

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Jorge Andrés Sánchez Arteaga

CLASSIFICAÇÃO DE ESPAÇOS FIBRADOS

Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Jorge Andrés Sánchez Arteaga

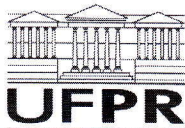
CLASSIFICAÇÃO DE ESPAÇOS FIBRADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández.

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel.

Curitiba, 2013.



ATA DA 49ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos oito dias do mês de julho de 2013, no Anfiteatro B, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Carlos Eduardo Durán Fernandez, a Banca Examinadora para a quadragésima nona Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves, da Universidade de São Paulo, Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, e o Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às nove horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Jorge Andrés Sanchez Arteaga** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Classificação de Espaços Fibrados". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 08 de julho de 2013.

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez
Presidente

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
Titular

Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Titular

Resumo

O objetivo desta dissertação é fazer um estudo dos espaços fibrados, mostrando como eles podem ser classificados. Concretamente vamos nos concentrar em classificar fibrados vetoriais e de forma mais geral vamos classificar G -fibrados principais, onde G é um grupo topológico e finalmente classificaremos fibrados com conexão.

Abstract

The aim of this work is to study fiber bundles and their classification. Concretely, we will classify vector bundles; more generally, principal G -bundles and finally principal bundles with connection.

Sumário

Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 Fibrados vetoriais	1
1.2 Construção de fibrados a partir de fibrados dados.	5
1.3 Fibrado canônico sobre a Variedade de Grassmann	8
1.4 Grupos de Homotopia	11
1.4.1 O grupo fundamental	12
1.4.2 Grupos de homotopia de ordem superior	13
1.4.3 Fibrações	16
2 Classificação de Fibrados Vetoriais	21
2.1 O fibrado Universal $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$	21
2.2 Fibrado Universal γ^n	24
2.3 Homotopia de Fibrados Vetoriais	26
3 G-Fibrados Universais	29
3.1 G-fibrados ou G-fibrados coordenados	29
3.2 G-Fibrados Principais	33
3.3 Construção do Milnor	37
3.4 Fibrado Associado	42
4 Fibrados com conexões	50
4.1 Conexões em fibrados principais	50
4.2 Conexão Canônica no Fibrado de Stiefel	54
5 Alguns exemplos de classificação	61
5.1 Exemplos elementares	61
5.2 Exemplos geométricos recentes	63

Agradecimientos

Agradeço à Deus por todas as suas bênçãos, e por sempre estar a meu lado. Agradeço a minha família pelo apoio durante os momentos mais difíceis. Agradeço sinceramente aos meus orientadores o prof. Dr. Carlos Eduardo Durán e prof. Dr. Eduardo Hoefel que sempre estavam dispostos a ajudar. Finalmente um obrigado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR pela oportunidade e formação.

Introdução

Um **espaço fibrado** pode ser entendido de duas maneiras duais. Geometricamente, um fibrado é uma coleção de estruturas parametrizadas pelos pontos de um espaço B ; "acima de cada ponto" de B colocamos uma estrutura (espaço vetorial euclidiano, por exemplo). Dualmente, podemos pensar da maneira topológica, como uma aplicação $\pi : E \rightarrow B$ tal que as fibras $\pi^{-1}(b)$ são todas "iguais" e compartilham alguma estrutura de maneira consistente.

O conceito matemático de espaço fibrado foi desenvolvido na década de 1930, e tem tomado grande interesse em suas aplicações à geometria diferencial, um exemplo importante importante de espaço fibrado que aparece em geometria diferencial, é o espaço tangente a uma variedade diferenciável. Em 1951 foi publicado o trabalho de N. Steenrod [15] que é uma primeira exposição sistemática do assunto.

Essencialmente uma estrutura fibrada consiste de um espaço E chamado de **espaço total**, um espaço B chamado de **espaço base**, uma aplicação contínua e sobrejetora $p : E \rightarrow B$ chamada de aplicação **projeção**, e um espaço Y chamado de **fibra típica** que é homeomorfo ao conjunto $p^{-1}(b)$, $b \in B$ chamado de **fibra** sobre o ponto b . Alguns casos particulares de fibrados são os fibrados vetoriais e de forma mais geral os G -fibrados. No primeiro caso, temos uma estrutura vetorial em cada fibra $p^{-1}(b)$ e no segundo, temos um grupo topológico que age efetivamente sobre a fibra típica Y .

O objetivo principal desta dissertação é classificar fibrados vetoriais, G -fibrados e finalmente fibrados com conexão. Para o caso dos fibrados vetoriais, vamos ver como o "pullback" do fibrado canônico sobre a variedade γ^n de Grassmann é isomorfo a qualquer fibrado vetorial ξ sobre um espaço base compacto ou paracompacto. Basicamente este isomorfismo é obtido construindo uma aplicação entre o espaço total do fibrado ξ e o espaço total de γ^n que seja linear e injetora em cada fibra. No caso dos G -fibrados, vamos mostrar que qualquer G -fibrado é o fibrado associado de algum fibrado principal. Portanto, se classificamos os fibrados principais também classificamos os G -fibrados. (Aqui o fibrado classificante é o fibrado construído em [10]). Finalmente para classificar os fibrados com conexão vamos usar o fibrado de Stiefel $U(k) \cdots V_k^o(\mathbb{C}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$.

Na literatura os fibrados classificantes são chamados de **fibrados universais**. Em particular, quando o espaço base de um fibrado universal é um CW -complexo de dimensão n dizemos que ele é n -universal, se e somente se, os grupos de homotopia π_i do espaço total são zero para $0 \leq i < n$. Uma aplicação interessante dos fibrados n -universais é calcular grupos de homotopia. Estes fibrados também podem ser usados para mostrar que dois espaços são homotopicamente equivalentes. No capítulo 3 vamos ver que se G é um grupo topológico que é um CW -complexo de dimensão n , então G é homotopicamente equivalente ao espaço de laço do conjunto B , onde B é o espaço base de algum fibrado n -universal. Outra coisa importante dos fibrados classificantes ou universais, é que muitas vezes os fibrados são obtidos como fibrados induzidos, é assim, que a partir de ter uma classificação nós podemos obter um novo fibrado, por exemplo. No capítulo 5 vamos ver exemplos de como obter um novo fibrado a partir de uma aplicação classificante dada pela aplicação de Hopf $S^7 \rightarrow S^4$, estes exemplos permitem estudar algumas propriedades geométricas dos "pullback" como é visto em [2]. Neste trabalho é assumida como conhecida a teoria básica de variedades diferenciáveis. Para informação desta teoria pode ser consultado [8].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fibrados vetoriais

Neste capítulo vamos dar algumas noções básicas sobre fibrados vetoriais, mostrando como são construídos alguns dos fibrados que vamos usar neste trabalho. Daremos também alguns resultados sobre grupo de homotopia e fibrações, os quais serão úteis no final do capítulo 3.

Definição 1.1.1. Um fibrado vetorial real ξ sobre um espaço topológico B chamado base consiste do seguinte:

1. Um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado **espaço total**.
2. Uma aplicação $\pi : E \rightarrow B$ contínua e sobrejetora chamada de **projeção**.
3. Para cada $b \in B$ uma estrutura de espaço vetorial real no conjunto $\pi^{-1}(b)$.
4. **Condição de trivialidade local:** Para cada $b \in B$, existe um aberto $U \subseteq B$, e um homeomorfismo

$$h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que o digrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

isto é $\pi \circ h = pr_1$ onde pr_1 é a projeção no primeiro fator. Além disso a correspondência $x \rightarrow h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial \mathbb{R}^n e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

De forma análoga podemos definir os fibrados vetoriais complexos. O par (U, h) é chamado de sistema de coordenadas locais para ξ sobre B . Se for possível escolher U igual ao espaço B todo, então ξ será chamado **fibrado trivial**. O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado fibra sobre b , ele pode ser denotado por F_b ou $F_b(\xi)$.

Definição 1.1.2. *Sejam ξ e η dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B . Dizemos que ξ é isomorfo a η , escreve-se $\xi \cong \eta$, se existir um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ entre os espaços totais que aplica cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial $F_b(\eta)$.*

Exemplo 1.1.1. *O fibrado trivial com espaço total $B \times \mathbb{R}^n$, com aplicação projeção*

$$\begin{aligned} \pi : B \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow B \\ (b, x) &\longmapsto b \end{aligned}$$

e com estrutura de espaço vetorial nas fibras definidas por

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2)$$

É claro que π é contínua além disso

$$\begin{aligned} h : B \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^n \\ (b, x) &\longmapsto (b, x) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. O fibrado trivial sobre B será denotado por ξ_B^n .

Notemos que um \mathbb{R}^n fibrado é trivial se e somente se é isomorfo a ξ_B^n .

Exemplo 1.1.2. *O fibrado tangente τ_M de uma variedade diferenciável M . O espaço total de τ_M é a variedade TM , consistindo de todos os pares (x, v) com $x \in M$ e v tangente a M em x . A aplicação projeção $\pi : TM \rightarrow M$ é definida por $\pi(x, v) = x$ e a estrutura de espaço vetorial em $\pi^{-1}(x)$ é definida por:*

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2)$$

A trivialização local de τ_M é obtida a través das cartas locais: se \mathcal{U} é um aberto de M e $x : \mathcal{U} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ é uma carta local, então a aplicação

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \ni (q, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum a_i \frac{\partial}{\partial x} \Big|_q$$

fornece uma trivialização local do tangente (considerando os vetores tangentes como derivações).

Exemplo 1.1.3. *Consideremos o espaço $\mathbb{R}P^n$ de retas pelo origem em \mathbb{R}^{n+1} . Notemos que é razoável considerar $\mathbb{R}P^n$ como o espaço topológico quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \equiv$ onde \equiv é uma relação de*

equivalência em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ definida por $x \equiv y$ se $y = \lambda x$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$.

O fibrado canônico γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$, tem como espaço total o conjunto $E(\gamma_n^1) \subseteq \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, onde $E(\gamma_n^1) = \{(l, v)/v \in l\}$ e como projeção a função

$$\begin{aligned} \pi : E(\gamma_n^1) &\rightarrow \mathbb{R}P^n \\ (l, v) &\longmapsto l \end{aligned}$$

Vejam que γ_n^1 satisfaz a condição de trivialidade local. De fato, notemos que se $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ então a reta l que passa pela origem e pelo ponto x pode-se ver como a classe de x ou seja $l = [x]$. Como os conjuntos $\tilde{U}_i = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})/x_i \neq 0\}$ são abertos saturados, segue que os conjuntos $U_i = \{[x]/x_i \neq 0, \}$ onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ são abertos em $\mathbb{R}P^n$, definamos $h_i : U_i \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ por

$$h_i([x], t) = ([x], t \frac{x_1}{x_i}, \dots, t, \dots, t \frac{x_{n+1}}{x_i})$$

claramente h_i é bijetora e contínua e sua inversa está definida por $h_i^{-1}([x], y) = ([x], y_i)$, onde $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ h_i^{-1} é contínua, portanto h_i é um homeomorfismo de $U_i \times \mathbb{R}$ com $\pi^{-1}(U_i)$ tal que a correspondência $t \rightarrow h([x], t)$ define um isomorfismo entre $\pi^{-1}([x])$ e \mathbb{R} .

γ_n^1 sera chamado o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P^n$.

Definição 1.1.3. Seja um fibrado vetorial ξ com projeção $\pi : E \rightarrow B$, uma **seção** s de ξ é uma função contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $(\pi \circ s)(b) = b, \forall b \in B$.

Diremos que s é não nula se: $s(b)$ é um vetor não-nulo na fibra $\pi^{-1}(b)$ para cada $b \in B$.

Observação 1.1. Notemos que um \mathbb{R}^1 -fibrado trivial ξ , com projeção $\pi : E \rightarrow B$, admite uma seção não nula, pois se definimos $s : B \rightarrow E$ como sendo $s(b) = h(b, 1)$, onde $h : B \times \mathbb{R} \rightarrow E$ é a trivialização de ξ , vemos que s é contínua, além disso, $\pi(s(b)) = b$ para cada $b \in B$.

Usando a observação anterior podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1.1. O fibrado γ_n^1 sobre $\mathbb{R}P^n$ não é trivial para $n \geq 1$.

Demonstração: Seja $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$ uma seção qualquer, e consideremos a função

$$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$$

que leva cada $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ no ponto $([x], t(x)x)$. Notemos que $t(x)$ é uma função contínua de valores reais pois $s \circ p$ é contínua, além disso, $t(x) = -t(-x)$ já que $p(x) = p(-x)$ ou equivalentemente $([x], t(x)x) = ([x], -t(-x)x)$ e portanto $t(-x) = -t(x)$.

Se $t(x) = 0$, s se anula na fibra e portanto o fibrado γ_n^1 não é trivial. Se $t(x) > 0$ então $t(-x) < 0$. Como $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é conexo segue do teorema do valor intermediário que existe x_0 tal que $t(x_0) = 0$, logo $s([x_0]) = ([x_0], 0)$. Portanto qualquer seção s anula-se na fibra, ou seja γ_n^1 não é trivial. \square

Agora vamos considerar uma coleção $\{s_1, \dots, s_n\}$ de seções de um fibrado vetorial ξ .

Definição 1.1.4. *As seções s_1, \dots, s_n são linearmente independentes, se para cada $b \in B$, os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes.*

Lema 1.1.1. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre B e seja $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ uma função contínua que leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente no espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$. Então, f é necessariamente um homeomorfismo. Logo ξ é isomorfo a η , ou seja, temos que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} E(0\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Demonstração: Se $e \in E(\eta)$, então $e \in F_{b'}(\eta)$ onde $b' = \pi_\eta(e)$. Como $f : F_{b'}(\xi) \rightarrow F_{b'}(\eta)$ é um isomorfismo, existe $x \in F_{b'}(\xi)$ tal que $f(x) = e$. Se $e_1 \neq e_2 \in E(\xi)$ são tais que $\pi_\xi(e_1) = \pi_\xi(e_2) = b$ como $f : F_b(\xi) \rightarrow F_b(\eta)$ é um isomorfismo segue que $f(e_1) \neq f(e_2)$ portanto existe f^{-1} .

Dado qualquer $b \in B$, escolhamos um sistema de coordenadas locais (U, g) para ξ e (V, h) para η , com $b \in U \cap V$. Vejamos que a função $h^{-1} \circ f \circ g : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. Tomemos

$$h^{-1}(f(g(b, x))) = (b, y)$$

notemos que $y = (y_1, \dots, y_n)$ pode ser expresso da forma $y_i = \sum_{j=1}^n f_{ij}(b)x_j$ onde $[f_{ij}(b)]$ denota uma matriz não singular. Seja $[F_{ji}(b)]$ a matriz inversa de $[f_{ij}(b)]$, então $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h(b, y) = (b, x)$ onde $x_j = \sum_{i=1}^n F_{ji}(b)y_i$. Assim $h^{-1} \circ f \circ g$ e $g^{-1} \circ f^{-1} \circ h$ são contínuas.

Agora, notemos que se temos φ e ψ funções tais que $\varphi \circ \psi$ é contínua e φ é um homeomorfismo então ψ é contínua, e se ψ é um homeomorfismo então φ é contínua, segue que f e f^{-1} são contínuas. \square

Teorema 1.1.2. *Um \mathbb{R}^n -fibrado ξ é trivial, se e somente se, ξ admite n seções s_1, \dots, s_n que são linearmente independentes.*

Demonstração: Sejam s_1, \dots, s_n seções de ξ linearmente independentes. Definamos $f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E(\xi)$ por $f(b, x) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, assim temos que f é uma função con-

tínua. Vejamos que f leva cada fibra do fibrado trivial ξ_B^n isomorficamente na fibra correspondente de ξ ou seja temos que provar que

$$f : F_b(\xi_B^n) \rightarrow F_b(\xi)$$

é um isomorfismo. De fato

linear: Sejam $(b, x), (b, y) \in F_b(\xi_B^n)$, logo

$$\begin{aligned} f(b, x + y) &= (x_1 + y_1)s_1(b) + \cdots + (x_n + y_n)s_n(b) \\ &= x_1s_1(b) + y_1s_1(b) + \cdots + x_ns_n(b) + y_ns_n(b) \\ &= f(b, x) + f(b, y) \end{aligned}$$

Injetividade: Sejam $(b, y), (b, x)$ em $F_b(\xi_B^n)$ tais que $f(b, y) = f(b, x)$ vejamos que $x = y$. Como $f(b, y) = f(b, x)$ então temos que:

$$x_1s_1(b) + \cdots + x_ns_n(b) = y_1s_1(b) + \cdots + y_ns_n(b)$$

logo $(x_1 - y_1)s_1(b) + \cdots + (x_n - y_n)s_n(b)$, mas os vetores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ são linearmente independentes portanto temos que $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ segue que $x = y$.

Assim pelo teorema do núcleo e a imagem temos que F é um isomorfismo nas fibras.

Reciprocamente, suponhamos que ξ é trivial, com sistema de coordenadas (B, h) . Definamos $s_i(b) = h(b, e_i)$ onde os e_i são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n , provemos que s_1, \dots, s_n são seções linearmente independentes, para $i = 1, \dots, n$. Como $s_i(b) = h(b, e_i)$ e a correspondência $x \mapsto h(b, x)$ define um isomorfismo, temos então que os $h_i(b, e_i)$ são linearmente independentes, portanto s_1, \dots, s_n são seções linearmente independentes. \square

1.2 Construção de fibrados a partir de fibrados dados.

a) **Restrição de um fibrado num subconjunto do espaço base.** Seja ξ um fibrado vetorial com projeção $\pi : E \rightarrow B$ e seja \bar{B} um subconjunto de B . Definindo $\bar{E} = \pi^{-1}(\bar{B})$ e $\bar{\pi} : \bar{E} \rightarrow \bar{B}$ a restrição de π a \bar{E} , obtemos um novo fibrado vetorial que sera denotado por $\xi|_{\bar{B}}$ e é chamado a restrição de ξ a \bar{B} . Cada fibra $F_b(\xi|_{\bar{B}})$ é igual à fibra correspondente $F_b(\xi)$ e tem a mesma estrutura de espaço vetorial. Se (U, h) é um sistema de coordenadas para ξ , então $(U \cap \bar{B}, h|_{U \cap \bar{B}})$ é um sistema de coordenadas para $\xi|_{\bar{B}}$.

O seguinte exemplo é de grande importância neste trabalho, já que por meio deste fibrado nos vamos a classificar os fibrados vetoriais, e os G -fibrados.

b) Fibrado induzido. Seja o fibrado ξ como acima, e seja B_1 um espaço topológico qualquer. Dada uma aplicação $f : B_1 \rightarrow B$ é possível construir o fibrado induzido $f^*\xi$ sobre B_1 . O espaço total E_1 de $f^*\xi$ é um subconjunto de $B_1 \times E$ que consiste de todos os pares $(b, e) \in B_1 \times E$ tais que $f(b) = \pi(e)$. A aplicação projeção $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$ é definida por $\pi_1(b, e) = b$. Assim temos que o seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\hat{f}} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

onde $\hat{f}(b, e) = e$. A estrutura de espaço vetorial em $\pi_1^{-1}(b)$ é dada por:

$$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1 e_1 + t_2 e_2)$$

Portanto \hat{f} leva cada espaço vetorial $F_b(f^*\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial $F_{f(b)}(\xi)$. Vejamos que $f^*\xi$ é localmente trivial. Sejam (U, h) um sistema de coordenadas locais para ξ , definamos $U_1 = f^{-1}(U)$ e $h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$ por $h_1(b, x) = (b, h(f(b), x))$, provemos que h_1 é um homeomorfismo tal que $x \mapsto h_1(b, x)$ define um isomorfismo.

Injetividade: Sejam (b_1, x) e (b_2, y) pertencentes a $U_1 \times \mathbb{R}^n$ tais que $h_1(b_1, x) = h_1(b_2, y)$, isto é $(b_1, h(f(b_1), x)) = (b_2, h(f(b_2), y))$ daí segue que $b_1 = b_2$ e $h(f(b_1), x) = h(f(b_2), y)$, mas h é injetora, logo $x = y$, assim obtemos que $(b_1, x) = (b_2, y)$.

Sobrejetividade: Seja $(b, e) \in \pi_1^{-1}(U)$ segue que $f(b) = \pi(e)$, ou seja $e \in F_{f(b)}(\xi)$, mas a correspondência $x \mapsto h(f(b), x)$ define um isomorfismo entre $F_{f(b)}(\xi)$ e \mathbb{R}^n , logo para $e \in F_{f(b)}(\xi)$ existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $e = h(f(b), x)$, portanto $h_1(b, x) = (b, e)$ ou seja h_1 é sobrejetora.

Agora como h e f são contínuas, segue que h_1 é contínua, além disso sua inversa é dada por $h_1^{-1}(b, e) = (b, h^{-1}(e))$ que é uma função contínua, a correspondência $x \mapsto h_1(b, x)$ define um isomorfismo, pois a correspondência $x \mapsto h(f(b), x)$ define um isomorfismo, logo $f^*\xi$ é localmente trivial.

Se ξ for trivial, segue-se que $f^*\xi$ é trivial.

Definição 1.2.1. Uma aplicação fibrada de η em ξ , é uma aplicação contínua $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ que leva cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ isomorficamente sobre uns dos espaços vetoriais $F_{b'}(\xi)$. Tomando $\bar{g}(b) = b'$ temos que a função resultante $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ é contínua. Assim uma aplicação fibrada de η em ξ é um par de aplicações (g, \bar{g}) que satisfazem as condições da acima

Lema 1.2.1. Se $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$ é uma aplicação fibrada, e se $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ é a aplicação correspondente de espaços base, então η é isomorfo ao fibrado induzido $\bar{g}^*\xi$.

Demonstração: Definamos $h : E(\eta) \rightarrow E(\bar{g}^*(\xi))$ por

$$h(e) = (\pi(e), g(e))$$

onde π é a projeção do fibrado η . É claro que h é contínua, vejamos que h aplica cada fibra $F_b(\eta)$ isomorficamente na fibra $F_{b'}(\bar{g}^*\xi)$ onde $\bar{g}(b) = b'$. De fato, sejam $e_1, e_2 \in F_b(\eta)$, logo $\pi(e_1 + e_2) = b$, assim obtemos que:

$$\begin{aligned} h(e_1 + e_2) &= (b, g(e_1 + e_2)) \\ &= (b, g(e_1) + g(e_2)) \\ &= (b, g(e_1)) + (b, g(e_2)) \\ &= h(e_1) + h(e_2) \end{aligned}$$

portanto h é linear em cada fibra, provemos agora que h é injetora, logo pelo teorema do núcleo da imagem obtemos que h é um isomorfismo nas fibras. Sejam $e_1, e_2 \in F_b(\eta)$ tais que $h(e_1) = h(e_2)$, isto é, $(b, g(e_1)) = (b, g(e_2))$, segue que $g(e_1) = g(e_2)$, mas g é injetora em cada fibra, logo $e_1 = e_2$, segue-se do **lema 1.1.1** que h é um homeomorfismo, e assim η é isomorfo a $\bar{g}^*\xi$. \square

No final da próxima seção e no capítulo 5 apresentaremos alguns exemplos de fibrados induzidos por uma certa aplicação.

c) Produto Cartesiano Dados dois fibrados vetoriais ξ_1, ξ_2 com aplicações projeção $\pi_i : E_i \rightarrow B_i$ $i = 1, 2$, o fibrado produto cartesiano $\xi_1 \times \xi_2$ é definido como sendo o fibrado com projeção $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ onde a cada fibra $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1} = F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ é dada a estrutura de espaço vetorial usual. Se (U_1, h_1) e (U_2, h_2) são sistemas de coordenadas locais para ξ_1 e ξ_2 respectivamente, então $(U_1 \times U_2, h_1 \times h_2)$ é um sistema de coordenadas locais para $\xi_1 \times \xi_2$.

d) Soma de Whitney Consideremos dois fibrados ξ_1 e ξ_2 sobre um mesmo espaço base B . Definamos $d : B \rightarrow B \times B$ por $d(b) = (b, b)$. O fibrado $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre B é chamado a soma de Whitney de ξ_1 e ξ_2 e sera denotada por $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Definição 1.2.2. Consideremos dois fibrados vetoriais ξ e η sobre o mesmo espaço base B com $E(\xi) \subseteq E(\eta)$, então ξ é um subfibrado de η (escreve-se $\xi \subset \eta$) se cada fibra $F_b(\xi)$ é um subespaço vetorial da fibra correspondente $F_b(\eta)$.

Lema 1.2.2. Sejam ξ_1 e ξ_2 subfibrados de η tais que cada espaço vetorial $F_b(\eta)$ é igual a soma direta dos espaços $F_b(\xi_1)$ e $F_b(\xi_2)$. Então η é isomorfo à soma de Whitney $\xi_1 \oplus \xi_2$.

Demonstração: Definamos $f : E(\xi_1 \oplus \xi_2) \rightarrow E(\eta)$ por $f(b, (e_1, e_2)) = e_1 + e_2$, assim temos que f é contínua e leva cada espaço vetorial $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2)$ isomorficamente em seu espaço vetorial correspondente $F_b(\eta)$ segue do **lema 1.1.1** que f é um homeomorfismo, portanto $\xi_1 \oplus \xi_2$ é isomorfo a η . \square

1.3 Fibrado canônico sobre a Variedade de Grassmann

Nesta seção vamos construir um fibrado com espaço base a variedade de Grassmann chamado de fibrado canônico sobre a grassmanniana, veremos mais adiante que este fibrado classifica os fibrados vetoriais.

Definição 1.3.1. A variedade de Grassmann $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o conjunto dos n -planos pela origem de coordenadas do espaço \mathbb{R}^{n+k} .

Observação 1.2. Notemos que para o caso $n = 1$, a variedade de Grassmann $G_1(\mathbb{R}^{k+1})$ coincide com o espaço projetivo $\mathbb{R}P^k$.

O conjunto $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é dotado com a topologia quociente como segue:

Um n -referencial em \mathbb{R}^{n+k} é uma n -tupla de vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^{n+k} . A coleção de todos os n -referenciais em \mathbb{R}^{n+k} é um subconjunto das n -cópias $\mathbb{R}^{n+k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+k}$ chamada variedade de Stiefel e se denota por $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Temos uma aplicação canônica:

$$q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

que leva cada n -referencial para o seu n -plano gerado, q é sobrejetora, então, dizemos que $U \subseteq G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é aberto se, e somente se, $q^{-1}(U)$ é aberto em $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Agora, seja $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \subseteq V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ o conjunto de todos os n -referenciais ortonormais. Então $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ pode-se considerar como uma identificação de $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$. Podemos ver que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccccc} V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{i} & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{PG} & V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \\ & \searrow q_0 & \downarrow q & \swarrow q_0 & \\ & & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) & & \end{array}$$

onde q_0 é a restrição de q a $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$ e PG indica o processo Gram Schmidt e i é aplicação inclusão.

Observação 1.3. O processo de Gramm Schimidt induz uma aplicação contínua.

Lema 1.3.1. *A variedade de Grassmann $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é uma variedade topológica compacta de dimensão nk .*

Demonstração: Provemos primeiro que $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é um espaço Hausdorff. Para $w \in \mathbb{R}^{n+k}$ fixo, seja $\rho_w(X)$ a distancia ao quadrado de w ao n -plano X . Se x_1, \dots, x_n é uma base ortonormal de X , então a identidade

$$\rho_w(X) = w \cdot w - (w \cdot x_1)^2 - \dots - (w \cdot x_n)^2$$

prova que a composição

$$V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{q_0} G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho_w} \mathbb{R}$$

é contínua, portanto ρ_w é contínua. Agora, se X, Y são dois n -planos diferentes tais que w pertence a X mas não pertence a Y , então $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$, como \mathbb{R} é Hausdorff segue que existem U, V abertos que contem $\rho_w(X)$ e $\rho_w(Y)$ respectivamente tais que $U \cap V = \emptyset$, logo $\rho_w^{-1}(U)$ e $\rho_w^{-1}(V)$ são abertos que contem a X e Y respectivamente, e além disso $\rho_w^{-1}(U) \cap \rho_w^{-1}(V) = \emptyset$. Notemos que o conjunto $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^{n+k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+k}$ portanto é compacto, segue de $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = q_0(V_n^o(\mathbb{R}^{n+k}))$ que $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é compacto, q_0 é a restrição de q ao conjunto $V_n^o(\mathbb{R}^{n+k})$.

Agora vejamos que $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é localmente homeomorfo a \mathbb{R}^{kn} . Seja $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, assim $\mathbb{R}^{n+k} = X_0 \oplus X_0^\perp$, seja também $P: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0$ a projeção ortogonal e consideremos o conjunto U de todos os n -planos Y tais que $P(Y) = X_0$.

Notemos que $P|_Y: Y \rightarrow X_0$ define um isomorfismo entre Y e X_0 pois $P(Y) = X_0$ assim $P|_Y$ é sobrejetora e como P é linear segue que $P|_Y$ é linear e portanto é injetora, ou seja, $\text{Ker } P|_Y = 0$, mas $\text{Ker } P|_Y = Y \cap X_0^\perp$, logo U é o conjunto dos n -planos Y tais que $Y \cap X_0^\perp = 0$. Notemos que U é um conjunto aberto na Grassmanniana, além disso, cada Y determina uma transformação linear $T_Y: X_0 \rightarrow X_0^\perp$ e cada transformação $T: X_0 \rightarrow X_0^\perp$ determina um n -plano $Y_T \in U$. De fato, se $Y \in U$ então cada $y \in Y$ pode-se escrever de forma unica como $y = x + x^\perp$, com $x \in X_0$ e $x^\perp \in X_0^\perp$ e aplicação $T_Y(x) = x^\perp$ determina uma transformação linear. Reciprocamente se $T: X_0 \rightarrow X_0^\perp$ é linear o conjunto $Y_T = \{x + T(x)/x \in X_0\}$ é um n -plano tal que $Y_T \cap X_0^\perp = 0$. Isto induz uma aplicação bijetora $T: U \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \cong \mathbb{R}^{nk}$ tal que $T(Y) = T|_Y$. Afirmamos que T é um homeomorfismo. Seja x_1, \dots, x_n uma base fixa de X_0 , como $P|_Y$ é um isomorfismo entre Y e X_0 , então, cada n -plano $Y \in U$ tem uma única base y_1, \dots, y_n tal que

$$P(y_1) = x_1, \dots, P(y_n) = x_n$$

Para provar que T é contínua, é suficiente provar que $\psi : U \rightarrow (X_0^\perp)^n$ definida por $\psi(Y) = (T_Y(x_1), \dots, T_Y(x_n))$ é contínua. Consideremos as seguintes funções contínuas:

- A projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0$.
- A projeção ortogonal $P^\perp : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0^\perp$.
- A aplicação $D : q^{-1}(U) \rightarrow q^{-1}(U)$ que leva cada n -referencial (y_1, \dots, y_n) no único n -referencial (y'_1, \dots, y'_n) o qual gera o mesmo plano $q((y_1, \dots, y_n))$ e satisfaz $P(y'_i) = x_i$.
- A função $h : q^{-1}(U) \rightarrow (X_0^\perp)^n$ definida por $h(y_1, \dots, y_n) = (P^\perp(y_1), \dots, P^\perp(y_n))$.

Então, temos que $\psi \circ q = h \circ D$ segue que $\psi \circ q$ é contínua e portanto ψ é contínua, logo T é contínua.

Para provar T^{-1} é contínua, consideremos a função contínua $\varphi : Hom(X_0, X_0^\perp) \rightarrow q^{-1}(U)$ definida por $\varphi(T) = (x_1 + T(x_1), \dots, x_n + T(x_n))$, assim, como $T^{-1} = q \circ \varphi$ concluímos que T^{-1} é contínua. \square

O fibrado canônico $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ sobre $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é construído como segue: Seja

$$E = E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}))$$

O conjuntos dos pares

(n -plano em \mathbb{R}^{n+k} , vetor no n -plano).

A topologia em E é a topologia subespaço de $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$. A aplicação projeção $\pi : E \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é definida por $\pi(X, x) = X$ e a estrutura de espaço vetorial sobre cada fibra em X é definida por:

$$t_1(X, x_1) + t_2(X, x_2) = (X, t_1x_1 + t_2x_2).$$

Lema 1.3.2. *O fibrado vetorial $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ satisfaz a condição de trivialidade local.*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de X_0 como no teorema anterior. Definamos

$$h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

como segue: $h(Y, x) = (Y, y)$ tal que y é o único vetor em Y tal que $P(y) = x$. As identidades

$$h(Y, x) = (Y, x + T(x))$$

$$h^{-1}(Y, y) = (Y, P(y))$$

mostram que h e h^{-1} são contínuas. □

Exemplo 1.3.1. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Sabemos que para cada $p \in S$, existe um aberto V em \mathbb{R}^3 e uma função $\mathbf{x}: U \rightarrow V \cap S$ diferenciável, assim, se $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, então as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tem derivadas parciais contínuas de todos os ordens em U . Além disso, para cada $q \in U$ a aplicação $d\mathbf{x}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, ou seja, os vetores $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})^T$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})^T$ são linearmente independentes. Seja $p \in S$ com $p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, podemos definir a aplicação de Gauss $g: S \rightarrow G_2(\mathbb{R}^3)$ como sendo a composta das funções contínuas $q: V_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow G_2(\mathbb{R}^3)$ e $f: S \rightarrow V_2(\mathbb{R}^3)$ onde $f(p) = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v})$. Agora, se definimos $\hat{g}: E(\tau_S) \rightarrow E(\gamma^2(\mathbb{R}^3))$ como $\hat{g}(p, v) = (T_p S, v)$, onde $T_p S$ é o plano tangente a S trasladado ao origem de coordenadas, obtemos que g é uma aplicação entre o fibrado τ_S e o fibrado $\gamma^2(\mathbb{R}^3)$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} E(\tau_S) & \xrightarrow{\hat{g}} & E(\gamma^2(\mathbb{R}^3)) \\ \pi_\tau \downarrow & & \pi_\gamma \downarrow \\ S & \xrightarrow{g} & G_2(\mathbb{R}^2) \end{array} .$$

Segue do **Lema 1.2.1** que o fibrado tangente τ_S é isomorfo ao fibrado induzido $g^*\gamma^2(\mathbb{R}^2)$

1.4 Grupos de Homotopia

Um dos objetivos desta seção é definir o grupo fundamental e os grupos de homotopia de ordem superior, estes grupos permitem determinar em alguns casos se dois espaços são homotopicamente equivalentes. Os grupos de homotopia também desempenham um papel fundamental na classificação de Fibrados Principais, como veremos nos próximos capítulos. As demonstrações dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [1].

Definição 1.4.1. *Dois caminhos $\sigma, \tau: [0, 1] \rightarrow X$ tais que $\sigma(0) = \tau(0)$ e $\sigma(1) = \tau(1)$ se dizem caminhos homotópicos, se existe um aplicação chamada de homotopia $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

1. $H(t, 0) = \sigma(t)$ e $H(t, 1) = \tau(t)$ para cada $t \in [0, 1]$.
2. $H(0, s) = \sigma(0)$ e $H(1, t) = \sigma(1)$.

Se dois caminhos σ e τ são homotópicos, escrevemos $\sigma \sim \tau$, \sim é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos em X . Denotamos por $[\sigma]$ a classe de homotopia do caminho σ .

Definição 1.4.2. Dados dois caminhos $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ tais que $\sigma(1) = \tau(0)$, seu produto é o caminho

$$(\sigma * \tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

O caminho inverso de σ é $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$.

Lema 1.4.1. Sejam $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$ caminhos em X tais que $\sigma_0(1) = \tau_0(0)$, $\sigma_1(1) = \tau_1(0)$ e $\sigma_0 \sim \sigma_1$, $\tau_0 \sim \tau_1$. Então, $\tau_0 * \sigma_0 \sim \tau_1 * \sigma_1$.

O lema anterior permite definir a multiplicação de classes de equivalência como $[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma * \tau]$.

1.4.1 O grupo fundamental

Definição 1.4.3. Um caminho $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ se chama fechado ou laço, se $\sigma(0) = \sigma(1)$. Se além disso, $\sigma(0) = \sigma(1) = x$ dizemos que σ é um caminho baseado em x .

Se $\Omega(X, x)$ é a família dos laços baseados em x , é claro que o produto e a inversão de caminhos são operações internas neste conjunto. Sobre $\Omega(X, x)$ podemos considerar a relação de homotopia de caminhos, assim definimos o grupo fundamental de X no ponto x como $\pi_1(X, x) = \Omega(X, x) / \sim$.

Teorema 1.4.1. $\pi_1(X, x)$ é um grupo.

Teorema 1.4.2. Se $x, y \in X$ e σ é um caminho munindo x e y , então o homomorfismo de grupos $\varphi_\sigma : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$, definido por $\varphi_\sigma([\tau]) = (\sigma * \tau * \sigma^{-1})$ é um isomorfismo.

Corolário 1.1. Se X é conexo por caminhos, o grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ não depende do ponto $x \in X$. Neste caso, escreve-se $\pi_1(X)$.

Lema 1.4.2. Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, então a aplicação $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$, definida por $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$ é um homomorfismo de grupos, chamado homomorfismo induzido por φ .

Teorema 1.4.3. Sejam $\varphi : Y \rightarrow Z$, $\psi : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então

1. $(\varphi \psi)_* = \varphi_* \psi_*$.
2. $\mathbb{I}_* = \mathbb{I}$ onde $\mathbb{I}_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ é o homomorfismo identidade induzido pela aplicação identidade em X .

Desta forma o grupo fundamental proporciona uma forma de passar da topologia a álgebra. Ou seja, o grupo fundamental define um Funtor da categoria de espaços topológicos para a categoria de grupos.

Teorema 1.4.4. *Se $\varphi : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então a aplicação induzida $\varphi_*\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$ é um isomorfismo para cada $x \in X$.*

Corolário 1.2. *Se X é contratil, então $\pi_1(X, x) = \{0\}$.*

1.4.2 Grupos de homotopia de ordem superior

A definição do n -ésimo grupo de homotopia de um espaço X num ponto $x_0 \in X$, $\pi_n(X, x_0)$, é análoga ao grupo fundamental. Substituímos o intervalo $I = [0, 1]$ pelo cubo I^n que consiste de todos os pontos $t = (t_1, \dots, t_n)$ no espaço euclidiano tais que $0 \leq t_i \leq 1$ com $i = 1, \dots, n$. Uma $(n - 1)$ -face do cubo I^n é obtida fazendo algum $t_i = 0$ ou 1 . A união das $(n - 1)$ -faces formam a fronteira ∂I^n de I^n .

Vamos considerar funções de I^n em X que enviam a fronteira ∂I^n no ponto x_0 , assim os elementos de $\pi_n(X, x_0)$ são classes de homotopia de estas funções, ou seja

$$\pi_n(X, x_0) = \{[f] \mid f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)\}$$

Se comprimimos a fronteira de um n -cubo num ponto, obtemos uma configuração equivalente à n -esfera e um ponto de referencia y_0 em S^n . Assim podemos definir um elemento de π_n como a classe de homotopia de funções de S^n em X que enviam o ponto y_0 no ponto x_0 .

Uma generalização muito útil de grupos de homotopia $\pi_n(X, x_0)$ são os grupos de homotopias relativos $\pi_n(X, A, x_0)$ ao par (X, A) com ponto base $x_0 \in A$. A $(n - 1)$ -face inicial de I^n , denotada por I^{n-1} é definida como o conjunto dos (t_1, \dots, t_n) tais que $t_n = 0$. A união das outras $(n - 1)$ -faces de I^n é denotada por J^{n-1} . Então

$$\partial I^n = I^{n-1} \cup J^{n-1} \quad \partial I^{n-1} = I^{n-1} \cap J^{n-1}.$$

Se X é um espaço topológico, e A é subespaço de X , aplicação

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

é uma função contínua de I^n em X tal que leva a I^{n-1} em A e J^{n-1} em x_0 . Em particular, leva a ∂I^n em A e ∂I^{n-1} em x_0 . Denotemos por $F^n(X, A, x_0)$ ou simplesmente F^n o conjunto de tais funções.

Se f_1, f_2 estão em F^n , sua soma $f_1 + f_2$ é definida por:

$$(f_1 + f_2)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se $n \geq 2$ e $t_1 = \frac{1}{2}$, então ambas linhas são iguais a x_0 . Portanto $f_1 + f_2$ é contínua e pertence a F^n .

Duas aplicações $f_0, f_1 \in F^n$ são homotópicas, $f_0 \simeq f_1$ se existe uma função

$$f : I^n \times I \rightarrow X$$

tal que $f(t, 0) = f_0(t)$, $f(t, 1) = f_1(t)$ e para cada $r \in I$ a função $f_r : I^n \rightarrow X$ definida por $f_r(t) = f(t, r)$ pertence a F^n . A relação de homotopia em F^n é uma relação de equivalência. Assim definimos

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{[f] \mid f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)\}$$

Agora se $f_i \simeq f'_i$ ($i = 1, 2$) em F^n , então $f_1 + f_2 \simeq f'_1 + f'_2$. De fato, sejam $F : f_1 \simeq f'_1$ e $G : f_2 \simeq f'_2$, assim temos que a função $H : I^n \times I \rightarrow X$ definida por

$$H((t_1, \dots, t_n), s) = \begin{cases} F((2t_1, t_2, \dots, t_n), s), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ G((2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), s), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f_1 + f'_2$ e $f_2 + f'_2$. Portanto podemos definir a soma em $\pi_n(X, A, x_0)$ como:

$$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2].$$

A notação de soma é usada porque o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano para $n > 1$, para mais detalhes podem ser consultados os livros [15] ou [1].

Operador bordo: O homomorfismo bordo

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \partial \pi_{n-1}(A, x_0)$$

é definido escolhendo um representante f de $\alpha \in \Pi_n$ e restringindo f à face inicial I^{n-1} de I^n , assim

$$\partial f : (I^{n-1}, I^{n-2}, J^{n-2}) \rightarrow (A, x_0, x_0).$$

Uma homotopia de f_0 e f_1 restrita a $I^{n-1} \times I$ induz uma homotopia entre ∂f_0 e ∂f_1 em $F^{n-1}(A, x_0)$, portanto $f \mapsto \partial f$ induz uma aplicação de classes de homotopia. Claramente

$$\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 + \partial f_2.$$

Portanto $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ é um homomorfismo.

Homomorfismo induzido: A função $h : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ induz uma aplicação $h_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ que é um homomorfismo tal que $(hf)_* = h_* f_*$, $id_* = id$ e $h_* = f_*$ se $h \simeq f$.

Sejam $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $j : (X, x_0, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ as aplicações inclusões. A sequência infinita de grupos

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

é chamada sequência homotópica de (X, A, x_0) .

Teorema 1.4.5. *A sequência homotópica é exata.*

Observação 1.4.1. *Uma n -celula aberta ou fechada e é um espaço contrátil, portanto $\pi_n(e, x_0) = 0$ para cada $x_0 \in e$ e para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos (e, S) uma q -celula fechada e a sua fronteira S , ou seja um homeomorfismo de $(I^q, \partial I^q)$, seja $x_0 \in S$. Então*

$$\pi_n(e) \xrightarrow{j_*} \pi_n(e, S) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(e)$$

é uma sequência exata, como $\pi_n(e) = 0$, então $Im j_* = 0$, pela exatidão tem-se que $Ke r \partial$ é zero, além disso $\pi_{n-1}(e) = 0$ daí segue que $Ke r i_* = \pi_{n-1}(S)$, novamente pela exatidão temos que:

$$\partial : \pi_n(e, S) \cong \pi_{n-1}(S)$$

Definição 1.4.4. *Um espaço X com ponto base x_0 , diz-se n -conexo, se $\pi_i(X, x_0) = 0$ para $i \leq n$*

É fácil verificar que as seguintes condições são equivalentes.

1. Toda aplicação $S^i \rightarrow X$ é homotópica à função constante.
2. Toda aplicação $S^i \rightarrow X$ pode-se estender a uma aplicação $D^{i+1} \rightarrow X$.
3. $\pi_i(X, x_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$.

O próximo Teorema é um resultado fundamental de toda a Teoria de Homotopia. Este teorema é extremamente útil e mostra a importância dos grupos de homotopia.

Teorema de Whitehead 1.4.1. *Se a aplicação $f : X \rightarrow Y$, com X, Y CW complexos induz um isomorfismo $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então f é uma equivalência homotópica.*

1.4.3 Fibrações

Intuitivamente uma fibração generaliza uma propriedade topológica dos fibrado. O objetivo desta seção é mostrar que todo fibrado é uma fibração de Serre.

Definição 1.4.5. *Sejam E, B espaços topológicos. A aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ tem a propriedade de levantamento de homotopia em relação ao espaço X , se para todo par de funções $\tilde{g} : X \times \{0\} \rightarrow E$ e $G : X \times I \rightarrow B$ tais que $p\tilde{g} = Gi$, existe uma função contínua $\tilde{G} : X \times I \rightarrow E$ tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array} .$$

Definição 1.4.6. *Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ é uma fibração se tem a propriedade de levantamento de homotopia. Se $b \in B$ então $p^{-1}(b) = F_b$ é chamada de fibra em b .*

Exemplo 1.4.1. *Se \tilde{X} é um espaço de recobrimento para o espaço X , então a projeção $P : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma fibração.*

Exemplo 1.4.2. *Se $E = B \times F$, então a projeção $P : E \rightarrow B$ definida por $(b, x) \mapsto b$ é uma fibração com fibra F . De fato, consideremos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}} & B \times F \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

definamos $\tilde{G} : x \times I \rightarrow B \times F$ por $\tilde{G}(x, t) = (G(x, t), q\tilde{g}(x))$ onde $q : B \times F \rightarrow F$ é definida por $(b, x) \mapsto x$, assim obtemos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{g}} & B \times F \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array} .$$

Definição 1.4.7. Uma aplicação $p : E \rightarrow B$ que tem a propriedade de levantamento em relação a todo cubo I^n é chamada de *fibração de Serre*.

Proposição 1.4.1. Toda fibração de Serre $p : E \rightarrow B$ tem a propriedade de levantamento de homotopia em relação a todo CW-complexo X .

Demonstração:

Como um CW-complexo tem a topologia do limite, então é suficiente mostrar que existe \tilde{G}_n para todo $n \geq 0$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X^{(n)} & \xrightarrow{\tilde{g}_n} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{G}_n & \downarrow p \\ X^n \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

onde $\tilde{g} : X \rightarrow E$ e $G : X \times I \rightarrow B$ são dadas e satisfazem $\tilde{g}_n = g|_{X^{(n)}}$, $G_n = G|_{X^{(n)} \times I}$.

Vamos provar por indução sobre n . Seja $n = 0$, então, para cada $x \in X^{(0)}$, existe uma função contínua $h_x : \{x\} \times I \rightarrow E$ com $h_x(x, 0) = \tilde{g}_0(x)$ e $ph_x = G_0$ já que p é uma fibração de Serre. Como $X^{(0)}$ é discreto, a função $\tilde{G}_0 : X^{(0)} \times I \rightarrow E$ definida por $\tilde{G}_0(x, t) = h_x(x, t)$ é contínua. Suponhamos que $n > 0$ e que existe $\tilde{G}_{n-1} : X^{(n-1)} \times I \rightarrow E$, seja e uma n -célula em X e seja $\phi_e : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (e \cup X^{n-1}, X^{n-1})$ a aplicação característica de e . Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (D^n \times 0) & \xrightarrow{h} & E \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

onde $h|_{D^n \times 0} = \tilde{g} \phi_e$ e $h|_{S^{n-1} \times I} = \tilde{G}_{n-1}(\phi_e \times id)$, agora os pares (I^{n+1}, I^n) e $(D^n \times I, D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I)$ são homeomorfos. Portanto se $r_e : D^n \times I \rightarrow E$ faz que o diagrama anterior comute, podemos definir $g_e : \bar{e} \times I \rightarrow E$ por $g_e(x, t) = r_e(u, t)$ onde $x \in \bar{e}$ e $u \in D^n$ satisfazem que $\phi_e(u) = x$, assim obtemos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{e} & \xrightarrow{\tilde{g}_n} & E \\ i \downarrow & \nearrow g_e & \downarrow p \\ \bar{e} \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

"colando" todas as g_e obtemos uma função contínua \tilde{G}_n que satisfaz as propriedades que nos desejamos. □

O seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], mostra a relação que há entre um espaço fibrado e uma fibração.

Teorema 1.4.6. Todo fibrado $\pi : E \rightarrow B$ sobre um espaço para compacto B é uma fibração.

Para nossos propósitos vamos mostrar uma versão mais fraca do teorema anterior.

Teorema 1.4.7. *Todo fibrado $p : E \rightarrow B$ com fibra F tem a propriedade de levantamento em relação aos espaços CW -complexos.*

Demonstração: Vamos mostrar que todo fibrado $p : E \rightarrow B$ com fibra F tem a propriedade de levantamento em relação aos cubos I^n , logo pela proposição anterior podemos concluir que todo fibrado tem a propriedade de levantamento em relação aos espaços CW -complexos.

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ I^{n+1} & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

A família de abertos da forma $G^{-1}(V)$ com V variando ao longo do sistema coordenado do fibrado $p : E \rightarrow B$ é uma cobertura aberta do espaço métrico compacto I^{n+1} . Se λ é o número de Lebesgue de esta cobertura, então se $A \subset I^{n+1}$ tem diâmetro menor do que λ , temos que existe V vizinhança coordenada tal que $A \subset G^{-1}(V)$, ou seja $G(A) \subset V$. Dividamos I^n em cubos C tal que o diâmetro de C seja menor do que $\frac{\lambda}{2}$ e escolhamos pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ de I tal que $t_{j+1} - t_j < \frac{\lambda}{2}$ para cada $0 \leq j < m$, assim temos que o diâmetro de $C \times [t_j, t_{j+1}]$ é menor do que λ , daí segue que $G(C \times [t_j, t_{j+1}]) \subset V$.

Vamos provar por indução que $G = G_n : C \times I \rightarrow B$ tem a propriedade de levantamento para cada cubo C da partição I^n . De fato vejamos que para $n = 0$, p tem a propriedade de levantamento de homotopia. Vamos denotar as projeções $V \times F \rightarrow V$ e $V \times F \rightarrow F$ por α_v e β_v respectivamente. se $e \in p^{-1}(V)$, então $\varphi_v^{-1}(e) = (\alpha_v \varphi_v^{-1} e, \beta_v \varphi_v^{-1} e)$, como $p(\varphi_v(v, x)) = v$ segue que $\alpha_v \varphi_v^{-1} e = p e$, portanto para cada $e \in p^{-1}(V)$ tem-se que

$$\varphi_v(p e, \beta_v \varphi_v^{-1} e) = e.$$

Seja $I^0 = \{u\}$, existe uma vizinhança coordenada V tal que $G(\{u\} \times [0, t_1]) \subset V$. Definamos $\tilde{G}_u : \{u\} \times [0, t_1] \rightarrow p^{-1}(V)$ por $\tilde{G}_u(u, t) = \varphi_v(G(u, t), \beta_v \varphi_v^{-1} \tilde{g}_0(u))$. Agora $p \tilde{G}_u(u, t) = G(u, t)$ e $\tilde{G}_u(u, 0) = \varphi_v(G(u, 0), \beta_v \varphi_v^{-1} \tilde{g}_0(u)) = \varphi(p \tilde{g}_0(u), \beta_v \varphi_v^{-1} \tilde{g}_0(u)) = \tilde{g}_0(u)$, assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G}_u & \downarrow p \\ I^0 \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Suponhamos que $G = G_n$ tem a propriedade de levantamento para todo $k \leq n$. Consideremos um cubo C em I^{n+1} , então $G(C \times [0, t_1]) \subset V$, onde V é uma vizinhança coordenada. Se restringimos a retração

$$I^{n+1} \times [0, t_1] \rightarrow (I^{n+1} \times \{0\}) \cup (\partial I^{n+1} \times [0, t_1])$$

ao cubo C , obtemos a retração

$$r_C : C \times [0, t_1] \rightarrow (C \times \{0\}) \cup (\partial C \times [0, t_1])$$

definamos

$$w_C : (C \times \{0\}) \cup (\partial C \times [0, t_1]) \rightarrow p^{-1}V$$

por $w_C|_{C \times \{0\}} = \tilde{g}_0|_{C \times \{0\}}$ e $w_C|_{\partial C \times [0, t_1]} = \tilde{G}_n|_{\partial C \times [0, t_1]}$ onde \tilde{G}_n existe pela hipótese de indução (∂ = cubo em I^{n+1}).

Finalmente, definamos

$$\tilde{G}_C : C \times [0, t_1] \rightarrow p^{-1}(V)$$

por

$$\tilde{G}_C(u, t) = \varphi_V(G(u, t), \beta_V \varphi_V^{-1} w_C r_C(u, t))$$

Vejamos que $\tilde{G}_C|_{\partial C \times [0, t_1]} = \tilde{G}_n|_{\partial C \times [0, t_1]}$ e que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & p^{-1}(V) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G}_C & \downarrow p \\ C \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & V \end{array}$$

Claramente $p\tilde{G}_C(u, t) = p\varphi_V(G(u, t), -) = G(u, t)$, agora se $(u, t) \in (C \times \{0\}) \cup (\partial C \times [0, t_1])$, então $r_C(u, t) = (u, t)$, se $(u, t) \in C \times \{0\}$, então $G(u, t) = G(t, 0) = p\tilde{g}_0(u)$ e $w_C(u, t) = \tilde{g}_0(u)$, portanto

$$\tilde{G}_n(u, t) = \varphi_V(p\tilde{g}_0(u), \beta_V \varphi_V^{-1} \tilde{g}_0(u)) = \tilde{g}_0(u)$$

então se $(u, t) \in \partial C \times [0, t_1]$, obtemos que $G(u, t) = p\tilde{G}_n(u, t)$ $V_C(u, t) = \tilde{G}_n(u, t)$, portanto

$$\tilde{G}_C(u, t) = \varphi_V(p\tilde{G}_n(u, t), \beta_V \varphi_V^{-1} \tilde{G}_n(u, t)) = \tilde{G}_n(u, t)$$

Agora como a fronteira de cada cubo em I^{n+1} é um cubo em I^n , pelo lema do colagem podemos

construir uma função

$\tilde{G}_1 : I^{n+1} \times [0, t_1] \rightarrow E$, tal que o diagrama em baixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 I^{n+1} & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{G}_1 & \downarrow p \\
 I^{n+1} \times I_1 & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

onde $I_1 = [0, t_1]$. Agora podemos repetir esta construção com o intervalo $[t_1, t_2]$ e obtemos uma aplicação $I^{n+1} \times [0, t_2]$ que coincide com \tilde{G}_1 em $I^{n+1} \times \{t_1\}$, continuando este processo obtemos uma aplicação \tilde{G} tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 I^{n+1} & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\
 I^{n+1} \times I & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

□

Capítulo 2

Classificação de Fibrados Vetoriais

O objetivo deste capítulo é mostrar que qualquer fibrado vetorial é isomorfo ao "pullback" do fibrado canônico sobre a grassmanniana, ou seja neste capítulo vamos classificar os fibrados vetoriais como o "pullback" do fibrado canônico da grassmanniana. Por último vamos mostrar que o fibrado canônico sobre a grassmanniana infinita classifica homotopicamente os fibrados vetoriais.

2.1 O fibrado Universal $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$

Teorema 2.1.1. *Para todo \mathbb{R}^n fibrado ξ sobre um espaço compacto B existe uma aplicação fibrada $\xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ para k suficientemente grande.*

Demonstração: Para construir uma aplicação fibrada $f : \xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^m)$ é suficiente construir uma aplicação contínua

$$\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que seja linear e injetora em cada fibra de ξ . Então a função f pode ser definida por

$$f(e) = (\hat{f}(\text{fibra sobre } e), \hat{f}(e)) = (\hat{f}(\pi^{-1}(b)), \hat{f}(e))$$

Afirmamos que f é contínua. De fato, definamos $g : B \rightarrow G_n(\mathbb{R}^m)$ por $g(b) = \hat{f}(\pi^{-1}(b)) = g(\pi(e))$, assim f fica definida como

$$f(e) = (g(\pi(e)), \hat{f}(e)).$$

Portanto se provamos que g é contínua, então temos que f é contínua. Seja $\{U_i\}$ uma cobertura finita aberta de B tal que cada $\xi|_{U_i}$ é trivial, consideremos as seguintes funções contínuas: $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ (h_i são as trivializações locais)

$w_i : U_i \rightarrow (U_i \times \mathbb{R}^n)^n$ definida por $w_i(b) = ((b, e_1), \dots, (b, e_n))$ onde e_1, \dots, e_n são a base canônica para \mathbb{R}^n

$H_i : (U_i \times \mathbb{R}^n)^n \rightarrow (E)^n$ definida por $H_i((b_1, v_1), \dots, (b_n, v_n)) = (h_i(b_1, v_1), \dots, h_i(b_n, v_n))$

$G_i : (\pi^{-1}(U_i))^n \rightarrow (\mathbb{R}^m)^n$ definida por $G_i(x_1, \dots, x_n) = (\hat{f}(x_1), \dots, \hat{f}(x_n))$

Como os h_i são isomorfismos em cada fibra e \hat{f} é injetora em cada fibra, temos que $G_i \circ H_i \circ w_i(b) \in V_n(\mathbb{R}^m)$, assim $g|_{U_i} = q \circ G_i \circ H_i \circ w_i$ portanto $g|_{U_i}$ é contínua, logo g é contínua.

Vejamos agora como construir \hat{f} . Sejam U_1, \dots, U_r uma cobertura aberta de B tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial, como B é normal existe uma cobertura V_1, \dots, V_r tal que $\bar{V}_i \subseteq U_i$, analogamente podemos encontrar uma cobertura W_1, \dots, W_r tal que $\bar{W}_i \subseteq V_i$. Pelo lema de Urysohn, existem funções contínuas $\lambda_i : B \rightarrow [0, 1]$ tais que

$$\lambda_i(\bar{W}_i) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_i(V_i^c) = 0.$$

Como $\xi|_{U_i}$ é trivial, existem aplicações contínuas $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que h_i é linear e injetora em cada fibra, com $i = 1, \dots, r$. Definamos $\hat{h}_i : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} \hat{h}_i(e) &= 0 \quad \text{se} \quad \pi(e) \notin U_i \\ \hat{h}_i(e) &= \lambda_i(\pi(e))h_i(e) \quad \text{se} \quad \pi(e) \in U_i \end{aligned}$$

claramente \hat{h}_i são contínuas, assim podemos definir $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo $\hat{f}(e) = (\hat{h}_1(e), \dots, \hat{h}_r(e))$, \hat{f} é contínua e injetora em cada fibra. \square

Notemos que pelo teorema anterior $f : E \rightarrow E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}))$ é uma aplicação fibrada, assim nos podemos definir uma aplicação contínua

$$g : B \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B & \xrightarrow{g} & G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \end{array}$$

Dai pelo **lema 1.2.1** ξ é isomorfo a $f^*\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$. Assim temos classificado os fibrados vetoriais como o pullback do fibrado canônico $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$. Neste sentido vamos dizer que o fibrado $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ é universal.

Definição 2.1.1. Um espaço topológico B é paracompacto se B é Hausdorff e se para toda cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de B , existe uma cobertura $\{V_\alpha\}$ tal que

1. V_α está contido em algum U_α .
2. Cada ponto de B tem uma vizinhança que intercepta um número finito de V_α .

Se o espaço B é paracompacto de dimensão finita podemos aplicar um argumento similar para construir uma aplicação fibrada entre ξ e $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$

Vamos mostrar que o lema anterior também é certo para o caso do que B seja um espaço paracompacto de dimensão infinita. Para isto precisamos construir um novo fibrado análogo ao fibrado canônico sobre a grassmanniana de dimensão finita. No caso do lema anterior tivemos uma cobertura finita do B assim nos precisamos escolher um k suficientemente grande para construir a aplicação $f: \xi \rightarrow \gamma^n$ mas para o caso de B paracompacto nos podemos ter uma cobertura não contável, ou seja precisamos que k tenda ao infinito.

Seja \mathbb{R}^∞ o espaço vetorial que consiste das sequências infinitas

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

com $x_i \in \mathbb{R}$ e onde só um número finito dos x_i são diferentes de zero. Para k fixo o subespaço de todos

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots)$$

será denotado por o espaço coordenado \mathbb{R}^k . Assim temos que $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \dots$, e

$$\bigcup_{k \geq 1} \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^\infty.$$

Definição 2.1.2. A variedade de Grassmann infinita

$$G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$$

é o conjunto dos n -planos pela origem \mathbb{R}^∞ .

Notemos que $G_n(\mathbb{R}^n) \subseteq G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq \dots$ além disso a topologia em G_n é a topologia fraca, ou seja $U \subseteq G_n$ é aberto em G_n se, e somente se, $U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ para todo k .

2.2 Fibrado Universal γ^n

O fibrado canônico γ^n sobre G_n é construído como no caso finito dimensional como segue. Seja

$$E(\gamma^n) \subseteq G_n \times \mathbb{R}^\infty$$

o conjunto de todos os pares

$$(n\text{-plano em } \mathbb{R}^\infty, \text{ vetor no } n\text{-plano})$$

Definamos $\pi : E(\gamma^n) \rightarrow G_n$ por $\pi(X, x) = X$.

Antes de provar que γ^n é um fibrado vetorial, lembremos o seguinte resultado da topologia.

Lema 2.2.1. *Sejam A e B espaços topológicos com $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, onde $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ é dotado com a topologia fraca ou topologia do limite. Então $f : A \rightarrow B$ é contínua se e somente se, $f|_{A_n}$ é contínua para todo n .*

Lema 2.2.2. *γ^n é localmente trivial.*

Demonstração: Seja $X_0 \subseteq \mathbb{R}^\infty$ um n -plano fixo, e seja $U \subseteq G_n$ o subconjunto de todos os n -planos Y com projeção X_0 dada pela projeção ortogonal

$$P : \mathbb{R}^\infty \rightarrow X_0$$

U é aberto, pois para cada k a interseção

$$U_k = U \cap G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

é um conjunto aberto. Definamos

$$h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U).$$

Por $h(Y, x) = (Y, y)$ segue do **lema 1.3.2** que $h|_{U_k \times X_0}$ é contínua para todo k , assim pelo lema anterior h é contínua, a identidade $h^{-1}(Y, y) = (Y, Py)$ mostra que h é um homeomorfismo. \square

Lema 2.2.3. *Para cada fibrado vetorial ξ sobre um espaço paracompacto B , existe uma cobertura localmente finita B contável U_1, U_2, \dots tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial para cada i .*

Demonstração: Escolhamos uma cobertura aberta V_α localmente finita tal que $\xi|_{V_i}$ é trivial, e escolhamos uma cobertura aberta W_α com $\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha$ para cada α . Pelo lema de Urysonh temos que existe uma função contínua $\lambda_\alpha : B \rightarrow [0, 1]$ que toma o valor de 1 em \overline{W}_α e valor de 0 fora de

V_α . Dai segue que $V_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}((0, 1])$. Para cada $b \in B$, seja $S(b)$ o conjunto finito de índices α com $\lambda_\alpha > 0$. Para um conjunto finito de S de índices seja $U(S)$ o conjunto dos $b \in B$ tal que

$$\lambda_\alpha(b) > \lambda_\beta(b)$$

para $\alpha \in S$ e $\beta \notin S$, notemos que $U(S) = (\lambda_\alpha(b) - \lambda_\beta(b))^{-1}(0, 1]$, assim $U(S)$ é aberto. Além, se S e S' são dois subconjuntos de índices diferentes com k elementos então $U(S) \cap U(S') = \emptyset$. De fato, existe $\alpha \in S$ com $\alpha \notin S'$ e $\beta \in S'$ tal que $\beta \notin S$ para $b \in U(S)$ temos que $\lambda_\alpha(b) > \lambda_\beta(b)$ e $\lambda_\beta(b) > \lambda_\alpha(b)$, portanto $U(S) \cap U(S') = \emptyset$

Seja U_k a união dos $U(S)$ para os quais S tem k elementos, U_k e

$$B = U_1 \cup U_2 \cup \dots$$

Notemos que $U(S) \subseteq V_\alpha$, daí, como $\{V_\alpha\}$ é localmente finita segue que $\{U_\alpha\}$ é localmente finita. Além disso como cada $\xi|_{V_\alpha}$ é trivial, tem-se que $\xi|_{U(S)}$ é trivial, portanto, como U_k é uma união disjunta dos $U(S)$, segue que $\xi|_{U_k}$ é trivial. \square

Lembremos que no **Teorema 2.1.1** provamos que uma aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear em cada fibra determina uma aplicação fibrada $\xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ para k suficientemente grande, o seguinte lema é uma generalização para o caso do que B seja paracompacto, sua prova é análoga à prova do teorema mencionado, só que neste caso precisamos usar o lema anterior para encontrar uma cobertura contável $\{U_i\}$ onde cada $\xi|_{U_i}$ seja trivial.

Lema 2.2.4. *Seja $\xi = (E, B, \pi)$ um \mathbb{R}^n -fibrado com B paracompacto. Então uma aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ que é linear e injetora em cada fibra de E determina uma aplicação fibrada $F : \xi \rightarrow \gamma_n$ definida por*

$$F(x) = (g(\pi(x)), f(x))$$

com $g : B \rightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ definida por $g(b) = f(\pi^{-1}(b))$.

Teorema 2.2.1. *Se $\xi = (E, B, \pi)$ é um \mathbb{R}^n -fibrado sobre um espaço paracompacto B , então existe uma aplicação fibrada*

$$F : \xi \rightarrow \gamma_n.$$

Demonstração: Seja $\{U_i\}$ uma cobertura aberta localmente finita de B tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial para cada i . Além disso sejam $\{V_i\}$ e $\{W_i\}$ coberturas localmente finitas tais que $\overline{W}_i \subseteq V_i$ e $\overline{V}_i \subseteq U_i$. Como B é normal, pelo lema de Urysohn para cada i existe uma função contínua

$$\lambda_i : B \rightarrow [0, 1]$$

tal que $\lambda_i(\overline{W}_i) = 1$ e $\lambda_i(V_i^c) = 0$. Sejam $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ e sejam $r_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção sobre \mathbb{R}^n . Para cada i definamos $H_i : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H_i(x) = \lambda_i(\pi(x))r_i h_i^{-1}(x)$ para cada $x \in \pi^{-1}(U_i)$ e $H_i(x) = 0$ para cada $x \in \pi^{-1}(U_i)^c$. Claramente cada H_i é uma função contínua, definamos $f : E \rightarrow \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\infty$ por

$$f(x) = (H_i(x))_i^\infty$$

h_i são isomorfismo em cada fibra, logo f é injetora em cada fibra, pelo lema anterior existe $F : \xi \rightarrow \gamma_n$. □

2.3 Homotopia de Fibrados Vetoriais

Nesta seção vamos provar que o fibrado canônico γ^n sobre a grassmanniana infinita G_n , classifica homoticamente os fibrados vetoriais com espaço base paracompacto.

Vamos começar com a definição de homotopia entre aplicações fibradas, a qual é análoga à definição de homotopia entre duas aplicações, ou seja, dizemos que dois aplicações fibradas $f, g : \xi \rightarrow \eta$ são homotópicas, se existir uma família 1-parâmetro de aplicações fibradas

$$h_t : \xi \rightarrow \eta$$

com $h_0 = f$ e $h_1 = g$ tal que h é contínua como função de duas variáveis. Em outras palavras a aplicação

$$h : E(\xi) \times [0, 1] \rightarrow E(\eta)$$

é contínua.

Teorema 2.3.1. *Todo par de aplicações fibradas de um \mathbb{R}^n -fibrado em γ^n são homotópicas.*

Demonstração: Observemos primeiro que se temos uma aplicação fibrada $f : \xi \rightarrow \gamma^n$, então fazendo $\hat{f} = p_{\mathbb{R}^\infty} \circ f$, onde $p_{\mathbb{R}^\infty} : G_n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ é a aplicação projeção, obtemos que $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ é uma aplicação linear e injetora em cada fibra de ξ , ou seja, toda aplicação fibrada $f : \xi \rightarrow \gamma^n$ determina uma aplicação $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ linear e injetora nas fibras de ξ . Reciprocamente, \hat{f} determina f pela identidade

$$f(e) = (\hat{f}(\text{fibra sobre } e), \hat{f}(e)).$$

Agora, sejam $f, g : \xi \rightarrow \gamma^n$ duas aplicações fibradas.

Caso 1: Suponhamos que $\hat{f}(e) \neq -\hat{g}(e)$ para todo vetor $e \in E(\xi)$ não zero, então a formula

$$\hat{h}_t(e) = (1-t)\hat{f}(e) + t\hat{g}(e) \quad 0 \leq t \leq 1$$

determina uma homotopia entre \hat{f} e \hat{g} . De fato, sabemos que as funções soma e produto por escalar $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente são contínuas, logo pelo **lema 2.2.1** temos que as respectivas funções $S : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ também são contínuas, assim como \hat{h}_t é soma de funções contínuas, segue que \hat{h}_t é contínua como função de duas variáveis. Como $\hat{f}(e) \neq 0$ para cada vetor $e \neq 0$, temos que \hat{f}_t é injetora em cada fibra $E(\xi)$, assim podemos definir $h_t : E(\xi) \times [0, 1] \rightarrow E(\gamma^n)$ por

$$h_t(e) = (\hat{h}_t(\text{fibra em } e), \hat{h}_t(e)).$$

Vejamus que h_t é contínua. De fato, temos que a aplicação $h_t : E(\xi) \times [0, 1] \rightarrow E(\gamma^n)$ determina uma aplicação $\bar{h}_t : B(\xi) \times [0, 1] \rightarrow G_n$ tal que o diagrama em baixo comuta

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) \times [0, 1] & \xrightarrow{h_t} & E(\gamma^n) \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B(\xi) \times [0, 1] & \xrightarrow{\bar{h}_t} & G_n \end{array}$$

Seja $\{U_i\}$ uma cobertura enumerável de $B(\xi)$ tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial, e sejam s_1, \dots, s_n seções linearmente independentes de $\xi|_{U_i}$. Então $\bar{h}_t|_{U_i \times [0, 1]}$ pode ser considerada como a composta de:

- A função contínua $H : U_i \times [0, 1] \rightarrow V_n(\mathbb{R}^\infty)$ definida por $H(b, t) = (\hat{f}_t s_1(b), \dots, \hat{h}_t s_n(b))$, e
- a projeção canônica $q : V_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow G_n$.

Pelo **lema 2.2.1** $q : V_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow G_n$ é contínua, portanto \bar{h}_t é contínua, segue que $\pi \circ h_t$ é contínua, de onde concluímos que h_t é contínua.

Caso Geral: Sejam $f, g : \xi \rightarrow \gamma^n$ aplicações fibradas, e consideremos as transformações lineares $d_1 : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, $d_2 : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ definidas como $d_1(e_i) = e_{2i}$ e $d_2(e_i) = e_{2i+1}$ para todos os elementos e_i da base canônica de \mathbb{R}^∞ . Sejam F e G aplicações fibradas induzidas por $d_1 \circ \hat{f}$ e $d_2 \circ \hat{g}$ respectivamente, então aplicando o **caso 1** temos que $F \sim f$, $F \sim G$, e $G \sim g$, aqui o sinal \sim significa ser homotopicas, daí segue que $f \sim g$. \square

Corolário 2.1. *Seja B un espaço paracompacto. Se $f : B \rightarrow G_n$ e $g : B \rightarrow G_n$ são duas aplicações tais que $f^*\gamma^n \cong g^*\gamma^n$, então $f \sim g$*

O teorema 2.2.1 e corolário anterior nos permite dizer que o fibrado canônico γ^n é universal no sentido da definição dada no livro [5] paginas 53-54.

Capítulo 3

G -Fibrados Universais

Neste capítulo daremos um conceito mais geral do fibrado, no qual a fibra Y não tem que ser mais um espaço vetorial. Concretamente vamos trabalhar com G -fibrados coordenados e G -fibrados principais os quais são um caso particular dos G -fibrados coordenados.

Além disso vamos construir um G -fibrado principal devido a Milnor [10], que classifica os G -fibrados.

3.1 G -fibrados ou G -fibrados coordenados

Definição 3.1.1. *Um grupo topológico G é um conjunto que tem estrutura de grupo e tem uma topologia tal que*

1. *A aplicação $\rho : G \rightarrow G$ definida por $\rho(g) = g^{-1}$ é contínua.*
2. *A aplicação $\vartheta : G \times G \rightarrow G$ definida por $\vartheta(g_1, g_2) = g_1 g_2$ também é contínua, e a topologia em $G \times G$ é a topologia produto.*

Se G é um grupo topológico, e Y é um espaço topológico, dizemos que G é um grupo topológico de transformações de Y em relação a $\eta : G \times Y \rightarrow Y$ se:

1. η é contínua.
2. $\eta(e, y) = y$ para cada $y \in Y$, onde e é a identidade de G .
3. $\eta(g_1 g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y))$ para todo g_1, g_2 em G e y em Y .

A aplicação η satisfazendo as condições anteriores é chamada ação à esquerda, neste caso dizemos que G age pela esquerda sobre Y . Por simplicidade escrevemos $g \cdot y$ em vez de $\eta(g, y)$. Daí temos que 2. se escreve como $e \cdot y = y$ e 3. como $(g_1 g_2)y = g_1(g_2 y)$

Para um g fixo, temos que $y \mapsto g \cdot y$ é um homeomorfismo de Y em Y . Assim temos que G é homeomorfo com um subgrupo de $\text{Hom}(Y, Y)$.

Definição 3.1.2. Dizemos que G age efetivamente sobre Y quando o único elemento de G tal que $g \cdot y = y$ para todo y , é o elemento identidade e .

No capítulo 1 vimos que $p : TM \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre a variedade M aqui $TM = \bigcup_{u \in M} T_u M$. Seja (U_i, φ_i) um sistema coordenado para o fibrado tangente, então, se $x = (x^1, \dots, x^n) = \varphi_i(u)$, um elemento em TU_i se pode ver como um ponto $u \in M$, e um vetor $v = \sum_i X^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i} |_u$, onde $x = (x^1, \dots, x^n) = \varphi_i(u)$. Agora, seja (U_j, ψ_j) outro sistema coordenado para o fibrado tangente tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $y = (y^1, \dots, y^n) = \psi_j(u)$. Se tomamos um vetor $v \in T_u M$, onde $u \in U_i \cap U_j$, obtemos que v pode-se escrever como

$$v = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_u = \sum_j \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial y^j} |_u.$$

Daí segue que $\tilde{X}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x) X^i$. A matriz $(G_{ij}) = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$ é não singular, ou seja $(G_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$, assim as fibras de TM estão relacionadas por um elemento de $GL(n, \mathbb{R})$. O grupo $GL(n, \mathbb{R})$ é chamado grupo de estrutura de TM , aliás, é claro que este grupo age efetivamente por multiplicação sobre o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.3. Um G -fibrado ou fibrado coordenado ξ é uma coleção como segue:

1. Um espaço E chamado espaço total ou espaço fibrado.
2. Um espaço B chamado espaço base.
3. Uma aplicação contínua $p : E \rightarrow B$ chamada projeção.
4. Um espaço Y chamado fibra.
5. Um grupo G que age efetivamente em Y .
6. Uma cobertura $\{V_j\}_{j \in J}$ de B .
7. Para cada j em J um homeomorfismo

$$\phi_j : V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$$

tal que:

8. $p\phi_j(b, y) = b$ para cada $b \in V_j, y \in Y$.

9. Se a função $\phi_{jb} : Y \rightarrow p^{-1}(b)$ é definida por

$$\phi_{jb}(y) = \phi_j(b, y)$$

então, para cada $i, j \in J$ e cada $b \in V_i \cap V_j$ o homeomorfismo

$$\phi_{jb}^{-1}\phi_{ib} : Y \rightarrow Y$$

coincide com a operação de um elemento do grupo G .

10. Para cada par i, j em J a função

$$g_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow G$$

definida por $g_{ji}(b) = \phi_{jb}^{-1}\phi_{ib}$ é contínua.

Assim como no caso de fibrados vetoriais o conjunto $p^{-1}(b)$ é chamado de fibra sobre b e sera denotado por Y_b . Notemos que

$$g_{kj}g_{ji}(b) = \phi_{kb}^{-1}\phi_{jb}\phi_{jb}^{-1}\phi_{ib}(b) = \phi_{kb}^{-1}(b) = g_{ki}(b)$$

ou seja

$$g_{kj}(b)g_{ij}(b) = g_{ki}(b) \tag{3.1}$$

Dai segue que $g_{ii} = e$ onde e é a identidade em G

Portanto se fazemos $i = k$ em 3.1 temos que

$$g_{jk}(b) = (g_{kj}(b))^{-1}.$$

Definamos $P_j : p^{-1}(V_j) \rightarrow Y$ por

$$P_j(t) = \phi_{jb}^{-1}(t), b = p(t) \tag{3.2}$$

Então P_j satisfaz as seguintes condições:

$$P_j \phi_j(b, y) = y, \phi_j(p(t), P_j(t)) = t, g_{ji}(p(t)) \cdot P_i(t) = P_j(t) \quad (3.3)$$

De fato

$$\begin{aligned} P_j(\phi_j(b, y)) &= \phi_{j\hat{b}}(\phi_j(b, y)) \\ &= \phi_{j\hat{b}}^{-1}(\phi_j(b, y)) \\ &= \phi_{j\hat{b}}^{-1}(\phi_{j\hat{b}}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

onde $\hat{b} = p\phi_j(b, y) = b$ Aliás, temos que:

$$\begin{aligned} \phi_j(p(t), P_j(t)) &= \phi_{j\hat{b}}(P_j(t)), \hat{b} = p(t) \\ &= \phi_{j\hat{b}}(\phi_{j\hat{b}}^{-1}(t)) \\ &= t \end{aligned}$$

e por último temos

$$\begin{aligned} g_{ji}(p(t)) \cdot P_j(t) &= \phi_{j\hat{b}}^{-1} \phi_{i\hat{b}}(\phi_{i\hat{b}}^{-1}(t)) \\ &= \phi_{j\hat{b}}^{-1}(t) \\ &= P_j(t) \end{aligned}$$

Notemos que para o caso de fibrados vetoriais o grupo G que age efetivamente sobre \mathbb{R}^n é o grupo das transformações lineares de \mathbb{R}^n , $GL(n\mathbb{R})$.

Definição 3.1.4. *Sejam ξ e ξ' dois fibrados coordenados com o mesmo grupo estrutural G . Uma aplicação fibrada $\xi \rightarrow \xi'$ é uma aplicação contínua $h : E \rightarrow E'$, dos espaços totais de ξ e ξ' respectivamente que satisfaz as seguintes condições:*

1. *h leva cada fibra Y_b de E homeomorficamente sobre a fibra $Y_{b'}$ de E' , isto induz uma aplicação contínua $\tilde{h} : B \rightarrow B'$ entre os espaços totais de ξ e ξ' respectivamente tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' \end{array},$$

2. se $b \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$, e $h_x : Y_b \rightarrow Y_{b'}$ é a aplicação induzida por h , $\bar{h}(b) = b'$, então a função

$$\bar{g}_{kj}(b) = \phi'_{kb'} h_b \phi_{jb} = p'_k h_b \phi_{jb}$$

de Y sobre Y coincide com a operação de um elemento de G , e

3. a aplicação

$$\bar{g}_{kj} : V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \rightarrow G$$

é contínua.

3.2 G-Fibrados Principais

Definição 3.2.1. Um fibrado $\xi = \{E, B, p, Y, G\}$ é chamado fibrado principal se $Y = G$ e G age em si mesmo por traslação à esquerda.

Outra definição de fibrado principal mais elegante afirma que se o grupo G é transitivo em G e a função $G \rightarrow Y$ definida por $g \mapsto gy_0$ é aberta então o fibrado ξ é principal.

De fato, pela definição de G -fibrado temos uma ação $G \times Y \rightarrow Y$ que é efetiva, além disso a função

$$\begin{aligned} F: G &\longrightarrow Y \\ g &\longmapsto gy_0 \end{aligned}$$

é aberta, agora como ξ é principal a ação é transitiva, logo F é uma bijeção, como F é contínua e aberta então $G \cong Y$

Seja $G \cdots E \xrightarrow{p} B$ um fibrado principal, lembremos que se $P_j : p^{-1}(V_j) \rightarrow G$ é definida por $P_j(t) = \phi_{jb}^{-1}(t)$ então P_j satisfaz 3.3. Assim podemos definir uma aplicação $\eta : E \times G \rightarrow E$ por $\eta(y, g) = \phi_i((p(y), P_i(y)g))$, claramente η é contínua, vejamos que é uma ação. De fato, seja $e \in G$ o elemento identidade, então $\eta(y, e) = \phi_i(p(y), P_i(y)) = y$, aliás temos que:

$$\begin{aligned}
\eta(\eta(y, g_1), g_2) &= \eta(\phi_i(p(y), P_i(y)g_1), g_2) \\
&= \phi_i(p\phi_i(p(y), P_i(y)g_1), P_i\phi_i(p(y), P_i(y)g_1)g_2) \\
&= \phi_i(p(y), P_i(y)g_1g_2) \\
&= \eta(y, g_1g_2).
\end{aligned}$$

È fácil ver que a ação η é livre e transitiva em cada fibra de ξ

Notemos também que o espaço base B é homeomorfo a o espaço de orbitas E/G . De fato, consideremos as funções $f : E/G \rightarrow B$ e $f' : B \rightarrow E/G$ definidas por $f(xG) = p(x)$ e $f'(b) = xG$, com $x \in p^{-1}(b)$ e $b \in U$ onde U é aberto em B . As funções f e f' estão bem definidas ja que para $y = x \cdot g$, com $x, y \in E$ e $g \in G$ obtemos que

$$\begin{aligned}
h(yG) &= p(x \cdot g) \\
&= p(\phi_b(\phi_b^{-1}(x) \cdot g)) \\
&= (p \circ \phi_b)(\phi_b^{-1}(x) \cdot g) \\
&= pr_1(p(x), \phi_b^{-1}(x) \cdot g) \\
&= p(x)
\end{aligned}$$

onde $pr_1 : U \times G \rightarrow U$ é a projeção na primeira componente. Aliás, se $b \in B$, $x, x' \in p^{-1}(b)$, então, x, x' estão numa mesma fibra de ξ , assim temos que existe $g \in G$ tal que $x = x' \cdot g = \eta(x', g)$, portanto $f'(b) = xG = (x'g)G = x'G$, além disso, f e f' são inversas uma da outra.

Vejamos alguns exemplos de fibrados principais.

Exemplo 3.2.1. Fibrado de Referenciais. *Seja M uma variedade de dimensão n , um sistema de referência num ponto $x \in M$ é uma base de $T_x M \cong \mathbb{R}^n$. O fibrado dos referenciais consiste em considerar todas os possíveis referenciais em cada ponto, o espaço total é o conjunto*

$$FM = \bigcup_{x \in M} F_x M$$

onde $F_x M = \{\text{bases de } T_x M\}$, a projeção $p : FM \rightarrow M$ é definida por $p(t) = x$ se $t \in F_x M$.

O grupo $G = GL(n, \mathbb{R})$ age pela direita livremente em FM . De fato, sejam $t \in FM$ e $x = p(t)$, então existe $R \in T_x M$ tal que $t = (x, R)$. O grupo $GL(n, \mathbb{R})$ transforma bases em bases, assim, dado $g \in G = GL(n, \mathbb{R})$ podemos definir a ação à direita de G sobre FM como

$$tg = (x, g(R)).$$

Vejam que FM é localmente trivial. Seja $(U, (x^1, \dots, x^n))$ uma vizinhança coordenada de M , em cada ponto de $u \in U$ há uma base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_u, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_u \right\}$. A aplicação

$$\begin{aligned} U \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow P^{-1}(U) \\ (u, A) &\longmapsto A\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_u, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_u\right) \end{aligned}$$

define um difeomorfismo, que fixando x é um isomorfismo de grupos de lie.

Exemplo 3.2.2. Seja $p : S^1 \rightarrow S^1$ o fibrado sobre S^1 tal que $p(z) = z^2$. O grupo cíclico de dimensão 2, $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ age livremente pela direita sobre S^1 da seguinte forma: $\Theta_1 : S^1 \rightarrow S^1$, $\Theta_{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ são tais que $\Theta_1(z) = z$ e $\Theta_{-1}(z) = -z$. A fibra no ponto z é $P^{-1}(z) = \{\sqrt{z}, -\sqrt{z}\}$

Sejam $\{(0, 2\pi), e^{i\theta}\}, \{(-\pi, \pi), e^{i\theta}\}$ um atlas em S^1 , consideremos os conjuntos abertos $U_1 = \{e^{i\theta} / \theta \in (0, 2\pi)\}$ e $U_2 = \{e^{i\theta} / \theta \in (-\pi, \pi)\}$, definamos $\phi_1 : U_1 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow p^{-1}(U_1)$ por $\phi_1(e^{i\theta}, 1) = e^{i\theta/2}$, $\phi_1(e^{i\theta}, -1) = -e^{i\theta/2}$ e $\phi_2 : U_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow p^{-1}(U_2)$ por $\phi_2(e^{i\theta}, 1) = e^{i\theta/2}$, $\phi_2(e^{i\theta}, -1) = -e^{i\theta/2}$, daí temos que

$$\phi_1^{-1} = \begin{cases} e^{2i\theta} & \text{se } 0 < \theta < \pi \\ e^{2i(\pi-\theta)} & \text{se } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Exemplo 3.2.3. Fibrção de Hopf. Consideremos

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \|(z_1, z_2)\| = 1\}$$

assim definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

Se $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, então

$$\begin{aligned} \left\| (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2) \right\|^2 &= (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + |2z_1\bar{z}_2|^2 \\ &= |z_1|^4 + |z_2|^4 - 2|z_1|^2|z_2|^2 + 4|z_1|^2|z_2|^2 \\ &= (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

assim obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} H: S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

sobrejetora, além disso, S^1 age livremente sobre S^3 pela direita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \eta: S^3 \times S^1 &\longrightarrow S^3 \\ ((z_1, z_2), e^{i\theta}) &\mapsto (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}) \end{aligned}$$

Seja $\xi = \{E, p, B, Y, G\}$ um G -fibrado, e seja $\tilde{\xi} = \{\tilde{E}, \tilde{p}, B, G, G\}$ um G -fibrado principal, o fibrado produto se define de forma análoga como no caso dos fibrados vetoriais, ou seja, $\tilde{\xi} \times Y = \{\tilde{E} \times Y, q, \tilde{E}, y, G\}$ onde $q(\tilde{e}, y) = \tilde{e}$.

Definamos uma aplicação

$$P: \tilde{\xi} \times Y \rightarrow \xi$$

como segue: se $x = \tilde{p}(\tilde{e}) \in V_i$ seja

$$P(\tilde{e}, y) = \phi_i(x, \tilde{p}_i(\tilde{e}) \cdot y)$$

A aplicação P assim definida é chamada de aplicação principal

Definição 3.2.2. *Dois fibrados ξ e ξ' sobre o mesmo espaço base e com a mesma fibra são equivalentes, se existe uma aplicação fibrada.*

$$h: \xi \rightarrow \xi'$$

que induz a aplicação identidade na base

Notemos que a definição anterior coincide com a definição de isomorfismos de fibrados vetoriais com o mesmo espaço base.

Teorema de equivalência 3.2.1. *Sejam ξ e ξ' dois fibrados com a mesma fibra e grupo G , seja $h: \xi \rightarrow \xi'$ uma aplicação fibrada e seja $f: B \rightarrow B'$ a aplicação induzida nas bases, então ξ e $f^*(\xi')$ são equivalentes.*

Demonstração: ver [9] □

Vimos no capítulo 2 como o fibrado canônico sobre a grassmannina classifica os fibrados vetoriais, neste sentido dizemos que este fibrado é universal. Agora, nós sabemos que o grupo

estrutural dos fibrados vetoriais é o grupo $GL(\mathbb{R}, n)$, então no capítulo 2 classificamos fibrados com grupo estrutural $GL(\mathbb{R}, n)$. O objetivo da próxima seção é construir um G -fibrado principal que é universal no sentido no Capítulo 2.

3.3 Construção do Milnor

Antes de fazer a construção do Milnor vamos a lembrar o conceito de join topológico. Intuitivamente o join de dois conjuntos $A_1 \circ A_2$ é formado por todos os segmentos de retas com extremidades no conjuntos, o join de três conjuntos $A_1 \circ A_2 \circ A_3$ é formado por todos os triângulos com vértices no conjuntos, o join de quatro conjuntos é formado por todos os tetraedros com vértices no conjunto e assim sucessivamente...

Formalmente o join $A_1 \circ \dots \circ A_n$ de n espaços topológicos é definido como segue: Um ponto no join é caracterizado por:

1. n números reais t_1, \dots, t_n tais que $t_i \geq 0$ e $t_1 + \dots + t_n = 1$.
2. Um ponto $a_i \in A_i$ para cada i tal que $t_i \neq 0$.

Um ponto no join $A_1 \circ \dots \circ A_n$ vai-se denotar pelo símbolo $t_1 a_1 \oplus \dots \oplus t_n a_n$ onde a_i pode-se escolher de forma arbitrária ou omitido se t_i é igual a zero.

Por topologia forte em $A_1 \circ \dots \circ A_n$ queremos dizer que é a topologia mais forte tal que as funções coordenadas

$$t_i : A_1 \circ \dots \circ A_n \rightarrow [0, 1] \quad a_i : t_i^{-1}(0, 1) \rightarrow A_i$$

são contínuas. Assim se $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ então $t_i^{-1}(0, 1) = \{t_1 a_1 \oplus \dots \oplus t_n a_n / t_i \in (\alpha, \beta)\}$ é um aberto em $A_1 \circ \dots \circ A_n$, aliás de $U \subset A_i$ é um conjunto aberto, temos que

$a_i^{-1}(U) = \{t_1 a_1 \oplus \dots \oplus t_n a_n / a_i \in U, t_i \neq 0\}$ é um aberto no join $A_1 \circ \dots \circ A_n$. Assim uma subbase para a topologia em $A_1 \circ \dots \circ A_n$ é dada pelos seguintes tipos de conjuntos:

- i) O conjuntos de todos os pontos $t_1 a_1 \oplus \dots \oplus t_n a_n$ tais que $\alpha < t_i < \beta$.
- ii) O conjuntos de todos os pontos $t_1 a_1 \oplus \dots \oplus t_n a_n$ tais que $a_i \in U, t_i \neq 0$ com $U \subset A_i$ aberto.

Segue da topologia nos joins que uma função $f : X \rightarrow A_1 \circ \dots \circ A_n$ é contínua se, e somente se, as funções $t_i \circ f$ e $f \circ a_i$ forem contínuas.

O join de uma quantidade infinita de espaços topológicos pode-se definir da mesma forma, com a restrição do que todos exceto um numero finito dos t_i são iguais a zero.

Consideremos G um grupo topológico e seja o conjunto

$$EG_\infty = G \circ G \circ G \circ \dots \circ G \circ \dots$$

Seja $R : EG_\infty \times G \rightarrow EG_\infty$ uma aplicação definida pela formula:

$$R((t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \dots), g) = (t_1(g_1 g) \oplus \dots \oplus t_n(g_n g) \oplus 0 \oplus \dots)$$

Pela definição de topologia forte temos que R é contínua além disso é claro que ela define uma ação à direita em EG_∞ .

Em EG_∞ podemos definir uma relação de equivalência \sim dada por: $e \sim e'$ se, e somente se,

$$e' = R(e, g)$$

para algum $g \in G$. Sejam $BG_\infty = EG_\infty / \sim$ e $p : EG_\infty \rightarrow BG_\infty$ a projeção canônica. Vejamos que $w_G = \{EG_\infty, p, BG_\infty\}$ é um G -fibrado principal. De fato, as vizinhanças coordenadas V_j são os conjuntos de todos os pontos $p(t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots)$ em BG_∞ tais que $t_i \neq 0$ com $i = 1, \dots, n$. Sejam $\phi_j : V_j \times G \rightarrow p^{-1}(V_j)$ as funções coordenadas definidas por:

$$\phi_j(p(t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots), g) = t_0(g_1 g_j^{-1} g) \oplus \dots \oplus t_n(g_n g_j^{-1} g) \oplus \dots$$

Agora definamos $p_j : p^{-1}(V_j) \rightarrow$ por

$$p_j(t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots) = g_j$$

Assim temos as seguintes identidades

$$p \phi_j(x, g) = x \quad p_j \phi_j(x, g) = g \quad \phi_j(p(e), p_j(e)) = e$$

As transformações coordenadas são dadas por

$$g_{ij}(p(t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots)) = g_i g_j^{-1}.$$

Agora vamos provar que todas as aplicações anteriores são contínuas. Pela definição de topologia forte no join a continuidade da aplicação p_j é imediata, também é claro que p é contínua. Seja ε a identidade em G . A formula

$$\phi_j(p(e), \varepsilon) = R(e, p_j(e)^{-1})$$

mostra que $\phi(p(e), \varepsilon)$ é uma aplicação contínua de e , ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 U_j & \xrightarrow{p} & V_j \times \{\epsilon\} \\
 & \searrow & \downarrow \phi_j \\
 & & p^{-1}(V_j)
 \end{array}$$

onde U_j é o conjunto dos $t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots$ tais que $t_j \neq 0$, do anterior temos que $\phi \circ p$ é contínua e pela topologia da identificação tem-se que $\phi_j(x, \epsilon)$ é contínua como função de x . Agora, segue da identidade

$$\phi_j(x, g) = R(\phi_j(x, \epsilon), g)$$

que a função ϕ_j é contínua como função de duas variáveis. Por último segue-se da identidade $g_{ij}(x) = p_i \phi_j(x, \epsilon)$ que as funções g_{ij} são contínuas, portanto nos podemos concluir que w_G é um fibrado principal.

Antes de mostrar que o fibrado principal w_G classifica qualquer outro fibrado principal com espaço base paracompacto como o "pullback" de w_G , é necessário dar duas definições e um teorema que nos permitirão encontrar uma aplicação entre um G -fibrado principal ξ qualquer e o fibrado w_G

Definição 3.3.1. Uma cobertura $\{U_i\}_{i \in S}$ de um espaço topológico B diz-se enumerável se existir uma partição da unidade u_i localmente finita tal que

$$\overline{u_i^{-1}((0, 1])} \subset U_i \quad \text{para cada } i \in S$$

Definição 3.3.2. Um G -fibrado principal ξ sobre um espaço base B é enumerável se existir uma cobertura enumerável $\{U_i\}_i$ de B tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial para cada $i \in S$

Um exemplo de um G -fibrado principal enumerável é o fibrado w_G como mostra o seguinte teorema.

Observação 3.1. Claramente todo fibrado principal sobre um espaço paracompacto é enumerável.

Teorema 3.3.1. O fibrado w_G é enumerável.

Demonstração: A identidade $t_i(a g) = t_i(a)$ onde $g \in G$, nos permite definir uma única aplicação

$$u_i : BG_\infty \rightarrow [0, 1]$$

como sendo $u_i([t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus \cdots]) = t_i$ ou seja que u_i é uma aplicação tal que $t_i \circ = t_i$, vejamos que w_G é trivial em cada $V_i = u_i^{-1}(0, 1] = p(t_i^{-1}(0, 1])$ definindo uma seção s_i de w_G sobre V_i . Para isso, definamos a aplicação

$$s'_i : t_i^{-1}(0, 1] \rightarrow t_i^{-1}(0, 1]$$

por $s'_i(e) = e a_i(e)^{-1}$. Notemos que esta aplicação satisfaz a seguinte propriedade:

$$s'_i(eg) = e g (a_i(eg))^{-1} = e g (a_i(e)g)^{-1} = e g g^{-1} a_i(e)^{-1} = e a_i(e)^{-1} = s'_i(e).$$

A identidade anterior permite definir uma aplicação $s_i : V_i \rightarrow t_i^{-1}(0, 1]$ como sendo $s_i(e) = e a_i(e)^{-1}$, ou seja, s_i é tal que $s'_i = s_i \circ p$. Agora notemos que $p(e) = p(s'_i(e))$ para todo $e \in t_i^{-1}(0, 1]$, assim temos que

$$\begin{aligned} p s_i([e]) &= p(e a_i(e)^{-1}) \\ &= p(s_i(e a_i(e)^{-1})) \\ &= p(e) \\ &= [e] \end{aligned}$$

logo, $p s_i(x) = x$ para cada $x \in V_i$, além disso, como as s'_i são contínuas, temos que as aplicações s_i são contínuas. Portanto temos que s_i é uma seção, logo $w_G|_{V_i}$ é trivial.

Mostremos que w_G é enumerável construindo uma partição da unidade $\{v_i\}_{i \leq j}$ em BG_∞ com

$$v_i^{-1}(0, 1] \subset V_i = u_i^{-1}(0, 1]$$

definimos $w_i : BG_\infty \rightarrow [0, 1]$ por

$$w_i(b) = \max(0, u_i(b) - \sum_{j < i} u_j(b)).$$

Como $w_i^{-1}(0, 1] = \{b / u_i(b) > \sum_{j < i} u_j(b)\}$ e $\sum_{j < i} u_j(b) \geq 0$ temos que $u_i(b) > 0$, logo $w_i^{-1}(0, 1] \subset u_i^{-1}(0, 1] = V_i$. Para cada $b \in BG_\infty$ seja m o menor i tal que $u_i(b) \neq 0$ e n o maior dos i tais que $u_i(b) \neq 0$. Então temos que $\sum_{m \leq i \leq n} u_j(b) = \sum_{m \leq i \leq n} t_i = 1$, além disso $u_m(b) = w_m(b)$, assim se tomamos $b \in BG_{infy}$ e $i = m$ temos que $w_m(b) \neq 0$ já que $u_m(b) = w_m(b)$ e portanto tem-se que $b \in w_m^{-1}(0, 1]$, ou seja que os conjuntos $w_i^{-1}(0, 1]$ são uma cobertura de BG_∞ .

Aliás, como $u_i(b) \neq 0$ para $i > n$ temos que $w_i(b') = 0$ para todo b' tal que $\sum_{0 \leq j \leq n} u_j(b') > \frac{1}{2}$

pois $\max(0, -\sum_{0 \leq j \leq n} u_j(b')) = 0$. Seja $N_n(b) = \left\{ b' / \sum_{0 \leq j \leq n} u_j(b') > \frac{1}{2} \right\}$ afirmamos que $N_n(b)$ é um conjunto aberto em BG_∞ . De fato $N_n(b)$ é aberto, se e somente se, $p^{-1}(N_n(b))$ é abeto em EG_∞ . Como $\sum_{0 \leq j \leq n} u_j(b') > \frac{1}{2}$ então existe $0 \leq i \leq n$ tal que $t_i \neq 0$, dado que $p^{-1}(N_n(b)) = \{t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots / [t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots] \in N_n(b)\}$ então $p^{-1}(N_n(b))$ pode-se visto como a união de conjuntos $U_i = \{t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus \dots\}$, mas pela definição de topologia forte nos joins temos que cada U_i é aberto em EG_∞ , portanto podemos concluir que $N_n(b)$ é aberto em BG_∞ . Notemos que $N_n(b) \cap w_i^{-1}(0, 1] = \Phi$ para $i > n$, portanto a cobertura $\{w_i^{-1}(0, 1]\}$ é localmente finita, assim se fazemos $v_i = \frac{w_i}{\sum_j w_j}$ temos que $\{v_j\}$ é a partição da unidade que desejamos. \square

Proposição 3.3.1. *Seja ξ um fibrado principal enumerável sobre B . Então existe uma partição da unidade contável $\{u_n\}_{0 \leq n}$ tal que $\xi|_{u_i^{-1}(0, 1]}$ é trivial para cada natural n .*

Demonstração: Seja $\{v_i\}_{i \in T}$ uma partição da unidade em B tal que ξ é trivial sobre cada $v_i^{-1}(0, 1]$ para $i \in T$. Para cada $b \in B$ denotemos o conjunto dos $i \in T$ com $v_i(b) > 0$ por $S(b)$ e para cada conjunto finito S de T denotemos por $W(S)$ o conjunto aberto dos $b \in B$ tais que $v_i(b) > v_j(b)$ para cada $i \in S$ e $j \in T - S$. Seja $u_S : B \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$u_S(b) = \max(0, \min_{i \in S, j \in T - S} (v_i(b) - v_j(b)))$$

assim, temos que $W(S) = u_S^{-1}(0, 1]$, denotemos por $Card(S)$ o número de elementos de elementos de S , se $Card(S) = Card(S')$, então $W(S) \cap W(S') = \Phi$, de fato, seja $i \in S' - S$, agora $b \in W(S)$ temos que $v_i(b) > v_j(b)$ e para $b \in W(S')$ temos que $v_j(b) > v_i(b)$ o que não pode acontecer simultaneamente. Por último, denotemos

$$W_m = \bigcup_{m=Card(S)} W(S) \text{ e } w_m(b) = \sum_{m=card(S)} u_S(b)$$

dai nos obtemos que W_m é um conjunto aberto por ser união de conjuntos abertos, além disso $B = \bigcup_{m \geq 1} W_m$, pois se $b \in B$, e m é o número dos $v_i(b)$ que são positivos, então temos que $b \in W_m$. Aliás $w_m^{-1}(0, 1] = W_m$, de fato, se $b \in w_m^{-1}(0, 1]$, então $w_m(b) \neq 0$, assim obtemos que $\sum_{m=Card(S)} u_S(b) \neq 0$, logo existe um S com $Card(S) = m$ tal que $u_S(b) \neq 0$ dai $v_i(b) > v_j(b)$ com $i \in S$ e $j \in T - S$, portanto $b \in W_m$, a outra inclusão é análoga. Agora fazendo

$$u_m(b) = \frac{w_m(b)}{\sum_{0 \leq n} w_n(b)}$$

temos que $\{u_m\}_{0 \leq m}$ é uma partição da unidade contável, além disso, como ξ é trivial sobre cada $W(S)$ e estes conjuntos são disjuntos temos que ξ é trivial sobre cada W_m . \square

Finalmente o seguinte teorema nos permite classificar os G -fibrados principais enumeráveis.

Teorema 3.3.2. *Para cada fibrado principal ξ com grupo G , e espaço base B paracompacto, existe uma aplicação $f : B \rightarrow BG_\infty$ tal que ξ e $f^*(w_G)$ são equivalentes.*

Demonstração: Como na prova do teorema de classificação de fibrados vetoriais, nosso objetivo é construir uma aplicação fibrada nos espaços totais. Pela hipótese o fibrado ξ é enumerável, assim pelo teorema anterior existe uma partição da unidade $u_n^{-1}(0, 1]$ em B contável tal que $\xi|_{u_n^{-1}(0,1]}$ é trivial para cada $n \geq 0$. Vamos denotar o conjunto $u_n^{-1}(0, 1]$ por U_n e seja

$$h_n : U_n \times G \rightarrow E(\xi|_{U_n})$$

o homeomorfismo coordenado gerado por o fibrado $\xi|_{U_n}$, logo nos podemos definir a aplicação $g : E(\xi) \rightarrow EG_\infty$ como sendo

$$g(z) = (u_0 p(z)(q_0 h_0^{-1}(z)) \oplus \cdots \oplus u_n p(z)(q_n h_n^{-1}(z)) \oplus \cdots)$$

onde $q_n : U_n \times G \rightarrow G$ é a projeção no segundo fator, notemos que como nossa partição é localmente finita, temos que para os z onde $h_n^{-1}(z)$ não esta definida, $u_n(p(z)) = 0$, portanto g é bem definida, aliás, como ξ e w_G são G -fibrados principais, então as fibras sobre um ponto de esses fibrados são as orbitas no ponto, portanto $h_n^{-1}(zs) = h_n^{-1}(z)s$, dai segue que $g(zs) = g(z)s$, assim tem-se que g é uma aplicação fibrada, logo ela induz uma aplicação $f : B \rightarrow BG_\infty$ e pelo teorema 3.2.1 temos que ξ e $f^*(w_G)$ são equivalentes. \square

3.4 Fibrado Associado

Nesta seção vamos construir um novo fibrado chamado fibrado associado, e vamos ver como qualquer fibrado com grupo estrutural G pode ser obtido a partir de um fibrado principal associado.

Seja P um fibrado principal sobre um espaço topológico M com projeção $\rho : P \rightarrow M$ e grupo estrutural G , e seja Y um espaço topológico munido de uma ação de G dada por:

$$\begin{aligned} G \times Y &\longrightarrow Y \\ (g, y) &\mapsto g \cdot y. \end{aligned}$$

Consideremos o espaço topológico $P \times Y$ munido da ação de G à direita definida por

$$\begin{aligned} (P \times Y) \times G &\longrightarrow P \times Y \\ ((p, y), g) &\mapsto (p, y) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot y). \end{aligned}$$

Vamos denotar o espaço das órbitas desta ação por $P \times_G Y$ e a projeção canônica de $P \times Y$ sobre $P \times_G Y$ por ρ_Y e a classe de equivalência, ou órbita, de um par (p, y) por $[p, y]$, assim temos que:

$$[p \cdot g, g^{-1} \cdot y] = [p, y] \quad \text{ou} \quad [p \cdot g, y] = [p, g \cdot y].$$

Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P \times Y & \xrightarrow{\rho_Y} & P \times_G Y \\ \rho_Y \downarrow & & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

onde $\pi[p, y] = \rho(p)$, $p \in P, y \in Y$. Segue da topologia quociente que π é contínua. Provemos que toda trivialização $\varphi : U \times Y \times \rho^{-1}(U)$ de P sobre um aberto U de M induz uma trivialização $\varphi_Y : U \times Y \rightarrow \pi^{-1}(U)$ de $P \times_G Y$ sobre o mesmo aberto U de M . De fato, seja $\varphi : U \times Y \times \rho^{-1}(U)$ uma trivialização local de P . É claro que função $s : U \rightarrow P$, definida por $s(m) = \varphi(m, \epsilon)$ é uma seção local de P , onde ϵ é a identidade do grupo G , definamos $\varphi_Y : U \times Y \rightarrow \pi^{-1}(U)$ por $\varphi_Y(m, y) = [s(m), y]$, assim tem-se φ_Y é contínua, vejamos que é bijetiva. Sabemos que $\varphi^{-1}(p)$ pode-se escrever como

$$\varphi^{-1}(p) = (\rho(p), \phi(p)), \quad p \in P^{-1}(U)$$

onde $\phi : \rho^{-1}(U) \rightarrow G$, assim temos que $\phi(s(m)) = \epsilon$. Aliás, pode-se mostrar que $\varphi(m, g) = s(m) \cdot g$, daí, como $\varphi(\varphi^{-1}(p)) = p$ temos que $p = s(\rho(p)) \cdot \phi(p)$, portanto, podemos definir φ_Y^{-1} como sendo

$$\varphi_Y^{-1}[p, y] = (\rho(p), \phi(p) \cdot y)$$

assim temos que:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\varphi_Y^{-1}[p, y]) &= \varphi_Y(\rho(p), \phi(p) \cdot y) \\ &= [s(\rho(p)), \phi(p) \cdot y] \\ &= [s(\rho(p)) \cdot \phi(p), y] \\ &= [p, y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_Y^{-1}(\varphi_Y(m, y)) &= \varphi_Y^{-1}([s(m), y]) \\
&= (\rho(s(m)), \phi(s(m)) \cdot y) \\
&= (m, \epsilon \cdot y) \\
&= (m, y)
\end{aligned}$$

portanto, φ_Y é bijetiva com inversa φ_Y^{-1} .

Definição 3.4.1. O fibrado $\{P \times_G Y, M, \phi, Y, G\}$ é chamado de G fibrado associado ao G fibrado principal P .

Finalmente para classificar os G -fibrados, vamos mostrar que qualquer G -fibrado E sobre M com fibra Y , pode ser obtido como fibrado associado de algum G -fibrado principal P . Então, a ideia é construir um G -fibrado principal usando as trivializações locais do fibrado E e depois considerar o fibrado $P \times_G Y$ e mostrar que este é isomorfo ou equivalente ao fibrado original E .

Seja (U_i, φ_i) uma trivialização local do fibrado E e sejam $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ as funções de transição. Seja $T \subset M \times G \times J$ o conjunto das triplas (m, g, i) tal que $m \in U_i$, então T é um espaço topológico que é união disjunta de abertos $U_i \times G \times \{i\}$. definamos em T uma relação de equivalência dada por

$$(m, g, i) \sim (m', g', k) \text{ se } m = m', g_{ki}(m) \cdot g = g'.$$

Definamos o conjunto P como o conjunto das classes de equivalência desta relação, e seja

$$q : T \rightarrow P$$

a aplicação canônica, ou seja, $q(m, g, i) = [m, g, i]$. Um conjunto $U \subset P$ é aberto se, e somente se, $q^{-1}(U)$ é aberto em T , assim P é um espaço topológico e q é contínua. Definamos $\rho : P \rightarrow M$ por $\rho([m, g, i]) = m$. Então $\{P, \rho, M, G, G\}$ é um fibrado principal, para mais detalhes ver [15].

Agora vejamos que $\{E, \pi_E, M, Y, G\}$ é isomorfo ao fibrado $\{P \times_G Y, \pi, M, Y, G\}$. Seja $f : E \rightarrow P \times_G Y$ definida por $f(e) = ([p, P_i(e)])$ onde P_i é dada pela equação 3.2 e $p = [\pi_E(e), \epsilon, i]$, $\pi_E(e) \in U_i$. temos assim que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{f} & P \times_G Y \\
\pi_E \downarrow & & \downarrow \pi \\
M & \xlongequal{\quad} & M
\end{array}$$

portanto temos f é um isomorfismo ou uma equivalência de fibrados.

Agora nosso objetivo é mostrar uma importante relação entre o grupo topológico G de um fibrado principal quando este é um CW -complexo e o espaço de laços de um conjunto B , onde B é o espaço base de algum fibrado classificante. Para isto vamos trabalhar com a definição que dá o livro de Steenrod [15] de fibrado n - Universal, e vamos a mostrar que w_G é universal neste sentido.

Definição 3.4.2. Fibrado n -Universal: *Seja ξ um fibrado principal sobre um espaço B e com grupo G . Dizemos que ξ é n -universal se para todo espaço CW -complexo K , para todo fibrado principal ξ' sobre K com grupo G e toda aplicação h de $\xi|_L$ em ξ onde L é subcomplexo de K existe uma extensão de h de ξ' em ξ .*

- Observação 3.4.1.**
1. *Notemos que se nos tomamos $K = L$, então temos uma aplicação $h : \xi \rightarrow \xi$, assim pelo teorema 3.2.1 temos que ξ' é equivalente a $f^*(\xi)$ onde f é aplicação nas bases induzida pela aplicação h .*
 2. *Um fibrado n -universal só classifica fibrados principais com espaço base CW -complexo de dimensão finita.*

O seguinte teorema dá uma caracterização para os fibrados n -universais.

Teorema 3.4.1. *Um fibrado principal $\xi = (E, p, B, G, G)$ é n -universal, se e somente se, $\pi_i(E) = 0$ para $0 \leq i < n$.*

Demonstração: Seja e uma $(i + 1)$ -celula e S a sua fronteira. Seja $f : S \rightarrow E$, definamos $f' : S \times G \rightarrow \xi \times G$, definida por $f'(y, g) = (f(y), g)$, e consideremos $P : \xi \times G \rightarrow \xi$ dai temos que a função composta $P \circ f'$ é uma aplicação fibrada de $S \times G$ em ξ . Se $i < n$, como ξ é n -universal, Pf' pode-se estender a uma aplicação $h : e \times G \rightarrow \xi$, do fato que P é uma aplicação principal segue que $P(b, \epsilon) = b$ onde ϵ é a identidade em G , logo $Pf'(y, \epsilon) = f(y)$, portanto $h(y, \epsilon)$ é uma extensão de f a uma aplicação de e em E , assim temos que $f : S \rightarrow E$ é homotomicamente trivial para $i = 1, \dots, n - 1$.

Reciprocamente suponhamos que $\pi_i(E) = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Seja e uma $(i + 1)$ -celula e S a sua fronteira e seja $h : S \times G \rightarrow \xi$ uma aplicação fibrada, definamos $f : S \rightarrow E$ como $f(y) = h(y, \epsilon)$, como $\pi_i(E) = 0$, f pode-se estender a $f' : e \rightarrow E$, seja h' uma aplicação fibrada de $e \times G$ em ξ definida por $h'(y, g) = P(f'(y), g)$. Afirmamos que h' é uma extensão de h . De fato, é claro que duas aplicações admissíveis λ, γ de G em G_x diferem por traslação à esquerda em G , ou seja existe $g \in G$ tal que $\lambda(a) = g\gamma(a)$ para cada $a \in G$, então, se $\lambda(\epsilon) = \gamma(\epsilon)$, obtemos que $\lambda(\epsilon) = g\lambda(\epsilon)$, portanto $g = \epsilon$, assim se duas aplicações admissíveis coincidem na identidade do grupo G , elas coincidem em todo G . Notemos que para $y \in S$ temos as seguintes igualdades

$$h'(y, \epsilon) = f'(y) = f(y) = h(y, \epsilon)$$

Como h' e h são aplicações fibradas elas restritas as fibras são aplicações admissíveis, portanto pelas igualdades da acima, elas coincidem em $S \times G$, assim temos provado que toda aplicação fibrada $h : S \times G \rightarrow \xi$ pode-se estender a $h' : e \times G \rightarrow \xi$.

Agora seja ξ' um fibrado sobre um CW -complexo K e seja $\xi'' = \xi'|_L$ onde L é um subcomplexo de K e suponhamos que temos uma aplicação $h : \xi' \rightarrow \xi$. Para cada 0-celula v de K que não esta em L , tomemos duas aplicações admissíveis $\lambda : G \rightarrow G_v$ e $\gamma : G \rightarrow G_x$, então podemos estender h ao conjunto $p'^{-1}(L) \cup G_v$, isto nos permite fazer uma extensão de h para o conjunto $p'^{-1}(K^0 \cup L)$. Suponhamos indutivamente que h se estende a $p'^{-1}(K^i \cup L)$ com $i < n$. Se e é uma $(i+1)$ -celula de K que não esta em L , dado que e é contrátil temos que $\xi|_S$ é equivalente ao produto $S \times G$ onde S é a fronteira de e . Portanto como h se pode estender a $e \times G$, continuando este processo obtemos que h se estende sobre $p'^{-1}(K^n \cup L)$, portanto temos que ξ é n -universal. □

Antes de mostrar que w_G é ∞ -universal lembremos que se A e B são dois espaços topológicos tal que $A \subset B$, então dizemos que A é contrátil em B se a aplicação inclusão $i : A \rightarrow B$ é homotipicamente trivial. Notemos que os conjuntos EG_n podem ser definidos como sendo os conjuntos dos pontos $t_0 g_0 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \dots$, assim obtemos que

$$EG_0 \subset EG_1 \subset \dots \subset EG_n \subset \dots$$

assim temos que nos podemos ver o conjunto EG_∞ como $EG_\infty = \bigcup_{n \geq 0} EG_n$, assim, a topologia em EG_∞ é a topologia do limite. Vamos provar que EG_∞ é contrátil, mostrando que EG_n é contrátil em EG_{n+1} , ou seja temos que provar que a inclusão $i : EG_n \rightarrow EG_{n+1}$ definida por

$$i(t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \epsilon \oplus \dots) = (t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \epsilon \oplus \dots)$$

é homotopicamente trivial, onde ϵ é a identidade em G . Primeiro vejamos que i é contínua. De fato, seja $U \subset EG_{n+1}$ um conjunto aberto, como $i^{-1}(U)$ é conjunto dos pontos $t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \dots \in EG_n$, tais que $t_1 g_1 \oplus \dots \oplus t_n g_n \oplus 0 \epsilon \oplus \dots \in U$ temos pela definição de topologia nos joins que

$$\alpha < t_i < \beta \quad \text{ou} \quad t_i \neq 0 \quad \text{e} \quad g_i \in V$$

onde $V \subseteq G$ é um aberto e $i = 1, \dots, n$, portanto, em qualquer dos casos anteriores obtemos que

$i^{-1}(U)$ é um aberto em EG_n , logo i é contínua. Agora vejamos que i é homotopicamente trivial, seja $H_n : EG_n \times I \rightarrow EG_{n+1}$ definida por

$$H_n((t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \cdots), t) = ((1-t)t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus (1-t)t_n g_n \oplus t\epsilon \oplus 0 \oplus \cdots)$$

claramente H_n é bem definida, além disso, se $U \subseteq EG_{n+1}$ é um aberto, temos que o conjunto $H_n^{-1}(U)$ tem a forma $V \times [0, 1)$ onde V é um subconjunto de EG_n formado pelos pontos $(t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \cdots)$ tais que $\alpha < t_i < \beta$ ou $t_i \neq 0$ e g_i pertence algum aberto de G , portanto temos que V é aberto em EG_n e assim obtemos que H_n é contínua. Aliás, temos que

$$H_n((t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \cdots), 0) = i(t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus 0\epsilon \oplus 0\epsilon \oplus 0\epsilon \cdots)$$

$$H_n((t_1 g_1 \oplus \cdots \oplus t_n g_n \oplus 0 \oplus \cdots), 1) = 0g_1 \oplus \cdots \oplus 0g_n \oplus \cdots$$

logo H_n é uma homotopia entre a função inclusão i e a constante $0g_1 \oplus \cdots \oplus 0g_n \oplus \cdots$, ou seja que i é homotopicamente trivial. Finalmente definamos $H : EG_\infty \times I \rightarrow EG_\infty$ por $H(a, t) = H_n(a, t)$, para $a \in EG_n$. H é bem definida, pois a homotopia H_{n+1} restrita ao conjunto EG_n coincide com a homotopia H_n , além disso, como H_n é contínua para cada n , pela topologia do limite temos que H é contínua. Assim H é uma homotopia entre a função identidade id_{EG_∞} e a função constante, portanto podemos concluir que EG_∞ é contrátil, logo o fibrado w_G é ∞ -universal.

Observação 3.4.2. Se $P : EG \rightarrow BG$ é um fibrado universal, dizemos que o conjunto BG é um espaço classificante.

Como uma aplicação dos fibrados n -universais, vamos ver uma importante relação entre o tipo de homotopia de um grupo topológico e o seu espaço classificante.

Suponhamos que $p : EG \rightarrow BG$ é um fibrado ∞ -universal onde o grupo estrutural G e o espaço total EG são espaços CW -complexos, então, pela universalidade temos que $\pi_n(EG) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $f : EG \rightarrow \{e_0\}$ a aplicação constante, com $e_0 \in EG$, portanto temos que

$$f_* : \pi_n(EG) \rightarrow \pi_n(\{e_0\})$$

é um isomorfismo, assim pelo Teorema de Whitehead temos que EG é contrátil. Seja $H : EG \times I \rightarrow EG$ uma contração de EG , logo $H(e, 0) = e_0$ e $H(e, 1) = e$, consideremos a função $\phi = p \circ H$, então segue que

$$\begin{aligned}\phi(e,0) &= p(H(e,0)) = p(e_0) = \text{constante} \\ \phi(e,1) &= p(H(e,1)) = p(e)\end{aligned}$$

portanto ϕ é uma homotopia entre a aplicação constante $\phi_{e_0} : EG \rightarrow BG$, $\phi_{e_0}(e) = p(e_0)$ e a projeção $p : EG \rightarrow BG$. Consideremos o conjunto $P(BG)$ de todos os caminhos $\alpha : I \rightarrow BG$ tais que $\alpha(0) = p(e_0)$, se consideramos a função $H : P(BG) \times I \rightarrow P(BG)$ tal que $H(\alpha, s)(t) = \alpha((1-s)t)$, vemos que esta define uma homotopia entre a aplicação identidade no conjunto $P(BG)$ e o caminho constante $\alpha(0)$, segue que $P(BG)$ é contrátil. Agora se $\varphi : EG \rightarrow P(BG)$ é definida por $\varphi(e) = \alpha(t) = \phi(e, t)$, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} EG & \xrightarrow{\varphi} & P(BG) \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ BG & \xlongequal{\quad} & BG \end{array}$$

onde $q(\alpha) = \alpha(1)$ para cada caminho $\alpha \in P(BG)$. Afirmamos que q é uma fibração. De fato, sejam $G : Y \times I \rightarrow BG$ e $G_0 : Y \times \{0\} \rightarrow P(BG)$ aplicações contínuas tais que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{G_0} & P(BG) \\ \downarrow & & \downarrow q \\ Y \times I & \xrightarrow{G} & BG \end{array}$$

Então, nos podemos construir uma aplicação $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow P(BG)$ definindo para cada $(y, s) \in Y \times I$ o caminho $\tilde{G}(y, s) : I \rightarrow BG$ como sendo

$$\tilde{G}(y, s)(t) = \begin{cases} G_0(y) \left(\frac{2t}{2-s} \right) & \text{se } t \in \left[0, \frac{2-s}{2} \right] \\ G(y, 2t - 2 + s) & \text{se } t \in \left[\frac{2-s}{2}, 1 \right] \end{cases}$$

dai temos que \tilde{G} é contínua, e satisfaz as seguintes identidades

$$\tilde{G}(y, 0)(t) = G_0(y, s) \quad \tilde{G}(y, s)(0) = p(e_0) \quad \tilde{G}(y, s)(1) = G(y, s)$$

Assim, temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{G_0} & P(BG) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow q \\ Y \times I & \xrightarrow{G} & BG \end{array}$$

Logo, tem-se que $q : P(BG) \rightarrow BG$ é uma fibração, em particular é uma fibração de Serre, agora como $p : EG \rightarrow BG$ é um fibrado, tem-se pelo **Teorema 1.4.7** que p também é uma fibração de Serre, aliás a fibra de q é o espaço de laços do conjunto BG denotado por $\Omega(BG)$, daí segue que φ induz uma aplicação Φ nas fibras tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\Phi} & \Omega(BG) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 EG & \xrightarrow{\varphi} & P(BG) \\
 \downarrow p & & \downarrow q \\
 BG & \xlongequal{\quad} & BG
 \end{array}$$

Sabemos que p e q geram sequências exatas entre de grupos de homotopia, dos conjuntos G , BG , EG , $P(BG)$ e $\Omega(BG)$, então usando essas sequências e os morfismos induzidos pelas aplicações Φ e φ temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \pi_{n+1}(EG) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(BG) & \longrightarrow & \pi_n(G) & \longrightarrow & \pi_n(EG) & \longrightarrow & \pi_n(BG) \cdots \\
 & \downarrow \varphi_* & & \parallel & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \varphi_* & & \parallel \\
 \cdots & \pi_{n+1}(P(BG)) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(BG) & \longrightarrow & \pi_n(\Omega(BG)) & \longrightarrow & \pi_n(P(BG)) & \longrightarrow & \pi_n(BG) \cdots
 \end{array}$$

Como $\pi_n(EG) = 0$ e $P(BG)$ é contrátil, segue que φ_* é um isomorfismo, então pelo lema do cinco obtemos que Φ_* é um isomorfismo, logo pelo Teorema de Whitehead podemos concluir que o grupo G é homotopicamente equivalente a $\Omega(BG)$.

Observação 3.2. Na ultima linha acima, precisamos usar o fato que $\Omega(BG)$ é CW -complexo, uma prova de esto poder ser encontrada em [10] vol 1.

Capítulo 4

Fibrados com conexões

4.1 Conexões em fibrados principais

Uma conexão é essencialmente uma forma de identificar os pontos de fibras diferentes. Uma forma de ver a necessidade de tal noção é considerar a seguinte questão:

Dado um fibrado vetorial $\pi : P \rightarrow M$, uma seção $s : M \rightarrow E$ e $X \in T_x M$ o que significa a derivada direcional $d(s)X$? Se consideramos uma seção apenas como uma aplicação entre as variedades M e E , então uma resposta à pergunta é fornecida pela aplicação

$$Ds : TM \rightarrow TP$$

mas isso ignora a maior parte da estrutura que faz um fibrado vetorial interessante. Nos preferimos pensar em seções como aplicações vetor-avaliadas, que podem ser somadas e multiplicadas por escalar, assim, gostaríamos de pensar a derivada direcional $ds(x)X$ como algo que respeita esta estrutura linear. A partir desta perspectiva, a resposta é ambígua, salvo que P seja o fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Neste caso temos uma identificação natural nas fibras e podemos pensar uma seção s simplesmente como uma aplicação $s : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a derivada direcional é então:

$$ds(x)X = \frac{ds}{dt}(\gamma(t))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(\gamma(t)) - s(\gamma(0))}{t}$$

onde γ é um caminho diferenciável com $\dot{\gamma}(0) = X$, assim podemos definir a aplicação linear $ds(x) : T_x M \rightarrow F_b$ onde F_b é a fibra sobre x . O problema no caso em que o fibrado $\pi : P \rightarrow M$ não seja trivial, é que não existe um isomorfismo natural entre fibras diferentes; precisamos de uma estrutura extra. Isto nos leva a ideia de transporte paralelo. Intuitivamente o transporte paralelo é uma maneira de identificar os pontos de fibras diferentes que estão sobre uma mesma curva.

A continuação apresentaremos a definição formal deste conceito.

Dada uma curva $t \mapsto c(t)$ uma curva em M , um **levantamento** de c em P é uma curva $t \mapsto \tilde{c}(t)$ em P tal que $\pi(\tilde{c}(t)) = c(t)$. O seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [7] nos permite definir o conceito de transporte paralelo.

Teorema 4.1.1. *Seja $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado vetorial diferenciável. Se $p \in M$ e $t \mapsto c(t)$ é uma curva diferenciável em M com $c(0) = p$, então para cada $u \in F_p$ tal que $\pi(u) = p = c(0)$, existe um único levantamento horizontal \tilde{c} de c tal que $\tilde{c}(0) = u$.*

Definimos o transporte paralelo como sendo a função $\tau_t : F_p \rightarrow F_{c(t)}$ tal que $\tau_t(u) = \tilde{c}(t)$. Podemos ver que τ_t é um isomorfismo de espaços vetoriais. Podemos mostrar também, que o transporte paralelo $\tau_t : F_p \rightarrow F_{c(t)}$ induz uma transformação linear $Hor_u : T_p M \rightarrow T_u P$ tal que o espaço $T_u P$ e a soma direita da imagem de Hor_u denotada por H_u e o Kernel da aplicação π_{*u} . Para mais detalhes ver [13]. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.1.1. *Seja $\pi : P \rightarrow M$ um fibrado principal sobre uma variedade M com grupo G . Para cada $u \in P$ seja V_u o subespaço de $T_u P$ consistindo dos vetores tangentes à fibra que passa por u , isto é, $V_u = Ker \pi_{*u}$. Uma **conexão** C em P é uma escolha de um subespaço H_u de $T_u P$, para cada $u \in P$, tal que:*

1. $T_u P = V_u \oplus H_u$.
2. $H_{u \cdot g} = (R_g)_* H_u$ para todo $u \in P$ e $g \in G$.
3. H_u é uma distribuição diferenciável.

O subespaço V_u é chamado de **subespaço vertical** e H_u é chamado de **subespaço horizontal** de $T_u P$ em relação à conexão C . Cada vetor $X \in T_u P$ se decompõe numa soma $X = X_v + X_h$ em que $X_v \in V_u$ é a componente vertical de X e $X_h \in H_u$ é a componente horizontal de X .

Um conceito importante na teoria das conexões, e que nos vamos a usar mais para a frente, é o conceito de **forma de conexão**. Antes de definir-lho lembremos alguns conceitos.

Seja $f : P \times G \rightarrow P$ uma ação à direita de um grupo de lie G numa variedade P . Para cada $u \in P$ seja $f_u : G \rightarrow P$ a aplicação induzida, ou seja, $f_u(g) = f(u, g)$. Dado $A \in \mathfrak{g}$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de lie do grupo G , podemos associar o campo $A^\# \in \mathfrak{X}(P)$, chamado de **gerador infinitesimal** de A , colocando para cada $u \in P$ $A^\#(u) = (f_u)_* A$

Observação 4.1.1. Se $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um caminho definido por $\alpha(t) = \exp(tA)$, assim $\alpha'(0) = A$, além disso,

$$A^\#(u) = (f_u)_*A = (f_u)_*\alpha'(0) = (f_u \circ \alpha)'(0)$$

mas $(f_u \circ \alpha)(t) = u \cdot \exp(tA)$, assim temos que

$$A^\#(u) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u \cdot \exp(tA)$$

Proposição 4.1.1. A aplicação $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P)$ definida por $\psi(A) = A^\#$ é um homomorfismo de álgebras de lie. Quando a ação for efetiva, então ψ é injetiva, e quando a ação for livre, então para $A \in \mathfrak{g}$ não nulo o campo $A^\#$ não se anula.

Demonstração: ver [7] □

Se $\{P, \pi, M, G, G\}$ é um fibrado principal, então por definição G age livremente em P . Portanto, dado $A \in \mathfrak{g}$ não nulo o campo $A^\# \in \mathfrak{X}(P)$ não se anula, além disso, dado $u \in P$ temos também que o caminho $t \mapsto u \cdot \exp(tA)$ tem imagem na fibra sobre $x = \pi(u)$, segue que $A^\#(u) \in T_u(\pi^{-1}(x))$ assim podemos concluir, pela proposição anterior, que a aplicação $\psi_u : \mathfrak{g} \rightarrow T_u(\pi^{-1}(x))$ definida por $\psi_u(A) = A^\#(u)$ é injetiva e como \mathfrak{g} e $T_u(\pi^{-1}(x))$ tem a mesma dimensão como espaços vetoriais, pelo teorema do núcleo e a imagem segue que ψ_u é um isomorfismo.

Definição 4.1.2. A forma de conexão w de uma conexão C é definida em cada $X \in T_uP$ como sendo o único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $A^\#(u) = X_v$.

A seguinte proposição dá uma caracterização para a forma de conexão w .

Proposição 4.1.2. A forma de conexão tem as seguintes propriedades:

1. $w(A^\#) = A$ para cada $A \in \mathfrak{g}$.
2. $\sigma_g^* w = Ad_{g^{-1}} \circ w$ isto é: $w(\sigma_g)_* X = Ad_{g^{-1}}(w(X))$ para todo $g \in G$ e todo campo vetorial X sobre P , aqui $\sigma_g : P \rightarrow P$ é definida como sendo $\sigma_g(u) = u \cdot g$ e $Ad_g = D\mathfrak{J}_g(e)$, e é a identidade em G e $\mathfrak{J}_g : G \rightarrow G$ é tal que $\mathfrak{J}_g(h) = g^{-1}hg$.

Reciprocamente, dada uma 1-forma w com valores em \mathfrak{g} sobre P com as propriedades acima, existe uma única conexão C em P cuja forma de conexão é w .

Demonstração: O item 1. da proposição segue imediatamente da definição de w . Para mostrar 2. vamos dividir a prova em dois casos, um para o caso em que X é horizontal e outro caso para o qual X é vertical. Se X é horizontal, temos que $w(X) = 0$, além disso, pela definição de conexão temos que $(\sigma_g)_*(X) = 0$, portanto $w((\sigma_g)_*(X)) = 0$ e a igualdade se segue pela linearidade

de $Ad_{g^{-1}}$. Se X é vertical, podemos supor que é um campo vetorial fundamental $A^\#$. Como $(\sigma_g)_*(X)$ é o campo vetorial fundamental correspondente a $Ad_{g^{-1}}A$, então,

$$(\sigma_g^* w)_u(X) = w_{u \cdot g}((\sigma_g)_* X) = Ad_{g^{-1}}A = Ad_{g^{-1}}(w_u X).$$

Reciprocamente, dada uma 1-forma w satisfazendo as condições 1. e 2. definimos

$$H_u = \{X \in T_u P / w(X) = 0\}.$$

Afirmamos que $T_u P = H_u \oplus V_u$. De fato, se $v \in H_u \cap V_u$, então $v = A^\#(u)$, para algum $A \in \mathfrak{g}$, além disso, $w(v) = 0 = w(A^\#(u)) = A$ portanto $v = 0$, segue que $H_u \cap V_u = \{0\}$. Então é suficiente provar que $\dim(H_u) + \dim(V_u) = \dim(T_u P)$. Sabemos que w_u é uma transformação linear de $T_u P$ em \mathfrak{g} , assim $\dim(T_u P)$ é a soma de $\dim(Ker(w))$ e $\dim(Im(w))$, mas $Ker(w) = H_u$, aliás, como \mathfrak{g} é isomorfo a V_u temos que $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(V_u)$, agora, como $w(A^\#) = A$ para cada $A \in \mathfrak{g}$ tem-se que $Im(w) = \mathfrak{g}$, logo $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(Im(w))$ assim podemos concluir que $\dim(H_u) + \dim(V_u) = \dim(T_u P)$. e portanto obtemos que:

$$T_u P = H_u \oplus V_u.$$

Agora vejamos que $(\sigma_g)_* H_u = H_{u \cdot g}$. Seja $v \in (\sigma_g)_{u*} H_u$, logo existe $X \in H_u$ tal que $(\sigma_g)_{u*} X = v$, assim tem-se que $w_{u \cdot g}(\sigma_g)_{u*}(X) = w_{u \cdot g}(v)$ pela condição 2 temos que:

$$\begin{aligned} w_{u \cdot g}(\sigma_g)_{u*}(X) &= p(H(e, 0)) = Ad_{g^{-1}} \circ w(X) \\ &= Ad_{g^{-1}}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

portanto $v \in H_{u \cdot g}$, ou seja $(\sigma_g)_* H_u \subseteq H_{u \cdot g}$

Agora, seja $v \in H_{u \cdot g}$, como $(\sigma_g)_*$ é um isomorfismo, existe $X \in T_u P$ tal que $(\sigma_g)_*(X) = v$. Precisamos provar que $X \in H_u$. De fato

$$\begin{aligned} w(v) &= w((\sigma_{g^{-1}})_{u \cdot g*}(X)) \\ &= Ad_g(w_{u \cdot g}(X)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dai segue que $(\sigma_g)_* H_u = H_{u \cdot g}$

□

4.2 Conexão Canônica no Fibrado de Stiefel

Seja \mathbb{C}^n o espaço n -dimensional dos números complexos. A variedade de Stiefel $V_k^o(\mathbb{C}^n)$ se define de forma análoga ao caso real, ou seja, $V_k^o(\mathbb{C}^n)$ é o conjunto dos k -referenciais unitários em \mathbb{C}^n .

Se (v_1, \dots, v_k) é um k -referencial, então $v_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$ onde $\{e_j\}$ é a base canônica de \mathbb{C}^n , podemos associar uma matriz de ordem (n, k) como sendo $A = (a_{ij})$ com $a_{ij} = b_{ji}$, como (v_1, \dots, v_k) é ortonormal, temos que $\sum_{\alpha=1}^n b_{j\alpha} b_{l\alpha} = \delta_{jl}$, assim a matriz A satisfaz a condição $A^*A = I_k$, onde A^* é a transposta conjugada. Portanto $V_k^o(\mathbb{C}^n)$ é identificado com o conjunto das matrizes de ordem (n, k) tal que $A^*A = I_k$. Notemos que o grupo unitário de matrizes $U(k)$ age sobre $V_k^o(\mathbb{C}^n)$ pela direita, com respeito a esta ação temos que $q: V_k^o(\mathbb{C}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é um $U(k)$ -fibrado principal, onde $G_k(\mathbb{C}^n)$ é a variedade de Grassman em \mathbb{C}^n e q é a aplicação que leva um k -referencial no seu plano gerado, o fibrado anterior é chamado de **Fibrado de Stiefel**.

Seja $S: V_k^o(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{M}_{n \times k}(\mathbb{C})$ uma aplicação da variedade de Stiefel no conjunto das matrizes de ordem $n \times k$ tal que $S(v_1, \dots, v_k) = A$ onde A é a matriz associada ao referencial (v_1, \dots, v_k) . Consideremos a forma diferencial S^*dS com valores nas matrizes de ordem $(k \times k)$, S^* é a transposta conjugada da matriz S e dS é a matriz que se obtém depois de aplicar a derivada exterior em cada componente da matriz S , notemos que S^*dS tem valores na algebra de lie $\mathfrak{u}(k)$ de $U(k)$, pois $S^*S = I_k$, logo $S^*dS + (dS^*)S = 0$ ou $S^*dS + (S^*dS) = 0$.

Proposição 4.2.1. S^*dS é uma forma de conexão no fibrado Stiefel.

Demonstração: Sejam $\xi \in V_k^o(\mathbb{C}^n)$ e $s \in U(k)$, denotemos por X_ξ o vetor tangente ao ponto ξ e denotemos por $X_\xi s$ a imagem de X_ξ pelo diferencial da aplicação $\xi \mapsto \xi s$. Chamemos de f a aplicação $\xi \mapsto \xi s$, assim $f_*(X_\xi) = X_\xi s$, logo $(X_\xi s)(S) = f_*(X_\xi)(S)$, aliás, notemos que $d(S \circ f) = d(S)s$ já que $d(S \circ f) = d(S \cdot s) = d(S)s + Sd(s)$ mas $s \in U(k)$ é constante, então $d(s) = 0$. Agora, usando a regra da cadeia obtemos

$$(X_\xi s)(S) = dS(X_\xi s) = dS(f_*X_\xi) = d(S \circ f)(X_\xi) = d(S)s(X_\xi) = dS(X_\xi)s.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (S^*dS)(X_\xi s) &= S^*(\xi s)(X_\xi s)(S) \\ &= s^*S^*(\xi)(X_\xi s) \\ &= s^{-1}(S^*dS)(X_\xi)s \end{aligned}$$

Seja agora $a \in \mathfrak{u}(k)$, a é o vetor tangente à matriz identidade $I_k \in U(k)$ e ξa é a imagem de a pelo diferencial da aplicação $s \mapsto \xi s$, então

$$\begin{aligned} (S^* dS)(\xi a) &= S^*(\xi)(\xi a)S \\ &= S^*(\xi)S(\xi)a \\ &= a \end{aligned}$$

assim pela **proposição 4.1.2** temos que $S^* dS$ é uma forma de conexão no fibrado de Stiefel. \square

Lema 4.2.1. *seja U um conjunto aberto de \mathbb{R}^n e V um subconjunto aberto relativamente compacto tal que $\bar{V} \subseteq U$. Para toda 1-forma diferenciável α em U com valores na álgebra de lie $\mathfrak{u}(k)$ existem funções diferenciáveis $\phi_1, \dots, \phi_{m'}$ definidas em V e com valores no espaço das matrizes $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ tal que:*

$$i) \sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* \phi_j = I_k.$$

$$ii) \sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* d\phi_j = \alpha.$$

onde $m' = (2n + 1)k^2$.

Demonstração: sejam f_1, \dots, f_{k^2} o conjunto de matrizes definidas positivas que formam uma base para o espaço das matrizes Hermitianas sobre o corpo dos números reais tais que $\|f_r\| = 1$. Como α tem valores em $\mathfrak{u}(k)$, então α/i é uma matriz Hermitiana, além disso $\alpha = \lambda_1 dx_1 + \dots + \lambda_n dx_n$ onde as x_s são as funções coordenadas em \mathbb{R}^n , assim podemos escrever α/i em U como $\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^{k^2} \lambda_{rs} f_r dx_s$, onde λ_{rs} são funções com valores em \mathbb{R} . Se $a_{rs} = \sup_V |\lambda_{rs}|$, fazendo $\lambda_{rs} = \mu_{rs} - \nu_{rs}$ onde

$$\begin{aligned} \mu_{rs} &= \frac{1}{2}(\lambda_{rs} + a_{rs}) \\ \nu_{rs} &= \frac{1}{2}(a_{rs} - \lambda_{rs}). \end{aligned}$$

Claramente μ_{rs}, ν_{rs} são funções diferenciáveis positivas. Portanto $\mu_{rs} = p_{rs}^2$ e $\nu_{rs} = q_{rs}^2$ onde p_{rs} e q_{rs} são funções diferenciáveis positivas, fazendo $x_s = by_s$ então, para b suficientemente grande temos que $\sum_{s=1}^n (\mu_{rs} + \nu_{rs})$ pode ser limitado por $\frac{1}{2k^2}$ sobre V para todo r . Portanto, a matriz

$$\frac{1}{k^2} I_k - \left\{ \sum_{s=1}^n (\mu_{rs} - \nu_{rs}) f_r \right\}$$

é semi-definida positiva.

Sejam g_r e h_r matrizes semi-definidas positivas tais que $g_r^2 = f_r$ e

$$h_r^2 = \frac{1}{k^2} I_k - \left\{ \sum_{s=1}^n (\mu_{rs} - \nu_{rs}) f_r \right\}.$$

Definamos agora as funções ϕ_j com valores no espaço $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ para $1 \leq j \leq (2n+1)k^2$ como segue:

- Para $1 \leq j \leq nk^2$ ϕ_j é definida como as nk^2 funções $p_{rs} e^{ix_s} g_r$ em algum ordem.
- Para $nk^2 + 1 \leq j \leq 2nk^2$, ϕ_j é definida com as nk^2 funções $q_{rs} e^{-ix_s}$ em algum ordem.
- Para $2nk^2 + 1 \leq j \leq (2n+1)k^2$ ϕ_j é definida como as k^2 funções h_r em algum ordem.

Mostremos que as funções ϕ satisfazem as condições *i*) e *ii*) do lema. De fato

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* \phi_j &= \sum_{rs} p_{rs}^2 g_r^2 + \sum_{rs} q_{rs}^2 + \sum_r h_r^2 \\ &= \sum_{rs} \mu_{rs} f_r + \sum_{rs} \nu_{rs} f_r + I_k - \sum_{rs} (\mu_{rs} + \nu_{rs}) f_r \\ &= I_k. \end{aligned}$$

Aliás

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* d\phi_j &= \sum_{rs} p_{rs} e^{-ix_s} (p_{rs} i e^{ix_s} dx_s + (dp_{rs}) e^{ix_s}) g_r^2 \\
&+ \sum_{rs} q_{rs} e^{ix_s} (-q_{rs} i e^{-ix_s} dx_s + (dq_{rs}) e^{-ix_s}) g_r^2 \\
&+ \sum_{rs} h_r d h_r \\
&= \sum_{rs} i p_{rs}^2 g_r^2 dx_s + \sum_{rs} p_{rs} dp_{rs} g_r^2 + \sum_{rs} i (-q_{rs}^2) g_r^2 dx_s \\
&+ \sum_{rs} q_{rs} dq_{rs} g_r^2 + \sum_r h_r d h_r \\
&= \sum_{rs} i (\mu_{rs} - \nu_{rs}) f_r dx_s + \frac{1}{2} \sum_{rs} d(p_{rs}^2 + q_{rs}^2) f_r + \sum_r h_r d h_r \\
&= \alpha + \frac{1}{2} \sum_{rs} d(\mu_{rs} + \nu_{rs}) f_r + \sum_r h_r d h_r.
\end{aligned}$$

Como h_r e dh_r comutam temos que $\frac{1}{2}d(h_r^2) = h_r dh_r$, assim obtemos que

$$\sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* d\phi_j = \alpha + \frac{1}{2} d\left(\sum_{rs} (\mu_{rs} + \nu_{rs}) f_r + \sum_{rs} h_r^2\right) = \alpha$$

pois $d(\sum_{rs} (\mu_{rs} + \nu_{rs}) f_r + \sum_{rs} h_r^2) = I_k$. □

A seguinte proposição resolve o problema de classificar fibrados com conexão de forma local.

Proposição 4.2.2. *Seja P um $U(k)$ -fibrado principal sobre uma variedade X de dimensão menor ou igual a n e γ uma forma de conexão em P . Para todo subconjunto aberto relativamente compacto W de X com \bar{W} contido numa vizinhança coordenada U de X , onde P é trivial, existe uma aplicação fibrada diferenciável Φ de $p^{-1}(W)$ em $V_k^o(\mathbb{C}^{m''})$ tal que o pull-back de γ_0 por Φ é γ , onde $m'' = (2n + 1)k^3$ e $p : P \rightarrow X$ é a projeção.*

Demonstração: Como P é trivial sobre $U \subseteq X$, existe uma seção local σ de P sobre U . Seja α o pull-back de γ por σ , ou seja, $\alpha = \sigma^*(\gamma)$, pelo lema anterior, podemos encontrar funções $\mathbb{M}_k((\mathbb{C}))$ -avaliadas $\phi_1, \dots, \phi_{m'}$ em W tais que:

$$\text{i) } \sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* \phi_j = I_k.$$

$$\text{ii) } \sum_{j=1}^{m'} \phi_j^* d\phi_j = \alpha \text{ onde } m' = (2n + 1)k^2.$$

Definamos a função Φ de $p^{-1}(W)$ sobre o espaço de matrizes de ordem $m'' \times k$ como sendo

$$\xi \in P, \quad \Phi(\xi) = \begin{pmatrix} \phi_1(p(\xi)) \\ \vdots \\ \phi_{m'}(p(\xi)) \end{pmatrix} \cdot s$$

onde $s \in U(k)$ é determinado por $\xi = \sigma(p(\xi)) \cdot s$.

Φ esta bem definida, pois ξ e $\sigma(p(\xi))$ estão na mesma fibra, e como a ação de $U(k)$ sobre P é livre e transitiva em cada fibra existe um único $s \in U(k)$ tal que $\xi = \sigma(p(\xi)) \cdot s$. Agora mostremos que Φ é uma aplicação de fibrados. De fato, temos que $p(\xi \cdot s) = p(\xi)$, assim obtemos que:

$$\Phi(\xi \cdot \hat{s}) = \begin{pmatrix} \phi_1(p(\xi \cdot \hat{s})) \\ \vdots \\ \phi_{m'}(p(\xi \cdot \hat{s})) \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} \phi_1(p(\xi)) \\ \vdots \\ \phi_{m'}(p(\xi)) \end{pmatrix} \cdot t$$

onde $\hat{s} \in U(k)$ e $\xi \cdot \hat{s} = \sigma(p(\xi \cdot \hat{s})) \cdot t = \sigma(p(\xi)) \cdot t$, mas $\xi = \sigma(p(\xi)) \cdot s$, além disso, $U(k)$ age livremente sobre P , portanto $t = s\hat{s}$, assim concluímos que:

$$\Phi(\xi \hat{s}) = \Phi(\xi)\hat{s}.$$

Aliás, nós temos que

$$\begin{aligned} \Phi^*\Phi(\xi) &= s^* \left(\sum_{j=1}^{m'} (\phi_j^* \phi_j)(p(\xi)) \right) s \\ &= s^* s \\ &= I_k. \end{aligned}$$

dai segue que Φ é uma aplicação do fibrado $P|_{p^{-1}(W)}$ para o fibrado de Stiefel. Além disso

$$\begin{aligned} \Phi^*(S^*dS)(X) &= S^*dS(\phi_*X) \\ &= S^*(\phi_*X)S \\ &= S^*X(S \circ \Phi) \\ &= S^*d(S \circ \Phi) \end{aligned}$$

como $S \circ \Phi(\xi) = \Phi(\xi)$ tem-se que

$$\Phi^*(\gamma_0) = \Phi^* d\Phi$$

Agora

$$\begin{aligned} \sigma^*(\Phi^* d\Phi)X &= \Phi^* d\Phi(\sigma_* X) \\ &= \Phi^*(\sigma_* X)\Phi \\ &= \Phi^* X(\Phi \circ \sigma) \\ &= (\Phi \circ \sigma)^* d(\Phi \circ \sigma) \end{aligned}$$

$$\text{mas } (\Phi \circ \sigma)^* d(\Phi \circ \sigma) = \sum_{i=1}^{m'} \phi_i^* d\phi_i = \alpha.$$

Assim γ e $\Phi^* d\Phi$ são duas conexões em $P|_{p^{-1}(W)}$ tal que seu pullback pela seção σ é o mesmo, portanto $\gamma = \Phi^* d\Phi$.

□

Teorema 4.2.1. *Seja P um $U(k)$ -fibrado principal sobre uma variedade X de dimensão menor ou igual a n e γ uma forma de conexão em P . Então existe uma aplicação de fibrados diferenciável Φ de P na variedade de Stiefel $V_k^o(\mathbb{C}^m)$ tal que γ é o pullback por Φ da conexão canônica γ_0 em $V_k^o(\mathbb{C}^m)$, onde $m = (n+1)(2n+1)k^3$.*

Demonstração: Como X é uma variedade diferenciável, então X é um espaço localmente compacto, assim, para cada $x \in X$, com $x \in U$ onde U é um celula coordenada, existe um aberto V_i relativamente compacto tal que $x \in V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq U$, segue que $\{V_i\}$ é uma cobertura para X , além disso, por [11] os V_i podem ser divididos em $n+1$ classes \mathcal{C}_j tais que dois conjuntos V_j, V_k na mesma classe não se interceptam. Seja $\{W_i\}$ uma subcobertura de $\{V_i\}$ e seja D_j a união dos conjuntos $p^{-1}(W_i)$ onde $\bar{W}_i \subseteq V_i$ e $V_i \in \mathcal{C}_j$. Como cada celula coordenada U é contrátil, então o $U(k)$ -fibrado principal $p : P \rightarrow X$ é trivial sobre cada celula coordenada, assim pela proposição anterior existem aplicações fibradas Φ_i de $p^{-1}(V_i)$ à variedade de Stiefel $V_k^o(\mathbb{C}^{(2n+1)k^3})$ e com conexão induzida γ em $p^{-1}(V_i)$. Cada D_j é a união disjunta de conjuntos $p^{-1}(W_i)$ com $\bar{W}_i \in \mathcal{C}_j$, portanto existem aplicações diferenciáveis ψ_j definidas em D_j tais que $\psi_j(\xi) = \Phi_j(\xi)$ para $\xi \in p^{-1}(W_i)$. Agora, é claro que os D_j formam uma subcobertura para P , além disso, se denotamos por θ a ação de $U(k)$ sobre P , como a aplicação p é $U(k)$ -invariante então segue-se que cada D_j é invariante, ou seja, $\theta_s(D_j) = D_j$ para cada $s \in U(k)$, portanto existe uma partição da unidade λ_j não negativa, diferenciável, subordinada a $\{D_j\}$ que é invariante pela ação θ , assim, se fazemos $\zeta_j^2 = \lambda_j$ temos que ζ_j também é uma partição da unidade subordinada a $\{D_j\}$ invariante pela ação θ e $\sum \zeta_j^2 = 1$.

Consideremos a aplicação Φ em P definida por

$$\Phi(\xi) = \begin{pmatrix} \zeta_1(\xi)\psi_1(\xi) \\ \vdots \\ \zeta_{n+1}(\xi)\psi_{n+1}(\xi) \end{pmatrix} \text{ para cada } \xi \in P$$

Mostremos agora que Φ é uma aplicação fibrada de P em $V_k^o(\mathbb{C}^m)$ tal que $\Phi^*d\Phi = \alpha$. De fato

$$\begin{aligned} \Phi^*\Phi(\xi) &= \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i^2(\xi)\psi_i^*(\xi)\psi_i(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i^2(\xi)\psi_i^*(\xi)\psi_i(\xi) \end{aligned}$$

a soma é zero para os $\xi \notin D_i$ assim a somatório é só sobre aqueles i para os quais $\xi \in D_i$. Sabemos que em D_j se satisfaz a igualdade $\psi_j^*\psi_j = I$ assim temos que $\psi_i^*\psi_i = I$ para todo i sobre o qual a soma se estende. Portanto, como $\sum \zeta_i^2(\xi) = 1$, temos que $\Phi^*\Phi(\xi) = I$. Além disso, para cada $\xi \in P$ e $s \in U(k)$ temos

$$\Phi(\xi \cdot s) = \begin{pmatrix} \zeta_1(\xi \cdot s)\psi_1(\xi \cdot s) \\ \vdots \\ \zeta_{n+1}(\xi \cdot s)\psi_{n+1}(\xi \cdot s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1(\xi)\psi_1(\xi)s \\ \vdots \\ \zeta_{n+1}(\xi)\psi_{n+1}(\xi)s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1(\xi)\psi_1(\xi) \\ \vdots \\ \zeta_{n+1}(\xi)\psi_{n+1}(\xi) \end{pmatrix} s = \Phi(\xi)s$$

Assim Φ é uma aplicação fibrada de P na variedade de Stiefel $V_k^o(\mathbb{C}^m)$

Por último, para completar a prova do teorema vejamos que $\Phi^*d\Phi = \alpha$

$$\begin{aligned} \Phi^*d\Phi &= \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i \psi_i^* (d\zeta_i \psi_i + \zeta_i d\psi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i^* \zeta_i d\zeta_i + \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i^2 \psi_i^* d\psi_i. \end{aligned}$$

Como no caso anterior, para cada $\xi \in P$, a soma só toma valores sobre os i para os quais $\xi \in D_i$. Como em cada D_i temos que $\psi_i^*\psi_i = I$ e $\psi_i^*d\psi_i = \alpha$. Agora, como $\sum \zeta_i d\zeta_i = \frac{1}{2}d(\sum \zeta_i^2) = 0$, então $\Phi^*d\Phi = \sum \zeta_i d\zeta_i I + (\sum \zeta_i^2)\alpha = \alpha$.

□

Capítulo 5

Alguns exemplos de classificação

Nos capítulos anteriores, vimos que os fibrados vetoriais e principais são sobre um mesmo espaço base X classificados por classes de homotopia de funções $f \rightarrow B$ onde B é a base de algum fibrado universal. Neste capítulo estudaremos alguns exemplos de aplicações classificantes os dois primeiros exemplos falam de R^1 -fibrados sobre S^1 e S^1 -fibrados sobre S^2 , estes exemplos mostram como a partir de ter uma classificação por homotopia, podemos obter a quantidade que há deste fibrados. Os outros exemplos são mais contemporâneos e são baseados nos exemplos dados em [2].

5.1 Exemplos elementares

Exemplo 5.1.1. *Fibrados vetoriais com fibra de dimensão 1 sobre S^1*

Os fibrados vetoriais de dimensão 1 ou \mathbb{R}^1 -fibrados sobre S^1 , são classificados por classes de homotopia de funções $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & \gamma \\ \downarrow p & & \downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}P^\infty \end{array}$$

Pelo teorema de aproximação celular, temos que $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ é homotópica a uma função $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$. Sabemos que o número de classe de homotopia de funções de $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ é dado pelo número de elementos de $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty)$. Como $\mathbb{R}P^1 \subseteq \mathbb{R}P^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}P^n \subseteq \dots$, aplicando o functor π_1 temos a sequência $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots$, que estabiliza em $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Daí, segue

que há duas classes de homotopia de funções $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ e portanto há dois R^1 -fibrados sobre S^1 . Usando o isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$ e \mathbb{Z}_2 e o fato que $\mathbb{R}P^1$ é homeomorfo a S^1 temos que os R^1 -fibrados sobre S^1 , são o fibrado trivial, $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ e o fibrado canônico γ^1 sobre $\mathbb{R}P^1$.

Exemplo 5.1.2. Fibrados principais com fibra S^1 sobre S^2

Os S^1 -fibrados sobre S^2 são classificados por funções $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & S^\infty \\ \downarrow p & & \downarrow \\ S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

Pelo teorema de aproximação celular funções $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ são homotópicas à aplicações $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Neste caso, a sequência induzida estabiliza desde o começo $\pi_2(\mathbb{C}P^1) \cong \pi_2(\mathbb{C}P^2) \cong \dots$, e $\pi_2(\mathbb{C}P^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, gerado pela aplicação identidade. Assim obtemos que S^1 -fibrados sobre S^2 , são classificados por classes de homotopias de funções de S^2 em S^2 . Neste caso temos que há igual número de S^1 -fibrados sobre S^2 como números enteros. Elas todas podem ser geradas da seguinte maneira: considerando a S^2 como a esfera unitária de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, consideramos a aplicação de grau n

$$\phi_n(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + |z|^{2n}}}(r, z^n),$$

com diagrama de "pullback"

$$\begin{array}{ccc} S^1 & & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & S^3 \\ \downarrow p & & \downarrow \\ S^2 & \xrightarrow{\phi_n} & S^2 \end{array}$$

O espaço total é o conjunto dos pontos $((r, z), \theta) \in S^2 \times S^3$ tais que $\phi_n(r, z) = h(\theta)$.

Um análise similar pode ser feito para classificar fibrados S^3 -principais sobre $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$; de novo são classificados pelos números inteiros e a classificação é feita substituindo os números complexos pelos quaternos no paragrafo acima.

5.2 Exemplos geométricos recentes

Vemos como muitas vezes os fibrados são na pratica definidos como fibrados induzidos. Todos os exemplos serão de fibrados principais com grupo $S^3 \cong Sp(1)$, o grupo de quaternos unitários. O fibrado que classifica S^3 -fibrados é $S^3 \cdots S^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$, e nos concentraremos em fibrados induzidos pelo primeiro da cadeia, a fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \rightarrow S^4 \cong \mathbb{H}P^1$. A importância dos exemplos que descrevemos é que neles existem ações de grupos cujos quocientes são esferas exóticas, ou seja, esferas homeomorfas, mas não difeomorfas à esfera padrão. O primeiro exemplo diz sobre o grupo de Lie $Sp(2)$ como espaço total de um fibrado sobre S^7 .

Exemplo 5.2.1. *Seja $h : S^7 \rightarrow S^4$ a aplicação de Hopf correspondente à ação de Hopf pela direita de S^3 sobre S^7 , ou seja, $h((a, b)^T) = (|a|^2 - |b|^2, 2a\bar{b})$ e seja $a : S^4 \rightarrow S^4$ a aplicação antipodal de S^4 . O "pullback" da fibração de Hopf pela aplicação $a \circ h$ é o conjunto dos pontos $((a, b)^T, (c, d)^T)$ em $S^7 \times S^7$ tais que*

$$-(|a|^2 - |b|^2, 2a\bar{b}) = (|c|^2 - |d|^2, 2c\bar{d}).$$

Da igualdade anterior e do fato que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a\bar{a} + c\bar{c} &= 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} &= 0 \\ b\bar{a} + d\bar{c} &= 0 \\ b\bar{b} + d\bar{d} &= 1 \end{aligned}$$

*Assim, o conjunto $(a \circ h)^*S^7$ pode-se identificar com o espaço das matrizes com entradas nos quaternos $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tais que $AA^* = A^*A = I$, em outras palavras, com o grupo de Lie $Sp(2)$. Portanto o grupo $Sp(2)$ pode ser realizado como o espaço total do "pullback" do fibrado de Hopf pela aplicação de Hopf:*

$$\begin{array}{ccccc} & & S^3 & & S^3 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \hookrightarrow & Sp(2) & \xrightarrow{s} & S^7 \\ & & \downarrow p & & \downarrow h \\ S^3 & \hookrightarrow & S^7 & \xrightarrow{a \circ h} & S^4 \end{array}$$

No diagrama, p e s denotam a primeira e segunda coluna de uma matriz em $Sp(2)$. Se em vez

de trabalhar com o conjunto dos quaternos, consideramos o conjunto dos números complexos, obtemos que o grupo unitário de Lie $U(2)$ pode ser realizado como o "pullback" da aplicação de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ pela função $a \circ h$

$$\begin{array}{ccccc} & & S^1 & & S^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ S^1 \hookrightarrow & U(2) & \xrightarrow{s} & S^3 & \\ & \downarrow p & & \downarrow h & \\ S^1 \hookrightarrow & S^3 & \xrightarrow{a \circ h} & S^2 & \end{array}$$

Como o conjunto \mathbb{C} é comutativo, então, o fibrado $S^1 \cdots U(2) \rightarrow S^2$ é trivial, pois a função $f : S^2 \rightarrow U(2)$ definida por $f((a, b)^T) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ é uma seção deste fibrado. No caso do fibrado $S^3 \cdots Sp(2) \rightarrow S^7$ este fato não é certo.

Exemplo 5.2.2. Consideremos a aplicação $\phi : S^8 \rightarrow S^7$ dada pela suspensão da aplicação de Hopf $\eta : S^3 \rightarrow S^2$. Cada vetor $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pode ser identificado como um quaterno imaginário puro $p = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + y_3 \mathbf{k}$, então, se y é um quaterno unitário, y se pode escrever como $y = x_1 + \alpha p$ onde x_1 e α são números reais tais que $x_1^2 + \alpha^2 = 1$. Portanto a aplicação $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ pode-se escrever como $\eta(y) = y \mathbf{i} \bar{y}$. Seja S^8 a esfera unidade de $\mathbb{H} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H}$ e seja $\psi : S^8 \rightarrow \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ definida como sendo $\psi((x, \lambda, y)^T) = \begin{pmatrix} x \\ \lambda + \eta(y) \end{pmatrix}$. Como $|\psi| = |x|^2 + \lambda^2 + |y|^4 \neq 0$, então podemos normalizar o vetor $\psi(x)$ e definir $\phi = \frac{\psi}{|\psi|} : S^8 \rightarrow S^7$.

Então, se consideramos o S^3 -fibrado $p : Sp(2) \rightarrow S^7$ e construirmos o seu "pullback" pela aplicação ϕ obtemos que $\phi^*Sp(2)$ é uma subvariedade de $S^8 \times Sp(2)$ cujos pontos são pares da forma (u, A) tais que $\phi(u) = p(A)$, ou seja, $\phi(u)$ é a primeira coluna da matriz A , assim, nós podemos esquecer essa coluna e pensar $\phi^*Sp(2)$ como um subconjunto de $S^8 \times S^7$ tal que se $(u, v) \in \phi^*Sp(2)$ então $\langle \phi_n(u), v \rangle = 0$. Portanto concluímos que o "pullback" do S^3 -fibrado $p : Sp(2) \rightarrow S^7$ pela aplicação ϕ é identificado por

$$E^{11} = \left\{ (x, \lambda, y)^T, (c, d)^T \in S^8 \times S^7 / \begin{pmatrix} u & c \\ v & d \end{pmatrix} \in Sp(2) \right\}$$

com $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ y \end{pmatrix}$. Agora, se consideramos o "pullback" do fibrado de Hopf $S^3 \cdots S^7 \rightarrow S^4$ pela aplicação $f \circ a \circ h \circ \phi$, vemos que f^*S^7 é o conjunto dos pontos $((x, \lambda, y)^T, (c, d)^T) \in S^8 \times S^7$ tais que

$$-(|u|^2 - |v|^2, 2u\bar{v}) = (|c|^2 - |d|^2, 2c\bar{d})$$

Daí, obtemos um sistema de equações como no exemplo anterior e portanto podemos concluir que f^*S^7 pode-se identificar com o conjunto E^{11} :

$$\begin{array}{ccccc} E^{11} & \longrightarrow & Sp(2) & \longrightarrow & S^7 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\ S^8 & \xrightarrow{\phi} & S^7 & \xrightarrow{a \circ h} & S^4 \end{array}$$

Exemplo 5.2.3. Seja \mathbb{O} o conjunto dos octenos de Caley. Se $q \in \mathbb{O}$, então q se pode escrever como $q = \cos(t) + \alpha \sin(t)$, onde α é um octeno puro e $0 \leq t \leq 1$. Seja a função $\phi_n : S^7 \rightarrow S^7$ definida por $\phi_n(q) = q^n = \cos(nt) + \alpha \sin(nt)$. Então, se consideramos o S^3 -fibrado $p : Sp(2) \rightarrow S^7$ e construímos o seu "pullback" pela aplicação ϕ_n , obtemos que $\phi_n^*Sp(2)$ é uma subvariedade de $S^7 \times Sp(2)$. Podemos mostrar de forma análoga ao exemplo, que o espaço $\phi_n^*Sp(2)$ pode ser identificado com o conjunto

$$E_n^{10} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right) / \left(\begin{array}{cc} u & c \\ v & d \end{array} \right) \in Sp(2) \right\}$$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Novamente, se consideramos o "pullback" do fibrado de Hopf pela aplicação $f_n = a \circ h \circ \phi_n$ obtemos que $f_n^*S^7$ é o conjunto dos pontos $(a, b)^T, (c, d)^T \in S^7 \times S^7$ tais que

$$-(|u|^2 - |v|^2, 2u\bar{v}) = (|c|^2 - |d|^2, 2c\bar{d})$$

assim obtemos que $f_n^*S^7$ pode ser identificado com E_n^{10}

$$\begin{array}{ccccc} E_n^{10} & \longrightarrow & Sp(2) & \longrightarrow & S^7 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h \\ S^7 & \xrightarrow{\phi_n} & S^7 & \xrightarrow{a \circ h} & S^4 \end{array}$$

Notemos que os quaternos unitários agem sobre o espaço E_n^{10} , pela ação

$$q \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa\bar{q} & qc \\ qb\bar{q} & qd \end{pmatrix}$$

Foi provado em [3], que o quociente de E_n^{10} por essa ação é difeomorfo a Σ_n^7 , n -vezes a 7-esfera de Gromoll-Meyer.

Para o caso do conjunto E^{11} os quaternos unitários agem como segue:

$$q \star \begin{pmatrix} x & c \\ \lambda & \\ y & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qx\bar{q} & qc \\ \lambda & \\ qy & qd \end{pmatrix}$$

O quociente desta ação é difeomorfo à única esfera exótica em dimensão 8, para mais detalhes, ver [12].

Apêndice

Estrutura celular na variedade de Grassmann

Definição 5.2.1. *Um CW-complexo consiste de um espaço Hausdorff munido de uma partição que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Cada e_α é topologicamente uma célula aberta de dimensão $n(\alpha) \geq 0$, além disso, para cada e_α existe uma aplicação contínua*

$$f : D^{n(\alpha)} \rightarrow K$$

que leva o interior do disco $D^{n(\alpha)}$ homeomorficamente sobre e_α .

2. *Cada ponto x pertence a \bar{e}_α mas não pertence a e_α , pertence a uma célula de dimensão menor.*
3. *Cada ponto de K está contido num subcomplexo finito.*
4. *K é topologizado com a topologia fraca.*

A estrutura celular da Grassmanniana é obtida como segue:

consideremos a sequência

$$\mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^m$$

Todo n -plano $X \subseteq \mathbb{R}^m$ pela origem gera uma sequência de enteros

$$0 \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^2) \leq \dots \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$$

Dois enteros consecutivos em esta sequência diferem em não mais de um, daí segue que a sequência tem n saltos, isto motiva a seguinte definição.

Definição 5.2.2. O simbolo de Schubert $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ denota uma seqüência de numeros naturais que satisfazem

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n \leq m$$

Para cada simbolo de Schubert, seja $e(\sigma) \subseteq G_n(\mathbb{R}^m)$ o conjunto dos n -planos X tais que

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i \quad \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) = i - 1$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Claramente cada $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$ pertence exatamente um só dos conjuntos $e(\sigma)$.

Exemplo 5.2.4. Para $n = 1$ e $m = 2$ temos que $G_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1$, temos que $\sigma = \sigma_1$ e $\sigma = \sigma_1 = 2$, $e(1) = \text{eixe dos } x$ e $e(2) = \text{retas pela origem-eixe } x$, assim temos que:

$$\mathbb{R}P^1 = e(1) \cup e(2).$$

Vamos mostrar que $e(\sigma)$ é uma celula aberta de dimensão $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \dots + (\sigma_n - n)$

Seja $H^k \subseteq \mathbb{R}^k$ o conjunto dos $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ com $x_k > 0$.

Notemos que cada n -plano X pertence a $e(\sigma)$ se somente se X tem uma base x_1, \dots, x_n tal que

$$x_1 \in H^{\sigma_1}, \dots, x_n \in H^{\sigma_n}$$

Definição 5.2.3. Seja $e'(\sigma) = v_n^0(\mathbb{R}^n) \cap (H^{\sigma_1} \times \dots \times H^{\sigma_n})$ o conjunto de todos os n -referenciais ortonormais (x_1, \dots, x_n) tais que cada x_i pertence a H^{σ_i} . Seja $\overline{e'(\sigma)}$ o conjunto dos n -referenciais ortonormais (x_1, \dots, x_n) tais que $x_i \in \overline{H}^{\sigma_i}$.

Lema 5.2.1. Cada n -plano $X \in e(\sigma)$ tem uma única base ortonormal (x_1, \dots, x_n) que pertence a $x_1 \in H^{\sigma_1}, \dots, x_n \in H^{\sigma_n}$.

Demonstração: Seja $x_1 = X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}$ com $x \in e(\sigma)$ então

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}) = 1$$

logo $x_1 = \alpha e$ onde $\{e\}$ é uma base de \mathbb{R}^{σ_1} . Agora se $\|x_1\| = 1$ segue que $\|x_1\| = \|\alpha e\|$, dai $|\alpha| = \frac{1}{\|e\|}$, assim um vetor unitário x_1 em \mathbb{R}^{σ_1} tem duas opções

$$x_1 = \frac{-1}{\|e\|} e \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{1}{\|e\|} e$$

mas $x_1 \in H^{\sigma_1}$, ou seja $x_{\sigma_1} > 0$, logo nos podemos descartar alguma das opções da acima, assim temos um único vetor unitário x_1 em $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}$

Agora precisamos um vetor x_2 unitário em $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}$ com $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}) = 2$ e ortonormal a x_1 . Sejam $\lambda e_1 + \beta e_2$, $x_1 = \alpha e$ onde $\{e_1, e_2\}$ ortonormal, portanto $\|x_2\| = 1$ e $\lambda = \sqrt{1 - \beta^2}$ ou $\lambda = -\sqrt{1 - \beta^2}$. Nos precisamos que $\alpha \lambda e \cdot e_1 + \alpha \beta e \cdot e_2$, daí segue que

$$\beta = \lambda \frac{e \cdot e_1}{e \cdot e_2}$$

assim obtemos que $x_{\sigma_2} = \lambda(e_{1\sigma_2} + \frac{e \cdot e_1}{e \cdot e_2} e_{2\sigma_2})$, mas $x_{2\sigma_2} > 0$ daí nos podemos descartar uns dos λ e obter um único vetor x_2 unitário e ortonormal a x_1 . Este processo continua até obter os vetores x_3, x_4, \dots, x_n ortonormais. \square

Lema 5.2.2. O conjunto $\overline{e'(\sigma)}$ é topologicamente uma célula fechada de dimensão

$$d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \dots + (\sigma_n - n)$$

com interior $e'(\sigma)$.

Demonstração: A prova é por indução sobre n . Para $n = 1$ o conjunto $\overline{e'(\sigma_1)}$ consiste de todos os vetores

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1\sigma_1}, 0, \dots, 0)$$

com $\sum x_{1i}^2 = 1$, $x_{1\sigma_1} \geq 0$. Claramente $\overline{e'(\sigma_1)}$ é fechado e tem dimensão $d(\sigma_1) = \sigma_1 - 1$, além disso é homeomorfo ao disco $D^{\sigma_1 - 1}$.

Dados dois vetores unitários $u, v \in \mathbb{R}^m$ com $u \neq -v$, seja $T(u, v)$ a única rotação de \mathbb{R}^m que leva a u para v , e deixa fixo qualquer vetor ortogonal a u e v . Assim temos que $T(u, v) = T^{-1}(v, u)$ e

$$T(u, v)x = x \frac{(u+v) \cdot x}{1+u \cdot v} (u+v) + 2(u \cdot x)v$$

Segue da fórmula anterior que:

1. $T(u, v)x$ é contínua como função de três variáveis.
2. Se $u, v \in \mathbb{R}^k$, então $T(u, v)x \equiv x \pmod{(\mathbb{R}^k)}$.

Se $b_i \in H^{\sigma_i}$ tal que $b_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ onde o número 1 está na σ_i -ésima posição, portanto

$(b_1, \dots, b_n) \in \overline{e'(\sigma)}$. Consideremos a rotação

$$T = T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ \dots \circ T(b_1, x_1).$$

Esta rotação leva os n vetores b_1, \dots, b_n a os vetores x_1, \dots, x_n respectivamente.

De fato, as rotações $T(b_1, x_1), \dots, T(b_{i-1}, x_{i-1})$ deixam fixo b_i pois $b_i \cdot b_j = b_i \cdot x_j = 0$ para $i > j$ as rotações $T(b_i, x_i)$ levam b_i para x_i e as rotações $T(b_{i+1}, x_{i+1}), \dots, T(b_n, x_n)$ deixam fixo a x_i .

$$\begin{aligned} T(b_i) &= T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ \dots \circ T(b_1, x_1) b_i \\ &= T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ \dots \circ T(b_i, x_i) b_i \\ &= T(b_n, x_n) \circ T(b_{n-1}, x_{n-1}) \circ \dots \circ T(b_{i+1}, x_{i+1}) x_i \\ &= x_i \end{aligned}$$

Dado $\sigma_{n+1} > \sigma_n$, seja D o conjunto de todos os vetores unitários $\overline{H^{\sigma_{n+1}}}$ com

$$b_1 \cdot u = \dots = b_n \cdot u = 0$$

D é fechado de dimensão $\sigma_{n+1} - n - 1$ e portanto é topologicamente uma célula fechada. Definamos

$$f: \overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \times D \rightarrow \overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})}$$

pela fórmula

$$f((x_1, \dots, x_n), u) = (x_1, \dots, x_n, Tu)$$

Vejamos que $(x_1, \dots, x_n, Tu) \in \overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})}$. De fato

$$x_i \cdot Tu = T b_i \cdot Tu = b_i \cdot u = 0$$

para $i \leq n$, além disso

$$Tu \cdot Tu = u \cdot u = 1$$

Como $Tu \equiv u \pmod{(\mathbb{R}^{\sigma_n})}$, tem-se que $Tu \in \overline{H^{\sigma_n}}$, é claro que f é contínua, além disso a fórmula

$$u = T^{-1}x_{n+1} = T(x_1, b_1) \circ \dots \circ T(x_n, b_n)x_{n+1}$$

mostra que f^{-1} é bem definida e contínua. Portanto $\overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})}$ é um homeomorfo ao produto $\overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \times D$ segue da hipótese de indução que

$$\dim(\overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})}) = (\sigma_1 - 1) + \dots + (\sigma_n - n) + (\sigma_{n+1} - (n + 1))$$

dai por indução sobre n temos que cada $\overline{e'(\sigma)}$ é fechado e de dimensão $d(\sigma)$. Analogamente podemos provar por indução que $e'(\sigma)$ é o interior de cada célula $\overline{e'(\sigma)}$. De fato o homeomorfismo

$$f: \overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \times D \rightarrow \overline{e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})}$$

leva o produto $e'(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \times \text{int}(D)$ sobre $e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$

Agora vejamos que a aplicação

$$q|_{e'(\sigma)}: e'(\sigma) \rightarrow e(\sigma)$$

é um homeomorfismo. Pelo **lema 5.2.1** temos que $q(e'(\sigma)) = e(\sigma)$, além disso, se $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{e'(\sigma)} - e'(\sigma)$ então o n -plano $X = q(x_1, \dots, x_n)$ não pertence a $e(\sigma)$, pois algum dos vetores x_i tem que pertencer a $\mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}$, para todo $j \leq i$, assim $x_j \in X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}$, portanto $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) \geq i$. Agora seja $A \subseteq e'(\sigma)$ fechada na topologia subespaço. Então $\bar{A} \cap e'(\sigma) = A$ onde $\bar{A} \subseteq \overline{e'(\sigma)}$ é compacto, logo $q(\bar{A})$ é fechado, dai temos que $q(\bar{A}) \cap e(\sigma) = q(A)$, logo $q(A) \subseteq e(\sigma)$ é fechado na topologia subespaço, portanto $q|_{e'(\sigma)}: e'(\sigma) \rightarrow e(\sigma)$ é um homeomorfismo

□

Teorema 5.2.1. Os $\binom{m}{n}$ conjuntos $e(\sigma)$ formam uma estrutura celular no espaço $G_n(\mathbb{R}^m)$.

Demonstração: Vejamos que cada ponto na fronteira de $e(\sigma)$ esta numa célula $e(\tau)$ de dimensão menor. Como $\overline{e'(\sigma)}$ é compacto, a imagem $q(\overline{e'(\sigma)})$ é igual a $\bar{e}(\sigma)$. Como todo n -plano $X \in \overline{e'(\sigma)} - e'(\sigma)$ tem uma base $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{e'(\sigma)} - e'(\sigma)$ onde cada $x_i \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$, segue que $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) \geq i$ para cada i , assim o simbolo de Schubert (τ_1, \dots, τ_n) associado com X satisfaz

$$\tau_1 \leq \sigma_1, \dots, \tau_n \leq \sigma_n$$

mas nos temos que algum $x_i \in \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}$, logo $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) \geq i$, assim obtemos que $\tau_i \leq \sigma_{i-1} < \sigma_i$ daí segue que $d(\tau) < d(\sigma)$. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge Univ Pr, 2002.
- [2] C. Durán, L. D. Sperança, *Flat sections and non-negative curvature in pullback bundles*, available at arXiv:1304.4532.
- [3] C. Durán, T. Püttmann, and A. Rigas, *An infinite family of Gromoll Meyer spheres*, Archiv der Mathematik **95**(2010), 269-282.
- [4] D. Gromoll, W. Meyer, *An exotic sphere with nonnegative curvature*, *Ann. Math.* **96** (1972), 413-443.
- [5] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, MacGraw - Hill, 1966, Springer-verlag, 1975.
- [6] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1982 (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [7] G.L. Naber. *Topology, geometry, and gauge fields: Foundations*. Springer Verlag, 1997.
- [8] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer Verlag, 2003.
- [9] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [10] J. Milnor, *Construction of universal bundles. I. and II.* *Ann. of Math.* **2 63**, (1956), 272-284, and *Ann. of Math.* **2 63**, (1956), 430-436.
- [11] J. Nash. *The imbedding problem for Riemannian manifolds* *Annals of Mathematics*, vol. 63 (1956), pp. 20-63.
- [12] L. D. Sperança, *On Explicit Constructions of Exotic Sphere*, available at <http://arxiv.org/abs/1010.6039>.
- [13] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 1-5. Publish or Perish, 1975.

- [14] Narasimhan, M.S, Ramanan, S *Existence of universal connections*. Amer. J. Math. 83, 563-572 (1961).
- [15] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton Univ Pr, 1999.
- [16] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publ., New York, Vol. 1 (1963).