UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Yohny Ferney Calderón Henao

Um estudo sobre as álgebras hereditárias por partes

Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Yohny Ferney Calderón Henao

Um estudo sobre as álgebras hereditárias por partes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Curitiba, 2013.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 50ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos dezenove dias do mês de julho de 2013, no Anfiteatro B, Prédio das PCs, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Edson Ribeiro Álvares, a Banca Examinadora para a quinquagésima Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos, da Universidade de São Paulo, Profa. Dra. Paula Olga Gneri, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, e o Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às onze horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **YOHNY FERNEY CALDERÓN HENAO** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "UM ESTUDO SOBRE AS ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS POR PARTES". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 19 de julho de 2013.

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Presidente

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos
Titular

Paula Olga Gneri

Profa. Dra. Paula Olga Gneri
Titular

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **YOHNY FERNEY CALDERÓN HENAO** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 19 de julho de 2013.

Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvares
Presidente

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos
Titular

Paula Olga Gneri

Profa. Dra. Paula Olga Gneri
Titular

Agradecimentos

Primeiro de tudo quero agradecer a Deus por ter me dado a vida, saúde e sabedoria para alcançar meus objetivos.

A meus pais Ivan Calderón Gallego e Maria Lucila Henao pelos quais eu tenho uma grande admiração pelos valores que me ensinaram, por sempre manterem a unidade da família e lutar incansavelmente por minhas metas, obrigado por seu apoio incondicional na minha formação profissional.

Agradeço a minha namorada Falconery Leon Doria pela motivação, compressão e apoio incondicional neste projeto.

Agradeço a meus irmãos, meus sobrinhos pela alegria e confiança que me brindam cada dia.

Agradeço a Professor Edson Ribeiro Alvares por seu grande apoio, paciência, dedicação e seu empenho em me orientar no mestrado. Eu também agradeço a todos aqueles que participaram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná (PPGMA-UFPR) pela qualidade acadêmica e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

Com o propósito de entender as álgebras hereditárias por partes, estudamos os artigos de Happel-Zacharia [HZ10] e Happel-Reiten-Smalø [HRS96], para isso, apresentamos os conceitos da dimensão global forte de uma álgebra de dimensão finita, a categoria de homotopia e a categoria derivada. A importância de estudar as álgebras hereditárias por partes é porque elas fornecem propriedades homológicas da categoria de módulos sobre a álgebra.

Nos três capítulos iniciais apresentamos as noções básicas para entender o teorema que carateriza as álgebras hereditárias por partes, assim como as $F-$ partes de uma álgebra hereditária por partes e no capítulo quatro demonstraremos que uma álgebra é hereditária por partes se, e somente se, a dimensão global forte é finita. Por fim, no capítulo cinco provaremos algumas propriedades homológicas das $F-$partes que são subcategorias plenas na categoria de módulos sobre uma álgebra de dimensão global forte finita.

Palavras-chave: álgebra hereditária por partes, dimensão global forte, categorias hereditárias, categoria derivada.

Abstract

In order to understand the piecewise hereditary algebras , we studied the articles of Happel-Zacharia [HZ10] and Happel-Reiten-Smalø [HRS96], for this, we present the concepts of strong global dimension of a finite dimensional algebra, the category of homotopy and the derived category. The importance of studying the piecewise hereditary algebras is because they provide homological properties of the category of modules over the algebra.

In the three opening chapters we introduce the basic notions to understand the theorem featuring of a piecewise hereditary, as well as $F-$pieces of a piecewise hereditary algebras and in fourth chapter we demonstrate that an piecewise hereditary algebras if and only if a strong global dimension is finite. Finally, in fifth chapter five we prove some homological properties of $F-$pieces that are full subcategories in category of modules over an algebra of finite strong global dimension.

Keywords: piecewise hereditary algebras, strong global dimension, hereditary categories, derived category.

Sumário

Introdução

As álgebras hereditárias por partes são as álgebras cuja categoria derivada limitada, é derivadamente equivalente a uma categoria derivada limitada de uma categoria abeliana hereditária, isto é, existe uma equivalência triangulada entre estas categorias derivadas. Sabemos que a categoria derivada de uma álgebra de dimensão global finita é equivalente como categoria triangulada a categoria de homotopia da categoria de complexos de objetos projetivos da categoria de módulos desta álgebra. Se A é uma álgebra de dimensão global finita, a representação de um A-módulo indecomponível na categoria de homotopia é sua resolução projetiva minimal. Podemos definir nesta categoria de homotopia uma função que nos dá o comprimento dos complexos indecomponíveis. Desta forma, Ringel definiu (em comunicações pessoais) a dimensão global forte de uma álgebra como sendo o supremo do comprimento de todos os complexos indecomponíveis da categoria de homotopia. Desta forma podemos relacionar a dimensão global com a dimensão global forte.

O conceito de dimensão global forte generaliza o conceito de dimensão global e contribui para a classificação das álgebras hereditárias por partes. Em 2004, Skowronski, Kerner, Yamagata e Zacharia deram a primeira contribuição neste sentido. Provaram que as álgebras de radical quadrado zero, são hereditárias por partes se, e somente se, a dimensão global forte é finita. Em 2007 Happel e Zacharia provaram esta equivalência sem a hipótese de ser radical quadrado zero.

Nesta dissertação apresentaremos um estudo das álgebras hereditárias por partes. No capítulos um e dois, apresentaremos os conceitos básicos para entender os demais capítulos. No capítulo três, definiremos $\Bbbk-$álgebras hereditárias e mostraremos que se uma subcategoria plena da categoria de módulos sobre uma $\Bbbk-$álgebra hereditária é fechada para extensões, fechada para somandos diretos e contém um ciclo, então a subcategoria contém um módulo indecomponível tal que o espaço de endomorfismo não é isomorfos corpo. No capítulo quatro apresentaremos a definição de dimensão global forte e demonstraremos o seguintes resultados: uma álgebra é hereditária por partes se, e somente se, a dimensão global forte é finita. Além disso, apresentaremos propriedades do complexo que assume a dimensão global forte. Isto é, dado Λ uma álgebra de dimensão global forte n, suponhamos que o complexo indecomponível em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ que assume a dimensão global forte tem a seguinte forma

$$X^\bullet : \qquad \cdots 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{e^0} P^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{n-1} \xrightarrow{e^{n-1}} P^n \longrightarrow 0 \cdots$$

onde $P^0 \neq 0$ e $P^n \neq 0$, então demonstraremos que $H^n(X^\bullet) \neq 0$, $Hom_\Lambda(Coker(e^{n-1}), \Lambda) = 0$ e e^0 é injetiva. Se a dimensão global forte é igual à dimensão global, então existe um complexo indecomponível de comprimento maximal na categoria $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ tal que a cohomologia é diferente de zero exatamente em um grau.

No capítulo cinco apresentaremos um teorema de Happel e Zacharia [HZ10], que é o resultado principal da dissertação. Neste teorema se estuda as propriedades homológicas das $F-$partes de uma álgebra hereditária por partes, isto é, dada Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, existe $F : \mathcal{D}^b(\Lambda) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ uma equivalência normalizada onde $\mathcal{H}$ é uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária, tal que para todo $\Lambda-$módulo indecomponível X temos que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^r \mathcal{H}[i]$ para algum $r \geq 0$, para $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$ definimos $\mathcal{U}_i$ como a subcategoria plena de $mod\ \Lambda$ tal que $F(X) \in \mathcal{H}[i]$ onde X é um $\Lambda-$módulo indecomponível. A subcategoria $\mathcal{U}_i$ é chamada de $F-$partes. O fecho aditivo de $\mathcal{U}_i$ é denotado por $\tilde{\mathcal{U}}_1$. As propriedades homológicas estão no seguinte teorema.

Teorema Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathcal{U}}_i$ para $i \in \{0, 1, ..., r\}$. Então:

(i) $\tilde{\mathcal{U}}_i$ é fechada para extensões para todo $i \in \{0, 1, ..., r\}$, $\tilde{\mathcal{U}}_0$ é fechado para submódulos e $\tilde{\mathcal{U}}_r$ é fechado para quocientes.

(ii) Se $X \in \tilde{\mathcal{U}}_i$, então $dp(X) \leq i + 1$ e $di(X) \leq r - i + 1$.

(iii) Sejam $X \in \tilde{\mathcal{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathcal{U}}_j$. Se $t < i - j$ ou $t > i - j + 1$, então $Ext^t_\Lambda(X, Y) = 0$.

(iv) Se $X \in \tilde{\mathcal{U}}$ é indecomponível e $Ext^1_\Lambda(X, X) = 0$, então $End(X) \cong \Bbbk$ e $Ext^k_\Lambda(X, X) = 0$ para todo $i \geq 2$.

(v) Sejam S e $\bar{S}$ módulos simples, então existe no máximo um $t \geq 0$ tal que $Ext^t_\Lambda(S, \bar{S}) \neq 0$.

(vi) Cada $\tilde{\mathcal{U}}_i$ contém um $\Lambda-$módulo simples.

(vii) Se $\mathscr{C}$ é uma subcategoria de $\tilde{\mathscr{U}}_i$ fechada por extensões, fechada para somando diretos e que contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um $\Lambda-$módulo indecomponível X tal que $End_\Lambda(X) \ncong \mathbb{k}$.

(viii) Seja $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ indecomponível. Se $End X \neq \mathbb{k}$, então X tem um submódulo $U \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e um módulo quociente $V \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ com a seguinte propriedade $Ext^1_\Lambda(U,U) \neq 0$ e $Ext^1_\Lambda(V,V) \neq 0$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos e algumas propriedades algébricas que usaremos ao longo deste trabalho. Dado $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado dizemos que um anel A tem estrutura de $\Bbbk-$espaço vetorial quando a ação do anel é compatível com a ação do corpo, isto é, $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$ para todo $\lambda \in \Bbbk$ e para todo $a,\ b\ \in A$. Quando o anel A cumpre essa propriedade dizemos que A é uma $\Bbbk-$álgebra. Dada uma $\Bbbk-$álgebra A, nos perguntamos que espaços vetoriais tem ações compatíveis com a ação do anel e do corpo, os espaços vetoriais que cumprem essa propriedade são chamados $A-$módulos. Destes módulos os mais importantes são os módulos projetivos, injetivos e simples. Pois estes módulos nos permitem calcular a dimensão projetiva e injetiva de um módulo. Além disso, calculamos a dimensão global de uma álgebra como o supremo das dimensões projetivas. Apresentaremos um teorema que nos permite calcular a dimensão global de uma álgebra como o supremo das dimensões projetivas, o supremo das dimensões injetivas ou o supremo das dimensões projetivas dos módulos simples. Também apresentamos o Teorema de Jordan-Hölder que nos permite dar a definição de comprimento de um módulo, conceito que é muito importante para a demostração do teorema principal deste trabalho.

Para entender os exemplos no capítulo três e quatro precisamos da definição de aljava de Auslander-Reiten, isto é, dado uma aljava, se define a álgebra de caminhos sobre a aljava, na qual a categoria de módulos tem uma representação pela aljava de Auslander-Reiten para um tipo especial de aljava. Destaca-se o aljava de Auslander-Reiten, que ilustra em forma de diagrama as informações contidas nas sequências de Auslander-Reiten, definidas por Maurice Auslander e Idun Reiten em [ARS95]. Além disso, os vértices da aljava representam as classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis.

1.1 Álgebras e módulos

Nesta seção daremos as definições de álgebra, módulo sobre uma álgebra, módulos projetivos e injetivos, módulos simples e comprimento de um módulo.

Definição 1.1.1. *Seja $\Bbbk$ um corpo. Uma $\Bbbk-$**álgebra** é um anel A que tem um elemento unitário e possui estrutura de $\Bbbk-$espaço vetorial compatível com o produto do anel. Isto é, $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$ para todo $\lambda \in \Bbbk$ e para todo $a,\ b\ \in A$.*

Algumas propriedade importantes das $\Bbbk-$álgebras estão em [ASS06, pág. 1-6]

Para entender as $F-$partes de uma álgebra hereditária por partes, é preciso saber a definição de modulo sobre uma álgebra. Para isso daremos a seguinte definição.

Definição 1.1.2. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra e M um espaço vetorial sobre $\Bbbk$. Dizemos que M é um $A-$**módulo a direita** sobre A, quando existe uma operação binária $*: M\times A \longrightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $(x+y)*a = x*a + y*a$.

(ii) $x*(a+b) = x*a + x*b$.

(iii) $x*(ab) = (x*a)*b$.

(iv) $x*1_A = x$.

(v) $(x\lambda)*a = x*(a\lambda) = (x*a)\lambda$, *para todo $x, y \in M$, todo $a, b \in A$ e para todo $\lambda \in \Bbbk$.*

Em [ASS06, pág, 7-12] estão alguns teoremas importantes dos módulos sobre um anel.

Apresentamos também a definição de $A-$módulo a esquerda.

Definição 1.1.3. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra e M um espaço vetorial sobre $\Bbbk$. Dizemos que M é um $A-$**módulo a esquerda** sobre A, quando existe uma operação binária $*: A\times M \longrightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $a*(x+y) = a*x + a*y$.

(ii) $(a+b)*x = a*x + b*x$.

(iii) $(ab)*x = a*(b*x)$.

(iv) $1_A * x = x$.

(v) $a*(x\lambda) = a*(x\lambda) = (a*x)\lambda$, *para todo* $x, y \in M$, *todo* $a, b \in A$ *e para todo* $\lambda \in \Bbbk$.

Definição 1.1.4. *Um* $A-$*módulo* M *é de* ***dimensão finita*** *quando a dimensão de* M *como* $\Bbbk-$*espaço vectorial é finita.*

Dado M' um $\Bbbk-$subespaço vectorial de um $A-$módulo M, dizemos que M' é um $A-$**submódulo** de M quando $m'a \in M'$ para todo $a \in A$ e todo $m' \in M'$ e o denotamos por $N \subseteq M$.

O seguinte teorema é necessário para demostração do item (viii) do teorema 5.1.1 que é o resultado principal da dissertação.

Teorema 1.1.1. *Sejam* A *uma* $\Bbbk-$*álgebra de dimensão finita e* $f : M \longrightarrow M$ *um homomorfismo, onde* M *é um* $A-$*módulo de dimensão finita. Se* $dim_{\Bbbk}(Im(f)) = dim_{\Bbbk}(Im(f^2))$, *então* $M = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Demonstração: Pelo Teorema da dimensão tem-se que

$$dim_{\Bbbk}(M) = dim_{\Bbbk}(ker(f)) + dim_{\Bbbk}(Im(f))$$
$$dim_{\Bbbk}(M) = dim_{\Bbbk}(ker(f^2)) + dim_{\Bbbk}(Im(f^2))$$

por hipótese tem-se que $dim_{\Bbbk}(Im(f)) = dim_{\Bbbk}(Im(f^2))$, de onde se obtêm que $dim_{\Bbbk}(ker(f)) = dim_{\Bbbk}(Ker(f^2))$ e como $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$, então temos que $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Vejamos que $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$. Seja $x \in Im(f) \cap Ker(f)$, portanto existe $y \in M$ tal que $x = f(y)$. Assim temos que $0 = f(x) = f^2(y)$, isto é, $y \in Ker(f^2) = Ker(f)$. De onde se conclui que $x = f(y) = 0$. Assim, temos que $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

Seja $m \in M$, como $Im(f) = Im(f^2)$, então existe $n \in M$ tal que $f(m) = f^2(n)$. Vejamos que $m - f(n) \in Ker(f)$, isto é, $f(m - f(n)) = f(m) - f^2(n) = 0$. Além disso, temos que m se escreve da seguinte forma $m = m - f(n) + f(n)$. De onde concluímos que $M = Ker(f) \oplus Im(f)$. □

1.1.1 Módulos projetivos e injetivos

Quando queremos estudar a categoria de módulos sobre uma álgebra, os conceitos de modulo projetivo e injetivo são os mais importantes.

Definição 1.1.5. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra. Um $A-$módulo P é chamado* ***projetivo*** *quando para qualquer epimorfismo $\phi : N \to L$ e para qualquer homomorfismo $g : P \to L$ existe $h : P \to N$ tal que $\phi h = g$. Isto é, existe $h : P \to N$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ N \arrow[r, "\phi"'] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sejam $M_1, M_2, \cdots, M_n$ módulos sobre uma $\Bbbk-$álgebra A, então $\bigoplus_{i_1}^{n} M_i$ é um $A-$módulo projetivo se, e somente se, cada M_i é um A-módulo projetivo. Esta propriedade dos módulos projetivos fornece uma lista completa dos módulos projetivos sobre uma álgebra A. A demonstração está em [CE99].

Definição 1.1.6. *Seja A uma $\Bbbk-$ álgebra. Um $A-$módulo I é dito* **injetivo** *quando para qualquer monomorfismo $f : N \to L$ e para qualquer homomorfismo $g : N \to I$ existe $h : L \to I$ tal que $hf = g$. Isto é, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Temos que o produto direto de módulos é injetivo se, e somente se, cada um dos fatores é injetivo. A demonstração deste fato esta em [CE99].

Para estudar as propriedades homológicas de uma álgebra precisamos do conceito de resolução projetiva minimal. Para isso, o conceito de cobertura projetiva é necessário, mas para definir a cobertura projetiva é preciso definir o que é um submódulo supérfluo e o que é um morfismo minimal na categoria de módulos.

Definição 1.1.7. *Sejam A uma $K-$álgebra e M um $A-$módulo.*

(a) Seja L um $A-$submódulo de M dizemos que L é ***supérfluo*** *quando para todo $A-$submódulo X de M temos: Se $M = L + X$, então $X = M$.*

(b) Seja $f : M \longrightarrow N$ um epimorfismo de $A-$módulos dizemos que f é ***minimal*** *quando o $Ker(f)$ é um $A-$submódulo supérfluo de M.*

(c) Um epimorfismo $f : P \longrightarrow M$ de $A-$módulos é chamado de ***cobertura projetiva*** *de M quando P é um $A-$módulo projetivo e f é um epimorfismo minimal.*

Lema 1.1.1. *Um epimorfismo* $f : P \longrightarrow M$ *é uma cobertura projetiva de um* $A-$*módulo* M *se, e somente se,* P *é um* $A-$*módulo projetivo e para todo* $A-$*homomorfismo* $g : N \longrightarrow P$ *se* fg *é sobrejetor, então* g *é sobrejetor.*

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 28]. □

1.1.2 Módulos simples

Dada um $\mathbb{k}-$álgebra de Artin, nos perguntamos se existem $A-$módulos não nulos tal que não tem submódulos próprios. A resposta é sim e eles são chamados módulos simples.

Definição 1.1.8. *Sejam* $\mathbb{k}$ *um corpo algebricamente fechado e* A *uma* $\mathbb{k}-$*álgebra de dimensão finita. Um* $A-$*módulo* S *não nulo é chamado* $A-$***módulo simples*** *quando os únicos submódulos são zero e* S*.*

O seguinte Lema é muito importante pois fornece informações acerca dos morfismo entre os módulos simples.

Lema 1.1.2 (Lema de Schur)**.** *Sejam* K *um corpo algebricamente fechado e* A *uma* $\mathbb{k}-$*álgebra de dimensão finita. Sejam* $A-$*módulos* S *e* $\bar{S}$*, e* $f : S \longrightarrow \bar{S}$ *um homomorfismo não nulo.*

(a) Se S *é um* $A-$*módulo simples, então* f *é monomorfismo.*

(b) Se $\bar{S}$ *é um* $A-$*módulo simples, então* f *é epimorfismo.*

(c) Se S *e* $\bar{S}$ *são* $A-$*módulos simples, então* f *é isomorfismo.*

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 13-14]. □

Proposição 1.1.1. *Seja* Λ *uma álgebra básica de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado* $\mathbb{k}$ *e* $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ *a descomposição de* 1 *como soma de idempotentes primitivos ortogonais. Seja* $P_i = \Lambda e_i$ *e* $S_i = P_i / Rad(P_i)$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, n$*. Então para um par de números* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *os seguintes valores são iguais.*

(a) $dim_{\mathbb{k}}(\frac{e_j Rad(\Lambda) e_i}{e_j Rad^2(\Lambda) e_i})$.

(b) A multiplicidade dos módulos simples S_j *em* $Rad(P_i)/Rad^2(P_i)$.

(c) A multiplicidade de P_j *em* P *onde* $P \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$ *é a resolução projetiva minimal de* S_i*.*

(d) $dim_{\Bbbk}(Ext^1_{\Lambda}(S_i, S_j))$.

Demonstração: Ver [ARS95, pág. 68]. □

1.1.3 Comprimento de um módulo

Suponhamos que A é uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e M é um $A-$módulo, então existe uma cadeia $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_m = M$ de submódulos de M tal que M_{j+1}/M_j é um $A-$módulo simples para todo $j = 0, 1, \cdots, m-1$ (ver a demonstração deste fato em [AF92], [DK94] e [PIE82]). Esta cadeia é chamada **série de composição** de M e os módulos M_1/M_0, M_2/M_1, $\cdots$, M_m/M_{m-1} são chamados **fatores composição** de M.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Jordan- Hölder)**.** *Se A é uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_m = M,$$
$$0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n = M$$

são duas séries de composição de um $A-$módulo M, então $m = n$ e existe uma permutação σ de $\{0, 1, 2, \cdots, m\}$ tal que, para todo $j \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ existe um isomorfismo $M_{j+1}/M_j \cong N_{\sigma(j+1)}/N_{\sigma(j)}$.

Demonstração: Ver ([AF92], [DK94] e [PIE82]). □

Pelo Teorema de Jordan-Hölder vemos que o comprimento da cadeia de composição é único e só depende do módulo.

Definição 1.1.9. *Sejam A uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e M um $A-$módulo. O número m de módulos na série de composição $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_m = M$ de M é chamado de **comprimento** de M e é denotado por $\ell(M)$.*

1.2 Dimensões homológicas

Nesta seção daremos as definições de dimensão projetiva e injetiva de um módulo sobre uma álgebra e a definição de dimensão global, apresentaremos alguns teoremas importantes para calcular as dimensões homológicas de uma álgebra.

1.2.1 Resolução projetiva e injetiva

Seja $\mathbb{k}$ um corpo e A uma $\mathbb{k}-$álgebra. Dado um $A-$módulo M existe um complexo exato da seguinte forma

$$\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é um $A-$módulo projetivo. Definimos a **resolução projetiva** de M como o complexo

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \longrightarrow 0 .$$

Dado um $A-$módulo M existe um complexo exato da seguinte forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h_0} I_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{m-1} \xrightarrow{h_{m-1}} I_m \longrightarrow \cdots$$

onde cada I_i é um $A-$módulo injetivo e $h_0 : M \to I_0$ é a envolvente injetiva de M. Definimos a **resolução injetiva** de M como o complexo

$$0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{m-1} \xrightarrow{h_{m-1}} I_m \longrightarrow \cdots$$

Para ver la construção dos complexos exatos (ver [ASS06, pág. 26-28] e [WEI94, pág. 33-43]).

A **dimensão projetiva** de um $A-$módulo M é um número inteiro não negativo denotado por $dp(M) = m$ tal que existe uma resolução projetiva

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

de M de comprimento m e M não tem resolução projetiva de comprimento $m-1$. Se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, dizemos que a dimensão projetiva de M é infinita.

A **dimensão injetiva** de um $A-$módulo N é um número inteiro não negativo denotado por $di(N) = m$ tal que existe uma resolução injetiva

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{h^0} I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{m-1} \xrightarrow{h^m} I^m \longrightarrow 0$$

de N de comprimento m e N não tem resolução injetiva de comprimento $m-1$. Se N não admite uma resolução injetiva de comprimento finito, dizemos que a dimensão injetiva de

M é infinita.

Vejamos alguns teoremas importantes das dimensões projetivas e dimensões injetivas. As demonstrações dos teoremas estão em [ASS97].

Teorema 1.2.1. *Seja A uma $\mathbb{k}-$álgebra, M um $A-$módulo e $n \geq 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $dp(M) \leq n$.
2. $Ext_A^k(M,N) = 0$ *para todo* $A-$*módulo* N *e para todo* $k > n$.
3. $Ext_A^{n+1}(M,N) = 0$ *para todo* $A-$*módulo* N.
4. *Na sequência* $0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *se* P_i *é um* $A-$*módulo projetivo para todo* $i \in \{0,1,...,n-1\}$, *então* L_{n-1} *é um* $A-$*módulo projetivo.*

Corolário 1.1. *Seja* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *uma sequência exata curta, então*

1. $dp(L) \leq sup\left\{dp(M), dp(N) - 1\right\}$.
2. $dp(M) \leq sup\left\{dp(N), dp(L)\right\}$.
3. $dp(N) \leq sup\left\{dp(M), dp(L) + 1\right\}$.

Teorema 1.2.2. *Sejam A uma $\mathbb{k}-$álgebra, M um $A-$módulo e $n \geq 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $di(M) \leq n$.
2. $Ext_A^k(N,M) = 0$ *para todo* $A-$*módulo* N *e para todo* $k > n$.
3. $Ext_A^{n+1}(N,M) = 0$ *para todo* $A-$*módulo* N.
4. *Na sequência* $0 \to M \to I^0 \to \cdots \to I^{n-1} \to L^{n-1} \to 0$ *se* I^i *é um* $A-$*módulo injetivo para todo* $i \in \{0,1,...,n-1\}$, *então* L^{n-1} *é um* $A-$*módulo injetivo.*

1.2.2 Dimensão global

Definição 1.2.1. *Sejam* $\Bbbk$ *um corpo e* A *uma* $\Bbbk-$*álgebra de dimensão finita. Seja*

$$d = Sup\left\{dp(M) | M \text{ é um } A-\text{módulo}\right\}.$$

O número d *é chamado* ***dimensão global*** *da álgebra* A *e é denotado por* $gl.dimA$.

Teorema 1.2.3. *Sejam* A *uma* $\Bbbk-$*álgebra,* M *um* $A-$*módulo e* $n \geq 0$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $gl.dimA \leq n$.
2. *Para todo* $A-$*módulo* M *temos que* $dp(M) \leq n$.
3. *Para todo* $A-$*módulo* N *temos que* $di(N) \leq n$.

Teorema 1.2.4. *Seja* A *uma* $\Bbbk-$*álgebra de Artin, então*

$$gl.dimA = sup\left\{dp(S) | S \text{ é um } A-\text{módulo simples}\right\}$$

1.3 Teoria de Auslander-Reiten

Seja A uma $\Bbbk-$álgebra sobre um corpo algebricamente fechado, denotamos por $mod\ A$ a categoria formada pelos A-módulos finitamente gerados, por $ind\ A$ a subcategoria plena de $mod\ A$ que consiste de um representante para cada classe de $A-$módulos indecomponíveis, lembremos que um $A-$módulo é indecomponível se não se escreve como suma direta de dois $A-$módulos. Apresentamos nesta seção apenas alguns de seus resultados, que podem ser encontrados com maiores detalhes em ([ARS95], [ASS06]).

1.3.1 Morfismos Irredutíveis e Sequências de Auslander-Reiten

Sejam A uma $\Bbbk-$álgebra e L, M e N $A-$módulos. Um morfismo $f : L \to M$ é chamado **minimal à esquerda** quando para todo $h \in End(M)$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & M \\ & M \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

então h é um isomorfismo.

O morfismo $f : L \to M$ é chamado **minimal à direita** quando para todo $h \in End(L)$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & M \\ & L \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

então h é um isomorfismo.

O morfismo f é chamado **quase cindido à esquerda** quando ele satisfaz as seguintes propriedades :

(a) Não é um monomorfismo que cinde.

(b) Para todo morfismo $u : L \to U$ que não é monomorfismo que cinde, existe $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$, isto é, existe u' tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & M \arrow[dl, "u'"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

e f é **minimal quase cindido à esquerda** se é minimal e quase cindido à esquerda.

O morfismo g é chamado **quase cindido à direita** quando cumpre:

(a) não é um epimorfismo que cinde

(b) Para todo morfismo $v : V \to N$ que não é epimorfismo que cinde, existe $v' : V \to M$ tal que $gv' = v$, isto é, existe v' tal que o seguinte diagrma comuta.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "v'"'] \arrow[dr, "v"] & \\ L \arrow[rr, "g"] & & M \end{tikzcd}$$

O morfismo f e chamado **minimal quase cindido à direita** quando é minimal e quase cindido à direita.

Proposição 1.3.1. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra.*

(a) Se $f : L \to M$ é um morfismo de $A-$módulos e $f' : L \to M'$ é um morfismo quase cindido a esquerda, então existe um isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $f' = hf$.

Se $g : M \to N$ é um morfismo de $A-$módulos e $g' : M' \to N$ é um morfismo quase cindido a direita, então existe um isomorfismo $h : M \to M'$ tal que $g = g'h$.

Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é chamado **irredutível** quando satisfaze as seguintes propriedades:

(a) O morfismo f não é monomorfismo nem epimorfismo que cinde.

(b) Para todo $f_1 : X \to N$ e $f_2 : M \to X$ tal que $f = f_1 f_2$, tem-se que f_1 é um epimorfismo que cinde ou f_2 é um monomorfismo que cinde.

Teorema 1.3.1. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra.*

(a) Seja L um A-módulo indecomponível. Um morfismo $f : L \to M$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $f' : L \to M'$ tal que $[f\ f']^t : L \to M \oplus M'$ é minimal quase cindido à esquerda, onde $[f\ f']^t(l) := (f(l), f'(l))$.

(b) Seja N um A-módulo indecomponível. Um morfismo $g : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $g' : M' \to N$ tal que $[g\, g'] : M \oplus M' \to N$ é minimal quase cindido à direita, onde $[g\ g'][m\ m']^t = g(m) + g'(m')$.

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 103] □

Agora definamos sequência de Auslander-Reiten, isto é, uma sequência exata curta de A-módulos

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é chamada de **Auslander-Reiten** (ou quase cindida) quando f é um morfismo minimal quase cindido à esquerda e g é minimal quase cindido à direita.

Da definição temos que toda sequência de Auslander-Reiten não cinde. As sequências de Auslander-Reiten estão determinadas de forma única a menos de isomorfismo por L ou por N, isto é, dadas $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N' \longrightarrow 0$ duas sequências de Auslander-Reiten. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) As duas sequências são isomorfas.

(b) $L \cong L'$.

(c) $N \cong N'$.

A demonstração desta observação está em [ASS06, pág. 105]. Assim pela observação anterior, enunciaremos uma série de resultado que caracterizam as sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 1.3.2. *Seja* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ *uma uma sequência exata curta. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A sequência é de Auslander-Reiten.

(ii) L é indecomponível e g é um morfismo quase cindido à direita.

(iii) f é um morfismo minimal quase cindido à esquerda.

(iv) g é um morfismo minimal quase cindido à direita.

(v) L e N são indecomponíveis, e f e g são irredutíveis.

Demonstração: Ver ([ARS95, pág. 144 e 167], [ASS06, pág. 105]). □

1.3.2 Translações de Auslander-Reiten

Nesta subseção enunciaremos algumas definições e alguns teoremas para garantir a existência de sequências de Auslander-Reiten na categoria $mod\ A$, para uma $\mathbb{k}-$álgebra de dimensão finita.

Sejam M um A-módulo e $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ sua presentação projetiva minimal, ou seja, $P_0 \to M$ e $P_1 \to Ker p_0$ são coberturas projetivas. Na sequência $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ aplicamos o funtor $Hom_A(-,A)$, e obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom_A(M,A) \longrightarrow Hom_A(P_0,A) \xrightarrow{p_1^*} Hom_A(P_1,A) \longrightarrow Coker(p_1^*) \longrightarrow 0$$

onde $p_1^* = Hom_A(p_1,A)$. Ao cokernel de p_1^* chamamos de transposta de M e denotamos por TrM. Temos que TrM é único a menos de isomorfismo(ver [ASS06]).

Proposição 1.3.2. *Sejam M um A-módulo indecomponível e TrM sua transposta. Temos as seguintes propriedades para a transposta.*

(i) M é projetivo se, e somente se, $TrM = 0$.

(ii) Se M não é projetivo, então TrM é indecomponível e $Tr(TrM) \cong M$.

(iii) Se M e N são indecomponíveis não projetivos, então $M \cong N$ se, e somente se, $TrM \cong TrN$

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 108-109]. □

Considere dois A-módulos M e N. Definiremos dois subgrupos do grupo de homomorfismo de M para N. Denotamos por $P(M,N)$ o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ que é o conjunto dos morfismos de M para N que se fatoram através de módulos projetivos, isto é, $f \in P(M,N)$ quando existem um $A-$módulo projetivo P e morfismos $g : M \to P$ e $h : P \to N$ tais que $f = hg$.

Dualmente, denotamos por $I(M,N)$ o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ que é o conjunto dos morfismos de M para N que se fatoram através de módulos injetivos. isto é, $f \in P(M,N)$ quando existem I um $A-$módulo injetivo, e morfismos $g : M \to I$ e $h : I \to N$ tais que $f = hg$.

Definimos então a categoria $\underline{mod}A$ a qual chamaremos de **categoria projetivamente estável**, cujos objetos coincidem com aqueles da categoria $modA$, e morfismos de M para N pertencem a

$$\underline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/P(M,N).$$

Isto é, os morfismo são todos aqueles que não se factoram por módulos projetivos.

Definimos a categoria $\overline{mod}A = modA/I$ que chamaremos **categoria injetivamente estável**, cujos objetos coincidem com aqueles da categoria $modA$ e cujos morfismos pertencem a

$$\overline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/I(M,N).$$

Isto é, são os morfismo que não se factoram por módulos injetivos.

O funtor $Tr : modA \to modA^{op}$ induz um outro funtor

$$Tr : \underline{mod}A \to \underline{mod}A^{op}$$

A dualidade $D : modA \to modA^{op}$ induz uma dualidade $D : \underline{mod}A^{op} \to \overline{mod}A$.

Proposição 1.3.3. *A correspondência $M \longmapsto TrM$ induz uma $\mathbb{k}-$dualidade*

$$Tr : \underline{mod}\ A \to \underline{Hom}\ A^{op}.$$

Demonstração: ver [ASS06, pág. 110-112]. □

Definiremos as translações de Auslander-Reiten como as composições $\tau = DTr$ e $\tau^- = TrD$, onde $D : modA \to modA^{op}$ definido por $D(M) := Hom_A(M,A)$.

Para cada módulo M, τM será chamado de **transladado de Auslander-Reiten** de M, e $\tau^- M$ é chamado de **transladado inverso de Auslander-Reiten** de M.

Lembrando as definições de dimensão projetiva, dimensão injetiva e dimensão global. Temos os seguintes resultados para o Transladado de Auslander-Reiten.

Lema 1.3.1. *Seja M um A-módulo.*

(a) $dp(M) \leq 1$ *se, e somente se,* $Hom_A(DA, \tau M) = 0$.

(b) $di(M) \leq 1$ *se, e somente se,* $Hom_A(\tau^- M, A)$.

Demonstração: Ver [ASS06, pag. 115]. □

Pelo Lema anterior, temos que, para que a dimensão projetiva de um módulo M não exceda 1, é necessário e suficiente que não haja morfismo não nulo de um injetivo para o transladado de M. Dualmente, para que $diM \leq 1$, não deve haver morfismo não nulo de $\tau^- M$ par um módulo projetivo.

O teorema a seguir é o principal dessa seção, e nos garante que existem sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 1.3.3. *(a) Para todo A-módulo indecomponível não projetivo M, existe uma sequência de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(b) Para todo A-módulo indecomponível não injetivo N, existe uma sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^- N \longrightarrow 0$$

Demonstração: Ver [ARS95, pág. 145]. □

Seja M um A-módulo indecomponível não projetivo. Então, existe um morfismo irredutível $f : X \to M$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $f' : \tau M \to X$. Se N um A-módulo indecomponível não injetivo. Então, existe um morfismo irredutível $g : N \to Y$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $g' : Y \to \tau^- N$.

Proposição 1.3.4. *(a) Seja S um A-módulo simples projetivo, não injetivo. Se $f : S \to M$ é irredutível, então M é projetivo.*

(b) Seja S um A-módulo simples injetivo, não projetivo. Se $g : N \to S$ é irredutível, então N é injetivo.

O resultado que enunciamos abaixo nos permite obter exemplos de sequências de Auslander-Reiten. Além disso, é bastante útil na construção do aljava de Auslander-Reiten de uma álgebra.

Proposição 1.3.5. *Seja P um A-módulo indecomponível projetivo-injetivo, não simples. Então, a sequência*

$$0 \longrightarrow rad(P) \xrightarrow{[q\ i]^t} radP/socP \oplus P \xrightarrow{[-j\ p]} P/socP \longrightarrow 0$$

é de Auslander-Reiten, em que i e j são inclusões, e p e q, projeções.

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 124]. □

1.3.3 Aljava de Auslander-Reiten

Nesta subseção apresentamos a construção da aljava de Auslander-Reiten da categoria de módulos de uma álgebra dada de dimensão finita.

Definição 1.3.1. *Seja A uma álgebra de Artin. O radical da categoria $mod\ A$ corresponde, para cada par de A-módulos M e N, definimos o radical do par (M,N) como o seguinte $\Bbbk-$espaço vetorial*

$$rad_A(M,N) = \{f \in Hom_A(M,N) | 1_N - fg \text{ é invertível à direita, para todo } g \in Hom_A(N,M)\}$$

Se $f \in rad_A(M,N)$, então para todo $g \in Hom_A(N,M)$ temos que $1_N - fg$ é um morfismo invertível. Assim, podemos também definir o radical por

$$rad_A(M,N) = \{f \in Hom_A(M,N) | f \text{ não é isomorfismo}\}.$$

Temos que $rad_A(-,-)$ é um bifuntor. Dado n um número natural, podemos definir o $n-$ésimo radical da seguinte forma

$$rad^n_A(M,N) = \left\{\sum_i g_i f_i | g_i \in rad^{n-1}_A(X_i,N),\ f_i \in rad_A(M,X_i), \text{ com } \quad X_i \in indA\right\}$$

e definiremos o radical infinito como

$$rad_A^\infty = \bigcap_{n\geq 1} rad_A^n$$

Observe que pela definição de radical temos que $rad_A^2(M,N) \subseteq rad_A(M,N)$. Se M e N são $A-$módulos indecomponíveis, podemos concluir que um morfismo $f : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $f \in rad_A(M,N)/rad_A^2(M,N)$ ([ARS95, pág. 179]). Dessa forma, definimos o espaço dos **morfismos irredutíveis** de $Hom_A(M,N)$ como

$$Irr(M,N) = rad_A(M,N)/rad_A^2(M,N)$$

Agora apresentamos uma relação entre os morfismos irredutíveis e os morfismos minimais quase cindido.

Proposição 1.3.6. *Seja um $M = \oplus_{i=1}^t M_i^{n_i}$ um A-módulo, com cada M_i indecomponível, dois a dois não isomorfos.*

(a) Seja $f : L \to M$ um morfismo de A-módulos, com L indecomponível, $f = [f_1 \cdots f_t]^t$, em que $f_i = [f_{i1} \cdots f_{in_i}]^t : L \to M_i^{n_i}$. Então, f é minimal quase cindido à esquerda se, e somente se, $f_{ij} \in rad_A(L,M_i)$, e as classes $\overline{f}_{i1}, \cdots, \overline{f}_{in_i}$ módulo $rad_A^2(L,Mi)$ formam uma base para $Irr(L,M_i)$, para todo i. Se existe um A-módulo indecomponível M' tal que $Irr(L,M') \neq 0$, então $M' \cong M_i$, para algum i.

(b) Seja $g : M \to N$ um morfismo de A-módulos, com N indecomponível, $g = [g_1 \cdots g_t]$, en que $g_i = [g_{i1} \cdots g_{in_i}] : M_i^{n_i} \to N$. Então, g é minimal quase cindido à direita se, e somente se, $g_{ij} \in rad_A(M_i,N)$, e as classes $\overline{g}_{i1}, \cdots, \overline{g}_{in_i}$ módulo $rad_A^2(M_i,N)$ formam uma base para $Irr(M_i,N)$ para cada i. Se existe um A-módulo indecomponível M' tal que $Irr(M',N) \neq 0$, então $M' \cong M_i$, para algum i.

Demonstração: Ver[ASS06, pág. 126]. □

Proposição 1.3.7. *Seja*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta em $mod\ A$ onde M e L são indecomponíveis e os M_i são indecomponíveis dois a dois não isomorfos. Escrevendo $f = [f_1 \cdots f_t]^t$ e $g = [g_1 \cdots g_t]$ onde cada

$f_i = [f_{i1} \cdots f_{in_i}]^t : L \to M^{n_i}$ e $g_i = [g_{i1} \cdots g_{in_i}] : M^{n_i} \to N$. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A sequência exata curta cinde.

(b) Para cada i, o morfismo f_{ij} é um elemento do $rad(L, M_i)$, e as classes $\overline{f}_{i1}, \cdots, \overline{f}_{in_i}$ módulo $rad_A^2(L, Mi)$ formam uma base para $Irr(L, M_i)$. E, se existe um A-módulo indecomponível M' tal que $Irr(L, M') \neq 0$, então $M' \cong M_i$, para algum i.

(c) $g_{ij} \in rad_A(M_i, N)$, e as classes $\overline{g}_{i1}, \cdots, \overline{g}_{in_i}$ módulo $rad_A^2(M_i, N)$ formam uma base para $Irr(M_i, N)$ para cada i. E, se existe um A-módulo indecomponível M' tal que $Irr(M', N) \neq 0$, então $M' \cong M_i$, para algum i

A demonstração da proposição anterior segue da proposição 1.3.6. Uma consequência da proposição anterior é que para cada i se tem que

$$dim_{\Bbbk} Irr(L, M_i) = dim_{\Bbbk} Irr(M_i, N).$$

Proposição 1.3.8. *Sejam X e Y A-módulos indecomponíveis.*

(a) Se $\tau X \neq 0$ e $\tau Y \neq 0$, então existe um isomorfismo $\Bbbk$-linear $Irr(\tau X, \tau Y) \cong Irr(X, Y)$.

(b) Se $\tau^- X \neq 0$ e $\tau^- Y \neq 0$, então existe um isomorfismo $\Bbbk$-linear $Irr(\tau^- X, \tau^- Y) \cong Irr(X, Y)$.

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 128]. □

A seguinte definição é a mais importante neste seção, pois ela permite construir a aljava de Auslander-Reiten.

Definição 1.3.2. *Seja A uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. A **aljava de Auslander-Reiten** de A, $\Gamma(modA)$, é definida por:*

(a) Os pontos de $\Gamma(modA)$ são as classes de isomorfismo $[X]$ dos A-módulos indecomponíveis X.

$$[x] := \{Y | Y \text{ é isomorfo a } X\}.$$

(b) Sejam $[M]$ e $[N]$ pontos em $\Gamma(modA)$ correspondentes aos A-módulos indecomponíveis M e N. As flechas $[M] \to [N]$ estão em correspondência biunívoca com os vetores da base do $\Bbbk$-espaço vetorial $Irr(M, N)$.

Para mais informação da aljava de Auslander-Reiten ver ([ASS06], [ARS95]).

Capítulo 2

Categorias

Neste capítulo daremos alguns conceitos importantes para entender o capítulo 3 e 4. Apresentaremos as definições de categoria, subcategoria, categoria abeliana, $\mathbb{k}-$categoria, categoria Krull-Schmidt, categoria triangulada e categorias hereditárias. Na seção dois apresentamos a definição de categoria triangulada para uma categoria aditiva, isto é, dada uma categoria aditiva $\mathscr{A}$ e $T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ um automorfismo, uma sequência $X \to Y \to Z \to T(X)$ é chamada de triângulo na categoria $\mathscr{A}$, destes triângulos temos uma família de triângulos chamados triângulos distinguidos que cumpre os axiomas para ser uma categoria triangulada (ver[GM03, pag. 239-240], [MIL, pag. 45-47]).

Na seção 3 apresentaremos a definição de categoria de complexos([WEI94], [GM03] e [MIL]), isto é, dada uma categoria aditiva $\mathscr{A}$, chamamos de complexo a uma sequência da seguinte forma

$$X^\bullet := \qquad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde $d_X^n d_X^{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e X^k são objetos na categoria $\mathscr{A}$, denotado por $X^\bullet = (X^n, d_X^n)$. A coleção de todos os complexos com os morfismos entre eles é chamado de categoria de complexos e é denotada por $\mathscr{C}(\mathscr{A})$.

Dado um complexo $X^\bullet = (X^n, d_X^n)$ definiremos $H^n(X^\bullet) = Ker(d_X^n)/Im(d_X^{n-1})$, chamada a $n-$ésima cohomologia do complexo $X^\bullet$. Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos a funtor aditivo $H^n : \mathscr{C}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$, dado por $H^n(X^\bullet) = Ker(d_X^n)/Im(d_X^{n-1})$. Por meio de H^n podemos definir uma relação de equivalência no grupo de homomorfismo de $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, isto é, dados

$f^\bullet, g^\bullet \in Hom_{\mathscr{C}(\mathscr{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ dizemos que $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são homotópicos quando $H^n(f^\bullet - g^\bullet) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, com a relação de equivalência se define a categoria de homotopia denotada por $\mathscr{K}(\mathscr{A})$. A categoria de homotopia é uma categoria abeliana e triangulada ver([MIL], [GM03]), na categoria de homotopia se define o conceito de quasi-isomorfismo. E fazendo a localização(ver[GM03] uo [MIL]) de $\mathscr{K}(\mathscr{A})$ com respeito ao conjunto dos quasi-isomorfismo obtemos a categoria derivada de $\mathscr{A}$, denota por $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.
Na seção 4 apresentamos a definição de categoria hereditária, dizemos que uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana $\mathscr{H}$ é hereditária quando para todo X e Y objetos em $\mathscr{H}$ satisfazem que $Hom_{\mathscr{H}}(X, Y)$, $Ext^1_{\mathscr{H}}(X, Y)$ são $\mathbb{k}-$espaços vetoriais de dimensão finita e $Ext^n_{\mathscr{H}}(X, Y) = 0$ para todo $n \geq 2$. Dada uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$, então a categoria derivada limitada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma categoria repetitiva (ver [HHK07]), isto é, $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é o fecho aditivo da união de cópias $\mathscr{H}[t]$.

2.1 Definição de Categoria

Nesta seção daremos os conceitos de categoria, categoria abeliana, subcategoria, subcategoria plena e categoria Krull-Schmidt.

Definição 2.1.1. *uma **categoria** é uma tripla $\mathscr{C} = (Obj(\mathscr{C}), mor(\mathscr{C}), \circ)$, onde $Obj(\mathscr{C})$ é chamada **classe de objetos** de $\mathscr{C}$, $mor(\mathscr{C})$ é chamado **classe de morfismos** de $\mathscr{C}$, e $\circ$ é uma operação binária parcial sobre os morfismos em $\mathscr{C}$.*

(a) Para todo X e Y objetos em $\mathscr{C}$ se define um conjunto de morfismos, denotado por $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ tal que $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \cap Hom_{\mathscr{C}}(U, V) = \{\phi\}$, para $(X, Y) \neq (U, V)$ em $\mathscr{C}$.

(b) Para todo X, Y e Z objetos em $\mathscr{C}$, temos uma operação de composição

$$\circ : Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathscr{C}}(X,Z)$$

dada por $\circ(g, f) := g \circ f$ e satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ e $h \in Hom_{\mathscr{C}}(W,X)$ se cumpre que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

(ii) Para todo X objeto em $\mathscr{C}$, existe $1_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$ tal que se $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(W,X)$, então $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$.

Exemplo 2.1.1. *Seja A uma $\mathbb{k}-$álgebra, temos as seguintes categorias.*

(a) A categorias dos $A-$módulos, denotada por $\mathscr{C} = Mod\ A$. A classe de objetos são os $A-$módulos e a classe de morfismos são os homomorfismos entre $A-$ módulos.

(b) A categoria dos $A-$módulos finitamente gerados, denotada por $\mathscr{C} = mod\ A$. A classe de objetos são os $A-$módulos finitamente gerados e os morfismos são os homomorfismo entre $A-$módulos finitamente gerados.

Definição 2.1.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathscr{B}$ é uma **subcategoria** de $\mathscr{C}$ quando cumpre as seguintes propriedade:*

(a) $Obj(\mathscr{B}) \subseteq Obj(\mathscr{C})$.

(b) Para todo X e Y objetos em $\mathscr{B}$, se cumpre que $Hom_{\mathscr{B}}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$.

(c) A composição de morfismos em $\mathscr{B}$ é igual à composição em $\mathscr{C}$.

(d) Para todo X objeto em $\mathscr{B}$, o morfismo identidade 1_X em $\mathscr{B}$ é o mesmo que em $\mathscr{C}$.

Definição 2.1.3. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $\mathscr{B}$ uma subcategoria de $\mathscr{C}$. Dizemos que $\mathscr{B}$ é uma **subcategoria! plena** quando, para todo X e Y objetos em $\mathscr{B}$ se cumpre $Hom_{\mathscr{B}}(X,Y) = Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$.*

Definição 2.1.4. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathscr{C}$ é uma **categoria aditiva** quando são satisfeitas as seguintes condições:*

1. *Para cada conjunto finito de objetos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ existe a soma direta $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ em $\mathscr{C}$.*

2. *Para todo X e Y objetos em $\mathscr{C}$ o conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ tem estrutura de grupo abeliano.*

3. *O morfismo composição em $\mathscr{C}$ é bilinear.*

4. *Existe um objeto $0 \in Obj(\mathscr{C})$(chamado objeto zero de $\mathscr{C}$) tal que o morfismo identidade 1_0 é o elemento zero do grupo abeliano $Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$.*

Definição 2.1.5. *Sejam $\mathbb{k}$ um corpo e $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathscr{C}$ é uma $\mathbb{k}-$**categoria** quando cumpre as seguintes condições:*

1. *A classe de objetos de $\mathscr{C}$ é um conjunto.*

2. *Cada conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ é um $\Bbbk-$espaço vetorial.*

3. *A composição de morfismos é $\Bbbk-$bilinear, isto é, para todo X, Y e Z objetos em $\mathscr{C}$, se $f, f' \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e $g, g' \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,Z)$, então $g\circ(f+f') = g\circ f + g\circ f'$ e $(g+g')\circ f = g\circ f + g'\circ f$.*

Dada uma $\mathscr{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathscr{C}$ é uma **categoria abeliana** quando é uma categoria aditiva, cada morfismo em $\mathscr{C}$ tem kernel e cokernel, todo monomorfismo é o kernel de algum cokernel e todo epimorfismo e o cokernel de algum kernel.

Definição 2.1.6. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\Bbbk-$categoria aditiva, $\mathscr{C}$ é **Krull-Schmidt**, quando para todo objeto indecomponível X em $\mathscr{C}$ o anel $End_{\mathscr{C}}(X)$ é um anel local.*

2.2 Categorias trianguladas

Neste seção definiremos categoria triangulada. Para isto vamos a precisar do conceito de funtor translação. Considere $\mathscr{C}$ uma categoria aditiva e $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ um funtor. Chamaremos T de **funtor translação** quando T for um automorfismo e usaremos a seguinte notação: $T^n(X) = X[n]$ e diremos que $X[n]$ é o $n-$ésimo *shift* de X.

Definição 2.2.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria aditiva.*

1. *Um **triângulo** em $\mathscr{C}$ é um diagrama*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

onde X, Y e Z são objetos em $\mathscr{C}$, e u, v e w são morfismos em $\mathscr{C}$. Denotado por (X,Y,Z,u,v,w)

2. *Sejam $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ e $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ dois triângulos em $\mathscr{C}$. Um **morfismo de triângulos** é um diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "T(u)"] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

*Um morfismo de triângulo é um **isomorfismo de triângulos** se u, v e w são isomorfismos.*

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria aditiva, T um funtor translação de $\mathscr{C}$ e uma coleção de triângulos que chamamos* ***triângulo distinguido****. Dizemos que $\mathscr{C}$ é uma* ***categoria triangulada*** *quando a coleção de triângulos distinguidos cumpre os seguintes axiomas:*

(TR1) *Todo triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é também um triângulo distinguido.*

(TR2) *para cada X objeto em $\mathscr{C}$, o triângulo $(X, X, 0, I_X, 0, 0)$ é um triângulo distinguido.*

(TR3) *Para cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, existe um triângulo distinguido (X, Y, Z, f, g, h).*

(TR4) *Um triângulo (X, Y, Z, f, g, h) é distinguido se, e somente se, $(Y, Z, T(X), g, h, -T(f))$ é um triângulo distinguido.*

(TR5) *Se (X, Y, Z, f, g, h) e (X, Y, Z, f, g, h) são triângulos distinguidos, $u \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X)$ e $v \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Y)$ tal que $vf = fu$, então existe $w \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, Z)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists w"] & X[1] \arrow[d, "T(u)"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

(TR6) *(Axioma do octaedro) Sejam $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$, $f \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ e $f = ff$. Se (X, Y, Z, f, g, h), (Y, Z, X, f, g, h) e $(X, Z, Y, f\,g\,h)$ são triângulos distinguidos, então existem $u \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, Y)$ e $v \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, X)$ tais que $Z, Y, Z, u, v, T(g)h$ é um triângulo e o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists u"] & T(X) \arrow[d, "T(I_X)"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "I_Z"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists v"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
Y \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "T(g)h"'] & T(Y) \arrow[dl, "T(g)"] \\
 & & T(Z) &
\end{tikzcd}$$

Se $f : X \to Y$ é um morfismo na categoria $\mathscr{C}$, sabemos pelo axioma TR3 que existe um triângulo distinguido (X, Y, Z, f, g, h). É possível mostrar que Z é único a menos de isomorfismo.

Para isso, suponhamos que existe Z tal que (X,Y,Z,f,g,h) também é triângulo distinguido, assim temos o seguinte diagrama com o primeiro quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "I_Y"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \arrow[d, "T(I_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \end{tikzcd}$$

portanto pelo axioma TR5 temos que existe $w \in Hom_{\mathscr{C}}(Z,Z)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "I_Y"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "w"] & X[1] \arrow[d, "T(I_X)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Agora como I_X, I_Y e $T(I_X)$ são isomorfismos, então w é um isomorfismo.

Este resultado é importante na obtenção de outros resultados que faremos neste capítulo então o enunciaremos em forma de proposição:

Proposição 2.2.1. *Seja $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, então existe (X,Y,Z,f,g,h) um triângulo distinguido tal que Z é único a menos de isomorfismo.*

Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathscr{C}$. O único Z tal que (X,Y,Z,f,g,h) é um triângulo distinguido, é chamado o **cone de** f e é denotado por C_f.

Lema 2.2.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\Bbbk-$categoria triangulada e seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{v} X[1]$ um triângulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O morfismo f é monomorfismo que cinde.*
2. *O morfismo u é epimorfismo que cinde.*
3. *O morfismo v é nulo.*

Demonstração: (1)⇒(3) Suponhamos que f é monomorfismo que cinde, então existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $gf = 1_X$, assim temos o seguinte diagrama com o primeiro quadrado comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "v"] & X[1] \arrow[d, "1_X"'] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

Pelo axioma TR5 existe $h : Z \to 0$ tal que o seguinte diagrama também é comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h"'] & X[1] \arrow[d, "1_X"'] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

então temos que $1_X v = 0$, concluindo que $v = 0$.

(3)⇒(1) Suponhamos que $v = 0$, assim temos o seguinte diagrama com o último quadrado comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "u"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X[1] \arrow[d, "1_X"'] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

Pelo axioma TR5 existe $g : Y \to X$ tal que o seguinte quadrado é comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X[1] \arrow[d, "1_X"'] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & X[1] \end{tikzcd}$$

então $gf = 1_X$, isto é, f é monomorfismo que cinde.

(2)⇔(3) A prova é similar à anterior. □

Lema 2.2.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\Bbbk-$categoria triangulada Krull-Schmidt e seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo, suponhamos que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, escrevendo $u = [u_1\ u_2]^t$ e $v = [v_1\ v_2]$ onde $u_i : X \to Y_i$ e $v_i : Y_i \to Z$.*

1. *Se $u_i = 0$, então v_i é monomorfismo que cinde.*

2. *Se $v_i = 0$, então u_i é epimorfismo que cinde.*

Demonstração: Suponhamos que $u_i = 0$ e seja $j_i : Y_i \to Y$ a inclusão e $p_i : Y \to Y_i$ a projeção tal que $0 = u_i = p_i u$, então temos que o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] \arrow[dr, phantom, "\frown"] & Y_i \arrow[r, "1_{Y_i}"] \arrow[d, "j_i"] & Y_i \arrow[r] & 0 \arrow[d, "0"] \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] \arrow[dr, phantom, "\frown"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_i"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & Y_i \arrow[r, "1_{Y_i}"] & Y_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pelo axioma TR5 existem $h : Y_i \to Z$ e $g : Z \to Y_i$ tais que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & Y_i \arrow[r, "1_{Y_i}"] \arrow[d, "j_i"] & Y_i \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_i"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "g"] & X[1] \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & Y_i \arrow[r, "1_{Y_i}"] & Y_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Assim temos que $gh = p_i j_i = 1_{Y_i}$, portanto h é monomorfismo que cinde, como $h = h1_{Y_i} = v j_i = v_i$, de onde concluímos que v_i é monomorfismo que cinde.

Agora suponhamos que $v_i = 0$ e seja $j_i : Y_i \to Y$ a inclusão e $p_i : Y \to Y_i$ a projeção tal que $0 = v_i = v j_i$, então temos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "j_i"] \arrow[dr, phantom, "\frown"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & Y_i[1] \arrow[r, "-1_{Y_i}"] & Y_i[1] \arrow[d, "j_i"] \\
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_i"] \arrow[dr, phantom, "\frown"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[r, "-u"] & Y[1] \arrow[d, "p_i"] \\
Y_i \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & Y_i[1] \arrow[r, "-1_{Y_i}"] & Y_i[1]
\end{tikzcd}$$

Pelo axioma TR5 existem $g : Y_i[1] \to X[1]$ e $h : X[1] \to Y_i[1]$ tais que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "j_i"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & Y_i[1] \arrow[r, "-1_{Y_i}"] \arrow[d, "g"] & Y_i[1] \arrow[d, "j_i"] \\ Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_i"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "0"] & X[1] \arrow[r, "-u"] \arrow[d, "h"] & Y[1] \arrow[d, "p_i"] \\ Y_i \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & Y_i[1] \arrow[r, "-1_{Y_i}"] & Y_i[1] \end{tikzcd}$$

Assim temos que $-1_{Y_i}hg = -p_i j_i 1_{Y_i} = -1_{Y_i}$, portanto h é epimorfismo que cinde, como $-h = -1_{Y_i}h = -p_i u = -u_i$, de onde concluímos que u_i é epimorfismo que cinde. $\square$

Lema 2.2.3. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\mathbb{k}-$categoria triangulada Krull-Schmidt e seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo. Suponhamos que X e Y são indecomponíveis e que u é não nulo e não invertível. Também suponhamos que $Z = \oplus_{i=1}^{r} Z_i$ com Z_i objeto indecomponível em $\mathscr{C}$ para todo i, escrevendo $v = [v_1 \cdots v_r]^t$ e $w = [w_1 \cdots w_r]$ onde $v_i : Y \to Z_i$ e $w_i : Z_i \to X[1]$. Então*

1. *Todos os morfismos v_i são não nulo e não invertíveis.*
2. *Todos os morfismos w_i são não nulo e não invertíveis.*
3. *$w_i v_i$ é não nulo para cada i.*

Demonstração: Suponhamos que $v_i = 0$, temos que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo em $\mathscr{C}$, portanto $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u} Y[1]$ também é um triângulo em $\mathscr{C}$, por hipótese temos que $v_i = 0$, então pelo Lema 2.2.2 obtemos que w_i é um monomorfismo que cinde, temos a seguinte sequência exata curta $0 \longrightarrow Z_i \xrightarrow{w_i} X[1] \longrightarrow Coker(w_i) \longrightarrow 0$, como w_i é monomorfismo que cinde, então a sequência cinde, portanto temos que $X[1] \cong Z_i \oplus Coker(w_i)$, como $X[1]$ é indecomponível, então temos que $Coker(w_i) = 0$, isto é, w_i é isomorfismo. Agora definamos $\beta = [0, 0 \cdots, w_i^{-1}, \cdots, 0]^t : X[1] \to Z$. Assim, temos que $w\beta = w = [w_1 \cdots w_r][0, 0 \cdots, w_i^{-1}, \cdots, 0]^t = w_i w_i^{-1} = I_{X[1]}$. De onde conluímos que w é um epimorfismo que cinde. Desta forma, pelo Lema 2.2.1 temos que $-u = 0$, isto é, $u = 0$, contradição pois por hipótese temos que u é não nulo.

Se v_i é invertível, então definamos $\beta = [0, \cdots, v_i^{-1}, \cdots, 0] : Z \to Y$, de onde obtemos que $\beta v = [0, \cdots, v_i^{-1}, \cdots, 0][v_1 \cdots v_r]^t = v_i^{-1} v_i = I_Y$. Assim obtemos que v é um monomorfismo escindido, então pelo Lema 2.2.1 temos que $u = 0$, contradição com a hipótese. Suponhamos que $w_i v_i = 0$, então temos que $v_i = p_i v$ onde $p_i : Z \to Z_i$ a projeção e $w_i = w j_i$ onde $j_i : Z_i \to$

Z a inclusão, assim temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "j_i p_i"] & X[1] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \end{tikzcd}$$

agora como $wj_ip_iv = w_iv_i = 0$, então existe $h_i : Y \to Y$, tal que $j_ip_iv = vh_i$.

Seja $k \neq i$, então $v_kh_i = p_kvh_i = p_kj_ip_iv = 0$, se $k = i$ temos $v_ih_i = p_ivh_i = p_ij_ip_iv = p_iv = v_i$, assim temos que $v_ih_i = v_i$. Pela primeira parte do Lema temos que $v_i \neq 0$, portanto $h_i \neq 0$. Vejamos que h_i não é invertível, suponhamos que h_i é invertível, portanto $h_i - 1_Y$ é invertível, então existe $\beta : Y \to Y$ tal que $(h_i - 1_Y)\beta = 1_Y$, temos que $v_i(h_i - 1_Y) = 0$, assim temos que $v_i = 0$. De onde obtemos que $h_i \in End(Y)$ é não nulo e não invertível, como $\mathscr{C}$ é uma categoria Krull-Schmidt, então h_i é nilpotente, isto é, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $h_i^p = 0$, assim temos $v_i = v_ih_i = v_ih_i^2 = \cdots = v_ih_i^p = 0$, de onde concluímos que w_iv_i é não nulo.

□

2.3 Categoria de complexos homotópicos

Nesta seção daremos as definições de categoria de complexos sobre uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana, complexos limitados, quasi-isomorfismo, categoria de homotopia e categoria derivada. Enunciaremos um teorema que diz que a categoria de homotopia e a categoria derivada são categorias trianguladas.

Para esta seção denotamos por $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{k}-$categoria aditiva a qual é uma subcategoria plena de uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana $\mathscr{C}$.

Definição 2.3.1. *Um **complexo** $X^\bullet$ em $\mathscr{A}$ está dado pelas sequências $(X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $X^n \in \mathscr{A}$ e $d_X^n \in Hom_{\mathscr{A}}(X^n, X^{n+1})$ tal que $d_X^n d_X^{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Um complexo será representado pela seguinte sequência*

$$X^\bullet := \qquad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

*Sejam $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ complexos. Um **morfismo de complexos** $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ é uma sequência $(f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismo $f^n \in Hom_{\mathscr{A}}(X^n, Y^n)$, tais que $d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, isto é, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} X^\bullet := \arrow[d, "f^\bullet"] & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\ Y^\bullet := & \cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Os complexos em $\mathscr{A}$ e os morfismos entre complexos formam a **Categoria de complexos** denotada por $\mathscr{C}(\mathscr{A})$.

Um complexo $X^\bullet$ será dito **limitado superiormente** se existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para todo inteiro $n > k$; o complexo dito **limitado inferiormente** se existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para todo inteiro $n < k$; o complexo é dito **limitado** se é limitado superiormente e inferiormente; o complexo é dito **stalk centrado na componente s** se $X^n = 0$ para todo $n \neq s$, e é denotado por $X[s]$.

Seja $\mathscr{A}$ uma categoria categoria aditiva. Temos que a categoria $\mathscr{A}$ está mergulhada na categoria categoria de complexos, isto é, dado X um objeto na categoria $\mathscr{A}$, tomando a complexo $X[0]$ temos que $\mathscr{A}$ está mergulhada em $\mathscr{C}(\mathscr{A})$.

Para definir os quasi-isomorfismo na categoria de complexos precisamos do conceito de cohomologia para um complexo.

Definição 2.3.2. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos o funtor aditivo(ver [WEI94]) $H^n : \mathscr{C}(\mathscr{A}) \to \mathscr{C}$ associando a cada complexo $X^\bullet \in \mathscr{C}(\mathscr{A})$ sua $n-$**ésima cohomologia** $H^n(X^\bullet) = Ker(d_X^n)/Im(d_X^{n-1})$ e a cada morfismo $f^\bullet$ o morfismo induzido $H^n(f^\bullet)$.*

Definição 2.3.3. *Sejam $f^\bullet, g^\bullet \in Hom_{\mathscr{C}(\mathscr{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.*

1. *Dizemos que um complexo $X^\bullet$ tem **cohomologia limitada** quando existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $H^k(X^\bullet) = 0$ para todo $k < n$ ou $k > m$.*

2. *Dizemos que $f^\bullet$ é um **quasi-isomorfismo** quando $H^n(f^\bullet)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

3. *Dizemos que $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são **homotópicos** quando existe uma sequência de morfismos $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $h^n : X^n \to Y^{n-1}$ e tal que $f^n - g^n = d_Y^{n-1}h^n + h^{n+1}d_X^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se escreve $f^\bullet \sim g^\bullet$ se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são homotópicos.*

A relação de homotopia em $Hom_{\mathscr{A}}(X^\bullet, Y^\bullet)$ é uma relação de equivalência, isto é, a relação de homotopia é reflexiva, simétrica e transitiva em $Hom_{\mathscr{A}}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Dada $\mathscr{A}$ uma $\Bbbk-$categoria aditiva. Definimos a **categoria de homotopia** de $\mathscr{A}$ denotada por $\mathscr{K}(\mathscr{A})$ como a categoria cujos objetos são os complexos $X^\bullet \in \mathscr{C}(\mathscr{A})$ e para todo $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathscr{K}(\mathscr{A})$ o conjunto de morfismos está definido como

$$Hom_{\mathscr{K}(A)}(X^\bullet, Y^\bullet) := Hom_{\mathscr{C}(\mathscr{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\sim.$$

Para apresentar a definição de categoria derivada, necessitamos entender o que é uma localização em uma categoria abeliana.

Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, e $\mathscr{S}$ uma classe de morfismos em $\mathscr{A}$. Dizemos que $\mathscr{S}$ é uma **classe de localização** se cumpre as seguintes propriedades:

1. para todo objeto M em $\mathscr{A}$, o morfismo identidade em M está em $\mathscr{S}$;

2. Se $s,\ t$ são morfismo em $\mathscr{S}$, então o morfismo composição $s \circ t$ está em $\mathscr{S}$;

3. (a) Para todo par $f \in mor(\mathscr{A})$ e $s \in \mathscr{S}$, existem $g \in mor(\mathscr{A})$ e $t \in \mathscr{S}$ tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"] & L \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

(b)Para todo par $f \in mor(\mathscr{A})$ e $s \in \mathscr{S}$, existem $g \in mor(\mathscr{A})$ e $t \in \mathscr{S}$ tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} K & L \arrow[l, dashed, "g"'] \\ M \arrow[u, dashed, "t"] & N \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

4. Sejam $f, g : M \to N$ dois morfismo em $\mathscr{A}$. Então existe $s \in \mathscr{S}$ tal que $s \circ f = s \circ g$ se, somente se existe $t \in \mathscr{S}$ tal que $f \circ t = g \circ t$.

Sejam $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana e $\mathscr{S}$ uma classe de localização de morfismos em $\mathscr{A}$. Existe uma categoria a qual é denotada por $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$, cujos objetos são os objetos na categoria $\mathscr{A}$ e os morfismo estão dados da seguinte forma.

Sejam M, N objetos em $\mathscr{A}$, um morfismo em $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ de M para N é representado da seguinte maneira

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

onde $f \in mor(\mathscr{A})$ e $s \in \mathscr{S}$. Agara apresentamos uma relação de equivalência para dizer que dois morfismo em $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ são iguais

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

essas duas representações são iguais quando existe um objeto H em $\mathscr{A}$ e morfismos $p : H \to L$ e $q : H \to K$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ M & H \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & N \\ & K \arrow[ul, "t", "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

e $s \circ p = t \circ q \in \mathscr{S}$. A categoria $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ é chamada a categoria localizada ou a localização de $\mathscr{A}$ respeito a classe de localização $\mathscr{S}$.

Teorema 2.3.1. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana e $\mathscr{S}$ uma classe de morfismos de $\mathscr{A}$, então existe uma categoria $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ e um funtor $Q : \mathscr{A} \to \mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ tal que:*

1. *$Q(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in \mathscr{S}$;*

2. *para toda categoria $\mathscr{B}$ e $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in \mathscr{S}$, existe um único funtor $G : \mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}] \to \mathscr{B}$ tal que $F = G \circ Q$. A categoria $\mathscr{A}[\mathscr{S}^{-1}]$ é única a menos de isomorfismo.*

Definição 2.3.4. *Seja $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana, definimos a **categoria derivada** de $\mathscr{A}$ denotada por $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ como a localização de $\mathscr{K}({}_{\Lambda}\mathscr{P})$ com respeito ao conjunto dos quasi-isomorfismos.*

Seja $f^{\bullet} : X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo na categoria de homotopia. $f^{\bullet}$ é homotópico a zero se, e somente se, $T(f^{\bullet})$ é homotópico a zero. A seguinte proposição da uma correspondência entre quasi-isomorfismo e a $n-$ésima cohomologia de um complexo na categoria de homotopia.

Proposição 2.3.1. *Sejam $\mathscr{A}$ uma categoria abeliana e $f^{\bullet} : X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ um morfismo em $\mathscr{K}(\mathscr{A})$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(i) O morfismo $f^{\bullet}$ é um quasi-isomorfismo.

(ii) O cone de f é acíclico.

Demonstração: ver [MIL, pág. 117]. □

Teorema 2.3.2. *As categorias $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ são trianguladas.*

Demonstração: Ver ([HAP88] e [MIL, pág. 100]).

□

Os triângulos distinguidos em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ são os triângulos estândar, isto é, os triângulos estândar estão dados da seguinte forma:

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f \longrightarrow X[1]$$

onde f é um morfismo na categoria de complexos.

Na categoria de homotopia um triangulo é distinguido se é isomorfo a um triangulo estândar na categoria de complexos.

Seja $\mathcal{A}$ uma $\Bbbk-$categoria abeliana.

Assim como foi definida a categoria de homotopia e a categoria derivada, também podemos definir as categorias de homotopia limitada e a categoria derivada limitada. As subcategorias plenas dos complexos limitados superiormente de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ serão denotadas por $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ respectivamente.

As subcategorias plenas dos complexos limitados de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ serão denotadas por $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ respectivamente.

Pode ser provado que a categoria de homotopia de complexos limitados e a categoria derivada limitada são categorias trianguladas (ver [MIL]).

O seguinte Lema diz que dado um morfismo não nulo de um complexo *stalk* centrado na componente t para um complexo $Y^\bullet$ na categoria de homotopia, então o complexo $Y^\bullet$ no grau t é não nulo.

Lema 2.3.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\Bbbk-$categoria aditiva Krull-Schmidt. Se $X \in \mathcal{A}$ e $Y^\bullet \in \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$.*

(a) (i) Se $Hom_{\mathcal{K}^b(\mathcal{A})}(X[t], Y^\bullet) \neq 0$ para algum $t \in \mathbb{Z}$, então $Y^{-t} \neq 0$.

(ii) Se $Hom_{\mathcal{K}^b(\mathcal{A})}(Y^\bullet, X[t]) \neq 0$ para algum $t \in \mathbb{Z}$, então $Y^{-t} \neq 0$.

(b) *Se* $0 \neq Y^\bullet = (Y^i, d^i) \in \mathscr{K}^b(\mathscr{A})$ *e* $r \leq 0$ *com* $Y^r \neq 0$, $Y^0 \neq 0$, $Y^i = 0$ *para todo* $i > 0$ *e* $Y^i = 0$ *para todo* $i < r$*, então*

$$Hom_{\mathscr{K}^b(\mathscr{A})}(Y^\bullet, Y^r[-r]) \neq 0 \text{ e } Hom_{\mathscr{K}^b(\mathscr{A})}(Y^0, Y^\bullet) \neq 0.$$

Demonstração: Ver [HZ08, pág. 179]. □

Sejam $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana e $X,\ Y \in \mathscr{A}$, se define

$$Ext^i_{\mathscr{A}}(X, Y) := Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{A})}(X[0], Y[i]).$$

A definição anterior coincide com a definição clássica via Yoneda. A demonstração de esta observação está em [ASS97, pág. 267]

Teorema 2.3.3. *Sejam* $\mathscr{A}$ *uma categoria abeliana, e* X *e* Y *objetos em* $\mathscr{A}$*, então*

(a) $Ext^i_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ *para todo* $i < 0$.

(b) $Ext^0_{\mathscr{A}}(X, Y) = Hom_{\mathscr{A}}(X, Y)$.

Demonstração: Ver [GM03, pág. 167-168]. □

2.4 Categorias hereditárias

Nesta seção apresentaremos a definição de categoria hereditária. Dada uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$, então a categoria derivada limitada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma categoria repetitiva (ver [HHK07]), isto é, $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é o fecho aditivo da união de cópias $\mathscr{H}[t]$.

Definição 2.4.1. *Seja* $\mathscr{H}$ *uma categoria abeliana. Dizemos que* $\mathscr{H}$ *é uma* ***hereditária*** *quando para qualquer par de objetos* X *e* Y *em* $\mathscr{H}$ *valem as seguintes propriedades:*

1. $Hom_{\mathscr{H}}(X, Y)$ *e* $Ext^1_{\mathscr{H}}(X, Y)$ *são* $\mathbb{k}-$*espaços vetoriais de dimensão finita.*

2. $Ext^n_{\mathscr{H}}(X, Y) = 0$ *para todo* $n \geq 2$.

Dada uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana $\mathscr{A}$ e $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ classes de objetos em $\mathscr{A}$, então escrevemos $Hom_{\mathscr{A}}(\mathscr{U}, \mathscr{V}) = 0$ quando $Hom_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathscr{U}$ e para todo $Y \in \mathscr{V}$.

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria triangulada e $\mathscr{A}$ uma subcategoria plena de $\mathscr{C}$. Dizemos que $\mathscr{A}$ é una **subcategoria abeliana admissível** quando satisfaze as seguintes propriedades:

(a) $\mathscr{A}$ é abeliana.

(b) $Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{A}[s], \mathscr{A}[t]) = 0$ para todo $s < t$.

(c) Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ em $\mathscr{A}$, então existe um triângulo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow T[X]$ em $\mathscr{C}$.

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\Bbbk-$categoria triangulada e seja $\mathscr{H}$ uma subcategoria plena de $\mathscr{C}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) A subcategoria $\mathscr{H}$ é uma categoria abeliana hereditária canonicamente mergulhada em sua categoria derivada limitada $\mathscr{C} = \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

(ii) A subcategoria $\mathscr{H}$ é uma subcategoria abeliana admissível de $\mathscr{C}$ e fechada para extensões, o fecho aditivo da união de cópias $\mathscr{H}[t]$ com $t \in \mathbb{Z}$ é $\mathscr{C}$ e

$$Hom_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}[s], \mathscr{H}[t]) = 0, \text{ para todo } t \notin \{s, s+1\}.$$

(iii) O fecho aditivo da união de cópias de $\mathscr{H}[t]$ com $t \in \mathbb{Z}$ é $\mathscr{C}$ e

$$Hom_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}[s], \mathscr{H}[t]) = 0, \text{ para todo } t < s.$$

Demonstração: Ver [RIN, pág. 3-4], uma demostração para (ii) ver [HHK07, pág. 112-113] □

Definição 2.4.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma $\Bbbk-$categoria triangulada Krull-Schmidt. Um* ***caminho*** *em $\mathscr{C}$ é uma sequência $X_0, X_1, \cdots, X_s$ em $\mathscr{C}$ tal que $Hom_{\mathscr{C}}(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ ou $X_{i+1} = X_i[1]$, além disso dizemos que o caminho é de comprimento s. Um caminho $X_0, X_1, \cdots, X_s$ é um* ***caminho forte*** *se $Hom_{\mathscr{C}}(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ para todo $i = 0, 1, \cdots, s-1$.*

Uma categoria $\mathscr{C}$ é um **bloco** quando cumpre as seguintes afirmações:

1. $\mathscr{C}$ é não nula;
2. Não é triangularmente equivalente a produto de duas categorias não nulas trianguladas.

Teorema 2.4.2. *Suponhamos que $\mathscr{C}$ é uma $\Bbbk-$categoria triangulada que é um bloco. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Existe uma* $\Bbbk-$*categoria abeliana hereditária* $\mathscr{H}$ *tal que* $\mathscr{C} = \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

(ii) *Se* X *é indecomponível em* $\mathscr{C}$, *então não existem caminhos de* $X[1]$ *para* X.

(iii) *Existe um objeto indecomponível* X *em* $\mathscr{C}$ *tal que não existem caminhos de* $X[1]$ *para* X.

(iv) *Existem dois objetos* X *e* Y *indecomponíveis em* $\mathscr{C}$ *tal que não existem caminhos de* X *para* Y.

Demonstração: Ver [RIN, pág. 8-9]. □

Teorema 2.4.3. *Se* $X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_s$ *é um caminho forte em* $\mathscr{C}$, *então existem* $0 \leq t \leq s-2$ *e* Y *indecomponível em* $\mathscr{C}$ *tal que* $X_0[t] \to Y \to X_s$ *é um caminho forte em* $\mathscr{C}$.

Demonstração: Ver [RIN]. □

Capítulo 3

Álgebras hereditárias

Neste capitulo apresentaremos a definição de álgebra hereditária, enunciaremos propriedades importantes sobre os morfismo entre módulos indecomponíveis na categoria de módulos sobre uma álgebra hereditária, isto é, dada A uma $\Bbbk-$álgebra hereditária e $A-$módulos indecomponíveis X e Y tais que $Ext_A^1(Y,X)=0$, então todo morfismo $f: X \to Y$ não nulo é injetivo ou sobrejetivo, todo morfismo não nulo pode ser factorado por um monomorfismo e um epimorfismo ou por um epimorfismo e um monomorfismo. Além disso, apresentamos resultados importantes para calcular o $Ext_A^1(X,X)$.

Na seção dois temos uma série de resultados para demostrar um dos teoremas mais importantes deste trabalho: se $A = \Bbbk Q$, onde Q é uma aljava finita sem ciclos orientados, e $\mathscr{C}$ é uma subcategoria plena de $mod\ A$ fechada para extensões e para fechada somandos diretos. Se $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então existe um $A-$módulo indecomponível X em $\mathscr{C}$ tal que $Hom_A(X,X) \neq 0$.

3.1 Álgebras hereditárias

Nesta seção daremos a definição de álgebras hereditárias, apresentaremos um teorema sem demonstração que classifica as álgebras hereditárias.

Definição 3.1.1. *Seja A $\Bbbk-$álgebra. Dizemos que A é* ***hereditária*** *se todo submódulo de um $A-$módulo projetivo é também projetivo. Dessa forma, cada módulo tem dimensão projetiva de no máximo 1. E portanto pela definição 1.2.1 temos que a dimensão global de A não excede 1.*

Teorema 3.1.1. *Seja B uma $\Bbbk-$álgebra. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) B é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária.

(b) A dimensão global de B não excede 1.

(c) Todo quociente de um $B-$módulo injetivo é um $B-$módulo injetivo.

(d) Todo quociente de um $B-$módulo injetivo finitamente gerado é um $B-$módulo injetivo.

(e) O radical de todo $B-$módulo projetivo indecomponível finitamente gerado é um $B-$módulo projetivo.

(f) O socle de todo $B-$módulo injetivo indecomponível finitamente gerado é um $B-$módulo injetivo.

(g) Todo ideal de B é um $B-$módulo projetivo.

Demonstração: Ver [ASS06, pág. 245-246]. □

Lema 3.1.1. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra hereditária de dimensão finita e sejam $A-$módulos X_1, X_2 e X_3. Suponha que $f: X_1 \to X_2$ epimorfismo e $g: X_2 \to X_3$ monomorfismo, então existe um $A-$módulo Y e morfismos lineares $h_1: X_1 \to Y$ monomorfismo e $h_2: Y \longrightarrow X_3$ epimorfismo tal que a seguinte sequência é exata.*

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{[f\ h_1]^t} X_2 \oplus Y \xrightarrow{[g\ -h_2]} X_3 \longrightarrow 0$$

Demonstração: Seja $f: X_1 \longrightarrow X_2$ epimorfismo, então existe uma sequência $0 \longrightarrow K \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0$, aplicando $Hom_A(X_3/X_2, -)$, temos a seguinte sequência exata.

$$0 \longrightarrow Hom_A(X_3/X_2, K) \longrightarrow Hom_A(X_3/X_2, X_1) \longrightarrow Hom_A(X_3/X_2, X_2) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1(X_3/X_2, K) \longrightarrow Ext^1(X_3/X_2, X_1) \longrightarrow Ext^1(X_3/X_2, X_2) \longrightarrow 0$$

Agora como g é monomorfismo, então $0 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_3/X_2 \longrightarrow 0$ é um elemento em $Ext^1(X_3/X_2, X_2)$ e $Ext^1(X_3/X_2, f)$ é um epimorfismo. Assim existe uma sequência exata curta tal que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "h_2"] & X_3/X_2 \arrow[r] \arrow[d, "I"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "g"] & X_3 \arrow[r, "\pi"] & X_3/X_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de onde obtemos que h_1 é monomorfismo e como f é epimorfismo então h_2 é também epimorfismo, portanto

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{[f\ h_1]^t} X_2 \oplus Y \xrightarrow{[g\ -h_2]} X_3 \longrightarrow 0$$

Como o primeiro quadrado é comutativo, então $[g\ -h_2][f\ h_1]^t = gf - h_2h_1 = 0$, portanto $Im[f\ h_1]^t \subseteq Ker[g\ -h_2]$.

Seja $(x,y) \in Ker[g\ -h_2]$, então $g(x) - h_2(y) = 0$. Aplicando π, temos que $\pi h_2(y) = 0$, e como o quadrado comuta, então $\theta(y) = 0$, portanto $y \in Ker(\theta) = Im(h_1)$. Dessa forma, existe $y_1 \in X_1$ tal que $h_1(y_1) = y$, agora como o primeiro quadrado comuta, então temos que $g(f(y_1)) = h_2(h_1(y_1)) = h_2(y) = g(x)$. Pela injetividade de g, $x = f(y_1)$ e portanto $(x,y) = (f(y_1), h_1(y_1)) = [f\ h_1]^t y_1 \in Im[f\ h_1]^t$. De onde concluímos que $Ker[g\ -h_2] = Im[f\ h_1]^t$, ou seja a sequência é exata curta. $\square$

Lema 3.1.2. *Sejam A uma $\Bbbk-$álgebra hereditária de dimensão finita e X e Y módulos indecomponíveis tal que $Ext_A^1(Y,X) = 0$. Se $h \in Hom_A(X,Y)$ não nulo, então h é monomorfismo ou epimorfismo.*

Demonstração: Seja $h : X \longrightarrow Y$ um morfismo não nulo assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \\
& Im(h) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão e $f(x) = h(x)$ para todo $x \in X$, assim é f epimorfismo, então pelo Lema 3.1.1 existem um $A-$módulo Z e $h_1 : X \longrightarrow Z$ monomorfismo, $h_2 : Z \longrightarrow Y$ epimorfismo tal que a seguinte sequência é exata curta.

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{[f\ h_1]^t} Im(h) \oplus Z \xrightarrow{[i\ -h_2]} Y \longrightarrow 0$$

Por hipótese temos que $Ext_A^1(Y,X)=0$, então a sequência cinde, portanto $Im(h)\oplus Z\cong X\oplus Y$, agora como X e Y são indecomponíveis temos dois casos:

(a) $X\cong Im(h)$ e $Z\cong Y$;

(b) $Y\cong Im(h)$ e $Z\cong X$.

Se (a) é verdade, então temos que $X\cong Im(h)$, portanto h é injetora.

Se (b) é verdade, então concluímos que $Y\cong Im(h)$, de onde temos que h é epimorfismo. $\square$

Lema 3.1.3. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e hereditária e sejam X e Y módulos indecomponíveis tais que $Ext_A^1(X,X)=0$, $Ext_A^1(Y,Y)=0$ e $Ext_A^1(Y,X)=0$. Se $Hom_A(X,Y)\neq 0$, então $Ext_A^1(X,Y)=0$.*

Demonstração: Como por hipótese temos que $Hom_A(X,Y)\neq 0$, então existe um morfismo $f:X\to Y$ não nulo e como $Ext_A^1(Y,X)=0$, pelo Lema 3.1.2 temos que f é monomorfismo ou epimorfismo.

Se f é epimorfismo, então temos $0\longrightarrow K\xrightarrow{i} X\xrightarrow{f} Y\longrightarrow 0$ sequência exata curta, onde $K=Ker(f)$, aplicando $Hom_A(X,-)$ temos a seguinte sequência exata.

$$Ext_A^1(X,K)\longrightarrow Ext_A^1(X,X)\longrightarrow Ext_A^1(X,Y)\longrightarrow 0$$

Pela hipótese temos que $Ext_A^1(X,X)=0$, de onde concluímos que $Ext_A^1(X,Y)=0$.

Se f é injetiva, então temos $0\longrightarrow X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{\pi} Q\longrightarrow 0$ sequência exata curta, onde $Q=Coker(f)$, nesta sequência aplicando $Hom_A(-,Y)$ temos a seguinte sequência exata.

$$Ext_A^1(Q,Y)\longrightarrow Ext_A^1(Y,Y)\longrightarrow Ext_A^1(X,Y)\longrightarrow 0$$

Do fato que $Ext_A^1(Y,Y)=0$, concluímos que $Ext_A^1(X,Y)=0$. $\square$

3.2 Ciclos em categorias de módulos de álgebras hereditárias

Nesta seção daremos a definição de ciclo e apresentaremos a demostração do seguinte teorema: sejam A uma álgebra hereditária sobre um corpo e $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $mod\ A$ fechada para extensões e para somandos diretos. Se $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então existe

X um $A-$módulo indecomponível em $\mathscr{C}$ tal que $End(X) \ncong \Bbbk$. Para isso vamos demostrar uma série de lemas.

Seja $A = \Bbbk\vec{\Delta}$, onde Δ é uma aljava finita sem ciclos orientados. Nesta seção $\mathscr{C}$ será uma subcategoria plena de $mod\ A$ fechada para extensões e fechada para somandos diretos. A seguir daremos a definição de ciclo em uma $\Bbbk-$álgebra A.

Definição 3.2.1. *Sejam $\Bbbk$ um corpo e A uma $\Bbbk-$álgebra. Dizemos que uma seqüência*

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} X_r$$

*de morfismos de $A-$módulos indecomponíveis $X_0,\ X_1,\ \cdots X_r$ é um **ciclo** quando $r \geq 1$, $X_0 \cong X_r$ e todo os morfismo $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ são não nulos e não isomorfismo. O número r é chamado o comprimento do ciclo.*

Lema 3.2.1. *Se X e Y são $A-$módulos em $\mathscr{C}$ e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$, então $Im(f) \in \mathscr{C}$.*

Demonstração: Sejam X e Y objetos em $\mathscr{C}$ e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ um morfismo, então existe uma fatoração de f da seguinte forma.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Im(f) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

onde g é um epimorfismo e i é um monomorfismo. Então pelo Lema 3.1.1 temos que existem Z um $A-$módulo indecomponível em $\mathscr{C}$, $h_1 : X \longrightarrow Z$ e $h_2 : Z \longrightarrow Y$ tais que

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{[g\ h_1]^t} Im(f) \oplus Z \xrightarrow{[i\ -h_2]} Y \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata. Como $\mathscr{C}$ é fechado para extensões, então $Im(f) \oplus Z$ está em $\mathscr{C}$, e como $\mathscr{C}$ é fechado também para somandos diretos obtemos que $Im(f) \in \mathscr{C}$. $\square$

Observação 3.1. Na prova do Lema 3.2.1, temos que $f = ig = h_2h_1$ onde h_1 e monomorfismo e h_2 é epimorfismo.

Lema 3.2.2. *Se $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um ciclo de comprimento par da seguinte* *forma:*

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 & \cdots & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

onde todos os f_{2k} são monomorfismos e todos os f_{2k-1} são epimorfismos

Demonstração: Suponhamos que $\mathscr{C}$ contém um ciclo

$$Y_0 \xrightarrow{g_0} Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} Y_n = Y_0$$

Assim para cada morfismo $g_i : Y_i \longrightarrow Y_{i+1}$, pela observação 3.1 temos que existem Z_i em $\mathscr{C}$ indecomponíveis, tais que $\beta_i : Y_i \longrightarrow Z_i$ é monomorfismo e $\alpha_i : Z_i \longrightarrow Y_{i+1}$ é epimorfismo para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Assim definimos $X_{2i} = Y_i$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $f_{2i} = \beta_i$ e $X_{2i+1} = Z_i$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ e $f_{2i-1} = \alpha_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. De onde obtemos o seguinte ciclo

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 & \cdots & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

onde todos os f_{2k} são injetivos e todos os f_{2k-1} são sobrejetores. □

No Lema 3.2.2 temos que se $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um ciclo de comprimento $2n$ tal que f_{2k} são monomorfismos e f_{2h-1} são epimorfismos. Seja Ω um ciclo em $\mathscr{C}$ de comprimento minimal $2n$ tal que f_{2k} são monomorfismos e f_{2k-1} são epimorfismos, isto é, existe um ciclo de comprimento minimal $2n$ da seguinte forma

$$\Omega: \begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 & \cdots & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

onde todos os f_{2k} são injetivos e todos os f_{2k-1} são sobrejetores.

De agora em diante vamos a usar esse fato e essa composição.

Lema 3.2.3. *Se $Hom_A(X_i, X_i) \cong \Bbbk$ para todo X_i no ciclo Ω, então $n \geq 2$.*

Demonstração: Da definição de ciclo temos que $n \geq 1$, vejamos que $n \neq 1$. Se $n = 1$ temos um ciclo $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 = X_0$ com f_0 monomorfismo não nulo e f_1 epimorfismo não nulo.

Se $f_0 f_1 = 0$, então como f_0 é monomorfismo temos que $f_1 = 0$, contradição pois f_1 é não nulo. Assim temos que $0 \neq f_0 f_1 \in End(X_1) \cong \Bbbk$, logo $f_0 f_1$ é um isomorfismo e assim f_0 é um epimorfismo que cinde. Portanto $X_0 \cong X_1$, o que é uma contradição com a definição de ciclo, pois f_0 seria isomorfismo. De onde concluímos que $n \geq 2$. $\square$

Lema 3.2.4. *Se $Hom_A(X_i, X_i) \cong \Bbbk$ para todo X_i no ciclo Ω, então $Hom_A(X_0, X_i) = 0$ para todo $i \in \{2, 3, \cdots, 2n-1\}$.*

Demonstração: Suponhamos que existe $k \in \{2, 3, ..., 2n-1\}$ tal que $Hom_A(X_0, X_k) \neq 0$, seja $f : X_0 \longrightarrow X_k$ um morfismo não nulo, então pelo Lema 3.2.1 temos que $Im(f) \in \mathscr{C}$, portanto existem Y indecomponível somando direto da imagem de f em $\mathscr{C}$ e $h_1 : X_0 \longrightarrow Y$ sobrejetor e $h_2 : Y \longrightarrow X_k$ monomorfismo.

Temos dois casos possíveis:

(i) $k = 2p$ com $1 \leq p < n$;

(ii) $k = 2p + 1$ com $1 \leq p < n$.

(i) Se $k = 2p$, então temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & X_{2p+1} \arrow[dr, "f_{2p+1}"] & \\
X_0 \arrow[dr, "h_1"] & & X_{2p} \arrow[ur, "f_{2p}"] & & X_{2p+2} \\
 & Y \arrow[ur, "h_2"] & & &
\end{tikzcd}$$

Assim $f_{2p} h_2 : Y \longrightarrow X_{2p+1}$ é injetor, então pelo Lema 3.1.1 existem Z um objeto indecomponível em $\mathscr{C}$ e morfismos $\beta_1 : X_0 \longrightarrow Z$ injetora e $\beta_2 : Z \longrightarrow X_{2p+1}$ epimorfismo. Temos o seguinte ciclo com as condições do ciclo Ω.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, "f_{(2p+1)}\beta_2"] & & X_{2p+3} \arrow[dr, "f_{2p+3}"] & \cdots & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "\beta_1"] & & X_{2p+2} \arrow[ur, "f_{2p+2}"] & & X_{2p+4} & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

mas este ciclo tem comprimento $2(n-p)$ que é menor que $2n$ pois $p > 0$, contradição pela escolha do ciclo Ω.

(ii) Se $k = 2p+1$, fazendo o procedimento anterior, $f_{2p+1}\beta_2 : Z \longrightarrow X_{2p+2}$ é um epimorfismo, assim temos o seguinte ciclo com a propriedade do ciclo Ω.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, "f_{2p+1}\beta_2"] & & X_{2p+3} \arrow[dr, "f_{2p+3}"] & & \cdots & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "\beta_1"] & & X_{2p+2} \arrow[ur, "f_{2p+2}"] & & X_{2p+4} & & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

O comprimento deste ciclo é $2(n-p)$ que é menor que $2n$ pois $p > 0$, contradição pela escolha do ciclo Ω. Assim concluímos que $Hom_A(X_0, X_i) = 0$ para todo $i \in \{2, 3, \cdots, 2n-1\}$. $\square$

De todos os ciclos de comprimento minimal $2n$ satisfazendo as propriedades do Lema 3.2.2. Tomemos

$$\Delta: \quad \begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & \cdots & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 & & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

onde todos os f_{2k} são injetivos e todos os f_{2k-1} são sobrejetores tal que cumpre a seguinte propriedade:

$dim_{\Bbbk}(X_0) + dim_{\Bbbk}(Hom_A(X_1, X_3))$ é minimal.

Lema 3.2.5. *No ciclo Δ, se $Hom_A(X_i, X_i) \cong \Bbbk$ para todo i e $f \in Hom_A(X_0, X_1)$ não nulo, então f é monomorfismo.*

Demonstração: Suponhamos que existe $f \in Hom_A(X_0, X_1)$ não nulo, não monomorfismo. Pela minimalidade do ciclo Δ, temos que f não é epimorfismo. Pois se f é epimorfismo, então o morfismo $f_1 f : X_0 \longrightarrow X_2$ é um epimorfismo, e como f_2 é monomorfismo, então pelo Lema 3.1.1 existem Z um objeto indecomponível em $\mathscr{C}$ e morfismos $\beta_1 : X_0 \longrightarrow Z$ injetora e $\beta_2 : Z \longrightarrow X_3$ sobrejetora. Assim temos o seguinte ciclo de comprimento $2n-2$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, "f_3\beta_2"] & & X_5 \arrow[dr, "f_5"] & & \cdots & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "\beta_1"] & & X_4 \arrow[ur, "f_4"] & & X_6 & & & X_0
\end{tikzcd}$$

assim obtemos uma contradição com a escolha do ciclo Δ. Portanto f não é epimorfismo, assim obtemos a seguinte fatoração

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & X_1 \\ & Z \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

onde Z é indecomponível em $\mathscr{C}$, η é epimorfismo próprio e β é monomorfismo próprio. Assim conseguimos a seguinte sequência exata curta $0 \longrightarrow Ker(\eta) \xrightarrow{u} X_0 \xrightarrow{\eta} Z \longrightarrow 0$. Como f_0 é monomorfismo, então $f_0u : Ker(\eta) \longrightarrow X_1$ é um morfismo não nulo, pois η é um epimorfismo próprio. Aplicando $Hom_A(-, X_1)$ na seqüência anterior temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Hom_A(Z, X_1) \xrightarrow{\eta^*} Hom_A(X_0, X_1) \xrightarrow{u^*} Hom_A(Ker(\eta), X_1)$$

Como $u^*(f_0) = f_0u \neq 0$, então $u^* \neq 0$, de onde obtemos que

$$dim_{\Bbbk}(Hom_A(Z, X_1)) < dim_{\Bbbk}(Hom_A(X_0, X_1)).$$

Da sequência exata curta $0 \longrightarrow Ker(\eta) \xrightarrow{u} X_0 \xrightarrow{\eta} Z \longrightarrow 0$, como $Ker(\eta) \neq 0$, temos que $dim_{\Bbbk}(Z) < dim_{\Bbbk}(X_0)$.

De onde obtemos que

$$dim_{\Bbbk}(Z) + dim_{\Bbbk}(Hom_A(X_1, X_3)) < dim_{\Bbbk}(X_0) + dim_{\Bbbk}(Hom_A(X_1, X_3))$$

Além disso, temos o seguinte ciclo de comprimento $2n$ que cumpre as propriedades do ciclo Δ

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & & X_{2n-1} \arrow[dr, "\eta f_{2n-1}"] & \\ Z \arrow[ur, "\beta"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 & \cdots & & Z \end{tikzcd}$$

de onde obtemos uma contradição pela escolha do ciclo Δ. Assim temos que f é monomorfismo.

$\square$

Dado o ciclo Δ temos que $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$ com f_1 um epimorfismo e f_2 um monomorfismo, então pelo Lema 3.1.1 existem um objeto Y em $\mathscr{C}$ e $g : X_1 \longrightarrow Y$ monomorfismo e $h : Y \longrightarrow X_3$

um epimorfismo tais que

$$(+) \qquad 0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{[f_1\ g]^t} X_2 \oplus Y \xrightarrow{[f_2\ -h]} X_3 \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta, de onde obtivemos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& & Y \arrow[dr, "-h"] & & \\
& X_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & \\
X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4
\end{tikzcd}$$

Seja $Y = \oplus_{i=1}^{r} Y_i$ onde os Y_i são $A-$módulos indecomponíveis, $g = [g_1 \cdots g_r]^t$ e $h = [h_1 \cdots h_r]$.

Lema 3.2.6. *Dado o ciclo Δ e a seqüência (+), seja $Y = \oplus_{i=1}^{r} Y_i$ onde os Y_i são $A-$módulos indecomponíveis, $g = [g_1 \cdots g_r]^t$ e $h = [h_1 \cdots h_r]$. Se $Hom_A(X_i, X_i) \cong \Bbbk$ para todo i e para todo X_i no ciclo Ω, então*

(i) $r \geq 2$.

(ii) *O morfismo h_i é não nulo para todo i.*

Demonstração: Se $r = 1$, então temos o seguinte ciclo de comprimento $2n-2$ satisfazendo as propriedades do Lema 3.2.2

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "f_3 h"] & & X_5 \arrow[dr, "f_5"] & \cdots & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "g f_0"] & & X_4 \arrow[ur, "f_4"] & & X_6 & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

Chegamos a uma contradição com a escolha do ciclo Δ que é de comprimento minimal $2n$.

Vamos mostrar (ii). Suponhamos que existe um k tal que $h_k = 0$, vejamos que $Y_k \subseteq Ker[f_2\ -h]$.

Seja $x_k \in Y_k$, definamos $y = (0,...0,x_k,0...0)$ de onde obtemos $(0,y) \in X_2 \oplus Y$ assim

$$\begin{aligned}[f_2\ -h][0\ y]^t &= f_2(0) - h(y) \\ &= -h(y) \\ &= -h_1(0) - \cdots - h_k(x_k) - \cdots - h_r(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

e concluímos que $x_k \in Ker[f_2\ -h]$, portanto $Y_k \subseteq Ker[f_2\ -h] = Im[f_1\ g]^t$. Assim, Y_k é um somando direto da imagem de $[f_1\ g]^t$. Logo como $X_1 \cong Im[f_1\ g]$, então Y_k é um somando direto de X_1. Assim, $Y_k \cong X_1$, pois X_1 é indecomponível. Então a sequência

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y \oplus X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$$

cinde. Assim, temos que $X_2 \oplus Y \cong X_1 \oplus X_3$, isto é, $X_2 \cong X_1$ e $Y \cong X_3$ ou $X_2 \cong X_3$ e $Y \cong X_1$, como Y é decomponível, pois $r \geq 2$, temos que X_1 é decomponível ou X_3 é decomponível, de onde obtemos uma contradição com a definição de ciclo. $\square$

Proposição 3.2.1. *Dado o ciclo Δ e a seqüência (+), seja $Y = \oplus_{i=1}^r Y_i$ onde os Y_i são $A-$módulos indecomponíveis, $g = [g_1\ \cdots\ g_r]^t$ e $h = [h_1\ \cdots\ h_r]$. Se $Hom_A(X_i,X_i) \cong \Bbbk$ para todo i e para todo X_i no ciclo Δ, então existe um i tal que $Ext_A^1(X_i,X_i) \neq 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $Ext_A^1(X_i,X_i) = 0$ para todo i. Retomando a sequência

$$(+) \qquad 0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{[f_1\ g]^t} X_2 \oplus Y \xrightarrow{[f_2\ -h]} X_3 \longrightarrow 0$$

e aplicando o funtor $Hom_A(X_0,-)$ obtemos:

$$0 \longrightarrow Hom_A(X_0,X_1) \xrightarrow{[f_1\ g]_*^t} Hom_A(X_0,X_2 \oplus Y) \longrightarrow Hom_A(X_0,X_3)$$

Pelo Lema 3.2.4 havíamos concluímos que $Hom_A(X_0,X_3) = 0 = Hom_A(X_0,X_2)$. Assim $[f_1\ g]_*^t : Hom_A(X_0,X_1) \to Hom_A(X_0,Y)$ é um isomorfismo. Vamos provar agora que todo morfismo não nulo em $Hom_A(X_0,Y_i)$ para todo $1 \leq i \leq r$ é um monomorfismo.

Seja $0 \neq f \in Hom_A(X_0,Y_k)$, então $0 \neq i_k f \in Hom_A(X_0,Y)$ é um morfismo não nulo onde $i_k : Y_k \longrightarrow Y$ é a inclusão. Segue do isomorfismo que existe $u \in Hom_A(X_0,X_1)$ não nulo tal que $[f_1\ g]_*^t(u) = i_k f$. então $gu = i_k f$ e como g e u são monomorfismos (u é monomorfismo pelo Lema 3.2.5), então $i_k f$ é monomorfismo. Logo f é monomorfismo.

Agora como f_0 e g são não nulas e monomorfismos, então existe um $k \in \{1, 2, ..., r\}$ tal que $g_k f_0 \neq 0$ e pelo Lema 3.2.6 temos que $h_k : Y_k \longrightarrow X_3$ é não nulo. Vejamos que h_k não é epimorfismo nem monomorfismo.

Se h_k for epimorfismo, então temos o ciclo

$$\begin{tikzcd}
 & Y_k \arrow[dr, "f_3 h_k"] & & X_5 \arrow[dr, "f_5"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "g_k f_0"] & & X_4 \arrow[ur, "f_4"] & & X_6 \quad \cdots & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

Onde o morfismo $g_k f_0$ é não nulo e monomorfismo, pois provamos que todo morfismo não nulo de $Hom_A(X_0, Y_k)$ é monomorfismo,e $f_3 h_k$ é epimorfismo pois f_3 e h_k são epimorfismos, contradizendo assim a minimalidade do ciclo Δ.

Suponhamos que h_k é monomorfismo, obtemos

$$\begin{tikzcd}
 & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_5 \arrow[dr, "f_5"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\
X_0 \arrow[ur, "h_k g_k f_0"] & & X_4 \arrow[ur, "f_4"] & & X_6 \quad \cdots & & X_{2n} = X_0
\end{tikzcd}$$

que é um ciclo de comprimento $2n-2$ cumprindo a propriedade do Lema 3.2.2, contradição com a escolha do ciclo Δ.

Aplicando $Hom_A(-, X_3)$ na sequência (+) e utilizando que $Ext^1_A(X_i, X_i) = 0$, obtemos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow Hom_A(X_3, X_3) \longrightarrow Hom_A(X_2 \oplus Y, X_3) \longrightarrow Hom_A(X_1, X_3) \longrightarrow 0$$

No que segue, para facilitar, vamos a usar a notação $dim_{\Bbbk}(Hom_A(X, Y))$ por $< X, Y >$.

Assim, temos que $< X_2 \oplus Y, X_3 >=< X_1, X_3 > + < X_3, X_3 >$, e como $< X_3, X_3 >= 1$, então

$$\begin{aligned} < X_1, X_3 > &= \sum_{i=1}^{r} < Y_i, X_3 > + < X_2, X_3 > -1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{r} < Y_i, X_3 > \text{ pois } < X_2, X_3 > \geq 1 \\ &= < Y_k, X_3 > + \sum_{i=1, i\neq k}^{r} < Y_i, X_3 > \\ &> < Y_k, X_3 > \text{ pois } r \geq 2 \text{ e } h_i \neq 0 \text{ pelo Lema 3.2.6.} \end{aligned}$$

Como h_k não é epimorfismo, então a $Im(h_k)$ é um submódulo de X_3. Como h_k não é monomorfismo podemos dizer que $Im(h_k) = M \oplus N$ onde M é indecomponível e temos que o morfismo πh_k não é isomorfismo, de onde obtemos que

$$\begin{tikzcd} & Y_k \arrow[dr, "\pi h_k"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\ X_0 \arrow[ur, "g_k f_0"] & & M \arrow[ur, "i"] & & X_4 \quad \cdots & & X_{2n} = X_0 \end{tikzcd}$$

é um ciclo de comprimento $2n$ satisfazendo a propriedade do Lema 3.2.2 tal que

$$< Y_k, X_3 > + dim_{\Bbbk}(X_0) < dim_{\Bbbk}(X_0) + < X_1, X_3 >$$

contradição pela escolha do ciclo Δ.

Assim concluímos que existe i tal que $Ext_A^1(X_i, X_i) \neq 0$. $\square$

Teorema 3.2.1. *Seja $A = \Bbbk\vec{\Delta}$, onde Δ é uma aljava finita sem ciclos orientados e seja $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $mod\ A$ fechada por extensões e fechada por somandos diretos. Se $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um $A-$módulo indecomponível Z tal que $End_A(Z) \ncong \Bbbk$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathscr{C}$ contém um ciclo, então pelo Lema 3.2.2 temos que $\mathscr{C}$ contém um ciclo de comprimento par da seguinte forma

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\ X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 \quad \cdots & & X_{2n} = X_0 \end{tikzcd}$$

onde todos os f_{2k} são injetivos e todos os f_{2k-1} são sobrejetores. Dentre todos os ciclos de comprimento minimal $2n$ com a propriedade do ciclo anterior, tomemos

$$\Omega: \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & X_1 \arrow[dr, "f_1"] & & X_3 \arrow[dr, "f_3"] & & X_{2n-1} \arrow[dr, "f_{2n-1}"] & \\ X_0 \arrow[ur, "f_0"] & & X_2 \arrow[ur, "f_2"] & & X_4 \quad \cdots & & X_{2n} = X_0 \end{tikzcd}$$

tal que $dim_{\mathbb{k}}(X_0) + dim_{\mathbb{k}}(Hom_A(X_1, X_3))$ é minimal.

Se existe i tal que $Hom_A(X_i, X_i) \not\cong \mathbb{k}$, terminamos a prova. Suponhamos que $Hom_A(X_i, X_i) \cong \mathbb{k}$ para todo i, então pela Proposição 3.2.1 temos que existe i tal que $Ext^1_A(X_i, X_i) \neq 0$, então existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X_i \longrightarrow 0$$

que não cinde, aplicando o funtor $Hom_A(X_i, -)$ na seqüência temos que

$$0 \longrightarrow Hom_A(X_i, X_i) \xrightarrow{f_*} Hom_A(X_i, E) \xrightarrow{g_*} Hom_A(X_i, X_i) \longrightarrow Ext^1_A(X_i, X_i)$$

Vejamos que $g_* = 0$.

Seja $\theta : X_i \longrightarrow E$ tal que $0 \neq g_*(\theta) = g\theta \in End_A(X_i)$, como o espaço de endomorfismos de X_i é isomorfo a corpo $\mathbb{k}$, existe $\beta : X_i \longrightarrow X_i$ tal que $g(\theta\beta) = I_{X_i}$, portanto g é epimorfismo que cinde, contradição pois g é um epimorfismo que não cinde. Assim f_* é um isomorfismo, isto é,

$$Hom_A(X_i, X_i) \cong Hom_A(X_i, E)$$

Como $Hom_A(X_i, X_i) \cong \mathbb{k}$, provemos que E é indecomponível. Se não for indecomponível, então existe uma descomposição de $E = E_1 \oplus E_2$ com E_2 indecomponível tal que $Hom_A(X_i, E_2) \neq 0$. Assim, pelo isomorfismo temos que

$$\mathbb{k} \cong Hom_A(X_i, X_i) \cong Hom_A(X_i, E_1) \oplus Hom_A(X_i, E_2)$$

de onde $Hom_A(X_i, E_1) = 0$. Vamos provar que neste caso a seqüência

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X_i \longrightarrow 0$$

cinde o que nos dará uma contradição. Podemos escrever os morfismo $f = [f_1\ f_2]^t$ e $g =$

$[g_1\ g_2]$ onde $f_j : X_i \to E_j$ e $g_j : E_j \to X_i$ para $j = 1,2$. Como $Hom_A(X_i, E_1) = 0$, então $f_1 = 0$ e $0 \neq f_2 \in Hom_A(X_i, E_2) \cong Hom_A(X_i, X_i) \cong \mathbb{k}$. Assim temos que f_2 é isomorfismo, isto é, existe $\beta : E_2 \to X_i$ tal que $\beta f_2 = I_{X_i}$. Definamos $\alpha := [0\ \beta] : E_1 \oplus E_2 \to X_i$, α é um morfismo tal que

$$\alpha f = [0\ \beta][0\ f_2]^t = \beta f_2 = I_{X_i}$$

de onde obtemos que f é um monomorfismo que cinde, contradição. Assim E é indecomponível. Como $\mathscr{C}$ é fechado para extensões e $X_i \in \mathscr{C}$, então $E \in \mathscr{C}$.

Considere $fg \in End(E)$. Temos que fg é não nulo, pois se $fg = 0$, então como f é monomorfismo temos que $g = 0$ e como g é epimorfismo, então $X_i = 0$ contradição com a definição de ciclo. Além disso, temos que fg não é isomorfismo. Se fg for isomorfismo, então f seria epimorfismo que cinde e g seria um monomorfismo que cinde.

Assim temos que E é indecomponível em $\mathscr{C}$ e tal que $End_A(E) \ncong \mathbb{k}$. □

Capítulo 4

Propriedades homológicas de álgebras hereditárias por partes

Lembrando que as álgebras de radical quadrado zero, são hereditárias por partes se, e somente se, a dimensão global forte é finita. Em 2007 Happel e Zacharia provaram esta equivalência sem a hipótese de ser radical quadrado zero. Apresentaremos neste capítulo a prova deste resultado e mostraremos que a dimensão global forte está limitada, em geral, pelo número de shifts no qual a categoria de módulos está mergulhada na categoria derivada da categoria hereditária.

Como a categoria de módulos de uma álgebra A está mergulhada na sua categoria derivada, e supondo que esta categoria é derivadamente equivalente a categoria derivada limitada $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ de uma categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$, podemos dizer que a categoria $modA$ está mergulhada na $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\mathscr{H}[i]$ e existe um número r máximo de shifts em que aparece os módulos indecomponíveis de $indA$. Este número máximo nos ajudará a limitar a dimensão global forte. É natural perguntar qual o objeto na categoria derivada que realiza a dimensão global forte.

Estudaremos os objetos que realizam a dimensão global forte, e apresentaremos uma caracterização homológica para estes objetos. Ao longo deste capítulo vamos considerar $\Bbbk$ como um corpo algebricamente fechado e todas as álgebras são $\Bbbk-$álgebras de dimensão finita.

4.1 Álgebras hereditárias por partes

Nesta seção apresentamos a definição de álgebras hereditárias por partes e relacionaremos com o conceito de dimensão global forte.

Definição 4.1.1. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra, Λ é uma $\mathbb{k}-$**álgebra hereditária por partes** quando existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ tal que as categorias limitadas derivadas $\mathscr{D}^b(\Lambda)$ e $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ são equivalentes como categorias trianguladas [WEI94], [MIL]. A álgebra Λ é chamada do tipo $\mathscr{H}$.*

Para estudar as $\mathbb{k}-$álgebras hereditárias por partes precisamos do conceito de complexo inclinante [HR99].

Definição 4.1.2. *Seja $T^\bullet$ um objeto em $\mathscr{D}^b(\Lambda)$, $T^\bullet$ é um **complexo inclinante** quando*

1) $Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0$ para todo $n \neq 0$.

2) A categoria aditiva $add(T^\bullet)$ de somando diretos de somas finitas de cópias de $T^\bullet$, gera a categoria de homotopia $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ dos complexos limitados de $\Lambda-$módulos projetivos como uma categoria triangulada.

Dizemos que a classe de objetos $add(T^\bullet)$ gera a categoria de homotopia $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ como uma categoria triangulada, se não existe subcategoria plena e própria de $\mathscr{C}$, fechada por isomorfismo, e que contém esta classe de objetos. Algumas propriedades importantes dos objetos inclinantes pode ser encontrados em [HRS94] e [HR99]. A demonstração da seguinte proposição está em [RIC89].

Proposição 4.1.1. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra. Λ é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes se, e somente se, existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ tal que:*

(i) $Hom_{\mathscr{H}}(X, Y)$ e $Ext^1_{\mathscr{H}}(X, Y)$ são $\mathbb{k}-$espaços vetoriais de dimensão finita para todo X e Y objetos em $\mathscr{H}$.

(ii) Existe um complexo inclinante $T^\bullet$ em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ tal que $\Lambda \cong End_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet)$.

Observação 4.1. O complexo inclinante dado na proposição anterior pode ser obtido da seguinte forma:

Se Λ é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes e $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ é uma equivalência triangulada, então $T^\bullet = F({}_\Lambda\Lambda)$ é um complexo inclinante e $\Lambda \cong End_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(T^\bullet)$.

O teorema seguinte ajuda a identificar através do aljava ordinária se esta é hereditária por partes.

Teorema 4.1.1. *Uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditárias por partes é uma álgebra quociente de uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária de dimensão finita.*

Demonstração: A demostração do Teorema esta em [HAP88, pág, 156]. □

Dada Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por parte e $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ uma equivalência entre categorias trianguladas. Podemos supor que F é normalizada, ou seja, que existe $r \geq 0$ tal que para todo $\Lambda-$módulo indecomponível X temos que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathscr{H}[i]$, e existem $\Lambda-$módulos indecomponíveis X e Y tal que $F(X) \in \mathscr{H}[0]$ e $F(Y) \in \mathscr{H}[r]$. O número r não é único, depende da escolha de $\mathscr{H}$. Vejamos que F é normalizada. isto é, vejamos que existe $r \geq 0$ com a propriedade anterior.

Para mostrar isso podemos fazer assim primeiro é claro que como os projetivos indecomponíveis são finitos os injetivos também a menos de isomorfismos eles estão numa parte finita digamos de 0 a t mas dado um módulo qualquer existe um morfismo de um projetivo nele, como não existe morfismos de $\mathscr{H}[t]$ a $\mathscr{H}[k]$ com $k > t+2$, da mesma maneira todo modulo tem um morfismo não nulo num injetivo e como não existe morfismo de $\mathscr{H}[l]$ para $\mathscr{H}[0]$ para $l < -1$, assim temos que existe $r \geq 0$ tal que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathscr{H}[i]$ para todo X módulo indecomponível.

4.1.1 Dimensão global forte

Nesta subseção vamos apresentar a definição de dimensão global forte de uma álgebra de dimensão finita, continuando com um teorema que classifica as álgebras hereditárias por partes via a dimensão global forte. Além disso, apresentaremos algumas propriedades importantes sobre o complexo indecomponível de comprimento maximal na categoria de homotopia de uma álgebra de dimensão global forte finita.

Seja $\mathscr{A}$ uma $\mathbb{k}-$categoria aditiva Krull-Schmidt, e seja $\mathscr{C}^b(\mathscr{A})$ a categoria de complexos limitados sobre $\mathscr{A}$ que é Frobenius (ver [HAP88]).

Denotamos por $\mathscr{K}^b(\mathscr{A})$ a correspondente categoria estável (ou de homotopia). Se $X^\bullet = (X^i, d^i) \in \mathscr{K}^b(\mathscr{A})$ é um complexo pode-se considerar uma imagem $\bar{X}^\bullet = (\bar{X}^i, \bar{d}^i)$ de $X^\bullet$ em $\mathscr{C}^b(\mathscr{A})$ sem somandos diretos projetivos indecomponíveis. Claramente $\bar{X}^\bullet$ é unicamente determinada por $X^\bullet$ a menos de isomorfismo de complexos limitados em $\mathscr{C}^b(\mathscr{A})$. Assim, o que se segue está bem definido:

Se $0 \neq X^\bullet \in \mathscr{K}^b(\mathscr{A})$, existem $r,\ s \in \mathbb{Z}$ com $r \leq s$ tal que $\bar{X}^r \neq 0 \neq \bar{X}^s$, $\bar{X}^k = 0$ para todo $k < r$ e $\bar{X}^k = 0$ para todo $k > s$. Então, por definição, o comprimento de $X^\bullet$ é definido como $\ell(X^\bullet) = s - r$. Ao longo deste trabalho vamos sempre identificar $X^\bullet$ com $\bar{X}^\bullet$.

Se Λ é uma $\mathbb{k}-$álgebra de dimensão finita, denotamos por ${}_\Lambda\mathscr{P}$ a subcategoria plena de $mod\Lambda$ consistindo dos $\Lambda-$módulos projetivos finitamente gerados. Então definimos a **dimensão global forte** de Λ da seguinte forma:

$$s.gl.dim\Lambda = sup\left\{\ell(P^\bullet) | P^\bullet \in \mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P}) \text{ indecomponível}\right\}.$$

4.1.2 Teorema da dimensão global forte

O seguinte teorema leva a uma caracterização das álgebras hereditárias por partes, via a dimensão global forte.

Teorema 4.1.2. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra de dimensão finita. Λ é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes se, e somente se, $s.gl.dim\Lambda < \infty$*

Demonstração: $\Rightarrow$ Suponhamos que Λ é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\mathbb{k}-$categoria abelina hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, portanto existe $r \geq 0$ tal que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^r \mathscr{H}[i]$ para todo $\Lambda-$módulo indecomponível X.

Seja $P^\bullet = (P^i, d^i) \in \mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ indecomponível de comprimento $t \geq 0$, aplicando o funtor shift (ver definição em [MIL]) em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$. Podemos supor que $P^0 \neq 0$, $P^i = 0$ para todo $i \geq 1$, $P^{-t} \neq 0$ e $P^i = 0$ para todo $i \leq -t-1$.

O objeto $P^\bullet$ não tem somandos diretos projetivos indecomponíveis em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$, então pelo Lema 2.3.1 temos que

$$Hom_{\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})}(P^0, P^\bullet) \neq 0 \text{ e } Hom_{\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})}(P^\bullet, P^{-t}[t]) \neq 0$$

assim temos que

$$Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(P^0), F(P^\bullet)) \neq 0 \text{ e } Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(P^\bullet), F(P^{-t}[t])) \neq 0$$

Como $P^\bullet$ é indecomponível, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(P^\bullet) \in \mathscr{H}[m]$ e como P^0 e $P^{-t}[t]$ são Λ-módulos indecomponíveis, então existe $k \in \{0, 1, ..., r\}$ tal que $F(P^0) \in \mathscr{H}[k]$. Pelo Teorema 2.4.1 temos $0 \leq m \leq r+1$ e existe $n \in \{0, 1, ..., r\}$ tal que $F(P^{-t}) \in \mathscr{H}[n]$, portanto $F(P^{-t}[t]) \in \mathscr{H}[n+t]$ e utilizando o Teorema 2.4.1 temos que $t-1 \leq m \leq n+r$, assim temos que $t-1 \leq$

$m \leq r+1$, de onde $t \leq r+2$. Concluímos que $s.gl.dim\Lambda \leq r+2$, isto é, a dimensão global forte é finita.

$\Leftarrow$ Suponhamos que Λ não é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, básica e $\Lambda \neq \mathbb{k}$. Como Λ não é uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então pelo Teorema 2.4.2 temos que para todo X em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ existe um caminho forte de $X[1]$ para X em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$, então temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um caminho forte de $X[n]$ para X em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$.

Seja P um $\Lambda-$módulo projetivo indecomponível e $n \in \mathbb{N}$, então existe um caminho forte de $P[n]$ para P em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$, portanto pelo Teorema 2.4.3 existe um $t \geq 0$ e $Q^\bullet_{n,t}$ um objeto indecomponível em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ tal que $P[n+t] \longrightarrow Q^\bullet_{n,t} \longrightarrow P$ é um caminho forte em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$, portanto

$$Hom_{\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})}(P[n+t], Q^\bullet_{n,t}) \neq 0 \text{ e } Hom_{\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})}(Q^\bullet_{n,t}, P) \neq 0$$

Assim temos pelo Lema 2.3.1 que ${Q^\bullet_{n,t}}^{-(n+t)} \neq 0$ e ${Q^\bullet_{n,t}}^{0} \neq 0$ portanto $\ell(Q^\bullet_{n,t}) \geq n+t$, então a dimensão global forte é infinita. $\square$

Corolário 4.1. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, $F : \mathcal{D}^b(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ uma equivalência normalizada e $r > 0$ tal que para todo $\Lambda-$módulo indecomponível X temos que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathcal{H}[i]$, então $s.lg.dim\Lambda \leq r+2$.*

4.2 O objeto que realiza a dimensão global forte

No corolário 4.1 apresentamos um limitante para a dimensão global forte de uma álgebra hereditária por partes. Se uma álgebra é hereditária, os complexos indecomponíveis na categoria de homotopia tem comprimento um (ver [HAP88]), isto é, todos os objetos indecomponíveis realizam a dimensão global forte.

Nesta seção apresentaremos uma proposição que leva a algumas propriedade importantes sobre o complexo indecomponível de comprimento maximal na categoria de homotopia e daremos um exemplo para ver como é o complexo de comprimento maximal.

Denotamos por $\mathcal{C}$ uma $\mathbb{k}-$categoria triangulada Krull-Schmidt, com a propriedade de que para todo $X,\ Y \in \mathcal{C}$ a dimensão de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é finita como $\mathbb{k}-$espaço vetorial. Para um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ existe um triângulo $X \to Y \to C_f \to X[1]$ em $\mathcal{C}$. O objeto C_f é unicamente determinado a menos de isomorfismo e chama-se o cone de f.

Proposição 4.2.1. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo não nulo e não invertível com X, Y objetos indecomponíveis e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} C_f \xrightarrow{v} X[1]$ um triângulo. Se $f^* : Hom(Y, X[1]) \to Hom(X, X[1])$ é injetor, então C_f é indecomponível.*

Demonstração: Suponhamos que C_f é decomponível, isto é, $C_f = Z_1 \oplus Z_2$ onde Z_1 é indecomponível, assim temos que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{[u_1\ u_2]^t} Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{[v_1\ v_2]} X[1]$. Como X e Y são indecomponíveis e f é não nulo e não invertível, então pelo Lema 2.2.3 obtemos que $v_1 u_1$ é não nulo, assim temos que $f^*(v_1 u_1) \neq 0$, por outro lado temos que $f^*(v_1 u_1) = v_1 u_1 f = v_1 \pi u f = 0$, contradição. De onde obtemos que o cone de f é indecomponível. $\square$

A seguir, apresentamos algumas propriedades sobre o complexo que assume o valor da dimensão global forte.

Proposição 4.2.2. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita com $s.gl.dim\Lambda < \infty$ e seja $P^\bullet = (P^i, e^i)$ em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ indecomponível de comprimento d, suponhamos que $P^\bullet = (P^i, e^i)$ tem a seguinte forma:*

$$P^\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{e^0} P^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{d-1} \xrightarrow{e^{d-1}} P^d \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

onde $P^0 \neq 0$ e $P^d \neq 0$. Então

1. *$H^d(P^\bullet) \neq 0$.*

2. *Se $d = s.gl.dim\Lambda$, então e^0 é um morfismo injetor.*

3. *Se $d = s.gl.dim\Lambda$, então $Hom_\Lambda(Coker(e^{d-1}), \Lambda) = 0$.*

Demonstração: (1) Suponhamos que $H^d(P^\bullet) = 0$, então $Im(e^{d-1}) = P^d$, isto é, e^{d-1} é um epimorfismo, agora como P^d é um $\Lambda-$módulo projetivo, temos que e^{d-1} é um epimorfismo que cinde. Assim, temos que $0 \to K \xrightarrow{i} P^{d-1} \xrightarrow{e^{d-1}} P^d \to 0$ é uma sequência exata curta que cinde, onde $K = Ker(e^{d-1})$ e $i : K \to P^{d-1}$ é a inclusão. De onde temos que i é um monomorfismo que cinde, isto é, existe $g : P^{d-1} \to K$ tal que $gi = I_K$ um homomorfismo de $\Lambda-$módulos, de onde temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_K"] & P^{d-1} \arrow[r, "e^{d-1}"] \arrow[d, "{[g\ e^{d-1}]^t}"] & P^d \arrow[r] \arrow[d, "I_{P^d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "{[I_K\ 0]^t}"] & K \oplus P^d \arrow[r, "{[0\ I_{P^d}]}"] & P^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

.

- $[0\ I_{P^d}][g\ e^{d-1}]^t = 0g + I_{P^d} e^{d-1} = e^{d-1}$.

- $[g\ e^{d-1}]^t i = [g i\ e^{d-1} i]^t = [I_K\ 0]^t$, pois $e^{d-1} i = 0$.

Assim, como I_K e I_{P^d} são isomorfismos, temos que $[g\ e^{d-1}]^t$ é um isomorfismo. De onde temos que K é um $\Lambda-$módulo projetivo e existe $[\alpha\ \beta] : K \oplus P^d \to P^{d-1}$ a inversa de $[g\ e^{d-1}]^t$ tal que $\alpha g = I_{P^{d-1}} - \beta e^{d-1}$ e $e^{d-1}\alpha = 0$.

Agora definamos o seguintes complexos em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$

$Q^\bullet = (Q^i, \psi^i)$, onde $Q^{d-1} = Q^d = P^d$, $Q^i = 0$ para todo $i \notin \{d-1, d\}$, $\psi^i = 0$ para todo $i \neq d-1$ e $\psi^{d-1} = e^{d-1}\beta$.

$R^\bullet = (R^i, \varphi^i)$, onde $R^i = P^i$ para todo $i < d-1$, $R^{d-1} = K$, $R^i = 0$ para todo $i > d-1$, $\varphi^i = e^i$ para todo $i < d-2$, $\varphi^{d-2} = g e^{d-2}$ e $\varphi^i = 0$ para todo $i > d-2$.

Somando os complexos anteriores temos o seguinte complexo

$$R^\bullet \oplus Q^\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow P^{d-2} \xrightarrow{[\varphi^{d-2}\ 0]^t} K \oplus P^d \xrightarrow{[0\ \psi^{d-1}]} P^d \longrightarrow 0 \cdots$$

Agora definamos o seguinte morfismo de complexos $f : R^\bullet \oplus Q^\bullet \to P^\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
R^\bullet \oplus Q^\bullet : \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & P^{d-2} \arrow[r, "{[\varphi^{d-2}\ 0]^t}"] \arrow[d, "I_{P^{d-2}}"] & K \oplus P^d \arrow[r, "{[0\ \psi^{d-1}]}"] \arrow[d, "{[\alpha\ \beta]}"] & P^d \arrow[r] \arrow[d, "I_{P^d}"] & 0 \cdots \\
P^\bullet : & \cdots \arrow[r] & P^{d-2} \arrow[r, "e^{d-2}"] & P^{d-1} \arrow[r, "e^{d-1}"] & P^d \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Vejamos que os quadrados comutam.

$$\begin{aligned}
[\alpha\ \beta][\varphi^{d-2}\ 0]^t &= \alpha\varphi^{d-2} \\
&= \alpha g e^{d-2} \\
&= (I_{P^{d-1}} - \beta e^{d-1}) e^{d-2} \\
&= e^{d-2} - \beta e^{d-1} e^{d-2} \\
&= e^{d-2}.
\end{aligned}$$

E lembrando $e^{d-1}\alpha = 0$ e $\psi^{d-1} = e^{d-1}\beta$. Temos que $e^{d-1}[\alpha\ \beta] = [e^{d-1}\alpha\ e^{d-1}\beta] = [0\ \psi^{d-1}]$. Assim f é um morfismo entre os dois complexos.

Agora como $[\alpha\ \beta]$ é isomorfismo, então f é um quase-isomorfismo em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$, de onde concluímos que $P^\bullet$ é decomponível. Contradição, por hipótese temos que $P^\bullet$ é um complexo indecomponível em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$. De onde concluímos que $H^d(P^\bullet) \neq 0$.

Agora provaremos (2). Suponhamos que e^0 não é injetivo, isto é, o kernel de e^0 é não nulo. Seja $X = Ker(e^0)$ tomando a cobertura projetiva de X temos $g : Q \to X$ um morfismo não nulo com Q um $\Lambda-$módulo projetivo. Seja $Q = \oplus_{i=0}^{p} Q_i$ uma descomposição de Q onde Q_i são $\Lambda-$módulos projetivos indecomponíveis. Agora como g é não nulo, existe i tal que $g_i : Q_i \to X$ é um morfismo não nulo, assim temos que g_i induz um morfismo não nulo $\tilde{g}_i : Q_i^\bullet[0] \to P^\bullet$ em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$, com $j : X \to P^0$ temos que:

$$\begin{tikzcd}
Q_i^\bullet[0] \arrow[d, "\tilde{g}_i"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "jg_i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
P^\bullet & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P^0 \arrow[r, "e^0"] & P^1 \arrow[r, "e^1"] & P^2 \arrow[r, "e^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se $\tilde{g}_i$ é zero na categoria de homotopia, então $jg_i = 0$, isto é, $g_i = 0$. Temos que $H^d(Q_i^\bullet[0]) = 0$ e $H^d(P^\bullet) \neq 0$ de onde concluímos que $\tilde{g}_i$ é não nulo e não invertível em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$, então temos que $Q_i^\bullet[0] \xrightarrow{\tilde{g}_i} P^\bullet \to C_{g_i} \to Q_i^\bullet[1]$ é um triângulo e $Hom(P^\bullet, Q_i^\bullet[1]) = 0$, pela Proposição 4.2.1 C_{g_i} é indecomponível em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ e $\ell(C_{g_i}) \geq d+1 > d$, contradição com a dimensão global forte.

Agora provaremos (3). Suponhamos que $Hom(coker(e^{d-1}), \Lambda) \neq 0$, seja $f : Coker(e^{d-1}) \to \Lambda$ um morfismo não nulo, temos que $\Lambda = \oplus_{i=1}^{m} P_i$, onde P_i são $\Lambda-$módulos projetivos indecomponíveis. Então existe um Q projetivo indecomponível tal que $q : Coker(e^{d-1}) \to Q$ é não nulo e não invertível, então induz um morfismo $\tilde{q} : P^\bullet \to Q^\bullet[-d]$ não nulo.

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[d, "\tilde{q}"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r, "e^0"] \arrow[d] & P^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P^{d-1} \arrow[r, "e^{d-1}"] \arrow[d] & P^d \arrow[r] \arrow[d, "g\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Q^\bullet[-d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Vejamos que $\tilde{q}$ não é invertível. Temos que $H^d(Q^\bullet[-d]) \cong Q$ e $H^d(P^\bullet) \cong Coker(e^{d-1})$, se $\tilde{q}$ é quase-isomorfismo, então q é invertível. Mas q não pode ser invertível por que se não $Coker(e^{d-1})$ seria projetivo, isto é, cindiria a projeção natural de P^d para $Coker(e^{d-1})$. Isso faria com que $Im(e^{d-1})$ fosse somando direto de P^d, o que é absurdo, pois o complexo $P^\bullet$ é indecomponível. Assim temos que $\tilde{q}$ é não nulo e não invertível. Além disso, temos que $Hom(Q^\bullet[-d], P^\bullet[1]) = 0$, então pela Proposição 4.2.1 concluímos que o cone de $\tilde{q}$ é indecomponível em $\mathscr{K}^b({}_\Lambda\mathscr{P})$ e $\ell(C_{\tilde{q}}) \geq d+1 > d$, portanto temos uma contradição com a dimensão global forte. $\square$

Corolário 4.2. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita com $s.gl.dim\Lambda < \infty$ e seja $P^\bullet =$*

(P^i, e^i) em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ indecomponível de comprimento d, suponhamos que $P^\bullet = (P^i, e^i)$ tem a seguinte forma:

$$P^\bullet: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^0 \xrightarrow{e^0} P^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P^{d-1} \xrightarrow{e^{d-1}} P^d \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

onde $P^0 \neq 0$ e $P^d \neq 0$. Então

(a) Se e^0 não é injetor, então existe um morfismo não nulo e não isomorfismo $f : Q^\bullet[0] \to P^\bullet$ para algum projetivo indecomponível Q tal que $\ell(C_f) \geq d+1$ com C_f indecomponível.

(b) Se $Hom_\Lambda(Coker(e^{d-1}), \Lambda) \neq 0$, então existem um projetivo indecomponível Q e um morfismo $g : P^\bullet \to Q^\bullet[-d]$ não nulo e não isomorfismo tal que $\ell(C_g) \geq d+1$ com C_g indecomponível.

Proposição 4.2.3. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e $s.gl.dim\Lambda < +\infty$. Se $d = gl.dim\Lambda = s.gl.dim\Lambda$, então existe um complexo indecomponível $P^\bullet$ em $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$ de comprimento maximal d tal que $H^j(P^\bullet) \neq 0$ exatamente para um j.*

Demonstração: Suponhamos que $d = gl.dim\Lambda = s.gl.dim\Lambda$, então existe um $\Lambda-$módulo X tal que a dimensão projetiva de X é igual a d, isto é, existe uma resolução projetiva de X da seguinte forma.

$$0 \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

assim temos o seguinte complexo com P_0 no grau zero

$$P^\bullet : \cdots 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots$$

de onde temos que $H^n(P^\bullet) = 0$ para todo $n \neq 0$ e $H^0(P^\bullet) \cong X$. □

Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra de dimensão finita e $s.gl.dim\Lambda < +\infty$, sejam $n = gl.dim\Lambda$ e $d = s.gl.dim\Lambda$. Se $d > n$ não podemos pensar que todos os complexos indecomponíveis de comprimento maximal d são da forma da Proposição 4.2.3. Em geral, pouco se sabe sobre os complexos de comprimento maximal, isto é, aqueles que assumem o valor da dimensão global forte. Várias questões precisam ser respondidas. Como são caracterizados? Onde encontrá-los na categoria? É possível construí-los a partir de objetos indecomponíveis da categoria de módulos? Acreditamos que a resposta a estas questões nos ajudaria a calcular o valor da dimensão global forte.

A seguir daremos um exemplo de uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes de dimensão global 3 e dimensão global forte 4, tal que não existem complexos indecomponíveis da forma:

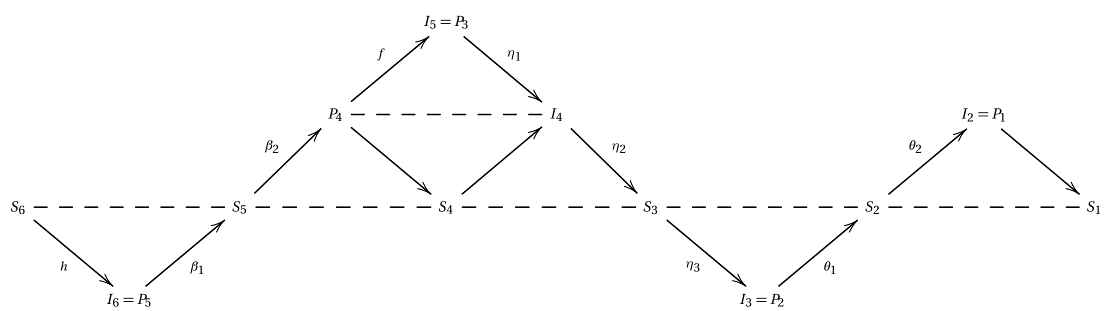
$$P^{\bullet}: \cdots 0 \to P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to 0 \to \cdots$$

de comprimento maximal 4 com $H^i(P^{\bullet}) = 0$ para i=0, 1, 2, 3.

Exemplo 4.2.1. *Considere a seguinte aljava* $\vec{\Delta}$

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5 \xrightarrow{\eta} 6$$

Seja I *o ideal bilateral da* $\mathbb{k}-$*álgebra de caminho* $\mathbb{k}\vec{\Delta}$ *gerado por* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ *e* $\delta\eta$ *e seja* $\Lambda = \mathbb{k}\vec{\Delta}/I$. *A aljava de Auslander-Reiten é dado por*



Vejamos que $gl.dim\Lambda = 3$ *e* $s.gl.dim\Lambda = 4$.

Para demonstrar que $gl.dim\Lambda = 3$ *utilizamos o Teorema 1.2.4.*

1. *Simples* S_1, *temos* $0 \to P_4 \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0$, *então* $dp(S_1) = 3$.

2. *Simples* S_2, $0 \to P_4 \to P_3 \to P_2 \to S_2 \to 0$, *então* $dp(S_2) = 2$.

3. *Simples* S_3, $0 \to P_4 \to P_3 \to S_3 \to 0$, *então* $dp(S_3) = 1$.

4. *Simples* S_4, $0 \to P_6 \to P_5 \to P_4 \to S_4 \to 0$, *então* $dp(S_4) = 2$.

5. *Simples* S_5, $0 \to P_6 \to P_5 \to S_5 \to 0$, *então* $dp(S_5) = 1$.

6. $dp(S_6) = 0$.

Assim temos que $gl.dim\Lambda = 3$.

Seja $Q^{\bullet}$ *um complexo de comprimento maximal, que tem a seguinte forma*

$$Q^{\bullet}: \cdots 0 \longrightarrow Q^0 \xrightarrow{e^0} Q^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^{k-1} \xrightarrow{e^{k-1}} Q^k \longrightarrow 0 \cdots$$

com Q^i *módulos projetivos, então pela Proposição 4.2.2 temos que* $Hom_{\Lambda}(Coker(e^{k-1}),\Lambda)=0$, *porém nesta álgebra os únicos módulos que não tem morfismo não nulos e não isomorfismo para o* Λ *são* S_4 *e* S_1.

Se $Coker(e^{k-1})=S_4$, *então devíamos ter uma sequência exata* $Q^{k-1}\overset{e^{k-1}}{\to}Q^k\to S_4\to 0$, *logo a cobertura projetiva de* S_4 *que é* P_4 *é somando de* Q^k. *Os únicos* $\Lambda-$*módulos projetivos que possuem morfismos não nulos para* P_4 *é* P_5. *E o único* $\Lambda-$*módulo projetivo que Possui morfismos não nulos para* P_5 *é* $P_6=S_6$. *E para este último não existe morfismo não nulo e não isomorfismo de um* $\Lambda-$*módulo projetivo para* S_6, *então temos que o comprimento do complexo* $Q^\bullet$ *é menor ou igual a 2.*

Agora analisaremos o caso em que $Coker(e^{k-1})=S_1$. *Construiremos o único complexo possível de comprimento 4 com essa propriedade, porém a segunda homologia dará diferente de zero.*

Para o simples S_1 *temos o seguinte complexo:*

$$X^\bullet:\qquad \cdots\longrightarrow 0\longrightarrow P_4\xrightarrow{f}P_3\xrightarrow{\eta}P_2\xrightarrow{\theta}P_1\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

Onde $\eta=\eta_3\eta_2\eta_1$ *e* $\theta=\theta_2\theta_1$, *e para o simples* S_4 *temos o seguinte complexo:*

$$Y^\bullet\qquad \cdots\longrightarrow 0\longrightarrow P_6\xrightarrow{h}P_5\xrightarrow{\beta}P_4\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

com $\beta=\beta_2\beta_1$. *Assim temos que* $X^\bullet$ *e* $Y^\bullet$ *são complexos indecomponíveis em* $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$, *e temos um morfismo* $\tilde{f}:X^\bullet\to Y^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet: \arrow[d, "\tilde{f}"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & P_4 \arrow[r, "f"]\arrow[d, "1"] & P_3 \arrow[r, "\eta"]\arrow[d] & P_2 \arrow[r, "\theta"]\arrow[d] & P_1 \arrow[r]\arrow[d] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \\
Y^\bullet: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h"] & P_5 \arrow[r, "\beta"] & P_4 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

O morfismo $\tilde{f}$ *não é isomorfismo e não é zero, pois se* $\tilde{f}$ *é zero na categoria derivada, então* $P_4\cong P_5$, *o que não ocorre pois todos os projetivos indecomponíveis são não isomorfos. E como* $Hom(Y^\bullet,X^\bullet[1])=0$, *então pela Proposição 4.2.1 temos que o cone de* $\tilde{f}$ *é um complexo indecomponível em* $\mathcal{K}^b({}_\Lambda\mathcal{P})$, *o cone de* $\tilde{f}$ *é*

$$C_{\tilde{f}}:\qquad \cdots\longrightarrow 0\longrightarrow P_6\xrightarrow{h_1}P_4\oplus P_5\xrightarrow{h_2}P_3\oplus P_4\xrightarrow{\chi}P_2\xrightarrow{-\theta}P_1\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

onde $h_1 = [0\ h]^t$, $h_2 = \begin{bmatrix} -f & 0 \\ -1 & \beta \end{bmatrix}$ *e* $\chi = [-\eta\ 0]$. *Vejamos que o cone de* $\tilde{f}$ *é isomorfo a* $Z^\bullet$ *onde* $Z^\bullet$ *é*

$$Z^\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_6 \xrightarrow{h} P_5 \xrightarrow{f\beta} P_3 \xrightarrow{\eta} P_2 \xrightarrow{\theta} P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

definamos o seguinte morfismo de complexos.

$$\begin{tikzcd}
C_{\tilde{f}}: \arrow[d, "\psi"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_6 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "1"'] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "{[0\ 1]}"'] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "{[-1\ f]}"'] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] \arrow[d, "1"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Z^\bullet: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h"] & P_5 \arrow[r, "f\beta"] & P_3 \arrow[r, "\eta"] & P_2 \arrow[r, "\theta"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

é fácil verificar que os quadrados comutam, então ψ *é um morfismo de complexos.*

Agora defina-se o seguinte morfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
Z^\bullet: \arrow[d, "\varphi"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_6 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"'] & P_5 \arrow[r, "f\beta"] \arrow[d, "{[0\ 1]^t}"'] & P_3 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "{[\beta\ 1]^t}"'] & P_2 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "1"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
C_{\tilde{f}}: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h_1"] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

de onde temos que $\varphi\psi$ *é*

$$\begin{tikzcd}
C_{\tilde{f}}: \arrow[d, "\varphi\psi"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_6 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "1"'] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}"'] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 1 & -f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}"'] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] \arrow[d, "1"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
C_{\tilde{f}}: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h_1"] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

assim $\varphi\psi$ *é homotópico a identidade no cone de* $\tilde{f}$, *pois*

$$\begin{tikzcd}
C_{\tilde{f}}: \arrow[d, "\varphi\psi - I_{C_{\tilde{f}}}"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_6 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "0"'] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} -1 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}"'] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "{\begin{bmatrix} 0 & -f \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}"'] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] \arrow[d, "0"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
C_{\tilde{f}}: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h_1"] & P_4 \oplus P_5 \arrow[r, "h_2"] & P_3 \oplus P_4 \arrow[r, "\chi"] & P_2 \arrow[r, "-\theta"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

com $\omega : P_3 \oplus P_4 \to P_4 \oplus P_5$ *dado por* $\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e os demais morfismos zero, se consegue que*

$\varphi\psi - I_{C_{\tilde{f}}}$ *é homotópico a zero. Fazendo a outra composta temos que*

$$\begin{tikzcd}
Z^\bullet: \arrow[d, "\psi\varphi"'] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_6 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1"'] & P_5 \arrow[r, "f\beta"] \arrow[d, "1"'] & P_3 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "1"'] & P_2 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "1"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
Z^\bullet: & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_6 \arrow[r, "h"] & P_5 \arrow[r, "f\beta"] & P_3 \arrow[r, "\eta"] & P_2 \arrow[r, "\theta"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

é claro que $\psi\varphi$ é homotópico a identidade em $Z^\bullet$. Segue do que fizemos que $Z^\bullet$ é indecomponível.

Vejamos que com P_6 em grau zero, temos que $H^0(Z^\bullet) = H^1(Z^\bullet) = H^3(Z^\bullet) = 0$, $H^2(Z^\bullet) = S_4$ e $H^4(Z^\bullet) = S_1$

temos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
P_6 \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[d, "1"] \\
P_5 \arrow[d, "f\beta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & \Bbbk \arrow[d] \\
P_3 \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & \Bbbk \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
P_2 \arrow[d, "\theta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & \Bbbk \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
P_1 \arrow[d, "0"] & \Bbbk \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \Bbbk \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1. *Temos que $Ker(h) = 0$ e $Im(0) = 0$, então $H^0(Z^\bullet) = 0$.*

2. *$Im(h) = S_6$ e $Ker(f\beta) = S_6$, portanto $H^1(Z^\bullet) = 0$.*

3. *$Im(f\beta) = S_5$ e $Ker(\eta): 0 \to 0 \to 0 \to \Bbbk \to \Bbbk \to 0$, assim $H^2(Z^\bullet) = S_4$.*

4. *$Ker(\theta) = S_3$ e $Im(\eta) = S_3$, então $H^3(Z^\bullet) = 0$.*

5. *$Im(\theta) = S_2$ e $Ker(0): \Bbbk \to \Bbbk \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$, temos que $H^4(Z^\bullet) = S_1$*

Capítulo 5

Equivalência Normalizada

Neste capítulo definiremos as $F-$partes de uma categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de dimensão finita, isto é, dada uma Λ álgebra hereditária por partes, então existe $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ equivalência normalizada onde $\mathscr{H}$ é uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária tal que para todo $\Lambda-$módulo indecomponível X temos que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathscr{H}[i]$ para algum $r \geq 0$, para $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$ definimos $\mathscr{U}_i$ como a subcategoria plena de $mod\ \Lambda$ tal que $F(X) \in \mathscr{H}[i]$ para todo $X \in \mathscr{U}_i$. A subcategoria $\mathscr{U}_i$ é chamada de $F-$partes. Depois apresentamos o teorema principal da dissertação que da propriedades homológicas das $F-$partes.

5.1 F-partes em uma categoria hereditária por partes

Nesta seção daremos a definição de $F-$partes de uma categoria de módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de dimensão finita, além disso, apresentaremos alguns resultados importantes para dizer propriedades das $F-$ partes.

Se $\mathscr{H}$ é uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária ([HHK07], [HR99] e [HAP01]) e X é um objeto indecomponível em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, então existe um $i \in \mathbb{Z}$ tal que $X \in \mathscr{H}[i]$. Dada Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes ([HAP88], [HS09] e [HZ10]), então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência triangulada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ ([HAP88], [HRS96]). Sem perda de generalidade, podemos supor que F é normalizada, isto é, existe um inteiro $r \geq 0$ tal que para cada $\Lambda-$módulo indecomponível X temos que $F(X) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathscr{H}[i]$ e existem $\Lambda-$módulos indecomponíveis X e Y tal que $F(X) \in \mathscr{H}[0]$ e $F(Y) \in \mathscr{H}[r]$.

Definição 5.1.1. *Seja $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ uma equivalência normalizada. Definamos a se-*

guinte subcategoria plena de $mod\ \Lambda$, dada por:

$$\mathscr{U}_i = \{X \in mod\ \Lambda | X \text{ é indecomponível e } F(X) \in \mathscr{H}[i]\}$$

*A subcategoria $\mathscr{U}_i$ é chamada de $F-$**partes** de $mod\ \Lambda$.*

Pela definição da equivalência normalizada, vemos que $\mathscr{U}_0 \neq 0$ e $\mathscr{U}_r \neq 0$. O fecho aditivo de $\mathscr{U}_i$ em modΛ é denotado por $\tilde{\mathscr{U}}_i$, isto é, $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ se, e somente se, $Y = \oplus_{k=0}^{n} X_k$ onde $X_k \in \mathscr{U}_i$.

O seguinte teorema fornece propriedades das $F-$partes em uma categoria hereditária por partes.

Teorema 5.1.1. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0,1,...,r\}$. Então:*

(i) $\tilde{\mathscr{U}}_i$ é fechada para extensões para todo $i \in \{0,1,...,r\}$, $\tilde{\mathscr{U}}_0$ é fechado para submódulos e $\tilde{\mathscr{U}}_r$ é fechado para quocientes.

(ii) Se $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$, então $dp(X) \leq i+1$ e $di(X) \leq r-i+1$.

(iii) Sejam $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_j$. Se $t < i-j$ ou $t > i-j+1$, então $Ext_{\Lambda}^{t}(X,Y) = 0$.

(iv) Se X é um $\Lambda-$módulo indecomponível e $Ext_{\Lambda}^{1}(X,X) = 0$, então $End(X) \cong \mathbb{k}$ e $Ext_{\Lambda}^{k}(X,X) = 0$ para todo $k \geq 2$.

(v) Sejam S e $\bar{S}$ módulos simples, então existe no máximo um $t \geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{t}(S,\bar{S}) \neq 0$.

(vi) Cada $\tilde{\mathscr{U}}_i$ contém um $\Lambda-$módulo simples.

(vii) Se $\mathscr{C}$ é uma subcategoria de $\tilde{\mathscr{U}}_i$ fechada por extensões, fechada para somandos diretos e que contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um $\Lambda-$módulo indecomponível X tal que $End_{\Lambda}(X) \ncong \mathbb{k}$.

(viii) Seja $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ indecomponível. Se $End X \neq \mathbb{k}$, então X tem um submódulo $U \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e um módulo quociente $V \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ com a seguinte propriedade $Ext_{\Lambda}^{1}(U,U) \neq 0$ e $Ext_{\Lambda}^{1}(V,V) \neq 0$.

A demostração do teorema está dada nos próximos lemas, proposições e teoremas. No Lema 5.1.1 demostramos a propriedade (i), no Teorema 5.1.2 fazemos a demonstração de (ii) onde vemos que a dimensão global de Λ é menor ou igual a $r+1$, na Proposição 5.1.1 está a prova da parte (iii), a prova de (iv) esta nos Lemas 5.1.2 e 5.1.3. A provar (v) está no Teorema

5.1.3, no Teorema 5.1.4 temos a demonstração de (vi). A prova de (vii) está na Proposição 5.1.3 e por ultimo no Teorema 5.1.5 demostramos o item (viii).

Lema 5.1.1. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0,1,...,r\}$, então*

1. *$\tilde{\mathscr{U}}_i$ é fechado para extensões para todo $i \in \{0,1,...,r\}$.*
2. *$\tilde{\mathscr{U}}_0$ é fechado para submódulos.*
3. *$\tilde{\mathscr{U}}_r$ é fechado para quocientes.*

Demonstração: Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$ para todo $i \in \{0,1,...,r\}$.

Vamos provar (1). Seja $0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y \longrightarrow X_2 \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta em $mod\ \Lambda$ com $X_1,\ X_2 \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e Y um $\Lambda-$módulo. Vejamos que $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_i$. Dada a sequência exata curta, existe $X_1 \longrightarrow Y \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1[1]$ um triângulo em $\mathscr{D}^b(\Lambda)$. Agora como F é uma equivalência triangulada, então $F(X_1) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X_2) \longrightarrow F(X_1)[1]$ é um triângulo em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, e pelo fato que $X_1,\ X_2 \in \tilde{\mathscr{U}}_i$, temos que $F(X_1),\ F(X_2) \in \mathscr{H}[i]$.

Seja Y' um somando indecomponível de Y. Se existe um morfismo não nulo $h : X_1 \longrightarrow Y'$ e um morfismo não nulo $g : Y' \longrightarrow X_2$, então pelo Teorema 2.4.1(ii) obtemos que $F(Y') \in \mathscr{H}[i]\bigcup \mathscr{H}[i+1]$ e $F(Y') \in \mathscr{H}[i]\bigcup \mathscr{H}[i-1]$ de onde concluímos que $F(Y') \in \mathscr{H}[i]$. Suponhamos que o morfismo induzido de Y' para X_2 seja nulo. Então, pelo lema 2.2.2 X_1 é isomorfismo a Y' e neste caso $Y' \in \mathscr{U}_i$.

Agora provaremos (2). Seja $X \in \tilde{\mathscr{U}}_0$ e M um submódulo de X indecomponível, vejamos que $M \in \tilde{\mathscr{U}}_0$. Temos $i : M \to X$ a inclusão, portanto temos um triângulo $M \to X \to C_i \to M[1]$. Como F é uma equivalência triangulada, então $F(M) \to F(X) \to F(C_i) \to F(M)[1]$ é um triângulo em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, então pelo Teorema 2.4.1 concluímos que $F(M) \in \mathscr{H}[0]$. Assim temos que $M \in \tilde{\mathscr{U}}_0$.

Agora provaremos (3). Sejam $M \in \tilde{\mathscr{U}}_r$ e $f : M \longrightarrow N$ um epimorfismo de $\Lambda-$módulos com N um $\Lambda-$módulo indecomponível, vejamos que $N \in \tilde{\mathscr{U}}_r$. Como f é um epimorfismo, então temos $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta em $mod\ \Lambda$ con $K = Ker(f)$, de onde obtemos $K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K[1]$ um triângulo em $\mathscr{D}^b(\Lambda)$. Agora como F é uma equivalência triangulada, então $F(K) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(K)[1]$ é um triângulo em $\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$, e pelo fato que $M \in \tilde{\mathscr{U}}_r$, temos que $F(M) \in \mathscr{H}[r]$. Assim pelo Teorema 2.4.1(ii) obtemos $F(N) \in \mathscr{H}[r] \cup \mathscr{H}[r+1]$. Agora como N é um $\Lambda-$módulo indecomponível, então $F(N) \in \bigcup_{i=0}^{r} \mathscr{H}[i]$, portanto $F(N) \in \mathscr{H}[r]$, isto é, $N \in \tilde{\mathscr{U}}_r$.

□

Teorema 5.1.2. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0,1,...,r\}$ e seja $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$, então $dp(X) \leq i+1$ e $di(X) \leq r-i+1$.*

Demonstração: Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$.

Seja $X \in \mathscr{U}_i$, então existe $\bar{X}$ indecomponível em $\mathscr{H}$, tal que $F(X) = \bar{X}[i]$.

- Vejamos que $Ext_\Lambda^{i+2}(X,-) = 0$. Seja Y um $\Lambda-$módulo indecomponível, então existe $j \in \{0,1,...,r\}$ e $\bar{Y}$ em $\mathscr{H}$ tal que $F(Y) = \bar{Y}[j]$.

$$\begin{aligned} Ext_\Lambda^{i+2}(X,Y) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X, Y[i+2]), \text{ (definição de Ext)} \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X), F(Y)[i+2]) \text{ (F é uma equivalência)} \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[i], \bar{Y}[i+j+2]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}, \bar{Y}[j+2]) \\ &\cong Ext_{\mathscr{H}}^{j+2}(\bar{X}, \bar{Y}). \end{aligned}$$

  Como $\mathscr{H}$ é uma $\mathbb{k}-$categoria hereditária e $j \in \{0,1,...,r\}$, então $Ext_{\mathscr{H}}^{j+2}(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, de onde temos que $Ext_\Lambda^{i+2}(X,Y) = 0$.

  Seja Y um $\Lambda-$módulo, então existem $\Lambda-$módulos indecomponíveis $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ tais que $Y = \oplus_{k=1}^{p} Y_k$. Portanto

$$\begin{aligned} Ext_\Lambda^{i+2}(X,Y) &= Ext_\Lambda^{i+2}(X, \oplus_{k=1}^{p} Y_k) \\ &= \oplus_{k=1}^{p} Ext_\Lambda^{i+2}(X, Y_k) = 0. \end{aligned}$$

  assim, pelo Teorema 1.2.1 temos que $dp(X) \leq i+1$.

- Vejamos que $Ext_\Lambda^{r-i+2}(-,X) = 0$. Seja Y um $\Lambda-$módulo indecomponível, então existem

$j \in \{0, 1, ..., r\}$ e $\bar{Y}$ um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$ tais que $F(Y) = \bar{Y}[j]$.

$$\begin{aligned} Ext_{\Lambda}^{r-i+2}(Y, X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(Y, X[r-i+2]), \text{ (definição de Ext)} \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(Y), F(X)[r-i+2]) \text{ (F é uma equivalência)} \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{Y}[j], \bar{X}[r+2]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{Y}, \bar{X}[r-j+2]) \\ &\cong Ext_{\mathscr{H}}^{r-j+2}(\bar{Y}, \bar{X}). \end{aligned}$$

Como $\mathscr{H}$ é hereditária e $r - j + 2 > 1$, então $Ext_{\mathscr{H}}^{r-j+2}(\bar{Y}, \bar{X}) = 0$, de onde temos que $Ext_{\Lambda}^{r-i+2}(Y, X) = 0$.

Seja Y um $\Lambda-$módulo, existem $\Lambda-$módulos indecomponíveis $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ tal que $Y = \oplus_{k=1}^{p} Y_k$, portanto

$$\begin{aligned} Ext_{\Lambda}^{r-i+2}(Y, X) &= Ext_{\Lambda}^{r-i+2}(\oplus_{k=1}^{p} Y_k, X) \\ &= \oplus_{k=1}^{p} Ext_{\Lambda}^{r-i+2}(Y_k, X) = 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.2.2 temos que $di(X) \leq r - i + 1$.

□

Proposição 5.1.1. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0, 1, ..., r\}$ e sejam $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_j$, então*

(a) Se $t < i - j$, então $Ext_{\Lambda}^{t}(X, Y) = 0$.

(b) Se $t > i - j + 1$, então $Ext_{\Lambda}^{t}(X, Y) = 0$.

Demonstração: Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$ para $i \in \{0, 1, ..., r\}$.

Sejam $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_j$, então existem $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ indecomponíveis em $\mathscr{H}$ tais que

$F(X) = \bar{X}[i]$ e $F(Y) = \bar{Y}[j]$, assim

$$\begin{aligned} Ext^t_{\Lambda}(X,Y) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X, Y[t]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X), F(Y)[t]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[i], \bar{Y}[t+j]) \\ &\cong Ext^{t+j-i}_{\mathscr{H}}(\bar{X}, \bar{Y}). \end{aligned}$$

(a) Se $t < i - j$, então $t + j - i < 0$, assim temos que $Ext^{t+j-i}_{\mathscr{H}}(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, portanto $Ext^t_{\Lambda}(X,Y) = 0$.

(b) Se $t > i - j + 1$, então $t + j - i > 1$ como $\mathscr{H}$ é uma $\mathbb{k}-$categoria hereditária, então $Ext^{t+j-i}_{\mathscr{H}}(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$, assim concluímos que $Ext^t_{\Lambda}(X,Y) = 0$. □

Lema 5.1.2. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes se X é um Λ módulo indecomponível, então $Ext^k_{\Lambda}(X,X) = 0$ para $k \geq 2$.*

Demonstração: Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$.

Seja X um $\Lambda-$módulo indecomponivel, então existe Y um objeto indecomponível em $\mathscr{H}$ tal que $F(X) = Y[i]$, assim

$$\begin{aligned} Ext^t_{\Lambda}(X,X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X, X[t]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X), F(X)[t]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Y[i], Y[t+i]) \\ &\cong Ext^t_{\mathscr{H}}(Y,Y) \\ &= 0 \,(\text{para todo } \ t \geq 2). \end{aligned}$$

De onde concluímos que $Ext^t_{\Lambda}(X,X) = 0$ para todo $t \geq 2$ □

Lema 5.1.3. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes e X um $\Lambda-$módulo indecomponível tal que $Ext^1_{\Lambda}(X,X) = 0$, então $End_{\Lambda}(X) \cong \mathbb{k}$.*

Demonstração: Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$. Seja X um $\Lambda-$módulo indecomponível tal que $Ext^1_{\Lambda}(X,X) = 0$, então existe Y objeto indecomponível em $\mathscr{H}$ tal que $F(X) = Y[i]$, assim temos que

$$\begin{aligned}
0 = Ext^1_{\Lambda}(X,X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X,X[1]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X),F(X)[1]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Y[i],Y[i+1]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Y,Y[1]) \\
&\cong Ext^1_{\mathscr{H}}(Y,Y).
\end{aligned}$$

De onde temos que $Ext^1_{\mathscr{H}}(Y,Y) = 0$, vejamos que $End_{\mathscr{H}}(Y) \cong \mathbb{k}$.

Seja $h \in End_{\mathscr{H}}(Y)$ não nulo, vejamos que h é isomorfismo. Temos a seguinte fatoração para h

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\tilde{h}"'] & & Y \\
& Im(h) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

onde i é monomorfismo e $\tilde{h}$ é um epimorfismo. Uma prova similar à do Lema 3.1.1 permite dizer que existem Z objeto indecomponível em $\mathscr{H}$, $h_1 : Y \longrightarrow Z$ monomorfismo e $h_1 : Z \longrightarrow Y$ epimorfismo tais que a seguinte sequência é exata curta.

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Im(h) \oplus Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

Agora como $Ext^1_{\mathscr{H}}(Y,Y) = 0$, então a sequência exata cinde, assim temos que $Y \oplus Y \cong Im(h) \oplus Z$, de onde temos que $Y \cong Im(h) \cong Z$, assim concluímos que h é isomorfismo.

Definamos o seguinte morfismo $\xi : \mathbb{k} \longrightarrow End_{\mathscr{H}}(Y)$, dado por $\xi(a) := aI_Y$. É claro que ξ é linear e injetora, vejamos que ξ é sobrejetora.

Seja $\phi \in End_{\mathscr{H}}(Y)$, como $End_{\mathscr{H}}(Y)$ é um $\mathbb{k}-$espaço vetorial de dimensão finita, então existe $n \geq 0$ tal que $\{1, \phi, \phi^2, \cdots, \phi^n\}$ é um conjunto linearmente dependente em $End_{\mathscr{H}}(Y)$, isto é, existem $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ em $\mathbb{k}$ não todos nulos tais que

$$\lambda_0 + \lambda_1\phi + \cdots + \lambda_n\phi^n = 0.$$

Seja $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$, temos que $P(\phi) = 0$. Agora como $\mathbb{k}$ é corpo algebricamente fechado, então $P(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k}$, assim temos que

$$0 = P(\phi) = (\phi - x_1 I_Y)^{n_1}(\phi - x_2 I_Y)^{n_2} \cdots (\phi - x_k I_Y)^{n_k}$$

Temos que $End_{\mathscr{H}}(Y)$ é um anel com divisão, então existe um k tal que $\phi - x_k I_Y = 0$, assim temos que $\xi(x_k) = \phi$. Isto é, ξ é um isomorfismo.

De onde temos que

$$\begin{aligned} Hom_\Lambda(X,X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X,X) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X),F(X)) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Y[i],Y[i]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Y,Y) \\ &\cong \Bbbk. \end{aligned}$$

Assim concluímos que $End_\Lambda(X) \cong \Bbbk$. □

Proposição 5.1.2. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0,1,...,r\}$. Se $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_j$, então*

1. *Se $Hom_\Lambda(X,Y) \neq 0$, então $j = i$ ou $j = i+1$.*
2. *Se $Ext^k_\Lambda(X,Y) \neq 0$, então $i = j+k$ ou $i = j+k-1$.*

Demonstração: sejam $X \in \tilde{\mathscr{U}}_i$ e $Y \in \tilde{\mathscr{U}}_j$, então existem $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ em $\mathscr{H}$ tal que $F(X) = \bar{X}[i]$ e $F(Y) = \bar{Y}[j]$, assim temos que:

$$\begin{aligned} 0 &\neq Hom_\Lambda(X,Y) \\ &= Ext^0_\Lambda(X,Y) \\ &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X,Y) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X),F(Y)) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[i],\bar{Y}[j]) \\ &\cong Ext^{j-i}_{\mathscr{H}}(\bar{X},\bar{Y}). \end{aligned}$$

De onde temos que $Ext^{j-i}_{\mathscr{H}}(\bar{X},\bar{Y}) \neq 0$. Como $\mathscr{H}$ é hereditária, então $0 \leq j-i \leq 1$, portanto

$j = i$ ou $j = i+1$.

$$\begin{aligned} 0 &\neq Ext_{\Lambda}^{k}(X,Y) \\ &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X, Y[k]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X), F(Y)[k]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[i], \bar{Y}[j+k]) \\ &\cong Ext_{\mathscr{H}}^{j-i+k}(\bar{X}, \bar{Y}). \end{aligned}$$

Assim, temos $Ext_{\mathscr{H}}^{j-i+k}(\bar{X}, \bar{Y}) \neq 0$ como $\mathscr{H}$ é hereditária então $0 \leq j-i+k \leq 1$, portanto $i = j+k$ ou $i = j+k-1$. □

Queremos provar que dada uma álgebra hereditária por partes, e dados módulos simples S e $\bar{S}$, então existe no máximo um $t \geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{t}(S, \bar{S}) \neq 0$. Para isso, vamos provar antes os seguintes lemas.

Lema 5.1.4. *Sejam Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes e S um $\Lambda-$módulos simples. Se $Ext_{\Lambda}^{t}(S,S) \neq 0$, então $t = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que Λ é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$ para $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$. Como S é um $\Lambda-$módulo simples, então existe um único $k \in \{0, 1, \cdots, r\}$, tal que $S \in \mathscr{U}_k$.

Suponhamos que existe $t \geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{t}(S,S) \neq 0$, então pela Proposição 5.1.2 temos que $0 \leq t \leq 1$. Se $t = 1$, então $Ext_{\Lambda}^{1}(S,S) \neq 0$, assim temos que $dim_{\Bbbk}(Ext_{\Lambda}^{1}(S,S)) \neq 0$, então pela Proposição 1.1.1 temos que $dim_{\Bbbk}(\frac{e_i Rad(\Lambda) e_i}{e_i Rad^2(\Lambda) e_i}) \neq 0$, onde e_i é o idempotente de Λ tal que $e_i\Lambda / Rad(e_i\Lambda) \cong S$. Isto significa que o aljava ordinária da álgebra Λ tem um ciclos. Uma contradição com o Teorema 4.1.1. Pois neste teorema temos que $\Lambda \cong Q/I$, onde Q é uma aljava ordinaria sem ciclos orientados e I é um ideal admissível. De onde concluímos que $t = 0$.

□

Lema 5.1.5. *Sejam Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes e $\Lambda-$módulos simples S e $\bar{S}$ não isomorfos. Se existe $t \geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{t}(S, \bar{S}) \neq 0$, então $Ext_{\Lambda}^{p}(\bar{S}, S) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Suponhamos que Λ é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \to \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$ para $i \in \{0, 1, \cdots, r\}$.

Suponhamos que existe $i \geq 0$ tal que $Ext^i_\Lambda(S,\bar{S}) \neq 0$. Como os módulos simples S e $\bar{S}$ são não isomorfos, então podemos dizer que $i > 0$. Vamos provar que $Ext^p_\Lambda(\bar{S},S) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Se $p \leq 0$ é direto do Teorema 2.3.3.

Vejamos para $p > 0$. Suponhamos que existe $p > 0$ tal que $Ext^p_\Lambda(\bar{S},S) \neq 0$.

Como S e $\bar{S}$ são $\Lambda-$módulo simples não isomorfos, então existem únicos $j, \bar{j} \in \{0,1,\cdots,r\}$ e X, $\bar{X}$ objetos indecomponíveis tais que, $F(S) = X[j]$ e $F(\bar{S}) = \bar{X}[\bar{j}]$, então temos que

$$\begin{aligned}
0 \neq Ext^i_\Lambda(S,\bar{S}) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,\bar{S}) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(S),F(\bar{S})[i]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[j],\bar{X}[\bar{j}+i]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X,\bar{X}[\bar{j}+i-j]) \\
&\cong Ext^{\bar{j}+i-j}_{\mathscr{H}}(X,\bar{X}).
\end{aligned}$$

Agora como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, obtemos que $i = j - \bar{j}$ ou $i = 1 + j - \bar{j}$.

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
0 \neq Ext^p_\Lambda(\bar{S},S) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(\bar{S},S[p]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(\bar{S}),F(S)[p]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[\bar{j}],X[j+p]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X},X[p-\bar{j}+j]) \\
&\cong Ext^{p-\bar{j}+j}_{\mathscr{H}}(\bar{X},X).
\end{aligned}$$

Logo, como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, então $p = \bar{j} - j$ ou $p = 1 + \bar{j} - j$. Sabemos que $\bar{j} - j = -i$ ou $\bar{j} - j = 1 - i$. Então, temos

(a) $p = -i$ ou

(b) $p = 1 - i$ ou

(c) $p = 2 - i$.

Como $i > 0$, então no caso (a) e (b) temos que $p \leq 0$, assim temos uma contradição, pois por hipótese temos que $p > 0$. No caso (c) temos que $p \leq 1$. Se $p \leq 0$, então temos a mesma contradição que no caso (a). Vejamos o caso $p = 1$ em (c).

Se $p = 1$, então temos que $i = 1$, logo $Ext^1_\Lambda(S,\bar{S}) \neq 0$ e $Ext^1_\Lambda(\bar{S},S) \neq 0$. Pela Proposição 1.1.1 existem vértices s e l no aljava ordinária Q de Λ e flechas $s \to l$ e $l \to s$. Logo temos uma

contradição com o Teorema 4.1.1. De onde concluímos que $Ext_{\Lambda}^{p}(\bar{S},S)=0$ para todo $p\in\mathbb{Z}$.
□

Teorema 5.1.3. *Sejam Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes e $\Lambda-$módulos simples S e $\bar{S}$, então existe no máximo um $t\geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{t}(S,\bar{S})\neq 0$.*

Demonstração: Suponhamos que Λ é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F:\mathscr{D}^b(\Lambda)\to\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$. Suponhamos que $Ext_{\Lambda}^{i}(S,\bar{S})\neq 0$ para algum $i\geq 0$.

Assim como S e $\bar{S}$ são simples, então existem $j,\ \bar{j}\in\mathbb{Z}$ e $X,\ \bar{X}$ objetos indecomponíveis em $\mathscr{H}$ tais que $F(S)=X[j]$ e $F(\bar{S})=\bar{X}[\bar{j}]$, assim temos

$$\begin{aligned}
0\neq Ext_{\Lambda}^{i}(S,\bar{S}) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,\bar{S}[i])\\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(S),F(\bar{S})[i])\\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[j],\bar{X}[\bar{j}+i])\\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X,\bar{X}[\bar{j}+i-j])\\
&\cong Ext_{\mathscr{H}}^{\bar{j}+i-j}(X,\bar{X}).
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{H}$ é uma categoria hereditária, então obtemos que:

$$i\in\left\{j-\bar{j},1+j-\bar{j}\right\}.$$

Se S e $\bar{S}$ são isomorfos, então pelo Lema 5.1.4 temos que $i=0$, ou seja existe um único $i\geq 0$ tal que $Ext_{\Lambda}^{i}(S,\bar{S})\neq 0$.

Se $S\not\cong\bar{S}$, então podemos supor que $i>0$. E pelo Lema 5.1.4 temos que $Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,S[1])=Ext_{\Lambda}^{1}(S,S)=0$, $Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(\bar{S},\bar{S}[1])=Ext_{\Lambda}^{1}(\bar{S},\bar{S})=0$. Agora vamos calcular $Ext_{\mathscr{H}}^{1}(X,X)$, $Ext_{\mathscr{H}}^{1}(\bar{X},\bar{X})$ e $Ext_{\mathscr{H}}^{1}(\bar{X},X)$, isto é:

$$\begin{aligned}
Ext_{\mathscr{H}}^{1}(X,X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X,X[1])\\
&= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(S)[-j],F(S)[1-j])\\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,S[1])\\
&= 0
\end{aligned}$$

De onde temos que $Ext^1_{\mathscr{H}}(X,X)=0$, Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} Ext^1_{\mathscr{H}}(\bar{X},\bar{X}) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X},\bar{X}[1]) \\ &= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(\bar{S})[-\bar{j}],F(\bar{S})[1-\bar{j}]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(\bar{S},\bar{S}[1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

isto é, $Ext^1_{\mathscr{H}}(\bar{X},\bar{X})=0$. Também temos que

$$\begin{aligned} Ext^1_{\mathscr{H}}(\bar{X},X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X},X[1]) \\ &= Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(\bar{S})[-\bar{j}],F(S)[1-j]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(\bar{S},S[1-j+\bar{j}]) \\ &\cong Ext^{1-j+\bar{j}}_{\Lambda}(\bar{S},S). \end{aligned}$$

Agora pelo Lema 5.1.5 temos que $Ext^{1-j+\bar{j}}_{\Lambda}(\bar{S},S)=0$, assim concluímos que $Ext^1_{\mathscr{H}}(\bar{X},X)=0$.

Sabemos que $Ext^i_{\Lambda}(S,\bar{S})\neq 0$ se $i\in\left\{j-\bar{j},1+j-\bar{j}\right\}$. Vamos provar que: Se $Ext^{j-\bar{j}}_{\Lambda}(S,\bar{S})\neq 0$, então $Ext^{j+1-\bar{j}}_{\Lambda}(S,\bar{S})=0$ e em seguida o contrário. Com isso, teremos provado que i é único.

Se $i=j-\bar{j}$, então $0\neq Ext^0_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})=Hom_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})$, e temos que $Ext^1_{\Lambda}(\bar{X},X)=0$. Assim pelo Lema 3.1.3 concluímos que $Ext^1_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})=0$. Temos que:

$$\begin{aligned} Ext^{1+j-\bar{j}}_{\Lambda}(S,\bar{S}) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,\bar{S}[1+j-\bar{j}]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(S),F(\bar{S})[1+j-\bar{j}]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[j],\bar{X}[1+j-\bar{j}+\bar{j}]) \\ &\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X,\bar{X}[1]) \\ &\cong Ext^1_{\mathscr{H}}(X,\bar{X}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $Ext^{1+j-\bar{j}}_{\Lambda}(S,\bar{S})=0$.

Se $i=1+j-\bar{j}$, vamos provar que $Ext^{j-\bar{j}}_{\Lambda}(S,\bar{S})=0$. Supondo que $Ext^i_{\Lambda}(S,\bar{S})\neq 0$. Segue do isomorfismo $0\neq Ext^i_{\Lambda}(S,\bar{S})\cong Ext^{\bar{j}+i-j}_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})$ temos que $Ext^1_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})\neq 0$. Logo pelo Lema

3.1.3 temos que $Hom_{\mathscr{H}}(X,\bar{X})=0$. De onde temos

$$\begin{array}{rcl} Ext_{\Lambda}^{j-\bar{j}}(S,\bar{S}) & = & Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(S,\bar{S}[j-\bar{j}]) \\ & \cong & Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(S),F(\bar{S})[j-\bar{j}]) \\ & \cong & Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X[j],\bar{X}[j-\bar{j}+\bar{j}]) \\ & \cong & Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(X,\bar{X}) \\ & \cong & Hom_{\mathscr{H}}(X,\bar{X}) \\ & = & 0 \end{array}$$

isto é, $Ext_{\Lambda}^{j-\bar{j}}(S,\bar{S})=0$. Assim concluímos que existe no máximo um i tal que $Ext_{\Lambda}^{i}(S,\bar{S})\neq 0$. $\square$

O teorema anterior tem uma consequência muito interessante. Isso mostra que para uma álgebra com radical quadrado zero hereditária por partes o comprimento de qualquer caminho entre dois vértices é sempre o mesmo.

Teorema 5.1.4. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i\in\{0,1,...,r\}$, então cada $\tilde{\mathscr{U}}_i$ contém um $\Lambda-$módulo simples.*

Demonstração: Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F:\mathscr{D}^b(\Lambda)\to\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$.

Suponhamos que $\tilde{\mathscr{U}}_k$ não tem simples. Seja $X\in\tilde{\mathscr{U}}_k$ de comprimento minimal, então X não é simples, assim temos o seguinte monomorfismo $f:S\to X$, onde S é um submódulo simples de X e f é monomorfismo, como f é não nulo, então pela Proposição 5.1.2(1) $S\in\mathscr{U}_{k-1}\cup\mathscr{U}_k$, agora como $\mathscr{U}_k$ não tem simples, então $S\in\mathscr{U}_{k-1}$.

Como X é indecomponível, temos a seguinte sequência exata curta $0\to S\to X\to X/S\to 0$ que não cinde pois X é indecomponível. Seja Z' um somando indecomponível de X/S e $g:X\longrightarrow Z'$ um morfismo não nulo. Logo pela Proposição 5.1.2, como $X\in\mathscr{U}_k$, segue que $Z'\in\mathscr{U}_k\bigcup\mathscr{U}_{k+1}$. Como $\ell(X)>\ell(X/S)\geq\ell(Z')$, então pela minimalidade de X, obtemos que $Z'\in\mathscr{U}_{k+1}$. Da seqüência exata $0\to S\to X\to X/S\to 0$ e do morfismo inclusão $j:Z'\longrightarrow X/S$, fazendo o pull-back temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "I_S"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "f"] & X \arrow[r, "\pi"] & X/S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vejamos que $0 \longrightarrow S \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{g} Z' \longrightarrow 0$ não cinde. Suponhamos que a sequência cinde, portanto g é um epimorfismo que cinde, então existe $g' : z' \longrightarrow E$ tal que $gg' = I_{Z'}$. Tomando a projeção $p : X/S \longrightarrow Z'$. Vamos mostrar que $p\pi : X \longrightarrow Z'$ é epimorfismo que cinde. Temos que $p\pi hg' = pjgg' = I_{Z'}$, isto é, $p\pi$ é um epimorfismo que cinde. Portanto Z' é um somando de X. Como X é indecomponível, então $Z' \cong X$ e então $X \in \mathscr{U}_{k+1}$, o que é uma contradição pois $X \in \mathscr{U}_k$. Então a seqüência $0 \longrightarrow S \xrightarrow{\beta} E \xrightarrow{g} Z' \longrightarrow 0$ não cinde, isto é, $Ext_\Lambda(Z', S) \neq 0$. Assim pela Proposição 5.1.2 temos que $S \in \mathscr{U}_k$ ou $S \in \mathscr{U}_{k+1}$, o que é uma contradição. Disto, concluímos que $\mathscr{U}_k$ contém um simples. $\square$

Proposição 5.1.3. *Seja Λ uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0, 1, ..., r\}$. Se $\mathscr{C}$ é uma subcategoria de $\tilde{\mathscr{U}}_i$ fechada por extensões, fechada para somandos diretos e que contém um ciclo, então $\mathscr{C}$ contém um $\Lambda-$módulo indecomponível X tal que $End_\Lambda(X) \not\cong \Bbbk$.*

Demonstração: Suponhamos que Λ é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\Bbbk-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e $F : \mathscr{D}^b(\Lambda) \longrightarrow \mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ uma equivalência normalizada com $F-$partes $\tilde{\mathscr{U}}_i$ para $i \in \{0, 1, ..., r\}$. Suponhamos que existe uma subcategoria $\mathscr{C}$ de $\tilde{\mathscr{U}}_i$ fechada para extensões, fechada para somandos diretos e que contém um ciclo. Então como F é uma equivalência normalizada temos que $F(\mathscr{C})[-i]$ é uma subcategoria de $\mathscr{H}$ fechada para somandos diretos, fechada para extensões e contém um ciclo, Uma prova similar a que foi dada no Teorema 3.2.1 permite dizer que existe um objeto Z indecomponível em $F(\mathscr{C})[-i]$ tal que $End_{\mathscr{H}}(Z) \not\cong \Bbbk$. Agora como Z é um objeto indecomponível em $F(\mathscr{C})[-i]$, então existe um $\Lambda-$módulo indecomponível X em $\mathscr{C}$ tal que $F(X)=Z[i]$, assim temos que

$$\begin{aligned}
Hom_{\Lambda}(X,X) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X,X) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X),F(X)), \text{ (F é uma equivalência).} \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Z[i],Z[i]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(Z,Z) \\
&\cong Hom_{\mathscr{H}}(Z,Z) \\
&\ncong \mathbb{k}.
\end{aligned}$$

De onde concluímos que existe um $\Lambda-$módulo indecomponível X em $\mathscr{C}$ tal que $Hom_{\Lambda}(X,X)\ncong \mathbb{k}$. □

Lema 5.1.6. *Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes e sejam X e Y $\Lambda-$módulos indecomponíveis. Se X e Y estão em um ciclo de $mod\Lambda$, então $Ext_{\Lambda}^{i}(X,Y)=0$ para todo $i>1$.*

Demonstração: Seja Λ uma $\mathbb{k}-$álgebra hereditária por partes, então existe uma $\mathbb{k}-$categoria abeliana hereditária $\mathscr{H}$ e uma equivalência normalizada $F:\mathscr{D}^b(\Lambda)\to\mathscr{D}^b(\mathscr{H})$ com $F-$partes $\mathscr{U}_i$ e suponhamos que X e Y estão um ciclo, sem perda de generalidade suponhamos que o ciclo é da seguinte forma:

$$Z_0\to\cdots\to X\to\cdots\to Y\to\cdots\to Z_0$$

Como Z_0 é um $\Lambda-$módulo indecomponível, então existem $0\le j\le r$ e um objeto indecomponível Z em $\mathscr{H}$ tais que $F(Z_0)=Z[j]$, portanto $F(X),\ F(Y)\in\mathscr{H}[j]$, de onde existem $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ em $\mathscr{H}$ indecomponíveis tais que $F(X)=\bar{X}[j]$ e $F(Y)=\bar{Y}[j]$, por conseguinte temos que:

$$\begin{aligned}
Ext_{\Lambda}^{i}(X,Y) &= Hom_{\mathscr{D}^b(\Lambda)}(X,Y[i]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(F(X),F(Y)[i]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X}[j],\bar{Y}[i+j]) \\
&\cong Hom_{\mathscr{D}^b(\mathscr{H})}(\bar{X},\bar{Y}[i]) \\
&\cong Ext_{\mathscr{H}}^{i}(\bar{X},\bar{Y}).
\end{aligned}$$

Pelo fato que $\mathscr{H}$ é hereditária, então $Ext_{\mathscr{H}}^{i}(\bar{X},\bar{Y})=0$ para todo $i>1$, de onde concluímos que $Ext_{\Lambda}^{i}(X,Y)=0$ para todo $i>1$. □

Teorema 5.1.5. *Seja A uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes e um $A-$módulo indecomponível M tal que $End(M) \not\cong \Bbbk$, então existe um submódulo Z de M indecomponível tal que $Ext^1_A(Z,Z) \neq 0$.*

Demonstração: Suponhamos que M é indecomponível tal que $End(M) \not\cong \Bbbk$, então existe ao menos um $f : M \to M$ não nulo e não invertível. Seja $f \in End(M)$ não nulo e não invertível tal que $S = Imf$ de comprimento minimal. Pela condição que S tem comprimento minimal temos que S é um $A-$módulo indecomponível.

Se $Ext^1_A(S,S) \neq 0$ termina a prova do teorema. Se $Ext^1_A(S,S) = 0$, então procuremos um submódulo X do kernel de f indecomponível tal que $Hom_A(S,X) \neq 0$ e $Ext^1_A(S,X) \neq 0$. Provaremos em seguida que $Ext^1_A(X,X) \neq 0$.

Seja $N = Ker(f) = \oplus_{k=1}^r N_k$ com N_k um $A-$módulo indecomponível para todo k. Seja $i \in \{1,2,...,r\}$ obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_i"] & M \arrow[r, "g"] & S \arrow[r] & 0 \\ & N_i & & & \end{tikzcd}$$

onde j é a inclusão, p_i é a projeção em i e $g(x) = f(x)$ para todo $x \in M$, então pela soma amalgada ou (*push-out*) temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_i"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & S \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_i \arrow[r, "\theta"] & E \arrow[r, "\beta"] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como M é indecomponível então a sequência $0 \to N \to M \to S \to 0$ não cinde.

Vejamos que $0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{\theta} E \xrightarrow{\beta} S \longrightarrow 0$ não cinde. Suponhamos que cinde, então existe $\eta : E \to N_i$ tal que $\eta\theta = 1_{N_i}$, de onde temos os seguintes morfismos $ji_i : N_i \to M$ com $i_i : N_i \longrightarrow N$ o morfismo inclusão e $\eta h : M \to N_i$ satisfazendo $\eta h j i_i = \eta\theta p_i i_i = 1_{N_i}$, então N_i é um somando direto de M, então M é decomponível, contradição com a hipótese. Assim concluímos que $Ext^1_A(S, N_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1,2,...,r\}$.

Vamos provar que $S \subseteq N$. Suponhamos que $S \nsubseteq N$, então existe $x \in S$ tal que $f(x) \neq 0$, assim $f^2 : M \to M$ é um morfismo não nulo tal que $Im(f^2) \subseteq Im(f)$ e $Im(f^2) \neq Im(f)$.

Se $Im(f^2) = Im(f)$ como M é um $\Bbbk-$espaço vetorial de dimensão finita e f é um homomorfismo, então pelo Teorema 1.1.1 temos que $M = Im(f) \oplus Ker(f)$, ou seja, M é decomponível. Absurdo, pois por hipótese temos que M é indecomponível. Assim temos que o comprimento de $Im(f^2)$ é menor que o comprimento de $Im(f)$, contradição pela escolha de f.

Por conseguinte $i : S \to N$ é um morfismo não nulo, portanto existe um $k \in \{1,2,...,r\}$ tal que $Hom_A(S,N_k) \neq 0$, concluímos que existe um $k \in \{1,2,...,r\}$ tal que $Hom_A(S,N_k) \neq 0$ e $Ext_A^1(S,N_k) \neq 0$.

Seja X um submódulo de N indecomponível de comprimento minimal tal que

$$Hom_A(S,X) \neq 0 \text{ e } Ext_A^1(S,X) \neq 0$$

vejamos que $Ext_A^1(X,X) \neq 0$.

Seja $g \in Hom(S,X)$ não nulo, vejamos que $gf = 0$. Se $gf \neq 0$, então temos que $igf : M \to M$ é um morfismo não nulo, onde $i : X \to M$ a inclusão e o comprimento da imagem de igf é menor que o comprimento de S, pois X é submódulo de $N \subseteq M$. Assim, temos uma contradição com a escolha de f, de onde concluímos que $gf = 0$. Agora vemos que g é injetiva, se não for como $gf = 0$, então existe $h : M \to Ker(g)$ não nulo. Assim, $\ell(Im(h) < \ell(S))$, contradição. De onde concluímos que g é injetora. Agora por hipótese temos que $Ext_A^1(S,S) = 0$, por conseguinte g não é sobrejetora, pois nesse caso $S \cong X$ e assim $Ext_A^1(X,X) = 0$ contradição com a escolha de X. De onde temos a seguinte sequência exata curta.

$$(+) \qquad 0 \longrightarrow S \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0 \text{ , onde } Q = Coker(g)$$

Aplicando $Hom_A(S,-)$ em $(+)$, conseguimos a seguinte sequência exata

$$Ext_A^1(S,S) \xrightarrow{g_*} Ext_A^1(S,X) \xrightarrow{\pi_*} Ext_A^1(S,Q)$$

Lembrando que $Ext_A^1(S,S) = 0$ e $Ext_A^1(S,X) \neq 0$, concluímos que $Ext_A^1(S,Q) \neq 0$, então existe uma sequência exata curta que não cinde da seguinte forma $0 \to Q \to E \to S \to 0$. Assim, temos:

$$Q \longrightarrow E_i \longrightarrow S \longrightarrow X \longrightarrow Q$$

para cada E_i somando indecomponível de E.

Vejamos que Q é indecomponível. Suponhamos que Q é decomponível, então existem $r > 1$ e Q_k indecomponíveis para todo $k \in \{1,2,...,r\}$ tal que $Q = \oplus_{k=1}^r Q_k$, temos que $0 \neq Ext_A^1(S,Q) = \oplus_{k=1}^r Ext_A^1(S,Q_k)$, então existe i tal que $Ext_A^1(S,Q_i) \neq 0$, assim temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & Q_i \arrow[d, "i_i"] & \\ 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Utilizando a propriedade do *pull-back* existe Y tal que:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "Id"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"] & Q_i \arrow[r] \arrow[d, "i_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "g"] & X \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A sequência $0 \to S \to Y \to Q_i \to 0$ não cinde.

Supondo que a sequência cinda, então existe $\lambda : Q_i \to Y$ tal que $\beta\lambda = 1_{Q_i}$, assim temos os seguintes morfismos $p_i\pi : X \to Q_i$ onde $P_i : Q \to Q_i$ é a projeção e $h\lambda : Q_i \to X$ fazendo a composta temos $p_i\pi h\lambda = p_i i_i \beta\lambda = 1_{Q_i}$, de onde temos que Q_i é um somando direto de X, contradição pois X é indecomponível.

Agora aplicando $Hom_A(S,-)$ na seqüência $0 \to S \to Y \to Q_i \to 0$ obtemos que:

$$Ext_A^1(S,S) \longrightarrow Ext_A^1(S,Y) \longrightarrow Ext_A^1(S,Q_i) \longrightarrow Ext_A^2(S,S)$$

é sequência exata, tendo em conta que $Ext_A^2(S,S) = 0$ (Lema 5.1.2) e $Ext_A^1(S,Q_i) \neq 0$ concluímos que $Ext_A^1(S,Y) \neq 0$.

Seja $Y = \oplus_{k=1}^t Y_k$ com Y_k indecomponível para todo k, como $0 \to S \to Y \to Q_i \to 0$ não cinde, então $Hom_A(S,Y_k) \neq 0$, além disso existe um k tal que $Hom_A(S,Y_k) \neq 0$ e $Ext_A^1(S,Y_k) \neq 0$, e temos que Y_k tem comprimento menor que o comprimento de X, contradição com a escolha de X. Assim temos que Q é indecomponível, portanto temos o seguinte ciclo em $mod\ A$

$$Q \longrightarrow E_i \longrightarrow S \longrightarrow X \longrightarrow Q$$

para cada E_i somando indecomponível de E, então pelo Lema 5.1.6 obtemos que $Ext_A^2(Q,X) = 0$, agora aplicando $Hom_A(-,X)$ em (+) temos:

$$Ext_A^1(Q,X) \longrightarrow Ext_A^1(X,X) \xrightarrow{\phi} Ext_A^1(S,X) \longrightarrow Ext_A^2(Q,X) = 0$$

então ϕ é sobrejetora, tendo em conta que $Ext_A^1(S,X) \neq 0$ concluímos que $Ext_A^1(X,X) \neq 0$. $\square$

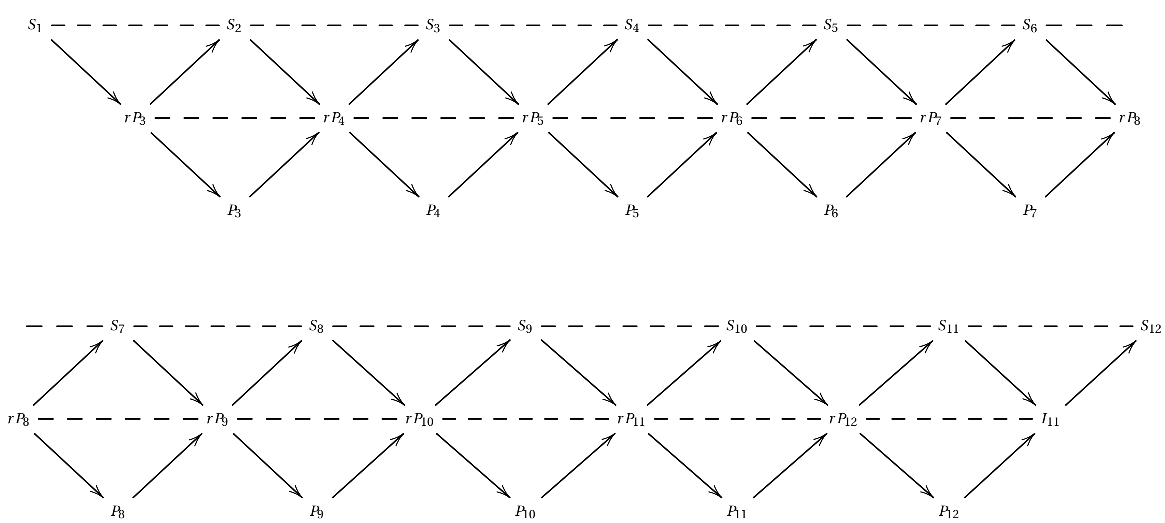
Existem álgebras de dimensão finita que não são hereditárias por partes, tal que existem subcategorias plenas da categoria de módulos sobre a álgebra disjuntas dois a dois e a união destas é a categoria de módulos. E as subcategorias plenas cumprem i), ii), iii), iv), v), vi), vii) e viii) do Teorema 5.1.1.

A seguir daremos um exemplo de uma $\Bbbk-$álgebra não hereditária por partes e que cumpre as implicações do Teorema 5.1.1.

Exemplo 5.1.1. *Seja $\vec{\Delta}$ a aljava orientada do tipo A_{12} e seja I o ideal bilateral de $\Bbbk\vec{\Delta}$ gerado por todos os caminhos de comprimento três. Definamos $\Lambda = \Bbbk\vec{\Delta}/I$, onde A_{12} é:*

$$A_{12}: 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longleftarrow 6 \longleftarrow 7 \longleftarrow 8 \longleftarrow 9 \longleftarrow 10 \longleftarrow 11 \longleftarrow 12$$

Na Proposição 2.6 de [HS09, pág. 702] se prova que Λ não é uma $\Bbbk-$álgebra hereditária por partes. A aljava de Auslander-Reiten de $mod\ \Lambda$ é:



Onde os S_i são $\Lambda-$módulos simples, P_i são $\Lambda-$módulos projetivos indecomponíveis e $rP_i = Rad(P_i)$ o radical de P_i.

Calculando a dimensão projetiva dos $\Lambda-$módulos simples ou pela Proposição 1.4 de [HS09, pág. 697] temos que a dimensão global de Λ é 7.

Vejamos que $mod\ \Lambda$ admite uma descomposição em partes. Definamos as partes $\mathscr{U}_i$ da seguinte forma:

$\mathscr{U}_0 = \{S_1, S_2, S_3, rP_3, rP_4, P_3\}$.

$\mathscr{U}_1 = \{S_4, rP_5, rP_6, P_4, P_5, P_6\}$.

$\mathscr{U}_2 = \{S_5, S_6, rP_7\}$.

$\mathscr{U}_3 = \{S_7, rP_8, rP_9, P_7, P_8, P_9\}$.

$\mathscr{U}_4 = \{S_8, S_9, rP_{10}\}$.

$\mathscr{U}_5 = \{S_{10}, rP_{11}, rP_{11}, P_{10}, P_{11}, P_{12}\}$.

$\mathscr{U}_6 = \{S_{11}, S_{12}, I_{11}\}$.

Vemos que $\mathscr{U}_0$ é fechado para submódulos, cada $\mathscr{U}_i$ é fechado para extensões e $\mathscr{U}_6$ é fechado para quocientes. Além disso, se $X \in \mathscr{U}_i$ temos que $dp(X) \leq i+1$ e $di(X) \leq 7-i$ pois $r = 6$, temos que cada $\mathscr{U}_i$ contém um $\Lambda-$módulo simples.

Referências Bibliográficas

[AF92] F. W. ANDERSON and K. R. FULLER. *Rings and categories of modules*, volume 13 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. x+376 pp.

[ARS95] M. AUSLANDER, I. REITEN, and S. SMALO. *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 432 pp.

[ASS97] I. ASSEM. *Algèbres et modules*. Masson paris, Paris, 1997.

[ASS06] I. ASSEM, D. SIMSON, and A SKOWROŃSKI. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp. Techniques of representation theory.

[CE99] H. CARTAN and S. EILEMBERG. *Homological algebra*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. xvi+390 pp. With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.

[DK94] J. A. DROZD and V. V. KIRICHENKO. *Finite-dimensional algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. xiv+249 pp. Translated from the 1980 Russian original and with an appendix by Vlastimil Dlab.

[GM03] S. GELFAND and Y. MANIN. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. xx+372 pp.

[HAP88] D. HAPPEL. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. x+208 pp.

[HAP01] D. HAPPEL. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math.*, 144(2):381–398, 2001.

[HHK07] L. A. HUNGEL, H. HAPPEL, and H. KRAUSE, editors. *Handbook of tilting theory*, volume 332 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. viii+472 pp.

[HR99] D. HAPPEL and I. REITEN. Hereditary categories with tilting object. *Math. Z.*, 232 (3):559–588, 1999.

[HRS94] D. HAPPEL, I. REITEN, and S. O. SMALØ. Quasitilted algebras. In *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, volume 424 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 163–181. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[HRS96] D. HAPPEL, I. REITEN, and S. SMALØ. Piecewise hereditary algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 66(3):182–186, 1996.

[HS09] D. HAPPEL and U. SEIDEL. Piecewise Hereditary Nakayama Algebras. *Algebras and Representation Theory*, 13(6):693–704, December 2009.

[HZ08] D. HAPPEL and D. ZACHARIA. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. *Math. Z.*, 260(1):177–185, 2008.

[HZ10] D. HAPPEL and D. ZACHARIA. Homological properties of piecewise hereditary algebras. *J. Algebra*, 323(4):1139–1154, 2010.

[MIL] D. MILIČIĆ. Lectures on derived categories. http://www.math.utah.edu/∼ milicic/Eprints/dercat.pdf. acessado em 16/06/2013.

[PIE82] R. S. PIERCE. *Associative algebras*, volume 88 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982. xii+436 pp.

[RIC89] J. RICKARD. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3): 436–456, 1989.

[RIN] C. RINGEL. Hereditary triangulated categories. http://www.math.uni-bielefeld.de/∼ringel/. acessado em 16/02/2013.

[WEI94] C. WEIBEL. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.

Índice Remissivo