

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

GERAÇÃO DO ELEMENTO REPRESENTATIVO DO CONCRETO COM
AGREGADOS GRAÚDOS EM FORMATO ELÍPTICO

CURITIBA
2012

GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

GERAÇÃO DO ELEMENTO REPRESENTATIVO DO CONCRETO COM
AGREGADOS GRAÚDOS EM FORMATO ELÍPTICO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, linha de pesquisa em Análise Numérica, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

Co-Orientadora: Prof^a. Dr^a. Liliana Madalena Gramani

CURITIBA

2012

A você, paciente leitor!

AGRADECIMENTOS

Um trabalho de dissertação é resultado de uma sistematização de um conjunto de idéias que vão sendo desenvolvidas ao longo de um ano. O desenvolvimento dessas ideias é fruto de estudos que só foram possíveis graças a interferência do Prof. Dr. Marcelo Rassy Teixeira e pela minha co-orientadora: Prof.a. Dr.a. Liliana Madalena Gramani. Graças a ela, estive em contato com meu orientador, o Prof. Dr. Eloy Kaviski.

Ao longo do trabalho tive um amigo, Fábio André Negri Balbo, que esteve mais do que presente ao longo do trabalho. O Fábio é aquele tipo de pessoa especial que não mede esforços em ajudar os outros. Agradeço especialmente a ele por ter discutido comigo os principais detalhes do trabalho e buscado, junto a mim, as melhores soluções para cada uma das problemáticas.

Também agradeço a minha namorada, Pâmela de Assis Beltrani, pelas longas conversas. A Pâmela é uma pessoa muito especial, com a maravilhosa qualidade de sempre estar aberta a discutir e pensar qualquer assunto pela simples vontade de pensá-los.

Agradeço especialmente aos meus pais: Minha mãe (Suzana) e meu pai (Valmiro) que batalharam muito ao longo de suas vidas para fornecer a mim e ao meu irmão uma educação de qualidade.

Agradeço ao meu irmão (Tiago), a minha avó e avô, as minhas tias, tios, primas e primos por estarem próximos a mim.

Agradeço ao projeto REUNI, a UFPR, ao PPGMNE e a UFPA pelos apoios dados.

A todos, meu muito obrigado!

O acaso só favorece aos espíritos preparados.

Louis Pasteur

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento de modelos computacionais para a simulação do envelhecimento do concreto de barragens de usinas hidrelétricas. As técnicas matemáticas necessárias para se atingir este objetivo necessitam da geração do elemento representativo do material (RVE), o qual foi desenvolvido nesta dissertação. Para a geração do RVE do concreto considerá-se a escala mesoscópica, onde o concreto é um material compósito composto de duas fases: Argamassa e agregados graúdos. As informações sobre os agregados foram obtidos a partir de sua curva granulométrica e diversas aproximações para seu formato geométrico foram geradas, como círculos, elipses, esferas e outros, fazendo assim um desenvolvimento gradativo da estrutura geométrica. Após a escolha dos formatos, o posicionamento dos agregados no RVE recai em um problema de detecção de colisão entre figuras geométricas. Em especial, as técnicas de detecção de colisão utilizadas são técnicas bem consolidadas na área de computação gráfica que foram estudadas afim de resolver a problemática descrita. Também foi desenvolvido uma interface gráfica que apresenta a estrutura mesoscópica do concreto a partir dos agregados graúdos gerados. Especificamente para o RVE com agregados em formato elíptico realiza-se um teste de compressão axial, onde calcula-se os deslocamentos, as deformações e as tensões que surgem no material. Para o teste de compressão axial utiliza-se um algoritmo, desenvolvido no projeto de pesquisa - Desenvolvimento de Modelos Computacionais Avançados Para a Simulação do Envelhecimento do Concreto , que resolve o sistema de equações que descreve a situação de compressão a partir do Método de Galerkin Livre de Elementos.

Palavras-chave: Concreto, Detecção de Colisão, Elemento Representativo.

ABSTRACT

This work is part of a project that seeks to develop advanced computer models to simulate the aging of concrete. The mathematical techniques necessary to achieve this require the generation of representative material element (RVE), which was developed in this work. For the generation of RVE the concrete was considered in mesoscopic scale where the concrete is considered a composite material consisting of two phases: mortar and coarse aggregates. The information on the aggregates were obtained from a grading curve and various approaches to its geometric shape were generated, such as circles, ellipses, spheres and others. After the chosen formats, the positioning of the RVE aggregates fell on a problem of collision detection between geometric figures. In particular, the techniques for collision detection used are well established in the area of computer graphics that were studied in order to solve the problem described. Specifically for the RVE with elliptical-shaped aggregates a test of axial compression was performed, where we calculated the displacements, strains and tensions that arise in the material. For the axial compression test was used an algorithm developed by the research group, which solves the system of equations that describes the situation from the compression method Element Free Galerkin.

Key-words: concrete, collision detection, representative element.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – HETEROGENEIDADE DO CONCRETO (MEHTA; MONTEIRO, 2006	22
FIGURA 2 – POSIÇÃO DE UM PONTO QUALQUER (O AUTOR).	29
FIGURA 3 – DESLOCAMENTO (O AUTOR).	30
FIGURA 4 – DESLOCAMENTO INFINITESIMAL (O AUTOR).	31
FIGURA 5 – ELEMENTO CÚBICO INFINITESIMAL (LAI; RUBIN; 2010)	36
FIGURA 6 – (A) EXEMPLO ONDE NÃO HÁ COLISÃO. (B) EXEMPLO ONDE HÁ COLISÃO. (O AUTOR)	41
FIGURA 7 – (A) EXEMPLO ONDE NÃO HÁ COLISÃO. (B) EXEMPLO ONDE HÁ COLISÃO. (O AUTOR)	42
FIGURA 8 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTE- RÍSTICA E O COMPORTAMENTO GEOMÉTRICO DOS DISCOS ELÍP- TICOS. (CHOI, ET. AL, 2005)	43
FIGURA 9 – ROTAÇÃO α EM TORNO DA ORIGEM	45
FIGURA 10– ALGORITMO PARA GERAÇÃO DOS AGREGADOS (O AUTOR) .	54
FIGURA 11– ELIPSES CIRCUNSCRITAS POR CIRCUNFERÊNCIA (O AUTOR)	56
FIGURA 12– CASO EM QUE NÃO EXISTE COLISÃO, MAS O TESTE DE DE- TECÇÃO DE COLISÃO ENTRE CÍRCULOS NÃO CONFIRMA O RE- SULTADO (O AUTOR).	56
FIGURA 13– CASO EM QUE EXISTE COLISÃO E O TESTE DE DETECÇÃO DE COLISÃO ENTRE ELIPSES CONFIRMA A COLISÃO (O AUTOR) ..	57
FIGURA 14– ALGORITMO PARA POSICIONAMENTO DOS AGREGADOS	57
FIGURA 15– ESTRUTURAS ALEATÓRIAS GERADAS: (A) AGREGADOS CIR- CULARES $A_p = 40\%$; (B) AGREGADOS CIRCULARES $A_p = 50\%$; (C) AGREGADOS CIRCULARES $A_p = 60\%$; (D) AGREGADOS ELÍPTI- COS $A_p = 40\%$; (E) AGREGADOS ELÍPTICOS $A_p = 50\%$; (F) AGRE- GADOS ELÍPTICOS $A_p = 60\%$. (O AUTOR)	61

FIGURA 16– MAPAS PARA 7 AGREGADOS (O AUTOR)	63
FIGURA 17– MAPAS PARA 10 AGREGADOS (O AUTOR).	64
FIGURA 18– MAPAS PARA 13 AGREGADOS (O AUTOR).	65
FIGURA 19– MAPAS PARA 16 AGREGADOS (O AUTOR).	66
FIGURA 20– AGREGADOS ESFÉRICOS $V_p = 40\%$ (O AUTOR)	68
FIGURA 21– AGREGADO RUGOSO (O AUTOR)	68
FIGURA 22– AGREGADOS EM FORMATO ELIPSOIDAL (O AUTOR).	70

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESULTADO DA ANÁLISE DO PENEIRAMENTO (WRIGGERS; MOFTAH, 2006)	52
TABELA 2 – CARACTERÍSTICA DOS COMPONENTES (TEIXEIRA, 2011). ..	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO	13
1.2 JUSTIFICATIVA	14
1.3 TRABALHOS RELACIONADOS	15
1.4 GRUPO DE PESQUISA	16
1.5 OBJETIVOS	17
1.5.1 Objetivo Geral	17
1.5.2 Objetivos Específicos	17
1.6 MÉTODOS	18
1.7 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
2 O CONCRETO E SUAS REPRESENTAÇÕES	20
2.1 O CONCRETO	20
2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS PARTÍCULAS	22
2.3 MATERIAL COMPÓSITO	24
2.3.1 Fração de Volume e de Massa	24
2.4 O CONCRETO NA ESCALA MESOSCÓPICA - ELEMENTO REPRESENTATIVO DO MATERIAL	27
3 CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES DE UM RVE SUJEITO A COMPRESSÃO AXIAL.	28
3.1 GERAL	28
3.2 POSIÇÃO DE UM CORPO QUALQUER	28
3.3 CAMPO DE DESLOCAMENTO	29
3.4 GRADIENTE DE UM CAMPO VETORIAL	30

3.5	TENSOR DAS DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS	30
3.6	TENSÕES	32
3.7	VETOR DAS DEFORMAÇÕES E DAS TENSÕES	33
3.8	RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E TRAÇÃO	33
3.9	VETOR DE FORÇAS	35
3.10	DIVERGENTE DE UM CAMPO TENSORIAL	36
3.11	PRINCÍPIO DO MOMENTO LINEAR	36
3.12	CONDIÇÕES DE CONTORNO	38
4	DETECÇÃO DE COLISÃO	39
4.1	GERAL	39
4.2	COLISÃO ENTRE FIGURAS CIRCULARES	40
4.3	COLISÃO ENTRE CORPOS ESFÉRICOS	41
4.4	COLISÃO ENTRE DISCOS ELÍPTICOS	42
4.4.1	Obtenção da matriz que define uma elipse	44
4.5	COLISÃO ENTRE REGIÕES ELIPSOIDAIS	47
4.5.1	Obtenção da matriz que define um elipsóide	48
5	MÉTODOS	51
5.1	GERAÇÃO DOS AGREGADOS	51
5.2	POSICIONAMENTO DOS AGREGADOS	54
5.3	CÁLCULO DAS TENSÕES	58
6	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	59
6.1	TESTES COM AGREGADOS ELÍPTICOS	59
6.1.1	Geração do elemento representativo do material	59
6.1.2	Teste de compressão axial.	61
6.2	TESTES COM AGREGADOS ESFÉRICOS	67
6.3	TESTES COM AGREGADO RUGOSO	68

6.4 TESTES COM AGREGADOS ELIPSOIDAIS	69
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES	71
REFERÊNCIAS	73
APÊNDICE A – APÊNDICE	75
A.1 DEMONSTRAÇÃO DA DETECÇÃO DE COLISÃO ENTRE ELIPSES	75
A.1.1 Elipses e discos elípticos	75
A.2 GERAÇÃO DOS AGREGADOS	79
A.3 GERAÇÃO DO RVE	82

1 INTRODUÇÃO

1.1 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Inovações em modelagem e simulação dos materiais é uma das buscas essenciais para trazer um aprimoramento no desenvolvimento de novos materiais e no aperfeiçoamento dos já existentes. Percebendo isto, a Fundação Nacional de Ciências e Tecnologia dos Estados Unidos emitiu um relatório denominado SBES (*Blue Ribbon Panel on Simulation-Based Engineering Science*) (SCIENCE, 2006), relatando a importância do desenvolvimento da área de ciência e tecnologia, principalmente no desenvolvimento dos materiais, como fibras, aço, concreto e outros.

Em especial, obras marcantes da sociedade se beneficiam deste tipo de estudo. Incluem-se nessas obras, as barragens de famosas usinas hidrelétricas, como a Usina hidrelétrica de Tucuruí (UHE Tucuruí) e a Usina Hidrelétrica de Itaipu (UHE Utaipu) que tiveram um papel importante neste trabalho.

UHE Tucuruí é a maior usina genuinamente brasileira, localizada a 350km da capital Belém, no estado do Pará. Além de gerar energia elétrica, o objetivo de sua construção era tornar navegável um trecho do rio Tocantins. Em números a UHE Tucuruí é capaz de operar a 11,960 MW. Possui uma barragem de 7,919 milhões de metros cúbicos de concreto. A UHE Tucuruí é responsável por cerca de 15% da energia consumida no Brasil (TEIXEIRA, 2011).

UHE Itaipu é uma usina binacional localizada no Rio Paraná, na fronteira entre o Brasil e o Paraguai. Fica localizada a 640 km da capital Curitiba, no estado do Paraná. Para sua construção foram necessários 12,57 milhões de metros cúbicos de concreto. Hoje é responsável por aproximadamente 20% da energia consumida no Brasil (TEIXEIRA, 2011).

Esses números mostram como tais usinas são essenciais no desenvolvimento do país, gerando, até o presente momento, mais de 30% de toda energia elétrica consumida no Brasil.

Para o bom funcionamento dessas usinas são instaladas, nas proximidades, barragens que estocam grandes quantidades de água. Como estas são construídas principalmente de concreto o estudo da vida útil do concreto cumpre um papel fundamental para se obter o real estado de conservação das mesmas.

1.2 JUSTIFICATIVA

A montante¹ possui uma quantidade de água reservada necessária para que a usina hidrelétrica possa produzir energia elétrica de maneira regularizada.

Para regularizar a vazão firme da usina criam-se barragens que permitem estocá-las. Essas barragens feitas, na maior parte das vezes de concreto, estão sujeitas a ação do tempo e a vários fatores físicos e químicos que a deterioram ao longo do tempo. Além disto, existe uma variabilidade em relação aos fatores ambientais os quais também podem mudar o comportamento estrutural da barragem.

Para evitar danos e a suposta perda destas estruturas, os engenheiros civis responsáveis pela conservação das usinas hidrelétricas precisam de estudos confiáveis que permitem estimar zonas prováveis de risco para que possam fazer operações de reforço e de reparo. Um acidente neste tipo de estrutura é considerado como uma catástrofe, que pode dizimar cidades inteiras, além de muitas vidas humanas. Além disto, uma catástrofe dessas traz uma grave instabilidade econômica por conta da redução de oferta de energia elétrica.

Uma usina hidrelétrica como a de Tucuruí que produz cerca de 15% de toda a energia elétrica consumida no Brasil é responsável pelo fornecimento para um dos principais consumidores de energia elétrica do país, que é o setor industrial, respon-

¹A montante é todo ponto referencial ou seção que se situa antes deste ponto referencial qualquer de um curso de água.

sável por uma grande parte das importações do setor brasileiro.

Para uma simulação eficiente do concreto existente nessas usinas hidrelétricas fez-se um estudo do elemento representativo do concreto - o RVE - que fornece propriedades do material em diferentes escalas. O RVE é um elemento essencial presente na teoria de homogeneização que permite representar um material heterogêneo a partir de escalas menores e que, por conta disto, agrega apenas as informações necessárias para um estudo coerente do material do ponto de vista estatístico.

Neste trabalho, será analisado o comportamento do RVE do concreto na escala mesoscópica². Com o auxílio do RVE é possível expandir essas propriedades para escalas maiores, através de técnicas de multi-escala e homogenização, os quais fogem do escopo deste trabalho.

1.3 TRABALHOS RELACIONADOS

Diversos modelos mesoscópicos do concreto foram desenvolvidos para estudar a influência da composição dos materiais no comportamento do material como um todo.

Z.P.Bazant *et al.* (1990) desenvolveram um modelo para simular realisticamente o desenvolvimento da fratura e sua localização. Schorn e Rode (1991) estudaram o processo de evolução do dano no concreto utilizando um modelo de enquadramento. Um modelo em redes apresentado por Schlangen e Mier (1992) trouxe uma ferramenta para a simulação do mecanismo de falha típica no concreto.

Outra maneira para simular a estrutura do concreto por uma malha de elementos finitos foi desenvolvido por Wittmann, Roelfstra e Sadaouki (1984), Wittmann e Sadaouki (1988), Wittmann, Steiger e Sadaouki (1993). Com essa aproximação, as propriedades mecânicas e não-mecânicas puderam ser simuladas mais realisticamente para concretos com diferentes composições. Wang, Kwan e Chan (1999) propuse-

²A escala mesoscópica diz referência a materiais na escala de tamanho entre o mundo microscópico e o macroscópico. Os tamanhos referentes a escala microscópica são da ordem de poucos diâmetros atômicos e os referentes a escala macroscópico são da ordem dos comprimentos utilizados na escala cotidiana. (JUNIOR, 2009)

ram um modelo para gerar estruturas aleatórias de agregados³ baseado no método de Monte Carlo e desenvolveram um modelo de geração de malha para estudar o comportamento não linear do concreto.

Na geração de estruturas aleatórias do concreto, a forma dos agregados devem ser consideradas para estudar este efeito no comportamento mecânico do concreto. A forma dos agregados possui uma influência significativa na distribuição da tensão dentro do material e, por consequência, no início da fratura e no acúmulo de dano.

Vários modelos em duas dimensões foram gerados por Zaitsev e Wittmann (1981) para estudar a fratura utilizando agregados em formatos de polígonos e círculos. Agregados com formatos pontiagudos foram descritos por Wang, Kwan e Chan (1999). Para estudar a evolução do dano na escala mesoscópica, Teixeira (2011) gerou alguns agregados elípticos manualmente. Para modelos em 3 dimensões, Z.P.Bazant *et al.* (1990), Schlangen e Mier (1992), Schorn e Rode (1991) assumiram que os agregados possuíam formato esférico. Garboczi (2002) descreveu um procedimento matemático, utilizando funções harmônicas para determinar o formato dos agregados baseado em imagens tri-dimensionais adquiridas através de tomografia de raio-X.

1.4 GRUPO DE PESQUISA

Este projeto está incluído em um projeto, vinculado a ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica), chamado "Desenvolvimento de modelos computacionais avançados para a simulação do envelhecimento do concreto", que tem como objetivo simular computacionalmente o envelhecimento do concreto das barragens e assim estimar o real estado de conservação das principais barragens de concreto presentes nas usinas hidrelétricas do Brasil.

Teixeira (2011) deu início a este projeto, simulando computacionalmente a evolução do dano em concretos de barragens. Para isto, desenvolveu, em sua tese de

³As formas que compõe o material são chamados de agregados, podendo ser divididos, de acordo com seu tamanho, em agregados graúdos e míudos.

doutorado, um algoritmo para a realização de uma compressão axial no RVE para RVE's com agregados em formato elíptico. Como sugestão de trabalhos futuros, foi colocado a utilização deste algoritmo para um RVE, cuja geração de agregados fosse realizada aleatoriamente, a partir da leitura da curva granulométrica.

Para a resolução do sistema de equações gerado na situação de compressão, Teixeira (2011) utilizou o método de Galerkin Livre de Elementos.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo Geral

Esta dissertação tem como objetivo geral desenvolver um algoritmo para geração do elemento representativo do concreto com agregados graúdos, onde o formato dos agregado é baseado em sua curva granulométrica, de maneira que seja possível realizar um ensaio de compressão axial do material gerado.

1.5.2 Objetivos Específicos

1. Criar uma interface gráfica que apresente a estrutura mesoscópica do concreto a partir dos agregados graúdos gerados.
2. Desenvolver, gradativamente, o refinamento da estrutura geométrica dos agregados graúdos para uma melhor representação da realidade
3. Utilizar o algoritmo desenvolvido pelo grupo de pesquisa (TEIXEIRA, 2011) para resolver o problema do corpo simulado por um RVE submetido a um ensaio de compressão axial, solucionado a partir do método de Galerkin Livre de Elementos.

1.6 MÉTODOS

Para o objetivo 2, os primeiros RVE's gerados tiveram seus agregados aproximados por círculos e elipses. Para estes primeiros modelos utilizou-se o algoritmo desenvolvido pelo grupo de pesquisa para realizar um ensaio de compressão axial, o que pode ser comparado com outros modelos encontrados na literatura.

Além destes foram gerados RVE's tridimensionais, cujo agregados foram aproximados por esferas e elipsóides e RVE's bidimensionais cujo agregados apresentam uma certa rugosidade artificial em sua fronteira.

Para atingir o objetivo 3, foram utilizados alguns fundamentos da mecânica do contínuo para analisar as tensões e deformações que surgem em um RVE sob carregamento. A partir de seus fundamentos foi possível escrever o problema de compressão axial para um material compósito, que foi, no caso, o concreto composto de agregados graúdos e argamassa.

1.7 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está dividida em sete capítulos.

- O segundo capítulo busca caracterizar o concreto na escala mesoscópica, definindo para isso alguns conceitos pertinentes a ciência dos materiais compósitos e apresentando o RVE.
- O terceiro capítulo traz a fundamentação necessária para realizar o cálculo de deformações e tensões de um RVE sujeito a um ensaio de compressão axial, utilizando para isto alguns fundamentos da mecânica do contínuo, caracterizando em termos matemáticos o problema estudado.
- O quarto capítulo traz discussões sobre a técnica de detecção de colisão, técnica consolidada da área de computação gráfica, que permite gerar computacionalmente a posição de cada um dos agregados no RVE.

- O quinto capítulo formaliza os métodos utilizados na resolução destes problemas. Em especial, mostra como a detecção de colisão foi utilizada para gerar um RVE com agregados gerados aleatoriamente a partir da leitura de sua curva granulométrica.
- O sexto capítulo discute os resultados obtidos. Foram gerados RVE's em que os agregados possuíam diversos formatos. Em especial, para os agregados em formato elíptico ainda foi realizado um teste de compressão axial para alguns RVE's.
- O sétimo capítulo traz conclusões e sugestões de trabalhos futuros. O teste de compressão axial pode ser realizado em outras estruturas, geradas ao longo deste trabalho. Com estas gerações, pode-se estudar a influência da forma dos agregados nas propriedades do material gerado.
- O apêndice traz a demonstração da técnica utilizada para a detecção de colisão entre elipses e o código desenvolvido para a geração dos agregados e seu posicionamento no RVE.

2 O CONCRETO E SUAS REPRESENTAÇÕES

Este capítulo traz algumas informações essenciais sobre o concreto, perpassando por técnicas de amostragem para o tipo de concreto utilizado e pela representação do concreto a partir de seu elemento representativo.

2.1 O CONCRETO

O concreto é utilizado como material de construção por conta da sua boa relação custo-benefício, apresentando uma boa durabilidade e resistência⁴ (WRIGGERS; MOFTAH, 2006). Na construção civil, ele é amplamente utilizado nas fundações, em colunas, em vigas, em lajes, em paredes e em outros elementos. Em especial, o concreto é um material resistente a água e possui uma facilidade com a qual elementos estruturais podem ser obtidos através de uma variedade de formas e tamanhos. Também é um material que apresenta uma rápida disponibilidade para uso.

Além disto, o concreto foi decisivo na elaboração de famosas estruturas ao longo do país, como o Cristo do Corcovado no Rio de Janeiro, a Ponte do Galeão na Baía de Guanabara, a ponte sobre o Rio das Antas no Rio Grande do Sul, a Usina Hidrelétrica de Itaipu na fronteira entre Brasil e Paraguai, a Usina Hidrelétrica de Tucuruí em Tucuruí, entre outras (VASCONCELOS, 1985).

O concreto é obtido a partir da mistura, e posterior endurecimento, entre cimento, água, agregado miúdo e graúdo e, em alguns casos, aditivos químicos. Esses aditivos químicos melhoram a qualidade do concreto, aumentando sua resistência e durabilidade e diminuindo sua permeabilidade⁵ e retração. Nos cálculos estruturais, o módulo

⁴Resistência aqui no sentido de resistência mecânica: A capacidade da estrutura suportar as solicitações externas sem que estas venham a lhe causar deformações plásticas

⁵Permeabilidade é a propriedade de um corpo de se deixar penetrar por uma substância

de elasticidade⁶ do concreto é um dos parâmetros utilizados, o qual relaciona a tensão aplicada a deformação instantânea obtida.

A resistência do concreto é medida através da resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}), cuja unidade de medida é o MPa (Mega Pascal).

Quando estudado em escalas macroscópicas dificilmente observa-se, o concreto, como um material heterogêneo contendo todas essas fases. Entretanto, o concreto é um material que possui um comportamento complexo e que pode ser estudado em diferentes escalas: Macroscópica, mesoscópica, microscópica e outras. Na escala macroscópica, ele é considerado como um material homogêneo, que possui suas propriedades definidas a partir de suas grandezas macroscópicas.

A escala mesoscópica é uma escala com dimensões maiores que as das moléculas, de modo que o domínio possui propriedades macroscópicas, mas com dimensões menores que a dimensão macroscópica (TEIXEIRA, 2011).

Quando analisada a mesoestrutura do concreto percebe-se a presença de dois constituintes: a pasta de cimento endurecida, conhecida como argamassa (mistura da pasta de cimento e dos agregados miúdos) e as partículas de agregado graúdo, como pode ser observado na Figura 1.

⁶O módulo de elasticidade de um material é uma relação obtida da razão entre a tensão exercida e a deformação sofrida por ele. Materiais com diferentes módulos de elasticidade precisam estar sujeitos a diferentes tensões para se gerar a mesma deformação.

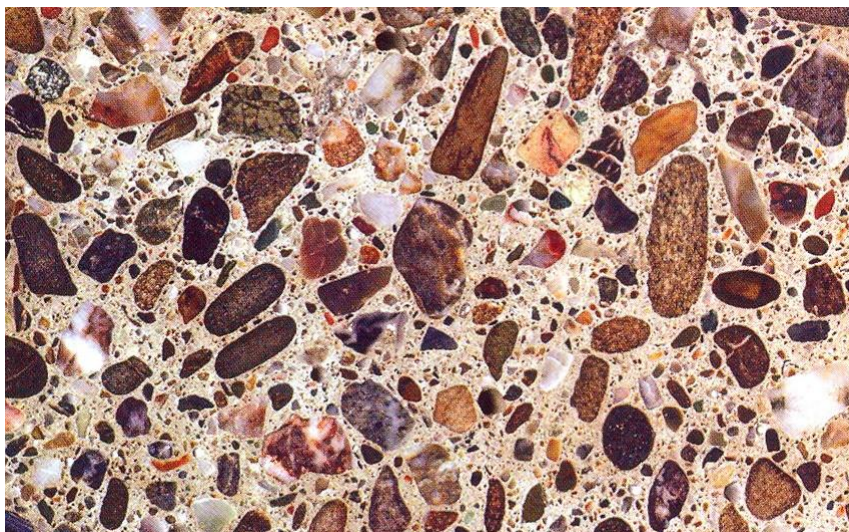


FIGURA 1: Heterogeneidade do concreto (MEHTA; MONTEIRO, 2006)

Wriggers e Mofteh(2006) aponta que para descrever o comportamento mecânico do material, deve-se considerar as influências da forma, do tamanho e da distribuição dos agregados na argamassa.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS PARTÍCULAS

As estruturas feitas de concreto (como as barragens) são feitas com diversos tamanhos de pedra britada, com o intuito de aproveitar, principalmente, os materiais locais. Assim, cada uma delas é única e a descrição de sua variabilidade é realizada pela curva granulométrica.

A curva granulométrica é o resultado do teste de peneiramento, discutido abaixo, que pode ser realizado em materiais formados por grãos. No peneiramento o material estudado é classificado em grupos de acordo com o tamanho geométrico de suas partículas.

Para fazer esta classificação utiliza-se uma série de peneiras de aberturas diferentes que barram as partículas de acordo com seu tamanho.

Assim, a curva granulométrica apresenta uma distribuição do tamanho geométrico dos agregados que formam o concreto e ao analisá-la é possível aproveitar cada tipo

de material para utilidades diversas, como descrito abaixo.

A variabilidade e a eventual seleção dos tipos de concreto a partir do tamanho de seus agregados permite ampliar a gama de aplicações deste material e direcionar os esforços na criação de estruturas com finalidades diferentes, como o caso do concreto destinado a construção das estradas frente aquele destinado a barragens.

Além disto, quanto maior for a dimensão dos agregados e mais variado sua granulometria, mais econômico se torna o traço do concreto⁷, o que faz com que aqueles com dimensões de agregados menores devam ser utilizados preferencialmente para reparos.

A norma que preconiza o ensaio de granulometria é a norma ABNT NBR 7211 que coloca definições sobre os agregados graúdos e miúdos e sobre a série de peneiras utilizado no ensaio. Para a norma, agregado graúdo são aqueles grãos que passam pela peneira com abertura de malha de 75mm e ficam retidos na peneira de malha de 4,75mm. Agregados miúdos são aqueles grãos que passam pela peneira com abertura de malha de 4,75mm e ficam retidos com abertura de malha de 150um. A norma permite uma aproximação de alguns agregados miúdos como agregados graúdos (2005, 2005).

Nota-se, então, a importância da curva granulométrica na escolha dos componentes do material. O ensaio de granulometria, o qual resulta na curva granulométrica, traz informações sobre a quantidade de material que passa em peneiras de diferentes tamanhos.

Um outro ponto importante da curva granulométrica diz respeito que a "Porcentagem de grão que passa" é um valor dado em termos da massa total, e não em termos de volume ou de área. Os modelos discutidos ao longo deste trabalho são feitos em termos de volume ou de área.

Para obter os dados da curva granulométrica, a cada peneiramento realizado, soma-se a massa da quantidade de material que passou e normaliza-o pela massa

⁷O traço do concreto diz sobre as proporções de cada material utilizados na mistura final

total. Assim, você obtém uma porcentagem de grãos que passam para cada tamanho da peneira.

2.3 MATERIAL COMPÓSITO

Um material compósito é constituído por uma mistura entre dois ou mais materiais que se completam e que permitem que um novo tipo de material com novas características seja criado. O concreto é um material compósito, como visto, formado por duas fases na escala mesoscópica: Argamassa e agregados graúdos. O resultado desta composição é um material que combina as propriedades de ambos os constituintes.

Dentro da área de estudo de materiais compósitos, considera-se que um material compósito é composto de uma fase contínua, chamada de matriz e uma fase descontínua chamada de inclusão (BERTHELOT, 1998). Na escala mesoscópica, a argamassa é considerada com a matriz e os agregados graúdos como a inclusão.

Para obter as propriedades que o material compósito possui, leva-se em conta as propriedades dos materiais constituintes, a distribuição geométrica dos mesmos e as interações entre os materiais.

Na sequência serão definidos algumas relações entre as frações de massa e de volume que foram utilizadas no algoritmo de geração dos agregados.

2.3.1 Fração de Volume e de Massa

Na modelagem de materiais compósitos, um dos fatores principais que caracterizam o material é a proporção relativa entre a matriz e a inclusão. Essa proporção pode ser colocada em termos de volume ou de massa.

Em termos de medidas experimentais, a fração de massa é obtida mais facilmente, entretanto a fração de volume aparece diretamente nos modelos teóricos que descrevem os materiais (BERTHELOT, 1998).

Pode-se considerar um termo de fração de área, construído de maneira equiva-

lente a fração de volume. Na sequência, será mostrado como definir cada uma das frações, relacionando-as através da densidade do material. Tal resultado é importante, pois a porcentagem que passa em cada peneira é analisado em termos de fração de massa e para a geração do RVE os modelos são escritos em termos da fração de volume de cada material.

FRAÇÃO DE VOLUME Dado um material compósito com volume total V_c , cujo volume da matriz é dado por V_m e o volume das inclusões é dado por V_i . Diz-se que a fração de volume das inclusões é dado por:

$$v_i = \frac{V_i}{V_c}. \quad (1)$$

De maneira equivalente, a fração de volume da matriz é dado por:

$$v_m = \frac{V_m}{V_c}, \quad (2)$$

sendo que:

$$v_m = 1 - v_i \quad (3)$$

FRAÇÃO DE MASSA De maneira similar a fração de volume, define-se a fração de massa a partir da massa do material compósito P_c , da matriz P_m e da inclusão P_i .

RELAÇÃO ENTRE A FRAÇÃO DE VOLUME E DE MASSA O ensaio feito pela curva granulométrica retorna a massa total dos agregados. Para o modelo que será abordado neste trabalho, é necessário obter informações sobre o volume (ou a área) que os agregados ocupam. A partir da densidade do material compósito, da matriz e da inclusão, pode-se relacionar as duas informações da seguinte maneira (BERTHELOT, 1998):

Dado que:

$$P = \rho V \quad (4)$$

onde P é a massa do material, ρ é a densidade e V é o volume para cada material. Como o total da massa do material compósito pode ser escrito como:

$$P_c = P_m + P_i, \quad (5)$$

utilizando a equação 4 para cada material na equação 5 e dividindo ambos os membros por V_c , chega-se a relação:

$$\rho_c = \rho_m v_m + \rho_i v_i, \quad (6)$$

com a relação 3, tem-se que:

$$\rho_c = \rho_m(1 - v_i) + \rho_i v_i \quad (7)$$

Partindo da definição da fração de massa:

$$p_i = \frac{P_i}{P_c} = \frac{\rho_i V_i}{\rho_c V_c} = \frac{\rho_i}{\rho_c} v_i, \quad (8)$$

onde a ρ_c é determinado pela equação 7.

Com essas equações, pode-se escrever a fração de volume, necessárias aos modelos teóricos, ao conhecer a fração de massa. Os modelos desenvolvidos ao longo deste trabalho utilizam a fração de volume e, por conta disto, convertem as informações vindas da curva granulométrica através da densidade do material e das inclusões.

2.4 O CONCRETO NA ESCALA MESOSCÓPICA - ELEMENTO REPRESENTATIVO DO MATERIAL

A unicidade de cada RVE do concreto se torna visível quando analisado em sua escala mesoscópica. Nesta escala, o concreto é visto como um material heterogêneo e, neste momento, a forma, o tamanho e a quantidade de agregados trazem a variabilidade para cada curva granulométrica.

Para tratar esta variabilidade, utiliza-se um elemento representativo do concreto. Através dele, o material analisado pode ser estudado de maneira que, estatisticamente, as características físicas dele se mantenham constante. (OSTOJA-STARZEWSKI, 2006).

O RVE carrega informações da escala abordada - no caso a mesoscópica - como tensões, deformações e o dano envolvido nas regiões estudadas, os quais, através de métodos que fogem do escopo deste trabalho, como o método de Mori-Tanaka e o Lema de Hill, podem ser expandidos para a escala macroscópica a fim de representar com precisão o real estado de conservação destes materiais.

Neste estudo é importante gerar um RVE que carregue as informações referentes ao material que formam o concreto. Por conta disto, este elemento possui informações dos agregados que, por sua vez trazem as informações do material descritas por sua curva granulométrica.

3 CÁLCULO DAS DEFORMAÇÕES DE UM RVE SUJEITO A COMPRESSÃO AXIAL.

3.1 GERAL

Técnicas de homogeneização permitem expandir as propriedades de um material de certa escala para outra escala maior. Entretanto, para que elas possam ser usadas de maneira eficiente é necessário formular a situação física a qual o material está sujeito.

Para o exemplo abordado neste trabalho foi considerado um RVE sujeito a compressão axial⁸ e, com o auxílio da mecânica do contínuo, formulou-se o problema em termos de um sistema de equações diferenciais.

Este capítulo é um resumo dos fundamentos da mecânica do contínuo descritos no livro do Lai (1993).

3.2 POSIÇÃO DE UM CORPO QUALQUER

Para um corpo qualquer, a posição de cada uma de suas partículas pode ser dado por:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (9)$$

para o caso tridimensional, visto na figura 2:

⁸A compressão axial surge quando um objeto está submetido a forças externas normais à sua seção, sofrendo uma diminuição do tamanho (FAY, 2006).

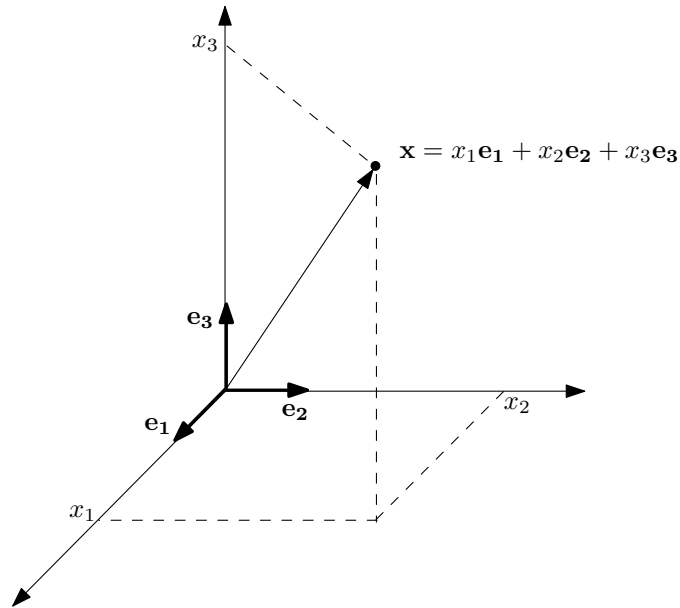


FIGURA 2: Posição de um ponto qualquer (O Autor).

$$x = x(X, t) \text{ com } x(X, t_0) = X, \quad (10)$$

onde $x = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$ representa a posição inicial de uma certa partícula.

Essa notação, conhecida como coordenadas materiais, permite escrever a trajetória de cada partícula em função da posição x e do tempo t .

3.3 CAMPO DE DESLOCAMENTO

Quando uma partícula do corpo se move da posição P para a posição Q , o vetor \vec{PQ} representa o deslocamento desta partícula.

Denota-a pela letra u , o deslocamento, e diz-se que:

$$u = x(X, t) - X \quad (11)$$

representa o campo de deslocamento do material, conforme a figura 3:

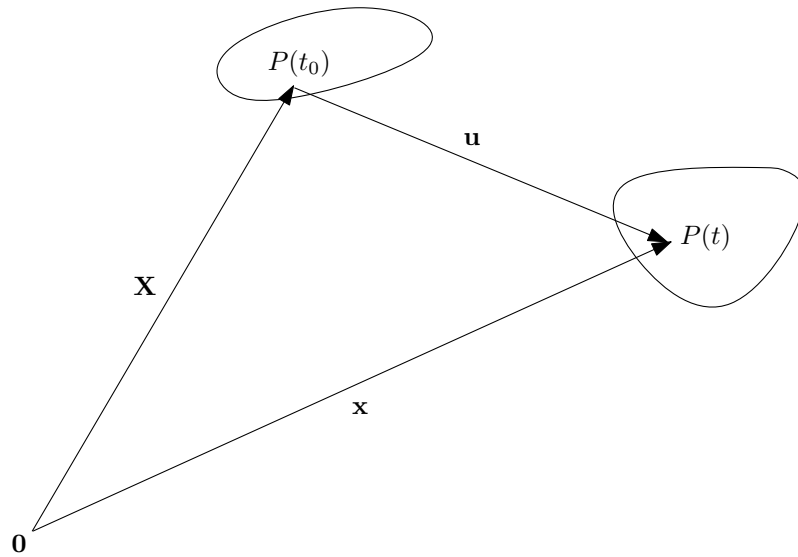


FIGURA 3: Deslocamento (O Autor).

3.4 GRADIENTE DE UM CAMPO VETORIAL

Seja $v(r)$ uma função vetorial da posição r , temos que:

$$dv = v(r + dr) - v(r) \equiv (\nabla v)(dr), \quad (12)$$

dividindo ambos os lados por dr , chega-se que:

$$(\nabla v)e = \left(\frac{dv}{dr}\right) \text{ na direção } e. \quad (13)$$

Ao expandir-se para cada uma das direções (LAI, 1993), chega-se a:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.5 TENSOR DAS DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

Um ponto P que sofre um deslocamento u , tem sua posição dada por:

$$x = X + u(X, t). \quad (15)$$

Um ponto Q, na vizinhança de P, com posição inicial $X + dX$, tem sua posição dada por:

$$x + dx = X + dX + u(X + dX, t), \quad (16)$$

de acordo com a figura 4:

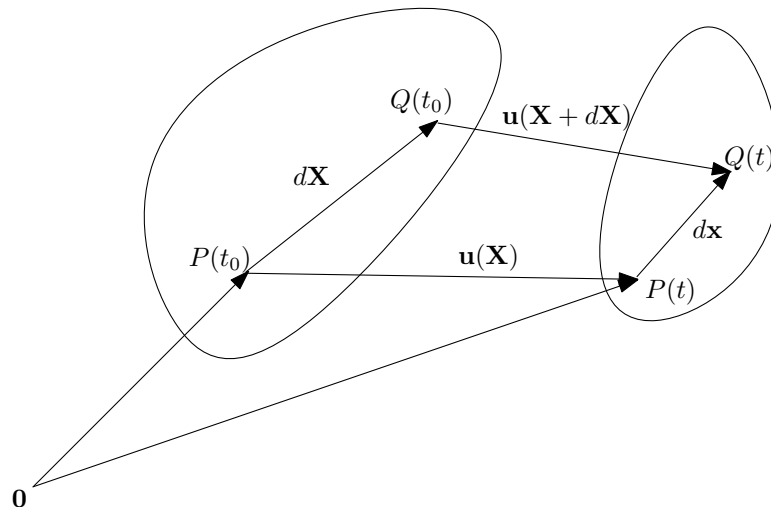


FIGURA 4: Deslocamento infinitesimal (O Autor).

Subtraindo a equação 15 da equação 16, chega-se que:

$$dx = dX + u(X + dX, t) - u(X, t), \quad (17)$$

e utilizando a notação de gradiente de uma função vetorial, tem-se que:

$$dx = dX + (\nabla u)dX. \quad (18)$$

Como $dx = (I + \nabla u)dX$ e $F = I + \nabla u$, a partir deste resultado, pode-se fazer:

$$F^T F = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) = I + (\nabla u)^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u. \quad (19)$$

Uma boa aproximação para esse resultado é dado vendo que $(\nabla u)^T \nabla u$ é muito menor que os outros termos:

$$F^T F \approx I + (\nabla u)^T + \nabla u \equiv I + 2E. \quad (20)$$

Ou seja,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}((\nabla u)^T + \nabla u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sendo \mathbf{E} chamado de tensor das deformações infinitesimais.

Cada um dos componentes da matriz \mathbf{E} possui um significado: os elementos da diagonal principal, $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, representam a deformação normal ε_{x_i} na direção x_i . Os demais elementos, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ representam a deformação relativa, γ_{xy} , a tensão de cisalhamento.

3.6 TENSÕES

As tensões são denotadas por:

- $\sigma_{x_i} \rightarrow$ Tensão normal na direção i .
- $\tau_{x_i x_j} \rightarrow$ Tensão cisalhante no plano i, j .

e são agrupadas em um tensor das tensões \mathbf{T} , dado por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.7 VETOR DAS DEFORMAÇÕES E DAS TENSÕES

Por conta das relações de equilíbrio impostas no material, as tensões cisalhantes em direções opostas são iguais em módulo, fazendo com que o resultado possa ser guardado, de maneira compacta, em vetores de tensões e deformações. As componentes do tensor das deformações podem ser agrupadas em um vetor das deformações:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (23)$$

As componentes do tensor das tensões também podem ser agrupados em um vetor:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.8 RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E TRAÇÃO

Quando um material está submetido a uma tração em uma certa direção, o corpo sofre uma deformação nessa mesma direção dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (25)$$

conhecida como Lei de Hooke, onde E é o módulo de elasticidade do material utilizado. Esse coeficiente, também conhecido como módulo de Young é medido em unidades de pressão e traz uma proporção em relação a deformação que um material recebe quando sujeito a uma certa tensão. Essas relações só são válidas no regime elástico, os quais o modelo foi desenvolvido.

Ainda, quando submetido a uma tração em uma certa direção x , o corpo sofre uma deformação na direção y e z dados por:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (26)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (27)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson que determina a proporção do alongamento vertical do corpo em relação ao alongamento axial.

As tensões de cisalhamento estão relacionadas com as deformações de cisalhamento através de:

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \text{ onde} \quad (28)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (29)$$

que representa o módulo de elasticidade transversal também conhecido como módulo de rigidez.

As relações 25 a 29 expressas acima, válidas para o material no regime linear, podem ser reunidas através de:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (30)$$

onde, D é a matriz constitutiva do material e através do princípio da superposição⁹:

$$\mathbf{D} = E \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para a modelagem do algoritmo, há a necessidade da escrita de $\boldsymbol{\varepsilon}$ em função de $\boldsymbol{\sigma}$. Sendo assim, a obtenção da matriz inversa de \mathbf{D} é relevante e dado por:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.9 VETOR DE FORÇAS

Denota-se por \mathbf{B} , o vetor de forças do corpo, onde:

$$\mathbf{B} = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3 \quad (33)$$

Esse vetor reúne as forças de volume impostas ao corpo.

⁹O princípio da superposição afirma que algumas situações podem ser encaradas como a sobreposição entre outras duas ou mais situações. Matematicamente, para o caso das deformações, isso significa que a deformação total pode ser encontrada através da soma algébrica.

3.10 DIVERGENTE DE UM CAMPO TENSORIAL

Seja $\mathbf{T}(r)$ um campo tensorial, o divergente de $\mathbf{T}(r)$ é definido como um campo vetorial, denotado por $\text{div}\mathbf{T}$ sendo definido em coordenadas cartesianas por:

$$\text{div}\mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} e_i \quad (34)$$

3.11 PRINCÍPIO DO MOMENTO LINEAR

Dado um elemento cúbico infinitesimal na figura 5, pode-se escrever, pela 2ª Lei de Newton, que:

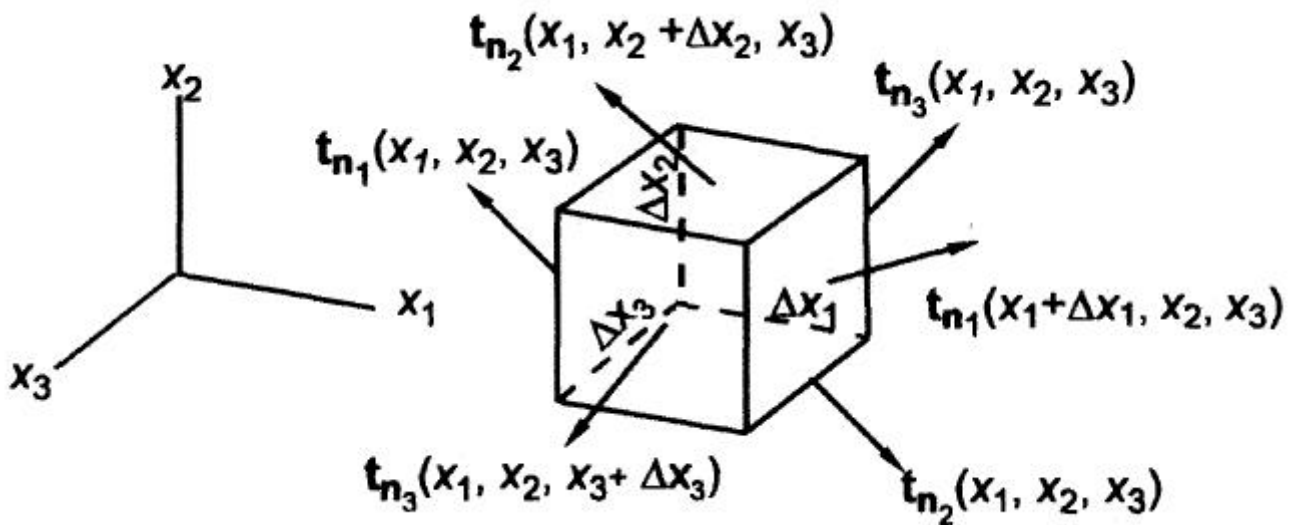


FIGURA 5: Elemento cúbico infinitesimal (LAI; RUBIN; 2010)

$$\Sigma F = m \cdot a \quad (35)$$

Considerando ρ a densidade do material, $\mathbf{t}_{e_j} = T_{ij}e_i$ como o vetor de tensões agindo no plano normal a e_j e como as tensões são forças normalizadas pela área, pode-se escrever a equação 35 como:

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{t}_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-e_1}(x_1, x_2, x_3)](\Delta x_2 \Delta x_3) + \\
& [\mathbf{t}_{e_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) + \mathbf{t}_{-e_2}(x_1, x_2, x_3)](\Delta x_1 \Delta x_3) + \\
& [\mathbf{t}_{e_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) + \mathbf{t}_{-e_3}(x_1, x_2, x_3)](\Delta x_1 \Delta x_2) + \\
& \mathbf{B} = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 a
\end{aligned} \tag{36}$$

Sendo $\mathbf{t}_{-e_i} = -\mathbf{t}_{e_i}$, pode-se reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}
& \frac{[\mathbf{t}_{e_1}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \mathbf{t}_{e_1}(x_1, x_2, x_3)]}{\Delta x_1} (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) + \\
& \frac{[\mathbf{t}_{e_2}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \mathbf{t}_{e_2}(x_1, x_2, x_3)]}{\Delta x_2} (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) + \\
& \frac{[\mathbf{t}_{e_3}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \mathbf{t}_{e_3}(x_1, x_2, x_3)]}{\Delta x_3} (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) + \\
& \mathbf{B} = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 a
\end{aligned} \tag{37}$$

Fazendo $\Delta x_i \rightarrow 0$ e simplificando $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{e_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_{e_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_{e_3}}{\partial x_3} + \mathbf{B} = \rho a \tag{38}$$

Ou ainda:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{e_i}}{\partial x_i} + \mathbf{B} = \rho a \tag{39}$$

Em termos do divergente de \mathbf{T} :

$$div \mathbf{T} + \mathbf{B} = \rho a \tag{40}$$

Como o RVE está em equilíbrio, $a = 0$ e portanto:

$$div \mathbf{T} + \mathbf{B} = 0 \tag{41}$$

3.12 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno do problema simulado são:

$$\mathbf{T}n = \bar{t}, em \Gamma_{t-a}, a = 1 \dots nreg, \quad (42)$$

$$u = \bar{u}, em \Gamma_{u-a}, a = 1 \dots nreg, \quad (43)$$

$$u_{mat} = u_{agr}. \quad (44)$$

Essas condições de contorno expressam a compatibilidade de tensões existente nas fronteiras naturais, as condições de contorno de Dirichlet e a continuidade de tensões e deslocamentos nas fronteiras das interfaces.

4 DETECÇÃO DE COLISÃO

4.1 GERAL

Entre os problemas que surgem na modelagem computacional, existem aqueles com o objetivo de verificar sobre a existência de intersecção entre duas ou mais figuras. Essa problemática é conhecida na literatura como a detecção de colisão e vários trabalhos, os quais serão discutidos adiante, foram elaborados na tentativa de resolvê-la a partir de princípios matemáticos que tornem a resolução viável em termos computacionais.

Na literatura encontram-se vários problemas de detecção de colisão e eles variam em termos dos objetivos específicos e das formas dos objetos tratados. Alguns algoritmos suportam quaisquer tipos de formas e outros apenas formas específicas, como triângulos (YAMAGUCHI, 1985), polígonos (CHAZELLE; DOBKIN, 1987), (MOUNT, 1992), elipses (CHOI. et. al, 2005), elipsóides (JIA *et al.*, 2011), (CHOI *et al.*, 2006), além de outras.

Existem algoritmos interessados em responder se existe ou não colisão entre dois ou mais objetos (JIA *et al.*, 2011), existem aqueles interessados em responder qual a forma da intersecção e outros interessados em determinar quando dois objetos colidem ao longo do tempo (DUZAK, 2007).

As primeiras tentativas de detecção de colisão buscavam dividir o domínio de interesse, em um tempo específico, e testar região por região para averiguar a busca por intersecções. Entretanto, para casos em que era necessário vários testes ao longo do tempo esse tipo de resolução não processava as informações a um tempo computacional eficiente (HADAP; SUNIL, 2004). A busca por velocidade de processamento neste tipo de problema sempre foi movido pela necessidade de resultados em tempo

real, já que suas aplicações, como a modelagem 3D de situações físicas reais, exigiam isto.

Em especial, os recentes trabalhos, Jia *et al.* (2011), Choi *et al.* (2006) e Choi *et al.* (2005) tratam de problemáticas de detectar a colisão de figuras que estão em movimento.

A detecção de colisão possui aplicações em áreas tradicionais como na simulação computacional e na indústria de jogos. Choi *et al.* (2006) buscam explorar um meio veloz de detectar a colisão entre elipsóides em movimento, que são representações de objetos pertencentes a um jogo.

As técnicas de detecção de colisão estão contidas dentro da área de computação gráfica e tiveram seu maior desenvolvimento, junto com outras técnicas, a partir do final da década de 70 (PREPARATA; M.I.SHAMOS, 1985).

4.2 COLISÃO ENTRE FIGURAS CIRCULARES

O caso mais simples de detecção de colisão é aquele que compara a existência de intersecção entre duas figuras circulares. Dado um círculo A_c de raio r_a e coordenadas do centro (x_a, y_a) e um círculo B_c de raio r_b e coordenadas (x_b, y_b) , sabe-se que cada uma das figuras circulares podem ser representadas como:

$$A_c : (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - r_a^2 \leq 0 \quad (45)$$

$$B_c : (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 - r_b^2 \leq 0 \quad (46)$$

onde a intersecção entre as duas figuras circulares pode ser apresentada pela solução de um sistema não-linear que envolve A_c e B_c . Entretanto as aplicações da detecção de colisão, por serem em tempo real, requerem uma velocidade de processamento rápida, o que justifica o estudo de outros métodos para tal.

Para o caso de figuras circulares, pode-se explorar a geometria do problema. Sabe-se que a distância entre o centro dos círculos pode ser calculado através de:

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \quad (47)$$

Por meio da equação 47, pode-se dizer sobre a existência da colisão fazendo a seguinte comparação:

$$d > r_a + r_b, \quad (48)$$

ou seja, se a soma dos raios dos dois círculos for menor do que a distância entre os seus centros, então não existe colisão. Caso contrário, existe intersecção entre os objetos, havendo colisão, conforme ilustrado na figura 6.

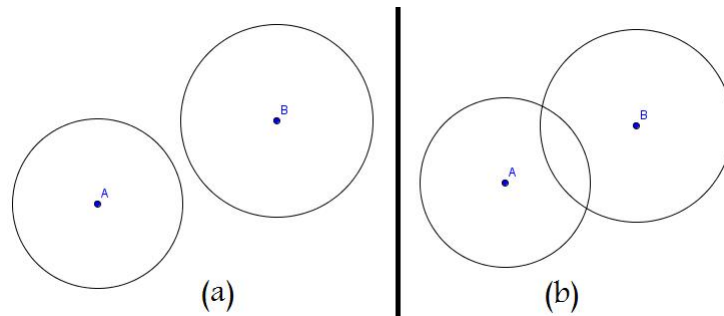


FIGURA 6: (a) Exemplo onde não há colisão. (b) Exemplo onde há colisão. (O Autor)

4.3 COLISÃO ENTRE CORPOS ESFÉRICOS

Dado uma esfera A_{es} de raio r_a e coordenadas do centro (x_a, y_a, z_a) e uma esfera B_{es} de raio r_b e coordenadas (x_b, y_b, z_b) , o teste de detecção de colisão entre duas esferas também usará a geometria do problema.

Para o caso de esferas, sabe-se que a distância entre o centro das esferas pode ser calculado através de:

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2} \quad (49)$$

Por meio da equação 49, pode-se dizer sobre a existência da colisão fazendo a seguinte comparação:

$$d > r_a + r_b \quad (50)$$

Se a condição 50 for verdadeira, não existe colisão. Caso contrário, os objetos ocupam parcialmente o mesmo lugar no espaço (Ver Figura 7).

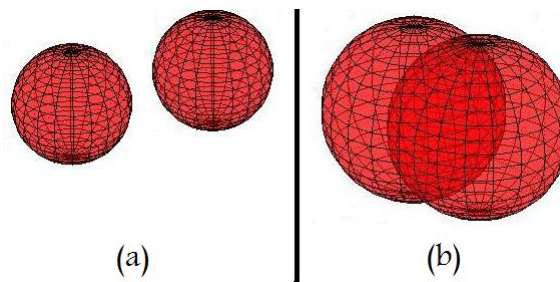


FIGURA 7: (a) Exemplo onde não há colisão. (b) Exemplo onde há colisão. (O Autor)

4.4 COLISÃO ENTRE DISCOS ELÍPTICOS

O teste de detecção de colisão entre dois discos elípticos, apresentado nesta seção, não considerará a resolução do sistema de equações construído ao modelar matematicamente o problema. Ainda, ao contrário dos casos acima, esta detecção de colisão não explora a geometria do problema, mas sim os fundamentos da Álgebra Linear.

Dado uma disco elíptico qualquer, A_{el} , com semi-eixo maior a , semi-eixo menor b , ângulo de rotação θ e coordenadas do centro (x_0, y_0) , diz-se que A_{el} é a matriz representativa da elipse. Para utilizar o método, considera-se qualquer disco elíptico representada por:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_{el} \mathbf{x} \leq 0, \quad (51)$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B}_{el} \mathbf{x} \leq 0, \quad (52)$$

onde A_{el} e B_{el} representam matrizes simétricas 3×3 que guardam os coeficientes

da equação geral de cada elipse, e \mathbf{x} representa o vetor coluna das coordenadas homogêneas de um ponto no espaço euclidiano de dimensão 2, $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$

Choi et. al, 2005 demonstram que a existência ou não de colisão, entre um disco elíptico \mathbf{A}_{el} e outro \mathbf{B}_{el} , pode ser determinada a partir do estudo dos sinais das raízes da equação característica, $P(\lambda) = 0$, onde $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{A}_{el} - \mathbf{B}_{el})$. Através do seguinte teorema:

Teorema 1 *Em relação aos discos elípticos e suas equações características:*

1. *Os dois discos elípticos possuem intersecção se, e somente se, a equação característica não possui raízes negativas (Figura 8(a)).*
2. *Os dois discos elípticos se tocam externamente, se e somente se, a equação característica tem uma raiz negativa com multiplicidade dupla (Figura 8(b)).*
3. *Os dois discos elípticos estão separados, se e somente se, a equação característica tem duas raízes negativas distintas (Figura 8(c)).*

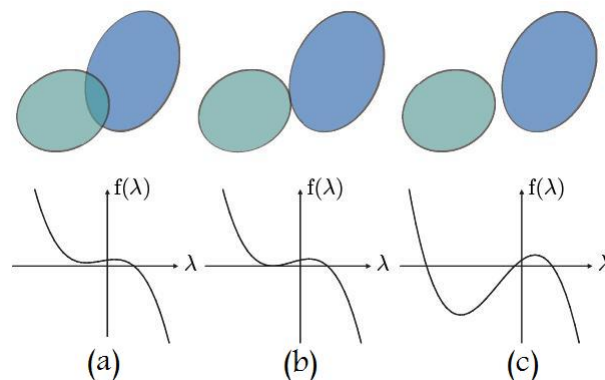


FIGURA 8: Comparação entre as raízes da equação característica e o comportamento geométrico dos discos elípticos. (CHOI, et. al, 2005)

A demonstração deste teorema encontra-se no apêndice A.1.

Segundo Pianezzer *et al.* (2012), pode-se, ao invés de analisar as raízes desta equação, analisar os autovalores da matriz $\mathbf{A}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{el}$, pois:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \cdot \mathbf{A}_{el} - \mathbf{B}_{el}) &= 0 \\
\det(\mathbf{A}_{el}^{-1}) \cdot \det(\lambda \cdot \mathbf{A}_{el} - \mathbf{B}_{el}) &= 0 \\
\det(\mathbf{A}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{el} \cdot \lambda - \mathbf{A}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{el}) &= 0 \\
\det(\mathbf{I} \cdot \lambda - \mathbf{A}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{el}) &= 0
\end{aligned} \tag{53}$$

são todas equivalentes. Com isso é possível explorar diversos métodos numéricos que melhorem o processamento da operação.

4.4.1 Obtenção da matriz que define uma elipse

A equação que define uma elipse (LEON, 1999) é dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{55}$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes a serem determinadas.

A matriz que define uma elipse, A_{el} é uma matriz 3×3 , simétrica cujos coeficientes são:

$$\mathbf{A}_{el} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}$$

Para realizar a comparação entre as elipses A_{el} e B_{el} com o objetivo de verificar a existência ou não de intersecção, é necessário definir, para cada uma das elipses, os seus coeficientes da equação 55, a partir dos parâmetros conhecidos na simulação. Para tanto, parte-se da equação simplificada de uma elipse com centro na origem, ângulo de rotação $\theta = 0$, com semi-eixo a e b . Sua equação é dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \tag{56}$$

onde (x',y') representam o conjunto de pontos que satisfazem a equação 56.

Para elipses rotacionadas e transladadas, pode-se partir da equação 56 simplificada para encontrar os coeficientes da equação 55. Realizando uma rotação α e uma translação, obtém-se o ponto (x,y) , tal que:

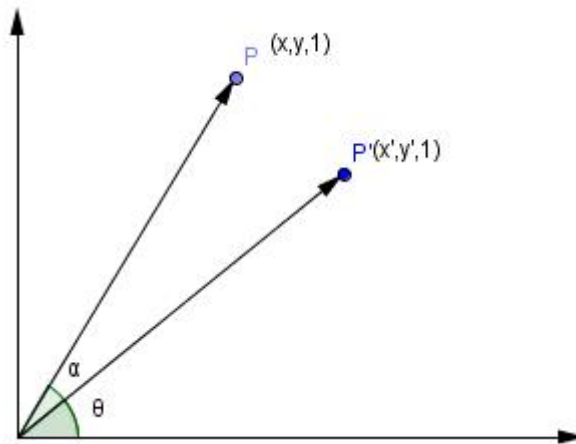


FIGURA 9: Rotação α em torno da origem

Dado o ponto (x',y') , pode-se escrevê-lo como sendo:

$$x' = r \cdot \cos \theta \quad (57)$$

$$y' = r \cdot \sin \theta$$

onde r representa a distância do ponto (x',y') a origem e θ representa o ângulo que faz com a origem. A partir de uma rotação α , segue-se uma translação de (X_0, Y_0) , onde o novo ponto tem coordenadas:

$$x = r \cdot \cos(\theta + \alpha) + X_0 \quad (59)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta + \alpha) + Y_0 \quad (60)$$

Pela lei da soma de arcos na equação 59, obtem-se que:

$$x = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha + X_0 \quad (62)$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha + r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta + Y_0 \quad (63)$$

E pela equação 58, a transformação linear:

$$x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha + X_0 \quad (65)$$

$$y = x' \cdot \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha + Y_0$$

Que pode ser escrito na forma matricial, como:

$$X = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & X_0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando, que as coordenadas consideradas são as coordenadas homogêneas, que para o caso bidimensional são dados por: $(x, y, 1)$. A vantagem de utilizar este tipo de coordenadas é que assim a operação de translação, por exemplo, passa a se tornar uma transformação linear, o que permite explorá-lo através de matrizes como a operação de rotação. Para o caso em que usa-se as coordenadas cartesianas dadas por (x, y) , a translação não pode ser generalizada através de um produto de matrizes.

Utilizando essas transformações na equação 56 e organizando os termos, chega-se na equação 55 geral da elipse, com os seguintes coeficientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \\ \frac{B}{2} = -\cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ C = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \\ \frac{D}{2} = -(AX_0 + Y_0 \frac{B}{2}) \\ \frac{E}{2} = CY_0 + X_0 \frac{B}{2} \\ F = (AX_0^2 + BX_0Y_0 + CY_0^2 - 1) \end{array} \right. \quad (67)$$

Logo, toda elipse pode ter sua matriz definida a partir do mesmo referencial, dado como entrada o ângulo α , a posição do centro (X_0, Y_0) e o semi-eixo maior a e menor b .

4.5 COLISÃO ENTRE REGIÕES ELIPSOIDAIIS

Dado uma região elipsoidal qualquer A_{eli} de semi-eixo a , semi-eixo b , semi-eixo c , ângulo de rotação θ em torno do eixo z , β em torno do eixo y , α em torno do eixo x e coordenadas do centro (x_0, y_0, z_0) , consideram-na representada como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_{eli} \mathbf{x} = 0, \quad (68)$$

onde \mathbf{A}_{eli} representa uma matriz simétrica 4×4 que guarda os coeficientes da equação geral da elipsóide, e \mathbf{x} representa o vetor coluna 4D das coordenadas homogêneas de um ponto no espaço euclidiano de dimensão 3. Pode-se escrever qualquer elipsóide, definindo a matriz \mathbf{A} .

Em Wang, Wang e Kim (2001), os autores demonstram que a existência ou não de colisão, entre uma região elipsoidal \mathbf{A}_{eli} e outra \mathbf{B}_{eli} , pode ser determinada a partir

do estudo dos sinais das raízes da equação característica, $P(\lambda) = 0$, onde $P(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{A}_{\text{eli}} - \mathbf{B}_{\text{eli}})$. O teorema demonstrado em Wang, Wang e Kim (2001) é o seguinte:

Teorema 2 *Dado duas regiões elipsoidais representadas pela matriz \mathbf{A}_{eli} e pela matriz \mathbf{B}_{eli} .*

1. *As duas regiões estão separadas se, e somente se, $P(\lambda) = 0$ possui duas raízes positivas.*
2. *Caso contrário, possuem intersecção.*

Da mesma maneira que o caso anterior, pode-se, ao invés de analisar as raízes desta equação, utilizar os autovalores da matriz $\mathbf{A}_{\text{eli}}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\text{eli}}$.

4.5.1 Obtenção da matriz que define um elipsóide

A equação que define um elipsóide (LEON, 1999) é dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (69)$$

A matriz que define um elipsóide é uma matriz 4×4 , simétrica cujos coeficientes são:

$$\mathbf{A}_{\text{eli}} = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 & G/2 \\ B/2 & C & E/2 & H/2 \\ D/2 & E/2 & F & I/2 \\ G/2 & H/2 & I/2 & J \end{bmatrix}$$

Para realizar a comparação proposta na seção 4.5 é necessário definir, para cada um dos elipsóides, os coeficientes de cada equação a partir dos parâmetros conhecidos na simulação. Para fazer isto, parte-se da equação simplificada de uma elipsóide em centro $(0,0,0)$ e ângulos de rotação 0. Sua equação é dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad (70)$$

Para elipsóides transladados e rotacionados, pode-se partir desta equação simplificada para encontrar os coeficientes na forma geral. Seja o ponto de coordenada, (x, y, z) , para que o objeto mude do conjunto de pontos x', y', z' é realizada uma rotação α em torno do eixo x, uma rotação β em torno do eixo y, uma rotação θ em torno do eixo z e uma translação.

Da mesma forma, que no caso anterior, utiliza-se as matrizes de transformações lineares para rotacionar e transladar os pontos:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X} = \mathbf{X}_4 \cdot \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

lembrando, que as coordenadas consideradas são as coordenadas homogêneas, que para o caso tridimensional são dados por: $(x, y, z, 1)$.

Utilizando essas transformações na equação 56 e organizando os termos, chega-se na equação geral da elipsóide, utilizado no teste descrito na seção 4.5.

5 MÉTODOS

Este capítulo traz a discussão das etapas envolvidas no processo de geração do elemento representativo do concreto.

Inicialmente, geram-se os agregados a partir das características da curva granulométrica do material analisado. A curva granulométrica resulta de amostragens realizadas sobre as dimensões dos agregados. Portanto, nesta etapa é possível estimar suas dimensões físicas, através do índice de forma do agregado, o que permite aumentar a confiabilidade das dimensões dos agregados. Suas formas são estimadas por figuras geométricas bem conhecidas, como círculos e elipses afim de construir um modelo mais próximo da realidade.

Após obter informações sobre os agregados, gera-se efetivamente o elemento representativo, posicionando cada um dos agregados de maneira que satisfaça algumas regras, os quais serão discutidas adiante. Com a geração do RVE, pode-se utilizar o modelo gerado para estimar as tensões, deformações e deslocamentos que surgem no material.

5.1 GERAÇÃO DOS AGREGADOS

A distribuição de tamanhos dos agregados, dado pela sua curva granulométrica, é representada por uma lista de valores discretos para cada abertura da peneira. A tabela a seguir mostra um exemplo de um ensaio realizado para um tipo de agregado, que será adotado neste trabalho. Nesta classificação existem agregados que não são considerados como agregados graúdos, em virtude da faixa de tamanho envolvido. Entretanto, este resultado foi utilizado para alinhar com os resultados encontrados por Wriggers and Moftah (2006).

TABELA 1: Resultado da análise do peneiramento (WRIGGERS; MOFTAH, 2006)

Abertura da Peneira (mm)	Porcentagem total Retida (%)
12.70	0
9.50	23
4.75	74
2.36	100

Sendo $P(d)$ a porcentagem total retida na peneira de diâmetro d , pode-se calcular a área de material reservado para a seção específica, s , entre duas peneiras:

$$A_p[d_s, d_{s+1}] = \frac{P(d_{s+1}) - P(d_s)}{P(d_{max}) - P(d_{min})} a_p A, \quad (71)$$

onde $A_p[d_s, d_{s+1}]$ é a área de material reservado para a seção específica entre as peneiras d_s e d_{s+1} , A é a área total do elemento representativo do concreto e a_p é a fração de área que os agregados ocupam. Sendo dado por:

$$a_p = \frac{w_p}{\rho_p A}, \quad (72)$$

onde w_p é a massa total das partículas de agregado, ρ_p é a massa específica dos agregados por unidade de área e A é a área total do elemento representativo do concreto.

Para o caso de elementos circulares, percebe-se, experimentalmente, que caso o agregado passe por uma peneira k , mas seja barrado pela peneira seguinte, $k + 1$, então o diâmetro do agregado estará contido entre o diâmetro da peneira menor d_{k+1} , inferiormente e pelo diâmetro da peneira maior d_k , superiormente. Portanto, pode-se estimar o diâmetro do agregado através da relação:

$$d = d_{k+1} + \eta(d_k - d_{k+1}), \quad (73)$$

onde η é um número aleatório uniformemente distribuído entre 0 e 1.

Para elementos elipsoidais, foi utilizada a hipótese de que, ao passar por uma peneira, pode-se dizer que o semi-eixo maior está contido entre o diâmetro da peneira

adjacente e da peneira posterior.

Os parâmetros que definem os agregados elípticos para esta simulação são θ_i , que representa o ângulo que o semi-eixo maior faz com a reta que une o centro das duas elipses, A_i e B_i , que são respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor, C_i é o centro da elipse i . Cada elipse gerada é armazenada através de 5 componentes: Duas componentes com a posição do centro, uma com o tamanho do semi-eixo maior, outra do semi-eixo menor e uma última componente com o ângulo que o semi-eixo maior faz com o sistema de referência.

Para a primeira parte do algoritmo, analisa-se a curva granulométrica e retira-se informações sobre as dimensões físicas dos agregados. O algoritmo desenvolvido neste trabalho permite gerar e armazenar os agregados construídos, conforme ilustrado no algoritmo da Figura 7:

No algoritmo da Figura 10, A_r representa a área restante que existe para a geração de agregados e A_m representa o agregado de área máxima que a seção s comporta. Portanto, enquanto houver espaço reservado para a criação do agregado de tamanho máximo daquela seção, o algoritmo gerará um agregado cuja propriedades são determinadas pela seção s .

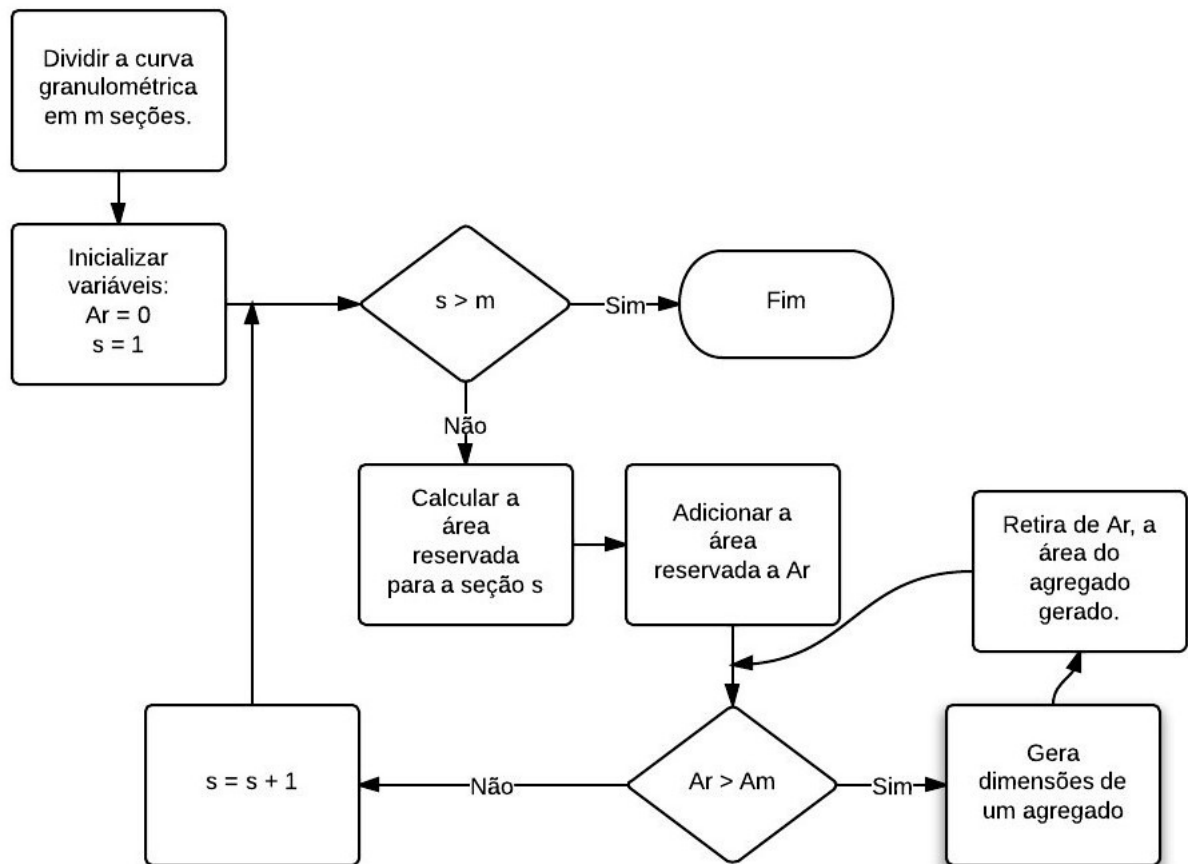


FIGURA 10: Algoritmo para geração dos agregados (O Autor)

5.2 POSICIONAMENTO DOS AGREGADOS

Para posicionar os agregados no domínio do concreto existem vários métodos apresentados por estudiosos da área, citados abaixo. Em especial, encontram-se alguns algoritmos como o *Divide-and-fill method* ou o algoritmo *Place-and-take method*.

No algoritmo *divide-and-fill method*, encontrado em Schutter e Taerwe (1993), divide-se o domínio do concreto em n partes e inicia-se o preenchimento de cada parte individualmente, formando um todo preenchido por agregados.

O algoritmo *Place-and-take method* é adotado em Z.P.Bazant *et al.* (1990), Schlangen e Mier (1992), Wittmann, Roelfstra e Sadaouki (1984) e Wang, Kwan e Chan (1999) e possui um bom resultado para frações de agregados pequenas (WRIGGERS; MOFTAH, 2006). Esse algoritmo foi adotado neste trabalho.

Neste algoritmo, selecciona-se um agregado aleatoriamente e posiciona-o numa posição qualquer. Para isto são consideradas duas hipóteses:

1. Os agregados devem estar inteiramente contidos no domínio do concreto.
2. Não deve existir intersecção entre os agregados.

A respeito da hipótese 1, um teste simples é realizado para saber se os agregados estão inteiramente contidos no domínio do concreto.

A respeito da hipótese 2, para detectar as colisões entre os diversos agregados é necessário criar um procedimento que, ao adicionar um novo agregado na matriz de argamassa, verifica-se se há intersecção entre os elementos. Esses testes devem ser aplicados sempre que um novo agregado for adicionado na estrutura.

Para cada agregado adicionado, deve-se averiguar se há ou não a existência de colisão, a partir da comparação com os agregados já alocados.

Pode-se aplicar o teste de colisão para elipses para posicionar cada um dos agregados em formato elíptico comparando todos com todos. Entretanto, o teste de detecção de colisão entre elipses é um teste computacionalmente mais demorado que o teste de detecção de colisão entre círculos. Por conta disto, inicialmente aplica-se o teste de colisão entre círculos, aproximando cada elipse por um círculo cujo raio é seu semi-eixo maior, e verificando se nesta comparação está acontecendo uma provável colisão.

Caso ele seja um candidato a colidir, mostrado pelo teste de colisão entre círculos, utiliza-se o teste de colisão entre elipses para saber se ele de fato colide. Assim, consegue-se criar um algoritmo mais veloz para detectar as colisões entre cada agregado colocado no domínio do concreto.

De maneira equivalente, é possível fazer um teste mais rápido para a representação 3-D, seleccionando possíveis agregados candidatos a colisão, utilizando o teste de colisão de esferas, aproximando cada elipsóide por uma esfera cujo raio é seu semi-

eixo maior e, por fim, refinando o resultado ao utilizar o teste de colisão de elipsóides apenas para estes candidatos.

A Figura 11 mostra elipses circunscritas por circunferências. O teste de detecção de colisão para círculos serve, nesta etapa, para classificar as elipses comparadas em: sem colisão ou possível colisão. Caso não haja colisão, o algoritmo não precisa realizar o teste de detecção de colisão para elipses, cujo teste envolve uma gama muito maior de operações. Se o teste para círculos indicou que existe uma possível colisão, usa-se o teste de colisão para elipses, apenas nestes casos, para confirmar se de fato existe uma colisão (vide Figura 13) ou não (vide Figura 12).

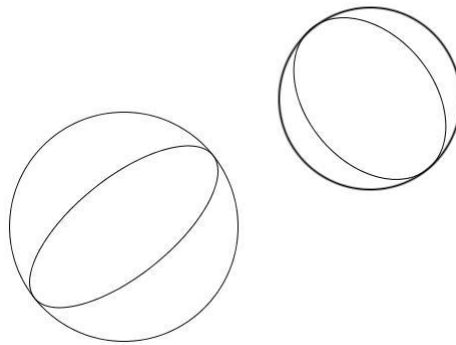


FIGURA 11: Elipses circunscritas por circunferência (O Autor)

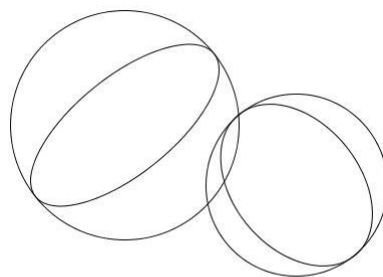


FIGURA 12: Caso em que não existe colisão, mas o teste de detecção de colisão entre círculos não confirma o resultado (O Autor).

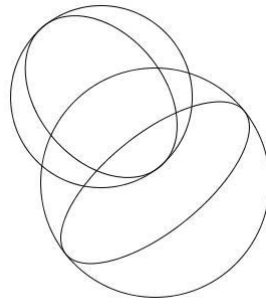


FIGURA 13: Caso em que existe colisão e o teste de detecção de colisão entre elipses confirma a colisão (O Autor)

Dessa maneira, o teste de detecção de colisão entre círculos faz o papel de um filtro que elimina alguns candidatos que claramente não estão apresentando colisão, tornando o algoritmo como um todo mais rápido, já que o teste de detecção de colisão entre círculos tem um tempo computacional muito menor que o entre elípses.

O algoritmo para o posicionamento é apresentado na Figura 14.

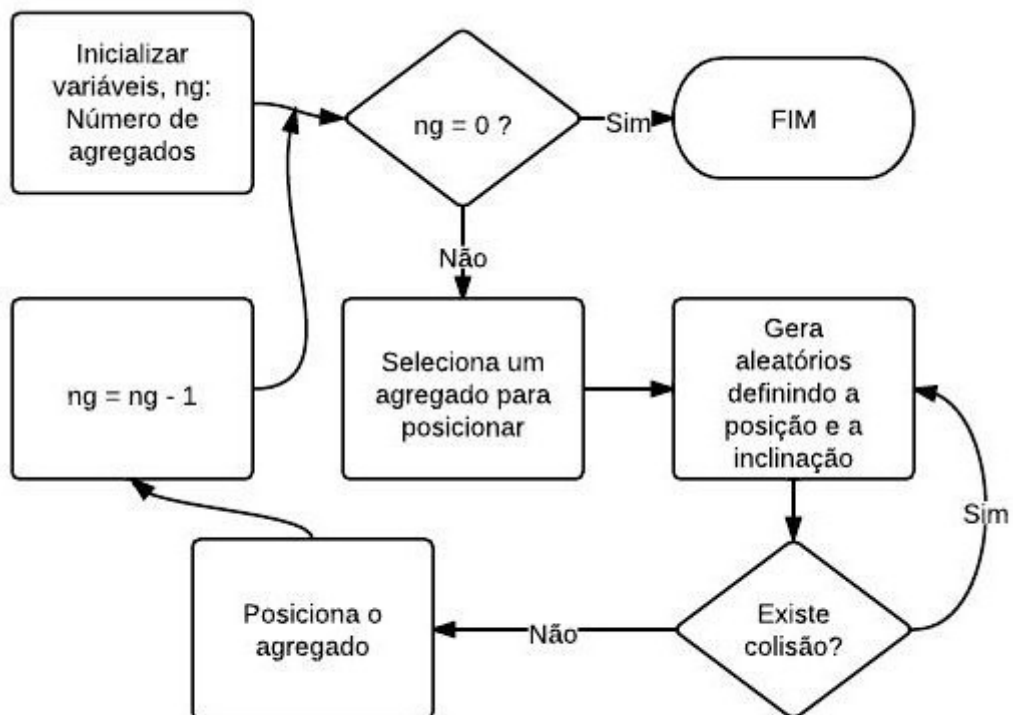


FIGURA 14: Algoritmo para posicionamento dos agregados

5.3 CÁLCULO DAS TENSÕES

No trabalho, (TEIXEIRA, 2011), foram calculados os deslocamentos, as tensões e deformações que o material sofre quando é submetido a uma compressão axial uniforme. Neste trabalho foi considerado um RVE do concreto formado por argamassa e 7 agregados elípticos sem geração baseada na curva granulométrica.

Para resolver este problema foi utilizado o Método de Galerkin Livre de Elementos (MGLE), que foi um método precursor ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e que tem sido renovado, nos últimos anos, para apresentar melhorias relevantes em relação ao MEF. As vantagens do MGLE é o fato de que esse método pertence a classe de métodos sem malha e dentro dos métodos sem malha o MGLE é considerado, atualmente, o melhor deles (TEIXEIRA, 2011).

O grupo de pesquisa possui um algoritmo para resolver este tipo de problema, através do MGLE, o qual foi utilizado neste trabalho.

Este algoritmo utiliza as informações de posicionamento de cada um dos agregados, assim como as propriedades dos materiais estudados para retornar o mapa de tensões, deformações e deslocamentos que surge quando o material está submetido a compressão axial.

O método utilizado neste trabalho foi construir diversos RVE's com diferentes quantidades de agregados e analisar o comportamento dos diversos materiais gerados.

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste trabalho foi realizado um teste de compressão axial para o caso de:

- Um elemento representativo do concreto com diversas frações de agregados e agregados com formatos elípticos.

Além disto, foram gerados RVE's com as seguintes características:

- Um elemento representativo do concreto com um agregado em duas dimensões com a superfície rugosa.
- Um elemento representativo do concreto com diversas frações de agregados e agregados com formatos esféricos.
- Um elemento representativo do concreto com diversas frações de agregados e agregados com formatos elipsoidais.

6.1 TESTES COM AGREGADOS ELÍPTICOS

6.1.1 Geração do elemento representativo do material

O algoritmo gerador dos agregados foi implementado na linguagem VB.NET na plataforma VS.NET. O algoritmo para posicionamento dos agregados foi implementado no *software MATLAB versão R2010*.

Modelou-se estruturas com agregados circulares e elípticos, em 2-D, com diferentes frações de agregados.

A área da superfície do concreto utilizado foi fixado em 10.000 mm², de forma quadrada com lados 100 mm. Alguns exemplos foram gerados. Os resultados estão apresentados na Figura 15.

A Figura 15 (a), (b) e (c) mostra os modelos gerados computacionalmente aproximando cada um dos agregados por círculos. A área que os agregados ocupam no total do concreto é representado pelo parâmetro a_p , que nestes exemplos, são de 40% (a), 50% (b) e 60% (c), respectivamente.

A Figura 15 (d), (e), (f) mostra os resultados obtidos aproximando cada um dos agregados por elipses. Nota-se que o método utilizado possibilitou a aplicação da segunda hipótese, dado que não existe colisão entre os agregados.

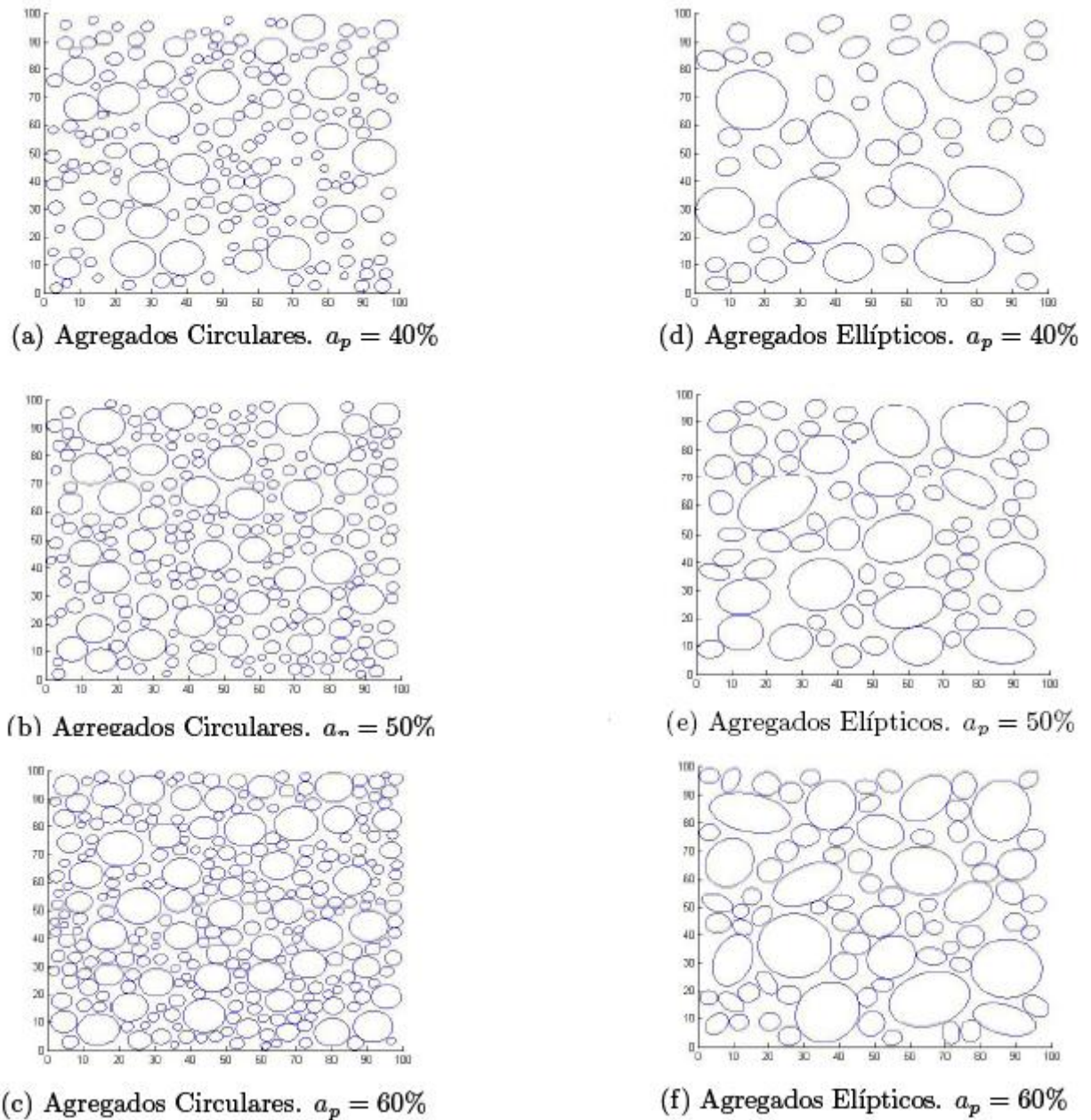


FIGURA 15: Estruturas aleatórias geradas: (a) Agregados Circulares $a_p = 40\%$; (b) Agregados Circulares $a_p = 50\%$; (c) Agregados Circulares $a_p = 60\%$; (d) Agregados Elípticos $a_p = 40\%$; (e) Agregados Elípticos $a_p = 50\%$; (f) Agregados Elípticos $a_p = 60\%$. (O Autor)

6.1.2 Teste de compressão axial.

Para o estudo do material, foram utilizadas diferentes quantidades de agregados, obtidos a partir da curva granulométrica. A partir disto, os agregados foram adaptados ao programa escrito em MATLAB, o qual permite criar os mapas de deslocamentos, tensões e deformações de um RVE sujeito a compressão axial.

Para o problema, foi considerado um material isotrópico, cujas propriedades da argamassa e dos agregados foram dados pela tabela 2.

TABELA 2: Característica dos componentes (TEIXEIRA, 2011).

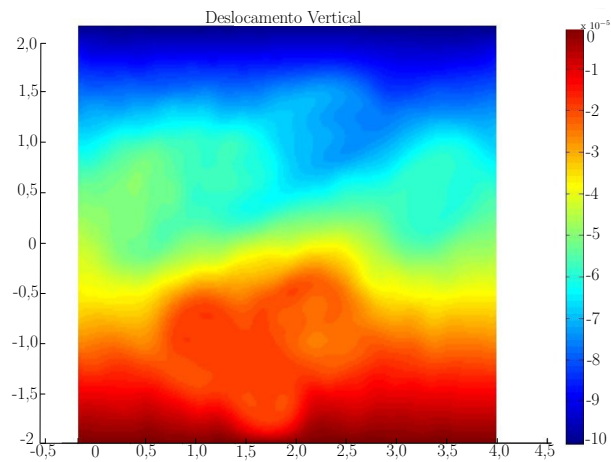
	Módulo de Elasticidade (E, MPa)	Coefficiente de Poisson (ν)
Argamassa	30×10^3	0.30
Agregado Graúdo	50×10^4	0.13

Foi realizado um ensaio de compressão axial com deslocamento prescrito na fronteira essencial e deslocamento nulo na fronteira natural.

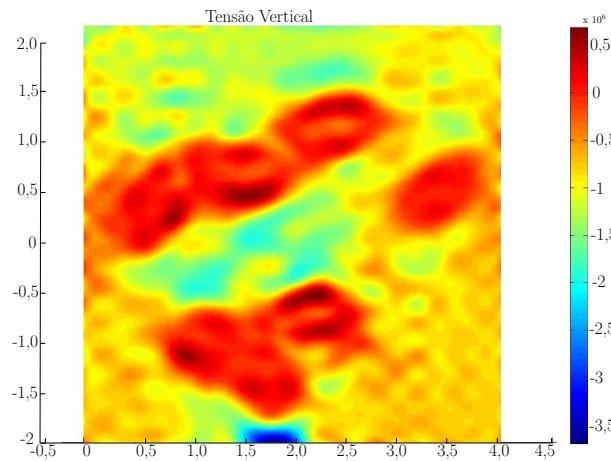
Os seguintes testes foram realizados:

- 7 Agregados.
- 10 Agregados.
- 13 Agregados.
- 16 Agregados.

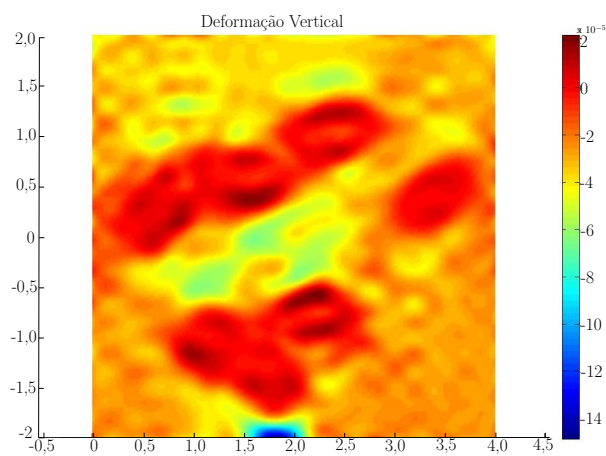
Para o teste com 7 agregados, os seguintes mapas foram gerados:



(a) Mapa de deslocamento para 7 agregados



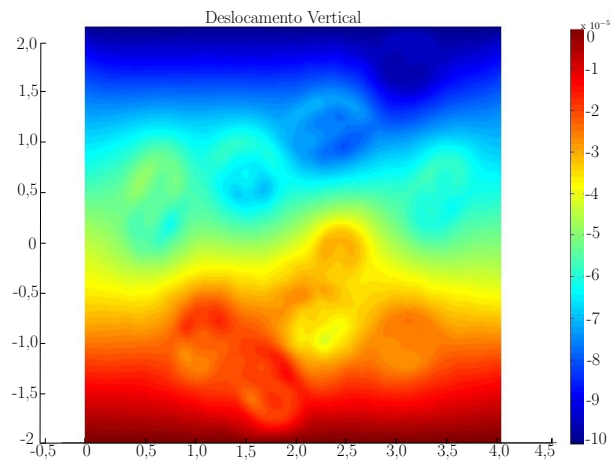
(b) Mapa de tensão para 7 agregados.



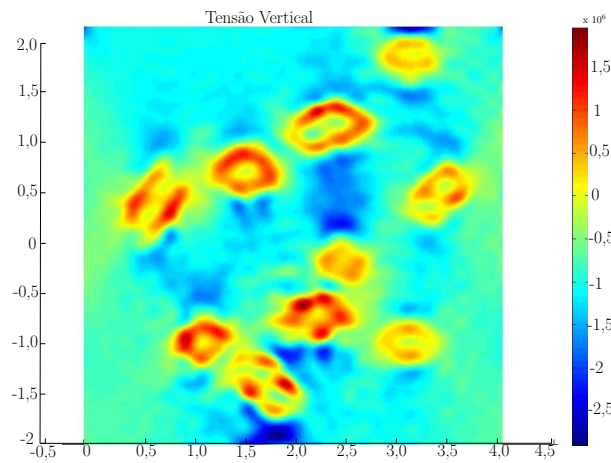
(c) Mapa de deformação para 7 agregados.

FIGURA 16: Mapas para 7 agregados (O Autor)

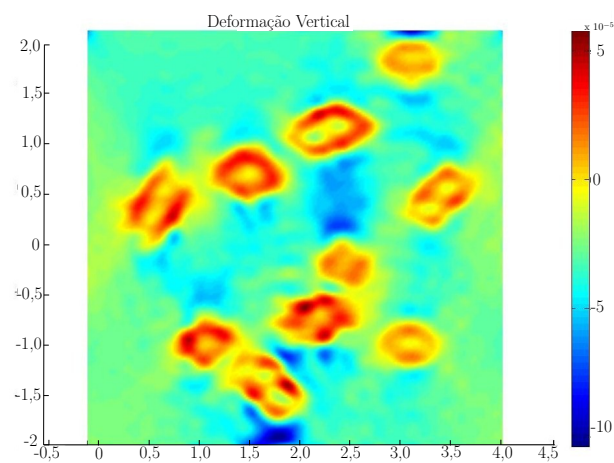
Para o teste com 10 agregados, os seguintes mapas foram gerados:



(a) Mapa de deslocamento para 10 agregados.



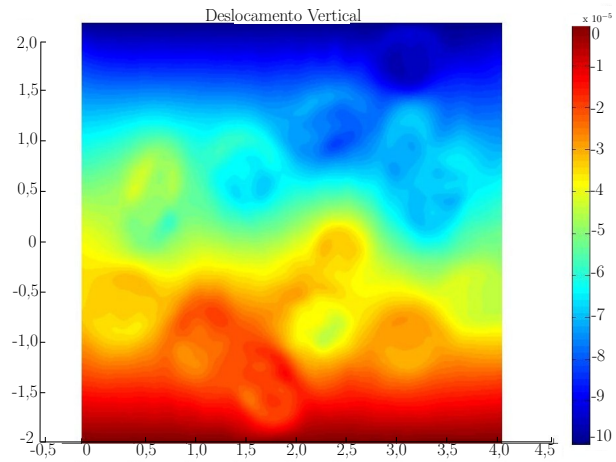
(b) Mapa de tensão para 10 agregados.



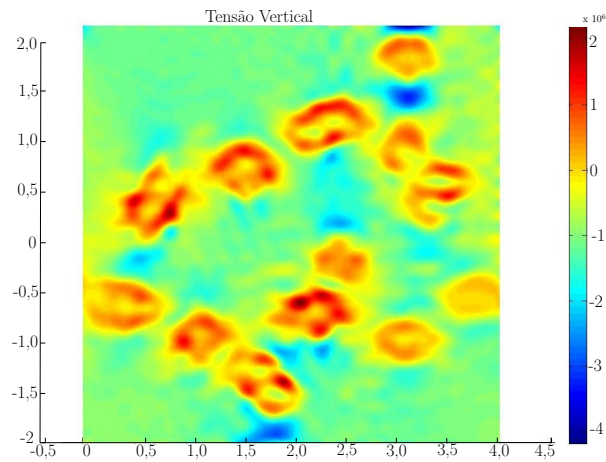
(c) Mapa de deformação para 10 agregados.

FIGURA 17: Mapas para 10 agregados (O Autor).

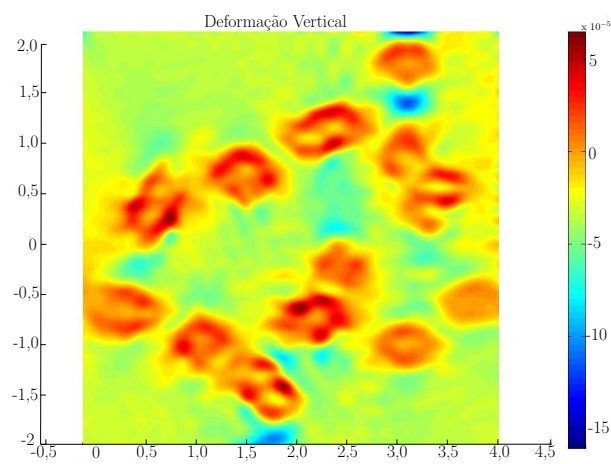
Para o teste com 13 agregados, os seguintes mapas foram gerados:



(a) Mapa de deslocamento para 13 agregados.



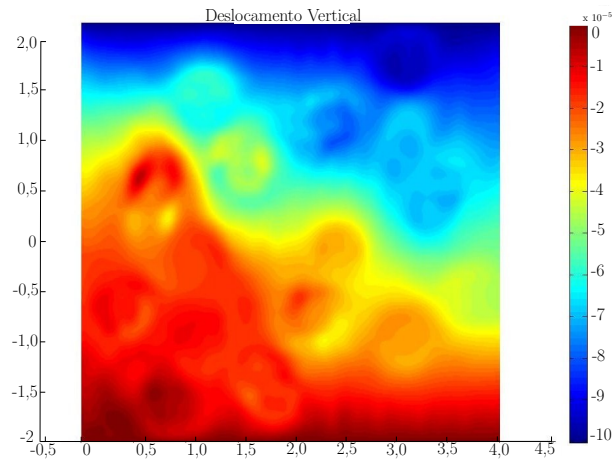
(b) Mapa de tensão para 13 agregados.



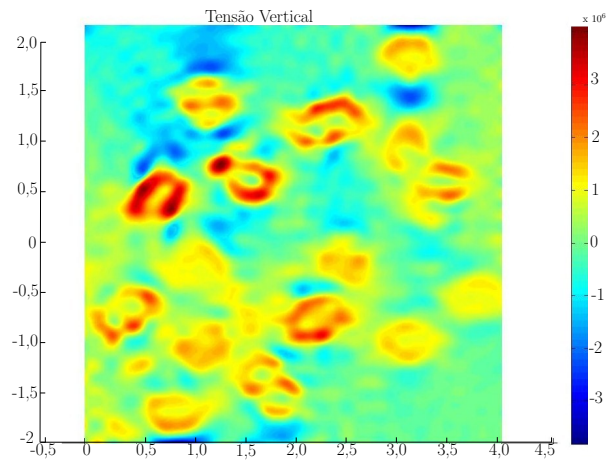
(c) Mapa de deformação para 13 agregados.

FIGURA 18: Mapas para 13 agregados (O Autor).

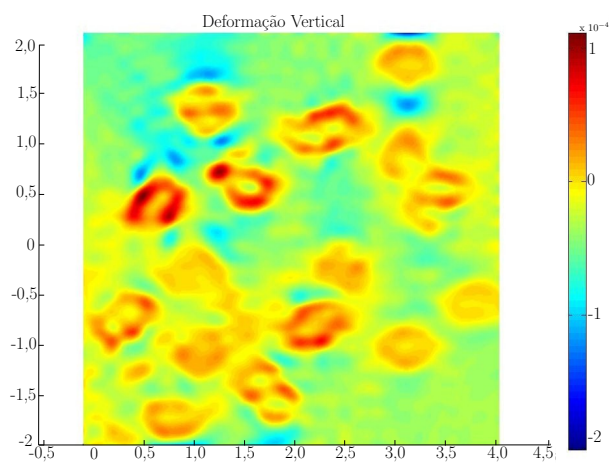
Para o teste com 16 agregados, os seguintes mapas foram gerados:



(a) Mapa de deslocamento para 16 agregados.



(b) Mapa de tensão para 16 agregados.



(c) Mapa de deformação para 16 agregados.

FIGURA 19: Mapas para 16 agregados (O Autor).

Ao analisar os mapas das figuras anteriores, pode-se perceber a importância dos agregados na deformação de cada material. Um mapa de deslocamento de um material composto apenas de argamassa apresenta um deslocamento médio maior do que um material com agregados. Os agregados suportam as tensões de maneira diferenciada e o material como um todo se torna mais resistente com mais agregados.

A medida que se coloca mais agregados, percebe-se, nesses casos, que o deslocamento da estrutura como um todo tem se tornado menor, o que significa que ela suporta mais e se danifica menos. Entretanto, estudos adicionais precisam ser feitos para averiguar até que momento deve-se adicionar agregados a estrutura afim de obter a melhor estrutura possível.

Adicionar mais agregados ao concreto pode ser positivo para a estrutura, mas fica em aberto saber qual é o limite da adição de agregados. Sabe-se que um concreto composto por uma quantidade grande de agregados também possui várias zonas de transição. São nessas zonas de transição que acontecem as reações químicas indesejáveis que deterioram o concreto, como a Reação Alkali-Agregado. Por conta disto, estes mapas já apresentam um bom resultado em termos da resistência a compressão de um material composto. Mas a viabilidade de tais materiais precisa ser estudada em conjunto para a adoção final do concreto correto.

6.2 TESTES COM AGREGADOS ESFÉRICOS

Como início para trabalhos posteriores, foi gerado um RVE em três dimensões, onde cada um dos agregados foi aproximado por uma esfera.

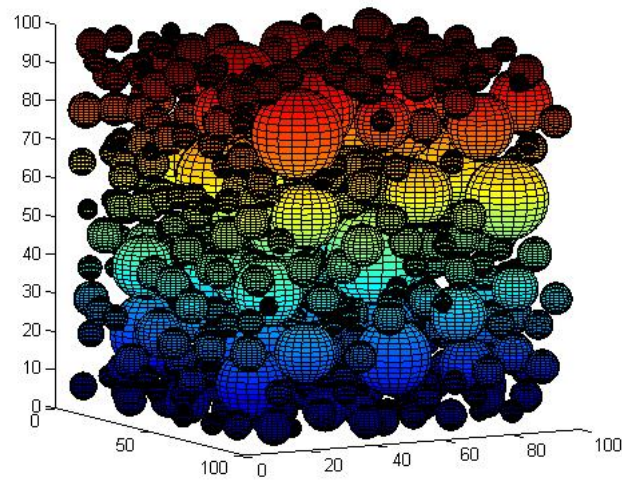


FIGURA 20: Agregados Esféricos $v_p = 40\%$ (O Autor)

A figura 20 representa um RVE cuja v_p é de 40%. Para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos é necessário implementar um algoritmo que resolva o problema do capítulo 3 em 3 dimensões. Os cálculos da compressão axial para este caso não foram calculados e estão colocados como sugestão de trabalhos futuros.

6.3 TESTES COM AGREGADO RUGOSO

Também foi gerado um RVE em duas dimensões com um único agregado, cuja superfície teve uma certa irregularidade, sendo considerado como um agregado rugoso.

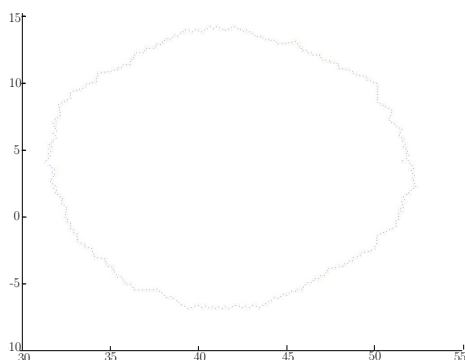


FIGURA 21: Agregado Rugoso (O Autor)

Esse RVE foi desenvolvido para que possa ser estudado a influência da forma na distribuição das tensões e deformações que surgem no material quando sujeito a

carregamentos. O refinamento dos modelos é construído na busca de aproximá-los da realidade e os agregados encontrados no concreto não possuem uma superfície lisa.

Contrária a superfície lisa, aparece a rugosa, que é uma superfície com irregularidades que surgem no material por diversas razões. Para uma simulação inicial deste tipo de agregado, criou-se um algoritmo para o desenvolvimento desta superfície.

Neste algoritmo, os parâmetros iniciais são as dimensões médias que o agregado terá e a variabilidade dessa dimensão. Assim, gera-se um agregado definindo um raio médio (dimensão média) e um passo (sua variabilidade).

Defini-se um agregado rugoso, computacionalmente para este caso, como um conjunto de pontos construído em coordenadas polares. Cada ponto é definido, portanto, por um raio e um ângulo a partir da origem. O algoritmo define o primeiro ponto com coordenadas dado pelo raio médio e um ângulo de zero e para os próximos pontos percorre os outros ângulos compreendidos entre o ângulo zero até a volta completa com um intervalo definido. Para cada ponto seguinte, definido o ângulo da maneira descrita acima, o algoritmo define a coordenada do raio dada como uma soma ou subtração (aleatoriamente) da variabilidade do agregado.

Assim, o algoritmo completa o agregado rugoso, gerando para ele um conjunto de pontos representando a estrutura.

O resultado pode ser visto na Figura 22.

6.4 TESTES COM AGREGADOS ELIPSOIDAIIS

Também foram gerados RVE's em três dimensões, onde cada um dos agregados foi aproximado por corpos em formatos elipsoidais.

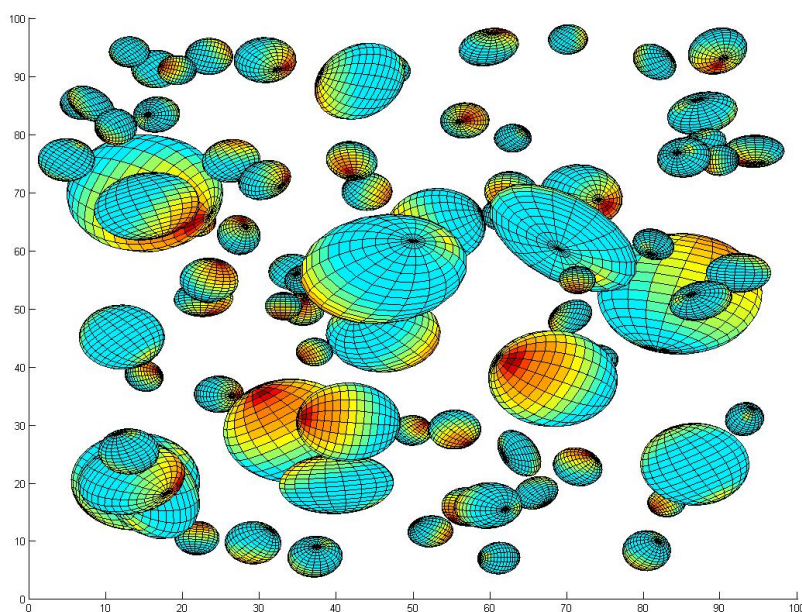


FIGURA 22: Agregados em formato elipsoidal (O Autor).

Assim como para os casos acima, também é necessário implementar um algoritmo que resolva o problema do capítulo 3, para assim poder diferenciar as influências dos formatos geométricos na aproximação dos modelos.

Para atingir modelos cada vez mais próximos da realidade é necessário o refinamento da estrutura geométrica dos agregados. Assim sendo, estes últimos modelos estão colocados como sugestões de trabalhos futuros, para refinar a observação da influência das formas dos agregados nos modelos. Com esses estudos, pode-se concluir se a direção de continuidade no desenvolvimento de modelos mais refinados se dará pelo desenvolvimento de RVE's cada vez mais próximos da realidade.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

A área de materiais compósitos é uma área que está se expandindo nos últimos anos e existem alguns trabalhos, que foram discutidos ao longo da dissertação, que representam o desenvolvimento da área. Essa dissertação está alinhada com estes trabalhos, na medida que dialoga e recorta técnicas e metodologias presentes naqueles mais representativos. A preocupação em gerar um RVE é recente e constante, de maneira que estudos sobre a influência da modelagem do RVE tem movimentado a comunidade acadêmica. A saber: (Z.P.BAZANT et al., 1990), (BERTHELOT, 1998), (ELSHEBY, 1957), (RASSY, 2011), (OSTOJA-STARZEWSKI, 2006), (SCHLANGEN; MIER, 1992), (SCHORN; RODE, 1991), (SCHUTTER; TAERWE, 1993), (WANG; KWAN; CHAN, 1999), (WITTMANN; ROELFSTRA; SADAOUKI, 1984), (WRIGGERS; MOFTAH, 2006) e outros.

Este trabalho buscou sistematizar a construção de um RVE específico: O RVE do concreto com agregados graúdos em formato elíptico e para isso necessitou de conhecimentos de outras áreas de conhecimento: A computação gráfica. A computação gráfica, assim como outras, guarda entre seus objetos de estudos, assuntos bem consolidados que podem ser utilizados em outras áreas afim de resolver problemas específicos. Muitas delas podem ser desenvolvidas a partir do compartilhamento de conhecimento entre áreas diferentes e este trabalho vem para mostrar que a de materiais compósitos também tem a ganhar com outros conhecimentos.

A discussão principal do trabalho foi a geração do RVE (incluindo o posicionamento dos agregados), mas aproveitou-se para desenvolver um pouco do caminho subsequente a essa geração. O objetivo de ter esse RVE em uso é poder simular o funcionamento de vários tipos de materiais (no caso o concreto) e para esse trabalho aproveitou-se para simular o comportamento de compressão axial. Outras modela-

gens podem ser feitas e mais trabalhos podem ser desenvolvidos nessa área.

Por conta disto, sugere-se deixar como trabalho futuro, as seguintes recomendações:

- *Fazer testes de carregamentos em outros RVE's, além do RVE com agregados elípticos, afim de mostrar a grandeza da influência do formato dos agregados nos resultados.*
- *Criar novos algoritmos de geração de agregados que permitam otimizar a formação do RVE.*
- *Estudar o concreto como um material trifásico composto de argamassa, agregados e zona de transição.*

REFERÊNCIAS

2005, A. Abnt nbr 7211:2005. ABNT, 2005.

BERTHELOT, J.-M. **Composite Materials. Mechanical Behavior and Structural Analysis**. Berlim, Germany: Springer, 1998.

CHAZELLE, B.; DOBKIN, D. P. Intersection of convex objects in two and three dimensions. **Journal of ACM**, v. 31, p. 1 – 27, 1987.

CHOI, Y.; WANG, W.; LIU, Y. Continuous collision detection for elliptic disks. **HKU CS Tech Report**, 2005.

CHOI, Y.-K. et al. Real-time continuous collision detection for moving ellipsoids under affine deformation. **HKU CS Tech Report**, 2006.

DUZAK, J. Intersection detection of two ellipsoids. 2007.

ELSHEBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society**, A241, p. 376–396, 1957.

FAY, L. **Estruturas Arquitetônicas: Composição e Modelagem**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2006.

GARBOCZI, E. Three-dimensional mathematical analysis of particle shape using x-ray tomography and spherical harmonics: Application to aggregates used in concrete. **Cement Concrete**, v. 32, p. 1621 – 1638, 2002.

HADAP; SUNIL. Collision detection and proximity queries. **ACM SIGGRAPH**, 2004.

JIA, X. et al. An algebraic approach to continuous collision detection for ellipsoids. **Computer Aided Geometric Design**, v. 28, p. 164 – 176, 2011.

JUNIOR, C. C. **Ruído no transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos**. Tese (Doutorado), São Paulo, 2009.

LAI, W. M. **Introduction to Continuum Mechanics**. British: Butterworth Heinemann, 1993.

LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações**. São Paulo: LTC Editora, 1999.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto, microestrutura, propriedades e materiais**. [S.l.]: IBRACON, 2008.

MOUNT, D. M. Intersection detection and separators for simple polygons. **Proceedings of the eighth annual symposium on Computational geometry**, p. 303 – 311, 1992.

OSTOJA-STARZEWSKI, M. Material spatial randomness: From statistical to representative volume element. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2006.

PIANEZZER, G. A. et al. Um algoritmo para geração de agregados graúdos em formato elíptico. **Claio/SBPO**, v. 1, 2012.

PREPARATA, F.; M.I.SHAMOS. **Computational Geometry**. New York: Springer - Verlag, 1985.

SCHLANGEN, E.; MIER, J. van. Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete material and structures. **Mater,Struct**, v. 25, p. 534 – 542, 1992.

SCHORN, H.; RODE, U. Numerical simulation of crack propagation from microcracking to fracture. **Cem. Concr. Compos.**, 1991.

SCHUTTER, G. D.; TAERWE, L. Random particle model for concrete based on delaunay triangulation. **Mater,Struct**, v. 26, p. 67 – 73, 1993.

SCIENCE, S.-B. E. **Report of the National Science Foundation Blue Ribbon Panel (NSF)**. [S.l.], 2006.

TEIXEIRA, M. R. A contribution to the numerical modeling of the heterogeneity of concrete with the elements free galerkin method. Polytechnic of São Paulo University, São Paulo, 2011.

VASCONCELOS, A. C. **O Concreto no Brasil - Recordes, Realizações, História**. São Paulo: Copiare, 1985.

WANG, W.; WANG, J.; KIM, M.-S. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. **Computer Aided Geometric Design**, v. 18, p. 531 – 539, 2001.

WANG, Z.; KWAN, A.; CHAN, H. Mesoscopic study of concrete i: generation of random aggregate structure and finite element mesh. **Comput**, v. 70, p. 533 – 544, 1999.

WITTMANN, F.; ROELFSTRA, P.; SADAOUKI, H. Simulation and analysis of composite structures. **Mater,Sci,Engng**, v. 68, p. 239 – 248, 1984.

WITTMANN, F.; SADAOUKI, H. On the analysis of the failure process in composite materials by numerical simulation. **Mater,Sci,Engng**, v. 104, p. 9 – 20, 1988.

WITTMANN, F.; STEIGER, T.; SADAOUKI, H. Experimental and numerical study of effective properties of composite materials. **Micromechanics of concrete and Cementitious Composites**, p. 59 – 82, 1993.

WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. O. Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behavior. **Elsevier**, v. 42, p. 623 – 636, 2006. ISSN 1631 - 0721.

YAMAGUCHI, F. A unified approach to interference problems using a triangle processor. **ACM SIGGRAPH Computer Graphics**, v. 19, p. 141 – 149, 1985.

ZAITSEV, Y.; WITTMANN, F. Simulation of crack propagation and failure on concrete. **Mater,Sci,Engng**, v. 14, p. 357 – 365, 1981.

Z.P.BAZANT et al. Random particle model for fracture of aggregate of fiber composites. **J. Engng Mech.**, v. 116, n. 8, p. 1686 – 1705, 1990.

APÊNDICE A – APÊNDICE

A.1 DEMONSTRAÇÃO DA DETECÇÃO DE COLISÃO ENTRE ELIPSES

No trabalho Choi et.al (2005), os autores demonstraram o teorema que relaciona as raízes da equação característica ao posicionamento relativo de um par de elipses.

Esse resultado, utilizado no posicionamento dos agregados na matriz de argamassa, está colocado nesta seção dado sua importância dentro do trabalho como um todo.

A.1.1 Elipses e discos elípticos

Uma elipse pode ser representada no espaço euclidiano de dimensão 2 através de:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = 0, \quad (74)$$

onde $\mathbf{A} = [\alpha_{i,j}]$ é uma matriz simétrica 3x3 e \mathbf{X} é um vetor coluna contendo as coordenadas de um ponto do espaço.

Assume-se que a matriz \mathbf{A} é normalizada de maneira que $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} < 0$ para qualquer ponto interior da elipse.

Denota-se $\mathbf{A}_{i,i}$ como a submatriz de tamanho $i \times i$ de \mathbf{A}

Dessa maneira, podemos afirmar que uma elipse como a da equação 74 é caracterizada pelas condições de que $\det(\mathbf{A}_{1,1}) = \alpha_{1,1} > 0$, $\det(\mathbf{A}_{2,2}) > 0$ and $\det(\mathbf{A}_{3,3}) < 0$. Assim sendo, $\mathbf{A}_{2,2}$ é uma matriz positiva definida.

Um disco elíptico A é definido como $A \equiv \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq 0 \subset E^2$. Usualmente ∂A é utilizado para definir a curva limite de A , isto é, o conjunto de pontos satisfazendo 74 e utiliza-se $Int(A)$ para denotar os pontos interiores de A . Ainda, $A = \partial A \cup Int(A)$.

Dois discos elípticos, $A : \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq 0$ e $B : \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} \leq 0$, são consideradas separadas se $A \cap B = \emptyset$. Os discos A e B estão sobrepostas se $Int A \cap Int B \neq \emptyset$; e estão se tocando se $A \cap B \neq \emptyset$ e $Int A \cap Int B = \emptyset$.

Dado duas elipses $A : \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq 0$ e $B : \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} \leq 0$, o polinômio cúbico dado por $f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B})$ é chamado de polinômio característico e $f(\lambda) = 0$ é a equação característica de A e B .

Lema 1 Para qualquer par de discos elípticos $A : \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \leq 0$ e $B : \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} \leq 0$, o conjunto de raízes da equação característica pertence a um dos três casos:

- 3 raízes positivas.
- Uma raiz positiva e duas raízes negativas.
- Uma raiz positiva e um par de raízes complexas.

Prova: Supondo que:

$$f(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

Então $a_3 = \det(\mathbf{A}) \leq 0$ e $a_0 = -\det(\mathbf{B}) > 0$. Disso se segue que $f(0) > 0$ e $f(+\infty) < 0$. Assim, $f(\lambda) = 0$ possui pelo menos uma raiz positiva. Além disto, sendo $a_3 \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, 0 ou ∞ não é uma das raízes. Denota-se $\lambda_0 > 0$, λ_1 e λ_2 como as três raízes da equação característica. Sendo $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{a_0}{a_3}$, então temos que $\lambda_1 \lambda_2$ são ambas positivas, ambas negativas ou um par de raízes complexas conjugadas.

Lema 2 Se $\text{Int}(\mathbf{A}) \cap \text{Int}(\mathbf{B}) = \emptyset$, então $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa.

Prova: Sendo $\text{Int}(\mathbf{A}) \cap \text{Int}(\mathbf{B}) = \emptyset$, podemos supor que A e B estão ambas separadas ou se tocando externamente. Fazendo a substituição de $\lambda = \frac{\mu-1}{\mu}$, de maneira que $\mu \in [0, 1] \rightarrow \lambda \in [-\infty, 0]$, o qual transforma a equação característica $f(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B})$ em $g(\mu) = \det((1-\mu)\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = 0$. Denotando $Q(\mu) \equiv (1-\mu)\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$, pode-se observar que $Q(0) = \mathbf{A}$ e $Q(1) = \mathbf{B}$. Ainda, fica claro pela transformação que $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa se, e somente se, $g(\mu) = 0$ possui uma raiz real no intervalo de $[0, 1]$. Para mostrar este lema, mostra-se, por contradição, que $g(\mu) = 0$ tem uma raiz real no intervalo de $[0, 1]$.

Assumindo que $g(\mu) = 0$ não possui nenhuma raiz real no intervalo de $[0, 1]$. Sendo $g(\mu) \equiv \det((1-\mu)\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})$ uma função contínua de μ , e $g(0) = \det(\mathbf{A}) < 0$, temos então que $\det((1-\mu)\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) < 0$ para qualquer $\mu \in [0, 1]$. (Lembrando que $g(1) = \det(\mathbf{B}) \neq 0$). Sabendo que $\det(Q(\mu)_{1,1}) = (1-\mu)a_{1,1} + \mu b_{1,1} > 0$ para todo $\mu \in [0, 1]$, já que $A_{1,1} > 0$ e $B_{1,1} > 0$. Ainda mais, $Q(\mu)_{2,2} = (1-\mu)A_{2,2} + \mu B_{2,2}$ é definida positiva. Logo, $Q(\mu)_{2,2} > 0$ para todo $\mu \in [0, 1]$. Sendo assim, $\mathbf{X}^T Q(\mu) \mathbf{X} = 0$ é uma elipse para todo $\mu \in [0, 1]$, o qual seu centro é dado por $R(\mu) = Q(\mu)^{-1}[0, 0, 1]^T$.

Denotando $p(\mu) \equiv R(\mu)^T \mathbf{A} R(\mu)$. Então $p(\mu)$ é uma função contínua de $\mu \in [0, 1]$. Claramente, $R(0) \in \text{Int}(\mathbf{A})$, já que $R(0)$ é o centro de A . Ainda, $R(1) \notin A$, já que $R(1)$ é o centro de B e $\text{Int}(\mathbf{A}) \cap \text{Int}(\mathbf{B}) = \emptyset$, que é a hipótese do lema. Além disto, $p(0) = R(0)^T \mathbf{A} R(0) < 0$ e $p(1) = R(1)^T \mathbf{A} R(1) > 0$. Pela continuidade da função, segue que $p(\mu_1) = 0$ para algum $\mu_1 \in [0, 1]$, isto é, o centro $R(\mu_1)$ da elipse $Q(\mu_1)$ está na fronteira do disco elíptico A . Nesse caso pode-se definir um disco circular D centrado em $R(\mu_1)$, o qual está contido em $Q(\mu_1)$, isto é, $D \subset Q(\mu_1)$. Nota-se que $R(\mu_1)$ pode ser ou não um ponto tangente de A ou B , desde que A e B estejam ambas separadas ou se tocando externamente. Se $R(\mu_1)$ não é um ponto tangente, D pode ser suficientemente pequeno de maneira que $D \cap B = \emptyset$. Em qualquer caso, a tangente de

A em $R(\mu_1)$ representa o diâmetro do disco D. Pode-se escolher então um ponto X_1 desse diâmetro, exceto para $R(\mu_1)$, de maneira que X_1 é um ponto interior a $Q(\mu_1)$, mas exterior a A e B. Logo, temos que $X_1^T Q(\mu_1) X_1 < 0$, $X_1^T A X_1 > 0$, e $X_1^T B X_1 > 0$. Sendo $\mu_1 \in [0, 1]$, segue-se que:

$$X_1^T Q(\mu_1) X_1 = (1 - \mu_1) X_1^T A X_1 + \mu_1 X_1^T B X_1 > 0.$$

O que é uma contradição. Logo, $g(\mu)$ possui uma raiz real no intervalo $(0, 1)$.

Lema 3 Se $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \emptyset$, então qualquer raiz real de $f(\lambda) = 0$ é positiva.

Prova: A prova também é feita por contradição. Sendo λ_0 uma raiz real da equação característica. Assumindo que $\lambda_0 \leq 0$ e denotando $Q_0 = \lambda_0 A - B$. Então existe um ponto real X_0 tal que $Q_0 X_0 = 0$, já que Q_0 é singular. Sendo $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \emptyset$, seja $X_1 (\neq X_0)$ um ponto interior comum a A e B, isto é, $X_1^T A X_1 < 0$ e $X_1^T B X_1 < 0$. Logo,

$$X_1^T Q_0 X_1 = \lambda_0 X_1^T A X_1 - X_1^T B X_1 > 0.$$

Seja ι a linha passando por X_0 e X_1 . Então, sendo A e B limitadas, existe um ponto X distante o suficiente de A e B de tal maneira que X é exterior tanto a A e B. Escrevendo $X = \alpha X_0 + \beta X_1$, onde α e β são constantes reais que não são ambas iguais a zero. Então $X^T A X > 0$ e $X^T B X > 0$. Segue-se disto que:

$$X^T Q_0 X = \lambda_0 X^T A X - X^T B X < 0$$

Além disto, sendo $Q_0 X_0 = 0$ e $X_1^T Q_0 X_1 > 0$, temos que:

$$X^T Q_0 X = \alpha^2 X_0^T Q_0 X_0 + 2\alpha\beta X_1^T Q_0 X_0 + \beta^2 X_1^T Q_0 X_1 = \beta^2 X_1^T Q_0 X_1 > 0.$$

O que é uma contradição. Então, qualquer raiz real λ_0 de $f(\lambda) = 0$ é positiva.

Lema 4 Se dois discos elípticos A : $X^T A X \leq 0$ e B : $X^T B X \leq 0$ se tocam externamente, então $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa dupla.

Prova: Suponha que A e B estão se tocando externamente. Como resultado, as duas elipses A : $X^T A X = 0$ e B : $X^T B X = 0$ terão uma intersecção múltipla. Então $f(\lambda) = 0$ tem uma raiz múltipla λ_0 . Sendo $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \emptyset$, então pelo Lema 2, $f(\lambda) = 0$ tem uma raiz negativa λ_1 . Amais, pelo Lema 1, $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz positiva λ_2 . Então temos que ou $\lambda_0 = \lambda_1 < 0$ ou $\lambda_0 = \lambda_2 > 0$. Ainda pelo Lema 1, concluí-se que apenas o primeiro caso é possível. Então, $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa dupla.

Lema 5 Se $f(\lambda) = 0$ possui um par de raízes negativas, então os discos elípticos A : $X^T A X \leq 0$ e B : $X^T B X \leq 0$ se tocam externamente. Ainda mais, o ponto X_0 que eles se tocam é a solução única para $(\lambda_0 A - B) X = 0$, onde λ_0 é a raiz negativa dupla de $f(\lambda) = 0$.

Prova: Sendo λ_0 a raiz negativa dupla da equação característica. Claramente, λ_0 não é zero para os determinantes de $\lambda \mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{B}_{2,2}$, já que tanto $A_{2,2}$ e $B_{2,2}$ são positivas definidas, e então os dois zeros do $\det(\lambda \mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{B}_{2,2})$ são positivos. Disso segue-se que a ordem de $\lambda_0 \mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{B}_{2,2} = 2$ e seu núcleo possui uma dimensão.

Ainda, $\det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$ possui uma raiz dupla λ_0 , então $\mathbf{X}^T (\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{X} = 0$ contém a cônica singular $\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B}$ com multiplicidade 2. Nesse caso, as duas elipses $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ e $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = 0$ são tangentes uma a outra em um ponto singular X_0 da cônica $\mathbf{X}^T (\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{X} = 0$, isto é, $(\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{X}_0$.

Mostra-se que X_0 é um ponto real tangente de A e B. Vamos supor que $X_0 = U \pm iV \neq 0$, onde U e V são vetores reais homogêneos que não são ambos zero. Sem perda de generalidade, pode-se supor que $U \neq 0$. Então, a partir de $(\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B})(U \pm iV) = 0$, segue que $(\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B})U = 0$ e $(\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B})V = 0$. Isso significa que U e V são ambas soluções reais de $(\lambda_0 \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{X} = 0$. Ainda, U e V são linearmente dependentes, o que significa que pode-se escrever que $V = \alpha U$ para alguma constante α , já que o seu núcleo possui dimensão 1. Disso segue-se que $X_0 = (1 + i\alpha)U$ é um ponto real. Então, os discos elípticos A e B se tocam externamente no ponto real X_0 .

Teorema 3 Dado duas elipses, A : $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ e B : $\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = 0$, afirma-se:

- A e B se tocam externamente se, e somente se, $f(\lambda) = 0$ possui uma raiz negativa dupla.
- A e B estão separadas se, e somente se, $f(\lambda) = 0$ possui duas raízes distintas negativas.

Prova: A primeira parte resultado do Lema 4 e do Lema 5. Para a segunda parte, a prova de suficiência segue do Lema 3 e do Lema 4 e a prova necessária segue do Lema 2 e do Lema 5.

A.2 GERAÇÃO DOS AGREGADOS

O código de geração dos agregados diz respeito a geração das características físicas dos agregados, que no caso elípticos são: semi-eixo maior e semi-eixo menor, baseados na curva granulométrica. Esse código faz uma estimativa da quantidade de agregados, dividindo a curva granulométrica em seções e distribuindo, para cada seção, uma certa quantidade de agregados.

Esse código foi gerado em Visual Basic, por familiaridade do autor com a linguagem.

```
##Declaração das variáveis. Vetor de Granulometria para receber a entrada da
curva granulométrica, Área do Concreto para a Área do RVE que será gerado,
Vetor de Agregados para guardar os diversos Agregados considerados nesse
código como uma estrutura Agregado contendo: Semi-eixo maior, Semi-eixo
menor, ângulo de rotação e posição do centro referentes a aproximação por
uma elipse.
```

```
Dim Granulometria() As PointF
Dim AreaConcreto As Single
Dim VetorAgregados(0) As Agregados
Dim AreaRatioAggregate As Single
```

```
Structure Agregados
    Dim SEMaior As Single
    Dim SEMenor As Single
    Dim Angulo As Single
    Dim Posicao As PointF
End Structure
```

```
##Rotina para entrada de Dados. Obtém os dados a partir de um arquivo .txt,
contendo informações sobre a curva granulométrica e os guarda em um
vetor Granulometria.
```

```
Private Sub Entrada de Dados
    Dim Leitura As Single
    Dim i As Integer

    cdOpen.ShowDialog()
    FileClose(1)
    FileOpen(1, cdOpen.FileName, OpenMode.Input)
    Do While Not EOF(1)
        i += 1
        ReDim Preserve Granulometria(i)
        Input(1, Leitura)
        Granulometria(i).X = Leitura
    Loop
End Sub
```

```

        Input(1, Leitura)
        Granulometria(i).Y = Leitura
    Loop
End Sub

```

##Rotina de geração dos Agregados. Divide a curva granulométrica em Seções, os quais permite gerar aleatoriamente agregados contidos em cada seção a partir da área de concreto reservada para cada seção. Para cada seção, analisa se existe área suficiente para a geração de mais agregados. Tendo área suficiente, gera mais agregados, guardando suas características e expandindo o vetor de agregados para suportar todos os agregados. Ao fim retorna o vetor de estruturas de agregados completado com o tamanho do semi-eixo maior e do semi-eixo menor de cada agregado, obtidos a partir da curva granulométrica. O resultado é exportado para um arquivo .txt, entrada do programa feito em MatLab.

```
Private Sub Geração dos Agregados
```

```

    AreaConcreto = InputBox("Entre com a área do concreto: ")
    AreaRatioAggregate = InputBox("Entre com a AreaRatioAggregate: ")

    Dim AreaRestante As Single
    Dim AreaSeção As Single
    Dim QtdadeAgregados As Integer
    Dim Seções As Integer
    Seções = UBound(Granulometria, 1) - 1

    For s As Integer = 1 To Seções

        AreaSeção = (Granulometria(s).Y - Granulometria(s + 1).Y) *
AreaRatioAggregate * AreaConcreto

        AreaRestante += AreaSeção

        Do While (AreaRestante >= System.Math.PI *
(Granulometria(s).X / 2) ^ 2)

            Dim EixoMaior As Single
            Dim EixoMenor As Single
            Randomize()

            EixoMaior = Granulometria(s).X + Rnd() *
(Granulometria(s + 1).X - Granulometria(s).X)

            Randomize()

            EixoMenor = Granulometria(s).X / 2 + Rnd() *
(EixoMaior - Granulometria(s).X / 2)

```

```
        ReDim Preserve VetorAgregados(UBound(VetorAgregados, 1) + 1)
        VetorAgregados(UBound(VetorAgregados, 1)).SEMaior = EixoMaior
        VetorAgregados(UBound(VetorAgregados, 1)).SEMenor = EixoMenor

        AreaRestante -= System.Math.PI * EixoMaior * EixoMenor
        QtdadeAgregados += 1
    Loop
Next

cdSave.ShowDialog()
FileClose(1)
FileOpen(1, cdSave.FileName, OpenMode.Output)
For i As Integer = 1 To UBound(VetorAgregados, 1)

    WriteLine(1, VetorAgregados(i).SEMaior & " "
        & VetorAgregados(i).SEMenor)

Next
FileClose(1)

End Sub
```

A.3 GERAÇÃO DO RVE

O código de Geração do RVE, conhecido por fazer o posicionamento dos agregados, foi desenvolvido em MATLAB por esta ser considerada uma linguagem rápida e prática para a realização de certas operações matemáticas, como o cálculo dos autovalores e autovetores e por possuir uma ampla biblioteca gráfica.

Esse código recebe os semi-eixos maiores e menores de cada um dos agregados gerados no código em Visual Basic e adiciona a informação de posicionamento de cada um dos agregados, tendo como característica que nenhum agregado possui intersecção e que todos estão inteiramente contidos no interior do RVE.

#Função Principal. Recebe como entrada matriz A, contendo:
 Lista de semi-eixos maiores e menores das elipses geradas a partir da curva granulométrica no programa feito em Visual Studio. Estrutura de Vetor de Agregados. Percorre o vetor de agregados, gerando aleatoriamente, uma posição de centro e um ângulo de rotação. Gera a matriz representativa da elipse e compara se há colisão com cada um dos agregados que já estão posicionados no RVE. Retorna as informações de cada um dos agregados no RVE gerado em uma nova matriz A.

```
function Main(A)

m = length(A);

Agregados = struct('SEMaior',1,'SEMenor',2,'Xcentro',3,
'Ycentro',4,'Angulo',5,'Matriz',[]);

Agregados(m).SEMaior = A(m,1);

for i = 1: m,
    Agregados(i).SEMaior = A(i,1);
    Agregados(i).SEMenor = A(i,2);
end

ppp = 0;
for i = 1:m,
    OK = 0;
    ppp = ppp + 1
    while OK == 0

        Agregados(i).Xcentro = 100 * rand();
        Agregados(i).Ycentro = 100 * rand();
        Agregados(i).Angulo = 2 * pi * rand();
        OK = 1;
    end
end
```

```

%%GERAÇÃO DA MATRIZ DA ELLIPSE
Ang = Agregados(i).Angulo;
Cos1 = cos(-Ang);
Sin1 = sin(-Ang);
Cos2 = Cos1^2;
Sin2 = Sin1^2;
SEMaior = Agregados(i).SEMaior;
SEMenor = Agregados(i).SEMenor;
SEMenor2 = SEMenor^2;
SEMaior2 = SEMaior^2;
PosX = Agregados(i).Xcentro;
PosY = Agregados(i).Ycentro;
PosX2 = PosX^2;
PosY2 = PosY^2;
Agregados(i).Matriz(1,1) = (Cos2/SEMaior2)+(Sin2/SEMenor2);
Agregados(i).Matriz(1,2) = -((1/SEMaior2) - (1/SEMenor2))*Cos1*Sin1;
Agregados(i).Matriz(2,1) = Agregados(i).Matriz(1,2);
Agregados(i).Matriz(2,2) = (Sin2/SEMaior2)+(Cos2/SEMenor2) ;

Agregados(i).Matriz(3 ,3)= Agregados(i).Matriz(1,1)*PosX2 +
2*Agregados(i).Matriz(1,2)*PosX*PosY + Agregados(i).Matriz(2,2)*PosY2 - 1;

Agregados(i).Matriz(3,1) = -(Agregados(i).Matriz(1,1)*PosX +
PosY*Agregados(i).Matriz(2,1)) ;

Agregados(i).Matriz(1,3) = Agregados(i).Matriz(3,1);

Agregados(i).Matriz(3,2) = -(Agregados(i).Matriz(2,2)*PosY
+ PosX*Agregados(i).Matriz(2,1));

Agregados(i).Matriz(2,3) = Agregados(i).Matriz(3,2);

%%TESTE DA FRONTEIRA
if Agregados(i).Xcentro - Agregados(i).SEMaior < 0
    OK = 0;
elseif Agregados(i).Xcentro + Agregados(i).SEMaior > 100
    OK = 0;
elseif Agregados(i).Ycentro - Agregados(i).SEMaior < 0
    OK = 0;
elseif Agregados(i).Ycentro + Agregados(i).SEMaior > 100
    OK = 0;
end

if OK == 1
    for j = 1: i-1
        if OK == 1

```

```

if (Agregados(i).Xcentro - Agregados(j).Xcentro)^2
+ (Agregados(j).Ycentro - Agregados(i).Ycentro)^2 <
(Agregados(i).SEMaior + Agregados(j).SEMaior)^2

        %%TESTE DE COLISAO ENTRE ELLIPSE J e ELLIPSE I
        if ExisteColisao(Agregados(j).Matriz, Agregados(i).Matriz)
            OK = 0;
        end
    end
end
end
end

end

end

K = [];
for i = 1:m,
    K(i,1) = Agregados(i).Xcentro;
    K(i,2) = Agregados(i).Ycentro;
    K(i,3) = Agregados(i).SEMaior;
    K(i,4) = Agregados(i).SEMenor;
    K(i,5) = Agregados(i).Angulo;
end
PlotEllipse(K);

# A função PlotEllipse, desenha o RVE na tela a partir
das funções gráficas do MATLAB e a função EXISTECOLISÃO
determina, a partir das raízes da equação característica,
se cada um dos agregados está contendo uma
intersecção com algum outro agregado.

```

(MEHTA; MONTEIRO, 2008) (CHOI; WANG; LIU, 2005) (WRIGGERS; MOFTAH, 2006)