a) = O \quad (7.53)$$

$$\text{linearizado: } {}_rB_n \quad {}_nV_1 + {}_rW_1 = {}_rO_1 \quad (7.54)$$

$L^a$  representa o vetor dos valores observados reduzidos ajustados que são os ângulos elipsóidicos e os comprimentos das geodésicas.

b) Equações de condição:

De acordo com a figura (7.2), estabelece-se três equações de condição:

▪ 1ª equação: equação de condição de azimute:

$$f_1 = \sum_{i=1}^{p+1} a_i^a + \sum_{i=1}^p \Delta\alpha_{ik}^a - (\alpha_f - \alpha_0) - p \ 180^\circ = 0 \ ; \ i = 1, \dots, p \ ; \ k = i+1 \quad (7.55)$$

▪ 2ª equação: equação de condição de diferença de latitude:

$$f_2 = \sum_{i=1}^p \Delta\varphi_{ik}^a - (\varphi_{p+1} - \varphi_1) = 0 \ ; \ i = 1, \dots, p \ ; \ k = i+1 \quad (7.56)$$

▪ 3ª equação: equação de condição de diferença de longitude:

$$f_3 = \sum_{i=1}^p \Delta\lambda_{ik}^a - (\lambda_{p+1} - \lambda_1) = 0 \quad (7.57)$$

c) Vetor "erro de fechamento":

$${}_rW_1 = F(L^b) = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\lambda \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

${}_r W_1$  é obtido substituindo o vetor dos valores observados reduzidos ( $L^b$ ) que compreende os ângulos elipsóidicos e os comprimentos das geodésicas, nas equações de condição (7.55), (7.56) e (7.57).

d) Equações normais:

A (7.36) são as equações normais em sua forma matricial.

e) Matriz  ${}_r B_n$ :

$${}_r B_n = \frac{\partial f}{\partial L^a} \Bigg|_{L^b} \quad (7.59)$$

Para  $r = 3$ :

$${}_3 B_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial a_p} & \frac{\partial f_1}{\partial a_{p+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial S_{p,p+1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial a_p} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial S_{p,p+1}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial a_p} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial S_{p,p+1}} \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial \Delta \alpha_{p,p+1}}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_p} = 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{p,p+1}}{\partial a_p} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_{p+1}} = 1 \end{array} \right\} \quad (7.61)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1}$  é a derivada parcial da convergência meridiana relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao ângulo da estação inicial, obtida derivando a (7.21),

resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} = \frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial a_1} & \left[ \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} + \frac{(\Delta \lambda)^2}{4} \operatorname{sen} \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \right] \\ & + \frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial a_1} \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} \operatorname{tg} \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} &= \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \dots + \frac{\partial \Delta \alpha_{p,p+1}}{\partial S_{12}} \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{p,p+1}} &= \frac{\partial \Delta \alpha_{p,p+1}}{\partial S_{p,p+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.63)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}}$  é a derivada parcial da convergência meridiana relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao comprimento da respectiva geodésica, obtida derivando a

(7.21), resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} = \frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial S_{12}} & \left[ \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} + \frac{(\Delta \lambda)^2}{4} \operatorname{sen} \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \right] \\ & + \frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial S_{12}} \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{sen} \varphi_m \sec \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} \operatorname{tg} \frac{\Delta \varphi_{12}}{2} \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} &= \frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial \Delta \varphi_{p,p+1}}{\partial a_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_p} &= \frac{\partial \Delta \varphi_{p,p+1}}{\partial a_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_{p+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial a_1}$  é a derivada parcial da diferença de latitude relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao ângulo da estação inicial, obtida derivando a (7.12),

resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial a_1} &= -\frac{S_{12} \operatorname{sen}(\alpha_0 + a_1)}{M_1} + \frac{S_{12}^2 \operatorname{sen}(\alpha_0 + a_1) \cos(\alpha_0 + a_1) \operatorname{tg} \varphi_1}{N_1 M_1} \\ &\quad - \frac{3e^2 S_{12}^2 \operatorname{sen}(\alpha_0 + a_1) \cos(\alpha_0 + a_1) \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1) M_1^2} \\ &\quad - \frac{S_{12}^3 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) [2 \cos^2(\alpha_0 + a_1) \operatorname{sen}(\alpha_0 + a_1) - \operatorname{sen}^3(\alpha_0 + a_1)]}{6N_1^2 M_1} \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} &= \frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial S_{12}} + \dots + \frac{\partial \Delta \varphi_{p,p+1}}{\partial S_{12}} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{p,p+1}} &= \frac{\partial \Delta \varphi_{p,p+1}}{\partial S_{p,p+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.67)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial S_{12}}$  é a derivada parcial da diferença de latitude relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao comprimento da respectiva geodésica, obtida derivando a (7.12), resultando:

$$\frac{\partial \Delta \varphi_{12}}{\partial S_{12}} = \frac{\cos(\alpha_0 + a_1)}{M_1} + \frac{S_{12} \operatorname{sen}^2(\alpha_0 + a_1) \operatorname{tg} \varphi_1}{N_1 M_1} + \frac{3e^2 S_{12} \cos^2(\alpha_0 + a_1) \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1) M_1^2} - \frac{S_{12}^2 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \cos(\alpha_0 + a_1) \operatorname{sen}^2(\alpha_0 + a_1)}{2N_1^2 M_1} \quad (7.68)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial a_1} &= \frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial \Delta \lambda_{p,p+1}}{\partial a_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_p} &= \frac{\partial \Delta \lambda_{p,p+1}}{\partial a_p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_{p+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial a_1}$  é a derivada parcial da diferença de longitude relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao ângulo da estação inicial, obtida derivando a (7.18), resultando:

$$\frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial a_1} = \frac{1}{N_2 \cos \varphi_2} \left\{ S_{12} \cos(\alpha_0 + a_1) + \frac{S_{12}^2 \operatorname{sen}^2(\alpha_0 + a_1) \cos(\alpha_0 + a_1) \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{2N_1^2} - 4,095E - 15 \times S_{12}^3 [\cos^3(\alpha_0 + a_1) - 2 \operatorname{sen}^2(\alpha_0 + a_1) \cos(\alpha_0 + a_1)] \right\} \quad (7.70)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} &= \frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial S_{12}} + \dots + \frac{\partial \Delta \lambda_{p,p+1}}{\partial S_{12}} \\ \vdots & \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{p,p+1}} &= \frac{\partial \Delta \lambda_{p,p+1}}{\partial S_{p,p+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

onde:

$\frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial S_{12}}$  é a derivada parcial da diferença de longitude relativa aos pontos 1 e 2 (1ª

linha geodésica) com relação ao comprimento da respectiva geodésica, obtida derivando a (7.18), resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \lambda_{12}}{\partial S_{12}} &= \frac{1}{N_2 \cos \varphi_2} \left[ \text{sen}(\alpha_0 + a_1) + \frac{S_{12}^2 \text{sen}^3(\alpha_0 + a_1) \text{tg}^2 \varphi_1}{2N_1^2} \right. \\ &\quad \left. - 1,2285E - 14 \times S_{12}^2 \text{sen}(\alpha_0 + a_1) \cos^2(\alpha_0 + a_1) \right] \end{aligned} \quad (7.72)$$

Para a 2ª linha geodésica da poligonal, junta-se ao argumento  $\alpha_{ik}$ , a expressão da convergência meridiana relativa aos pontos das extremidades da linha geodésica imediatamente anterior e assim sucessivamente para as demais linhas, conforme mostra a (7.23).

f) Matriz dos pesos:

A inversa da matriz dos pesos é dada pela (4.17).

g) Vetor dos resíduos:

É dado pela (7.44).

h) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

É dada pela (7.45).

i) Vetor dos valores observados reduzidos ajustados:

É dado pela (7.46).

j) MVC dos valores observados ajustados, MVC dos resíduos e MVC das coordenadas ajustadas:

Estas matrizes podem se obtidas, respectivamente pelas (4.26), (4.27) e (4.28).

## 7.6 APLICAÇÃO

A fim de exemplificar o ajustamento de poligonal geodésica, utilizar-se-á uma poligonal observada pelo IBGE apresentada pelos quadros (7.1) e (7.2), e pela figura (7.6).

QUADRO 7.1 - DADOS DAS OBSERVAÇÕES DE UMA POLIGONAL DO IBGE.

(JÁ MINIMIZADOS OS ERROS DEVIDO AO OPERADOR, AOS EQUIPAMENTOS E AOS EFEITOS DO AMBIENTE).

| DE   | VT - MORRO AZUL  | PARA          | VT- BASE AÉREA | ESTADO DE SANTA CATARINA |               |               | PROJETO PORTOBRÁS |               |
|--|------------------|---------------|----------------|--------------------------|---------------|---------------|-------------------|---------------|
| E1 (i)   | VT - Morro Azul  | EP-SH22-1000  | EP-SH22-1005   | EP-SH22-1002             | EP-SH22-1003  | EP-SH22-1004  | EP-SG22-1048      | VT-Base Aérea |
| RÉ (j)   | VT - Marco Norte | VT-Morro Azul | EP-SH22-1000   | EP-SH22-1005             | EP-SH22-1002  | EP-SH22-1003  | EP-SH22-1004      | EP-SG22-1048  |
| E2 (k)   | EP-SH22 - 1000   | EP-SH22-1005  | EP-SH22-1002   | EP-SH22-1003             | EP-SH22-1004  | EP-SG22-1048  | VT-Base Aérea     | VT-Biguaçu    |
| ÂNGULOS VERTICAIS [OBTIDOS PELO TEODOLITO] ; $\sigma_z =$ ]                                |                  |               |                |                          |               |               |                   |               |
| AI1  | 1,52             | 1,47          | 1,58           | 1,64                     | 1,62          | 1,41          | 1,62              | ----          |
| AS2  | 0,74             | 0,88          | 0,14           | 1,25                     | 0,12          | 1,43          | 1,32              | ----          |
| z'1  | 90°53'56,38"     | 89°55'01,38"  | 90°11'28,68"   | 89°52'45,32"             | 89°56'30,25"  | 90°28'24,60"  | 90°01'15,00"      | ----          |
| AI2  | 1,47             | 1,43          | 1,52           | 1,58                     | 1,19          | 1,60          | 1,46              | ----          |
| AS1  | 0,90             | 0,77          | 0,15           | 1,04                     | 0,84          | 1,08          | 0,30              | ----          |
| z'2  | 89°12'30,08"     | 90°15'21,10"  | 89°57'20,90"   | 90°13'36,70"             | 90°14'28,70"  | 89°39'01,60"  | 90°09'21,30"      | ----          |
| DISTÂNCIAS [OBTIDAS PELO INSTRUMENTO GEODÍMETRO AGA 600] ; $\sigma_a = (0,01 + 2 S E-6) m$ |                  |               |                |                          |               |               |                   |               |
| S <sub>ik</sub>  | 13496,369        | 22463,9026    | 18112,992      | 13284,7881               | 23607,6233    | 16002,5945    | 22693,0579        | ----          |
| AI1  | 1,400            | 1,408         | 1,440          | 1,510                    | 1,675         | 1,090         | 1,670             | ----          |
| AI2  | 1,456            | 0,925         | 1,587          | 1,501                    | 1,241         | 1,594         | 1,458             | ----          |
| ÂNGULOS HORIZONTAIS [OBTIDOS PELO TEODOLITO] ; $\sigma_a = 0,82506$                        |                  |               |                |                          |               |               |                   |               |
| a <sub>i</sub>   | 209°39'02,52"    | 147°22'55,70" | 138°34'13,29"  | 188°29'46,50"            | 158°44'03,42" | 194°33'48,74" | 168°07'41,50"     | 141°04'32,00" |
| $\sum_{i=1}^6 S_{ik} = 129661,3274 m = 129661,3274E - 3 km$                                |                  |               |                |                          |               |               |                   |               |

QUADRO 7.2 - RESUMO DAS MONOGRAFIAS DOS VÉRTICES PARA O APOIO DA POLIGONAL NO SGR.

| VÉRTICE i     | MUNICÍPIO     | $\varphi_i$ (sul) | $\lambda_i$ (oeste) | $h_i$ (m) | VÉRTICE VISADO | $\alpha_{ik}$  | $S_{ik}$ (m) |
|---------------|---------------|-------------------|---------------------|-----------|----------------|----------------|--------------|
| Morro Azul    | Jaguaruna     | 28°36'30,91500"   | 49°05'06,26600"     | 227,58    | Criciúma - MN  | 060°21'49,458" | 16483,59     |
| Criciúma - MN | Icara         | 28°40'55,39100"   | 49°13'53,99500"     | 70,55     | Morro Azul     | 240°26'02,440" | 16483,59     |
| Base Aérea    | Florianópolis | 27°40'41,73100"   | 48°33'49,67100"     | 70,66     | Biguaçu        | 146°43'02,653" | 20554,73     |
| Biguaçu       | Biguaçu       | 27°31'23,33000"   | 48°40'40,70900"     | 539,95    | Base Aérea     | 326°46'13,090" | 20554,73     |

OBSERVAÇÕES:

a) Dados Planimétricos:

Classe: AP

DATUM: Chuá

Elipsóide: SGR-67  $\left\{ \begin{array}{l} a = 6378.160 \\ f = 1 / 298.25 \\ e^2 = 2f - f^2 \end{array} \right.$

Tipo do Azimute: Geodésico

Origem de Contagem do Azimute: Sul (sentido horário)

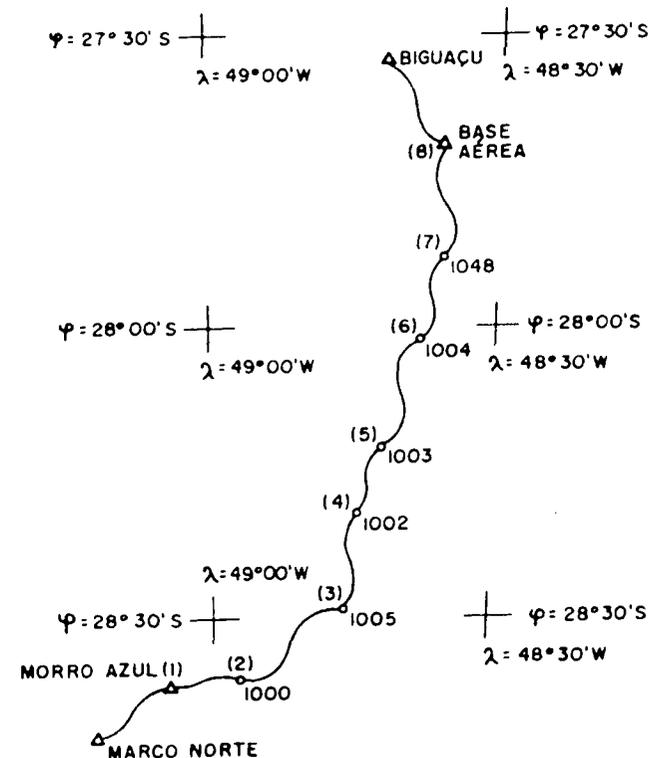
b) Dados Altimétricos:

Classe: Trigonométrica

DATUM: Imbituba

c) Os dados foram fornecidos pelo IBGE em 13.11.1996.

FIGURA 7.6 - ESBOÇO DA POLIGONAL OBSERVADA PELO IBGE.



QUADRO 7.3 - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS PARA O NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO.

| PONTO<br>i | $a'_{jk}$     | LINHA<br>ik               | $S_{ik}$   | $\alpha_{ik}$                 | $\alpha_{ki}$   | PONTO<br>i | COORDENADAS       |                     |
|------------|---------------|---------------------------|------------|-------------------------------|---|------------|-------------------|---------------------|
|            |               |                           |            |                               |   |            | $\varphi_i$ (sul) | $\lambda_i$ (oeste) |
| Morro Azul | 209°39'02,52" | Morro Azul<br>Marco Norte |            | 60°21'49,458"                 |   | Morro Azul | 28°36'30,915"     | 49°05'06,266"       |
| 1000       | 147°22'55,70" | Morro Azul<br>1000        | 13496,369  | 270°00'51,9780"               | 89°56'54,1091"  | 1000       | 28°36'30,7727"    | 48°56'49,4880"      |
| 1005       | 138°34'13,29" | 1000<br>1005              | 22463,9026 | 237°19'49,8091"               | 57°14'17,4542"  | 1005       | 28°29'56,3996"    | 48°45'14,1614"      |
| 1002       | 188°29'46,50" | 1005<br>1002              | 18112,992  | 195°48'30,7442"               | 15°47'04,5182"  | 1002       | 28°20'30,2524"    | 48°42'12,9904"      |
| 1003       | 158°44'03,42" | 1002<br>1003              | 13284,7881 | 204°16'51,0182"               | 24°15'16,0658"  | 1003       | 28°13'56,8449"    | 48°38'52,6225"      |
| 1004       | 194°33'48,74" | 1003<br>1004              | 23607,6233 | 182°59'19,4858"               | 02°58'58,2447"  | 1004       | 28°01'11,0026"    | 48°38'07,5643"      |
| 1048       | 168°07'41,50" | 1004<br>1048              | 16002,5945 | 197°32'46,9847"               | 17°31'24,3131"  | 1048       | 27°52'55,3076"    | 48°35'11,1850"      |
| Base Aérea | 141°04'32,00" | 1048<br>Base Aérea        | 22693,0579 | 185°39'05,8131"               | 05°38'27,8037"  | Base Aérea | 27°40'41,6733"    | 48°33'49,6338"      |
|            |               | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°42'59,8037"               |   |            |                   |                     |
|            |               | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,653"                |   | Base Aérea | 27°40'41,731"     | 48°33'49,671"       |
|            |               |                           |            | $\epsilon_\alpha = -2,8493''$ | $\epsilon_\varphi = -0,0577''$ $\epsilon_\lambda = -0,0372''$ |            |                   |                     |

### 7.6.1 Ajustamento do Nivelamento Trigonométrico

A poligonal geodésica ilustrada pela figura (7.6) e dados numéricos do quadro (7.1) apresenta o conjunto de observações, compreendendo 14 ângulos verticais e 7 distâncias.

Isto representa no ajustamento a existência da matriz  ${}_rB_n$  de tamanho  $1 \times 21$ ; a matriz  ${}_nP_n$ ,  $21 \times 21$ ; o vetor  ${}_rW_1$ ,  $1 \times 1$  e o vetor  ${}_nV_1$ ,  $21 \times 1$ .

#### 7.6.1.1 Primeira etapa

a) Desenvolvimento da equação de condição:

Desenvolvendo a (7.34):

$$f = \Delta h_{12}^a + \Delta h_{23}^a + \Delta h_{34}^a + \Delta h_{45}^a + \Delta h_{56}^a + \Delta h_{67}^a + \Delta h_{78}^a - (h_8 - h_1) = 0$$

b) Vetor das observações reduzidas:

Compreendem os ângulos verticais reduzidos ao solo pelas (7.25) e (7.26) e das distâncias observadas reduzidas aos topos dos respectivos marcos (que para esta poligonal não apresenta alteração na quarta decimal). Esses valores calculados estão no quadro (7.4).

QUADRO 7.4 - ÂNGULOS VERTICAIS REDUZIDOS AO SOLO.

| LINHA             | $z_1$        | $z_2$        |
|-------------------|--------------|--------------|
| Morro Azul - 1000 | 90°53'44,46" | 89°12'21,37" |
| 1000 - 1005       | 89°54'55,96" | 90°15'15,04" |
| 1005 - 1002       | 90°11'12,28" | 89°57'05,30" |
| 1002 - 1003       | 89°52'39,26" | 90°13'28,32" |
| 1003 - 1004       | 89°56'17,14" | 90°14'25,64" |
| 1004 - 1048       | 90°28'24,86" | 89°38'54,90" |
| 1048 - Base Aérea | 90°01'12,27" | 90°09'10,76" |

Portanto, o vetor  ${}_{21}L_1^b$  assume a seguinte forma:

$${}_{21}L_1^b = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{34} \\ S_{45} \\ S_{56} \\ S_{67} \\ S_{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ 53' 44,46'' \\ 89^\circ 12' 21,37'' \\ 89^\circ 54' 55,96'' \\ 90^\circ 15' 15,04'' \\ 90^\circ 11' 12,28'' \\ 89^\circ 57' 05,30'' \\ 89^\circ 52' 39,26'' \\ 90^\circ 13' 28,32'' \\ 89^\circ 56' 17,14'' \\ 90^\circ 14' 25,64'' \\ 90^\circ 28' 24,86'' \\ 89^\circ 38' 54,90'' \\ 90^\circ 01' 12,27'' \\ 90^\circ 09' 10,76'' \\ 13493,369 \text{ m} \\ 22463,9026 \text{ m} \\ 18112,992 \text{ m} \\ 13284,7881 \text{ m} \\ 23607,6233 \text{ m} \\ 16002,5945 \text{ m} \\ 22693,0579 \text{ m} \end{bmatrix}$$

c) Vetor "erro de fechamento":

Introduzindo os ângulos verticais reduzidos e distâncias (vetor  $L^b$ ), os azimutes e coordenadas do quadro (7.2) na (7.29), e em seguida utilizando as altitudes do quadro (7.2) e aplicando na (7.34), obtém-se o "erro de fechamento" ( $\epsilon_h$ ) mostrado no quadro (7.5).

QUADRO 7.5 - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES OBSERVADOS REDUZIDOS.

| Ponto | Morro Azul | 1000   | 1005   | 1002   | 1003   | 1004    | 1048   | Base Aérea | Base Aérea | $\epsilon_h$ |
|-------|------------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|------------|------------|--------------|
| h(m)  | 227,58     | 28,546 | 94,931 | 57,742 | 97,966 | 160,258 | 45,045 | 71,366     | 70,66      | 0,706        |

O valor  $\epsilon_h = 0,706$  m se enquadra nas especificações para poligonação (IBGE, 1996, p. 6), segundo as quais o valor máximo é de 0,5 m por estação para o erro de fechamento em pontos de altitude conhecida.

d) Matriz dos pesos:

A variância do ângulo vertical, neste trabalho, foi tomada como sendo igual à variância do ângulo horizontal.

Há 14 elementos da diagonal correspondente à variância do ângulo vertical, dados por:  $\sigma_{z_i}^2 = 1,60000300589E - 11 \text{ rad}^2$

Há 7 elementos da diagonal correspondente às variâncias das distâncias, dados por:

$$\sigma_{s_{12}}^2 = 1,36846266474E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{56}}^2 = 3,2735844435E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{23}}^2 = 3,01706378409E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{67}}^2 = 1,76443590293E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{34}}^2 = 2,13684159677E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{78}}^2 = 3,06762182341E - 3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{s_{45}}^2 = 1,33733390345E - 3 \text{ m}^2$$

e) Matriz B:

Os elementos da matriz B, calculados pelas (7.41), (7.42) e (7.43) estão no quadro (7.6).

QUADRO 7.6 - ELEMENTOS DA MATRIZ B DA 1ª ETAPA.

| LINHA ik          | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i}$ | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_k}$  | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial S_{ik}}$ |
|-------------------|---|--|--|
| Morro Azul - 1000 | -6749,68473663                                | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_k} = -\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i}$ | -1,47469805129E-2                                |
| 1000 - 1005       | -11232,2283148                                |  | 2,95518858933E-3                                 |
| 1005 - 1002       | -9056,62263582                                |  | -2,05317032874E-3                                |
| 1002 - 1003       | -6642,55975476                                |  | 3,02784452537E-3                                 |
| 1003 - 1004       | -11804,2053427                                |  | 2,63867499804E-3                                 |
| 1004 - 1048       | -8001,77295298                                |  | -7,19957348775E-3                                |
| 1048 - Base Aérea | -11346,6838211                                |  | 1,15989329419E-3                                 |

f) Equações normais:

$${}_r M_r \quad {}_r K_r + {}_r W_r = {}_r O_r$$

$$M = B P^{-1} B^T$$

$${}_r M_r = [0,02015991686536]$$

$$K = -M^{-1} W$$

$${}_r K_r = [-35,01998568323513]$$

g) Vetor dos resíduos:

$${}_n V_n = {}_n P_n^{-1} {}_n B_n^T {}_r K_r$$

$${}_{21}V_1 = \begin{bmatrix} 0,78'' \\ -0,78'' \\ 1,30'' \\ -1,30'' \\ 1,05'' \\ -1,05'' \\ 0,77'' \\ -0,77'' \\ 1,36'' \\ -1,36'' \\ 0,92'' \\ -0,92'' \\ 1,31'' \\ -1,31'' \\ \\ 0,0007 \text{ m} \\ -0,0003 \text{ m} \\ 0,0002 \text{ m} \\ -0,0001 \text{ m} \\ -0,0003 \text{ m} \\ 0,0004 \text{ m} \\ -0,0001 \text{ m} \end{bmatrix}$$

h) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{r} = \frac{V^T P V}{r} = \frac{25}{1} = 25$$

O teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos resulta falho.

i) Valores observados reduzidos ajustados:

$${}_n L_1^a = {}_n L_1^b + {}_n V_1$$

|                        |                    |                        |
|------------------------|--------------------|------------------------|
| $90^{\circ}53'44,46''$ | $0,78''$           | $90^{\circ}53'45,24''$ |
| $89^{\circ}12'21,37''$ | $-0,78''$          | $89^{\circ}12'20,59''$ |
| $89^{\circ}54'55,96''$ | $1,30''$           | $89^{\circ}54'57,26''$ |
| $90^{\circ}15'15,04''$ | $-1,30''$          | $90^{\circ}15'13,74''$ |
| $90^{\circ}11'12,28''$ | $1,05''$           | $90^{\circ}11'13,33''$ |
| $89^{\circ}57'05,30''$ | $-1,05''$          | $89^{\circ}57'04,25''$ |
| $89^{\circ}52'39,26''$ | $0,77''$           | $89^{\circ}52'40,03''$ |
| $90^{\circ}13'28,32''$ | $-0,77''$          | $90^{\circ}13'27,55''$ |
| $89^{\circ}56'17,14''$ | $1,36''$           | $89^{\circ}56'18,50''$ |
| $90^{\circ}14'25,64''$ | $-1,36''$          | $90^{\circ}14'24,28''$ |
| $90^{\circ}28'24,86''$ | $0,92''$           | $90^{\circ}28'25,78''$ |
| $89^{\circ}38'54,90''$ | $-0,92''$          | $89^{\circ}38'53,98''$ |
| $90^{\circ}01'12,27''$ | $1,31''$           | $90^{\circ}01'13,58''$ |
| $90^{\circ}09'10,76''$ | $-1,31''$          | $90^{\circ}09'09,45''$ |
| $13496,3690\text{ m}$  | $0,0007\text{ m}$  | $13496,3697\text{ m}$  |
| $22463,9026\text{ m}$  | $-0,0003\text{ m}$ | $22463,9023\text{ m}$  |
| $18112,9920\text{ m}$  | $0,0002\text{ m}$  | $18112,9922\text{ m}$  |
| $13284,7881\text{ m}$  | $-0,0001\text{ m}$ | $13284,7880\text{ m}$  |
| $23607,6233\text{ m}$  | $-0,0003\text{ m}$ | $23607,6230\text{ m}$  |
| $16002,5945\text{ m}$  | $0,0004\text{ m}$  | $16002,5949\text{ m}$  |
| $22693,0579\text{ m}$  | $-0,0001\text{ m}$ | $22693,0578\text{ m}$  |

j) Obtenção das altitudes ortométricas ajustadas da 1ª etapa:

QUADRO 7.7 - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES AJUSTADOS DA 1ª ETAPA.

| Ponto | Morro Azul | 1000   | 1005   | 1002   | 1003   | 1004    | 1048   | Base Aérea | Base Aérea | $\epsilon_h$ |
|-------|------------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|------------|------------|--------------|
| $h_i$ | 227,58     | 28,495 | 94,738 | 57,457 | 97,632 | 159,769 | 44,485 | 70,663     | 70,66      | 0,003        |

### 7.6.1.2 Iteração

■ 1ª iteração:  $L^* = L^{1^\circ}$ :

a) Na 1ª iteração os elementos da matriz  ${}_1B_{21}$ , apresentados pelo quadro (7.8), são calculados substituindo os valores de  ${}_{21}L_1^*$  da 1ª etapa nas (7.41), (7.42) e (7.43).

QUADRO 7.8 - ELEMENTOS DA MATRIZ B DA 1ª ITERAÇÃO.

| LINHA ik          | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i}$ | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_k}$  | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial S_{ik}}$ |
|-------------------|---|--|--|
| Morro Azul - 1000 | -6749,68578507                                | $\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_k} = -\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial z_i}$ | -1,47507598549E-2                                |
| 1000 - 1005       | -11232,2274072                                |  | 2,94889227297E-3                                 |
| 1005 - 1002       | -9056,62251859                                |  | -2,05825370802E-3                                |
| 1002 - 1003       | -6642,55920611                                |  | 3,02413279522E-3                                 |
| 1003 - 1004       | -11804,2038727                                |  | 2,6320863927E-3                                  |
| 1004 - 1048       | -8001,77296118                                |  | -7,20403298307E-3                                |
| 1048 - Base Aérea | -11346,682674                                 |  | 1,15355850849E-3                                 |

b) Vetor "erro de fechamento":

$$W1 = B1(L^b - L^{1^\circ}) + F(L^{1^\circ})$$

$F(L1^\circ)$  é o valor  $\varepsilon_h = 0,003$  m do quadro (7.7)

$$W1 = [0,70900015212472] \text{ m}$$

c) Equações normais:

$${}_r M1 {}_r K1 + {}_r W1 = {}_r O1$$

$$M1 = B1 P^{-1} B1^T$$

$$M1 = [0,02015992555378]$$

$$K1 = -M1^{-1} W1$$

$$K1 = [-35,16878820972505]$$

d) Vetor dos resíduos:

$${}_n V1 = {}_n P_n^{-1} B1_r^T {}_r K1$$

$${}_{21}Vl_1 = \begin{bmatrix} 0,78'' \\ -0,78'' \\ 1,30'' \\ -1,30'' \\ 1,05'' \\ -1,05'' \\ 0,77'' \\ -0,77'' \\ 1,37'' \\ -1,37'' \\ 0,93'' \\ -0,93'' \\ 1,32'' \\ -1,32'' \\ \\ 0,0007 \text{ m} \\ -0,0003 \text{ m} \\ 0,0001 \text{ m} \\ -0,0001 \text{ m} \\ -0,0003 \text{ m} \\ 0,0004 \text{ m} \\ -0,0001 \text{ m} \end{bmatrix}$$

e) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{Vl^T P V l}{r} = \frac{Kl^T W l}{r} = \frac{25}{1} = 25$$

f) Valores observados reducidos ajustados:

$${}_n L_1^a = {}_n L_1^b + {}_n V_1$$

|                        |                    |                        |
|------------------------|--------------------|------------------------|
| $90^{\circ}53'44,46''$ | $0,78''$           | $90^{\circ}53'45,24''$ |
| $89^{\circ}12'21,37''$ | $-0,78''$          | $89^{\circ}12'20,59''$ |
| $89^{\circ}54'55,96''$ | $1,30''$           | $89^{\circ}54'57,26''$ |
| $90^{\circ}15'15,04''$ | $-1,30''$          | $90^{\circ}15'13,74''$ |
| $90^{\circ}11'12,28''$ | $1,05''$           | $90^{\circ}11'13,33''$ |
| $89^{\circ}57'05,30''$ | $-1,05''$          | $89^{\circ}57'04,25''$ |
| $89^{\circ}52'39,26''$ | $0,77''$           | $89^{\circ}52'40,03''$ |
| $90^{\circ}13'28,32''$ | $-0,77''$          | $90^{\circ}13'27,55''$ |
| $89^{\circ}56'17,14''$ | $1,37''$           | $89^{\circ}56'18,51''$ |
| $90^{\circ}14'25,64''$ | $-1,37''$          | $90^{\circ}14'24,27''$ |
| $90^{\circ}28'24,86''$ | $0,93''$           | $90^{\circ}28'25,79''$ |
| $89^{\circ}38'54,90''$ | $-0,93''$          | $89^{\circ}38'53,97''$ |
| $90^{\circ}01'12,27''$ | $1,32''$           | $90^{\circ}01'13,59''$ |
| $90^{\circ}09'10,76''$ | $-1,32''$          | $90^{\circ}09'09,44''$ |
| $13496,3690\text{ m}$  | $0,0007\text{ m}$  | $13496,3697\text{ m}$  |
| $22463,9026\text{ m}$  | $-0,0003\text{ m}$ | $22463,9023\text{ m}$  |
| $18112,9920\text{ m}$  | $0,0001\text{ m}$  | $18112,9921\text{ m}$  |
| $13284,7881\text{ m}$  | $-0,0001\text{ m}$ | $13284,7880\text{ m}$  |
| $23607,6233\text{ m}$  | $-0,0003\text{ m}$ | $23607,6230\text{ m}$  |
| $16002,5945\text{ m}$  | $0,0004\text{ m}$  | $16002,5949\text{ m}$  |
| $22693,0579\text{ m}$  | $-0,0001\text{ m}$ | $22693,0578\text{ m}$  |

g) Obtenção das altitudes ortométricas ajustadas da 1ª iteração.

QUADRO 7.9 - TRANSPORTE DA ALTITUDE ORTOMÉTRICA USANDO VALORES AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO.

| Ponto | Morro Azul | 1000  | 1005  | 1002  | 1003  | 1004   | 1048  | Base Aérea | Base Aérea | $\epsilon_h$ |
|-------|------------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|------------|------------|--------------|
| $h_i$ | 227,58     | 28,50 | 94,74 | 57,46 | 97,63 | 159,77 | 44,48 | 70,66      | 70,66      | 0,00         |

### 7.6.2 Cálculo da Altitude Geométrica

Ajustado o nivelamento trigonométrico e conhecendo a ondulação geoidal para cada ponto, a altitude geométrica  $H_i$  é, então, obtida aplicando a (7.47).

O quadro (7.10) mostra a ondulação geoidal  $N_i$ , obtida pelo programa MAPGEO-V1.0 do IBGE, que calcula a interpolação de ondulações geoidais do mapa geoidal (versão 1992) obtido a partir de alturas geoidais por satélites e do modelo geopotencial (GEMT2), no sistema de referência SAD-69. A precisão esperada de  $N_i$  é 3,0 m (absoluta) e 1,0 cm/km (relativa).

QUADRO 7.10 - ALTITUDE GEOMÉTRICA.

| PONTO i     | $\varphi_i$ (sul) | $\lambda_i$ (oeste) | $N_i$ | $h_i$  | $H_i$  |
|-------------|-------------------|---------------------|-------|--------|--------|
| Marco Norte | 28°40'55"         | 49°13'53"           | -0,83 | 70,55  | 69,72  |
| Morro Azul  | 28°36'30"         | 49°05'06"           | -1,10 | 227,58 | 226,48 |
| 1000        | 28°36'30"         | 48°56'49"           | -1,39 | 28,50  | 27,11  |
| 1005        | 28°29'56"         | 48°45'14"           | -1,59 | 94,74  | 93,15  |
| 1002        | 28°20'30"         | 48°42'12"           | -1,41 | 57,46  | 56,05  |
| 1003        | 28°13'56"         | 48°38'52"           | -1,32 | 97,63  | 96,31  |
| 1004        | 28°01'11"         | 48°38'07"           | -0,89 | 159,77 | 158,88 |
| 1048        | 27°52'55"         | 48°35'11"           | -0,66 | 44,48  | 43,82  |
| Base Aérea  | 27°40'41"         | 48°33'49"           | -0,21 | 70,66  | 70,45  |
| Biguaçu     | 27°31'23"         | 48°40'40"           | 0,31  | 539,95 | 540,26 |

### 7.6.3 Cálculo do Ajustamento da Poligonal

Tendo sido calculadas as altitudes geométricas ( $H_i$ ) das estações, segue-se o cálculo das distâncias reduzidas ao elipsóide empregando-se a (7.48) e a (7.49) obtendo-se os comprimentos das geodésicas  $S_{ik}$  cujos resultados estão no quadro (7.11). Com estes valores de  $S_{ik}$  calcula-se o transporte obtendo novos azimutes  $\alpha_{ik}$  e novas coordenadas ( $\varphi_i, \lambda_i$ ) cujos resultados estão no quadro (7.12). Com estes valores de  $\alpha_{ik}$  e ( $\varphi_i, \lambda_i$ ) são calculados o ângulo secção normal-geodésica ( $\tau$ ) pela (7.50) e o efeito da altura do sinal ( $\delta$ ) pela (7.51) cujos resultados estão no quadro (7.13), os quais são utilizados para calcular os ângulos elipsóidicos  $a_{jik}$  cujos resultados estão na última coluna deste quadro.

A fim de obter os "erros de fechamento" em azimute ( $\epsilon_\alpha$ ) e em coordenadas ( $\epsilon_\varphi, \epsilon_\lambda$ ), componentes do vetor  ${}_rW_1$  do ajustamento, efetua-se outro transporte conforme é apresentado no quadro (7.14). Na última linha deste quadro são encontrados os resultados destes erros. O "erro de fechamento" em azimute  $\epsilon_\alpha = -2,7681''$  se enquadra nas especificações para poligonação (IBGE, 1996, p. 6), segundo as quais o "erro de fechamento" em azimute, valor máximo (em módulo) permitido, entre direções de controle é  $0,8''$  por estação ou  $1''\sqrt{N}$ , sendo N igual ao número de estações. A poligonal apresenta 8 estações o que resulta o valor de  $2,8284''$ .

QUADRO 7.11 - DISTÂNCIAS REDUZIDAS AO ELIPSÓIDE.

| PONTO i    | H <sub>i</sub> | AI <sub>i</sub> | φ <sub>i</sub> (sul) | LINHA ik           | α <sub>ik</sub> (normal) | d <sub>ik</sub> (m) | C <sub>ik</sub> (m) | S <sub>ik</sub> (m) |
|------------|----------------|-----------------|----------------------|--------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Morro Azul | 226,48         | 1,400           | 28°36'30,915"        |                    |                          |                     |                     |                     |
| 1000       | 27,11          | 1,456<br>1,408  | 28°36'30,7727"       | Morro Azul<br>1000 | 270°00'51,9780"          | 13496,3696          | 13494,6267          | 13494,6292          |
| 1005       | 93,15          | 0,925<br>1,440  | 28°29'56,3996"       | 1000<br>1005       | 237°19'49,8091"          | 22463,9023          | 22463,5905          | 22463,6022          |
| 1002       | 56,05          | 1,587<br>1,510  | 28°20'30,2524"       | 1005<br>1002       | 195°48'30,7442"          | 18112,9921          | 18112,7374          | 18112,7435          |
| 1003       | 96,31          | 1,501<br>1,675  | 28°13'56,8449"       | 1002<br>1003       | 204°16'51,0182"          | 13284,7880          | 13284,5646          | 13284,5670          |
| 1004       | 158,88         | 1,241<br>1,090  | 28°01'11,0026"       | 1003<br>1004       | 182°59'19,4858"          | 23607,6230          | 23607,0613          | 23607,0749          |
| 1048       | 43,82          | 1,594<br>1,670  | 27°52'55,3076"       | 1004<br>1048       | 197°32'46,9847"          | 16002,5949          | 16001,9261          | 16001,9304          |
| Base Aérea | 70,45          | 1,458           | 27°40'41,731"        | 1048<br>Base Aérea | 185°39'05,8131"          | 22693,0578          | 22692,8326          | 22692,8447          |

QUADRO 7.12 - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO A DISTÂNCIA REDUZIDA AO ELIPSÓIDE.

| PONTO<br>i  | a'jik         | LINHA<br>ik               | Sik        | αik                           | αki            | PONTO<br>i  | COORDENADAS    |                |
|---|---------------|---------------------------|------------|-------------------------------|----------------|---|----------------|----------------|
|   |               |                           |            |                               |                |   | φi (sul)       | λi (oeste)     |
| Morro Azul  | 209°39'02,52" | Morro Azul<br>Marco Norte |            | 60°21'49,458"                 |                | Morro Azul  | 28°36'30,915"  | 49°05'06,266"  |
| 1000  | 147°22'55,70" | Morro Azul<br>1000        | 13494,6292 | 270°00'51,9780"               | 89°56'54,1398" | 1000  | 28°36'30,7727" | 48°56'49,5521" |
| 1005  | 138°34'13,29" | 1000<br>1005              | 22463,6022 | 237°19'49,8398"               | 57°14'17,4893" | 1005  | 28°29'56,4050" | 48°45'14,2347" |
| 1002  | 188°29'46,50" | 1005<br>1002              | 18112,7435 | 195°48'30,7793"               | 15°47'04,5544" | 1002  | 28°20'30,2656" | 48°42'13,0661" |
| 1003  | 158°44'03,42" | 1002<br>1003              | 13284,5670 | 204°16'51,0544"               | 24°15'16,1035" | 1003  | 28°13'56,8646" | 48°38'52,7014" |
| 1004  | 194°33'48,74" | 1003<br>1004              | 23607,0749 | 182°59'19,5235"               | 02°58'58,2828" | 1004  | 28°01'11,0401" | 48°38'07,6441" |
| 1048  | 168°07'41,50" | 1004<br>1048              | 16001,9304 | 197°32'47,0228"               | 17°31'24,3445" | 1048  | 27°52'55,3657" | 48°35'11,2720" |
| Base Aérea  | 141°04'32,00" | 1048<br>Base Aérea        | 22692,8447 | 185°39'05,8545"               | 05°38'27,8453" | Base Aérea  | 27°40'41,7383" | 48°33'49,7214" |
|   |               | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°42'59,8453"               |                |   |                |                |
|   |               | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,653"                |                | Base Aérea  | 27°40'41,731"  | 48°33'49,671"  |
| $f_i = \sum_{i=1}^8 a_i + \sum_{i=1}^7 \Delta\alpha_{i,i+1} - (\alpha_f - \alpha_0) - 7 \times 180^\circ$ |               |                           |            | $\epsilon_\alpha = -2,8077''$ |                | $\epsilon_\varphi = 0,0073'' \quad \epsilon_\lambda = 0,0504''$ |                |                |

QUADRO 7.13 - REDUÇÃO ANGULAR (CÁLCULO DO ÂNGULO ELIPSÓIDICO).

| PONTO<br>$i$ | $a'_{jik}$    | $\varphi_i$ (sul) | LINHA<br>$ik$          | (H + AI)<br>DO PONTO<br>VISADO | $\alpha_{ik}$   | $S_{ik}$   | $ \tau'' $ | $ \delta'' $ | $\Delta M$ | PONTO      | $a_{jik}$       |
|--------------|---------------|-------------------|------------------------|--------------------------------|-----------------|------------|------------|--------------|------------|------------|-----------------|
| Morro Azul   | 209°39'02,52" | 28°36'30,915"     | Morro Azul Marco Norte | 69,72                          | 60°21'49,458"   | 16483,59   | 0,0005     | 0,0050       |            | Morro Azul | 209°39'02,5155" |
|              |               |                   | Morro Azul 1000        | 28,566                         | 270°00'51,9780" | 13494,6292 | 0,0000     | 0,0000       |            |            |                 |
| 1000         | 147°22'55,70" | 28°36'30,7727"    | 1000 Morro Azul        | 227,880                        | 89°56'54,1398"  | 22463,6022 | 0,0000     | 0,0000       |            | 1000       | 147°22'55,7061" |
|              |               |                   | 1000 1005              | 94,075                         | 237°19'49,8398" |            | 0,0010     | 0,0071       |            |            |                 |
| 1005         | 138°34'13,29" | 28°29'56,4050"    | 1005 1000              | 28,518                         | 57°14'17,4893"  | 18112,7435 | 0,0010     | 0,0022       |            | 1005       | 138°34'13,2909" |
|              |               |                   | 1005 1002              | 57,637                         | 195°48'30,7793" |            | 0,0004     | 0,0025       |            |            |                 |
| 1002         | 188°29'46,50" | 28°20'30,2656"    | 1002 1005              | 94,590                         | 15°47'04,5544"  | 13284,5670 | 0,0004     | 0,0041       |            | 1002       | 188°29'46,5021" |
|              |               |                   | 1002 1003              | 97,811                         | 204°16'51,0544" |            | 0,0003     | 0,0061       |            |            |                 |
| 1003         | 158°44'03,42" | 28°13'56,8646"    | 1003 1002              | 57,560                         | 24°15'16,1035"  | 23607,0749 | 0,0003     | 0,0036       |            | 1003       | 158°44'03,4180" |
|              |               |                   | 1003 1004              | 160,121                        | 182°59'19,5235" |            | 0,0001     | 0,0014       |            |            |                 |
| 1004         | 194°33'48,74" | 28°01'11,0401"    | 1004 1003              | 97,985                         | 02°58'58,2828"  | 16001,9304 | 0,0001     | 0,0009       |            | 1004       | 194°33'48,7411" |
|              |               |                   | 1004 1048              | 45,414                         | 197°32'47,0228" |            | 0,0003     | 0,0022       |            |            |                 |
| 1048         | 168°07'41,50" | 27°52'55,3657"    | 1048 1004              | 159,970                        | 17°31'24,3545"  | 22692,8447 | 0,0003     | 0,0078       |            | 1048       | 168°07'41,4935" |
|              |               |                   | 1048 Base Aérea        | 71,908                         | 185°39'05,8545" |            | 0,0002     | 0,0012       |            |            |                 |
| Base Aérea   | 141°04'32,00" | 27°40'41,731"     | Base Aérea 1048        | 45,490                         | 05°38'27,8453"  | 20554,73   | 0,0002     | 0,0008       |            | Base Aérea | 141°04'32,0424" |
|              |               |                   | Base Aérea Biguaçu     | 540,26                         | 146°43'02,653"  |            | 0,0009     | 0,0421       |            |            |                 |

QUADRO 7.14 - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO ÂNGULOS E DISTÂNCIAS ELIPSÓIDICOS.

| PONTO<br>i | $a_{ik}$        | LINHA<br>ik               | $S_{ik}$   | $\alpha_{ik}$                 | $\alpha_{ki}$  | PONTO<br>i | COORDENADAS                   |                               |
|------------|-----------------|---------------------------|------------|-------------------------------|----------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|
|            |                 |                           |            |                               |                |            | $\varphi_i$ (sul)             | $\lambda_i$ (oeste)           |
| Morro Azul | 209°39'02,5155" | Morro Azul<br>Marco Norte |            | 60°21'49,458"                 |                | Morro Azul | 28°36'30,915"                 | 49°05'06,266"                 |
| 1000       | 147°22'55,7061" | Morro Azul<br>1000        | 13494,6292 | 270°00'51,9735"               | 89°56'54,1353" | 1000       | 28°36'30,7727"                | 48°56'49,5521"                |
| 1005       | 138°34'13,2909" | 1000<br>1005              | 22463,6022 | 237°19'49,8414"               | 57°14'17,4909" | 1005       | 28°29'56,4050"                | 48°45'14,2347"                |
| 1002       | 188°29'46,5021" | 1005<br>1002              | 18112,7435 | 195°48'30,7818"               | 15°47'04,5569" | 1002       | 28°20'30,2656"                | 48°42'13,0661"                |
| 1003       | 158°44'03,4180" | 1002<br>1003              | 13284,5670 | 204°16'51,0590"               | 24°15'16,1081" | 1003       | 28°13'56,8646"                | 48°38'52,7014"                |
| 1004       | 194°33'48,7411" | 1003<br>1004              | 23607,0749 | 182°59'19,5261"               | 02°58'58,2854" | 1004       | 28°01'11,0401"                | 48°38'07,6441"                |
| 1048       | 168°07'41,4935" | 1004<br>1048              | 16001,9304 | 197°32'47,0265"               | 17°31'24,3582" | 1048       | 27°52'55,3657"                | 48°35'11,2720"                |
| Base Aérea | 141°04'32,0424" | 1048<br>Base Aérea        | 22692,8447 | 185°39'05,8517"               | 05°38'27,8425" | Base Aérea | 27°40'41,7383"                | 48°33'49,7214"                |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°42'59,8849"               |                |            |                               |                               |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,653"                |                | Base Aérea | 27°40'41,731"                 | 48°33'49,671"                 |
|            |                 |                           |            | $\epsilon_\alpha = -2,7681''$ |                |            | $\epsilon_\varphi = 0,0073''$ | $\epsilon_\lambda = 0,0504''$ |

A poligonal cujos dados numéricos estão nos quadros (7.1) e (7.2) e cujo esboço é apresentado pela figura (7.6) apresenta um conjunto de observações compreendendo 8 ângulos e 7 distâncias.

Isto representa no ajustamento a existência da matriz  ${}_rB_n$  de tamanho  $3 \times 15$ ; a matriz  ${}_nP_n$ ,  $15 \times 15$ ; o vetor  ${}_rW_1$ ,  $3 \times 1$  e o vetor  ${}_nV_1$ ,  $15 \times 1$ .

### 7.6.3.1 Primeira etapa

a) Desenvolvimento das equações de condição:

Desenvolvendo a (7.55),

$$f_1 = a_1^a + \Delta\alpha_{12}^a + a_2^a + \Delta\alpha_{23}^a + a_3^a + \Delta\alpha_{34}^a + a_4^a + \Delta\alpha_{45}^a + a_5^a + \Delta\alpha_{56}^a + a_6^a + \Delta\alpha_{67}^a \\ + a_7^a + \Delta\alpha_{78}^a + a_8^a - (7 \times 180^\circ) - (\alpha_f - \alpha_0) = 0$$

Desenvolvendo a (7.56),

$$f_2 = \Delta\varphi_{12}^a + \Delta\varphi_{23}^a + \Delta\varphi_{34}^a + \Delta\varphi_{45}^a + \Delta\varphi_{56}^a + \Delta\varphi_{67}^a + \Delta\varphi_{78}^a - (\varphi_8 - \varphi_1) = 0$$

Desenvolvendo a (7.57),

$$f_3 = \Delta\lambda_{12}^a + \Delta\lambda_{23}^a + \Delta\lambda_{34}^a + \Delta\lambda_{45}^a + \Delta\lambda_{56}^a + \Delta\lambda_{67}^a + \Delta\lambda_{78}^a - (\lambda_8 - \lambda_1) = 0$$

b) Vetor das observações reduzidas:

Do quadro (7.13) retiram-se os ângulos elipsóidicos e do quadro (7.11), os comprimentos das geodésicas.

$${}_{15}L_1^b = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,5155'' \\ 147^\circ 22' 55,7061'' \\ 138^\circ 34' 13,2909'' \\ 188^\circ 29' 46,5021'' \\ 158^\circ 44' 03,4180'' \\ 194^\circ 33' 48,7411'' \\ 168^\circ 07' 41,4935'' \\ 141^\circ 04' 32,0424'' \\ \\ 13494,6292 \text{ m} \\ 22463,6022 \text{ m} \\ 18112,7435 \text{ m} \\ 13284,5670 \\ 23607,0749 \text{ m} \\ 16001,9304 \text{ m} \\ 22692,8447 \text{ m} \end{bmatrix}$$

c) Vetor "erro de fechamento":

Na (7.58),  $\varepsilon_\alpha$  representa a diferença entre o azimute ( $\alpha_0$ ) da base "Morro Azul - Marco Norte" transportado para a base "Base Aérea - Biguaçu" e o azimute ( $\alpha_f$ ) desta última base;  $\varepsilon_\varphi$  representa a diferença entre a latitude ( $\varphi_1$ ) do vértice "Morro Azul" transportado para o vértice "Base Aérea" e a latitude ( $\varphi_8$ ) deste último vértice;  $\varepsilon_\lambda$  representa a diferença entre a longitude ( $\lambda_1$ ) do vértice "Morro Azul" transportado para o vértice "Base Aérea" e a longitude ( $\lambda_8$ ) deste último vértice.

Estes valores são retirados da última linha do quadro (7.14).

$${}_3W_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,7681'' \\ 0,0073'' \\ 0,0504'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,34201275068E-5 \\ 3,5391398721E-8 \\ 2,44346095279E-7 \end{bmatrix} \text{rad}$$

d) Matriz dos pesos:

Aplicando a (4.17) para o tamanho  $15 \times 15$ , sendo 8 variâncias de ângulos e 7 variâncias de distância, e a partir dos desvios-padrão do quadro (7.1),  $\sigma_{a_i} = 0,82506''$  e  $\sigma_s = (0,01 + 2SE - 6)m$ , obtém-se os seguintes elementos diagonais da inversa da matriz dos pesos:

$$\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{a_2}^2 = \sigma_{a_3}^2 = \sigma_{a_4}^2 = \sigma_{a_5}^2 = \sigma_{a_6}^2 = \sigma_{a_7}^2 = \sigma_{a_8}^2 = 1,60000300589E-11 \text{ rad}^2$$

$$\sigma_{S_{12}}^2 = 1,36820510382E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{23}}^2 = 3,01699784911E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{34}}^2 = 2,1367956299E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{45}}^2 = 1,33730160539E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{56}}^2 = 3,27345905177E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{67}}^2 = 1,7643242549E-3 \text{ m}^2$$

$$\sigma_{S_{78}}^2 = 3,06757461247E-3 \text{ m}^2$$

e) Matriz  ${}_rB_n$ :

$${}_3B_{15} = \begin{array}{cccccccc|cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & S_{12} & S_{23} & S_{34} & S_{45} & S_{56} & S_{67} & S_{78} \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1}{\partial a_3} & \frac{\partial f_1}{\partial a_4} & \frac{\partial f_1}{\partial a_5} & \frac{\partial f_1}{\partial a_6} & \frac{\partial f_1}{\partial a_7} & \frac{\partial f_1}{\partial a_8} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{34}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{45}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{56}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{67}} & \frac{\partial f_1}{\partial S_{78}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_3} & \frac{\partial f_2}{\partial a_4} & \frac{\partial f_2}{\partial a_5} & \frac{\partial f_2}{\partial a_6} & \frac{\partial f_2}{\partial a_7} & \frac{\partial f_2}{\partial a_8} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{34}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{45}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{56}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{67}} & \frac{\partial f_2}{\partial S_{78}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} & \frac{\partial f_3}{\partial a_4} & \frac{\partial f_3}{\partial a_5} & \frac{\partial f_3}{\partial a_6} & \frac{\partial f_3}{\partial a_7} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{34}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{45}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{56}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{67}} & \frac{\partial f_3}{\partial S_{78}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4}{\partial a_3} & \frac{\partial f_4}{\partial a_4} & \frac{\partial f_4}{\partial a_5} & \frac{\partial f_4}{\partial a_6} & \frac{\partial f_4}{\partial a_7} & 0 & \frac{\partial f_4}{\partial S_{12}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{23}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{34}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{45}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{56}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{67}} & \frac{\partial f_4}{\partial S_{78}} \end{array}$$

f) Cálculo dos elementos da matriz  ${}_3B_{15}$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 1 + \frac{\Delta\alpha_{12}}{\partial a_1} + \dots + \frac{\partial\Delta\alpha_{78}}{\partial a_1}$$

⋮

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_8} = 1$$

Generalizando:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_j} = 1 + \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\alpha_{i,i+1}}{\partial a_j} ; (j = 1, \dots, 8).$$

Para as demais derivadas tem-se:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{j,j+1}} = \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\alpha_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}} ; (j = 1, \dots, 7);$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_j} = \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\phi_{i,i+1}}{\partial a_j} ; (j = 1, \dots, 8);$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{j,j+1}} = \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\phi_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}} ; (j = 1, \dots, 7);$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial a_j} = \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\lambda_{i,i+1}}{\partial a_j} ; (j = 1, \dots, 8);$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_{j,j+1}} = \sum_{i=j}^{i=7} \frac{\partial\Delta\lambda_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}} ; (j = 1, \dots, 7).$$

As expressões das derivadas dos argumentos  $a_j$  para  $\frac{\partial\Delta\alpha_{i,i+1}}{\partial a_j}$ ,  $\frac{\partial\Delta\phi_{i,i+1}}{\partial a_j}$  e

$\frac{\partial\Delta\lambda_{i,i+1}}{\partial a_j}$ , onde  $i = 1, \dots, 7$  e  $j = 1, \dots, 8$ , são:

Quando  $j = 1$ :

$$i = 1 \rightarrow (1)$$

$$i = 2 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} \right)$$

$$i = 3 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_1} \right)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_1} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_1} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_1} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_1} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_1} \right)$$

Quando  $j = 2$ :

$$i = 2 \rightarrow (1)$$

$$i = 3 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_2} \right)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_2} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_2} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_2} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_2} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_2} \right)$$

Quando  $j = 3$ :

$$i = 3 \rightarrow (1)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_3} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_3} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_3} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_3} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_3} \right)$$

Quando  $j = 4$ :

$$i = 4 \rightarrow (1)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_4} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_4} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_4} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial a_4} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_4} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_4} \right)$$

Quando  $j = 5$ :

$$i = 5 \rightarrow (1)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_5} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial a_5} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_5} \right)$$

Quando  $j = 6$ :

$$i = 6 \rightarrow (1)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( 1 + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial a_6} \right)$$

Quando  $j = 7$ :

$$i = 7 \rightarrow (1)$$

As expressões das derivadas dos argumentos  $S_{j,j+1}$  para  $\frac{\partial \Delta \alpha_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}}$ ,  $\frac{\partial \Delta \varphi_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}}$  e  $\frac{\partial \Delta \lambda_{i,i+1}}{\partial S_{j,j+1}}$ , onde  $i = 1, \dots, 7$  e  $j = 1, \dots, 7$ , são:

Quando  $j = 1$ :

$$i = 1 \rightarrow (1)$$

$$i = 2 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} \right)$$

$$i = 3 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{12}} \right)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{12}} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{12}} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{12}} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{12}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{12}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{12}} \right)$$

Quando  $j = 2$ :

$$i = 2 \rightarrow (1)$$

$$i = 3 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{23}} \right)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{23}} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{23}} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial a_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{23}} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{23}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{23}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{23}} \right)$$

Quando  $j = 3$ :

$$i = 3 \rightarrow (1)$$

$$i = 4 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{34}} \right)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{34}} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{34}} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{34}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{34}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{34}} \right)$$

Quando  $j = 4$ :

$$i = 4 \rightarrow (1)$$

$$i = 5 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{45}} \right)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{45}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{45}} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{45}}{\partial S_{45}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{45}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{45}} \right)$$

Quando  $j = 5$ :

$$i = 5 \rightarrow (1)$$

$$i = 6 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{56}} \right)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{56}}{\partial S_{56}} + \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{56}} \right)$$

Quando  $j = 6$ :

$$i = 6 \rightarrow (1)$$

$$i = 7 \rightarrow \left( \frac{\partial \Delta \alpha_{67}}{\partial S_{67}} \right)$$

Quando  $j = 7$ :

$$i = 7 \rightarrow (1)$$

Mediante as (7.62), (7.64), (7.66), (7.68), (7.70) e (7.72), aplicada a cada uma das linhas (derivando com relação às incógnitas  $a_i$  e  $S_{ik}$  das respectivas linhas), auxiliado pelas

expressões das derivadas dos argumentos e utilizando dados numéricos do quadro (7.14), os elementos da matriz  ${}_3B_{15}$  são:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 9,91398776734E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} = 9,91398488682E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_3} = 9,924238772E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_4} = 9,93891304839E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_5} = 9,94906545498E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_6} = 9,96872714447E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_7} = 9,98137908584E - 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_8} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} = -8,54468583757E - 8 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{23}} = -7,17289499905E - 8 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{34}} = -2,30795041479E - 8 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{45}} = -3,46519734624E - 8 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{56}} = -4,36220984345E - 9 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{67}} = -2,50463042432E - 8 \\ \frac{\partial f_1}{\partial S_{78}} = -8,12043936408E - 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial a_1} = 8,02877361342E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = 5,90366111123E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_3} = 2,93183944388E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_4} = 2,15909239656E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_5} = 1,30098672034E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_6} = 1,10970550327E - 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_7} = 3,51321711191E - 4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_8} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} = -1,41831564168E - 10 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{23}} = -8,52204339589E - 8 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{34}} = -1,51546058748E - 7 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{45}} = -1,43585742207E - 7 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{56}} = -1,57278676064E - 7 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{67}} = -1,50186454942E - 7 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_{78}} = -1,56737112096E - 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial a_1} &= -1,8234737355E-2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_2} &= -1,82353388475E-2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_3} &= -1,60903489822E-2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_4} &= -1,3007366541E-2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_5} &= -1,08651316752E-2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_6} &= -6,69446489731E-3 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_7} &= -3,99521053253E-3 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_8} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} &= -1,78451614567E-7 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{23}} &= -1,50065253794E-7 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{34}} &= -4,84926343812E-8 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{45}} &= -7,31222882523E-8 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{56}} &= -9,25341763895E-9 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{67}} &= -5,34360297085E-8 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_{78}} &= -1,74227542873E-8 \end{aligned}$$

g) Equações normais:

$${}_r M_r \quad {}_r K_1 + {}_r W_1 = {}_r O_1$$

$$M = B P^{-1} B^T$$

$${}_3 M_3 = \begin{bmatrix} 1,26693725298E-10 & 3,45956271479E-13 & -1,38432231122E-12 \\ & 2,14459701171E-15 & -5,54089544486E-15 \\ \text{simétrica} & & 2,04812258701E-14 \end{bmatrix}$$

$$K = -M^{-1} W$$

$${}_3 K_1 = \begin{bmatrix} -238002,650658 \\ -167739958,097 \\ -73396390,1374 \end{bmatrix}$$

h) Vetor dos resíduos:

$$V = P^{-1} B^T K$$

$${}_{15}V_1 = \begin{bmatrix} -0,8064'' \\ 0,3702'' \\ 1,4950'' \\ 1,1748'' \\ 1,1301'' \\ 0,2243'' \\ -0,0107'' \\ -0,7855'' \\ 0,0180\text{m} \\ 0,0764\text{m} \\ 0,0619\text{m} \\ 0,0394\text{m} \\ 0,0886\text{m} \\ 0,0514\text{m} \\ 0,0846\text{m} \end{bmatrix}$$

i) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} = \frac{-K^T W}{r} = \frac{21}{3} = 7$$

O teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos resulta falho.

j) Vetor dos valores observados reduzidos ajustados:

$${}_n L_1^a = {}_n L_1^b + {}_n V_1$$

$${}_{15}L_1^a = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,5155'' \\ 147^\circ 22' 55,7061'' \\ 138^\circ 34' 13,2909'' \\ 188^\circ 29' 46,5021'' \\ 158^\circ 44' 03,4180'' \\ 194^\circ 33' 48,7411'' \\ 168^\circ 07' 41,4935'' \\ 141^\circ 04' 32,0424'' \\ 13494,6292 \text{ m} \\ 22463,6022 \text{ m} \\ 18112,7435 \text{ m} \\ 13284,5670 \text{ m} \\ 23607,0749 \text{ m} \\ 16001,9304 \text{ m} \\ 22692,8447 \text{ m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,8064'' \\ 0,3702'' \\ 1,4950'' \\ 1,1748'' \\ 1,1301'' \\ 0,2243'' \\ -0,0107'' \\ -0,7855'' \\ 0,0180 \text{ m} \\ 0,0764 \text{ m} \\ 0,0619 \text{ m} \\ 0,0394 \text{ m} \\ 0,0886 \text{ m} \\ 0,0514 \text{ m} \\ 0,0846 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 01,7091'' \\ 147^\circ 22' 56,0763'' \\ 138^\circ 34' 14,7859'' \\ 188^\circ 29' 47,6769'' \\ 158^\circ 44' 04,5481'' \\ 194^\circ 33' 48,9654'' \\ 168^\circ 07' 41,4828'' \\ 141^\circ 04' 31,2569'' \\ 13494,6472 \text{ m} \\ 22463,6786 \text{ m} \\ 18112,8054 \text{ m} \\ 13284,6064 \text{ m} \\ 23607,1635 \text{ m} \\ 16001,9818 \text{ m} \\ 22692,9293 \text{ m} \end{bmatrix}$$

O quadro (7.15) apresenta os valores dos azimutes  $\alpha_{ik}$  e das coordenadas  $(\varphi_i, \lambda_i)$  obtidos mediante o transporte utilizando os valores observados ajustados (vetor  ${}_{15}L_1^a$ ). Na última linha deste quadro estão os "erros de fechamento" em azimute ( $\varepsilon_\alpha$ ) e em coordenadas ( $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda$ ). O maior "erro de fechamento" em coordenadas é  $\varepsilon_\varphi = 0,0002''$  que corresponde ao comprimento linear menor que 0,010 m. Este comprimento linear se enquadra nas especificações para poligonação (IBGE, 1996, p. 6), segundo as quais o valor máximo para o erro-padrão em coordenadas após a compensação em azimute é  $0,04 \text{ m } \sqrt{L}$ , sendo L dado pelo comprimento da poligonal em quilômetros. A poligonal em estudo tem  $L = 129661,3274\text{E-}3 \text{ km}$ , o que resulta em 0,455 m para o valor máximo.

QUADRO 7.15 - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO VALORES AJUSTADOS DA 1ª ETAPA.

| PONTO<br>i | $a'_{jk}$       | LINHA<br>ik               | $S_{ik}$   | $\alpha_{ik}$                | $\alpha_{ki}$  | PONTO<br>i | COORDENADAS                   |                               |
|------------|-----------------|---------------------------|------------|------------------------------|----------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|
|            |                 |                           |            |                              |                |            | $\varphi_i$ (sul)             | $\lambda_i$ (oeste)           |
| Morro Azul | 209°39'01,7091" | Morro Azul<br>Marco Norte |            | 60°21'49,458"                |                | Morro Azul | 28°36'30,915"                 | 49°05'06,266"                 |
| 1000       | 147°22'56,0763" | Morro Azul<br>1000        | 13494,6472 | 270°00'51,1671"              | 89°56'53,3286" | 1000       | 28°36'30,7710"                | 48°56'49,5514"                |
| 1005       | 138°34'14,7859" | 1000<br>1005              | 22463,6786 | 237°19'49,4049"              | 57°14'17,0537" | 1005       | 28°29'56,4007"                | 48°45'14,2326"                |
| 1002       | 188°29'47,6769" | 1005<br>1002              | 18112,8054 | 195°48'31,8396"              | 15°47'05,6128" | 1002       | 28°20'30,2602"                | 48°42'13,0601"                |
| 1003       | 158°44'04,5481" | 1002<br>1003              | 13284,6024 | 204°16'53,2897"              | 24°15'18,3363" | 1003       | 28°13'56,8601"                | 48°38'52,6901"                |
| 1004       | 194°33'48,9654" | 1003<br>1004              | 23607,1635 | 182°59'22,8844"              | 02°59'01,6370" | 1004       | 28°01'11,0334"                | 48°38'07,6185"                |
| 1048       | 168°07'41,4828" | 1004<br>1048              | 16001,9818 | 197°32'50,6024"              | 17°31'27,9294" | 1048       | 27°52'55,3601"                | 48°35'11,2361"                |
| Base Aérea | 141°04'31,2569" | 1048<br>Base Aérea        | 22692,9293 | 185°39'09,4122"              | 05°38'31,3962" | Base Aérea | 27°40'41,7312"                | 48°33'49,6710"                |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,6531"              |                |            |                               |                               |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,653"               |                | Base Aérea | 27°40'41,731"                 | 48°33'49,671"                 |
|            |                 |                           |            | $\epsilon_\alpha = 0,0001''$ |                |            | $\epsilon_\varphi = 0,0002''$ | $\epsilon_\lambda = 0,0000''$ |

## 7.6.3.2 Iteração

- 1ª iteração  $L^* = L1^\circ$  :

a) Elementos da matriz  ${}_3B1_{15}$ , obtida com dados numéricos do quadro (7.15):

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = 9,91398758633E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_2} = 9,91398475054E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_3} = 9,92423870399E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_4} = 9,9389130083E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_5} = 9,94906539178E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_6} = 9,968727137E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_7} = 9,98137904871E - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_8} = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{12}} = -8,54468574377E - 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{23}} = -7,17288499339E - 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{34}} = -2,3079920858E - 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{45}} = -3,4652802235E - 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{56}} = -4,36356985904E - 9$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{67}} = -2,50476757474E - 8$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_{78}} = -8,1218555932E - 9$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_1} = 8,0289887851E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_2} = 5,90387348221E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_3} = 2,93204598771E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_4} = 2,15928252301E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_5} = 1,30115411877E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_6} = 1,10981206108E - 3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_7} = 3,513843013E - 4$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_8} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{12}} = -1,42447472157E - 10$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{23}} = -8,52207146521E - 8$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{34}} = -1,51545839469E - 7$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{45}} = -1,43585043367E - 7$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{56}} = -1,57278542917E - 7$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{67}} = -1,50185633939E - 7$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_{78}} = -1,56736845384E - 7$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial f_3}{\partial a_1} = -1,82347761699E-2 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{12}} = -1,78451613944E-7 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_2} = -1,82353683308E-2 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{23}} = -1,50065048472E-7 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_3} = -1,60903641306E-2 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{34}} = -4,8493512042E-8 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_4} = -1,30073756859E-2 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{45}} = -7,31240403821E-8 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_5} = -1,08651456016E-2 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{56}} = -9,25630306672E-9 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_6} = -6,69446679151E-3 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{67}} = -5,34389588005E-8 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_7} = -3,99521860152E-3 & \frac{\partial f_3}{\partial S_{78}} = -1,74257933524E-8 \\
\frac{\partial f_3}{\partial a_8} = 0 &
\end{array}$$

b) Vetor "erro de fechamento":

$$W1 = B1(L^b - L1^\circ) + F(L1^\circ)$$

Os elementos do vetor  $F(L1^\circ)$  são obtidos da última linha do quadro (7.15).

$$F(L1^\circ) = \begin{bmatrix} 0,0001'' \\ 0,0002'' \\ 0,0000'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,8481368111E-10 \\ 9,6962736222E-10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ rad}$$

$$W1 = \begin{bmatrix} -1,34196422701E-5 \\ 3,63577913215E-8 \\ 2,44346974484E-7 \end{bmatrix} \text{ rad}$$

c) Equações normais:

$${}^r M1, {}^r K1 + {}^r W1 = {}^r O1$$

$$M1 = B1 P^{-1} B1^T$$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1,26693723605E-10 & 3,45974718187E-13 & -1,38432366891E-12 \\ & 2,14473529386E-15 & -5,54116169611E-15 \\ \text{simétrica} & & 2,04812785726E-14 \end{bmatrix}$$

$$K1 = -M1^{-1} W1$$

$$K1 = \begin{bmatrix} -239358,822499 \\ -169301993,999 \\ -73912708,9501 \end{bmatrix}$$

d) Vetor dos resíduos:

$$V1 = P^{-1} B1^T K1$$

$${}_{15}V_1 = \begin{bmatrix} -0,8212'' \\ 0,3663'' \\ 1,5027'' \\ 1,1813'' \\ 1,1374'' \\ 0,2254'' \\ -0,0102'' \\ -0,7899'' \\ 0,0181\text{m} \\ 0,0770\text{m} \\ 0,0625\text{m} \\ 0,0397\text{m} \\ 0,0894\text{m} \\ 0,0518\text{m} \\ 0,0854\text{m} \end{bmatrix}$$

e) Variância da unidade de peso *a posteriori*:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V_1^T P V_1}{r} = \frac{-K_1^T W_1}{r} = \frac{21}{3} = 7$$

f) Vetor dos valores observados reduzidos ajustados:

$$L_1^* = L^b + V_1$$

$${}_{15}L1_1^a = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 02,5155'' \\ 147^\circ 22' 55,7061'' \\ 138^\circ 34' 13,2909'' \\ 188^\circ 29' 46,5021'' \\ 158^\circ 44' 03,4180'' \\ 194^\circ 33' 48,7411'' \\ 168^\circ 07' 41,4935'' \\ 141^\circ 04' 32,0424'' \\ 13494,6292 \text{ m} \\ 22463,6022 \text{ m} \\ 18112,7435 \text{ m} \\ 13284,5670 \text{ m} \\ 23607,0749 \text{ m} \\ 16001,9304 \text{ m} \\ 22692,8447 \text{ m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,8212'' \\ 0,3663'' \\ 1,5027'' \\ 1,1813'' \\ 1,1374'' \\ 0,2254'' \\ -0,0102'' \\ -0,7899'' \\ 0,0181 \text{ m} \\ 0,0770 \text{ m} \\ 0,0625 \text{ m} \\ 0,0397 \text{ m} \\ 0,0894 \text{ m} \\ 0,0518 \text{ m} \\ 0,0854 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 209^\circ 39' 01,6943'' \\ 147^\circ 22' 56,0724'' \\ 138^\circ 34' 14,7936'' \\ 188^\circ 29' 47,6834'' \\ 158^\circ 44' 04,5554'' \\ 194^\circ 33' 48,9665'' \\ 168^\circ 07' 41,4833'' \\ 141^\circ 04' 31,2525'' \\ 13494,6473 \text{ m} \\ 22463,6792 \text{ m} \\ 18112,8060 \text{ m} \\ 13284,6067 \text{ m} \\ 23607,1643 \text{ m} \\ 16001,9822 \text{ m} \\ 22692,9301 \text{ m} \end{bmatrix}$$

O quadro (7.16) apresenta os valores dos azimutes  $\alpha_{ik}$  e das coordenadas  $(\varphi_i, \lambda_i)$  obtidos mediante o transporte utilizando os valores observados ajustados da 1ª iteração (vetor  ${}_{15}L1_1^a$ ). O "erro de fechamento" em azimute é nulo até a 4ª decimal de segundos de arco e o maior (em módulo) "erro de fechamento" em coordenadas é  $\varepsilon_\lambda = -0,0002''$ .

QUADRO 7.16 - TRANSPORTE DO AZIMUTE E DAS COORDENADAS USANDO VALORES AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO.

| PONTO<br>i | $a_{jk}$        | LINHA<br>ik               | $S_{ik}$   | $\alpha_{ik}$                   | $\alpha_{ki}$   | PONTO<br>i | COORDENADAS       |                     |
|------------|-----------------|---------------------------|------------|---------------------------------|---|------------|-------------------|---------------------|
|            |                 |                           |            |                                 |   |            | $\varphi_i$ (sul) | $\lambda_i$ (oeste) |
| Morro Azul | 209°39'01,6943" | Morro Azul<br>Marco Norte |            | 60°21'49,458"                   |   | Morro Azul | 28°36'30,915"     | 49°05'06,266"       |
| 1000       | 147°22'56,0724" | Morro Azul<br>1000        | 13494,6473 | 270°00'51,1523"                 | 89°56'53,3138"  | 1000       | 28°36'30,7710"    | 48°56'49,5514"      |
| 1005       | 138°34'14,7936" | 1000<br>1005              | 22463,6792 | 237°19'49,3862"                 | 57°14'17,0350"  | 1005       | 28°29'56,4006"    | 48°45'14,2326"      |
| 1002       | 188°29'47,6834" | 1005<br>1002              | 18112,8060 | 195°48'31,8286"                 | 15°47'05,6018"  | 1002       | 28°20'30,2600"    | 48°42'13,0601"      |
| 1003       | 158°44'04,5554" | 1002<br>1003              | 13284,6067 | 204°16'53,2852"                 | 24°15'18,3318"  | 1003       | 28°13'56,8598"    | 48°38'52,6900"      |
| 1004       | 194°33'48,9665" | 1003<br>1004              | 23607,1643 | 182°59'22,8872"                 | 02°59'01,6398"  | 1004       | 28°01'11,0331"    | 48°38'07,6184"      |
| 1048       | 168°07'41,4833" | 1004<br>1048              | 16001,9822 | 197°32'50,6063"                 | 17°31'27,9332"  | 1048       | 27°52'55,3598"    | 48°35'11,2360"      |
| Base Aérea | 141°04'31,2525" | 1048<br>Base Aérea        | 22692,9301 | 185°39'09,4165"                 | 05°38'31,4005"  | Base Aérea | 27°40'41,7309"    | 48°33'49,6708"      |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,6530"                 |   |            |                   |                     |
|            |                 | Base Aérea<br>Biguaçu     |            | 146°43'02,653"                  |   | Base Aérea | 27°40'41,731"     | 48°33'49,671"       |
|            |                 |                           |            | $\varepsilon_\alpha = 0,0000''$ | $\varepsilon_\varphi = -0,0001''$ $\varepsilon_\lambda = -0,0002''$ |            |                   |                     |

## 8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 8.1 TESTE QUI-QUADRADO DO ERRO DE FECHAMENTO E OS MÉTODOS DE AJUSTAMENTO APLICADOS À POLIGONAL TOPOGRÁFICA

Considerando a poligonal simulada apresentada pela figura (2.1) e quadro (2.1), verifica-se que:

- a) Comparando o resultado do teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento (item 2.3-e) com o resultado do teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos (item 3.5.1-l), o nível de significância ( $\alpha$ ) é mantido;
- b) Comparando os resultados do vetor dos resíduos obtidos (itens 3.5.1-f; 4.4.1-f e 5.4.1-g), ocorre igualdade ao nível da 4ª decimal de segundos de arco para os ângulos e igualdade ao nível da 5ª decimal para as distâncias;
- c) Com esta estabilização dos resíduos,  $\hat{\sigma}_0^2$  se mantém ao nível da 3ª decimal e como o número de graus de liberdade é o mesmo, o nível de significância ( $\alpha$ ) do teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos se mantém.

## 8.2 MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO APLICADO À POLIGONAL GEODÉSICA

Considerando a poligonal geodésica do IBGE apresentada pela figura (7.6) e quadros (7.1) e (7.2), verifica-se, ainda com apenas uma só iteração, que:

- a) O vetor dos resíduos (itens 7.6.3.1-h e 7.6.3.2-d) apresenta para os ângulos valores estabilizados ao nível do décimo de segundo de arco o que proporciona o mesmo nível aos azimutes ajustados e para as distâncias, valores estabilizados ao nível do centímetro. Isto resulta valores de coordenadas estabilizadas ao nível do milésimo de segundo de arco.

O quadro (8.1) ilustra a diferença entre valores ajustados na 1ª etapa e 1ª iteração, referentes aos azimutes, às distâncias e às coordenadas.

QUADRO 8.1 - DIFERENÇA ENTRE VALORES AJUSTADOS NA 1ª ETAPA E 1ª ITERAÇÃO.

| Linha ik          | $\alpha_{ik}^a - \alpha_{ik}^{1a}$ | $S_{ik}^a - S_{ik}^{1a}$ | Ponto i    | $\varphi_i^a - \varphi_i^{1a}$ | $\lambda_i^a - \lambda_i^{1a}$ |
|-------------------|------------------------------------|--------------------------|------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Morro Azul - 1000 | 0,0148"                            | -0,0001 m                | 1000       | 0,0000"                        | 0,0000"                        |
| 1000 - 1005       | 0,0187"                            | -0,0006 m                | 1005       | 0,0001"                        | 0,0000"                        |
| 1005 - 1002       | 0,0110"                            | -0,0006 m                | 1002       | 0,0002"                        | 0,0000"                        |
| 1002 - 1003       | 0,0045"                            | -0,0043 m                | 1003       | 0,0003"                        | 0,0001"                        |
| 1003 - 1004       | -0,0028"                           | -0,0008 m                | 1004       | 0,0003"                        | 0,0001"                        |
| 1004 - 1048       | -0,0039"                           | -0,0004 m                | 1048       | 0,0003"                        | 0,0001"                        |
| 1048 - Base Aérea | -0,0043"                           | -0,0008 m                | Base Aérea | 0,0003"                        | 0,0002"                        |

- b) O cálculo da distância ( $S_{ik}^c$ ) e do azimute ( $\alpha_{ik}^c$ ) a partir das coordenadas ajustadas ( $\varphi_i^a, \lambda_i^a$ ) da 1ª iteração mantém as decimais estabilizadas dos valores ajustados ( $\alpha_{ik}^{1a}, S_{ik}^{1a}$ ), conforme mostra o quadro (8.2).

QUADRO 8.2 - COMPARAÇÃO ENTRE VALORES AJUSTADOS DA 1ª ITERAÇÃO E VALORES OBTIDOS A PARTIR DAS COORDENADAS AJUSTADAS.

| Linha ik          | $\alpha_{ik}^C$ | $S_{ik}^C$  | $\alpha_{ik}^a - \alpha_{ik}^C$ | $S_{ik}^a - S_{ik}^C$ |
|-------------------|-----------------|-------------|---------------------------------|-----------------------|
| Morro Azul - 1000 | 270°00'51,1583" | 13494,6434  | -0,0060"                        | 0,0039 m              |
| 1000 - 1005       | 237°19'49,3437" | 22463,6721  | 0,0425"                         | 0,0071 m              |
| 1005 - 1002       | 195°48'31,8248" | 18112,8074  | 0,0038"                         | -0,0014 m             |
| 1002 - 1003       | 204°16'53,2848" | 13284,6062  | 0,0004"                         | 0,0005 m              |
| 1003 - 1004       | 182°59'22,8942" | 23607,1641  | -0,0070"                        | 0,0002 m              |
| 1004 - 1048       | 197°32'50,6021" | 16001,9830  | 0,0042"                         | -0,0008 m             |
| 1048 - Base Aérea | 185°39'09,3781" | 22692,92641 | 0,0384"                         | 0,0037 m              |

- c) O teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos resultou falho. Isto se deve ao fato de a matriz variância-covariância das observações ter sido pré-estabelecida incorretamente e/ou de presença de erros grosseiros nas observações.

### 8.3 ANÁLISE MEDIANTE APLICAÇÃO DAS RELAÇÕES DO TESTE

#### *DATA SNOOPING*

*Data snooping* pode ser definido como a investigação em relação a observação na qual um erro grosseiro foi cometido durante a medição (BAARDA, 1968, p. 27); está baseado no teste estatístico de resíduos padronizados após o ajustamento por mínimos quadrados (KILPELÄ *et al.*, 1982); é um eficiente e sensível método até para os erros de pequena magnitude (MARQUES, 1994).

A teoria foi desenvolvida por Baarda nos anos de 1967, 1968 e 1976 para o uso em redes geodésicas (FÖRSTNER, 1980).

Na fotogrametria tem sido utilizado para a detecção e a localização de erros grosseiros que ocorrem em blocos fotogramétricos tais como os erros conforme a classificação apresentada por MITISHITA (1980, p. 8-11) sintetizados no quadro (8.3).

QUADRO 8.3 - TIPOS DE ERROS GROSSEIROS

| Tipo | Nome do Erro | Magnitude (m)  |
|------|--------------|--|
| 1    | "Blunders"   | $m > 170 \sigma$   |
| 2    | "Blunders"   | $m \leq 170 \sigma$  |
| 3    | "Outliers"   | $3\sigma < m < 100 \sigma$                                     |
| 4    | —————        | (erros cometidos em pontos de ligação de faixas)               |
| 5    | —————        | (erros associados aos pontos de controle na aerotriangulação). |

Para a melhoria da qualidade das poligonais (TESKEY *and* GRUENDIG, 1985) e para a otimização de redes geodésicas (DEREN *and* YIONGQIAN, 1991) são aplicados elementos da fundamentação teórica do teste *data snooping*.

A detecção e a localização de erros grosseiros, objeto do teste *data snooping*, é um problema que não tem sido solucionado no ajustamento. Dadas as características deste teste e para que torne uma das alternativas para a análise dos dados após o ajustamento é necessário que:

- a) os números-redundância (que serão estudados na secção 8.3.1.2) sejam corretamente calculados para cada observação o que depende da matriz dos pesos, da variância da unidade de peso *a posteriori*, e da matriz variância-covariância dos resíduos;

- b) os pesos dados às observações sejam apropriadamente escolhidos de modo que reflita a qualidade da observação tão bem quanto a geometria o que permite reduzir a indesejável distribuição de erros grosseiros nos resíduos (EL-HAKIM, 1982);
- c) o nível de confiança adotado para o teste *data snooping* seja equivalente àquele adotado para o teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento que avalia a qualidade das observações antes do ajustamento, e àquele adotado para o teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos que compara a variância da unidade de peso *a priori* com a variância da unidade de peso *a posteriori* (esta última é obtida do ajustamento).

### 8.3.1 Fundamentação Teórica do Teste

As relações matemáticas que fundamentam o teste foram retiradas das seguintes publicações: ACKERMANN (1981, 1982); EL-HAKIM(1981) e BERBERAN( 1992, 1995).

#### 8.3.1.1 Contribuição do erro observacional para o resíduo

A relação entre a componente  $v_i^*$  com a qual um erro observacional  $\varepsilon_i$  contribui para o resíduo  $v_i$  é dada por:

$$v_i^* = -(Q_v P)_{ii} \varepsilon_i \quad (8.1)$$

onde:  $Q_v$  é a matriz dos coeficientes de peso dos resíduos  $v_i$ ;

$P$  é a matriz diagonal dos pesos das observações;

$ii$  são os índices que indicam o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz.

A matriz  $Q_v$  é obtida do ajustamento das observações mediante a expressão:

$$Q_v = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \Sigma V \quad (8.2)$$

onde:  $\hat{\sigma}_0^2$  é a variância da unidade de peso *a posteriori*;

$\Sigma V$  é a matriz variância-covariância dos resíduos obtida do ajustamento.

### 8.3.1.2 Número-redundância

A matriz  $(Q_v P)$  é idempotente e determina até que ponto os erros observacionais  $\varepsilon_i$  aparecem nos resíduos  $v_i$ . Ao  $i$ -ésimo elemento da diagonal desta matriz dá-se o nome de número-redundância (adimensional) e é expresso por:

$$r_i = (Q_v P)_{ii} = \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} (\Sigma V P)_{ii} \quad (8.3)$$

De acordo com a (8.3), a componente  $v_i^*$  da (8.1) é reescrita como

$$v_i^* = -r_i \varepsilon_i \quad (8.4)$$

O número-redundância  $r_i$  é interpretado como a contribuição da observação à redundância total  $r$  do problema. Desta forma

$$r = \sum_{i=1}^n r_i = \text{traço} (Q_v P) = \text{número de graus de liberdade} \quad (8.5)$$

onde:  $n$  é o número que representa a ordem da matriz.

O número-redundância  $r_i$  situa-se no intervalo  $0 \leq r_i \leq 1$  e indica a confiabilidade do ajustamento de uma dada observação particular. O limite inferior ( $r_i = 0$ ) indica nenhuma confiabilidade e o limite superior ( $r_i = 1$ ) indica máxima confiabilidade. Desta forma se estabelece uma outra relação entre a componente  $v_i^*$  e o erro observacional  $\varepsilon_i$  dada por:

$$|v_i^*| \leq \varepsilon_i \quad (8.6)$$

### 8.3.1.3 Resíduo padronizado

Da matriz  $(Q_v P)$  são determinados os desvios-padrão  $\sigma_{v_i}$  dos resíduos  $v_i$  das observações  $l_i$  não-correlacionadas de pesos  $p_i$ :

$$\sigma_{v_i}^2 = (Q_v P)_{ii} \sigma_{l_i}^2 \rightarrow \sigma_{v_i} = \sigma_{l_i} \sqrt{r_i} \quad (8.7)$$

O resíduo padronizado  $w_i$  é definido por

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_{l_i} \sqrt{r_i}} = \frac{v_i \sqrt{p_i}}{\sigma_0 \sqrt{r_i}} \quad (8.8)$$

A suposição fundamental é que as observações contaminadas por erros grosseiros resultam em resíduos padronizados de magnitudes significativamente altas (MARQUES, 1994, p. 1).

### 8.3.1.4 Teste de hipóteses

Assumindo que os resíduos padronizados  $w_i$  tem distribuição normal, faz-se o seguinte teste de hipótese.

$H_0$ : nenhum erro grosseiro existe na observação.

A hipóteses  $H_0$  é rejeitada se:

$$|w_i| > k \quad (8.9)$$

onde:  $k$  é um valor crítico conforme um nível de confiança específico.

A escolha deve ser feita de modo que a probabilidade  $\alpha$  de erro do tipo I (rejeição de  $H_0$  quando verdadeira) e a probabilidade  $\beta$  de erro do tipo II (aceitação de  $H_0$  quando falsa) sejam tão pequenas quanto possível.

O quadro (8.4) obtido de ACKERMANN (1981) apresenta alguns níveis de confiança e seus respectivos valores críticos.

QUADRO 8.4 - NÍVEIS DE CONFIANÇA E VALORES CRÍTICOS PARA O TESTE *DATA SNOOPING*.

| $1 - \alpha$ | K    | $1 - \beta$ |
|--------------|------|-------------|
| 99,9%        | 3,29 | 76%         |
| 99,7%        | 3,00 | 84%         |
| 99,0%        | 2,56 | 93%         |
| 95,0%        | 1,96 | 98%         |

### 8.3.2 Exemplo numérico da aplicação do teste

A aplicação numérica será feita para a poligonal topográfica representada pela figura (2.1) e pelo quadro (2.1).

A matriz dos pesos das observações é dada por

$$, P_7 = \sigma_0^2 (, \Sigma L_7^b)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

com  $\sigma_0^2 = 1$  (adimensional).

Da secção (5.4.1) são retirados o vetor dos resíduos, a variância da unidade de peso *a posteriori* e matriz variância-covariância dos resíduos, expostos na seqüência.

$${}_7V_1 = \begin{bmatrix} V_{a_1} \\ V_{a_2} \\ V_{a_3} \\ V_{a_4} \\ V_{S_{12}} \\ V_{S_{23}} \\ V_{S_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4767'' \\ -0,5418'' \\ -0,4047'' \\ -0,4767'' \\ +0,003893\text{ m} \\ -0,000130\text{ m} \\ -0,003763\text{ m} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,572752, e$$

$${}_7\Sigma V_7 = \begin{bmatrix} 0,098051 & 0,085230 & 0,085230 & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & 0,106802 & 0,089299 & 0,085230 & -0,000250 & -0,000477 & 0,000727 \\ & & 0,106802 & 0,085230 & 0,000727 & -0,000477 & -0,000250 \\ & & & 0,098051 & -0,000239 & 0,000477 & -0,000239 \\ & & & & 0,000036 & -0,000018 & -0,000018 \\ & & & & & 0,000036 & -0,000018 \\ \text{simétrica} & & & & & & 0,000036 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenção dos números-redundância  $r_i$ :

Calculando o produto matricial da (8.3) obtém-se:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} {}_7\Sigma V_7 {}_7P_7 = \begin{bmatrix} \mathbf{0,267488} & 0,232512 & 0,232512 & 0,267488 & -4,165213 & 8,330405 & -4,165224 \\ 0,232512 & \mathbf{0,291363} & 0,243614 & 0,232512 & -4,364130 & -8,330465 & 12,694610 \\ 0,232512 & 0,243614 & \mathbf{0,291363} & 0,232511 & 12,694688 & -8,330479 & -4,364160 \\ 0,267488 & 0,232512 & 0,232511 & \mathbf{0,267489} & -4,165345 & 8,330539 & -4,165226 \\ \hline -0,000651 & -0,000682 & 0,001984 & -0,000651 & \mathbf{0,631134} & -0,310016 & -0,321117 \\ 0,001302 & -0,001302 & -0,001302 & 0,001302 & -0,310016 & \mathbf{0,620030} & -0,310017 \\ -0,000651 & 0,001984 & -0,000682 & -0,000651 & -0,321117 & -0,310017 & \mathbf{0,631134} \end{bmatrix}$$

de cuja diagonal retiram-se os números-redundância  $r_i$  e conforme a (8.5) obtém-se a redundância total  $r$  ou o número de graus de liberdade do problema:

$$r_{a_1} = 0,267488$$

$$r_{a_2} = 0,291363$$

$$r_{a_3} = 0,291363$$

$$r_{a_4} = 0,267489$$

$$r_{s_{12}} = 0,631134$$

$$r_{s_{23}} = 0,620030$$

$$r_{s_{31}} = 0,631134$$

---


$$r = \sum_{i=1}^7 r_i = 3,000001$$

b) Obtenção dos resíduos padronizados  $w_i$ :

Calculando a (8.8) obtém-se:

$$w_{a_1} = -1,152134$$

$$w_{s_{12}} = 0,490031$$

$$w_{a_2} = -1,254677$$

$$w_{s_{23}} = -0,016510$$

$$w_{a_3} = -0,937186$$

$$w_{s_{31}} = -0,473667$$

$$w_{a_4} = -1,152134$$

c) Resultado do teste:

$H_0$ : nenhum erro grosseiro existe na observação.

Rejeita-se  $H_0$  se  $|w_i| > k$ .

Comparando os valores dos resíduos padronizados do item b com os valores de  $k$  do quadro (8.4), verifica-se que para nenhum dos níveis de significância a hipótese  $H_0$  é rejeitada.

## 9 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 9.1 CONCLUSÕES

- a) O teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento é um teste estatístico que permite, antecipadamente, estimar com que nível de significância ( $\alpha$ ) a hipótese nula do teste  $\chi^2$  da forma quadrática dos resíduos, que compara as variâncias de unidade de peso *a priori* e *a posteriori*, não será rejeitada;
- b) O ajustamento pelo método de variação de coordenadas fornece no próprio processo do ajustamento a matriz das coordenadas ajustadas e o vetor dos valores observados ajustados;
- c) O ajustamento pelo método das equações de condição fornece, no próprio processo do ajustamento, o vetor dos valores observados ajustados; não fornece o vetor das coordenadas ajustadas o qual é obtido mediante as fórmulas do transporte de azimute e de coordenadas. Também não fornece a matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas;
- d) O ajustamento pelo método combinado é o caso mais geral que os dois anteriores, fornece no próprio processo do ajustamento o vetor das coordenadas ajustadas, o vetor dos valores observados ajustados e a matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas. Este método, pela condição necessária  $n > r - u$ , permite relacionar as  $n$  observações e as  $u$  incógnitas ligadas por  $r$  equações com os  $p$  lados da poligonal;

- e) A estimativa da variância da área não é fornecida pelo ajustamento; é calculada mediante a aplicação da lei de propagação de covariâncias, utilizando a fórmula geral para o cálculo de área em função de coordenadas retangulares e a matriz variância-covariância das coordenadas ajustadas; e
- f) Havendo necessidade de obter a variância da área, faz-se menos cálculos, se utilizar o método variação de coordenadas ou o método combinado.

## 9.2 RECOMENDAÇÕES

- a) Dada a necessidade da precisão relativa entre os pontos de uma poligonal, o estudo do plano topográfico deve ser retomado;
- b) A utilização do teste  $\chi^2$  da forma quadrática do erro de fechamento antes do ajustamento;
- c) Considerar ajustada uma poligonal somente quando o vetor dos resíduos esteja estabilizado, fixado um certo número de decimais;
- d) A aplicação do teste *data snooping* às poligonais; e
- e) O estudo de outras fórmulas substitutivas às de Puissant para facilitar o cálculo da matriz B.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. **NBR 13133-Execução de levantamento topográfico: procedimento**. Rio de Janeiro, maio 1994.
- ACKERMANN, F. Zuverlässigkeit photogrammetrischer Blöcke. *Zeitschrift für Vermessungswesen*. 106. Jahrgang, Heft 8, Seite 401-411 Aug 1981.  
 ———. Reliability and gross error detection in photogrammetric blocks. *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, München, Reihe B: Angewandte Geodäsie, Heft 258/V, Seite 49-67, 1982.
- ASHKENAZI, V.; WUDDAH-MARTEY, E. E. L.; DODSON, A. H. Rigorous adjustment of an EDM traverse on a desk calculator. *Survey Review*, Tolworth, Surrey, v. XXI, n. 165, p 325-334, July 1972.
- BAARDA, W. A testing procedure for use in geodetic networks. *Netherlands Geodetic Commission*, v. 2, n. 5, 1968.
- BERBERAN, A. Outlier detection and heterogeneous observations a simulation case study. *Australian Journal of Geodesy Photogrammetry and Surveying*, n. 56, p. 49-61, June 1992.  
 ———. Multiple outlier detection. A real case study. *Survey Review*, Tolworth, Surrey, v. 33, n. 255, p. 41-49, Jan. 1995.
- BIRD, R.G. Least squares adjustment of a traverse. *Survey Review*, Tolworth, Surrey, v. XX, n. 155, p. 218-230, Jan. 1970.
- BLACHUT, T. J.; CHRZANOWSKI, A.; SAASTAMOINEN, J. H. **Urban surveying and mapping**. New York: Spring-Verlag, 1979.
- BLAHA, G. Étude sur l'exactitude des polygonales régulières en fonction de la précision des observations. *The Canadian Surveyor. Le Géomètre Canadien*, Ottawa, v. 27, n. 1, p. 10-22, mars 1973.
- BOMFORD, G. **Geodesy**. 4.ed., Oxford University Press, 1983.
- BRANDSTÄTTER, G. Polygonzugartige Mehrfachpunktbestimmung mit Winkeln und Quasistrecken. *Zeitschrift für Vermessungswesen*. 112. Jahrgang, Heft 10, Seite 515-525, Okt. 1987.
- CICCONETTI, G. **Trattato di geodesia e topografia**. Tomo I. Milano: Francesco Vallardi, 1938.

- DEREN, L.; YIONGQIAN, Z. Optimization and design of geodetic networks in consideration of accuracy and reliability. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, v. 8, n. International Edition 91, p. 27-33, June 1991.
- EL-HAKIM, S. F. A practical study of gross-error detection in bundle adjustment. *The Canadian Surveyor. Le Géomètre Canadien*, Ottawa, v.35, n. 4, p. 373-386, Dec. 1981.
- \_\_\_\_\_. Data snooping with weighted observations. **International Society for Photogrammetry and Remote Sensing - Commission III - International Archives of Photogrammetry**, v. 24 - III. **Proceedings of the Symposium Mathematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control**. Helsinki University of Technology, Otaniemi, Finland, p. 126-133, June 7-11, 1982.
- FAIG, W. **Advanced Surveying I**. New Brunswick Fredericton N.B. Canadá, July 1972. Lecture notes n. 26 - Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick.
- FÖRSTNER, W. The theoretical reliability of photogrammetric coordinates. **XIV Congress of the International Society for Photogrammetry Hamburg, 1980, Commission III**, v. XXIII, Tomo B3, p. 223-235.
- GEMAEL, C. **Geodésia elementar**. Curitiba: DAED, 1959.
- \_\_\_\_\_. **Introdução à geodésia geométrica: 1ª parte**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1987.
- \_\_\_\_\_. **Introdução à geodésia geométrica: 2ª parte**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1988.
- \_\_\_\_\_. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. 1 ed. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1994.
- HELENE, O. A. M.; VANIN, V. R. **Tratamento estatístico de dados em física experimental**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
- IBGE. Departamento de Geodésia. **Especificações e normas gerais para levantamentos geodésicos: coletânea de normas vigentes**. Rio de Janeiro, 1996.
- JONES, P. B. The notion of a permissible misclosure in traversing. *The Australian Surveyor*, Sydney, v. 23, n. 3, p. 184-207, Sept.1970.
- JORDAN, W. **Tratado general de topografía**. 9.ed., tomo I. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1944.
- KILPELÄ, E.; HEIKKILÄ, J.; INKILÄ, K. Some results of gross error detection tests in relative orientation and scale transfer. **International Society for Photogrammetry and Remote Sensing -Commission III - International Archives of Photogrammetry**, v. 24 - III. **Proceedings of the Symposium Mathematical Models, Accuracy Aspects and Quality Control**. Helsinki University of Technology, Otaniemi, Finland, p. 9-11, June 7-11, 1982.

- KRAKIWSKY, E. J. ; THOMPSON, D. B. **Mathematical models for horizontal geodetic networks**. New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, Apr. 1978. Lecture notes n. 48 - Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick.
- MARQUES, J. M. **O método da análise de componentes principais na detecção e identificação de outliers múltiplos em fototriangulação** Curitiba, 1994. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) - Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.
- MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. **Analysis and adjustment of survey measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1981.
- MINISTÉRIO DO EXÉRCITO. Estado Maior do Exército. **Poligonação eletrônica**. 1. ed., 1976a.  
 \_\_\_\_\_. **Triangulação e trilateração geodésicas**. 1.ed., 1976b.  
 \_\_\_\_\_. **Nivelamento trigonométrico**. 1. ed., 1975.
- MITISHITA, E. A. **Detecção de erros grosseiros nas aerotriangulações**. Curitiba, 1986. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) - Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná.
- MÔNICO, J. F. G. Ajustamento de poligonais geodésicas pelos métodos paramétrico e correlatos: análise da MVC dos parâmetros. **Anais do XIV Congresso Brasileiro de Cartografia**, Gramado, v. 1, p. 219-222, 1989.
- PAPO, H.; PELED, A. Adjustment of a traverse network. *Survey Review*, Tolworth, Surrey, v. XXIV, n. 184, p. 82-92, Apr. 1977.
- PAPO, H. B.; PERLMUTTER, A. Rigorous adjustment of a traverse network. *Manuscripta Geodaetica*, Berlin, v. 2, n. 2, p. 175-193, Feb. 1977.
- SCHENK, T. Zur strengen Ausgleichung von Polygonnetzen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*. 100. Jahrgang, Heft2, Seite 53-62, Feb. 1975.
- SHEPHERD, F. A. **Advanced engineering surveying: problems and solutions**. First Published. East Kilbride, Scotland: Edward Arnold, 1981.
- SURACE, L. Analisi delle precisioni della rete geodetica fondamentale nel sistema IGM 83. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, Firenze, n. 2, Anno LIV, p. 177-208, apr./giug. 1995.
- TESKEY, W. F.; GRUENDIG, L. Improving the quality of traverses. *The Canadian Surveyor. Le Géomètre Canadien*, Ottawa, v. 39, n. 3, p. 211-222, Autumn 1985.  
 \_\_\_\_\_. ; MACLEOD, J. W. Application of statistical testing to cadastral survey traverses. *CISM Journal ACSGC*, Ottawa, v. 42, n. 1, p. 17-21, spring/printemps 1988.
- TORGE, W. **Geodesy**. Berlin, New York: de Gruyter, 1980.

VANICEK, P. **Physical Geodesy II**. New Brunswick Fredericton N.B. Canada, Aug. 1975. Lecture notes n. 41 - Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick.

\_\_\_\_\_; KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy: the concepts**. 2.ed., North Holland Publishing, 1986.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: Edgard Blücher, 1992.

WOLF, P. R. Horizontal position adjustment. *Surveying and mapping*, Washington, v. XXIX, n. 4, p. 635-644, Dec. 1969.

ZAKATOV, P.S. **Curso de geodesia superior**. Moscou: editorial Mir, 1981.