

DOUGLAS FUKUNAGA SURCO

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA BASEADA EM DEA**

CURITIBA

2004

DOUGLAS FUKUNAGA SURCO

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA BASEADA EM DEA**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Ciências, Curso de
Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia, Área de Concentração em Programação
Matemática, Setor de Ciências Exatas e Setor de
Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.**

Orientador: Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm.

CURITIBA

2004

TERMO DE APROVAÇÃO**DOUGLAS FUKUNAGA SURCO****DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA BASEADA EM DEA**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Programação Matemática da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Orientador:

Prof. Volmir Eugênio Wilhelm. Dr. Eng.
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Odacir Dionísio Gracioli, Dr. Eng
Departamento de Engenharia e Informática, UCS

Prof. Dr. André Luiz Pires Guedes, DSc.
Departamento de Informática, UFPR

Profa. Neida Maria Patias Volpi, Dra. Eng
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, 05 de novembro de 2004.

À minha família

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e incentivo durante a realização deste curso.

Ao professor Volmir Eugênio Wilhelm, pela orientação para a realização deste trabalho e principalmente pelo companheirismo e amizade.

Aos professores: Celso Carnieri, Anselmo Chaves Neto, Maria Teresinha Arns Steiner, Neida Maria Patias Volpi, Liliana, Arinei, Jair, pelos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas, pela amizade formada durante o curso especialmente a Flávia pelo apoio.

A todos os demais, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO.....	4
1.2	IMPORTÂNCIA DO TRABALHO	4
1.3	METODOLOGIA	5
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	6
1.5	DEFINIÇÕES	6
1.6	ALGUMAS NOTAÇÕES.....	10
2	ANÁLISE DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DA PRODUTIVIDADE.....	14
2.1	EFICIÊNCIA TÉCNICA E PRODUTIVIDADE	14
2.1.1	TECNOLOGIA DE PRODUÇÃO	16
2.1.2	RETORNOS DE ESCALA	18
2.1.3	FRONTEIRAS DAS TECNOLOGIAS DE PRODUÇÃO	19
2.1.4	ORIENTAÇÕES DE PROJEÇÃO	20
2.2	ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS - DEA	22
2.3	MEDIDAS ORIENTAÇÃO INSUMO	24
2.3.1	MODELO DEA DUAS FASES	32
2.3.2	MEDIDA FDH	33
2.4	MEDIDAS ORIENTAÇÃO PRODUTO.....	35
2.5	MEDIDAS ORIENTAÇÃO INSUMO/PRODUTO	37
2.5.1	MODELO ADITIVO	38
2.5.2	MEDIDAS DEA COMPLETAS	40
2.6	ÍNDICE DE MALMQUIST	43
2.7	APLICATIVOS DEA	46
2.7.1	EMS 1.3 (EFFICIENCY MEASUREMENT SYSTEM)	46
2.7.2	FRONTIER ANALYST.....	48
2.7.3	DEA-SOLVER PROFESSIONAL 4.1	49
2.7.4	ONFRONT 2	49
3	DEA-SAED: FERRAMENTA DE AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DE PRODUTIVIDADE.....	52
3.1	A BIBLIOTECA LP_SOLVE.....	52
3.2	A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO VISUAL BASIC	53
3.3	COMUNICAÇÃO ENTRE DEA-SAED E LP_SOLVE.....	54

3.4	ALGORITMO GERAL DA FERRAMENTA DEA-SAED	57
3.4.1	ENTRADA DOS DADOS	59
3.4.2	MODELOS DEA IMPLEMENTADOS EM DEA-SEAD	61
3.4.3	PROCESSO INTERNO DA AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA	64
3.5	OPÇÕES DE MENU DISPONÍVEIS NO DEA-SAED PARA ANÁLISE DE RESULTADOS.....	66
3.5.1	ORDENAMENTO	66
3.5.2	REFERÊNCIA CRUZADA	66
3.5.3	PROJEÇÃO.....	68
3.5.4	GRÁFICOS	69
3.6	OPÇÕES DE AJUDA (HELP).....	69
4	APLICAÇÃO DA FERRAMENTA DE AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DA PRODUTIVIDADE DEA-SAED	71
4.1	INSTALAÇÃO E INICIALIZAÇÃO DO APLICATIVO DEA-SAED.....	71
4.2	AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA DE 8 DMUS QUE CONSOMEM 1 INSUMO E PRODUZEM 1 PRODUTO	74
4.2.1	EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA (RCE)	76
4.2.2	EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS VARIÁVEIS DE ESCALA (RVE).....	79
4.2.3	EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS NÃO CRESCENTES DE ESCALA (RNCE) E RETORNOS NÃO DECRESCENTES DE ESCALA (RNDE).....	81
4.2.4	EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO PRODUTO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA (RCE) E RETORNOS VARIÁVEIS DE ESCALA....	84
4.2.5	EFICIÊNCIA TÉCNICA ORIENTAÇÃO INSUMO/PRODUTO.....	87
4.3	AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA DE 8 DMUS QUE CONSOMEM 2 INSUMOS E PRODUZEM 1 PRODUTO	87
4.3.1	EFICIÊNCIA TÉCNICA NÃO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA	89
4.3.2	MODELO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO COM RESTRIÇÃO AOS PESOS	90
4.3.3	MODELO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO COM VARIÁVEIS INCONTROLÁVEIS ..	92
4.3.4	MODELO FREE DISPOSAL HULL-FDH ORIENTAÇÃO INSUMO	93
4.3.5	MODELO ADITIVO	95

4.3.6	MODELOS SBM E RAM	96
4.4	AVALIAÇÃO DA PRODUTIVIDADE	98
4.5	AVALIAÇÃO DE TEMPOS DE PROCESSAMENTO EM DEA-SAED	100
5	CONCLUSÕES.....	102
5.1	CONCLUSÕES	103
5.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	104
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
	ANEXO I – DADOS USADOS NA AVALIAÇÃO DA PRODUTIVIDADE	109
	ANEXO II - DADOS USADOS NA AVALIAÇÃO DOS TEMPOS DE	
	PROCESSAMENTO DE DEA-SAED	113

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Os conjuntos produção e consumo da tecnologia	17
Figura 2.2 - A tecnologia de produção	18
Figura 2.3 - Retornos de escala caracterizados pelo gráfico da tecnologia	18
Figura 2.4 - Projeção orientação insumo.....	20
Figura 2.5 - Projeção orientação produto	21
Figura 2.6 - Projeção orientação insumo/produção	22
Figura 2.7 - Medida da eficiência técnica orientação insumo considerando retornos constantes de escala	27
Figura 2.8 - Projeção orientação insumo considerando retornos constantes de escala diferentes opções de controle sobre os insumos	32
Figura 2.9 - Fronteiras geradas pela medida FDH orientação insumo	34
Figura 2.10 - Medida da eficiência técnica orientação produto considerando retornos constantes de escala	36
Figura 2.11 - Projeção na fronteira através do Modelo Aditivo.....	38
Figura 2.12 - Índice de Malmquist	45
Figura 2.13 - Modelos usados no EMS 1.3	47
Figura 2.14 - Janela Options do EMS 1.3	47
Figura 2.15 - Modelos apresentados pelo aplicativo Frontier Analyst	48
Figura 2.16 - Modelos usados no aplicativo DEA-Solver versão Learning	49
Figura 2.17 - Modelos apresentados pelo programa OnFront 2 (versão demo).....	50
Figura 3.1 - Diagrama de fluxo do processamento e comunicação entre Visual Basic e Lp_solve (D é o número de DMUs).....	59
Figura 3.2 - Digitando os dados de entrada	60
Figura 3.3 - Segundo modo de entrada de dados no DEA-SAED.....	60
Figura 3.4 - Botão Importar do DEA-SAED	61
Figura 3.5 - Formato do texto a importar.....	61
Figura 3.6 - Menu de opções dos modelos radiais.....	63
Figura 3.7 - Menu de opções dos modelos não radiais.....	63
Figura 3.8 - Menu de opções para o índice da produtividade	64
Figura 3.9 - Opções para análise de resultados em DEA-SAED.....	66
Figura 3.10 - Projeção de DMUs na fronteira de eficiência	68

Figura 3.11 - Fronteira de produção considerando 1 insumo e 1 produto e retornos variáveis de escala.....	69
Figura 3.12 - Exemplo de ajuda disponível no DEA-SAED	70
Figura 4.1 - Janela de instalação do programa DEA-SAED	71
Figura 4.2 - Escolha do diretório para instalação de DEA-SAED	72
Figura 4.3 - Criando a pasta DEA-SAED no Menu Iniciar do Windows.....	72
Figura 4.4 - Criando o ícone DEA-SAED no Desktop do Windows	73
Figura 4.5 - Informações adicionais sobre a instalação de DEA-SAED	73
Figura 4.6 - Finalização da instalação de DEA-SAED.....	74
Figura 4.7 - Alteração do símbolo que especifica valores decimais	74
Figura 4.8 - Planos de produção das 8 DMUs.....	75
Figura 4.9 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RCE	77
Figura 4.10 - Visualização gráfica da projeção da DMU A sobre a fronteira de produção considerando RCE	78
Figura 4.11 - Ordenamento das 8 DMUs de acordo com a eficiência considerando RCE.....	78
Figura 4.12 - Eficiência técnica cruzada das 8 DMUs considerando RCE	79
Figura 4.13 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RVE	80
Figura 4.14 - Representação gráfica da fronteira de produção e dos hiperplanos considerando RVE	81
Figura 4.15 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RNCE	82
Figura 4.16 - Fronteira de produção considerando retornos não crescentes de escala (RNCE).....	82
Figura 4.17 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RNDE	83
Figura 4.18 - Fronteira de produção considerando retornos não decrescentes de escala (RNDE)	84
Figura 4.19 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação produto na fronteira de produção com RCE	85
Figura 4.20 - Projeção orientação produto das DMU A e C sobre a fronteira de produção	85

Figura 4.21 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação produto na fronteira de produção com RVE.....	86
Figura 4.22 - Representação gráfica da fronteira de produção, dos hiperplanos e da projeção orientação produto sobre a fronteira de considerando RVE.....	86
Figura 4.23 - Conjunto consumo $C(1)$ considerando retornos constantes de escala	88
Figura 4.24 - Definição do valor de epsilon	89
Figura 4.25 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando a projeção orientação insumo na fronteira de eficiência com RCE.....	89
Figura 4.26 - Mudança do valor de epsilon	90
Figura 4.27 - Inclusão de relação entre pesos dos insumos	90
Figura 4.28 - Região de segurança	92
Figura 4.29 - Seleção dos insumos/produtos incontroláveis	93
Figura 4.30 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando a projeção orientação insumo na fronteira de eficiência com FDH.....	93
Figura 4.31 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo Aditivo	95
Figura 4.32 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo SBM	96
Figura 4.33 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo RAM	97
Figura 4.34 - Formato do arquivo de dados para cálculo dos índices de produtividade através do índice de Malmquist.....	98
Figura 4.35 - Importação de dados para avaliar a produtividade	99
Figura 4.36 - Exemplo de gráfico disponível para análise da produtividade	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Conjunto de dados de "D" DMUs com "P" produtos e "M" insumos	11
Tabela 2.1 - Resumo das observações de alguns aplicativos DEA	51
Tabela 3.1 - Insumos e produtos de 4 DMUs	64
Tabela 3.2 - Índices de eficiência cruzada e os Maverick	67
Tabela 4.1 - Quantidades dos insumos e dos produtos de 8 DMUs	75
Tabela 4.2 - Índices da eficiência técnica de 8 DMUs considerando as medidas DEA SBM e RAM	87
Tabela 4.3 - Quantidades dos insumos das 8 DMUs	88
Tabela 4.4 - Conjunto de pesos ótimos	91
Tabela 4.5 - Tempos de processamento considerando diferentes modelos DEA...	101

RESUMO

Neste trabalho são mostrados conceitos e modelos relacionados com o cálculo de índices de eficiência técnica, e o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para avaliação da eficiência técnica e da produtividade baseada em DEA (*Data Envelopment Analysis*). DEA (ou Análise por Envoltória de Dados), concebido originalmente por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), identifica Unidades de Produção (DMUs) eficientes e ineficientes através de modelos de programação matemática. Os modelos matemáticos diferem quanto à projeção (orientação insumo, produto, insumo/produto), quanto à fronteira onde ocorre a projeção (fronteira de produção e fronteira de eficiência), quanto aos retornos de escala (constantes, variáveis, não crescentes e não decrescentes).

A ferramenta computacional para a avaliação da eficiência técnica e da produtividade desenvolvida neste trabalho é de uso livre e será denominada de “DEA-SAED *Software* de Análise por Envoltória de Dados”. DEA-SAED foi programado na plataforma windows usando a linguagem *Visual Basic* e a biblioteca *Lp_solve*. *Visual Basic* e *Lp_solve* são interligados através da tecnologia *Dynamic Link Library-DLL* (Biblioteca de Ligação Dinâmica). Esta DLL contém códigos para solucionar problemas de programação matemática.

ABSTRACT

The aims of this work is to show concepts and models related to the calculation of technical efficiency indexes, and to development a computational tool for evaluation of the technical efficiency and of the productivity based on DEA (Data Envelopment Analysis). The DEA, conceived originally by Charnes, Cooper and Rhodes (1978), identify Units of Production (DMUs) as efficient or inefficient through models of mathematical programming. The mathematical models differ as the projection (input, output, input/output), to the frontier occurs (production and efficiency frontiers), as well as the returns of scale (constant, variable, non increasing e non decreasing).

The computational tool for the evaluation of efficiency technique and of the productivity developed in this work is free to use and it will be called “DEA-SAED *Software de Análise por Envoltória de Dados*”. DEA-SAED was codified in the Windows platform using the Visual Basic language and the Lp_solve library. Visual Basic and Lp_solve are linked through the technology Dynamic Link Library- DLL. This DLL contains codes to solve problems of mathematical programming.

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO

Quando se discute o desempenho de uma empresa, é comum descrevê-la como sendo mais ou menos 'eficiente' ou mais ou menos 'produtiva' [Lovell, 1993, p.3]. A eficiência possui duas componentes: a componente referente à habilidade do gerenciador em transformar insumos em produtos denominada de eficiência técnica e a componente referente à habilidade do gerenciador em definir proporções ótimas dos insumos e dos produtos à luz dos preços praticados no mercado, denominada de eficiência alocativa. A mensuração da eficiência técnica originou-se da definição de eficiência técnica de Koopmans e da medida desenvolvida por Debreu [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.7]. Segundo Koopmans [*apud* Lovell, 1993, p.10] uma organização é eficiente tecnicamente se e somente se um aumento em qualquer produto gerado pela organização requer a redução no nível de outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo empregado; e se uma redução em qualquer insumo empregado por ela implica num aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto. Em 1951 Debreu [*apud* Russell, 1998, p.7 e 28] introduziu a primeira medida radial da eficiência técnica em termos de um "coeficiente de utilização dos recursos", definindo-a como sendo a unidade menos a máxima redução equiproporcional do consumo de todos os insumos observados tal que o produtor possa continuar a fabricar os mesmos produtos. Um índice igual à unidade indica que o produtor é eficiente tecnicamente; um índice menor que a unidade indica ineficiência técnica e que o consumo de todos os insumos pode ser reduzido na mesma proporção. Em 1957 Farrell desenvolveu um método de programação matemática não paramétrica e empregou a medida de Debreu para mensurar índices de ineficiência em fazendas agrícolas dos Estados Unidos.

A definição de Koopmans sugere a comparação dos níveis dos insumos e dos produtos praticados com os níveis ótimos [Lovell, 1993, p.4] de uma empresa. Por vários anos o maior problema em se mensurar a eficiência técnica era a determinação dos níveis ótimos de uma empresa até que em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes formularam a abordagem *Data Envelopment Analysis* - DEA para mensurar radialmente índices da eficiência técnica CCR. Com o auxílio de programação matemática não paramétrica, DEA gera uma envoltória dos planos de produção observados. Todos os planos de produção pertencentes a essa envoltória, que é a fronteira de produção, são eficientes tecnicamente e seus níveis de consumo e de produção são ótimos¹. Os índices da eficiência técnica associados aos demais planos de produção são os menores escalares positivos que contraem os consumos (ou os maiores escalares que expandem as produções) projetando os planos sobre planos *benchmarks*.

Após o desenvolvimento de DEA foram elaboradas outras medidas da eficiência técnica, como a medida radial de Banker, Charnes e Cooper - BCC [1984] e a medida radial de Deprins, Simar e Tulkens-DST [1984]. As medidas de CCR, BCC e DST diferenciam-se quanto à obtenção dos planos de produção *benchmarks* que constituem a envoltória. Na medida de CCR os *benchmarks* são gerados por combinações lineares positivas (e por isso é designada de *free disposal conical hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida radial de BCC as combinações lineares que geram os *benchmarks* são convexas (recebendo denominação de *convex free disposal hull* - Tulkens [1993, p.2]); na medida de DST os *benchmarks* são planos de produção observados na prática, portanto, a fronteira de produção é constituída unicamente por planos observados, recebendo a denominação de *free disposal hull*.

Segundo Lovell [1993, p.13], as medidas radiais da eficiência técnica não são perfeitas, pois em várias situações não coincidem com a definição de eficiência técnica de Koopmans. Empregando a notação de Färe, Grosskopf e Lovell [1994, p.26 e 39], a tecnologia de produção representada pela correspondência consumo $C(Y_o) = \{X : (X, Y_o) \text{ é viável}\}$, onde $X \in R^M$ é um vetor de quantidades de insumos e $Y_o \in R^P$ é o vetor da quantidade fixa dos produtos (qualquer par (X, Y_o) , com $X \in C(Y_o)$,

¹ Neste trabalho os planos de produção pertencentes a fronteira de produção serão denominados de planos *benchmarks*.

é um plano de produção viável). Sejam os subconjuntos $Isoq_{C(Y_0)} = \{X \in C(Y_0) : \lambda X \in C(Y_0) \text{ se } \lambda < 1\}$ que é o conjunto isoquanta de $C(Y_0)$ e $Efc_{C(Y_0)} = \{X \in C(Y_0) : X' < X \Rightarrow X' \notin C(Y_0)\}^2$ que é o subconjunto eficiência de $C(Y_0)$. Têm-se que $Efc_{C(Y_0)} \subseteq Isoq_{C(Y_0)}$. A definição de Pareto-Koopmans é rigorosa e requer que o produtor eficiente tecnicamente pertença simultaneamente aos subconjuntos $Efc_{C(Y_0)}$ e $Isoq_{C(Y_0)}$, porém as medidas radiais identificam como eficientes os planos de produção do conjunto $Efc_{C(Y_0)}$ e qualquer outro plano locado no conjunto e $Isoq_{C(Y_0)}$ 'fora' do subconjunto eficiência.

Para eliminar essa deficiência das medidas radiais, várias medidas alternativas (denominadas de medidas não radiais) da eficiência técnica foram apresentadas com o objetivo de torná-las Pareto-Koopmans [Lovell, 1993, p.14]. Lovell alerta que todas as medidas não radiais sugeridas têm suas deficiências, porém verifica-se na literatura que a mais empregada é a de Charnes, Cooper e Rhodes [1978]. A solução sugerida por eles consiste em contrair radialmente os insumos ou expandir radialmente os produtos alocando o plano de produção no conjunto isoquanta e em seguida realoca-lo tal que passe a pertencer ao conjunto eficiência. O segundo passo pode ser obtido através da inclusão das variáveis de folga dos insumos e dos produtos na função objetivo do programa linear que calcula o índice da eficiência técnica radial o que leva a uma redução adicional do consumo de alguns insumos e/ou aumento da produção de alguns produtos.

Dentre as medidas não-radiais está a categoria de medidas completas de eficiência técnica, que se caracterizam por possuírem duas propriedades (ser função escalar; avaliar eficiência Pareto-Koopmans) e atenderem a três critérios (utilizar algoritmos já existentes; ser de fácil manejo computacional; fornecer resultados de fácil interpretação no meio gerencial). Medidas completas de eficiência técnica têm sido apresentadas na literatura nos últimos anos. Uma delas merece especial atenção, pois ela permite ordenar os planos de operação observados de acordo com

*
² $X < Y$ indica que algum componente $x_n < y_n$

sua ineficiência técnicas. Tal medida é a Medida Ajustada por Amplitude (RAM)³, apresentada por Cooper, Park e Pastor (1999).

Na literatura e na Internet, existem vários aplicativos, gratuitos e pagos, destinados a usuários que desejam calcular índices de eficiência através de modelos DEA. Dentre esses pode-se destacar: o **EMS** 1.3 (Efficiency Measurement System); o **Frontier Analyst** versão 3. Professional Edition, desenvolvido por Banxia Software Ltd. Glasgow, Scotland; o aplicativo **DEA-Solver** Professional 4.1 desenvolvido pela Saitech Inc. New Jersey. U.S.A; e o **OnFront 2**, desenvolvida por EMQ (Economical Productivity and Quality), EMQ AB, Box 2134, S-220 02 Lund, Sweden.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma ferramenta computacional para análise da eficiência técnica e de produtividade baseada em DEA.

Os objetivos específicos são:

- Coletar e descrever vários modelos DEA;
- Detalhar a biblioteca computacional Lp_solve, que é um aplicativo para resolver problemas de programação linear, em forma de biblioteca;
- Viabilizar uma interface (comunicação) entre Lp_solve e Visual Basic;
- Implementar os principais modelos DEA disponíveis na literatura;
- Implementar o índice e produtividade Malmquist;
- Testar os modelos implementados.

1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Nesses últimos anos o DEA vem ganhando espaço na Pesquisa Operacional, tendo principais encontros internacionais⁴, tais como “*International Symposium of DEA, September 2004, UK*”, “*Asia Pacific Productivity Conference 2004 (APPC2004), July 14-16, 2004*”, “*North American Productivity Workshop 2004*,

³ RAM, de Range Adjusted Measure.

⁴ <http://www.DEAzone.com/DEA2004> (agosto de 2004).

Toronto, Canada, June 22-25", "VIII European Workshop on Efficiency and Productivity, September 2003".

No Brasil, o uso de DEA vem ganhando espaço no mundo acadêmico. Assim, pretende-se neste trabalho abordar o conjunto de métodos e modelos DEA, implementar tais métodos, bem como proceder aplicações, visualizando os resultados de fácil entendimento através de tabelas coloridas.

Considera-se, portanto, importante que a comunidade acadêmica não interessada em implementar modelos DEA, entretanto interessada em aplicar os diversos modelos DEA, tenha acesso livre a programas computacionais iguais ao proposto neste trabalho.

1.3 METODOLOGIA

O maior esforço a ser concentrado no desenvolvimento deste trabalho é basicamente em escrever o aplicativo DEA-SEAD. Entretanto, todos os modelos DEA a serem contemplados no aplicativo serão detalhados no texto. Do mesmo modo, será tratado a biblioteca Lp_solve, que auxilia na resolução da programação linear no processo de cálculo dos índices de eficiência técnica e de produtividade.

O Lp_solve não é comercial e foi escrito em ANSI C por Michel Berkelaar, e, segundo este, Lp_solve resolveu com sucesso problemas de programação linear que envolvem 30.000 variáveis e 50.000 restrições. O aplicativo também resolve pequenos problemas de programação inteira e mista. A manutenção e adaptação para diversas plataformas do Lp_solve são realizadas por Peter Notebaert [peno@mailme.org], conjuntamente com Kjell Eikland [kjell.eikland@broadpark.no].

A interface gráfica de DEA-SEAD com o usuário, bem como a geração, a comunicação com o Lp_solve e a interpretação dos procedimentos computacionais foram escritos na linguagem do Visual Basic-VB. VB é parte integrante do Visual Studio 6.0, e é uma linguagem robusta criada para ambientes de desenvolvimento que abordam cada aspecto da programação, de aplicações educacionais à programação de banco de dados, e de aplicações financeiras ao desenvolvimento de componentes de Internet. A comunicação de VB com Lp_solve é feita através de

um arquivo texto com extensão LP. Este arquivo tem um padrão pré-estabelecido pelo Lp_solve chamado *lp-format*. Os resultados dos modelos são apresentados em quadros de forma amigável, usando fundos coloridos para a fácil interpretação e incrementado funções tais como ordenamento das DMUs, projeções das DMUs para serem eficientes e gráficos.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho é composto de cinco capítulos.

No primeiro capítulo é destacada a importância do estudo, bem como suas características gerais.

No segundo capítulo é apresentado um breve histórico do DEA, assim como os modelos usados no programa, familiarizando-se com os nomes das variáveis e as expressões, e, finalmente, alguns aplicativos existentes no mercado.

O terceiro capítulo trata sobre o programa em si e a composição do programa DEA-SAED V1.0.

No quarto capítulo há algumas aplicações do DEA, com exemplos de fácil compreensão, assim como um exemplo prático real (<http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/doordea.htm>).

No quinto capítulo são apresentadas as conclusões e as recomendações para futuros trabalhos.

1.5 DEFINIÇÕES

No transcorrer do texto, ocorrerá o uso freqüente de termos específicos da área de avaliação da eficiência técnica e de produtividade. Tais termos encontram-se definidos abaixo.

- 1) **Benchmark**: Padrão usado como referência.

- 2) **Conjunto Eficiência:** É um subconjunto da fronteira de produção formado pelos planos de produção eficientes tecnicamente, segundo a definição de Koopmans. Para esses planos de produção, um aumento em qualquer produto requer uma redução em pelo menos um outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo, e uma redução em qualquer insumo requer um aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto.
- 3) **Data Envelopment Analysis - DEA:** Uma técnica de programação linear que identifica as melhores práticas de uma amostra de produtores e mede a eficiência técnica baseada na diferença entre o nível dos insumos (produtos) de um produtor observado e o nível dos insumos (produtos) daquele que apresenta a melhor prática, mantendo fixo o nível de produtos (insumos). Geralmente, a tradução mais utilizada na literatura brasileira é Análise por Envoltória de Dados.
- 4) **Decision Making Unit - DMU:** As organizações ou unidades de produção ou produtores a serem analisadas num estudo de análise de eficiência ou produtividade. As organizações podem ser públicas ou privadas, com ou sem fins lucrativos. Uma tradução bastante utilizada na literatura é "Unidades de Tomada de Decisão".
- 5) **Descarte fraco dos insumos (produtos):** (*Weak Disposal*) medida da eficiência de uma DMU de modo que os insumos (produtos) de uma DMU se reduzam radialmente(proporcionalmente).
- 6) **Descarte forte dos insumos (produtos):** (*Strong Disposal*) medida da eficiência de uma DMU de modo que os insumos (produtos) de uma DMU se reduzam radialmente, considerando-se as folgas dos insumos(produtos) de maneira que a redução não é proporcional para todos os insumos(produtos).
- 7) **Eficiência alocativa:** Indica se o produtor emprega os insumos à luz dos preços (dos insumos) numa proporção ótima que minimiza os custos da produção.

- 8) **Eficiência produtiva:** Habilidade de escolher o plano de operação viável, cuja produtividade é a maior dentre os planos de operação viáveis, sendo essa produtividade medida, em geral, em termos dos preços de mercado dos insumos e dos produtos.
- 9) **Eficiência técnica:** Habilidade de evitar desperdícios, gerando tantos produtos quanto os insumos utilizados permitem e consumindo as menores quantidades de insumos necessárias para a produção.
- 10) **Eficiência técnica Debreu-Farrell no consumo:** O plano de operação (X_o, Y_o) é Debreu-Farrell eficiente no consumo quando não é possível contrair (redução equiproporcional) o consumo sem uma conseqüente redução da produção.
- 11) **Eficiência técnica Debreu-Farrell na produção:** O plano de operação (X_o, Y_o) é Debreu-Farrell eficiente na produção quando não é possível expandir (aumento equiproporcional) a produção sem um conseqüente aumento de consumo.
- 12) **Eficiência técnica Pareto-Koopmans:** O plano de operação (X_o, Y_o) é Pareto Koopmans eficiente se não for possível aumentar a quantidade gerada de qualquer produto sem uma redução da quantidade gerada de pelo menos um outro produto ou sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos um insumo; bem como se não for possível reduzir a quantidade consumida de qualquer insumo sem aumentar a quantidade consumida de pelo menos outro insumo ou sem reduzir a quantidade gerada de pelo menos um produto.
- 13) **Fatores de Produção:** São os insumos consumidos e os produtos gerados por um produtor. O conjunto dos fatores de produção também é denominado de plano de produção ou vetor insumo-produto.
- 14) **Folgas:** São as quantidades extras a serem reduzidas (aumentadas) nos insumos (produtos) para que o produtor atinja o conjunto eficiência após todos os insumos (produtos) terem sido reduzidos (aumentados) para atingir a isoquanta. Após as reduções (aumentos) adicionais, o plano de produção

resultante pertence ao conjunto eficiência e, portanto, é eficiente tecnicamente, segundo a definição de Koopmans.

- 15) **Fronteira de eficiência:** Conjunto de todos os planos de operação eficientes.
- 16) **Isoquanta:** É a curva que representa a quantidade de insumos necessários para produzir um nível fixo de produtos. Diferentes produtores localizadas na mesma isoquanta produzem o mesmo nível dos produtos, podendo empregar níveis diferentes de insumos.
- 17) **Medida completa de eficiência técnica:** Medida de eficiência técnica que gera um escalar como resultado, que avalia eficiência técnica Pareto Koopmans, que é de fácil manipulação computacional e interpretação no meio gerencial.
- 18) **Medida de eficiência produtiva de um plano de operação:** A razão entre a produtividade desse plano e a maior produtividade entre os planos de operação viáveis.
- 19) **Medida *Free Disposal Hull* - FDH:** medida de Eficiência técnica derivada da medida BCC cuja condição de convexidade (exigida na medida BCC) não necessita ser atendida. Nessa medida, os produtores *benchmarks* são produtores observados na prática.
- 20) **Melhores práticas:** É o conjunto de práticas de gerenciamento e de trabalho de um grupo de organizações similares, que resultam no potencial de produção mais alto ou na quantidade ótima de combinação dos produtos para um dado nível fixo de combinações de insumos.
- 21) **Organizações:** São sempre públicas ou privadas, com ou sem fins lucrativos. As empresas podem ser bancos, hospitais, bibliotecas, fazendas agrícolas, universidades, fundações e lojas de comércio.
- 22) **Plano de operação:** Associação de quantidades de insumos e quantidades de produtos envolvidos em uma empresa produtiva.

- 23) **Plano de produção:** É o conjunto dos insumos utilizados e dos produtos gerados num determinado período de tempo por uma organização.
- 24) **Plano de operação viável:** Plano de operação cujas quantidades de produtos podem ser geradas com as quantidades de insumos disponíveis.
- 25) **Produtividade:** Medida de desempenho produtivo de um plano de operação que compara a produção com o consumo.
- 26) **Retornos constantes de escala (RCE):** Relação entre produtos e insumos; os produtos crescem na mesma proporção que os insumos, e denominado também de CCR (modelo proposto por Charnes, Cooper e Rhodes).
- 27) **Retornos variáveis de escala (RVE):** Relação entre produtos e insumos; os produtos crescem em diferentes proporções que os insumos, e denominado também de BCC (modelo proposto por Banker, Charnes, e Cooper).
- 28) **Retornos não decrescentes de escala (RNDE):** Relação entre produtos e insumos; os produtos crescem numa proporção maior que os insumos.
- 29) **Retornos não crescentes de escala (RNCE):** Relação entre produtos e insumos; os produtos crescem numa proporção menor que os insumos.
- 30) **Orientação insumo:** Medida da eficiência de uma DMU considerando o nível de produção Y_o observado inalterado e reduzindo os recursos dos insumos até a isoquanta.
- 31) **Orientação produto:** Medida da eficiência de uma DMU considerando o nível dos insumos X_o observado inalterado e reduzindo os produtos até a isoquanta.

1.6 ALGUMAS NOTAÇÕES

Para o conjunto de dados de “D” DMUs com “P” produtos e “M” insumos, mostram-se os vetores e as matrizes geradas a partir dos dados que serão usados nos modelos.

Tabela 1.1 - Conjunto de dados de "D" DMUs com "P" produtos e "M" insumos

	M insumos					P produtos				
	INS 1	...	INS m	...	INS M	PRO 1	...	PRO p	...	PRO P
DMUs	X_1	...	X_m	...	X_M	Y_1	...	Y_p	...	Y_P
DMU 1	x_{11}	...	x_{1m}	...	x_{1M}	y_{11}	...	y_{1p}	...	y_{1P}
DMU 2	x_{21}	...	x_{2m}	...	x_{2M}	y_{21}	...	y_{2p}	...	y_{2P}
...	...		...		...	...	...	...		...
DMU d	x_{d1}	...	x_{dm}	...	x_{dM}	y_{d1}	...	y_{dp}	...	y_{dP}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
DMU D	x_{D1}	...	x_{Dm}	...	x_{DM}	y_{D1}	...	y_{Dp}	...	y_{DP}

onde:

x_{Dm} = quantidade do m-ésimo insumo utilizada pela D-ésima DMU;

$X_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{Dm})^T$, vetor coluna em relação ao insumo m;

$Y_p = (y_{1p}, y_{2p}, \dots, y_{Dp})^T$, vetor coluna em relação ao produto p;

$X_d = (x_{d1}, x_{d2}, \dots, x_{dM})$, vetor linha de insumos utilizada pela DMU d;

$Y_d = (y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{dP})$, vetor linha de produtos gerado pela DMU d;

X = vetor de insumos (para modelo primal é vetor linha, e para o dual será vetor coluna);

Y = vetor de produtos (para modelo primal é vetor linha, e para o dual será vetor coluna);

$v = (v_1, v_2, \dots, v_M)^T$ e $u = (u_1, u_2, \dots, u_P)^T$, vetor de preços virtuais;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)$, vetor referência;

$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, vetor canônico;

u_p é o preço virtual (peso) do p-ésimo produto (u_p é escalar);

v_m é o preço virtual (peso) do m-ésimo insumo (v_m é escalar);

De acordo com o modelo inicialmente proposto por Charnes, Cooper e Rhodes em 1978, com orientação insumo, o índice de eficiência técnica (θ_o^{ic}) do o-ésimo produtor escrita é:

$$\begin{aligned}
 \theta_o^{ic} = \max \quad & uY_o && \text{(dual)} \\
 \text{sa.} \quad & vX_o = 1 && \dots(\theta) \\
 & uY - vX \leq 0 && \dots(\lambda) \\
 & v \geq 0, u \geq 0
 \end{aligned}$$

O PPL_o acima encontra-se na forma matricial. Usando índices têm-se:

$$\begin{aligned} \theta_o^{ic} = \max \quad & \sum_{p=1}^P u_p y_{op} \\ \text{sa} \quad & \sum_{m=1}^M v_m x_{om} = 1 \\ & \sum_{p=1}^P u_p y_{dp} - \sum_{m=1}^M v_m x_{dm} \leq 0 \quad \text{para } d=1 \dots D \\ & v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \dots, v_M \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_P \geq 0 \end{aligned}$$

e desenvolvendo-o:

$$\begin{aligned} \theta_o^{ic} = \max \quad & u_1 y_{o1} + u_2 y_{o2} + \dots + u_P y_{oP} \\ \text{sa} \quad & v_1 x_{o1} + v_2 x_{o2} + \dots + v_M x_{oM} = 1 \\ & u_1 y_{11} + \dots + u_P y_{1P} - v_1 x_{11} - \dots - v_M x_{1M} \leq 0 \\ & \dots \\ & u_1 y_{d1} + \dots + u_P y_{dP} - v_1 x_{d1} - \dots - v_M x_{dM} \leq 0 \\ & \dots \\ & u_1 y_{D1} + \dots + u_P y_{DP} - v_1 x_{D1} - \dots - v_M x_{DM} \leq 0 \\ & v_1 \geq 0, \dots, v_M \geq 0, u_1 \geq 0, \dots, u_P \geq 0 \end{aligned}$$

A forma Dual do problema de programação linear proposto por Charnes, Cooper e Rhodes para o cálculo do índice da eficiência técnica em forma matricial é:

$$\begin{aligned} (DPPL_o) \theta_o^{ic} = \min \quad & \theta_o \\ \text{sa} \quad & X_o \theta_o - \lambda X \geq 0 \\ & \lambda Y \geq Y_o \\ & \lambda \geq 0, \theta_o \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

e usando índices:

$$\begin{aligned} (DPPL_o) \theta_o^{ic} = \min \quad & \theta_o \\ \text{sa} \quad & x_{om} \theta_o - \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} \geq 0 \quad \dots (m = 1 \text{ a } M) \\ & \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} \geq y_{op} \quad \dots (p = 1 \text{ a } P) \\ & \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_D \geq 0, \theta_o \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

e desenvolvendo-o têm-se:

$$\begin{aligned} (DPPL_o) \theta_o^{ic} = \min \quad & \theta_o \\ \text{sa} \quad & (x_{o1} \theta_o) - (\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \dots + \lambda_D x_{D1}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$(x_{o2}\theta_o) - (\lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \dots + \lambda_D x_{D2}) \geq 0$$

...

$$(x_{oM}\theta_o) - (\lambda_1 x_{1M} + \lambda_2 x_{2M} + \dots + \lambda_D x_{DM}) \geq 0$$

$$\lambda_1 y_{11} + \lambda_2 y_{21} + \dots + \lambda_D y_{D1} \geq y_{o1}$$

$$\lambda_1 y_{12} + \lambda_2 y_{22} + \dots + \lambda_D y_{D2} \geq y_{o2}$$

...

$$\lambda_1 y_{1P} + \lambda_2 y_{2P} + \dots + \lambda_D y_{DP} \geq y_{oP}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_D \geq 0, \theta_o \text{ irrestrito}$$

Nesse modelo os vetores X e Y são os vetores colunas de insumos e produtos respectivamente, X_o é o vetor linha dos insumos da o -ésima DMU.

Para que os dados de insumos e produtos sejam válidos, são colocados alguns critérios a seguir [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p. 44]:

- (i) $x_{dm} \geq 0, y_{dp} \geq 0$
- (ii) $\sum_{m=1}^M x_{dm} > 0, d = 1, \dots, D$
- (iii) $\sum_{p=1}^P y_{dp} > 0, d = 1, \dots, D$
- (iv) $\sum_{d=1}^D x_{dm} > 0, m = 1, \dots, M$
- (v) $\sum_{d=1}^D y_{dp} > 0, p = 1, \dots, P$

De acordo com (i), cada DMU poderá usar quantidades não negativas de cada insumo para produzir quantidades não negativas de cada produto. As condições (ii) e (iii) requerem que cada DMU empregue pelo menos uma quantidade de um insumo para produzir pelo menos uma quantidade de um produto. As restrições (iv) e (v) requerem para o conjunto de DMUs que se usem pelo menos uma quantidade de cada insumo e pelo menos uma quantidade de cada produto.

Os modelos acima serão detalhados no próximo capítulo.

CAPITULO II

2 ANÁLISE DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DA PRODUTIVIDADE

Debreu e Farrell, na década de 1950, definiram a eficiência técnica de um produtor como sendo a unidade menos a máxima contração equiproporcional dos insumos de forma que o produtor possa continuar produzindo a mesma quantidade de produtos. Partindo desta definição, Charnes, Cooper e Rhodes-CCR, em 1978, desenvolveram um método baseado em programação linear que calcula índices de eficiência segundo a definição de Debreu e Farrell. Abraham Charnes, William Cooper e Edwardo Rhodes (CCR) denominaram esse método de DEA, e a primeira medida leva em consideração retornos constantes de escala. Em seguida, surgiram métodos de cálculo considerando diferentes retornos de escala, diferentes orientações de contração/expansão (não equiproporcionais), medidas considerando conjuntos de produção não convexos, medidas considerando insumos (e/ou produtos) como quantidades difusas e as medidas DEA completas (SBM e RAM).

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns modelos DEA, bem como aplicativos utilizados no cálculo de índices de eficiência técnica através desses modelos.

2.1 EFICIÊNCIA TÉCNICA E PRODUTIVIDADE

Geralmente, o índice de eficiência técnica (e de produtividade) de uma organização é caracterizado pela relação entre a produção observada e a produção potencial ótima (ideal). Considerando que a produção potencial é uma quantidade observada na prática, então a medida de eficiência técnica envolve os níveis de produção da organização e os melhores níveis (ambos observados). Portanto, como os melhores níveis de produção constituem a fronteira, então o índice de eficiência

técnica envolve níveis de produção observados e níveis na fronteira de produção. Portanto, se a organização está na fronteira, então é perfeitamente eficiente; se está no interior da fronteira, é tecnicamente ineficiente, e a razão entre as quantidades das produções observada e do potencial ótimo definem o índice de eficiência dessa organização.

Dada a caracterização da eficiência técnica do parágrafo anterior, em 1951 Debreu [apud Russell, 1998, p.7 e 28] introduziu a primeira medida da eficiência técnica em termos de um “coeficiente de utilização dos recursos”, definindo-a como a unidade menos a máxima redução equiproporcional do consumo de todos os insumos observados, tal que o produtor pudesse continuar a fabricar os mesmos produtos. Um índice igual à unidade indica que o produtor é eficiente tecnicamente; um índice menor que a unidade indica ineficiência técnica e que o consumo de todos os insumos pode ser reduzido na mesma proporção. Em 1957 Farrell desenvolveu um método de programação matemática não paramétrica e empregou a medida de Debreu para mensurar índices de ineficiência em fazendas agrícolas dos Estados Unidos.

Em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes-CCR formularam a abordagem *Data Envelopment Analysis*-DEA para mensurar radialmente índices da eficiência técnica. Com o auxílio de programação matemática não paramétrica, DEA gera uma envoltória dos planos de produção observados. Todos os planos de produção pertencentes a essa envoltória, que é a fronteira de produção, são eficientes tecnicamente, e seus níveis de consumo e de produção são ótimos⁵. Os índices da eficiência técnica associados aos demais planos de produção são os menores escalares positivos que contraem os consumos (ou os maiores escalares que expandem as produções) projetando os planos sobre planos *benchmarks*.

O cálculo de índices de eficiência técnica de um conjunto de organizações requer a definição dos seguintes conceitos:

- I. Tecnologia de produção;
- II. Retornos de escala;

⁵ Neste trabalho os planos de produção pertencentes à fronteira de produção serão denominados de planos *benchmark*.

III. Fronteira de produção:

IV. Orientações.

Esses conceitos são fundamentais pois a eficiência técnica depende da tecnologia de produção, dos retornos de escala em que a organização opera, da fronteira de produção adotada e da orientação desejada. A orientação indica se a avaliação da eficiência técnica ocorre em relação ao consumo (orientação insumo), ou em relação à produção (orientação produto), ou ainda em relação ao consumo e à produção simultaneamente (orientação insumo/produto).

2.1.1 TECNOLOGIA DE PRODUÇÃO

O conceito de eficiência na produção (eficiência técnica) têm recebido um significado mais preciso na economia depois que Koopmans e Debreu introduziram em 1951 a noção de conjunto de produção [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.474], geralmente denominado de tecnologia da produção [Färe, Grosskopf e Lovell, 1994, p.25]. Segundo a terminologia de Koopmans-Debreu, a tecnologia de produção é a coleção TP de pares (X, Y) onde $X \in R^M$ é um vetor de quantidades de insumos e $Y \in R^P$ um vetor de quantidades de produtos que possuem a propriedade de serem viáveis:

$$TP = \{(X, Y): X \in R^M, Y \in R^P; (X, Y) \text{ é viável}\}.$$

A utilidade da noção de conjunto produção para o propósito desse trabalho é a noção de *fronteira* e de *interior* do conjunto. Assim podem-se distinguir planos de produção pertencentes ao interior da tecnologia de produção, denominada de ineficientes, e aqueles que pertencem à fronteira, denominada de eficientes. Portanto, a eficiência de um plano de produção pode ser calculada em termos da distância entre ele e a fronteira [Tulkens e Eeckaut, 1995, p.475].

A eficiência técnica pode ser calculada segundo orientação insumo e/ou orientação produto. Na orientação insumo procura-se a maior contração possível do consumo (mantendo o nível de produção observado). Na orientação produto procura-se pela maior expansão possível do vetor produção, sem alterar o nível atual de consumo. Devido a essas duas orientações será útil a representação da

tecnologia pelos conjunto consumo ($C(Y)$), conjunto produção ($P(X)$) e o gráfico da tecnologia de produção (TP).

Assim, têm-se as correspondências:

1) $C: R_+^P \rightarrow C(Y) \in R_+^M \Rightarrow C(Y)$ é o conjunto dos vetores consumo que produzem pelo menos o vetor produção Y ;

2) $P: R_+^M \rightarrow P(X) \in R_+^P \Rightarrow P(X)$ é a coleção dos vetores produção possíveis de serem gerados a partir do insumo X ;

3) $TP = \{(X, Y) \in R_+^{M+P} : Y \in P(X), X \in R_+^M\}$ ou

$TP = \{(X, Y) \in R_+^{M+P} : X \in C(Y), Y \in R_+^P\} \Rightarrow TP$ é a coleção de todos os vetores consumo-produção viáveis.

A Figura 2.1 ilustra os conjuntos $P(X)$ e $C(Y)$ e a Figura 2.2 contém o gráfico de TP da tecnologia. TP é a região limitada pelo eixo dos x e a semi-reta $\overrightarrow{Oa}$, e neste caso os conjuntos $P(x_0) = [0, y_0)$ e $C(y_0) = [x_0, +\infty)$ modelam a mesma tecnologia, porém representam diferentes aspectos. O conjunto consumo modela substituição de insumos e o conjunto produção modela substituição de produtos. O gráfico modela ambas as substituições e adicionalmente modela a transformação insumo-produto.

Figura 2.1 - Os conjuntos produção e consumo da tecnologia

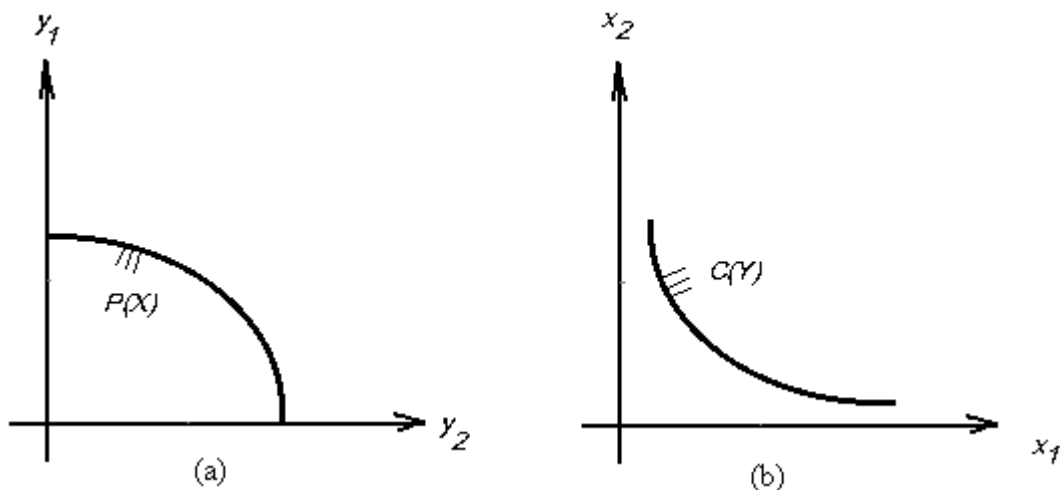
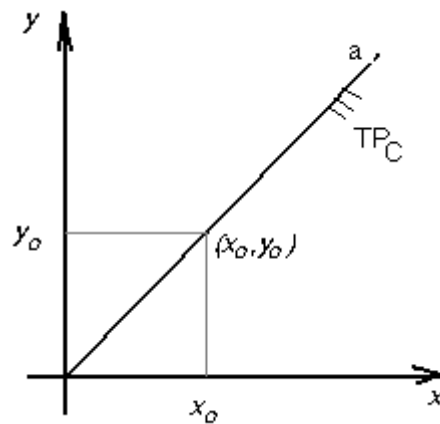
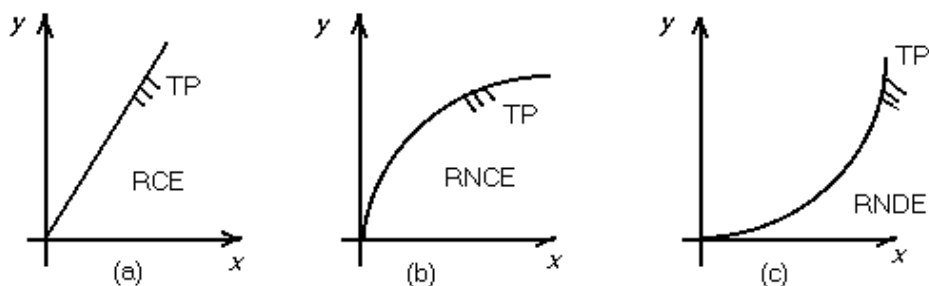


Figura 2.2 - A tecnologia de produção

2.1.2 RETORNOS DE ESCALA

A superfície do gráfico de TP , além de modelar a transformação insumo-produto, modela também mudanças proporcionais que ocorrem na tecnologia caracterizando o que se chama de retornos de escala. Os seguintes tipos de comportamento (Figura 2.3) de escala exibidos por tecnologias serão considerados nesse trabalho:

1. Retornos Constantes de Escala (RCE): se $\theta > 0$, $\theta TP = TP$, (TP_{RCE} , na Figura 2.3).
2. Retornos Não Crescentes de Escala (RNCE) ou diseconomia de escala: se $0 < \theta \leq 1$, $\theta TP \subseteq TP$, ou seja, se $TP \subseteq \theta TP$, $\theta \geq 1$ (TP_{RNCE} , na Figura 2.3).
3. Retornos Não Decrescentes de Escala (RNDE) ou economia de escala: se $\theta \geq 1$, $\theta TP \subseteq TP$, ou seja, se $0 < \pi \leq 1$, $TP \subseteq \pi TP$ (TP_{RNDE} , na Figura 2.3).

Figura 2.3 - Retornos de escala caracterizados pelo gráfico da tecnologia

Numa tecnologia que exhibe retornos constantes de escala, duplicar o consumo acarreta na duplicação da produção. No caso de exhibir retornos não crescentes de escala, a duplicação do nível de consumo geralmente não leva à duplicação da produção, mas sim a um valor abaixo desse. Quando a tecnologia apresenta retornos não decrescentes de escala, na duplicação do consumo geralmente ocorre mais que uma duplicação da produção.

2.1.3 FRONTEIRAS DAS TECNOLOGIAS DE PRODUÇÃO

O cálculo da eficiência técnica requer ainda a definição de dois subconjuntos de $C(Y)$ em relação aos quais a eficiência técnica é mensurada. Por exemplo, pode-se observar que os planos de produção viáveis de $C(Y)$ são limitados inferiormente, e dois subconjuntos contidos nesses limites são:

- i. O conjunto isoquanta⁶ de $C(Y)$: $Isoq_{C(Y)} = \{X \in C(Y) : \lambda X \notin C(Y) \text{ se } \lambda < 1\}$;
- ii. O conjunto eficiência de $C(Y)$: $Eff_{C(Y)} = \{X \in C(Y) : X' <^* X \Rightarrow X' \notin C(Y)\}$.

$X' <^* X$ significa que algum componente i do vetor insumo X' é menor ao correspondente componente do vetor insumo X .

Se $C(Y)$ é fechado não vazio então $Isoq_{C(Y)}$ e $Eff_{C(Y)}$ também são conjuntos não vazios e $Eff_{C(Y)} \subseteq Isoq_{C(Y)}$ [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.40]. Podem ser definidos subconjuntos semelhantes em $P(X)$ e TP .

Mensurar a eficiência técnica orientação consumo (orientação insumo) do plano (X_o, Y_o) consiste, então, em determinar quão longe da fronteira de $C(Y_o)$ está X_o através de uma projeção de X_o sobre $Eff_{C(Y_o)}$ ou $Isoq_{C(Y_o)}$ (Fronteira de Produção).

É interessante ressaltar que as organizações cujos planos de produção pertencem ao conjunto eficiência são eficientes tecnicamente segundo Koopmans. A definição de “organização eficiente tecnicamente”, dada por Koopmans [apud Lovell, 1993, p.10], pode ser enunciada do seguinte modo: uma organização é eficiente tecnicamente se e somente se um aumento em qualquer produto gerado pela

⁶ Geralmente denominado de fronteira de produção.

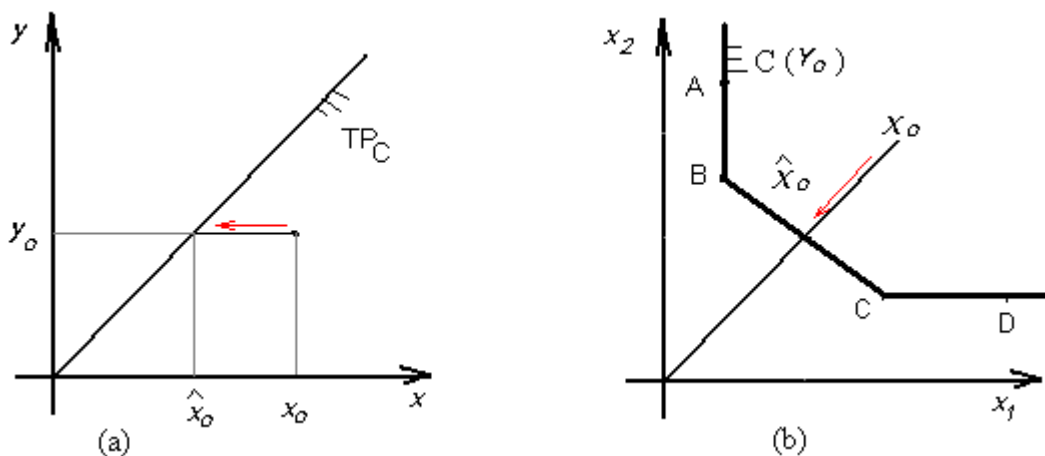
organização requer a redução no nível de outro produto ou um aumento em pelo menos um insumo empregado; e se uma redução em qualquer insumo empregado por ela implica num aumento em pelo menos outro insumo ou a redução em pelo menos um produto. Devido a essa definição, trabalhos realizados por Vilfredo Pareto e Koopmans fizeram com que a eficiência geralmente seja denominada de fronteira Pareto-Koopmans, ou fronteira de eficiência [Lapa, 2001].

2.1.4 ORIENTAÇÕES DE PROJEÇÃO

Medir níveis de eficiência técnica, como detalhado nas seções anteriores, envolve a projeção dos planos de produção observados até a fronteira de produção ou a fronteira Pareto-Koopmans (fronteira de eficiência). É necessário também lembrar que o índice de eficiência técnica é um número escalar resultante da razão entre as quantidades das produções observadas e do potencial ótimo. Esse índice também pode ser obtido através da razão entre a quantidade consumida e o níveis de consumo potencial ótimo. Além disso, o índice pode envolver a produção e o consumo simultaneamente.

No caso, quando o cálculo do índice de eficiência técnica envolve somente os níveis de consumo, a projeção ocorre na direção da fronteira inferior do conjunto $C(Y)$. Essa Projeção encontra-se ilustrada na Figura 2.4.

Figura 2.4 - Projeção orientação insumo



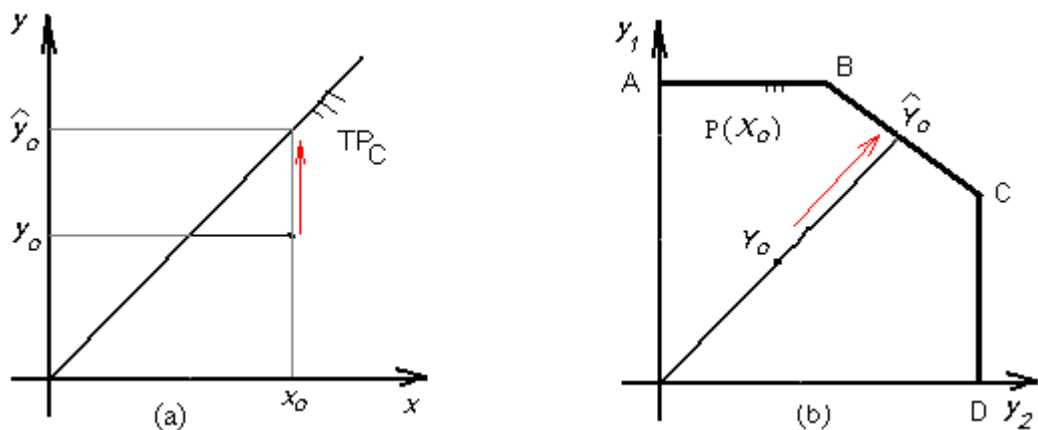
Na figura acima (b), encontram-se ilustrados o conjunto consumo ($C(Y_o)$) e 5 planos de produção de organizações que produzem a quantidade y_o de um único

produto consumindo dois insumos (x_1 e x_2). Em particular são ilustrados os 5 planos de produção A, B, C, D e X_o . Pode-se observar, inicialmente, que o conjunto $C(Y_o)$ é limitado abaixo pelas semi-retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e o segmento reto $\overline{BC}$, que estão contidos em $C(Y_o)$. As seguintes observações são pertinentes a essa figura:

- i. A fronteira de produção é igual a $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$;
- ii. A fronteira de eficiência é o segmento $\overline{BC}$;
- iii. $\hat{X}_o$ é a projeção (orientação consumo) de X_o sobre a fronteira de produção. Nesse caso ocorre a diminuição do consumo na direção da origem

A Figura 2.5 ilustra a situação quando os índices de eficiência técnica são dados pelos níveis de produção observados (Y_o) e potencial ótimo ($\hat{Y}_o$).

Figura 2.5 - Projeção orientação produto

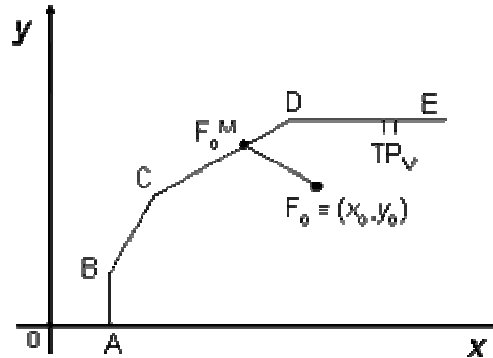


Na figura acima (b), encontram-se ilustrados o conjunto produção ($P(X_o)$) e 5 planos de produção de organizações que produzem diferentes níveis de y_1 e y_2 consumindo um único insumo. O conjunto $P(X_o)$ é limitado acima pelas semi-retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e o segmento reto $\overline{BC}$. Observações semelhantes ao caso anterior são pertinentes:

- i. A fronteira de produção é igual ao conjunto $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$;
- ii. A fronteira de eficiência é o segmento $\overline{BC}$;
- iii. $\hat{Y}_o$ é a projeção (orientação produto) de Y_o sobre a fronteira de produção. Nesse caso ocorre o aumento da produção.

Quando o desejo for calcular o índice utilizando níveis de consumo e de produção simultaneamente, a projeção poderá ser conforme ilustrado na seguinte figura:

Figura 2.6 - Projeção orientação insumo/produção



Na Figura 2.6 encontra-se ilustrada a tecnologia de produção considerando retornos variáveis de escala. Os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ formam a fronteira de eficiência (Pareto-Koopmans). Na projeção do plano F_0 ocorre simultaneamente uma redução do consumo e um aumento da produção.

O decisor deve definir a orientação conforme os objetivos e as condições de operação das organizações em avaliação. Se o desejo for reduzir níveis de consumo, então é sugerido um modelo de cálculo de índices da eficiência técnica orientação insumo; quando é mais interessante (e é possível) aumentar a produção, mantendo os níveis de consumo, então é apropriado o uso da orientação produto; entretanto se for possível reduzir consumo e aumentar simultaneamente níveis de produção, então se indica empregar modelos de medida orientação insumo/produto.

2.2 ANÁLISE POR ENVOLTÓRIA DE DADOS - DEA

O cálculo de índices de eficiência técnica envolve diferentes retornos de escala, diferentes fronteiras e diferentes orientações para projeção na fronteira. Além do mais, geralmente envolve o consumo de múltiplos insumos e a produção de múltiplos produtos.

Quando os cálculos envolvem um único insumo (x) e um único produto (y), o índice de eficiência técnica poderá ser feito através da fórmula de produtividade dada por

$$\text{Produtividade} = \frac{\mu y}{v x},$$

onde:

$y \geq 0$ é a quantidade gerada do produto;

$x > 0$ é a quantidade consumida do insumo;

μ é o grau de utilidade do produto ;

v é o grau de utilidade do insumo.

Restringindo a produtividade a ser menor que a unidade (1) obtém-se o índice de eficiência orientação insumo considerando retornos constantes de escala.

Essa forma simples de medir produtividade, que compara um único produto com um único insumo, é chamada convencionalmente de produtividade parcial por não considerar todos os fatores de produção. Todavia, ela não é bem aceita na área empresarial, uma vez que pode levar a uma interpretação incorreta por atribuir a um insumo o acréscimo produtivo que pode ter sido gerado por um insumo não incluído na análise [Cooper, Seiford e Tone, 2000 *apud* Lapa 2001].

Tal deficiência da produtividade parcial é eliminada com a produtividade total, uma medida que considera todos os insumos e todos os produtos e que corresponde à razão entre uma soma ponderada das quantidades de produtos geradas e uma soma ponderada das quantidades de insumos consumidas. Todavia, surgem problemas não somente quanto aos critérios de escolha de quais insumos e produtos devam ser incluídos na avaliação da produtividade total dos fatores, mas principalmente, quanto aos pesos a empregar no processo de agregação.

Knight, em 1933, [*apud* Färe e Lovell, 1993, p. 4] sugere que a produtividade total seja a razão entre a produção útil e o consumo útil, dado pela fração

$$\text{Produtividade} = \frac{\sum \mu_j Y_j}{\sum v_i X_i},$$

onde:

$y_j \geq 0$ é a quantidade gerada do j -ésimo produto, com $\sum y_j \geq 0$;

$x_i > 0$ é a quantidade consumida do i -ésimo insumo, com $\sum x_i > 0$;

μ_j é o grau de utilidade do j -ésimo produto;

v_i é o grau de utilidade do i -ésimo insumo.

Quanto à eficiência técnica, a definição original diz respeito à comparação entre a produção do plano de operação executado por uma organização e a máxima produção que essa organização pode alcançar. Para operações que envolvem o emprego de múltiplos insumos na geração de múltiplos produtos, a definição atualmente empregada de eficiência têm origem nos trabalhos de Vilfredo Pareto, que propôs o bem-estar geral como critério para o julgamento de qualquer política social [Lapa, 2001, p.55].

Debreu e Farrell, na década de 1950 (dado o conceito de produtividade acima) definiram o índice de eficiência técnica de um produtor como sendo a unidade menos a máxima contração equiproporcional dos insumos de forma que o produtor possa continuar produzindo a mesma quantidade de produtos. Em 1957 Farrell desenvolveu o primeiro método de programação matemática não paramétrica para mensurar índices de ineficiência em fazendas agrícolas dos Estados Unidos.

Em 1978, Charnes, Cooper e Rhodes-CCR, desenvolveram, a partir de um modelo de programação fracionária, um método baseado em programação linear para calcular índices de eficiência técnica segundo a definição de Debreu e Farrell. Os autores da metodologia denominaram-na de DEA (*Data Envelopment Analysis*) e a primeira medida leva em consideração retornos constantes de escala e múltiplos insumos e múltiplos produtos.

Após o importante passo dado por CCR, várias outras medidas da eficiência técnica foram desenvolvidas, levando em consideração diferentes fronteiras, diferentes retornos de escala e diferentes orientações. Nas próximas seções deste texto, algumas dessas medidas serão discutidas, além da medida de produtividade através do Índice de Malmquist.

2.3 MEDIDAS ORIENTAÇÃO INSUMO

Consideremos D planos de produção observados, cada um transformando M insumos para produzir P produtos. Seja $Y_{D \times P}$ a matriz das quantidades dos produtos

observados e $X_{D \times M}$ a matriz das quantidades dos insumos observados. O escalar $y_{dj} \in Y$ é a quantidade que a d -ésima DMU gerou do j -ésimo produto; $x_{di} \in X$ é a quantidade que a d -ésima DMU consumiu do i -ésimo insumo.

No cálculo da eficiência técnica orientação insumo, a tecnologia está modelada pela correspondência insumo $Y \rightarrow C(Y)$. No cálculo o nível de produção Y_o observado será mantido inalterado e os recursos serão reduzidos até a Fronteira de Produção de $C(Y_o)$ ou na Fronteira de Eficiência de $C(Y_o)$. O índice de eficiência técnica orientação insumo, é dado pelo seguinte problema de programação linear-PPL: (θ_o^I indica o índice de eficiência da o -ésima DMU com orientação insumo)

$$\begin{aligned}
 EFC_I(X_o, Y_o) = \min \quad & \theta_o^I - \varepsilon \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \right) \\
 \text{sa} \quad & x_{om} \theta_o^I - \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} - s_m^- = 0, \quad m=1 \dots M \\
 & \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 1}) \\
 & \sum_{d=1}^D \lambda_d = K \\
 & s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
 & \theta_o^I \text{ livre}, \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D
 \end{aligned}$$

onde a restrição $\sum_{d=1}^D \lambda_d = K$ caracteriza diferentes retornos de escala, que impõe a condição de convexidade em que as DMUs podem ser combinadas e ε indica se a contração é feita até a fronteira de produção ($\varepsilon=0$), ou se a contração é feita até a fronteira de eficiência ($\varepsilon>0$). As variáveis s_m^- e s_p^+ são denominadas de “variáveis de folga”.

Quando for tomado $\varepsilon=0$ tem-se uma medida que será denominada, neste texto, de MEDIDA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA. Tomando $\varepsilon>0$ então a medida será denominada de MEDIDA NÃO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA.

Em relação à restrição $\sum_{d=1}^D \lambda_d = K$ têm-se

- i. Se essa restrição assumir a forma $\sum_{d=1}^D \lambda_d$ livre, então o modelo é de retornos constantes de escala;
- ii. Se essa restrição assumir a forma $\sum_{d=1}^D \lambda_d \geq 1$, então o modelo é de retornos não decrescentes de escala;
- iii. Se essa restrição assumir a forma $\sum_{d=1}^D \lambda_d = 1$, então o modelo é de retornos variáveis de escala;
- iv. Se essa restrição assumir a forma $\sum_{d=1}^D \lambda_d \leq 1$, então o modelo é de retornos não crescentes de escala;
- v. Se essa restrição assumir a forma $\sum_{d=1}^D \lambda_d = 1, \lambda_d \in \{0,1\}$, então o modelo é o FDH (*Free Disposal Hull*). Nesse caso a região de viabilidade não é convexa (o modelo será descrito detalhadamente na seção 2.3.2).

Considerando $\varepsilon = 0$, o modelo acima mede a eficiência de X_o na produção de Y_o em relação a fronteira de produção. Nesse caso um produtor é considerado eficiente se $\theta_o^l = 1$. Se $\varepsilon > 0$, então as medidas DEA correspondentes medem a eficiência de X_o em relação à fronteira de eficiência, e nesse caso o produtor é eficiente tecnicamente se $\theta_o^l = 1$ e $s_j^- = s_j^+ = 0$.

A projeção $\left(\hat{X}_o, \hat{Y}_o \right)$ da o -ésima DMU sobre a fronteira de produção é dada por

$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} \cdot EFC_l(X_o, Y_o), m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op}, p = 1, \dots, P \end{cases}$$

A projeção sobre a fronteira de eficiência é dada por

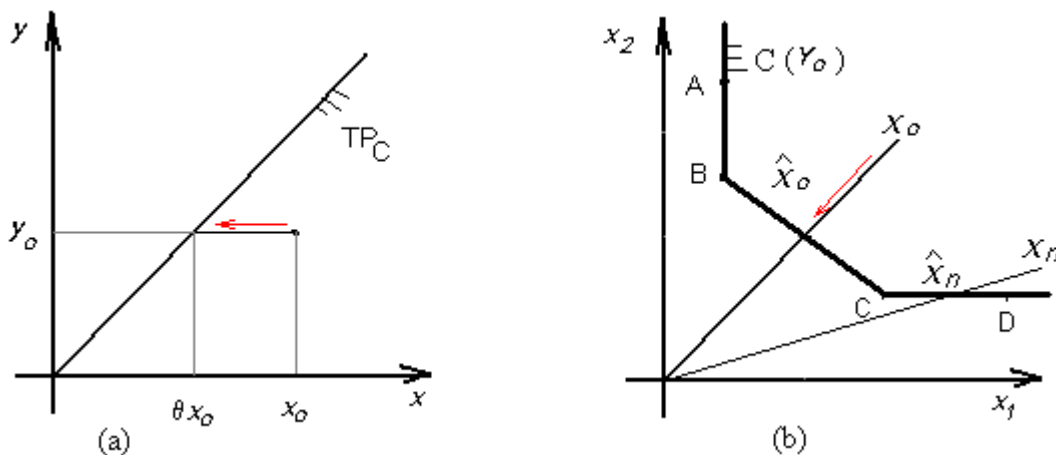
$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} \cdot EFC_l(X_o, Y_o) - s_m^-, m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} + s_p^+, p = 1, \dots, P \end{cases}$$

Deve-se atentar ao seguinte: se $\varepsilon=0$, então a projeção poderá não resultar em um plano de produção eficiente tecnicamente segundo a definição de Koopmans.

O valor de θ'_0 (eficiência técnica) está no intervalo $(0, 1]$ (pois $\bar{0} \notin C(Y_0)$) e atinge o limite superior se e somente se X_0 pertence à fronteira de produção de $C(Y_0)$. O índice calculado através do PPL acima é independente das unidades de medida adotadas, ou seja, trocar horas trabalhadas por minutos trabalhados não afeta o índice de eficiência [Färe, Krosskopf e Lovell, 1994, p.64].

A projeção orientação insumo considerando retornos constantes de escala encontra-se ilustrada na Figura 2.4. No gráfico (a) têm-se $P = m = 1$ e no segundo $m=2$.

Figura 2.7 - Medida da eficiência técnica orientação insumo considerando retornos constantes de escala



Na Figura 2.7 (b), a fronteira de produção é igual a $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$ e a fronteira de eficiência é o segmento $\overline{BC}$. Observa-se que o plano de produção X_0 foi projetado sobre a fronteira de produção ($\varepsilon=0$) e sobre a fronteira de eficiência ($\varepsilon>0$). Entretanto, X_n foi projetado sobre o ponto $\hat{X}_n$ quando $\varepsilon=0$ e foi projetado sobre o ponto C quando considerado $\varepsilon>0$.

Outros modelos DEA bastante empregados na literatura e que são derivados do modelo CCR são os que envolvem o dual do problema de programação linear - PPL acima (modelo 1). O dual do modelo 1 é:

$$\begin{aligned}
EFC_l(X_o, Y_o) = & \text{Max } \sum_{p=1}^P u_p y_{op} - \Phi \\
\text{sa } & \sum_{m=1}^M v_m x_{om} = 1 \\
& \sum_{p=1}^P u_p y_{dp} - \sum_{m=1}^M v_m x_{dm} - \Phi \leq 0, d = 1, \dots, D \quad (\text{modelo 2}) \\
& v_m, u_p \geq \varepsilon \quad m=1, \dots, M \quad p=1, \dots, P \\
& \text{"}\Phi \text{ condição"}
\end{aligned}$$

- i. Se a restrição “ Φ condição” assumir a forma $\Phi=0$, então o modelo é de retornos constantes de escala;
- ii. Se a restrição “ Φ condição” assumir a forma $\Phi \leq 0$, então o modelo é de retornos não decrescentes de escala;
- iii. Se a restrição “ Φ condição” assumir a forma “ Φ livre”, então o modelo é de retornos variáveis de escala;
- iv. Se a restrição “ Φ condição” assumir a forma $\Phi \geq 0$, então o modelo é de retornos não crescentes de escala.

As variáveis v_i e u_j são denominadas de pesos, ou preços, ou multiplicadores. Se $\varepsilon=0$, então alguns pesos podem ser nulos para uma determinada DMU, indicando que o fator de produção correspondente a este peso não têm importância para ela. Desse modo, impondo não-negatividade aos pesos ($v_i > 0$ e $u_j > 0$), então as DMUs são “obrigadas” a considerarem importância mínima a todos os fatores de produção (ou seja, a todos os insumos e produtos).

O conjunto de pesos de uma determinada DMU é escolhido tal que a eficiência dela seja a maior possível, porém a eficiência técnica das demais DMUs, usando o mesmo conjunto de pesos, seja menor que a unidade (1). Nos modelos DEA (acima discutidos) não se têm incorporado prioridades para os insumos e os produtos, levando as medidas a serem criticados por pesquisadores da área [Lins, Meza, 2000, p.53]. Algumas das alegações dos pesquisadores são:

- Peculiaridades de menor importância podem dominar a fronteira de produção e os fatores importantes podem ser menosprezados ou até ignorados, outorgando pesos nulos, e isso acontece quando o modelo DEA outorga peso nulo para o respectivo insumo ou produto;

- Como as DMUs produzem os mesmos produtos, têm-se objetivos comuns e podem flexibilizar-se os pesos, permitindo uma avaliação homogênea.
- Em alguns casos, existe uma relação entre os insumos ou produtos na busca de melhor performance.
- Explora-se a informação e conhecimento dos gerentes de produção.
- Quando há várias DMUs eficientes, elas exploram características positivas da sua performance (devido à liberdade de atribuição dos pesos), não se pode discriminar entre unidades eficientes.

Um método interessante para evitar essas dificuldades com as medidas DEA acima expostas é estabelecer limites entre os quais os pesos podem variar permitindo certa flexibilidade e certa incerteza sobre o verdadeiro valor dos pesos. Isto pode ser feito através do acréscimo de restrições no PPL descrito pelo modelo 2. O método consiste em incluir restrições envolvendo relações entre pesos, e esse método geralmente é denominado de “região de segurança” [Cooper, Seiford, Tone, 2002, p.152].

Consideremos, por exemplo, que se deseja impor a seguinte relação entre os pesos dos insumos x_{o1} e x_{oi} :

$$I_{1i} \leq \frac{v_i}{v_1} \leq w_{1i}.$$

Essa restrição pode ser escrita da forma

$$v_1 I_{1i} \leq v_i \leq v_1 w_{1i},$$

ou seja

$$v_1 I_{1i} - v_i \leq 0, \quad v_i - v_1 w_{1i} \leq 0 \quad (a)$$

Analogamente para os pesos u_1 e u_p dos produtos y_{o1} e y_{op} se deseja impor a seguinte relação entre os pesos:

$$L_{1,p} \leq \frac{u_p}{u_1} \leq U_{1,p}$$

que gera as restrições

$$u_1 L_{1,p} - u_p \leq 0, \quad u_p - u_1 U_{1,p} \leq 0. \quad (b)$$

Incluindo restrições do tipo (a) e do tipo (b), o modelo 2, considerando $\Phi=0$, assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned}
 EFC_i(X_o, Y_o) = \max \quad & uY_o \\
 \text{sa} \quad & vX_o = 1 \\
 & uY - vX \leq 0 \\
 & vQ \leq 0 \\
 & uR \leq 0 \\
 & u, v \geq 0
 \end{aligned} \quad (\text{modelo 3})$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} I_{12} & -w_{12} & I_{13} & -w_{13} & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} L_{12} & -U_{12} & L_{13} & -U_{13} & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

O dual deste (análogo ao modelo 1), considerando retornos constantes de escala e projeção na fronteira de produção ($\varepsilon=0$) é dado por

$$\begin{aligned}
 EFC_i(X_o, Y_o) = \min \quad & \theta'_o \\
 \text{sa} \quad & X_o \theta'_o - \lambda X + Q\pi \geq 0, \\
 & \lambda Y + R\tau \geq Y_o \\
 & \theta'_o \text{ livre}, \lambda \geq 0, \pi \geq 0, \tau \geq 0
 \end{aligned} \quad (\text{modelo 4})$$

Uma outra adaptação das medidas DEA ocorreu quando da necessidade de incluir variáveis incontroláveis nas análises da eficiência técnica. Ou seja, insumos e/ou produtos sobre os quais não é facultado o controle. Os modelos anteriormente apresentados assumem implicitamente que todos os insumos e produtos são controláveis, isto é, que as variáveis são controláveis pelos administradores de cada DMU. Porém isso não é uma regra, ou seja, há casos em que o controle sobre todas as variáveis não é permitido. Por exemplo, dependendo da análise pode-se considerar que a população de uma cidade não é controlável pelos administradores da DMU, assim como também o clima (chuva, sol, geada, calor,...). Então, têm-se dois conjuntos de variáveis em relação ao controle: aquelas que podem ser controláveis e aquelas que não são controláveis. O modelo DEA considerando retornos constantes de escala, e considerando alguns insumos e alguns produtos incontroláveis, é dado por

$$\begin{aligned}
EFC_I(X_o, Y_o) = & \min \quad \theta_o^I - \varepsilon \left(\sum_{i \in C_I} s_i^- + \sum_{j \in C_P} s_j^+ \right) \\
\text{sa} \quad & x_{oi} \theta_o^I - \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{di} - s_i^- = 0, \quad i \in C_I \\
& x_{ok} - \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dk} = 0, \quad k \in NC_I \quad (\text{modelo 5}) \\
& \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dj} - s_j^+ = y_{oj}, \quad j \in C_P \\
& \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dn} = y_{on}, \quad n \in NC_P \\
& s_i^-, s_j^+ \geq 0, \quad i \in C_I, \quad j \in C_P \\
& \theta_o^I \text{ livre}, \quad \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D
\end{aligned}$$

onde:

C_I é o conjunto dos índices dos insumos controláveis;

NC_I é o conjunto dos índices dos insumos incontroláveis;

C_P é o conjunto dos índices dos produtos controláveis;

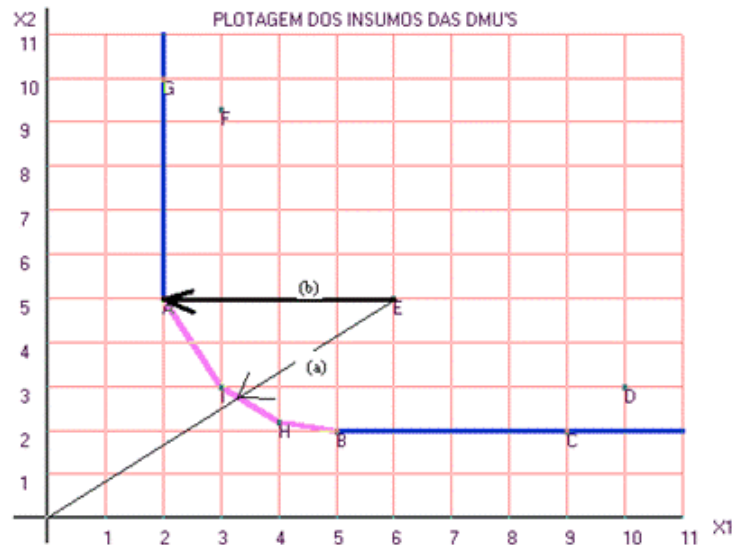
NC_P é o conjunto dos índices dos produtos incontroláveis.

Nesse caso, a projeção de (X_o, Y_o) sobre a fronteira é dada por

$$\begin{cases} \hat{x}_{oi} = x_{oi} \cdot EFC_I(X_o, Y_o) - s_i^-, i \in C_I \\ \hat{y}_{oj} = y_{oj} + s_j^+, j \in C_P \end{cases}$$

Na Figura 2.8 têm-se a representação gráfica de 9 DMUs, cada uma consumindo dois insumos para produzir 1 produto ($M = 2$ e $P = 1$). Considerando x_1 e x_2 controláveis, a DMU E é projetada radialmente (na direção da origem) até a fronteira de produção. Porém, considerando x_1 controlável e x_2 fora de controle, a DMU E é projetada (horizontalmente) sobre o plano de produção A.

Figura 2.8 - Projeção orientação insumo considerando retornos constantes de escala diferentes opções de controle sobre os insumos



2.3.1 MODELO DEA DUAS FASES

O PPL modelo 1 pode ser executado para $\varepsilon=0$ e $\varepsilon>0$. Para $\varepsilon=0$ a projeção da DMU ineficiente é feita radialmente até a fronteira de produção, e nesse caso nem sempre a projeção ocorre sobre a fronteira de eficiência.

A escolha do valor para ε (se desejarmos $\varepsilon>0$) deve ser feita criteriosamente. Se o valor atribuído a ε for grande demais, o PPL do modelo1 poderá ser ilimitado, e conseqüentemente o PPL modelo2 será inviável; e se ε for pequeno demais, então não terá efeito na resolução do PPL modelo 1 (ou modelo 2). O objetivo da inclusão de ε no modelo DEA é “forçar” o modelo a projetar os produtores ineficientes tecnicamente até a fronteira de eficiência. Observando o PPL modelo 2, como já mencionado acima, a condição $\varepsilon>0$ não permite ao modelo atribuir valores nulos para os pesos (u e v).

No caso do modelo 1, inicialmente se projeta o produtor ineficiente sobre a fronteira de produção, alocando-o, em seguida, na fronteira de eficiência. Em 1993 Ali e Seiford [1993, p.292] apresentaram um teorema onde relacionam ε com os valores dos insumos. Segundo eles a solução do programa modelo 1 é ilimitada sempre que:

$$\varepsilon < \frac{1}{\max_{m=1\dots M} \left\{ \sum_{d=1}^D x_{dm} \right\}}$$

Para evitar o uso do ε no modelo 1, é comum projetar os produtores sobre a fronteira de eficiência através de um modelo DEA duas fases. Em suma, o modelo duas fases consiste em inicialmente calcular os índices de eficiência técnica das DMUs (θ_o^l) considerando $\varepsilon=0$ (no modelo 1) em seguida, considerando θ_o^l fixo, resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \\ \text{sa} \quad & \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om} \theta_o^{l*}, \quad m=1\dots M \\ & \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1,\dots,P \quad (\text{modelo 6}) \\ & \sum_{d=1}^D \lambda_d = K \\ & s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1,\dots,M, p=1,\dots,P \\ & \lambda_d \geq 0 \quad d=1,\dots,D \end{aligned}$$

No modelo 6, as variáveis de decisão são s_i^- e s_j^+ , enquanto que θ_o^{l*} é o valor de θ_o^l calculado através do modelo 1 considerando $\varepsilon=0$.

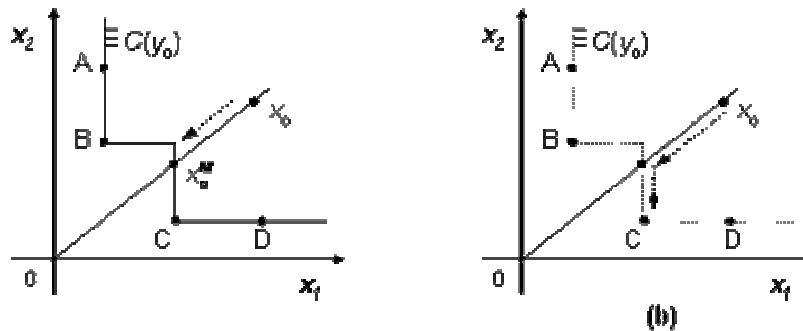
2.3.2 MEDIDA FDH

As fronteiras (de produção e de eficiência) geradas pelo modelos DEA, geralmente são obtidas através de combinações lineares entre planos de produção observados eficientes tecnicamente. Dessa forma, a fronteira pode ser formada por planos de produção observados e planos de produção hipotéticos. Alguns pesquisadores consideraram indesejável o fato de que os planos de produção que não ocorreram na prática pertencessem à fronteira de produção. Assim, surgiu a medida *Free Disposal Hull*-FDH, que gera uma fronteira constituída apenas de planos de produção observados [Wilhelm, 2000].

$$\begin{aligned}
EFC_I(X_o, Y_o) = \min \quad & \theta_o^I - \varepsilon \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \right) \\
\text{sa} \quad & x_{om} \theta_o^I - \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} - s_m^- = 0, \quad m=1 \dots M \\
& \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 7}) \\
& \sum_{d=1}^D \lambda_d = 1 \\
& s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
& \theta_o^I \text{ livre}, \lambda_d \in \{0,1\} \quad d=1, \dots, D
\end{aligned}$$

A Figura 2.9 ilustra as fronteiras geradas pela medida FDH. Observa-se que se $\varepsilon=0$ (Figura 2.9 (a)) a fronteira de produção é contínua (formada pelos “degraus”) e x_o é projetado sobre x_o^M ; considerando $\varepsilon>0$ (Figura 2.9 (b)) a fronteira de eficiência não é contínua e sim de referências pontuais (pontos discretos) e x_o é projetado sobre a DMU C.

Figura 2.9 - Fronteiras geradas pela medida FDH orientação insumo



O modelo 7 é um problema de programação linear com variáveis contínuas e variáveis binárias. Para evitar o uso de variáveis binárias, pode-se utilizar um algoritmo para calcular a eficiência técnica orientação insumo. Nesse algoritmo utiliza-se o seguinte conceito de dominância: sejam os planos de produção $p_o = (x_o, y_o)$ e $p_d = (x_d, y_d)$, p_d domina p_o se $x_d \leq x_o$ e $y_d \geq y_o$ [Tulkens, 1993, p.4].

O algoritmo é:

Passo 1 Para a DMU o -ésima procuram-se as prováveis referências com a seguinte condição: estritamente consumir menos ou igual e produzir igual ou mais. O resultado é um conjunto de DMUs chamada *Lista*.

Passo 2 Calcula o índice de eficiência FDH através de

$$EFC_i(x_o, y_o) = \min_{d \in Lista} \left\{ \max_{i=1 \dots m} \left(\frac{x_{di}}{x_{io}} \right) \right\}$$

Se o conjunto *Lista* for vazio, então $EFC_i(X_o, Y_o) = 1$.

2.4 MEDIDAS ORIENTAÇÃO PRODUTO

Na seção anterior foram introduzidas medidas DEA considerando diferentes economias de escala, diferentes fronteiras de projeção e relações entre pesos. O cálculo do índice da eficiência técnica consistia basicamente em determinar o valor do escalar θ_o^l que dá a proporção segundo a qual as quantidades consumidas dos insumos devem ser reduzidas. Se $\theta_o^l = 1$ e as variáveis de folga (s_i^- e s_j^+) são nulas, então o produtor é eficiente tecnicamente. Porém, para projetar o produtor até a fronteira de eficiência, é necessário, além de reduzir na mesma proporção os níveis dos insumos, proceder reduções adicionais em alguns insumos e acréscimos em alguns produtos. Entretanto, se for desejável calcular o índice de eficiência técnica através da expansão da produção, ou seja, quando é indicado expandir produção e quando não é indicada a contração do consumo, pode-se utilizar medidas DEA orientação produto. Os modelos DEA orientação produto são derivados facilmente dos modelos orientação insumo e são definidos em relação ao conjunto $P(X_o)$.

O modelo DEA geral orientação produto é dado por

$$EFC_P(X_o, Y_o) = \max \theta_o^P + \varepsilon \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \right)$$

sa

$$\sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om}, \quad m=1 \dots M$$

$$\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - y_{op} \theta_o^P - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 8})$$

$$\sum_{d=1}^D \lambda_d = K$$

$$s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P$$

$$\theta_o^P \text{ livre}, \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D$$

onde a restrição $\sum_{d=1}^D \lambda_d = K$ caracteriza os diferentes retornos de escala e ε indica se a expansão ocorre até a fronteira de produção ($\varepsilon=0$, denominado como medida

radial com orientação produto), ou até a fronteira de eficiência ($\varepsilon > 0$ denominado como medida não radial com orientação produto). Ou seja, se $\varepsilon > 0$, então as medidas DEA orientação produto medem a eficiência de Y_o em relação a fronteira de eficiência e nesse caso o produtor é eficiente tecnicamente se $\theta_o^I = 1$ e $s_i^- = s_j^+ = 0$. A projeção $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ da o -ésima DMU sobre a fronteira de produção é dada por

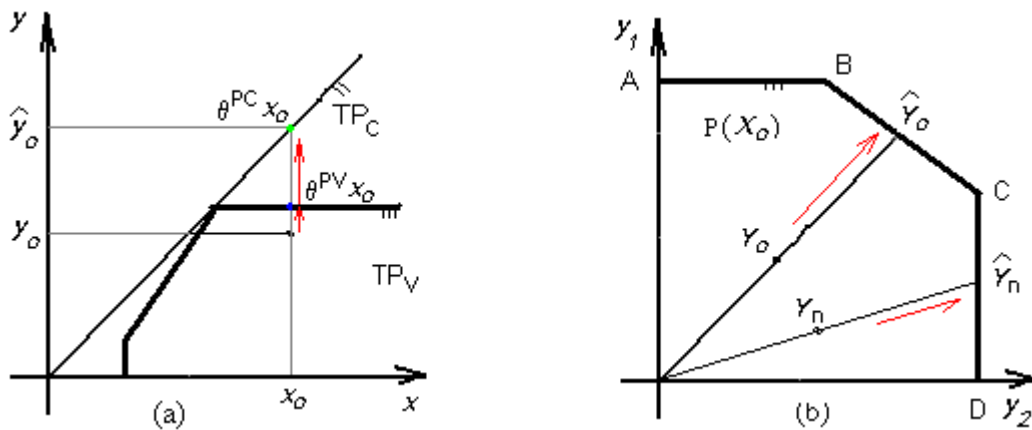
$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om}, m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} \cdot EFC_P(X_o, Y_o), p = 1, \dots, P \end{cases}$$

e sobre a fronteira de eficiência a projeção é dada por

$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} - s_m^-, m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} \cdot EFC_P(X_o, Y_o) + s_p^+, p = 1, \dots, P \end{cases}$$

O valor de θ_o^P (eficiência técnica) está no intervalo $[1, \infty)$ (pois $\bar{0} \notin P(X_o)$), e atinge o limite superior se e somente se Y_o pertence à fronteira de produção de $P(Y_o)$. Medidas orientação produto análogas a todas as medidas orientação insumo podem ser definidas de modo semelhante.

Figura 2.10 - Medida da eficiência técnica orientação produto considerando retornos constantes de escala



Na Figura 2.10 (a) encontra-se ilustrada a projeção de uma DMU sobre as fronteiras considerando retornos constantes de escala (TP_C) e retornos variáveis de escala (TP_V). Na Figura 2.10 (b) encontram-se representados 6 planos de produção, cada um consumindo um único insumo e produzindo 2 produtos (y_1 e y_2). Nesse caso está-se considerando retornos constantes de escala e o conjunto

$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD}$ é a fronteira de produção, enquanto que o segmento $\overline{BC}$ constitui a fronteira de eficiência.

Os planos de produção Y_o e Y_n têm como projeções $\hat{Y}_o$ e $\hat{Y}_n$ respectivamente (considerando $\varepsilon=0$). Se, no PPL modelo 8, for utilizado $\varepsilon>0$, ou for utilizada a medida orientação produto duas fases (inicialmente expandir radialmente a produção para alocar a DMU até a fronteira de produção e em seguida maximizar as folgas para alocar a DMU junto a fronteira de eficiência) a projeção de Y_n será igual ao plano C.

Do mesmo modo como foi considerado nas medidas orientação insumo, tomando $\varepsilon=0$ tem-se uma medida que será denominada, neste texto, de MEDIDA RADIAL ORIENTAÇÃO PRODUTO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA. E se $\varepsilon>0$ então a medida será a MEDIDA NÃO RADIAL ORIENTAÇÃO PRODUTO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA.

2.5 MEDIDAS ORIENTAÇÃO INSUMO/PRODUTO

O principal objetivo das medidas apresentadas nas seções anteriores é o cálculo de índices de eficiência técnica de DMUs. Esse cálculo é feito através de projeções sobre diferentes partes da fronteira da tecnologia de produção. O modelo DEA orientação produto considerando retornos variáveis de escala é:

$$\begin{aligned}
 EFC_P(X_o, Y_o) = \max \quad & \theta_o^P + \varepsilon \left(\sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \right) \\
 \text{sa} \quad & \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om}, \quad m=1 \dots M \\
 & \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op} \theta_o^P, \quad p=1, \dots, P \\
 & \sum_{d=1}^D \lambda_d = 1 \\
 & s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
 & \theta_o^P \text{ livre}, \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D
 \end{aligned}$$

No caso de $\varepsilon=0$, então a projeção ocorrerá até a fronteira de produção, denominado como medida radial com orientação produto. Se $\varepsilon>0$ a projeção

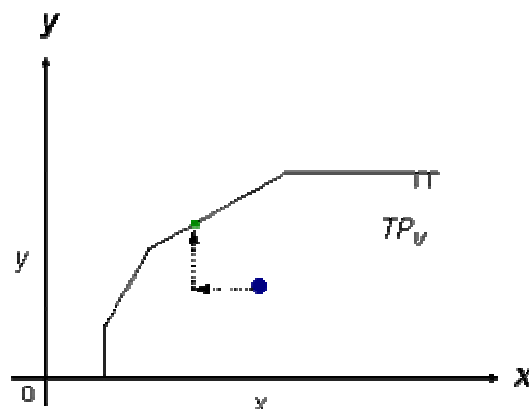
ocorrerá junto à fronteira de eficiência. No primeiro caso, um produtor é eficiente se $EFC_P(X_o, Y_o)=1$; no outro caso deve-se ter $EFC_P(X_o, Y_o)=1$ e $s^- = s^+ = 0$ (todas as folgas nulas). Se casualmente $EFC_P(X_o, Y_o)=1$ e alguma folga for positiva, então o produtor pertence à fronteira de produção, devendo ser alocado até a fronteira de eficiência.

Mas deve-se atentar ao seguinte fato: o índice de eficiência, quando a projeção ocorre na fronteira de eficiência, não leva em consideração a ineficiência devido às folgas. Ou seja, o índice de eficiência somente é em relação à fronteira de eficiência, porém a diminuição adicional necessária de insumos e o aumento necessário da produção de alguns produtos para alocar as DMUs até a fronteira de eficiência não são incorporados no índice.

2.5.1 MODELO ADITIVO

O modelo aditivo não tem orientação, ele identifica as DMUs eficientes. Esse modelo procura as referências de forma que as folgas sejam máximas (o caminho ortogonal seja mais longo), sem a redução equiproporcional dos insumos e expansão equiproporcional dos produtos.

Figura 2.11 - Projeção na fronteira através do Modelo Aditivo



Uma desvantagem desse modelo é que não é invariante em escala, isto é, a mudança da unidade de medida de um fator de produção influencia o resultado do problema [Lins, Meza 2000, p.200]. O PPL correspondente ao modelo é:

$$\begin{aligned}
w &= \min \sum_{m=1}^M v_m x_{om} - \sum_{p=1}^P u_p y_{op} + u_o \\
\text{sa} \quad &\sum_{m=1}^M v_m x_{dm} - \sum_{p=1}^P u_p y_{dp} + u_o \leq 0, d = 1, \dots, D \quad (\text{modelo 9}) \\
&v_m, \geq 1, u_p \geq 1 \quad m=1, \dots, M \quad p=1, \dots, P \\
&u_o \text{ livre}
\end{aligned}$$

cujo dual (DPPL) é:

$$\begin{aligned}
z &= \max \sum_{m=1}^M s_m^- + \sum_{p=1}^P s_p^+ \\
\text{sa} \quad &\sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om}, \quad m=1 \dots M \\
&\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 10}) \\
&\sum_{d=1}^D \lambda_d = 1 \\
&s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
&\lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D
\end{aligned}$$

Uma DMU será eficiente se as variáveis de folga forem nulas ($s_i^- = s_i^+ = 0$). A projeção de (X_o, Y_o) na fronteira da tecnologia de produção é dada por

$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} - s_m^-, m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} + s_p^+, p = 1, \dots, P \end{cases}$$

O modelo Aditivo projeta a DMU sobre a fronteira indicando a quantidade a ser reduzida em cada insumo e as quantidades que deverão ser acrescidas nos atuais níveis de produção. Entretanto, esse modelo não atribui um único índice de eficiência técnica às DMUs, não indicando os níveis de eficiência das DMUs.

Um outro conjunto de medidas DEA recentemente criadas são as denominadas “Medidas DEA Completas”.

2.5.2 MEDIDAS DEA COMPLETAS

Estudos em busca de medidas capazes de atender ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans deram origem à categoria de medidas completas de eficiência técnica. Essas medidas se caracterizam por possuírem duas propriedades e atenderem dois critérios, a saber:

- P1) Apresentar um resultado escalar e compatível com os resultados das demais medidas existentes, de modo a ser consistente com os estudos sobre medidas de eficiência produtiva desenvolvidas anteriormente;
- P2) Ser abrangente de modo a atender ao conceito de eficiência Pareto-Koopmans;
- C1) Requerer formulações e cálculos matemáticos simples, podendo ser calculadas com algoritmos e métodos computacionais já disponíveis; e
- C2) Permitir fácil interpretação no meio gerencial, não tendo sua aplicação restrita a contextos e ambientes específicos.

As duas principais medidas DEA completas são:

- i) A Medida Baseada em folgas (SBM⁷) proposta por Tone(2000); e
- ii) A medida Ajustada por Amplitude (RAM⁸) proposta por Cooper, Park e Pastor (1999).

a) Medida SBM (*Slack Based Measure of Efficiency*)

Esse modelo é baseado no modelo Aditivo transformando as unidades de medida dos fatores de produção em unidades invariantes (dimensões livres). Assim, os autores da medida SBM alteram a função objetivo do modelo aditivo, de forma a obter um escalar de acordo com a propriedade P1.

A função objetivo $EFC_{IP}(X_o, Y_o)$ pertence ao intervalo $(0,1]$, e uma DMU será tecnicamente eficiente quando $EFC_{IP}(X_o, Y_o)=1$.

⁷ *Slack Based Measure.*

⁸ *Range Adjusted Measure.*

$$\begin{aligned}
EFC_{IP}(X_o, Y_o) = \min & \frac{1 - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (s_m^- / x_{om})}{1 + \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (s_p^+ / y_{op})} . \\
\text{sa} & \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om}, \quad m=1 \dots M \\
& \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 11}) \\
& s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
& \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D
\end{aligned}$$

Este problema sempre é viável, pois a solução $\lambda_o=1$, $s^- = s^+ = 0$ satisfaz as restrições. Por outro lado, $EFC_{IP}(x_o, y_o) \in (0, 1]$, uma vez que $0 \leq s_m^- \leq x_{om}$.

O modelo anterior não é linear, introduzindo a variável $t > 0$ no numerador e denominador da função objetivo e nas restrições, pode-se reescrever o problema de programação fracionário em:

$$\begin{aligned}
EFC_{IP}(X_o, Y_o) = \min & t - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (ts_m^- / x_{om}) \\
\text{sa} & t + \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (ts_p^+ / y_{op}) = 1 \\
& tx_{om} - \sum_{d=1}^D t\lambda_d x_{dm} - ts_m^- = 0, \quad m=1 \dots M \\
& \sum_{d=1}^D t\lambda_d y_{dp} - ts_p^+ - ty_{op} = 0, \quad p=1, \dots, P \\
& s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\
& \lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D \\
& t > 0
\end{aligned}$$

Fazendo $S^- = ts^-$, $S^+ = ts^+$, e $\Lambda = \lambda t$, esse modelo poderá ser linearizado em

$$\begin{aligned}
EFC_{IP}(X_o, Y_o) = \min & t - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (S_m^- / x_{om}) \\
\text{sa} & t + \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (S_p^+ / y_{op}) = 1 \\
& tx_{om} - \sum_{d=1}^D \Lambda_d x_{dm} - S_m^- = 0, \quad m=1 \dots M \quad (\text{modelo 12}) \\
& \sum_{d=1}^D \Lambda_d y_{dp} - S_p^+ - ty_{op} = 0, \quad p=1, \dots, P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m^-, S_p^+ &\geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \\ \Lambda_d &\geq 0 \quad d=1, \dots, D \\ t &> 0 \end{aligned}$$

A o -ésima DMU é eficiente se $EFC_{IP}(X_o, Y_o)=1$. Para determinar a solução do modelo 11, devem-se fazer as seguintes substituições:

$$s^- = \frac{S^-}{t}, \quad s^+ = \frac{S^+}{t}, \quad \text{e } \lambda = \frac{\Lambda}{t}.$$

Quando $x_{mo} = 0$ exclui-se o termo S_m^-/x_{om} da função objetivo [Cooper, Seiford, Tone, 2002, p.97]. A projeção das DMUs na fronteira de eficiência é dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} - s_m^- = \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{od}, m=1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} + s_p^+ = \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{od}, p=1, \dots, P \end{cases}$$

b) Modelo RAM (*Range Adjusted Measure*)

A Medida Ajustada por Amplitude é baseada nos excessos no consumo e folgas na produção e é calculada com base na amplitude das quantidades dos insumos e dos produtos, o que a torna adimensional. Portanto, a medida é invariante a mudanças nas unidades de insumos e produtos, o que permite uma interpretação gerencial adequada da somatória das folgas de produto e excessos de insumos.

A medida da eficiência técnica da o -ésima DMU, considerando retornos variáveis de escala, é dada por:

$$\begin{aligned} EFC_{IP}(X_o, Y_o) = \min \quad & \Gamma = 1 - \frac{1}{M+P} \left(\sum_{m=1}^M \frac{s_m^-}{R_m^-} + \sum_{p=1}^P \frac{s_p^+}{R_p^+} \right) \\ \text{sa} \quad & \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm} + s_m^- = x_{om}, \quad m=1 \dots M \\ & \sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp} - s_p^+ = y_{op}, \quad p=1, \dots, P \quad (\text{modelo 13}) \\ & \sum_{d=1}^D \lambda_d = 1 \\ & s_m^-, s_p^+ \geq 0, \quad m=1, \dots, M, p=1, \dots, P \end{aligned}$$

$$\lambda_d \geq 0 \quad d=1, \dots, D$$

onde $R_m^- = \bar{x}_m - x_m$ e $R_p^+ = \bar{y}_p - y_p$, com $\bar{x}_m = \max\{x_{dm}\}$, $\bar{y}_p = \max\{y_{dp}\}$, $x_m = \min\{x_{dm}\}$, $y_p = \min\{y_{dp}\}$. A função objetivo do modelo pertence ao intervalo $[0,1]$, e uma DMU será eficiente se $EFC_{IP}(X_o, Y_o) = 1$. A projeção de (X_o, Y_o) na fronteira de eficiência é dada por

$$\begin{cases} \hat{x}_{om} = x_{om} - s_m^-, m = 1, \dots, M \\ \hat{y}_{op} = y_{op} + s_p^+, p = 1, \dots, P \end{cases}$$

2.6 ÍNDICE DE MALMQUIST

Os modelos DEA introduzidos nas seções anteriores focalizavam as medidas de eficiência num único período de tempo. Ou seja, os planos de produção das DMUs foram realizados num mesmo período de tempo. A questão de avaliar a eficiência técnica e da produtividade considerando múltiplos períodos também pode ser resolvida através de modelos DEA, especificamente o Índice de Malmquist.

O Índice de Malmquist têm o objetivo de construir um índice de quantidade para análise de consumo como razão de funções distância. Mesmo que o índice tenha sido desenvolvido em um contexto de consumo, recentemente vem ganhando destaque num contexto de produção no qual múltiplos insumos e produtos são transformados em escores de eficiência. Na análise do produtor pode-se utilizar o Índice de Malmquist para construir índices de produtividade orientação insumo ou produto, baseados na razão de funções distância orientação insumo e orientação produto [Wilhelm, 2000].

Assim, a cada período $t = 1, 2, 3, \dots, T$, a tecnologia de produção é modelada pelo grafo:

$$GR^t = \{(x^t, y^t): x^t \text{ pode gerar } y^t\}, t = 1, 2 \dots T$$

E o conjunto de possibilidades de produção ou de produtos pode ser definido em termos de grafo da seguinte forma: $P^t(X^t) = \{Y^t: (Y^t, X^t) \in GR^t\}, t = 1, 2 \dots T$.

Uma representação funcional da tecnologia é fornecida pela função distância orientação produto [Shephard apud Bureau *et al.*, 1995]:

$$D_P^t(X^t, Y^t) = \min \left\{ \theta : \frac{Y^t}{\theta} \in P^t(X^t) \right\}, t = 1, 2, \dots, T$$

O cálculo do índice de Malmquist envolve quatro funções distancia:

$$D_P^t(X^t, Y^t), D_P^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1}), D_P^t(X^{t+1}, Y^{t+1}), D_P^{t+1}(X^t, Y^t)$$

sendo que

$$D_P^t(X^{t+1}, Y^{t+1}) = \min \left\{ \theta : \frac{Y^{t+1}}{\theta} \in P^t(X^{t+1}) \right\} e$$

$$D_P^{t+1}(X^t, Y^t) = \min \left\{ \theta : \frac{Y^t}{\theta} \in P^{t+1}(X^t) \right\}$$

O índice de Malmquist orientação produto é dado por

$$M_P(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) = \left[\frac{D_P^t(X^{t+1}, Y^{t+1}) \times D_P^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_P^t(X^t, Y^t) \times D_P^{t+1}(X^t, Y^t)} \right]^{1/2}$$

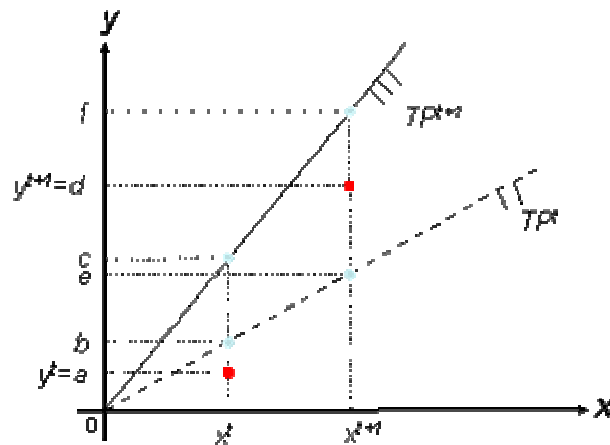
e pode ser decomposto no produto de dois fatores:

$$M_P(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) = \left[\frac{D_P^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_P^t(X^t, Y^t)} \right] \left[\frac{D_P^t(X^t, Y^t) \times D_P^t(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_P^{t+1}(X^t, Y^t) \times D_P^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})} \right]^{1/2}$$

Se $M_P(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) > 1$, então a DMU avaliada apresentou aumentos de produtividade; se $M_P(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) < 1$ a produtividade decresceu. A primeira componente do índice de Malmquist expressa a mudança no índice de eficiência técnica de uma determinada DMU entre os períodos t e $t+1$. A segunda componente detecta mudanças na tecnologia. Essas componentes podem assumir valores maiores que à unidade, indicando melhorias; iguais à unidade indicando que não ocorreram mudanças; e valores menores que à unidade, indicando piores.

Na Figura 2.12 são ilustrados os planos de produção desenvolvidos por uma única DMU nos períodos t e $t+1$ e as fronteiras de produção dos dois períodos.

Figura 2.12 - Índice de Malmquist



O índice de Malmquist da DMU é dado por:

$$M_P(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \sqrt{\frac{\frac{\overline{0d}}{\overline{0e}} \cdot \frac{\overline{0d}}{\overline{0f}}}{\frac{\overline{0a}}{\overline{0b}} \cdot \frac{\overline{0a}}{\overline{0c}}}},$$

ou seja,

$$M_P(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{\frac{\overline{0d}}{\overline{0f}}}{\frac{\overline{0a}}{\overline{0b}}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\overline{0a}}{\overline{0b}} \cdot \frac{\overline{0d}}{\overline{0e}}}{\frac{\overline{0a}}{\overline{0c}} \cdot \frac{\overline{0d}}{\overline{0f}}}}$$

A primeira componente é a razão entre $D_P^t(x^t, y^t)$, $D_P^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$, que de fato são os inversos dos índices de eficiência técnica (orientação produto considerando retornos constantes de escala) dos planos de produção desenvolvidos pela DMU no período t e $t+1$, respectivamente. Portanto, apesar das distâncias serem definidas em termos de funções fracionárias, podem ser calculadas a partir dos modelos DEA considerando retornos constantes de escala. Ou seja, para a o -ésima DMU têm-se que:

$\bullet \quad D_P^t(X_o^t, Y_o^t) = \frac{1}{EFC_P^t(X_o^t, Y_o^t)}$	$\bullet \quad D_P^t(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1}) = \frac{1}{EFC_P^t(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1})}$
$\bullet \quad D_P^{t+1}(X_o^t, Y_o^t) = \frac{1}{EFC_P^{t+1}(X_o^t, Y_o^t)}$	$\bullet \quad D_P^{t+1}(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1}) = \frac{1}{EFC_P^{t+1}(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1})}$

Onde

$EFC_P^t(X_o^t, Y_o^t) = \text{Max } \theta$ $\text{sa } \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm}^t \leq x_{om}^t$ $\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp}^t \geq y_{op}^t \theta$ $\theta \text{ livre, } \lambda_d \geq 0$	$EFC_P^t(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1}) = \text{Max } \theta$ $\text{sa } \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm}^t \leq x_{om}^{t+1}$ $\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp}^t \geq y_{op}^{t+1} \theta$ $\theta \text{ livre, } \lambda_d \geq 0$
$EFC_P^{t+1}(X_o^t, Y_o^t) = \text{Max } \theta$ $\text{sa } \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm}^{t+1} \leq x_{om}^t$ $\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp}^{t+1} \geq y_{op}^t \theta$ $\theta \text{ livre, } \lambda_d \geq 0$	$EFC_P^{t+1}(X_o^{t+1}, Y_o^{t+1}) = \text{Max } \theta$ $\text{sa } \sum_{d=1}^D \lambda_d x_{dm}^{t+1} \leq x_{om}^{t+1}$ $\sum_{d=1}^D \lambda_d y_{dp}^{t+1} \geq y_{op}^{t+1} \theta$ $\theta \text{ livre, } \lambda_d \geq 0$

De modo análogo pode-se definir o índice de Malmquist orientação insumo.

2.7 APLICATIVOS DEA

No mercado internacional existem sistemas aplicados ao DEA. Entre os aplicativos pesquisados tem-se o **EMS 1.3** (*Efficiency measurement system*); o **Frontier Analyst** versão 3. Professional Edition, desenvolvido por Banxia Software Ltd. Glasgow, Scotland; o sistema **DEA-Solver** Professional 4.1 desenvolvido pela Saitech Inc. New Jersey. U.S.A; e o **OnFront 2**, desenvolvida por EMQ (Economical Productivity and Quality), EMQ AB, Box 2134, S-220 02 Lund, Sweden.

2.7.1 EMS 1.3 (EFFICIENCY MEASUREMENT SYSTEM)

Desenvolvido por H. Scheel. University of Dortmund. Germany. Este aplicativo (versão *freeware*) pode ser obtido no site <http://www.wiso.uni-dortmund.de/>. EMS é para Windows 9x/NT aplicado ao DEA. A biblioteca usada para resolver os problemas de programação linear é *bpmpd.dll*, BPMPD 2.11, desenvolvida por Csaba Mészáros e que pode ser obtido no site: <http://www.netlib.org>.

Figura 2.13 - Modelos usados no EMS 1.3

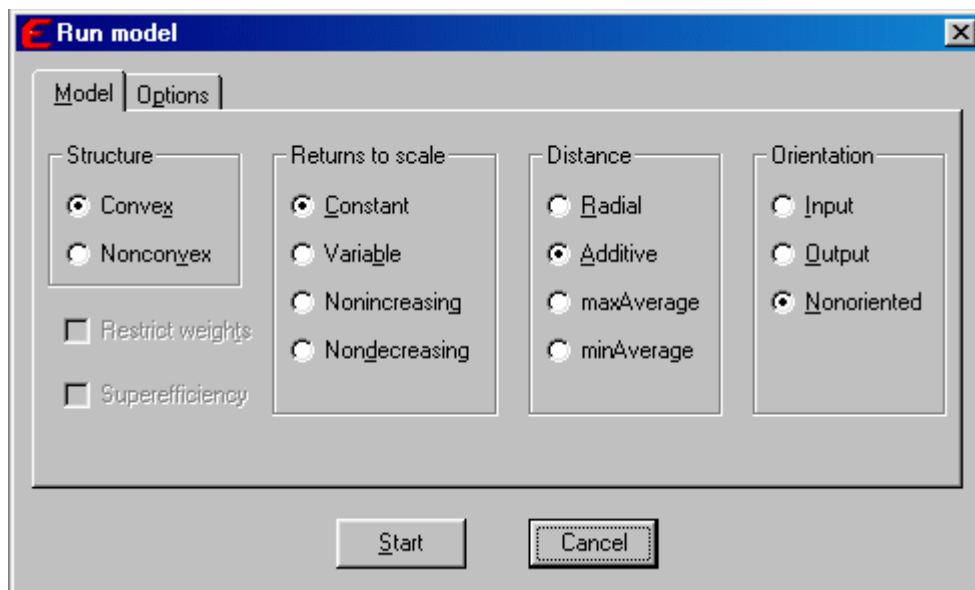
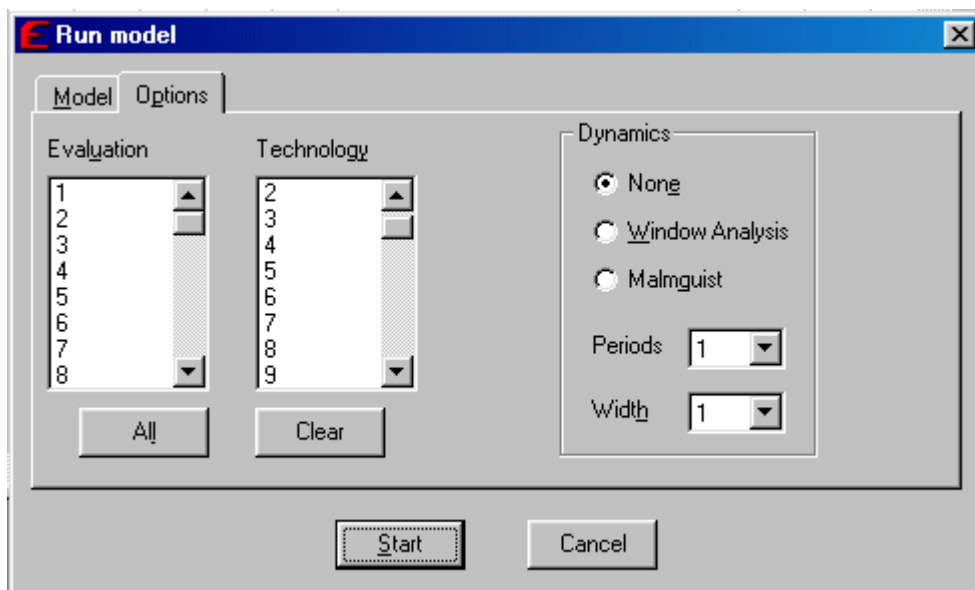


Figura 2.14 - Janela *Options* do EMS 1.3



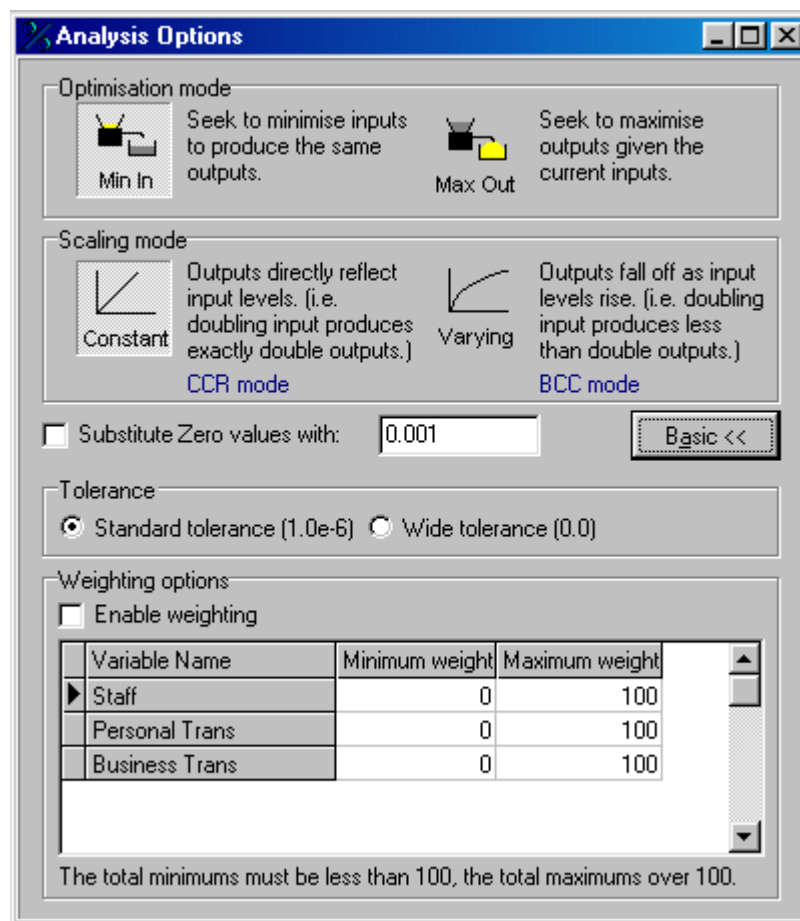
As dimensões das análises são limitadas pela memória do PC. Não há teoricamente limitação do número de DMUs, insumos e produtos, embora o código não seja aperfeiçoado para quantidades grandes de dados. O autor afirma ter analisado mais de 5000 DMUs e aproximadamente 40 insumos e produtos.

A entrada e de dados e os resultados são executados através do MS Excel 97 ou através de um editor de texto.

2.7.2 FRONTIER ANALYST

Frontier Analyst versão 3. Professional Edition é um produto da Banxia Aplicativo Ltd. Glasgow. Scotland. Há informações detalhadas sobre o aplicativo no site <http://www.banxia.com/>. Pode-se obter uma versão demo com limitações a 12 DMUs. O programa oferece um ambiente fácil de manipulação de dados, com menus e gráficos apropriados.

Figura 2.15 - Modelos apresentados pelo aplicativo Frontier Analyst

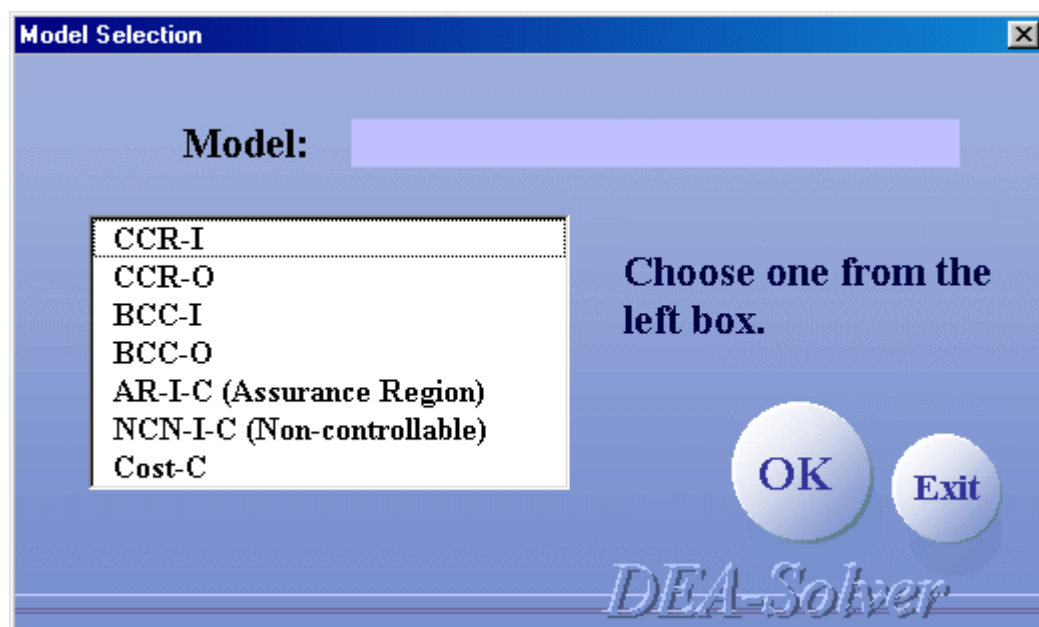


2.7.3 DEA-SOLVER PROFESSIONAL 4.1

DEA-Solver Professional 4.1 foi desenvolvido pela Saitech Inc. New Jersey. U.S.A. Uma versão *learning* acompanha o livro⁹ de autores Cooper, Seiford e Tone [2000]. Maiores informes podem ser obtidas no site <http://www.saitech-inc.com/>.

A versão *learning* foi desenvolvido em VBA de Ms Excel, permitindo analisar até 50 DMUs e 7 modelos, tais como: CCR-I, CCR-O, BCC-I, BCC-O, AR-I-C, NCN-I-C, COST-C.

Figura 2.16 - Modelos usados no aplicativo DEA-Solver versão Learning



2.7.4 ONFRONT 2

O aplicativo OnFront 2 foi desenvolvido por EMQ (Economical Productivity and Quality), EMQ AB, Box 2134, S-220 02 Lund, Sweden. E-Mail: emq@emq.com. No site da empresa pode-se obter uma versão demo limitada. Este programa tem a participação dos professores de economia Rolf Färe e Shawna Grosskopf, conhecidos pelo livro publicado "Production Frontiers". Neste programa podem ser aplicados modelos orientação insumo, orientação produto, com retornos constantes,

⁹ ver referencia n. 21.

variáveis e não crescentes de escala, assim como o índice de Malmquist, a decomposição de eficiência etc.

Figura 2.17 - Modelos apresentados pelo programa OnFront 2 (versão demo)

Select model

Efficiency

Input: ☐ $F(y,x)$ ☐ $C(y,w)$

Output: ☒ $F_o(x,y)$ ☐ $R(x,p)$

Technology

Scale: ☐ CRS ☐ NIRS ☒ VRS

Disposability: ☒ Strong ☐ Weak

☒ Default technology

Decomposition

☐ $S(y,x)$ ☐ $S_o(x,y)$

☐ $CNi(y,x)$ ☐ $CNo(x,y)$

☐ $O(y,x,w)$ ☐ $O_o(x,y,p)$

Capacity utilization

☐ $CU(y,x)$

Productivity

☐ $M(y,x)$ ☐ $Mo(x,y)$

Result options

☒ Data

☒ Optimal values

☒ Z-variables

☒ Dual solution

Data scaling

☒ Auto

Iterations

Max:

Time series data for Malmquist:

OK Cancel

Tabela 2.1 - Resumo das observações de alguns aplicativos DEA

Item	Características	EMS	BANXIA	EMQ	DEA SOLVER
1	Manipulação direta de dados	não	sim	sim	não
2	Ambiente amigável	não	sim	sim	sim
3	Análise visual	sim	sim	sim	sim
4	Modelo radial	sim	sim	sim	sim
5	Modelo não radial	sim	sim	sim	sim
6	Modelo SBM	sim	não	não	sim
7	Modelo RAM	não	não	não	não
8	Variáveis não controláveis	não	sim	não	sim
9	Restrição a os pesos	sim	sim	sim	sim
10	Malmquist	sim	não	sim	sim
11	Impressão de resultados	não	sim	sim	sim
12	Gráficos	não	sim	não	sim
13	Projeção das DMUS	não	sim	não	sim
14	Referência cruzada	não	sim	não	não
15	Ranqueamento	não	não	não	sim
16	Modelo aditivo	sim	não	não	sim
17	Freeware	sim	não	não	não
18	Custo em US\$	-	703 - 3.370	450 - 1.750	800 - 1.600

Os custos dos programas variam de acordo com a quantidade de variáveis a usar. Para a aquisição do aplicativo **Frontier Analyst®** da Banxia com limitação de 75 DMUs tem-se um custo de aproximadamente US\$703.00 e para uso ilimitado de DMUs de US\$3.370.00

CAPITULO III

3 DEA-SAED: FERRAMENTA DE AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DE PRODUTIVIDADE

O *software* DEA-SEAD V1.0, a ser descrito neste capítulo e no próximo, é uma ferramenta para avaliação da eficiência técnica e de produtividade baseada em DEA. O programa computacional possui interface amigável e uma grande gama de modelos DEA, e apresenta os resultados com considerável nível de detalhamento.

DEA-SEAD foi implementado na linguagem Microsoft Visual Basic 6.0 e usa a tecnologia *Dynamic Link Library* (Biblioteca de Ligação Dinâmica), ou DLL¹⁰: Esta DLL, denominada de *Lpsolve.dll* (*Lp_Solve*), é ferramenta essencial no aplicativo para resolução dos problemas de programação matemática associados aos modelos DEA.

A comunicação entre o DEA-SAED e *Lp_solve* é feita da seguinte forma: DEA-SAED escreve (num arquivo) o problema de programação linear (PPL) de acordo com o modelo DEA escolhido; a DLL *Lp_solve* lê o problema e o resolve; os resultados são armazenados em variáveis e gravados em arquivos.

3.1 A BIBLIOTECA LP_SOLVE

A biblioteca de livre distribuição *Lp_solve* foi escrita em ANSI C por Michel Berkelaar. Michel afirma ter resolvido problemas com aproximadamente 30.000 variáveis e 50.000 restrições.

¹⁰ É uma coleção de rotinas que podem ser chamadas por aplicações ou por outras DLLs. <http://delphi.scriptbrasil.com/?class=14&id=367>.

A manutenção e a adaptação para diversas plataformas do Lp_solve são realizadas por Peter Notebaert [peno@mailme.org], conjuntamente com Kjell Eikland [kjell.eikland@broadpark.no]. A última versão pode ser acessada no *site* http://groups.yahoo.com/group/lp_solve/files/, sendo necessário, para isso, tornar-se membro do fórum de discussões do Yahoo. Maiores informações podem ser obtidas no *site* http://groups.yahoo.com/group/lp_solve.

Além do Lp_solve, há outras bibliotecas e aplicativos com a finalidade de resolver problemas de programação matemática, tais como:

- **GLPK** (*freeware* - versão 4.2)
homepage: <http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html>.
- **BPMPD** (versão 2.21, Liberado para o público com restrições)
homepage: <http://www.sztaki.hu/~meszaros/bpmpd>.
- **Lindo API** da Lindo systems Inc, liberado para o público com restrições (300 variáveis e 150 restrições.)
homepage: [<http://www.lindo.com>]

A biblioteca lpsolve.dll pode ser utilizada em diferentes linguagens de programação, tais como *Visual Basic*, *Delphi*, *Vb.net*, *Visual C*, *linguagem C*, *Linux*, etc. O formato de entrada é chamado *lp-format* ou *Mps-format*.

3.2 A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO VISUAL BASIC

Considerada como parte integrante da família de desenvolvimento de produtos do Visual Studio 6.0, o Visual Basic é uma linguagem robusta criada para ambientes de desenvolvimento que abordam cada aspecto da programação, desde aplicações educacionais à programação de banco de dados, e de aplicações financeiras ao desenvolvimento de componentes de Internet.

Há quinze anos, desenvolver um simples aplicativo baseado em Windows era uma tarefa complicada, difícil e extensa. Construir uma aplicação com recursos gráficos tornou-se simples após a introdução do Visual Basic 1.0 em novembro de 1991, principalmente pela propagação dos programadores ao desenvolverem bibliotecas de códigos com características, eventos e métodos próprios

transformado-os como componentes do Visual Basic chamados VBXs ou controles personalizados. Após um ano foi lançada uma nova versão de Visual Basic com maiores recursos para depuração com códigos coloridos, conexão a sistemas de dados (ODBC), além de um recurso de múltiplas interfaces de documentos (MDI) que muito contribuiu na expansão de indústrias para esse fim. Seis meses mais tarde foi lançada a versão 3.0 do Visual Basic, procurando atender as organizações corporativas com ferramentas aplicadas à base de dados em ambiente cliente/servidor e a geração fácil de relatórios. Com os avanços vertiginosos da informática e a programação de 32 bits, foi lançada a versão 4.0 do Visual Basic em setembro de 1995. As versões 5.0 e 6.0 foram lançadas em março de 1997 e junho de 1998, respectivamente, com ferramentas destinadas para o ambiente *Web*. A novidade atual referente ao Visual Basic é o Visual Basic.net com mudanças radicais, podendo rodar em outras plataformas. [Pereira 2002, p.1]

3.3 COMUNICAÇÃO ENTRE DEA-SAED E LP_SOLVE

A comunicação do programa principal (DEA-SAED) com o Lp_solve é feita através de um arquivo texto com extensão LP, por exemplo, `Test1.lp`. O arquivo, deve ser gravado seguindo um padrão preestabelecido, padrão este denominado na literatura de *lp-format*. Portanto, o arquivo tipo LP contém gravado o problema de programação matemática-PPM associado ao modelo DEA selecionado pelo usuário. As informações deverão ser gravadas na seguinte sequência:

- 1º) Função objetivo (*objective function*)
- 2º) Restrições (*constraint*)
- 3º) Declarações (*declaration*)

onde:

- Função objetivo é uma combinação linear de variáveis, finalizada com ponto e vírgula, opcionalmente precedida por “max:” ou “min:”, ou seja, maximizando ou minimizando a função. Por convenção o termo “max” é subentendido, ou seja, as palavras alternativas podem ser usados como “Max:” ou “MAX:”, “minimise:”, “minimize:”, “Maximise:”, “Maximize:”.

- Restrições: são combinações lineares de variáveis seguidas de operadores relacionais e de combinações lineares de variáveis, com ponto e vírgula (;) ao final de cada restrição. Opcionalmente pode-se inicialmente nomear cada restrição e em seguida coloca-se dois pontos (:) para daí escrever a restrição. Os operadores admitidos são "<" "<=" "=" ">" ">=".

Não há diferença semântica entre "<" e "<=" e nem entre ">" e ">=" (até mesmo para variáveis inteiras), e isso acontece porque o programa não diferencia um número decimal (por exemplo, 2,999999) de um número inteiro (por exemplo, 3) devido ao truncamento utilizado computacionalmente.

- Declarações: as declarações das variáveis acontecem para as inteiras “int” e semicontínuas “sec”. Não há declarações para binárias, mas elas podem ser declaradas indiretamente considerando-se a variável como inteira e com limite superior igual a 1. Começam com uma letra (maiúscula ou minúscula) e podem conter números. Os comentários podem ser colocados com a sintaxe /* */, como na linguagem C++.

Seja o seguinte problema de programação linear-PPL:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sa} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

No formato *lp-format* pode-se escrever este PPL em diferentes modos

```
-x1 -x2; /* ou min: x1 + x2; */
x1 >= 1;
X2 >= 1;
x1 + x2 >= 2;
int x1;
```

A função objetivo (-x1 -x2) é do tipo maximizar, outras opções poderiam ser:

```
max: -x1 -x2;      ou
maximize: -x1 -x2;  ou
min: x1 + x2;       ou
minimize: x1 + x2;
```

O PPL também pode ser escrito da seguinte forma:

```
min: x1 + x2;
R1: x1 >= 1;
R2: x2 >= 1;
```

R3: $x_1 + x_2 \geq 2$;
 int x_1 ;

Por motivos de desempenho computacional escrever

$x_1 + x_2 \geq 2$;

é mais eficiente do que escrever

R3: $x_1 + x_2 \geq 2$;

Uma restrição pode também conter constantes, por exemplo:

$2x_1 \geq 2$;

e o `Lp_solve` automaticamente substitui esta equação

$x_1 \geq 1$;

As variáveis semicontínuas podem assumir valores desde o limite mínimo até o limite máximo e também o valor nulo. Por exemplo, dado o PPM:

max $x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4$
 sa $x_1 + x_2 \leq 5$
 $2x_1 - x_2 \geq 0$
 $-x_1 + 3x_2 \geq 0$
 $x_3 + x_4 \geq 5$
 $x_3 \in \{[1.1 \ 10], \{0\}\}$
 $x_1, x_2, x_4 \geq 0$

e no *lp_format* o PPM é escrito do seguinte modelo

max: $x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4$;
 $x_1 + x_2 \leq 5$;
 $2x_1 - x_2 \geq 0$;
 $-x_1 + 3x_2 \geq 0$;
 $x_3 + x_4 \geq .5$;
 $x_3 \geq 1.1$;
 $x_3 \leq 10$;
 sec x_3 ;

Neste PPM tem-se $1.1 \leq x_3 \leq 10$ ou $x_3 = 0$ e a solução ótima dada pelo `Lp_solve`

Value of objective function: 6,83333
 Actual values of the variables:

x_1	1,66667
x_2	3,33333
x_3	0
x_4	0,5

Observando a variável $x_3 = 0$, tem-se que foi ignorada a restrição $x_3 \geq 1.1$ por tratar-se de uma variável semicontínua. Caso não tivesse sido declarada x_3 como variável semicontínua, o resultado seria:

```

Value of objective function: 3,93333
Actual values of the variables:
x1          1,66667
x2          3,33333
x3          1,1
x4          0

```

e o valor da função objetivo decairia de 6,83333 para 3,93333 com $x_3 = 1,1$. A solução é melhor com $x_3 = 0$.

Para declarar variáveis binárias pode-se utilizar o seguinte modelo:

```

var <= 1;
int var;

```

Exemplo:

```

max: x1 + 2x2 - 4x3 -3x4;
x1 + x2 <= 5;
2x1 - x2 >= 0;
-x1 + 3x2 >= 0;
x3 + x4 >= 0.5;
x3 >= 1.1;
x3 <= 10;
x4 < 1;
int x4;

```

e o resultado deste último PPL é

```

Value of objective function: 3,93333
Actual values of the variables:
x1          1,66667
x2          3,33333
x3          1,1
x4          0

```

Vale lembrar que, quanto maior o número de variáveis inteiras, maior é o tempo de processamento (neste caso o tempo de processamento cresce exponencialmente).

3.4 ALGORITMO GERAL DA FERRAMENTA DEA-SAED

O algoritmo geral usado pelo DEA-SAED segue a seguinte seqüência de passos:

Passo 1. Inicialmente ocorre a leitura de dados. Os dados podem estar armazenados em arquivos com extensão .DEA, ou importadas de arquivos tipo texto, ou do Excel, ou ainda digitados no ato da execução. O

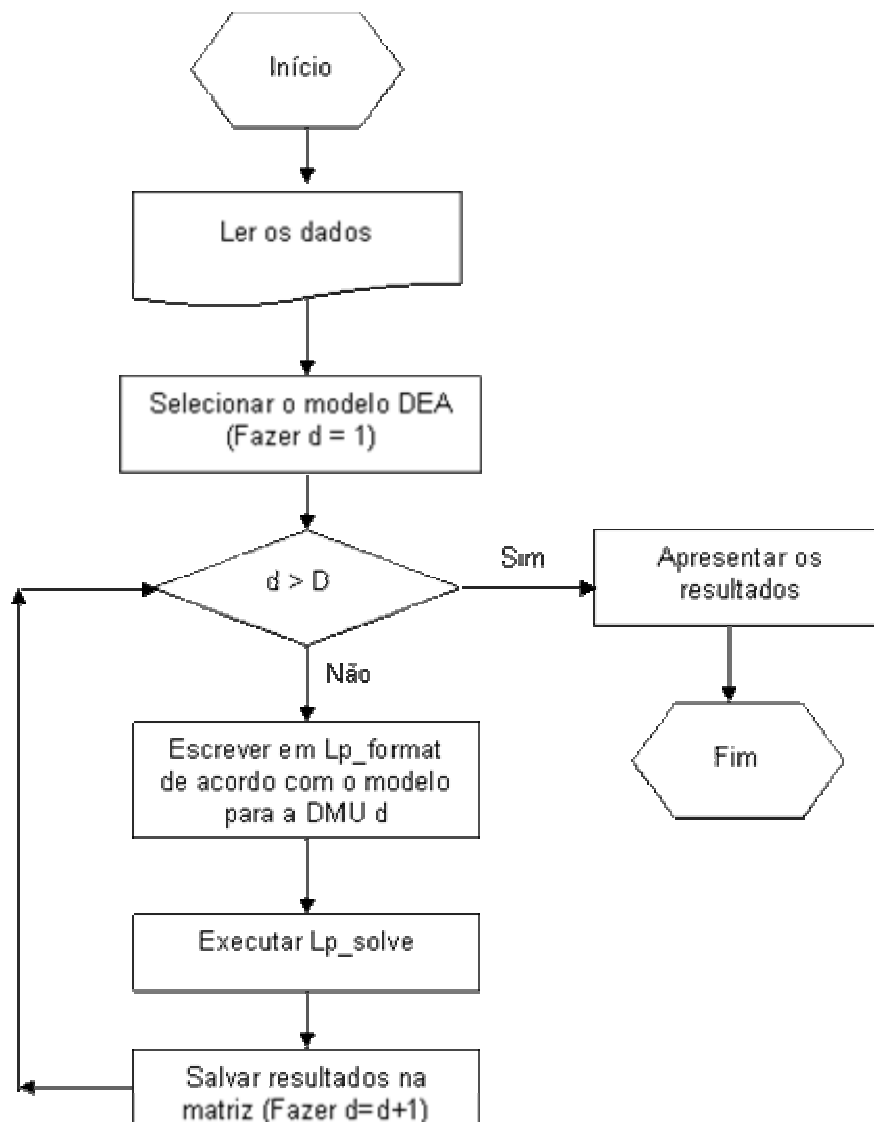
programa DEA-SAED analisa a coerência dos dados, alertando o usuário caso existam alguns erros (insumos e/ou produtos negativos ou uma coluna ou linha nula).

Passo 2. O usuário seleciona o modelo através do menu de opções do DEA-SAED.

Passo 3. Para cada DMU DEA-SAED escreve um problema de programação linear-PPL em formato texto cujas soluções ótimas são determinadas pelo Lp_solve. Em seguida DEA-SAED resgata os resultados do Lp_solve e os armazena numa matriz.

Passo 4. Por último são apresentados resultados, e fornecidas opções de manipulação dos resultados tais como ordenamento, cálculo das eficiências cruzadas, projeções e gráficos.

Figura 3.1 - Diagrama de fluxo do processamento e comunicação entre Visual Basic e Lp_solve (D é o número de DMUs)



A seguir serão detalhados os procedimentos de entrada dos dados, os modelos DEA disponíveis em DEA-SAED e as opções de análise dos resultados.

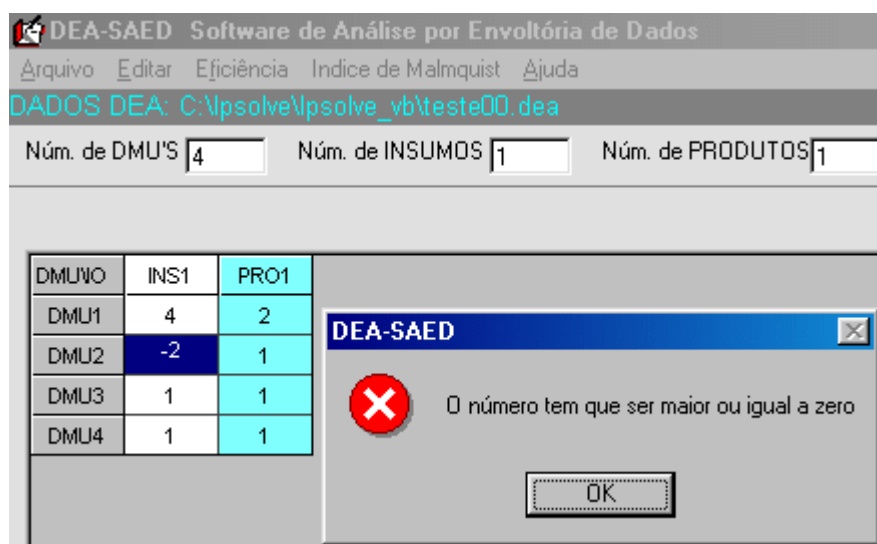
3.4.1 ENTRADA DOS DADOS

Em DEA-SAED o usuário possui três modos para informar os dados relativos às DMUs. Estes são:

i) Digitando diretamente numa planilha do DEA-SAED. Este modo apresenta interface gráfica amigável que facilita a entrada dos dados. Inicialmente

deve-se indicar o número de DMUs, o número de insumos e o número de produtos. Em seguida DEA-SAED abrirá a planilha para digitar os valores dos insumos e dos produtos; e cada dado digitado é validado, interrogando o usuário caso dados inválidos tenham sido digitados. Por exemplo, se algum número negativo ou algum caractere alfanumérico for digitado, DEA-SAED alerta ao usuário.

Figura 3.2 - Digitando os dados de entrada



Vale salientar que DEA-SEAD utiliza o ponto (.) como símbolo que indica valores decimais. Caso o usuário digite a vírgula o programa assumirá automaticamente o ponto como indicador de decimal.

ii) O segundo modo que o usuário tem para informar informações referentes as DMUs, os insumos e os produtos, é através da importação dos dados armazenados em arquivos do tipo texto. Os dados devem estar gravados segundo um formato preestabelecido tal como no exemplo da figura abaixo.

Figura 3.3 - Segundo modo de entrada de dados no DEA-SAED

```
teste4|
4
2
2
2
DMU\IO      INS1      INS2      PRO1      PRO2
DMU1        2        3.4        2        2.4
DMU2        1        4        2        3
DMU3        3        1        1        3
DMU4        2.5      3.5        2        4
```

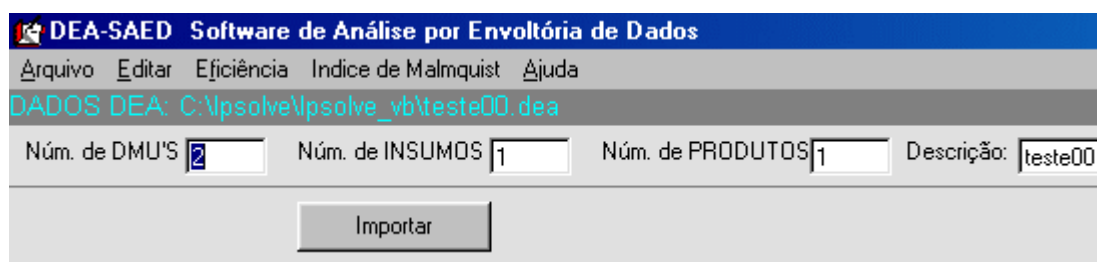
Na figura acima, a primeira linha é um comentário que deve necessariamente ser incluído; a segunda linha é o número de DMUs; a terceira linha é o número de insumos e a quarta linha o número de produtos. A quinta linha

necessariamente não deve ter caracteres. Na sexta linha encontram-se a identificação das colunas e a primeira coluna corresponde aos nomes das linhas (ou seja, o nome das DMUs). As quantidades dos insumos e dos produtos podem estar separados por espaços ou por tabulações (usando a tecla “TAB”).

Os nomes das DMUs, dos insumos e dos produtos não podem conter espaços em branco.

iii) Outra forma de importar os dados numéricos é usando o botão “Importar”.(figura abaixo). Pressionando o botão “Importar”, o usuário deverá escolher o arquivo (do tipo texto) que contem os insumos e os produtos das DMUs em formato de tabela (Figura 3.5). A seqüência para isto é a seguinte: no menu “Arquivo” selecione a opção “Novo” e em seguida DEA-SAED pede o preenchimento do nome do arquivo no qual serão salvos os dados. Na seqüência é mostrada a janela que contem o botão “Importar” que deverá ser pressionado pelo usuário.

Figura 3.4 - Botão Importar do DEA-SAED



Não é necessário informar o número de DMUs, de insumos e de produtos. O arquivo selecionado pelo usuário deverá seguir o seguinte formato:

Figura 3.5 - Formato do texto a importar

2	3.4	2	2.4
1	4	2	3
3	1	1	3
2.5	3.5	2	4

Neste modo, o número de linhas corresponde ao número de DMUs, e o número de colunas ao número total de insumos e de produtos. Assim DEA-SAED calcula a quantidade de DMUs (4 na figura acima) e a soma de insumos e de produtos. Basta, portanto, informar a quantidade de insumos na próxima janela.

3.4.2 MODELOS DEA IMPLEMENTADOS EM DEA-SEAD

DEA-SAED possui uma gama variada de modelos DEA para avaliação da eficiência técnica. Para avaliação da produtividade, DEA-SAED conta com o Índice

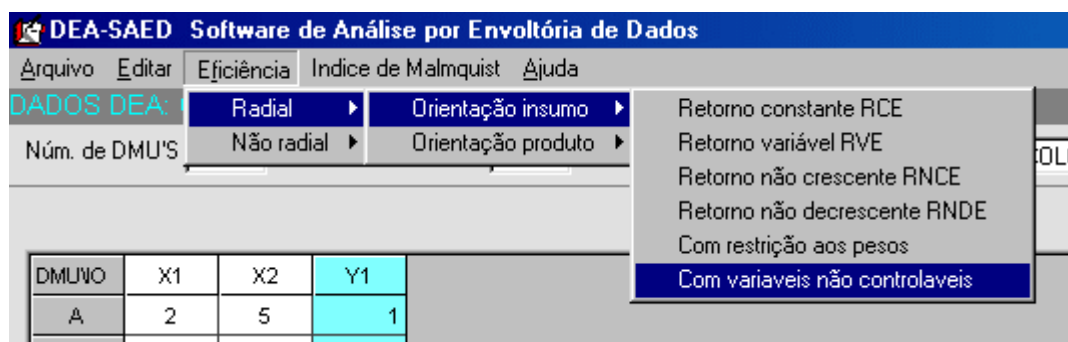
de Malmquist orientação insumo e orientação produto. Os modelos para avaliação da eficiência técnica são:

- a) Projeção orientação insumo na fronteira de produção (MODELOS RADIAIS) (Figura 3.6)
 - Retornos constantes de escala (RCE)
 - Retornos variáveis de escala (RVE)
 - Retornos não crescentes de escala (RNCE)
 - Retornos não decrescentes de escala (RNDE)
 - RCE com restrições aos pesos
 - RCE com variáveis incontroláveis
- b) Projeção orientação produto na fronteira de produção (MODELOS RADIAIS)
 - RCE
 - RVE
 - RNCE
 - RNDE
 - RCE com restrições aos pesos
 - RCE com variáveis incontroláveis
- c) Projeção orientação insumo na fronteira de eficiência (MODELOS NÃO RADIAIS) (Figura 3.7)
 - Modelo RCE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RVE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RNCE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RNDE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo *Free Disposal Hull*-FDH
- d) Projeção orientação produto na fronteira de eficiência (MODELOS NÃO RADIAIS)
 - Modelo RCE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RVE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RNCE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo RNDE com ϵ e o modelo Duas Fases
 - Modelo *Free Disposal Hull*-FDH
- e) Projeção orientação insumo/produto na fronteira de eficiência (MODELOS NÃO RADIAIS)

- Modelo Aditivo
- Modelo SBM-*Slack Based Measure*
- Modelo RAM-*Range Adjusted Measure*

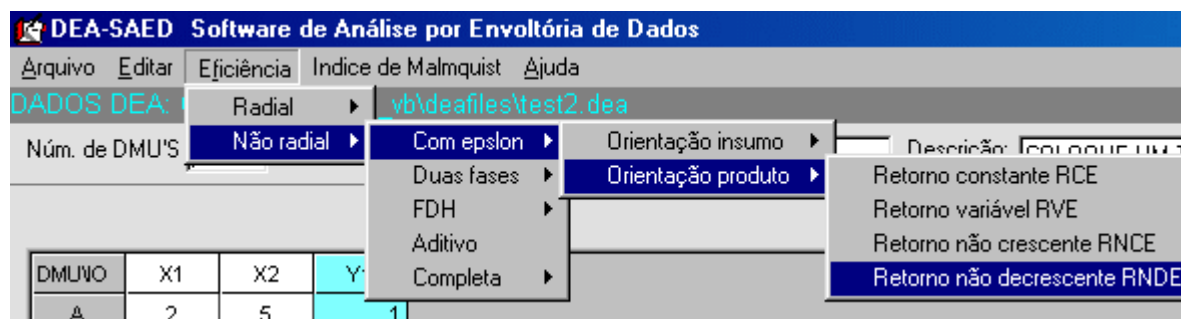
Informadas as quantidades de DMUs, dos insumos e dos produtos, o usuário deverá selecionar o modelo DEA para proceder à avaliação da eficiência técnica. Isto deverá ser feito a partir do menu “Eficiência” (próximas figuras).

Figura 3.6 - Menu de opções dos modelos radiais

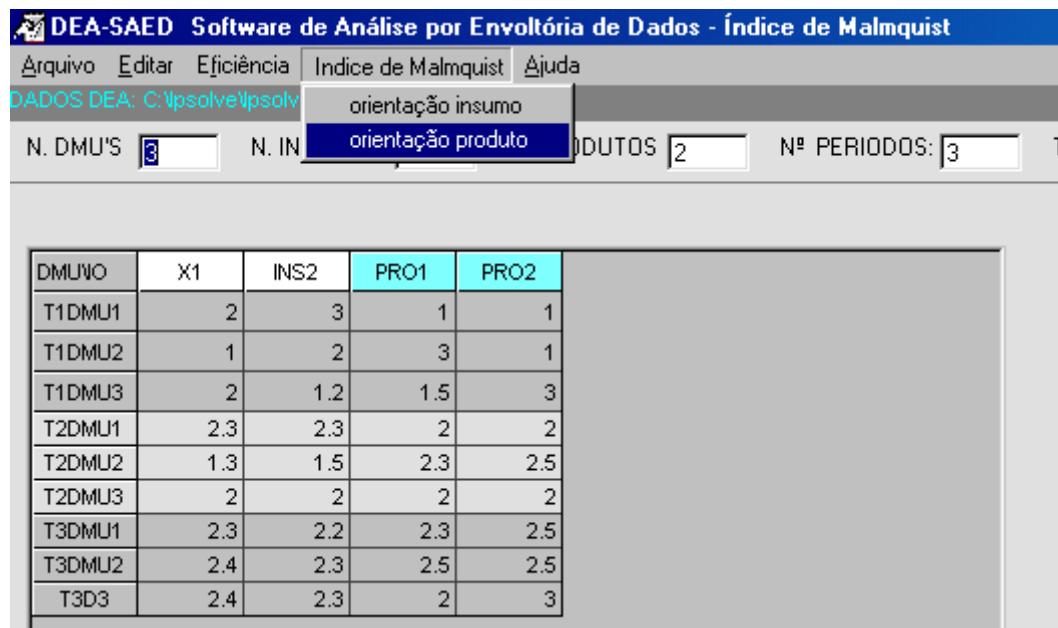


No grupo dos modelos não radiais tem-se os modelos com epsilon e os executados em duas fases.

Figura 3.7 - Menu de opções dos modelos não radiais



Para a avaliação da produtividade tem-se o Índice de Malmquist tanto para orientação insumo como para produto (figura abaixo).

Figura 3.8 - Menu de opções para o índice da produtividade

No capítulo IV serão mostrados maiores detalhes sobre o cálculo do índice de produtividade Malmquist.

3.4.3 PROCESSO INTERNO DA AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA

Depois de escolhido o modelo DEA, a ferramenta de análise DEA-SAED grava, em formato *lp-format* o PPL associado. Em seguida DEA-SAED “chama” a biblioteca Lp_solve que determina a solução ótima do PPL.

Para exemplificar, seja o seguinte conjunto de DMUs

Tabela 3.1 - Insumos e produtos de 4 DMUs

DMU\IO	INSUMO	PRODUTO
A	2	0,001
B	3	3
C	3	2,0001
D	4	3

Suponha-se que o usuário tenha escolhido o modelo radial orientação insumo considerando retornos constantes de escala. Para a DMU D DEA-SAED gera, em formato *Lp-format*, o PPL associado e grava-o (num arquivo com extensão LP) do seguinte modo:

min: T4;
 R1: 4T4 - 2L1 - 3L2 - 3L3 - 4L4 > 0;
 R2: 0.001L1 + 3L2 + 2.0001L3 + 3L4 > 3;

Criado o arquivo LP, o desenvolvimento da solução é feito pela biblioteca de otimização Lp_solve a partir da execução da seguinte seqüência de comandos:

```
arquivoLP = App.Path & "\" & "Test1.lp" ' atribuição do arquivo p/leitura do PPL
lpsolve_log_file App.Path & "\" & "log1.txt" ' atribuição de um arquivo para impressão de erros
lpmestre = Lpsolve_read_LP(arquivoLP, False, "mestre" & id) 'leitura do arquivo Test1.lp
If lpmestre = Null Then
MsgBox "não existem dados", vbCritical
Exit Sub
End If
lpsolve_auto_scale lpmestre ' autoescalando os dados
lpsolve_solve (lpmestre) 'resolução do PPL
ReDim col(1 To Lpsolve_get_Ncolumns(lpmestre)) 'Dimensionamento do vetor col
lpsolve_get_variables lpmestre, col(1) ' Obtenção dos valores das variáveis
ReDim row(1 To Lpsolve_get_Nrows(lpmestre)) 'Redimensionamento do vetor row
lpsolve_get_constraints lpmestre, row(1) 'Obtenção dos valores das restrições
ReDim Array(0 To Lpsolve_get_Ncolumns(lpmestre) + Lpsolve_get_Nrows(lpmestre))
lpsolve_get_reduced_costs lpmestre, Array(0) 'Obtenção dos valores duais
lpsolve_delete_lp lpmestre 'Liberação da memória
lpsolve_print_file vbNullString 'Liberação da memória
lpsolve_log_file vbNullString 'Liberação da memória
```

Após Lp_solve resolver um PPL (para uma DMU) os resultados são transferidos para memória RAM em forma de vetores, e o resgate da solução ótima é feita a partir da execução da seguinte seqüência de comandos.

```
'Resgate dos resultados de teta (índice de eficiência)e lambdas (referências)
For ii = 1 To (n_DMUs + 1)
Kini = ii + (n_INSUMOs + n_PRODUTOs)
matrizDEA(id, Kini) = col(ii)
Next ii

'Resgate dos valores de s- (folgas dos insumos)
For ii = 1 To n_INSUMOs
j = ii + (n_DMUs + 1) + (n_INSUMOs + n_PRODUTOs)
matrizDEA(id, j) = -Abs(row(ii)) 'porque o b=0
Next ii

'Resgate dos valores de s+ (folgas dos produtos)
For ii = 1 To n_PRODUTOs
j = ii + (n_DMUs + 1) + (2 * n_INSUMOs + n_PRODUTOs)
h = ii + n_INSUMOs
matrizDEA(id, j) = Abs(Abs(row(h)) - matrizDEA(id, h))
Next ii

' Resgate dos valores de v e u duais (pesos)
For ii = 1 To (n_INSUMOs + n_PRODUTOs)
j = ii + (n_DMUs + 1) + 2 * (n_INSUMOs + n_PRODUTOs)
matrizDEA(id, j) = Abs(Array(ii))
If Flag_rve Or Flag_rnce Or Flag_rnde Then
j = n_INSUMOs + n_PRODUTOs + 1
matrizP(id) = -Array(j) ' dual Uo
End If
Next ii
```

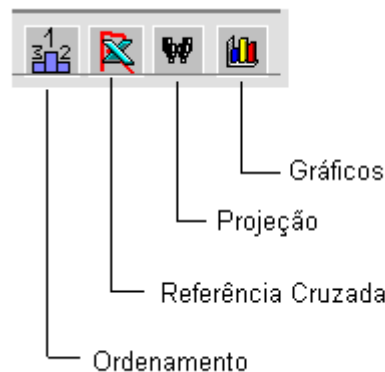
Estes resultados são mantidos na memória RAM e se o usuário desejar, pode exportá-los, gravando-os num arquivo tipo texto. Há também a opção de exportar todos os resultados para serem manipulados no Excel (com extensão XLS).

3.5 OPÇÕES DE MENU DISPONÍVEIS NO DEA-SAED PARA ANÁLISE DE RESULTADOS

DEA-SAED v1.0 tem as seguintes funções para análise dos resultados:

- i) ordenamento
- ii) referência cruzada
- iii) projeção
- iv) gráficos.

Figura 3.9 - Opções para análise de resultados em DEA-SAED



Estas opções serão detalhadas a seguir.

3.5.1 ORDENAMENTO

Depois de calculadas as eficiências das DMUS, a ferramenta apresenta a classificação das mesmas tendo como critério a eficiência em ordem crescente de eficiência. Ou seja, no ordenamento feito por DEA-SAED a primeira DMU é a mais eficiente e a última da lista a mais ineficiente.

3.5.2 REFERÊNCIA CRUZADA

Os pesos ótimos têm sido uma das grandes vantagens da Análise de Envoltória de Dados - DEA para a identificação de DMUS eficientes e ineficientes. É uma maneira de evitar as particularidades das DMUS, sem conhecimento prévio da importância relativa de cada variável, é utilizar a Avaliação Cruzada (*Cross Evaluation*). Desenvolvida por Sexton *et al.* [1986 in Lins, M.P.E., Meza, L.A, 2000, p.55] tem como idéia principal utilizar DEA em uma avaliação do conjunto (*peer-*

evaluation ou *peer-appraisal*) ao invés de uma auto-avaliação (*self-evaluation* ou *self-appraisal*), a qual é calculada pelos modelos DEA padrão.

A avaliação em conjunto significa que uma DMU é avaliada usando os pesos ótimos das outras DMUs. Ou seja, a eficiência cruzada de uma dada DMU é a média das eficiências desta usando os pesos ótimos das demais DMUs. Os pesos usados no cálculo dos índices de eficiência cruzada em DEA-SAED V1.0, são do modelo RCE orientação insumo ou produto. Este índice é denominado, por Lins e Meza [Lins, Meza, 2000, p.66], de eficiência padrão.

Tabela 3.2 - Índices de eficiência cruzada e os Maverick

	DMU1	DMU2	...	DMU s	...	DMU D
DMU1	E_{11}	E_{12}	...	E_{1s}	...	E_{1D}
DMU2	E_{21}	E_{22}	...	E_{2s}	...	E_{2D}
...	...	...	...	...	...	...
DMU d	E_{d1}	E_{d2}	...	E_{ds}	...	E_{dD}
...	...	...	...	...	...	...
DMU D	E_{D1}	E_{D2}	...	E_{Ds}	...	E_{DD}
e_s	e_1	e_2	...	e_s	...	E_D
M_s	M_1	M_2	...	M_s	...	M_D

O procedimento de cálculo da eficiência cruzada consiste em:

- Calcular os pesos ótimos (do modelo RCE) de todas as DMUs e armazenar numa matriz.
- A eficiência cruzada da DMU s com relação aos pesos da DMU d é dada por:

Orientação produto: $E_{ds} = \frac{\sum_{p=1}^P u_{dp} y_{sp}}{\sum_{m=1}^M v_{dm} x_{sm}}$	Orientação insumo: $E_{ds} = \frac{\sum_{m=1}^M v_{dm} x_{sm}}{\sum_{p=1}^P u_{dp} y_{sp}}$
---	--

- A eficiência cruzada é obtida pela média aritmética das eficiências da coluna s sem a inclusão da diagonal principal.

$$e_s = \frac{1}{D-1} \sum_{\substack{d=1 \\ d \neq s}}^D E_{ds}$$

iv) Para determinar M_s (os Mavericks):

$$M_s = \frac{E_{ss} - e_s}{e_s}$$

As DMUs com valores relativamente altos de M_s são chamados de “Mavericks” [Doyle e Green, 1994]. Este índice indica o quanto as DMUs atingem a eficiência usando pesos irreais ou não apropriados. A avaliação usando os pesos das outras DMUs (índice de eficiência cruzada) é ligeiramente menor (ou igual) do que o índice de eficiência usando os próprios pesos.

3.5.3 PROJEÇÃO

DEA-SAED, após calcular as eficiências, apresenta a opção de visualizar as projeções das DMUS na fronteira de produção (ou na fronteira de eficiência) dependendo do modelo DEA escolhido. Deste modo há uma “explicação” da ineficiência mostrando as quantidades das reduções dos insumos e das expansões dos produtos. Também são mostradas as referências.

Figura 3.10 - Projeção de DMUs na fronteira de eficiência

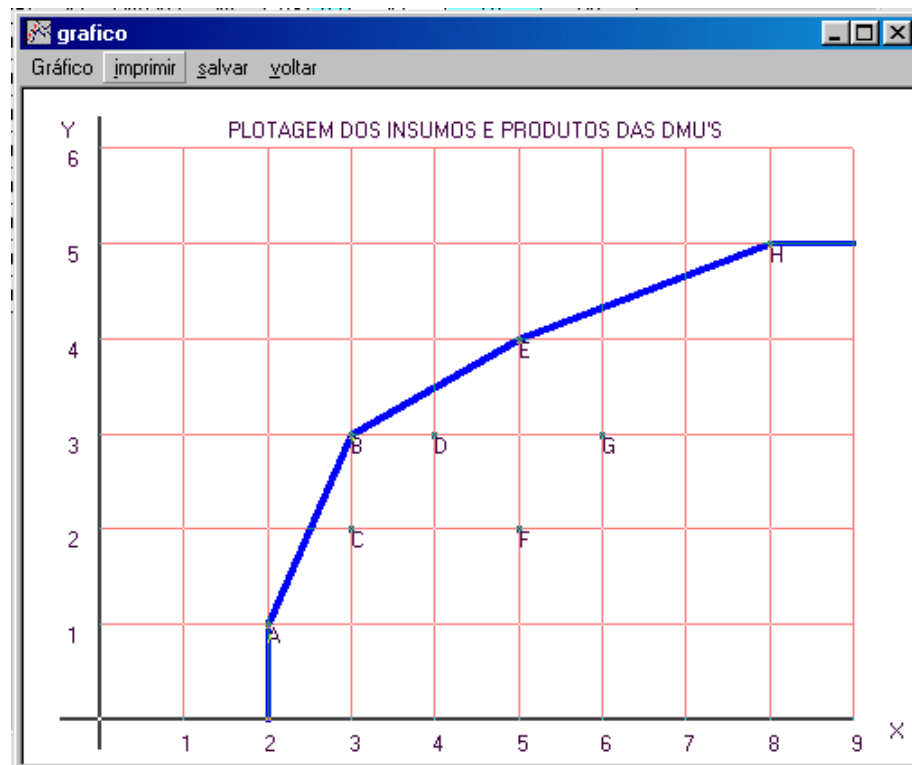
Projeções das DMUs						
No.	DMU	Score				
	I/O	Dados	Projeção	Diferença	%	Referência
1	A	0.50000				B
	INS1	2.000	1.000	-1.000	-50.00%	
	PRO1	1.000	1.000	0.000	0	
2	B	1.00000				B
	INS1	3.000	3.000	0.000	0	
	PRO1	3.000	3.000	0.000	0.00%	
3	C	0.66667				B
	INS1	3.000	2.000	-1.000	-33.33%	
	PRO1	2.000	2.000	0.000	0	

Na figura acima, encontram-se ilustradas as quantidades a serem consumidas e produzidas por três DMUs {A, B e C} para que seus planos de produção passem a pertencer à fronteira de produção. Por exemplo, a DMU A consumia 2 unidades e produzia 1 unidade. Para passar a operar na fronteira de produção, deverá reduzir o consumo em 50% e manter o atual nível de produção.

3.5.4 GRÁFICOS

DEA-SAED fornece diferentes opções para visualizar as fronteiras de produção e as fronteiras de eficiência considerando somente dois insumos e um produto ou somente dois produtos e um insumo. Também podem ser visualizados gráficos considerando diferentes retornos de escala, desde que as tecnologias de produção usem um insumo e um produto.

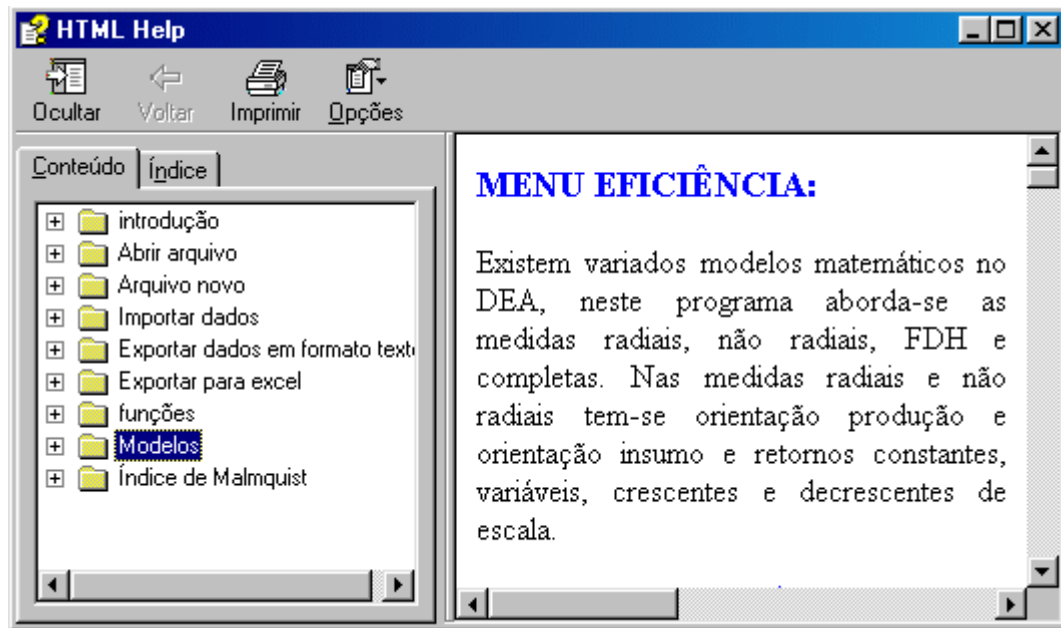
Figura 3.11 - Fronteira de produção considerando 1 insumo e 1 produto e retornos variáveis de escala



No capítulo IV são mostrados os demais gráficos disponíveis no DEA-SAED.

3.6 OPÇÕES DE AJUDA (HELP)

O aplicativo DEA-SAED fornece opções de ajuda para o usuário. Clicando no menu ajuda, abre-se uma nova janela de ajuda com padrão Windows.

Figura 3.12 - Exemplo de ajuda disponível no DEA-SAED

Desenvolveu-se o arquivo de ajuda através do programa HTML Help Workshop, da Microsoft. Este programa que pode ser obtido gratuitamente no *site* www.microsoft.com/workshop/author/htmlhelp/default.asp. O arquivo de ajuda usado no programa DEA-SAED é DEA.chm (gerado pelo HTML Help Workshop).

CAPITULO IV

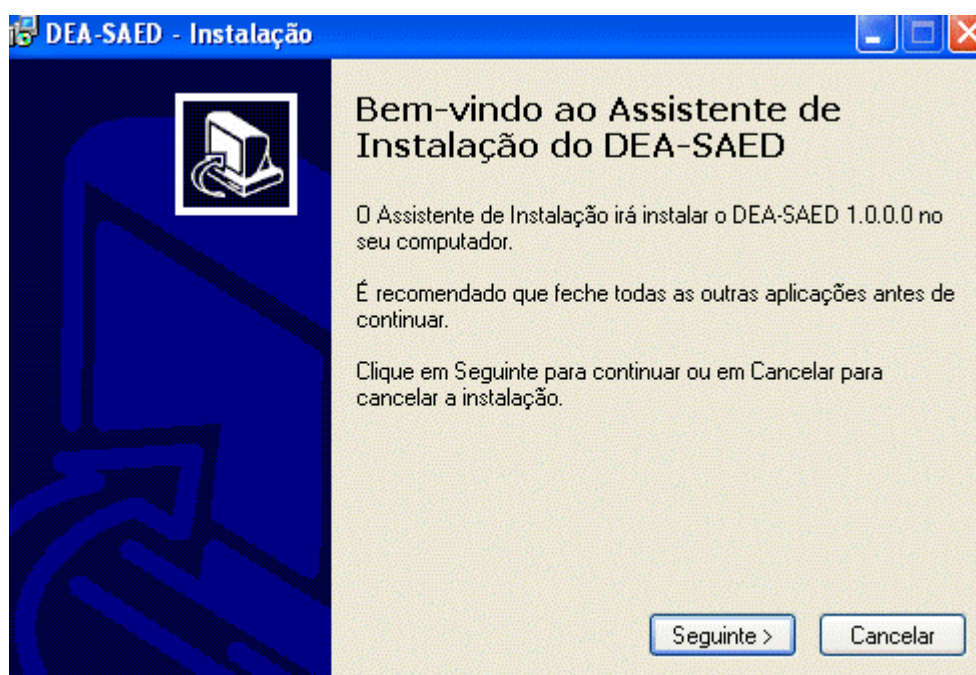
4 APLICAÇÃO DA FERRAMENTA DE AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA E DA PRODUTIVIDADE DEA-SAED

Para exemplificar o uso da ferramenta de análise da eficiência técnica e de produtividade, procurou-se aplicar DEA-SAED em diferentes exemplos. A última aplicação do sistema objetivou a avaliação dos tempos de processamento.

4.1 INSTALAÇÃO E INICIALIZAÇÃO DO APLICATIVO DEA-SAED

A instalação do programa DEA-SAED é simples. Basta executar arquivo `instala.exe`; e imediatamente a janela da figura abaixo será apresentada ao usuário.

Figura 4.1 - Janela de instalação do programa DEA-SAED



Os trâmites de instalação são iguais aos dos demais programas padrão Windows.

Figura 4.2 - Escolha do diretório para instalação de DEA-SAED

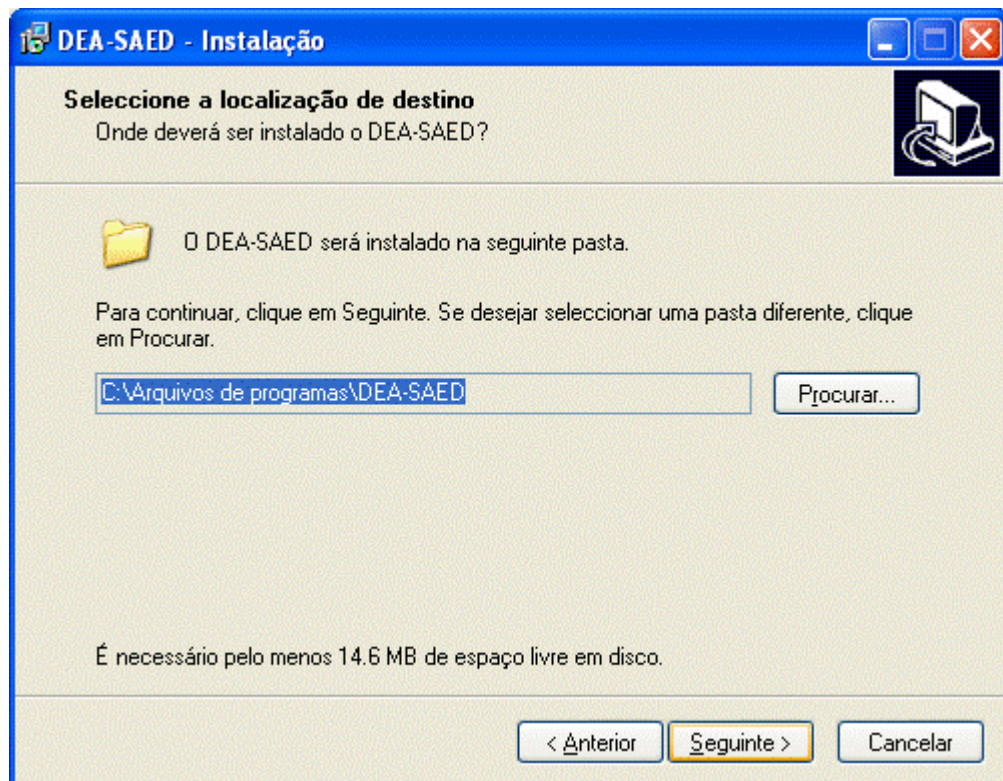


Figura 4.3 - Criando a pasta DEA-SAED no Menu Iniciar do Windows

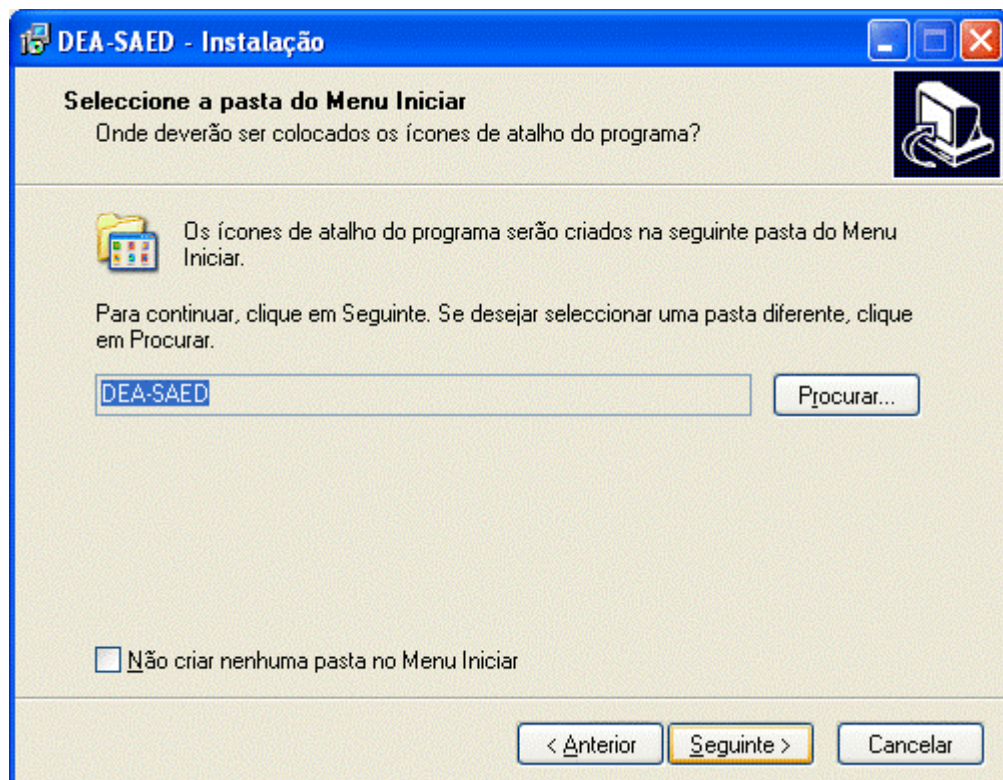


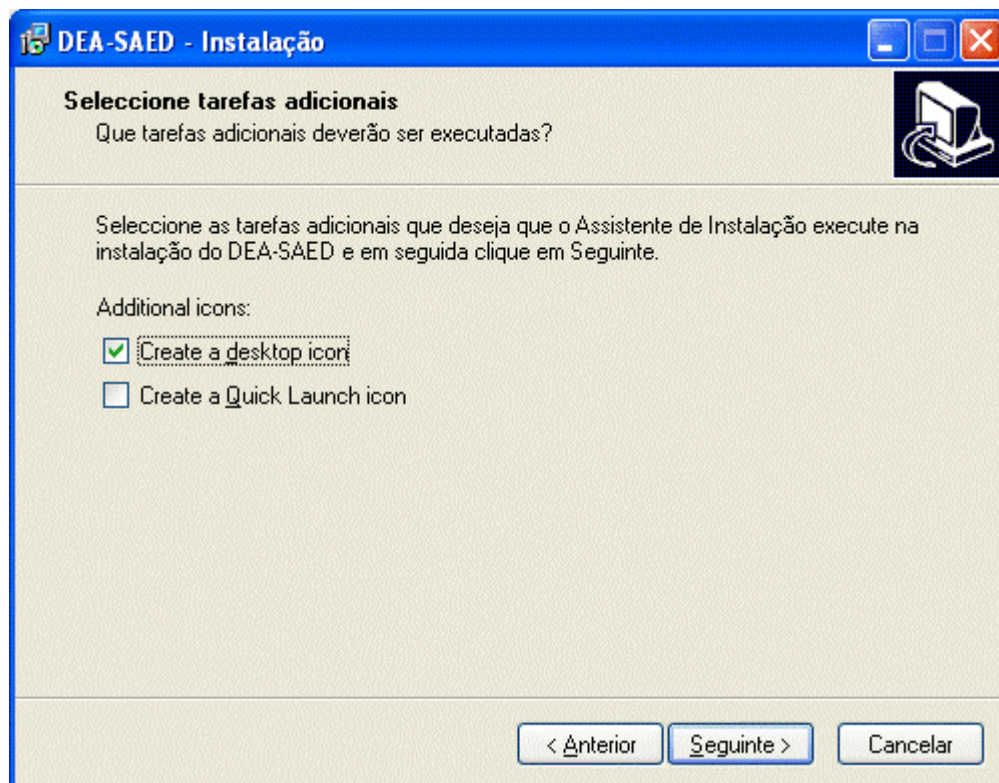
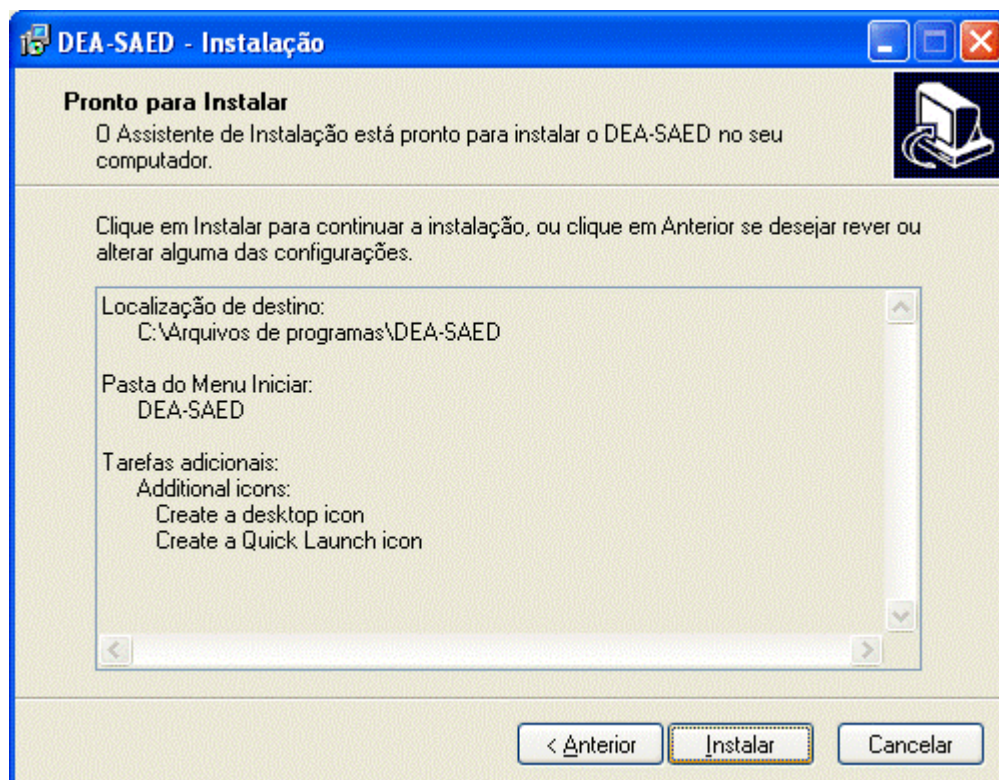
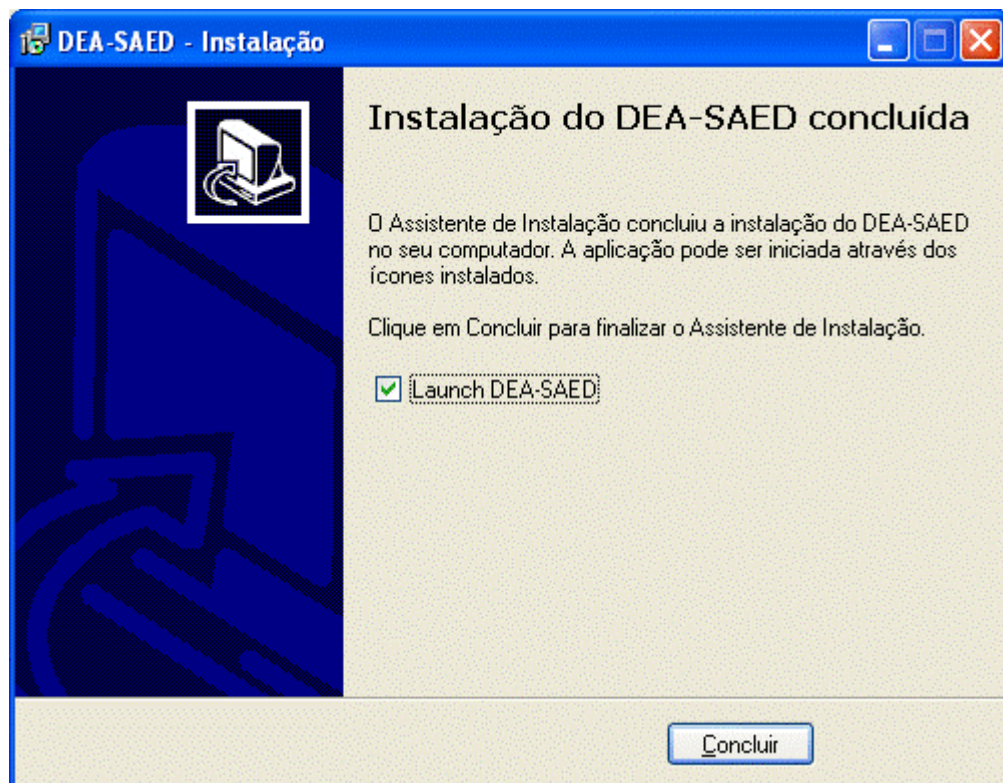
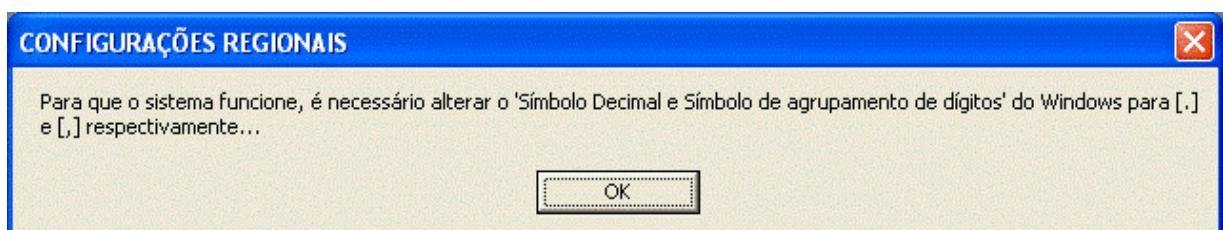
Figura 4.4 - Criando o ícone DEA-SAED no Desktop do Windows**Figura 4.5 - Informações adicionais sobre a instalação de DEA-SAED**

Figura 4.6 - Finalização da instalação de DEA-SAED



É importante salientar que na biblioteca Lp_solve o símbolo que especifica valores decimais é o ponto (.). Se nas configurações do Windows (Painel de Controle, Configurações Regionais) o símbolo que especifica valores decimais for a vírgula (,) então DEA-SAED altera o usuário (figura abaixo) que alterará este símbolo para ponto (.).

Figura 4.7 - Alteração do símbolo que especifica valores decimais



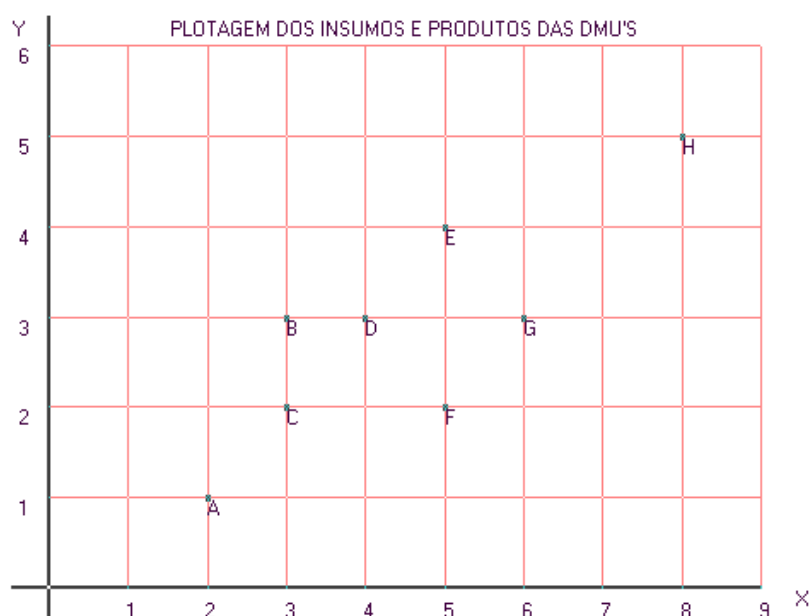
4.2 AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA DE 8 DMUS QUE CONSOMEM 1 INSUMO E PRODUZEM 1 PRODUTO

Na primeira aplicação de DEA-SAED, tem-se 8 DMUs cujas quantidades dos insumos e dos produtos são dadas na seguinte tabela.

Tabela 4.1 - Quantidades dos insumos e dos produtos de 8 DMUs

DMU/O	X_1	Y_1
A	2	1
B	3	3
C	3	2
D	4	3
E	5	4
F	5	2
G	6	3
H	8	5

A representação gráfica destes 8 planos de produção, através de DEA-SAED, é dada pela seguinte figura.

Figura 4.8 - Planos de produção das 8 DMUs

Para fins de exemplificação executou-se diferentes análises do conjunto de DMUs acima.

- i Eficiência técnica radial orientação insumo considerando retornos constantes de escala (RCE)
- ii Eficiência técnica radial orientação insumo considerando retornos variáveis de escala (RVE)
- iii Eficiência técnica radial orientação insumo considerando retornos não crescentes de escala (RNCE) e retornos não decrescentes de escala (RNDE)
- iv Eficiência técnica radial orientação produto considerando retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala

v Eficiência técnica não radial orientação produto

4.2.1 EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA (RCE)

Suponha-se que após DEA-SAED ler os dados, o usuário escolha o modelo DEA radial (projeção na fronteira de produção) orientação insumo considerando retornos constantes de escala (REC). Após esta escolha, DEA-SAED constrói o problema de programação linear (PPL) associado e o grava no arquivo texto `test1.lp`. O conteúdo do arquivo `test1.lp`, para a DMU A, é:

```
min: T1;
R1: 2T1 - 2L1 - 3L2 - 3L3 - 4L4 - 5L5 - 5L6 - 6L7 - 8L8 > 0;
R2: 1L1 + 3L2 + 2L3 + 3L4 + 4L5 + 2L6 + 3L7 + 5L8 > 1;
```

Em seguida `Lp_solve` acessa as informações contidas em `test1.lp` e determina a solução ótima do PPL.

Os resultados de θ (eficiência) e λ (referências) correspondentes à DMU A são armazenados numa matriz. O vetor s^- (folga dos insumos) é obtido a partir da primeira restrição ($X_o \theta_o - \lambda X - s^- = 0$) e s^+ é obtido da segunda restrição (fazendo $\lambda Y - s^+ = Y_o$). A variável dual da primeira restrição é v_1 (peso do insumo), e da segunda restrição é u_1 que é o peso do produto.

Na Figura 4.9 encontram-se os resultados da avaliação da eficiência técnica das 8 DMUs. Os resultados correspondentes a DMU A são mostrados na linha correspondente a A, e assim sucessivamente.

Figura 4.9 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RCE

Arquivo Editar Eficiência Índice de Malmquist Ajuda

DADOS DEA: C:\psolve\psolve_vb\test1.dea

Núm. de DMU'S 8 Núm. de INSUMOS 1 Núm. de PRODUTOS 1 Descrição COLOQUE UM

MODELO: RADIAL-INSUMO-RCE : tempo: 0.391 seg.

DMU\VO	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1
A	2	1	0.50000	00	0.33333	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	5.00E-01	5.00E-01
B	3	3	1.00000	00	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01
C	3	2	0.66667	00	0.66667	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01
D	4	3	0.75000	00	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.50E-01	2.50E-01
E	5	4	0.80000	00	1.33333	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.00E-01	2.00E-01
F	5	2	0.40000	00	0.66667	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.00E-01	2.00E-01
G	6	3	0.50000	00	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	1.67E-01	1.67E-01
H	8	5	0.62500	00	1.66667	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	1.25E-01	1.25E-01

Observando os resultados, verifica-se que a DMU B é referência para as demais (e é única). Para as DMUs ineficientes operarem na fronteira de produção, reduz-se o insumo proporcionalmente pelo fator θ ($\theta \leq 1$). Por exemplo, o plano de produção da DMU A pertence ao interior da tecnologia (não está na fronteira de produção). Reduzindo, o nível de consumo de A (igual a 2) para $\hat{X} = \theta X = (0,5000).(2) = 1$, o plano de produção desta passará a fazer parte da fronteira de produção.

Na próxima figura, encontra-se ilustrada a projeção da DMU A sobre a fronteira de produção.

Figura 4.10 - Visualização gráfica da projeção da DMU A sobre a fronteira de produção considerando RCE



O ordenamento com relação às eficiências é feito clicando no botão “Ordem”, e o resultado fornecido pelo programa encontra-se na figura abaixo.

Figura 4.11 - Ordenamento das 8 DMUs de acordo com a eficiência considerando RCE

Ordenamento das DMUs		
ORDEM	DMU	SCORE
1	B	1.00000
2	E	0.80000
3	D	0.75000
4	C	0.66667
5	H	0.62500
6	G	0.50000
6	A	0.50000
7	F	0.40000

Também pode ser analisada a ordenação ou ranqueamento das DMUs usando índice da eficiência técnica cruzada.

Figura 4.12 - Eficiência técnica cruzada das 8 DMUs considerando RCE**MODELO: RADIAL-INSUMO-RCE : tempo: 0.992 seg. - Referencia Cruzada**

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
B	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
C	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
D	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
E	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
F	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
G	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
H	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
Média = es	0.5	1.0	0.667	0.75	0.8	0.4	0.5	0.625
Ms=	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Ordenando	1ª = B	2ª = E	3ª = D	4ª = C	5ª = H	6ª = A	7ª = G	8ª = F

O ordenamento acima casualmente coincidiu com o ordenamento feito a partir da eficiência técnica.

4.2.2 EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS VARIÁVEIS DE ESCALA (RVE)

O PPL dual para a DMU A com projeção orientação insumo na fronteira de produção considerando retornos variáveis de escala é:

min: T1;

R1: $2T1 - 2L1 - 3L2 - 3L3 - 4L4 - 5L5 - 5L6 - 6L7 - 8L8 > 0$;

R2: $1L1 + 3L2 + 2L3 + 3L4 + 4L5 + 2L6 + 3L7 + 5L8 > 1$;

R3: $L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 = 1$;

Os valores das variáveis (primais e duais) estão na linha correspondente a da DMU A (figura abaixo).

Figura 4.13 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RVE

MODELO: RADIAL-INSUMO-RVE : tempo: 0.609 seg.

DMU\i	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1	Uo
A	2	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	5.00E-01	0.00E+00	-1.00E+00
B	3	3	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01	0.00E+00
C	3	2	0.833	0.500	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3.33E-01	1.67E-01	-5.00E-01
D	4	3	0.750	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.50E-01	2.50E-01	0.00E+00
E	5	4	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.00E-01	4.00E-01	6.00E-01
F	5	2	0.500	0.500	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.00E-01	1.00E-01	-3.00E-01
G	6	3	0.500	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.67E-01	1.67E-01	0.00E+00
H	8	5	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	1.25E-01	3.75E-01	8.75E-01

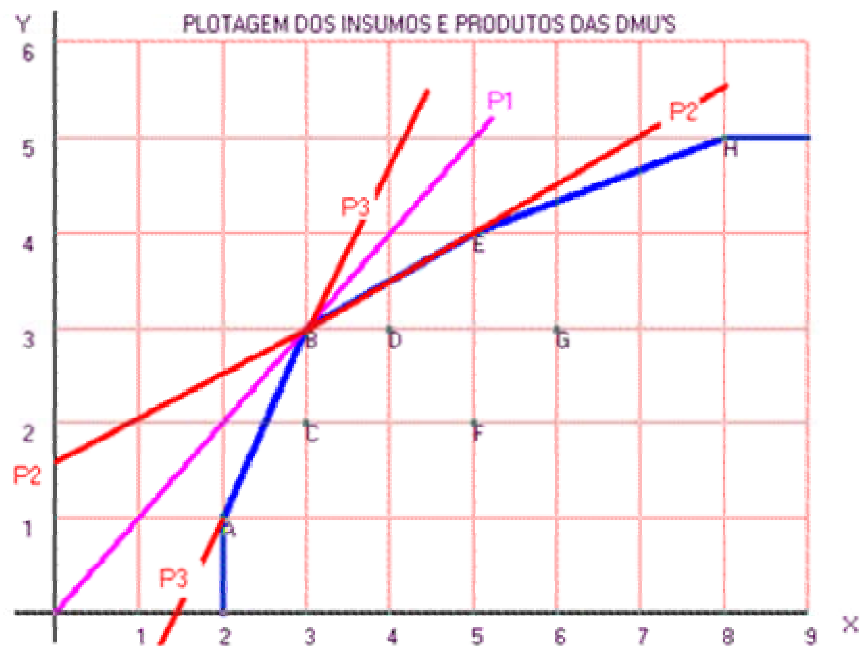
Comparando os resultados com RCE, tem-se 4 *benchmarks* (A, B, E e H). Essa diferença em relação ao RCE ocorre devido à inclusão da convexidade da combinação linear dos lambdas¹¹. As DMUs C e F têm como referência A e B, e as DMUs G e D têm como referência a DMU B.

No programa DEA-SAED, a variável dual da restrição de convexidade é denotada por u_0 .

Observando a Figura 4.14, as DMUs contidas no hiperplano P1 (nesse caso uma reta) operam sob retornos constantes de escala, e as DMUs pertencentes ao hiperplano P2 operam na condição de retornos de escala decrescentes. Já as DMUs do hiperplano P3 operam com retornos crescentes de escala.

¹¹ $\sum \lambda = 1$.

Figura 4.14 - Representação gráfica da fronteira de produção e dos hiperplanos considerando RVE



Do PPL primal tem-se que para a DMU A $\theta = UY - u_0 = 0.1 - (-1) = 1$. Neste caso o cálculo do índice de eficiência técnica desta depende exclusivamente do intercepto (u_0). Por isso alguns pesquisadores ressaltam a importância do uso de modelos DEA com restrição aos pesos.

4.2.3 EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS NÃO CRESCENTES DE ESCALA (RNCE) E RETORNOS NÃO DECRESCENTES DE ESCALA (RNDE)

No modelo radial orientação insumo com retornos não crescentes de escala obteve-se os seguintes resultados:

Figura 4.15 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RNCE

Arquivo Editar Eficiência Índice de Malmquist Ajuda

DADOS DEA: C:\psolve\psolve_vb\test1.dea

Núm. de DMU'S8Núm. de INSUMOS1Núm. de PRODUTOS1DescriçãoCOLOQUE UM TITULO AQUI

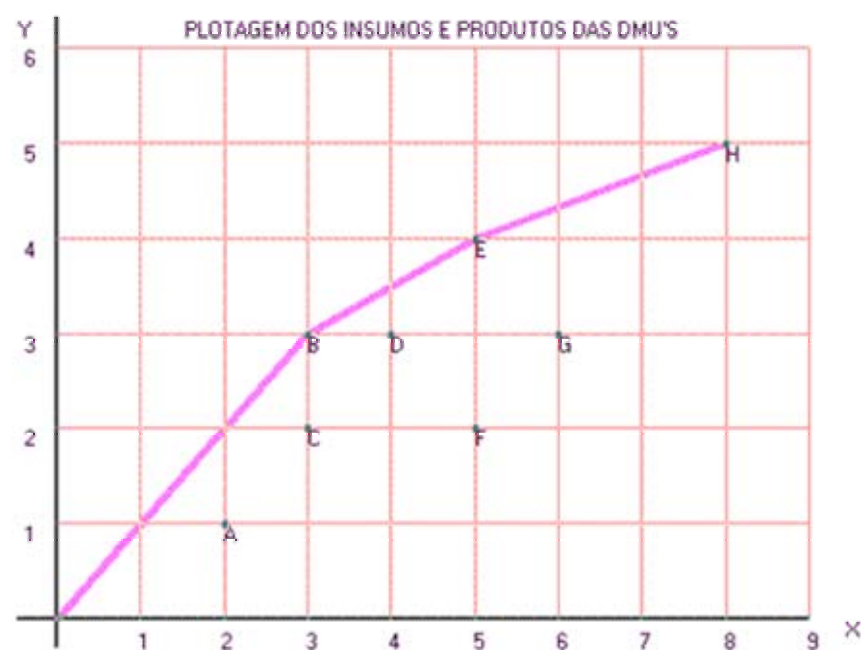
MODELO: RADIAL-INSUMO-RNCE : tempo: 0.441 seg.

DMU\O	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1	Uo
A	2	1	0.50000	00	0.33333	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	5.00E-01	5.00E-01	0.00E+00
B	3	3	1.00000	00	1.00000	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01	0.00E+00
C	3	2	0.66667	00	0.66667	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01	0.00E+00
D	4	3	0.75000	00	1.00000	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	2.50E-01	2.50E-01	0.00E+00
E	5	4	1.00000	00	0.00000	00	00	1.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	2.00E-01	4.00E-01	6.00E-01
F	5	2	0.40000	00	0.66667	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	2.00E-01	2.00E-01	0.00E+00
G	6	3	0.50000	00	1.00000	00	00	0.00000	00	00	0.00000	0.000	0.000	1.67E-01	1.67E-01	0.00E+00
H	8	5	1.00000	00	0.00000	00	00	0.00000	00	00	1.00000	0.000	0.000	1.25E-01	3.75E-01	8.75E-01

Nota-se que os *benchmarks* são as DMUs B, E e H. O arquivo test1.lp para a DMU A contem o seguinte PPL

min: T1;
R1: $2T1 - 2L1 - 3L2 - 3L3 - 4L4 - 5L5 - 5L6 - 6L7 - 8L8 > 0$;
R2: $1L1 + 3L2 + 2L3 + 3L4 + 4L5 + 2L6 + 3L7 + 5L8 > 1$;
R3: $L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 < 1$;

Figura 4.16 - Fronteira de produção considerando retornos não crescentes de escala (RNCE)



Os resultados, se o usuário procedeu uma avaliação da eficiência técnica das 8 DMUs considerando retornos não decrescentes de escala-RNDE e projetando (orientação insumo) os planos de produção destas DMUs sobre a fronteira de produção, encontram-se na figura abaixo.

Figura 4.17 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo na fronteira de produção com RNDE

Arquivo Editar Eficiência Índice de Malmquist Ajuda

DADOS DEA: C:\psolve\psolve_vb\test1.dea

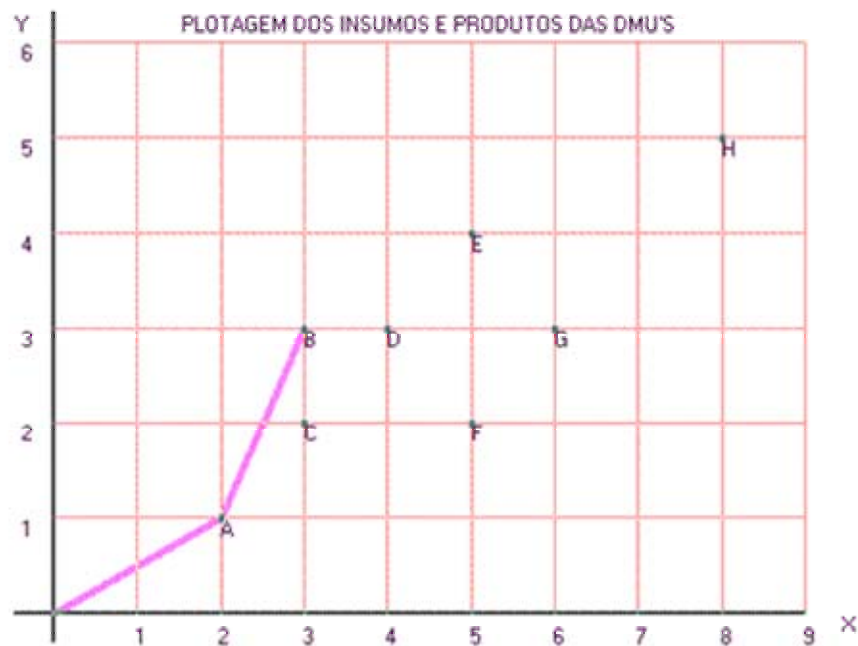
Núm. de DMU'S8Núm. de INSUMOS1Núm. de PRODUTOS1DescriçãoCOLOQUE UM TITULO

MODELO: RADIAL-INSUMO-RNDE : tempo: 0.391 seg.

DMUVO	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1	Uo
A	2	1	1.00000	1.00000	0.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	5.00E-01	0.00E+00	-1.00E+00
B	3	3	1.00000	0.00000	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01	0.00E+00
C	3	2	0.83333	0.50000	0.50000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	3.33E-01	1.67E-01	-5.00E-01
D	4	3	0.75000	0.00000	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.50E-01	2.50E-01	0.00E+00
E	5	4	0.80000	0.00000	1.33333	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.00E-01	2.00E-01	0.00E+00
F	5	2	0.50000	0.50000	0.50000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	2.00E-01	1.00E-01	-3.00E-01
G	6	3	0.50000	0.00000	1.00000	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	1.67E-01	1.67E-01	0.00E+00
H	8	5	0.62500	0.00000	1.66667	00	00	00	00	00	00	0.000	0.000	1.25E-01	1.25E-01	0.00E+00

Neste modelo DEA (com RNDE) tem-se dois *benchmarks* (DMUs A e B) e isto também pode ser visualizado utilizando o menu “Gráfico”.

Figura 4.18 - Fronteira de produção considerando retornos não decrescentes de escala (RNDE)



4.2.4 EFICIÊNCIA TÉCNICA RADIAL ORIENTAÇÃO PRODUTO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA (RCE) E RETORNOS VARIÁVEIS DE ESCALA

Neste caso o arquivo `test1.lp` para a DMU A contém o seguinte PPL:

max: T1;

R1: $2L1 + 3L2 + 3L3 + 4L4 + 5L5 + 5L6 + 6L7 + 8L8 < 2$;

R2: $1L1 + 3L2 + 2L3 + 3L4 + 4L5 + 2L6 + 3L7 + 5L8 - 1T1 > 0$;

Neste PPL não existe a restrição de convexidade.

No modelo DEA orientação produção, a projeção sobre a fronteira ocorre no sentido vertical. Deste modo o índice de eficiência técnica é o escalar que expande os níveis de produção mantendo fixos os atuais níveis de consumo.

Figura 4.19 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação produto na fronteira de produção com RCE

MODELO: RADIAL-PRODUTO-RCE : tempo: 0.488 seg.

DMU	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1
A	2	1	2.00000	000	0.66667	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	1.00E+00	1.00E+00
B	3	3	1.00000	000	1.00000	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01
C	3	2	1.50000	000	1.00000	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	5.00E-01	5.00E-01
D	4	3	1.33333	000	1.33333	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01
E	5	4	1.25000	000	1.66667	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	2.50E-01	2.50E-01
F	5	2	2.50000	000	1.66667	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	5.00E-01	5.00E-01
G	6	3	2.00000	000	2.00000	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	3.33E-01	3.33E-01
H	8	5	1.60000	000	2.66667	000	000	000	000	000	000	0.000	0.000	2.00E-01	2.00E-01

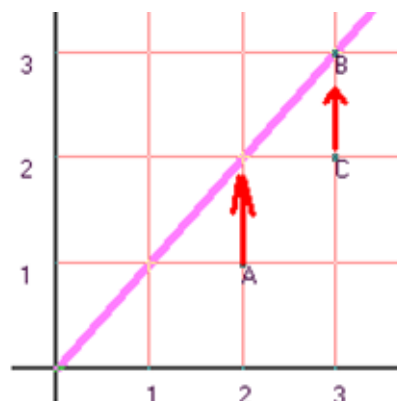
Conforme era esperado, os índices de eficiência são maiores ou iguais à unidade, indicando a proporção de expansão da produção para projetar as DMUs sobre a fronteira. A DMU eficiente tem índice de eficiência igual à unidade e a única nesta condição é a DMU B. Esta DMU portanto, é a única *benchmark* para as demais; que devem se adaptar à tecnologia de produção dominada por B.

A projeção de A sobre a fronteira é dada por.

$$\hat{x}_A = x_A = 2 = 2$$

$$\hat{y}_A = \theta_A y_A = 2 \times 1 = 2$$

Figura 4.20 - Projeção orientação produto das DMU A e C sobre a fronteira de produção



Os resultados da aplicação do modelo DEA RVE orientação produto apresentou os seguintes resultados.

Figura 4.21 - Resultados da avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs considerando a projeção orientação produto na fronteira de produção com RVE

Núm. de DMU'S

8

Núm. de INSUMOS

1

Núm. de PRODUTOS

1

Descrição:

COLOQUE UM TITULO AQUI

MODELO: RADIAL-PRODUTO-RVE

:

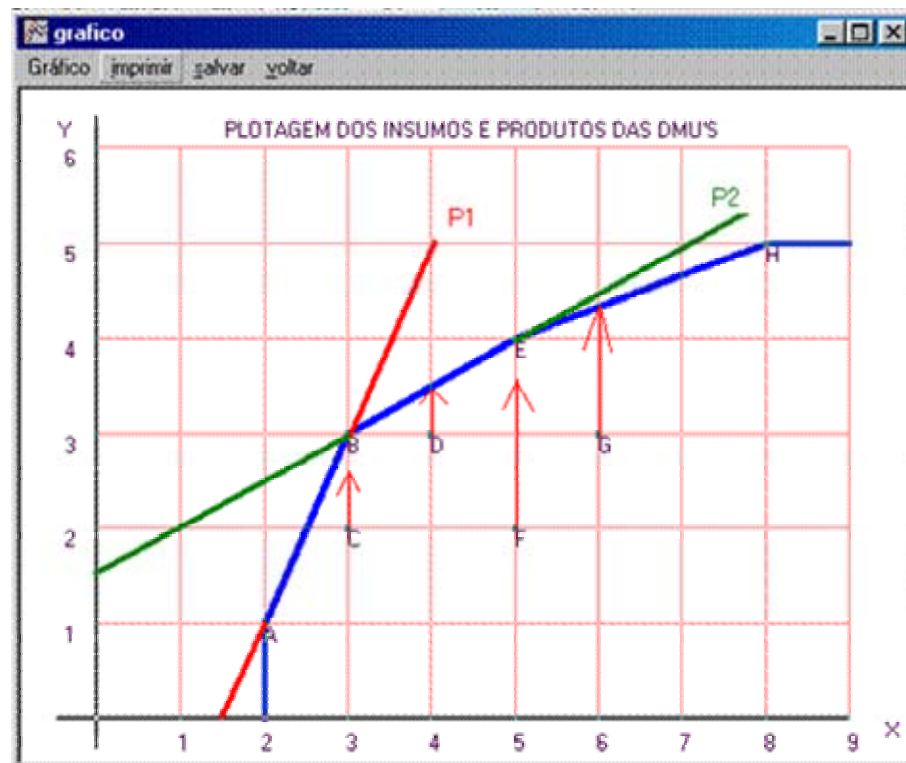
tempo: 1.258 seg.

DMU/NO	INS1	PRO1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	S1-	S1+	V1	U1	Vo
A	2	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.00E+00	1.00E+00	-3.00E+00
B	3	3	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.67E-01	3.33E-01	5.00E-01
C	3	2	1.500	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.50E-01	5.00E-01	7.50E-01
D	4	3	1.167	0.000	0.500	0.000	0.000	0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.67E-01	3.33E-01	5.00E-01
E	5	4	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.25E-01	2.50E-01	3.75E-01
F	5	2	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.50E-01	5.00E-01	7.50E-01
G	6	3	1.444	0.000	0.000	0.000	0.000	0.667	0.000	0.000	0.333	0.000	0.000	1.11E-01	3.33E-01	7.78E-01
H	8	5	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	6.67E-02	2.00E-01	4.67E-01

A projeção da DMU D na fronteira de produção é uma combinação linear da DMU B e E, ou seja, é igual a $\lambda_B (3;3) + \lambda_E (5;4) = (4;3,5)$.

A variável v_o é a dual da restrição de convexidade.

Figura 4.22 - Representação gráfica da fronteira de produção, dos hiperplanos e da projeção orientação produto sobre a fronteira de considerando RVE



Na Figura 4.22 observa-se os planos de produção desenvolvidos pelas 8 DMUs, bem como a projeção das ineficientes na fronteira. De acordo com os resultados de DEA-SAED, a DMU A opera numa região onde os retornos de escala são crescentes.

4.2.5 EFICIÊNCIA TÉCNICA ORIENTAÇÃO INSUMO/PRODUTO

Avaliou-se também as 8 DMUs considerando a projeção orientação insumo/produto sobre a fronteira de eficiência. Ou seja, se avaliou a eficiência técnica com os modelos DEA Aditivo, SBM e RAM. Os resultados encontram-se descritos na tabela abaixo.

Tabela 4.2 - Índices da eficiência técnica de 8 DMUs considerando as medidas DEA SBM e RAM

DMUIO	INS1	PRO1	Aditivo	SBM	RAM
A	2	1	1,00	0,50	1,00
B	3	3	1,00	1,00	1,00
C	3	2	--	0,66	0,87
D	4	3	--	0,75	0,91
E	5	4	1,00	0,80	1,00
F	5	2	--	0,40	0,70
G	6	3	--	0,50	0,75
H	8	5	1,00	0,62	1,00

Vale ressaltar que ao avaliar a eficiência técnica de um conjunto de DMUs usando o modelo SBM em DEA-SAED, deve-se considerar retornos constantes de escala. Se o modelo RAM for usado, deve-se considerar retornos variáveis de escala.

4.3 AVALIAÇÃO DA EFICIÊNCIA TÉCNICA DE 8 DMUS QUE CONSOMEM 2 INSUMOS E PRODUZEM 1 PRODUTO

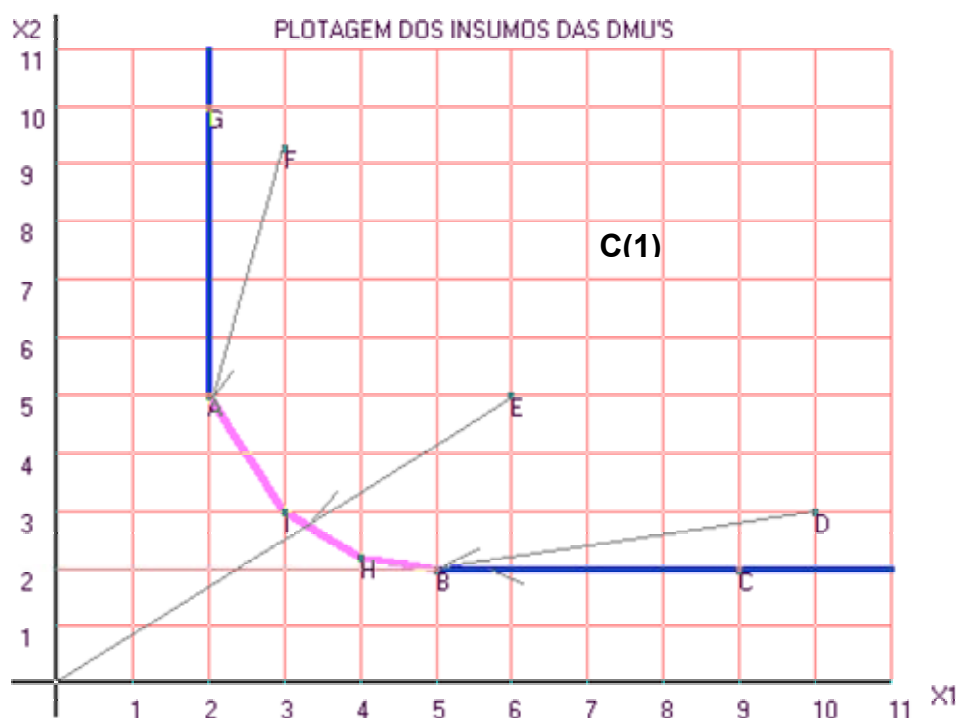
A segunda aplicação consiste na avaliação da eficiência técnica de 8 DMUs. Cada uma das DMUs produz um único produto (igual à unidade para cada DMU) a partir do consumo de 2 insumos. As quantidades dos insumos são dadas na seguinte tabela.

Tabela 4.3 - Quantidades dos insumos das 8 DMUs

DMU/O	X_1	X_2
A	2	5
B	5	2
C	9	2
D	10	3
E	6	5
F	3	9.3
G	2	10
H	4	2.2
I	3	3

A representação gráfica do conjunto consumo $C(1)$ considerando retornos constantes de escala é dada pela Figura 4.23. O conjunto $C(1)$ limitado abaixo e a esquerda pela fronteira de produção, é a coleção de todos os planos de produção (viáveis) que produzem uma unidade do produto.

Figura 4.23 - Conjunto consumo $C(1)$ considerando retornos constantes de escala



O limite inferior e da lateral esquerda do conjunto $C(1)$ é a fronteira de produção considerando retornos constantes de escala. A fronteira de eficiência (Pareto-Koopmans) é dada pelos segmentos $\overline{AI}$, $\overline{IH}$ e $\overline{HB}$.

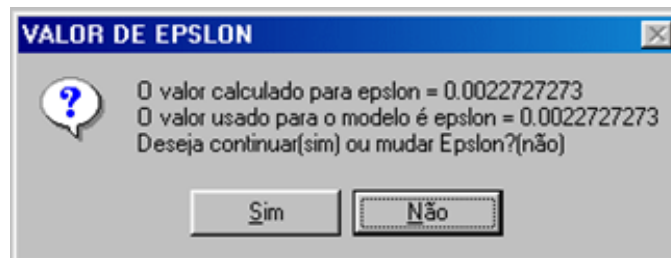
4.3.1 EFICIÊNCIA TÉCNICA NÃO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO CONSIDERANDO RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA

Se o usuário optar pelo modelo DEA não radial usando epsilon, então DEA-SAED faz o seguinte cálculo para definir o valor de epsilon:

$$\varepsilon = \frac{1}{10 \times \max_{m=1 \dots M} \left\{ \sum_{d=1}^D x_{dm} \right\}} = \frac{1}{10 \times 44} = 0,0022727273$$

Depois de calculado, DEA-SAED questiona se o usuário deseja manter o valor calculado para epsilon ou não (Figura 4.24).

Figura 4.24 - Definição do valor de epsilon



Os resultados da figura abaixo foram obtidos usando o valor de epsilon sugerido por DEA-SAED.

Figura 4.25 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando a projeção orientação insumo na fronteira de eficiência com RCE

MODELO: NÃO RADIAL-EPSILON-INSUMO-RCE : tempo: 0.500 seg.

DMU\VC	X1	X2	Y1	θ	λ_1	λ_2	λ_8	λ_9	S1-	S2-	S1+	V1	V2	U1
A	2	5	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.22E-01	1.11E-01	1.00E+00
B	5	2	1	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	6.67E-02	3.33E-01	1.00E+00
C	9	2	1	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	-4.000	0.000	0.000	2.27E-03	4.90E-01	9.91E-01
D	10	3	1	0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	-1.667	0.000	0.000	2.27E-03	3.26E-01	6.63E-01
E	6	5	1	0.551	0.000	0.000	0.306	0.694	0.000	0.000	0.000	8.16E-02	1.02E-01	5.51E-01
F	3	9.3	1	0.667	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.200	0.000	3.26E-01	2.27E-03	6.64E-01
G	2	10	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-5.000	0.000	4.89E-01	2.27E-03	9.89E-01
H	4	2.2	1	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.48E-01	1.85E-01	1.00E+00
I	3	3	1	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	2.22E-01	1.11E-01	1.00E+00

Da Figura 4.25 tem-se que as DMUs C e G não são eficientes considerando o modelo não radial (apesar de estarem localizadas na fronteira de produção). As duas DMUs apresentam folgas nos insumos. As projeções sobre a fronteira de eficiência encontram-se representadas graficamente na Figura 4.23.

No caso do usuário não aceitar o valor de epsilon sugerido por DEA-SAE, poderá pressionar o botão “Não”. Assim, o usuário poderá digitar outro valor para epsilon (Figura 4.26).

Figura 4.26 - Mudança do valor de epsilon

Epsilon calculado(0.002272727273) atribuir = > [Válido para o modelo Não Radial com
Após editar a célula de insumos ou produtos, aperte a tecla ENTER para confirmar.

0.002272727273

Após mudar o valor de epsilon, deve-se pressionar Enter para continuar.

O usuário poderia ter feito a avaliação usando o modelo DEA duas fases.

4.3.2 MODELO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO COM RESTRIÇÃO AOS PESOS

Supondo que o usuário deseja incorporar no modelo DEA com RCE informações relacionadas a importâncias dos dois insumos. Por exemplo, suponha-se que deseja incluir a informação de que a relação entre os pesos dos dois insumos esteja no intervalo [2, 3]. Esta informação é traduzida em termos da inequação

$$2 \leq \frac{v_2}{v_1} \leq 3.$$

O usuário informa esta relação preenchendo os dados solicitados na figura abaixo.

Figura 4.27 - Inclusão de relação entre pesos dos insumos

L1i	<= vi/v1 <=	U1i
2	<= v2/v1 <=	3

continuar com o processo

Para digitar infinito = ALT 0165

No caso do usuário digitar um limite igual ao infinito (∞) ou nulo, DEA-SAE ignora a restrição. Após digitar os limites inferior e superior para cada relação, o usuário deverá pressionar a tecla Enter.

A relação acima não é linear e será substituída pelas restrições lineares

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &\leq 0 \\ v_2 - 3v_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Fazendo $Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (veja seção 3 do capítulo 2 - modelo 4), o PPL (dual)

gravado no arquivo `test2.lp` (para a DMU A) e utilizado pelo `Lp_solve` é

min: T1;

R1: 2T1 - 2L1 - 5L2 - 9L3 - 10L4 - 6L5 - 3L6 - 2L7 - 4L8 - 3L9 + 2P1-3P2 > 0;

R2: 5T1- 5L1- 2L2- 2L3 - 3L4- 5L5- 9.3L6- 10L7- 2.2L8- 3L9-1P1+ 1P2 > 0;

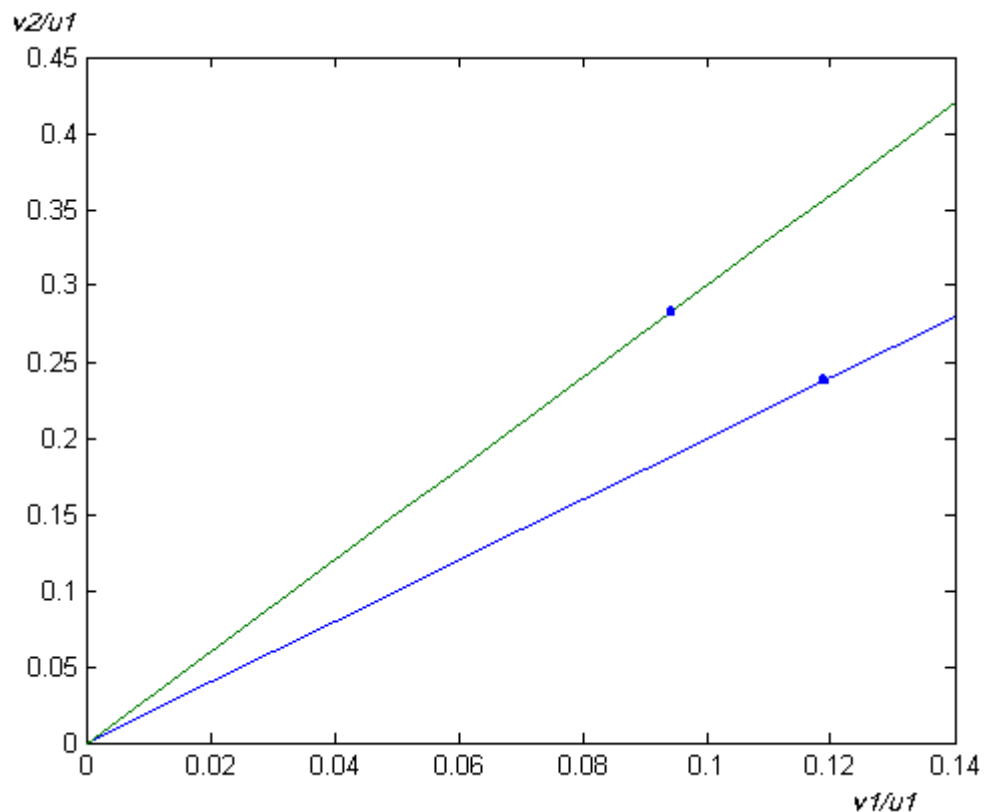
R3: 1L1 + 1L2 + 1L3 + 1L4 + 1L5 + 1L6 + 1L7 + 1L8 + 1L9 > 1;

Após resolvidos os problemas de programação linear associados a cada DMU, obteve-se o seguinte conjunto de pesos ótimos.

Tabela 4.4 - Conjunto de pesos ótimos

v1	v2	u1	v1/u1	v2/u1	v2/v1
0.08330	0.16700	0.70000	0.11900	0.23857	2.00000
0.09090	0.27300	0.96400	0.09429	0.28320	3.00000
0.06670	0.20000	0.70700	0.09434	0.28289	3.00000
0.05260	0.15800	0.55800	0.09427	0.28315	3.00000
0.06250	0.12500	0.52500	0.11905	0.23810	2.00000
0.04630	0.09260	0.38900	0.11902	0.23805	2.00000
0.04550	0.09090	0.38200	0.11911	0.23796	2.00000
0.09430	0.28300	1.00000	0.09430	0.28300	3.00000
0.11100	0.22200	0.93300	0.11897	0.23794	2.00000

Observando a última coluna, verifica-se que a relação entre os pesos dos insumos foi atendida integralmente. As relações $v1/u1$ e $v2/u2$ foram utilizadas para representar a região de segurança (Figura 4.28).

Figura 4.28 - Região de segurança

Todos os pares de pontos compreendidos entre as duas linhas constituem a região de segurança [Cooper, Seiford, Tone, 2002, pg. 158].

4.3.3 MODELO RADIAL ORIENTAÇÃO INSUMO COM VARIÁVEIS INCONTROLÁVEIS

Em DEA-SAED, o usuário conta com modelos DEA nos quais pode incorporar a informação sobre insumos e/ou produtos incontroláveis. Suponha-se que o insumo x_2 esteja particularmente fora de controle e que o usuário escolheu no Menu “Eficiência” (de DEA-SAED) que deseja avaliar a eficiência técnica considerando esta particularidade. Em seguida é apresentada uma relação de possíveis variáveis não controláveis.

Figura 4.29 - Seleção dos insumos/produtos incontrolláveis

VAR. CONTROLÁVEIS

ITEM	INS/PROD	controlável?
1	X1	Sim
2	X2	Não
3	Y1	Sim

continuar com o processo

para mudar clique duas vezes na célula

Pressionando duas vezes o status de “controlável?” será alterado de Sim para Não ou vice versa.

O modelo dual para a DMU A utilizado por Lp_solve é

min: T1;

R1: $2L1 + 5L2 + 9L3 + 10L4 + 6L5 + 3L6 + 2L7 + 4L8 + 3L9 - 2T1 < 0$;

R2: $5L1 + 2L2 + 2L3 + 3L4 + 5L5 + 9.3L6 + 10L7 + 2.2L8 + 3L9 = 5$;

R3: $1L1 + 1L2 + 1L3 + 1L4 + 1L5 + 1L6 + 1L7 + 1L8 + 1L9 > 1$;

4.3.4 MODELO *FREE DISPOSAL HULL*-FDH ORIENTAÇÃO INSUMO

Analisando as eficiências técnicas das 8 DMUs a partir do modelo DEA FDH orientação insumo tem-se os seguintes resultados.

Figura 4.30 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando a projeção orientação insumo na fronteira de eficiência com FDH

Modelo FDH - INSUMO : tempo: 0.488 seg.

DMUVC	X1	X2	Y1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_7	λ_8	λ_9	S1-	S2-	S1+
A	2	5	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
B	5	2	1	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
C	9	2	1	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-4.000	0.000	0.000
D	10	3	1	0.667	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-5.000	-1.000	0.000
E	6	5	1	0.600	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-3.000	-2.000	0.000
F	3	9.3	1	0.667	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.000	-4.300	0.000
G	2	10	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-5.000	0.000
H	4	2.2	1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
I	3	3	1	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000

O modelo FDH pode ser executado através do algoritmo descrito no capítulo 2. Para as DMUs A e E tem-se

Passo 1: Procuram-se as prováveis referências com a seguinte condição: estritamente consumir menos ou igual e produzir igual ou mais. O resultado é um conjunto de DMUs chamado Lista. Por exemplo, analisando para a DMU A, percebe-se que todas consomem mais. Então pode afirmar-se que ela é eficiente e têm como referência ela mesma. Para a DMU E os que consomem estritamente menos ou igual e pertencem à lista são {A,B,E,H,I}. E a partir dessa lista obtém-se as frações.

Passo 2: para cada DMU da lista obtém-se a máxima fração dos insumos:

DMU A = { 2/6, 5/5 } max = { 5/5 }

DMU B = { 5/6, 2/5 } max = { 5/6 }

DMU E = { 6/6, 5/5 } max = { 5/5 }

DMU H = { 4/6, 2.2/5 } max = { 4/6 }

DMU I = { 3/6, 3/5 } max = { 3/5 }

O resultado é um subconjunto chamado FRACMAX = { 5/5, 5/6, 5/5, 4/6, 3/5 }

Passo 3: A eficiência da DMU E é calculada selecionando-se o mínimo do subconjunto FRACMAX, que é $\min \{ 5/5, 5/6, 5/5, 4/6, 3/5 \} = 3/5 = 0.6$, e a referência será a DMU I porque 3/5 provém da DMU I (9). Então $\lambda_9 = 1$ e os outros λ são zeros.

Também poderia ter sido usado programação linear, e neste caso o PPL para a DMU I é:

min: T9;

R1: $3T9 - 2L1 - 5L2 - 9L3 - 10L4 - 6L5 - 3L6 - 2L7 - 4L8 - 3L9 > 0$;

R2: $3T9 - 5L1 - 2L2 - 2L3 - 3L4 - 5L5 - 9.3L6 - 10L7 - 2.2L8 - 3L9 > 0$;

R3: $1L1 + 1L2 + 1L3 + 1L4 + 1L5 + 1L6 + 1L7 + 1L8 + 1L9 > 1$;

R4: $L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 = 1$;

R5: $L1 < 1$;

R6: $L2 < 1$;

R7: $L3 < 1$;

R8: $L4 < 1$;

R9: $L5 < 1$;

R10: $L6 < 1$;

R11: $L7 < 1$;

R12: $L8 < 1$;

R13: $L9 < 1$;

int L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L9;

A limitação para uso do algoritmo ocorre quando níveis dos insumos e/ou produtos são nulos (ocorrendo frações indeterminadas). Não entanto, no modelo com programação linear a limitação é a variável binária. Outra dificuldade em relação ao uso do PPL é o tempo de execução: ao usar o algoritmo, o tempo de processamento foi de 0,488 segundos, enquanto que usando o PPL foi de 1,320 segundos. Apesar do tempo de processamento ter sido irrisório, este problema poderá se agravar quando o número de DMUs for significativamente maior.

4.3.5 MODELO ADITIVO

Analisando os resultados obtidos da aplicação do modelo Aditivo, tem-se os seguintes resultados.

Figura 4.31 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo Aditivo

MODELO: ADITIVO - tempo: 1.207 seg.

DMUVO	X1	X2	Y1	θ	λ_1	λ_2	λ_8	λ_9	S1-	S2-	S1+
A	2	5	1	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
B	5	2	1	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
C	9	2	1	--	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	4.00000	0.00000	0.00000
D	10	3	1	--	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	7.00000	0.00000	0.00000
E	6	5	1	--	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	3.00000	2.00000	0.00000
F	3	9.3	1	--	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	6.30000	0.00000
G	2	10	1	--	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	5.00000	0.00000
H	4	2.2	1	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
I	3	3	1	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000

A preocupação deste modelo não é calcular índices de eficiências, mas sim indicar quais são eficientes e apontar as folgas para projetar as DMUs sobre a fronteira de eficiência. Para que estas sejam eficientes as folgas s^- e s^+ devem ser nulas [Cooper, Seiford, Tone, 2002, p.92]. O modelo escrito por DEA-SAED para a DMU I é:

$$\max: S1 + S2 + SP1;$$

$$R1: 2L1 + 5L2 + 9L3 + 10L4 + 6L5 + 3L6 + 2L7 + 4L8 + 3L9 + S1 = 3;$$

$$R2: 5L1 + 2L2 + 2L3 + 3L4 + 5L5 + 9.3L6 + 10L7 + 2.2L8 + 3L9 + S2 = 3;$$

$$R3: 1L1 + 1L2 + 1L3 + 1L4 + 1L5 + 1L6 + 1L7 + 1L8 + 1L9 - SP1 = 1;$$

$$R4: L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 = 1;$$

4.3.6 MODELOS SBM E RAM

Considerando que o usuário deseja projetar as DMUs sobre a fronteira de eficiência reduzindo consumo e aumentando os níveis de produção, pode usar em DEA-SAED os modelos SBM (Figura 4.32) e RAM (Figura 4.33).

Figura 4.32 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo SBM

MODELO: COMPLETO SBM - tempo: 2.027 seg.

DMU/C	X1	X2	Y1	θ	λ_1	λ_2	λ_8	λ_9	S1-	S2-	S1+
A	2	5	1	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
B	5	2	1	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
C	9	2	1	0.778	0.000	1.000	0.000	0.000	-4.000	0.000	0.000
D	10	3	1	0.567	0.000	0.000	1.000	0.000	-6.000	-0.800	0.000
E	6	5	1	0.550	0.000	0.000	0.000	1.667	-1.000	0.000	0.667
F	3	9.3	1	0.602	1.500	0.000	0.000	0.000	0.000	-1.800	0.500
G	2	10	1	0.750	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-5.000	0.000
H	4	2.2	1	1.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
I	3	3	1	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000

Neste exemplo as DMUs com eficiência igual à unidade pertencem à fronteira de eficiência (Pareto-Koopmans). As DMUs C e G têm eficiências menores que a unidade. O PPL associado à DMU I é:

$$\text{min: } T9 - 0.1666667SI1 - 0.1666667SI2;$$

$$R1: T9 + 1SP1 = 1;$$

$$R2: 2L1 + 5L2 + 9L3 + 10L4 + 6L5 + 3L6 + 2L7 + 4L8 + 3L9 + SI1 - 3T9 = 0;$$

$$R3: 5L1 + 2L2 + 2L3 + 3L4 + 5L5 + 9.3L6 + 10L7 + 2.2L8 + 3L9 + SI2 - 3T9 = 0;$$

$$R4: 1L1 + 1L2 + 1L3 + 1L4 + 1L5 + 1L6 + 1L7 + 1L8 + 1L9 - SP1 - 1T9 = 0;$$

Figura 4.33 - Resultados da avaliação da eficiência técnica considerando o modelo RAM

MODELO COMPLETO RAM - tempo: 0.770 seg.																
DMU/VO	X1	X2	Y1	θ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	S1-	S2-	S1+
A	2	5	1	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B	5	2	1	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C	9	2	1	0.75	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-4.0	0.0	0.0
D	10	3	1	0.563	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-7.0	0.0	0.0
E	6	5	1	0.688	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	-3.0	-2.0	0.0
F	3	9.3	1	0.606	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	-6.3	0.0
G	2	10	1	0.688	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-5.0	0.0
H	4	2.2	1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
I	3	3	1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0

Uma particularidade que vale ser ressaltada no modelo RAM é que a função objetivo é igual a

$$\text{Minimize } \Gamma = 1 - \frac{1}{M+P} \left(\sum_{m=1}^M \frac{s_m^-}{R_m} + \sum_{p=1}^P \frac{s_p^+}{R_p} \right).$$

Entretanto, a biblioteca de otimização Lp_solve não aceita a inclusão da constante 1 sem que seja multiplicada por uma variável. Par contornar isto, implementou-se em DEA-SAED a função objetivo

$$\text{Maximize } \Gamma 1 = \frac{1}{M+P} \left(\sum_{m=1}^M \frac{s_m^-}{R_m} + \sum_{p=1}^P \frac{s_p^+}{R_p} \right)$$

e o índice da eficiência técnica é calculado, em seguida, por

$$\Gamma = 1 - \Gamma 1.$$

No exemplo estudado nesta seção, ocorre a situação em que a máxima diferença dos produtos é nula. Na função objetivo, então, não existe a segunda componente relativa aos produtos. Assim a função objetivo fica:

$$\text{Maximize } \Gamma 1 = \frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^M \frac{s_m^-}{R_m} \right)$$

pois a parcela $\left(\sum_{p=1}^P \frac{s_p^+}{R_p} \right)$ é indeterminada. A restrição relativa a s_p^+ também é ignorada

no modelo [Cooper, Park, Pastor, 1999, p.20].

O PPL utilizado por Lp_solve para a DMU I é

$$\text{max: } 6.25e-02S11 + 6.25e-02S12;$$

$$R1: 2L1 + 5L2 + 9L3 + 10L4 + 6L5 + 3L6 + 2L7 + 4L8 + 3L9 + SI1 = 3;$$

$$R2: 5L1 + 2L2 + 2L3 + 3L4 + 5L5 + 9.3L6 + 10L7 + 2.2L8 + 3L9 + SI2 = 3;$$

$$R4: L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L6 + L7 + L8 + L9 = 1;$$

4.4 AVALIAÇÃO DA PRODUTIVIDADE

Testou-se também DEA-SAED no cálculo de índices de produtividade através do Índices de Malmquist. Os dados foram extraídos do trabalho de C. Parkan obtidos¹² [Parkan, 1998]. Os dados originais encontram-se no anexo I. No total são 8 DMUs que consomem 6 insumos e produzem 1 produto. O número de períodos para a avaliação é de 18 meses. O tempo de processamento para efetuar todas as operações por DEA-SAED foi de 264,7 segundos.

Os dados relativos aos insumos e ao produto nos diferentes períodos de processamento podem ser digitados no DEA-SAED ou podem ser importados de um arquivo TXT que deve conter os dados conforme o seguinte padrão.

Figura 4.34 - Formato do arquivo de dados para cálculo dos índices de produtividade através do índice de Malmquist

		INS 1	...	INS M	PROD 1	...	PROD P
Período 1	DMU 1						
	...						
	DMU d						
	...						
	DMU D						
Período 2	DMU 1						
	...						
	DMU d						
	...						
	DMU D						
...	...	...	...	...	...	...	...
Período N	DMU 1						
	...						
	DMU d						
	...						
	DMU D						

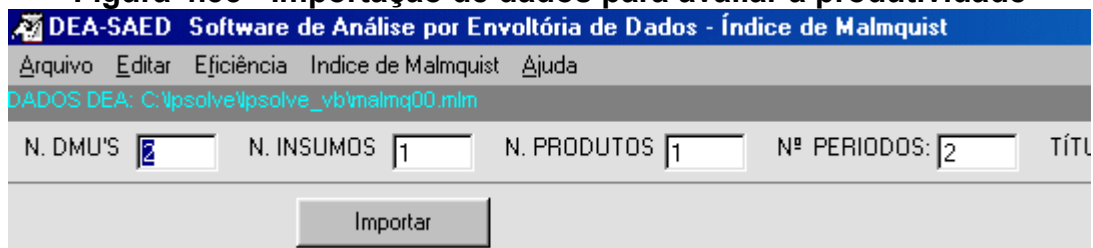
Então se o usuário deseja avaliar a produtividade de um conjunto de D DMUs para N períodos, deverá criar um único arquivo do tipo texto do seguinte modo: digitar inicialmente as quantidades dos insumos e dos produtos para todas as DMUs do primeiro período; digitar as quantidades dos insumos e dos produtos de

¹² <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/data/>, acesso em 16 de julho de 2004.

todas as DMUs para o segundo período e assim sucessivamente. Deste modo, o número de linhas da tabela deverá ser igual a $N \times D$. O mesmo processo é subentendido se o usuário digitar os dados no ambiente do DEA-SAED.

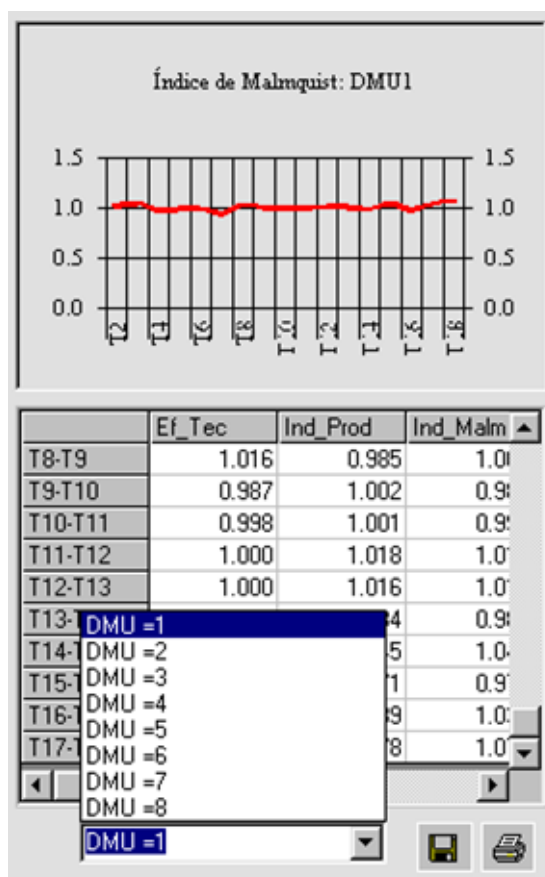
Para calcular o índice de Malmquist, o usuário deverá escolher em DEA-SAED o menu “Índice de Malmquist”. Na seqüência deverá clicar com o mouse no menu “Arquivo” e depois em “Novo”. Em seguida, se desejar digitar os dados, deverá informar o número de DMUs, de insumos, de produtos e de períodos (sempre pressionando a tecla Enter). Entretanto, se desejar importar os dados, deverá pressionar o botão “Importar” (figura abaixo).

Figura 4.35 - Importação de dados para avaliar a produtividade



A análise da produtividade poderá ser tanto orientação insumo como orientação produto. Dos resultados que DEA-SAED fornece, o usuário poderá analisar graficamente os índices de eficiência técnica da DMUS para cada período, os índices de produtividade (Índices de Malmquist) e as duas componentes (Mudança de eficiência e mudança de produtividade).

Figura 4.36 - Exemplo de gráfico disponível para análise da produtividade



Na figura acima se encontra o gráfico do Índice de Malmquist da DMU 1.¹³

4.5 AVALIAÇÃO DE TEMPOS DE PROCESSAMENTO EM DEA-SAED

Avaliou-se também o tempo total de processamento despendido por DEA-SAED no processo de construção até mostrar os resultados na tela do microcomputador. Para tanto, utilizou-se dados referentes a 52 DMUs (Universidades), cada uma consumindo 3 insumos e 7 produtos. Os dados encontram-se no anexo II

Este conjunto de 52 DMUs foi analisado com vários modelos para propiciar uma comparação do tempos do processamento (Tabela 4.5). Utilizou-se um microcomputador Pentium III com processador de 1700 e 256MB de memória RAM.

¹³ As DMUs são um conjunto de 8 farmácias que consomem 6 insumos e produzem 1 produto. O número de período é de 18 meses.

Tabela 4.5 - Tempos de processamento considerando diferentes modelos DEA

Modelo	tempo (segundos)
radial - insumo – RCE	6.92
radial - insumo - RVE	6.81
radial - insumo - Restrição a os pesos	6.15
radial - insumo - variáveis não controláveis	5.94
não radial - com epsilon - insumo -RCE	7.09
não radial - com epsilon - insumo -RVE	7.14
não radial - duas fases - insumo - RCE	12.58
não radial - duas fases - insumo - RVE	12.74
não radial – aditivo	7.25
completo SBM	7.03
completo RAM	6.92

CAPITULO V

5 CONCLUSÕES

A eficiência técnica possui papel fundamental quando se discute a performance de uma organização. Ela indica a habilidade da organização em transformar insumos em produtos. A mensuração da eficiência técnica originou-se de trabalhos desenvolvidos nos anos 50 por Koopmans e por Debreu [Färe, Grosskopf, Lovell, 1994, p.7]. Em 1957 Farrell desenvolveu o primeiro método de programação matemática não paramétrica para mensurar índices de ineficiência. Entretanto a técnica desenvolvida por Farrell permitia o uso de apenas um único produto.

Durante 30 anos o maior problema em se mensurar índices de eficiência técnica era a determinação desses, considerando múltiplos insumos e múltiplos produtos, até que em 1978 Charnes, Cooper e Rhodes-CCR formularam a abordagem *Data Envelopment Analysis* – DEA. Com o auxílio de programação matemática não paramétrica, DEA gera uma envoltória dos planos de produção observados. Todos os planos de produção pertencentes a esta envoltória, que é a fronteira de produção, são eficientes tecnicamente e os demais são ineficientes.

Após o trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes, várias outras medidas foram desenvolvidas, considerando diferentes retornos de escala, diferentes fronteiras e diferentes métodos de projeção.

O objetivo deste trabalho era o de desenvolver uma ferramenta computacional para análise da eficiência técnica e de produtividade baseada em DEA. Esta ferramenta, denominada de DEA-SAED deveria conter uma grande gama de ferramentas de análise e apresentar interface amigável com o usuário.

Neste capítulo serão delineadas algumas conclusões do desenvolvimento do trabalho e serão fornecidas sugestões para trabalhos futuros.

5.1 CONCLUSÕES

As conclusões pertinentes ao trabalho são:

- Nas aplicações do programa DEA-SAED os resultados numéricos foram iguais aos obtidos via outros aplicativos (EMS, DEA SOLVER, ONFRONT, GAMS, LINGO, MATLAB, EXCEL, QM)
- Os tempos de processamento em DEA-SAED são consideravelmente baixos.
- A biblioteca Lp_solve apresentou-se uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de programação linear tanto com variáveis contínuas como variáveis binárias.
- A manipulação dos dados e a análise dos resultados finais em DEA-SAED é consideravelmente simplificada em relação a todos os aplicativos utilizados para comparar os resultados (EMS, DEA SOLVER, ONFRONT, GAMS, LINGO, MATLAB, EXCEL, QM).
- Não há custo ao usuário que deseja utilizar DEA-SAED para proceder avaliações da eficiência técnica e de produtividade.
- <http://www.mat.ufpr.br/~volmir/DEA.html> é o site onde DEA-SAED pode ser obtido gratuitamente.
- Visual Basic e Lp_solve podem ser combinados para abordar diferentes problemas específicos de programação matemática.
- Em DEA-SAED não há limitação do número de DMUs, insumos ou produtos. O mesmo ocorre com a biblioteca Lp_solve.
- O uso de DEA-SAED para grandes quantidades de DMUs e de insumos e de produtos depende única e exclusivamente do desempenho do computador.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para trabalhos futuros são:

- Acrescentar modelos que incluam descarte forte e fraco dos insumos e/ou produtos.
- Acrescentar modelos não radiais com ϵ incluindo variáveis não controláveis, com restrição aos pesos.
- Acrescentar modelos para quantidades difusas.
- Acrescentar modelos para decomposição da eficiência técnica.
- Desenvolver programas para Linux e Java.
- Formatar o programa para o idioma Inglês com intuito de expandir o uso para a comunidade acadêmica internacional.
- Desenvolver um sistema computacional voltado à análise da eficiência técnica que possibilite a inclusão de informações específicas ou que o usuário crie seu próprio modelo DEA com considerável facilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADOLPHSON, D. L.; CORNIA, G.C.; Walters, L. C. *A Unifield Frame Work for classifying DEA Models*. Oper Res. H. E. Brodley, Pergamon Press PLC, p. 647-657, 1990, p.647-657.
- [2] ALI, A. I.; COOK, W. D.; SEIFORD, L. M. *Strict vs. Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis*. Management Science, M. 37, p. 733-738., 1991.
- [3] ALI, A. I. *Streamlined Computation for Data Envelopment Analysis*. European Journal of Operations Research. v. 64, n. 1, p. 61-67, 1993.
- [4] ALI, A. I.; SEIFORD, L. M. *Components of efficiency evaluation in data envelopment analysis*. European Journal of Operations Research. v. 80, p. 462-473, 1995.
- [5] AL-FARAY, T. N.; ALIDI, A. S.; BU-BSHAIT, K. A. *Evolution of Bank Branches by Means of Data Envelopment Analysis*. Int. J. Oper. Prod. Manage. v. 13, n.9, p. 45-52, 1993.
- [6] BANKER, R. D.; Gadh, V. M.; Gorr, W. L. *A monte Carlo Comparison of two Production Frontier Estimation Methods Corrected Ordinary Least Squares and Data Envelopments Analysis*. Int. J. Oper. Prod. Manage v. 67, n. 3, p. 332-343, 1993.
- [7] BANKER, R. D.; Charnes, A.; Cooper, W. W. et al *Constrained game Formulations e Interpretations for Data Envelopment Analysis*. European Journal of Operations Research, v. 40, n. 3, p. 299-308, 1989.
- [8] BANKER, R. D. *Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis a Statistical Foundation*. v. 39, n. 10, p. 1265-1273, 1993.
- [9] BANKER, R. D.; Charners; COOPER, W. *Some Models for Estimating Technical and Scale Ineficiencies in Data Envelopment Analysis*". Managment Science, n. 30, p. 1078-1092, 1984.
- [10] CHARNES, A.; ZLOBEC, S. *Stability of Efficiency Evaluation in Data Envelopment Analysis*. Zor, Methods Models oper Res. v. 33, n. 3, p. 167-79, 1984.
- [11] CHARNES, A.; COOPER, W. N.; DIECK-ASSOD, et al. *Efficiency Analysis of Medical Care Resources in the U. S. Army Health Services Command* Research Report, 1985.

- [12] CHARNES, A.; COOPER, W. N.; RHODES, E. *"Measuring the Efficiency of Decision Making Units"* European Journal of Operations Research, v. 2, n. 6, p. 429-44, 1978.
- [13] CHARNES, A.; ROUSSEAU, J. J.; SEMPLE, J. H. *Nonar Osimedeon Infinitesimals Transcendentals an Categorical Inputs in Linear Programming and Data Envelopment Analysis* Int. J. Syst. Science. (UK), v. 23, n.12, p. 2401-6, 1992
- [14] CHARNES, A.; ROUSSEAU, J. J.; SEMPLE, J. H. *An Effective Non-Archimedean Anti-Degeneracy/Cycling Linear Programming Method Especially For Data Envelopment Analysis and Like Models*. Ann. Oper. Res. (SWITZERLAND). v. 46-47, n. 1-4, p. 271-8, 1993.
- [15] CHARNES, A.; NEROLIC, L. *Sensitivity Analysis of the Additive Model in Data Envelopment Analysis*. European Journal. Oper. Res., v. 48, n. 3, p. 332-41, 1990.
- [16] CHANG. K. -P.; GUH, Y. -Y. *Linear Production Functions and The Data Envelopment Analysis*. European Journal Oper. Res. v. 52, n. 2, p. 215-23, 1991.
- [17] CHANG. K. *Efficiency Improvement In Data Envelopment Analysis*. European Journal Oper. Res. v. 73, n. 3, p. 487-94, 1994.
- [18] COOK, W. D.; KRESS, M. e SEIFORD, L. M. *On the use of ordinal Data Envelopment Analysis*. Journal Oper. Res. Soc (UK), v. 44, n. 2, p. 133-40, 1993.
- [19] COOK, W. D.; KRESS, M.; SEIFORD, L. M. *Prioritization Models for Frontier Decision Making Units in DEA*. European Journal, oper. res. (NETHERLANDS). v. 59, n. 2, p. 319-23, 1993.
- [20] COOK, W. D.; KRESS, M. *A Multiple Criteria Decision Model with Ordinal Preference Data*. European Journal Oper. Res (NETHERLANDS), v. 54, n. 2, p. 191-8, 1994.
- [21] COOPER, W. W.; SEIFORD L.M. TONE K. *Data Envelopment Analysis, A comprehensive Text with Models, Applications, References and Dea-Solver Software*. Kluwer Academic Publisher (Massachusetts), 2 ed., 2002.
- [22] FARREL, M. J. *The Measurement of Productive Efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society. Séries A, 120, part 3, p. 253-281., 1957.
- [23] FÄRE R., GROSSKOPF S., LOVELL K. *Production Frontiers*. Cambridge University Press, 1994.
- [24] FRIED, H. O.; KONOX LOVELL, C. A.; SHCIMIDT, S. S. *The Measurement of Productive Efficiency*. Oxford: University Press, 1993.
- [25] GOLANY, B.; ROLL Y. *An Application Procedure For DEA*. Omega (Uk), v. 17, n. 3, p. 237-50, 1989.
- [26] GOLANY, B.; PHILLIPS, F. Y.; ROSSEAU, J. J. *Models for Improved Effectiveness Based on DEA Efficiency Results*. IIE TRAS. (USA), v. 25, n. 6, p. 1-10, 1993.

- [27] GOLANY, B.; ROLL, Y.; RYBAK, D. *Efficiency of Power Plants in Israel by Data Envelopment Analysis*. IEEE Trans. ENG. Manage (USA). v. 41, n. 3, p. 291-301, 1994.
- [28] JERKE, N. *Visual Basic 6: The Complete Reference*. Osborne, McGraw-Hill-1999.
- [29] KAO, C. ; YANG, Y. C. *Reorganization of Forest Districts on Efficiency Measurement*. European Journal of. Operations Research. v. 58, p. 356-62, 1992.
- [30] KAO, C. *Evaluation of Junior Colleges of Technology the Taiwan Case*. European Journal of Operations Research. v. 72, n. 1, p. 43-51, 1994.
- [31] KOOPMANS, T. C. *Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*. In: *Advity Analysis of Production an Allocation*, T.C. Koopmans ed. Wiley, New York, 1951.
- [32] LANZER, E. A.; TORESAN, L.; STURION, L. *A Estabilidade dos Escores de Eficiência em DEA com Diferentes Graus de Limitação às Variações dos Pesos*. Congresso de Pesquisa Operacional. Vitória-ES, Anais, 1995.
- [33] LANZER, E. A. *Programação Linear: Conceitos e Aplicações*. 2 ed. Rio de Janeiro, IPEA/INPES, 1988.
- [34] LOVELL, K.A.C. *Production Frontier and Productive Efficiency*. New York, Oxford University Press. 1993.
- [35] LAPA Jair. *Produtividade, Eficiência e DEA (Data Envelopment Analysis) - Anotações*, Reunião Regional da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. Florianópolis, SC 2003.
- [36] PEREIRA D. Edson. *Microsoft Visual Basic.net para Programadores*. São Paulo, Makron Books, 2002.
- [37] PEREIRA F.M. *Mensuramento da eficiência Multidimensional utilizando Análise de Envelopamento de Dados revisão da Teoria e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Florianópolis, UFSC, 1995, 64p.
- [38] PETERSON, N. C. *Data Envelopment Analysis on a Relaxed Set of Assumptions*. Manage. Science (USA), v. 36, n. 3, p. 305-14, 1990.
- [39] PETROUTSOS, E. *Dominando o Visual Basic 6 - a Bíblia*. São Paulo, Makron Books, 1999.
- [40] PETROUTSOS, E.; HOUGH, K. *Visual Basic 6 Developer's Handbook*. Sybex, 1998.
- [41] PINHEIRO, A. C. *Technological Progress and Diffusion: Decomposing Total Productivity Growth in Brazilian Manufacturing*. Rio de Janeiro, IPEA, 1992. 40 p. Texto para Discussão.
- [42] ROOL, Y.; GOLANY, B.; SERAUSSY, D. *Measuring the Efficiency of Maintenance Units in the Israel Air Force*. Eur. J. Oper. Res. v. 43, n. 2, p. 136-42, 1989.
- [43] ROOL, Y.; COOK, W. D.; GOLANY, B. *Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis*. IIE. TRANS. (USA), v. 23, n. 1, p. 2-9, 1991.

- [44] ROLL, Y.; GOLANY, B. *Alternate Methods of Treating Factor weights in Dea*. Omega (Uk), v. 21, n. 1, p. 99-109, 1993.
- [45] RUSSEL, R.R. *Distance Functions in Consumer and Producer Theory*. Kluwer Academic Publisher, Boston/London/Dordrecht, 1998.
- [46] SEIFORD, L. M. *A Bibliography of Data Envelopment Analysis*. Massachussetts, University of Massachussetts, 1988.
- [47] SEIFORD, L. M. *A Bibliography of Data Envelopment Analysis. Version 5.0, Technical Report*. Massachussetts, University of Massachussetts, 1990.
- [48] SEIFORD, L. M. *Models Extensions, and Applications of Data Envelopment Analysis a Selected Reference Set*. Comput. Environ, Urban Syst. (Uk), v. 14, n. 2, p. 171-5, 1990.
- [49] SENGUPTA, J. K. *Data Envelopment With Maximum Correlation*. Int. J. Syst. SCI (Uk), v. 20, n. 11, p. 2085-93, 1989.
- [50] SENGUPTA, J. K. *Tests of Efficiency in Data Envelopment Analysis*. Comput. Oper. Res. (Uk), v. 17, n. 2, p. 123-32, 1990.
- [51] SENGUPTA, J. K. *The Influence Curve Approach in Data Envelopment Analysis*. Math. Program. B. (Netherlands). v. 52, n. 1, p. 147-66, 1991.
- [52] TULKENS, H, *Efficiency Dominance Analysis: A Frontier Free Efficiency Evaluation Method*. Paper presented at the Third European Workshop on Efficiency and Productivity Measurement held at the Center for Operations Research and Econometrics (CORE), Univesité Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, October 21-23, 1993.
- [53] WILHELM, V.E. *Análise da Eficiência Técnica em Ambiente Difuso*. Tese de doutorado em Engenharia de Produção, UFSC-SC, 2000.
- [54] WONG, Y. H. B.; BRASLEY, J. E. *Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis*. Journal of the Operacional Research Society, v. 41, n. 9, p. 829-35, 1990.
- [55] YIH-LONG CHANG; SUEYOSHI, T. *An Interactive Application of Data Envelopment Analysis in Microcomputers*. Comput. SCI, ECON. MANAGE. (NETHERLANDS), v. 4, n. 1, p. 51-64, 1991.

ANEXO I – DADOS USADOS NA AVALIAÇÃO DA PRODUTIVIDADE

Dados extraídos da página de Internet (16/07/2004): <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/data/parkan3.doc> com referência “C. Parkan, M.-L. Wu, Measuring the effect of a new point-of-sale system on the performance of drugstore operations, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong, 1998”

Table 1. Cost/revenue data for the eight drugstores between August 1992 and January 1994

<i>Drugstore 1</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	14895	114000	27000	1706000	145000	2006895	2150895
<i>Sep-92</i>	14559	114000	27620	1714000	113600	1983779	2116000
<i>Oct-92</i>	13478	114000	25900	1800000	110800	2064178	2220178
<i>Nov-92</i>	12840	114000	25900	1720000	111700	1984440	2128000
<i>Dec-92</i>	11845	114000	24590	1629000	111200	1890635	2046635
<i>Jan-93</i>	11420	121000	24670	1650000	106500	1913590	2071590
<i>Feb-93</i>	12752	121000	26500	1425800	109854	1695906	1802906
<i>Mar-93</i>	12864	121000	25780	1429000	110841	1699485	1905485
<i>Apr-93</i>	12395	121000	23500	1374000	108108	1639003	1840003
<i>May-93</i>	12843	121000	25540	1396000	107040	1662423	1878423
<i>Jun-93</i>	12988	121000	22700	1424000	94900	1675588	1887588
<i>Jul-93</i>	14387	121000	22130	1468000	94900	1720417	1950417
<i>Aug-93</i>	15375	121000	22460	1529000	95400	1783235	2012235
<i>Sep-93</i>	14836	121000	20570	1501000	96700	1754106	1975106
<i>Oct-93</i>	13563	121000	19260	1579000	94100	1826923	2069923
<i>Nov-93</i>	13202	121000	17380	1535000	99100	1785682	2025682
<i>Dec-93</i>	12852	121000	14430	1560000	94700	1802982	2053982
<i>Jan-94</i>	11356	130000	11560	1590000	101100	1844016	2073016
<i>Drugstore 2</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	8880	102000	17390	945000	85250	1158520	1293420
<i>Sep-92</i>	8800	102000	17450	963000	85250	1176500	1293600
<i>Oct-92</i>	8630	102000	18000	956000	85960	1170590	1291590
<i>Nov-92</i>	7417	102000	16600	924361	85300	1135678	1279100
<i>Dec-92</i>	6050	102000	16350	945000	86890	1156290	1273390
<i>Jan-93</i>	3350	102000	17330	967000	86670	1176350	1289450
<i>Feb-93</i>	4890	108000	15650	897000	82577	1108117	1229300
<i>Mar-93</i>	7170	108000	17420	937000	86210	1155800	1279300
<i>Apr-93</i>	7960	108000	13720	908000	86789	1124469	1282000
<i>May-93</i>	8150	108000	14400	899000	85650	1115200	1296000
<i>Jun-93</i>	8580	108000	13370	908000	85740	1123690	1303000
<i>Jul-93</i>	8940	108000	13860	904000	84260	1119060	1304000
<i>Aug-93</i>	9360	108000	14950	886000	83060	1101370	1307000
<i>Sep-93</i>	9230	108000	13070	889000	82890	1102190	1296000
<i>Oct-93</i>	9060	108000	14650	896000	83550	1111260	1312000
<i>Nov-93</i>	7770	108000	11850	906000	83280	1116900	1302000
<i>Dec-93</i>	6480	108000	9730	910000	84400	1118610	1303000
<i>Jan-94</i>	4080	116000	10270	899000	83710	1113060	1296900
<i>Drugstore 3</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	9030	92500	12320	740000	58800	912650	991000
<i>Sep-92</i>	8100	92500	12270	728566	58000	899436	983000
<i>Oct-92</i>	7520	92500	12444	755000	60300	927764	997000
<i>nov-92</i>	7090	92500	12400	722500	55200	889690	984000

<i>Dec-92</i>	7440	92500	12301	713000	58000	883241	978900
<i>jan-93</i>	6924	98500	12176	713400	56700	887700	971000
<i>Feb-93</i>	5780	98500	11633	677900	45565	839378	914878
<i>mar-93</i>	6660	98500	12270	712000	58563	887993	982000
<i>Apr-93</i>	6870	98500	12193	701300	55200	874063	1002000
<i>May-93</i>	8000	98500	12145	703600	57000	879245	1004000
<i>jun-93</i>	8313	98500	12193	699100	50900	869006	1013000
<i>jul-93</i>	9670	98500	12246	704000	54200	878616	1006000
<i>Aug-93</i>	10650	98500	12270	712000	55200	888620	1011000
<i>Sep-93</i>	10100	98500	12210	703600	52000	876410	1009000
<i>Oct-93</i>	9230	98500	12193	703600	55200	878723	1030000
<i>nov-93</i>	7700	98500	12025	712000	54200	884425	1030000
<i>Dec-93</i>	7810	98500	12120	718000	56400	892830	1037000
<i>jan-94</i>	7810	106000	12216	715000	54000	895026	1028000
<i>Drugstore 4</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	13160	124000	14800	1660000	100850	1912810	2086810
<i>Sep-92</i>	13050	124000	14780	1632570	100850	1885250	2049250
<i>Oct-92</i>	12940	124000	14962	1680000	101750	1933652	2104652
<i>nov-92</i>	12730	124000	14710	1605000	100550	1856990	2008000
<i>Dec-92</i>	12550	124000	14870	1613000	100850	1865270	2010000
<i>jan-93</i>	12180	132680	14800	1616000	100800	1876460	2014000
<i>Feb-93</i>	11770	132680	13420	1535000	97480	1790350	1892000
<i>Mar-93</i>	12365	132680	14440	1608000	99430	1866915	1980000
<i>Apr-93</i>	12414	132680	14370	1604000	99760	1863224	2025000
<i>May-93</i>	13300	132680	14260	1604000	100000	1864240	2025000
<i>Jun-93</i>	13530	132680	13930	1584000	99880	1844020	2044000
<i>Jul-93</i>	13670	132680	13760	1577000	100400	1837510	2075000
<i>Aug-93</i>	13860	132680	13860	1582000	99830	1842230	2083000
<i>Sep-93</i>	13950	132680	13840	1569000	99600	1829070	2075000
<i>Oct-93</i>	13673	132680	13990	1606000	100240	1866583	2064000
<i>Nov-93</i>	13320	132680	13830	1559000	99600	1818430	2017000
<i>Dec-93</i>	12820	132680	14060	1557000	100000	1816560	2037000
<i>Jan-94</i>	12470	140650	14010	1552000	99350	1818480	2020000
<i>Drugstore 5</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	15340	142000	16231	1647000	104610	1925181	2132181
<i>Sep-92</i>	14720	142000	16000	1626000	104510	1903230	2093230
<i>Oct-92</i>	14330	142000	16167	1696000	104970	1973467	2190467
<i>Nov-92</i>	13570	142000	15840	1625000	104510	1900920	2082920
<i>Dec-92</i>	13020	142000	15933	1658000	104640	1933593	2142593
<i>Jan-93</i>	12200	150500	16002	1625000	104590	1908292	2120292
<i>Feb-93</i>	11200	150500	15700	1535000	99090	1811490	1963490
<i>Mar-93</i>	12280	150500	15681	1587000	103690	1869151	2110000
<i>Apr-93</i>	12530	150500	15713	1575000	103290	1857033	2106000
<i>May-93</i>	13950	150500	15738	1574000	104270	1858458	2126000
<i>Jun-93</i>	14610	150500	15585	1590000	104180	1874875	2119000
<i>Jul-93</i>	14660	150500	15773	1606000	103870	1890803	2108000
<i>Aug-93</i>	15430	150500	15645	1606000	103800	1891375	2168000
<i>Sep-93</i>	15160	150500	15463	1593000	104090	1878213	2132000
<i>Oct-93</i>	14800	150500	15689	1594000	103690	1878679	2154000
<i>Nov-93</i>	13900	150500	15370	1598000	103480	1881250	2148000
<i>Dec-93</i>	13240	150500	15480	1604000	103870	1887090	2170000
<i>Jan-94</i>	12580	161000	15272	1578000	103570	1870422	2139000

<i>Drugstore 6</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	13705	181000	28580	1740000	115540	2078825	2260000
<i>Sep-92</i>	13320	181000	28500	1720000	115150	2057970	2245000
<i>Oct-92</i>	12844	181000	28770	1751908	115310	2089832	2258000
<i>Nov-92</i>	12774	181000	28530	1690000	114980	2027284	2217000
<i>Dec-92</i>	12782	181000	28570	1734000	114810	2071162	2247000
<i>Jan-93</i>	12751	192000	28360	1680000	114400	2027511	2212311
<i>Feb-93</i>	12437	192000	27110	1620000	112730	1964277	2130977
<i>May-93</i>	12690	192000	27210	1663000	114130	2009030	2190000
<i>Apr-93</i>	12857	192000	26770	1636000	113870	1981497	2179000
<i>May-93</i>	13478	192000	26940	1632000	114120	1978538	2210000
<i>Jun-93</i>	13640	192000	26980	1627000	113850	1973470	2190000
<i>Jul-93</i>	14029	192000	27030	1656000	114760	2003819	2263000
<i>Aug-93</i>	14210	192000	27060	1647000	114600	1994870	2266000
<i>Sep-93</i>	14190	192000	27480	1618000	114370	1966040	2230000
<i>Oct-93</i>	14030	192000	28120	1640000	115020	1989170	2268000
<i>Nov-93</i>	13580	192000	27900	1634000	114830	1982310	2248000
<i>Dec-93</i>	13160	192000	28300	1656000	114950	2004410	2255000
<i>Jan-94</i>	12920	205000	27760	1620000	114510	1980190	2233000
<i>Drugstore 7</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	19110	118000	25140	1366800	107900	1636950	1801450
<i>Sep-92</i>	18690	118000	25400	1354800	106890	1623780	1788480
<i>Oct-92</i>	18570	118000	24700	1357000	108570	1626840	1794840
<i>nov-92</i>	16970	118000	25230	1359100	105340	1624640	1789140
<i>Dec-92</i>	16600	125000	25760	1356000	104420	1627780	1786980
<i>jan-93</i>	16480	125000	26150	1347600	104700	1619930	1777930
<i>Feb-93</i>	14600	125000	23220	1324800	97560	1585180	1734000
<i>mar-93</i>	16000	125000	23310	1329300	104150	1597760	1774000
<i>Apr-93</i>	16310	125000	22880	1327100	104510	1595800	1783000
<i>May-93</i>	18170	125000	23320	1312700	105520	1584710	1773000
<i>jun-93</i>	18540	125000	23450	1318700	104700	1590390	1776000
<i>jul-93</i>	18630	125000	23670	1323300	105430	1596030	1784000
<i>Aug-93</i>	19300	125000	23760	1327100	105880	1601040	1799000
<i>Sep-93</i>	19240	125000	24720	1321000	106710	1596670	1802000
<i>Oct-93</i>	19300	125000	24180	1333100	106430	1608010	1808000
<i>nov-93</i>	18690	125000	24250	1330100	107440	1605480	1803000
<i>Dec-93</i>	18400	125000	24380	1328600	109090	1605470	1812900
<i>jan-94</i>	18510	135000	23800	1322500	104000	1603810	1809000
<i>Drugstore 8</i>	<i>Energy</i>	<i>Rent</i>	<i>Admin</i>	<i>Material</i>	<i>Wages</i>	<i>Cost</i>	<i>Revenue</i>
<i>Aug-92</i>	37900	312575	51100	3958000	294000	4653575	5309575
<i>Sep-92</i>	34000	312575	49600	3933000	288300	4617475	5259475
<i>Oct-92</i>	33300	312575	49300	3978000	291100	4664275	5288000
<i>nov-92</i>	29300	312575	48200	3923000	292800	4605875	5225875
<i>Dec-92</i>	30600	312575	48000	3960000	292000	4643175	5276175
<i>jan-93</i>	26500	334000	46200	3933000	293300	4633000	5186000
<i>Feb-93</i>	21000	334000	41000	3780000	261100	4437100	5058000
<i>mar-93</i>	30900	334000	43500	3857000	281100	4546500	5245000
<i>Apr-93</i>	32600	334000	40800	3877000	275000	4559400	5260000
<i>May-93</i>	36200	334000	38700	3853000	272800	4534700	5258000
<i>jun-93</i>	38500	334000	38200	3843000	271100	4524800	5288000
<i>jul-93</i>	40600	334000	39000	3817000	268000	4498600	5315000
<i>Aug-93</i>	40900	334000	40700	3873000	268900	4557500	5293000

<i>Sep-93</i>	<i>39100</i>	<i>334000</i>	<i>39200</i>	<i>3853000</i>	<i>271100</i>	<i>4536400</i>	<i>5288000</i>
<i>Oct-93</i>	<i>37400</i>	<i>334000</i>	<i>40800</i>	<i>3887000</i>	<i>274000</i>	<i>4573200</i>	<i>5325000</i>
<i>nov-93</i>	<i>33000</i>	<i>334000</i>	<i>41000</i>	<i>3867000</i>	<i>271100</i>	<i>4546100</i>	<i>5288000</i>
<i>Dec-93</i>	<i>31300</i>	<i>334000</i>	<i>43000</i>	<i>3860000</i>	<i>268300</i>	<i>4536600</i>	<i>5290000</i>
<i>jan-94</i>	<i>29300</i>	<i>357000</i>	<i>42400</i>	<i>3837000</i>	<i>268300</i>	<i>4534000</i>	<i>5260000</i>

ANEXO II - DADOS USADOS NA AVALIAÇÃO DOS TEMPOS DE PROCESSAMENTO DE DEA-SAED

Dados extraídos da página de Internet (16/07/2004): <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/data/beasley2.txt> com referência “J.E. Beasley, Comparing university departments, *Omega* 18 (1990), 171-183”

{I} Input1	{I} Input2		{I} Input3		{O} Output1		{O} Output2		{O} Output3		{O}
Output5	{O} Output6		{O} Output7		{O} Output8						
University1	528	64	254	145	0	26	0	0	0	1	
University2	2605	301	1485	381	16	54	0	1	0	0	
University3	304	23	45	44	3	3	0	0	0	1	
University4	1620	485	940	287	0	48	0	1	0	0	
University5	490	90	106	91	8	22	0	0	0	1	
University6	2675	767	2967	352	4	166	1	0	0	0	
University7	422	0	298	70	12	19	0	0	0	1	
University8	986	126	776	203	0	32	0	0	1	0	
University9	523	32	39	60	0	17	0	0	0	1	
University10	585	87	353	80	17	27	0	1	0	0	
University11	931	161	293	191	0	20	0	0	0	1	
University12	1060	91	781	139	0	37	0	0	0	1	
University13	500	109	215	104	0	19	0	0	0	1	
University14	714	77	269	132	0	24	0	0	0	1	
University15	923	121	392	135	10	31	0	0	1	0	
University16	1267	128	546	169	0	31	0	0	1	0	
University17	891	116	925	125	0	24	0	1	0	0	
University18	1395	571	764	176	14	27	0	1	0	0	
University19	990	83	615	28	36	57	0	0	0	1	

University20	3512	267	3182	511	23	153	1	0	0	0
University21	1451	226	791	198	0	53	0	0	1	0
University22	1018	81	741	161	5	29	0	1	0	0
University23	1115	450	347	148	4	32	0	0	0	1
University24	2055	112	2945	207	1	47	0	1	0	0
University25	440	74	453	115	0	9	0	0	1	0
University26	3897	841	2331	353	28	65	1	0	0	0
University27	836	81	695	129	0	37	0	0	0	1
University28	1007	50	98	174	7	23	0	0	1	0
University29	1188	170	879	253	0	38	0	0	1	0
University30	4630	628	4838	544	0	217	1	0	0	0
University31	977	77	490	94	26	26	0	0	1	0
University32	829	61	291	128	17	25	0	0	0	1
University33	898	39	327	190	1	18	0	0	0	1
University34	901	131	956	168	9	50	0	1	0	0
University35	924	119	512	119	37	48	0	1	0	0
University36	1251	62	563	193	13	43	0	0	1	0
University37	1011	235	714	217	0	36	0	1	0	0
University38	732	94	297	151	3	23	0	0	1	0
University39	444	46	277	49	2	19	0	0	1	0
University40	308	28	154	57	0	7	0	0	0	1
University41	483	40	531	117	0	23	0	0	0	1
University42	515	68	305	79	7	23	0	0	0	1
University43	593	82	85	101	1	9	0	0	0	1
University44	570	26	130	71	20	11	0	0	0	1
University45	1317	123	1043	293	1	39	0	0	1	0
University46	2013	149	1523	403	2	51	0	1	0	0
University47	992	89	743	161	1	30	0	0	1	0
University48	1038	82	513	151	13	47	0	0	1	0
University49	206	1	72	16	0	6	0	0	0	1
University50	1193	95	485	240	0	32	0	0	0	1

