UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Cristian Schmidt

UM ESTUDO SOBRE CATEGORIAS HEREDITÁRIAS COM OBJETO INCLINANTE

Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Cristian Schmidt

UM ESTUDO SOBRE CATEGORIAS HEREDITÁRIAS COM OBJETO INCLINANTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Curitiba, 2013.

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 51ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezenove dias do mês de julho de 2013, no Anfiteatro A, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Edson Ribeiro Álvares, a Banca Examinadora para a quinquagésima primeira Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos, da Universidade de São Paulo, Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, e o Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dezessete horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **CRISTIAN SCHMIDT** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "UM ESTUDO SOBRE CATEGORIAS HEREDITÁRIAS COM OBJETO INCLINANTE". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 19 de julho de 2013.

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Presidente

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos
Titular

Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga
Titular

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **CRISTIAN SCHMIDT** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 19 de julho de 2013.

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Presidente

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos
Titular

Prof. Dr. Clézio Aparecido Braga
Titular

À minha família, que sempre me apoiou.

Agradecimentos

É realmente muito difícil agradecer em tão poucas linhas todas as pessoas que já passaram pela minha vida e que de alguma forma me ajudaram a ser quem sou e a chegar onde cheguei, se fosse listar aqui todos os nomes, provavelmente o espaço não seria suficiente, por isso, agradeço a todos que não tiverem seus nomes aqui citados.
Quero começar agradecendo aos meus pais por sempre me apoiarem em minha vida acadêmica e por sempre acreditarem em mim.
Gostaria de agradecer também ao Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares, por ter me orientado neste trabalho, e também pela sua dedicação e confiança em meu trabalho, acreditando sempre no meu sucesso.
Agradeço também a Ong Em Ação, que além de propiciar o cursinho pré-vestibular que permitiu minha entrada na universidade, também proporcionou belos momentos em minha trajetória.
Gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro. Agradeço também ao PPGMA e a todos os professores do programa.
Agradeço a todos os meus amigos, pelos momentos felizes que podemos compartilhar juntos.
E finalmente, agradeço minha namorada, Gislaine, por sempre estar ao meu lado e me apoiar, e sempre continuar acreditando em mim, mesmo quando nem mesmo eu acreditava mais.

*“Mesmo desacreditado e ignorado por todos, não posso desistir,
pois para mim, vencer é nunca desistir.”*

Albert Einstein

*“Se um homem não descobriu nada pelo qual morreria,
não está pronto para viver.”*

Martin Luther King

Resumo

O objetivo desta dissertação é fazer um estudo sobre categorias hereditárias com objeto inclinante utilizando objetos excepcionais e da categoria perpendicular associada a tais objetos. Mais especificamente, nosso objetivo é provar o seguinte teorema: Se $\mathscr{H}$ é uma k-categoria abeliana hereditária conexa com objeto inclinante e $\mathscr{H}$ tem um objeto não nulo de comprimento finito, então $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à categoria $\operatorname{mod} H$ para alguma álgebra hereditária H de dimensão finita, ou $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à categoria $\operatorname{coh}\mathbb{X}$. Começamos fazendo uma apresentação sucinta dos conceitos: sequências quase-cindidas, extensão por um ponto e álgebras hereditárias. Em seguida, começamos a estudar categorias hereditárias com objeto inclinante e algumas propriedades fundamentais, e logo após, definimos objetos excepcionais e categorias perpendiculares e estudamos suas propriedades. No último capítulo, demonstramos o resultado acima citado, utilizando ferramentas de álgebras quase-inclinadas e álgebras canônicas, e todos os conceitos apresentados antes nesta dissertação.

Palavras-chave: *álgebras hereditárias, categorias hereditárias, objetos excepcionais.*

Abstract

The aim of this work is to make a study about hereditary categories with a tilting object using exceptional objects and the perpendicular category associated to this exceptional object. More specifically, we will prove the following theorem: Let $\mathscr{H}$ be a connected hereditary abelian k-category with finite dimensional homomorphism and extension spaces. If $\mathscr{H}$ has a tilting object, is not derived equivalent to some mod$H$ (H hereditary algebra) and $\mathscr{H}_0 \neq 0$, then $\mathscr{H}$ is derived equivalent to coh$\mathbb{X}$ for some weighted projective line $\mathbb{X}$. First, we will briefly present the following concepts: almost-split sequences, one point extensions and hereditary algebras. After this, we present some basic properties of hereditary categories with a tilting object. Then, we define exceptional objects and perpendicular categories and we study their properties. And finally, in the last chapter, we proof the theorem aforementioned, using tools of quasitilted algebras and canonical algebras, and all the concepts presented before in this dissertation.

Keywords: *exceptional objects, hereditary algebras, hereditary categories.*

Sumário

Introdução

Nosso objetivo com esta dissertação é apresentar um estudo que possa contribuir para a compreensão de uma categoria hereditária com objeto inclinante. Almejamos contribuir tanto do ponto de vista algébrico quanto do ponto de vista geométrico. O resultado principal desta dissertação é:
Se $\mathscr{H}$ é uma k-categoria abeliana hereditária conexa com objeto inclinante e $\mathscr{H}$ tem um objeto não nulo de comprimento finito, então se $\mathscr{H}$ não é derivadamente equivalente à categoria mod$H$ para alguma álgebra hereditária H de dimensão finita, temos que $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à categoria coh$\mathbb{X}$.

Categorias hereditárias $\mathscr{H}$ com um objeto inclinante T são de especial interesse em conexão com a construção da classe das álgebras chamadas quase-inclinadas, álgebras essas introduzidas em [12]. Elas são por definição as álgebras da forma $\mathrm{End}_{\mathscr{H}}(T)^{op}$. Uma propriedade importante é que $\mathscr{H}$ e $\mathrm{End}_{\mathscr{H}}(T)^{op}$ são derivadamente equivalentes, fato este provado em [12].

Os principais exemplos de categorias hereditárias são a categoria mod$H$ dos módulos finitamente gerados sobre uma k-álgebra hereditária H de dimensão finita e a categoria coh$\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre uma reta projetiva com peso. Existem outros exemplos também que são derivadamente equivalentes aos exemplos citados. Como a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ de uma categoria hereditária pode ser descrita de maneira simples, é possível descrever a categoria derivada de todas as categorias que são derivadamente equivalentes à $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, e segue então de [9] que automaticamente essas categorias tem um objeto inclinante. As álgebras quase-inclinadas provêm de uma generalização das álgebras inclinadas e das álgebras canônicas de dimensão finita. Note que as álgebras inclinadas são aquelas obtidas de mod$H$, onde H é uma álgebra hereditária de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, utilizando um objeto inclinante arbitrário, neste caso chamado de módulo inclinante, e as álgebras canônicas são aquelas obtidas de coh$\mathbb{X}$ utilizando um tipo especial de objeto inclinante.

A prova do teorema acima é feita de forma construtiva, consideraremos primeiramente E um objeto excepcional, objeto este que podemos estender à um objeto inclinante T em nossa categoria $\mathscr{H}$. Dado o objeto excepcional E, consideraremos então a sequência quase-cindida

$$0 \to \tau E \to M \to E \to 0,$$

e após provarmos que, com certas condições, a categoria perpendicular $E^{\perp}$ é equivalente à categoria de módulos mod$H$, onde H é uma álgebra hereditária de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, veremos que ao tomarmos a extensão por um ponto de H por M, denotada por $H[M]$,

$$H[M] \simeq \mathrm{End}(H \oplus E)^{op},$$

e além disso essa nova álgebra será uma álgebra canônica, e então de [16] e [12] teremos

$$\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(H[M]) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}).$$

As categorias hereditárias $\mathscr{H}$ com objeto inclinante tem sequências quase-cindidas, e então, as correspondentes aljavas de Auslander-Reiten de $\mathscr{H}$, podem ser considerados dentro da categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Quando $\mathscr{H}$ é mod$H$, as componentes da aljava de Auslander-Reiten de $\mathscr{D}^b(\mathrm{mod}H)$ são do tipo $\mathbb{Z}Q$ para Q uma árvore finita, $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ ou tubos, e as componentes da forma $\mathbb{Z}Q$ são dirigidas. Quando a álgebra H for de tipo de representação finito, somente o caso $\mathbb{Z}Q$ ocorre, para H de tipo de representação mansa ocorrem somente os casos $\mathbb{Z}Q$ e tubos, e finalmente, quando a álgebra H for de tipo de representação selvagem, ocorrem então os tipos $\mathbb{Z}Q$ e $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$. Para a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$ ocorrem exatamente os mesmos três tipos de componentes. Em um dos casos temos as componentes $\mathbb{Z}Q$ e tubos, e então coh$\mathbb{X}$ é derivadamente equivalente à uma álgebra hereditária H de tipo de representação mansa. No segundo caso, temos somente componentes formadas por tubos e finalmente, no terceiro caso, temos tubos e componentes da forma $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ (para mais detalhes, ver [16]). Então podemos ver que em cada um dos casos existem pelo menos dois tipos de componentes.

O texto está estruturado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo apresentamos conceitos básicos e alguns resultados necessários para a compreensão dos capítulos seguintes, estudaremos teoria de Auslander-Reiten, ferramenta essencial em todo este trabalho, extensões por um ponto, que são de extrema importância para estudarmos álgebras quase-inclinadas, e finalmente, a teoria sobre álgebras hereditárias e módulos sobre álgebras hereditárias será muito utilizada, como veremos.

No segundo capítulo, investigaremos k-categorias lineares abelianas, Hom e Ext finitas,ou seja, satisfazendo Krull-Schmidt, e além disso, com a propriedade de que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{H}}(X,Y)=0$, para todo $n\geq 2$ e para todos X,Y objetos em $\mathscr{H}$. Estudaremos também teoria inclinante em categorias hereditárias, e apresentaremos aqui alguns resultados relevantes, demonstrando-os ou citando as referências das provas.

No terceiro capítulo veremos alguns resultados sobre objetos excepcionais, ou seja, objetos indecomponíveis tais que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E)=0,$$

e além disso, estudaremos também categorias perpendiculares. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo serão similares aos resultados para a categoria de módulos. Finalmente, daremos condições suficientes para que um objeto excepcional seja estendido à um objeto inclinante, e além disso, condições para que a categoria perpendicular seja estendida à uma categoria com objeto inclinante. Ainda neste capítulo, também mostraremos que se o objeto excepcional E é também um objeto de torção, e está em $\mathscr{H}_\infty$, então a categoria perpendicular $E^\perp$ é equivalente a categoria mod$H$ para alguma k-álgebra hereditária H de dimensão finita, onde k é um corpo algebricamente fechado.

Para provarmos tal resultado, primeiro provaremos que cada componente da k-categoria abeliana hereditária $E^\perp$ contém um somando indecomponível do termo do meio da sequência quase-cindida terminando em E, e então após isso, mostraremos que cada uma dessas componentes contém um objeto projetivo que está em sub$E$, e além disso, também contém um objeto inclinante, e daí, segue de [12] que cada componente de $E^\perp$ será equivalente à categoria de módulos finitamente gerados mod$H$ para alguma k-álgebra hereditária H de dimensão finita.

Por fim, no último capítulo mostraremos o principal resultado desta dissertação, isto é, mostraremos que dada uma categoria hereditária $\mathscr{H}$, temos que $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à uma álgebra canônica, ou equivalentemente, à categoria coh$\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre alguma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$. Para construirmos tal álgebra canônica, precisaremos definir vários conceitos úteis, mas antes disso, no segundo capítulo vimos que a componente dos objetos de comprimento finito, denotada por $\mathscr{H}_0$ é união de tubos, iremos supor então que existe algum tubo de posto 1, e consideraremos o simples S na boca de tal tubo. A partir daí podemos definir o conceito de **rank** de um objeto

X, denotado por rk$X$ e dado pela seguinte fórmula:

$$\mathrm{rk}X = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,S) - \dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,S),$$

conceito este de extrema importância nas provas dos teoremas que seguem sua definição. Por fim, mostraremos que a aljava de H tem um único poço x e que a multiplicidade do objeto simples $S(x)$ associada a este poço é 2, para então sermos capazes de mostrar que a extensão por um ponto $H[M]$ é uma álgebra canônica, e então de [16] e [12] segue que

$$\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(H[M]) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X}).$$

Após provarmos isto, a prova de que a categoria $\mathscr{H}$ é derivamente equivalente à alguma coh$\mathbb{X}$ seguirá utilizando indução sobre o posto minimal dos tubos em $\mathscr{H}_0$.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos e resultados que serão necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Ao longo deste trabalho, quando mencionarmos a categoria mod$A$, estamos nos referindo à categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados.

1.1 Teoria de Auslander-Reiten

Uma ferramenta essencial em todos os capítulos deste texto é a teoria de Auslander-Reiten. Apresentaremos aqui apenas alguns de seus resultados, que podem ser encontrados com maiores detalhes em [3] e em [2], para o caso em que as álgebras são consideradas sobre corpos algebricamente fechados.

1.1.1 Morfismos Irredutíveis

Seja A uma álgebra de artin. Um morfismo $f : X \to Y$, com X, Y A-módulos é dito uma

1.**secção** se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$.

2.**retração** se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $fg = 1_Y$.

Definição 1.1. *Um morfismo de A-módulos $f : L \to M$ é dito* ***morfismo minimal à esquerda*** *se para todo $h \in EndM$ tal que $hf = f$, h é isomorfismo.*

Definição 1.2. *Um morfismo de A-módulos $f : L \to M$ é chamado* ***morfismo quase cindido à esquerda*** *se*

1. f não é secção.

2. Para todo morfismo $u : L \to U$ que não é secção, existe um morfismo $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$, isto é, existe u' satisfazendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Se f for minimal à esquerda e quase cindido à esquerda, diremos que f é **morfismo minimal quase cindido à esquerda**.

Definição 1.3. *Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é dito* ***morfismo minimal à direita*** *se para todo $h \in EndM$ tal que $fh = f$, h é isomorfismo.*

Definição 1.4. *Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é chamado* ***morfismo quase cindido à direita*** *se*

1. f não é retração.

2. Para todo morfismo $u : U \to N$ que não é retração, existe um morfismo $u' : U \to M$ tal que $fu' = u$, isto é, existe u' satisfazendo o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "u'"'] \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Se f for minimal à direita e quase cindido à direita, diremos que f é **morfismo minimal quase cindido à direita**.

Temos o seguinte:

Teorema 1.1. *(ver [2], pág. 99)*

(a) *Se $f : X \to Y$ é um morfismo minimal quase cindido à esquerda, então X é indecomponível.*

(b) *Se $f : X \to Y$ é um morfismo minimal quase cindido à direita, então Y é indecomponível.*

Definição 1.5. *Um morfismo de A-módulos $f : X \to Y$ é dito* ***morfismo irredutível*** *se satisfaz as seguintes condições:*

1. f não é secção nem retração.

2. Se $f = gh$, então ou g é retração ou h é secção.

Teorema 1.2. *(ver [2], pág. 102)*

(a) *Se $f : L \to M$ é um monomorfismo irredutível, então $N = cokerf$ é um objeto indecomponível.*

(b) *Se $g : M \to N$ é um epimorfismo irredutível, então $L = kerg$ é um objeto indecomponível.*

Teorema 1.3. *(ver [2], pág. 103)*

(a) *Seja $f : L \to M$ um morfismo minimal quase cindido à esquerda. Então f é irredutível. Mais ainda, um morfismo $f' : L \to M'$ é irredutível se, e somente se, $M' \neq 0$ e existem uma decomposição em soma direta $M = M' \oplus M''$ e um morfismo $f'' : L \to M''$ tais que $[f' f'']^t : L \to M' \oplus M''$ é morfismo minimal quase cindido à esquerda.*

(b) *Seja $g : M \to N$ um morfismo minimal quase cindido à direita. Então g é irredutível. Mais ainda, um morfismo $g' : M' \to N$ é irredutível se, e somente se, $M' \neq 0$ e existem uma decomposição em soma direta $M = M' \oplus M''$ e um morfismo $g'' : M'' \to N$ tais que $[g' g'']^t :\to M' \oplus M''$ é morfismo minimal quase cindido à direita.*

1.1.2 Sequências quase-cindidas

Considere nesta seção A uma álgebra de artin.

Definição 1.6. *Uma sequência exata em modA*

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

*é dita **sequência quase-cindida** se satisfaz:*

1. *f é morfismo minimal quase cindido à esquerda.*
2. *g é morfismo minimal quase cindido à direita.*

Neste caso, temos pelo teorema 1.1 que L e M são objetos indecomponíveis.

São caracterizações equivalentes para uma sequência quase cindida:

Teorema 1.4. *(ver [2], pág. 105) Seja $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ uma sequência exata em modA. São equivalentes:*

(a) *A sequência é quase-cindida.*

(b) *L é um objeto indecomponível e g é um morfismo quase cindido à direita.*

(c) *N é um objeto indecomponível e f é um morfismo quase cindido à esquerda.*

(d) *O morfismo f é minimal quase cindido à esquerda.*

(e) *O morfismo g é minimal quase cindido à direita.*

(f) *L e M são objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}$, e f e g são morfismos irredutíveis.*

Agora daremos duas definições que usaremos ao longo de todo o texto e que são fundamentais.

Definição 1.7. *Seja A uma k-álgebra. Um A-módulo P é dito* ***projetivo*** *se para qualquer epimorfismo $\phi : M \to N$ e para qualquer homomorfismo $g : P \to N$ existe um homomorfismo $h : P \to M$ tal que $\phi h = g$. Isto é, existe um morfismo $h : P \to M$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

Analogamente, podemos definir também o conceito de A-módulo injetivo.

Definição 1.8. *Seja A uma k-álgebra. Um A-módulo I é dito* ***injetivo*** *se para qualquer monomorfismo $\phi : M \to N$ e para qualquer homomorfismo $g : M \to I$ existe um homomorfismo $h : N \to I$ tal que $h\phi = g$. Isto é, existe um morfismo $h : N \to I$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Dada uma álgebra de Artin A sobre k, existe uma dualidade $D : \text{mod}A \to \text{mod}A^{op}$ dada por $D = \text{Hom}_k(\_, I_0(k/\text{rad}k))$, em que $I_0(k/\text{rad}k)$ é a envolvente injetiva de $k/\text{rad}k$. Quando em particular k é um corpo, $D = \text{Hom}_k(\_, k)$.

Seja $\underline{\text{mod}}A$ a categoria cujos os objetos são A-módulos finitamente gerados, e o conjunto de morfismo entre dois objetos M e N é

$$\underline{\text{Hom}}_A(M,N) = \text{Hom}_A(M,N)/P(M,N)$$

em que $P(M,N)$ é o subgrupo de $\text{Hom}_A(M,N)$ formados pelos morfismos $f : M \to N$ que se fatoram por um A-módulo projetivo, isto é, o conjunto dos morfismos $f : M \to N$ tal que existem P um A-módulo projetivo e $g : M \to P$, $h : P \to N$ tais que $f = hg$.

De maneira similar, $\overline{\text{mod}}A$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $\text{mod}A$ e cujo conjunto de morfismos entre dois objetos M e N é

$$\overline{\text{Hom}}_A(M,N) = \text{Hom}_A(M,N)/I(M,N)$$

onde $I(M,N)$ é o subgrupo de $\text{Hom}_A(M,N)$ dos morfismos que se fatoram através de um A-módulo injetivo.

Considere o funtor exato à esquerda e contravariante

$$\mathrm{Hom}_A(\_, A) : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A^{op}$$

Sendo P_A um A-módulo à direita projetivo, $\mathrm{Hom}_A(P, A)$ é A-módulo à esquerda projetivo.

Considerando agora, para cada A-módulo à direita M, a sua resolução projetiva minimal

$$P_1 \stackrel{p_1}{\to} P_0 \stackrel{p_0}{\to} M \to 0$$

Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_A(\_, A)$, obtemos uma sequência de A-módulos à esquerda:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \stackrel{\mathrm{Hom}_A(p_0,A)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(P_0, A) \stackrel{\mathrm{Hom}_A(p_1,A)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(P_1, A) \to \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_A(p_1, A)) \to 0$$

Denotamos $\mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_A(p_1, A))$ por TrM, e o chamamos de **transposta** de M.

Este funtor induz um outro funtor

$$Tr : \underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$$

A dualidade $D : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A^{op}$ induz uma dualidade $D : \underline{\mathrm{mod}}A^{op} \to \overline{\mathrm{mod}}A$.

Definição 1.9. *As **translações de Auslander Reiten** são definidas pela composição de D e Tr, sendo*

$$\tau = DTr \ \ e \ \ \tau^{-1} = TrD.$$

*Para M um A-módulo indecomponível , τM é chamado de **transladado** de M.*

O próximo teorema traz algumas das propriedades satisfeitas pelas translações de Auslander-Reiten.

Teorema 1.5. *(Ver [2], pág. 116) Sejam M e N A-módulos indecomponíveis em modA.*

(a) *O A-módulo τM é o módulo {0} se, e somente se, M é A-módulo projetivo.*

(a') *O A-módulo $\tau^{-1}M$ é o módulo {0} se, e somente se, M é A-módulo injetivo.*

(b) *Se M é um módulo não projetivo, então τM é um módulo indecomponível não injetivo e $\tau^{-1}\tau M \simeq M$.*

(b') *Se M é um módulo não injetivo, então $\tau^{-1}M$ é um módulo indecomponível não projetivo e $\tau\tau^{-1}M \simeq M$.*

(c) *Se M e N são módulos não projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau M \simeq \tau N$.*

(c') *Se M e N são módulos não injetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau^{-1}M \simeq \tau^{-1}N$.*

Sobre a existência de sequências quase-cindidas, temos um importante resultado:

Teorema 1.6. *(ver [2], pág. 120)*

(a) *Para cada A-módulo não projetivo indecomponível M, existe uma sequência quase-cindida*

$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0$$

em modA.

(b) *Para cada A-módulo não injetivo indecomponível M, existe uma sequência quase-cindida*

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}M \to 0$$

em modA.

1.1.3 Aljava de Auslander-Reiten

Baseados em [19], apresentamos a construção da aljava de Auslander-Reiten da categoria de módulos de uma dada álgebra, que ao longo dessa seção, salvo indicação contrária, é sempre considerada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k.

Para tanto, será necessária a seguinte definição, de radical de categorias.

Definição 1.10. *Seja A uma álgebra de Artin. Para cada par (M,N) de A-módulos, chamamos de **radical da categoria** modA o conjunto*

$$rad_A(M,N) = \{f \in Hom_A(M,N) | 1_N - fg \text{ é invertível à direita, para todo } g \in Hom_A(N,M)\}.$$

Obs:.(i) Sejam M,N A-módulos. Se $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ é tal que o morfismo $1_N - fg$ admite inverso à direita, para todo $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, então $1_N - fg$ é invertível, para todo $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$.

De fato, fixado $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, consideremos $h \in \mathrm{Hom}_A(N,N)$ tal que $(1_N - fg)h = 1$. Assim, $h = 1 - fg(-h)$, que admite inverso à direita, h'. Neste caso, $1 = hh' = (1+$

$fgh)h' = h' + fghh' = h' + fg$, ou ainda, $h' = 1 - fg$ e, portanto, h é o inverso de $1_N - fg$.

Dessa forma, podemos também definir $\text{rad}_A(M,N)$ por

$$\{f \in \text{Hom}_A(M,N) | 1_N - fg \text{é invertível, para todo } g \in \text{Hom}_A(N,M)\}.$$

(ii) rad$A$ é um ideal bilateral de mod$A$ (ver [3], pág. 178).

(iii) Se M e N são indecomponíveis, então

$$\text{rad}_A(M,N) = \{f \in \text{Hom}_A(M,N) | f \text{não é isomorfismo(ver [4], pág. 12)}.$$

(iv) Se M é indecomponível, então $\text{rad}_A(M,M) = \text{rad End}M$, uma vez que End$M$ é local.

Recursivamente, definimos para $n > 1$,

$$\text{rad}_A^n(M,N) = \{\sum_i g_i f_i | g_i \in \text{rad}_A^{n-1}(X_i,N), f_i \in \text{rad}_A(M,X_i), \text{com} X_i \in \text{ind}A\} \text{e}$$
$$\text{rad}_A^\infty(M,N) = \bigcap_{n\geq 1} \text{rad}_A^n(M,N).$$

Em particular, temos que

$$\text{rad}_A^2(M,N) = \{gf | f \in \text{rad}_A(M,Z) \text{e } g \in \text{rad}_A(Z,N), \text{para algum } A-\text{módulo } Z\}.$$

Observe que $\text{rad}_A^2(M,N) \subseteq \text{rad}_A(M,N)$.Se adicionarmos a M e a N a hipótese de que são indecomponíveis, podemos concluir que um morfismo $f : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(M,N) \backslash \text{rad}_A^2(M,N)$, (ver [3], pág. 179). Dessa forma, definimos então o quociente

$$\text{Irr}(M,N) = \text{rad}_A(M,N)/\text{rad}_A^2(M,N),$$

que chamamos de espaço dos morfismos irredutíveis.

Assuma que A é um k-álgebra de dimensão finita, k corpo algebricamente fechado, e sejam M e N como acima. Então, Irr(M,N) tem estrutura de End$N$-End$M$-bimódulo, anulado à esquerda pelos elementos de rad(End$N$) e à direita pelos elementos de rad(End$M$), o que lhe confere uma estrutura de k-espaço vetorial, já que End$M$ e End$N$ são locais. Se retirarmos a hipótese de k corpo algebricamente fechado, segue então que Irr(M,N) tem estrutura de End$N/R(N,N)$-(End$M/R(M,M))^{op}$-bimódulo.

Proposição 1.7. *(ver [19], pág. 126) Seja* $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i}$ *um* A*-módulo, com cada* M_i *indecomponível, dois a dois não isomorfos.*

(a) *Seja* $f : L \to M$ *um morfismo de* A*-módulos, com* L *indecomponível,* $f = (f_1 \cdots f_t)^t$*, em que* $f_i = (f_{i1} \cdots f_{in_i})^t : L \to M_i^{n_i}$*. Então,* f *é minimal quase cindido à esquerda se, e somente se,* $f_{ij} \in rad_A(L, M_i)$*, e as classes* $\overline{f_{i1}}, \cdots, \overline{f_{in_i}}$ *módulo* $rad_A^2(L, M_i)$ *formam uma base para* $Irr(L, M_i)$*, para todo* i*.E, se existe um* A*-módulo indecomponível* M' *tal que* $Irr(L, M') \neq 0$*, então* $M' \simeq M_i$*, para algum* i*.*

(b) *Seja* $f : M \to N$ *um morfismo de* A*-módulos, com* N *indecomponível,* $g = (g_1 \cdots g_t)$*, em que* $g_i = (g_{i1} \cdots g_{in_i}) : M_i^{n_i} \to N$*. Então,* g *é minimal quase cindido à direita se, e somente se,* $g_{ij} \in rad_A(M_i, N)$*, e as classes* $\overline{g_{i1}}, \cdots, \overline{g_{in_i}}$ *módulo* $rad_A^2(M_i, N)$ *formam uma base para* $Irr(M_i, N)$*, para todo* i*.E, se existe um* A*-módulo indecomponível* M' *tal que* $Irr(M', N) \neq 0$*, então* $M' \simeq M_i$*, para algum* i*.*

Como consequência desse resultado, obtemos que, se $0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$ é a sequência quase-cindida com final em N, com cada M_i indecomponível e dois a dois não isomorfos, então $n_i = \dim_k \mathrm{Irr}(M_i, N) = \dim_k \mathrm{Irr}(\tau N, M_i)$, para todo i.

Proposição 1.8. *(ver [19], pág. 128) Sejam* X, Y A*-módulos indecomponíveis.*

(a) *Se* $\tau X \neq 0$ *e* $\tau Y \neq 0$*, então existe um isomorfismo* k*-linear* $Irr(\tau X, \tau Y) \simeq Irr(X, Y)$*.*

(b) *Se* $\tau^{-1} X \neq 0$ *e* $\tau^{-1} Y \neq 0$*, então existe um isomorfismo* k*-linear* $Irr(\tau^{-1} X, \tau^{-1} Y) \simeq Irr(X, Y)$*.*

A seguir, enunciaremos a principal definição desta seção:

Definição 1.11. *Seja* A *uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Então a* ***aljava de Auslander-Reiten*** *de* A*, denotado por* $\Gamma(modA)$*, é definido por:*

(i) *Os pontos de* $\Gamma(modA)$ *são as classes de isomorfismo* $[X]$ *dos* A*-módulos indecomponíveis* X*.*

(ii) *Sejam* $[M]$ *e* $[N]$ *pontos em* $\Gamma(modA)$ *correspondentes aos* A*-módulos indecomponíveis* M *e* N*. As flechas* $[M] \to [N]$ *estão em correspondência bijetiva com os vetores da base do* k*-espaço vetorial* $Irr(M, N)$*.*

Sejam N um A-módulo indecomponível não projetivo, e

$$0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$$

a sequência quase-cindida com final em N, com cada M_i indecomponível, dois a dois não isomorfos. Comentamos anteriormente, que para todo i, $n_i = \dim_k \mathrm{Irr}(M_i, N) = \dim_k \mathrm{Irr}(\tau N, M_i)$. Neste caso, temos em $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ a seguinte configuração:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dr, "\beta_{1n_1}"] & \\
\tau N \arrow[ur, "\alpha_{1n_1}"] \arrow[dr, "\alpha_{tn_t}"'] \arrow[rr, dashed, no head] & \vdots & N \\
 & M_t \arrow[ur, "\beta_{tn_t}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que o conjunto dos sucessores de $[\tau N]$ coincide com o conjunto dos antecessores de $[N]$ e, para cada i, existe uma bijeção entre $\{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in_i}\}$ e $\{\beta_{i1}, \cdots, \beta_{in_i}\}$, ou seja, há o mesmo número de flechas de $[\tau N]$ para $[M_i]$ e de $[M_i]$ para $[N]$.

Exemplo 1.1. *Seja A a k-álgebra de caminhos dada pela aljava*

$$1\circ \longrightarrow 2\circ \longrightarrow 3\circ$$

com k corpo algebricamente fechado. Comecemos então listando os módulos projetivos e injetivos indecomponíveis:

$$\begin{gathered}
P(1) = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k = I(3) \\
P(2) = 0 \longrightarrow k \xrightarrow{1} k \\
P(3) = 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k = S(3) \\
I(1) = k \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 = S(1) \\
I(2) = k \xrightarrow{1} k \longrightarrow 0
\end{gathered}$$

Como $P(3)$ é um módulo simples projetivo, sabemos que todo morfismo irredutível começando em $P(3)$ tem como contradomínio um A-módulo projetivo. E ainda como $P(3) = radP(2)$, e $P(3)$ não é somando de $radP(1)$, então o único morfismo irredutível começando em $P(3)$ é a inclusão $i : P(3) \to P(2)$. Disto temos então uma sequência exata quase-cindida

$$0 \longrightarrow P(3) \longrightarrow P(2) \longrightarrow coker(i) = P(2)/P(3) = S(2) \longrightarrow 0.$$

Além disso, $P(2) = radP(1)$, a inclusão $P(2) \to P(1)$ é um morfismo irredutível. Além disso, $P(1) = I(3)$, e então temos que existe sequência exata quase-cindida

$$0 \longrightarrow P(2) \longrightarrow P(1) \oplus S(2) \longrightarrow I(2) \longrightarrow 0.$$

Por outro lado ainda, a projeção $I(2) \to I(2)/S(2) = I(1)$ é minimal quase cindida à esquerda, com núcleo $S(2)$, de onde conseguimos outra sequência exata quase-cindida

$$0 \to S(2) \to I(2) \to I(1) \to 0.$$

Com essas informações então, podemos construir a aljava de Auslander-Reiten $\Gamma(modA)$:

$$\begin{tikzcd}
P(3) \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & S(2) \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I(1) \\
& P(2) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & I(2) \arrow[ur] & \\
& & P(1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Para finalizar essa seção daremos algumas classificações das componentes da aljava de Auslander-Reiten de A, mas antes, precisamos definir o que é a τ-órbita de um elemento.

Definição 1.12. *Para cada $M \in indA$, chamaremos de τ-órbita de M ao conjunto*

$$\{\tau^n M | n \in Z\}$$

em que $Z \subseteq \mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros tais que $\tau^n M$ está definido.

Definição 1.13. *Uma componente Γ de $\Gamma(modA)$ é dita **componente pós-projetiva** se:*

(i) *Todo vértice de $(\Gamma)_0$ está na τ-órbita de um projetivo.*

(ii) *Nenhum vértice de $(\Gamma)_0$ está em um ciclo orientado em $\Gamma(modA)$.*

Definição 1.14. *Uma componente Γ de $\Gamma(modA)$ é dita **componente pré-injetiva** se:*

(i) *Todo vértice de $(\Gamma)_0$ está na τ-órbita de um injetivo.*

(ii) *Nenhum vértice de $(\Gamma)_0$ está em um ciclo orientado em $\Gamma(modA)$.*

Definição 1.15. *Uma componente Γ de $\Gamma(modA)$ é dita **componente regular** se não possui módulos projetivos ou injetivos.*

1.2 Extensão por um ponto

Definição 1.16. *Seja A uma k-álgebra e $X \in modA$*

***(a)** A **extensão por um ponto** de A por X, a qual denotaremos $A[X]$ é a k-álgebra na forma de matriz triangular*

$$A[X] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X & k \end{bmatrix}$$

com a soma usual de matrizes e o produto induzido pela multiplicação usual de matrizes e a estrutura de k-A-bimódulo de X.

***(b)** A **coextensão por um ponto** de A por X, a qual denotaremos $[X]A$ é a k-álgebra na forma de matriz triangular*

$$[X]A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ D(X) & A \end{bmatrix}$$

com a soma usual de matrizes e o produto induzido pela multiplicação usual de matrizes e a estrutura de A-k-bimódulo de $D(X)$, onde $D(X) := Hom_k(X,k)$.

Relembrando que dadas duas k-álgebras A, C, e um C-A-módulo de dimensão finita X, o conjunto

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X & C \end{bmatrix}$$

de todas as matrizes $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & c \end{bmatrix}$, onde $x \in A$, $c \in C$ e $x \in X$, munido com a soma usual de matrizes e multiplicação dada pela fórmula

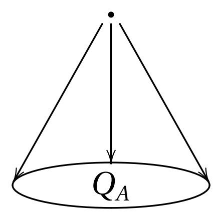
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & c \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a' & 0 \\ x' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ xa' + cx' & cc' \end{bmatrix}$$

é uma k-álgebra de dimensão finita com elemento identidade $1 = e_A + e_C$, onde

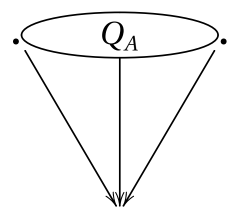
$$e_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; e_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam A uma k-álgebra com aljava Q_A e $X \in \mathrm{mod}A$.

1. Ao fazermos a extensão por um ponto de A por X, a aljava Q_A pode ser vista como aquela obtida da aljava $Q_{A[X]}$ da k-álgebra $A[X]$, retirando-se um vértice fonte e as flechas que têm início nela. Além disso, tem-se que $\text{rad}(P_0) \simeq X$, onde P_0 é o $A[X]$-módulo projetivo associado ao vértice fonte anterioremente citado, isto é, $P_0 = e_0 A[X]$. Uma maneira de visualizarmos a aljava de $Q_{A[X]}$ da k-álgebra $A[X]$ é a seguinte:



2. Ao fazermos a coextensão por um ponto de A por X, a aljava Q_A pode ser vista como aquele obtida da aljava $Q_{[X]A}$ da k-álgebra $[X]A$, retirando-se um vértice poço e as flechas que chegam nela. Além disso, tem-se que $I_0/S_0 \simeq D(X)$, onde I_0 e S_0 são os $A[X]$-módulos injetivo e simples respectivamente associados ao vértice poço anterioremente citado. Uma maneira de visualizarmos a aljava $Q_{[X]A}$ da k-álgebra $[X]A$ é a seguinte:



A seguir daremos 2 exemplos simples que ilustram a definição.

Exemplo 1.2. *Assuma que $A = k$ e $X = k$. Então a extensão por um ponto $A[X]$ da álgebra k por $X = k$ é a álgebra*

$$k[k] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & k \end{bmatrix}$$

consistindo nas matrizes triangulares inferiores 2x2 com coeficientes em k. Em outras palavras, a extensão por um ponto $k[k]$ é a álgebra de caminhos sobre k cuja aljava é

$$1\circ \longleftarrow \circ 2$$

Exemplo 1.3. *Assuma que $A = k$ e $X = k^2$. Então a extensão por um ponto $A[X]$ da álgebra k por $X = k^2$ é a álgebra de Kronecker*

$$k[k^2] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, $k[k^2]$ é a álgebra de caminhos sobre k cuja aljava é

$$1\circ \leftleftarrows \circ 2$$

1.2.1 Categoria de Representações e Extensão por um ponto

Dados A uma k-álgebra e X um k-A-bimódulo podemos definir a k-categoria **rep**(X) de todas as **representações k-lineares do bimódulo** X da seguinte maneira:

(i) Um objeto $M = (M_0, M_1, \phi_M)$ em rep(X) consiste de um k-espaço vetorial M_0, um A-módulo à direita M_1, e um homomorfismo $\phi_M : M_0 \otimes_k X \to M_1$ de A-módulos à direita.

(ii) Um morfismo entre $M = (M_0, M_1, \phi_M)$ e $M' = (M'_0, M'_1, \phi_{M'})$ em rep(X) é um par $f = (f_0, f_1)$, onde $f_0 : M_0 \to M'_0$ é um homomorfismo de k-espaços vetoriais e $f_1 : M_1 \to M'_1$ é um homomorfismo de A-módulos, que são compatíveis com a estrutura dos homomorfismos $\phi_M, \phi_{M'}$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M_0 \otimes_k X \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "f_0 \otimes 1_X"'] & M_1 \arrow[d, "f_1"] \\ M'_0 \otimes_k X \arrow[r, "\phi_{M'}"] & M'_1 \end{tikzcd}$$

(iii) A composição de morfismos em rep(X) é induzido pela composição de morfismos em mod$k$ e mod$A$, respectivamente.

(iv) A soma direta de dois objetos $M = (M_0, M_1, \phi_M)$ e $M' = (M'_0, M'_1, \phi_{M'})$ em rep(X) é o objeto em rep(X)

$$M \oplus M' = (M_0 \oplus M'_0, M_1 \oplus M'_1, \phi_M \oplus \phi_{M'})$$

A seguir, enunciaremos um importante resultado, que será muito útil neste trabalho.

Teorema 1.9. *(Ver [19], pág. 7) Com a notação introduzida anteriormente, temos o seguinte:*

(a) *A k-categoria aditiva rep(X) é uma categoria abeliana, e existe uma equivalência k-linear de categorias*

$$modA[X] \xrightarrow[\simeq]{F} rep(X)$$

(b) *Se M é um módulo em $A[X]$ e $F(M) = (M_0, M_1, \phi_M)$, então o vetor dimensão* ***dim****M de M é da forma*

$$\mathbf{dim}M = (\mathbf{dim}M_1, \mathbf{dim}M_0)$$

onde $\mathbf{dim}M_0 = dim_k M_0$ e $\mathbf{dim}M_1$ é o vetor dimensão do A-módulo M_1, com $(\mathbf{dim}M)_a = (\mathbf{dim}M_1)_a = dim M e_a$, para qualquer vértice $a \neq 0$ da aljava $Q_{A[X]}$ de $A[X]$. Aqui $0 \in (Q_{A[X]})_0$ é o vértice fonte definido pela estrutura da álgebra extensão por um ponto $A[X]$.

1.3 Álgebras Hereditárias

Sabemos que qualquer álgebra H básica conexa e com dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k admite uma representação como álgebra de caminhos $H \simeq kQ/I$, onde Q é uma aljava conexa finita e I é um ideal admissível de kQ. É natural estudarmos a teoria de representações das álgebras da forma $H \simeq kQ$, isto é, das álgebras de caminhos com aljava finita, conexa e acíclica. Isso acontece somente quando a álgebra H é hereditária, isto é, todo submódulo de um H-módulo projetivo é projetivo também.

Definição 1.17. *Uma álgebra H é dita* ***hereditária à direita*** *se qualquer ideal à direita de H é projetivo como H-módulo.*

Podemos definir álgebras hereditárias à esquerda de maneira dual. O exemplo mais natural de álgebra hereditária à direita (esquerda) é dado pela classe das álgebras semisimples. O próximo teorema é fundamental:

Teorema 1.10. *(ver [2], pág. 244) Seja H uma álgebra hereditária à direita. Todo submódulo de um H-módulo livre é isomorfo à soma direta de ideais à direita de H.*

Corolário 1.11. *(ver [2], pág. 245) Seja H uma álgebra hereditária à direita. Todo submódulo de um H-módulo projetivo é projetivo.*

Agora, enunciaremos um teorema que nos é fundamental, uma nova caracterização de álgebras hereditárias.

Teorema 1.12. *(ver [2], pág. 248)*

(a) *Se Q é uma aljava finita, conexa e acíclica, então a álgebra $H = kQ$ é hereditária e $Q_H = Q$.*

(b) *Se A é uma álgebra básica, conexa, hereditária e $\{e_1, ..., e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais, então:*
(i) *a aljava Q_A é finita, conexa e acíclica, e*
(ii) *existe um isomorfismo de k-álgebras $H \simeq kQ_A$.*

1.4 Módulos sobre álgebras hereditárias

Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Temos então a seguinte definição:

Definição 1.18. *Seja modA a categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados. Denotemos por $F(modA) = F(A)$ o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismos dos A-módulos. Seja $F_0(modA) = F_0(A)$ o subgrupo gerado por $[X] - [Y] + [Z]$ para todas as sequências exatas $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ em modA. Então o* ***grupo de Grothendieck*** *de modA é por definição $K_0(modA) = K_0(A) = F(A)/F_0(A)$.*

Pelo teorema de Jordan-Hölder, as classes dos módulos simples $S_1, S_2, \cdots, S_n$ formam uma $\mathbb{Z}$-base para o grupo de Grothendieck $K_0(A) = K_0(\text{mod}A)$. Então podemos identificar $K_0(A)$ com $\mathbb{Z}^n$, e também falar do vetor $\underline{\dim}M$ ao invés de falar das classes $[M]$ de um A-módulo. Se a álgebra A é hereditária, $K_0(A)$ é equipado com a forma de Euler, definida por:

$$< X, Y >= \dim_k \text{Hom}_A(X, Y) - \dim_k \text{Ext}^1_A(X, Y),$$

o que induz uma forma quadrática q_A em $K_0(A)$ com $q_A(x) =< x, x >$. Chamaremos $x \in K_0(A) = \mathbb{Z}^n$ de **raiz de** q_A se $q_A(x) = 1$. Diremos que x é uma raiz positiva se além de ser raiz, $x \in \mathbb{N}^n$.

1.4.1 Tipo de representação finito

Uma k-álgebra A de dimensão finita é dita de **tipo de representação finito** se - a menos de isomorfismos - existe um número finito de A-módulos indecomponíveis. Qualquer A-módulo pode ser escrito como uma soma direta de A-módulos indecomponíveis. O próximo teorema descreve as álgebras de tipo de representação finito, e além disso, relaciona a teoria de representações de álgebras de dimensão finita com a teoria de Lie.

Teorema 1.13. *(ver [2], pág. 291)(**Teorema de Gabriel**) Seja $H = kQ$ a álgebra de caminhos de uma aljava finita conexa sem ciclos orientados, k corpo algebricamente fechado. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *H é de tipo de representação finito se, e somente se, o grafo subjacente $\overline{Q}$ é um diagrama de Dynkin, isto é, do tipo $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$ $(n \geq 4)$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$.*

(b) *Neste caso, cada H-módulo E é da forma $\tau^{-n}P$, com P H-módulo projetivo indecomponível.*

(c) *A forma quadrática q_H associada à álgebra H é positiva definida. Além disso, a função $E \mapsto \underline{\dim}E$, que envia um módulo no seu vetor dimensão, estabelece uma bijeção entre o conjunto das classes de isomorfismos de H-módulos indecomponíveis e o conjunto das raízes positivas de q_H.*

1.4.2 Tipo de representação mansa

A seguinte definição será útil para entendermos melhor a classificação de álgebras de tipo de representação mansa através de seus grafos subjacentes, e além disso, utilizaremos tal conceito na prova de que a álgebra $H[M]$ é canônica:

Definição 1.19. *Uma aljava Q cujo grafo subjacente $\overline{Q}$ é uma árvore será chamado estrela se existir um vértice poço c em Q tal que cada componente conexa da subaljava plena $Q - \{c\}$ é uma aljava da forma*

$$\mathbb{A}_n : \ \cdot \longleftarrow \cdot \qquad \dots \longleftarrow \cdot$$

Uma k-álgebra hereditária H é dita de **tipo de representação mansa** se a forma quadrática q_H associada à álgebra H é positiva semidefinida mas não positiva definida. Isso na verdade é equivalente a dizer que o grafo subjacente $\overline{Q}$ de Q é um diagrama do tipo Euclidiano. Relembraremos aqui que o diagrama Dynkin $\overline{Q'}$ associado ao diagrama Euclidiano $\overline{Q}$ é uma estrela $[p, q, r]$ satisfazendo $1/\mathrm{p} + 1/\mathrm{q} + 1/\mathrm{r} > 1$, chamada de tipo Dynkin da aljava Q. Então $\tilde{\mathbb{A}}_{pq}$ tem tipo $[1, p, q]$ ou simplesmente $[p, q]$, $\tilde{\mathbb{D}}_n$, $(n \geq 4)$ tem tipo $[2, 2, n-2]$, e $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ e $\tilde{\mathbb{E}}_8$ têm tipos $[2, 3, 3]$, $[2, 3, 4]$ e $[2, 3, 4]$ respectivamente.

Se $\overline{Q}$ um diagrama Euclidiano então existe uma única função positiva com valores inteiros $\lambda : Q_0 \to \mathbb{Z}$ que é aditiva, isto é, para $p \in Q_0$ o valor $2\lambda(p)$ coincide com a soma

$\sum_{q-p} \lambda(q)$, estendido sobre todas as vizinhanças q de p, e normalizado, isto é, $\lambda(p) = 1$ para algum vértice p. Para cada vértice $p \in Q_0$ seja $P(p)$ o H-módulo à direita projetivo indecomponível associado ao vértice p. A única forma linear $r : K_0(H) \to \mathbb{Z}$ satisfazendo $r[P(p)] = \lambda(p)$ é chamada rank de p. Além disso, dada uma álgebra A com dimensão global finita, podemos notar que as classes $[P(p)]$ formam uma base pra $K_0(H)$.

O seguinte teorema nos diz como é a aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra com tipo de representação mansa:

Teorema 1.14. *(ver [18], pág. 158) Seja $H = kQ$ uma álgebra hereditária conexa de tipo de representação mansa, com aljava Q com tipo Dynkin igual à $[p, q, r]$. Sejam $\mathscr{P}$, $\mathscr{R}$, e $\mathscr{I}$ denotando o fecho aditivo de todos os H-módulos indecomponíveis com rank maior do que 0, igual à 0 e menor que 0, respectivamente. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *Existe uma trisecção $\mathrm{mod} H = \mathscr{P} \vee \mathscr{R} \vee \mathscr{I}$ nas subcategorias dos H-módulos pós-projetivos, regulares e pré-injetivos.*

(b) *Os H-módulos indecomponíveis de $\mathscr{P}$, chamados de pós-projetivos, são exatamente os módulos $\tau^{-m} P$, onde P é módulo projetivo indecomponível e $m \geq 0$. Os módulos pós-projetivos indecomponíveis formam uma única componente de Auslander-Reiten.*

(c) *Os H-módulos indecomponíveis de $\mathscr{I}$, chamados de pré-injetivos, são exatamente os módulos $\tau^m I$, onde I é módulo injetivo indecomponível e $m \geq 0$. Os módulos pré-injetivos indecomponíveis formam uma única componente de Auslander-Reiten.*

(d) *Os H-módulos indecomponíveis de $\mathscr{R}$, chamados regulares, formam uma família $\mathscr{R}_x$ de tubos, naturalmente indexados pelos pontos da reta projetiva $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$, e tal que $\mathscr{R}_x$ é homogêneo, isto é, ele é fixado por τ, para $x \neq \{0, 1, \infty\}$ e $\mathscr{R}_x$ tem τ-período p, q ou r, de acordo com $x = 0, 1, \infty$.*

(e) *Cada morfismo $f : P \to Q$ com $P \in \mathscr{P}$ e $Q \in \mathscr{I}$ se fatora através de qualquer tubo $\mathscr{R}_x$ dado.*

1.4.3 Tipo de representação Selvagem

A k-álgebra $H = kQ$ da aljava Q é dita de **tipo de representação selvagem** se a forma quadrática q_H associado à álgebra H é indefinida. Assim como no caso das álgebras de tipo de representação mansa, os módulos indecomponíveis são chamados pós-projetivos (resp. pré-injetivos) se são da forma $\tau^{-n}P$ (resp. $\tau^n I$), onde P é um H-módulo projetivo indecomponível, I é H-módulo injetivo indecomponível, e $n \geq 0$. Um H-módulo é chamado regular se não é pós-projetivo nem pré - injetivo.

O teorema a seguir nos diz como é a aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra com tipo de representação selvagem:

Teorema 1.15. *(ver [19], pág. 222) Seja $H = kQ$ uma álgebra de tipo de representação selvagem. Então existe uma trisecção $modH = \mathscr{P} \vee \mathscr{R} \vee \mathscr{I}$, onde $\mathscr{P}$, $\mathscr{I}$ e $\mathscr{R}$ são, respectivamente, o fecho aditivo de todos os H-módulos pós-projetivos, pré-injetivos e regulares. Além disso,*

(a) *Os H-módulos pós-projetivos (pré-injetivos) indecomponíveis formam uma única componente de Auslander-Reiten, a componente pós-projetiva (pré-injetiva).*

(b) *Os H-módulos regulares se decompõe em componentes $\mathscr{C}_x$, onde cada $\mathscr{C}_x$ é do tipo $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$, e x está em algum conjunto de índices X.*

(c) *Se X e Y são H-módulos regulares indecomponíveis, então $Hom_H(X, \tau^n Y) \neq 0$ para todo $n \gg 0$.*

1.5 Outros conceitos

Nesta seção daremos mais algumas importantes definições que serão usadas ao longo deste texto.

Definição 1.20. *Seja H uma k-álgebra. Um H-módulo M é dito* ***sincero*** *se para qualquer H-módulo projetivo P, e para qualquer H-módulo injetivo I,*

$$Hom_H(P, M) \neq 0 \text{ e } Hom_H(M, I) \neq 0.$$

Vejamos agora outro conceito importante, que utilizaremos para provar que a extensão por um ponto $H[M]$ é uma álgebra canônica.

Definição 1.21. *Um conjunto finito $\Sigma \subseteq indH$ é dito uma **fatia** em $modH$ de satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\bigoplus_{M\in\Sigma} M$ *é um H-módulo sincero;*

(ii) *Σ é um conjunto convexo em $indH$;*

(iii) *Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é uma sequência quase-cindida, então no máximo um dos módulos A e C pertence a Σ.*

Uma fatia Σ é dita completa, se além de satisfazer as 3 propriedades anteriores, satisfaz:

(iv) Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é uma sequência quase-cindida e um somando indecomponível de B pertence à Σ, então $A \in \Sigma$ ou $C \in \Sigma$.

Outros conceitos que utilizaremos também são:

Definição 1.22. *Seja M um H-módulo. Uma **envolvente injetiva** de M é um par (I, j) onde I é um H-módulo injetivo e $j : M \to I$ é um monomorfismo tal que se (I', j') é um outro par, onde I' é um H-módulo injetivo e $j' : M \to I'$ é um monomorfismo, então existe um monomorfismo $f : I \to I'$ tal que $fj = j'$. Em outras palavras, existe $f : I \to I'$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j'"'] & I \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & I' & \end{tikzcd}$$

Definição 1.23. *Seja H uma k-álgebra e M um H-módulo. Chamaremos de **radical**(de Jacobson) de M_H o submódulo de M que é a interseção de todos os submódulos maximais de M. O radical de M será denotado por $radM$.*

Definição 1.24. *Seja M um H-módulo. O quociente $M/radM$ é chamado o **topo** de M, e denotado por $topM$.*

Definição 1.25. *Seja H uma k-álgebra e M um H-módulo. Chamaremos de **socle** de M o submódulo de M que é a soma de todos os submódulos simples de M. O socle de M será denotado por $socM$.*

Proposição 1.16. *(ver [2], pág. 32) Suponha que $A_A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ é uma decomposição de A em submódulos indecomponíveis. Então valem as seguinte afirmações:*

(a)*Todo A-módulo à direita simples é isomorfo a um dos módulos:*

$$S(1) = top(e_1A), \cdots, S(n) = top(e_nA).$$

(b) *Todo A-módulo à direita projetivo indecomponível é isomorfo a um dos módulos:*

$$P(1) = e_1A, P(2) = e_2A, \cdots, P(n) = e_nA.$$

Mais ainda, $e_iA \simeq e_jA$ se, e somente se, $S(i) \simeq S(j)$.

(c) *Todo A-módulo à direita injetivo indecomponível é isomorfo a um dos módulos:*

$$I(1) = D(Ae_1) \simeq E(S(1)), \cdots, I(n) = D(Ae_n) \simeq E(S(n)),$$

onde $E(S(j))$ é a envolvente injetiva do módulos simples $S(j)$.

De acordo com a proposição acima, a cada vértice x da álgebra hereditária $H = kQ$, podemos associar um projetivo indecomponível e_xkQ que denotaremos por $P(x)$ e também podemos associar o correspondente injetivo indecomponível $\mathrm{D}kQe_x$, que denotaremos por $I(x)$.

Capítulo 2

Categorias Hereditárias

Neste capítulo k denotará um corpo algebricamente fechado. Estamos interessados em investigar k-categorias lineares, categorias essas que são abelianas, com espaço de homomorfismos e extensões de dimensão finita sobre o corpo k e hereditárias.

2.1 Propriedades Básicas

2.1.1 Categorias Abelianas

Uma k-categoria $\mathscr{H}$ é dita **categoria aditiva** se toda família de objetos têm um produto, cada conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y)$ é um grupo abeliano, e a composição

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Y,Z)\times \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Z) \\ (g,f) & \mapsto & gf \end{array}$$

é k-bilinear para todos os objetos X, Y e Z em $\mathscr{H}$. Dado um número finito de objetos $A_1,\dots,A_r$ de uma categoria aditiva $\mathscr{H}$, existe a soma direta $A_1\oplus\dots\oplus A_r$, que é por definição um objeto A junto com morfismos $i_i : A_i \to A$ e $\pi_i : A \to A_i$ para $1 \le i \le r$ tal que $\sum_{i=1}^{r} i_i\pi_i = id_A$, $\pi_i i_i = id_{A_i}$ e $\pi_j i_i = 0$ para $i \neq j$. Note que os morfismos i_i e π_i induzem isomorfismos

$$\coprod_{i=1}^{r} A_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} A_i \simeq \prod_{i=1}^{r} A_i$$

Dado um objeto A em $\mathscr{H}$, denotamos por add$A$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ consistindo em todas as somas diretas finitas de cópias de A e seus somandos diretos.

Uma decomposição $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \coprod \mathscr{H}_2$ de uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é um par de subcategorias plenas $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ tais que cada objeto em $\mathscr{H}$ é soma direta de dois objetos de $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$, e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ para todo $A_1 \in \mathscr{H}_1$ e $A_2 \in \mathscr{H}_2$. Uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é dita uma **categoria conexa** se não admite uma decomposição própria $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \coprod \mathscr{H}_2$.

Um funtor $F : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ entre categorias aditivas é dito **funtor aditivo** se a função induzida $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(FX, FY)$ é linear para todo os objetos X, Y em $\mathscr{H}$. O **kernel** $\ker F$ de um funtor aditivo $F : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ é por definição a subcategoria plena de todos os objetos X tal que $FX = 0$. A **imagem** $\mathrm{im}F$ de $F : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ é a subcategoria plena de $\mathscr{G}$ formada por todos os objetos Y tal que $Y \simeq FX$ para algum X na categoria $\mathscr{H}$.

Uma categoria aditiva $\mathscr{H}$ é dita **categoria abeliana** se todo morfismo $\phi : X \to Y$ tem um kernel e um cokernel, e a fatorização canônica de ϕ

$$\begin{tikzcd} \ker\phi \arrow[r, "\phi'"] & X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "\phi''"] & \mathrm{coker}\phi \\ & \mathrm{coker}\phi' \arrow[r, "\overline{\phi}"] & \ker\phi'' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

induz um isomorfismo $\overline{\phi}$.

2.1.2 Finitude de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}$ e Krull-Schmidt

Assuma que $\mathscr{H}$ é uma categoria pequena e Hom-finita, isto é, todos os espaços de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, Y)$ tem dimensão finita sobre k. Como $\mathscr{H}$ é Hom-finita e abeliana, temos então a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *(ver [15], pág. 2) Toda k-categoria $\mathscr{H}$ abeliana e Hom-finita é uma categoria **Krull-Schmidt**, isto é,*

***(a)** Todo objeto indecomponível de $\mathscr{H}$ tem anel de endomorfismos local.*

***(b)** Todo objeto de $\mathscr{H}$ é soma direta finita de objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$.*

Para módulos, o teorema de Krull-Schmidt estabelece que uma decomposição $X = X_1 \oplus ... \oplus X_s$ de X em objetos indecomponíveis é única a menos da ordem e isomorfismo de somandos. Agora, para entendermos a categoria $\mathscr{H}$, é suficiente entender a subcategoria plena $\mathrm{ind}\mathscr{H}$ de todos os objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$, que não é mais uma categoria abeliana. Então, analogamente, se quisermos classificar os objetos de $\mathscr{H}$ é suficiente classificar os objetos indecomponíveis de $\mathscr{H}$.

2.1.3 Definição e exemplos

Uma categoria abeliana $\mathscr{H}$ é dita **categoria hereditária** se $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{H}}(X,Y)=0$ para todo $n\geq 2$ e para todos X,Y objetos de $\mathscr{H}$. Isto é equivalente a assumir que os funtores $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\_,Y)$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,\_)$ são exatos à direita, isto é, enviam sequência exatas curtas em sequências exatas à direita.

Exemplo 2.1. *Seja H uma k-álgebra hereditária de dimensão finita, temos então que $H\simeq kQ$, onde kQ é a álgebra de caminhos da aljava Q e Q não têm ciclos orientados. Então a categoria dos H-módulos à direita de dimensão finita, $\mathscr{H}=modH$, é uma categoria abeliana hereditária Ext-finita. A categoria $\mathscr{H}=modH$ tem um objeto inclinante (ou módulo inclinante) T, podemos tomar por exemplo $T=H_H$ com um exemplo trivial.*

Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana. Denotemos por $F(\mathscr{H})$ o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismos dos objetos de $\mathscr{H}$. Seja $F_0(\mathscr{H})$ o subgrupo gerado por $[X]-[Y]+[Z]$ para todas as sequências exatas $0\to X\to Y\to Z\to 0$ em $\mathscr{H}$. Então o **grupo de Grothendieck** é por definição o grupo quociente $F(\mathscr{H})/F_0(\mathscr{H})$.

2.2 Categoria Derivada de Categorias Hereditárias

Sabemos que a **categoria derivada limitada** de uma categoria abeliana $\mathscr{H}$ é obtida da categoria de complexos limitados em $\mathscr{H}$ invertendo todos os quasi-isomorfismos, transfor -mando-os assim em isomorfismos na categoria derivada.

Teorema 2.2. *(ver [15], pág. 10) Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana hereditária. Então a categoria derivada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é naturalmente equivalente à categoria repetitiva $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n]$, onde cada $\mathscr{H}[n]$ é uma cópia de $\mathscr{H}$, com objetos denotados por $X[n]$ para X objeto de $\mathscr{H}$, e com morfismos dados da seguinte maneira:*

$$Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[n],Y[m])=Ext^{m-n}_{\mathscr{H}}(X,Y).$$

A expressão $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n]$ tem dois significados. Primeiramente, devemos entender tal expressão como o fecho aditivo $add(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[n])$ da união de todos os $\mathscr{H}[i]$, e segundo, essa expressão indica que não existe morfismo voltando, isto é, não existe morfismo de $\mathscr{H}[n]\to\mathscr{H}[m]$ para $n>m$.

Obs:.

(1) Todo objeto indecomponível de $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ pertence à alguma $\mathscr{H}[n]$. Então se soubermos quem são os objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}$, saberemos também quem são os objetos indecomponíveis em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

(2) Da descrição feita anteriormente sobre os objetos indecomponíveis de $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, segue que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma categoria **Hom-finita** e também uma categoria **Krull-Schmidt**.

(3) Somente existem morfismos não nulos $\mathscr{H}[n] \to \mathscr{H}[m]$ se $m \in \{n, n+1\}$. Para mostrar este fato, utilizamos que não existem extensões não nulas com grau negativo ou grau $n \geq 2$.

Nós podemos enxergar a categoria derivada de $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, da seguinte forma:

$$\cdots \qquad \boxed{\mathscr{H}[-1]} \qquad \boxed{\mathscr{H}[0] = \mathscr{H}} \qquad \boxed{\mathscr{H}[1]} \qquad \cdots$$

onde morfismos entre objetos indecomponíveis existem somente da esquerda para a direita, e de uma cópia $\mathscr{H}[n]$ existem apenas morfismos de $\mathscr{H}[n]$ para $\mathscr{H}[n]$ ou para $\mathscr{H}[n+1]$.

2.3 Teoria Inclinante em Categorias Hereditárias

O objetivo desta seção é apresentar os principais resultados sobre teoria inclinante clássica. Nós daremos aqui definições que entendemos ser importantes e citaremos algumas propriedades, deixando as referências das provas ou demonstrando tais propriedades.

Seja $\mathscr{H}$ uma categoria abeliana hereditária conexa sobre um corpo algebricamente fechado k, com espaço de homomorfismos e extensões de dimensão finita sobre k.

Definição 2.1. *Um objeto é dito **objeto inclinante** em $\mathscr{H}$ se $FacT = \mathscr{E}(T)$, onde os objetos de $FacT$ são quocientes de somas diretas finitas de cópias de T e onde X está em $\mathscr{E}(T)$ se $Ext^1_{\mathscr{H}}(T, X) = 0$.*

Nesta seção assumiremos que $\mathscr{H}$ não possui objeto projetivo não-nulo e os seguintes resultados mostrarão que podemos fazer isso sem perda de generalidade.

Proposição 2.3. *(ver [7], pág. 66) Seja $\mathscr{H}$ categoria hereditária com objeto inclinante. Se $\mathscr{H}$ tem algum objeto projetivo não nulo, então $\mathscr{H}$ é equivalente à categoria de módulos finitamente gerados mod H para alguma álgebra hereditária H de dimensão finita.*

Vamos agora definir o conceito de sequência quase-cindida para uma categoria abeliana $\mathscr{H}$.

Definição 2.2. *Uma sequência exata em* $\mathscr{H}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \to 0$$

é dita sequência quase-cindida se ela não é cindida, X *e* Y *são objetos indecomponíveis em* $\mathscr{H}$ *e para* $h \in Hom_{\mathscr{H}}(W,Y)$ *epimorfismo que não cinde existe um morfismo* $\phi \in Hom_{\mathscr{H}}(W,E)$ *tal que* $h = g\phi$.

Proposição 2.4. *(ver [12],págs. 24 e 25) Assuma que a categoria hereditária* $\mathscr{H}$ *tem um objeto inclinante. Então:*

- $\mathscr{H}$ *tem sequências quase cindidas.*
- *O grupo de Grothendieck* $K_0(\mathscr{H})$ *é um grupo abeliano livre de posto finito.*

Proposição 2.5. *(ver [5], pág. 23) Assuma que* $\mathscr{H}$ *tem objeto inclinante. Então existe uma equivalência exata de categorias* $\tau : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *com as seguintes propriedades:*

- *Se* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *é sequência quase cindida, então* $A \simeq \tau C$.
- $DExt^1_{\mathscr{H}}(X,Y) \simeq Hom_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}Y,X) \simeq Hom_{\mathscr{H}}(Y,\tau X)$ *para* X, Y *em* $\mathscr{H}$, *onde* $D(Z) = Hom_k(Z,k)$.

Relembramos agora que um objeto não nulo S em uma categoria abeliana é dito **objeto simples** se S não tem subobjetos próprios, isto é, não existe subobjeto U de S tal que $0 \neq U \subsetneq S$. A seguir introduziremos o conceito de comprimento de um objeto em uma categoria abeliana, conceito este essencial.

Definição 2.3. *Seja* $\mathscr{H}$ *uma categoria abeliana. Um objeto* X *de* $\mathscr{H}$ *tem* ***comprimento finito*** *se existir uma cadeia de subobjetos*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

tal que cada quociente X_i/X_{i-1} *é um objeto simples. Tal cadeia é chamada* ***série de composição*** *de* X. *A série de composição de um objeto* X *não é necessariamente única, mas o seu comprimento é invariante, e denotamos tal comprimento por* $\ell(X)$. *Além disso, os termos que aparecem na série de composição de um objeto* X *são os mesmos, apenas mudando a ordem com que aparecem.*

Obs:. Dizemos que um objeto X em $\mathscr{H}$ tem comprimento infinito se X não tiver comprimento finito, isto é, não existe cadeia de subobjetos de X

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

satisfazendo X_i/X_{i-1} é objeto simples.

Denotemos por $\mathscr{H}_0$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ cujos objetos são aqueles de comprimento finito, e por $\mathscr{H}_\infty$ a subcategoria plena de $\mathscr{H}$ onde cada somando indecomponível dos objetos tem comprimento infinito. Denotaremos por ind$\mathscr{H}_0$ e ind$\mathscr{H}_\infty$ os objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}_0$ e $\mathscr{H}_\infty$ respectivamente.

Proposição 2.6. *(ver [11], pág. 417) Assuma que $\mathscr{H}$ tem um objeto inclinante. Então ind$\mathscr{H}_0$ é uma união de tubos.*

Existem várias maneiras de se escolher objetos inclinante em $\mathscr{H}$, quando sabemos que existe algum objeto inclinante. A seguinte possível escolha é bem útil.

Proposição 2.7. *(ver [7], pág. 77) Se $\mathscr{H}$ tem um objeto inclinante e $\mathscr{H}_\infty \neq 0$, então é possivel escolher um objeto inclinante em $\mathscr{H}_\infty$.*

Proposição 2.8. *(ver [5], pág. 19) As seguintes afirmações são equivalentes para um objeto T na categoria hereditária $\mathscr{H}$*

- *$FacT = \mathscr{E}(T)$, isto é, T é inclinante.*
- *$Ext^1_{\mathscr{H}}(T,T) = 0$; $Hom_{\mathscr{H}}(T,X) = 0 = Ext^1_{\mathscr{H}}(T,X) \Rightarrow X = 0$; (qualquer objeto Ext-projetivo em $\mathscr{E}(T)$ pertence à $addT$.)*

Proposição 2.9. *(ver [5], pág. 25) Assuma que $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária com um objeto inclinante. Então um objeto T em $\mathscr{H}$ é um objeto inclinante se, e somente se, $Ext^1_{\mathscr{H}}(T,T) = 0$ e o número de somandos indecomponíveis não isomorfos de T for igual ao posto do grupo de Grothendieck $K_0(\mathscr{H})$.*

O conceito de aproximação é muito útil, tal ferramenta nos auxiliará a construir objetos inclinantes a partir de objetos projetivos e também a estender objetos inclinantes na categoria perperndicular para a categoria hereditária $\mathscr{H}$.

Definição 2.4. *Dados dois objetos X, Y na categoria hereditária $\mathscr{H}$, dizemos que $f : X^t \to Y$ é $addX$-**aproximação à direita** de Y se a função induzida*

$$Hom_{\mathscr{H}}(X, f) : Hom_{\mathscr{H}}(X, X^t) \to Hom_{\mathscr{H}}(X, Y)$$

é sobrejetora.

Analogamente, podemos definir o conceito de aproximação à esquerda:

Definição 2.5. *Dados dois objetos X, Y na categoria hereditária $\mathscr{H}$, dizemos que $g : X \to Y^t$ é add$Y$-**aproximação à esquerda** de X se a função induzida*

$$Hom_{\mathscr{H}}(g, Y) : Hom_{\mathscr{H}}(Y^t, Y) \to Hom_{\mathscr{H}}(X, Y)$$

é sobrejetora.

Lema 2.10. *Seja $f : X^t \to Y$ uma add$X$-aproximação minimal à direita, então a função induzida $f' : X^t \to Z$ é add$X$-aproximação minimal à direita, onde $Z = imf$.*

Demonstração: Como $f : X^t \to Y$ é add$X$-aproximação minimal à direita, sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, X^t) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, Y)$ é sobrejetora. Queremos mostrar que $f' : X^t \to Z$ é add$X$-aproximação minimal à direita, então considere $\phi : X \to Z$, obtemos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X^t \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"] & Y \\ X \arrow[r, "\phi"] & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

onde $i : Z \to Y$ é o morfismo inclusão, e $f = if'$. Como $f : X^t \to Y$ é add$X$-aproximação minimal à direita e temos o morfismo $i\phi : X \to Y$, então existe um morfismo $h : X \to X^t$ tal que $i\phi = fh$, como podemos ver abaixo:

$$\begin{tikzcd} X^t \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"] & Y \\ X \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[r, "\phi"] & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, sabemos que $f = if'$ e obtemos então $i\phi = if'h$ de onde segue que $\phi = f'h$, pois i é monomorfismo. Então acabamos de concluir que dado $\phi : X \to Z$, existe um morfismo $h : X \to X^t$ tal que $\phi = f'h$, em outras palavras, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, f') : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, X^t) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, Z)$ é sobrejetora.

Provaremos agora a minimalidade de f'. Se $f' = f'g$ onde $g : X^t \to X^t$, então $if' = if'g$, e assim temos $f = fg$. Segue da minimalidade de f que g é isomorfismo. $\square$

Relembrando agora que um par $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ de subcategorias de $\mathscr{H}$ fechadas para isomorfismos é chamado um **par de torção** se $\mathscr{T}$ é fechada para quocientes e extensões, e $\mathscr{F}$ é fechada para subobjetos e extensões, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y)=0$ para $X\in\mathscr{T}$ e $Y\in\mathscr{F}$, e para cada $Z\in\mathscr{H}$ existe uma sequência exata $0\to X\to Z\to Y\to 0$ com $X\in\mathscr{T}$ e $Y\in\mathscr{F}$. Uma subcategoria $\mathscr{T}$ de $\mathscr{H}$ fechada para quocientes e extensões induz um par de torção se $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ é um par de torção onde $\mathscr{F}=\{Y;\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{T},Y)=0\}$.

Proposição 2.11. *Seja T um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}$. Então $\mathscr{T}=FacT=\mathscr{E}(T)$ induz um par de torção em $\mathscr{H}$.*

Demonstração: Seja $\mathscr{F}=\{Y;\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{T},Y)=0\}$. Claramente $\mathscr{F}$ é fechada para subobjetos e extensões. Seja $Z\in\mathscr{H}$, $f:Z\to(\tau T)^r$ add(τT)-aproximação à esquerda. Notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z,\tau T)\simeq \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(T,Z)\neq 0$ se $Z\notin\mathscr{T}$, caso contrário $Z\in\mathscr{E}(T)=\mathscr{T}$. Seja $K=\ker f$, $L=\mathrm{im} f$. Considere então a sequência exata:

$$0\to K\to Z\to L\to 0$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_,\tau T)$ obtemos a seguinte sequência exata:

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(L,\tau T)\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z,\tau T)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,\tau T)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,\tau T).$$

Temos que α é isomorfismo, pois f é add(τT)-aproximação e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,\tau T)$ é um quociente de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau T^r,\tau T)=0$. Daí segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,\tau T)\simeq\mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(T,K)=0$ e portanto $K\in\mathscr{T}=\mathscr{E}(T)$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,\tau T)\simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(T,L)=0, L\in\mathscr{F}$ e daí temos que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ é par de torção. □

Antes da próxima proposição, temos a seguinte definição:

Definição 2.6. *Seja X um objeto em uma categoria abeliana $\mathscr{H}$, então chamaremos o conjunto de todos os subobjetos de X de **Sub**(X).*

Proposição 2.12. *Seja T objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}$, e seja $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ par de torção induzido. Então temos o seguinte:*
(a) *$\mathscr{F}=Sub(\tau T)$.*
(b) *T^{op} é objeto inclinante em $\mathscr{H}^{op}$.*
(c) *O par de torção $(FacT, Sub(\tau T))$ em $\mathscr{H}$ gera um par de torção $(Fac(\tau T)^{op}, Sub(T^{op}))$ sob a dualidade natural $\mathscr{H}\to\mathscr{H}^{op}$.*

Demonstração: (a) Sabemos de 2.5 que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,\tau T)\simeq\mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(T,T)=0$, e daí podemos concluir que $\mathrm{Sub}(\tau T)\subset\mathscr{F}$.

Por outro lado, consideremos $X \in \mathscr{F}$ e também a add(τT)-aproximação à esquerda $f : X \to (\tau T)^r$. Podemos então construir a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Ker} f \to X \to (\tau T)^r \to 0$$

E então aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, \tau T)$ obtemos a seguinte sequência:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}((\tau T)^r, \tau T) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, \tau T) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\ker f, \tau T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}((\tau T)^r, \tau T).$$

Temos

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}((\tau T)^r, \tau T) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T^r, T) = 0,$$

e além disso, como f é uma add(τT)-aproximação à esquerda, temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}((\tau T)^r, \tau T) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, \tau T)$$

é epimorfismo, e então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, \tau T) = 0$, e por 2.5 podemos concluir que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, \ker f) = 0$. Como $X \in \mathscr{F}$, e $\mathscr{F}$ é fechada para subobjetos, temos que $\ker f \in \mathscr{F}$, e segue então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \ker f) = 0$. Daí segue, por 2.8 que $\ker f = 0$. Isso nos mostra então que $X \in \mathrm{Sub}(\tau T)$, e como X foi escolhido de forma aleatória, segue que $\mathscr{F} \subset \mathrm{Sub}(\tau T)$.
(b) Temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^{op}}(T^{op}, T^{op}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, T) = 0$. Assuma agora que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^{op}}(T^{op}, X^{op}) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^{op}}(T^{op}, X^{op})$. Temos por 2.5 que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau T, X) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X, T) = 0$ e também $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau T, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, T) = 0$. Como τT é objeto inclinante em $\mathscr{H}$, temos que $X = 0 = X^{op}$, e daí por 2.8 segue que T^{op} é objeto inclinante em $\mathscr{H}^{op}$.
(c) Segue diretamente de **(a)** e **(b)**. □

Uma álgebra será chamada **álgebra quase-inclinada** se for da forma $\Lambda = \mathrm{End}(T)^{op}$, onde T é um objeto inclinante em uma categoria hereditária $\mathscr{H}$, conceito este que generaliza o conceito de **álgebra inclinada**, que são as álgebras da forma $\Lambda = \mathrm{End}(T)^{op}$, com T um objeto inclinante em uma categoria mod$H$, onde H é uma k-álgebra hereditária de dimensão finita. Temos então a seguinte relação entre $\mathscr{H}$ e Λ. Relembrando que um par de torção $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ em $\mathscr{H}$ é dito par de torção cindido se todo objeto indecomponível de $\mathscr{H}$ está em $\mathscr{T}$ ou está em $\mathscr{F}$.

Proposição 2.13. *(ver [12], pág. 41) Seja T um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}$ e seja $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ par de torção induzido, onde $\mathscr{T} = \mathrm{Fac}T$. Então temos o seguinte:*
***(a)** Os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \_) : \mathrm{Fac}T \to \mathrm{mod}\Lambda$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, \_) : \mathscr{F} \to \mathrm{mod}\Lambda$ são fiéis, plenos e densos.*

(b) *$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ é um par de torção cindido em modΛ, onde $\mathscr{X} = imExt^1_{\mathscr{H}}(T,\_)$ e $\mathscr{Y} = imHom_{\mathscr{H}}(T,\_)$.*
(c) *Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é uma sequência quase-cindida de $\mathscr{H}$ que está contida em $FacT$, então a sequência*

$$0 \to Hom_{\mathscr{H}}(T,A) \to Hom_{\mathscr{H}}(T,B) \to Hom_{\mathscr{H}}(T,C) \to 0$$

é quase-cindida em modΛ.
(d) *Se $Y \in \mathscr{Y}$, então $dpY \leq 1$ e se $X \in \mathscr{X}$, $diX \leq 1$.*

Temos alguns pares de torção $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ em $\mathscr{H}$, os quais não são induzidos por algum objeto inclinante, mas que também são de nosso interesse. Dizemos que um par de torção $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ é um par de torção inclinante se $\mathscr{T}$ é um cogerador para $\mathscr{H}$, ou seja, para todo X em $\mathscr{H}$ existe um monomorfismo $i: X \to Z$ para algum $Z \in \mathscr{T}$.

Proposição 2.14. *(ver [12], pág 13) Seja $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ um par de torção $\mathscr{H}$. Então valem as seguintes propriedades:*
(a) *$\mathscr{B} = \{X^\cdot \in \mathscr{D}^b(\mathscr{H}) | H^i(X^\cdot) = 0 \ i \neq 0,-1, \ H^0(X^\cdot) \in \mathscr{T}, \ H^{-1}(X^\cdot) \in \mathscr{F}$ é uma categoria abeliana.*
(b)*O par $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ de subcategorias plenas $\mathscr{X} = \mathscr{F}[1]$ e $\mathscr{Y} = \mathscr{T}$ de $\mathscr{B}$ é um par de torção em $\mathscr{B}$.*
(c) *Para $X, Y \in \mathscr{B}$, temos que $Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{B})}(X, Y[n]) \simeq Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X, Y[n])$ para $n = 0, 1$.*

Podemos então, a menos de equivalência derivada, trocar a categoria hereditária $\mathscr{H}$ inicial, obtendo então o seguinte resultado:

Proposição 2.15. *(ver [9], pág. 171) Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto inclinante. Se $\mathscr{H}'$ é uma categoria hereditária derivadamente equivalente à $\mathscr{H}$, então $\mathscr{H}'$ também tem um objeto inclinante.*

Capítulo 3

Objetos excepcionais

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar alguns resultados básicos sobre objetos excepcionais e também sobre categorias perpendiculares, no contexto de categorias que assumam as nossas hipóteses básicas (k-categorias abelianas hereditárias com objeto inclinante).

3.1 Categoria perpendicular

Nesta seção, alguns dos resultados apresentados aqui serão similares aos resultados para a categoria de módulos. Daremos condições suficientes para que um objeto excepcional seja estendido à um objeto inclinante, e também condições para que a categoria perpendicular seja estendida à uma categoria com objeto inclinante.

Definição 3.1. *Um objeto E na categoria $\mathscr{H}$ é dito* ***excepcional*** *quando $Ext^1_{\mathscr{H}}(E,E)=0$ e além disso, E é um objeto indecomponível.*

Definição 3.2. *A* ***categoria perpendicular*** *$E^{\perp}$ é definida da seguinte maneira:*

$$Ob(E^{\perp}) = \{X \in \mathscr{H} | Hom_{\mathscr{H}}(E,X) = 0 = Ext^1_{\mathscr{H}}(E,X)\}.$$

E dados X, Y objetos quaisquer em $E^{\perp}$, temos:

$$Hom_{E^{\perp}}(X,Y) = Hom_{\mathscr{H}}(X,Y).$$

O seguinte resultado é básico, e sua prova pode ser encontrado em [7], págs. 60 e 76.

Proposição 3.1. *Seja E um objeto excepcional na k-categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$. Então valem as seguintes afirmações:*
(a) *$E^{\perp}$ é uma categoria abeliana hereditária.*
(b) *End$(E) \simeq k$.*

Iremos primeiramente procurar maneiras de construir objetos em $E^{\perp}$. Como estamos interessados em saber quando a categoria $E^{\perp}$ é mod$H$ para H álgebra hereditária, estamos interessados em particular em encontrar objetos projetivos em $E^{\perp}$.

Proposição 3.2. *Assuma que a categoria $\mathscr{H}$ tem um objeto inclinante e seja E um objeto excepcional em $\mathscr{H}$. Considere a seguinte sequência exata quase-cindida em $\mathscr{H}$:*

$$0 \to \tau E \to M \to E \to 0.$$

Então $M \in E^{\perp}$.

Demonstração: Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \_)$ na sequência exata quase-cindida

$$0 \to \tau E \to M \xrightarrow{g} E \to 0$$

obtemos a seguinte sequência exata:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \tau E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \tau E) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) \to 0 \end{gathered}$$

Como E é um objeto excepcional, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) = 0$, e também da proposição 3.1 temos que End$E \simeq k$ e então da proposição 2.5 segue que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \tau E) \simeq \mathrm{DEnd}(E) \simeq k$$

Uma vez que a sequência exata $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ não cinde, temos que o morfismo $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \tau E)$ é não nulo, e consequentemente, um isomorfismo.

De fato, suponha por absurdo que $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \tau E)$ é nulo. Teríamos então que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, g) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E)$$

seria sobrejetor, então dado morfismo $id_E : E \to E$, deveria existir morfismo $h : E \to M$ tal que $gh = id_E$, o que é absurdo, pois $g : M \to E$ não é retração. Outra prova de que o morfismo $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \tau E)$ é não nulo pode ser encontrado em [1](pág.

264). Daí segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,M)=0$. Da proposição 2.5 temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\tau E)\simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E)=0$, e portanto, $M\in E^{\perp}$. □

O seguinte resultado nos mostra como obter objetos projetivos em $E^{\perp}$.

Proposição 3.3. *Assuma que a categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ tem um objeto inclinante, e seja E um objeto excepcional em $\mathscr{H}$.*
(i) *Se $X\subset E^t$ para algum $t>0$ e se $X\in E^{\perp}$, então X é um objeto projetivo em $E^{\perp}$.*
(ii) *Se existir um monomorfismo irredutível $i: M_i\to E$, então M_i é projetivo em $E^{\perp}$.*
(iii) *Se $g: E^t\to Z$ é uma $\mathrm{add}E$-aproximação minimal à direita de Z, então $\ker g$ é um objeto projetivo em $E^{\perp}$.*

Demonstração: **(i)** Considere $Z\in E^{\perp}$ arbitrário, queremos mostrar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,Z)=0$. Como $X\subset E^t$, podemos considerar o morfismo inclusão $i: X\to E^t$. Considere então a seguinte sequência exata:

$$0\to X\to E^t\to E^t/X\to 0$$

Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_,Z)$, onde Z é um objeto arbitrário de $E^{\perp}$, obtemos:

$$\cdots\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t/X,Z)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t,Z)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,Z)\to 0$$

E como $Z\in E^{\perp}$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t,Z)=0$, de onde concluímos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,Z)=0$, para todo $Z\in E^{\perp}$.
(ii) Segue diretamente do item **(i)** e da proposição 3.2.
(iii) Considere a sequência exata

$$0\to K\to E^t\to L\to 0$$

Onde $K=\ker g$ e $L=\mathrm{Im} g$. Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\_)$ obtemos:

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,K)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,E^t)\xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,L)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,K)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E^t)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,L)\to 0$$

Uma vez que E é excepcional, temos $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E^t)=0$. Agora, como $g: E^t\to Z$ é uma $\mathrm{add}E$-aproximação, segue do lema 2.10 que o morfismo induzido $g': E^t\to L$ também o é, o que mostra que β é sobrejetora, da definição de aproximação. Como β é sobrejetora, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,K)=0$. Como $\mathrm{End}E\simeq k$ e $g': E^t\to L$ é minimal à direita, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,K)=0$, pois β é um monomorfismo.

De fato: Considere $\theta : E \to E^t$ tal que $\beta(\theta) = 0$, isto é, $g'\theta = 0$. Como $\theta : E \to E^t$, podemos escrever $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_t \end{bmatrix}^T$, onde cada $\theta_i \in \operatorname{End} E \simeq k$, de onde podemos concluir que $\theta_i = \lambda_i.I$, $\lambda_i \in k$. Suponha que $\theta \neq 0$, então temos que algum $\lambda_i \neq 0$. Como $g' : E^t \to L$, podemos escrever $g' = (g'_1, \cdots g'_t)$, e como $g'\theta = 0$, segue que

$$0 = \sum_{i=1}^{t} g'_i(\lambda_i.I) = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i g'_i,$$

e então concluímos que $\{g'_i\}, 1 \leq i \leq t$, é um conjunto linearmente dependente, em outras palavras, podemos escrever sem perda de generalidade que $g'_1 = \lambda_2 g'_2 + \cdots + \lambda_t g'_t$. Agora, considere o morfismo $h : E^t \to E^t$ dado por:

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_3 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \lambda_t & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que $g'h = g'$, pela construção do morfismo h, então segue que h é isomorfismo, pois g' é minimal, o que é absurso, pois claramente h não é isomorfismo. Logo θ deve ser nulo, e concluímos então que β é monomorfismo, e então $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(E, K) = 0$.

Portanto $K \in E^{\perp}$, e consequentemente, pelo item **(i)**, segue que K é projetivo em $E^{\perp}$. $\square$

Agora daremos condições suficientes sobre E para que E seja estendido a um objeto inclinante em $\mathcal{H}$, mas antes disso, definiremos o que é uma extensão universal. A extensão universal é uma ferramenta útil para estender objetos excepcionais no $\operatorname{Fac} T$, onde T é um objeto inclinante na categoria abeliana hereditária $\mathcal{H}$.

Definição 3.3. *(ver [5], pág. 19) Uma sequência exata $0 \to A \to B \to C \to 0$ é chamada X-**extensão universal** de C por A se induz um epimorfismo $\alpha : Hom_{\mathcal{H}}(X, C) \to Ext^1_{\mathcal{H}}(X, A)$ e C está em $addX$.*

Proposição 3.4. *Seja T um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathcal{H}$ e seja E um objeto excepcional em $FacT$. Seja $0 \to T \to Z \to E^t \to 0$ a E-extensão universal de E por T, isto é, o morfismo induzido $\alpha : Hom_{\mathcal{H}}(E, E^t) \to Ext^1_{\mathcal{H}}(E, T)$ é um epimorfismo.*

Então $E \oplus Z$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$ que pertence à $\mathrm{Fac}T$. Além disso, se $Z \in \mathrm{add}E$, então E é objeto inclinante em $\mathscr{H}$ e temos também que a categoria perpendicular $E^{\perp} = \{0\}$.

Demonstração: Pela proposição 2.8, basta mostrarmos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, E \oplus Z) = 0$ e também que se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y)$, então temos necessariamente que $Y = 0$.

Se E está em $\mathrm{add}T$, então a extensão universal é a sequência $0 \to T \to T \to 0 \to 0$, e então não há nada a provar. Agora caso E não esteja em $\mathrm{add}T$, devemos ter $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, T) \neq 0$, pois caso contrário, teríamos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus T, E \oplus T) = 0$, e então $E \oplus T$ seria um objeto inclinante com um número de somandos indecomponíveis não isomorfos maior do que o número de somandos indecomponíveis não isomorfosmo de T, contradizendo então a proposição 2.9.

Dada a sequência exata

$$0 \to T \to Z \to E^t \to 0 \tag{3.1}$$

podemos aplicar o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \_)$ obtendo a seguinte sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E^t) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) \to 0$$

e então, como α é sobrejetora, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) = 0$. Além disso, como T e E^t estão em $\mathrm{Fac}T$, que é fechada para extensões, segue que Z está em $\mathrm{Fac}T$, e então $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, Z) = 0$. Agora, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, Z)$ em (3.1), obtemos:

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, Z) = 0$$

e daí segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, Z) = 0$.

Finalmente, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z, \_)$ na sequência $0 \to T \to Z \to E^t \to 0$, obtemos:

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, E^t) \to 0$$

de onde podemos concluir que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, E^t) = 0$, ou seja, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, E) = 0$. Logo temos então:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, E \oplus Z) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, E) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, Z) = 0.$$

Assuma agora que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y)$ para algum $Y \in \mathscr{H}$. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, Y)$ na sequência $0 \to T \to Z \to E^t \to 0$, obtemos a seguinte sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t,Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Y) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,Y) \to 0.$$

Assumimos por hipótese que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E \oplus Z, Y)$, logo temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t,Y) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Y)$. Daí segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,Y)$, e como T é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$, concluímos então pela proposição 2.8 que $Y=0$. Isso finaliza a prova de que $E \oplus Z$ é objeto inclinante, o que segue novamente da proposição 2.8.

Agora, considere $Z \in \mathrm{add}E$, então como o objeto $E \oplus Z$ é inclinante em $\mathscr{H}$, segue que E é objeto inclinante em $\mathscr{H}$. Agora, se considerarmos $X \in E^{\perp}$, então por definição de $E^{\perp}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,X) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,X)$, porém, como E é objeto inclinante, temos $X=0$ e segue daí que $E^{\perp}=0$. □

Mostraremos agora uma relação entre objetos inclinantes na categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e objetos inclinante na categoria $E^{\perp}$.

Teorema 3.5. *Seja E um objeto excepcional na categoria hereditária $\mathscr{H}$ e seja $T' = E \oplus X$ com $X \in E^{\perp}$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,E)=0$. Então T' é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$ se e somente se X é objeto inclinante em $E^{\perp}$.*

Demonstração: Assuma que $T' = E \oplus X$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$, onde $X \in E^{\perp}$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T',T') = 0$, temos então que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,X) = 0$. Agora considere $Y \in E^{\perp}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,Y)$. Uma vez que $Y \in E^{\perp}$, temos que vale $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,Y)$ e então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T',Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T',Y)$. Segue então da proposição 2.8 que $Y=0$, pois T' é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$. Daí, segue também da proposição 2.8 que X é um objeto inclinante em $E^{\perp}$.

Na outra direção, podemos raciocinar da mesma maneira. Notemos que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T',T') = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E\oplus X, E\oplus X) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,X) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,E) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,X).$$

Como E é objeto excepcional em $\mathscr{H}$, e então $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E)=0$. Temos também que $X \in E^{\perp}$, logo $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,X) = 0$. Por hipótese temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,E) = 0$ e finalmente, como X é inclinante em $E^{\perp}$, obtemos $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,X)=0$, e portanto, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T',T')=0$.

Seja agora $Y \in \mathscr{H}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T',Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T',Y)$. Temos então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,Y)$, o que nos mostra que Y deve obrigatoriamente estar em $E^{\perp}$. Também sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,Y)$, e pelo fato de X ser objeto inclinante em $E^{\perp}$, concluímos, pela proposição 2.8 que $Y=0$. Logo, segue da proposição 2.8 que T' é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$. □

A seguir provaremos que se $\mathscr{H}$ possui um objeto inclinante T e E é objeto excepcional na categoria hereditária $\mathscr{H}$ que está em Fac$T$, então existe $X \in E^{\perp}$ objeto inclinante tal que $E \oplus X$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$.

Teorema 3.6. *Seja E um objeto excepcional na categoria hereditária $\mathscr{H}$ e assuma que $\mathscr{H}$ tenha um objeto inclinante T tal que $E \in FacT$. Então existe algum objeto inclinante $X \in E^{\perp}$ tal que $E \oplus X$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$.*

Demonstração: Seja $0 \to T \to Z \to E^t \to 0$ a extensão universal de T por E, ou seja, o morfismo

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E^t) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, T)$$

é sobrejetor. Sabemos então, da proposição 3.4 que $E \oplus Z$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$.

Sabemos agora que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z, E) = 0$. Se $Z \in E^{\perp}$, segue do teorema 3.5 que $E \oplus Z$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$. Assuma então que Z não esteja em $E^{\perp}$. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \_)$ na sequência exata $0 \to T \to Z \to E^t \to 0$ obtemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E^t) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, T) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E^t) \to 0$$

Como E é um objeto excepcional em $\mathscr{H}$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E^t) = 0$, e pelo fato de α ser sobrejetora, temos que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) = 0. \tag{3.2}$$

Segue daí, uma vez que supomos que Z não está em $E^{\perp}$, que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, Z) \neq 0$ e então podemos considerar $f : E^s \to Z$ add$E$-aproximação minimal à direita e a sequência exata:

$$0 \to K \to E^s \to \mathrm{im} f \to 0 \tag{3.3}$$

Então temos que $K = \ker f$ é um objeto projetivo em $E^{\perp}$ pela proposição 3.3. Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \_)$ na sequência exata

$$0 \to \mathrm{Im} f \to Z \to Q \to 0$$

onde $Q = \mathrm{coker} f$, obtemos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \mathrm{Im} f) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, Q) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \mathrm{Im} f) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, Q) \to 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Segue então de (3.2) e (3.4) que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,Q)=0.$$

Vejamos agora que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,\mathrm{im}f)=0$. Da sequência (3.3), aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\_)$ obtemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,K)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E^s)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,\mathrm{im}f)\to 0$$

e como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E^s)=0$, segue que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,\mathrm{im}f)=0. \tag{3.5}$$

Vejamos que γ é sobrejetora. De fato, sabemos que $f:E^s\to Z$ é $\mathrm{add}E$-aproximação, ou seja, o morfismo

$$\alpha:\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,E^s)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Z)$$

é sobrejetora. Então, dado um morfismo $g:E\to Z$, sabemos que existe um morfismo $h:E\to E^s$ tal que $g=fh$. Por outro lado, podemos fatorar o morfismo f pela sua imagem, e então teríamos $f=ip$, onde $p:E^s\to\mathrm{im}f$ e $i:\mathrm{im}f\to Z$. A partir daí, teríamos então $g=fh=iph$, e então segue que γ é sobrejetora, pois dado $g:E\to Z$, conseguimos fatorar g através de $i:\mathrm{im}f\to Z$.

Logo, segue da sequência (3.4) e da sobrejetividade de γ que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Q)=0.$$

Portanto $Q\in E^{\perp}$.

Agora consideremos a extensão universal

$$0\to K^r\to L\to Q\to 0 \tag{3.6}$$

de Q por K, ou seja,

$$\beta:\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K^r,K)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,K)$$

é sobrejetora.

Suponha que $L=0$, então da sequência (3.6) temos $K=0=Q$. Logo, a $\mathrm{add}E$-aproximação minimal à direita $f:E^s\to Z$ é um isomorfismo e assim $Z\in\mathrm{add}E$. Pela proposição 3.4 segue que E é objeto inclinante em $\mathscr{H}$ e $E^{\perp} = \{0\}$, e neste caso já está provado nosso objetivo.

Suponha então $L \neq 0$. Vamos mostrar que $L \in E^{\perp}$. Da sequência (3.6), como $K \in E^{\perp}$, $Q \in E^{\perp}$ e a categoria $E^{\perp}$ é fechada para extensões, segue que L está em $E^{\perp}$.

Agora provemos que o objeto $K \oplus L$ é um objeto inclinante em $E^{\perp}$.

Passo 1) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K,K) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,K) = 0$.

De (3.2) e do fato de E ser objeto excepcional segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E \oplus Z) = 0$. Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, K)$ na sequência exata $0 \to K^r \to L \to Q \to 0$, obtemos a sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K^r, K) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,K) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,K) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K^r,K) \to 0$$

Como K é projetivo em $E^{\perp}$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K^r,K) = 0$, e daí, como

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K^r, K) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,K)$$

é sobrejetora, segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,K) = 0$.

Passo 2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,L) = 0$.

Para mostrar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,L) = 0$, consideremos a sequência exata $0 \to \mathrm{Im} f \to Z \to Q \to 0$. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, Q)$, obtemos a sequência:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Im} f, Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathrm{im} f, Q) \to 0$$

A sequência exata

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Q) \to 0$$

nos mostra que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Q) = 0$, uma vez que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,Z) = 0$, já que o objeto $E \oplus Z$ é inclinante. Também temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Im} f, Q) = 0$, pois $\mathrm{Im} f$ está em $\mathrm{Fac} E$ e $Q \in E^{\perp}$. Portanto, segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,Q) = 0$.

Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, Q)$ na sequência $0 \to K^r \to L \to Q \to 0$, obtemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K^r,Q) \to 0$$

de onde concluímos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,Q) = 0$, pois $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q,Q) = 0$ e K é projetivo em $E^{\perp}$ ($\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K,Q) = 0$ pois K, Q estão em $E^{\perp}$ e $E^{\perp}$ é fechada para extensões, então toda sequência exata começando em K e terminando em Q está em $E^{\perp}$). Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(L, \_)$ na mesma sequência, obtemos a sequência exata:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L, K^r) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,L) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(L,Q) \to 0$$

Como já vimos, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(L,K)=0$ e $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(L,Q)=0$, segue então que $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(L,L)=0$. Portanto, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(K\oplus L,K\oplus L)=0$.

Passo 3) Provaremos agora que se $Y \in E^{\perp}$ tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(K\oplus L,Y)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(K\oplus L,Y)$ então $Y=0$. Usando a sequência exata $0\to K^r\to L\to Q\to 0$ podemos ver que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Q,Y)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,Y)$. (Basta aplicar o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\_,Y)$). Aplicando agora o mesmo funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\_,Y)$ na sequência $0\to \operatorname{Im} f\to Z\to Q\to 0$, obtemos:

$$0\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Q,Y)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Z,Y)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)\to 0$$

Daí, como $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Q,Y)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,Y)$, temos os seguintes isomorfismos:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Z,Y)\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\operatorname{im} f,Y) \text{ e também } \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,Y)\simeq \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)$$

Daí, como $\operatorname{Im} f \in \operatorname{Fac} E$ e $Y\in E^{\perp}$, temos que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)=0$ e consequentemente $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(Z,Y)=0$. Aplicando então o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\_,Y)$ na sequência $o\to K\to E^s\to \operatorname{Im} f\to 0$, obtemos a sequência exata:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(E^s,Y)\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(K,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(E^s,Y).$$

Como $Y\in E^{\perp}$ e $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(K,Y)=0$ por hipótese, segue que $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)=0$. Aplicando agora o funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\_,Y)$ na sequência $0\to \operatorname{Im} f\to Z\to Q\to 0$ obtemos a sequência exata:

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,Y)\to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\operatorname{Im} f,Y)\to 0$$

E então segue que $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,Y)=0$. Como $Y\in E^{\perp}$, temos então que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(E\oplus Z,Y)=0=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(E\oplus Z,Y)$, o que implica $Y=0$, pois $E\oplus Z$ é objeto inclinante em $\mathcal{H}$. Segue daí da proposição 2.8 que $X=K\oplus L$ é um objeto inclinante em $E^{\perp}$.

Por fim, mostraremos que $E\oplus(K\oplus L)$ é objeto inclinante em $\mathcal{H}$, com $K\oplus L$ em $E^{\perp}$. Já provamos que $K\oplus L\in E^{\perp}$ e $K\oplus L$ é objeto inclinante em $E^{\perp}$.

Para provar que $E\oplus(K\oplus L)$ é objeto inclinante em $\mathcal{H}$, pelo teorema 3.5 basta mostrar que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(K\oplus L,E)=0.$$

Como existe um monomorfismo $K\xrightarrow{g} E^s$ e além disso, $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(E^s,E)=0$, segue que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{H}}(K,E)=0.$$

Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,E)=0$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\mathrm{Im}f,E)=0$. Aplicando agora o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\_,E)$ na sequência exata $0\to \mathrm{Im}f\to Z\to Q\to 0$ obtemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Im}f,E)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,E)\to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Z,E)=0$$

Como $\mathrm{End}E\simeq k$ e $f: E^s\to Z$ minimal à direita, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathrm{Im}f,E)=0$ e então $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(Q,E)=0$. Como temos então a sequência $0\to K^r\to L\to Q\to 0$, segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(L,E)=0$. Portanto temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(K\oplus L,E)=0$, e pelo teorema 3.5, concluímos que $E\oplus(K\oplus L)$ é um objeto inclinante em $\mathcal{H}$. □

Quando $E^{\perp}$ for equivalente a categoria $\mathrm{mod}H$, para alguma álgebra H hereditária, podemos escolher um objeto de $E^{\perp}$ de uma maneira conveniente, que facilitará nossas contas.

Proposição 3.7. *Seja E um objeto excepcional na categoria hereditária com objeto inclinante $\mathcal{H}$ e assuma que $E^{\perp}$ é equivalente a categoria $\mathrm{mod}H$ para alguma álgebra hereditária H. Então $H\oplus E$ é um objeto inclinante em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Como H é projetivo em $E^{\perp}$ e pela proposição 3.2 M está em $E^{\perp}$, onde $0\to\tau E\to M\to E\to 0$ é sequência quase-cindida, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(H,M)=0$, e daí segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(H,E)=0$ pois $E^{\perp}$ é fechada para extensões, então toda sequência exata começando em E e terminando em H está em $E^{\perp}$. Vejamos então que H é de fato objeto inclinante em $E^{\perp}$. Sabemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(H,H)=0$, uma vez que H é projetivo em $E^{\perp}$ e $E^{\perp}$ é fechada para extensões. Considere agora $Y\in E^{\perp}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(H,Y)=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(H,Y)$. Como $Y\in\mathrm{mod}H$, temos que $Y\simeq \mathrm{Hom}_H(H,Y)=0$ e então $Y=0$, e então da proposição 2.8, H é inclinante em $E^{\perp}$. Então, pelo teorema 3.6 segue que $H\oplus E$ é um objeto inclinante em $\mathcal{H}$. □

Como vimos nesta seção, nosso interesse é investigar quando um objeto excepcional E está no $\mathrm{Fac}T$ para algum objeto inclinante T em $\mathcal{H}$. Nesse caso diremos que E é um objeto de torção, isto é, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T,X)=0$.

Proposição 3.8. *Seja T um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathcal{H}$ e assuma que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_\infty)=0$. Seja $\mathcal{R}$ um tubo em $\mathcal{H}_0$. Então, temos os seguintes fatos:*
(a) *Algum objeto em $\mathcal{R}$ está em $\mathrm{Fac}T$.*
(b) *Se $T\in\mathcal{H}_\infty$, então $\mathcal{R}\subset \mathrm{Fac}T$.*
(c) *Todos os objetos em $\mathcal{H}_0$ são de torção.*

Demonstração: **(a)** Caso algum somando indecomponível de T esteja em $\mathscr{R}$, o resultado é válido. Suponha então que nenhum somando indecomponível de T esteja em $\mathscr{R}$. Sabemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,\mathscr{R}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{R},T) = 0$, uma vez que assumimos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0,\mathscr{H}_\infty)=0$ e que não existe morfismo não nulo entre tubos diferentes(ver [11], prop. 1.2(d)), e então, temos que $\mathscr{R} \subset \mathrm{Fac}T$.
(b) Caso $T \in \mathscr{H}_\infty$, como vimos na demonstração do item **(a)**, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,\mathscr{R}) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{R},T)=0$, o que já mostra que $\mathscr{R} \subset \mathrm{Fac}T$.
(c) Seja $M \in \mathscr{R}$ objeto indecomponível em algum tubo $\mathscr{R}$. Vamos mostrar que M é um objeto de torção, isto é, que existe algum objeto inclinante $\overline{T}$ em $\mathscr{H}$ tal que $M \in \mathrm{Fac}\overline{T}$.
Do item **(b)**, caso $T \in \mathscr{H}_\infty$ temos que $\mathscr{R} \subset \mathrm{Fac}T$, em particular, $M \in \mathrm{Fac}T$.
Se T não possui somandos no tubo $\mathscr{R}$, temos da proposição 2.5 que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}M,T)$, e sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}M,T)=0$, (ver [11], prop. 1.2(d)), e assim $M \in \mathrm{Fac}T$.

Por fim, suponha que exista um somando indecomponível T' de T no tubo $\mathscr{R}$. Então, existe um epimorfismo $T' \to B$, onde B está na boca do tubo $\mathscr{R}$. Como τ é um funtor exato, segue que $\tau^i T' \to \tau^i B$ é um epimorfismo para todo i. Como todo objeto em $\mathscr{R}$ que está na boca do tubo é da forma $\tau^l B$, se mostrarmos que $\tau^i T$ é objeto inclinante, teremos que $\tau^l B \in \mathrm{Fac}\tau^l T'$, ou seja, todos os objetos da boca do tubo serão de torção e consequentemente todos os outros objetos do tubo, e assim estará demonstrada a proposição. Provemos agora que se T é objeto inclinante, então $\tau^i T$ é objeto inclinante, para todo i:

Da proposição 2.8, precisamos mostrar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^i T,\tau^i T) = 0$ e que se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^i T,X)=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^i T,X)$, então $X=0$. De fato, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^i T,\tau^i T)=\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,T)=0$, pois τ é equivalência de categorias. Agora, suponha

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^i T,X)=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^i T,X), \tag{3.7}$$

novamente, como τ é equivalência de categorias, temos que (3.7) é equivalente à

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,\tau^{-i}X)=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,\tau^{-i}X)$$

e como T é objeto inclinante, segue que $\tau^{-i}X=0$, e como τ é equivalência, segue que $X=0$ e portanto segue que $\tau^i T$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$, para todo i.

□

Corolário 3.9. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto inclinante tal que*

$Hom_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ e seja E um objeto excepcional em $\mathscr{H}_0$. Então a categoria perpendicular $E^\perp$ tem um objeto inclinante X, e além disso, $E \oplus X$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$.

Demonstração: É uma consequência direta das proposições 3.6 e 3.8. □

Para um objeto excepcional E em $\mathscr{H}$, denotamos por ${}^\perp E$ a subcategoria de $\mathscr{H}$ cujos objetos são todos os $X \in \mathscr{H}$ satisfazendo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,E) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,E)$. Temos então os seguintes resultados análogos.

Proposição 3.10. *Seja T um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}$ e seja E um objeto excepcional em $Sub\tau T$.Valem as seguintes afirmações:*
***(a)** Existe algum objeto inclinante $X \in {}^\perp E$ tal que o objeto $E \oplus X$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$.*
***(b)** Existe algum objeto inclinante Y em $E^\perp$.*

Demonstração: **(a)** Segue da proposição 2.12 que $\mathscr{H}^{op}$ é uma categoria abeliana hereditária com objeto inclinante T^{op} e sabemos também que E^{op} é um objeto excepcional em $\mathrm{Fac}T^{op}$. Então pelo teorema 3.6 existe um objeto X^{op} inclinante em $E^{op\perp}$ tal que $E^{op} \oplus X^{op}$ é um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}^{op}$, e então temos que o objeto X é um objeto inclinante na categoria $(E^{op\perp})^{op} =^\perp E$ e então $E \oplus X$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$, novamente utilizando a proposição 2.12.
(b) Dado $Z \in \mathscr{H}$, Z está em ${}^\perp E$ se e somente se tivermos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Z,E) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Z,E)$, que por sua vez, é válido se e somente se $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,\tau Z) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\tau Z)$, que nos mostra que o objeto τZ está em $E^\perp$. E desde que existe um objeto inclinante X em ${}^\perp E$, como vimos pelo item **(a)**, o objeto $Y = \tau X$ é um objeto inclinante em $E^\perp$. □

No teorema 3.6 provamos que com objetos inclinante em $E^\perp$ podemos construir objetos inclinante na categoria $\mathscr{H}$. Mostraremos agora que a álgebra de endomorfismos deste objeto inclinante em $\mathscr{H}$ é extensão por um ponto da álgebra de endomorfismos do objeto inclinante tomado em $E^\perp$.

Proposição 3.11. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto inclinante T e seja E um objeto excepcional em $\mathscr{H}$. Considere também a sequência exata quase-cindida $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$. Então vale o seguinte:*
***(a)** Se T' é um objeto inclinante em $E^\perp$ tal que $T = T' \oplus E$, então*

$$End(T' \oplus E)^{op} \simeq \Lambda[Hom_{\mathscr{H}}(T', M)],$$

onde $\Lambda = End(T')^{op}$ e $\Lambda[Hom_{\mathscr{H}}(T', M)]$ é a extensão por um ponto da álgebra Λ pelo Λ-módulo $Hom_{\mathscr{H}}(T', M)$.
***(b)** Se $E^{\perp} = modH$ para alguma álgebra hereditária H, então $H \oplus E$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$ e $End(H \oplus E)^{op} \simeq H[M]$.*

Demonstração: Já sabemos pela proposição 3.1 que $\mathrm{End}(E) \simeq k$. Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', \_)$ na sequência exata quase-cindida $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ obtemos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', \tau E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T', \tau E).$$

Pela proposição 2.5, sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', \tau E) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, T') = 0$ e também que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T', \tau E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, T') = 0$, pois T' está em $E^{\perp}$. Logo, existe um Λ-isomorfismo entre os Λ-módulos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', M)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', E)$. E daí temos então o seguinte:

$$\Lambda[\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', M)] \simeq \Lambda[\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', E)] \simeq \begin{bmatrix} \Lambda & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, T') \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T', E) & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, E) \end{bmatrix} \simeq End(T' \oplus E)^{op}.$$

(b) Da proposição 3.7 sabemos que o objeto $H \oplus E$ é um objeto inclinante na categoria hereditária $\mathscr{H}$. Logo, tomando $T' = H$ no item **(a)**, segue que $\mathrm{End}(H \oplus E)^{op} \simeq H[\mathrm{Hom}_H(H, M)]$. Porém, sabemos que $\mathrm{Hom}_H(H, M) \simeq M$, logo, segue que $\mathrm{End}(H \oplus E)^{op} \simeq H[M]$. □

Dado um objeto excepcional E na categoria hereditária $\mathscr{H}$, será útil construir objetos excepcionais associados a E que sejam objetos de torção ou objetos livres de torção com relação a um par de torção induzido por algum objeto inclinante.

Proposição 3.12. *Seja E um objeto excepcional na categoria hereditária $\mathscr{H}$ e seja T um objeto inclinante em $\mathscr{H}$. Então temos que vale $Ext^1_{\mathscr{H}}(tE, tE) = 0$ e $Ext^1_{\mathscr{H}}(E/tE, E/tE) = 0$, onde $0 \to tE \to E \to E/tE \to 0$ é a sequência exata associada à classe de torção gerada pelo objeto inclinante T, isto é, tE está em $FacT$ e E/tE está na parte livre de torção correspondente.*

Demonstração: Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, \_)$ na sequência exata

$$0 \to tE \to E \to E/tE \to 0 \tag{3.8}$$

obtemos a sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, E/tE) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, tE) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, E).$$

Como tE está em Fac$T$ e E/tE está na parte livre de torção, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, E/tE) = 0$. Logo, para mostrarmos então que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, tE) = 0$ basta mostrarmos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, E) = 0$. Para isso, consideremos novamente a sequência exata (3.8), aplicando agora o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, E)$, obtemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E/tE, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, E) \to 0$$

Logo, como E é objeto excepcional, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) = 0$ e daí segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, E) = 0$. Portanto temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tE, tE) = 0$.

Agora, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, E/tE)$ na sequência exata do enunciado obtemos então:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, E/tE) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E/tE, E/tE) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E/tE).$$

Uma vez que tE está em Fac$T$ e E/tE está na parte livre de torção, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tE, E/tE) = 0$, ou seja, para mostrarmos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E/tE, E/tE) = 0$, basta provarmos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E/tE) = 0$, e para isso, basta aplicar o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \_)$ e assim obtemos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, tE) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E/tE) \to 0.$$

Como E é um objeto excepcional em $\mathscr{H}$, temos $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E) = 0$, e daí segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, E/tE) = 0$. Portanto temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E/tE, E/tE) = 0$. □

3.2 Construção de uma forma normalizada

Considere $\mathscr{H}$ uma k-categoria abeliana hereditária Hom e Ext-finita, e além disso, assuma que $\mathscr{H}$ tenha um objeto inclinante. Nesta seção mostraremos que $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente a uma categoria hereditária $\mathscr{H}'$ satisfazendo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}'}(\mathscr{H}'_0, \mathscr{H}'_\infty) = 0$, ou seja, dada uma k-categoria $\mathscr{H}$ abeliana hereditária Hom e Ext-finita com objeto inclinante, a menos de equivalência derivada, podemos considerar $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$. Caso tenhamos $\mathscr{H}_0 = 0$, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$, e não há nada a provar. Logo, consideremos então $\mathscr{H}_0 \neq 0$.

Agora, segue da proposição 2.7 que podemos escolher algum objeto inclinante T de $\mathscr{H}$ tal que $T \in \mathscr{H}_\infty$. Dado este objeto inclinante T, podemos considerar então o par de torção induzido $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$, onde $\mathscr{T} = \mathrm{Fac}T$. Definamos então $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T} \cap \mathscr{H}_0$ e $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \cap \mathscr{H}_0$. Então seguem os seguintes resultados, que nos ajudarão a entender melhor a componente $\mathscr{H}_0$ da categoria $\mathscr{H}$.

Lema 3.13. *Seja $\mathscr{H}$ categoria hereditária com objeto inclinante $T \in \mathscr{H}_\infty$, então os conjuntos ind$\mathscr{T}_0$ e ind$\mathscr{F}_0$ são ambos união de tubos, e além disso, ind$\mathscr{H}_0 =$ ind$\mathscr{T}_0 \cup$ ind$\mathscr{F}_0$.*

Demonstração: Vamos provar que ind$\mathscr{T}_0$ é união de tubos.Seja $\mathscr{R}$ um tubo contendo algum objeto de $\mathscr{T}_0$. Então vamos mostrar que $\mathscr{R}$ está contido em $\mathscr{T}_0$. Primeiramente, vamos mostrar que $\mathscr{R}$ contém um objeto simples S_1 que está em $\mathscr{T}_0$. De fato, dado $M \in \mathscr{T}_0 \cap \mathscr{R}$, existe um epimorfismo de M para S_1 na boca do tubo, e então pelo fato de $\mathscr{T}_0$ ser fechada para quocientes, segue que S_1 está em $\mathscr{T}_0$.

Pela proposição 2.5 temos que $\tau : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é uma equivalência de categorias, logo, os objetos simples que estão no tubo $\mathscr{R}$ são exatamente $S_1, \tau S_1, ..., \tau^{r-1} S_1$, onde r é o τ-período de S_1. Assuma que nem todos os objetos simples que estão em $\mathscr{R}$ estão contidos em $\mathscr{T}_0$. Então existe algum objeto simples S pertencente à $\mathscr{R}$ tal que S está em $\mathscr{T}_0$ e τS não está. Para cada objeto X em $\mathscr{H}$ temos a sequência exata $0 \to tX \to X \to X/tX \to 0$ com $tX \in \mathscr{T}$ e $X/tX \in \mathscr{F}$, onde $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ é o par de torção associado ao objeto inclinante T, que construímos explicitamente na proposição 2.11. Daí podemos concluir que o objeto τS está em $\mathscr{F}$.

De fato: Mostar que τS está em $\mathscr{F}$ é equivalente a mostrar que $t(\tau S) = 0$, ou ainda, equivalente a mostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \tau S) = 0$. Suponhamos que exista então um morfismo $f : T \to \tau S$ não nulo. Então, como τS não é objeto de torção, a imagem deste morfismo $\mathrm{im} f$ é um subobjeto próprio de τS. Agora, pelo fato de τS ter comprimento finito, concluímos que $\mathrm{im} f$ eobjeto de comprimento finito, isto é, $\mathrm{im} f$ está em $\mathscr{H}_0$. Se $\mathrm{im} f$ estiver no mesmo tubo de τS, como τS é um objeto simples, teríamos $\tau S = \mathrm{im} f$, o que nos levaria a concluir que τS está em $\mathscr{T}$, absurdo, pois o objeto τS não é de torção. Entao a partir daí concluímos que $\mathrm{im} f$ está em outro tubo de $\mathscr{H}_0$ e isto também nos leva a um absurdo, pois os tubos são ortogonais(ver [11], prop. 1.2(d)) e teríamos que a inclusão $\mathrm{im} f \to \tau S$ seria nula.

Como para cada $Y \in \mathscr{T}$ vale $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(S, Y) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Y, \tau S) = 0$, e segue daí então que S é Ext-projetivo em $\mathscr{T}$. Então temos que $S \in \mathrm{add}\, T$ pela proposição 2.8, o que contradiz o fato do objeto T estar em $\mathscr{H}_\infty$. Então todos os objetos simples que pertencem à $\mathscr{R}$ estão em $\mathscr{T}_0$, e consequentemente $\mathscr{R} \subset \mathscr{T}_0$, pois $\mathscr{T}_0$ é fechado para extensões.

A prova de que ind$\mathscr{F}_0$ é uma união de tubos é similar.

Provamos que todo tubo tal que $\mathscr{R} \cap (\mathscr{T}_0 \cup \mathscr{F}_0) \neq \emptyset$ está contido em $\mathscr{T}_0 \cup \mathscr{F}_0$. Para provar que ind$\mathscr{H}_0 =$ ind$\mathscr{T}_0 \cup$ind$\mathscr{F}_0$, precisamos mostrar que todo tubo tem interseção não vazia com algum desses conjuntos. Seja então M um elemento indecomponível em um tubo $\mathscr{R}$ de $\mathscr{H}_0$. Considere então o objeto tM. Se $tM \neq 0$, então tM é um subobjeto de M e como $M \in \mathscr{H}_0$ então $tM \in \mathscr{H}_0$. Como os tubos em $\mathscr{H}_0$ são ortogonais, tM está no mesmo tubo que M. Logo este tubo contém um elemento de $\mathscr{T}_0$, e portanto $\mathscr{R} \cap \mathscr{T}_0 \neq \emptyset$, agora, se $tM = 0$, então $M \in \mathscr{F}_0$. □

Lema 3.14. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com um objeto inclinante $T \in \mathscr{H}_\infty$. Seja S um objeto indecomponível em $\mathscr{T}_0$ e seja Y um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$.*

Se $Hom_{\mathscr{H}}(S, Y) \neq 0$, então $Y \in \mathscr{T}_0$.

Demonstração: Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S, Y) \neq 0$, então $tY \neq 0$, isto é, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y) \neq 0$. Logo existe $X \subset Y$ com $X \in \mathscr{T}_0$.

Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y)$ é um $\mathrm{End}(T)^{op}$-módulo noetheriano, vamos escolher $X \in \mathscr{T}_0$ de tal forma que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, X)$ é um $\mathrm{End}(T)^{op}$-módulo maximal.

Vamos supor por absurdo que Y/X tem um subobjeto $Z \in \mathscr{T}_0$. Então da sequência exata

$$0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$$

e do morfismo inclusão $\iota : Z \to Y/X$, temos o pullback:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "id_X"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e como ι e id_X são monomorfismos, g é monomorfismo. Logo, podemos considerar $Y' \subset Y$.

Como X e Z estão em $\mathscr{T}_0$, Y' também está, pois $\mathscr{T}_0$ é fechada para extensões. Aplicando agora o futor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \_)$ obtemos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, X) \to 0$$

Como $X \in \mathscr{T}_0$, então $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T, X) = 0$. Temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Z) \neq 0$, pois como $Z \in \mathscr{T}_0, Z \in \mathscr{T}$ e portanto $Z \in \mathrm{Gen}\, T$. Daí segue que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, X) \subsetneq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y').$$

Então das inclusões

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, X) \subsetneq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y') \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, Y)$$

temos uma contradição com a maximalidade de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,X)$. Portanto Y/X não tem somando em $\mathscr{T}_0$.

Considere agora a sequência exata

$$0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$$

onde $X \neq 0$ pois $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S,Y) \neq 0$.

Vejamos que $\tau^{-1}X \in \mathscr{T}_0$. Como $X \in \mathscr{T}_0$ e X está em um tubo, segue do lema 3.13 que todo elemento do tubo está em $\mathscr{T}_0$. Assim, $\tau^{-1}X \in \mathscr{T}_0$.

Como $\tau^{-1}X \in \mathscr{T}_0$, temos:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Y/X,X) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}X, Y/X)$$

Como Y/X não tem subobjeto em $\mathscr{T}_0$, segue que $Y/X \in \mathscr{F}_0$. Logo

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}X, Y/X) = 0$$

e assim

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Y/X,X) = 0.$$

Então a sequência

$$0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$$

cinde. Logo, como X é não nulo e é somando de Y indecomponível, temos $Y \simeq X \in \mathscr{T}_0$.

□

Utilizando argumentos duais, temos o seguinte resultado:

Lema 3.15. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com um objeto inclinante $T \in \mathscr{H}_\infty$. Seja S objeto indecomponível em $\mathscr{F}_0$ e seja Y um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$.*

Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Y,S) \neq 0$, então $Y \in \mathscr{F}_0$.

Demonstração: A categoria hereditária $\mathscr{H}^{op}$ tem um objeto inclinante, o que segue da proposição 2.12. Da proposição 2.12 também temos que $\mathscr{T} = \mathrm{Fac}\,T$, $\mathscr{F} = \mathrm{Sub}\,\tau T$, e além disso, $\mathscr{F}^{op} = \mathrm{Fac}(\tau T)^{op}$ e $\mathscr{T}^{op} = \mathrm{Sub}\,T^{op}$. Então temos que S^{op} está em $\mathscr{F}^{op}$ e além disso, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^{op}}(S^{op}, Y^{op}) \neq 0$. Então segue do lema 3.14 que o objeto Y^{op} está em $\mathscr{F}_0^{op}$ e então $Y \in \mathscr{F}_0$. □

Agora apresentaremos um resultado fundamental para provarmos o resultado principal desta seção, mas antes disso, definiremos objeto unisserial.

Definição 3.4. *Um objeto Z é dito uniserial em $\mathscr{H}$ se admite uma única série de composição.*

Proposição 3.16. *$(add(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0), \mathscr{F}_0)$ é um par de torção inclinante e cindido em $\mathscr{H}$.*

Demonstração: A subcategoria $\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}$ é fechada para quocientes e extensões. Então sabemos que $(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0, \mathscr{F}')$ é um par de torção onde

$$\mathscr{F}' = \{Y | \mathrm{Hom}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0, Y) = 0\}.$$

Vamos mostrar que $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_0$. Se $Y \in \mathscr{F}_0$, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{T}_0, Y) = 0$$

pois $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ é par de torção e

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_\infty, Y) = 0$$

do lema 3.15. Portanto $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}'$.

Por outro lado, considere $Y \in \mathscr{F}'$, isto é, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0, Y) = 0$. Logo $Y \notin \mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0$ e então $Y \in \mathscr{F}_0$, pela proposição 3.13. Para provarmos que $(\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0), \mathscr{F}_0)$ é par de torção cindido em $\mathscr{H}$, precisamos mostrar que todo objeto indecomponível de $\mathscr{H}$ está em $\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0)$ ou está em $\mathscr{F}_0$, mas isso segue diretamente do lema 3.13.

Resta provarmos então que $(\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0), \mathscr{F}_0)$ é um par de torção inclinante, isto é, $\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0)$ é um cogerador para $\mathscr{H}$, o que significa provarmos que para todo objeto $X \in \mathscr{H}$ existe um monomorfismo $\alpha : X \to Z$ para algum $Z \in \mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0)$.

Vimos que se um tubo tem elemento de $\mathscr{F}_0$ ou de $\mathscr{T}_0$, então o tubo está contido completamente em $\mathscr{F}_0$ ou em $\mathscr{T}_0$ respectivamente. Então deste fato e mais o fato de que os tubos de $\mathscr{H}_0$ são ortogonais (ver [11], prop. 1.2(d)), temos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{F}_0, \mathscr{T}_0) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{T}_0, \mathscr{F}_0)$$

Segue do lema 3.15 que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_\infty, \mathscr{F}_0) = 0$$

Como $\mathscr{H}$ é uma categoria conexa, existe Y um objeto em $\mathscr{F}_0$ e $X \in \mathscr{H}_\infty$ um objeto indecomponível tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Y, X) \neq 0$. Então existe um objeto simples S em um tubo em

$\mathscr{F}_0$ tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S, X) \neq 0$$

Temos então que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^i S, \tau^i X) \neq 0$$

para todo i, e disso segue que todo objeto simples em $\mathscr{R}$ é subobjeto de algum objeto em $\mathscr{H}_\infty$, o que decorre do fato de que todo morfismo partindo de um objeto simples é monomorfismo. Seja Z um objeto arbitrário em $\mathscr{R}$. Desde que Z é um objeto uniserial, podemos escrever:

$$Z = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_t \end{pmatrix}$$

onde os objetos S_i são objetos simples. Escolhemos então um objeto indecomponível X em $\mathscr{H}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S_t, X) \neq 0$, e $f : S_t \to X$ um morfismo não nulo. Usando isto, temos então uma sequência exata quase-cindida

$$0 \to S_t \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix} \to S_{t-1} \to 0$$

E como a sequência anterior é quase-cindida, sabemos que dado um monomorfismo $f : S_t \to X$ existe um morfismo $\tilde{f} : \begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix} \to X$ tal que $\tilde{f} g = f$. Vejamos agora que $\tilde{f}$ é um monomorfismo. De fato, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S_t \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "f"'] & & S_{t-1} \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & S_{t-2} \\
& \begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix} \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dl, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & & \begin{pmatrix} S_{t-2} \\ S_{t-1} \end{pmatrix} \arrow[ur] & \\
X & & \begin{pmatrix} S_{t-2} \\ S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Se $\tilde{f}$ não fosse monomorfismo, então teríamos que $\ker \tilde{f}$ seria um subobjeto não nulo de

$\begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix}$, porém, como $\begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix}$ é unisserial, temos que

$$0 \subset S_t \subset \begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix}$$

é a sua série de decomposição, e além disso, tal série de decomposição é única. Logo, temos que S_t é o único subobjeto não nulo de $\begin{pmatrix} S_{t-1} \\ S_t \end{pmatrix}$. Logo, teríamos $\ker \tilde{f} \simeq S_t$, porém, S_t não pode ser anulado por $\tilde{f}$, pois $\tilde{f}g = f$. Portanto $\tilde{f}$ é monomorfismo.

Como $f(S_t) \neq 0$, podemos continuar a repetir este processo considerando sequências exatas quase-cindidas apropriadas até conseguirmos um monomorfismo $F : Z \to X$. Isso mostra que $(\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0), \mathscr{F}_0)$ é de fato um par de torção inclinante. $\square$

Nós podemos aplicar o processo inclinante com relação ao par de torção $(\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0), \mathscr{F}_0)$ para obter então uma categoria hereditária $\mathscr{H}'$ derivadamente equivalente à categoria hereditária $\mathscr{H}$, com um par de torção cindido $(\mathscr{F}_0[1], \mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0))$.

O que queremos fazer agora é descrever os objetos de comprimento finito em $\mathscr{H}'$. Para isso, observe que um objeto indecomponível X pertencente a $\mathscr{T}_0$ é de comprimento finito em $\mathscr{H}'$ desde que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{T}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ pelo lema 3.14. Agora se $X[1]$ é um objeto indecomponível em $\mathscr{F}_0[1]$, então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X[1], Z) = 0$ para Z em $\mathrm{add}(\mathscr{H}_\infty \cup \mathscr{T}_0)$, e então $X[1]$ é um objeto de comprimento finito. Consideremos agora um objeto indecomponível X em $\mathscr{H}_\infty$. Se X tivesse comprimento finito, ele deveria pertencer a algum tubo em $\mathscr{H}'$ e então teríamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}'}(X, \mathscr{F}_0[1]) = 0$. Mas então também teríamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{F}_0, X) \simeq \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(X, \mathscr{F}_0) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}'}(X, \mathscr{F}_0[1]) = 0$, e então teríamos que X seria um objeto de comprimento finito como objeto da categoria $\mathscr{H}$, o que nos dá uma contradição.

$\cdots$	$\mathscr{F}_0$	$\mathscr{H}_\infty$	$\mathscr{T}_0$	$\mathscr{F}_0[1]$	$\mathscr{H}_\infty[1]$	$\mathscr{T}_0[1]$	$\cdots$

Então temos que $\mathscr{H}'_0 = \mathrm{add}(\mathscr{T}_0 \cup \mathscr{F}_0[1])$, e com isto, provamos então o seguinte resultado:

Teorema 3.17. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com um objeto inclinante. Então, a menos de equivalência derivada, podemos supor que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$.*

3.3 Descrição de Categorias Perpendiculares de Categorias Hereditárias

Assuma que $\mathscr{H}$ tenha um objeto inclinante. Já sabemos da proposição 3.8 que se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ existe um morfismo não nulo de qualquer objeto inclinante em $\mathscr{H}$ para qualquer tubo em $\mathscr{H}_0$. Nesta seção mostraremos que se E é um objeto de torção excepcional em $\mathscr{H}$, então a categoria perpendicular $E^\perp$ é equivalente à categoria modH para alguma álgebra hereditária H, e se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ e $(\mathscr{H}_0 \neq 0)$ existe um morfismo não nulo de E para qualquer tubo em $\mathscr{H}_0$.

Sabemos da proposição 3.1 e também do teorema 3.6 que $E^\perp$ é uma k-categoria abeliana hereditária com objeto inclinante. Mas mesmo que tenhamos assumido que $\mathscr{H}$ seja conexa, isso não necessariamente é verdade também para $E^\perp$. Para mostrarmos que $E^\perp$ é equivalente a modH, pela proposição 2.14 é suficiente mostrar que cada componente de $E^\perp$ tem um objeto projetivo não nulo. Para isso, é útil considerarmos a sequência quase-cindida

$$0 \to \tau E \to M \to E \to 0.$$

Escrevemos $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, onde cada M_i é um indecomponível. O resultado seguinte nos mostra que devemos nos concentrar nas componentes de $E^\perp$ contendo algum M_i. Em particular existem no máximo r componentes.

Teorema 3.18. *Seja E um objeto de torção excepcional em $\mathscr{H}_\infty$. Então:*

(a) *Cada componente conexa da k-categoria abeliana e hereditária $E^\perp$ contém algum somando indecomponível do termo do meio da sequência quase-cindida que termina em E.*

(b) *A k-categoria abeliana e hereditária $E^\perp$ contém no máximo r componentes conexas, onde r é o número de somandos do termo do meio da sequência quase cindida que termina em E.*

Demonstração: Do teorema 3.6 podemos escolher um objeto inclinante $\tilde{T} \in E^\perp$ tal que $T = E \oplus \tilde{T}$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}$. Como $\tilde{T} \in E^\perp$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \tilde{T}) = 0$ e então:

$$\mathrm{End}(T)^{op} \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,E) & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\tilde{T}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},E) & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\tilde{T}) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} k & 0 \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},M) & \mathrm{End}(\tilde{T})^{op} \end{bmatrix}.$$

Para verificarmos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},M)$, aplicamos o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\_)$ na sequência

$$0 \to \tau E \to M \to E \to 0.$$

obtendo assim a sequência:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\tau E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\tau E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T},M) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T},E) \to 0$$

Pela proposição 2.5, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\tau E) \simeq \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(E,\tilde{T}) = 0$, pois $\tilde{T} \in E^{\perp}$, e também temos $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\tau E) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(E,\tilde{T}) = 0$, uma vez que $\tilde{T} \in E^{\perp}$ logo, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},M)$.

Uma vez que $\mathscr{H}$ é conexa, $\mathrm{End}(T)^{op}$ é uma álgebra indecomponível. Se nenhum somando de $\tilde{T}$ estivesse em $\mathscr{H}'$, teríamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},X) = 0$ para todo $X \in \mathscr{H}'$. Além disso, teríamos também que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T},X) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(X,\tau\tilde{T}) = 0$, e como $\tilde{T}$ é objeto inclinante em $E^{\perp}$, teríamos $X = 0$, para todo $X \in \mathscr{H}'$, absurdo. Então, consideremos $\tilde{T}'$ a soma direta dos somandos indecomponíveis de $\tilde{T}$ que está em $\mathscr{H}'$. Se nenhum M_i estivesse em $\mathscr{H}'$, teríamos $\mathrm{End}(\tilde{T}')^{op}$ seria somando indecomponível de $\mathrm{End}(T)^{op}$, o que é uma contradição. □

3.3.1 Existência de projetivos nas componentes da categoria perpendicular

Vimos que cada componente de $E^{\perp}$ deve conter algum M_i, e além disso, quando $E^{\perp}$ é conexa, temos:

Lema 3.19. *Seja E objeto excepcional de torção em $\mathscr{H}_{\infty}$. Se $E^{\perp}$ é conexa, então $E^{\perp}$ contém um objeto não nulo $Q \in SubE$.*

Demonstração: Como por hipótese $E \in \mathscr{H}_{\infty}$, existe algum epimorfismo próprio $E \to Z$ com Z objeto não nulo, basta considerar uma das componentes do morfismo da sequência quase-cindida que começa em E, e então considerarmos tal morfismo sobre a imagem. Seja $g : E^t \to Z$ uma $\mathrm{add}E$-aproximação minimal à direita. Então $\ker g$ é não nulo desde que g é um epimorfismo e não é isomorfismo. Sabemos também do item (iii) da proposição 3.3 que $\ker g \in E^{\perp}$, logo, como $E^{\perp}$ é conexa, já encontramos o objeto $Q = \ker g \in \mathrm{Sub}E$. □

Lema 3.20. *Seja E um objeto excepcional de torção contido em $\mathscr{H}_\infty$ e a sequência quase-cindida $0 \to \tau E \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \to E \to 0$. Então a componente $\mathscr{H}'$ de $E^\perp$ contendo M_i contém um objeto não nulo e projetivo $Q \in SubE$ caso seja válida uma das afirmações a seguir:*
***(i)** O morfismo induzido $\alpha : M_i \to E$ é um monomorfismo; ou*
***(ii)** O morfismo induzido $\alpha : M_i \to E$ é um epimorfismo e o morfismo induzido $\beta : E \to \tau^{-1}M_i$ é um epimorfismo.*

Demonstração: No caso **(i)**, segue da proposição 3.3 que M_i é projetivo em $E^\perp$, e $M_i \in \mathrm{Sub}E$ também, então já encontramos o objeto procurado.
Assuma agora que estejamos no caso **(ii)**. Seja $f : E^t \to \tau^{-1}M_i$ uma $\mathrm{add}E$-aproximação minimal à direita, que deve ser um epimorfismo, por hipótese. Então $K = \ker f$ é não nulo, pois f é epimorfismo mas não é isomorfismo, e também K é projetivo em $E^\perp$, pelo item (iii) da proposição 3.3.

Queremos mostrar que algum somando não nulo de K está na mesma componente de $E^\perp$ em que está M_i. Então, dada a sequência exata:

$$0 \to K \to E^t \to \tau^{-1}M_i \to 0$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, M_i)$ obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}M_i, M_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E^t, M_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_i) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}M_i, M_i) \to 0$$

e uma vez que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E^t, M_i) = 0$ pois $M_i \in E^\perp$(proposição 3.2) e também $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K, M_i) = 0$, pois K é projetivo em $E^\perp$. Temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}M_i, M_i) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_i, M_i) \neq 0$, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_i) \neq 0$. Daí temos então que algum somando não nulo de K está na mesma componente de M_i. □

3.3.2 A realização da categoria perpendicular como categoria de módulos

Como já vimos no início desta seção, nosso objetivo é mostrar que se E é um objeto de torção excepcional em $\mathscr{H}$, então a categoria perpendicular $E^\perp$ é equivalente à categoria modH para alguma álgebra hereditária H, e se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ e ($\mathscr{H}_0 \neq 0$) existe um morfismo não nulo de E para qualquer tubo em $\mathscr{H}_0$. Devemos nos preocupar agora com os casos restantes, então assumiremos no resto desta seção que $E^\perp$ não é conexa, $\alpha : M_i \to E$ é um epimorfismo e $\beta : E \to \tau^{-1}M_i$ é um monomorfismo, e então após estudarmos estes casos, estaremos aptos a demonstrar o resultado principal desta seção, que foi citado acima.

O próximo lema é um resultado técnico, mas fundamental para os demais resultados desta seção.

Lema 3.21. *Seja* $0 \to A \to B_1 \oplus B_2 \to C \to 0$ *uma sequência exata em* $\mathscr{H}$. *Se o morfismo induzido* $B_1 \to C$ *for um epimorfismo, então o morfismo induzido* $A \to B_2$ *é um epimorfismo.*

Demonstração: Dada a sequência exata $0 \to A \to B_1 \oplus B_2 \to C \to 0$, podemos construir o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)^T"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como o morfismo $B_1 \to C$ é epimorfismo, temos que a linha de cima é exata por definição e que o quadrado da direita comuta, e então, existe único morfismo $f : K \to A$ tal que ambos os quadrados comutam:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)^T"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

E a partir deste diagrama, podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker (1\ 0)^T \arrow[r] \arrow[d] & \ker id_C \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)^T"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} (1\ 0)^T \arrow[r] & \operatorname{coker} id_C &
\end{tikzcd}$$

O diagrama anterior é equivalente ao seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)^T"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B_1 \oplus B_2 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{coker} f \arrow[r, "u"] & B_2 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Logo, aplicando o lema da serpente no diagrama acima, podemos ver que o morfismo u : coker$f \to B_2$ é isomorfismo, e como o quadrado comuta, segue que o morfismo induzido $A \to B_2$ é um epimorfismo. □

Considere agora o seguinte diagrama, onde $M' \neq 0$, uma vez que $E^\perp$ não é conexa.

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dr, "v"] & & \\
\tau E \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\tau\beta"'] & & E \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & M_i \arrow[ur, "\alpha"'] & & \tau^{-1} M_i
\end{tikzcd}$$

Aqui, temos que $\tau\beta$ é um monomorfismo, uma vez que τ é uma equivalência exata de categorias, $\mathscr{H}$ não tem projetivos e β é um monomorfismo. Como v não é um epimorfismo por 3.21, temos que v é um monomorfismo. Como temos um monomorfismo $v : M' \to E$, segue do lema 3.20 que cada componente de $E^\perp$ contém um somando de M'(teorema 3.18) contém um objeto projetivo de $E^\perp$. Sabemos pela proposição 3.1 que $E^\perp$ é uma categoria abeliana hereditária, logo cada uma de suas componentes conexas é uma categoria abeliana hereditária. Assim, pela proposição 2.3 segue que cada uma dessas componentes é da forma modH', para alguma álgebra hereditária H'. Então denotaremos por mod$H$ para uma álgebra hereditária H as componentes de $E^\perp$ que contém os somandos de M'. Assim $E^\perp = \mathrm{mod}H \times \mathscr{H}'$ onde $\mathscr{H}'$ é a componente de $E^\perp$ que contém o objeto M_i de que estamos tratando nessa seção.

Fixaremos pelo resto desta seção também um objeto não nulo V, dado a partir da sequência exata:

$$0 \to M' \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} V \to 0.$$

Temos então a seguinte conexão entre V e modH:

Lema 3.22. *Se $X \in$ modH, então $Hom_{\mathscr{H}}(X, V) = 0$.*

Demonstração: Consideremos a sequência quase cindida $0 \to \tau E \to M_i \oplus M' \to E \to 0$. Mostremos primeiramente, que dado $Q \in$ modH, então

$$t : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, E)$$

é um isomorfismo.

De fato, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, \_)$ na sequência quase cindida acima obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, \tau E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M_i) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q, \tau E).$$

Como Q está em mod$H$ e mod$H$ está contida em $E^{\perp}$, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, \tau E) \simeq \mathrm{DExt}^1_{\mathscr{H}}(E, Q) = 0$$

e também

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(Q, \tau E) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau E, \tau Q) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, Q) = 0.$$

Além disso, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M_i) = 0$ pois Q e M_i estão em componentes diferentes de $E^{\perp}$. E então segue que $t : \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, E)$ é um isomorfismo.

Assumamos agora também que Q é projetivo em $E^{\perp}$, logo será projetivo em modH também, e então aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, \_)$ na sequência exata

$$0 \to M' \to E \to V \to 0$$

obtemos a sequinte sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, M') \xrightarrow{t} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, V) \to 0.$$

Como t é um isomorfismo, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, V) = 0$. Se $X \in$ modH, existe um epimorfismo $Q \to X$ com Q projetivo em modH. Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, V) = 0$, segue que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, V) = 0.$$

□

Logo, fixado tal objeto V, temos duas possibilidades: V é um objeto simples ou não. Caso não seja um objeto simples, temos o seguinte:

Lema 3.23. *Se V não é objeto simples, a componente $\mathscr{H}'$ contendo M_i contém um objeto não nulo em SubE.*

Demonstração: Como V não é objeto simples, existe $L \subset V$ tal que o quociente $Z = V/L$ é não nulo e $Z \neq V$. Consideremos então a add$E$-aproximação minimal à direita $s : E^t \to Z$, uma vez que $u : E \to V$ é epimorfismo, temos que s é epimorfismo próprio, i. é, epimorfismo que não é isomorfismo. Como s é epimorfismo próprio, segue que $K = \ker s$ é não nulo, e pela proposição 3.3 é um objeto projetivo em $E^{\perp}$, ou seja, $\ker s \in$ SubE. Vamos mostrar agora que algum somando não nulo de K está na componente $\mathscr{H}'$ contendo M_i.

Se considerarmos a composição de $u : E \to V$ com o morfismo projeção $p : V \to Z$, como $s : E^t \to Z$ é add$E$-aproximação minimal à direita, existe então morfismo $f : E \to E^t$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & E^t \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como End$E \simeq k$, então o morfismo f é da forma $f = (\lambda_1 \cdots \lambda_t)^T$, com $\lambda_i \in k$, isto é, f é um monomorfismo. Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & L \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & E^t \arrow[r, "s"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & W \arrow[r] \arrow[d] & E^{t-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Se $t > 1$, temos a seguinte composta de epimorfismos:

$$K \to W \to E^{t-1} \to E \to V,$$

e então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V) \neq 0$.

Se $t = 1$, temos $E^{t-1} = 0$, e então pelo lema da serpente existe um isomorfismo $L \simeq W$, e assim temos uma composta não nula:

$$K \to W \simeq L \to V$$

e novamente $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V) \neq 0$. Segue então de 3.22 que K tem um somando não nulo em $\mathscr{H}'$, pois caso contrário, teríamos $K \in \mathrm{modH}$ e daí $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V) = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Provamos acima que $K \in E^{\perp} = \mathscr{H}' \times \mathrm{mod}H$ e que K é objeto projetivo em $E^{\perp}$. Pelo lema 3.22 e mais o fato de que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V) \neq 0$ temos que os somandos de K não estão todos em $\mathrm{mod}H$.

Lema 3.24. *$Ext^1_{\mathscr{H}}(V,V) = 0$.*

Demonstração: Consideremos a sequência exata

$$0 \to M' \to E \to V \to 0$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_,V)$, obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M',V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(V,V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,V).$$

Como $V \in \mathrm{FacE}$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,V) = 0$.Uma vez que $M' \in \mathrm{modH}$, temos também que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M',V) = 0$ por 3.22, e então temos $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(V,V) = 0$. $\square$

Agora vejamos o caso em que o objeto V seja um objeto simples. Como vimos do lema anterior, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(V,V) = 0$, logo, toda sequência exata começando e terminando em V cinde, logo devemos ter que o τ-período de V deve ser maior do que 1. Suponha que seja 3, e vejamos o que acontece:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \tau^2 V \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \tau V \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & V \\
& \left(\begin{smallmatrix} \tau^2 V \\ V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix} \tau V \\ \tau^2 V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix} V \\ \tau V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] & \\
& & \left(\begin{smallmatrix} \tau V \\ \tau^2 V \\ V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[dr] & & \left(\begin{smallmatrix} V \\ \tau V \\ \tau^2 V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] & & \\
& & & \left(\begin{smallmatrix} V \\ \tau V \\ \tau^2 V \\ V \end{smallmatrix}\right) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Repare que se considerarmos

$$U = \left(\begin{smallmatrix} V \\ \tau V \\ \tau^2 V \\ V \end{smallmatrix}\right),$$

temos que U tem comprimento 4, e soc$U \simeq$ top$U \simeq V$. Note também que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(U,V) = 1$.

Lema 3.25. *Se V é objeto simples, a componente $\mathscr{H}'$ contendo M_i contém um objeto não nulo que está em SubE.*

Demonstração: Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(V,V) = 0$ por 3.24, temos que o τ-período r de V deve ser maior do que 1. Seja U o único objeto indecomponível (no tubo de V) de comprimento $r+1$ tal que socU e topU são isomorfos à V. Então temos que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(U,V) = 1$. Também temos um epimorfismo $u : E \to V$ induzindo um morfismo não nulo $g : E \to V \subset U$ cuja imagem seja igual à V. Usando algumas propriedades básicas de sequências quase cindidas, o epimorfismo $u : E \to V$ também induz um epimorfismo $h : E \to U$. Temos então $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,U) \geq 2$. Seja $f : E^t \to U$ uma add E aproximação minimal à direita. Segue então que $t > 0$ e também que $K = \ker f$ é não nulo, pois se fosse nulo, como f é epimorfismo, então seria um isomorfismo. Logo U estaria em $\mathscr{H}_\infty$, o que é uma contradição.

Considere então a sequência exata:

$$0 \to K \to E^t \to U \to 0$$

Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, V)$, obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(U,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E^t,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V).$$

Como $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E^t,V) \geq 2t > 2$ e $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(U,V) = 1$, podemos concluir que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V)$ é não nulo, e então K tem algum somando indecomponível em $\mathscr{H}'$, pois do lema 3.22, se todos os somandos de K estivessem em $\mathrm{mod}H$, teríamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K,V)=0$, uma contradição, ou seja, K tem algum somando indecomponível em $\mathscr{H}'$. □

3.3.3 Equivalência

Agora vamos finalmente provar o resultado principal desta seção, mas antes disso, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.26. *Seja $f: A \to B$ um monomorfismo em $\mathscr{H}_\infty$ e assuma que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty)=0$. Se $\mathscr{R}$ é um tubo em $\mathscr{H}_0$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A,\mathscr{R}) \neq 0$, então temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,\mathscr{R}) \neq 0$.*

Demonstração: Seja R a soma direta dos objetos simples não-isomorfos pertencentes à $\mathscr{R}$. Então, para $X \in \mathscr{H}$ temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,\mathscr{R}) \neq 0$ se, e somente se, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,R) \neq 0$. Considere então a sequência exata

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0,$$

aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_,R)$ obtemos a sequência exata:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C,R) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,R) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A,R) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(C,R) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(B,R) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(A,R) \to 0. \end{gathered}$$

Temos que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(B,R) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}R,B)=0$$

e também

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(A,R) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}R,A)=0$$

uma vez que $A, B \in \mathscr{H}_\infty$, além disso,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(C,R) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}R,C) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(R,C).$$

Escreva então $C = C_1 \oplus C_2$ onde cada somando indecomponível de C_1 está em $\mathscr{R}$ e nenhum somando indecomponível de C_2 estão em $\mathscr{R}$.

Então

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(R,C) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(R,C_1) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C_1,R) \leq \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C,R)$$

e disto decorre que

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,R) \geq \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A,R).$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A,R) \neq 0$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,R) \neq 0$ e portanto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,\mathscr{R}) \neq 0$. □

Agora, com todos os resultados que já provamos, podemos demonstrar o resultado mencionado no início desta seção:

Teorema 3.27. *Seja $\mathscr{H}$ uma categoria hereditária com objeto inclinante e seja E um objeto de torção excepcional em $\mathscr{H}_\infty$. Então temos:*
(a) *$E^\perp$ é equivalente à mod$H$ para alguma álgebra hereditária H;*
(b) *Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$, então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{R}) \neq 0$ para qualquer tubo $\mathscr{R}$ em $\mathscr{H}_0$.*

Demonstração: **(a)** Pelo teorema 3.18(a), cada componente da k-categoria abeliana e hereditária $E^\perp$ contém algum somando indecomponível M_i, somando indecomponível do termo do meio da sequência quase-cindida

$$0 \to \tau E \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} E \to 0.$$

Se considerarmos os morfismos $M_i \to E$ induzidos por g, podemos dizer que a componente que contém M_i contém um subobjeto não nulo projetivo Q de sub$E$ se $M_i \to E$ for monomorfismo ou se $M_i \to E$ for epimorfismo com a aplicação induzida $E \to \tau^{-1} M_i$ sendo epimorfismo. No caso em que $M_i \xrightarrow{\alpha} E$ é epimorfismo e $E \xrightarrow{\beta} \tau^{-1} M_i$ é monomorfismo segue da sequência quase cindida

$$0 \to \tau E \xrightarrow{(p \ \ \tau\beta)^T} M' \oplus M_i \xrightarrow{(v \ \ \alpha)^T} E \to 0$$

que v é monomorfismo, pois β é monomorfismo, e temos também que τ é uma equivalência, então $\tau\beta$ é um monomorfismo e pelo lema 3.21 v é monomorfismo. Logo temos então a seguinte sequência exata:

$$0 \to M' \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} V \to 0.$$

Pelos lemas 3.23 e 3.25, a componente $\mathscr{H}'$ contendo M_i contém um objeto não nulo em sub$E$. Na prova dos lemas 3.23 e 3.25, tomamos as aproximações $E^t \to Z$ e $E^t \to U$ respectivamente, como kernel K, e em ambos provamos que algum somando de K está em $\mathscr{H}'$. Então pela proposição 3.3 (iii), este objeto é projetivo em $E^\perp$. Vamos que a componente $\mathscr{H}'$ que contém M_i é uma categoria abeliana hereditária contendo algum objeto inclinante $\tilde{T}'$.

De fato, suponha por absurdo que $\mathscr{H}'$ não seja hereditária, logo, existiriam objetos $X, Y \in \mathscr{H}'$ tal que $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{H}'}(X,Y) \neq 0$, e então teríamos $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{H}}(X,Y) \neq 0$, o que é um absurdo, pois $\mathscr{H}$ é categoria hereditária. Agora, sabemos que existe $\tilde{T}$ objeto inclinante em $E^\perp$, e como vimos na demonstração do teorema 3.18, podemos considerar $\tilde{T}'$ a soma dos somandos indecomponíveis de $\tilde{T}$ que estão em $\mathscr{H}'$. Vamos mostrar que $\tilde{T}'$ é objeto inclinante em $\mathscr{H}'$. Primeiramente notemos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}'}(\tilde{T}', \tilde{T}') = 0$. Agora, dado $X \in \mathscr{H}'$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}'}(\tilde{T}', X) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}'}(\tilde{T}', X)$, vamos mostrar que $X = 0$. Notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T}' \oplus \tilde{T}'', X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}'}(\tilde{T}', X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T}'', X) = 0$, pois $\tilde{T}''$ e X estão em componentes diferentes. Vejamos agora que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}, X) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}' \oplus \tilde{T}'', X) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}'}(\tilde{T}', X) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}'', X) = 0$, pois $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}'', X) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X, \tau \tilde{T}') = 0$. Logo concluímos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}, X) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T}, X)$, e como $\tilde{T}$ é objeto inclinante em $E^\perp$ segue que X deve ser nulo. E finalmente concluímos que $\tilde{T}'$ é objeto inclinante de $\mathscr{H}'$.

Agora como $\mathscr{H}'$ é categoria hereditária e tem objeto inclinante, podemos concluir que essa componente deve ser equivalente a modH' para alguma álgebra hereditária H', pela proposição 2.3, e consequentemente, $E^\perp$ é equivalente a mod$H$, para alguma álgebra hereditária H, onde H é produto cartesiano das álgebras hereditárias H' para cada componente conexa $\mathscr{H}'$ de $E^\perp$.

(b) Pela proposição 2.6, sabemos que $\mathscr{H}_0$ é união de tubos. Assuma que exista algum tubo $\mathscr{R}$ em $\mathscr{H}_0$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{R}) = 0$. Como $E \in \mathscr{H}_\infty$, temos que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, R) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}R, E) = 0$ para $R \in \mathscr{R}$, e então temos $\mathscr{R} \subset E^\perp$. Seja H_1 o somando indecomponível de H tal que $\mathscr{R} \subset \mathrm{modH_1}$. Uma vez que sequências quase cindidas em $\mathscr{R}$ são quase cindidas em $E^\perp$, e então em modH_1, temos que $\mathscr{R}$ é ainda um tubo em modH_1. Então H_1 deve ser uma álgebra hereditária mansa. É conhecido da estrutura de álgebras hereditárias mansas indecomponíveis que cada tubo é sincero, isto é, para qualquer H_1-módulo projetivo indecomponível P temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P, \mathscr{R}) = \mathrm{Hom}_{H_1}(P, \mathscr{R}) \neq 0$.

Como a componente modH_1 de $E^\perp$ contém um objeto projetivo não nulo Q que é subobjeto de E^t para algum t, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(Q, \mathscr{R}) \neq 0$, e então, como existe um monomorfismo de Q para E^t, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E^t, \mathscr{R}) \neq 0$ pelo lema 3.26, e portanto

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{R}) \neq 0.$$

□

Capítulo 4

O Resultado Principal

Em adição às hipóteses que já estamos considerando sobre a categoria hereditária $\mathscr{H}$, assuma que a categoria $\mathscr{H}$ tem um objeto inclinante, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$ e assuma também que $\mathscr{H}_0$ tem algum tubo de posto um. Nós provaremos que $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à uma álgebra canônica, ou equivalentemente, a alguma categoria $\mathrm{coh}\mathbb{X}$ dos feixes coerentes sobre $\mathbb{X}$ uma reta projetiva com peso.

Se $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à categoria $\mathrm{mod}H$ para alguma k-álgebra hereditária H e $\mathscr{H}$ têm tubos, sabemos que este caso só pode ser o caso em que $\mathrm{mod}H$ é uma categoria de módulos de uma álgebra hereditária de tipo de representação mansa, e por um resultado de Happel(Quasitilted álgebras) segue que $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente à alguma $\mathrm{coh}\mathbb{X}$ com gênero negativo. Então podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathscr{H}$ não é derivadamente equivalente à alguma categoria $\mathrm{mod}H$.

4.1 Rank de um Objeto

Para podermos alcançar nosso objetivo, será útil introduzirmos agora a noção de **rank** para objetos de $\mathscr{H}$. Pelo resto desta seção, fixe um objeto simples S no tubo de posto um.

Definição 4.1 (rank$X$)**.** *Dado $X \in \mathscr{H}$, o **rank** de X, denotado por rkX, é dado pela fórmula*

$$rkX = dim_k Hom_{\mathscr{H}}(X,S) - dim_k Ext^1_{\mathscr{H}}(X,S).$$

Temos então as seguintes propriedades básicas.

Proposição 4.1. ***(a)*** *rk$X \geq 0$ para todo $X \in \mathscr{H}$.*
(b) *Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é exata na categoria $\mathscr{H}$, então $rkB = rkA + rkC$.*
(c) *Se X é um objeto excepcional em $\mathscr{H}_\infty$, então $rkX > 0$.*

Demonstração: **(a)** Seja X um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$. Se X não está no tubo em que S está, então da proposição 2.5 segue que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,S) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(S,\tau X) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}S,X) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(S,X) = 0,$$

pois como S está em $\mathscr{H}_0$, se X estiver em $\mathscr{H}_\infty$ segue a última igualdade. Se X estiver em um tubo distinto do tubo em que está S, então a igualdade segue da ortogonalidade dos tubos, e então temos rk$X \geq 0$. Analisemos agora o caso em que S e X estejam no mesmo tubo. Então temos que

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,S) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S,X) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,S),$$

e então temos que rk$X = 0$.
Obs:. Note que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,S) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S,X)$ pela estrutura uniserial do tubo, suponha por exemplo que

$$X = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix}$$

então a estrutura do tubo é a seguinte, uma vez que o posto do tubo é igual a 1:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, dashed, dash] \arrow[dr] & & S \arrow[rr, dashed, dash] \arrow[dr] & & S \\
& \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, dash] \arrow[dr] & & \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \arrow[ur] & \\
& & \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(b) Considerando a seguinte sequência exata,

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

ao aplicarmos o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_,S)$ obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C,S) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(B,S) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(A,S) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(C,S) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(B,S) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(A,S) \to 0$$

E segue então daí que $\mathrm{rk}B = \mathrm{rk}A + \mathrm{rk}C$.

(c) Considere X um objeto excepcional em $\mathscr{H}_\infty$. Sabemos então que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X,S) \simeq D\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S,X) = 0$, da proposição 2.5. Considere agora $\mathscr{T} = \mathrm{Fac}T$ a classe de torção para algum objeto inclinante T, e seja tX o subobjeto de torção correspondente de X. Sabemos da proposição 3.12 que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(tX, tX) = 0$ e que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(X/tX, X/tX) = 0$. Se $tX \neq 0$, então temos que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(tX,S) > 0$ do teorema 3.27, uma vez que cada somando indecomponível de tX está em $\mathrm{Fac}T$ e é excepcional em $\mathscr{H}_\infty$. Daí temos $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,S) > 0$ pela proposição 3.26. Se $tX = 0$, então $X \simeq X/tX$. E então segue novamente pela proposição 3.12 que X é objeto excepcional e de torção. Então temos que $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(X,S) > 0$ do teorema 3.27. $\square$

Pela proposição 2.7 sabemos que existe um objeto inclinante T em $\mathscr{H}_\infty$, e então temos que T é objeto excepcional em $\mathscr{H}_\infty$. Pelo item **(c)** da proposição 4.1 podemos escolher objeto excepcional $E \in \mathscr{H}_\infty$ tal que o $\mathrm{rk}E$ seja minimal, suponha $\mathrm{rk}E = a > 0$, e então podemos claramente assumir que E é um objeto de torção.

Segue também do teorema 3.27 que a categoria $E^\perp$ é equivalente à categoria $\mathrm{mod}H$ para alguma k-álgebra básica hereditária H. Então segue da proposição 3.7 que$H \oplus E$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$ e ainda pela proposição 3.11 $\mathrm{End}(H \oplus E)^{op} \simeq H[M]$, onde $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ é uma sequência quase-cindida. Como assumimos que a categoria hereditária $\mathscr{H}$ não é derivadamente equivalente a qualquer categoria $\mathrm{mod}H'$ para uma k-álgebra hereditária H', segue que $H[M]$ é uma álgebra quase-inclinada que não é inclinada. O nosso objetivo é mostrar que $H[M]$ é uma álgebra canônica. Provaremos esse resultados em diversas etapas.

O próximo resultado é fundamental para a demonstração dos demais resultados desta seção, e sua prova pode ser encontrada em [7],(pág. 78, teorema 7.10).

Proposição 4.2. *Seja $\mathscr{H}'$ uma k-categoria conexa abeliana hereditária com objeto inclinante, que não é derivadamente equivalente a alguma categoria $\mathrm{mod}H'$ para H' k-álgebra hereditária. Seja E' um objeto excepcional em $\mathscr{H}$ tal que $E'^\perp = \mathrm{mod}H'$ para alguma k-álgebra hereditária H'. Assuma que M' é um objeto indecomponível, onde M' é tal que $0 \to \tau E' \to M' \to E' \to 0$ é sequência exata quase-cindida. Então valem as seguintes propriedades:*

(a) *M' é um H'-módulo sincero.*

(b) *socM' não é simples.*

(c) *A coextensão por um ponto* $[M']H' = \begin{bmatrix} H' & 0 \\ D(M') & k \end{bmatrix}$ *é quase-inclinada.*

(d) *Existe um objeto inclinante $\tilde{T}'$ em Fac$(H' \oplus E')$ tal que Hom$_{\mathscr{H}}(H', \tilde{T}')$ é um H'-módulo injetivo.*

Como podemos ver, para que possamos utilizar o resultado anterior, precisamos mostrar primeiramente que M é um objeto indecomponível. Mas antes, enunciaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.3. *(ver [12]pág. 64) Seja H uma álgebra hereditária indecomponível e M um H-módulo. São equivalentes:*

(a) *$H[M]$ é uma álgebra quase-inclinada.*

(b) *M é objeto regular indecomponível.*

Lema 4.4. *Seja E um objeto de torção excepcional em $\mathscr{H}_\infty$ e $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ a sequência quase-cindida terminando em E e assuma que $E^\perp = \text{mod}H$, H k-álgebra hereditária de dimensão finita. Suponha também que $\mathscr{H}_0$ tem tubo de posto 1. Então o H-módulo M é indecomponível e regular.*

Demonstração: Como $H[M]$ é uma álgebra quase-inclinada que não é inclinada, segue da proposição 4.3 que é suficiente mostrar que H é uma álgebra indecomponível, ou equivalentemente, que a categoria perpendicular $E^\perp$ é conexa.

Vamos assumir então que $E^\perp$ não é conexa. A sequência exata quase-cindida $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ nos mostra que rk$M = 2$rk$E = 2a$, utilizando o item **(b)** do lema 4.1. Então podemos escrever $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, onde cada M_i é objeto indecomponível. Se $M_i \to E$ é um monomorfismo, então pela proposição 3.3 segue que M_i é um objeto projetivo na categoria $E^\perp$ e então um objeto excepcional. Temos também que M_i está em $\mathscr{H}_\infty$, uma vez que $M_i \to E$ é não nulo e E está em $\mathscr{H}_\infty$, e então concluímos que rk$M_i >$ rk$E = a$, pela minimalidade do rk$E = a$. Se $M_i \to E$ é um epimorfismo, então claramente temos rk$M_i \geq$ rk$E = a$. Segue daí então que $r \leq 2$.

Assumiremos agora que $r = 2$ e que $M_1 \to E$ e $M_2 \to E$ são ambos monomorfismos. Então pela proposição 3.3, $M = M_1 \oplus M_2$ é objeto projetivo em mod$H$, e então teríamos que $H[M]$ é álgebra hereditária, o que é uma contradição.

Então vamos assumir agora que $r = 2$ e que $M_2 \to E$ é um epimorfismo. Considere então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "(0\ 1)^T"] & E \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau E \arrow[r, "h"] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Temos então que $hf = (0\ 1)^T g$. Logo, hf é monomorfismo, pois $(0\ 1)^T$ e g são, e então segue que f é monomorfismo. O cokernel de $(0\ 1)^T$ é M_1. Entao aplicando o lema da serpente no diagrama acima, obtemos que o cokernel de f é M_1 e então podemos construir o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "(0\ 1)^T"] & E \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau E \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \\
 & M_1 \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Desde que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, \tau E) \neq 0$ e que $\tau E \in \mathscr{H}_\infty$, segue que K não tem comprimento finito. Temos também $\mathrm{rk} K = a - a = 0$. Queremos mostrar então que K é um objeto excepcional em $\mathscr{H}_\infty$, o que nos dará uma contradição, pelo item **(c)** do lema 4.1.

Primeiramente aplicaremos o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, M_1)$ na sequência exata quase-cindida $0 \to \tau E \to M_1 \oplus M_2 \to E \to 0$ obtendo assim a seguinte sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_1, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_2, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau E, M_1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, M_1).$$

Sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, M_1) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, M_1)$ pois $M_1 \in E^\perp$. Como assumimos no começo da demonstração que $E^\perp$ não é conexa, M_1 e M_2 devem estar em componentes diferentes, segue daí então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_2, M_1) = 0$. Logo temos que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau E, M_1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_1, M_1)$.

Agora aplicando o mesmo funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, M_1)$ na sequência $0 \to K \to \tau E \to M_1 \to 0$, obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_1, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau E, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M_1, M_1)$$

Como temos um epimorfismo $\tau E \to M_1$, temos então epimorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M_1, \tau E) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M_1, M_1),$$

e segue daí então que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M_1, M_1) = 0$ pois $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M_1, \tau E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E, M_1) = 0$. Então concluímos que M_1 é um objeto excepcional em $E^{\perp}$, e então do fato que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M_1, M_1) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tau E, M_1)$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_1) = 0$.

Finalmente, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, \_)$ à sequência $0 \to K \to \tau E \to M_1 \to 0$ obtemos a sequência exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_1) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K, K) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K, \tau E).$$

Como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(K, M_1) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K, \tau E) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(E, K) = 0$, e então podemos concluir que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(K, K) = 0$, obtendo assim a nossa contradição. Logo, concluímos que $E^{\perp}$ é conexa, e então M é indecomponível. □

Lema 4.5. *Seja E objeto excepcional de torção em $\mathscr{H}_{\infty}$, $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ a sequência exata quase-cindida terminando em E e assuma também que $E^{\perp} = modH$, onde H é uma k-álgebra hereditária de dimensão finita. Então $\mathscr{H}_0 \subset Fac(H \oplus E)$.*

Demonstração: Pela proposição 4.2 sabemos que M é objeto sincero, ou seja, existe morfismo não nulo de todo H-módulo projetivo para M. Sabemos que $M \in \mathscr{H}_{\infty}$, e como H é projetivo em $E^{\perp}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_{\infty}) = 0$, segue que H não tem comprimento finito, e então concluímos que o objeto $H \oplus E$, que é inclinante da proposição 3.7, está em $\mathscr{H}_{\infty}$. E então temos que $\mathscr{H}_0 \subset \mathrm{Fac}(H \oplus E)$ pela proposição 3.8, item (b).

□

Para o objeto inclinante $T = H \oplus E$ podemos considerar o seguinte funtor:

$$F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \_) : \mathscr{H} \to \mathrm{mod}H[M],$$

onde

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \_)|_{\mathrm{Fac}T} : \mathrm{Fac}T \to \mathrm{mod}H[M]$$

é fiel e pleno. A representação de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,Z)$ como $H[M]$-módulo é dada pela seguinte terna:

$$(\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Z), \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,Z), g)$$

de acordo com o teorema 1.9. Porém, como já vimos anteriormente, temos

$$H[M] \simeq \begin{bmatrix} k & 0 \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,E) & H \end{bmatrix},$$

e então como o objeto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,Z)$ é um k-espaço vetorial, a representação é da forma:

$$(k^s, \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,Z), g)$$

onde

$$g : k^s \otimes_k M \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,Z),$$

isto é, vamos escrever então

$$g : M^s \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,Z).$$

Nosso objetivo agora é investigar mais a fundo a imagem $F(S)$ do objeto simples S, que pertence à $\mathscr{H}_0$, e então pelo lema 4.5 estará em $\mathrm{Fac}\,T$, mas antes disso, vamos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.6. *(ver [12],pág. 57) Seja H uma k-álgebra hereditária de dimensão finita e seja $\Lambda = H[M]$, M um H-módulo. Seja (A,B,f) um objeto em $\mathrm{mod}\Lambda$, onde $f : M \otimes_k A \to B$ é um morfismo de H-módulos, então $pd_\Lambda(A,B,f) \leq 1$ se, e somente se, $\ker f$ é projetivo.*

Lema 4.7. *Considere $F(S) = (k^t, I, f)$. Valem as seguintes afirmações:*

(a) *O morfismo $f : M^t \to I$ é sobrejetor.*

(b) *I é um H-módulo injetivo sincero .*

(c) *$DTr_{H[M]}(k^t, I, f) \simeq (k^t, I, f)$.*

(d) *$P = \ker f$ é projetivo e $P/rP \simeq \mathrm{soc} I$.*

(e) *$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P,M) = 2t$.*

Demonstração: **(a)** Como já vimos, $\mathrm{rk}E > 0$, e então podemos concluir que existe um morfismo não nulo $E \to S$, que deve ser sobrejetor, uma vez que S é um objeto simples. Consideremos então a $\mathrm{add}E$-aproximação minimal à direita $h : E^s \to S$, que também é sobrejetora, e então podemos construir a sequência exata $0 \to K \to E^s \to S \to 0$, onde $K = \ker h$. Aplicando então o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,\_)$ obtemos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,E^s) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,S) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,K).$$

Sabemos que $T = H \oplus E$, e além disso, segue da proposição 3.3 que $K = \ker h$ está em $E^{\perp} = \mathrm{mod}H$. Disto decorre que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,K) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(H,K) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,K).$$

Como $K \in \mathrm{mod}H$, e H é H-módulo projetivo, segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(H,K) = 0$. Além disso, já vimos que $K \in E^{\perp}$, logo, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,K) = 0$. E segue daí portanto que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,K) = 0$.

Temos $F(E) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,E) = (k, M, id_M)$ uma vez que $\mathrm{End}E \simeq k$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,M) \simeq M$. Então obtemos uma sobrejeção $(k, M, id_M)^s \to (k^t, I, f)$, uma vez que o funtor F é pleno. Assim podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M^s \arrow[r] \arrow[d, "id"] & M^t \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
M^s \arrow[r] & I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De onde podemos concluir então que $f : M^t \to I$ é sobrejetora.

(b) Pela proposição 4.2 existe um objeto inclinante $\tilde{T}$ em $\mathrm{Fac}T$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,\tilde{T})$ é um H-módulo injetivo. Desde que S é um objeto simples em um tubo de posto um, temos um epimorfismo $\tilde{T} \to S$ pela proposição 2.6. Seja $g : \tilde{T}^l \to S$ uma $\mathrm{add}\tilde{T}$-aproximação minimal à direita. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\tilde{T},\_)$ na sequência exata:

$$0 \to \ker g \to \tilde{T}^l \to S \to 0,$$

segue que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\tilde{T}, \ker g) = 0$ e então podemos concluir que $K = \ker g$ está em $\mathrm{Fac}\tilde{T} \subset \mathrm{Fac}T$. Então daí concluímos que a sequência $0 \to F(K) \to F(\tilde{T})^l \to F(S) \to 0$ é exata em $\mathrm{mod}H[M]$, onde

$$F(\tilde{T})^l = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,\tilde{T})^l = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,\tilde{T})^l \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\tilde{T})^l$$

Também sabemos que $F(S) = (k^t, I, f)$, e então temos o seguinte epimorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,\tilde{T})^l \oplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(E,\tilde{T})^l \to K \oplus I,$$

pela construção da equivalência na prova do teorema 1.9, e temos o seguinte epimorfismo:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,\tilde{T})^l \to I$$

e segue então do fato de H ser álgebra hereditária e do fato de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,\tilde{T})$ ser H-módulo injetivo que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,S) = I$ é um H-módulo injetivo, pois I é quociente de um injetivo.

Para cada somando indecomponível P de H, temos que P é objeto excepcional e está em $\mathscr{H}_\infty$, então segue do teorema 3.27 que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P,S) \neq 0$. Agora, se considerarmos $\mathrm{Hom}_H(P,\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,S))$, temos o seguinte:

$$\mathrm{Hom}_H(P,\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,S)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P\otimes_H H,S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P,S) \neq 0$$

e temos então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(H,S) = I$ é um H-módulo sincero.

(c) Considere a sequência quase-cindida $0 \to S \to U \to S \to 0$ em $\mathscr{H}$, que está contida em $\mathrm{Fac}T$. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,S) = 0$, a partir da sequência anterior obtemos a seguinte sequência exata em $\mathrm{mod}H[M]$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,S) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,U) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,S) \to 0$$

A última sequência é quase-cindida em $\mathrm{mod}H[M]$, o que segue da proposição 2.13. Isto nos mostra então que $DTr_{H[M]}F(S) \simeq F(S)$.

(d) e **(e)** Considere a sequência exata

$$0 \to P \to M^t \to I \to 0$$

onde $P = \ker f : M^t \to I$. Como todo $H[M]$-módulo em $F(\mathrm{Fac}T)$, em particular o $H[M]$-módulo $F(S)$, tem dimensão projetiva no máximo 1, o que segue da proposição 2.13, podemor afirmar então que P é um H-módulo projetivo pela proposição 4.6.

Consideremos então o seguinte diagrama comutativo, que dará origem a uma $H[M]$-resolução projetiva de $F(S)$, onde cada coluna representa um $H[M]$-módulo.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M^t \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"] & M^t \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] & M^t \arrow[r, "f"] & I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Como $f : M^t \to I$ é sobrejetora temos que $\mathrm{Hom}_{H[M]}(F(S),(0,A,0)) = 0$, para $A \in \mathrm{mod}H$, e então temos que $\mathrm{Hom}_{H[M]}(F(S),H[M]) = 0$. Como I é injetivo e M é regular, temos $\operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(I, M) = 0$. Para facilitar a visualização, vamos denotar a resolução projetiva dada em (4.1) por:

$$0 \to P_1 \to P_0 \to F(S) \to 0.$$

Aplicando então o funtor $\operatorname{Hom}_{H[M]}(\_, H[M])$ obtemos

$$0 \to \operatorname{Hom}_{H[M]}(F(S), H[M]) \to \operatorname{Hom}_{H[M]}(P_0, H[M]) \to \operatorname{Hom}_{H[M]}(P_1, H[M]) \to \operatorname{Tr}F(S) \to 0,$$

vimos anteriormente que $\operatorname{Hom}_{H[M]}(F(S), H[M]) = 0$, e então aplicando na sequência acima o funtor $D = \operatorname{Hom}_k(\_, k)$ obtemos:

$$0 \to \operatorname{DTr}F(S) \to \operatorname{DHom}_{H[M]}(P_1, H[M]) \to \operatorname{DHom}_{H[M]}(P_0, H[M]) \to 0$$

que dará origem ao seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{r-t} \arrow[r] \arrow[d] & M^r \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M^t \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I(P/rP) \arrow[r] & I(P/rP) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

onde $r = \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(P/rP))$. Como vimos que $DTr_{H[M]}F(S) \simeq F(S)$, nós devemos então ter $r = 2t$ e $I(P/rP) \simeq I$, e então, $P/rP \simeq \operatorname{soc} I$. $\square$

Usando então o lema 4.7 obtemos algumas informações adicionais importantes sobre a sequência exata $0 \to P \to M^t \to I \to 0$:

Lema 4.8. *Seja E objeto excepcional de torção em $\mathscr{H}_\infty$ e $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ a respectiva sequência quase-cindida terminando em E, além disso, assuma que $E^\perp = modH$, H k-álgebra hereditária de dimensão finita. Seja $S_1, \cdots, S_n$ a lista completa de H-módulos simples, $P(S_1), \cdots, P(S_n)$ os respectivos projetivos indecomponíveis e $I(S_1), \cdots, I(S_n)$ os injetivos indecomponíveis de H. Então valem as seguintes afirmações:*

(a) *$socM = S_i^2$ ou $socM = S_i \oplus S_j$.*

(b) *Se $socM = S_1 \oplus S_2$ e $F(S) = (k^t, I, f)$, então $I = I(S_1)^{t_1} \oplus I(S_2)^{t_2}$ onde $t_1 + t_2 = t$.*

Demonstração: (a) Seja $\operatorname{soc} M = S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{n_r}$, onde os objetos S_i são H-módulos simples não isomorfos entre si e $n_i > 0$. Como H é uma álgebra hereditária, segue que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{H}}(S_i, S_i) \simeq \operatorname{Ext}^1_H(S_i, S_i) = 0$, e então podemos concluir que S_i é um objeto excepcional para todo i, e como S_i é subobjeto de M, e M está em $\mathscr{H}_\infty$, logo $S_i \in \mathscr{H}_\infty$. Portanto existe um morfismo não nulo saindo de S_i para S pelo teorema 3.27 e então $\operatorname{rk} S_i \geq a$, pelo item **(c)** da proposição 4.1. Como rk$M = 2a$, segue que soc$M$ tem no máximo 2 somandos distintos, e da proposição 4.2 temos que soc$M$ não é simples, portanto devem haver exatamente 2 somandos em soc$M$. A partir daí obtemos dois possíveis casos: $r = 1$ e $n_1 = 2$ ou $r = 2$ e $n_1 = 1 = n_2$, em outras palavras, soc$M = S_1^2$ ou soc$M = S_1 \oplus S_2$.

(b) Considere então a sequência exata $0 \to$ soc$M \to M \to C \to 0$. Como soc$M$ e M estão em $E^\perp =$ mod$H$, segue que C também estão em $E^\perp =$ mod$H$. Pelo item **(b)** da proposição 4.1 temos que rk$C$ = rk$M$ - rksoc$M$ = 2a - 2a = 0. Seja U um submódulo simples de C. Então temos que rk$U = 0$ e além disso, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(U,U) = 0$ pois H é uma álgebra hereditária. Temos então que $U \in \mathscr{H}_0$, pois caso contrário, teríamos U objeto excepcional em $\mathscr{H}_\infty$, e então pelo item **(c)** da proposição 4.1, rk$U > 0$, contradição. Como U está em $\mathscr{H}_0$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$, segue que C também está em $\mathscr{H}_0$.

Seja m_i a multiplicidade de S_i em M. Temos soc$M = S_1^2$ ou soc$M = S_1 \oplus S_2$. Como M é sincero, pelo menos um dos módulos simples em soc$M$, digamos S_1, deve ser projetivo. Primeiramente podemos dizer que H possui um módulo projetivo simples pois é uma álgebra hereditária. Então dado um H-módulo projetivo simples P, como M é sincero sabemos então que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P, M) \neq 0$ pois P é projetivo, do fato de P ser simples, dado um morfismo $f : P \to M$ temos que f é monomorfismo, e disto temos então que P é submódulo simples de M, ou seja, $P \subset$ soc$M$.

Quando soc$M = S_1^2$, temos que $m_1 = 2$. De fato, considere a série de composição

$$0 \subset S_1 \subset S_1^2 \subset \cdots \subset N \subset N' \subset \cdots \subset M \tag{4.2}$$

Suponha então que S_1 apareça em algum outro fator de composição. Considere então (4.2) a série de composição contendo soc$M$ e que $N'/N \simeq S_1$. Então considerando a sequência exata $0 \to N \to N' \to N'/N \to 0$, temos que $N' = N \oplus N'/N$, pois N'/N é projetivo. A partir daí, como $S_1^2 \subset N$, teríamos $S_1^3 \subset N' \subset M$, o que é uma contradição. Quando soc$M = S_1 \oplus S_2$, segue que $m_1 = 1$, e a prova para isto é similar a prova anterior.

Considerando soc$M = S_1^2$ temos então a sequência exata

$$0 \to S_1^2 \to M \to C \to 0$$

e então aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, I(S_i))$, obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(S_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S_1^2, I(S_i)) \to 0$$

e considerando $i \neq 1$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S_1^2, I(S_i)) = 0$. Como M é sincero, temos que

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(S_i)) \neq 0$, logo, temos então $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \neq 0$, para $i \neq 1$.

Agora, considerando $\mathrm{soc}M = S_1 \oplus S_2$, se supormos $m_2 > 1$, como o simples S_2 aparece uma única vez na série de composição de $S_1 \oplus S_2$, então deve aparecer uma vez na série de composição de C, e assim,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \neq 0, \text{para } i \neq 1.$$

Se $m_2 = 1$, consideramos então a sequência exata

$$0 \to S_1 \oplus S_2 \to M \to C \to 0$$

e aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\_, I(S_i))$ obtemos:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(S_i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S_1 \oplus S_2, I(S_i)) \to 0$$

e considerando $i \neq 1, 2$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(S_1 \oplus S_2, I(S_i)) = 0$. Novamente utilizando o fato de M ser sincero, temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \neq 0$ para $i \neq 1, 2$.

Uma vez que $C \in \mathscr{H}_0$, quando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \neq 0$, segue que $I(S_i)$ está em $\mathscr{H}_0$. Como $I(S_i)$ é um H-módulo, $F(I(S_i))$ não é um $H[M]$-módulo sincero, pois como vimos, não existe morfismo do projetivo simples $S_1 \to I(S_i)$, logo, não existe morfismo do projetivo $F(S_1) \to F(I(S_i))$. Podemos observar também que $F(S)$ é um $H[M]$-módulo sincero, e então, $F(Z)$ é sincero para todo Z no tubo de S, e segue então que S e $I(S_i)$ não estão no mesmo tubo. Como S e $I(S_i)$ não estão no mesmo tubo, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(I(S_i), S) = 0$, e consequentemente, aplicando o funtor $F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T, \_)$ obtemos

$$\mathrm{Hom}_{H[M]}((0, I(S_i), 0), (k^t, I, f)) = 0$$

pois $F|_{\mathrm{Fac}T} : \mathrm{Fac}T \to \mathrm{mod}H[M]$ é fiel e pleno. A partir daí temos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(I(S_i), I) = 0$, quando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(C, I(S_i)) \neq 0$.

E daí segue que $I = I(S_1)^{t_1} \oplus I(S_2)^{t_2}$, com $t_1 > 0$, pois I é um H-módulo sincero, e com $t_2 = 0$ se $S_2 \in \mathrm{soc}M$ e $m_2 > 1$. □

Proposição 4.9. *Seja E objeto excepcional de torção em $\mathscr{H}_\infty$, $0 \to \tau E \to M \to E \to 0$ a sequência quase-cindida terminando em E e assuma também $E^\perp = \mathrm{mod}H$, onde H é uma k-álgebra hereditária de dimensão finita, então a aljava de H tem um único poço x e a multiplicidade do H-módulo simples correspondente $S(x)$ em M é igual a 2, e ainda,*

$[M] = [P(x)] + [I(x)]$ em $K_0(modH)$, onde $P(x)$ e $I(x)$ são os H-módulos projetivo e injetivo indecomponíveis associados ao vértice x respectivamente.

Demonstração: Agora, como vimos pelo lema anterior, podemos considerar $I = I(S_1)^{t_1} \oplus I(S_2)^{t_2}$ com $t_1 > 0$, com $t_2 = 0$ se $S_2 \in \mathrm{soc}M$ e $m_2 > 1$. Considere então que $S_2 \in \mathrm{soc}M$, como vimos então no final da prova do lema 4.7 temos que $2t = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(P/rP))$, mas como $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, I(P/rP)) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P, M)$ temos então

$$2t = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P, M) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P(S1)^{t_1}, M) + \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(P(S_2)^{t_2}, M) = t_1.m_1 + t_2.m_2,$$

e daí como estamos considerando $\mathrm{soc}M = S_1 \oplus S_2$, já vimos que $m_1 = 1$. Considerando primeiro $m_2 > 1$, temos $t_2 = 0$ e então $2t = t_1 + t_2$. Agora, considerando $m_2 = 1$ também obtemos $2t = t_1 + t_2$.

Considerando a multiplicidade de S_1 em M^t, temos que $t = 2t_1 + pt_2$, onde $p \geq 0$ é o número de caminhos do vértice de S_2 para o vértice de S_1 na aljava da álgebra H. De fato, ao considerarmos a sequência exata

$$0 \to P \to M^t \to I \to 0,$$

considerando $\mathrm{soc}M = S_1 \oplus S_2$, já vimos que $m_1 = 1$, ou seja, quando considerarmos a multiplicidade de S_1 em M^t, isso resultará no número t. Por outro lado, sabemos que $I = I(S_1)^{t_1} \oplus I(S_2)^{t_2}$(observe que o simples S_1 não aparece na série de composição de $I(S_2)$, pois caso contrário estaria no $\mathrm{soc}I(S_2)$ por ser projetivo), e segue então que $\mathrm{soc}I = S_1^{t_1} \oplus S_2^{t_2}$, logo a multiplicidade de S_1 em I é igual a t_1. Agora, sabemos também que $P = P(S_1)^{t_1} \oplus P(S_2)^{t_2}$, onde $P(S_i)$ são projetivos e indecomponíveis, então, como $\mathrm{rad}(P(S_1)) \subset P(S_1)$ e $P(S_1)/\mathrm{rad}(P(S_1)) = S_1$, segue que $P(S_1) = S_1$. Logo S_1 só irá aparecer t_1 vezes na série de composição de $P(S_1)$. Agora nos resta saber se o simples S_1 aparece na série de decomposição de $P(S_2)$, mas sabemos que $\dim e_2He_1$, que é o número de caminhos do vértice de S_2 para o vértice de S_1 na aljava da álgebra H, também representa o número de vezes que o simples S_1 aparece na série de decomposição de $e_2H = P(S_2)$. E então segue a fórmula $t = 2t_1 + pt_2$.

Se $p = 0$, então S_2 é simples projetivo. De fato:se S_2 nao for projetivo, teríamos um caminho saindo de S_2. Logo, como não existe caminho do vértice de S_2 para o vértice de S_1, teríamos então outro poço diferente de 1. Assim, teríamos outro projetivo simples em H, diferente de S_1. Portanto, como M é sincero, teríamos outro simples diferente de S_1 e S_2 no $\mathrm{soc}M$. Como S_2 é projetivo simples e portanto aparece uma única vez na série de composição de M. Da sequência exata

$$0 \to P(S_1)^{t_1} \oplus P(S_2)^{t_2} \to M^t \to I(S_1)^{t_1} \oplus I(S_2)^{t_2} \to 0,$$

se analisarmos a multiplicidade de S_2 em M temos então que

$$t = 2t_2$$

Como $p = 0$, da equação $t = 2t_1 + pt_2$ temos que $t = 2t_1$. Assim, $2t = 2t_1 + 2t_2 > t_1 + t_2$, o que nos dá uma contradição.
Agora, se $p > 0$, temos $2t = 4t_1 + 2pt_2 > t_1 + t_2$, o que também nos dá uma contradição.

Logo, a única possibilidade que nos resta é $r = 1$ e $m_1 = 2$. Então $I = I(S_1)^{t_1}$. Como $2t_1 = 2t$, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \to P(S_1)^t \to M^t \to I(S_1)^t \to 0$$

E isso nos mostra então que $[M] = [P(S_1)] + [I(S_1)]$ em $K_0(\text{mod}H)$.

Além disso, podemos notar também que a aljava de H tem um único poço x. De fato, se a aljava de H admitisse outro poço y, teríamos então outro módulo $S(y)$ projetivo e simples, e pelo fato de M ser H-módulo sincero, existiria um monomorfismo $S(y) \to M$, e então $S(y)$ seria subobjeto de M, o que é um absurdo, pois sabemos que soc$M = S_1^2$.

□

Agora definiremos aqui dois conceitos que utilizaremos na prova do próximo teorema:

Definição 4.2. *Seja A uma álgebra. Um caminho em modA é uma sequência*

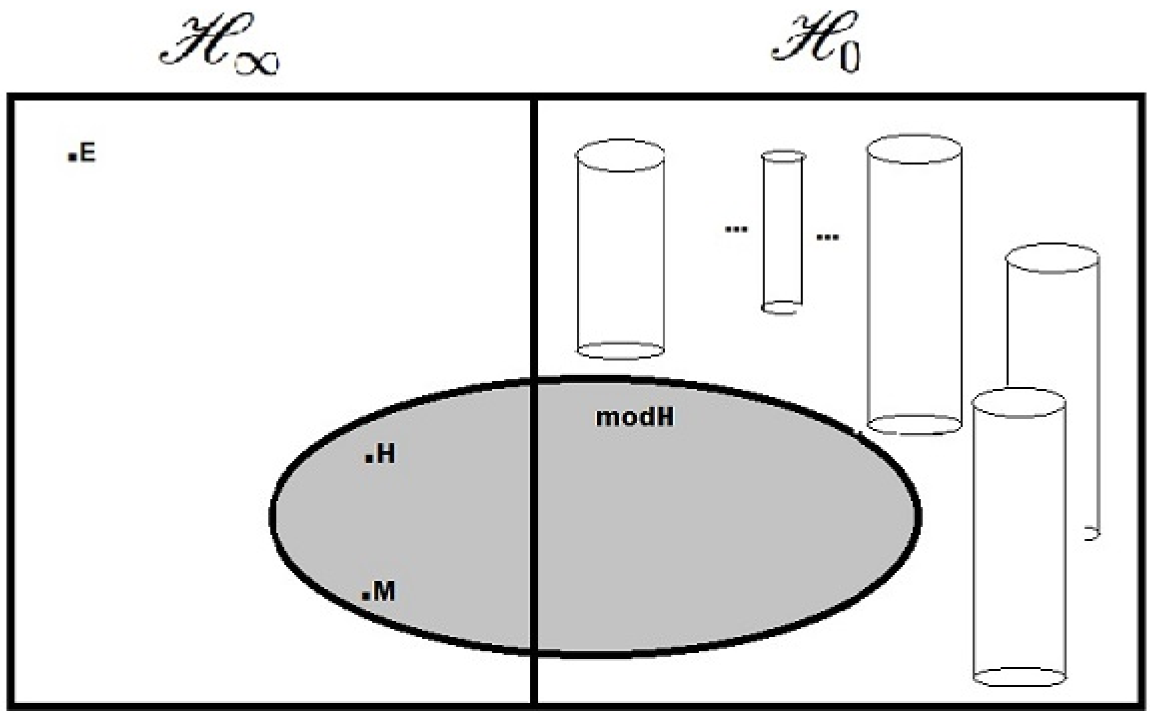
$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t$$

de morfismos não nulos que não são isomorfismos $f_1, ..., f_t$ entre os A-módulos indecomponíveis $M_0, M_1, ..., M_t$ com $t \geq 1$. Dizemos que M_0 é um antecessor de M_t e que M_t é um sucessor de M_0. Um caminho em modA é chamado um ciclo $M_0 \simeq M_t$. Um A-módulo indecomponível que não está em nenhum ciclo em modA é chamado de ***módulo dirigido****.*

Definição 4.3. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um A-módulo M está* ***no meio de uma cadeia curta*** *se existir um A-módulo indecomponível X tal que*

$$Hom_A(X, M) \neq 0 \text{ e } Hom_A(M, DTrX) \neq 0.$$

Antes de proseguirmos com a próxima proposição, vejamos o quadro abaixo, que dá uma ideia de como estão distribuidos as informações obtidas anteriormente na categoria hereditária $\mathscr{H}$:



Agora, iremos demonstrar um resultado fundamental em nosso trabalho, mas para isso, precisamos antes de alguns conceitos preliminares.

Definição 4.4. *(Álgebra Canônica) Seja $n \geq 2$ um número natural e sejam $r_1, \ldots, r_n$ n números naturais. Seja então $Q_{r_1,\ldots,r_n}$ a aljava:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet^{1} \arrow[ddl, "\alpha_1"'] & \bullet^{2} \arrow[l, "\alpha_1"'] & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet^{r_1} \arrow[l, "\alpha_1"'] & \\
 & \bullet^{1} \arrow[dl, "\alpha_2"] & \bullet^{2} \arrow[l, "\alpha_2"'] & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet^{r_2} \arrow[l, "\alpha_2"'] & \\
\bullet^{0} & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \bullet^{w} \arrow[uul, "\alpha_1"'] \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \arrow[ddl, "\alpha_n"] \\
 & \bullet^{1} \arrow[ul, "\alpha_i"'] & \bullet^{2} \arrow[l, "\alpha_i"'] & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet^{r_i} \arrow[l, "\alpha_i"'] & \\
 & \bullet^{1} \arrow[uul, "\alpha_n"] & \bullet^{2} \arrow[l, "\alpha_n"] & \cdots & \cdots & \bullet & \bullet^{r_n} \arrow[l, "\alpha_n"] &
\end{tikzcd}
$$

*Seja k um corpo e considere a álgebra de caminhos $kQ_{r_1,\dots,r_n}$. Sejam $\lambda_3,\dots,\lambda_n$; $n-2$ elementos não nulos e distintos de k. Então o k-subespaço de $kQ_{r_1,\dots,r_n}$ gerado pelos elementos da forma $\lambda_i\alpha_1^{r_1+1}+\alpha_2^{r_2+1}+\alpha_i^{r_i+1}$ é um ideal $I_{\lambda_3,\dots,\lambda_n}$ em $kQ_{r_1,\dots,r_n}$ e a álgebra de caminhos $\Lambda = kQ_{r_1,\dots,r_n}/I_{\lambda_3,\dots,\lambda_n}$ é chamada de **álgebra canônica** de tipo $r_1,\dots,r_n$.*

Proposição 4.10. *(ver [12], pág. 60) Seja H uma álgebra hereditária de artin e $M_1,\dots,M_t$ módulos dirigidos indecomponíveis. Então $M = M_1\oplus\cdots\oplus M_t$ não está no meio de uma cadeia curta se, e somente se, $M_1,\cdots,M_t$ estão em uma fatia.*

Teorema 4.11. *Seja E objeto excepcional de torção em $\mathscr{H}_\infty$, $E^\perp = modH$ para alguma álgebra hereditária H e $0\to\tau E\to M\to E\to 0$ a sequência quase-cindida terminando em E, então a extensão por um ponto $H[M]$ é uma álgebra canônica.*

Demonstração: Podemos assumir que a álgebra H é uma álgebra básica, e então temos $H\simeq kQ$, onde kQ é a álgebra de caminhos da aljava Q. Além disso, sabemos da proposição 4.9 que a aljava Q tem um único poço. Nosso objetivo primeiramente é mostrar que o grafo subjacente $\overline{Q}$ de Q é uma árvore.

Assuma então o contrário, ou seja, $\overline{Q}$ não é uma árvore. Então existe algum vértice y em $\overline{Q}$ tal que existem $n\geq 2$ caminhos diferentes de y para x. Sabemos da proposição 4.2 que a coextensão por um ponto $[M]H$ é quase-inclinada. Denotemos então o vértice correspondente à coextensão por α, e a aljava estendida por $\tilde{Q}$. Para um vértice i em $\tilde{Q}$ seja $P(i)$ o $[M]H$-módulo projetivo indecomponível correspondente à i. Segue então de [12](pág. 54) que $\Sigma = \mathrm{End}(P(x)\oplus P(y)\oplus P(\alpha))^{op}$ é também quase-inclinada. Podemos ver então, que Σ é isomorfa à algebra de caminhos com aljava:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, bend right, "n"'] & x \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \alpha \end{tikzcd}$$

De fato, suponha que não fosse, então a única possibilidade que nos restaria seria a seguinte aljava:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, bend right, "n"'] & x \arrow[r] & \alpha \end{tikzcd}$$

e então em $\tilde{Q}$ teríamos apenas uma flecha de x para α. Mas então

$$\begin{tikzcd} \tilde{Q} \arrow[d] \\ \alpha \end{tikzcd}$$

Como $\tilde{Q}$ é a coextensão de H por M, então $I(\alpha)/\mathrm{soc}I(\alpha) = M$, e se tivesse apenas uma flecha de x para α, então o espaço vetorial no vértice da representação de M terá dimensão 1, portanto $S(x)$ apareceria somente uma vez no socM, mas já vimos que $S(x)^2 = \mathrm{soc}M$, o que nos daria uma contradição, ou seja, devemos ter duas flechas de x para α.

Agora, podemos considerar Σ como a coextensão de L por H_1, isto é, $\Sigma = [L]H_1$ onde H_1 é a álgebra de caminhos da aljava:

$$y \underset{n}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}} x$$

e L tem vetor dimensão $\underline{\dim}L = (n,2)$, pois aqui o subespaço de caminhos nulos de y para α tem dimensão n. Agora, vamos olhar Σ de outra maneira, como uma extensão por um ponto, $\Sigma = H_2[N]$, onde H_2 é a álgebra de caminhos da aljava

$$x \rightrightarrows \alpha$$

e N tem vetor dimensão $\underline{\dim}N = (n,n)$. Agora, se N tem um somando regular indecomponível, sabemos de [12](pág. 62) que N é indecomponível e regular, mas como a álgebra Σ é quase-inclinada então N está na boca do tubo[12](teorema 3.9, pág. 68), logo $\underline{\dim}N = (1,1)$, o que é uma contradição, pois $n \geq 2$. Suponha agora que cada somando indecomponível de N é pós-projetivo ou pré-injetivo. Como Σ é quase-inclinada, N é dado por uma fatia, fato este que advém da proposição 4.10. Então, a partir daí podemos concluir que todos os somandos indecomponíveis de N são ou pós-projetivos ou pré-injetivos, logo, teríamos $\underline{\dim}N = (i, i+1)$ ou $\underline{\dim}N = (i+1, i)$, mas vimos que $\underline{\dim}N = (n,n)$, e então concluímos que $\overline{Q}$ deve ser uma árvore.

Agora que sabemos que o grafo subjacente da aljava Q é uma árvore, queremos mostrar que $\overline{Q}$ é uma estrela. Suponha por absurdo então que $\overline{Q}$ não é uma estrela. Então devem existir vértices a, b, c em Q tal que se w é o vértice da extensão por um ponto

$H[M]$ e $P(i)$ denota o módulo projetivo indecomponível correspondente ao vértice i na aljava estendida. Temos agora $\Sigma = \mathrm{End}(P(x) \oplus P(a) \oplus P(b) \oplus P(c) \oplus P(w))^{op} \simeq T[N]$, onde T é a álgebra de caminhos da aljava:

$$\begin{tikzcd} & & b \arrow[dl] \\ x & a \arrow[l] & \\ & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

sobre k.

Sabemos que o vetor dimensão de N é dado por

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[dl] \\ 2 & 1 \arrow[l] & \\ & & 1 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Como Σ é quase-inclinada e a álgebra de caminhos da aljava

$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[dl] \\ \cdot & \cdot \arrow[l] & \\ & & \cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

sobre o corpo k é de tipo de representação finita, N deve ser dada por uma fatia, novamente utilizando a proposição 4.10. Pelo fato do vetor dimensão de N ser da forma mencionada acima, $S(x)$ deve ser um somando de N. Se temos uma fatia, então somente os módulos projetivos indecomponíveis podem ser somandos, como podemos ver abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & P(b) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \tau^{-1}P(b) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \tau^{-2}P(b) \\
S(x) \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend left] & P(a) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \tau^{-1}P(x) \arrow[r] & \tau^{-1}P(a) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, bend left] & \tau^{-2}P(x) \arrow[r] & \tau^{-2}P(a) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & P(c) \arrow[rr, dashed] \arrow[ur] & & \tau^{-1}P(c) \arrow[rr, dashed] \arrow[ur] & & \tau^{-2}P(c)
\end{tikzcd}$$

Mas isso é impossível, pois qualquer combinação de vetores dimensão dos projetivos indecomponíveis não nos fornece o módulo N. Isso mostra então que Q deve ser uma estrela. Então, acabamos de mostrar que H é dada pela estrela:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[ddl] & 1 \arrow[l] & \cdots \\
 & 1 \arrow[dl] & 1 \arrow[l] & \cdots \\
2 & \vdots & \vdots & \\
 & 1 \arrow[ul] & 1 \arrow[l] & \cdots \\
 & 1 \arrow[uul] & 1 \arrow[l] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde os números denotam o vetor dimensão de M. Como $H[M]$ é quase-inclinada, deve ser de fato uma álgebra canônica, por [12]. $\square$

4.2 A Equivalência Derivada

Nesta seção, provaremos o resultado principal deste trabalho, mas para isso precisaremos de alguns resultados antes.

Teorema 4.12. *(ver [12], pág. 24) Seja T um objeto inclinante em uma k-categoria abeliana $\mathscr{H}$. Então $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(\Lambda)$ onde $\Lambda = End(T)^{op}$.*

Teorema 4.13. *(ver [16], pág. 408) Dada uma álgebra canônica C, existe uma equivalência de categorias trianguladas $\mathscr{D}^b(coh\mathbb{X}) \simeq \mathscr{D}^b(C)$.*

Teorema 4.14. *Seja $\mathscr{H}$ uma k-categoria abeliana hereditária conexa, $dim_k Hom_{\mathscr{H}}(X,Y) < \infty$ e $dim_k Ext^1_{\mathscr{H}}(X,Y) < \infty$, para todo X, Y objetos em $\mathscr{H}$. Assuma que $\mathscr{H}$ tenha um objeto inclinante T em $\mathscr{H}_\infty$, não seja derivadamente equivalente à alguma mod$H$ e que $\mathscr{H}_0 \neq 0$. Então $\mathscr{H}$ é derivadamente equivalente a coh$\mathbb{X}$ para alguma reta projetiva $\mathbb{X}$ com peso.*

Demonstração: Pelo teorema 3.17, podemos assumir que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_\infty) = 0$. Sabemos também da proposição 2.6 que todos os tubos em $\mathscr{H}_0$ tem posto finito. Seja então n_0 o posto minimal de tais tubos. Se $n_0 = 1$, temos que $H[M]$ é uma álgebra canônica, e como já vimos anteriormente, $H[M] \simeq \mathrm{End}(T)^{op}$ para T objeto inclinante em $\mathscr{H}$, logo temos $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(H[M])$, e então temos também que $\mathscr{D}^b(H[M]) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$, fatos estes que seguem dos teoremas 4.12 e 4.13, e então temos que para $n_0 = 1$ o resultado desejado vale. Suponha agora que $n_0 > 1$ e que o resultado vale para todo $m < n_0$.

Escolha E na boca do tubo de posto n_0 em $\mathscr{H}_0$. Como supomos que $n_0 \geq 2$, segue da proposição 2.5 que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,E) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(E,\tau E) = 0$, e então concluímos que E é objeto excepcional. Segue da proposição 3.8 que $\mathscr{H}_0$ está contido em Fac$T$, onde T é objeto inclinante em $\mathscr{H}_\infty$. Daí temos que $E \in \mathrm{Fac}T$, e segue da proposição 3.6 que a categoria hereditária $E^\perp$ tem um objeto inclinante.

Seja agora $\mathscr{R}$ um tubo em $\mathscr{H}_0$, temos que os objetos de $\mathscr{R}$ que estão também em $E^\perp$ têm comprimento finito e formam um tubo de posto $n_0 - 1$. Então por hipótese de indução, temos que $E^\perp$ é derivadamente equivalente à alguma coh$\mathbb{Y}$. Então existe um objeto inclinante T em $E^\perp$, com $T \in (E^\perp)_\infty$, tal que $\mathrm{End}(T)^{op} = C$ é uma álgebra canônica. Como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,E) \simeq \mathrm{DHom}_{\mathscr{H}}(\tau^{-1}E, T) = 0$, uma vez que T está em $(E^\perp)_\infty$, segue do teorema 3.6 que $E \oplus T$ é um objeto inclinante em $\mathscr{H}$.

Pela proposição 3.11 temos que $\mathrm{End}(T \oplus E)^{op} \simeq C[\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,M)]$ onde

$$0 \to \tau E \to M \to E \to 0$$

é sequência quase-cindida em $\mathscr{H}$. Como T está em $(E^\perp)_\infty$ temos que $\mathscr{T} \subset \mathrm{Fac}T$, onde $\mathscr{T}$ é o tubo de M, onde M está na boca do tubo. Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,\_) : \mathrm{Fac}T \to \mathrm{mod}C$, que vimos anteriormente ser fiel e pleno, temos que $\mathscr{T}$ é levado em um tubo com $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,M)$ na boca. Então segue de [17] que $C[\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,M)]$ é derivadamente equivalente à alguma coh$\mathbb{X}$, e consequentemente, $\mathscr{H}$ também. Logo provamos então que $\mathscr{D}^b(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{D}^b(\mathrm{coh}\mathbb{X})$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ASSEM, I. *Algébres et modules: cours et exercices.* Enseignement des Mathématiques. Masson, 1997.

[2] ASSEM, I., SIMSON, D., AND SKOWRONSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory.* Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press, 2006.

[3] AUSLANDER, M., REITEN, I., AND SMALØ, S. O. *Representation theory of Artin algebras*, vol. 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] CAPPA, J. A., ASSEM, I., PLATZECK, M. I., AND VERDECCHIA, M. *Modulos inclinantes y algebras inclinadas.* Notas de álgebra y análisis. INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur, 2008.

[5] CHEN, X.-W., AND KRAUSE, H. Introduction to coherent sheaves on weighted projetive lines. `http://arxiv.org/abs/0911.4473v3`. acessado em 16/06/2013.

[6] GREEN, E., AND HUISGEN-ZIMMERMANN, B. *Trends in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras: 1997 Joint Summer Research Conference on Trends in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, July 20-24, 1997, Seattle, Washington.* Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[7] HAPPEL, D. Quasitilted algebras. In *Algebras and modules, I (Trondheim, 1996)*, vol. 23 of *CMS Conf. Proc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 55–82.

[8] HAPPEL, D. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math. 144*, 2 (2001), 381–398.

[9] HAPPEL, D., AND REITEN, I. Directing objects in hereditary categories. In *Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle, WA, 1997)*, vol. 229 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 169–179.

[10] HAPPEL, D., AND REITEN, I. Hereditary categories with tilting object. *Math. Z. 232*, 3 (1999), 559–588.

[11] HAPPEL, D., AND REITEN, I. Hereditary abelian categories with tilting object over arbitrary base fields. *J. Algebra 256*, 2 (2002), 414–432.

[12] HAPPEL, D., REITEN, I., AND SMALØ, S. O. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc. 120*, 575 (1996), viii+ 88.

[13] HÜGEL, L., HAPPEL, D., AND KRAUSE, H. *Handbook of Tilting Theory*. No. v. 13 in Handbook of tilting theory. Cambridge University Press, 2007.

[14] HUYBRECHTS, D. *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, 2006.

[15] LENZING, H. *Hereditary Categories Lectures 1 and 2*. Advancede ICTP-school on Representation Theory and Related Topics, 2006.

[16] LENZING, H., AND DE LA PEÑA, J. A. Wild canonical algebras. *Math. Z. 224*, 3 (1997), 403–425.

[17] LENZING, H., AND MELTZER, H. Tilting sheaves and concealed-canonical algebras. In *Representation theory of algebras (Cocoyoc, 1994)*, vol. 18 of *CMS Conf. Proc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 455–473.

[18] RINGEL, C. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1984.

[19] SIMSON, D., AND SKOWRONSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 3, Representation-infinite Tilted Algebras*. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press, 2007.

Índice Remissivo