UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Izael do Nascimento

AXIOMAS DE SEPARAÇÃO EM ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO

Curitiba, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Izael do Nascimento

AXIOMAS DE SEPARAÇÃO EM ESPAÇOS DE APROXIMAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Soraya Rosana Torres Kudri.

Curitiba, 2013.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **Izael do Nascimento** devendo para tanto incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 22 de fevereiro de 2013.

Soraya Rosana Torres Kudri

Profª Dra. Soraya Rosana Torres Kudri
Presidente

Elizabeth T. Gasparim

Profa. Dra. Elizabeth Gasparim
Titular

Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez
Membro

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 44ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ao vinte e dois dias do mês de fevereiro de 2013, no Anfiteatro A, Prédio PC do Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pela Professora Soraya Rosana Torres Kudri, a Banca Examinadora para a quadragésima quarta Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Profa. Dra. Elizabeth Gasparim, da Universidade de Campinas; Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez, do Departamento de Matemática-UFPR, e a Profa. Dra. Rosana Torres Kudri, Orientadora da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **Izael do Nascimento** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Axiomas de Separação em Espaços de Aproximação". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 22 de fevereiro de 2013.

Soraya Rosana Torres Kudri

Profª Dra. Soraya Rosana Torres Kudri
Presidente

Elizabeth T. Gasparim

Profa. Dra. Elizabeth Gasparim
Titular

Carlos Durán

Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez
Membro

Con affetto, alla mia principessa, Talita Paola.

Agradecimentos

A Deus por todas as condições favoráveis à realização deste trabalho.

Aos meus pais Rosângela e Carlos Antônio, que mesmo nas dificuldades, asseguraram um cenário propício à minha formação acadêmica.

Aos meus avós Elza e Miguel pela hospedagem durante a graduação e demais auxílios.

Aos meus tios Maria Teresa e José Geraldo pela hospedagem durante o mestrado e apoios diversos.

Aos meus tios Cláudia e Anderson e ao meu padrinho João Carlos, sempre dispostos a ajudar.

À minha orientadora, professora Soraya, pela liberdade de escolha do tema desta dissertação e pela liberdade e confiança na execução da mesma.

Ao meu orientador de iniciação científica durante a graduação, professor Luis Antonio Romero Grados, da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), pela amizade, apoio e inspiração.

Aos demais professores da graduação na UEPG por razões diversas; em especial ao professor Giuliano La Guardia pelo incentivo.

Aos professores do PPGMA, Ademir e Higidio, pela acessibilidade e pelas proveitosas discussões matemáticas que tivemos.

Aos alunos do PPGMA que me ajudaram de alguma forma; em especial à Camila Isoton e ao Rodrigo Siqueira.

Ao PPGMA pela estrutura de qualidade e pelo comprometimento e competência de seus professores e coordenadores.

Aos vários parentes e amigos que me deram algum tipo de suporte durante toda a carreira acadêmica.

À CAPES, pelo suporte financeiro e à UFPR, pela oportunidade.

"Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas — para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções."

Albert Girard
L'Invention Nouvelle en Algèbre, 1629

Resumo

Espaços de aproximação foram introduzimos pelo matemático belga Robert Lowen, com o principal objetivo de resolver algumas falhas de cunho algébrico de espaços topológicos metrizáveis, mas acabaram se tornando entes matemáticos úteis nas mais diversas áreas e interessantes objetos de estudo por si próprios. Estes espaços abstraem as principais características dos espaços topológicos, métricos e uniformes e são um elo de ligação adequado entre os mesmos.

Neste trabalho nós fazemos uma introdução aos espaços de aproximação, apresentando algumas das várias estruturas que podem ser usadas para descrevê-los: distâncias, operadores limite, sistemas de localização, torres, envelopes e quadros. Desenvolvemos cada uma destas estruturas e mostramos que todas são equivalentes em certo sentido.

Ao final do trabalho damos algumas novas caracterizações de axiomas de separação em um espaço topológico, utilizando as estruturas do espaço de aproximação a ele associado.

Palavras-chave: *Espaços de aproximação, espaços topológicos, axiomas de separação.*

Abstract

Approach spaces were introduced by the Belgian mathematician Robert Lowen primarily to address some failings of an algebraic nature in metrizable spaces but ended up becoming methematical entities that proved useful in a wide range of areas, as well as interesting subjects of study in themselves. They abstract the main characteristics of topological, metric and uniform spaces and are a suitable link between these.

In this work we introduce approach spaces and present some of the different structures that can be used to describe them: distances, limit operators, localization systems, gauges, towers, envelopes and frames. We develop each of these structures and show that they are all equivalent in a certain way.

At the end of the work we provide some new characterizations of separation axioms in a topological space using the approach space structures associated with it.

Keywords: *Approach spaces, topological spaces, separation axioms.*

Lista de símbolos

Índice

Introdução

A teoria dos espaços de aproximação começou a ser desenvolvida pelo matemático belga Robert Lowen, em uma série de artigos publicados entre os anos de 1987 e 1989. Os resultados destes artigos foram apresentados de uma maneira sistemática e definitiva em seu livro "Approach spaces: the missing link in the topology-uniformity-metric triad" (referência [14]), do ano de 1997, e é considerado um marco na história da topologia geral.

Em linguagem algébrica, os espaços de aproximação formam uma supercategoria das categorias de espaços topológicos e espaços métricos, e o principal propósito da introdução dos mesmos foi resolver o problema da não metrizabilidade de estruturas iniciais arbitrárias de espaços topológicos metrizáveis. Eles não só resolveram esses problemas fundamentais como também tornaram-se interessantes objetos de estudo por si próprios. Ademais, eles são úteis em muitas áreas tais como teoria da probabilidade, análise funcional, teorias de espaços de funções, hiperespaços e espaços métricos probabilísticos. Espaços de aproximação também fornecem um cenário adequado para um tratamento unificador de certas propriedades topológicas e métricas, além de promoverem o desenvolvimento de uma teoria fundamental de aproximação.

Em um espaço métrico (X, d) podemos associar uma distância ρ_d (ver detalhes na seção 1.1) entre pontos e subconjuntos de X. A continuidade de uma função em um espaço métrico pode ser definida através da noção de proximidade entre ponto e conjunto, e então podemos dizer que neste caso a distância ρ_d é mais importante que a métrica d. Lowen também chegou a essa conclusão do ponto de vista categórico. Dessa forma definiu uma aplicação ρ (ver detalhes na definição 1.1.1) de um conjunto X a $[0, \infty]$, chamada genericamente de distância, abstraindo e axiomatizando as principais propriedades das distâncias do tipo ρ_d. Ao par (X, ρ) é o que chamamos de um espaço de aproximação.

Um espaço topológico pode ser descrito de diversas formas equivalentes: conjuntos abertos, conjuntos fechados, operadores fecho, sistemas de vizinhanças, etc. Do mesmo modo, espaços de aproximação podem ser definidos através de outras estruturas equivalentes, em certo sentido, a uma distância ρ.

No capítulo 1 nós definimos sete estruturas que podem ser usadas para definir um espaço de aproximação: distâncias, operadores limite, sistemas de localização, torres, envelopes e quadros. Chamamos essas estruturas genericamente de aproximações em um conjunto X. Fazemos algumas interpretações intuitivas dessas estruturas e mostramos alguns resultados sobre as mesmas.

No capítulo 2 nós mostramos que todas essas estruturas são equivalentes (no sentido de que cada estrutura induz outra de modo compatível) e podem ser usadas para definir um espaço de aproximação. Damos várias fórmulas de transição de uma estrutura a outra. Chamamos de estruturas associadas (ou equivalentes) as que se relacionam através das fórmulas de transição dadas.

No capítulo 3 nós formalizamos o conceito de um espaço de aproximação, damos exemplos específicos de aproximações no conjunto $[0, \infty]$ e introduzimos uma estrutura que se relaciona com o conceito de aderência de filtros em espaços topológicos, os operadores aderência. Mostramos também vários resultados sobre operadores aderência e apresentamos tabelas com várias fórmulas de trasição entre aproximações.

No capítulo 4 nós definimos e mostramos alguns resultados sobre contrações em espaços de aproximação. Estas são as aplicações compatíveis com estes espaços no mesmo sentido que aplicações contínuas são compatíveis com espaços topológicos. Em linguagem algébrica, as contrações formam os morfismos naturais da categoria dos espaços de aproximação.

No capítulo 5 nós definimos os espaços de aproximação topológicos, que são induzidos por topologias. Mostramos também a relação das aproximações nestes espaços com as topologias que os induzem.

No capítulo 6 nós relembramos as definições dos principais axiomas de separação em um espaço topológico, mostramos alguns resultados clássicos sobre os mesmos e damos diversas novas caracterizações destes axiomas utilizando as estruturas do espaço de aproximação associado ao espaço topológico (especificamente, consideraremos duas maneiras de relacioná-los: uma é apresentado no capítulo 5, onde topologias induzem distâncias; a outra parte de uma distância e induz um operador fecho topológico, o qual por sua vez induz uma topologia).

Os resultados e definições sem atribuição de referência são de nossa autoria. Muitas vezes damos demonstrações próprias de alguns resultados e adequamos algumas definições, mas os referenciamos mesmo assim.

No final do trabalho fazemos um breve apêndice incluindo alguns conceitos secundários, porém importantes, utilizados neste trabalho.

Tomamos a liberdade de não sermos fiéis às nomenclaturas originais das estruturas definidas neste trabalho. O leitor interessado não terá dificuldades de identificá-las na obra original e principal referência deste trabalho (ver [14]).

Finalmente, enfatizamos que a estrutura puramente algébrica dos espaços de aproximação (na qual de fato reside a maior riqueza destes entes) não é abordada neste trabalho por uma questão de espaço e objetividade. Optamos por apresentar uma introdução sucinta sobre o assunto a fim de termos material suficiente, mas não demasiadamente sem detalhes, para desenvolvermos o capítulo 6.

Os pré-requisitos sugeridos para a leitura deste trabalho são conhecimentos básicos de Topologia Geral, conceitos e resultados relacionados a filtros e noções básicas de Teoria de Conjuntos e Análise Real.

Capítulo 1

Aproximações

Neste capítulo nós definimos as estruturas básicas que determinam o que chamaremos de um espaço de aproximação. Uma das grandes vantagens destes espaços é poderem ser descritos por estruturas conceitualmente bem diferentes, mas equivalentes em certo sentido. Isto não é diferente do que ocorre em topologia, onde espaços topológicos podem ser definidos, por exemplo, por conjuntos abertos, conjuntos fechados ou por um operador fecho.

1.1 Distâncias

Ao longo deste trabalho, X denotará um conjunto não vazio qualquer e 2^{X} o conjunto das partes (subconjuntos) de X.

Em um espaço métrico (X, d), a distância $\rho_d(x, \mathrm{A})$ entre um ponto x e um conjunto A é derivada necessariamente das distância entre pares de pontos de acordo com a seguinte fórmula usual, válida para qualquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$:

$$\rho_d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a).$$

A primeira estrutura que definiremos a seguir surge da ideia de abstrair as principais propriedades de distâncias do tipo ρ_d e axiomatizá-las, de modo que a distância entre um ponto e um conjunto seja um conceito primitivo, no sentido de não necessariamente depender de um conceito de distância entre pontos.

Na teoria dos espaços de aproximação o conjunto $[0, \infty]$ mostra-se muito conveniente e denota o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ acrescido de um elemento ∞, cuja natureza é irrelevante. Em $[0, \infty]$ extendemos as operações usuais de adição e subtração e a relação de ordem de $\mathbb{R}_+$ pondo, para cada $x \in \mathbb{R}_+$, $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$, $\infty - x = \infty$, $\infty - \infty = 0$ e $x < \infty$.

Definição 1.1.1. *[14] Uma aplicação*

$$\rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]$$

é chamada de uma distância em X *se cumprir as seguintes propriedades:*

(ρ_1) $\rho(x, \{x\}) = 0$;

(ρ_2) $\rho(x, \emptyset) = \infty$;

(ρ_3) $\rho(x, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \min \{\rho(x, \mathrm{A}), \rho(x, \mathrm{B})\}$;

(ρ_4) $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, \mathrm{A}^{[\epsilon]}) + \epsilon$, *onde* $\mathrm{A}^{[\epsilon]} = \{x \in \mathrm{X} \mid \rho(x, \mathrm{A}) \leq \epsilon\}$;

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$, $\epsilon \in [0, \infty]$ *e* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Naturalmente, dizemos que o valor $\rho(x, \mathrm{A})$ é a distância entre o ponto x e o conjunto A. Como já enfatizamos, $\rho(x, \mathrm{A})$ não necessariamente é derivada das distâncias $\rho(x, \{a\})$ com $a \in \mathrm{A}$. No capítulo 3 nós daremos exemplos de distâncias e de outras estruturas a serem definidas.

A proposição a seguir contém resultados que serão utilizados sem menção explícita ao longo do trabalho.

Proposição 1.1.2. *[14] Seja* $\rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]$ *uma distância em* X. *Então, para quaisquer* $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$:

(*i*) $x \in \mathrm{A} \Rightarrow \rho(x, \mathrm{A}) = 0$;

(*ii*) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \rho(x, \mathrm{B}) \leq \rho(x, \mathrm{A})$;

(*iii*) $\mathbb{A} \subseteq 2^{\mathrm{X}}, \mathbb{A}$ *finito* $\Rightarrow \rho(x, \bigcup \mathbb{A}) = \min\limits_{\mathrm{A} \in \mathbb{A}} \{\rho(x, \mathrm{A})\}$;

(*iv*) $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, \mathrm{B}) + \sup\limits_{b \in \mathrm{B}} \{\rho(b, \mathrm{A})\}$.

Demonstração. As afirmações (*ii*) e (*iii*) seguem diretamente de (ρ_3). A afirmação (*i*) segue de (*ii*) e (ρ_1). Para provar a afirmação (*iv*), sejam $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$ e definamos $\epsilon = \inf \{\delta \in [0, \infty] \mid \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}^{[\delta]}\}$. Segue que

$$\begin{aligned} \rho(x, \mathrm{A}) &\leq \rho(x, \mathrm{A}^{[\epsilon]}) + \epsilon \\ &\leq \rho(x, \mathrm{B}) + \sup_{b \in \mathrm{B}} \{\rho(b, \mathrm{A})\}. \end{aligned}$$

□

Para cada $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, a aplicação

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} &\to [0, \infty] \\ x &\mapsto \rho(x, \mathrm{A}) \end{aligned}$$

é chamada de um operador distância (em A).

1.2 Operadores limite

Nesta seção definimos uma estrutura que introduz uma noção de convergência em espaços de aproximação.

No que segue, $\mathbb{F}(\mathrm{X})$ denotará a coleção de todos os filtros de X e $\mathbb{U}(\mathrm{X})$ a coleção de todos os ultrafiltros de X. Se $\mathcal{F}$ é um filtro em X, $\mathbb{F}(\mathcal{F})$ denotará a coleção de todos os filtros de X mais finos que $\mathcal{F}$ e $\mathbb{U}(\mathcal{F})$ a coleção de todos os ultrafiltros de X mais finos que $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F} = \{\mathrm{X}\}$ (o filtro trivial de X), então $\mathbb{F}(\mathcal{F}) = \mathbb{F}(\mathrm{X})$ e $\mathbb{U}(\mathcal{F}) = \mathbb{U}(\mathrm{X})$.

Definição 1.2.1. *[14] Sejam $\mathbb{A} \subseteq 2^{\mathrm{X}}$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$. O stack de $\mathbb{A}$ é o conjunto $stack\mathbb{A} \subseteq 2^{\mathrm{X}}$ definido por*

$$stack\mathbb{A} = \{\mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}} \mid \exists\, \mathrm{A} \in \mathbb{A} : \mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}\}.$$

O sec de $\mathcal{F}$ é o conjunto $sec\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathrm{X}}$ definido por

$$sec\mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \mathcal{U} = \{\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}} \mid \forall\, \mathrm{F} \in \mathcal{F} : \mathrm{A} \cap \mathrm{F} = \emptyset\}.$$

Se $\mathbb{A}$ é um filtro base em X então $stack\mathbb{A}$ é simplesmente o filtro gerado por $\mathbb{A}$. Se $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, definimos $stack\mathrm{A} = stack\{\mathrm{A}\}$ e se $x \in \mathrm{X}$, definimos $stack(x) = stack\{\{x\}\}$. Se $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ e $\mathrm{A} \neq \emptyset$, então $stack\mathrm{A}$ é simplesmente o filtro principal de A e por isso escreveremos apenas $\mathbb{F}(\mathrm{A})$ ao invés de $\mathbb{F}(stack\mathrm{A})$ e $\mathbb{U}(\mathrm{A})$ ao invés de $\mathbb{U}(stack\mathrm{A})$.

Sejam J um conjunto de índices, $\{\mathcal{F}_j\}_{j \in J}$ uma família de filtros em X e $\mathcal{F}$ um filtro em J. O filtro diagonal da família $\{\mathcal{F}_j\}_{j \in J}$ em relação a $\mathcal{F}$ é definido por

$$\mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j \in J}, \mathcal{F}) = \bigvee_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \bigcap_{j \in \mathrm{F}} \mathcal{F}_j.$$

O símbolo usual $\vee$ (ver apêndice, seção 7.1) denota o supremo de uma coleção de filtros, considerando $\mathbb{F}(\mathrm{X})$ com a relação de ordem usual. É rotina verificar que no caso particular de um filtro diagonal este supremo sempre existe.

No caso especial onde $J = \mathrm{X}$, dizemos que uma família de filtros $\{\mathcal{F}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ é uma seleção de filtros e a representamos por uma aplicação $\mathcal{S} : \mathrm{X} \to \mathbb{F}(\mathrm{X})$ dada por $\mathcal{S}(x) = \mathcal{F}_x$. Neste caso o filtro diagonal de $\{\mathcal{S}(x)\}_{x\in\mathrm{X}}$ em relação a $\mathcal{F}$ será denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{S}, \mathcal{F})$. No que segue, $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ denotará o conjunto de todas as aplicações de X em $[0,\infty]$.

Definição 1.2.2. *[14] Uma aplicação*

$$\lambda : \mathbb{F}(\mathrm{X}) \to [0,\infty]^{\mathrm{X}}$$

é chamada de um operador limite em X *se cumprir as seguintes propriedades:*

(λ_1) $\lambda(stack(x))(x) = 0$;

(λ_2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \lambda(\mathcal{G}) \leq \lambda(\mathcal{F})$;

(λ_3) $\lambda\left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_j\right) = \sup_{j\in J} \lambda(\mathcal{F}_j)$, *para toda família de filtros* $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ *em* X;

(λ_4) $\lambda(\mathcal{D}(\mathcal{S}, \mathcal{F})) \leq \lambda(\mathcal{F}) + \sup_{x\in\mathrm{X}} \lambda(\mathcal{S}(x))(x)$, *para toda seleção de filtros* $\{\mathcal{S}(x)\}_{x\in\mathrm{X}}$ *em* X;

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$.

Para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, dizemos que a aplicação $\lambda(\mathcal{F}) : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ é o limite de $\mathcal{F}$. Intuitivamente o valor $\lambda(\mathcal{F})(x)$ quantifica "quão longe" um ponto x está de ser um ponto limite do filtro $\mathcal{F}$. Quando relacionarmos espaços de aproximação com espaços topológicos esta interpretação se tornará plausível.

Os dois próximos resultados serão requisitados em várias ocasiões. No que segue, $\sigma(\mathcal{U})$ denota, simplesmente, um conjunto do ultrafiltro $\mathcal{U}$ fixado arbitrariamente.

Proposição 1.2.3. *[14] Seja* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, *e para cada* $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$ *seja* $\sigma(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$. *Então existe um conjunto finito* $\mathbb{U}_\sigma \subseteq \mathbb{U}(\mathcal{F})$ *tal que*

$$\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_\sigma} \sigma(\mathcal{U}) \in \mathcal{F}.$$

Demonstração. Suponhamos que a conclusão não proceda. Nesse caso a família

$$\mathcal{F} \cup \{\mathrm{X} \setminus \sigma(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})\}$$

teria a propriedade da intersecção finita, e por isso estaria contida em algum ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$. Contudo, isso acarretaria em $\sigma(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$ e $\mathrm{X}\setminus\sigma(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$, o que é um absurdo. □

Proposição 1.2.4. *[14] Seja $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ uma família de filtros em* X *e* $\mathcal{F}$ *um filtro em* J*. As seguintes afirmações são válidas:*

(i) $\mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F}) = \bigcup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \bigcap_{j\in \mathrm{F}} \mathcal{F}_j$;

(ii) Se $\{\mathcal{G}_l\}_{l\in L}$ *é uma família de filtros em* J *tal que* $\bigcap_{l\in L} \mathcal{G}_l = \mathcal{F}$, *então*

$$\mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F}) = \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{G}_l);$$

(iii) $\mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F}) = \bigcap_{\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}\in\prod_{j\in J}\mathbb{U}(\mathcal{F}_j)} \mathcal{D}(\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F})$;

(iv) Se todos os filtros envolvidos são ultrafiltros então $\mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F})$ *também o é.*

Demonstração. Provaremos apenas a afirmação (*iii*), pois a verificação das demais é rotineira. Uma inclusão é clara; para mostrar a outra, suponhamos que $\mathrm{A} \notin \mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F})$. Para cada $j \in J$ definamos um ultrafiltro $\mathcal{U}_j$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{se } \mathrm{A} \notin \mathcal{F}_j, & \text{escolhemos } \mathcal{U}_j \in \mathbb{U}(\mathcal{F}_j) \text{ tal que } \mathrm{A} \notin \mathcal{U}_j; \\ \text{se } \mathrm{A} \in \mathcal{F}_j, & \text{escolhemos } \mathcal{U}_j \in \mathbb{U}(\mathcal{F}_j) \text{ qualquer.} \end{cases}$$

Desde que $\mathrm{A} \notin \mathcal{D}(\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F})$, segue de (*i*) que para qualquer $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, existe $j \in \mathrm{F}$ tal que $A \notin \mathcal{F}_j$ e, por isso, $A \notin \mathcal{U}_j$. Portanto, $\mathrm{A} \notin \mathcal{D}(\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}, \mathcal{F})$. □

1.3 Sistemas de localização

Nesta seção definimos uma estrutura que será relacionada adiante com o conceito de um sistema de vizinhanças em um espaço topológico.

No que segue, consideramos $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ como um reticulado equipado com a relação de ordem usual para aplicações. Para detalhes sobre reticulados, ideais, ideais base, distributividade completa e operações $\vee$, $\wedge$, referimos a seção 7.1 do apêndice. Por conveniência, identificamos ocasionalmente, uma constante com a aplicação constante a ela associada.

Sejam $\mathcal{A} \subseteq [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Dizemos que μ é dominada por $\mathcal{A}$, ou que $\mathcal{A}$ domina μ, se para quaisquer $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ existir $\mu_{\epsilon,\delta} \in \mathcal{A}$ tal que $\mu \wedge \delta \leq \mu_{\epsilon,\delta} + \epsilon$. Dizemos também que a família $\{\mu_{\epsilon,\delta}\}_{\epsilon>0,\delta<\infty}$ domina μ. Finalmente, dizemos que $\mathcal{A}$ é saturado se toda aplicação dominada por $\mathcal{A}$ pertencer a $\mathcal{A}$.

Definição 1.3.1. *[14] Uma família de ideais* $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ *em* $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ *é chamada de um sistema de localização em* X *se cumprir as seguintes propriedades para qualquer* $x \in \mathrm{X}$*:*

($\mathcal{A}_1$) $\mu(x) = 0$ *sempre que* $\mu \in \mathcal{A}_x$*;*

($\mathcal{A}_2$) $\mathcal{A}_x$ *é saturado;*

($\mathcal{A}_3$) *para quaisquer* $\mu \in \mathcal{A}_x$*,* $\epsilon > 0$ *e* $\delta < \infty$*, existe* $(\mu_j)_{j\in \mathrm{X}} \in \prod_{j\in \mathrm{X}} \mathcal{A}_j$ *tal que* $\mu(y) \wedge \delta \leq \mu_x(z) + \mu_z(y) + \epsilon$ *para quaisquer* $y, z \in \mathrm{X}$.

Um sistema de localização $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ em X será, ocasionalmente, denotado apenas por $\mathcal{A}$. Para cada $x \in \mathrm{X}$, se $\mu \in \mathcal{A}_x$, dizemos que μ é uma distância local em x. O valor $\mu(y)$ de uma distância local $\mu \in \mathcal{A}_x$ em um ponto y é interpretado como a "distância de x a y de acordo com μ". Enfatizamos que essa interpretação é meramente intuitiva e que o termo distância utilizado aqui não tem compromisso com o conceito definido em 1.1.1.

Muitas vezes nos deparamos com uma família de subconjuntos de $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ com características "próximas" das de um sistema de localização. As próximas definições e resultados tratam deste assunto.

Definição 1.3.2. *[14] Dizemos que uma família de ideais base* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *em* $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ *é um sistema de localização base em* X *se cumprir as seguintes propriedades para qualquer* $x \in \mathrm{X}$*:*

($\mathcal{B}_1$) $\mu(x) = 0$ *sempre que* $\mu \in \mathcal{B}_x$*;*

($\mathcal{B}_2$) *para quaisquer* $\mu \in \mathcal{B}_x$*,* $\epsilon > 0$ *e* $\delta < \infty$*, existe* $(\mu_j)_{j\in \mathrm{X}} \in \prod_{j\in \mathrm{X}} \mathcal{B}_j$ *tal que* $\mu(y) \wedge \delta \leq \mu_x(z) + \mu_z(y) + \epsilon$ *para quaisquer* $y, z \in \mathrm{X}$.

É claro que todo sistema de localização também é um sistema de localização base.

Para cada $\mathcal{B} \subseteq [0,\infty]^{\mathrm{X}}$, definimos $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \mathcal{B} \text{ domina } \mu\}$ e dizemos que $\widehat{\mathcal{B}}$ é a saturação de $\mathcal{B}$.

Definição 1.3.3. *[14] Dizemos que uma família de ideais base* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *em* $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ *é uma base para um sistema de localização* $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *em* X *se* $\widehat{\mathcal{B}_x} = \mathcal{A}_x$ *para cada* $x \in \mathrm{X}$*. Dizemos também que* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *gera* $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *ou que* $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *é gerada por* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$.

As duas próximas proposições mostram que os conceitos de um sistema de localização base e de uma base para um sistema de localização são equivalentes.

Proposição 1.3.4. *[14] Seja* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ *um sistema de localização base em* X*. Então* $\{\widehat{\mathcal{B}_x}\}_{x\in \mathrm{X}}$ *é um sistema de localização em* X *gerada por* $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$.

Demonstração. Que $\{\widehat{\mathcal{B}_x}\}_{x\in \mathrm{X}}$ cumpre ($\mathcal{A}_1$) é trivial. Para provar ($\mathcal{A}_2$), sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ tais que para quaisquer $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ exista $\nu \in \widehat{\mathcal{B}_x}$ de modo que

$\mu \wedge \delta \leq \nu + \frac{\epsilon}{2}$. Escolhendo $\xi \in \mathcal{B}_x$ tal que $\nu \wedge \delta \leq \xi + \frac{\epsilon}{2}$, segue que $\mu \wedge \delta \leq \xi + \epsilon$. Para provar $(\mathcal{A}_3)$, sejam $\mu \in \widehat{\mathcal{B}_x}$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$. Escolhamos $\nu \in \widehat{\mathcal{B}_x}$ tal que $\mu \wedge \delta \leq \nu + \frac{\epsilon}{2}$ e $(\nu_j)_{j\in \mathrm{X}} \in \prod_{j \in \mathrm{X}} \mathcal{B}_j$ tal que, para quaisquer y, $z \in \mathrm{X}$,

$$\nu(y) \wedge \delta \leq \nu_x(z) + \nu_z(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para quaisquer y, $z \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned} \mu(y) \wedge \delta &\leq \left(\nu(y) + \frac{\epsilon}{2}\right) \wedge \left(\delta + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= \nu(y) \wedge \delta + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \nu_x(z) + \nu_z(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.3.5. *[14] Seja $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ uma base para um sistema de localização $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ em X. Então $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in \mathrm{X}}$ é um sistema de localização base em X.*

Demonstração. Claramente, para cada $x \in \mathrm{X}$, $\mathcal{B}_x$ é um ideal base e cumpre $(\mathcal{B}_1)$. Para provar $(\mathcal{B}_2)$, sejam $\nu \in \mathcal{B}_x$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$. Escolhamos $(\mu_j)_{j\in \mathrm{X}} \in \prod_{j\in \mathrm{X}} \mathcal{A}_j$ tal que, para quaisquer y, $z \in \mathrm{X}$,

$$\mu(y) \wedge \delta \leq \mu_x(z) + \mu_z(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Para cada $\mu_j \in \mathcal{A}_j$, seja $\nu_j \in \mathcal{B}_j$ tal que

$$\mu_j \wedge \delta \leq \nu_j + \frac{\epsilon}{4}.$$

Segue que, para quaisquer $y, z \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned} \nu(y) \wedge \delta &\leq \left(\mu_x(z) + \mu_z(y) + \frac{\epsilon}{2}\right) \wedge \left(\delta + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leq \mu_x(z) \wedge \delta + \mu_z(y) \wedge \delta + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \nu_x(z) + \nu_z(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.4 Calibres

Nesta seção definimos uma estrutura que pode ser comparada com a definição de um espaço uniforme via uma família de p-métricas, chamada de um *calibre uniforme*. Para detalhes sobre espaços métricos, variações de métricas e notações, referimos a seção 7.2 do apêndice.

Se $x \in \mathrm{X}$ e $d \in \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$, definimos a aplicação $d(x, \cdot) : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ pondo $d(x, \cdot)(y) = d(x, y)$ para cada $y \in \mathrm{X}$. Anologamente se define a aplicação $d(\cdot, y) : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ para cada $y \in \mathrm{X}$. Notemos que as aplicações do tipo $d(x, \cdot)$ e $d(\cdot, y)$ pertencem ao reticulado $[0, \infty]^{\mathrm{X}}$. No que segue, também consideramos $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$ um reticulado com a relação de ordem usual para aplicações.

Sejam $\mathfrak{C} \subseteq \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$ e $d \in \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$. Dizemos que d é dominada por $\mathfrak{C}$, ou que $\mathfrak{C}$ domina d, se para quaisquer $x \in \mathrm{X}$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ existir $d_{x,\epsilon,\delta} \in \mathfrak{C}$ tal que $d(x, \cdot) \wedge \delta \leq d_{x,\epsilon,\delta}(x, \cdot) + \epsilon$. Dizemos também que a família $\{d_{x,\epsilon,\delta}\}_{x \in \mathrm{X}, \epsilon > 0, \delta < \infty}$ domina d. Finalmente, dizemos que $\mathfrak{C}$ é saturado se toda ∞pq-métrica dominada por $\mathfrak{C}$ pertencer a $\mathfrak{C}$.

O leitor notará grande similaridade entre calibres e sistemas de localização.

Definição 1.4.1. *[14] Seja $\mathfrak{C} \subseteq \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$. Dizemos que $\mathfrak{C}$ é um calibre em X se cumprir as seguintes proriedades:*

($\mathfrak{C}_1$) *$\mathfrak{C}$ é um ideal em $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$;*

($\mathfrak{C}_2$) *$\mathfrak{C}$ é saturado.*

Assim como ocorre para sistemas de localização, por vezes encontramos subconjuntos de $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$ com características "próximas" das de um calibre. As próximas definições e resultados tratam deste assunto.

Definição 1.4.2. *[14] Seja $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$. Dizemos que $\mathfrak{D}$ é um calibre base em X se for um ideal base em $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$.*

É claro que um calibre também é um calibre base.

Para cada $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$, definimos $\widetilde{\mathfrak{D}} = \{d \in \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X}) \mid \mathfrak{D} \text{ domina } d\}$ e dizemos que $\widetilde{\mathfrak{D}}$ é a saturação de $\mathfrak{D}$.

Definição 1.4.3. *[14] Seja $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$. Dizemos que $\mathfrak{D}$ é uma base para um calibre $\mathfrak{C}$ em X se $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{C}$. Dizemos também que $\mathfrak{D}$ gera $\mathfrak{C}$ ou que $\mathfrak{C}$ é gerado por $\mathfrak{D}$.*

O exemplo a seguir mostra que um calibre pode ser garado por diferentes bases.

Exemplo 1.4.4. *[14] Seja* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais equipado com a métrica usual* d_E*. Para cada* $\mathrm{A} \subseteq [0,1]$ *tal que* $\sup \mathrm{A} = 1$*,* $\mathfrak{D}_{\mathrm{A}} = \{ad_E \mid a \in \mathrm{A}\}$ *é uma base que gera o calibre* $\mathfrak{C} = \{d_E\}$*.*

As duas próximas proposições mostram que calibres base e bases para calibres são conceitos equivalentes.

Proposição 1.4.5. *[14] Seja* $\mathfrak{D}$ *um calibre base em* X*. Então* $\widetilde{\mathfrak{D}}$ *é um calibre em* X *gerado por* $\mathfrak{D}$*.*

Demonstração. É similar a demonstração da proposição 1.3.4. □

Proposição 1.4.6. *[14] Seja* $\mathfrak{D}$ *uma base para um calibre* $\mathfrak{C}$ *em* X*. Então* $\mathfrak{D}$ *é um calibre base em* X*.*

Demonstração. É similar a demonstração da proposição 1.3.5. □

1.5 Torres

A estrutura definida nesta seção caracteriza-se por uma família de operadores fecho pré-topológico em 2^{X}, indexada pelo conjunto $\mathbb{R}_+$. Para detalhes sobre operadores fecho topológico e pré-topológico nós referimos a seção 7.3 do apêndice.

Definição 1.5.1. *[14] Seja* $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ *uma família de aplicações de* 2^{X} *em* 2^{X}*. Dizemos que* $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ *é uma torre em* X *se cumprir as seguintes propriedades:*

(ℓ_1) $\mathrm{A} \subseteq \ell_\epsilon(\mathrm{A})$;

(ℓ_2) $\ell_\epsilon(\emptyset) = \emptyset$;

(ℓ_3) $\ell_\epsilon(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \ell_\epsilon(\mathrm{A}) \cup \ell_\epsilon(\mathrm{B})$;

(ℓ_4) $\ell_\epsilon(\ell_\delta(\mathrm{A})) \subseteq \ell_{\epsilon+\delta}(\mathrm{A})$;

(ℓ_5) $\ell_\epsilon(A) = \bigcap_{\epsilon < \delta} \ell_\delta(A)$;

para quaisquer $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$ *e* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$*.*

Uma torre $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ em X será, ocasionalmente, denotada apenas por ℓ. É rotina verificar que cada ℓ_ϵ é um operador fecho pré-topológico. Notemos apenas que de (ℓ_3) e (ℓ_5) obtém-se

$$\forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}, \forall \epsilon \leq \delta \in \mathbb{R}_+ : \ell_\epsilon(\mathrm{A}) \subseteq \ell_\delta(\mathrm{B}).$$

Proposição 1.5.2. *[14] As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ *é uma torre em* X*;*

(ii) $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$ *é uma família de operadores fecho pré-topológico e as propriedades* (ℓ_4) *e* (ℓ_5) *são cumpridas;*

(iii) ℓ_0 *é um operador fecho topológico ,*$\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in]0,\infty[}$ *é uma família de operadores fecho pré-topológico e as propriedades* (ℓ_4) *e* (ℓ_5) *são cumpridas.*

Demonstração. As propriedades $(\ell_1), (\ell_2)$ e (ℓ_3) implicam que uma torre ℓ é uma família de operadores fecho pré-topológico. □

1.6 Envelopes

Nesta seção introduzimos uma estrutura que é uma noção de operador envelope (invólucro) para aplicações sobre $\mathbb{R}$, e pode ser comparada aos conceitos de regularização semicontínua inferiormente (superiormente) e regularização convexa de aplicações. Ao leitor interessado nestes conceitos de regularização referimos [3] e [19].

Definição 1.6.1. *[14] Uma aplicação*

$$\gamma : [0, \infty]^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]^{\mathrm{X}}$$

é chamada de um envelope em X *se cumprir as seguintes propriedades:*

(γ_1) $\gamma(\mu) \leq \mu$*;*

(γ_2) $\gamma(\mu \wedge \nu) = \gamma(\mu) \wedge \gamma(\nu)$*;*

(γ_3) $\gamma(\gamma(\mu)) = \gamma(\mu)$*;*

(γ_4) $\gamma(\mu + \alpha) = \gamma(\mu) + \alpha$*;*

para quaisquer $\alpha \in [0, \infty]$ *e* $\mu, \nu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$.

Proposição 1.6.2. *[14] Seja* $\gamma : [0, \infty]^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ *um envelope em* X*. Então, para qualquer* $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$*:*

(i) $\gamma(\alpha) = \alpha$*, para qualquer* α *constante;*

(ii) $\gamma(\mu - \alpha) = \gamma(\mu) - \alpha$, *para qualquer* $\alpha \in \left[0, \inf_{x \in \mathrm{X}} \mu(x)\right]$;

(iii) $\gamma((\mu - \alpha) \vee 0) \geq (\gamma(\mu) - \alpha) \vee 0$, *para qualquer* $\alpha \in [0, \infty]$.

Demonstração. A afirmação (i) segue de (γ_4) e (γ_1) pondo $\mu = 0$. A afirmação (ii) segue de (γ_4) desde que

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) &= \gamma(\mu - \alpha + \alpha) \\ &= \gamma(\mu - \alpha) + \alpha. \end{aligned}$$

A afirmação (iii) segue de (ii) e do fato que $(\mu - \alpha) \vee 0 = \mu \vee \alpha - \alpha$. □

O conjunto de todas as aplicações limitadas de $[0, \infty]^{\mathrm{X}}$ será denotado por $[0, \infty]_b^{\mathrm{X}}$.

Proposição 1.6.3. *[14] Um envelope* γ *em* X *é completamente determinado pela sua restrição a* $[0, \infty]_b^{\mathrm{X}}$. *Em particular, para cada* $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ *e para cada* $A \subseteq \mathbb{R}_+$ *tal que* $\sup \mathrm{A} = \infty$, *temos que*

$$\gamma(\mu) = \sup_{a \in \mathrm{A}} \gamma(\mu \wedge a).$$

Demonstração. Segue de (γ_2), (γ_4) e da proposição anterior, pois

$$\sup_{a \in \mathrm{A}} \gamma(\mu \wedge a) = \sup_{a \in \mathrm{A}} \gamma(\mu) \wedge a.$$

□

Proposição 1.6.4. *[14] Seja* $\gamma' : [0, \infty]_b^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]_b^{\mathrm{X}}$ *uma aplicação satisfazendo, para quaisquer* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *e* $\mu, \nu \in [0, \infty]_b^{\mathrm{X}}$, *as seguintes propriedades:*

(γ_1') $\gamma'(\mu) \leq \mu$;

(γ_2') $\gamma'(\mu \wedge \nu) = \gamma'(\mu) \wedge \gamma'(\nu)$;

(γ_3') $\gamma'(\gamma'(\mu)) = \gamma'(\mu)$;

(γ_4') $\gamma'(\mu + \alpha) = \gamma'(\mu) + \alpha$.

Definamos

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \infty]^{\mathrm{X}} &\to [0, \infty]^{\mathrm{X}} \\ \mu &\mapsto \sup_{a < \infty} \gamma'(\mu \wedge a). \end{aligned}$$

Então γ *é o único envelope em* X *cuja restrição a* $[0, \infty]_b^{\mathrm{X}}$ *coincide com* γ'.

Demonstração. Que γ cumpre (γ_1) e (γ_2) é imediato. Para provar (γ_3), seja $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Então

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma(\mu)) &= \sup_{a<\infty} \gamma'\left(\left(\sup_{b<\infty} \gamma'(\mu \wedge b)\right) \wedge a\right) \\ &= \sup_{a<\infty} \gamma'\left(\sup_{b<\infty} (\gamma'(\mu \wedge a) \wedge b)\right) \\ &= \sup_{a<\infty} \gamma'(\mu \wedge a) \\ &= \gamma(\mu).\end{aligned}$$

Para provar (γ_4) sejam $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $\alpha < \infty$. Então

$$\begin{aligned}\gamma(\mu+\alpha) &= \sup_{a\leq d<\infty} \gamma'(\mu \wedge (d-\alpha)+\alpha) \\ &= \sup_{a\leq d<\infty} \gamma'(\mu \wedge (d-\alpha))+\alpha \\ &= \gamma(\mu)+\alpha.\end{aligned}$$

A unicidade de γ segue da proposição anterior. $\square$

Para o que segue, necessitamos de um certo tipo de aplicação característica. Para cada $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{A}; \\ \infty, & x \notin \mathrm{A}. \end{cases},\end{aligned}$$

chamada de *indicador* de A. Denotamos por $Ind(\mathrm{X})$ o conjunto dos indicadores de subconjuntos de X.

As próximas definições e resultados tratam do fato que um envelope é completamente determinado pela sua restrição a $Ind(\mathrm{X})$.

O conjunto de todas as aplicações de $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ cuja imagem é um subconjunto finito de $\mathbb{R}_+$ será denotado por $Fin(\mathrm{X})$. Seja $\mu \in Fin(\mathrm{X})$ e suponhamos que $\mu(X) = \{a_1,\dots,a_n\}$. Pondo $\mathrm{A}_i = \mu^{-1}(a_i)$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ segue que $\mu = \inf_{i=1}^{n} (a_i + \theta_{\mathrm{A}_i})$.

Seja $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}_b$. Dizemos que uma família $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ em $Fin(\mathrm{X})$ é um desenvolvimento de μ se $\mu_\epsilon \leq \mu \leq \mu_\epsilon + \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$.

Proposição 1.6.5. *[14] Um envelope γ em X é completamente determinado pela sua restrição a $Ind(\mathrm{X})$. Em particular, para cada $\mu \in [0,\infty]^X$ e para cada desenvolvimento $\left\{\mu_\epsilon = \inf_{i=1}^{n(\epsilon)} \left(a_i^{(\epsilon)} + \theta_{\mathrm{A}_i^{(\epsilon)}}\right)\right\}_{\epsilon>0}$ (onde, para cada $\epsilon > 0$, $\mu_\epsilon(\mathrm{X}) = \{a_1^{(\epsilon)}, \dots, a_{n(\epsilon)}^{(\epsilon)}\}$ e $\mathrm{A}_i^{(\epsilon)} = \mu_\epsilon^{-1}(a_i^{(\epsilon)})$ para cada $i \in \{1,\dots,n(\epsilon)\}$) de μ, temos que*

$$\mu = \sup_{\epsilon>0} \left(\inf_{i=1}^{n(\epsilon)} \left(a_i^{(\epsilon)} + \mu(\theta_{\mathrm{A}_i^{(\epsilon)}})\right)\right).$$

Demonstração. Segue de (γ_2) e (γ_4) que, para cada $\epsilon > 0$, temos

$$\gamma(\mu_\epsilon) \leq \gamma(\mu) \leq \gamma(\mu_\epsilon) + \epsilon,$$

e então, aplicando novamente (γ_2) e (γ_4) segue que

$$\begin{aligned}\gamma(\mu) &= \sup_{\epsilon>0} \gamma(\mu_\epsilon) \\ &= \sup_{\epsilon>0} \left(\inf_{i=1}^{n(\epsilon)} \left(a_i^{(\epsilon)} + \mu(\theta_{\mathrm{A}_i^{(\epsilon)}}) \right) \right).\end{aligned}$$

□

Corolário 1.6.6. *[14] Sejam γ um envelope em X e $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Se para cada $\delta < \infty$, $\left\{ \mu_{\epsilon,\delta} = \inf_{i=1}^{n(\epsilon,\delta)} \left(a_i^{(\epsilon,\delta)} + \theta_{\mathrm{A}_i^{(\epsilon,\delta)}} \right) \right\}_{\epsilon>0}$ é um desenvolvimento de $\mu \wedge \delta$, então*

$$\mu = \sup_{\delta<\infty} \sup_{\epsilon>0} \left(\inf_{i=1}^{n(\epsilon,\delta)} \left(a_i^{(\epsilon,\delta)} + \mu(\theta_{\mathrm{A}_i^{(\epsilon,\delta)}}) \right) \right).$$

1.7 Quadros

A estrutura definida nesta seção consiste de um conjunto de aplicações de $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ que são pontos fixos do envelope a elas associado, como veremos no próximo capítulo. A efeito de comparação, podemos associá-la a uma coleção de aplicações semicontínuas inferiormente.

Definição 1.7.1. *[14] Seja $\mathfrak{R} \subseteq [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Dizemos que $\mathfrak{R}$ é um quadro em X se cumprir as seguintes propriedades:*

$(\mathfrak{R}_1)$ $\bigvee \mathrm{R} \in \mathfrak{R}$*;*

$(\mathfrak{R}_2)$ $\mu \wedge \nu \in \mathfrak{R}$*;*

$(\mathfrak{R}_3)$ $\mu + c \in \mathfrak{R}$*, para todo* $c \in [0,\infty]$*;*

$(\mathfrak{R}_4)$ $\mu - c \in \mathfrak{R}$*, para todo* $c \in \left[0, \inf_{x\in\mathrm{X}} \mu(x)\right]$*;*

para quaisquer $\mathrm{R} \subseteq \mathfrak{R}$ *e* $\mu, \nu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$.

Os membros de um quadro $\mathfrak{R}$ são chamados de aplicações regulares.

Proposição 1.7.2. *[14] Seja $\mathfrak{R} \subseteq [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ um quadro em X. Então:*

(i) *$\mathfrak{R}$ contém todas as aplicações constantes;*

(ii) $(\mu - \alpha) \vee 0 \in \mathfrak{R}$*, para quaisquer* $\mu \in \mathfrak{R}$ *e* $\alpha \in [0, \infty]$.

Demonstração. Pondo $\mathrm{R} = \emptyset$ em $(\mathfrak{R}_1)$ segue que $0 \in \mathfrak{R}$ e então (i) segue de (R_3) pondo $\mu = 0$. A afirmação (ii) segue de (i), $(\mathfrak{R}_1)$ e $(\mathfrak{R}_4)$. $\square$

Concluímos esse capítulo definindo genericamente as estruturas apresentadas até então.

Definição 1.7.3. *Seja* Ω *uma distância, um operador limite, um sistema de localização, um calibre, uma torre, um envelope ou um quadro em* X*. Dizemos, genericamente, que* Ω *é uma aproximação em* X*.*

Capítulo 2

Estruturas associadas

As estruturas definidas no capítulo 1 são conceitualmente e tecnicamente bem diferentes uma das outras, mas são todas equivalentes conforme mostraremos neste capítulo. Não só mostraremos que cada estrutura determina outra sem ambiguidade como também daremos fórmulas precisas para estas transições. Duas estruturas relacionadas por tais transições são chamadas de *estruturas associadas* (*equivalentes*). Desse modo, falaremos, por exemplo, de um envelope associado a uma distância.

Uma vez que temos 7 estruturas definidas, existem 42 possíveis transições entre as mesmas. Plausivelmente nem todas serão apresentadas, pois algumas são pouco importantes e outras podem ser obtidas por simples composições das transições apresentadas. Os teoremas que aprensentam transições serão marcados com uma indicação do tipo da transição; por exemplo, $(\gamma \Rightarrow \mathfrak{R})$ indica a transição de um envelope a um quadro.

Na primeira parte deste capítulo nós apresentamos as seguintes transições diretas, de onde resulta a equivalência de todas as estruturas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ell & & & & \\ & & \Updownarrow & & & & \\ \lambda & \Leftrightarrow & \rho & \Leftrightarrow & \mathfrak{C} & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \\ & & \Updownarrow & & & & \\ & & \gamma & & & & \\ & & \Updownarrow & & & & \\ & & \mathfrak{R} & & & & \end{array}$$

Na segunda parte apresentamos algumas outras transições não necessariamente diretas:

$$\begin{array}{ccccc} \rho & \Leftrightarrow & \mathcal{A} & \Rightarrow & \lambda \\ & & \Updownarrow & & \Uparrow \\ & & \gamma & \Leftarrow & \mathfrak{C} \end{array}$$

2.1 Distâncias e operadores limite

Teorema 2.1.1 ($\rho \Rightarrow \lambda$)**.** *[14] Seja ρ uma distância em* X*. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{F}(\mathrm{X}) &\to [0,\infty]^{\mathrm{X}} \\ \mathcal{F} &\mapsto \sup_{\mathrm{U}\in sec\mathcal{F}} \rho_{\mathrm{U}} \end{aligned}$$

é um operador limite em X*. Além disso,*

$$\rho(x,\mathrm{A}) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda(\mathcal{U})(x),$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$*.*

Demonstração. Que λ cumpre (λ_1) segue de (ρ_1), e (λ_2) segue do fato que para quaisquer filtros em X tais que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ temos $\mathbb{U}(\mathcal{G}) \subseteq \mathbb{U}(\mathcal{F})$. Para provar (λ_3), seja $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ uma família de filtros em X. Então, notando que $sec\left(\bigcap_{j\in J}\mathcal{F}_j\right) = \bigcup_{j\in J} sec\mathcal{F}_j$, segue que

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcap_{j\in J}\mathcal{F}_j\right) &= \sup_{\mathrm{U}\in sec\left(\bigcap_{j\in J}\mathcal{F}_j\right)} \rho_{\mathrm{U}} \\ &= \sup_{\mathrm{U}\in\bigcup_{j\in J} sec\mathcal{F}_j} \rho_{\mathrm{U}} \\ &= \sup_{j\in J}\sup_{\mathrm{U}\in sec\mathcal{F}_j} \rho_{\mathrm{U}} \\ &= \sup_{j\in J}\lambda(\mathcal{F}_j). \end{aligned}$$

Para provar (λ_4), sejam $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, $\{\mathcal{S}(y)\}_{y\in\mathrm{X}}$ uma seleção de filtros em X e definamos

$$\epsilon = \sup_{y\in\mathrm{X}} \lambda(\mathcal{S}(y))(y).$$

Primeiro suponhamos que todos os filtros envolvidos sejam ultrafiltros. Para cada $\mathrm{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{S},\mathcal{F})$, existe $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ de modo que para cada $y \in \mathrm{F}$, $\mathrm{D} \in \mathcal{S}(y)$. Logo,

$$\rho(y,\mathrm{D}) \leq \lambda(\mathcal{S}(y))(y) \leq \epsilon.$$

Isso prova que $\mathrm{D}^{[\epsilon]} \in \mathcal{F}$ e então segue de (ρ_4) que

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{D}} &\leq \rho_{\mathrm{D}^{[\epsilon]}} + \epsilon \\ &\leq \sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \rho_{\mathrm{F}} + \epsilon \\ &\leq \lambda(\mathcal{F}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Segue da arbitrariedade de $\mathrm{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{S},\mathcal{F})$ que

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{D}(\mathcal{S},\mathcal{F})) &= \sup_{\mathrm{D}\in\mathcal{D}(\mathcal{S},\mathcal{F})} \rho_{\mathrm{D}} \\ &\leq \lambda(\mathcal{F}) + \epsilon.\end{aligned}$$

Agora suponhamos que todos os filtros envolvidos sejam arbitrários. Para cada seleção $\mathfrak{F} \in \prod_{y\in\mathrm{X}} \mathbb{U}(\mathcal{S}(y))$, definamos

$$\epsilon_{\mathfrak{F}} = \sup_{y\in\mathrm{X}} \lambda(\mathfrak{F}(y))(y).$$

Uma verificação simples mostra que

$$\epsilon = \sup_{\mathfrak{F}\in\prod_{y\in\mathrm{X}}\mathbb{U}(\mathcal{S}(y))} \epsilon_{\mathfrak{F}}.$$

Do resultado para ultrafiltros segue que, para cada $\mathfrak{F} \in \prod_{y\in\mathrm{X}} \mathbb{U}(\mathcal{S}(y))$ e $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$,

$$\lambda(\mathcal{D}(\mathfrak{F},\mathcal{U})) \leq \lambda(\mathcal{U}) + \epsilon_{\mathfrak{F}}.$$

Segue então de (λ_3) que

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{D}(\mathcal{S},\mathcal{F})) &= \sup_{\mathfrak{F}\in\prod_{y\in\mathrm{X}}\mathbb{U}(\mathcal{S}(y))}\ \sup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \lambda(\mathcal{D}(\mathfrak{F},\mathcal{U})) \\ &\leq \sup_{\mathfrak{F}\in\prod_{y\in\mathrm{X}}\mathbb{U}(\mathcal{S}(y))}\ \sup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} (\lambda(\mathcal{U}) + \epsilon_{\mathfrak{F}}) \\ &= \lambda(\mathcal{F}) + \epsilon.\end{aligned}$$

Para provar a afirmação final do teorema, primeiro notemos que uma desigualdade é clara. Para provar a outra desigualdade, seja $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$. Segue da definição de λ e, aplicando distributividade completa, que

$$\inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda(\mathcal{U}) = \sup_{\mathfrak{G}\in\prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})}\mathcal{U}}\ \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \rho_{\mathfrak{G}(\mathcal{U})}.$$

Agora, segue da proposição 1.2.3 que, para cada $\mathfrak{G} \in \prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \mathcal{U}$, existe um subconjunto finito $\mathbb{U}_{\mathfrak{G}} \subseteq \mathbb{U}(\mathrm{A})$ tal que $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_{\mathfrak{G}}} \mathfrak{G}(\mathcal{U})$. Logo, segue de (ρ_3) que

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda(\mathcal{U}) &\leq \sup_{\mathfrak{G}\in\prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})}\mathcal{U}} \rho_{(\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_{\mathfrak{G}}}\mathfrak{G}(\mathcal{U}))} \\ &\leq \rho_{\mathrm{A}},\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade que faltava. □

Teorema 2.1.2 ($\lambda \Rightarrow \rho$)**.** *[14] Seja λ um operador limite em* X*. Então a aplicação*

$$\begin{aligned}\rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} &\to [0,\infty] \\ (x,\mathrm{A}) &\mapsto \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda(\mathcal{U})(x)\end{aligned}$$

é uma distância em X. *Além disso,*

$$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mathrm{U} \in sec\mathcal{F}} \rho(x, \mathrm{U}),$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$.

Demonstração. Que ρ cumpre (ρ_1) segue de (λ_1), enquanto (ρ_2) é trivial e (ρ_3) segue do fato que, para quaisquer A, B $\in 2^{\mathrm{X}}$, temos que $\mathbb{U}(stack(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})) = \mathbb{U}(stack\mathrm{A}) \cup \mathbb{U}(stack\mathrm{B})$. A afirmação final do teorema será provada agora de modo a ser usada para mostrar que ρ cumpre (ρ_4). Seja λ_0 definida por

$$\begin{aligned} \lambda_0 : \mathbb{F}(\mathrm{X}) &\to [0, \infty]^{\mathrm{X}} \\ \mathcal{F} &\mapsto \sup_{\mathrm{U} \in sec\mathcal{F}} \rho_{\mathrm{U}}. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})$. Então

$$\begin{aligned} \lambda_0(\mathcal{U}) &= \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \rho_{\mathrm{U}} \\ &= \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \inf_{\mathcal{V} \in \mathbb{U}(\mathrm{U})} \lambda(\mathcal{V}) \\ &\leq \lambda(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela distributividade completa, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_0(\mathcal{U}) &= \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \inf_{\mathcal{V} \in \mathbb{U}(\mathrm{U})} \lambda(\mathcal{V}) \\ &= \inf_{\mathfrak{G} \in \prod_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{U}(\mathrm{U})} \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \lambda(\mathfrak{G}(\mathrm{U})). \end{aligned}$$

Além disso, para quaisquer $\mathfrak{G} \in \prod_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}}$ e $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, temos que $\mathrm{U} \in \mathfrak{G}(\mathrm{U})$ e por isso $\bigcap_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \mathfrak{G}(\mathrm{U}) \subseteq \mathcal{U}$. Segue então de (λ_2) que

$$\lambda(\mathrm{U}) \leq \lambda \left(\bigcap_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \mathfrak{G}(\mathrm{U}) \right).$$

Desde que isso vale para qualquer $\mathfrak{G} \in \prod_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}}$, segue que

$$\lambda(\mathcal{U}) \leq \lambda_0(\mathcal{U})$$

Consequentemente, λ e λ_0 coincidem em ultrafiltros. Segue do fato que λ cumpre (λ_3) e da definição de λ_0 que $\lambda = \lambda_0$.

Para provar (ρ_4), sejam $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{V} \in \mathbb{U}(\mathrm{A}^{[\epsilon]})$.

No que segue, provaremos que para cada $y \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}$, existe $\mathcal{S}(y) \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$ tal que $\lambda(\mathcal{S}(y))(y) \leq \epsilon$.

Realmente, se a afirmação não procedesse então para algum $y \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}$ e para qualquer $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$ teríamos que

$$\begin{aligned}\epsilon &< \lambda(\mathcal{U})(y)\\ &= \lambda_0(\mathcal{U})(y)\\ &= \sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \rho(y, \mathrm{U}).\end{aligned}$$

Consequentemente, para qualquer $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$, existiria $\mathrm{U}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ tal que $\epsilon < \rho(y, \mathrm{U}_{\mathcal{U}})$. Pela proposição 1.2.3 existem $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$ de modo que $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\mathcal{U}_i}$. Segue então de (ρ_3) que

$$\begin{aligned}\epsilon &< \inf_{i=1}^{n} \rho(y, \mathrm{U}_{\mathcal{U}_i})\\ &= \rho\left(y, \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{\mathcal{U}_i}\right)\\ &\leq \rho(y, \mathrm{A}),\end{aligned}$$

o que é uma contradição com a escolha de y. Isso prova a afirmação acima. Dessa forma, para cada $y \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}$, podemos fixar algum $\mathcal{S}(y) \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$ tal que $\lambda(\mathcal{S}(y))(y) \leq \epsilon$. Se $y \notin \mathrm{A}$, definamos $\mathcal{S}(y) = stack(y)$. Seja

$$\epsilon^* = \sup_{y\in\mathrm{X}} \lambda(\mathcal{S}(y))(y).$$

Desde que $\mathrm{A} \in \bigcap_{y\in\mathrm{A}^{[\epsilon]}} \mathcal{S}(y)$, segue que $\mathrm{A} \in \mathcal{D}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ e então, pela proposição 1.2.4, $\bigcap_{y\in\mathrm{A}^{[\epsilon]}} \mathcal{S}(y) \in \mathbb{U}(\mathrm{A})$. Segue do fato que λ cumpre (λ_4) e da definição de ρ que, para qualquer $x \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned}\rho(x, \mathrm{A}) &\leq \lambda(\mathcal{D}(\mathcal{S}, \mathcal{V}))(x)\\ &\leq \lambda(\mathcal{V})(x) + \epsilon^*\\ &\leq \lambda(\mathcal{V})(x) + \epsilon.\end{aligned}$$

Desde que isso vale para qualquer $\mathcal{V} \in \mathbb{U}(\mathrm{A}^{[\epsilon]})$, segue que

$$\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, \mathrm{A}^{[\epsilon]}) + \epsilon.$$

□

Os dois teoremas anteriores mostram que distâncias e operadores limite são conceitos equivalentes. Ao lado de sistemas de localização e calibres eles formam as mais importantes e úteis estruturas.

Agora exploramos a relação entre distâncias e calibres.

2.2 Distâncias e calibres

Teorema 2.2.1 ($\rho \Rightarrow \mathfrak{C}$)**.** *[14] Seja ρ uma distância em* X*. Então*

$$\mathfrak{C} = \left\{ d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}) \mid \forall\, \mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}, \forall\, x \in \mathrm{X} : \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x,a) \leq \rho(x,\mathrm{A}) \right\}$$

é um calibre em X*.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{D}$ um subconjunto finito de $\mathfrak{C}$, $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$. Então, por distributividade completa, temos que $\inf_{a\in\mathrm{A}} \sup_{d\in\mathfrak{D}} d(x,a) = \sup_{\varphi\in\mathfrak{D}^{\mathrm{A}}} \inf_{a\in\mathrm{A}} \varphi(a)(x,a)$. Então, fixando $\varphi \in \mathfrak{D}^{\mathrm{A}}$, segue que

$$\begin{aligned} \inf_{a\in\mathrm{A}} \varphi(a)(x,a) &= \inf_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{a\in\varphi^{-1}(d)} d(x,a) \\ &\leq \inf_{d\in\mathfrak{D}} \rho(x, \varphi^{-1}(d)) \\ &= \rho(x,\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\mathfrak{C}$ é fechado sob formação de supremo finito. As demais verificações de que $\mathfrak{C}$ é um ideal são rotineiras.

Seja $d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X})$ tal que para quaisquer $x \in \mathrm{X}$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ exista $d_0 \in \mathfrak{C}$ de modo que $d(x,\cdot) \wedge \delta \leq d_0(x,\cdot) + \epsilon$. Segue então, que para quaisquer $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$,

$$\begin{aligned} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a) \wedge \delta &\leq \inf_{a\in\mathrm{A}} d_0(x,a) + \epsilon \\ &\leq \rho(x,\mathrm{A}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Segue da arbitrariedade de ϵ e δ que $d \in \mathfrak{C}$. Portanto $\mathfrak{C}$ é saturado. □

Proposição 2.2.2. *[14] Seja ρ uma distância em* X*. Então, para quaisquer $\delta < \infty$ e* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$*, a aplicação*

$$\begin{aligned} d^\delta_{\mathrm{B}} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} &\to [0,\infty] \\ (x,y) &\mapsto (\rho(x,\mathrm{B}) \wedge \delta - \rho(y,\mathrm{B}) \wedge \delta) \vee 0 \end{aligned}$$

é uma pq-métrica no calibre associado a ρ.

Demonstração. Que d^δ_{B} é uma pq-métrica é rotina verificar. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$. Segue então de (ρ_4) que

$$\begin{aligned} \inf_{a\in\mathrm{A}} d^\delta_{\mathrm{B}}(x,a) &= \inf_{a\in\mathrm{A}} (\rho(x,\mathrm{B}) \wedge \delta - \rho(a,\mathrm{B}) \wedge \delta) \vee 0 \\ &\leq \left(\rho(x,\mathrm{B}) \wedge \delta - \sup_{a\in\mathrm{A}} \rho(a,\mathrm{B}) \wedge \delta \right) \vee 0 \\ &\leq \left(\left(\rho(x,\mathrm{A}) + \sup_{a\in\mathrm{A}} \rho(a,\mathrm{B}) \right) \wedge \delta - \sup_{a\in\mathrm{A}} \rho(a,\mathrm{B}) \wedge \delta \right) \vee 0 \\ &\leq \left(\rho(x,\mathrm{A}) + \sup_{a\in\mathrm{A}} \rho(a,\mathrm{B}) \wedge \delta - \sup_{a\in\mathrm{A}} \rho(a,\mathrm{B}) \wedge \delta \right) \vee 0 \\ &= \rho(x,\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Segue da caracterização dada no teorema 2.2.1 que d_{B}^{δ} é um membro do calibre associado a ρ. $\square$

Teorema 2.2.3 ($\mathfrak{C} \Rightarrow \rho$)**.** *[14] Seja $\mathfrak{D}$ um calibre base em* X. *Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} &\to [0, \infty] \\ (x, \mathrm{A}) &\mapsto \sup_{d \in \mathfrak{D}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a) \end{aligned}$$

é uma distância em X.

Demonstração. As verificações de (ρ_1), (ρ_2) e (ρ_3) são rotineiras. Para provar (ρ_4), sejam $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ e $\epsilon > 0$. Então, para quaisquer $b \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}$, $d \in \mathfrak{C}$ e $\delta > 0$, existe $a_d \in \mathrm{A}$ tal que $d(b, a_d) \leq \epsilon + \delta$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(x, a_d) &\leq d(x, b) + d(b, a_d) \\ &\leq d(x, b) + \epsilon + \delta, \end{aligned}$$

o que prova que $\inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a) \leq \inf_{b \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}} d(x, b) + \epsilon + \delta$. Desde que isso vale para qualquer $d \in \mathfrak{C}$, segue que $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, \mathrm{A}^{[\epsilon]}) + \epsilon$. $\square$

Teorema 2.2.4. *[14] Seja ρ uma distância em* X *e $\mathfrak{C}$ o calibre associado. Então*

$$\rho(x, \mathrm{A}) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a),$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$. A desigualdade $\sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a) \leq \rho(x, \mathrm{A})$ segue da caracterização de $\mathfrak{C}$. Segue da proposição 2.2.2 que

$$\begin{aligned} \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a) &\geq \sup_{\delta < \infty} \sup_{\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d_{\mathrm{B}}^{\delta}(x, a) \\ &\geq \sup_{\delta < \infty} \inf_{a \in \mathrm{A}} d_{\mathrm{A}}^{\delta}(x, a) \\ &= \sup_{\delta < \infty} \inf_{a \in \mathrm{A}} (\rho(x, \mathrm{A}) \wedge \delta - \rho(a, \mathrm{A}) \wedge \delta) \vee 0 \\ &= \sup_{\delta < \infty} \inf_{a \in \mathrm{A}} \rho(x, \mathrm{A}) \wedge \delta \\ &= \rho(x, \mathrm{A}), \end{aligned}$$

o que prova a outra desigualdade. $\square$

Teorema 2.2.5. *[14] Seja $\mathfrak{C}$ um calibre em* X *e ρ a distância associada. Então*

$$\mathfrak{C} = \left\{ d \in \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X}) \mid \forall\ \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}, \forall\ x \in \mathrm{X} : \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a) \leq \rho(x, \mathrm{A}) \right\}.$$

Demonstração. Definamos

$$\mathfrak{C}' = \left\{ d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}) \mid \forall\, \mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}, \forall\, x \in \mathrm{X} : \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x,a) \leq \rho(x,\mathrm{A}) \right\}.$$

Então, pelo teorema 2.2.1, $\mathfrak{C}'$ é o calibre associado a ρ. Segue do teorema 2.2.3 que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$. Suponhamos por absurdo que exista $d_0 \in \mathfrak{C}' \setminus \mathfrak{C}$; então d_0 não é dominada por $\mathfrak{C}$, e por isso existem $x \in \mathrm{X}$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ de modo que para qualquer $d \in \mathfrak{C}$,

$$d_0(x,\cdot) \wedge \delta \nleq d(x,\cdot) + \epsilon.$$

Para cada $d \in \mathfrak{C}$, seja $\mathrm{A}(d) = \{y \in \mathrm{X} \mid d_0(x,y) \wedge \delta > d(x,y) + \epsilon\}$. Então é claro que para quaisquer d, $d_1 \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{A}(d) \cap \mathrm{A}(d_1) = \mathrm{A}(d \vee d_1) \neq \emptyset$. Segue então do teorema 2.2.4 que

$$\begin{aligned}
\sup_{d \in \mathfrak{C}} \rho(x, \mathrm{A}(d)) \wedge \delta &= \sup_{d \in \mathfrak{C}} \sup_{d_1 \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}(d)} d_1(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \sup_{d_1 \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}(d \vee d_1)} (d \vee d_1)(x,y) \wedge \delta \\
&= \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}(d)} d(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}(d)} (d_0(x,y) \wedge \delta - \epsilon) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}(d)} d_0(x,y) \wedge \delta - \epsilon \\
&\leq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \sup_{d_2 \in \mathfrak{C}'} \inf_{y \in \mathrm{A}(d)} d_2(x,y) \wedge \delta - \varepsilon \\
&= \sup_{d \in \mathfrak{C}} \rho(x, \mathrm{A}(d)) \wedge \delta - \epsilon,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. □

Os teoremas 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4 e 2.2.5 combinados mostram que distâncias e calibres são conceitos equivalentes.

Para finilizar o estudo do relacionamento entre distâncias e calibres, mostramos no que segue um resultado que será utilizado adiante no trabalho.

Teorema 2.2.6. *[14] Sejam ρ uma distância em X e $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X})$. Se*

$$\rho(x,\mathrm{A}) = \sup_{d \in \mathfrak{D}} \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x,a),$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, então $\mathfrak{D}$ é uma base para o calibre associado a ρ.

Demonstração. Segue do teorema 2.2.5 que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$. Suponhamos por absurdo que exista $d_0 \in \mathfrak{C} \setminus \widetilde{\mathfrak{D}}$. Então d_0 não é dominada por $\mathfrak{D}$, e por isso existem $x \in \mathrm{X}$, $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ de modo que para qualquer $d \in \mathfrak{D}$,

$$d_0(x,\cdot) \wedge \delta \nleq d(x,\cdot) + \epsilon.$$

Para cada $d \in \mathfrak{D}$, seja $\mathrm{A}(d) = \{y \in \mathrm{X} \mid d_0(x,y) \wedge \delta > d(x,y) + \epsilon\}$. Então é claro que para quaisquer d, $d_1 \in \mathfrak{D}$, $\mathrm{A}(d) \cap \mathrm{A}(d_1) = \mathrm{A}(d \vee d_1) \neq \emptyset$. Segue então do teorema 2.2.4 que

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{D}} \rho(x, \mathrm{A}(d)) \wedge \delta &= \sup_{d\in\mathfrak{D}} \sup_{d_1\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d_1(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{D}} \sup_{d_1\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d\vee d_1)} (d \vee d_1)(x,y) \wedge \delta \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} (d_0(x,y) \wedge \delta - \epsilon) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d_0(x,y) \wedge \delta - \epsilon \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{D}} \sup_{d_1\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d_1(x,y) \wedge \delta - \varepsilon \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{D}} \rho(x, \mathrm{A}(d)) \wedge \delta - \epsilon,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. □

No seguinte corolário, para cada $\delta < \infty$ e $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$, d^δ_B denota a pq-métrica definida na proposição 2.2.2.

Corolário 2.2.7. *[14] Seja ρ uma distância em* X*. Então a família de pq-métricas*

$$\mathfrak{D} = \{d^\delta_\mathrm{B} \mid \delta < \infty, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}\}$$

é uma base para o calibre associado a ρ.

Demonstração. Seja $\mathfrak{C}$ o calibre associado a ρ. Segue da proposição 2.2.2 que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$ e então segue do teorema 2.2.4 que $\rho(x, \mathrm{A}) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a)$, para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^\mathrm{X}$. O resultado segue então do teorema 2.2.6. □

No que segue investigamos a relação entre calibres e sistemas de localização.

2.3 Calibres e sistemas de localização

Teorema 2.3.1 ($\mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{A}$)**.** *[14] Seja $\mathfrak{D}$ um calibre base em* X*. Para cada $x \in \mathrm{X}$, seja*

$$\mathcal{B}_x = \{d(x,\cdot) \mid d \in \mathfrak{D}\}.$$

Então $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ é um sistema de localização base em X*. Além disso, se $\mathfrak{C}$ é o calibre gerado por $\mathfrak{D}$ e $\mathcal{A}$ é a sistema de localização gerada por $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$, então*

$$\mathfrak{C} = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}) \mid \forall\, x \in \mathrm{X} : d(x,\cdot) \in \mathcal{A}_x\}.$$

Demonstração. Para cada $x \in \mathrm{X}$, $\mathcal{B}_x$ é um ideal base em $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$ pelo fato de $\mathfrak{D}$ ser um ideal base em $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$, e satisfaz $(\mathcal{B}_1)$ e $(\mathcal{B}_2)$ pelo fato dos membros de $\mathfrak{D}$ serem ∞pq-métricas. A afirmação final segue de:

$$\begin{aligned} d \in \mathfrak{C} &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathrm{X}, \forall\, \epsilon > 0, \forall\, \delta < \infty,\ \exists\, d_0 \in \mathfrak{D} : d(x,\cdot) \wedge \delta \le d_0(x,\cdot) + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathrm{X}, \forall\, \epsilon > 0, \forall\, \delta < \infty,\ \exists\, \mu \in \mathcal{B}_x : d(x,\cdot) \wedge \delta \le \mu + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathrm{X} : d(x,\cdot) \in \mathcal{A}_x. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.2 ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{C}$)**.** *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em* X*. Então*

$$\mathfrak{C} = \{d \in \mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X}) \mid \forall\, x \in \mathrm{X} : d(x,\cdot) \in \mathcal{A}_x\}$$

é um calibre em X*.*

Demonstração. Que $\mathfrak{C}$ cumpre $(\mathfrak{C}_1)$ segue do fato que $\mathcal{A}_x$ é um ideal em $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$, para cada $x \in \mathrm{X}$. Que $\mathfrak{C}$ cumpre $(\mathfrak{C}_2)$ segue de $(\mathcal{A}_2)$. □

Proposição 2.3.3. *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em* X*. Então, para quaisquer $\delta < \infty$ e $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$, a aplicação*

$$\begin{gathered} d_{\mathrm{B}}^{\delta} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,\infty] \\ (x,y) \mapsto \left(\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{b \in \mathrm{B}} \mu(b) \wedge \delta - \sup_{\nu \in \mathcal{A}_y} \inf_{b \in \mathrm{B}} \nu(b) \wedge \delta \right) \vee 0 \end{gathered}$$

é uma pq-métrica no calibre associado a $\mathcal{A}$.

Demonstração. É rotina verificar que d_{B}^{δ} é uma pq-métrica. Fixemos, arbitrariamente, $x \in \mathrm{X}$ e $\epsilon > 0$. Escolhamos $\mu_0 \in \mathcal{A}_x$ de modo que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{b \in \mathrm{B}} \mu(b) \wedge \delta \le \inf_{b \in \mathrm{B}} \mu_0(b) \wedge \delta + \epsilon$$

e então escolhamos uma família $\{\nu_w\}_{w \in \mathrm{X}} \in \prod_{w \in \mathrm{X}} \mathcal{A}_w$ de modo que, para quaisquer $w, b \in \mathrm{X}$ tenhamos

$$\mu_0(b) \wedge \delta \le \nu_x(w) + \nu_w(b) + \epsilon.$$

Consequentemente, para qualquer $y \in \mathrm{X}$ temos

$$\begin{aligned}
d^{\delta}_{\mathrm{B}}(x,y) &= \left(\sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{b\in\mathrm{B}} \mu(b)\wedge\delta - \sup_{\nu\in\mathcal{A}_y} \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b\in\mathrm{B}} \mu_0(b)\wedge\delta + \epsilon - \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu_y(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b\in\mathrm{B}} (\nu_x(y)+\nu_y(b)+\epsilon)\wedge\delta + \epsilon - \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu_y(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\inf_{b\in\mathrm{B}} (\nu_x(y)+\nu_y(b)\wedge\delta+\epsilon) + \epsilon - \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu_y(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\leq \left(\nu_x(y) + 2\epsilon + \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu_y(b)\wedge\delta - \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu_y(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&= \nu_x(y) + 2\epsilon,
\end{aligned}$$

e desde que $\mathcal{A}_x$ é saturado para qualquer $x \in \mathrm{X}$, segue que $d^{\delta}_{\mathrm{B}}(x,\cdot) \in \mathcal{A}_x$. Portanto, d^{δ}_{B} pertence ao calibre associado a $\mathcal{A}$.

□

Proposição 2.3.4. *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em X e $\mathfrak{C}$ o calibre associado a $\mathcal{A}$. Então*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{a\in\mathrm{A}} \mu(a) = \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a)$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$.

Demonstração. Uma desigualdade segue diretamente da definição de $\mathfrak{C}$. Segue da proposição 2.3.3 que

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a) &\geq \sup_{\delta<\infty} \sup_{\mathrm{B}\subseteq\mathrm{X}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d^{\delta}_{\mathrm{B}}(x,a) \\
&= \sup_{\delta<\infty} \sup_{\mathrm{B}\subseteq\mathrm{X}} \inf_{a\in\mathrm{A}} \left(\sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{b\in\mathrm{B}} \mu(b)\wedge\delta - \sup_{\nu\in\mathcal{A}_a} \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&\geq \sup_{\delta<\infty} \inf_{a\in\mathrm{A}} \left(\sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{b\in\mathrm{B}} \mu(b)\wedge\delta - \sup_{\nu\in\mathcal{A}_a} \inf_{b\in\mathrm{B}} \nu(b)\wedge\delta \right) \vee 0 \\
&= \sup_{\delta<\infty} \inf_{a\in\mathrm{A}} \sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{b\in\mathrm{B}} \mu(b)\wedge\delta \\
&= \sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{b\in\mathrm{B}} \mu(b),
\end{aligned}$$

provando a outra desigualdade.

□

Teorema 2.3.5. *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em X e $\mathfrak{C}$ o calibre associado a $\mathcal{A}$. Então, para qualquer $x \in \mathrm{X}$, $\mathcal{A}_x = \widehat{\mathcal{B}_x}$, onde $\mathcal{B}_x = \{d(x,\cdot) \mid d \in \mathfrak{C}\}$.*

Demonstração. É claro que, para cada $x \in \mathrm{X}$, $\widehat{\mathcal{B}_x} \subseteq \mathcal{A}_x$. A fim de mostrar a inclusão contrária, suponhamos por absurdo que para algum $x \in \mathrm{X}$ exista $\mu \in \mathcal{A}\backslash\widehat{\mathcal{B}_x}$. Então μ não é dominada por $\mathcal{B}_x$, e por isso existem $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ tais que, para qualquer $d \in \mathfrak{C}$,

$$\mu \wedge \delta \not\leq d(x, \cdot) + \epsilon.$$

Para cada $d \in \mathfrak{C}$, definamos $\mathrm{A}(d) = \{y \in \mathrm{X} \mid \mu(y) \wedge \delta > d(x,y) + \epsilon\}$. É claro que, para quaisquer $d, d_* \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{A}(d) \cap \mathrm{A}(d_*) = \mathrm{A}(d \vee d_*) \neq \emptyset$. Segue então que

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d_*(x,y) \wedge \delta &\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d\vee d_*)} (d \vee d_*)(x,y) \wedge \delta \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} (\mu(y) \wedge \delta - \epsilon) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} \mu(y) \wedge \delta - \epsilon \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{\nu\in\mathcal{A}(x)} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} \nu(y) \wedge \delta - \epsilon,
\end{aligned}$$

mas isso, pela proposição 2.3.4 é uma contradição.

□

Os teoremas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.5 mostram que sistemas de localização e calibres são estruturas equivalentes.

A seguir começamos o estudo do relacionamento entre distâncias e envelopes. A transição de uma distância a um envelope será dada utilizando o calibre associado a distância. Por isso o próximo teorema mostra como calibres induzem envelopes.

2.4 Distâncias e envelopes

Teorema 2.4.1 ($\mathfrak{C} \Rightarrow \gamma$)**.** *[14] Seja $\mathfrak{D}$ um calibre base em* X*. Então a aplicação $\gamma : [0,\infty]^{\mathrm{X}} \to [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ definida por*

$$\gamma(\mu)(x) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\mu(y) + d(x,y)),$$

para cada $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $x \in \mathrm{X}$, é um envelope em X*.*

Demonstração. É rotina verificar que γ cumpre (γ_1), (γ_2) e (γ_4). Mostremos então que γ cumpre (γ_3). Seja $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Segue de (γ_1) que $\gamma(\gamma(\mu)) \leq \gamma(\mu)$. Seja $x \in \mathrm{X}$ arbitrário. Segue que

$$\begin{aligned}
\gamma(\gamma(\mu))(x) &= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\gamma(\mu)(y) + d(x,y)) \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{X}} \left(\sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \inf_{w\in\mathrm{X}} (\gamma(w) + d_*(y,w)) + d(x,y) \right) \\
&\geq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{X}} \left(\inf_{w\in\mathrm{X}} (\gamma(w) + d(y,w)) + d(x,y) \right) \\
&\geq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{w\in\mathrm{X}} (\gamma(w) + d(x,w)) \\
&= \gamma(\mu)(x),
\end{aligned}$$

o que prova a outra desigualdade.

□

Teorema 2.4.2 ($\rho \Rightarrow \gamma$)**.** *[14] Sejam ρ uma distância em X, $\mathfrak{C}$ o calibre associado a ρ e γ o envelope associado a $\mathfrak{C}$. Então*

$$\rho(x, \mathrm{A}) = \gamma(\theta_{\mathrm{A}})(x),$$

para cada $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Demonstração. Segue diretamente dos teoremas 2.2.4 e 2.4.1. □

Teorema 2.4.3 ($\gamma \Rightarrow \rho$)**.** *[14] Seja γ um envelope em X. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} &\to [0, \infty] \\ (x, \mathrm{A}) &\mapsto \gamma(\theta_{\mathrm{A}})(x) \end{aligned}$$

é uma distância em X.

Demonstração. Que ρ cumpre (ρ_1), (ρ_2) e (ρ_3) é rotina verificar. Mostremos que ρ cumpre (ρ_4). Para quaisquer $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, segue da definição de $\mathrm{A}^{[\epsilon]}$ que

$$\gamma(\theta_{\mathrm{A}}) \leq \theta_{\mathrm{A}^{[\epsilon]}} + \epsilon,$$

e então

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{A}} &= \gamma(\theta_{\mathrm{A}}) \\ &= \gamma(\gamma(\theta_{\mathrm{A}})) \\ &\leq \gamma(\theta_{\mathrm{A}^{[\epsilon]}} + \epsilon) \\ &= \gamma(\theta_{\mathrm{A}^{[\epsilon]}}) + \epsilon \\ &= \rho_{\mathrm{A}^{[\epsilon]}} + \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4. *[14] Sejam γ um envelope em X, ρ a distância associada a γ e $\mathfrak{C}$ o calibre associado a ρ. Então*

$$\gamma(\mu)(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu(y) + d(x, y)),$$

para cada $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ e $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Definamos a aplicação $\gamma_* : [0, \infty]^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ pondo

$$\gamma_*(\mu)(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu(y) + d(x, y)),$$

para cada $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $x \in \mathrm{X}$.

Segue do teorema 2.4.1 que γ_* é um envelope em X. Para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, o teorema 2.2.4 acarreta em

$$\begin{aligned}\gamma_*(\theta_{\mathrm{A}})(x) &= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\theta_{\mathrm{A}}(y) + d(x,y))\\ &= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}} d(x,y)\\ &= \rho(x,\mathrm{A})\\ &= \gamma(\theta_{\mathrm{A}})(x),\end{aligned}$$

e então γ_* e γ coincidem em $Ind(\mathrm{X})$. Segue da proposição 1.6.5 que $\gamma_* = \gamma$.

□

Os teoremas 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4 mostram que distâncias e envelopes são estruturas equivalentes.

No que segue, estudamos o relacionamento entre distâncias e torres.

2.5 Distâncias e torres

Teorema 2.5.1 ($\rho \Rightarrow \ell$)**.** *[14] Seja ρ uma distância em X. Então a família de aplicações $\{\ell_\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}_+}$ de 2^{X} em 2^{X}, definida por*

$$\ell_\epsilon(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{[\epsilon]},$$

para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, é uma torre em X. Além disso,

$$\rho(x,\mathrm{A}) = \inf\,\{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})\},$$

para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Demonstração. Que ℓ cumpre (ℓ_1), (ℓ_2) e (ℓ_3) segue diretamente das propriedades (ρ_1), (ρ_2) e (ρ_3) de ρ. Para provar que ℓ cumpre (ℓ_4), sejam $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \ell_\epsilon(\ell_\delta(\mathrm{A}))$ arbitrários. Então $\rho(x,\mathrm{A}^{[\delta]}) \leq \epsilon$ e por (ρ_4) segue que $\rho(x,\mathrm{A}) \leq \epsilon + \delta$, ou seja, $x \in \ell_{\epsilon+\delta}$. A propriedade (ℓ_5) segue diretamente do fato que $\rho(x,\mathrm{A}) \leq \epsilon$ se e apenas se $\rho(x,\mathrm{A}) \leq \epsilon_*$ para todo $\epsilon_* > \epsilon$. Para provarmos a última afirmação do presente teorema, sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ arbitrários. É claro que $\{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})\} \subseteq [\rho(x,\mathrm{A}),\infty[$ e então $\rho(x,\mathrm{A}) \leq \inf\,\{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})\}$. O resultando segue notando que $\rho(x,\mathrm{A}) \in \{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})\}$. □

Teorema 2.5.2 ($\ell \Rightarrow \rho$)**.** *[14] Seja ℓ uma torre em X. Então a aplicação*

$$\begin{aligned}\rho : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} &\to [0,\infty]\\ (x,\mathrm{A}) &\mapsto \inf\,\{\epsilon \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})\}\end{aligned}$$

é uma distância em X*. Além disso,*

$$\ell_\epsilon(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{[\epsilon]},$$

para quaisquer $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ *e* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$*.*

Demonstração. As propriedades (ρ_1), (ρ_2) e (ρ_3) seguem diretamente das propriedades (ℓ_1), (ℓ_2) e (ℓ_3) de ℓ. A fim de mostrarmos que ρ cumpre (ρ_4), provaremos a última afirmação do presente teorema. Sejam $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ arbitrários. Então segue que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{A}^{[\epsilon]} &\Rightarrow \inf\{\delta \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\delta(\mathrm{A})\} \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \forall\, \delta > \epsilon : x \in \ell_\delta(\mathrm{A}) \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{\delta > \epsilon} \ell_\delta(\mathrm{A}) = \ell_\epsilon(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$\begin{aligned} x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A}) &\Rightarrow \rho(x, \mathrm{A}) = \inf\{\delta \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \ell_\delta(\mathrm{A})\} \leq \epsilon \\ &\Rightarrow x \in \mathrm{A}^{[\epsilon]}. \end{aligned}$$

Finalmente, (ρ_4) segue do fato que se $\rho(x, \mathrm{A}^{[\epsilon]}) < \delta$ então $x \in \ell_\delta(\mathrm{A}^{[\epsilon]}) = \ell_\delta(\ell_\epsilon(\mathrm{A})) \subseteq \ell_{\delta+\epsilon}(\mathrm{A})$ e logo $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \delta + \epsilon$.

□

Os teoremas 2.5.1 e 2.5.2 motram que distâncias e torres são estruturas equivalentes. Finalmente, analisamos no que segue a relação entre quadros e envelopes.

2.6 Quadros e envelopes

Teorema 2.6.1 ($\mathfrak{R} \Rightarrow \gamma$)**.** *[14] Seja* $\mathfrak{R}$ *um quadro em* X*. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \infty]^{\mathrm{X}} &\to [0, \infty]^{\mathrm{X}} \\ \mu &\mapsto \sup\, \{\nu \in \mathfrak{R} \mid \nu \leq \mu\} \end{aligned}$$

é um envelope em X*. Além disso,*

$$\mathfrak{R} = \{\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}} \mid \gamma(\mu) = \mu\}.$$

Demonstração. É rotina verificar que γ cumpre as propriedades (γ_1), (γ_2) e (γ_3), basta notar que quadros e envelopes se relacionam de forma similar a conjuntos fechados e operadores fecho em espaços topológicos. Para mostrar que γ cumpre (γ_4), sejam $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ e $\alpha \in [0, \infty]$ arbitrários. Segue que

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu+\alpha) &= \sup\{\nu \in \mathfrak{R} \mid \nu \leq \mu+\alpha\} \\
&= \sup\{\nu \in \mathfrak{R} \mid \alpha \leq \nu \leq \mu+\alpha\} \\
&= \sup\{\nu-\alpha \mid \nu \in \mathfrak{R}, \alpha \leq \nu, \nu-\alpha \leq \mu\}+\alpha \\
&= \sup\{\xi \in \mathfrak{R} \mid \xi \leq \mu\}+\alpha \\
&= \gamma(\mu)+\alpha.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.6.2 ($\gamma \Rightarrow \mathfrak{R}$)**.** *[14] Seja γ um envelope em* X*. Então*

$$\mathfrak{R} = \{\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \gamma(\mu) = \mu\}$$

é um quadro em X*. Além disso,*

$$\gamma(\mu) = \sup\,\{\nu \in \mathfrak{R} \mid \nu \leq \mu\},$$

para qualquer $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$.

Demonstração. Novamente, é rotina verificar que $\mathfrak{R}$ cumpre as propriedades $(\mathfrak{R}_1)$ e $(\mathfrak{R}_2)$, devido a similaridade da relação entre quadros e envelopes com a de conjuntos fechados e operadores fecho em espaços topológicos. Mostremos então que $\mathfrak{R}$ cumpre as propriedades $(\mathfrak{R}_1)$ e $(\mathfrak{R}_2)$. Seja $\mu \in \mathfrak{R}$. Se $\alpha \in [0,\infty]$ então

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu+\alpha) &= \gamma(\mu)+\alpha \\
&= \mu+\alpha,
\end{aligned}$$

e logo $\mu+\alpha \in \mathfrak{R}$. Se $\alpha \in \left[0, \inf_{x\in\mathrm{X}} \mu(x)\right]$, segue da proposição 1.6.2 que

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu-\alpha) &= \gamma(\mu)-\alpha \\
&= \mu-\alpha,
\end{aligned}$$

donde $\mu-\alpha \in \mathfrak{R}$. □

Os teoremas 2.6.1 e 2.6.2 mostram que envelopes e quadros são estruturas equivalentes. Os resultados anteriores mostram a equivalência de todas as aproximações em um conjunto X. Concluímos este capítulo com algumas outras transições.

2.7 Distâncias e sistemas de localização

Teorema 2.7.1 ($\rho \Rightarrow \mathcal{A}$)**.** *[14] Seja ρ uma distância em* X*. Então a sistema de localização $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ associada a ρ é dada por*

$$\mathcal{A}_x = \left\{\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \forall\ \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} : \inf_{a\in\mathrm{A}} \mu(a) \leq \rho(x,\mathrm{A})\right\},$$

para cada $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Segue dos teoremas 2.2.1 e 2.3.1 que a sistema de localização $\{\mathcal{A}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$ associada a ρ é gerada pela sistema de localização base $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathrm{X}}$, onde, para cada $x \in \mathrm{X}$,

$$\mathcal{B}_x = \left\{ d(x,\cdot) \mid d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}), \forall\, \mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}} : \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a) \leq \rho(x,\mathrm{A}) \right\}.$$

Para cada $x \in \mathrm{X}$, definamos

$$\mathcal{C}_x = \left\{ \nu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \forall\, \mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}} : \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a) \leq \rho(x,\mathrm{A}) \right\}.$$

Seja $\mathfrak{C}$ o calibre associado a ρ. É claro que $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{C}_x$ para cada $x \in \mathrm{X}$. Fixemos agora, arbitrariamente, $x \in \mathrm{X}$. A fim de obtermos uma contradição, suponhamos que exista $\mu \in \mathcal{C}_x \setminus \mathcal{A}_x$. Então μ não é dominada por $\mathcal{B}_x$ e logo devem existir $\epsilon > 0$ e $\delta < \infty$ de modo que, para qualquer $d \in \mathfrak{C}$ tenhamos

$$\mu \wedge \delta \not\leq d(x,\cdot) + \epsilon.$$

Para cada $d \in \mathfrak{C}$, definamos $\mathrm{A}(d) = \{y \in \mathrm{X} \mid \mu(y) \wedge \delta > d(x,y) + \epsilon\}$. É claro que $\mathrm{A}(d) \cap \mathrm{A}(d_*) = \mathrm{A}(d \vee d_*) \neq \emptyset$. Segue do teorema 2.2.4 que

$$\begin{aligned}
\sup_{d\in\mathfrak{C}} \rho(x,\mathrm{A}(d)) \wedge \delta &= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d_*(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{d_*\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d\vee d_*)} (d \vee d_*)(x,y) \wedge \delta \\
&= \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} d(x,y) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} (\mu(y) \wedge \delta - \epsilon) \wedge \delta \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} \mu(y) \wedge \delta - \epsilon \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{\nu\in\mathcal{A}_x} \inf_{y\in\mathrm{A}(d)} \nu(y) \wedge \delta - \epsilon \\
&\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} \rho(x,\mathrm{A}(d)) \wedge \delta - \epsilon,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. □

Teorema 2.7.2 ($\mathcal{A} \Rightarrow \rho$)**.** *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em* X. *Então a distância ρ associada a $\mathcal{A}$ é dada por*

$$\rho(x,\mathrm{A}) = \sup_{\mu\in\mathcal{A}_x} \inf_{a\in\mathrm{A}} \mu(a),$$

para cada $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Demonstração. Segue diretamente do teorema 2.2.3 e da proposição 2.3.4. □

2.8 Envelopes e sistemas de localização

Teorema 2.8.1 ($\gamma \Rightarrow \mathcal{A}$). *[14] Seja γ um envelope em* X. *Então a sistema de localização $\mathcal{A}$ associada a γ é dada por*

$$\mathcal{A}_x = \left\{ \mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \forall\, \nu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} : \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu + \nu)(y) \leq \gamma(\mu)(x) \right\},$$

para cada $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Segue do teorema 2.7.1 e do fato que, de acordo com o corolário 1.6.6, se μ cumpre a propriedade $\inf_{a \in \mathrm{A}} \mu(a) \leq \gamma(\theta_{\mathrm{A}})(x)$, para todo $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, então $\inf_{y \in \mathrm{X}} (\nu + \mu)(y) \leq \gamma(\nu)(x)$, para todo $\nu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$, como pode ser verificado sem dificuldades. □

Proposição 2.8.2. *[14] Seja $\{\mathcal{A}_x\}_{x \in \mathrm{X}}$ um sistema de localização em* X *gerada por um sistema de localização base $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in \mathrm{X}}$. Então as seguintes fórmulas são válidas para quaisquer $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$:*

(i) $\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{a \in \mathrm{A}} \mu(a) = \sup_{\mu \in \mathcal{B}_x} \inf_{a \in \mathrm{A}} \mu(a)$;

(ii) $\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu + \nu)(y) = \sup_{\mu \in \mathcal{B}_x} \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu + \nu)(y)$;

(iii) $\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} \mu(y) = \sup_{\mu \in \mathcal{B}_x} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} \mu(y)$;

(iv) $\sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \sup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \inf_{y \in \mathrm{F}} \mu(y) = \sup_{\mu \in \mathcal{B}_x} \sup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \inf_{y \in \mathrm{F}} \mu(y)$.

Demonstração. Apenas a primeira identidade será provada, pois a prova das demais é similar. Observemos que uma desigualdade é trivial; para mostrarmos a outra desigualdade, fixemos, arbitrariamente, $\mu \in \mathcal{A}_x$. Segue da definição de uma base para um sistema de localização que existe uma família $\{\mu_\epsilon^\delta\}_{\epsilon > 0, \delta < \infty}$ que domina μ. Segue então, que para qualquer $\delta < \infty$,

$$\begin{aligned} \inf_{a \in \mathrm{A}} \mu(a) \wedge \delta &\leq \inf_{\epsilon > 0} \inf_{a \in \mathrm{A}} \mu_\epsilon^\delta(a) + \epsilon \\ &\leq \inf_{\epsilon > 0} \sup_{\nu \in \mathcal{B}_x} \inf_{a \in \mathrm{A}} \nu(a) + \epsilon \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{B}_x} \inf_{a \in \mathrm{A}} \nu(a). \end{aligned}$$

□

Um resultado similar é válido para calibres e calibres base.

Proposição 2.8.3. *[14] Seja $\mathfrak{C}$ um calibre em* X *gerado por um calibre base $\mathfrak{D}$. Então as seguintes fórmulas são válidas para quaisquer $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$:*

(i) $\sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a)$;

(ii) $\sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\mu(x) + d(x,y)) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\mu(x) + d(x,y))$;

(iii) $\sup_{d\in\mathfrak{C}} \inf_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \sup_{y\in\mathrm{F}} d(x,y) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \inf_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \sup_{y\in\mathrm{F}} d(x,y)$;

(iv) $\sup_{d\in\mathfrak{C}} \sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \inf_{y\in\mathrm{F}} d(x,y) = \sup_{d\in\mathfrak{D}} \sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \inf_{y\in\mathrm{F}} d(x,y)$.

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma dada na proposição 2.8.2. □

Teorema 2.8.4 ($\mathcal{A} \Rightarrow \gamma$)**.** *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em* X*. Então o envelope γ associado a $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\gamma(\mu)(x) = \sup_{\nu\in\mathcal{A}_x} \inf_{y\in\mathrm{X}} (\mu+\nu)(y),$$

para cada $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Segue diretamente dos teoremas 2.3.5 e 2.4.1 e da proposição 2.8.2. □

2.9 Outras transições

O próximo resultado é necessário para que mostremos de que modo sistemas de localização induzem operadores limite.

Se $f \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ e $c \in [0,\infty]$, denotaremos o conjunto $\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) < c\}$ simplesmente por $\{f < c\}$. A mesma convenção vale se trocarmos $<$ por $>$, $\leq$ ou $\geq$.

Proposição 2.9.1. *[14] Sejam $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})$ e $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$. Então*

$$\sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \inf_{y\in\mathrm{U}} \mu(y) = \inf_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \sup_{y\in\mathrm{U}} \mu(y).$$

Demonstração. É claro que, para quaisquer $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{U}$, temos $\inf_{y\in\mathrm{U}} \mu(y) \leq \sup_{y\in\mathrm{V}} \mu(y)$. Logo

$$\sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \inf_{y\in\mathrm{U}} \mu(y) \leq \inf_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \sup_{y\in\mathrm{U}} \mu(y).$$

A fim de provarmos a outra desigualdade, suponhamos que $\inf_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \sup_{y\in\mathrm{U}} \mu(y) > c$. Então, para qualquer $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, temos que $\mathrm{U} \cap \{\mu > c\} \neq \emptyset$ e por isso $\{\mu > c\} \in \mathcal{U}$. Mas isso também implica que $c \leq \inf_{y\in\{\mu>c\}} \mu(y)$, o que, por sua vez, implica a desigualdade que almejávamos. □

Teorema 2.9.2 ($\mathcal{A} \Rightarrow \lambda$). *[14] Seja $\mathcal{A}$ um sistema de localização em X. Então o operador limite λ associado a $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} \mu(y),$$

para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ e $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Seja ρ a distância associada a $\{\mathcal{A}_x\}_{x \in \mathrm{X}}$. Aplicando distributividade completa, os teoremas 2.1.1 e 2.7.2 e a proposição 2.9.1, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathcal{F})(x) &= \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \rho(x, \mathrm{U}) \\
&= \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \sup_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{y \in \mathrm{U}} \mu(y) \\
&= \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\mathrm{U} \in \mathcal{U}} \sup_{y \in \mathrm{U}} \mu(y) \\
&= \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\{\mathrm{A}_\mathcal{U}\}_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \mathcal{U}} \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \sup_{y \in \mathrm{A}_\mathcal{U}} \mu(y) \\
&= \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\{\mathrm{A}_\mathcal{U}\}_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \in \prod_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \mathcal{U}} \sup_{y \in \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \mathrm{A}_\mathcal{U}} \mu(y) \\
&= \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} \mu(y).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.9.3 ($\mathfrak{C} \Rightarrow \lambda$). *[14] Seja $\mathfrak{C}$ um calibre em X. Então o operador limite λ associado a $\mathfrak{C}$ é dado por*

$$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} d(x, y),$$

para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ e $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Segue diretamente dos teoremas 2.3.5 e 2.9.2 e da proposição 2.8.2. □

Capítulo 3

Espaços de aproximação

Neste capítulo nós formalizamos o conceito de um espaço de aproximação. Também definimos uma estrutura similar a um operador limite, damos alguns exemplos de aproximações no conjunto $[0,\infty]$ e apresentamos várias tabelas com fórmulas de transição entre aproximações.

3.1 Espaços de aproximação

Definição 3.1.1. *[14] Seja Ω uma aproximação em um conjunto não vazio* X. *Ao par* (X,Ω) *chamamos de um espaço de aproximação.*

Enfatizamos que se Ω_1 e Ω_2 são estruturas associadas (equivalentes), então (X,Ω_1) e (X,Ω_2) representam o mesmo espaço de aproximação.

Sempre que não houver possibilidade de confusão, subentenderemos que as aproximações que intervirem em algum resultado serão todas equivalentes.

Denotaremos por $d_{\mathbb{E}}$ a ∞-métrica definida por

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{E}} : [0,\infty] \times [0,\infty] &\to [0,\infty] \\ (x,y) &\mapsto |x-y|, \end{aligned}$$

e por $d_{\mathbb{P}}$ a ∞q-métrica definida por

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{P}} : [0,\infty] \times [0,\infty] &\to [0,\infty] \\ (x,y) &\mapsto (x-y) \vee 0. \end{aligned}$$

A restrição de $d_{\mathbb{E}}$ a $\mathbb{R}_+$ será denotada por d_E (a métrica euclidiana usual) e a restrição $d_{\mathbb{P}}$ a $\mathbb{R}_+$ será denotada por d_P. Nas topologias induzidas por $d_{\mathbb{E}}$ e $d_{\mathbb{P}}$, o ponto ∞ é isolado, como pode ser verificado. Na seção 3.3 daremos exemplos de aproximações em $[0,\infty]$.

3.2 Operadores aderência

Nesta seção introduzimos uma estrutura cujas propriedades podem ser axiomatizadas e usadas para definir uma nova aproximação em um conjunto X, contudo não faremos isso, apenas a definiremos em função de outras aproximações.

Definição 3.2.1. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. A aplicação* $\zeta : \mathbb{F}(\mathrm{X}) \to [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ *definida por*

$$\zeta(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \rho(x, \mathrm{F}),$$

para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ *e* $x \in \mathrm{X}$*, é chamada de um operador aderência (associado a* ρ *e todas as demais estruturas associadas do espaço de aproximação* (X, ρ)*) em* X.

Para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, dizemos que a aplicação $\zeta(\mathcal{F}) : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ é a aderência de $\mathcal{F}$. A interpretação deste operador é análoga a do operador limite. Em cada ponto $x \in \mathrm{X}$, o valor $\zeta(\mathcal{F})(x)$ quantifica "quão longe" x está de ser um ponto de aderência do filtro $\mathcal{F}$. Umas das justificativas destas interpretações é dada nos seguintes resultados, que relacionam operadores limite e operadores aderência de forma similar ao relacionamento entre pontos limite e pontos de aderência de filtros.

Proposição 3.2.2. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. Então, para quaisquer* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*, temos que*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \zeta(\mathcal{F}) \leq \zeta(\mathcal{G}) \leq \lambda(\mathcal{G}) \leq \lambda(\mathcal{F}).$$

Demonstração. Segue do teorema 2.1.1 e da definição de operador aderência dada em 3.1.2. □

Proposição 3.2.3. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. Então, para qualquer* $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})$*, temos que*

$$\lambda(\mathcal{U}) = \zeta(\mathcal{U}).$$

Demonstração. Desde que $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro, então $sec\mathcal{U} = \mathcal{U}$, e logo o resultado segue do teorema 2.1.1 e da definição de operador aderência dada em 3.1.2. □

Proposição 3.2.4. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. Então, para quaisquer* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ *e* $x \in \mathrm{X}$*, temos que*

(i) $\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})} \lambda(\mathcal{U})(x) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})} \zeta(\mathcal{U})(x);$

(ii) $\zeta(\mathcal{F})(x) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{X})} \lambda(\mathcal{U})(x) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathrm{X})} \zeta(\mathcal{U})(x)$.

Demonstração. A prova de (i) segue do teorema 2.1.1 e da proposição 3.1.4. Provemos a afirmação (ii). Aplicando distributividade completa, obtemos

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \lambda(\mathcal{U})(x) &= \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \sup_{\mathrm{U}\in\mathcal{U}} \rho(x,\mathrm{U})\\ &= \sup_{\sigma\in\prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})}\mathcal{U}} \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \rho(x,\sigma(\mathcal{U})).\end{aligned}$$

Segue da proposição 1.2.3 que, para cada $\sigma \in \prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \mathcal{U}$, existe uma subcoleção finita $\mathbb{U}_\sigma \subseteq \mathbb{U}(\mathcal{F})$ de modo que

$$\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_\sigma} \sigma(\mathcal{U}) \in \mathcal{F}.$$

Então

$$\begin{aligned}\inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})} \lambda(\mathcal{U})(x) &\leq \sup_{\sigma\in\prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})}\mathcal{U}} \inf_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_\sigma} \rho(x,\sigma(\mathcal{U}))\\ &= \sup_{\sigma\in\prod_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}(\mathcal{F})}\mathcal{U}} \rho\left(x, \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_\sigma} \sigma(\mathcal{U})\right)\\ &\leq \zeta(\mathcal{F})(x).\end{aligned}$$

A desigualdade contrária é trivial. □

Proposição 3.2.5. *[14] Seja* (X,ρ) *um espaço de aproximação. Então, para quaisquer* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ *e* $x \in \mathrm{X}$, *existe* $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$ *tal que* $\zeta(\mathcal{F})(x) = \lambda(\mathcal{U})(x)$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ e suponhamos por absurdo que para todo $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$ tenhamos $\zeta(\mathcal{F})(x) < \lambda(\mathcal{U})(x)$. Segue da proposição 3.1.4 e da definição de operador aderência dada em 3.1.2 que, para cada $\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})$, existe $\mathrm{U}_\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ de modo que $\zeta(\mathcal{F})(x) < \rho(x,\mathrm{U}_\mathcal{U})$. Segue agora da proposição 1.2.3 que existe um subconjunto finito $\mathbb{U}_* \subseteq \mathbb{U}(\mathcal{F})$ tal que $\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_*} \mathrm{U}_\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ e consequentemente, pela definição de operador aderência,

$$\begin{aligned}\zeta(\mathcal{F})(x) &\geq \rho\left(x, \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_*} \mathrm{U}_\mathcal{U}\right)\\ &= \min_{\mathcal{U}\in\mathbb{U}_*} \rho(x,\mathrm{U}_\mathcal{U})\\ &> \zeta(\mathcal{F})(x),\end{aligned}$$

o que é um absurdo. □

Proposição 3.2.6. *[14] Seja* (X,ρ) *um espaço de aproximação. Então, para quaisquer* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ *e* $x \in \mathrm{X}$, *temos que*

$$\begin{aligned}\zeta(\mathcal{F})(x) &= \sup_{\mu\in\mathcal{A}_x}\sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}}\inf_{y\in\mathrm{F}}\mu(y)\\ &= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}}\inf_{y\in\mathrm{F}} d(x,y).\end{aligned}$$

Demonstração. Segue dos teoremas 2.7.2 e 2.2.3 e da definição de operador aderência dada em 3.1.2. □

Proposição 3.2.7. *[14] Seja* (X,ρ) *um espaço de aproximação. Então, para quaisquer* $\mathcal{F}\in\mathbb{F}(\mathrm{X})$ *e* $x,y\in\mathrm{X}$*, temos que*

$$\lambda(\mathcal{F})(x)\leq\rho(x,\{y\})+\lambda(\mathcal{F})(y).$$

Demonstração. Fixemos, arbitrariamente, $\mathcal{F}\in\mathbb{F}(\mathrm{X})$ e $x,y\in\mathrm{X}$. Segue do teorema 2.9.3 que

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{F})(x) &= \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}}\sup_{z\in\mathrm{F}} d(x,z)\\ &\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}}\sup_{z\in\mathrm{F}}(d(x,y)+d(y,z))\\ &\leq \sup_{d\in\mathfrak{C}} d(x,y)+\sup_{d\in\mathfrak{C}}\inf_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}}\sup_{z\in\mathrm{F}} d(y,z)\\ &= \rho(x,\{y\})+\lambda(\mathcal{F})(y).\end{aligned}$$

□

3.3 Exemplos de aproximações

Nesta seção damos alguns exemplos de espaços de aproximação bem como de aproximações associadas aos mesmos.

Exemplo 3.3.1. *[14] A aplicação*

$$\rho_{\mathbb{E}}:[0,\infty]\times 2^{[0,\infty]}\to[0,\infty]$$

$$(x,\mathrm{A})\mapsto\begin{cases}0, & x=\infty, \mathrm{A}\ \textit{ilimitado};\\ \infty, & x=\infty, \mathrm{A}\ \textit{limitado};\\ \inf\limits_{a\in\mathrm{A}\setminus\{\infty\}}|x-a|, & x<\infty.\end{cases},$$

é uma distância em $[0,\infty]$.

É rotina verificar que $\rho_{\mathbb{E}}$ é uma distância em $[0,\infty]$. O espaço de aproximação $([0,\infty],\rho_{\mathbb{E}})$ será denotado apenas por $\mathbb{E}$.

O sistema de localização $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}=\{\mathcal{A}^{\mathbb{E}}_x\}_{x\in[0,\infty]}$ associado a $\rho_{\mathbb{E}}$ é dado por

$$\mathcal{A}_x^{\mathbb{E}} = \{\mu \in [0,\infty]^{[0,\infty]} \mid \mu \leq d_{\mathbb{E}}(x,\cdot)\} \ (x < \infty)$$
e
$$\mathcal{A}_\infty^{\mathbb{E}} = \widehat{\mathcal{B}},$$

onde

$$\mathcal{B} = \{\theta_{]a,\infty]} \mid a < \infty\}.$$

Deixamos para o leitor interessado determinar outras aproximações associadas a distância $\rho_{\mathbb{E}}$.

Exemplo 3.3.2. *[14] A aplicação*

$$\rho_{\mathbb{P}} : [0,\infty] \times 2^{[0,\infty]} \to [0,\infty]$$

$$(x, \mathrm{A}) \mapsto \begin{cases} (x - \sup \mathrm{A}) \vee 0, & \mathrm{A} \neq \emptyset; \\ \infty, & \mathrm{A} = \emptyset. \end{cases},$$

é uma distância em $[0,\infty]$.

É rotina verificar que $\rho_{\mathbb{P}}$ é uma distância em $[0,\infty]$. O espaço de aproximação $([0,\infty], \rho_{\mathbb{P}})$ será denotado apenas por $\mathbb{P}$.

O sistema de localização $\mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \{\mathcal{A}_x^{\mathbb{P}}\}_{x\in[0,\infty]}$ associado a $\rho_{\mathbb{P}}$ é dado por

$$\mathcal{A}_x^{\mathbb{P}} = \{\mu \in [0,\infty]^{[0,\infty]} \mid \mu \leq d_{\mathbb{P}}(x,\cdot)\} \ (x < \infty)$$
e
$$\mathcal{A}_\infty^{\mathbb{P}} = \widehat{\mathcal{B}},$$

onde

$$\mathcal{B} = \{\theta_{]a,\infty]} \mid a < \infty\}.$$

O operador limite $\lambda_{\mathbb{P}}$ associado a $\rho_{\mathbb{P}}$ é determinado como segue. Para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}([0,\infty])$ definamos

$$\kappa(\mathcal{F}) = \inf_{\mathrm{U} \in sec(\mathcal{F})} \sup \mathrm{U}.$$

Então

$$\lambda_{\mathbb{P}}(\mathcal{F})(x) = (x - \kappa(\mathcal{F})) \vee 0 \qquad \forall x \in [0,\infty].$$

Notemos, por exemplo, que para qualquer filtro $\mathcal{F}$ em $[0,\infty]$, ou $\lambda_{\mathbb{P}}(\mathcal{F})(\infty) = 0$ ou $\lambda_{\mathbb{P}}(\mathcal{F})(\infty) = \infty$. O primeiro caso ocorre se $\kappa(\mathcal{F}) = \infty$, isto é, se todo membro de $sec(\mathcal{F})$ for ilimitado.

Novamente deixamos para o leitor interessado determinar outras aproximações associadas a distância $\rho_{\mathbb{P}}$.

O próximo exemplo é um caso particular de um espaço de aproximação topológico (ver detalhes no capítulo 5) onde tomamos $\mathrm{X} = [0,\infty]$ e a distância $\rho_{\mathcal{T}}$ é induzida pela topologia discreta em $[0,\infty]$.

Exemplo 3.3.3. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \rho : [0,\infty] \times 2^{[0,\infty]} &\to [0,\infty] \\ (x, \mathrm{A}) &\mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{A}; \\ \infty, & x \notin \mathrm{A}. \end{cases}, \end{aligned}$$

é uma distância em $[0,\infty]$.

As aproximações associadas a ρ são dadas a partir dos resultados do capítulo 5 considerando a topologia discreta em $[0,\infty]$.

O próximo exemplo parecerá bastante natural, uma vez que a definição de uma distância é inspirada nas propriedades de uma métrica. Ao leitor interessado por espaços de aproximação induzidos por ∞pq-métricas e suas propriedades algébricas nós referimos o capítulo 3 de [14], já que não abordamos tal assunto neste trabalho.

Exemplo 3.3.4. *Seja d uma ∞pq-métrica em* $[0,\infty]$. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \rho_d : [0,\infty] \times 2^{[0,\infty]} &\to [0,\infty] \\ (x, \mathrm{A}) &\mapsto \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a), \end{aligned}$$

é uma distância em $[0,\infty]$.

Que ρ_d é uma distância em $[0,\infty]$ segue do teorema 2.2.3 tomando o calibre base $\mathfrak{D} = \{d\}$. A determinação das aproximações associadas a distância ρ_d é deixada por conta do leitor interessado.

3.4 Fórmulas de transição

Concluímos este capítulo apresentando tabelas (para rápida e fácil referência) com algumas fórmulas de transição provadas até então e outras não provadas, cuja verificação é deixada por conta do leitor interessado. De acordo com as proposições 2.8.2 e 2.8.3, nas fórmulas envolvendo calibres e sistemas de localização é possível usar bases para os mesmos.

[14] Fórmulas de transição a partir de uma distância ρ

operador limite	$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{A \in sec\mathcal{F}} \rho(x, A)$
operador aderência	$\zeta(\mathcal{F})(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \rho(x, F)$
sistema de localização	$\mathcal{A}_x = \{\mu \in [0, \infty]^X \mid \forall\, A \subseteq X : \inf_{y \in A} \mu(y) \leq \rho(x, A)\}$
calibre	$\mathfrak{C} = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(X) \mid \forall\, A \subseteq X : \inf_{y \in A} d(\cdot, y) \leq \rho_A\}$
torre	$\ell_\epsilon(A) = A^{[\epsilon]} = \{x \in X \mid \rho(x, A) \leq \epsilon\}$
envelope	$\gamma(\mu)(x) = \sup_{\delta < \infty} \sup_{\epsilon > 0} \inf_{i=1}^{n(\delta,\epsilon)} (m_i^{\delta,\epsilon} + \rho(x, M_i^{\delta,\epsilon}))$ onde, para cada $\delta < \infty$, $\left(\inf_{i=1}^{n(\delta,\epsilon)} (m_i^{\delta,\epsilon} + \theta_{M_i^{\delta,\epsilon}}) \right)_{\epsilon > 0}$ é um desenvolvimento para $\mu \wedge \delta$

Tabela 3.4.1

[14] Fórmulas de transição a partir de um operador limite λ

distância	$\rho(x, A) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(A)} \lambda(\mathcal{U})(x)$
operador aderência	$\zeta(\mathcal{F})(x) = \inf_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathcal{F})} \lambda(\mathcal{U})(x)$
sistema de aproximação	$\mathcal{A}_x = \{\mu \in [0, \infty]^X \mid \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{U}(X) : \sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{y \in U} \mu(y) \leq \lambda(\mathcal{U})(x)\}$
calibre	$\mathfrak{C} = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(X) \mid \forall\, \mathcal{U} \in \mathbb{U}(X) : \sup_{U \in \mathcal{U}} \inf_{y \in U} d(\cdot, y) \leq \lambda(\mathcal{U})\}$
torre	$\ell_\epsilon(A) = \{x \in X \mid \exists\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}(A) : \lambda(\mathcal{F})(x) \leq \epsilon\}$

Tabela 3.4.2

[14] Fórmulas de transição a partir de um sistema de localização $\mathcal{A}$

distância	$\rho(x, A) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{y \in A} \mu(y)$
calibre	$\mathfrak{C} = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(X) \mid \forall x \in X : d(x, \cdot) \in \mathcal{A}_x\}$
operador limite	$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{y \in F} \mu(y)$
operador aderência	$\zeta(\mathcal{F})(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}_x} \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{y \in F} \mu(y)$
envelope	$\gamma(\mu)(x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}_x} \inf_{y \in X} (\mu + \nu)(y)$

Tabela 3.4.3

[14] Fórmulas de transição a partir de um calibre $\mathfrak{C}$

distância	$\rho(x, \mathrm{A}) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{y \in \mathrm{A}} d(x, y)$
sistema de localização	$\mathcal{A}x = \{\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}} \mid \{d(x, \cdot) \mid d \in \mathfrak{C}\} \text{ domina } \mu\}$
operador limite	$\lambda(\mathcal{F})(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \sup_{y \in \mathrm{F}} d(x, y)$
operador aderência	$\zeta(\mathcal{F})(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}} \sup_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \inf_{y \in \mathrm{F}} d(x, y)$
envelope	$\gamma(\mu)(x) = \sup_{d \in \mathfrak{C}_x} \inf_{y \in \mathrm{X}} (\mu(y) + d(x, y))$

Tabela 3.4.4

[14] Fórmulas de transição a partir de um quadro $\mathfrak{R}$

distância	$\rho(x, \mathrm{A}) = \sup \{\mu(x) \mid \mu \in \mathfrak{R}, \mu_{\mid \mathrm{A}} = 0\}$
envelope	$\gamma(\mu) = \sup \{\nu \in \mathfrak{R} \mid \nu \leq \mu\}$

Tabela 3.4.5

Capítulo 4

Contrações

Neste capítulo introduzimos o conceito de contrações, as quais são as aplicações compatíveis com a estrutura dos espaços de aproximação, no mesmo sentido que as aplicações contínuas são compatíveis com a estrutura dos espaços topológicos. A definição de contração é dada em termos de distâncias, contudo o teorema 4.1.2 caracteriza contrações em termos das demais estruturas associadas de um espaço de aproximação.

4.1 Contrações

Definição 4.1.1. *[14] Sejam* (X, ρ) *e* (X^*, ρ^*) *espaços de aproximação. Dizemos que uma aplicação* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *é uma contração se* $\rho^*(f(x), f(\mathrm{A})) \leq \rho(x, \mathrm{A})$ *para quaisquer* $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$.

A fim de caracterizar contrações via envelopes no próximo teorema, dadas as aplicações $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ e $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$, definimos a aplicação $f_\mu : \mathrm{X}^* \to [0, \infty]$ pondo $f_\mu(x^*) = \inf\limits_{x \in f^{-1}(x^*)} \mu(x)$ para cada $x^* \in \mathrm{X}^*$.

No que segue, λ, $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_x\}_{x \in \mathrm{X}}$, $\mathfrak{C}$, $\ell = \{\ell_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$, γ e $\mathfrak{R}$ denotam as aproximações associadas a distância ρ e λ^*, $\mathcal{A}^* = \{\mathcal{A}^*_x\}_{x \in \mathrm{X}}$, $\mathfrak{C}^*$, $\ell^* = \{\ell^*_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$, γ^* e $\mathfrak{R}^*$ denotam as aproximações associadas a distância ρ^*.

Teorema 4.1.2. *[14] Sejam* (X, ρ) *e* (X^*, ρ^*) *espaços de aproximação e* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *uma aplicação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f *é uma contração;*

(ii) $\lambda^*(stack(f(\mathcal{F}))) \circ f \leq \lambda(\mathcal{F})$ *para todo* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*;*

(iii) $\lambda^*(stack(f(\mathcal{F}))) \circ f \leq \lambda(\mathcal{F})$ *para todo* $\mathcal{F} \in \mathbb{U}(\mathrm{X})$*;*

(iv) $\mu^* \circ f \in \mathcal{A}_x$, *para quaisquer* $x \in \mathrm{X}$ *e* $\mu^* \in \mathcal{A}^*_{f(x)}$;

(v) $d^* \circ (f \times f) \in \mathfrak{C}$, *para todo* $d^* \in \mathfrak{C}^*$;

(vi) $f(\ell_\epsilon(\mathrm{A})) \subseteq \ell^*_\epsilon(f(\mathrm{A}))$, *para quaisquer* $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ *e* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$;

(vii) $\gamma^*(f_\mu) \leq f_{\gamma(\mu)}$, *para todo* $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$;

(viii) $\mu^* \circ f \in \mathfrak{R}$, *para todo* $\mu^* \in \mathfrak{R}^*$.

Demonstração.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Para qualquer $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^*(stack(f(\mathcal{F}))) \circ f &= \sup_{\mathrm{V} \in sec(stack(f(\mathcal{F})))} \rho^*_{\mathrm{V}} \circ f \\ &\leq \sup_{\mathrm{U} \in sec(\mathcal{F})} \rho^*_{f(\mathrm{U})} \circ f \\ &\leq \sup_{\mathrm{U} \in sec(\mathcal{F})} \rho_{\mathrm{U}} \\ &= \lambda(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Evidente.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Para qualquer $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, temos que

$$\begin{aligned} \rho^*_{f(\mathrm{A})} \circ f &= \inf_{\mathcal{V} \in \mathbb{U}(f(\mathrm{A}))} \lambda^*(\mathcal{V}) \circ f \\ &\leq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda^*(stack(f(\mathcal{U}))) \circ f \\ &\leq \inf_{\mathcal{U} \in \mathbb{U}(\mathrm{A})} \lambda(\mathcal{U}) \\ &= \rho_{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

$(vi) \Rightarrow (i)$. Para quaisquer $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ temos que $x \in \mathrm{A}^{[\rho(x,\mathrm{A})]}$, e então $f(x) \in f(\mathrm{A})^{[\rho(x,\mathrm{A})]^*}$, ou seja, $\rho^*(f(x), f(\mathrm{A})) \leq \rho(x, \mathrm{A})$.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Se a implicação não procedesse, existiriam $x_0 \in \mathrm{X}$, $\varphi^*_0 \in \mathcal{A}^*_{f(x_0)}$, $\epsilon_0 > 0$ e $\delta_0 < \infty$ de modo que, para todo $\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}$,

$$\mathrm{A}(\varphi) = \{x \in \mathrm{X} \mid \varphi^*_0(f(x)) \wedge \delta_0 > \varphi(x) + \epsilon_0\} \neq \emptyset.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \rho(x_0, \mathrm{A}(\varphi)) \wedge \delta_0 &= \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \sup_{\psi \in \mathcal{A}_{x_0}} \inf_{x \in \mathrm{A}(\varphi)} \psi(x) \wedge \delta_0 \\
&\leq \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \sup_{\psi \in \mathcal{A}_{x_0}} \inf_{x \in \mathrm{A}(\varphi \vee \psi)} \varphi \vee \psi(x) \wedge \delta_0 \\
&= \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \inf_{x \in \mathrm{A}(\varphi)} \varphi(x) \wedge \delta_0 \\
&\leq \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \inf_{x \in \mathrm{A}(\varphi)} \varphi_0^*(f(x)) \wedge \delta_0 - \epsilon_0 \\
&\leq \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \sup_{\xi \in \mathcal{A}^*_{f(x_0)}} \inf_{y \in f(\mathrm{A}(\varphi))} \xi(y) \wedge \delta_0 - \epsilon_0 \\
&= \sup_{\varphi \in \mathcal{A}_{x_0}} \rho(f(x_0), f(\mathrm{A}(\varphi))) \wedge \delta_0 - \epsilon_0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Seja $d^* \in \mathfrak{C}^*$. Então, para qualquer $x \in \mathrm{X}$, temos que $d^*(f(x), \cdot) \in \mathcal{A}^*_{f(x)}$, e logo $d^*(f(x), \cdot) \circ f \in \mathcal{A}_x$. Portanto $d^* \circ (f \times f) \in \mathfrak{C}$.

$(v) \Rightarrow (vii)$. Sejam $\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}}$ e $x^* \in \mathrm{X}^*$. Se $x^* \notin f(\mathrm{X})$, não há nada a provar. Caso contrário, suponhamos que $x^* \in f(\mathrm{X})$ e fixemos $x \in f^{-1}(x^*)$. Então

$$\begin{aligned}
\gamma^*(f_\mu)(x^*) &= \sup_{d^* \in \mathfrak{C}^*} \inf_{u^* \in \mathrm{X}^*} \left(\inf_{u \in f^{-1}(u^*)} \mu(u) + d^*(x^*, u^*) \right) \\
&\leq \sup_{d^* \in \mathfrak{C}^*} \inf_{v \in \mathrm{X}} \left(\inf_{u \in f^{-1}(f(v))} \mu(u) + d^*(x^*, f(v)) \right) \\
&\leq \sup_{d \in \mathfrak{C}} \inf_{v \in \mathrm{X}} (\mu(v) + d(x, v)) \\
&= \gamma(\mu)(x),
\end{aligned}$$

e a conclusão segue da arbitrariedade de $x \in f^{-1}(x^*)$.

$(vii) \Rightarrow (vi)$. Seja $x \in \ell_\epsilon(\mathrm{A})$; então $\gamma(\theta_\mathrm{A})(x) = \rho_\mathrm{A}(x) \leq \epsilon$, Segue que

$$\begin{aligned}
\rho^*_{f(\mathrm{A})}(f(x)) &= \gamma^*(\theta_{f(\mathrm{A})})(f(x)) \\
&\leq f(\gamma(\theta_\mathrm{A}))(f(x)) \\
&= \inf_{y \in f^{-1}(f(x))} \gamma(\theta_\mathrm{A})(y) \\
&\leq \gamma(\theta_\mathrm{A})(x) \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

$(vii) \Rightarrow (viii)$. Seja $\mu^* \in \mathfrak{R}^*$; então

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \gamma^*(\mu^*) \\
&\leq \gamma^*(f(\mu^* \circ f)) \\
&\leq f(\gamma(\mu^* \circ f)),
\end{aligned}$$

donde $\mu^* \circ f \leq \gamma(\mu^* \circ f)$, ou seja, $\mu^* \circ f \in \mathfrak{R}$.

$(viii) \Rightarrow (vii)$. Seja $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$; então

$$(\gamma^*(f_\mu)) \circ f \leq f_\mu \circ f \leq \mu,$$

e desde que $(\gamma^*(f_\mu)) \circ f \in \mathfrak{R}$, segue que $(\gamma^*(f_\mu)) \circ f \leq \gamma(\mu)$, e assim $\gamma^*(f_\mu) \leq f(\gamma(\mu))$. □

Proposição 4.1.3. *[14] Seja* (X,ρ) *um espaço de aproximação. Então, para qualquer* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$*, o operador distância*

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{A}} : (\mathrm{X},\rho) &\to \mathbb{P} \\ x &\mapsto \rho(x,\mathrm{A}) \end{aligned}$$

é uma contração.

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$. Se $\mathrm{B} = \emptyset$, então

$$\rho_{\mathbb{P}}(\rho_{\mathrm{A}}(x), \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})) = \rho(x,\mathrm{B}) = \infty.$$

Caso contrário, desde que

$$\rho_{\mathbb{P}}(\rho_{\mathrm{A}}(x), \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})) = \left(\rho(x,\mathrm{A}) - \sup_{b \in \mathrm{B}} \rho(b,\mathrm{A})\right) \vee 0,$$

o resultado segue diretamente da proposição 1.1.2.

□

Proposição 4.1.4. *[14] Sejam* (X,ρ) *um espaço de aproximação,* $\mathfrak{R}$ *o quadro associado a* ρ *e* $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mu \in \mathfrak{R}$*, ou seja,* μ *é uma aplicação regular;*

(ii) $\mu : (\mathrm{X},\rho) \to \mathbb{P}$ *é uma contração.*

Demonstração. Tanto a primeira quanto a segunda propriedade podem ser expressas como propriedades locais de μ. Segue dos teoremas 2.6.2 e 2.8.4 que $\mu \in \mathfrak{R}$ se e apenas se:

$$\begin{gathered} \forall x \in \{\mu < \infty\}, \forall \epsilon > 0\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \mathrm{X} : \mu(x) \leq \mu(y) + \nu(y) + \epsilon \\ e \\ \forall x \in \{\mu = \infty\}, \forall \delta < \infty\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \mathrm{X} : \delta \leq \mu(y) + \nu(y). \end{gathered} \tag{$\dagger$}$$

Segue do teorema 4.1.2 e da descrição do sistema de localização de $\mathbb{P}$ que $\mu : (\mathrm{X},\rho) \to \mathbb{P}$ é uma contração se e apenas se:

$$\begin{gathered}\forall x \in \{\mu < \infty\}, \forall \epsilon > 0, \forall \delta < \infty\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \{\mu < \mu(x)\} : \\ (\mu(x) - \mu(y)) \wedge \delta \leq \nu(y) + \epsilon \\ e \\ \forall x \in \{\mu = \infty\}, \forall \epsilon > 0, \forall \delta < \infty, \forall \varsigma < \infty\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x : \\ (\theta_{]\varsigma,\infty]} \circ \mu) \wedge \delta \leq \nu + \epsilon.\end{gathered} \tag{‡}$$

Consideremos primeiro o caso $x \in \{\mu < \infty\}$. Então na primeira condição de (‡) é claramente suficiente considerar $\delta = \mu(x)$, de onde esta condição é equivalente a primeira condição de (†). Consideremos agora o caso onde $\mu(x) = \infty$. Claramente, na segunda condição de (‡) é suficiente considerar $\delta = \varsigma$ e facilmente se verifica que esta condição é equivalente a:

$$\forall x \in \{\mu = \infty\}, \forall \epsilon > 0, \forall \delta < \infty\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \{\mu \leq \delta\} : \delta \leq \nu(y) + \epsilon,$$

a qual, tomando δ para ϵ e 2δ para δ, mostra-se equivalente a:

$$\forall x \in \{\mu = \infty\}, \forall \delta < \infty\ \exists \nu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \{\mu \leq \delta\} : \delta \leq \nu(y). \ (\sharp)$$

Esta condição claramente implica a segunda condição de (†). Reciprocamente, a segunda condição de (†) implica que:

$$\forall x \in \{\nu = \infty\}, \forall \delta < \infty\ \exists \mu \in \mathcal{A}_x\ \forall y \in \mathrm{X} : 2\delta \leq \nu(y) + \mu(y),$$

a qual claramente implica a condição (♯), equivalente a segunda condição de (‡).

□

Corolário 4.1.5. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação e* $\mathfrak{R}$ *o quadro associado a* ρ*. Então para cada* $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$*, temos que* $\rho_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{R}$*, ou seja,* ρ_{A} *é uma aplicação regular.*

Demonstração. Segue das proposições 4.1.3 e 4.1.4. □

Corolário 4.1.6. *[14] Sejam* (X, ρ) *um espaço de aproximação,* $\mathfrak{R}$ *o quadro associado a* ρ*,* λ *o operador limite associado a* ρ *e* ζ *o operador aderência associado a* ρ*. Então para cada* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*, temos que* $\lambda(\mathcal{F}), \zeta(\mathcal{F}) \in \mathfrak{R}$*, ou seja,* $\lambda(\mathcal{F})$ *e* $\zeta(\mathcal{F})$ *são aplicações regulares.*

Demonstração. Segue do fato que $\mathfrak{R}$ é fechado sob formação de supremo finito, do teorema 2.1.1, da definição 3.1.2 e do corolário 4.1.5. □

Capítulo 5

Espaços de aproximação topológicos

Neste capítulo veremos que espaços topológicos podem ser vistos como casos especiais de espaços de aproximação. Na verdade a relação entre estes espaços é riquíssima do ponto de vista algébrico e se pode mostrar que a categoria dos espaços topológicos pode ser mergulhada na categoria dos espaços de aproximação e este mergulho possui diversas características desejáveis. Ao leitor interessado no contexto algébrico dos espaços de aproximação indicamos a referência [14], pois nosso trabalho não contempla este contexto.

Dado um espaço topológico (X, τ), denotaremos por $\overline{\mathrm{A}}^{\tau}$ o fecho de um conjunto $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ na topologia τ.

5.1 Aproximações topológicas

Seja (X, τ) um espaço topológico. No que segue mostraremos que a topologia τ induz, de forma natural, uma distância em X. Para tal propósito, definamos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \rho_\tau : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} &\to [0, \infty] \\ (x, \mathrm{A}) &\mapsto \begin{cases} 0, & x \in \overline{\mathrm{A}}^{\tau}; \\ \infty, & x \notin \overline{\mathrm{A}}^{\tau}. \end{cases} \end{aligned}.$$

Proposição 5.1.1. *[14] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Então a aplicação*

$$\rho_\tau : \mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}} \to [0, \infty]$$

definida acima, é uma distância em X.

Demonstração. Que ρ_τ cumpre (ρ_1) e (ρ_2) é imediato. Desde que, $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}^{\tau} = \overline{\mathrm{A}}^{\tau} \cup \overline{\mathrm{B}}^{\tau}$, para quaisquer $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$, (ρ_3) segue disso. Finalmente, (ρ_4) segue do fato que $\mathrm{A}^{[\epsilon]} = \overline{\mathrm{A}}^{\tau}$ se $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $\mathrm{A}^{[\infty]} = \mathrm{X}$. □

Definição 5.1.2. *[14] Um espaço de aproximação do tipo* (X, ρ_τ)*, para alguma topologia* τ *em* X*, é chamado de um espaço de aproximação topológico e uma distância do tipo* ρ_τ *é chamada de uma distância topológica.*

Naturalmente, se Ω é uma estrutura associada a ρ_τ, também dizemos que (X, Ω) é um espaço de aproximação topológico e que Ω é uma aproximação topológica.

No que segue, dado $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, denotaremos por $adh\mathcal{F}$ o conjunto dos pontos de aderência de $\mathcal{F}$ e por $lim\mathcal{F}$ o conjunto dos pontos limite de $\mathcal{F}$. Se $x \in adh\mathcal{F}$, escreveremos $\mathcal{F} \dashv x$; se $x \in lim\mathcal{F}$, escreveremos $\mathcal{F} \to x$.

Os próximos resultados mostram a relação das demais aproximações em um espaço de aproximação topológico (X, ρ_τ) com a topologia τ.

Proposição 5.1.3. *[14] Sejam* (X, τ) *um espaço topológico,* ζ_τ *o operador aderência associado a* ρ_τ *e* λ_τ *o operador limite associado a* ρ_τ*. Então, para qualquer* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*:*

(i) $\zeta_\tau(\mathcal{F}) = \theta_{adh\mathcal{F}}$;

(ii) $\lambda_\tau(\mathcal{F}) = \theta_{lim\mathcal{F}}$.

Demonstração. Provaremos apenas o item (i), pois a prova do outro item é análoga. Segue da definição 3.2.1 que, para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$:

$$\begin{aligned} \zeta_\tau(\mathcal{F}) &= \sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} (\rho_\tau)_{\mathrm{F}} \\ &= \sup_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \theta_{\overline{\mathrm{F}}^\tau} \\ &= \theta_{\bigcap_{\mathrm{F}\in\mathcal{F}} \overline{\mathrm{F}}^\tau} \\ &= \theta_{adh\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

□

Observemos que um ponto x é um ponto limite (segundo τ) de um filtro $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\lambda_\tau(\mathcal{F})(x) = 0$. A mesma observação é válida para pontos de aderência de $\mathcal{F}$ e $\zeta_\tau(\mathcal{F})$, e então nossas interpretações sobre estes operadores são plausíveis. Um operador limite do tipo λ_τ é chamado de um operador limite topológico e um operador aderência do tipo ζ_τ é chamado de um operador aderência topológico.

Sejam τ_{E} a topologia usual (euclidiana) em $[0, \infty]$, $\tau_{\mathbb{P}}$ a topologia em $[0, \infty]$ definida por $\tau_{\mathbb{P}} = \{]c, \infty] \mid c \in [0, \infty]\} \cup \{[0, \infty]\}$ e $\tau_{\mathbb{Q}}$ a topologia em $[0, \infty]$ definida por $\tau_{\mathbb{Q}} = \{[0, c[| \ c \in [0, \infty]\} \cup \{[0, \infty]\}$. Lembremos que uma aplicação $f : (\mathrm{X}, \tau) \to ([0, \infty], \tau_{\mathrm{E}})$ é dita *semicontínua inferiormente* (ou *lsc*) se $f : (\mathrm{X}, \tau) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$ for contínua e $f : (\mathrm{X}, \tau) \to ([0, \infty], \tau_{\mathrm{E}})$ é dita *semicontínua superiormente* (ou *usc*) se $f : (\mathrm{X}, \tau) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{Q}})$ for contínua. Semicontinuidade em um ponto é definida da mesma forma.

Seja (X, τ) um espaço topológico e $x \in \mathrm{X}$. Dizemos que $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{X}$ é uma *vizinhança* de x se existir um conjunto aberto $\mathcal{O} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{N}$. A coleção das vizinhanças de um dado ponto $x \in \mathrm{X}$ será denotada por $\mathcal{N}_\tau(x)$. É claro que $\mathcal{N}_\tau(x) \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, e por isso é por vezes chamado de filtro vizinhança de x. O *sistema de vizinhanças* de (X, τ) é a família $\{\mathcal{N}_\tau(x)\}_{x \in \mathrm{X}}$.

Proposição 5.1.4. *[14] Seja (X, τ) um espaço topológico. Então o sistema de localização $\mathcal{A}^\tau$ associado a ρ_τ é dado por $\{\mathcal{A}_x^\tau\}_{x \in \mathrm{X}}$, onde, para cada $x \in \mathrm{X}$,*

$$\mathcal{A}_x^\tau = \{\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}} \mid \mu(x) = 0, \mu \text{ } usc \text{ } em \text{ } x\},$$

e uma base para $\mathcal{A}^\tau$ é dada por $\{\mathcal{B}_x^\tau\}_{x \in \mathrm{X}}$, onde, para cada $x \in \mathrm{X}$,

$$\mathcal{B}_x^\tau = \{\theta_{\mathrm{N}} \mid \mathrm{N} \in \mathcal{N}_\tau(x)\}.$$

Demonstração. Segue do teorema 2.7.1 que, para qualquer $x \in \mathrm{X}$

$$\mathcal{A}_x^\tau = \{\mu \in [0, \infty]^{\mathrm{X}} \mid \forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} : x \in \overline{\mathrm{A}}^\tau \Rightarrow \inf_{a \in \mathrm{A}} \mu(a) = 0\}.$$

Dado $\mu \in \mathcal{A}_x^\tau$, como $x \in \overline{\{x\}}^\tau$, segue que $\mu(x) = 0$. Fixemos, agora, $c > 0$. Se $x \in \overline{\{\mu \geq c\}}^\tau$, então

$$\inf_{a \in \{\mu \geq c\}} \mu(a) = 0,$$

o que é um absurdo. Desse modo, para qualquer $c > 0$, $x \in int_\tau(\{\mu < c\})$ (onde int_τ denota o interior de um conjunto na topologia τ), o que prova que μ é semicontínua superiormente em x. A recíproca segue do fato que se μ é semicontínua superiormente em x e $\mu(x) = 0$, então, para qualquer $c > 0$, $\{\mu < c\}$ é uma vizinhança de x.

Segue facilmente das definições que $\{\mathcal{B}_x^\tau\}_{x \in \mathrm{X}}$ é uma base para $\{\mathcal{A}_x^\tau\}_{x \in \mathrm{X}}$.

□

Um sistema de localização do tipo $\mathcal{A}^\tau$ é chamado de um sistema de localização topológico.

Proposição 5.1.5. *[14] Seja (X, τ) um espaço topológico. Então o calibre $\mathfrak{C}_\tau$ associado a ρ_τ é dado por*

$$\mathfrak{C}_\tau = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}) \mid \tau_d \subseteq \tau\},$$

onde τ_d é a topologia induzida por d.

Demonstração. Seja $d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X})$. A topologia τ_d é definida da mesma forma como se define uma topologia a partir de uma métrica dada, ou seja, tomando por base a coleção das bolas abertas $B_d(x,\epsilon) = \{y \in \mathrm{X} \mid d(x,y) < \epsilon\}$ (com $x \in \mathrm{X}$ e $\epsilon > 0$). É rotina verificar que $x \in \overline{\mathrm{A}}^{\tau_d}$ se, e somente se, $\inf\limits_{a \in \mathrm{A}} d(x,a) = 0$.

Do teorema 2.2.1 obtemos que

$$\mathfrak{C}_\tau = \{d \in \mathrm{pqM}^\infty(\mathrm{X}) \mid \forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} : x \in \overline{\mathrm{A}}^\tau \Rightarrow \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x,a) = 0\},$$

Suponhamos que $d \in \mathfrak{C}_\tau$ e seja $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$. Se $x \in \overline{\mathrm{A}}^\tau$ então $\inf\limits_{a \in \mathrm{A}} d(x,a) = 0$ e por isso $x \in \overline{\mathrm{A}}^{\tau_d}$. Segue então que $\overline{\mathrm{A}}^\tau \subseteq \overline{\mathrm{A}}^{\tau_d}$ para qualquer $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$. Desta forma, se A é um subconjunto fechado em τ_d então $\overline{\mathrm{A}}^\tau \subseteq \overline{\mathrm{A}}^{\tau_d} = \mathrm{A}$, o que acarreta em $\overline{\mathrm{A}}^\tau = \mathrm{A}$, ou seja, A também é um subconjunto fechado em τ. Portanto, todo conjunto fechado em τ_d também é fechado em τ, mas isso então também vale para os conjuntos abertos, e por isso $\tau_d \subseteq \tau$. A recíproca é análoga, basta observar que se $\tau_d \subseteq \tau$ então $\overline{\mathrm{A}}^\tau \subseteq \overline{\mathrm{A}}^{\tau_d}$ $(\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X})$. □

Um calibre do tipo $\mathfrak{C}_\tau$ é chamado de um calibre topológico.

Proposição 5.1.6. *[14] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Então a torre* ℓ^τ *associada a* ρ_τ *é dada por* $\{\ell^\tau_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathbb{R}_+}$*, onde, para cada* $\epsilon \in \mathbb{R}_+$*,*

$$\begin{aligned} \ell^\tau_\epsilon : 2^{\mathrm{X}} &\to 2^{\mathrm{X}} \\ \mathrm{A} &\mapsto \overline{\mathrm{A}}^\tau. \end{aligned}$$

Demonstração. Para cada $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, segue do teorema 2.5.1 que

$$\begin{aligned} \ell^\tau_\epsilon(\mathrm{A}) &= \mathrm{A}^{[\epsilon]} \\ &= \{x \in \mathrm{X} \mid \rho_\tau(x,\mathrm{A}) \le \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathrm{X} \mid \rho_\tau(x,\mathrm{A}) = 0\} \\ &= \overline{\mathrm{A}}^\tau. \end{aligned}$$

□

Observemos que as estruturas pré-topológicas determinadas por uma torre induzida por uma topologia τ confundem-se com a estrutura topológica de τ, como é natural de se esperar. Uma torre do tipo ℓ^τ é chamada de uma torre topológica.

Proposição 5.1.7. *[14] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Então o envelope* γ_τ *associado a* ρ_τ *é dado por*

$$\gamma_\tau(\mu)(x) = \sup_{\mathrm{N} \in \mathcal{N}_\tau(x)} \inf_{y \in \mathrm{N}} \mu(y),$$

para cada $\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}}$ *e* $x \in \mathrm{X}$*. Onde* $\mathcal{N}_\tau(x)$ *é o filtro vizinhança de* x*.*

Demonstração. Segue do teorema 2.8.4 e das proposições 2.8.2 e 5.1.4. □

Um envelope do tipo γ_τ é chamado de um envelope topológico.

Proposição 5.1.8. *[14] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Então o quadro* $\mathfrak{R}_\tau$ *associado a* ρ_τ *é dado por*

$$\mathfrak{R}_\tau = \{\mu \in [0,\infty]^{\mathrm{X}} \mid \mu \; lsc\}.$$

Demonstração. Segue do teorema 2.6.2 e da proposição 5.1.7. □

Um quadro do tipo $\mathfrak{R}_\tau$ é chamado de um quadro topológico.

O próximo resultado fornece uma caracterização interna dos espaços de aproximação topológicos.

Teorema 5.1.9. *[14] Um espaço de aproximação* (X, ρ) *é um espaço de aproximação topológico se, e somente se,*

$$\rho(\mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}}) = \{0, \infty\}.$$

Demonstração. Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço de aproxição topológico e digamos que $\rho = \rho_\tau$ para alguma topologia τ em X. Neste caso segue da definição de ρ_τ que $\rho(\mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}}) = \rho_\tau(\mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}}) = \{0, \infty\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\rho(\mathrm{X} \times 2^{\mathrm{X}}) = \{0, \infty\}$. A aplicação cl_ρ definida por

$$\begin{aligned} cl_\rho : 2^{\mathrm{X}} &\to 2^{\mathrm{X}} \\ \mathrm{A} &\mapsto \{x \in \mathrm{X} \mid \rho(x, \mathrm{A}) = 0\} \end{aligned}$$

é um operador fecho topológico em X (conforme mostramos na proposição 6.1.2) que induz uma topologia τ_ρ em X de modo que $\rho = \rho_{\tau_\rho}$, como pode ser verificado facilmente. □

Capítulo 6

Axiomas de separação via aproximações

No capítulo 5 vimos como construir um espaço de aproximação a partir de um espaço topológico, ou, dito de outra forma, como construir uma distância a partir de uma topologia. Neste capítulo faremos o contrário, construiremos topologias a partir de distâncias e veremos que este é o caso mais interessante, uma vez que no outro caso as distâncias resultantes eram trivias.

De qualquer modo, em ambos os processos descritos acima, daremos novas (ou ao menos diferentes) caracterizações de alguns axiomas de separação em um espaço topológico utilizando as aproximações do espaço de aproximação a ele associado. Veremos que no caso onde distâncias induzem topologias estas caracterizações são bem mais interessantes.

6.1 Topologias induzidas por distâncias

No que segue, mostraremos como uma dada distância ρ induz uma topologia τ_ρ.

Definição 6.1.1. *[14] Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. Definimos a aplicação* cl_ρ *como segue:*

$$
\begin{gathered}
cl_\rho : 2^{\mathrm{X}} \to 2^{\mathrm{X}} \\
\mathrm{A} \mapsto \{x \in \mathrm{X} \mid \rho(x, \mathrm{A}) = 0\}.
\end{gathered}
$$

Para detalhes sobre operadores fecho nós referimos a seção 7.3 do apêndice.

Proposição 6.1.2. *Seja* (X, ρ) *um espaço de aproximação. A aplicação* cl_ρ*, definida acima, é um operador fecho topológico em* X.

Demonstração. Sejam $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$. Que $cl_\rho(\emptyset) = \emptyset$ segue da propriedade (ρ_2). Que $A \subseteq cl_\rho(\mathrm{A})$ segue do item (i) da proposição 1.1.2. Que $cl_\rho(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = cl_\rho(\mathrm{A}) \cup cl_\rho(\mathrm{B})$ segue da propriedade (ρ_3). Finalmente, que $cl_\rho(cl_\rho(\mathrm{A})) = cl_\rho(\mathrm{A})$ segue do seguinte: pondo $\mathrm{B} = cl_\rho(\mathrm{A})$ obtemos $\mathrm{B} \subseteq cl_\rho(\mathrm{B})$, ou seja, $cl_\rho(\mathrm{A}) \subseteq cl_\rho(cl_\rho(\mathrm{A}))$; seja $x \in cl_\rho(cl_\rho(\mathrm{A}))$ e tomemos $\epsilon = 0$ na propriedade (ρ_4). Então $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, \mathrm{A}^{[0]}) + 0$, mas $\mathrm{A}^{[0]} = cl_\rho(\mathrm{A})$ e logo $\rho(x, \mathrm{A}) \leq \rho(x, cl_\rho(\mathrm{A})) = 0$, o que implica em $\rho(x, \mathrm{A}) = 0$, em $x \in cl_\rho(\mathrm{A})$ e em $cl_\rho(cl_\rho(\mathrm{A})) \subseteq cl_\rho(\mathrm{A})$. □

Lembremos que se $cl : 2^{\mathrm{X}} \to 2^{\mathrm{X}}$ é um operador fecho topológico em X, então a topologia τ_{cl} induzida por cl é caracterizada como segue: os pontos fixos de cl (conjuntos $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ tais $cl(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$) formam os conjuntos fechados da topologia τ_{cl}, e então τ_{cl} é definida como a coleção dos complementares destes conjuntos fechados. Também vale que para todo $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$, $\overline{\mathrm{A}}^{\tau_{cl}} = cl(\mathrm{A})$ (se cl for um operador fecho pré-topológico em X então isso não necessariamente é verdade).

No caso de um operador fecho topológico do tipo cl_ρ (para alguma distância ρ em X), a topologia que o referido induz será denotada apenas por τ_ρ. Também dizemos que a topologia τ_ρ é induzida pela distância ρ

Definição 6.1.3. *Sejam (X, ρ) um espaço de aproximação e τ_ρ a topologia induzida pela distância ρ. Dizemos que o espaço topológico (X, τ_ρ) é induzido pelo espaço de aproximação (X, ρ), ou, simplesmente, que é induzido pela distância ρ.*

Exemplo 6.1.4. *[14] Sejam $\rho_{\mathbb{E}}$ a distância em $[0, \infty]$ definida no exemplo 3.3.1 e $\rho_{\mathbb{P}}$ a distância em $[0, \infty]$ definida no exemplo 3.3.2. A topologia induzida por $\rho_{\mathbb{E}}$, denotada por $\tau_{\mathbb{E}}$, é a topologia da compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}_+$. A topologia induzida por $\rho_{\mathbb{P}}$, denotada por $\tau_{\mathbb{P}}$, é dada por $\tau_{\mathbb{P}} = \{]c, \infty] \mid c \in [0, \infty]\} \cup \{[0, \infty]\}$.*

O próximo resultado, além de intrinsicamente interessante, desempenhará um papel fundamental no restante deste capítulo, uma vez que as demonstrações da maioria das nossas caracterizações de axiomas de separação via aproximações recorrem a ele.

Proposição 6.1.5. *[14] Sejam (X, τ_ρ) o espaço topológico induzido por uma distância ρ em X, $x \in \mathrm{X}$ e $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$. Então*

(i) A convergência em (X, τ_ρ) é caracterizada por:

$$\mathcal{F} \to x \Leftrightarrow \lambda(\mathcal{F})(x) = 0;$$

(ii) As vizinhanças em (X, τ_ρ) são dadas por:

$$\mathcal{N}_{\tau_\rho}(x) = \{\mathrm{N} \in 2^{\mathrm{X}} \mid \exists \epsilon > 0, \exists \mu \in \mathcal{B}_x : \{\mu < \epsilon\} \subseteq \mathrm{N}\}$$

e por

$$\mathcal{N}_{\tau_\rho}(x) = \{\mathrm{N} \in 2^{\mathrm{X}} \mid \exists \epsilon > 0, \exists d \in \mathfrak{D} : B_d(x, \epsilon) \subseteq \mathrm{N}\};$$

onde $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in \mathrm{X}}$ *é uma base para o sistema de localização em* (X, ρ)*,* $\mathfrak{D}$ *é uma base para o calibre em* (X, ρ) *e* $B_d(x, \epsilon) = \{y \in \mathrm{X} \mid d(x, y) < \epsilon\}$*.*

Demonstração. A prova do item (i) segue de

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \to x \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\mathrm{A} \in sec(\mathcal{F})} cl_\rho(\mathrm{A}) \\ & \Leftrightarrow \forall \mathrm{A} \in sec(\mathcal{F}) : \rho(x, \mathrm{A}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sup_{\mathrm{A} \in sec(\mathcal{F})} \rho(x, \mathrm{A}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda(\mathcal{F})(x) = 0. \end{aligned}$$

A prova do item (ii) segue de

$$\begin{aligned} \mathrm{N} \in \mathcal{N}_\tau(x) \quad & \Leftrightarrow x \notin cl_\rho(\mathrm{X} \setminus \mathrm{N}) \\ & \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \sup_{\mu \in \mathcal{B}_x} \inf_{y \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{N}} \mu(y) > \epsilon \\ & \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \exists \mu \in \mathcal{B}_x : \inf_{y \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{N}} \mu(y) > \epsilon \\ & \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \exists \mu \in \mathcal{B}_x : \{\mu < \epsilon\} \subseteq \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Da mesma forma se mostra este resultado para calibres. □

Os 3 próximos resultados são necessários para mostrarmos a proposição 6.1.9, a qual por sua vez será usada para mostrarmos a proposição 6.4.8.

Proposição 6.1.6. *[14] Sejam* (X, τ)*,* (X^*, τ^*) *espaços topológicos e* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ *uma aplicação. As afirmações abaixo são equivalentes.*

(i) $f : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{X}^*, \tau^*)$ *é contínua;*

(ii) $f : (\mathrm{X}, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}^*, \rho_{\tau^*})$ *é uma contração.*

Demonstração. Seja $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$. Segue da proposição 5.1.6 que

$$f(\overline{\mathrm{A}}^{\tau}) \subseteq \overline{f(\mathrm{A})}^{\tau^*} \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ : f(\ell_\epsilon^\tau(\mathrm{A})) \subset \ell_\epsilon^{\tau^*}(f(\mathrm{A})),$$

e então o resultado segue do teorema 4.1.2. □

Lema 6.1.7. *Sejam* $(\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{X}})$*,* (Y, ρ_Y) *e* $(\mathrm{Z}, \rho_{\mathrm{Z}})$ *espaços de aproximação e* $f : (\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Y}, \rho_Y)$*,* $g : (\mathrm{Y}, \rho_Y) \to (\mathrm{Z}, \rho_{\mathrm{Z}})$ *contrações. Então a aplicação composta* $(g \circ f) : (\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{Z}, \rho_{\mathrm{Z}})$ *também é uma contração.*

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$. Então $\rho_{\mathrm{Y}}(f(x), f(\mathrm{A})) \leq \rho_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{A})$. Uma vez que $f(x) \in \mathrm{Y}$ e $f(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{Y}$ segue também que $\rho_{\mathrm{Z}}(g(f(x)), g(f(\mathrm{A}))) \leq \rho_{\mathrm{Y}}(f(x), f(\mathrm{A}))$. Mas então

$$\rho_{\mathrm{Z}}((g \circ f)(x), (g \circ f)(\mathrm{A})) = \rho_{\mathrm{Z}}(g(f(x)), g(f(\mathrm{A}))) \leq \rho_{\mathrm{Y}}(f(x), f(\mathrm{A})) \leq \rho_{\mathrm{X}}(x, \mathrm{A}).$$

□

Lema 6.1.8. *[14] Seja (X, ρ) um espaço de aproximação e τ_ρ a topologia em X induzida por ρ. Então a aplicação identidade $i : (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho}) \to (\mathrm{X}, \rho)$ é uma contração. Além disso, se τ é uma topologia em um conjunto Y e se $f : (\mathrm{Y}, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}, \rho)$ é uma contração, então $f : (\mathrm{Y}, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho})$ também é uma contração.*

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$. Se $\rho(x, \mathrm{A}) = 0$, é imediato que $\rho(i(x), i(\mathrm{A})) = \rho(x, \mathrm{A}) = 0 \leq \rho_{\tau_\rho}(x, \mathrm{A})$. Se $\rho(x, \mathrm{A}) > 0$ então $x \notin cl_\rho(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}^{\tau_\rho}$, mas isto significa que $\rho_{\tau_\rho}(x, \mathrm{A}) = \infty$, e por isso $\rho(i(x), i(\mathrm{A})) = \rho(x, \mathrm{A}) \leq \infty = \rho_{\tau_\rho}(x, \mathrm{A})$. Portanto $i : (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho}) \to (\mathrm{X}, \rho)$ é uma contração.

Mostremos agora a segunda afirmação da proposição em questão. Sejam $y \in \mathrm{Y}$ e $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{Y}$. Se $y \notin \overline{\mathrm{B}}^\tau$ então $\rho_\tau(y, \mathrm{B}) = \infty$ e segue que $\rho_{\tau_\rho}(f(y), f(\mathrm{B})) \leq \infty = \rho_\tau(y, \mathrm{B})$. Se $y \in \overline{\mathrm{B}}^\tau$ então $\rho_\tau(y, \mathrm{B}) = 0$ e desde que por hipótese $f : (\mathrm{Y}, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}, \rho)$ é uma contração, segue que $\rho(f(y), f(\mathrm{B})) \leq \rho_\tau(y, \mathrm{B}) = 0$, mas então $\rho(f(y), f(\mathrm{B})) = 0$. De $\rho(f(y), f(\mathrm{B})) = 0$, segue que $f(y) \in cl_\rho(f(\mathrm{B})) = \overline{f(\mathrm{B})}^{\tau_\rho}$ e então $\rho_{\tau_\rho}(f(y), f(\mathrm{B})) = 0$. Deste modo, $\rho_{\tau_\rho}(f(y), f(\mathrm{B})) = 0 \leq 0 = \rho_\tau(y, \mathrm{B})$. Portanto $f : (\mathrm{Y}, \rho_\tau) \to (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho})$ é uma contração. □

Proposição 6.1.9. *[14] Sejam (X, ρ) um espaço de aproximação, $\mathfrak{R}$ o quadro, λ o operador limite e ζ o operador aderência associado a ρ. Então, para qualquer $\mu \in \mathfrak{R}$,*

$$\mu : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$$

é uma aplicação contínua. Em particular:

(i) Para cada $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, o operador distância em A

$$\rho_{\mathrm{A}} : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$$

é uma aplicação contínua;

(ii) Para cada $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$, ambas as aplicações

$$\lambda(\mathcal{F}) : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$$

e

$$\zeta(\mathcal{F}) : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$$

são contínuas.

Demonstração. Consideremos a aplicação identidade $i : (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho}) \to (\mathrm{X}, \rho)$, a qual é uma contração de acordo com o lema 6.1.8. Uma vez que $\mu \in \mathfrak{R}$, segue da proposição 4.1.4 que $\mu : (\mathrm{X}, \rho) \to \mathbb{P} = ([0,\infty], \rho_{\mathbb{P}})$ é uma contração. Então $\mu = (\mu \circ i) : (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho}) \to ([0,\infty], \rho_{\mathbb{P}})$ também é uma contração de acordo com o lema 6.1.7. Da segunda afirmação do lema 6.1.8 segue $\mu : (\mathrm{X}, \rho_{\tau_\rho}) \to ([0,\infty], \rho_{\tau_{\mathbb{P}}})$ também é uma contração, e então da proposição 6.1.6 segue que $\mu : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0,\infty], \tau_{\mathbb{P}})$ é contínua.

Os itens (i) e (ii) seguem, respectivamente, dos corolários 4.1.5 e 4.1.6. □

6.2 Axiomas de separação

Nesta seção nós relembramos os principais axiomas de separação em um espaço topológico e mostramos alguns resultados sobre os mesmos que serão usados adiante. Para detalhes sobre conjuntos g-fechados nós referimos a seção 7.4 do apêndice.

Definição 6.2.1. *[20] Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que:*

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$ *se para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$ *existir* $\mathcal{O} \in \tau$ *tal que* $x \in \mathcal{O}$ *e* $y \notin \mathcal{O}$ *ou* $y \in \mathcal{O}$ *e* $x \notin \mathcal{O}$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$ *se todo conjunto g-fechado for um conjunto fechado.*

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$ *se para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$ *existirem* $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \tau$ *de modo que* $x \in \mathcal{O}_x$, $y \in \mathcal{O}_y$, $x \notin \mathcal{O}_y$ *e* $y \notin \mathcal{O}_x$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_2$ *se para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$ *existirem* $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \tau$ *de modo que* $x \in \mathcal{O}_x$, $y \in \mathcal{O}_y$ *e* $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{5}{2}}$ *se para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$ *existirem* $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \tau$ *de modo que* $x \in \mathcal{O}_x$, $y \in \mathcal{O}_y$ *e* $\overline{\mathcal{O}_x} \cap \overline{\mathcal{O}_y} = \emptyset$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_3$ *se para qualquer conjunto fechado* $\mathfrak{F}$ *e qualquer ponto* $x \notin \mathfrak{F}$ *existirem* $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}, \mathcal{O}_x \in \tau$ *de modo que* $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$, $x \in \mathcal{O}_x$ *e* $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{O}_x = \emptyset$.

(X, τ) *é um espaço regular se for um espaço* $\mathbb{T}_0$ *e* $\mathbb{T}_3$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{7}{2}}$ *se para qualquer conjunto fechado* $\mathfrak{F}$ *e qualquer ponto* $x \notin \mathfrak{F}$ *existir um função contínua* $f : \mathrm{X} \to [0, 1]$ *tal que* $f(\mathfrak{F}) = \{0\}$ *e* $f(x) = 1$.

(X, τ) *é um espaço completamente regular se for um espaço* $\mathbb{T}_0$ *e* $\mathbb{T}_{\frac{7}{2}}$.

(X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_4$ *se para quaisquer conjuntos fechados disjuntos* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ *existirem* $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_1}, \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_2} \in \tau$ *de modo que* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_1}$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_2}$ *e* $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}_1} \cap \mathcal{O}_{\mathfrak{F}_2} = \emptyset$.

(X, τ) *é um espaço normal se for um espaço* $\mathbb{T}_1$ *e* $\mathbb{T}_4$.

Se um espaço topológico (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_i$ $(i \in \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\})$, dizemos que (X, τ) cumpre ou satisfaz o axioma $\mathbb{T}_i$. Se (X, τ) é um espaço regular (completamente regular, normal), dizemos que (X, τ) cumpre ou satisfaz o axioma de regularidade (regularidade completa, normalidade).

Espaços $\mathbb{T}_0$ também são chamados de *espaços de Kolmogorov*; espaços $\mathbb{T}_1$ também são chamados de *espaços de Fréchet* (não confundir com outras conceituações de espaços de Fréchet); espaços $\mathbb{T}_2$ são melhor conhecidos como *espaços de Hausdorff*; espaços $\mathbb{T}_{\frac{5}{2}}$ também são chamados de *espaços completamente Hausdorff*; espaços completamente regular também são chamados de *espaços de Tychonoff*.

De acordo com a referência [17], a letra T dos axiomas de separação deriva da palavra alemã "*Trennungsaxiom*", que siginifica axioma de separação.

A justificativa para se usar índices fracionários em alguns axiomas de separação é que estes foram descobertos depois de dois axiomas "consecutivos" e mostraram-se intermediários entre estes. Só por curiosidade, existe também um axioma chamado de $\mathbb{T}_{\frac{3}{4}}$ ("entre" os axiomas $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$ e $\mathbb{T}_1$), mas não será abordado neste trabalho.

Os termos "*regular*" e "*normal*" usados aqui não são padronizados na literatura, e então simplesmente seguimos a terminologia da referência [20].

Enfatizamos que os axiomas de separação definidos aqui são apenas alguns dos que constam na literatura, talvez os principais (exceto o axioma $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$), e nem todos serão caracterizados via aproximações.

O diagrama abaixo mostra uma cadeia de implicações envolvendo alguns axiomas de separação e a justificativa destas implicações são bem conhecidas na literatura e por isso omitiremos aqui.

$$Normal \Rightarrow CompletamenteRegular \Rightarrow Regular \Rightarrow \mathbb{T}_{\frac{5}{2}} \Rightarrow \mathbb{T}_2 \Rightarrow \mathbb{T}_1 \Rightarrow \mathbb{T}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbb{T}_0$$

Nenhuma das implicações contrárias acima é verdadadeira e na próxima seção daremos alguns contraexemplos para justificar isso. Outra observação notável é que todos os axiomas de separação são independentes dos axiomas de um espaço topológico, ou seja, existem espaços topológicos que não cumprem qualquer axioma de separação (veja na próxima seção um contraexemplo a respeito deste fato).

O restante desta seção será destinada a mostrarmos alguns resultados que serão usados adiante.

Proposição 6.2.2. *Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$ *se, e somente se, para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$ *tivermos* $x \notin \overline{\{y\}}^{\tau}$ *ou* $y \notin \overline{\{x\}}^{\tau}$.

Demonstração. É imediato, uma vez que se um ponto não pertence ao fecho de um conjunto então existe uma vizinhança aberta deste ponto que não intersecta o referido conjunto. □

Definição 6.2.3. *[11] Um espaço topológico* (X, τ) *é chamado de um espaço simétrico se para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *tivermos*

$$x \in \overline{\{y\}}^{\tau} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}^{\tau}.$$

Espaços simétricos também são chamados de espaços R_0 e este conceito de simetria é considerado por alguns autores como um axioma de separação. Não é difícil mostrar que um espaço topológico é um espaço simétrico se, e somente se, todo conjunto aberto contém o fecho de cada um dos seus subconjuntos unitários.

Proposição 6.2.4. *[8] Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$ *se, e somente se, o conjunto unitário* $\{x\}$ *for fechado para todo* $x \in \mathrm{X}$.

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) seja um espaço $\mathbb{T}_1$ e seja $x \in \mathrm{X}$. Então para cada $y \in \mathrm{X}$ com $y \neq x$, existe $\mathcal{O}_y \in \tau$ tal que $y \in \mathcal{O}_y$ e $x \notin \mathcal{O}_y$. Desta forma, $\mathrm{X} \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in \mathrm{X} \backslash \{x\}} \mathcal{O}_y$ é um conjunto aberto e então $\{x\}$ é fechado. Reciprocamente, suponhamos que todos os conjuntos unitários sejam fechados. Sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Então $\mathcal{O}_x = \mathrm{X} \setminus \{y\}$ e $\mathcal{O}_y = \mathrm{X} \setminus \{x\}$ são conjuntos abertos tais $x \in \mathcal{O}_x$, $y \in \mathcal{O}_y$, $x \notin \mathcal{O}_y$ e $y \notin \mathcal{O}_x$. □

Proposição 6.2.5. *Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$ *se, e somente se, for um espaço simétrico e* $\mathbb{T}_0$.

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) seja um espaço $\mathbb{T}_1$ e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Então $\{x\}$ e $\{y\}$ são conjuntos fechados e por isso $x \notin \overline{\{y\}}^{\tau} = \{y\}$ e $y \notin \overline{\{x\}}^{\tau} = \{x\}$. Disto segue direto que (X, τ) é um espaço simétrico e $\mathbb{T}_0$.

Reciprocamente, suponhamos que (X, τ) seja um espaço simétrico e $\mathbb{T}_0$. Sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Uma vez que (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \notin \overline{\{y\}}^{\tau}$. Mas como (X, τ) também é um espaço simétrico então também devemos ter que $y \notin \overline{\{x\}}^{\tau}$. De $x \notin \overline{\{y\}}^{\tau}$ segue que existe uma vizinhança aberta de x que não contém y e de $y \notin \overline{\{x\}}^{\tau}$ segue que existe uma vizinhança aberta de y que não contém x, ou seja, (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_1$. □

Teorema 6.2.6. *Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço de Haudorff se, e somente se, todo filtro em* X *converge para no máximo um ponto.*

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) seja um espaço de Hausdorff e seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$. Sejam $x, y \in \mathrm{X}$ pontos distintos e sejam $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$ conjuntos abertos disjuntos tais que $x \in \mathcal{O}_x$ e $y \in \mathcal{O}_y$. Se $\mathcal{F} \to x$ então existe $\mathrm{F}' \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{F}' \subseteq \mathcal{O}_x$. Com isso, $\mathrm{F}' \subseteq \mathrm{X} \setminus \mathcal{O}_y$ e $\overline{\mathrm{F}'}^{\tau} \subseteq \mathrm{X} \setminus \mathcal{O}_y$. Então $y \notin \bigcap_{\mathrm{F} \in \mathcal{F}} \overline{\mathrm{F}}^{\tau} = adh\mathcal{F}$. Uma vez que $lim\mathcal{F} \subseteq adh\mathcal{F}$, segue que $y \notin lim\mathcal{F}$ e então $lim\mathcal{F} = \{x\}$.

Reciprocamente, suponhamos que filtros convirjam para no máximo um ponto. Admitamos, a fim de obtermos uma contradição, que (X, τ) não seja um espaço de Hausdorff. Então existem pontos distintos $x, y \in \mathrm{X}$ de modo que $\mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y \neq \emptyset$ para quaisquer vizinhanças de x e y. Deste modo, $\mathcal{F} = \{\mathcal{N}_x \cap \mathcal{N}_y \mid \mathcal{N}_x \in \mathcal{N}_\tau(x), \mathcal{N}_y \in \mathcal{N}_\tau(y)\}$ é claramente um filtro em X. Também é claro que $\mathcal{F}$ é mais fino que $\mathcal{N}_\tau(x)$ e que $\mathcal{N}_\tau(y)$, e então $\mathcal{F} \to x$ e $\mathcal{F} \to y$, o que contradiz a hipótese. □

Teorema 6.2.7. *[17] Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço de* $\mathbb{T}_3$ *se, e somente se, para cada* $x \in \mathrm{X}$ *e para cada vizinhança aberta* $\mathcal{O}$ *de* x *existir uma vizinhança aberta* $\mathcal{O}_x$ *de* x *de modo que* $\overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$.

Demonstração. Sejam $x \in \mathrm{X}$, $\mathcal{O}$ uma vizinhança aberta de x e suponhamos que (X, τ) seja um espaço $\mathbb{T}_3$. Consideremos o conjunto fechado $\mathfrak{F} = \mathrm{X} \setminus \mathcal{O}$. Segue então da hipótese que existem conjuntos abertos disjuntos $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}, \mathcal{O}_x$ de modo que $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ e $x \in \mathcal{O}_x$. O conjunto $\overline{\mathcal{O}_x}^{\tau}$ é disjunto de $\mathfrak{F}$ uma vez que se $y \in \mathfrak{F}$ então $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ é ma vizinhança de y disjunta de $\mathcal{O}_x$. Desta forma, $\overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$, como almejado.

Reciprocamente, suponhamos que cada vizinhança aberta de um ponto contenha o fecho de alguma outra vizinhança aberta do referido ponto. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\mathfrak{F}$ um conjunto fechado tal que $x \notin \mathfrak{F}$. Consideremos a vizinhança aberta $\mathcal{O} = \mathrm{X} \setminus \mathfrak{F}$ de x. Segue da hipótese que existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}_x$ de x de modo que $\overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$. O conjuntos $\mathcal{O}_x$ e $\mathrm{X} \setminus \overline{\mathcal{O}_x}^{\tau}$ são conjunto abertos disjuntos tais que $x \in \mathcal{O}_x$ e $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{X} \setminus \overline{\mathcal{O}_x}^{\tau}$. □

Definição 6.2.8. *Sejam* (X, τ) *um espaço topológico e* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ *um filtro em* X. *A família de subconjuntos de* X *definida por* $\{\overline{\mathrm{F}}^{\tau} \mid \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ *claramente forma uma base para um filtro, denotado por* $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$, *e chamado de filtro fecho de* $\mathcal{F}$.

É rotina verificar que $\mathcal{F}$ é mais fino que $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$, e então é imediato que $lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau} \subseteq lim\mathcal{F}$.

Teorema 6.2.9. *Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço de* $\mathbb{T}_3$ *se, e somente se,* $lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau} = lim\mathcal{F}$ *para todo* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$.

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) seja um espaço $\mathbb{T}_3$ e seja $x \in \mathrm{X}$. Então dada uma vizinhança $\mathcal{O}$ de x, existe um conjunto aberto $\mathcal{O}_x$ tal que $x \in \mathcal{O}_x \subseteq \overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$. Se

$x \in lim\mathcal{F}$ então existe $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ de modo que $F \subseteq \mathcal{O}_x$, e por isso $\overline{F}^{\tau} \subseteq \overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$. Desta forma, para cada vizinhança $\mathcal{O}$ de x existe $\overline{\mathrm{F}}^{\tau} \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau}$ tal que $\overline{F}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$ e então $x \in lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$, ou seja, $lim\mathcal{F} \subseteq lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$. Já observamos que a inclusão $lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau} \subseteq lim\mathcal{F}$ sempre vale.

Reciprocamente, suponhamos que $lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau} = lim\mathcal{F}$ para todo $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ e suponhamos por absurdo que (X, τ) não seja um espaço $\mathbb{T}_3$. Então existe um ponto $x \in \mathrm{X}$ e uma vizinhança aberta $\mathcal{O}$ de x com a propriedade de que qualquer vizinhança aberta $\mathcal{O}_x$ de x é tal que $\overline{\mathcal{O}_x}^{\tau} \nsubseteq \mathcal{O}$. A família de subconjuntos $\{\overline{\mathcal{N}_x}^{\tau} \mid \mathcal{N}_x \in \mathcal{N}_\tau(x)\}$ forma uma base para o filtro $\overline{\mathcal{N}(x)}^{\tau}$ e nenhum elemento desta base está contido em $\mathcal{O}$. Desta forma $x \notin lim\overline{\mathcal{N}_\tau(x)}^{\tau}$ mas claramente $x \in lim\mathcal{N}_\tau(x)$, o que é uma contradição. □

6.3 Contraexemplos

Nesta seção apresentamos alguns contraexemplos mostrando que um espaço topológico pode cumprir um determinado axioma de separação e não cumprir axiomas de separação "maiores".

Contraexemplo 6.3.1. *[20] Sejam* $\mathrm{X} = \{0, 1\}$ *e* $\tau = \{\emptyset, \mathrm{X}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *não é* $\mathbb{T}_0$, *uma vez que a única vizinhança de* 0 *contém* 1 *e reciprocamente. Mas então* (X, τ) *também não é* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$, $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, $\mathbb{T}_{\frac{5}{2}}$, *regular, completamente regular nem normal. Contudo,* (X, τ) *é* $\mathbb{T}_3$ *e* $\mathbb{T}_4$ *por não descumprir estes axiomas.*

Contraexemplo 6.3.2. *[20] Sejam* $\mathrm{X} = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *e* $\tau = \{(\mathbb{R} \setminus \mathrm{A}) \times \{0, 1\} \mid \mathrm{A}$ *finito*$\} \cup \{\emptyset, \mathrm{X}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *não é um espaço* $\mathbb{T}_0$, *uma vez que toda vizinhança do ponto* $(0, 0)$ *contém o ponto* $(0, 1)$ *e reciprocamente. Como além disso quaisquer dois conjuntos abertos não vazios se intersectam então* (X, τ) *não cumpre qualquer axioma de separação!*

Contraexemplo 6.3.3. $(\mathbb{T}_0 \nRightarrow \mathbb{T}_1)$ *[20] Sejam* $\mathrm{X} = \{0, 1\}$ *e* $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \mathrm{X}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *é chamado de espaço de Sierpinski e é um espaço* $\mathbb{T}_0$, *uma vez que* $\{0\}$ *é uma vizinhança aberta de* 0 *que não contém* 1. *Contudo, o espaço de Sierpinski não é um espaço* $\mathbb{T}_1$, *uma vez que o conjunto unitário* $\{0\}$ *não é fechado.*

Contraexemplo 6.3.4. $(\mathbb{T}_0 \nRightarrow \mathbb{T}_{\frac{1}{2}})$ *[12] Sejam* $\mathrm{X} = \{a, b, c\}$ *e* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \mathrm{X}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$ *como pode ser verificado facilmente. Contudo,* (X, τ) *não é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$, *uma vez que o conjunto* $\{a, c\}$ *é g-fechado mas não é fechado.*

Contraexemplo 6.3.5. $(\mathbb{T}_{\frac{1}{2}} \nRightarrow \mathbb{T}_1)$ *[12] Sejam* $\mathrm{X} = \{a, b\}$ *e* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \mathrm{X}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$, *como pode ser verificado facilmente. Contudo,* (X, τ) *não é um espaço* $\mathbb{T}_1$, *uma vez que o conjunto unitário* $\{a\}$ *não é fechado. É claro que* *poderíamos ter usado o espaço de Sierpinski (que é homeomorfo ao espaço topológico em questão) neste contraexemplo, mas respeitamos a notação de [12].*

Contraexemplo 6.3.6. *($\mathbb{T}_1 \not\Rightarrow Hausdorff$) [20] Sejam* $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ *e* $\tau = \{\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus \mathrm{A}\ finito\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ *a topologia cofinita em* $\mathbb{R}$. *O espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$*, pois se* $r \in \mathbb{R}$*, então* $\mathrm{A} = \mathbb{R} \setminus \{r\} \in \tau$*, e por isso* $\{r\}$ *é fechado. Contudo,* (X, τ) *não é um espaço de Hausdorff* ($\mathbb{T}_2$)*, uma vez que dois conjuntos abertos quaisquer não vazios sempre se intersectam.*

Contraexemplo 6.3.7. *($Hausdorff \not\Rightarrow Regular$) [17] Sejam* $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ *e* τ *a topologia que tem por base os intervalos abertos* (a, b) *e os conjuntos da forma* $(a, b) \setminus \mathrm{K}$*, onde* $\mathrm{K} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \{1, 2, 3, \ldots\}\}$. *O espaço topológico* (X, τ) *é um espaço de Hausdorff* ($\mathbb{T}_2$)*, pois se* $r, s \in \mathbb{R}$ *e* $r \neq s$*, digamos* $r < s$*, então* $(r-1, \frac{s-r}{2})$ *e* $(\frac{s-r}{2}, s+1)$ *são vizinhanças abertas disjuntas de* r *e* s*, respectivamente.*

Contudo, (X, τ) *não é um espaço regular. De fato, o conjuto* K *é fechado e* $0 \notin \mathrm{K}$*, e então suponhamos por absurdo que existam conjuntos abertos disjuntos* U *e* V *contendo* 0 *e* K*, respectivamente. Um elemento base contendo* 0 *e contido em* U *deve ser da forma* $(a, b) \setminus \mathrm{K}$*, pois todo elemento base do tipo* (a, b) *que contém* 0 *também intersecta* K. *Seja* n *um número inteiro positivo tal que* $\frac{1}{n} \in (a, b)$. *Então um elemento base contendo* $\frac{1}{n}$ *e contido em* V *deve ser da forma* (c, d). *Finalmente, escolhamos* $w \in \mathbb{R}$ *de modo que* $w < \frac{1}{n}$ *e* $w > \max\{c, \frac{1}{n+1}\}$. *Então* $w \in U \cap V$*, o que é um absurdo.*

Contraexemplo 6.3.8. *($Regular \not\Rightarrow Normal$) [17] Considere* $\mathbb{R}$ *munido da topologia usual (euclidiana)* τ_{E} *e seja* J *um conjunto não enumerável. É bem conhecido que* $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{E}})$ *é um espaço regular e então o espaço produto* $\mathrm{X} = \mathbb{R}^J$ *munido com a topologia produto* τ *também é um espaço regular. Contudo,* (X, τ) *não é um espaço normal. A prova deste fato é laboriosa e não será dada aqui. O leitor interessado pode encontrar um roteiro para esta prova em [17].*

Para demais contraexemplos nós indicamos a clássica referência [20].

6.4 Axiomas de separação via aproximações

Nesta seção caracterizamos axiomas de separação em espaços topológicos utilizando as estruturas dos espaços de aproximação a eles associados de algum modo.

As quatro primeiras proposições caracterizam os axiomas de separação "baixos" ($\mathbb{T}_0$, R_0, $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$, $\mathbb{T}_1$) em um espaço topológico (X, τ) utilizando a distância ρ_τ induzida por τ. Estas primeiras caracterizações são bem simplórias, uma vez que ρ_τ é uma aplicação de apenas dois valores. Os demais resultados tratam de axiomas de separação em espaços topológicos induzidos por distâncias e se mostram muito mais interessantes.

Proposição 6.4.1. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* ρ_τ *a distância induzida por* τ. *Então* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$ *se, e somente se, para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$, *tivermos* $\rho_\tau(x, \{y\}) = \infty$ *ou* $\rho_\tau(y, \{x\}) = \infty$.

Demonstração. Basta observar que $\rho_\tau(a, \{b\}) = \infty$ se e somente se, $a \notin \overline{\{b\}}^\tau$ (com $a, b \in \mathrm{X}$). Assim o resultado segue da proposição 6.2.2. □

Proposição 6.4.2. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* ρ_τ *a distância induzida por* τ. *Então* (X, τ) *é um espaço simétrico se, e somente se, para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$, *tivermos* $\rho_\tau(x, \{y\}) = \rho_\tau(y, \{x\})$.

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) seja um espaço simétrico e sejam $x, y \in \mathrm{X}$. Se $x \in \overline{\{y\}}^\tau$ então $y \in \overline{\{x\}}^\tau$ e por isso $\rho_\tau(x, \{y\}) = 0 = \rho_\tau(y, \{x\})$. Se $x \notin \overline{\{y\}}^\tau$ então $y \notin \overline{\{x\}}^\tau$ e por isso $\rho_\tau(x, \{y\}) = \infty = \rho_\tau(y, \{x\})$. Em todo caso, $\rho_\tau(x, \{y\}) = \rho_\tau(y, \{x\})$. A recíproca é análoga. □

Proposição 6.4.3. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* ρ_τ *a distância induzida por* τ. *Então* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$ *se, e somente se, para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$, *tivermos* $\rho(y, \{x\}) = \infty$ *ou* $\rho(x, \mathrm{X} \setminus \{x\}) = \infty$.

Demonstração. Seja $x \in \mathrm{X}$. Se para qualquer $y \in \mathrm{X}$ com $y \neq x$ tivermos $\rho_\tau(y, \{x\}) = \infty$ então $y \notin \overline{\{x\}}^\tau$ (para todo $y \neq x$) e por isso $\overline{\{x\}}^\tau = \{x\}$, donde $\{x\}$ é fechado. Se $\rho(x, \mathrm{X} \setminus \{x\}) = \infty$ então $x \notin \overline{\mathrm{X} \setminus \{x\}}^\tau$ e por isso $\mathrm{X} \setminus \{x\}$ é um conjunto fechado, donde $\{x\}$ é um conjunto aberto. Portanto, para qualquer $x \in \mathrm{X}$, o conjunto unitário $\{x\}$ é aberto ou fechado, e o resultado segue do teorema 7.4.4 do apêndice. A recíproca é análoga. □

Proposição 6.4.4. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e* ρ_τ *a distância induzida por* τ. *Então* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$ *se, e somente se, para quaisquer* $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$, *tivermos* $\rho(y, \{x\}) = \infty$.

Demonstração. Seja $x \in \mathrm{X}$. Se para todo $y \in \mathrm{X}$ com $y \neq x$ tivermos $\rho_\tau(y, \{x\}) = \infty$, então $y \notin \overline{\{x\}}^\tau$ (para todo $y \neq x$) e por isso $\overline{\{x\}}^\tau = \{x\}$. Então $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in \mathrm{X}$, ou seja, (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_1$. A recíproca é análoga. □

Proposição 6.4.5. *Seja* (X, τ_ρ) *o espaço topológico induzido por uma distância* ρ *e* λ *o operador limite associado a* ρ. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço de Hausdorff* ($\mathbb{T}_2$)*;*

(ii) Para qualquer $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*, a aplicação* $\lambda(\mathcal{F})$ *tem no máximo uma raiz (zero).*

Demonstração. Segue do teorema 6.2.6 que (X, τ_ρ) é um espaço de Hausdorff se, e somente se, todo filtro em X converjir (segundo τ_ρ) para no máximo um ponto, mas isso, de acordo com o item (i) da proposição 6.1.5, ocorre se, e somente se, para todo filtro $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ a aplicação $\lambda(\mathcal{F})$ tem no máximo uma raiz. □

Proposição 6.4.6. *Seja* (X, τ_ρ) *um espaço topológico associado a uma distância* ρ *e* λ *o operador limite associado a* ρ*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço* $\mathbb{T}_3$*;*

(ii) Para qualquer $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$*, as aplicações* $\lambda(\mathcal{F})$ *e* $\lambda(\overline{\mathcal{F}}^{\tau_\rho})$ *possuem as mesmas raízes (zeros).*

Demonstração. Segue do teorema 6.2.9 que (X, τ_ρ) é um espaço de $\mathbb{T}_3$ se, e somente se, $lim\mathcal{F} = lim\overline{\mathcal{F}}^{\tau_\rho}$ para todo filtro $\mathcal{F}$ em X, mas isso, de acordo com o item (i) da proposição 6.1.5, ocorre se, e somente se, para todo filtro $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathrm{X})$ as aplicações $\lambda(\mathcal{F})$ e $\lambda(\overline{\mathcal{F}}^{\tau_\rho})$ possuem as mesmas raízes. □

Proposição 6.4.7. *[15] Seja* (X, τ_ρ) *o espaço topológico induzido por uma distância* ρ *e* $\{\mathcal{A}_z\}_{z \in \mathrm{X}}$ *o sistema de localização associado a* ρ*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$*;*

(ii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$*, existe* $\mu \in \mathcal{A}_x$ *tal que* $\mu(y) > 0$ *ou existe* $\mu \in \mathcal{A}_y$ *tal que* $\mu(x) > 0$.

Demonstração. Suponhamos que vale (i). Suponhamos por absurdo que existam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$ de modo que para quaisquer $\mu \in \mathcal{A}_x$ e $\nu \in \mathcal{A}_y$ tenhamos $\mu(y) = 0$ e $\nu(x) = 0$. Segue então da proposição 6.1.5 que qualquer vizinhança de x contém y bem como qualquer vizinhança de y contém x, o que contradiz (i).

Reciprocamente, suponhamos que vale (ii) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, suponhamos que exista $\mu \in \mathcal{A}_x$ tal que $\mu(y) > 0$. Definamos $\epsilon = \mu(y)$. Então, segundo a proposição 6.1.5, $\{\mu < \epsilon\}$ é uma vizinhança de x que não contém y. □

Proposição 6.4.8. *[15] Seja* (X, τ_ρ) *o espaço topológico induzido por uma distância* ρ *e* $\mathfrak{R}$ *o quadro associado a* ρ*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço* $\mathbb{T}_0$*;*

(ii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ *com* $x \neq y$*, existe* $\varphi \in \mathfrak{R}$ *tal que* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Demonstração. Suponhamos que vale (i) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Seja $\{\mathcal{A}_z\}_{z\in \mathrm{X}}$ o sistema de localização associado a ρ. De acordo com a proposição 6.4.7, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $\mu \in \mathcal{A}_x$ de modo que $\mu(y) > 0$. Definamos $\varphi = \rho_{\{y\}}$. Segue do corolário 4.1.5 que $\varphi \in \mathfrak{R}$. Uma vez que $\mu \in \mathcal{A}_x$, tomando $\mathrm{A} = \{y\}$ no teorema 2.7.1, obtemos $\mu(y) = \inf_{w\in\{y\}} \mu(w) \leq \rho(x, \{y\}) = \rho_{\{y\}}(x) = \varphi(x)$. Mas $\mu(y) > 0$ e por isso $\varphi(x) > 0$. Por outro, $\varphi(y) = \rho_{\{y\}}(y) = \rho(y, \{y\}) = 0$. Portanto $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Reciprocamente, suponhamos que vale (ii) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Podemos supor, sem perda de generalidade que $\varphi(x) > c > \varphi(y)$. Segue da proposição 6.1.9 que a aplicação $\varphi : (\mathrm{X}, \tau_\rho) \to ([0, \infty], \tau_{\mathbb{P}})$ é contínua, e então $\{\varphi > c\}$ (imagem inversa do conjunto $]c, \infty] \in \tau_{\mathbb{P}}$) é uma vizinhança de x que não contém y. □

Proposição 6.4.9. *[15] Seja (X, τ_ρ) o espaço topológico induzido por uma distância ρ e $\{\mathcal{A}_z\}_{z\in \mathrm{X}}$ o sistema de localização associado a ρ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) é um espaço $\mathbb{T}_0$;

(ii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$, temos que $\mathcal{A}_x \neq \mathcal{A}_y$.

Demonstração. Suponhamos que vale (i) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Segue então da proposição 6.4.7, sem perda de generalidade, que existe $\mu \in \mathcal{A}_x$ tal que $\mu(y) > 0$. Segue então da propriedade $(\mathcal{A}_1)$ que $\mu \notin \mathcal{A}_y$. Logo $\mathcal{A}_x \neq \mathcal{A}_y$.

Reciprocamente, suponhamos que vale (ii) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que existe $\mu \in \mathcal{A}_x$ tal que $\mu \notin \mathcal{A}_y$. De $\mu \notin \mathcal{A}_y$, segue do teorema 2.7.1 que existe $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ tal que $\inf_{w\in \mathrm{A}} \mu(w) > \rho(y, \mathrm{A}) = \rho_{\mathrm{A}}(y)$. De $\mu \in \mathcal{A}_x$, segue também do teorema 2.7.1 que $\inf_{w\in \mathrm{A}} \mu(w) \leq \rho(x, \mathrm{A}) = \rho_{\mathrm{A}}(x)$, e então $\rho_{\mathrm{A}}(x) > \rho_{\mathrm{A}}(y)$. Do corolário 4.1.5 temos que $\rho_{\mathrm{A}} \in \mathfrak{R}$ (o quadro associado a distância ρ), e como também $\rho_{\mathrm{A}}(x) \neq \rho_{\mathrm{A}}(y)$, segue da proposição 6.4.8 que (X, τ_ρ) é um espaço $\mathbb{T}_0$. □

Seja $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ e $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times 2^{\mathbb{D}} \to [0, \infty]$ a distância em $\mathbb{D}$ definida por $\rho_{\mathbb{D}}(x, \emptyset) = \infty$ e $\rho_{\mathbb{D}}(x, \mathrm{A}) = 0$ se $\mathrm{A} \neq \emptyset$ ($x \in \mathbb{D}$, $\mathrm{A} \in 2^{\mathbb{D}}$).

Proposição 6.4.10. *[15] Seja (X, τ_ρ) o espaço topológico induzido por uma distância ρ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) é um espaço $\mathbb{T}_0$;

(ii) Toda contração $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (\mathrm{X}, \rho)$ é constante.

Demonstração. Suponhamos que vale (i) e suponhamos por absurdo que existe uma contração $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (\mathrm{X}, \rho)$ não constante. Então existem $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$ de modo que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Uma vez que f é uma contração, então, em particular, temos que $\rho(x, \{y\}) \leq \rho_{\mathbb{D}}(0, \{1\}) = 0$ e $\rho(y, \{x\}) \leq \rho_{\mathbb{D}}(y, \{x\}) = 0$, ou seja, $\rho(x, \{y\}) = 0 = \rho(y, \{x\})$. Mas isto significa que $x \in \overline{\{y\}}^{\tau_\rho}$ e $y \in \overline{\{x\}}^{\tau_\rho}$, o que contradiz (i).

Mostraremos agora a contrapositiva da implicação $(ii) \Rightarrow (i)$. Suponhamos então que (X, τ_ρ) não seja um espaço $\mathbb{T}_0$. Então existem $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$ de modo que $x \in \overline{\{y\}}^{\tau_\rho}$ e $y \in \overline{\{x\}}^{\tau_\rho}$, o que implica em $\rho(x, \{y\}) = 0 = \rho(y, \{x\})$. Definamos a aplicação não constante $f : (\mathbb{D}, \rho_{\mathbb{D}}) \to (\mathrm{X}, \rho)$ pondo $f(0) = x$ e $f(1) = y$. É rotina verificar que f é uma contração. □

Proposição 6.4.11. *[15] Sejam (X, τ_ρ) o espaço topológico induzido por uma distância ρ, $\{\mathcal{A}_z\}_{z\in\mathrm{X}}$ o sistema de localização associado a ρ e $\mathfrak{R}$ o quadro associado a ρ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço* $\mathbb{T}_1$*;*

(ii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$, existem $\mu \in \mathcal{A}_x$ e $\nu \in \mathcal{A}_y$ de modo que $\mu(y) > 0$ e $\nu(x) > 0$;

(iii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$, existem $\mu, \nu \in \mathfrak{R}$ de modo que $\mu(x) < \mu(y)$ e $\nu(y) < \nu(x)$;

(iv) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$, $\mathcal{A}_x \nsubseteq \mathcal{A}_y$ e $\mathcal{A}_y \nsubseteq \mathcal{A}_x$.

Demonstração. A demonstração é completamente similar às demonstrações das proposições 6.4.7, 6.4.8 e 6.4.9, com o detalhe que neste caso, dados dois pontos distintos x e y, devemos mostrar a existência de duas, e não apenas uma vizinhança de um ponto não contento o outro. □

Proposição 6.4.12. *[15] Seja (X, τ_ρ) o espaço topológico induzido por uma distância ρ e $\{\mathcal{A}_z\}_{z\in\mathrm{X}}$ o sistema de localização associado a ρ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) (X, τ_ρ) *é um espaço de Hausdorff* $(\mathbb{T}_2)$*;*

(ii) Para quaisquer $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$, existem $\mu \in \mathcal{A}_x$ e $\nu \in \mathcal{A}_y$ de modo que

$$\inf_{w\in\mathrm{X}} (\mu \vee \nu)(w) > 0.$$

Demonstração. Suponhamos que vale (i) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Então existem vizinhanças abertas disjuntas de x e de y e por isso segue da proposição 6.1.5 que existem $\mu \in \mathcal{A}_x$, $\epsilon_1 > 0$, $\nu \in \mathcal{A}_y$ e $\epsilon_2 > 0$ de modo que $\{\mu < \epsilon_1\} \cap \{\nu < \epsilon_2\} = \emptyset$. Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. É claro que $\{\mu < \epsilon\} \cap \{\nu < \epsilon\} = \emptyset$. Seja $w \in \mathrm{X}$.

Se $w \notin \{\mu < \epsilon\} \cup \{\nu < \epsilon\}$, então $\mu(w) \geq \epsilon$ e $\nu \geq \epsilon$, e por isso $(\mu \vee \nu)(w) \geq \epsilon$.

Se $w \in \{\mu < \epsilon\}$ então $w \notin \{\nu < \epsilon\}$, logo $\mu(w) < \epsilon$ e $\nu(w) \geq \epsilon$, e por isso $(\mu \vee \nu)(w) = \nu(w) \geq \epsilon$.

Se $w \in \{\nu < \epsilon\}$ então $w \notin \{\mu < \epsilon\}$, logo $\nu(w) < \epsilon$ e $\mu(w) \geq \epsilon$, e por isso $(\mu \vee \nu)(w) = \mu(w) \geq \epsilon$.

Deste modo, $(\mu \vee \nu)(w) \geq \epsilon$ para todo $w \in \mathrm{X}$, e então $\inf\limits_{w \in \mathrm{X}} (\mu \vee \nu)(w) \geq \epsilon > 0$.

Reciprocamente, suponhamos que vale (ii) e sejam $x, y \in \mathrm{X}$ com $x \neq y$. Definamos $\epsilon = \inf\limits_{w \in \mathrm{X}} (\mu \vee \nu)(w) > 0$. Então $\{\mu < \epsilon\}$ e $\{\nu < \epsilon\}$ são vizinhanças (segundo a proposição 6.1.5) de x e de y, respectivamente. Que tais vizinhanças são disjuntas segue do fato que $(\mu \vee \nu)(w) \geq \epsilon$ para todo $w \in \mathrm{X}$, como pode ser verificado facilmente. $\square$

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Reticulados

Definição 7.1.1. *[2] Uma relação de ordem parcial em um conjunto* X *é uma relação binária* $\leq \subseteq \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *que cumpre as seguites propriedades para quaisquer* $x, y, z \in \mathrm{X}$*:*

($\leq_1$) $x \leq x$*;*

($\leq_2$) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, então* $x = y$*;*

($\leq_3$) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, então* $x \leq z$*.*

Sejam $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ e $M, m \in \mathrm{X}$. Dizemos que M é um *majorante* para A se $a \leq M$ para todo $a \in \mathrm{A}$. Dizemos que M é o *supremo* de A se M for um majorante para A tal que $M \leq M^*$ para qualquer outro majorante M^* de A. Dizemos que m é um *minorante* para A se $m \leq a$ para todo $a \in \mathrm{A}$. Dizemos que m é o *ínfimo* de A se m for um minorante para A tal que $m^* \leq m$ para qualquer outro minorante m^* de A.

Definição 7.1.2. *[2] Um reticulado* $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \leq, \vee, \wedge)$ *constitui-se de um conjunto não vazio* $\mathcal{L}$ *munido com uma relação de ordem parcial* $\leq$ *de modo que todo subconjunto finito de* $\mathcal{L}$ *possui supremo e ínfimo. Se* $L \subseteq \mathcal{L}$*,* $\vee L$ *e* $\wedge L$*, denotam, respectivamente, o supremo e o ínfimo de* L*, caso existam.*

Se L=$\{a, b\}$, escrevemos $\vee\{a, b\} = a \vee b$ e $\wedge\{a, b\} = a \wedge b$.

Definição 7.1.3. *[2] Um reticulado* $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \leq, \vee, \wedge)$ *é dito completo se todo subconjunto tem supremo e ínfimo.*

Definição 7.1.4. *[2] Um reticulado completo* $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \leq, \vee, \wedge)$ *é dito completamente distributivo se satisfaz a identidade*

$$\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J_i} e_{i,j}\right)=\bigvee_{f\in K}\left(\bigwedge_{i\in I} e_{i,f(i)}\right),$$

onde para cada $i \in I$ *e* $j \in J_i$, $e_{i,j} \in \mathcal{L}$*; e* K *é o conjunto das aplicações* $f : I \to \cup_{i\in I} J_i$ *tais que para cada* $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

Definição 7.1.5. *[2] Seja* $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \leq, \vee, \wedge)$ *um reticulado e* $\mathrm{L} \subseteq \mathcal{L}$*. Dizemos que* L *é um ideal em* $\mathcal{L}$ *se cumprir as seguintes propriedades:*

(L_1) *Se* $\mu \in \mathrm{L}$, $\nu \in \mathcal{L}$ *e* $\nu \leq \mu$*, então* $\nu \in \mathrm{L}$*;*

(L_2) *Se* L^* *é um subconjunto finito de* L*, então* $\vee \mathrm{L}^* \in \mathrm{L}$.

Definição 7.1.6. *[2] Seja* $\mathcal{L} = (\mathcal{L}, \leq, \vee, \wedge)$ *um reticulado e* $\mathrm{M} \subseteq \mathcal{L}$*. Dizemos que* M *é um ideal base em* $\mathcal{L}$ *se, para cada* $\mu, \nu \in \mathrm{M}$*, existir* $\xi \in \mathrm{M}$ *de modo que* $\mu \vee \nu \leq \xi$.

É rotina verificar que $[0,\infty]^{\mathrm{X}}$, munido com a relação de ordem usual (pontual) para aplicações, é um reticulado completo e completamente distributivo.

7.2 Espaços métricos

Definição 7.2.1. *[14] Uma aplicação*

$$d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, \infty]$$

é chamada de uma métrica (em X*) se cumprir as seguintes propriedades:*

(d_1) $d(x, x) = 0$*;*

(d_2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*;*

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(d_4) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$*;*

(d_5) $d(x, y) < \infty$*;*

para quaisquer $x, y, z \in \mathrm{X}$.

Ao par (X, d), onde d é uma métrica em X, chamamos de um *espaço métrico*.

A propriedade (d_2) é chamada de *desigualdade triangular*, a (d_3) de *simetria*, a (d_4) de *separação (de pontos)* e a (d_5) de *finitude*.

Se d não necessariamente cumpre (d_5), d é dita uma *métrica extendida*, ou uma ∞-*métrica*.

Se d não necessariamente cumpre (d_4), d é dita uma *pseudométrica* , ou uma *p-métrica.*

Se d não necessariamente cumpre (d_3), d é dita uma *quasimétrica*, ou uma *q-métrica.*

Qualquer destas combinações é possível; e então o tipo mais geral considerado é uma ∞*pq-métrica*, que é uma aplicação cumprindo as propriedades (d_1) e (d_2).

Ao par (X, d), onde d é uma ∞pq-métrica em X, chamamos de um *espaço pseudo-quasimétrico extendido*, ou um *espaço* ∞*pq-métrico.* Designações análogas são usadas para espaços associados as demais variações de uma métrica.

Denotamos por $\mathrm{pqM}^{\infty}(\mathrm{X})$ o conjunto de todas as ∞pq-métricas em X. Este conjunto munido com a relação de ordem usual (pontual) para aplicações, é um reticulado completo e completamente distributivo.

7.3 Operadores fecho

Definição 7.3.1. *[4] Uma aplicação*

$$cl : 2^{\mathrm{X}} \to 2^{\mathrm{X}}$$

é chamada de um operador fecho topológico (em X*) se cumprir as seguintes propriedades:*

(cl_1) $cl(\emptyset) = \emptyset$*;*

(cl_2) $\mathrm{A} \subseteq cl(\mathrm{A})$*;*

(cl_3) $cl(cl(\mathrm{A})) = cl(\mathrm{A})$*;*

(cl_4) $cl(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = cl(\mathrm{A}) \cup cl(\mathrm{B})$*;*

para quaisquer A*,* $\mathrm{B} \in 2^{\mathrm{X}}$.

Se cl não necessariamente cumpre a propriedade (cl_3), cl é dito um *operador fecho pré-topológico.*

Os pontos fixos de um operador fecho pré-topológico (conjuntos tais que $cl(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$) constituem os conjuntos fechados de uma topologia τ_{cl} em X, como pode ser verificado facilmente.

Se cl é um operador fecho topológico, então o fecho em τ_{cl} é compatível com cl no sentido que, para todo $\mathrm{A} \in 2^{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{A}}^{\tau_{cl}} = cl(\mathrm{A})$.

7.4 Conjuntos g-fechados

Definição 7.4.1. *[12] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Um conjunto* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *é dito um conjunto fechado generalizado (ou, simplesmente, um conjunto g-fechado) se* $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$ *sempre que* $\mathcal{O}$ *é um conjunto aberto e* $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{O}$.

É claro que todo conjunto fechado é também g-fechado. Em [12] mostra-se que diversos resultados válidos para conjuntos fechados são válidos para conjuntos g-fechados.

Teorema 7.4.2. *[12] Seja* (X, τ) *um espaço topológico. Um conjunto* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ *é um conjunto g-fechado se, e somente se,* $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}$ *não contém conjunto fechado além do conjunto vazio.*

Demonstração. Suponhamos que A seja g-fechado. Seja $\mathfrak{F}$ um conjunto fechado tal que $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}$. Então $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$, e por isso $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X} \setminus \mathfrak{F}$. Uma vez que A é g-fechado por hipótese, segue que $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \subseteq \mathrm{X} \setminus \mathfrak{F}$, e logo $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{A}}^{\tau}$. Temos então que $\mathfrak{F} \subseteq (\mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{A}}^{\tau}) \cap (\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}) \subseteq (\mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{A}}^{\tau}) \cap \overline{\mathrm{A}}^{\tau} = \emptyset$, donde $\mathfrak{F} = \emptyset$.

Reciprocamente, suponhamos que $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}$ não contém um conjunto fechado além do conjunto vazio. Seja $\mathcal{O}$ um conjunto aberto tal que $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{O}$. Então $(\mathrm{X} \setminus \mathcal{O}) \subseteq (\mathrm{X} \setminus \mathrm{A})$, e por isso $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \cap (\mathrm{X} \setminus \mathcal{O}) \subseteq \overline{\mathrm{A}}^{\tau} \cap (\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}$. Uma vez que $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \cap (\mathrm{X} \setminus \mathcal{O})$ é um conjunto fechado, segue da hipótese que $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \cap (\mathrm{X} \setminus \mathcal{O}) = \emptyset$, e disso segue que $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \subseteq \mathcal{O}$. Então A é g-fechado. □

Definição 7.4.3. *[12] Um espaço topológico* (X, τ) *é dito um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$ *se todo conjunto g-fechado for um conjunto fechado.*

Teorema 7.4.4. *[10] Um espaço topológico* (X, τ) *é um espaço* $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$ *se, e somente se, para cada* $x \in \mathrm{X}$*, o conjunto unitário* $\{x\}$ *é aberto ou fechado.*

Demonstração. Suponhamos que (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$. Seja $x \in \mathrm{X}$ e suponhamos que $\{x\}$ não seja um conjunto fechado. Então $\mathrm{X} \setminus \{x\}$ não é um conjunto aberto e por isso X é o único conjunto aberto que contém $\mathrm{X} \setminus \{x\}$. Segue então que $\mathrm{X} \setminus \{x\}$ é g-fechado e, pela hipótese, também fechado. Logo $\{x\}$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que conjuntos unitários sejam abertos ou fechados. Sejam $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ um conjunto g-fechado e $x \in \overline{\mathrm{A}}^{\tau}$.

Se $\{x\}$ for aberto, uma vez que $x \in \overline{\mathrm{A}}^{\tau}$, segue que $\{x\}$ intersecta A, mas isso significa que $x \in \mathrm{A}$.

Se $\{x\}$ for fechado e se tivéssemos $x \notin \mathrm{A}$, então $\overline{\mathrm{A}}^{\tau} \setminus \mathrm{A}$ conteria o conjunto fechado não vazio $\{x\}$, o que contradiz o fato de A ser g-fechado pelo teorema 7.4.2. Logo $x \in \mathrm{A}$.

Portanto A é um conjunto fechado, e logo (X, τ) é um espaço $\mathbb{T}_{\frac{1}{2}}$. □

Referências Bibliográficas

[1] J. Bialas and Y. Nakamura. *The Urysohn lemma*, Journal of Formalized Mathematics, Vol. 13, Inst. of Computer Science, Univ. of Bialystok, 2003.

[2] G. Birkhoff. *Lattice theory*, Amer. Mat. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, Providence, R.I., 1984.

[3] N. Bourbaki. *Topologie générale*, capítulos 3 e 4: *Groupes topologiques, nombres réels*, Hermann, Paris, 1960.

[4] P.L. Clark. *Alternative characterizations of topological spaces*, preprint.

[5] M.L. Colosante, C. Uzcátegui and J. Vielma. *Low separation axioms via the diagonal*, Applied General Topology, Universidad Politécnica de Valencia, Volume 9, No. 1, 39-50.

[6] A. Csaszar. *Separation axioms for generalized topologies*, Acta Math. Hungar. 104, 2004, 63-69.

[7] P. Das and M.A. Rashid. *Certain separation axioms in a space*, Korean J. Math. Sciences, Vol. 7, 2000, 81-93.

[8] H.H. Domingues. *Espaços métricos e introdução à topologia*, Atual, São Paulo, 1982.

[9] J. Dontchev and M. Ganster. *On δ-generalized closed sets ans $T_{\frac{3}{4}}$ spaces*, Mem. Fac. Sci., Kochi Univ., Ser. A, Math 17, 1996.

[10] W. Dunham. *$T_{\frac{1}{2}}$-Spaces*, Kyungpook Math. J. Volume 17, Num. 2 - December, 1977.

[11] H. Herrlich. *Topological structures*, Math. Centre Tracts 52, 1974, 59-122.

[12] N. Levine. *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo 19(2), 1970, 89-96.

[13] E.L. Lima. *Elementos de topologia geral*, Editora da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro, 1970.

[14] R. Lowen. *Approach spaces: the missing link in the topology-uniformity-metric triad*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1997.

[15] R. Lowen and M. Sioen. *A note on separation in AP*, preprint.

[16] M.N. Mukherjee and B. Roy. *A unified theory for R_0, R_1 and certain other separation properties and their variant forms*, Bol. Soc. Paran. Mat. (3s) v. 28(2), 2010, 15-24.

[17] J.R. Munkres. *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.

[18] B.M. Munshi. *Separation axioms*, Acta Science, Indica 12, No. 2, 140-144, 1986.

[19] I. Singer. *Some relations between dualities, polarities, coupling functionals and conjugations*, J. Math. Anal. Appl. 115, 1986, 1-22.

[20] L.A. Steen and J.A. Seebach, Jr. *Counterexamples in topology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978.