

Guilherme Grams

Modelos Cosmológicos com Campos
Fermiônicos

Curitiba
2013

Guilherme Grams

Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós Graduação em Física do Setor de
Ciências Exatas da Universidade Federal
do Paraná, como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Gilberto M. Kremer

Curitiba
2013

Grams, Guilherme

Modelos Cosmológicos com Campos Fermiônicos

80 páginas

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná. Departamento de Física.

1. Cosmologia
2. Campos fermiônicos
3. Simetria de Noether

I. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências Exatas.
Departamento de Física.

Em memória ao meu pai, Armin Grams.

*“ O meu psicanalista
é a minha máquina de escrever.”*

Ernest Hemmingway.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha família, que me apoiou em todas as etapas de minha vida acadêmica e pessoal.

Ao meu orientador Gilberto Kremer, pela orientação atenciosa e paciente nesses últimos dois anos.

Aos colegas da pós graduação, pela ajuda em disciplinas, pela amizade e excelente convívio.

À CAPES pelo suporte financeiro, e ao Programa de Pós Graduação em Física da UFPR, pela estrutura e oportunidade da realização desse mestrado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos como campos fermiônicos mínima e não minimamente acoplados ao campo gravitacional podem ser responsáveis por diversas fases de expansão acelerada durante a evolução do Universo. A contribuição da matéria bariônica e de radiação é levada em conta em um dos dois casos aqui apresentados. Buscamos as formas da densidade de potencial e do acoplamento para ação geral que descreve esse modelo através da técnica da simetria de Noether. No primeiro caso, o qual não conta com a contribuição da radiação e da matéria bariônica, obtemos soluções analíticas para as equações de campo e analisamos os possíveis cenários que estas podem descrever. No segundo caso, fazemos uma mudança de variáveis para encontrar o parâmetro de Hubble em função do desvio para o vermelho e, com esse resultado, obtivemos gráficos para o parâmetro densidade e de desaceleração. Por fim, comparamos as curvas encontradas com os dados observacionais.

Abstract

We have studied how fermionic fields minimally and non-minimally coupled with the gravitational field may be responsible for accelerated regimes during the evolution of the universe. We have searched for the forms of the potential and the coupling for the general action from the technique of Noether symmetries. We present here two cases, considering baryonic matter and radiation contributions and without them. In the first case, where the contributions of radiation and baryonic matter are not considered, we obtained cosmological solutions of the fields equations and analysed possible scenarios that they could describe. In the second case, we applied a change of variables to find the Hubble parameter in function of the red-shift, and with these results we displayed theoretical curves and confronted them with the data from observational astronomy.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico de Hubble	19
3.2	Foto de cerca de 3 milhões de galáxias	21
3.3	Mapa da Radiação Cósmica de Fundo	22
6.1	Parâmetro Densidade para $0 \leq z \leq 1$	69
6.2	Parâmetro Densidade para $1000 \leq z \leq 4000$	70
6.3	Parâmetro Desaceleração	70

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria da Relatividade	5
2.1	Noções de Relatividade Restrita	5
2.1.1	Transformações de Lorentz	6
2.2	Relatividade Geral	7
2.2.1	Princípio da Equivalência	7
2.2.2	Equação da geodésica	8
2.2.3	Algumas relações fundamentais	11
2.2.4	Tensor Energia-Momento	12
2.2.5	Equações de Campo de Einstein	13
3	Cosmologia	18
3.1	Introdução	18
3.1.1	Lei de Hubble	18
3.1.2	Princípio Cosmológico	20
3.2	Modelo Cosmológico Padrão	22
3.2.1	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	23
3.2.2	O Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura	24
3.2.3	Tensor Energia-momento para um fluido perfeito	25

3.2.4	Equações do Modelo	26
3.3	Parâmetros Observacionais	27
3.3.1	Parâmetro Densidade	27
3.3.2	Parâmetro Desaceleração	31
3.4	Problemas com o Modelo Padrão e a Solução Inflacionária	32
3.4.1	Alguns problemas do MCP:	32
3.4.2	Modelo Inflacionário	33
3.4.3	Acoplamento ao Campo Gravitacional	36
3.4.4	A atual expansão acelerada do Universo	36
4	Simetria de Noether	38
4.1	Teorema de Noether	38
4.2	Condição de existência de Simetria de Noether	40
5	Espinores em espaço tempo curvo	43
5.1	Espinores Clássicos	43
5.2	Generalização da Lagrangiana de Dirac	45
6	Campo fermiônico acoplado ao campo gravitacional	51
6.1	Ação geral para o campo fermiônico	52
6.2	Lagrangiana pontual e equações de campo para o caso particular	52
6.3	Imposição da Simetria de Noether	54
6.3.1	Caso $F' = 0$:	56
6.3.2	Caso $F' \neq 0$:	57
6.4	Soluções das Equações de Campo	59
6.4.1	Caso $F' = 0$	59
6.4.2	Caso $F' \neq 0$	60
6.5	Lagrangiana pontual e equações de campo para o caso geral	62

6.6	Imposição da Simetria de Noether	63
6.6.1	Análise da Simetria de Noether no caso geral	64
6.7	Soluções cosmológicas	65
6.7.1	Caso $F' = 0$	66
6.7.2	Gráficos do parâmetro densidade e do parâmetro desaceleração	68
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	73
	Referências Bibliográficas	75

Capítulo 1

Introdução

*Não é na ciência que está a
felicidade, mas na aquisição da
ciência.*

Edgar Allan Poe

A Cosmologia científica tem como objetivo descrever a origem, constituição e evolução da totalidade organizada dos eventos físicos, denominada Cosmos. A moderna Cosmologia possui, como suporte observacional, as evidências das observações astronômicas e, como quadro conceitual de fundo, a Relatividade Geral, que permite caracterizar o cenário global onde sucederiam os processos físicos relevantes em escala cósmica.

O Modelo Padrão da Cosmologia baseia-se na Teoria da Relatividade Geral e, foi construído com o intuito de explicar as recentes observações astronômicas em grande escala. Esse modelo obteve êxito em muitas de suas previsões, porém, surgiram novas observações astronômicas em que essa teoria, em sua forma original, falhou em explicar. Isso, obviamente, levou a uma reformulação da teoria, a qual continua até os dias de hoje.

Para suprir essas falhas, a *Cosmologia inflacionária* foi proposta por Guth, Linde, Albrecht e Steinhardt no início dos anos 80 [1, 2, 3]. Essa proposição foi muito bem

sucedida na solução de alguns problemas, como o da *planura*, do *horizonte* e da homogeneidade da *radiação cósmica de fundo*. Nos modelos propostos por essa teoria, um campo escalar, também chamado de inflaton, causa uma expansão acelerada em um curto período de tempo no Universo primordial. A esse fenômeno denomina-se inflação. O modelo prediz também que, após a inflação, o Universo passa a ser dominado pela radiação a qual dá espaço para a era da matéria, e assim passa a uma fase desacelerada.

As recentes observações da magnitude aparente e do desvio para o vermelho de supernovas do tipo Ia [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] indicam que, após a fase desacelerada, o Universo volta a possuir uma expansão acelerada, a qual permanece até hoje. Esse fato o Modelo Padrão também não consegue explicar. Além disso, os dados observacionais da radiação cósmica de fundo indicam que o Universo deve ser espacialmente plano [12, 13, 14, 15]. Essa conclusão é obtida através do cálculo do parâmetro densidade total do Universo, que é a soma dos parâmetros densidade relacionados a cada constituinte do Universo. Nessa análise, chegou-se ao resultado de que o parâmetro densidade total do Universo deve estar próximo à unidade. Porém, os constituintes conhecidos do Universo não dão conta desse valor, o que levou os cosmólogos admitirem a existência de um componente até então desconhecido à Cosmologia. Esse ente desconhecido, que deve compor cerca de 70% do Universo, foi intitulado de energia escura. "Energia" por ser uma componente que não se aglomera como a matéria, e "escura" por não emitir radiação eletromagnética. Possivelmente, há uma conexão entre o problema da atual expansão acelerada do Universo e do parâmetro densidade ser próximo a um, o que leva a crer que energia escura não só é o maior constituinte do Universo, como também é responsável pela atual expansão acelerada do Universo. Para solucionar esse enigmático problema da Cosmologia, surgiram vários candidatos a energia escura. Entre eles, o mais difundido é o da *quintessência*, a qual elege um campo escalar representando a energia escura [16, 17, 18].

Tendo em vista esses problemas, vários modelos foram propostos com intuito de explicar a era da inflação, a atual expansão acelerada do Universo, assim como a ligação destas eras com a da radiação e da matéria. Os modelos mais estudados estão relacionados ao uso de campos escalares [19, 18, 20, 21], os táquions da teoria das cordas [22, 23, 24, 25], o gás de Chaplygin [26, 27, 28] e o de van de Walls [29, 30, 31], os campos fantasmas [32, 33], e modelos com correções na ação de Einstein-Hilbert [34, 35, 36].

Nessa dissertação, consideramos campos fermiônicos como fontes do campo gravitacional, para descrever os diversos regimes acelerados do Universo. É questionado na literatura o por quê de não se utilizar campos fermiônicos no lugar de campos escalares como responsáveis pelo regime inflacionário [37]. Assim, tem-se estudado campos fermiônicos como responsáveis pelos diversos regimes acelerados do Universo [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]. No trabalho apresentado nessa dissertação, procuraremos determinar as formas das ações dos modelos a partir da existência de uma simetria de Noether associada a Lagrangiana pontual derivada da ação geral. A utilização da simetria de Noether para estudar modelos com campos escalares já foi vastamente estudada [45, 46, 47, 33, 48, 43, 34, 24, 49, 50]. Esse critério funciona como primeiro princípio para a determinação das formas de densidade potencial e do acoplamento ao campo gravitacional eliminando, assim, violações de quaisquer leis de conservação.

O trabalho apresentado nessa tese está dividido em duas partes. Na primeira parte, é possível ver que o campo fermiônico mínima e não minimamente acoplado ao campo gravitacional pode, de acordo com a simetria de Noether, descrever um período inflacionário seguido de um período desacelerado, quando figura como matéria ordinária. Entretanto, tal modelo não consegue explicar a atual expansão acelerada. Ou seja, nesse caso, o campo fermiônico figura como inflaton, mas não pode representar a energia escura. Na segunda parte, é acrescentada a contribuição da matéria bariônica e da radiação na ação geral do modelo. Com isso, espera-se ter um modelo mais com-

pleto, onde é procurado uma descrição de mais fases do Universo. Nesse caso, fazemos uma mudança de variáveis para escrever o parâmetro de Hubble em função do *redshift* (desvio para o vermelho). Pode-se ver no trabalho, que o campo fermiônico consegue representar tanto a energia escura como também a matéria escura. Nesse caso, também foram obtidos resultados para a atual aceleração do Universo e do período em que o Universo passou de uma fase desacelerada para atual fase acelerada, os quais estão muito próximos dos dados observacionais. Porém, esse segundo caso não obtem sucesso em explicar a era da inflação.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade

*Physics is like sex: sure, it may give
some practical results, but that's not
why we do it.*

Richard P. Feynman

Neste capítulo serão expostos alguns aspectos básicos da Teoria da Relatividade de Einstein, tanto da Restrita quanto da Geral. O tratamento será sucinto, pensando em ajudar o leitor a acompanhar o restante da redação dessa dissertação assim como os cálculos dos capítulos seguintes. Para estudos mais aprofundados ver [51, 52, 53, 54, 55]

2.1 Noções de Relatividade Restrita

Em 1905 Albert Einstein publicou três memoráveis artigos. Um deles, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"(Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento) [56], acabou dando início à uma nova revolução na Física.

Até o final do sec. XIX, a Mecânica Newtoniana e o Eletromagnetismo eram reconhecidas como teorias bem estabelecidas. Mas havia alguns problemas quando se tentava unir essas duas teorias [57]. Visando solucionar esses problemas e com o conhecimento

dos trabalhos de Lorentz, Einstein usou as transformações de Lorentz como as leis de transformação para altas velocidades e fez os seguintes postulados.

Postulado I: Princípio da Relatividade Restrita:

Todos os observadores inerciais são equivalentes.

Postulado II: Constância da velocidade da luz:

A velocidade da luz é a mesma para qualquer observador inercial.

Com isso, ele conseguiu resolver um dos maiores problemas em física no começo do Século XX e generalizar a teoria clássica para altas velocidades, já que nos casos onde $v \ll c$ recuperamos a teoria de Newton.

2.1.1 Transformações de Lorentz

Na Relatividade Restrita, trabalhamos com quatro coordenadas, uma temporal mais três espaciais. Esse espaço-tempo da física, pode ser representado pelo quadrivetor x^μ . Nessa notação, índices latinos variam de 1 à 3, e índices gregos de 0 à 3. Ou seja, em coordenadas cartesianas temos $(ct, x, y, z) = (0, 1, 2, 3)$.

Assim, se tivermos um observador inercial O' se movendo-se com velocidade v constante na direção x^1 , com relação ao observador inercial O , temos que os eventos em O' relacionam-se com as coordenadas de O , através da lei de transformação

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.1)$$

onde a matriz de transformação tem a seguinte forma,

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ é conhecido como o fator de Lorentz. Note que se o referencial O' estivesse se movendo em uma velocidade arbitrária v^j com relação à O , as expressões manteriam-se-iam inalteradas, bastando incorporar uma rotação na transformação de Lorentz.[57]

2.2 Relatividade Geral

A teoria da Gravitação de Einstein é uma teoria na qual o campo gravitacional é descrito como consequência da curvatura do espaço-tempo, devido ao conteúdo de matéria e energia deste.

A equivalência entre um referencial não inercial e um campo gravitacional, proposto no Princípio da Equivalência, é um dos primeiros princípios da Relatividade Geral. Veremos adiante que esse princípio tem como consequência direta a curvatura do espaço-tempo devido a qualquer forma de matéria e energia.

2.2.1 Princípio da Equivalência

Depois de publicar seu trabalho sobre Relatividade Restrita, Einstein procurou aplicar esses princípios à gravitação. Durante seus estudos, percebeu que a mecânica Newtoniana enunciava a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional (que é algo tão incrível como dizer que a carga elétrica de uma partícula é sempre proporcional à sua massa inercial), mas não oferecia nenhuma explicação para isso. Pensou, assim, que ali poderia estar a chave para uma compreensão mais profunda da gravitação e da inércia: a explicação da força gravitacional como uma força de inércia. E justamente nesta idéia está o ponto inicial da sua teoria da gravitação.

Estudamos em livros de física básica que as forças de inércia podem ser explicadas pela aceleração do referencial em que aparecem com relação a um referencial inercial. Como exemplo mais comum temos um elevador em queda livre num campo gravitacional

uniforme. Uma pessoa dentro desse elevador não percebe ação de nenhuma força de inércia ou campo gravitacional. Assim Einstein postulou o Princípio da Equivalência: "*As leis da física num pequeno laboratório em queda livre num campo gravitacional, são as mesmas que num referencial inercial na ausência do campo gravitacional*". Note que o 'pequeno', significa que o campo gravitacional pode ser tomado como uniforme na região considerada como, por exemplo, o campo gravitacional terrestre que pode ser aproximado como uniforme em uma pequena região. Contudo, sabemos que em regiões maiores ele não é uniforme [58]. Note também que, da definição do Princípio da Equivalência, em cada ponto do espaço-tempo na presença de um campo gravitacional, podemos estabelecer um sistema de referência localmente inercial, onde valem as leis da Relatividade Restrita.

Vimos então, que todos os observadores, inerciais ou não, devem ser capazes de observar os mesmos fenômenos da natureza e, assim, descobrir as leis da física. Dessa forma, Einstein tirou a palavra "inercial" do princípio da Relatividade Restrita para enunciar o princípio da Relatividade Geral, que diz: *Todos os observadores são equivalentes*. Porém devemos ter cuidado com esse enunciado, pois poderão haver problemas com sistema de coordenadas preferenciais, devido a certas simetrias no problema, nas quais uma simples mudança de coordenadas facilita em muito a sua solução. Então, precisamos que a teoria seja invariante sob mudança de coordenadas. Assim, a importância completa do princípio da Relatividade Geral está contida no seguinte enunciado do Princípio da Covariância Geral: *Uma equação é válida num dado campo gravitacional se for válida também na ausência deste*. Devido a esse princípio, Einstein achava fundamental escrever uma teoria física na forma tensorial [54].

2.2.2 Equação da geodésica

Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma trajetória num sistema de coordenadas x^μ , que é função de algum parâmetro $d\tau$. Existe um vetor $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ em cada

ponto da trajetória. Suponhamos que u^μ sofre um deslocamento ao longo da trajetória por transporte paralelo. A trajetória completa é determinada se soubermos o ponto inicial e o valor inicial do vetor u^μ . Nós devemos apenas deslocar um pouco o ponto inicial de x^μ para $x^\mu + u^\mu d\tau$, então desviar u^μ para este novo ponto por transporte paralelo, então desviar o ponto novamente na direção fixada por u^μ , e assim sucessivamente. Fazendo isso, determinamos não somente a trajetória, como também o parâmetro τ ao longo da mesma. Trajetórias produzidas dessa maneira, reproduzem o menor caminho entre dois pontos, e são chamadas *geodésicas* [59].

Agora consideremos que a partícula está em queda livre sob ação de um campo gravitacional uniforme, em um sistema de coordenadas que está em queda livre juntamente com a partícula, ou seja, esse sistema z^μ é localmente inercial e, como vimos na seção anterior, neste caso valem as leis da Relatividade Restrita e nenhuma aceleração é observada,

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.2)$$

onde $d\tau$ é o tempo medido no referencial da partícula. Podemos obter a dinâmica da partícula num referencial arbitrário x^α que está em repouso no campo gravitacional, fazendo uma mudança de referencial obtemos

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0, \quad (2.3)$$

onde $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$ é a conexão afim, definida como,

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = \frac{\partial^2 z^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial z^\mu}. \quad (2.4)$$

Uma grande utilidade da conexão afim é que podemos construir geodésicas a partir dela. Note que apesar da aparência tensorial, a conexão afim não é um tensor, pois não se transforma como tal [52].

A equação (2.3) é conhecida como equação da geodésica, e pode ser interpretada como a lei de força para uma partícula imersa num campo gravitacional. Como vimos no começo da seção, a construção da geodésica é algo puramente geométrico. Sendo assim, também podemos obter essa lei de força com argumentos geométricos.

A forma geral do elemento de linha em um espaço tempo curvo é a seguinte

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\beta)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.5)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, cujas componentes definem o comportamento dinâmico do campo gravitacional. Podemos obter uma relação entre a conexão afim e o tensor métrico usando a lei de transformação do tensor métrico [52],

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\}. \quad (2.6)$$

Analisando o que foi feito vemos que devido ao Princípio da Equivalência, temos que o movimento da partícula é determinado pela geometria do espaço-tempo. Assim, o trabalho em Relatividade Geral acontece estabelecendo uma forma para a métrica, e então as funções $g_{\mu\nu}(x^\beta)$ são determinadas, depois de solucionadas um conjunto de equações diferenciais conhecidas como Equações de Einstein, as quais relacionam matéria e energia com a geometria do espaço tempo. Determinamos esse conteúdo de matéria e energia através do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, que é obtido pela variação total da ação da métrica dos campos envolvidos no processo. Ou seja, dada a composição de matéria e energia do modelo, as equações de Einstein estabelecem equações da geometria do espaço tempo e, assim, resolvendo as equações da geodésica, determinamos as equações de movimento para uma partícula no campo gravitacional. Visto a importância de tais equações, nas próximas seções veremos a estrutura das mesmas.

2.2.3 Algumas relações fundamentais

Vimos que a Relatividade Geral nos dá a geometria do espaço tempo dada a composição de matéria e energia do Universo. Então, veremos aqui algumas relações fundamentais em geometria diferencial, que posteriormente aparecerão no lado esquerdo das equações de Einstein.

Podemos obter informações sobre a curvatura do espaço tempo, substituindo o tensor métrico na equação (2.6) para então substituir esse resultado no tensor de curvatura, que é definido como

$$R_{\mu\lambda\kappa}^{\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha} \quad (2.7)$$

Caso todas as componentes do tensor de curvatura sejam nulas, teremos que a forma métrica fundamental descreve uma variedade plana, o que fisicamente significa a ausência de um campo gravitacional [53].

Podemos obter outro importante tensor contraindo o tensor de curvatura com a métrica,

$$R_{\mu\kappa} = g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda}. \quad (2.8)$$

Este tensor, conhecido como tensor de Ricci, é o único tensor de segunda ordem que pode ser construído a partir da contração do tensor de curvatura. O tensor de Ricci é simétrico nos seus índices $R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$, isso lhe confere 10 componentes independentes no caso quadridimensional [54]. E contraindo o tensor de Ricci com a métrica, definimos o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (2.9)$$

que relaciona um número real a cada ponto do espaço tempo, caracterizando, naquele

ponto, a curvatura intrínseca do espaço tempo.

A partir do escalar de curvatura e do tensor de Ricci, definimos o tensor de Einstein

$$G_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}R, \quad (2.10)$$

que é um tensor de segunda ordem com derivada covariante nula. E por possuir derivada covariante nula, de sua definição temos

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\kappa} = \partial_{\mu}G^{\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu}G^{\alpha\kappa} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\kappa}G^{\mu\alpha} = 0 \quad (2.11)$$

as equação (2.11) também são conhecidas como Identidades de Bianchi. Para mais detalhes das relações aqui vistas, ver [59, 52, 54].

2.2.4 Tensor Energia-Momento

Vimos anteriormente a parte geométrica (lado esquerdo) das equações de Einstein, agora analisaremos como construir o tensor que nos dá as informações sobre a composição de matéria e energia presente no Universo, o qual aparecerá no lado direito das equações de Einstein.

Em teoria de campos, sempre podemos construir um tensor de segunda ordem $T^{\mu\nu}$, que condensa em sua forma as informações sobre a energia e os momenta dos campos. Obtemos esse tensor a partir da seguinte equação, envolvendo a densidade de lagrangeana \mathcal{L} do campo,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)} \right) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (2.12)$$

onde ϕ representa um campo qualquer, não necessitando ser escalar. Esse tensor representa o fluxo do quadrimomento p^{μ} através da superfície de x^{ν} constante, é simétrico nos seus índices $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, e suas componentes trazem um significado físico, a saber,

T^{00} : Componente temporal \rightarrow *Densidade de Energia*.

$T^{i0} = T^{0i}$: Componentes espaço temporais \rightarrow *Densidade da i -ésima componente de momento*.

$T^{ij} = T^{ji}$: Componentes espaciais \rightarrow *Tensor pressão do constituinte*.

No contexto da Relatividade Geral, a lei de conservação do tensor energia momento é expressa através da nulidade da derivada covariante de $T^{\mu\nu}$

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

onde, para definir uma quantidade conservada, devemos levar em conta a contribuição do campo gravitacional para o tensor energia momento.

Para exemplificar um tensor energia momento, citamos um tensor simples e de grande importância, o tensor energia momento de um fluido perfeito, o qual não possui viscosidade nem fluxo de calor, e sua forma matemática é a que segue,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} - pg^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

onde p e ρ em geral são funções das coordenadas espaço temporais e representam a pressão e a densidade de energia respectivamente, e $U^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ representa a quadri-velocidade do fluido [54].

2.2.5 Equações de Campo de Einstein

Agora que já vimos as equações básicas para a representação da geometria do espaço-tempo, assim como o tensor de segunda ordem com derivada covariante nula, que em suas componentes traz informações sobre a composição de matéria e energia dos campos presente nos modelos, podemos enfim, ver como acontece essa relação entre a geometria e composição matéria-energia.

Para isso, vamos utilizar do princípio da mínima ação $\delta S_T = 0$, onde S_T é a ação

de Einstein-Hilbert

$$S_T = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_m \right) d^4x \quad (2.15)$$

onde $\sqrt{-g}d^4x$ é o elemento invariante do espaço tempo, g o determinante da métrica, G a constante gravitacional, R o escalar de curvatura definido em (2.9), e $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(g^{\mu\nu}, \partial_\alpha g^{\mu\nu})$ a densidade lagrangiana da matéria.

É de grande utilidade trabalhar com a ação dividida em duas partes, a gravitacional S_g e a de matéria S_m , assim

$$S_T = S_g + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{c} \int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x \quad (2.16)$$

Visto que precisamos variar a ação total, e podemos fazer essa variação separadamente, em S_g e S_m , começamos variando a parte gravitacional.

Da definição do escalar de curvatura (2.9), reescrevemos a ação do campo gravitacional

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.17)$$

Variando a ação S_g ,

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) d^4x \quad (2.18)$$

usando o fato que $\delta \sqrt{-g} = -1/2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}$, reescrevemos (2.18),

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \frac{c^3}{16\pi G} \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.19)$$

Necessitamos agora encontrar $\delta R_{\mu\nu}$. Fazemos isso substituindo (2.7) na definição de $R_{\mu\nu}$ dado em (2.8), assim,

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \delta \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}. \quad (2.20)$$

Na subseção (2.2.2), vimos que a conexão afim não é um tensor. Entretanto, é possível mostrar que sua diferencial $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ se transforma como um tensor [52] e, assim, definir sua derivada covariante

$$\nabla_{\eta}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) = \frac{\partial \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\eta}} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \quad (2.21)$$

e através de (2.21) podemos reescrever (2.20),

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) \quad (2.22)$$

substituindo este resultado no segundo termo de (2.19),

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} [\nabla_{\nu}(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \nabla_{\lambda}(\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})] d^4x \quad (2.23)$$

como a derivada covariante da métrica é identicamente nula, passamos $g^{\mu\nu}$ para dentro dos parênteses e, no primeiro termo dentro dos colchetes, fazemos a troca de índices ($\nu \leftrightarrow \lambda$) por conveniência,

$$\int g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) d^4x. \quad (2.24)$$

Agora podemos aplicar o teorema de Gauss à (2.24) e transformar a integral de volume em uma integral de superfície que, de acordo com o princípio variacional, se anula nas fronteiras de integração, pois nesses pontos temos que $\delta \Gamma = 0$, assim

$$\int \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d^4x = \oint \sqrt{-g} (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) dS_\mu = 0. \quad (2.25)$$

Com isso, o segundo termo de (2.19) se anula, e a variação da ação do campo gravitacional torna-se apenas

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.26)$$

Tendo visto a variação do campo gravitacional, agora podemos analisar a variação do campo de matéria, e assim teremos a variação completa da ação de Einstein-Hilbert. Então, variando o segundo termo de (2.16), temos

$$\delta S_m = \frac{1}{c} \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (2.27)$$

onde $T_{\mu\nu}$ foi definido como o tensor energia momento dos campos fontes, e pode escrito da seguinte maneira:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.28)$$

Agora, podemos substituir os resultados (2.26) e (2.27) em (2.16) para, com isso, obter a variação da ação total,

$$\delta S_T = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.29)$$

visto que a variação da métrica $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrária, temos que o termo entre parênteses deve se anular, para que o princípio da ação mínima seja satisfeito, ou seja,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

as equações expressas em (2.30) são as equações de campo de Einstein. Lembrando que o lado esquerdo é a definição do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, o qual já vimos em (2.11) satisfaz as identidades de Bianchi. Temos que o lado direito de (2.30) também tem derivada covariante nula, e as fontes do campo gravitacional devem obedecer a lei de conservação do tensor energia-momento (2.13), tornando consistente o desenvolvimento feito até agora.

Note que podemos introduzir um termo linear em $g_{\mu\nu}$ em (2.3), visto que a métrica também possui derivada covariante nula [52] e, assim, tornamos as equações de Einstein mais gerais,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Este termo Λ , cunhado *Constante Cosmológica*, foi introduzido inicialmente pelo próprio Einstein em suas equações, com a intenção de deixar o Universo estático. Tempos depois, quando Hubble publicou seu trabalho sobre o afastamento das galáxias [60], Einstein voltou atrás, tirou Λ das suas equações, e disse que a constante cosmológica foi o maior erro de sua vida.

Entretanto, como veremos no próximo capítulo, atualmente a constante cosmológica voltou aparecer nos modelos cosmológicos, agora no lado direito das equações de Einstein. Essa nova constante cosmológica representa a energia do vácuo, proveniente da Teoria Quântica de Campos, e é uma forte candidata (a mais aceita atualmente) para explicar a atual expansão acelerada do Universo [61].

Capítulo 3

Cosmologia

3.1 Introdução

A Teoria da Gravitação de Einstein foi fundamental para o desenvolvimento da Cosmologia. Porém, para uma teoria se consolidar como ciência, precisamos de verificações experimentais ou observacionais.

Neste capítulo, veremos algumas observações astronômicas importantes que despertaram o interesse dos cientistas para estudar o Universo em grande escala, assim como a teoria que surgiu para tentar explicar tais descobertas.

3.1.1 Lei de Hubble

Até o começo do séc. XX pensava-se no Universo como algo estático. Inclusive, Einstein acreditava fortemente nisso, tanto que precisou inserir a famosa constante cosmológica em seu trabalho para manter um cenário de Universo estático.

Mas além da teoria de Einstein, o começo do século passado marcou o início dos grandes telescópios e, a comando de um desses, estava o astrônomo americano Edwin Hubble, que em seu trabalho no Observatório do Monte Wilson no final dos anos 20, observou que as galáxias estavam se afastando umas das outras com uma taxa que

aumentava com a distância (Figura 3.1) [60] Esse trabalho serviu de apoio para os físicos da época darem mais atenção para uma teoria com universo em expansão.

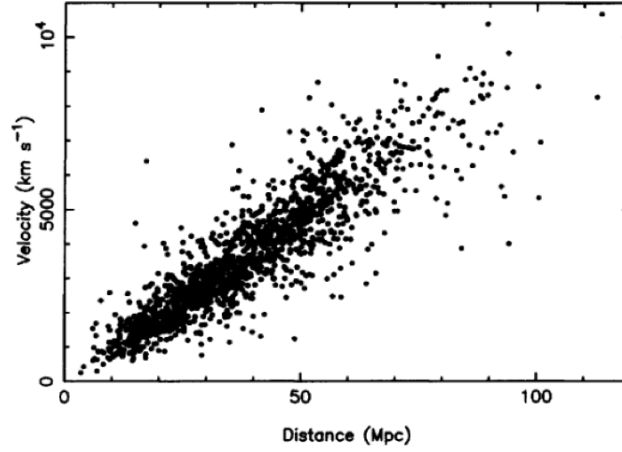


Figura 3.1: Gráfico de Hubble que mostra a velocidade de afastamento das galáxias com a distância [62].

Para tal descoberta, Hubble usou medidas do *redshift* (desvio para o vermelho) das galáxias. De acordo com a aplicação do Efeito Doppler para ondas luminosas, temos a seguinte equação:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \simeq \frac{v}{c} \quad (3.1)$$

onde λ_{obs} é o comprimento de onda que observamos e λ_{em} é o comprimento de onda emitido pela galáxia. Com essas observações, deu-se origem à chamada Lei de Hubble:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r} \quad (3.2)$$

onde \vec{v} é a velocidade de afastamento da galáxia, \vec{r} é distância da galáxia com relação a Terra, e H_0 é conhecida como a constante de Hubble, que tem seu valor atual como sendo $H_0 = 74.8 \pm 3.1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (1 Mpc equivale à $3,02 \cdot 10^{22} \text{ m}$) [63]. É importante notar que chamamos H_0 de constante pois ela possui um valor constante hoje, mas esse valor muda com o tempo.

Em cosmologia, costumamos usar **coordenadas comóveis**. Este sistema de coordenadas se move juntamente com a expansão do Universo. Como a expansão é uniforme, podemos escrever a relação entre a distância real \vec{r} , com a distância comóvel, aqui chamada \vec{x} ,

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}. \quad (3.3)$$

O termo $a(t)$, chamado fator de escala, tem um papel essencial na cosmologia, pois ele mede a taxa de expansão do Universo. Com relação ao fator de escala, convencionou-se que hoje ($t = t_0$), temos $a(t_0) = 1$.

Visto a importância de se usar o fator de escala, combinamos (3.2) e (3.3), para reescrever a Lei de Hubble em termos de a

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (3.4)$$

E com isso podemos definir o Parâmetro de Hubble H

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.5)$$

3.1.2 Princípio Cosmológico

Estabelecida a Relatividade Geral de Einstein, muitos cientistas começaram a aplicar a nova dinâmica gravitacional para o Universo como um todo. Para isso, eles precisavam de uma distribuição de matéria no Universo. Optou-se então pela mais simples, ou seja, se supõe que a matéria parece a mesma em qualquer lugar e para qualquer direção que se observe. A essa suposição de homogeneidade e isotropia em grande escala chamamos Princípio Cosmológico.

Essa hipótese tem sido testada continuamente, conforme nossa tecnologia avança e nos permite ver cada vez mais longe. A figura 3.2 mostra uma faixa de 70° do céu, e nela vemos como a distribuição de galáxias parece uniforme em grande escala.

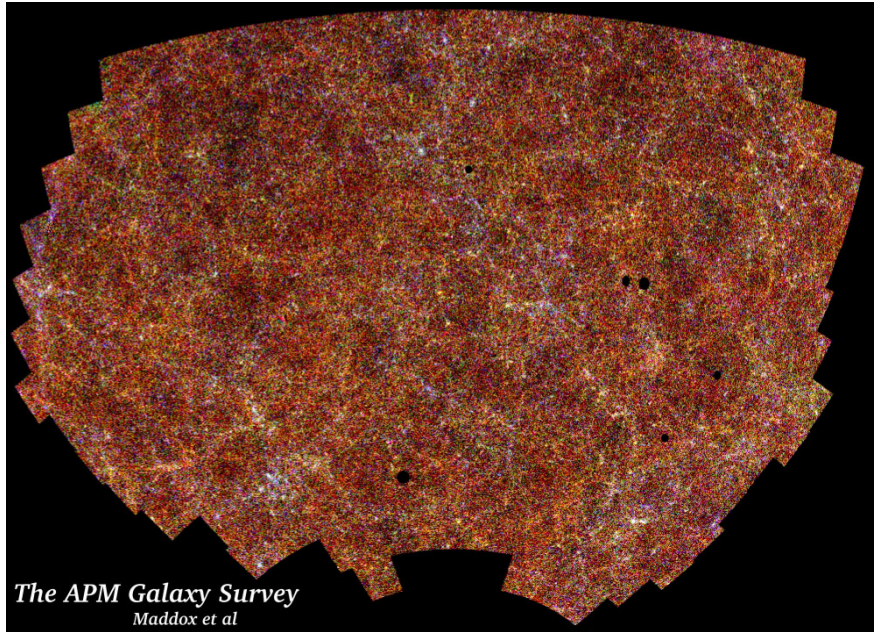


Figura 3.2: Foto de cerca de 3 milhões de galáxias [64].

Outra grande descoberta para fortalecer o Princípio Cosmológico, foi a descoberta da *Radiação Cósmica de Fundo*, a qual foi prevista no final dos anos 40 por Alpher, Bethe e Gamow [65]. Esses cientistas previram que, quando o Universo era muito jovem, sua temperatura era alta o suficiente para os fótons ionizarem os átomos de hidrogênio (pois a densidade total de energia da radiação obedece a lei de Stefan Boltzmann, $\rho_r \propto T^4$). Também já era conhecido que, conforme o Universo expande, a densidade de fótons da radiação cai com $1/a^3$ devido à diluição volumétrica e, como o Efeito Doppler relativístico decresce $1/a$, temos que a densidade de energia cai com $\rho_r \propto 1/a^4$, onde a é o fator de escala, já visto na última seção. Com isso, temos uma relação para a temperatura do Universo com sua taxa de expansão

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.6)$$

Com essa relação, temos que a temperatura do Universo diminuiu com a expansão e, assim, seus fótons não tiveram mais energia suficiente para ionizar os átomos. Deu-se

origem a era do desacoplamento, assim intitulada, pois foi nessa era que os fótons desacoplaram da matéria e passaram a viajar livremente pelo espaço, formando a radiação cósmica de fundo observada hoje.

A primeira observação da Radiação Cósmica de Fundo foi constatada em 1965 por Penzias e Wilson de forma acidental. Eles notaram que ela podia ser detectada de qualquer direção do espaço, e possuía um espectro de corpo negro com temperatura aproximada de 2.7K [66]. Essa radiação aparenta ser isotrópica e homogênea (Figura 3.3), salvo algumas pequenas anisotropias, que são a causa da formação de estrelas, galáxias, etc.

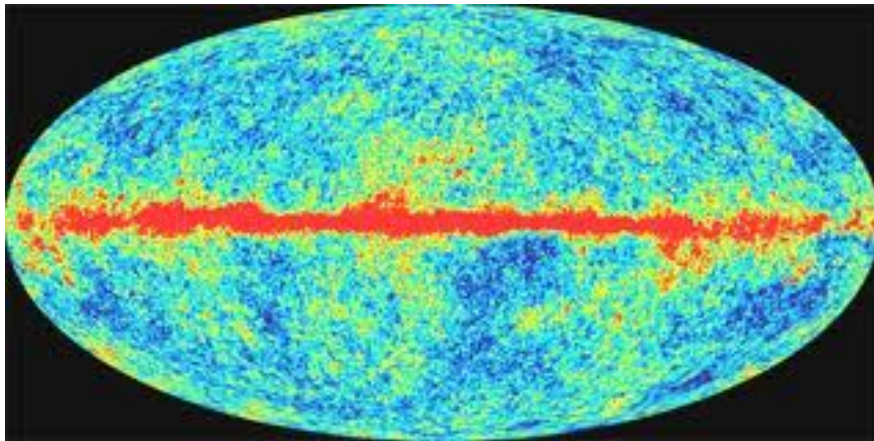


Figura 3.3: Mapa da Radiação Cósmica de Fundo [Créditos:NASA/WMAP Science Team].

3.2 Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Padrão da Cosmologia se baseia nas equações de Einstein (cap. 2), no tensor energia-momento para um fluido perfeito, e nas equações de estado dos constituintes do Universo, que veremos agora.

A partir desse momento usaremos unidades naturais, $8\pi G = c = 1$.

3.2.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A forma mais geral possível para a métrica, respeitando o Princípio Cosmológico, é conhecida como a métrica FRW (Friedmann-Robertson-Walker), que em coordenadas esféricas tem a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (3.7)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, k é a constante de curvatura, a qual pode representar três cenários possíveis: espacialmente plano se for nula ($k = 0$), esférico (fechado) se positiva ($k = 1$), ou hiperbólico (aberto) se negativa ($k = -1$).

A métrica FRW está escrita em um sistema de coordenadas comóvel, ou seja, as partículas não alteram suas coordenadas espaciais ao longo da expansão do Universo. Estas são apenas reescaladas (através do fator de escala $a(t)$) a cada instante que o Universo se expande. Assim, $x^\mu = t, r, \theta, \phi$ são as coordenadas (temporal e espaciais) medidas no sistema de coordenadas fixo de qualquer partícula do fluido cósmico.

Para um espaço-tempo curvo, temos a forma mais geral para um intervalo diferencial na equação que segue,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor métrico, e conseguimos determinar sua forma matricial, comparando (3.8) com (3.7), assim,

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Faremos aqui os índices gregos da métrica assumirem os valores (t, r, θ, ϕ) . Analisando a matriz acima vemos que as únicas componentes que não se anulam são $g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}$ e

$g_{\phi\phi}$.

3.2.2 O Tensor de Ricci e o Escalar de Curvatura

Primeiramente calculemos o Tensor de Ricci. Para isso, precisamos encontrar todos os elementos da conexão afim. Como já temos uma forma para a métrica, podemos encontrar os elementos da conexão afim utilizando a equação abaixo,

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right\}. \quad (3.9)$$

Lembrando da propriedade de simetria $\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}$, obtemos todas as componentes não nulas da conexão afim:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^{\theta} = \Gamma_{t\phi}^{\phi} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.13)$$

onde as derivadas com relação ao tempo são representadas por um ponto.

Agora podemos determinar o tensor de Ricci, lembrando de sua definição,

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} \quad (3.14)$$

e o da definição do tensor de curvatura (já com os índices contraídos),

$$R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\alpha\kappa}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}. \quad (3.15)$$

Da equação acima obtemos as componentes de $R_{\mu\kappa}$ para a métrica FRW, a saber,

$$R_{tt} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.16)$$

$$R_{rr} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (3.17)$$

$$R_{\theta\theta} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2, \quad (3.18)$$

$$R_{\phi\phi} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \quad (3.19)$$

sendo que as componentes restantes são nulas.

Contraindo o tensor de Ricci com a métrica, ou seja, fazendo

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (3.20)$$

obtemos,

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (3.21)$$

que é o escalar de curvatura para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

3.2.3 Tensor Energia-momento para um fluido perfeito

Agora que já obtemos as componentes do lado esquerdo das equações de Einstein (geometria), precisamos encontrar as componentes do lado direito, ou seja, o tensor energia-momento. Descreveremos $T_{\mu\nu}$ para um fluido perfeito, num sistema de coordenadas comóvel. Nesse caso a quadrivelocidade tem a forma $U^\mu = (1,0,0,0)$, e a normalização $U^\mu U_\mu = 1$. Substituindo esses resultados e a métrica de FRW, em

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (3.22)$$

obtemos,

$$T^\mu_\sigma = g_{\sigma\nu} T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (3.23)$$

que é o tensor energia momento para um fluido perfeito.

3.2.4 Equações do Modelo

Com os resultados obtidos nas subseções anteriores, estamos aptos a obter as equações de Einstein para este modelo. Assim, substituindo primeiramente as componentes temporais dos tensores vistos anteriormente na forma mais geral da equação de Einstein, ou seja, fazendo

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R - \Lambda g_{tt} = -T_{tt}, \quad (3.24)$$

obtemos a **equação de Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.25)$$

essa é uma das equações mais importantes em cosmologia, pois ela nos diz o quanto o Universo se expandiu devido ao modelo que utilizamos.

Fazendo o mesmo processo, mas agora com as componentes espaciais, obtemos

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -p \quad (3.26)$$

e combinando (3.25) com (3.26), encontramos a **equação da aceleração**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p - 2\Lambda). \quad (3.27)$$

Precisamos ter em mente, que a equação de Friedmann não tem utilidade se não tivermos uma equação da evolução temporal da densidade ρ dos constituintes do Universo. Essa relação deve envolver a pressão p do fluido, e é conhecida como **equação do fluido**. Podemos obtê-la, derivando a equação de Friedmann com relação ao tempo

e combinando com a equação da aceleração, assim,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.28)$$

É importante notar que as equações (3.25), (3.27) e (3.28) não são linearmente independentes, pois obtemos a equação do fluido a partir das equações da aceleração e de Friedmann. Note também a equação (3.28) nos diz como a densidade se comporta se soubermos a pressão p . Por fim, precisamos de uma equação de estado para a pressão, $p \equiv p(\rho)$, para saber que tipo de material preenche nosso Universo. Isso normalmente é feito usando-se equações do tipo barotrópicas, ou seja,

$$p = \omega\rho \quad (3.29)$$

sendo que ω caracteriza o constituinte. Com uso dessa relação, podemos substituir essa equação barotrópica na equação do fluido para obtermos uma relação $\rho = \rho(t)$ e combinando com a equação de Friedmann obtemos, por fim, uma forma para o fator de escala $a = a(t)$.

3.3 Parâmetros Observacionais

3.3.1 Parâmetro Densidade

Especificar a densidade do Universo é um tópico fundamental em cosmologia. Para tal estudo faz-se uso do parâmetro de densidade Ω . Começaremos encontrando a densidade crítica, que é obtida requerendo uma geometria plana, ou seja, fazendo $k = 0$ na equação de Friedmann (3.25), para um modelo sem energia escura,

$$\rho_c(t) = 3H^2 \quad (3.30)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble.

Note que a densidade crítica varia com o tempo, pois H também muda. Podemos encontrar a densidade do Universo atual, já que temos o valor do parâmetro de Hubble hoje [62], a saber,

$$\rho_c(t_0) \simeq 1,88 \cdot 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} = 2,78 \cdot 10^{11} M_\odot / (\text{Mpc})^3. \quad (3.31)$$

Normalmente não se usa a densidade de energia diretamente, mas sim uma grandeza relativa a ρ_c . Chamamos essa grandeza de parâmetro densidade e sua definição é a que segue,

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.32)$$

onde o índice i indica o constituinte em questão e, como a densidade é uma função do tempo, temos $\Omega = \Omega(t)$.

Podemos reescrever a equação de Friedmann (3.25), sem a constante cosmológica, da seguinte forma

$$\rho = 3H^2 + 3\frac{k}{a^2}, \quad (3.33)$$

e substituir na definição do parâmetro de densidade. Note que estamos substituindo a densidade total do Universo, e não a densidade de algum constituinte específico. Assim

$$\Omega_{total} = \frac{\rho_{total}}{\rho_c} = 1 - \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.34)$$

onde Ω_{total} é o parâmetro densidade total do Universo. Analisando essa equação percebemos que, se tivermos uma geometria plana, $k = 0$, teremos $\Omega_{total} = 1$ e, independentemente dos constituintes do nosso Universo, em qualquer instante de tempo t , Ω_{total} terá que ter seu mesmo valor.

Constituintes do Universo

Na subseção anterior, vimos como quantificamos a densidade total de matéria do Universo, através do parâmetro de densidade Ω_{total} . Entretanto, não queremos saber somente seu valor, mas como essa densidade se distribui entre os diferentes constituintes do Universo. Veremos agora dados de estudo dos principais constituintes trabalhados em cosmologia.

Matéria bariônica

Em Cosmologia, chamamos as partículas massivas responsáveis por toda matéria que conseguimos observar no Universo de Bárions (tanto os Hádrons como os Léptons). Delas que se originam estrelas, galáxias, planetas, etc. Podemos encontrar um valor aproximado para a densidade de matéria bariônica no Universo através do estudo da nucleossíntese, da observação e do cálculo aproximado da massa de todos os corpos celestes observáveis no Universo. Dessa forma,

$$\Omega_b^0 = \frac{\rho_b^0}{\rho_c^0} \simeq 0,045 \quad (3.35)$$

onde ρ_c^0 e ρ_b^0 são os valores atuais para a densidade crítica e bariônica, respectivamente.

Radiação

Para os fótons, temos o seguinte parâmetro de densidade

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0} \simeq 2,47 \cdot 10^{-5} \quad (3.36)$$

onde ρ_r^0 é a densidade de radiação atual.

Matéria Escura

Podemos calcular a quantidade aproximada de matéria no Universo indiretamente também. Uma maneira de se fazer isso é a análise do efeito gravitacional que a matéria exerce nas suas vizinhanças. Estudando essa dinâmica das galáxias espirais que os

astrônomos obtiveram a primeira evidência de matéria escura [67]. Hoje, físicos e astrônomos já possuem uma lista de evidências da matéria escura: curva de rotação das galáxias, movimento de galáxia e aglomerados, fluxos de raios-X em aglomerados, lentes gravitacionais, análise de anisotropias da radiação cósmica de fundo em microondas, etc. Muitos candidatos à matéria escura foram propostos, entre eles a matéria escura bariônica, buracos negros, matéria escura fria e matéria escura quente [68]. Entretanto, após alguns anos analisando esses candidatos teórica e observacionalmente, percebeu-se que a maioria deles não dá conta de explicar a maior parte desses efeitos gravitacionais observados. Com isso, temos que essa matéria deve ser não bariônica e fria. Assim, a maioria dos modelos trabalhados em Cosmologia atualmente se referem a CDM "*Cold Dark Matter*" (Matéria Escura Fria), a qual parece interagir muito fracamente com a matéria usual (bariônica). Devido a essa fraca interação, elas são denominadas WIMPS "*Weakly Interacting Massive Particle*" (Partículas Massivas de Fraca Interação). Mas mesmo com essas evidências, a matéria escura ainda é um problema para os físicos, visto que até hoje não se obteve nenhuma detecção dessas WIMPS e, por isso, existem atualmente grandes projetos internacionais voltados a detecção de matéria escura [69, 70].

Estudo dos efeitos gravitacionais em galáxias e aglomerados de galáxias indicam o parâmetro densidade total da matéria no Universo sendo

$$\Omega_m^0 \simeq 0,3. \quad (3.37)$$

Se descontarmos o Ω da matéria que conhecemos, concluímos que o parâmetro densidade de matéria escura deve ser,

$$\Omega_{me}^0 \simeq 0,24 \quad (3.38)$$

ou seja, a maior parte da matéria do Universo é desconhecida.

Energia Escura

Vamos agora ao maior problema. Estudos da dinâmica da matéria aglomerada vistos anteriormente, indicam $\Omega \simeq 0,3$. Esses estudos mostraram que existe muito mais matéria no Universo quando se faz estudos de forma indireta, do que da forma direta. Porém existem outros métodos indiretos para avaliar o conteúdo material que não citamos até agora. Um desses métodos é a análise da anisotropia da radiação cósmica de fundo (subseção 3.1.2). A partir dessa análise, tem-se que o parâmetro densidade do Universo deve ser $\Omega_{total} \sim 1$ [15]. Dessa forma, a anisotropia da radiação cósmica de fundo sugere que uma porção equivalente à $\Omega \simeq 0,7$ da matéria no Universo não se aglomera. Denominamos essa componente de energia escura, pois apesar dela participar da dinâmica do Universo, ela não se aglomera e nem pode ser detectada por meios indiretos [62]. Outro teste que indica a existência da energia escura é a determinação do parâmetro desaceleração atual. Essa análise se dá através de observações de supernovas do tipo Ia. Essas supernovas são usadas por possuírem uma luminosidade intrínseca padrão e, por apresentarem grande luminosidade, é possível observá-las a grandes distâncias. Esses estudos indicam que 70% da matéria do Universo não se aglomera, constituindo uma componente "suave" da matéria atual do Universo e que deve possuir pressão negativa [67].

3.3.2 Parâmetro Desaceleração

Para quantificar a variação da taxa de expansão do Universo e podermos comparar com dados observacionais, é definido o parâmetro desaceleração q , como segue

$$q \equiv -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (3.39)$$

O qual depende da pressão p , e densidade de energia ρ totais do Universo. Visto que o modelo padrão esperava que o Universo seguiria uma evolução de forma desacelerada,

a grandeza q foi definida com o sinal negativo da aceleração, para termos q positivo.

3.4 Problemas com o Modelo Padrão e a Solução Inflacionária

O Modelo Cosmológico Padrão(MCP), que descrevemos brevemente nesse capítulo, além de ser um modelo muito simples e coerente, tem sido muito bem sucedido em vários aspectos. Alguns exemplos de seus sucessos são:

- ★ O MCP descreve de forma muito natural o Universo em expansão.
- ★ Ele explica naturalmente a existência de uma temperatura do Universo, representada pela RCF, altamente isotrópica, consistente com o espectro de corpo negro à temperatura de $2,7K$.
- ★ E talvez o mais impressionante, prevê a abundância de elementos (hidrogênio até o lítio).

Porém, seus sucessos não devem ocultar seus problemas. Citaremos de forma sucinta dois dos principais problemas do MCP: o problema do horizonte e o problema da planura. Por fim, terminaremos a seção expondo a solução encontrada para tratar desses problemas, que se dá utilizando o modelo de inflação.

3.4.1 Alguns problemas do MCP:

O Problema do Horizonte

A radiação cósmica de fundo observada atualmente nos mostra que Universo atual encontra-se em estado de equilíbrio térmico, com uma temperatura aproximada de $2,7K$. O espectro dessa radiação é o mesmo em qualquer direção, salvo pequenas anisotropias da ordem de 10^{-5} [67]. O problema aparece quando voltamos no tempo, e percebemos que o horizonte da partícula (distância que a luz percorre desde o início do Universo até um tempo t) era muito pequeno no início do Universo. Sabe-se que as

regiões que emitiram os fótons que recebemos hoje em direções diametralmente opostas, estavam separadas por uma distância maior que o horizonte causal naquela época. Isso significa que elas não poderiam se encontrar em equilíbrio térmico hoje. Porém, já vimos que todas as regiões do céu observado exibem a mesma temperatura. Esse é o problema do horizonte.

O Problema da planura

Já comentamos anteriormente que observações atuais indicam $\Omega \sim 1,02$, ou seja, a densidade de energia do universo está muito próxima da densidade crítica, o que representaria uma geometria plana. Entretanto, essa é uma solução muito particular da equação de Friedmann, sendo (3.33) dependente do tempo. Se o Universo iniciou com Ω um pouco maior que 1, este tenderia a crescer sempre, e teríamos um Universo aberto. Da mesma forma, se analisarmos um começo de Universo com Ω um pouco menor que 1, este tenderia a decrescer mais ainda, e teríamos um Universo fechado. Assim vemos, que $\Omega \sim 1$ representa uma solução de equilíbrio instável, ou seja, para explicar esse valor atual de Ω , teríamos que fazer uma escolha muito particular do parâmetro de densidade no início do Universo e, devido á essa particularidade, essa escolha parece pouco natural. Esse é o problema da planura.

Para inteirar-se de outros problemas do MCP e entrar em mais detalhes destes aqui apresentados, ver [67, 71].

3.4.2 Modelo Inflacionário

Veremos agora que os problemas citados podem ser solucionados se houver uma fase de expansão acelerada no início do Universo. Um modo de termos uma solução desse tipo ($\ddot{a} > 0$), acontece quando a constante cosmológica domina o lado direito da equação (3.27). Nesse caso, a equação de Friedmann, para um Universo espacialmente plano, torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.40)$$

e obtemos uma solução para o fator de escala,

$$a = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0)\right). \quad (3.41)$$

Vemos que, nesse caso, o Universo se expande de forma exponencial. Cenários assim são denominados como solução de de Sitter.

Se utilizarmos esse cenário de Universo inflacionário para os primórdios do Universo, os principais problemas do MCP são resolvidos. Mostraremos aqui dois casos citados anteriormente.

Problema da Planura:

Começaremos reescrevendo (3.33), tal que

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (3.42)$$

Note que se substituirmos a solução (3.38) na equação acima, o lado direito da equação cai rapidamente a zero, devido ao crescimento exponencial do fator de escala, e assim temos

$$\Omega \rightarrow 1 \quad (3.43)$$

e resolvemos o problema da planura.

Problema do Horizonte

A distância percorrida pela luz, desde o Universo inicial até um tempo t , para a métrica de FRW, segue a seguinte equação,

$$d = a(t) \int^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.44)$$

Utilizando (3.41), podemos definir as regiões que podem estar em contato causal. Da métrica de FRW para a radiação temos, $0 = ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2$, ou seja, $dt^2 = a^2(t)dr^2$. Substituindo esse resultado, e (3.40), na equação (3.43), obtemos

$$d = a(t) \int^r dr = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0)\right) r. \quad (3.45)$$

Agora vemos que as regiões observadas atualmente, que aparentemente não estavam em contato causal, na verdade estavam causalmente conectadas, mas foram esticadas para fora do seu horizonte devido a forte expansão acelerada do Universo.

Vimos que se tivermos um modelo de inflação para o Universo inicial conseguimos solucionar os principais problemas do MCP. Entretanto, sabemos que esse período de expansão acelerada deve acabar após um curto período e dar espaço para era da radiação, e assim ocorrer a nucleossíntese. Se utilizarmos o modelo descrito acima, fazendo uso da constante cosmológica Λ , não conseguimos parar a expansão, justamente por Λ ser uma constante, pois enquanto todas as outras formas de energia implicam que a densidade decresce com a expansão, Λ continuaria a dominar sobre a matéria e radiação, e a expansão não chegaria a um fim.

Uma solução elegante e bastante explorada pelos cosmólogos é a utilização de campos escalares como possíveis responsáveis para a expansão inicial do Universo, que nesses casos passam a ser conhecidos como inflaton [68]. Tais campos podem se originar da quebra espontânea de simetria em teorias fundamentais.

Podemos fazer o inflaton variar temporalmente se o potencial variar lentamente [72], e o termo potencial dominar sobre o termo cinético durante um certo tempo. Assim, o Universo é inicialmente dominado pelo inflaton, o qual inicialmente se encontra em estado de falso vácuo, com $p = -\rho = -V_0$. Então acontece uma transição de fase e o inflaton atinge o estado de vácuo verdadeiro, encerrando assim a fase inflacionária. A expansão acelerada faz com que o Universo diminua sua temperatura. Porém, ao

atingir o mínimo de potencial, a energia cinética não é mais desprezível, o que faz com que o inflaton sofra oscilações amortecidas, reaquecendo o Universo. Após isso o MCP passa a descrever corretamente o Universo.

3.4.3 Acoplamento ao Campo Gravitacional

O acoplamento de um campo qualquer φ ao campo gravitacional pode se dar de duas maneiras: acoplamento mínimo, quando o campo φ não está acoplado ao escalar de curvatura R , e não-mínimo quando o campo está acoplado ao escalar de curvatura.

Na prática o que se faz é o seguinte:

$$\text{Acoplamento mínimo: } \mathcal{L} = 1/2R + \mathcal{L}_\varphi$$

$$\text{Acoplamento não-mínimo: } \mathcal{L} = F(\varphi)R + \mathcal{L}_\varphi,$$

onde R é o escalar de curvatura, φ o campo qualquer, \mathcal{L}_φ a lagrangiana que o descreve, e $F(\varphi)$ é uma função genérica que descreve o acoplamento não mínimo de φ com o campo gravitacional.

3.4.4 A atual expansão acelerada do Universo

Até o final do século passado, acreditava-se que o Universo passou pela fase inflacionária, que deu lugar para a fase da radiação, onde os elementos leves foram criados, e após isso a matéria começou a se aglomerar, e com isso o Universo foi dominado pela matéria, o que fez ele entrar numa fase de expansão desacelerada, a qual estaríamos vivenciando atualmente.

Entretando, em 1998, observações de supernovas do tipo Ia, que são conhecidas como as velas padrões do Universo, por suas medidas serem de alta precisão, acabaram fazendo os cosmólogos rever seus conceitos sobre a atual expansão do Universo. Essas medidas mostram que o Universo se encontra atualmente numa fase de expansão acelerada. Mas segundo o modelo padrão, se o Universo é dominado pela matéria, e por isso deveria se desacelerar, com isso voltamos a busca por um constituinte no Universo,

com pressão negativa, que faça o Universo se expandir de forma acelerada.

A primeira alternativa novamente veio a ser a constante cosmológica. Porém, existem vários problemas em usarmos Λ como a 'energia do vácuo' que acelera o Universo. Um deles aparece quando calculamos sua densidade de energia. Esse cálculo da energia do vácuo quântico, comparado com a densidade de energia associada à constante cosmológica, necessário para explicar a aceleração do Universo, nos leva uma discrepância de 120 ordens de grandeza entre o valor predito e o observado [67].

Além desse grande problema, ainda temos a questão da coincidência cósmica. Se de fato a constante cosmológica existe, por que somente agora ela começou a dominar sobre a matéria? Se os valores previstos estiverem corretos, isso significaria que a aceleração do Universo teria começado muito antes e isso comprometeria a formação de galáxias e aglomerados de galáxias, o que vai contra o Universo observado.

Para contornar esses problemas que aparecem com a constante cosmológica, modelos alternativos foram criados, como a cosmologia de branas, táquions da teoria de cordas, equações de estados exóticas com gás de Chaplygin, campos escalares, entre outras.

Nesse trabalho, vamos explorar campos fermiônicos como possíveis responsáveis para explicar os cenários do Universo que descrevemos nesse capítulo.

Capítulo 4

Simetria de Noether

Nesse capítulo será enunciado o Teorema de Noether e a simetria associada a ele, a qual usaremos para determinar as densidades de potencial e os acoplamentos com o campo gravitacional do modelo descrito no próximo capítulo. Assim teremos um primeiro princípio para o modelo, ao invés de propor as formas das funções da ação de maneira *ad hoc*.

4.1 Teorema de Noether

Um assunto de grande importância em Física são as propriedades de simetria da ação, as quais implicam quantidades conservadas. Muitos físicos e matemáticos dedicaram seus estudos a esse tema. Uma grande contribuidora nesse contexto foi a matemática e física alemã Emmy Noether, que no começo do século passado formulou o teorema que futuramente levaria seu nome.

Assim, tomemos a lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, \lambda)$, onde as coordenadas generalizadas são representadas por q_i , as quais são parametrizadas por λ , e o ponto representa derivada com relação a λ . As quantidades conservadas de que falamos são quantidades físicas do sistema mecânico descrito por \mathcal{L} que não mudam seu valor durante a evolução do

sistema.

Definimos matematicamente essa constante de movimento como sendo uma função f das coordenadas generalizadas q_i , de suas respectivas derivadas \dot{q}_i e, possivelmente, do parâmetro λ , a qual permanece constante durante a evolução do sistema, ou seja

$$f(q_i, \dot{q}_i, \lambda) = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{d\lambda} = 0. \quad (4.1)$$

As constantes de movimento fornecem equações diferenciais de primeira ordem que podem ajudar na procura de soluções analíticas para as equações de movimento. Portanto, é muito importante termos condições gerais que garantam a existência dessas constantes de movimento.

Da dinâmica lagrangiana, sabemos que a existência de uma simetria (invariância sob transformações de coordenadas) implica na existência de quantidades conservadas.

Consideremos então a seguinte transformação

$$q_i(\lambda) \longrightarrow q'_i(\lambda') = q_i(\lambda) + \eta \alpha_i(q(\lambda), \lambda), \quad (4.2)$$

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = \lambda + \eta \beta(q(\lambda), \lambda), \quad (4.3)$$

onde α_i e β são funções conhecidas de $(n + 1)$ variáveis, funções das n coordenadas generalizadas e do parâmetro λ , e η é um parâmetro infinitesimal arbitrário.

A ação que descreve a dinâmica considerada é invariante sob as transformações acima se

$$\Delta S = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \mathcal{L}(q'_i(\lambda'), \dot{q}'_i(\lambda'), \lambda') d\lambda' - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}(q_i(\lambda), \dot{q}_i(\lambda), \lambda) d\lambda = 0. \quad (4.4)$$

Verificando (4.4) sob as transformações (4.2) e (4.3), sabemos que existe uma quantidade conservada associada a \mathcal{L} . A garantia dessa relação entre simetria e quantidade conservada é devida ao *Teorema de Noether* [73].

Para um sistema mecânico com n graus de liberdade, se a ação é invari-

ante sob a transformação (4.2)-(4.3), a quantidade

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \beta - \alpha_i) - \mathcal{L} \beta \quad (4.5)$$

é uma constante de movimento.

4.2 Condição de existência de Simetria de Noether

Trataremos aqui de simetrias pontuais [74]. Consideremos então a transformação pontual

$$\dot{Q}_i(\mathbf{q}) = \frac{\partial Q^i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (4.6)$$

onde $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ são as coordenadas generalizadas, e $J = \|\partial Q^i / \partial q_j\|$ é o jacobiano de transformação de coordenadas, cujo determinante é suposto não nulo.

A transformação pontual pode depender de vários parâmetros, mas assumiremos aqui $Q^i = Q^i(\mathbf{q}, \zeta)$. Ou seja, a transformação depende somente de um parâmetro ζ . Para valores infinitesimais de ζ , a transformação é gerada por um campo vetorial: consideremos, no momento, $\zeta \partial / \partial x$ a representação de uma translação infinitesimal ao longo do eixo x , e $\zeta [x(\partial / \partial y) - y(\partial / \partial x)]$ sendo uma rotação infinitesimal em torno do eixo z . Portanto, a transformação (4.6) é representada pelo campo vetorial abaixo, chamado *gerador infinitesimal de simetria*,

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad (4.7)$$

o qual é definido no espaço tangente ao ponto da transformação. Os α^i são os coeficientes do gerador de simetria e são funções somente das coordenadas generalizadas.

Para testar a invariância de uma função $f = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sob a transformação \mathbf{X} , é preciso verificar se $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ obedece a seguinte condição

$$L_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f = \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{d\lambda} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad (4.8)$$

onde $L_{\mathbf{X}}f$ é a derivada de Lie de f com respeito a \mathbf{X} . Se a condição (4.8) for satisfeita, temos que f é invariante sob a translação das coordenadas q_i e dizemos que \mathbf{X} é a simetria associada a f .

Para mais detalhes, ver [74, 75].

Capítulo 5

Espinores em espaço tempo curvo

Neste capítulo mostraremos primeiramente a definição de um espinor de Dirac clássico, o qual será usado em nosso modelo com campos fermiônicos e, tendo em vista que trabalhamos na presença de fontes gravitacionais, na segunda seção deste capítulo fazemos a generalização da lagrangiana de Dirac para espaço tempo curvo.

5.1 Espinores Clássicos

Um espinor de Dirac ψ é um objeto de quatro componentes que obedece a seguinte lei de transformação [76]:

$$\psi'(x') = \exp \left[\frac{1}{2} \lambda_{ab} \sigma^{ab} \right] \psi(x), \quad (5.1)$$

onde λ_{ab} são os parâmetros da transformação de Lorentz e σ^{ab} são os geradores da representação espinorial do Grupo de Lorentz, definidos como

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (5.2)$$

Na equação (5.2), os colchetes significam o comutador entre γ^a e γ^b e os γ^a são

matrizes quatro por quatro que satisfazem a álgebra de Clifford,

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} \equiv \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}. \quad (5.3)$$

Na representação de Pauli-Dirac, as matrizes γ^a se apresentam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com $\gamma^5 = -i\sqrt{-\eta}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, onde η é o determinante da matriz de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Em uma abordagem canônica da Teoria Quântica de Campos [77], espinores são operadores que obedecem a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - m\hat{\psi} = 0, \quad (5.4)$$

onde, por simplicidade, estamos considerando um férmion massivo, sendo m a massa do férmion, em espaço tempo plano. Trabalhando na representação de Heisenberg, onde operadores são dependentes do tempo e estados independentes do tempo, vamos interpretar

o espinor clássico ψ_{cl} como o valor esperado de um espinor em um estado apropriado $|s\rangle$,

$$\psi_{cl} \equiv \langle s | \hat{\psi} | s \rangle \equiv \langle \hat{\psi} \rangle. \quad (5.5)$$

Se tomarmos o valor esperado da equação (5.4), vemos que o espinor clássico satisfaz a equação de Dirac, isto é,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{cl} - m\psi_{cl} = 0. \quad (5.6)$$

Note que o valor esperado de um espinor em um estado físico é um número complexo, e não um número grassmanniano [37].

5.2 Generalização da Lagrangiana de Dirac

Vamos agora à generalização da Lagrangiana de Dirac para espaço tempo curvo. Assim, partimos de um cenário já conhecido, sem aceleração, onde os campos se transformam de um referencial inercial a outro segundo as transformações de Lorentz:

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (5.7)$$

$$V'^\alpha(x') = \Lambda_\beta^\alpha V^\beta(x), \quad (5.8)$$

$$T'^{\alpha\beta}(x') = \Lambda_\sigma^\alpha \Lambda_\nu^\beta T^{\sigma\nu}(x), \quad (5.9)$$

onde Λ_β^α são as matrizes de Lorentz e (5.7), (5.8) e (5.9) representam, respectivamente, as leis de transformação para um campo escalar, vetorial e tensorial. Além disso, o Grupo de Lorentz admite uma representação espinorial, onde um espinor $\psi(x)$ obedece a lei de transformação (5.1).

Ainda se tratando do espaço tempo plano, temos a lagrangiana que governa o campo

fermiônico

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi] - m \bar{\psi} \psi - V, \quad (5.10)$$

conhecida como Lagrangiana de Dirac. Em (5.10) m é massa do férmion, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o adjunto do espinor ψ e V a densidade de pontencial de auto interação do campo fermiônico.

Utilizando do princípio da covariância geral, podemos estudar os campos acima na presença de um campo gravitacional. Para tal, fazemos as seguintes generalizações:

- I) O tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é substituído pela métrica geral $g_{\mu\nu}$;
- II) O Grupo de Lorentz é generalizado para o grupo de transformação geral de coordenadas, isto é: $\Lambda_\beta^\alpha \rightarrow \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}$, onde ξ^α representa as coordenadas do referencial inercial local e x^β as coordenadas do referencial não inercial;
- III) As derivadas ordinárias ∂_ν são trocadas por derivadas covariantes D_ν .

Informações sobre a evolução temporal do espinor ψ são extraídas da equação Dirac, a qual é derivada por meio da transformação dos espinores do Grupo de Lorentz [78]. Porém, para generalizar essa equação para o espaço tempo curvo, não podemos simplesmente aplicar II) à equação de Dirac, pois a transformação geral de coordenadas não admite representação espinorial.

Para suprir este problema, o formalismo das tetradas é requerido na teoria para estudar férmions em espaço tempo curvo [79]. A essência desse formalismo está intimamente relacionada ao princípio da equivalência. Associa-se a cada ponto do espaço tempo um sistema localmente inercial ξ^μ . Em termos de ξ^μ , o tensor métrico é simplesmente $\eta_{\mu\nu}$ e, em termos de um sistema de coordenadas mais geral, o tensor métrico será mais complicado. Entretanto, estará relacionado à $\eta_{\mu\nu}$ por

$$g_{\mu\nu} = V_\mu^\alpha V_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta}, \quad (5.11)$$

onde

$$V_{\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \quad (5.12)$$

são as chamadas tetradas ou vierbeins. Note que o índice α está associado ao sistema de coordenadas inercial ξ^{α} , enquanto μ está relacionado ao sistema de coordenadas x^{μ} .

Sob uma transformação de Lorentz, as tetradas se transformam da seguinte forma

$$V_{\mu}^{\alpha} = \Lambda_{\epsilon}^{\alpha} V_{\mu}^{\epsilon} \quad (5.13)$$

ou seja, se transformam como um vetor contravariante. E sob transformação geral de coordenadas, a lei de transformação é a de um vetor covariante, a saber,

$$V_{\mu}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\epsilon}} V_{\mu}^{\epsilon}. \quad (5.14)$$

Contraindo um quadrivetor com uma tetrada,

$$A_{\mu} = V_{\mu}^{\alpha} A_{\alpha}, \quad (5.15)$$

temos um objeto que se transforma como uma coleção de quatro escalares sob transformação geral de coordenadas e como um quadrivetor sob transformação de Lorentz. Utilizando o formalismo das tetradas, podemos transformar tensores gerais em tensores de Lorentz locais, transferindo a dependência espaço-temporal para as tetradas. Assim, escrevemos os espinores inicialmente em um referencial localmente inercial, e por meio das tetradas os reescrevemos em um referencial na presença de um campo gravitacional.

Nesse novo sistema de referência, os geradores da equação (5.2) devem depender da posição espaço-temporal. Assim

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}], \quad (5.16)$$

onde foi definido um novo gama,

$$\Gamma^\mu = V_\nu^\mu \gamma^\nu, \quad (5.17)$$

cujas componentes generalizam a álgebra de Clifford,

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (5.18)$$

Para completar a generalização para um espaço tempo curvo, ainda precisamos fazer a substituição das derivadas ordinárias por derivadas covariantes, as quais são definidas como:

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - \Omega_\mu) \psi, \quad (5.19)$$

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \bar{\psi} \Omega_\mu, \quad (5.20)$$

onde Ω_μ é a conexão de spin, definida por

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4} g_{\sigma\nu} [\Gamma_{\mu\lambda}^\nu - V_b^\nu (\partial_\mu V_\lambda^b)] \Gamma^\sigma \Gamma^\lambda. \quad (5.21)$$

Com isto, as generalizações I), II) e III) são satisfeitas e podemos generalizar a lagrangiana de Dirac para um espaço tempo curvo, a saber,

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi - V. \quad (5.22)$$

Podemos também escrever a nova ação:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi - V \right\}. \quad (5.23)$$

Partindo de (5.23) podemos extrair informações importantes sobre os campos, sendo que agora estamos trabalhando na presença de um campo gravitacional. Assim, variando a ação com relação ao tensor métrico, obtemos

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\bar{\psi}\Gamma^\mu D^\nu\psi + \bar{\psi}\Gamma^\nu D^\mu\psi - D^\nu\bar{\psi}\Gamma^\mu\psi - D^\mu\bar{\psi}\Gamma^\nu\psi] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (5.24)$$

que é o tensor energia momento para o campo fermiônico em um espaço tempo curvo.

Variando a ação (5.23) com relação a $\bar{\psi}$ e ψ , obtemos

$$i\Gamma^\mu D_\mu\psi - m\psi - \frac{dV}{d\bar{\psi}} = 0, \quad (5.25)$$

$$iD_\mu\bar{\psi}\Gamma^\mu + m\bar{\psi} + \frac{dV}{d\psi} = 0, \quad (5.26)$$

que representam a equação de Dirac e sua adjunta na presença de um campo gravitacional.

Capítulo 6

Campo fermiônico acoplado ao campo gravitacional

A busca por constituintes responsáveis pela atual expansão acelerada do Universo tornou-se uma pesquisa de grande importância em Cosmologia atualmente. Campos fermiônicos como fonte dessa expansão acelerada vêm sendo estudados há algum tempo e resultados muito interessantes os quais indicam que tais campos podem produzir regimes acelerados do Universo, representando a constante cosmológica no presente e o inflaton na era da inflação.

Tendo em vista sua importância em Cosmologia, neste capítulo estudaremos campos fermiônicos acoplados mínima e não minimante ao campo gravitacional. As formas da densidade de potencial e da função acoplada ao escalar de curvatura serão buscadas através da Simetria de Noether, a qual será aplicada à lagrangiana pontual, derivada da ação geral do problema. Consideramos um Universo homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, constituído por um campo fermiônico, um campo de matéria e um campo de radiação. As equações de campo para evolução do Universo seguem das equações de Einstein e de Dirac, que são resolvidas via Simetria de Noether.

6.1 Ação geral para o campo fermiônico

A partir da generalização da ação de Dirac para um espaço tempo curvo (Capítulo 5), escrevemos a ação para um campo fermiônico acoplado não-minimamente ao campo gravitacional,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\Psi) R + \frac{i}{2} [\bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - (\bar{D}_\mu \bar{\psi}) \Gamma^\mu \psi] - V(\Psi) \} + S_m + S_r \quad (6.1)$$

onde a função F e a densidade de potencial de auto interação do campo fermiônico V são funções apenas do pseudo-escalar $\Psi = \bar{\psi} \gamma^5 \psi$, ou seja, $F = F(\Psi)$ e $V = V(\Psi)$. Os espinores são apenas funções do tempo, $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t)$ e $\psi = \psi(t)$, e $S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x$ e $S_r = \int \mathcal{L}_r \sqrt{-g} d^4x$ representam a ação para os campos de matéria e de radiação, respectivamente.

Nesse trabalho serão analisados dois casos. Primeiramente um caso particular da ação geral (6.1), onde desprezamos a contribuição da matéria e da radiação, isto é, fazemos $S_m = 0$ e $S_r = 0$ e, posteriormente, o caso mais geral, onde a radiação e a matéria estão presentes.

6.2 Lagrangiana pontual e equações de campo para o caso particular

Fazendo $S_m = 0$ e $S_r = 0$ na ação (6.1) e integrando por partes, para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana, chegamos à Lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2 \dot{a} \dot{\Psi} F' + a^3 \frac{i}{2} (\dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi}) + a^3 V, \quad (6.2)$$

onde adotamos a seguinte convenção: derivadas com relação à Ψ são representadas por uma linha e derivadas com relação ao tempo são representadas por um ponto.

Agora, para encontrar as equações de Dirac para o campo espinorial e seu adjunto acoplados ao campo gravitacional, utilizaremos as equações de Euler-Lagrange com relação à ψ e $\bar{\psi}$, aplicadas a (6.2). Delas obtemos

$$\dot{\bar{\psi}} + \frac{3}{2}H\bar{\psi} - iV'\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0 + i6F'\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0(\dot{H} + 2H^2) = 0, \quad (6.3)$$

$$\dot{\psi} + \frac{3}{2}H\psi + iV'\gamma^0\gamma^5\psi - i6F'\gamma^0\gamma^5\psi(\dot{H} + 2H^2) = 0. \quad (6.4)$$

Usando as equações de Euler-Lagrange para o fator de escala, chegamos na equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho_f + 3p_f}{12F}, \quad (6.5)$$

onde

$$\rho_f = V - 6HF'\dot{\Psi} \quad (6.6)$$

e

$$p_f = [V' - 6F'(\dot{H} + 2H^2)]\Psi - V + 2(\ddot{\Psi}F' + \dot{\Psi}^2F'' + 2\dot{\Psi}F'H) \quad (6.7)$$

são, respectivamente, as equações para a densidade de energia e pressão dos férmions.

Para obter a equação de Friedmann, impomos que a função energia associada à (6.2) seja zero:

$$E_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \dot{a} + \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \mathcal{L} = 0. \quad (6.8)$$

Fazendo essa imposição, chegamos a

$$H^2 = \frac{V - 6HF'\dot{\Psi}}{6F} = \frac{\rho_f}{6F}, \quad (6.9)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ é o parametro de Hubble.

6.3 Imposição da Simetria de Noether

Escrevendo o espinor ψ seu adjunto $\bar{\psi}$ em componentes: $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ e $\bar{\psi} = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger, -\psi_4^\dagger)$, podemos reescrever a Lagrangiana (6.2) como

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2\dot{a}F' \sum_{i,j=1}^4 (\psi_i^\dagger \psi_j + \psi_i^\dagger \dot{\psi}_j) \varepsilon_{ij} + \frac{i}{2} a^3 \sum_{i=1}^4 (\dot{\psi}_i^\dagger \psi_i - \psi_i^\dagger \dot{\psi}_i) + a^3 V, \quad (6.10)$$

onde foi introduzido o símbolo ε_{ij} , que assume os seguintes valores

$$\varepsilon_{ij} = -1, \text{ quando } \varepsilon_{13} \text{ ou } \varepsilon_{24},$$

$$\varepsilon_{ij} = +1, \text{ quando } \varepsilon_{31} \text{ ou } \varepsilon_{42},$$

$$\varepsilon_{ij} = 0, \text{ para as possibilidades restantes.}$$

Agora aplicaremos a condição para a simetria de Noether ao nosso modelo, conforme o que foi exposto no Capítulo 4. A Simetria de Noether é satisfeita pela lagrangiana (6.10) se

$$L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = \mathbf{X} \mathcal{L} = 0, \quad (6.11)$$

onde \mathbf{X} é o gerador infinitesimal de simetria definido para as variáveis do nosso problema, a saber,

$$\mathbf{X} = C_0 \frac{\partial}{\partial a} + \dot{C}_0 \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \sum_{l=1}^4 (C_l \frac{\partial}{\partial \psi_l^\dagger} + D_l \frac{\partial}{\partial \psi_l} + \dot{C}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l^\dagger} + \dot{D}_l \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_l}), \quad (6.12)$$

e $L_{\mathbf{X}}$ é a derivada de Lie de \mathcal{L} com relação ao vetor \mathbf{X} , cujos parâmetros C_0 , C_l e D_l são funções de $(a, \psi_l$ e $\psi_l^\dagger)$.

Aplicando (6.12) a (6.10), teremos um polinômio em $\dot{a}\psi_l^\dagger$, $\dot{a}\psi_l$, \dot{a}^2 , ψ_l^\dagger , ψ_l , $\psi_l^\dagger \dot{\psi}_m$, $\dot{\psi}_l^\dagger \psi_m^\dagger$, $\dot{\psi}_l \dot{\psi}_m$ e \dot{a} , que deve se anular. Com essa condição de nulidade para cada termo que

envolve derivadas temporais, chegamos ao seguinte sistema de 55 equações diferenciais acopladas

$$\begin{aligned}
& F' \psi_j \varepsilon_{lj} (2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a}) + 2F' \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l^\dagger} + aF'' \psi_j \varepsilon_{lj} \sum_{i,k=1}^4 (C_i \psi_k + \psi_i^\dagger D_k) \varepsilon_{ik} \\
& + aF' [D_j \varepsilon_{lj} + \sum_{i,k=1}^4 (\frac{\partial C_i}{\partial \psi_l^\dagger} \psi_k + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_k}{\partial \psi_l^\dagger}) \varepsilon_{ik}] = 0, \tag{6.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F' \psi_j^\dagger \varepsilon_{jl} (2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a}) + 2F' \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l} + aF'' \psi_j^\dagger \varepsilon_{jl} \sum_{i,k=1}^4 (C_i \psi_k + \psi_i^\dagger D_k) \varepsilon_{ik} \\
& + aF' [C_j \varepsilon_{jl} + \sum_{i,k=1}^4 (\frac{\partial C_i}{\partial \psi_l} \psi_k + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_k}{\partial \psi_l}) \varepsilon_{ik}] = 0, \tag{6.14}
\end{aligned}$$

$$C_0 F + 2aF \frac{\partial C_0}{\partial a} + aF' \sum_{i,j=1}^4 (C_i \psi_j + \psi_i^\dagger D_j) \varepsilon_{ij} + a^2 F' \sum_{i,j=1}^4 (\frac{\partial C_i}{\partial a} \psi_j + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_j}{\partial a}) \varepsilon_{ij} = 0, \tag{6.15}$$

$$3C_0 \psi_l + aD_l + a \sum_{i=1}^4 (\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial \psi_l^\dagger} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial \psi_l^\dagger}) = 0, \tag{6.16}$$

$$-3C_0 \psi_l^\dagger - aC_l + a \sum_{i=1}^4 (\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial \psi_l} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial \psi_l}) = 0, \tag{6.17}$$

$$F' (\psi_i^\dagger \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} + \psi_j \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i}) \varepsilon_{ij} = 0 \quad F' (\psi_j \frac{\partial C_0}{\partial \psi_m^\dagger} + \psi_m \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger}) \varepsilon_{ij} = 0, \tag{6.18}$$

$$F' (\psi_i^\dagger \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l} + \psi_l \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i}) \varepsilon_{ij} = 0 \quad \sum_{i=1}^4 (\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial a} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial a}) = 0. \tag{6.19}$$

Dos termos remanescetes, obtemos uma equação diferencial para a densidade de potencial

$$3C_0V + aV' \sum_{i,j=1}^4 (C_i\psi_j + \psi_i^\dagger D_j)\varepsilon_{ij} = 0. \quad (6.20)$$

O sistema de equações (6.13)-(6.20) será analisado a seguir. Das equações (6.18) e (6.19)₁ inferimos que existem duas possibilidades para o acoplamento, $F' = 0$ ou $F' \neq 0$. Analisamos essas duas possibilidades separadamente.

6.3.1 Caso $F' = 0$:

Com $F' = 0$ temos $F = \text{constante}$, e as equações (6.18) e (6.19)₁ são satisfeitas automaticamente. Contudo, de (6.13) e (6.14) constatamos que C_0 é função apenas de a . Da equação (6.15) determinamos $C_0 = C_0(a)$, cuja forma é

$$C_0 = \frac{\lambda}{a^{1/2}}, \quad (6.21)$$

onde λ é uma constante. Da equação (6.19)₂, juntamente com (6.16) ou (6.17), encontramos uma expressão para C_j e D_j

$$C_j = -\frac{3}{2} \frac{\lambda\psi_j^\dagger}{a^{3/2}} + \beta\psi_i^\dagger\varepsilon_{ij}, \quad D_j = -\frac{3}{2} \frac{\lambda\psi_j}{a^{3/2}} + \beta\psi_i\varepsilon_{ij}, \quad (6.22)$$

onde β é uma constante.

Por fim, de (6.20) obtemos a densidade de potencial

$$V = \alpha\Psi, \quad (6.23)$$

onde α é uma constante. Com isso, concluímos que existe uma simetria de Noether para $F' = 0$, tal que

$$\begin{array}{l}
 F = \text{constante} \quad V = \alpha\Psi \quad C_0 = \frac{\lambda}{a^{1/2}} \\
 C_j = -\frac{3}{2} \frac{\lambda\psi_j^\dagger}{a^{3/2}} + \beta\psi_i^\dagger\varepsilon_{ij} \quad D_j = -\frac{3}{2} \frac{\lambda\psi_j}{a^{3/2}} + \beta\psi_i\varepsilon_{ij}
 \end{array}$$

6.3.2 Caso $F' \neq 0$:

Será analisado agora o caso em que a função F não é uma constante, ou seja $F = F(\Psi)$.

Para tal, primeiramente vemos a equação (6.20) pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{i,j=1}^4 (C_i\psi_j + \psi_i^\dagger D_j)\varepsilon_{ij} = -3 \frac{C_0}{a} \frac{V}{V'}. \quad (6.24)$$

Derivando a equação acima com relação ao fator de escala, temos

$$\sum_{i,j=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial a} \psi_j + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_j}{\partial a} \right) \varepsilon_{ij} = \frac{3}{a} \frac{V}{V'} \left(\frac{C_0}{a} - \frac{\partial C_0}{\partial a} \right). \quad (6.25)$$

Substituindo (6.24) e (6.25) na equação (6.15), e lembrando que F e V são funções somente de Ψ , obtemos

$$\frac{a}{C_0} \frac{\partial C_0}{\partial a} = \frac{FV'}{3F'V - 2FV'} = k, \quad (6.26)$$

onde k é uma constante.

Analisando as equações (6.18) e (6.19)₁ para $F' \neq 0$, percebemos que C_0 deve ser constante em relação a ψ_j^\dagger e ψ_j , ou seja, $C_0 = C_0(a)$. Visto isso, diretamente de (6.26) obtemos uma solução para C_0

$$C_0 = \lambda a^k, \quad (6.27)$$

onde λ é uma constante.

Da mesma maneira que fizemos no caso anterior, combinando a equação (6.19)₂ com

(6.16) ou (6.17) encontramos uma expressão para C_j e D_j , respectivamente,

$$C_j = -\frac{3}{2}\lambda a^{k-1}\psi_j^\dagger + \beta\psi_i^\dagger\varepsilon_{ij}, \quad D_j = -\frac{3}{2}\lambda a^{k-1}\psi_j + \beta\psi_i\varepsilon_{ij}. \quad (6.28)$$

Da equação (6.20), obtemos a densidade de potencial

$$V = \alpha\Psi, \quad (6.29)$$

que, assim como no caso anterior, é uma função linear em Ψ , com α sendo uma constante.

Das equações (6.26) e (6.29), obtemos uma expressão de lei de potência para F

$$F = \omega\Psi^p, \quad (6.30)$$

com ω sendo uma constante e $p = \frac{1+2k}{3k}$ para a equação (6.15). Sabemos que essa lei de potência para F deve satisfazer não somente (6.15) como também as equações (6.13) e (6.14), e p não necessariamente tem a mesma forma para todas as equações. Visto isso, descobrimos que para (6.13) e (6.14) temos $p = \frac{2+k}{3}$. Como consequência, obtemos duas relações para os expoentes, através das quais determinaremos k e p tal que satisfaçam todas as equações do sistema. Isto é, através de

$$3pk = 1 + 2k,$$

$$3p = 2 + k,$$

obtemos

$$k = 1, p = 1,$$

$$k = -1, p = 1/3.$$

Com isso, vemos que para $F' \neq 0$ temos duas simetrias de Noether, tais que

Simetria 1) para $k = 1$ e $p = 1$

$$\begin{aligned} F &= \omega\Psi & V &= \alpha\Psi & C_0 &= \lambda a \\ C_j &= -\frac{3}{2}\lambda\psi_j^\dagger + \beta\psi_i^\dagger\varepsilon_{ij} & D_j &= -\frac{3}{2}\lambda\psi_j + \beta\psi_i\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

Simetria 2) para $k = -1$ e $p = 1/3$

$$\begin{aligned} F &= \omega\Psi^{1/3} & V &= \alpha\Psi & C_0 &= \frac{\lambda}{a} \\ C_j &= -\frac{3}{2}\frac{\lambda\psi_j^\dagger}{a^2} + \beta\psi_i^\dagger\varepsilon_{ij} & D_j &= -\frac{3}{2}\frac{\lambda\psi_j}{a^2} + \beta\psi_i\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

6.4 Soluções das Equações de Campo

Das equações de Dirac para o campo espinorial e seu adjunto acopladas ao campo gravitacional, (6.3) e (6.4), obtemos uma equação diferencial para Ψ

$$\frac{d\Psi}{dt} + 3\frac{\Psi}{a}\frac{da}{dt} = 0, \quad (6.31)$$

cuja solução em termos de "a" é

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^3}, \quad (6.32)$$

sendo Ψ_0 uma constante.

Com esse resultado, podemos resolver a equação de Friedmann diretamente, visto que a mesma é função somente de Ψ , que por sua vez só depende de a .

6.4.1 Caso $F' = 0$

Aqui temos $F = \text{constante}$. Fazendo $F = 1/2$ (que segue da normalização da ação e da escolha de unidades naturais), temos um acoplamento mínimo do campo fermiônico

ao campo gravitacional. Substituindo o potencial $V = \alpha\Psi = \alpha\Psi_0/a^3$ em (6.6) e (6.9) e resolvendo a equação de Friedmann, chegamos à seguinte solução para a evolução temporal do fator de escala

$$a(t) = [\Omega(t - t_0)]^{2/3}, \quad (6.33)$$

onde $\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\alpha\Psi_0}{3}}$.

Percebemos que a forma dessa solução (potência 2/3 em t), descreve uma expansão desacelerada que, assim como no modelo Padrão, representa um Universo dominado por matéria. Com isso, concluímos que se quisermos que a simetria de Noether seja satisfeita, o acoplamento mínimo do campo fermiônico ao campo gravitacional não pode produzir uma expansão acelerada para o Universo.

Das equações (6.6) e (6.7) chegamos a uma forma para a densidade e a pressão dos férmions, a saber,

$$\rho_f = \frac{\alpha\Psi_0}{a^3}, \quad p_f = 0. \quad (6.34)$$

E assim vemos que o campo fermiônico com $F' = 0$ pode representar um campo de matéria sem pressão, isto é, um campo de matéria comum.

6.4.2 Caso $F' \neq 0$

Substituindo (6.6) em (6.9), para as formas do acoplamento e da densidade de potencial dadas pela simetria 1), obtemos a seguinte forma para o fator de escala

$$a(t) = e^{\Lambda(t-t_0)}, \quad (6.35)$$

onde $\Lambda = \sqrt{\frac{-\alpha}{12\omega}}$.

Aqui vemos uma solução do tipo exponencial, o que significa que (6.35) descreve

um Universo em expansão acelerada, isto é, um cenário inflacionário.

Através de (6.6) e (6.7) obtemos a densidade de energia e pressão dos férmions

$$\rho_f = -\frac{\alpha\Psi_0}{2a^3}, \quad p_f = -\rho_f. \quad (6.36)$$

Da condição de energia fraca sabemos que a densidade de energia é uma quantidade sempre positiva [80]. Sendo assim, inferimos de (6.36)₁ que devemos ter $\alpha\Psi_0 < 0$. Visto que o acoplamento deve ser uma quantidade positiva, devemos ter $\omega\Psi_0 > 0$, isto é, as constantes α e ω terão sempre sinais contrários, o que implica em Λ positivo. Além disso, inferimos da equação (6.36)₂ que a pressão dos férmions é sempre negativa e proporcional à densidade de energia.

Da equação (6.32), obtemos uma equação para a evolução temporal de Ψ

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-3\Lambda(t-t_0)} \quad (6.37)$$

que nos diz que conforme o Universo se expande, Ψ se aproxima rapidamente de zero. Isto indica que Ψ teve um papel importante somente no começo do Universo.

Agora podemos determinar também a evolução temporal da densidade de energia e da pressão dos férmions no período de expansão acelerada, obtendo

$$\rho_f(t) = 6\omega\Lambda^2\Psi_0 e^{-3\Lambda(t-t_0)}, \quad (6.38)$$

$$p_f(t) = -6\omega\Lambda^2\Psi_0 e^{-3\Lambda(t-t_0)} = -\rho_f(t). \quad (6.39)$$

Vemos de (6.38) e (6.39) que a densidade de energia e a pressão dos férmions decaem rapidamente a zero enquanto o Universo se expande. Note que a equação barotrópica dos férmions, (6.39), é idêntica a da constante cosmológica, pois a pressão dos férmions é o negativo da sua densidade de energia em cada instante da era inflacionária. Percebemos também que a solução (6.35) representa um Universo do tipo de Sitter, o qual se

expande eternamente, o que não é o caso de um período inflacionário. Então, para esse modelo, teríamos que em um dado momento introduzir um componente que freasse a expansão acelerada.

Para a simetria 2), a equação de Friedmann não apresenta solução.

6.5 Lagrangiana pontual e equações de campo para o caso geral

Agora analisaremos a ação geral, incluindo a contribuição dos campos de matéria e de radiação. Assim, integrando por partes a ação (6.1), para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana, chegamos à Lagrangiana pontual

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2 \dot{a} \dot{\Psi} F' + a^3 \frac{i}{2} (\dot{\bar{\psi}} \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 \dot{\psi}) + a^3 V + \rho_m^0 + \frac{\rho_r^0}{a}, \quad (6.40)$$

onde ρ_m^0 e ρ_r^0 são, respectivamente, a densidade de energia da matéria comum e da radiação em um instante inicial $t = t_0$. Mantemos a convenção: derivadas com relação Ψ são representadas por uma linha e derivadas com relação ao tempo são representadas por um ponto.

Comparando a nova Lagrangiana (6.40) com a Lagrangiana (6.2) analisada anteriormente, percebemos que a Lagrangiana (6.40) não apresenta termos extras com espinores. Dessa forma, as equações de Dirac continuam sendo (6.3) e (6.4). Porém, impondo a função energia igual a zero à Lagrangiana (6.40), vemos que a equação de Friedmann será diferente, a saber,

$$H^2 = \frac{\rho_T}{6F}, \quad (6.41)$$

onde ρ_T é a densidade de energia total

$$\rho_T = V - 6HF'\dot{\Psi} + \frac{\rho_m^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4}. \quad (6.42)$$

6.6 Imposição da Simetria de Noether

Em componentes dos espinores, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ e seu adjunto $\bar{\psi} = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, -\psi_3^\dagger, -\psi_4^\dagger)$, podemos reescrever a Lagrangiana (6.2) como

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F + 6a^2 \dot{a} F' \sum_{i,j=1}^4 (\psi_i^\dagger \psi_j + \psi_i^\dagger \dot{\psi}_j) \varepsilon_{ij} + \frac{i}{2} a^3 \sum_{i=1}^4 (\psi_i^\dagger \dot{\psi}_i - \dot{\psi}_i^\dagger \psi_i) + a^3 V + \rho_m^0 + \frac{\rho_r^0}{a}. \quad (6.43)$$

Para impor a Simetria de Noether ao modelo, é feita a mesma análise da seção **6.3**. Através dessa análise, obtemos um polinômio em $\dot{a}\psi_l^\dagger$, $\dot{a}\psi_l$, a^2 , ψ_l^\dagger , ψ_l , $\psi_l^\dagger \dot{\psi}_m$, $\dot{\psi}_l^\dagger \psi_m^\dagger$, $\dot{\psi}_l \psi_m$ e \dot{a} , que deve se anular termo a termo. Dessa condição de nulidade para cada termo envolvendo derivadas temporais, temos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} F' \psi_j \varepsilon_{lj} (2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a}) + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l^\dagger} + aF'' \psi_j \varepsilon_{lj} \sum_{i,k=1}^4 (C_i \psi_k + \psi_i^\dagger D_k) \varepsilon_{ik} \\ + aF' [D_j \varepsilon_{lj} + \sum_{i,k=1}^4 (\frac{\partial C_i}{\partial \psi_l^\dagger} \psi_k + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_k}{\partial \psi_l^\dagger}) \varepsilon_{ik}] = 0, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} F' \psi_j^\dagger \varepsilon_{jl} (2C_0 + a \frac{\partial C_0}{\partial a}) + 2F \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l} + aF'' \psi_j^\dagger \varepsilon_{jl} \sum_{i,k=1}^4 (C_i \psi_k + \psi_i^\dagger D_k) \varepsilon_{ik} \\ + aF' [C_j \varepsilon_{jl} + \sum_{i,k=1}^4 (\frac{\partial C_i}{\partial \psi_l} \psi_k + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_k}{\partial \psi_l}) \varepsilon_{ik}] = 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$C_0 F + 2aF \frac{\partial C_0}{\partial a} + aF' \sum_{i,j=1}^4 (C_i \psi_j + \psi_i^\dagger D_j) \varepsilon_{ij} + a^2 F' \sum_{i,j=1}^4 \left(\frac{\partial C_i}{\partial a} \psi_j + \psi_i^\dagger \frac{\partial D_j}{\partial a} \right) \varepsilon_{ij} = 0, \quad (6.46)$$

$$3C_0 \psi_l + aD_l + a \sum_{i=1}^4 \left(\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial \psi_l^\dagger} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial \psi_l^\dagger} \right) = 0, \quad (6.47)$$

$$-3C_0 \psi_l^\dagger - aC_l + a \sum_{i=1}^4 \left(\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial \psi_l} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial \psi_l} \right) = 0, \quad (6.48)$$

$$F' \left(\psi_i^\dagger \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} + \psi_j \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i} \right) \varepsilon_{ij} = 0 \quad F' \left(\psi_j \frac{\partial C_0}{\partial \psi_m^\dagger} + \psi_m \frac{\partial C_0}{\partial \psi_j^\dagger} \right) \varepsilon_{ij} = 0, \quad (6.49)$$

$$F' \left(\psi_i^\dagger \frac{\partial C_0}{\partial \psi_l} + \psi_l^\dagger \frac{\partial C_0}{\partial \psi_i} \right) \varepsilon_{ij} = 0 \quad \sum_{i=1}^4 \left(\psi_i \frac{\partial C_i}{\partial a} - \psi_i^\dagger \frac{\partial D_i}{\partial a} \right) = 0. \quad (6.50)$$

Dos termos remanescentes, obtemos uma equação diferencial para a densidade de potencial

$$C_0 (3V - \frac{\rho_r^0}{a^4}) + aV' \sum_{i,j=1}^4 (C_i \psi_j + \psi_i^\dagger D_j) \varepsilon_{ij} = 0. \quad (6.51)$$

Esse sistema de 55 equações diferenciais acopladas se diferencia do analisado no caso particular apenas na equação para a densidade de potencial (6.51), onde agora temos a contribuição da radiação. Das equações (6.49) e (6.50)₁ inferimos que existem duas possibilidades para o acoplamento, $F' = 0$ e $F' \neq 0$.

6.6.1 Análise da Simetria de Noether no caso geral

Se $F' = 0$, temos $F = \text{constante}$, e as equações (6.49) e (6.50)₁ são satisfeitas automaticamente. Da equação (6.51) temos que $C_0 = 0$ e a equação é resolvida para $V = \text{constante}$ ou $C_i = -f(a)\psi_i^\dagger$ e $D_j = f(a)\psi_j$, onde $f(a)$ é uma função qualquer de a .

Com $C_0 = 0$ e $F' = 0$ as equações (6.44)-(6.46) também são satisfeitas. As equações (6.47) e (6.48) também são satisfeitas com $C_i = -f(a)\psi_i^\dagger$ e $D_j = f(a)\psi_j$, mas de (6.50)₂ temos que $f(a) = \gamma$ com γ sendo uma constante, assim

$$C_l = -\gamma\psi_l^\dagger, \quad D_l = \gamma\psi_l. \quad (6.52)$$

Substituindo C_l e D_l na equação (6.51), vemos que essa equação é satisfeita para qualquer potencial $V = V(\Psi)$, ou até mesmo um potencial constante.

Analisando o caso $F' \neq 0$, vemos que o sistema de equações (6.44)-(6.51) é resolvido com a mesma simetria obtida no caso $F' = 0$. E também para F qualquer, ou seja, tanto para $F = \text{constante}$, como visto anteriormente, como para $F = F(\Psi)$.

Então, existe uma simetria de Noether para o caso $F = 0$ e $F' \neq 0$, tal que

$F = F(\Psi) \quad V = V(\Psi) \quad C_0 = 0$ $C_l = -\gamma\psi_l^\dagger \quad D_l = \gamma\psi_l$
--

Com $F(\Psi)$ e $V(\Psi)$ sendo funções arbitrárias de Ψ e inclusive podendo ser constantes.

6.7 Soluções cosmológicas

Vimos que as equações de Dirac não se alteram com a contribuição dos campos de matéria e radiação. Dessa forma, obtemos o mesmo Ψ , a saber,

$$\Psi = \frac{\Psi_0}{a^3} \quad (6.53)$$

sendo Ψ_0 uma constante.

6.7.1 Caso $F' = 0$

Aqui temos $F = \text{constante}$. Fazendo $F = 1/2$, temos um acoplamento mínimo do campo fermiônico ao campo gravitacional. Visto que temos uma simetria de Noether para V qualquer, escolhemos um potencial arbitrário formado pela combinação linear de duas potências de Ψ , ou seja

$$V(\Psi) = V_0\Psi^n + \Lambda\Psi^l, \quad (6.54)$$

onde V_0 , Λ , n e l são parâmetros livres. Com o objetivo de fazer o campo fermiônico simular tanto a energia escura como a matéria escura, tomamos os valores das potências como $n = 1$ e $l = 0$. Assim, visto que a densidade dos férmions para o caso mínimo é simplesmente $\rho_f = V$, temos

$$\rho_f = \rho_{me} + \rho_{ee} \quad (6.55)$$

onde $\rho_{me} = V_0\Psi$ e $\rho_{ee} = \Lambda$ representam a densidade de energia da matéria escura e da energia escura, respectivamente. Usando o resultado (6.53) em (6.54), encontramos a equação de Friedmann para este caso,

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{V_0\Psi_0 + \rho_m^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} + \Lambda. \quad (6.56)$$

Como não foi possível encontrar solução analítica para $a = a(t)$ a partir da equação (6.55), faremos agora uma mudança de variáveis nas nossas equações para obter o parâmetro de Hubble H em função do *redshift* z . Assim, poderemos encontrar o parâmetro densidade e o parâmetro desaceleração para este modelo como função do *redshift* e compará-los com os dados observacionais.

Fazemos a mudança de variáveis usando as relações abaixo, as quais relacionam o fator de escala com o *redshift* e as derivadas temporais com derivadas em z

$$\frac{1}{a} = z + 1, \quad \frac{d}{dt} = -H(1+z)\frac{d}{dz}. \quad (6.57)$$

Aplicando essa mudança de variáveis na equação de Friedmann (6.56), encontramos uma expressão para o parâmetro de Hubble em função do *redshift*,

$$H(z) = \sqrt{\frac{(V_0 + \rho_m^0)(z+1)^3 + \rho_r^0(z+1)^4 + \Lambda}{3}}. \quad (6.58)$$

Substituindo $F = 1/2$ e as relações (6.57) na equação (6.42), chegamos a uma expressão para a densidade total de energia,

$$\rho_T(z) = (V_0 + \rho_m^0)(z+1)^3 + \rho_r^0(z+1)^4 + \Lambda. \quad (6.59)$$

Para, posteriormente, podermos usar condições iniciais baseadas em dados astronômicos, vamos introduzir agora novas densidades. Fazemos isso dividindo a equação (6.59) por ρ_0 - a densidade de energia total do Universo em $z = 0$. Assim, chegamos às novas expressões:

$$\overline{\rho_T(z)} = \overline{\rho_{me}} + \overline{\rho_m} + \overline{\rho_r} + \overline{\rho_{ee}}, \quad (6.60)$$

onde a barra significa que a quantidade foi dividida por ρ_0 . As densidades dos constituintes seguem as equações abaixo:

$$\overline{\rho_m} = \overline{\rho_m^0}(z+1)^3, \quad \overline{\rho_r} = \overline{\rho_r^0}(z+1)^4, \quad (6.61)$$

$$\overline{\rho_{me}} = \overline{V_0}(z+1)^3, \quad \overline{\rho_{ee}} = \overline{\Lambda}. \quad (6.62)$$

Para o cálculo do parâmetro desaceleração, $q = 1/2 + 3p/2\rho$, além da densidade de energia, precisaremos de uma expressão para a pressão dos constituintes, assim, lembrando da expressão para a pressão dos férmions no caso do acoplamento mínimo

$$p_f = V'\Psi - V, \quad (6.63)$$

onde a linha representa derivada com relação a Ψ . Substituindo a equação para o potencial $V = V_0\Psi + \Lambda$ na equação (6.63), obtemos

$$p_f = -\Lambda. \quad (6.64)$$

Percebemos de (6.64), que a pressão dos férmions tem somente contribuição do termo constante do potencial, o qual representa a energia escura em nosso modelo, ou seja, vemos a partir das equações da densidade de energia e da pressão dos férmions, que esse campo possui uma equação barotrópica idêntica a da constante cosmológica para o termo que representa a energia escura, e idêntica à da matéria sem pressão para o termo que representa a matéria escura no potencial de auto interação dos férmions, ou seja, temos

$$p_{ee} = -\Lambda = -\rho_{ee} \quad \text{e} \quad p_{me} = 0. \quad (6.65)$$

As equações barotrópicas para matéria bariônica e radiação são as mesmas do modelo padrão, $p_m = 0$ e $p_r = 1/3\rho_r$ [62]. Assim, vemos que apenas a energia escura e a radiação contribuem para a pressão total dos constituintes.

Novamente, para podermos usar condições iniciais baseadas em dados astronômicos, introduzimos a expressão abaixo

$$\bar{p}_T = \bar{p}_{ee} + \bar{p}_r = \frac{1}{3}\bar{\rho}_r^0(z+1)^4 - \bar{\Lambda}, \quad (6.66)$$

onde a barra indica que a quantidade foi dividida por ρ_0 .

6.7.2 Gráficos do parâmetro densidade e do parâmetro desaceleração

Como visto no Capítulo 3, não costumamos trabalhar diretamente com a densidade dos constituintes em Cosmologia, mas sim com uma grandeza relacionada a ela, chamada

parâmetro densidade Ω . Para encontrar o Ω relacionado a cada constituinte, usamos a relação:

$$\Omega_i(z) = \frac{\rho_i(z)}{\rho_T(z)}, \quad (6.67)$$

onde o índice i se refere a cada constituinte do modelo e $\rho_T(z)$ é a densidade total de energia do Universo dada pela equação (6.59).

Usaremos condições iniciais baseadas nos dados astronômicos. Assim, em $z = 0$ introduzimos as quantidades $\overline{\rho}_m(0) = \rho_m^0/\rho_0 = \Omega_m^0$, $\overline{\rho}_r(0) = \rho_r^0/\rho_0 = \Omega_r^0$, $\overline{\rho}_{me}(0) = \rho_{me}^0/\rho_0 = \Omega_{me}^0$ e $\overline{\rho}_{ee}(0) = \rho_{ee}^0/\rho_0 = \Omega_{ee}^0$, onde Ω_i^0 representa o valor do parâmetro densidade atual de cada componente. Os valores adotados são $\Omega_m^0 = 0,049915$, $\Omega_{me}^0 = 0,23$, $\Omega_{ee}^0 = 0,72$ e $\Omega_r^0 = 8,5 \times 10^{-5}$ (consideramos aqui radiação = fótons + neutrinos, onde neutrinos são partículas relativistas não-interagentes) conforme [15, 81]. Note que essas condições iniciais obedecem a necessidade de termos um parâmetro densidade total igual a unidade. Isto é, um Universo espacialmente plano.

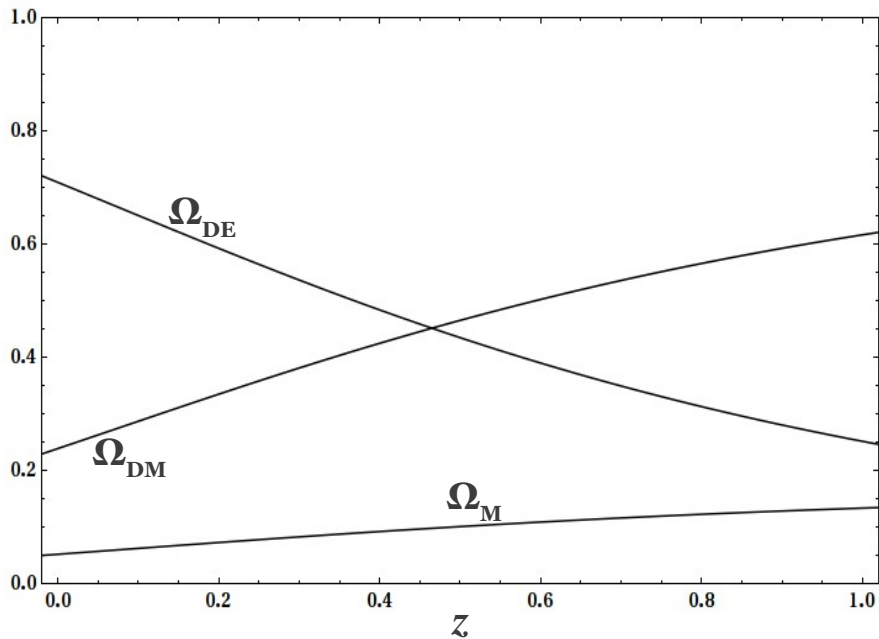


Figura 6.1: Parâmetro densidade para pequenos valores de *redshift*

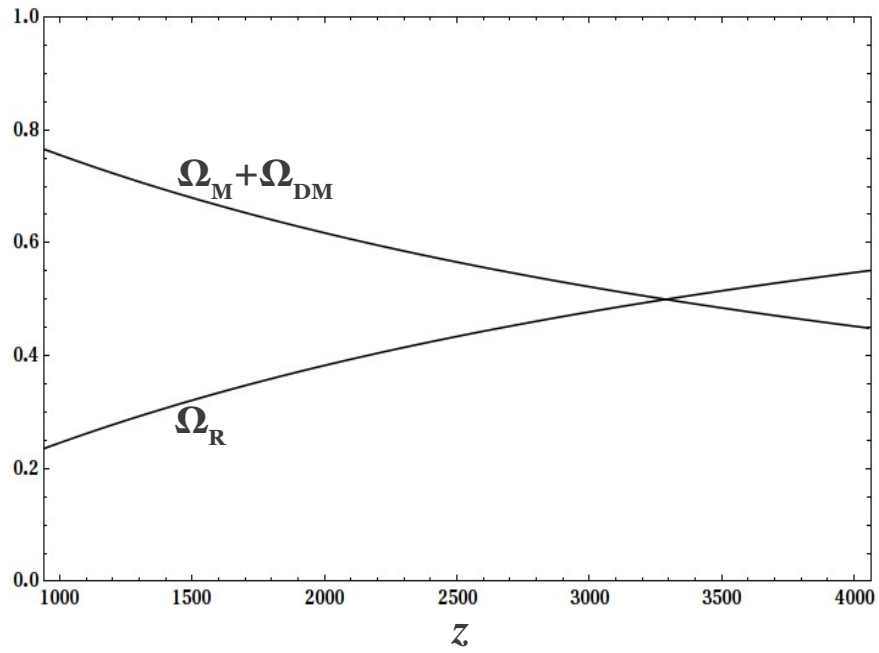


Figura 6.2: Parâmetro densidade para grandes valores do *redshift*

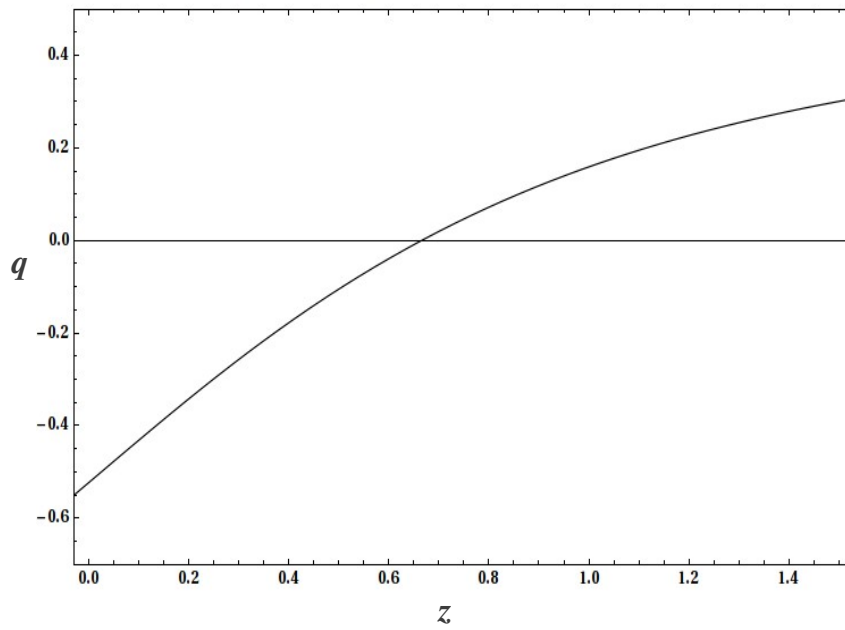


Figura 6.3: Parâmetro desaceleração em função do *redshift*.

Na Figura 6.1, temos os parâmetros densidade para pequenos valores de *redshift*, ou seja, para o Universo atual ($z = 0$) até um passado recente ($z = 1$). Na Figura 6.2 analisamos o parâmetro densidade para eras mais antigas, ou seja, para grandes valores de *redshift*. Notamos da Figura 6.1 que o Universo atual é dominado pela componente constante do campo fermiônico que representa a energia escura em nosso modelo, e voltando um pouco no tempo, em $z \sim 0,45$, vemos que a componente representando a matéria escura começa a dominar sobre a energia escura. Nessa escala de *redshift*, a contribuição da matéria comum é muito pequena e a da radiação é desprezível. O parâmetro densidade da energia escura passa a ser desprezível em $z \sim 6$.

Na Figura 6.2, chegamos a eras muito antigas, onde a energia escura é desprezível e fica difícil diferenciar a matéria bariônica da matéria escura, sendo assim, somamos $\Omega_{me} + \Omega_m$ e comparamos a curva da matéria total, com a curva da radiação para grandes valores de *redshift*. Podemos ver no gráfico que a partir de $z \sim 3250$ a radiação passa a dominar sobre os outros componentes do Universo, esse valor está em ótima concordância com valores observados: *redshift* na era da transição matéria/energia $z_{eq} = 3454^{+385}_{-392}$ [15].

Percebemos desses gráficos que o modelo descreve muito bem essas duas eras do Universo. Como visto no Capítulo 3, o Universo primordial teve que passar pela era da radiação onde os elementos leves foram formados e, após isso, a matéria passou a dominar sobre a radiação. Vemos também que o campo fermiônico pode representar a atual expansão acelerada do Universo através de sua componente de potencial constante, que atualmente domina sobre as outras, conforme o gráfico 6.1. Porém, o modelo não dá conta de explicar a era da inflação, pois vemos no gráfico 6.2 que a era da radiação domina até o início do Universo ($z \rightarrow \infty$).

Representamos no gráfico 6.3 o parâmetro desaceleração em função do *redshift*. É importante notar nesse gráfico o parâmetro desaceleração atual, que tem seu valor $q(0) = -0,55$, e o *redshift* de transição, o qual representa a transição de uma era

	Parametrização I	Parametrização II	Parametrização III	Nosso Modelo
q_0	$-0,61^{+0,06}_{-0,07}$	$-0,56^{+0,35}_{-0,22}$	$-0,60 \pm 0,06$	$-0,55$
z_T	$0,71^{+0,14}_{-0,17}$	$0,77^{+0,52}_{-0,57}$	$0,72^{+0,27}_{-0,21}$	$0,67$

Tabela 6.1: Comparação de dados observacionais (de [82]) dos resultados para o parâmetro desaceleração q_0 e do *redshift* de transição z_T obtidos no nosso modelo com campo fermiônico acoplado minimamente ao campo gravitacional no caso geral (com a contribuição da matéria e radiação).

desacelerada para a atual era acelerada, que em nosso modelo possui o valor $z_T = 0,67$. Vamos comparar os dados observacionais através da Tabela 6.1. A referência [82] fez três parametrizações para obtenção dos valores de q_0 e z_T , utilizando dados observacionais recentes. Vemos na Tabela 6.1 que os resultados para q_0 e z_T obtidos através do nosso modelo estão muito próximos aos valores observados.

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

No primeiro caso abordado nessa dissertação, analisamos o campo fermiônico mínima e não minimamente acoplado ao campo gravitacional, sem a contribuição da matéria e da radiação. Vimos que, apesar de na literatura muitas possíveis formas para a densidade de potencial e o acoplamento terem sido abordadas, nosso trabalho mostrou que para a simetria de Noether ser satisfeita, temos formas bastante restritas para o acoplamento e para a densidade de potencial. No trabalho analisado nessa dissertação, escrevemos o acoplamento e a densidade de potencial em função do invariante $\bar{\psi}\gamma^5\psi$. É interessante notar que a referência [43] também aplicou a condição de simetria de Noether, obtendo as mesmas formas para o acoplamento e a densidade de potencial, mas como funções do invariante $\bar{\psi}\psi$.

Além das formas restritas para $V = V(\Psi)$ e $F = F(\Psi)$ obtidas no primeiro caso, também vimos que, para o acoplamento mínimo, o campo fermiônico tem o mesmo comportamento do Modelo Padrão para o Universo dominado por matéria comum. Nesse caso, o campo fermiônico comporta-se como matéria comum. No caso não-mínimo, obtivemos uma solução do tipo de Sitter, onde o Universo se expande de forma acelerada para sempre. Nesse caso, o campo fermiônico pode representar o inflaton da era da inflação, mas o modelo deve ser aprimorado de modo a entrar em uma era desace-

lerada dominada por matéria. Em ambos os casos, o modelo falha em explicar a atual expansão acelerada do Universo.

No segundo caso, analisamos um campo fermiônico minimante acoplado ao campo gravitacional, incluindo a contribuição da matéria e da radiação. Nesse caso, temos a simetria de Noether satisfeita para qualquer forma da densidade de potencial. Sendo assim, consideramos um potencial que é uma combinação linear de duas potências do invariante Ψ . Seleccionamos as potências adequadas à descrição do comportamento da matéria e da energia escura através do campo fermiônico. Nesse caso reescrevemos as equações em função do *redshift* e plotamos gráficos do parâmetro densidade e do parâmetro desaceleração. Comparando as curvas com os dados observacionais, vimos que o modelo obtém ótimos valores para o *redshift* de transição e para o valor atual do parâmetro desaceleração. Nos gráficos do parâmetro densidade, vimos que o campo fermiônico descreve muito bem o comportamento da energia escura e da matéria escura, assim como a transição dessas eras para a era da radiação, porém esse modelo não consegue simular a era da inflação. Note que existem vários trabalhos que usam dois campos para simular o comportamento da matéria e da energia escura [83, 84, 85]. E em nosso modelo conseguimos simular o comportamento tanto da matéria escura como da energia escura fazendo uso de apenas um campo.

Por fim, como sequência natural do trabalho, segue a procura para uma solução do segundo caso aqui analisado mas para o acoplamento não mínimo. Nesse caso, já vimos que as equações se tornam mais complexas e será preciso a utilização de métodos numéricos para a solução das mesmas. Outro trabalho a ser feito, ainda seguindo estudos com campos fermiônicos, baseia-se numa ação semelhante à (6.1). Porém, além de um potencial $V = V(\Psi = \bar{\psi}\gamma^5\psi)$ selecionado via simetria de Noether, podemos adicionar à ação um potencial massivo do tipo $m\bar{\psi}\psi$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. H. Guth. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [2] A. Linde. *Phys. Lett. B*, 108:389, 1982.
- [3] A. Albrecht and P. J. Steinhardt. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220, 1982.
- [4] S. Perlmutter et al. *Nature*, 391:51, 1997.
- [5] A. G. Riess et al. *Astron. J.*, 116:1009, 1998.
- [6] S. Perlmutter et al. *Astrophys. J.*, 517:565, 1999.
- [7] A. G. Riess et al. *Astron. J.*, 118:2668, 1999.
- [8] A. G. Riess et al. *Astrophys. J.*, 560:49, 2001.
- [9] J. L. Tonry et al. *Astrophys. J.*, 594:1–24, 2003.
- [10] R. A. Knop et al. *Astrophys. J.*, 598:102, 2003.
- [11] B. J. Barris et al. *Astrophys. J.*, 602:571, 2004.
- [12] P. de Bernardis et al. *Nature*, 404:955, 2000.
- [13] A. E. Lange et al. *Phys. Rev. D*, 63:042001, 2001.
- [14] A. Benoit et al. *Astron. Astrophys.*, 399:25, 2003.

- [15] D. N. Spergel et al. *Astrophys. J.*, 148:175, 2003.
- [16] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582–1585, 1998.
- [17] Luis P. Chimento, Alejandro S. Jakubi, and Diego Pavón. *Phys. Rev. D*, 62:063508, 2000.
- [18] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606, 2003.
- [19] P. J. Steinhardt I. Zlatev, L. Wang. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896, 1999.
- [20] J. B. Binder and G. M. Kremer. *Gen. Rel. Grav.*, 38:857, 2006.
- [21] R. C. de Souza, R. André, and G. M. Kremer. *Phys. Rev. D*, 87:083510, 2013.
- [22] A. Sen. *J. High Energy Phys.*, 04:48, 2002.
- [23] J. S. Bagla, H. K. Jassal, and T. Padmanabhan. *Phys. Rev. D*, 67:063504, 2003.
- [24] R. C. de Souza and G. M. Kremer. *Class. Quant. Grav.*, 26:135008, 2009.
- [25] L. P. Chimento, M. Fortes, G. M. Kremer, and M. O. Ribas. *Gen. Rel. Grav.*, 42:1523, 2010.
- [26] G. M. Kremer. *Gen. Rel. Grav.*, 39:965, 2007.
- [27] J. Lima, J. S. Alcaniz, and J. V. Cunha. *Astr. Phys.*, 30:196, 2008.
- [28] Sergio del Campo, Carlos R. Fadrugas, Ramón Herrera, Carlos Leiva, Genly Leon, and Joel Saavedra. *Phys. Rev. D*, 88:023532, 2013.
- [29] S. Capozziello, S. de Martino, and M. Falanga. *Phys. Lett. A*, 299:494, 2002.
- [30] G. M. Kremer. *Gen. Rel. Grav.*, 35:1459, 2003.
- [31] G. M. Kremer. *Phys. Rev. D*, 68:3507, 2003.

- [32] B. Boisseau, G. Esposito-Farèse, D. Polarski, and A. A. Starobinsky. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2236–2239, 2000.
- [33] S. Capozziello, E. Piedipalumbo, C. Rubano, and P. Scudellaro. *Phys. Rev. D*, 80:104030, 2009.
- [34] G. Lambiase S. Capozziello. *Gen. Rel. Grav.*, 32:295, 2000.
- [35] V. Faraoni J. C. C. de Souza. *Class. Quant. Grav.*, 24:3637, 2007.
- [36] B. Vakili. *Phys. Lett. B*, 664:16, 2008.
- [37] C. Armendáriz-Piccón and P. B. Greene. *Gen. Rel. Grav.*, 35:1637, 2003.
- [38] B. Saha and G. N. Shikin. *Gen. Rel. Grav.*, 29:1099, 1997.
- [39] B. Saha and T. Boyadjiev. *Phys. Rev. D*, 69:124010, 2004.
- [40] B. Saha. *Phys. Rev. D*, 74:124030, 2006.
- [41] M. O. Ribas, G. M. Kremer, and F. P. Devecchi. *Europ. Phys. Lett.*, 81:19001, 2008.
- [42] M. O. Ribas, F. P. Devecchi, and G. M. Kremer. *Phys. Rev. D*, 72:123502, 2005.
- [43] R. C de Souza and G. M. Kremer. *Class. Quant. Grav.*, 25:225006, 2008.
- [44] L. P. Chimento et al. *J. Phys.*, 306:012052, 2011.
- [45] R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, and C. Stornaiolo. *Phys. Rev. D*, 42:1091–1097, 1990.
- [46] M. Demianski et al. *Phys. Rev. D*, 44:3136–3146, 1991.
- [47] S. Capozziello and R. de Ritis. *Class. Quant. Grav.*, 11:107, 1994.

- [48] A. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano, and C. Tortora. *Astron. Astrophys.*, 454:55, 2006.
- [49] Y. Zang, Y. , Gong, and Z. Zhu. *Class. Quant. Grav.*, 27:135019, 2010.
- [50] M. Sharif and S. Waheed. *JCAP*, 02:043, 2013.
- [51] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Teoria do Campo*. Editora Mir, 1980.
- [52] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principle And Applications of the General Theory of Relativity*. Jonh Willey and Sons, 1972.
- [53] V. Fock. *The theory of space, time, and gravitation*. The Macmillan Company, 1964.
- [54] R. A. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1997.
- [55] A. Einstein. *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen and Co Ltd, 1920.
- [56] A. Einstein. *Analen der Physik*, 322, 1905.
- [57] W. Rindler. *Relativity: Especial, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2006.
- [58] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica: 1 Mecânica, 3ª ed.* Editora Edgard Bluncher, 2006.
- [59] P. A. M. Dirac. *General Theory of Relativity*. Jonh Willey and Sons, 1975.
- [60] E. Hubble. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15, 1929.
- [61] S. Weinber. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [62] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology, Second Ed.* Jonh Willey and Sons, 2003.

- [63] A. G. Riess et al. *Astrphys. J.*, 730:119, 2011.
- [64] S. Maddox et al. apod.nasa.gov/apod/ap030611.html, 2003.
- [65] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. *Phys. Rev.*, 73:803, 1948.
- [66] A. A. Penzias and R. W. Wilson. *Astrophys. J.*, 142:419, 1965.
- [67] M. Novello et al. *Programa Mínimo de Cosmologia*. ICRA Brasil, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e Ministério da Ciência e Tecnologia, 2010.
- [68] M. Roos. *Introduction to Cosmology*, 3rd ed. John Wiley and Sons, 2003.
- [69] D. Cline et al. *Astroparticle Phys.*, 12:373, 2000.
- [70] J. Kikuchi S. Suzuki M. Yamashita, T. Doke. *Astroparticle Phys.*, 20:79, 2003.
- [71] A. Linde. *Particle physics as inflationary cosmology*. Harwood Academic, 1993.
- [72] P. J. E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Series in Physics, 1993.
- [73] E. Noether. *Nach. v. d. Ges. d. Woss. zu Gottingen, Math-Phys. Klasse*, page 235, 1918.
- [74] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd ed., 2000.
- [75] R. C. de Souza. *Modelos Cosmológicos para o Universo Atual e Primordial*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2012.
- [76] H. Kleinert. *Particle and Quantum Fields*. Freie Universitat Berlin, 2003.
- [77] B. Hatfield. *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*. Advanced Book Prog., PERSEUS BOOK, 1992.

- [78] M. Kaku. *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*. Oxford University Press, 1993.
- [79] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum fields in curved spaces*. Cambridge University Press, 1982.
- [80] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [81] N. Liang, P. Wu, and S. N. Zhang. *Phys. Rev. D*, 81:083518, 2010.
- [82] S. del Campo, I. Duran, R. Herrera, and D. Pavón. *Phys. Rev. D*, 86:083509, 2012.
- [83] G. Caldera-Cabral, R. Maartens, and L. A. Ureña López. *Phys. Rev. D*, 79:063518, 2009.
- [84] R. C. de Souza and G. M. Kremer. *Class. Quant. Gravity*, 27:175006, 2010.
- [85] R. C. de Souza and G. M. Kremer. *Class. Quant. Gravity*, 28:125006, 2011.