

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS
NUMÉRICOS EM ENGENHARIA

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA A ANÁLISE DE VIGAS DE
TIMOSHENKO

CURITIBA – PARANÁ

2012

SERGIO AUGUSTO FLEISCHFRESSER

**UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA A ANÁLISE DE VIGAS DE
TIMOSHENKO**

Trabalho apresentado como requisito ao título
de Doutor em Engenharia pelo Programa de
Pós-Graduação em Métodos Numéricos do
Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas,
Departamento de Engenharia
Civil/Departamento de Matemática da
Universidade Federal do Paraná

Orientador: Prof. José Antonio Marques
Carrer

CURITIBA – PARANÁ

2012

Termo de Aprovação

SERGIO AUGUSTO FLEISCHFRESSER

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA A ANÁLISE DE VIGAS DE TIMOSHENKO

Dissertação aprovada como requisito para obtenção do grau de Doutor em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.
Departamento de Matemática/UFPR

Prof. José Cláudio de Faria Telles, Ph.D.
Programa de Engenharia Civil/COPPE/UFRJ

Prof. Luiz Antonio Soares de Souza, D.Sc.
Departamento de Estruturas/UDEL

Prof. Maurício Felga Gobbi, Ph.D.
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia/UFPR

Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D.Sc.
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia/UFPR

Curitiba, 23 de novembro de 2012

Agradecimentos

Apresento, em primeiro lugar, meu profundo respeito e agradecimento à orientação recebida do Prof. José Antonio Marques Carrer que, em momento algum, mediu tempo ou esforço para eu poder concluir este estudo. Com seu jeito franco e desinteressado, o professor Carrer sempre procurou atender minhas dificuldades, desde a indicação do tema, elaboração de programas, indicação de artigos e livros, mostrando-me a melhor maneira de trabalhar e encorajando-me nos momentos de desânimo.

Agradeço aos meus colegas do Cesec: Lucas Máximo Alves, Roberto Vanzuit, Raphael Fernando Scuciato e Marcelo Franco de Oliveira, pelas importantes colaborações prestadas durante o período de elaboração deste trabalho.

Agradeço à Maristela Bandil, secretária do CESEC, por sua amizade, alegria e incentivo em todas as oportunidades.

Agradeço à minha querida esposa Gleusa por seu apoio emocional e paciência durante as intermináveis horas em que eu me debrucei nesta empreitada.

Sumário

Capítulo 1

Introdução.....	1
1.1 – Viga de Timoshenko.....	2
1.2 – Método dos Elementos de Contorno	3
1.3 – Estrutura do trabalho	6

Capítulo 2

Teoria de Vigas de Timoshenko: Análise Dinâmica.....	8
2.1 – Hipóteses básicas.....	8
2.2 – Deslocamentos.....	9
2.3 – Relações deformação-deslocamento	10
2.4 – Relações tensão-deformação	11
2.5 – Relações entre os esforços solicitantes e os deslocamentos.....	12
2.6 – Equações diferenciais que governam o problema	13
2.7 – Equações governantes para carga dinâmica	14
2.8 – Solução analítica para uma viga simplesmente apoiada	15

Capítulo 3

Método dos Elementos de Contorno	19
3.1 – Formulação MEC-D	20
3.2 - Método de Houbolt	27

Capítulo 4

Exemplos Numéricos.....	29
4.1 – Carga estática.....	30
4.1.1 – Viga simplesmente apoiada.....	30
4.1.1.1 – Carga uniformemente distribuída.....	30
4.1.1.2 – Carga concentrada	32

4.1.2 – Viga simplesmente apoiada.....	36
4.1.2.1 – Carga uniformemente distribuída.....	36
4.1.2.2 – Carga concentrada.....	38
4.1.3 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro.....	42
4.1.3.1 – Carga uniformemente distribuída.....	42
4.1.3.2 – Carga concentrada.....	45
4.1.4 – Viga engastada em um extremo e livre no outro.....	49
4.1.4.1 – Carga uniformemente distribuída.....	49
4.1.4.2 – Carga concentrada.....	51
4.2 – Carga dinâmica.....	54
4.2.1 – Viga simplesmente apoiada.....	54
4.2.1.1 – Carga uniformemente distribuída.....	54
4.2.1.2 – Carga concentrada no ponto médio da viga.....	55
4.2.1.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga.....	56
4.2.1.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão.....	57
4.2.1.5 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada ao cisalhamento.....	57
4.2.1.6 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga.....	59
4.2.2 – Viga engastada nos extremos.....	60
4.2.2.1 – Carga uniformemente distribuída.....	60
4.2.2.2 – Carga concentrada no ponto médio da viga.....	61
4.2.2.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga.....	62
4.2.2.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão.....	63
4.2.2.5 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga.....	64
4.2.3 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro.....	65
4.2.3.1 – Carga uniformemente distribuída.....	65
4.2.3.2 – Carga concentrada aplicada no ponto médio da viga.....	66
4.2.3.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga.....	67

4.2.3.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão	68
4.2.3.5 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga.....	69
4.2.4 – Viga engastada em um extremo e livre no outro.....	70
4.2.4.1 – Carga uniformemente distribuída	70
4.2.4.2 – Carga concentrada aplicada na extremidade da viga.....	71
4.2.4.3 – Carga harmônica aplicada na extremidade da viga	72
4.2.4.4 – Carga harmônica aplicada na extremidade da viga – ressonância associada à flexão	73
4.2.4.5 – Carga impulsiva aplicada na extremidade da viga	74

Capítulo 5

Conclusão	75
Referências Bibliográficas.....	79
Apêndices	82
A.1 – Viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica.....	83
A.2 – Viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada – Carga concentrada – Solução analítica.....	84
A.3 – Viga de Euler-Bernoulli engastada nos extremos – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica.....	87
A.4 – Viga de Euler-Bernoulli engastada nos extremos – Carga concentrada – Solução analítica.....	88
A.5 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica	91
A.6 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga concentrada – Solução analítica.....	92
A.7 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e livre no outro – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica	95

A.8 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e livre no outro – Carga concentrada – Solução analítica	96
A.9 – Viga de Timoshenko – Carga estática – MEC – Primeira equação integral de contorno	99
A.10 – Viga de Timoshenko – Carga estática – MEC – Segunda equação integral de contorno	101
A.11 – Viga de Timoshenko – Células lineares	103
A.12 – Viga de Timoshenko – Células quadráticas	106
A.13 – Método de Houbolt.....	110
A.14 – Método das Diferenças Finitas	113
A.15 – Comparações iniciais entre os métodos utilizados	116

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Eixo de uma viga deformada pela flexão.....	9
Figura 2.2 – Efeito do cisalhamento associado à flexão pura	11
Figura 2.3 – Momento fletor e cortante.....	12
Figura 2.4 – Equilíbrio de forças e de momentos.....	13
Figura 4.1.1.1 – Viga simplesmente apoiada - Carga uniformemente distribuída	30
Figura 4.1.1.2 – Viga simplesmente apoiada - Carga concentrada em $x = a$	32
Figura 4.1.2.1 – Viga engastada nos extremos - Carga uniformemente distribuída	36
Figura 4.1.2.2 – Viga engastada nos extremos - Carga concentrada em $x = a$	38
Figura 4.1.3.1 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro - Carga uniformemente distribuída.....	42
Figura 4.1.3.2 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro - Carga concentrada em $x = a$	45
Figura 4.1.4.1 – Viga engastada em um extremo e livre no outro - Carga uniformemente distribuída.....	49
Figura 4.1.4.2 – Viga engastada em um extremo e livre no outro - Carga concentrada em $x = a$	51

Lista de Gráficos

Gráfico 4.1.1.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída.....	32
Gráfico 4.1.1.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada – Carga concentrada em $a = 3L/4$	36
Gráfico 4.1.2.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada nos extremos – Carga uniformemente distribuída.....	38
Gráfico 4.1.2.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada nos extremos – Carga concentrada em $a = 3L/4$	41
Gráfico 4.1.3.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga uniformemente distribuída	44
Gráfico 4.1.3.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga concentrada em $a = 3L/4$	48
Gráfico 4.1.4.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em extremo e livre no outro – Carga uniformemente distribuída	50
Gráfico 4.1.4.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga concentrada no ponto médio da viga.....	53
Gráfico 4.2.1.1 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída.....	54
Gráfico 4.2.1.2 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga concentrada aplicada no ponto médio da viga.....	55
Gráfico 4.2.1.3.1 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga; $w = 50$ Hz	56
Gráfico 4.2.1.3.2 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga; $w = 1.000$ Hz	56
Gráfico 4.2.1.4 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – Frequência associada à ressonância relativa à flexão.....	57

Gráfico 4.2.1.5a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – Frequência associada à ressonância relativa ao cisalhamento – Solução analítica.....	58
Gráfico 4.2.1.5b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – Frequência associada à ressonância relativa ao cisalhamento – MEC.....	58
Gráfico 4.2.1.6a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – Solução analítica	59
Gráfico 4.2.1.6b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – MEC	59
Gráfico 4.2.2.1 - Deslocamentos no ponto médio de uma viga engastada nos dois extremos – Carga uniformemente distribuída	60
Gráfico 4.2.2.2 – Deslocamentos no ponto médio de uma viga engastada nos dois extremos – Carga concentrada no ponto médio da viga.....	60
Gráfico 4.2.2.3 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga.....	62
Gráfico 4.2.2.4 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – Frequência associada à ressonância relativa à flexão.....	63
Gráfico 4.2.2.5a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – MDF.....	64
Gráfico 4.2.2.5b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – MEC	64
Gráfico 4.2.3.1 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga uniformemente distribuída	65
Gráfico 4.2.3.2 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga concentrada aplicada no ponto médio da viga	66

Gráfico 4.2.3.3 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga	67
Gráfico 4.2.3.4 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – Frequência associada à ressonância relativa à flexão.....	68
Gráfico 4.2.3.5a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – MDF.....	69
Gráfico 4.2.3.5b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga – MEC.....	69
Gráfico 4.2.4.1 – Deslocamentos da extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga a uniformemente distribuída em todo o vão	70
Gráfico 4.2.4.2 – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga concentrada aplicada no extremo livre	71
Gráfico 4.2.4.3 – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga harmônica concentrada no extremo livre da viga	72
Gráfico 4.2.4.4 – Deslocamentos do extremo livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga harmônica aplicada no extremo livre da viga – Frequência associada à ressonância relativa à flexão.....	73
Gráfico 4.2.4.5a – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga impulsiva aplicada no extremo livre – MDF.....	74
Gráfico 4.2.4.5b – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro – Carga impulsiva aplicada no extremo livre – MEC.....	74
Gráfico A.15.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – MEC – células lineares	116

Gráfico A.15.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – MEC – células quadráticas	117
Gráfico A.15.3 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – Método da Diferenças Finitas	118
Gráfico A.15.4 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos – 8 células.....	118
Gráfico A.15.5 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos – 16 células.....	119
Gráfico A.15.6 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos –32 células.....	119
Gráfico A.15.7 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída em todo o vão – Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos – 64 células.....	120
Gráfico A.15.8 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída – Comparação entre os resultados obtidos com o MEC – 16 células lineares e 8 células quadráticas	120
Gráfico A.15.9 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída – Comparação entre os resultados obtidos com o MEC – 32 células lineares e 16 células quadráticas	121
Gráfico A.15.10 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída – Comparação entre os resultados obtidos com o MEC – 64 células lineares e 32 células quadráticas	121

Resumo

As equações para o cálculo dos deslocamentos de uma viga de Timoshenko são deduzidas para o Método dos Elementos de Contorno - MEC. É desenvolvida uma formulação do Método dos Elementos de Contorno, do tipo de domínio, para a análise dinâmica das vigas de Timoshenko. O método de Houbolt é empregado para o esquema de marcha no tempo. Vigas com os tipos de apoio usuais, submetidas a diferentes tipos de cargas dinâmicas são analisadas. Os resultados são comparados com as soluções analíticas disponíveis ou com as soluções fornecidas pelo Método das Diferenças Finitas. O Método dos Elementos de Contorno – Domínio mostrou ser uma técnica numérica eficiente e possuir excelentes qualidades para a resolução dos mais diversos problemas dentro do estudo das vigas.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno - Domínio. Viga de Timoshenko. Tensão de cisalhamento. Método de Houbolt.

Abstract

BEM equations for the computation of the displacements for Timoshenko beams are presented. A BEM formulation is developed for the dynamic analysis of Timoshenko beams. The Houbolt method is employed for time-marching. Beams subjected to different dynamic loads are analyzed. The results are compared with the available analytical solutions and with those furnished by the Finite Difference Method. Boundary Element Method - Domain proved to be an efficient numerical technique and has excellent qualities for solving problems in the study of beams.

Key-words: Boundary Element Method - Domain. Timoshenko beams. Shear stress. Houbolt Method.

Capítulo 1

Introdução

1.1 – Viga de Timoshenko

O procedimento clássico da teoria de vigas de Euler-Bernoulli analisa as deformações de uma viga submetida a um carregamento qualquer considerando apenas o efeito do momento fletor resultante dessas cargas; quando é considerado também o efeito do esforço cortante e da inércia rotacional tem-se o estudo da teoria de vigas de Timoshenko [28], autor que mostrou a real importância da deformação por cisalhamento na descrição das reações dessas vigas.

Ocorre que, durante a flexão, as seções de uma viga executam não somente um movimento de translação, mas também giram; assim, a rotação do eixo de uma viga depende não só da rotação associada à flexão pura da seção transversal, mas também do ângulo formado com o eixo horizontal, devido ao cisalhamento.

Em Seminário para qualificação de doutorado, Maria Smith de Souza Borges [3], em 1996, analisou o efeito da deformabilidade por cisalhamento na flexão de vigas e calculou os coeficientes de cisalhamento para dois tipos de seção transversal, retangular e circular.

Para resolver o sistema de equações diferenciais resultantes do estudo dos deslocamentos e das rotações do eixo de uma viga, além do procedimento analítico usual, também podem ser utilizados métodos numéricos, tais como o

Método das Diferenças Finitas, o Método de Elementos Finitos ou o Método dos Elementos de Contorno.

1.2 – Método dos Elementos de Contorno

Atualmente, o Método dos Elementos de Contorno tem se mostrado uma ferramenta numérica importante; um dos motivos do seu sucesso é a redução em uma unidade da dimensão espacial, conduzindo a uma discretização numérica mais eficiente. Uma das técnicas utiliza o Teorema da Divergência, que transforma uma integral de volume em uma integral de superfície; desenvolvimento nesse sentido já se podia encontrar nos trabalhos de Lagrange e de Laplace.

No que segue, será feita uma descrição de alguns estudos que contribuíram para o desenvolvimento desse método.

Kelvin apresentou, em 1848, uma expressão para a equação integral dos deslocamentos, a qual requer uma solução fundamental em um ponto no espaço infinito.

Betti [2], em 1872, introduziu o Teorema da Reciprocidade, uma das mais célebres relações da Mecânica, e que se trata de uma generalização do Princípio da Reciprocidade definido anteriormente por Maxwell.

Fredholm [12], em 1903, estudou as equações integrais como um método para resolver problemas da deflexão de uma viga sujeita a uma carga distribuída, e provou a existência e unicidade da solução da equação integral linear. Sugeriu ainda um procedimento de discretização para resolver essas equações; essa ideia não progrediu e sua utilização se limitou ao trabalho analítico.

Somigliana desenvolveu uma representação integral para os deslocamentos, hoje conhecida como a Identidade de Somigliana; Volterra, em 1907, apresentou a solução para os deslocamentos em elasticidade.

Uma contribuição de grande importância foi o método proposto, em 1908, por Ritz, considerado o precursor do Método de Elementos Finitos. A ideia básica incluía o uso do Método Variacional e de Funções de Base para encontrar

as soluções aproximadas de problemas de valor de contorno. O procedimento envolve a integração no domínio da solução e, por esse motivo, é considerado como um Método de Domínio e não um Método de Contorno.

Treffitz, em 1926, apresentou um método que requer a integração de funções no contorno do domínio do problema. Hoje em dia, esse método é utilizado com frequência por se tratar de um procedimento muito simples.

A partir dos anos sessenta, em virtude da ampla disponibilidade de computadores eletrônicos, teve início o rápido desenvolvimento do Método de Elementos Finitos, do Método dos Elementos de Contorno e de outros métodos numéricos.

Jaswon [14], em 1963, usou a equação de Fredholm do primeiro tipo em duas dimensões para a solução de problemas de Dirichlet, e obteve boas respostas.

Kupradze [15], em 1964 e 1965, apresentou um método para encontrar soluções aproximadas de potencial e elasticidade em problemas estáticos e funcionais e o chamou de Método de Equações Funcionais.

Massonet [20], em 1965, apresentou vários estudos usando equações integrais de contorno para resolver problemas de elasticidade.

Rizzo [23] publicou artigo, em 1967, onde aplicou um procedimento numérico para resolver a Identidade de Somigliana em problemas elastostáticos.

Considera-se que o termo Método dos Elementos de Contorno - MEC seja uma criação coletiva do grupo de pesquisa da Universidade de Southampton: Brebbia, Dominguez, Banerjee e Butterfield; ele é usado para indicar o método por meio do qual se divide o contorno de um domínio em uma série de elementos, sobre os quais as funções em estudo podem variar de modos diferentes, de maneira semelhante ao Método de Elementos Finitos.

Brebbia e Dominguez [4] e Brebbia *et al* [5] apresentaram o Método dos Elementos de Contorno utilizando o conceito dos Resíduos Ponderados.

No Brasil, Mansur, Halbritter e Telles [19], em 1978, na oportunidade da comemoração dos 15 anos da COPPE/UFRJ, Instituto Alberto Luiz Coimbra

de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia, contribuíram com um trabalho a respeito dos procedimentos básicos para o desenvolvimento de um programa computacional, visando a resolver problemas de elasticidade bidimensional; concluíram que os resultados obtidos com o Método dos Elementos de Contorno são satisfatórios e comparáveis aos obtidos com o Método de Elementos Finitos, e apresentam grande vantagem na preparação dos dados de entrada.

Em 2005, Cheng *et al* [9] apresentaram abrangente artigo contendo amplo retrospecto sobre a história inicial do Método dos Elementos de Contorno, sua fundamentação matemática em termos da equação de Laplace, a existência e unicidade da solução de problemas de valor de contorno, os teoremas de Gauss e Stokes, as identidades e a função de Green, as equações integrais de Fredholm e a extensão da fórmula de Green para acústica, elasticidade e outros problemas físicos.

O problema da análise dinâmica das vigas pode ser resolvido mediante o emprego de diferentes formulações do Método dos Elementos de Contorno. No contexto da teoria clássica de Euler-Bernoulli, podem ser citados os trabalhos de Providakis e Beskos [21], Schanz [25], de Langre *et al* [16] e Carrer *et al* [8].

O primeiro desses trabalhos tem ligação com as vibrações fletoras, livres e forçadas, nas quais o problema da vibração forçada é tratado com a ajuda das transformadas de Laplace e a resposta é obtida por uma inversão da solução transformada.

O segundo trabalho emprega um método de quadratura da convolução, ver Lubich [17, 18], para realizar a convolução na equação integral dependente do tempo.

No terceiro trabalho, é empregada a formulação dependente do tempo do MEC, MEC-TD. Embora interessante sob o ponto de vista matemático, a complexidade da solução fundamental, que envolve integrais de Fresnel, e a dificuldade na obtenção de resultados estáveis, tornou essa formulação menos atrativa que as outras.

O trabalho de Carrer *et al* [8] trata com a assim chamada formulação MEC-D, com D significando domínio; em lugar da solução fundamental dependente do tempo, é adotada uma solução fundamental da estática e, como consequência, as equações do MEC apresentam uma integral de domínio adicional, contendo a derivada temporal de segunda ordem do deslocamento vertical. Os resultados encorajadores encontrados demonstram que numerosos trabalhos de pesquisa serão necessários antes de ser atingida uma conclusão definitiva, se assim for possível, a respeito de qual formulação seja a mais adequada para o tratamento do problema.

Atualmente tem sido dada grande atenção ao desenvolvimento de formulações MEC com base na teoria das vigas de Timoshenko.

Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Antes [1], que estabeleceu uma equação integral para o cálculo da deflexão, da rotação, do momento fletor e do esforço cortante dessas vigas. Junto com as equações integrais para os deslocamentos e as forças axiais em barras tensionadas, a formulação apresentada possibilitou a modelagem de estruturas planas arbitrárias por meio de combinações adequadas dessas equações.

Este trabalho tem o propósito de mostrar a possibilidade efetiva do emprego do Método dos Elementos de Contorno – MEC para o cálculo dos deslocamentos de uma viga de Timoshenko quando submetida a diversos tipos de carregamento.

1.3 – Estrutura do trabalho

O Capítulo 1 consiste nesta Introdução.

No Capítulo 2, são mostradas as hipóteses básicas adotadas, e as equações diferenciais governantes dos deslocamentos de uma viga, considerando os efeitos do esforço cortante e da inércia rotacional; são analisadas vigas com os tipos de apoio mais usuais, sujeitas a uma carga estática, uniformemente distribuída em todo o vão, e concentrada.

A seguir, são apresentadas as equações diferenciais parciais

governantes dos deslocamentos de uma viga de Timoshenko quando submetida a cargas dinâmicas. Para o caso de uma viga simplesmente apoiada, é apresentada uma solução analítica.

No Capítulo 3, desenvolve-se uma formulação para a análise dinâmica das vigas, denominada “de domínio”, MEC-D, baseada no emprego de soluções fundamentais não dependentes do tempo, para o cálculo daqueles mesmos deslocamentos.

São analisados os mesmos tipos de vigas estudados para cargas estáticas, porém sujeitas a quatro diferentes categorias de cargas dinâmicas, a saber:

- i) uniformemente distribuída atuando continuamente no tempo;
- ii) concentrada atuando continuamente no tempo;
- iii) concentrada harmônica;
- iv) impulsiva.

Para atender ao esquema de marcha no tempo é empregado o método de Houbolt.

No Capítulo 4, são deduzidas as equações analíticas correspondentes a vigas com diferentes apoios, sujeitas a carga estática uniformemente distribuída e a carga concentrada, mostrados exemplos numéricos de aplicação dessas equações, e depois seus resultados são comparados graficamente com as soluções obtidas mediante a utilização do Método de Elementos de Contorno.

Para o caso de carga dinâmica, é efetuada a comparação gráfica com a correspondente solução analítica quando se trata de uma viga simplesmente apoiada; na ausência de uma solução analítica para os outros três tipos de viga, a saber: biengastadas, engastadas e apoiadas e em balanço, a comparação se fez com os resultados fornecidos pelo Método das Diferenças Finitas (MDF).

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões a respeito das análises efetuadas e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Além das referências bibliográficas, foram incluídos apêndices contendo as soluções analíticas para o cálculo dos deslocamentos de uma viga de

Euler-Bernoulli, com a consideração de vários tipos de apoio e cargas, as equações integrais de contorno, no caso de uma carga estática, as integrais de domínio que aparecem por ocasião do estabelecimento das equações integrais de contorno, quando se consideram células lineares e células quadráticas, a dedução da expressão, ou aproximação, utilizada no Método de Houbolt, definições relativas ao Método das Diferenças Finitas, e as comparações iniciais efetuadas para a definição do número de células, lineares ou quadráticas, utilizadas nos cálculos com o MEC.

Capítulo 2

Teoria de Vigas de Timoshenko: Análise Dinâmica

Neste capítulo são mostradas as equações que governam os deslocamentos de uma viga de Timoshenko submetida a diferentes tipos de carregamentos.

Primeiro, considera-se a existência de uma carga estática e, em seguida, as equações são generalizadas para o caso de uma análise dinâmica.

O problema em questão é descrito por um sistema de duas equações diferenciais: a primeira delas tem como variável principal o deslocamento transversal, v , e a segunda, a rotação ψ da seção transversal devida à flexão.

2.1 – Hipóteses básicas

Considerou-se uma viga de comprimento L , com área constante da seção transversal A . Os eixos coordenados foram tomados com origem no centroide da seção da extremidade esquerda da barra, com o eixo x coincidente com o próprio eixo da viga em repouso e não carregada, e com os eixos y e z contidos no plano da seção transversal da extremidade esquerda, formando desta forma um triedro direto com o eixo x .

O carregamento é suposto atuante sobre o plano xy de simetria da viga, de maneira a permitir que seu eixo flexionado permaneça nesse plano.

Além disso, considerou-se que as mudanças de configuração do sistema estrutural são suficientemente pequenas, a fim de permitir a utilização de

relações deformação-deslocamento lineares e de que seja possível escrever as equações de equilíbrio com base na geometria inicial.

Ainda mais, qualquer ponto do eixo da viga sofre deslocamento segundo a vertical que contém esse ponto, as seções planas e normais ao eixo da viga antes da flexão permanecem planas, mas não necessariamente normais ao eixo após a flexão; o material da viga é homogêneo, isótropo e linearmente elástico; as tensões normais no eixo y são muito pequenas em relação à tensão normal no eixo x e, portanto, são ignoradas nas relações tensão-deformação.

2.2 – Deslocamentos

Seja a figura 2.1, a seguir:

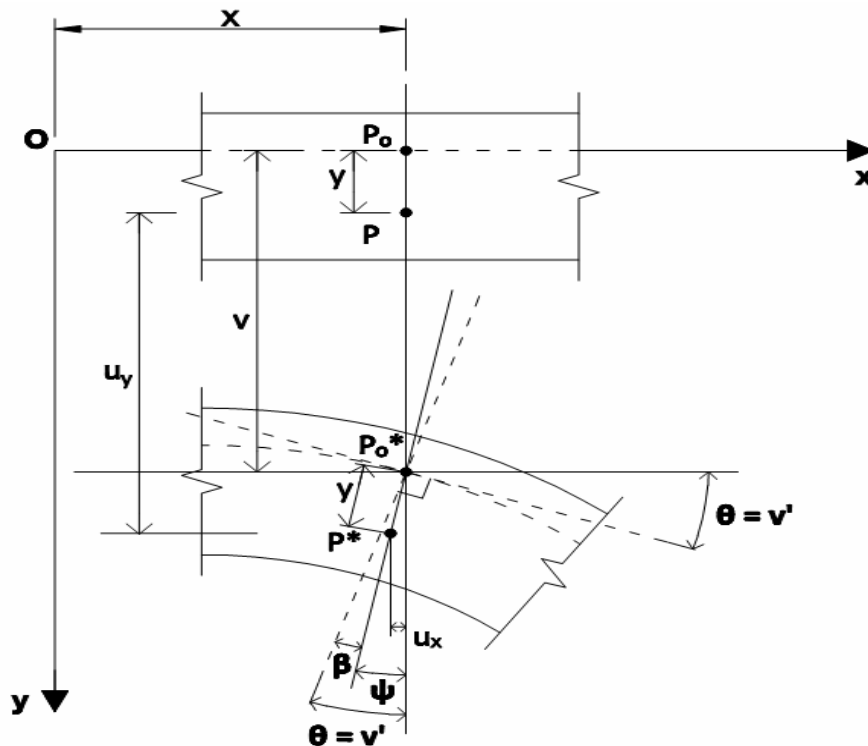


Figura 2.1 – Eixo de uma viga deformada pela flexão

As componentes do deslocamento de um ponto genérico P de uma viga nas direções dos eixos coordenados podem ser escritas respectivamente:

$$\begin{aligned}
 u_x &= -y \sin \psi \approx -y \operatorname{tg} \psi \approx -y \psi(x) \\
 u_y &\approx v(x) \\
 u_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

onde $v(x)$ é a componente do deslocamento do ponto P_0 pertencente ao eixo da viga na direção do eixo y , e $\psi(x)$ é a rotação da seção de abscissa x nesse mesmo ponto.

2.3 – Relações deformação-deslocamento

Em função das hipóteses antes estabelecidas, as componentes da deformação são as seguintes:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.3)$$

Substituindo nestas duas relações as expressões dos deslocamentos u_x e u_y mostradas em (2.1), encontra-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial(-y\psi)}{\partial x} = -y\psi' \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial(-y\psi)}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\psi + v' \quad (2.5)$$

Na figura 2.2, tem-se um trecho da viga compreendido entre duas seções transversais S_1 e S_2 situadas entre si a uma distância dx na configuração anterior à deformação.

Em primeiro lugar, quanto ao efeito isolado do cisalhamento, a seção S_2 desloca-se somente na vertical, em relação à seção S_1 , até atingir a posição 1, ou seja, o eixo da viga forma um ângulo $\beta(x) = \gamma_{xy}$ com a horizontal. A seguir, a seção S_1 é submetida a uma rotação adicional $\psi(x)$, associada à flexão pura, e, assim, o elemento passa para a posição 2. A rotação do eixo da viga $\theta(x) = v'$ é, então, resultado da associação de duas contribuições:

$$\theta(x) = v' = \beta(x) + \psi(x) \quad (2.6)$$

É importante observar que a distorção γ_{xy} , medida pelo ângulo $\beta(x)$ na figura 2.2, se mantém constante em todos os pontos ao longo de uma seção transversal de abscissa x .

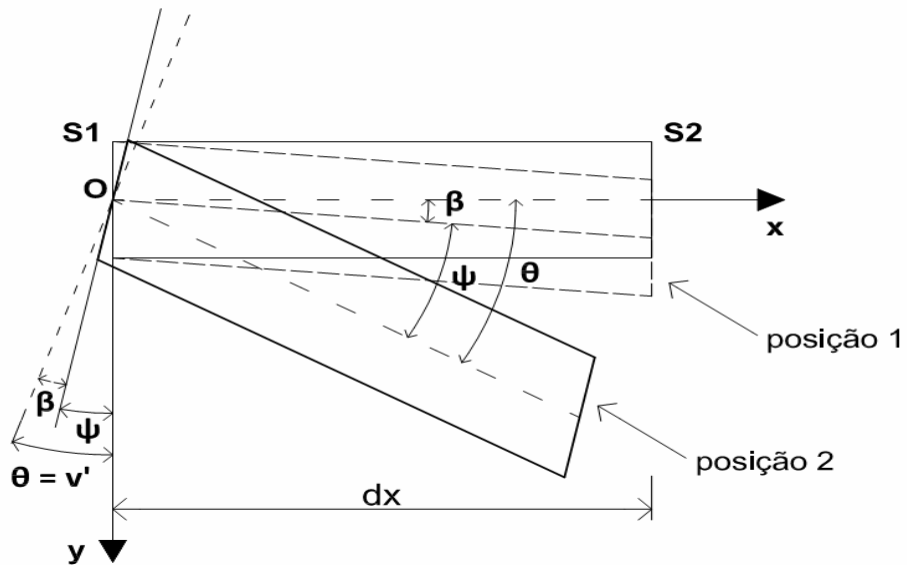


Figura 2.2 – Efeito do cisalhamento associado à flexão pura

2.4 – Relações tensão-deformação

As componentes da deformação, ε_x e γ_{xy} , relacionam-se com as tensões, σ_x e τ_{xy} , respectivamente, por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.7)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (2.8)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e G é o módulo de elasticidade transversal do material da viga.

Em virtude das expressões (2.4), (2.5), (2.7) e (2.8), resulta uma distribuição uniforme das tensões de cisalhamento τ_{xy} ao longo da seção.

Entretanto, as distorções γ_{xy} e, portanto, as tensões τ_{xy} , são variáveis ao longo da seção; porém, para efeito de simplificação, mantém-se γ_{xy} como função apenas da coordenada espacial x e, na expressão (2.8) para as tensões de cisalhamento, introduz-se um fator de correção κ denominado coeficiente de cisalhamento, a fim de compensar a referida variação, ou seja, faz-se $\gamma_{xy} = \kappa\beta(x)$.

Desta maneira, a nova relação para as tensões de cisalhamento será:

$$\tau_{xy}^* = \kappa G\beta \quad (2.9)$$

Com este procedimento, as relações tensão-deformação utilizadas neste estudo serão as fornecidas por (2.7) e (2.9); o fator de correção κ é determinado em função do tipo da seção transversal da viga, ver Borges [3].

Assim, as tensões σ_x e τ_{xy}^* ficam expressas em termos dos deslocamentos correspondentes da seguinte maneira:

$$\sigma_x = -Ey\psi' \quad (2.10)$$

$$\tau_{xy}^* = \kappa G(v' - \psi) \quad (2.11)$$

2.5 – Relações entre os esforços solicitantes e os deslocamentos

Considerando os esforços solicitantes positivos, é possível obter-se, mediante integração ao longo da área A da seção transversal, as expressões do momento fletor M e do esforço cortante Q resultantes da distribuição das tensões normais σ_x e de cisalhamento τ_{xy}^* ao longo da seção em estudo.

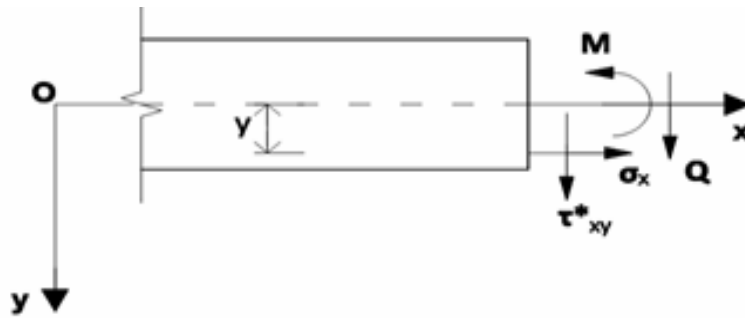


Figura 2.3 – Momento fletor e cortante

Tem-se:

$$M = \iint_A \sigma_x y dA \quad (2.12)$$

$$Q = \iint_A \tau_{xy}^* dA \quad (2.13)$$

Substituindo os valores dados por (2.10) e (2.11) nas integrais (2.12) e (2.13), obtém-se:

$$M = -E\psi' \iint_A y^2 dA \quad (2.14)$$

$$Q = \kappa G(v' - \psi) \iint_A dA \quad (2.15)$$

Finalmente resulta:

$$M = -EI_z \psi' \quad (2.16)$$

$$Q = \kappa GA(v' - \psi) \quad (2.17)$$

2.6 – Equações diferenciais que governam o problema

Tomando, agora, um elemento de uma viga, conforme mostra a figura 2.4, submetido a um carregamento $q(x)$ distribuído por unidade de comprimento, positivo no sentido positivo do eixo y , e também aos esforços solicitantes indicados, que atuam em duas seções vizinhas S_1 e S_2 distantes dx uma da outra, tem-se:

$$-Q + Q + dQ + q(x)dx = 0$$

$$M - M - dM + Qdx = 0$$

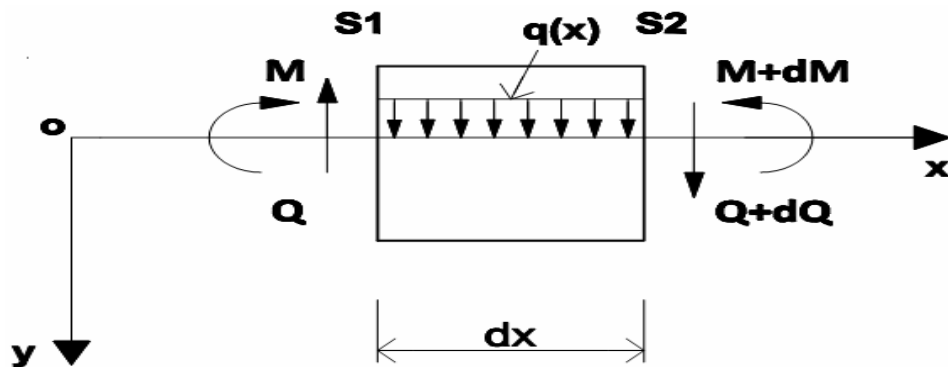


Figura 2.4 – Equilíbrio de forças e de momentos

As equações de equilíbrio de forças e de momentos de uma viga submetida a uma carga distribuída $q(x)$ serão:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (2.18)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q = -EI_z \psi'' \quad (2.19)$$

Substituindo as expressões dadas em (2.16) e (2.17), para o momento fletor e para o esforço cortante, nas equações de equilíbrio (2.18) e (2.19), chega-se a:

$$\kappa GA(v'' - \psi') = -q \quad (2.20)$$

$$-EI_z \psi'' = \kappa GA(v' - \psi) \quad (2.21)$$

Derivando a equação (2.21) em relação à variável independente x e substituindo em (2.20), a expressão resultante depende apenas de $\psi(x)$:

$$EI_z \psi''' = q \quad (2.22)$$

De (2.21), ainda se pode escrever:

$$EI_z \psi'' - \kappa GA \psi + \kappa GA v' = 0 \quad (2.23)$$

As equações diferenciais (2.22) e (2.23) constituem as chamadas equações governantes do problema estático para o caso de aplicação de uma carga uniformemente distribuída. Quando existe uma carga concentrada P , aplicada em um ponto situado a uma distância a da extremidade esquerda da viga, são consideradas as equações diferenciais (2.17) e (2.19).

2.7 – Equações governantes para carga dinâmica

Para análise da influência do tempo no estudo da flexão em uma viga de Timoshenko, as componentes do deslocamento de um ponto genérico vão depender também desse novo parâmetro:

$$v_x(x, y, z, t) = -y\psi(x, t) \quad (2.24)$$

$$v_y(x, y, z, t) = 0 \quad (2.25)$$

$$v_z(x, y, z, t) = v(x, t) \quad (2.26)$$

As equações governantes dos deslocamentos dos pontos de uma viga, supondo uma carga q , são escritas, de acordo com Shames & Dym [24]:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \dot{v}) + \frac{\partial}{\partial x}[\kappa GA(v' - \psi)] + q(x, t) = 0 \quad (2.27)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho I_z \dot{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x}(EI_z \psi') + \kappa GA(v' - \psi) = 0 \quad (2.28)$$

onde as notações v' e ψ' designam as derivadas espaciais das variáveis v e ψ , respectivamente, e \dot{v} e $\dot{\psi}$ designam as derivadas temporais das mesmas variáveis.

Quando se tem valores constantes para ρ, E, I_z, G e A , as equações diferenciais se escrevem:

$$\rho A \ddot{v} - \kappa GA (v'' - \psi') - q(x, t) = 0 \quad (2.29)$$

$$\rho I_z \ddot{\psi} - EI_z \psi'' - \kappa GA (v' - \psi) = 0 \quad (2.30)$$

As condições de contorno essenciais para este caso são:

Deslocamento vertical: $v = \bar{v}$

Rotação associada à flexão: $\psi = \bar{\psi}$

As condições de contorno naturais são:

Momento fletor: $\bar{M} = -EI_z \frac{d\psi}{dx}$

Esforço cortante: $\bar{Q} = \kappa GA \left(\frac{dv}{dx} - \psi \right)$

Neste trabalho serão analisados problemas com condições iniciais nulas.

2.8 – Viga simplesmente apoiada - solução analítica

O sistema de equações diferenciais formado pelas equações (2.29) e (2.30) possui solução analítica para o caso de uma viga simplesmente apoiada. No que segue, será apresentada a dedução dessa solução, cujo desenvolvimento deve-se ao professor Luiz Fernando Taborda Garcia, autor de vários livros textos, entre os quais pode ser citado o trabalho indicado na referência [29].

Supondo atendidas condições de contorno homogêneas nos extremos, tem-se, em $x=0$ e em $x=L$:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} v(0, t) = 0 \\ M(0, t) = -EI_z \psi'(0, t) = 0 \Rightarrow \psi'(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$x=L \Rightarrow \begin{cases} v(L, t) = 0 \\ M(L, t) = -EI_z \psi'(L, t) = 0 \Rightarrow \psi'(L, t) = 0 \end{cases}$$

Adotando o método padrão de separação das variáveis para resolver a equação diferencial referente a uma viga simplesmente apoiada, as séries abaixo são admitidas como soluções analíticas das equações (2.29) e (2.30), tendo em vista que v é simétrico e ψ é antissimétrica em relação à abscissa

$x = L/2$:

$$v(x,t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} V_m(t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (2.31)$$

$$\psi(x,t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} Q_m(t) \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (2.32)$$

A expressão geral para a variável dependente do tempo, $V_m(t)$, é fornecida por:

$$V_m(t) = \left\{ \rho I \ddot{Q}_m(t) + \left[EI \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \kappa GA \right] Q_m(t) \right\} \frac{1}{\kappa GA \left(\frac{m\pi}{L}\right)} \quad (2.33)$$

A expressão para a variável $Q_m(t)$ depende do tipo de carregamento, enquanto que $\ddot{Q}_m(t)$ é calculada a partir da expressão de $Q_m(t)$.

Para os quatro tipos de carregamento considerados neste trabalho os resultados são apresentados a seguir:

a) No caso de uma carga uniformemente distribuída, atuando de forma continua no tempo, $q(x,t) = q$, obtém-se:

$$Q_m(t) = \frac{4qL^3}{EI_z (m\pi)^4 (\delta_m^2 - \theta_m^2)} \left[\theta_m^2 \operatorname{cos}(\delta_m t) - \delta_m^2 \operatorname{cos}(\theta_m t) + (\delta_m^2 - \theta_m^2) \right] \quad (2.34)$$

As frequências naturais θ_m e δ_m que aparecem em (2.34) são dadas por:

$$\theta_m = \sqrt{\alpha_m - \beta_m} \quad (2.35)$$

$$\delta_m = \sqrt{\alpha_m + \beta_m} \quad (2.36)$$

onde:

$$\alpha_m = \frac{\rho A + \rho I_z \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{2 \left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \quad (2.37)$$

$$\beta_m = \frac{\sqrt{(\rho A)^2 + 2(\rho A)(\rho I_z) \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + (\rho I_z)^2 \left(1 - \frac{E}{\kappa G}\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4}}{2 \left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \quad (2.38)$$

A menor frequência, θ_m , dada pela equação (2.35), corresponde ao modo de deformação associado à flexão pura, e a maior, δ_m , dada pela equação (2.36), corresponde ao modo de deformação associado ao cisalhamento, Rao [22].

b) No caso de uma carga concentrada de intensidade P , que atua na posição $x = x_0$ durante todo o tempo da análise, isto é, para a carga $q(x, t) = P\delta(x - x_0)$, tem-se:

$$Q_m(t) = \frac{2PL^3}{EI_z (m\pi)^3 (\delta_m^2 - \theta_m^2)} \left[\theta_m^2 \cos(\delta_m t) - \delta_m^2 \cos(\theta_m t) + (\delta_m^2 - \theta_m^2) \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right) \quad (2.39)$$

c) No caso de uma carga concentrada com frequência ω , (carga harmônica), aplicada na posição $x = x_0$, isto é, para a carga definida por $q(x, t) = P\delta(x - x_0)\text{sen}(\omega t)$, tem-se:

$$Q_m(t) = \frac{2P}{L^2} \frac{m\pi}{\left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \left[\omega \left(\frac{\text{sen}(\theta_m t)}{\theta_m} - \frac{\text{sen}(\delta_m t)}{\delta_m} \right) + \text{sen}(\omega t) \right] \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right)}{(\omega^2 - \theta_m^2)(\omega^2 - \delta_m^2)} \quad (2.40)$$

Se $\omega = \theta_m$ ou $\omega = \delta_m$, ocorre ressonância. Quando $\omega \rightarrow \delta_m$, surge a seguinte expressão:

$$Q_m(t) = \frac{2P}{L^2} \frac{m\pi}{\left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \left[\frac{\delta_m}{(\delta_m^2 - \theta_m^2)} \frac{\text{sen}(\theta_m t)}{\theta_m} + \frac{\delta_m t \cos(\delta_m t) - \text{sen}(\delta_m t)}{2\delta_m^2} \right] \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right)}{(\delta_m^2 - \theta_m^2)} \quad (2.41)$$

Para a situação em que $\omega \rightarrow \theta_m$, a expressão resultante é:

$$Q_m(t) = \frac{2P}{L^2} \frac{m\pi}{\left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \left[\frac{\theta_m}{(\delta_m^2 - \theta_m^2)} \frac{\text{sen}(\delta_m t)}{\delta_m} + \frac{\text{sen}(\theta_m t) - \theta_m t \cos(\theta_m t)}{2\theta_m^2} \right] \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right)}{(\delta_m^2 - \theta_m^2)} \quad (2.42)$$

d) Para o caso de uma carga impulsiva aplicada na posição $x = x_0$, em $t = 0$, isto é, para a carga definida por $q(x, t) = P\delta(x - x_0)\delta(t - 0)$, tem-se:

$$Q_m(t) = \frac{2P}{L^2} \frac{m\pi}{\left(\frac{\rho^2 I_z}{\kappa G}\right)} \left[\frac{\text{sen}(\theta_m t)}{\theta_m} + \frac{\text{sen}(\delta_m t)}{\delta_m} \right] \frac{\text{sen}\left(\frac{m\pi x_0}{L}\right)}{(\delta_m^2 - \theta_m^2)} \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Método dos Elementos de Contorno

O problema em estudo é essencialmente unidimensional: o domínio é representado pelo segmento $[0, L]$, em que L é o comprimento da viga, o contorno é constituído pelos nós em $x=0$ e $x=L$, e as integrais de domínio requerem discretização do domínio.

Adota-se a designação MEC-D para as formulações caracterizadas pelo uso de soluções fundamentais estáticas, em lugar daquelas dependentes do tempo, com a presença nas equações integrais de uma integral de domínio cujo integrando é o produto da solução fundamental pela derivada temporal de segunda ordem da variável básica. Em consequência, a solução de problemas dependentes do tempo requer que se efetue uma aproximação da derivada temporal de segunda ordem; com este propósito, o método de Houbolt [13] é empregado com sucesso.

3.1 – Formulação MEC-D

Para a análise de uma viga de Timoshenko submetida a uma carga dinâmica, mediante a utilização do Método dos Elementos de Contorno, apresenta-se na sequência uma formulação MEC-D. As equações diferenciais (2.29) e (2.30) que governam o problema, vistas no capítulo anterior, são tratadas de modo separado e, para cada uma delas, adota-se uma solução fundamental específica e escreve-se uma equação integral correspondente; a primeira tem

como variável principal o deslocamento transversal, v , e a segunda, a rotação, ψ , da seção transversal devida à flexão.

Nestas condições, aplica-se uma sentença de resíduos ponderados na equação (2.29), na qual a função de ponderação $v^*(\xi, x)$ é a solução fundamental que satisfaz a equação (3.1) abaixo, onde x o ponto campo e ξ o ponto fonte:

$$\frac{\partial^2 v^*(\xi, x)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \quad (3.1)$$

em que $\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac.

Obtém-se então a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} v(\xi, t) = & \left[\frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) \right]_{x=0} - \\ & \left[v^*(\xi, x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right]_{x=L} + \left[v^*(\xi, x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} - \\ & \frac{1}{\kappa GA} \int_0^L v^*(\xi, x) q(x, t) dx + \frac{\rho}{\kappa G} \int_0^L v^*(\xi, x) \ddot{v}(x, t) dx - \\ & \int_0^L v^*(\xi, x) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

A equação (3.2), como está escrita, ainda não é apropriada para o desenvolvimento de uma formulação do MEC: as derivadas do deslocamento vertical com relação à variável x , que aparecem no terceiro e no quarto termos do segundo membro da equação, contribuem no cálculo do esforço cortante, mas isoladas não desempenham um papel importante nas equações governantes. Assim, são necessárias transformações adicionais de forma a se reescrever essa equação de maneira mais adequada.

A integração por partes da terceira integral de domínio proporciona os arranjos necessários para este propósito. Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L v^*(\xi, x) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx = & \left[v^*(\xi, x) \psi(x, t) \right]_{x=L} - \\ & \left[v^*(\xi, x) \psi(x, t) \right]_{x=0} - \int_0^L \frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.2), esta última reescreve-se como:

$$\begin{aligned}
v(\xi, t) = & \left[\frac{dv^*(\xi, x)}{dx} v(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{dv^*(\xi, x)}{dx} v(x, t) \right]_{x=0} - \\
& \left[v^*(\xi, x) \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right) \right]_{x=L} + \left[v^*(\xi, x) \left(\frac{dv(x, t)}{dx} - \psi(x, t) \right) \right]_{x=0} - \\
& \frac{1}{\kappa GA} \int_0^L v^*(\xi, x) q(x, t) dx + \frac{\rho}{\kappa G} \int_0^L v^*(\xi, x) \ddot{v}(x, t) dx - \\
& \int_0^L \frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) dx
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tendo em vista a expressão para o esforço cortante, $Q(x, t) = \kappa GA(v' - \psi)$, pode-se escrever finalmente:

$$\begin{aligned}
v(\xi, t) = & \left[\frac{dv^*(\xi, x)}{dx} v(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{dv^*(\xi, x)}{dx} v(x, t) \right]_{x=0} - \\
& \left[v^*(\xi, x) \frac{Q(x, t)}{\kappa GA} \right]_{x=L} + \left[v^*(\xi, x) \frac{Q(x, t)}{\kappa GA} \right]_{x=0} - \\
& \frac{1}{\kappa GA} \int_0^L v^*(\xi, x) q(x, t) dx + \frac{\rho}{\kappa G} \int_0^L v^*(\xi, x) \ddot{v}(x, t) dx - \\
& \int_0^L \frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) dx
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde a solução fundamental tem o seguinte valor:

$$v^*(\xi, x) = \frac{|x - \xi|}{2} \tag{3.6}$$

Pode-se observar que, depois de seguido o procedimento padrão do MEC, a equação integral associada à primeira equação diferencial exibe três integrais de domínio; uma relacionada com a carga, outra que contém a derivada temporal de segunda ordem do deslocamento transversal, típica das formulações MEC-D, e uma terceira, que contém a rotação ψ . Esta última integral de domínio se deve à ligação existente entre as duas equações diferenciais.

Por outro lado, para a segunda equação governante, pode-se reescrevê-la como segue:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \beta \psi(x, t) + \beta \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho}{E} \ddot{\psi}(x, t) \tag{3.7}$$

onde se fez:

$$\beta = \frac{\kappa GA}{EI_z} \quad (3.8)$$

É oportuna a observação de que este valor não deve ser confundido com o parâmetro $\beta_{\Delta t}$ utilizado no estudo da equação da onda e relacionado com o intervalo de tempo Δt .

A solução fundamental para este caso deve atender à equação:

$$\frac{\partial^2 \psi^*(\xi, x)}{\partial x^2} - \beta \psi^*(\xi, x) = \delta(x - \xi) \quad (3.9)$$

onde $\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac, e tem o seguinte valor:

$$\psi^*(\xi, x) = \frac{\sinh \sqrt{\beta} |x - \xi|}{2\sqrt{\beta}} \quad (3.10)$$

Depois de aplicada uma sentença de resíduos ponderados à equação (3.7) e, em vista da equação (3.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} \psi(\xi, t) = & \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=0} - \\ & \left[\psi^*(\xi, x) \frac{d\psi(x, t)}{dx} \right]_{x=L} + \left[\psi^*(\xi, x) \frac{d\psi(x, t)}{dx} \right]_{x=0} + \\ & \frac{\rho}{E} \int_0^L \psi^*(\xi, x) \ddot{\psi}(x, t) dx - \beta \int_0^L \psi^*(\xi, x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

Seguindo raciocínio semelhante ao que permitiu escrever a equação (3.2) em uma forma conveniente, a segunda integral de domínio na equação (3.11) é integrada por partes. A expressão resultante é dada abaixo:

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi^*(\xi, x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx = & \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=L} - \\ & \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=0} - \int_0^L \frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.11) vem:

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, t) = & \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=0} - \\
& \left[\psi^*(\xi, x) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]_{x=L} + \left[\psi^*(\xi, x) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} - \\
& \beta \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=L} + \beta \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=0} + \\
& \beta \int_0^L \frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) dx
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Depois de considerar a expressão para o momento fletor, $M(x, t) = -EI_z \psi'$, a equação integral final é escrita abaixo:

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, t) = & \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=L} - \left[\frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) \right]_{x=0} + \\
& \left[\psi^*(\xi, x) \frac{M(x, t)}{EI_z} \right]_{x=L} - \left[\psi^*(\xi, x) \frac{M(x, t)}{EI_z} \right]_{x=0} - \\
& \beta \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=L} + \beta \left[\psi^*(\xi, x) v(x, t) \right]_{x=0} + \\
& + \frac{\rho}{E} \int_0^L \psi^*(\xi, x) \ddot{\psi}(x, t) dx + \beta \int_0^L \frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) dx
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A equação integral associada à segunda equação diferencial apresenta uma integral de domínio que contém a derivada temporal de segunda ordem da rotação e outra que contém o deslocamento transversal v . A explicação é a mesma dada anteriormente: a primeira integral de domínio é relacionada com a formulação MEC-D e a segunda à equação diferencial acoplada que descreve o problema. É importante apontar que, mesmo no desenvolvimento eventual de uma formulação MEC-DT, estarão presentes integrais de domínio envolvendo as variáveis acopladas, junto com a integral relacionada com a carga.

A consequência imediata da presença das integrais de domínio nas equações (3.5) e (3.14) é que o sistema final de equações também contém como incógnitas as variáveis nos pontos internos. Na forma matricial, o sistema de equações resultante pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{H}^{cc} & \mathbf{P}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{P}^{cd} \\
(\bar{\mathbf{N}}^{cc} - \bar{\mathbf{P}}^{cc}) & \bar{\mathbf{H}}^{cc} & -\bar{\mathbf{P}}^{cd} & \mathbf{0} \\
-\mathbf{H}^{dc} & \mathbf{P}^{dc} & \mathbf{I} & \mathbf{P}^{dd} \\
(\bar{\mathbf{N}}^{dc} - \bar{\mathbf{P}}^{dc}) & -\bar{\mathbf{H}}^{dc} & -\bar{\mathbf{P}}^{dd} & \mathbf{I}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\mathbf{v}^c \\
\boldsymbol{\Psi}^c \\
\mathbf{v}^d \\
\boldsymbol{\Psi}^d
\end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\mathbf{G}^{cc} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \bar{\mathbf{G}}^{cc} \\
\mathbf{G}^{dc} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \bar{\mathbf{G}}^{dc}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\mathbf{Q}^c \\
\mathbf{M}^c
\end{Bmatrix} +
\begin{Bmatrix}
\mathbf{f}^c \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{f}^d \\
\mathbf{0}
\end{Bmatrix} +
\begin{bmatrix}
\mathbf{M}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{cd} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^{cc} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^{cd} \\
\mathbf{M}^{dc} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{dd} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^{dc} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{M}}^{dd}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\ddot{\mathbf{v}}^c \\
\ddot{\boldsymbol{\Psi}}^c \\
\ddot{\mathbf{v}}^d \\
\ddot{\boldsymbol{\Psi}}^d
\end{Bmatrix}
\quad (3.15)$$

Na equação (3.15), o sobrescrito c significa contorno, d significa domínio (pontos internos), e o sobrescrito duplo se interpreta como segue: o primeiro dá a posição do ponto fonte e o segundo, a posição do ponto campo.

Ainda tem-se o vetor \mathbf{f} , relacionado com a carga externa, e a matriz identidade \mathbf{I} .

As submatrizes não relacionadas com as integrais de domínio são definidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}^{cc} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{cc} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\cosh(\sqrt{\beta}L)}{2} \\ \frac{-\cosh(\sqrt{\beta}L)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\bar{\mathbf{N}}^{cc} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\beta} \operatorname{senh}(\sqrt{\beta}L)}{2} \\ \frac{\sqrt{\beta} \operatorname{senh}(\sqrt{\beta}L)}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-L}{2\kappa GA} \\ \frac{L}{2\kappa GA} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{G}}^c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sinh(\sqrt{\beta}L)}{2\sqrt{\beta EI_z}} \\ \frac{-\sinh(\sqrt{\beta}L)}{2\sqrt{\beta EI_z}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Com a adoção de N pontos internos, as seguintes submatrizes estão associadas para um ponto interno genérico ξ_k , $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\mathbf{H}^{dc} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^{dc} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\sqrt{\beta}\xi_k)}{2} & \frac{\cosh[\sqrt{\beta}(L-\xi_k)]}{2} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{N}}^{dc} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{\beta}\sinh(\sqrt{\beta}\xi_k)}{2} & \frac{\sqrt{\beta}\sinh[\sqrt{\beta}(L-\xi_k)]}{2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{G}^{dc} = \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{2\kappa GA} & \frac{-(L-\xi_k)}{2\kappa GA} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{G}}^{dc} = \begin{bmatrix} \frac{-\sinh(\sqrt{\beta}\xi_k)}{2\sqrt{\beta EI_z}} & \frac{\sinh[\sqrt{\beta}(L-\xi_k)]}{2\sqrt{\beta EI_z}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Para a discretização do domínio foram empregadas tanto células lineares como células quadráticas. As expressões correspondentes, resultantes da integração, estão apresentadas nos apêndices A.11 e A.12, respectivamente.

Para uma carga uniformemente distribuída, as componentes do vetor de carregamento são dadas por:

$$\mathbf{f}^c = -\frac{qL^2}{4\kappa GA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

e

$$\mathbf{f}^d = -\frac{qL^2}{4\kappa GA} \begin{Bmatrix} \xi_1^2 + (L - \xi_1)^2 \\ \xi_2^2 + (L - \xi_2)^2 \\ \dots \\ \dots \\ \xi_N^2 + (L - \xi_N)^2 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Para uma carga concentrada definida por $q(x,t) = P\delta(x - x_0)$, as componentes do vetor de carregamento são:

$$\mathbf{f}^c = -\frac{P}{2\kappa GA} \begin{Bmatrix} x_0 \\ L - x_0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

e

$$\mathbf{f}^d = -\frac{P}{2\kappa GA} \begin{Bmatrix} |\xi_1 - x_0| \\ |\xi_2 - x_0| \\ \dots \\ \dots \\ |\xi_N - x_0| \end{Bmatrix} \quad ((3.29)$$

Para uma carga harmônica definida por $q(x,t) = P\delta(x - x_0)\text{sen}(\omega t)$, as componentes do vetor de carregamento são:

$$\mathbf{f}^c = -\frac{P}{2\kappa GA} \begin{Bmatrix} x_0 \\ L - x_0 \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \quad (3.30)$$

e

$$\mathbf{f}^d = -\frac{P}{2\kappa GA} \begin{Bmatrix} |\xi_1 - x_0| \\ |\xi_2 - x_0| \\ \dots \\ \dots \\ |\xi_N - x_0| \end{Bmatrix} \text{sen}(\omega t) \quad (3.31)$$

Para uma carga impulsiva definida por $q(x,t) = P\delta(x - x_0)\delta(t - 0)$, as componentes do vetor de carregamento são:

$$\mathbf{f}^c = -\frac{P}{2\kappa GA} \begin{Bmatrix} x_0 \\ L - x_0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \quad (3.32)$$

e

$$\mathbf{f}^d = -\frac{P}{2\kappa GA} \left\{ \begin{array}{c} |\xi_1 - x_0| \\ |\xi_2 - x_0| \\ \dots \\ \dots \\ |\xi_N - x_0| \end{array} \right\} \frac{1}{\Delta t} \quad (3.33)$$

3.2 - Método de Houbolt

O método de Houbolt [13] foi adotado para efetuar-se a aproximação das derivadas de segunda ordem em relação ao tempo de $v = v(x, t)$ na equação (3.5) e de $\psi = \psi(x, t)$ na equação (3.14).

Obtém-se a expressão do método de Houbolt, apêndice A.13, a partir da interpolação cúbica de Lagrange de $v = v(x, t)$ e de $\psi = \psi(x, t)$, desde o tempo $t_{n-2} = (n-2)\Delta t$ ao tempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo. A derivação exata em relação ao tempo dá a seguinte aproximação, escrita em notação simplificada, para a derivada temporal de segunda ordem:

$$\ddot{v}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2v_{n+1} - 5v_n + 4v_{n-1} - v_{n-2}] \quad (3.34)$$

onde, por exemplo, $v_{n+1} = v(x, t_{n+1})$.

Para a resolução do problema em estudo, a equação (3.15) foi escrita para o tempo $t = t_{n+1}$ e as derivadas temporais de segunda ordem de v e ψ foram substituídas por suas aproximações correspondentes, dadas pelo método de Houbolt; a partir daí, tem início o processo de marcha no tempo.

Problemas com condições iniciais não nulas apresentam, no início da análise, isto é, para $n=0$, os valores fictícios v_{-1} , v_{-2} , ψ_{-1} e ψ_{-2} . Suas contribuições não podem ser esquecidas e o seguinte procedimento apresentado por Carrer *et al* [7] pode ser seguido para superar essa dificuldade:

Empregam-se as fórmulas para a diferença finita progressiva e para a diferença finita regressiva em $t=0$, e assume-se que as duas expressões sejam iguais, isto é:

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{v_0 - v_{-1}}{\Delta t} \quad (3.35)$$

donde:

$$v_1 = 2v_0 - v_{-1} \quad (3.36)$$

Emprega-se a fórmula da diferença finita central:

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.37)$$

donde:

$$v_1 = 2\Delta t \dot{v}_0 + v_{-1} \quad (3.38)$$

Finalmente obtém-se:

$$v_{-1} = v_0 - \Delta t \dot{v}_0 \quad (3.39)$$

Para a determinação de \ddot{v}_{-2} , pode ser seguido um procedimento semelhante: calcula-se inicialmente \dot{v}_{-1} empregando as fórmulas das diferenças progressivas e regressivas em $t = -\Delta t$ e assume-se que os dois valores sejam iguais:

$$\dot{v}_{-1} = \frac{v_0 - v_{-1}}{\Delta t} = \frac{v_{-1} - v_{-2}}{\Delta t} \quad (3.40)$$

donde:

$$v_{-2} = 2v_{-1} - v_0 \quad (3.41)$$

Finalmente:

$$v_{-2} = v_0 - 2\Delta t \dot{v}_0 \quad (3.42)$$

De igual maneira, obtêm-se os seguintes valores para ψ :

$$\psi_{-1} = \psi_0 - \Delta t \dot{\psi}_0 \quad (3.43)$$

$$\psi_{-2} = \psi_0 - 2\Delta t \dot{\psi}_0 \quad (3.44)$$

Capítulo 4

Exemplos Numéricos

A seguir são apresentados exemplos numéricos relativos aos deslocamentos de uma viga de Timoshenko submetida a alguns tipos de carregamento, estáticos e dinâmicos.

Em todos os exemplos numéricos foram consideradas vigas com seção transversal retangular constante, de coeficiente de cisalhamento $\kappa=5/6$, ver Borges [3]; adotou-se uma seção $0,20m \times 0,60m$, portanto com área da seção, $A=0,12 m^2$ e momento de inércia da área da seção em relação ao eixo z , $I_z = 0,0036 m^4$; densidade, $\rho = 2.500 kg / m^3$, módulo de elasticidade longitudinal do material, $E = 50 GPa$ e coeficiente de Poisson, $\nu = 0,2$.

Considerou-se uma viga de comprimento $L = 4 m$ para os três primeiros casos de apoio e $L = 2 m$ para a viga engastada em um extremo e livre no outro.

4.1 – Carga estática

Para o MEC, tanto na suposição de uma carga uniformemente distribuída como para carga concentrada, foram utilizadas 64 células lineares. Foi efetuada a comparação com a solução analítica deduzida no início de cada caso.

4.1.1 – Viga simplesmente apoiada

4.1.1.1 – Carga uniformemente distribuída

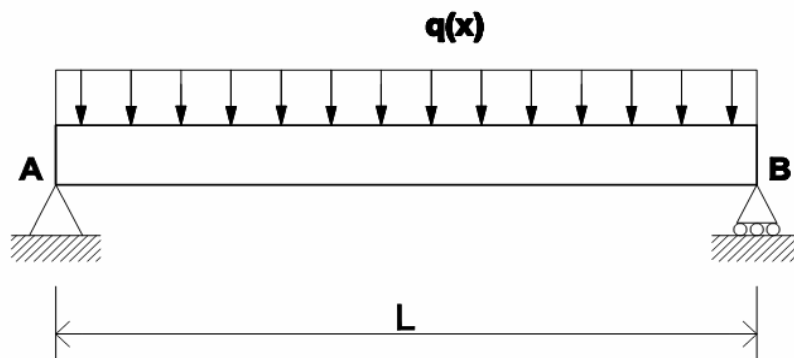


Figura 4.1.1.1 – Viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída

As equações diferenciais abaixo regem os deslocamentos de uma viga de Timoshenko, submetida a um carregamento q qualquer:

$$EI_z \psi''' = q$$

$$EI_z \psi'' - \kappa GA \psi + \kappa GA v' = 0$$

Trata-se de uma viga simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído. As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

Integra-se sucessivamente a primeira equação diferencial:

$$EI_z \psi'' = qx + C_1$$

$$EI_z \psi' = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \psi = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Considerando a segunda e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \quad \text{e} \quad C_2 = 0$$

Chega-se à seguinte expressão para a rotação da seção:

$$EI_z \psi = \frac{q}{6} x^3 - \frac{qL}{4} x^2 + C_3$$

Na segunda equação diferencial se tem:

$$\kappa GA v' = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{6} x^3 - \frac{qL}{4} x^2 + C_3 \right) - qx + \frac{qL}{2}$$

Depois da integração, fornece:

$$\kappa GA v = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{24} x^4 - \frac{qL}{12} x^3 + C_3 x \right) - \frac{q}{2} x^2 + \frac{qL}{2} x + C_4$$

Introduz-se a primeira e a terceira condições de contorno e obtém-se:

$$C_3 = -\frac{qL^3}{24} \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Substituindo estes valores na equação, resulta a expressão:

$$v = \frac{q}{24EI_z} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 + Lx)$$

que fornece o valor do deslocamento em cada ponto do eixo da viga; a primeira parcela do segundo membro desta equação corresponde à contribuição da teoria clássica de Euler-Bernoulli, enquanto a segunda parcela é a contribuição do cortante.

Para uma carga $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, tem-se o gráfico 4.1.1.1 mostrado a seguir. É possível observar-se que os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica são praticamente iguais.

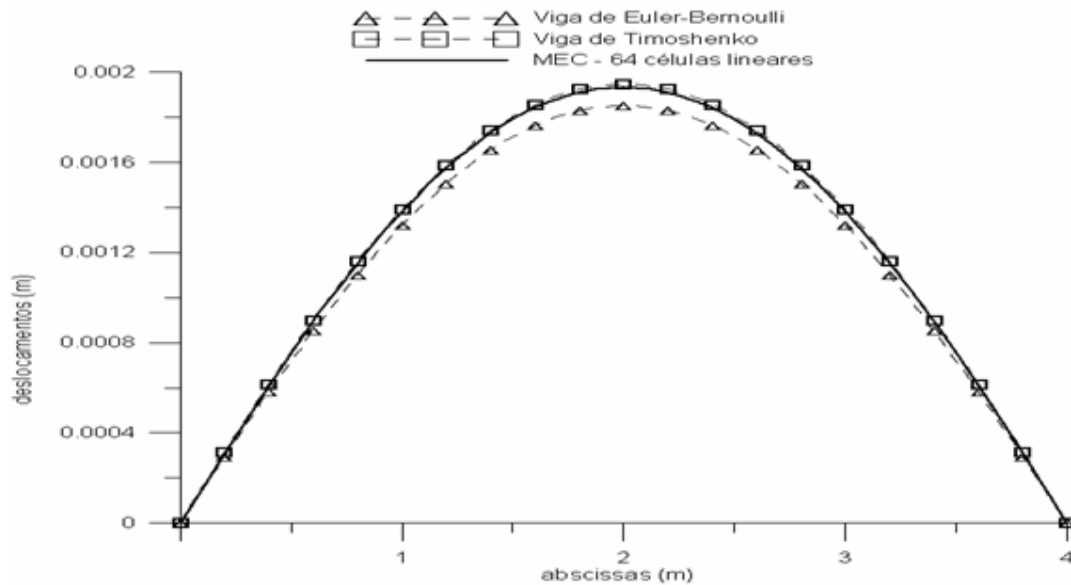


Gráfico 4.1.1.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída

4.1.1.2 – Carga concentrada

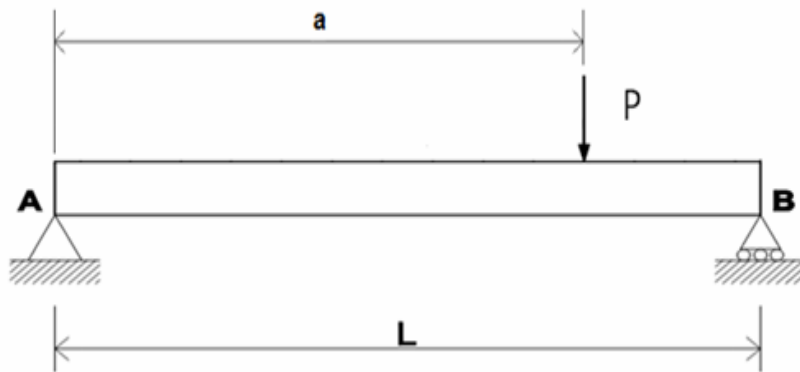


Figura 4.1.1.2– Viga simplesmente apoiada
Carga concentrada em $x = a$

Neste caso a viga está submetida a uma carga P concentrada aplicada a uma distância igual a $x = a$ de seu apoio esquerdo.

As equações governantes dos deslocamentos de uma viga de Timoshenko podem ser assim escritas:

$$EI_z \psi'' = -Q$$

$$Q = \kappa GA(v' - \psi)$$

No trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

Para $x = 0$: $\begin{cases} v_1 = 0 \\ \psi_1' = 0 \end{cases}$; deslocamento e momento nulos

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_1' = -Q_1 x + C_1$$

$$EI_z \psi_1 = -Q_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_1 = 0$.

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_1' = -\frac{Q_1}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_2}{EI_z} + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + C_2 x \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x + C_3$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se $C_3 = 0$:

Substituindo estes valores, resulta:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + C_2 x \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

que fornece o valor do deslocamento em cada ponto do primeiro trecho do eixo da viga.

Tem-se também para a rotação:

$$\psi_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{2} x^2 + C_2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

$$\psi_1' = \frac{-Q_1}{EI_z} x$$

No trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

Para $x = L$: $\begin{cases} v_2 = 0 \\ \psi_2' = 0 \end{cases}$; deslocamento e momento nulos

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_2' = -Q_2 x + C_4$$

$$EI_z \psi_2 = -Q_2 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_4 = Q_2 L$.

Da segunda equação governante obtém-se:

$$v_2' = -\frac{Q_2}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_4}{EI_z} x + \frac{C_5}{EI_z} + \frac{Q_2}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{Q_2}{6} x^3 + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA} x + C_6$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se:

$$\frac{C_5 L}{EI_z} + C_6 = -\frac{Q_2 L^3}{3EI_z} - \frac{Q_2 L}{\kappa GA}$$

Então:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{Q_2}{6} x^3 + \frac{Q_2 L}{2} x^2 + C_5 x \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA} x + C_6$$

que fornece o valor do deslocamento em cada ponto do segundo trecho do eixo da viga.

Tem-se também:

$$\psi_2 = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{Q_2}{2} x^2 + Q_2 L x + C_5 \right)$$

$$\psi_2' = \frac{Q_2}{EI_z} (-x + L)$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $\psi_1'(a) = \psi_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a}{EI_z} = \frac{-Q_2 a}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z}; \quad (Q_2 - Q_1) a = Q_2 L; \quad -Pa = Q_2 L$$

donde:

$$Q_2 = \frac{-Pa}{L}; \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{P(L-a)}{L}$$

b) As rotações são iguais: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a^2}{EI_z} + \frac{C_2}{EI_z} = \frac{-Q_2 a^2}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z} a + \frac{C_5}{EI_z}$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{2} a^2 - Q_2 L a = C_5 - C_2$$

$$C_5 - C_2 = \frac{Pa^2}{2}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a^3}{EI_z} + \frac{C_2}{EI_z} a + \frac{Q_1}{\kappa GA} a = \frac{-Q_2 a^3}{EI_z} + \frac{Q_2 L a^2}{EI_z} + \frac{C_5}{EI_z} a + \frac{Q_2}{\kappa GA} a + C_6$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{6} a^3 - \frac{Q_2 L}{2EI_z} a^2 + \frac{(Q_1 - Q_2)}{\kappa GA} a = \frac{C_5 - C_2}{EI_z} a + C_6$$

$$C_6 = \frac{Pa}{\kappa GA} - \frac{Pa^3}{6EI_z}$$

Obtém-se ainda:

$$C_5 = \frac{Pa(2L^2 + a^2)}{6L}$$

$$C_2 = \frac{Pa(2L^2 + a^2 - 3La)}{6L}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{P}{6EI_z} \left[-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x \right] + \frac{P(L-a)}{\kappa GA} x$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{Pa}{6LEI_z} \left[x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2 \right] + \frac{Pa(L-x)}{\kappa GAL} x$$

As primeiras parcelas dos segundos membros destas equações correspondem à contribuição do momento fletor, enquanto as outras parcelas representam a contribuição do cortante no valor dos deslocamentos do eixo da viga.

Para uma carga concentrada $P = 1.000 \text{ kN}$, aplicada no ponto em que $a = 3L/4$, tem-se o gráfico 4.1.1.2. Os resultados obtidos pela utilização do MEC e pela solução analítica se mostraram bastante aproximados.

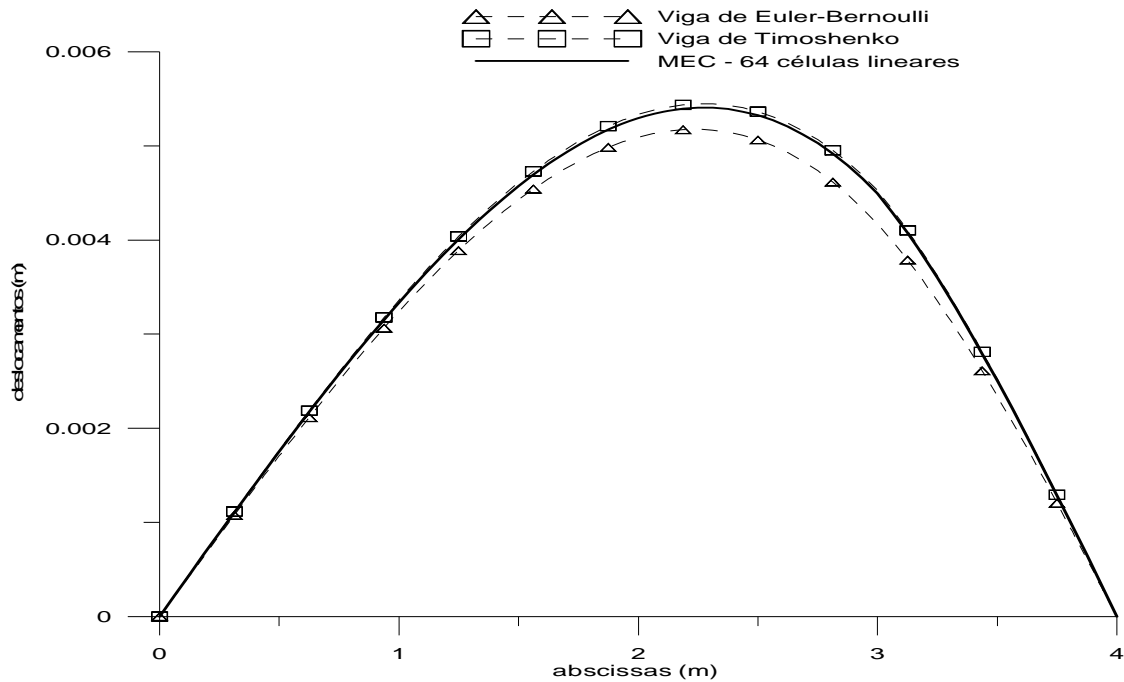


Gráfico 4.1.1.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga simplesmente apoiada
Carga concentrada em $a = 3L/4$

4.1.2 – Viga engastada nos extremos

4.1.2.1 – Carga uniformemente distribuída

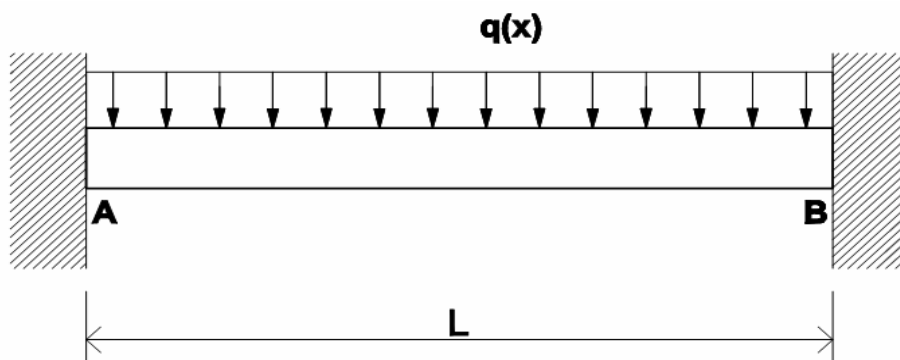


Figura 4.1.2.1 – Viga engastada nos extremos
Carga uniformemente distribuída

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x=0: \begin{cases} v=0 \\ \psi=0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

$$\text{Para } x=L: \begin{cases} v=0 \\ \psi=0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Integra-se sucessivamente a primeira equação diferencial e se tem

$$EI_z \psi'' = qx + C_1$$

$$EI_z \psi' = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \psi = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Considerando a segunda e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_2 = -\frac{qL^2}{6} - C_1 \frac{L}{2} \quad \text{e} \quad C_3 = 0$$

Portanto, a expressão para a rotação da seção será:

$$EI_z \psi = \frac{q}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 - \frac{qL^2}{6} x - C_1 \frac{L}{2} x$$

Levando na segunda equação diferencial, tem-se:

$$\kappa GA v' = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 - \frac{qL^2}{6} x - C_1 \frac{L}{2} x \right) - qx - C_1$$

Depois de integrada, torna-se:

$$\kappa GA v = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{24} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 - \frac{qL^2}{12} x^2 + \frac{C_1 L}{4} x^2 \right) - \frac{q}{2} x^2 - C_1 x + C_4$$

Introduzindo a primeira e a terceira condições de contorno, obtém-se:

$$C_1 = -\frac{qL(\kappa GAL^2 + 12EI_z)}{2\kappa GAL^2 + 24EI_z} = -\frac{qL}{2} \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Finalmente, substituindo esses valores na equação relativa à v , pode-se escrever:

$$v(x) = \frac{q}{24EI_z} (x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2) + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 + Lx)$$

A primeira parcela do segundo membro desta equação corresponde à contribuição do momento fletor, enquanto a segunda parcela é a contribuição do cortante no valor dos deslocamentos da viga.

Para uma carga uniformemente distribuída $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, se tem o gráfico 4.1.2.1. Observa-se que os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica são bastante aproximados.

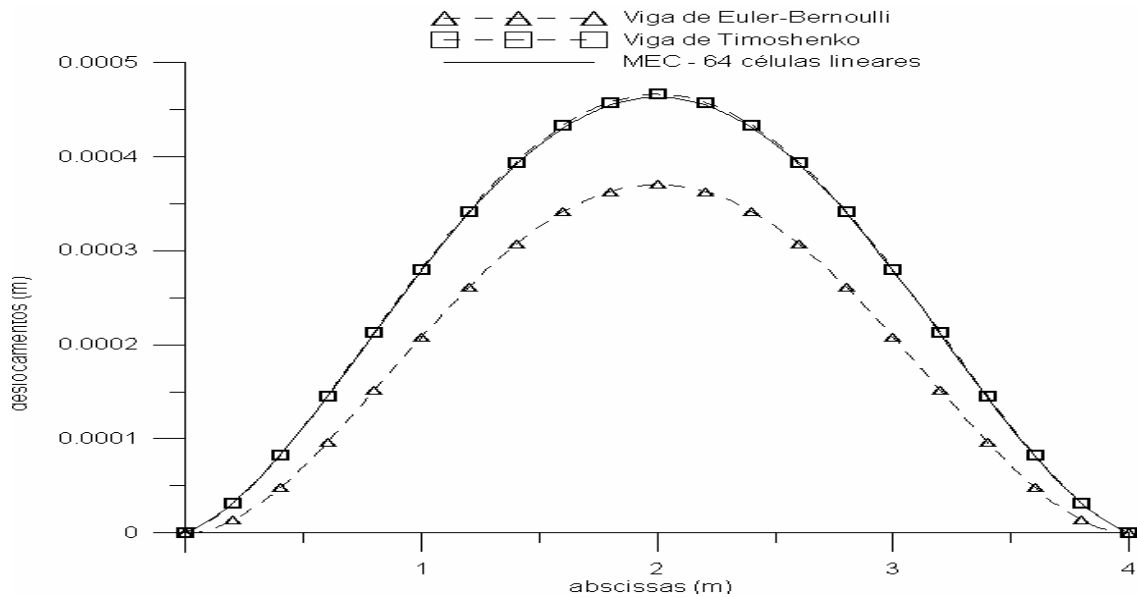


Gráfico 4.1.2.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada nos extremos
Carga uniformemente distribuída

4.1.2.2 – Carga concentrada

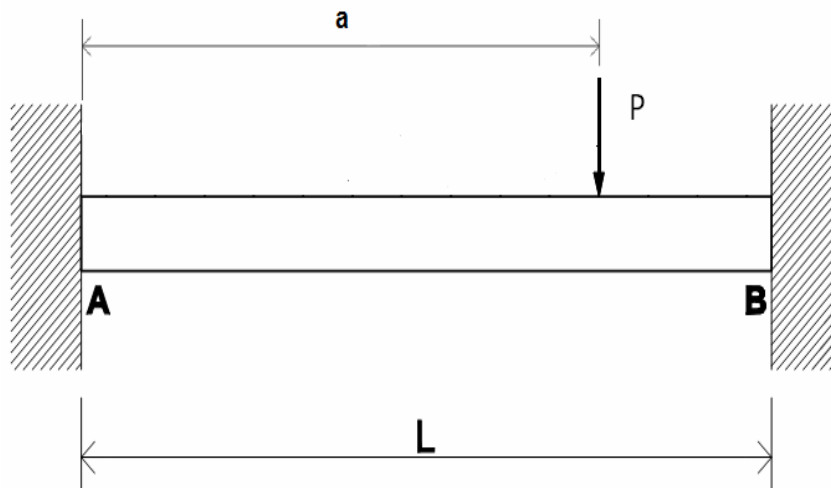


Figura 4.1.2.2 – Viga engastada nos extremos
Carga concentrada em $x = a$

Para o trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_1' = -Q_1 x + C_1$$

$$EI_z \psi_1 = -Q_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_2 = 0$.

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_1' = -\frac{Q_1}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{EI_z} x + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x + C_3$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se $C_3 = 0$:

Substituindo os valores encontrados, resulta:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

que fornece o valor do deslocamento em cada ponto do primeiro trecho do eixo da viga.

Tem-se também:

$$\psi_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{2} x^2 + C_1 x \right)$$

$$\psi_1' = \frac{1}{EI_z} (-Q_1 x + C_1),$$

Para o trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v_2 = 0 \\ \psi_2 = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_2' = -Q_2 x + C_4$$

$$EI_z \psi_2 = -Q_2 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta:

$$C_4L + C_5 = \frac{Q_2L^2}{2}.$$

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_2' = -\frac{Q_2}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_4}{EI_z} x + \frac{C_5}{EI_z} + \frac{Q_2}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{6} x^3 + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA} x + C_6$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se:

$$\frac{C_4L^2}{2EI_z} + \frac{C_5L}{EI_z} + C_6 = \frac{Q_2L^3}{6EI_z} - \frac{Q_2L}{\kappa GA}$$

Então valor do deslocamento em cada ponto do segundo trecho do eixo da viga é:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{6} x^3 + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA} x + C_6$$

Tem-se também:

$$\psi_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{2} x^2 + C_4 x + C_5 \right)$$

$$\psi_2' = \frac{Q_2}{EI_z} (-x + C_4)$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $\psi_1'(a) = \psi_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a}{EI_z} + \frac{C_1}{EI_z} = \frac{-Q_2 a}{EI_z} + \frac{C_4}{EI_z}; \quad (Q_2 - Q_1)a = C_4 - C_1$$

$$C_4 - C_1 = -Pa$$

b) As rotações são iguais: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{C_1 a}{EI_z} = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{C_4}{EI_z} a + \frac{C_5}{EI_z}$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{2EI_z} a^2 = \frac{(C_4 - C_1)}{EI_z} a + \frac{C_5}{EI_z}$$

$$C_5 = \frac{Pa^2}{2}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^3}{6} + \frac{C_1}{EI_z} a^2 + \frac{Q_1}{\kappa GA} a = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^3}{6} + \frac{C_4}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{C_5}{EI_z} a + \frac{Q_2}{\kappa GA} a + C_6$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{6EI_z} a^3 + \frac{(Q_1 - Q_2)}{\kappa GA} a = \frac{C_4 - C_1}{2EI_z} a^2 + \frac{C_5}{EI_z} a + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

$$C_4 = \frac{Q_2 L}{2} - \frac{C_5}{L} = \frac{Q_2 L}{2} - \frac{Pa^2}{2L} = -\frac{Pa}{L} \frac{6EI_z(L+a) + \kappa GALa(2L-a)}{12EI_z + \kappa GAL^2}$$

$$C_1 = C_4 + Pa = \frac{Q_2 L}{2} - \frac{Pa^2}{2L} + Pa = \frac{Pa}{L} \frac{6EI_z(L-a) + \kappa GAL(L-a)^2}{12EI_z + \kappa GAL^2}$$

$$Q_2 = -\frac{Pa}{L} \frac{12EI_z + \kappa GAA(3L-2a)}{12EI_z + \kappa GAL^2}$$

$$Q_1 = Q_2 + P = \frac{P}{L} \frac{12EI_z(L-a) + \kappa GA(L^3 - 3La^2 + 2a^3)}{12EI_z + \kappa GAL^2}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{1}{6EI_z} (-Q_1 x^3 + 3C_1 x^2) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{1}{6EI_z} [-Q_2 x^3 + 3C_4 x^2 + 3Pa^2 x - Pa^3] + \frac{1}{\kappa GA} (Q_2 x + Pa)$$

Para uma carga concentrada $P = 1.000 \text{ kN}$, aplicada no ponto em que $a = 3L/4$, tem-se o gráfico 4.1.2.2. É possível observar-se a

coincidência existente entre os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica.

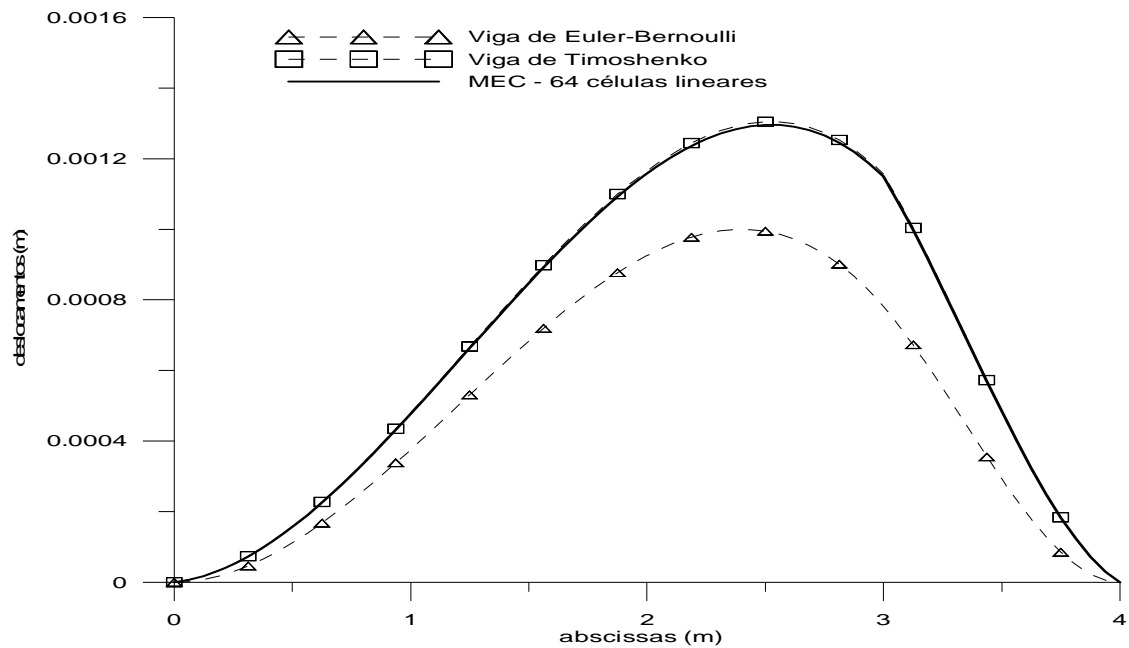


Gráfico 4.1.2.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada nos extremos
Carga concentrada em $a = 3L/4$

4.1.3 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro

4.1.3.1 – Carga uniformemente distribuída

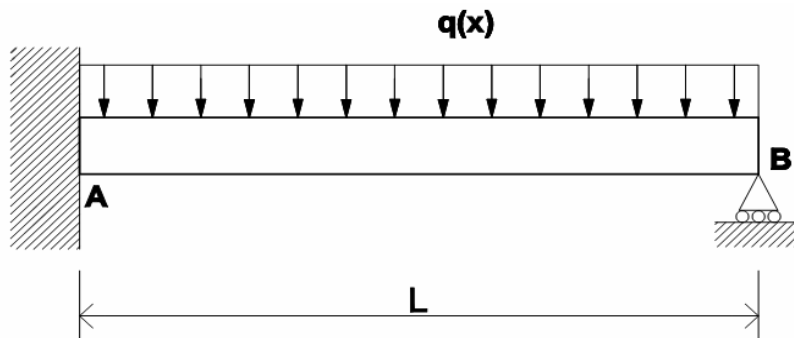


Figura 4.1.3.1 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga uniformemente distribuída

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Para $x = L$: $\begin{cases} v = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases}$; deslocamento e momento nulos

Integrando sucessivamente a primeira equação diferencial, tem-se:

$$EI_z \psi'' = qx + C_1$$

$$EI_z \psi' = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \psi = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Considerando a segunda e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_2 = -\frac{qL^2}{2} - C_1 L \quad \text{e} \quad C_3 = 0$$

E chega-se à seguinte expressão para a rotação da seção:

$$EI_z \psi = \frac{q}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - C_1 L x$$

Levando na segunda equação diferencial, tem-se:

$$\kappa GA v' = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 - \frac{qL^2}{2} x - C_1 L x \right) - qx - C_1$$

Depois de integrada, se torna:

$$\kappa GA v = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{24} x^4 + \frac{C_1}{6} x^3 - \frac{qL^2}{4} x^2 - \frac{C_1 L}{2} x^2 \right) - \frac{q}{2} x^2 - C_1 x + C_4$$

Introduzindo a primeira e a terceira condições de contorno, obtém-se:

$$C_1 = -\frac{qL(5\kappa GAL^2 + 12EI_z)}{8(\kappa GAL^2 + 3EI_z)} \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

e a equação se escreve:

$$v = \frac{x^2}{24EI_z} (qx^2 - 6qL^2 + 4C_1 x - 12C_1 L) - \frac{1}{2\kappa GA} (qx^2 + 2C_1 x)$$

Ou ainda, fazendo $C_1 = -qLC$:

$$v(x) = \frac{q}{48EI_z} (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2 x^2) + \frac{q(5-8C)}{48EI_z} (Lx^3 - 3L^2 x^2) \\ + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 - 2CLx)$$

onde:

$$C = -\frac{5\kappa GAL^2 + 12EI_z}{8(\kappa GAL^2 + 3EI_z)}$$

A primeira parcela do segundo membro desta equação corresponde à contribuição do momento fletor, enquanto as outras duas parcelas representam a contribuição do cortante no valor dos deslocamentos da viga.

Para uma carga uniformemente distribuída $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, se tem o gráfico 4.1.3.1. É possível observar-se que os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica são bastante aproximados.

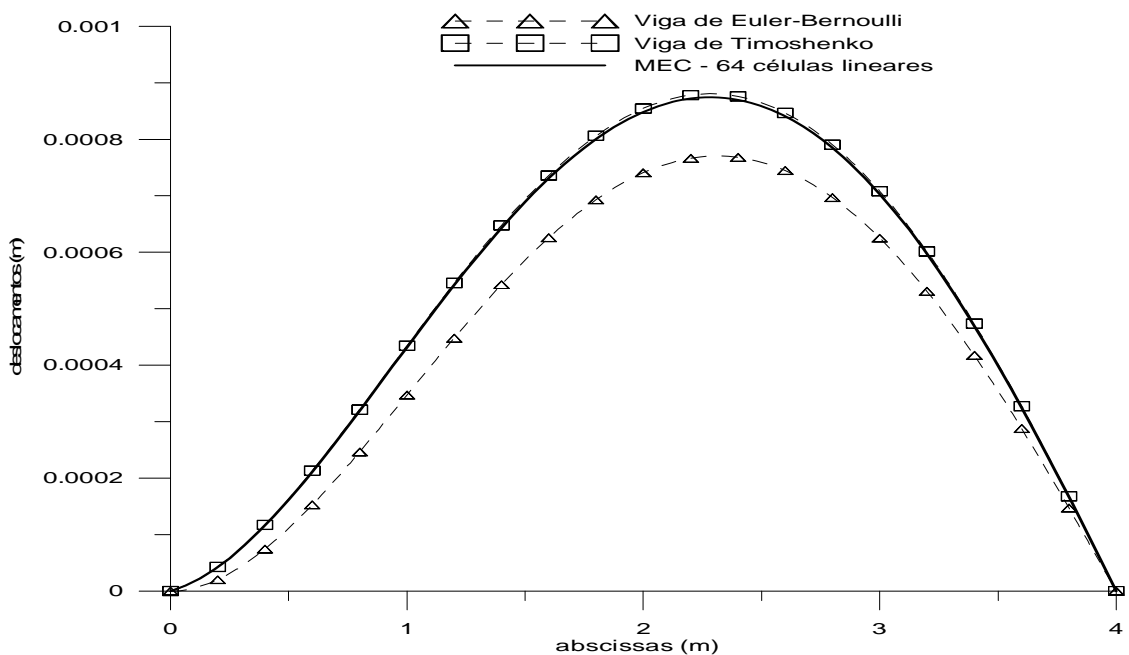


Gráfico 4.1.3.1 – Deslocamentos em uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga uniformemente distribuída

4.1.3.2 – Carga concentrada

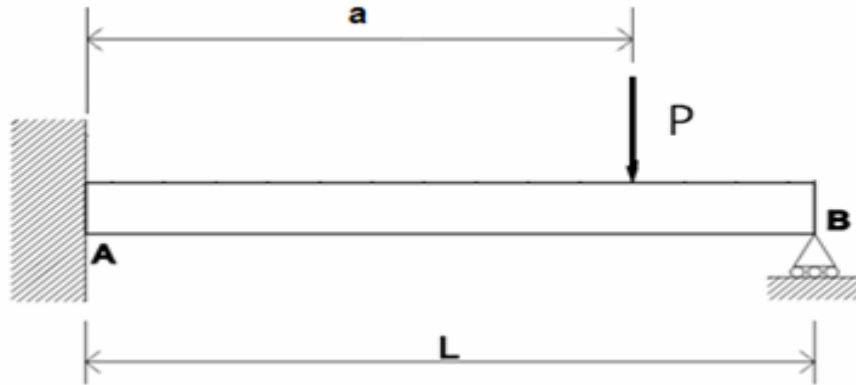


Figura 4.1.3.2 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga concentrada em $x = a$

No trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_1' = -Q_1 x + C_1$$

$$EI_z \psi_1 = -Q_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_2 = 0$.

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_1' = -\frac{Q_1}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{EI_z} x + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x + C_3$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se $C_3 = 0$.

Substituindo estes valores, resulta:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

que fornece o valor do deslocamento em cada ponto do primeiro trecho do eixo da viga.

Tem-se também:

$$\psi_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{2} x^2 + C_1 x \right)$$

$$\psi_1' = \frac{-Q_1}{EI_z} x + \frac{C_1}{EI_z}$$

No trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v_2 = 0 \\ \psi_2' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_2' = -Q_2 x + C_4$$

$$EI_z \psi_2 = -Q_2 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_4 = Q_2 L$.

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_2' = -\frac{Q_2}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_4}{EI_z} x + \frac{C_5}{EI_z} + \frac{Q_2}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{6} x^3 + \frac{Q_2 L}{2} x^2 + C_5 x \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA} x + C_6$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se:

$$\frac{C_5 L}{EI_z} + C_6 = \frac{Q_2 L^3}{6EI_z} - \frac{Q_2 L^3}{2EI_z} - \frac{Q_2 L}{\kappa GA}$$

Tem-se também, por derivação:

$$v_2' = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{2} x^2 + Q_2 L x + C_5 \right) + \frac{Q_2}{\kappa GA}$$

$$v_2'' = \frac{Q_2}{EI_z} (-x + L)$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $\psi'_1(a) = \psi'_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a}{EI_z} + \frac{C_1}{EI_z} = \frac{-Q_2 a}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z}; \quad (Q_2 - Q_1)a + C_1 = Q_2 L; \quad C_1 = Q_2 L + Pa$$

b) As rotações são iguais: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{-Q_1 a^2}{EI_z} + \frac{C_1 a}{EI_z} &= \frac{-Q_2 a^2}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z} a + \frac{C_5}{EI_z} \\ \frac{(Q_2 - Q_1)}{2EI_z} a^2 + \frac{(Q_2 L + Pa)}{EI_z} a &= \frac{Q_2 L a}{EI_z} + \frac{C_5}{EI_z} \\ C_5 &= \frac{Pa^2}{2} \end{aligned}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{-Q_1 a^3}{EI_z} + \frac{C_1 a^2}{EI_z} + \frac{Q_1}{\kappa GA} a &= \frac{-Q_2 a^3}{EI_z} + \frac{Q_2 L a^2}{EI_z} + \frac{C_5}{EI_z} a + \frac{Q_2}{\kappa GA} a + C_6 \\ \frac{(Q_2 - Q_1)}{6EI_z} a^3 + \frac{(Q_2 L + Pa)}{2EI_z} a^2 + \frac{(Q_1 - Q_2)}{\kappa GA} a &= \frac{Q_2 L a^2}{2EI_z} + \frac{Pa^3}{2EI_z} + C_6 \\ C_6 &= -\frac{Pa^3}{6EI_z} + \frac{Pa}{\kappa GA} \end{aligned}$$

Obtém-se ainda:

$$Q_2 = -\frac{Pa}{L} \frac{6EI_z + \kappa GAa(3L - a)}{6EI_z + 2\kappa GAL^2}$$

$$C_4 = -Pa \frac{6EI_z + \kappa GAa(3L - a)}{6EI_z + 2\kappa GAL^2}$$

$$C_1 = Pa \frac{\kappa GA(2L^2 - 3La + a^2)}{6EI_z + 2\kappa GAL^2}$$

$$Q_1 = \frac{P}{L} \frac{6EI_z(L - a) + \kappa GA(2L^3 - 3La^2 + a^3)}{6EI_z + 2\kappa GAL^2}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{Q_1}{6EI_z} [-x^3 + 3C_1x^2] + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{1}{6EI_z} (-Q_2x^3 + 3Q_2Lx^2 + 3Pa^2 - Pa^3) + \frac{Q_2x + Pa}{\kappa GA}$$

Para uma carga concentrada $P = 1.000 \text{ kN}$, aplicada em $a = 3L/4$, tem-se o gráfico 4.1.3.2. É possível observar-se a grande aproximação existente entre os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica.

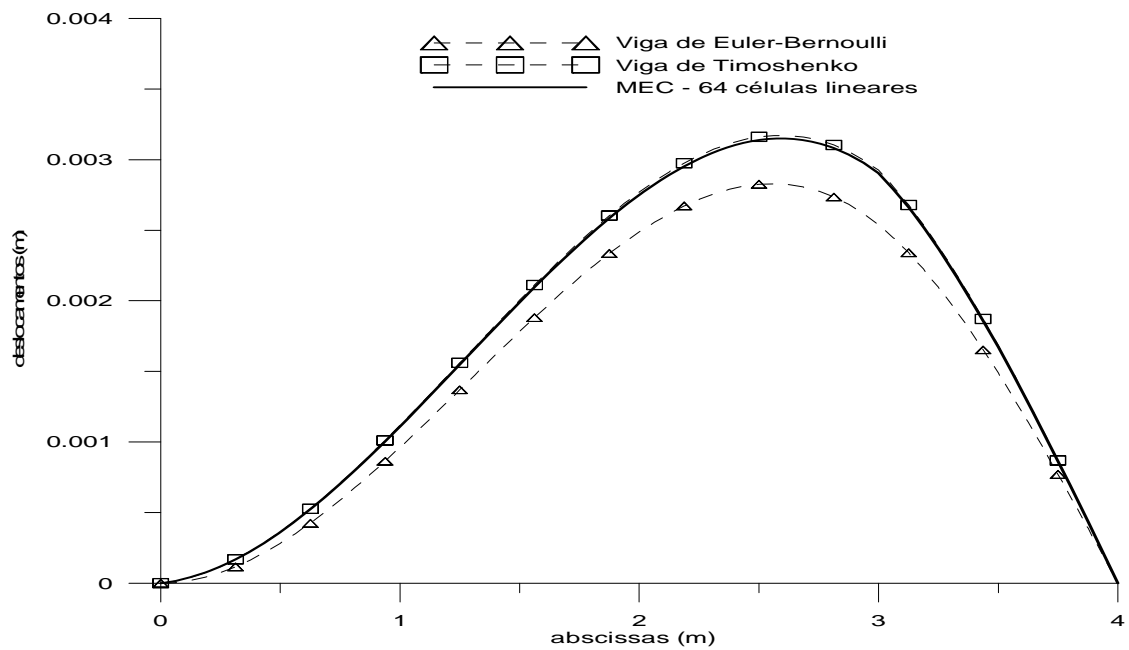


Gráfico 4.1.3.2 – Deslocamentos em uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga concentrada em $a = 3L/4$

4.1.4 – Viga engastada em um extremo e livre no outro

4.1.4.1 – Carga uniformemente distribuída

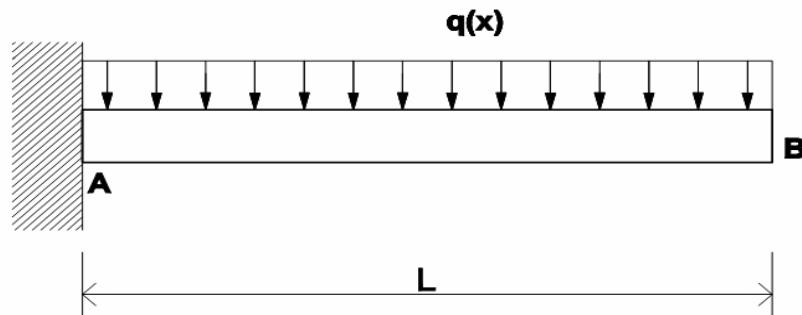


Figura 4.1.4.1 – Viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga uniformemente distribuída

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x=0: \begin{cases} v = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

$$\text{Para } x=L: \begin{cases} \psi' = 0 \\ v' - \psi = 0 \Rightarrow \psi'' = 0 \end{cases}; \text{ momento e cortante nulos}$$

Efetua-se a integração sucessiva da primeira equação diferencial e se

tem:

$$EI_z \psi'' = qx + C_1$$

$$EI_z \psi' = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_z \psi = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Considerando a segunda e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_1 = -qL \quad \text{e} \quad C_3 = 0$$

Chega-se à seguinte expressão para a rotação da seção:

$$EI_z \psi = \frac{q}{6} x^3 - \frac{qL}{2} x^2 + C_2 x$$

Leva-se este valor na segunda equação diferencial e se tem:

$$\kappa GA v' = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{6} x^3 - \frac{qL}{2} x^2 + C_2 x \right) - qx - qL$$

Depois da integração, resulta:

$$\kappa GA v = \frac{\kappa GA}{EI_z} \left(\frac{q}{24} x^4 - \frac{qL}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 \right) - \frac{q}{2} x^2 - qLx + C_4$$

Introduzindo a primeira e a terceira condições de contorno, obtém-se o valor das constantes arbitrárias:

$$C_2 = \frac{qL^2}{2} \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Substituindo estes valores na equação, obtém-se:

$$v(x) = \frac{q}{24EI_z} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{q}{2\kappa GA} (-x^2 + 2Lx)$$

A primeira parcela do segundo membro desta equação corresponde à contribuição do momento fletor, enquanto a segunda parcela é a contribuição do cortante no valor dos deslocamentos da viga.

Para uma carga uniformemente distribuída $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, se tem o gráfico 4.1.4.1. Observou-se que os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica são praticamente iguais.

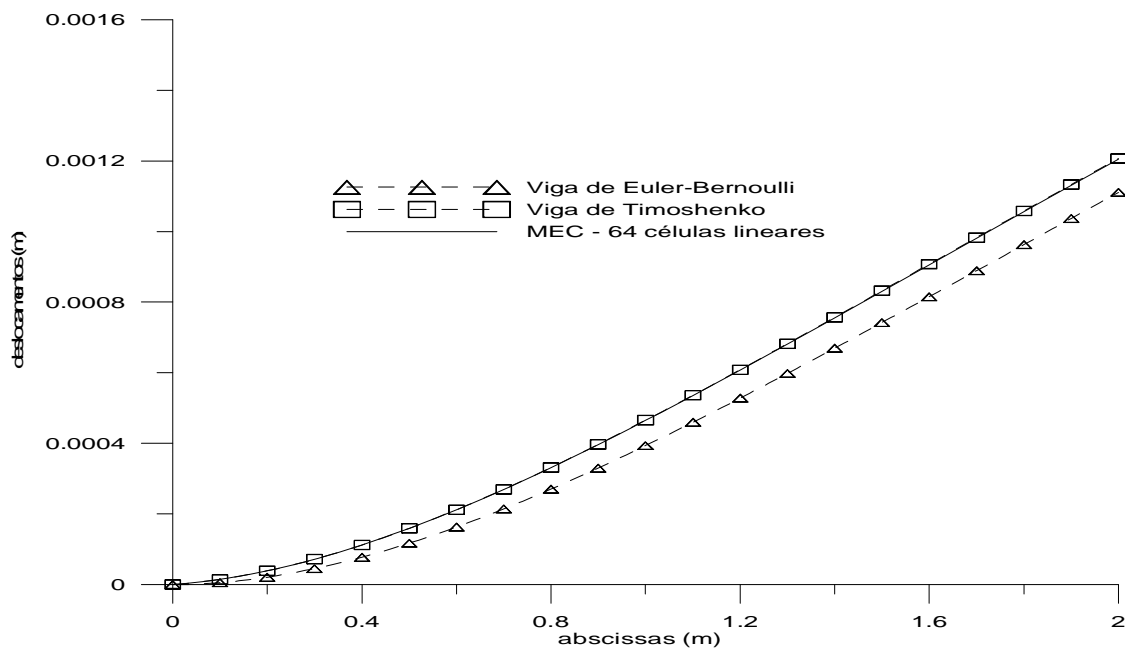


Gráfico 4.1.4.1 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga uniformemente distribuída

4.1.4.2 – Carga concentrada

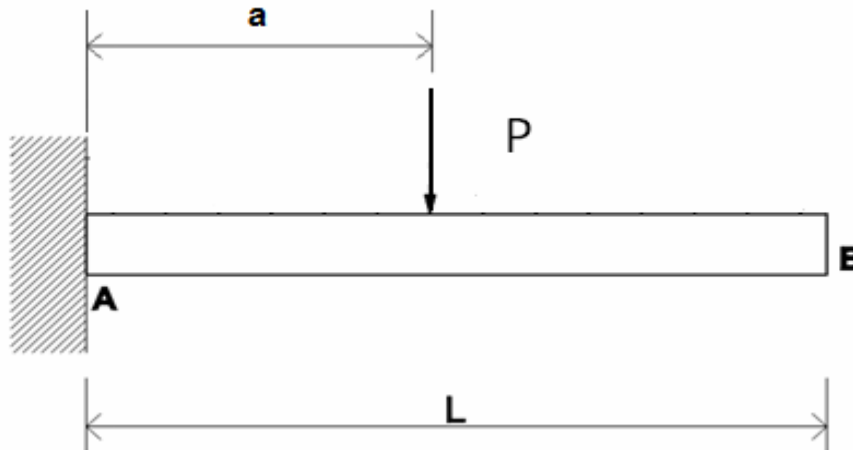


Figura 4.1.4.2 – Viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga concentrada em $x = a$

No trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_1' = -Q_1 x + C_1$$

$$EI_z \psi_1 = -Q_1 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Considerando a segunda condição de contorno, resulta $C_2 = 0$.

Da segunda equação governante se obtém:

$$v_1' = -\frac{Q_1}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{EI_z} x + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

Integrando:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x + C_3$$

Introduz-se a primeira condição de contorno e obtém-se $C_3 = 0$:

Substituindo estes valores, resulta:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{6} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA} x$$

valor do deslocamento em cada ponto do primeiro trecho do eixo da viga.

Por derivação:

$$v_1' = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_1}{2} x^2 + C_1 x \right) + \frac{Q_1}{\kappa GA}$$

$$v_1'' = \frac{1}{EI_z} (-Q_1 x + C_1)$$

No trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga, as condições de contorno são:

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} \psi_2' = 0 \\ \psi_2'' = 0 \end{cases}; \text{ momento e cortante nulos}$$

Por integração sucessiva da primeira equação governante:

$$EI_z \psi_2' = -Q_2 x + C_4$$

$$EI_z \psi_2 = -Q_2 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

Considerando a primeira condição de contorno, resulta $C_4 = Q_2 L$.

Da segunda equação governante se obtém: $Q_2 = 0$.

Portanto: $C_4 = 0$ e $Q_1 = P$

Assim:

$$v_2' = \frac{C_5}{EI_z}$$

Integrando:

$$v_2 = \frac{C_5}{EI_z} x + C_6$$

que é valor do deslocamento em cada ponto do segundo trecho do eixo da viga.

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $\psi_1'(a) = \psi_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-Pa}{EI_z} + \frac{C_1}{EI_z} = 0; \quad C_1 = Pa$$

b) As rotações são iguais: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Portanto:

$$-\frac{Pa^2}{2EI_z} + \frac{Pa^2}{EI_z} = \frac{C_5}{EI_z}; \quad C_5 = \frac{Pa^2}{2}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{Pa}{\kappa GA} - \frac{Pa^3}{6EI_z} + \frac{Pa^3}{2EI_z} = \frac{Pa^3}{2EI_z} + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z} + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

Assim:

$$v_1(x) = \frac{P}{6EI_z} [-x^3 + 3ax^2] + \frac{P}{\kappa GA} x$$

$$v_2(x) = \frac{Pa^2}{6EI_z} [3x - a] + \frac{Pa}{\kappa GA}$$

As primeiras parcelas dos segundos membros destas equações correspondem à contribuição do momento fletor, enquanto as outras parcelas representam a contribuição do cortante no valor dos deslocamentos do eixo da viga.

Para uma carga concentrada $P = 1.000 \text{ kN}$, aplicada no ponto médio da viga, tem-se o gráfico 4.1.4.2. É possível observar-se que os resultados obtidos pelo MEC e pela solução analítica são praticamente coincidentes.

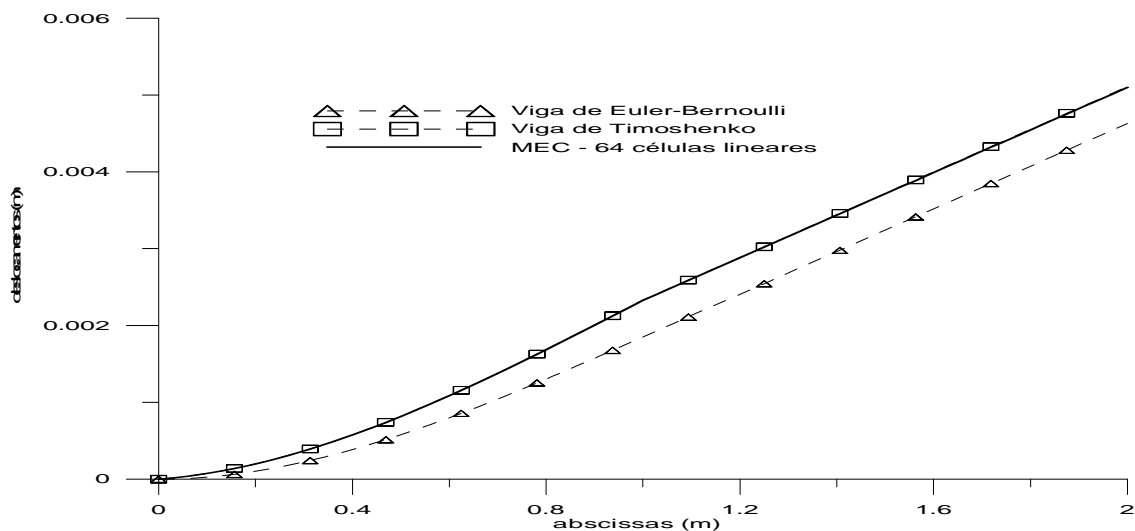


Gráfico 4.1.4.2 – Deslocamentos dos pontos de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga concentrada no ponto médio da viga

4.2 – Carga dinâmica

Quatro casos de carga foram levados em consideração: distribuída ao longo do comprimento da viga, concentrada, concentrada harmônica e impulsiva. Com a única exceção da concentrada harmônica, a intensidade da carga e seus pontos de aplicação são constantes ao longo da análise.

No caso da viga simplesmente apoiada foram comparados os resultados obtidos mediante a utilização do Método dos Elementos de Contorno com a solução analítica mostrada no Capítulo 2 e, para os outros casos, com os resultados obtidos pelo Método das Diferenças Finitas. Observou-se uma boa concordância entre eles, como pode ser observado nos gráficos apresentadas a seguir.

4.2.1 – Viga simplesmente apoiada

Considerou-se a mesma viga apoiada nos extremos, com seção retangular; para o MEC, tomou-se número de intervalos de tempo $ndt = 1.250$ e $\Delta t = 0,00004s$, 64 células lineares e 32 células quadráticas.

4.2.1.1 – Carga uniformemente distribuída

Considerou-se uma carga $q(x) = 100 \text{ kN/m}$.

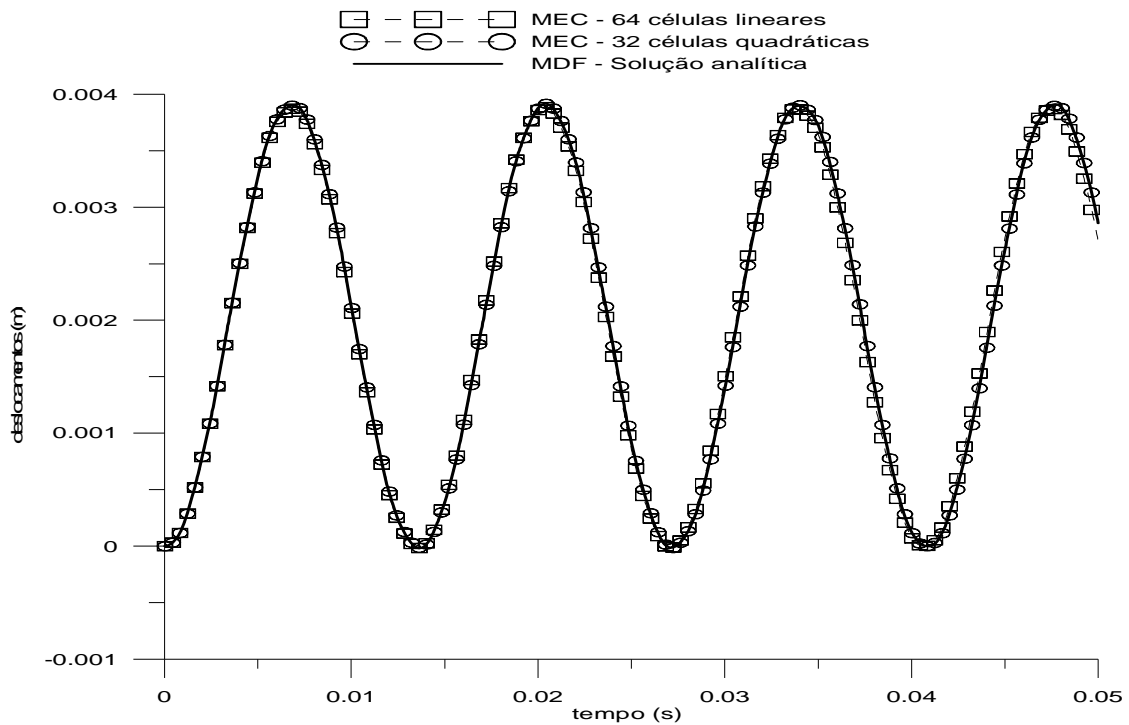


Gráfico 4.2.1.1 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída

4.2.1.2 – Carga concentrada no ponto médio da viga

Considerou-se um carregamento de $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicado no ponto médio da viga.

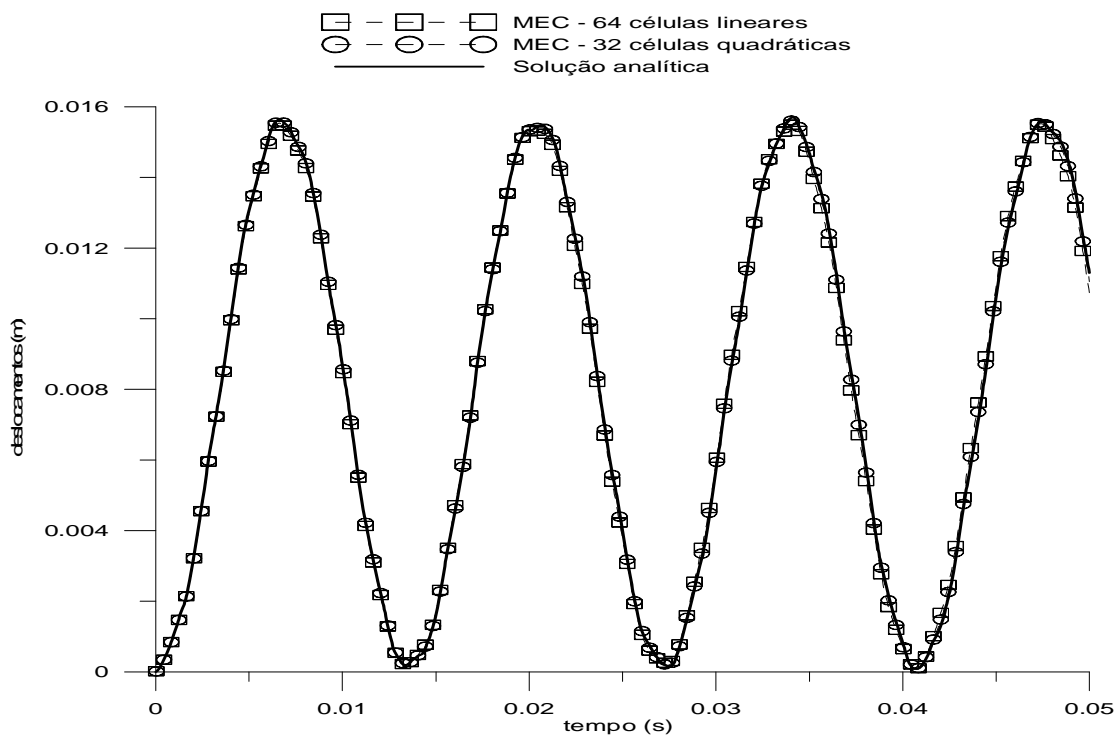


Gráfico 4.2.1.2 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga concentrada aplicada no ponto médio da viga

4.2.1.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga e frequências do carregamento $\omega = 50 \text{ Hz}$ (baixa) e $\omega = 1.000 \text{ Hz}$ (alta).

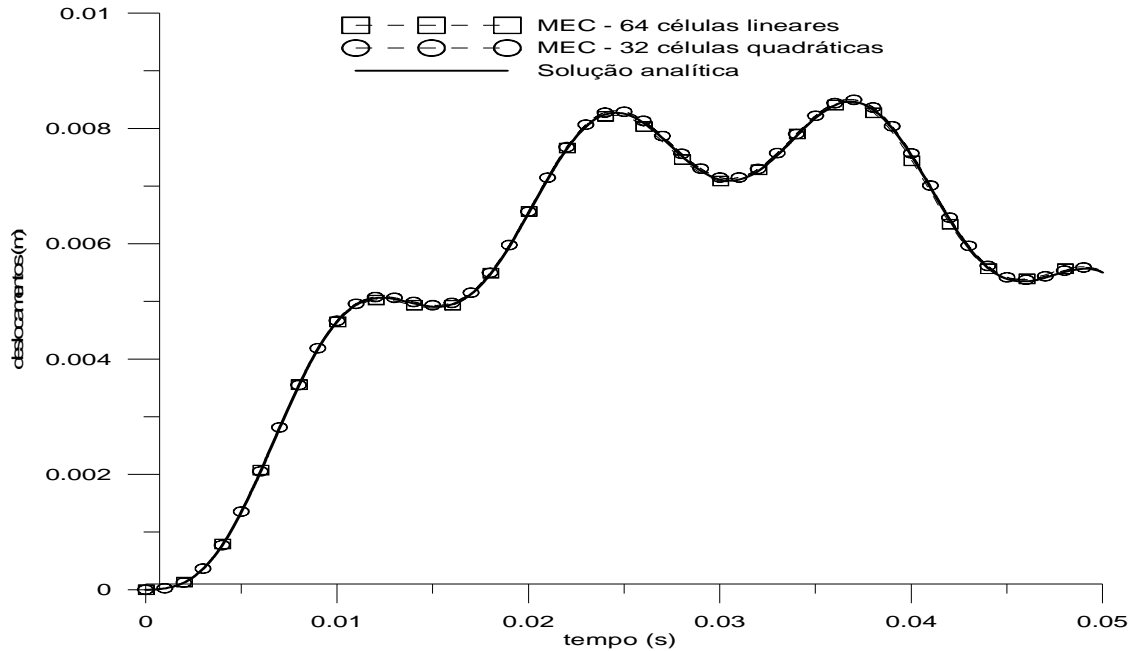


Gráfico 4.2.1.3.1 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga; $w = 50 \text{ Hz}$

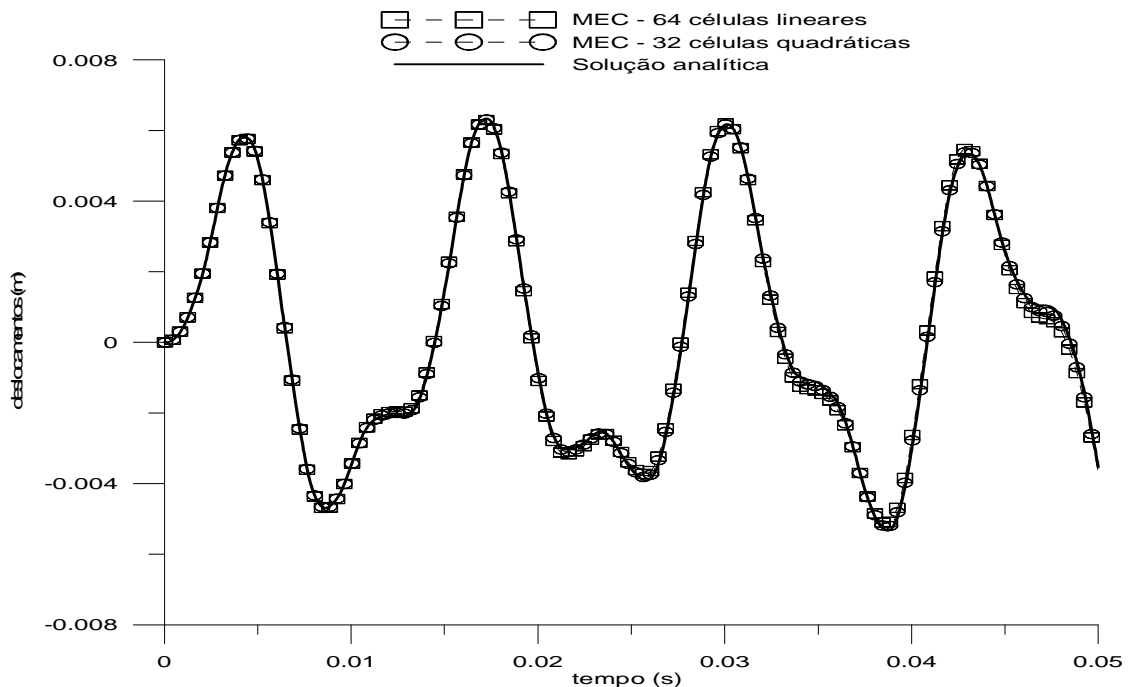


Gráfico 4.2.1.3.2 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga; $w = 1000 \text{ Hz}$

4.2.1.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga. Tomou-se como a frequência do carregamento o valor $\omega = \theta_1 = 461,73 \text{ Hz}$, igual à frequência natural, para os dados escolhidos, que corresponde à ressonância associada ao modo de deformação devido à flexão.

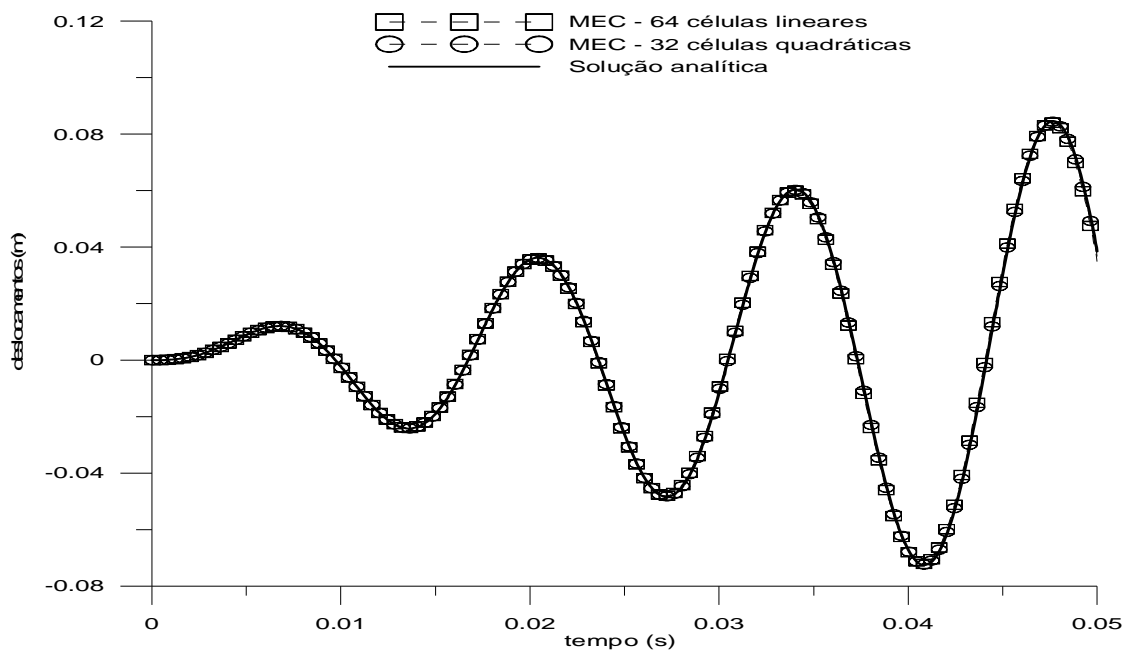


Gráfico 4.2.1.4 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga
Frequência correspondente à ressonância associada à flexão

4.2.1.5 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada ao cisalhamento

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga. Tomou-se como frequência do carregamento o valor $\omega = \delta_1 = 15.744,49 \text{ Hz}$, igual à frequência natural para os dados escolhidos, correspondente à ressonância associada ao modo de deformação devido ao cisalhamento.

Efetuuou-se uma discretização mais refinada com 64 células quadráticas. O intervalo de tempo adotado foi $\Delta t = 0,000001 \text{ s}$.

Em virtude da grande quantidade de dados, os resultados foram colocados em dois gráficos separados para possibilitar a sua comparação.

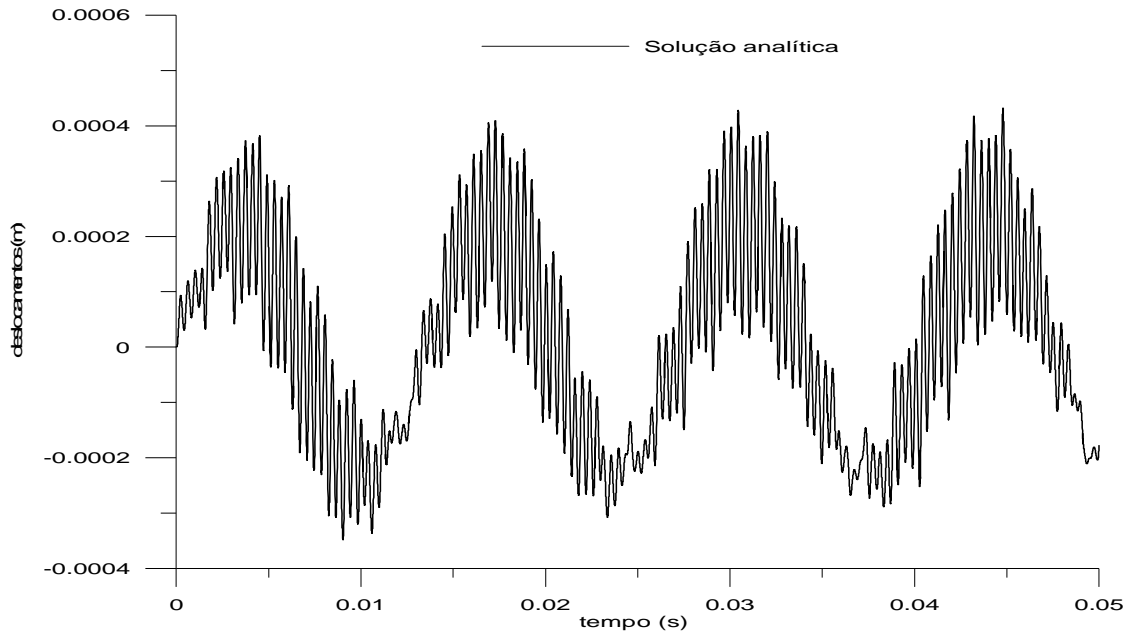


Gráfico 4.2.1.5a - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga
Frequência correspondente à ressonância associada ao cisalhamento
Solução analítica

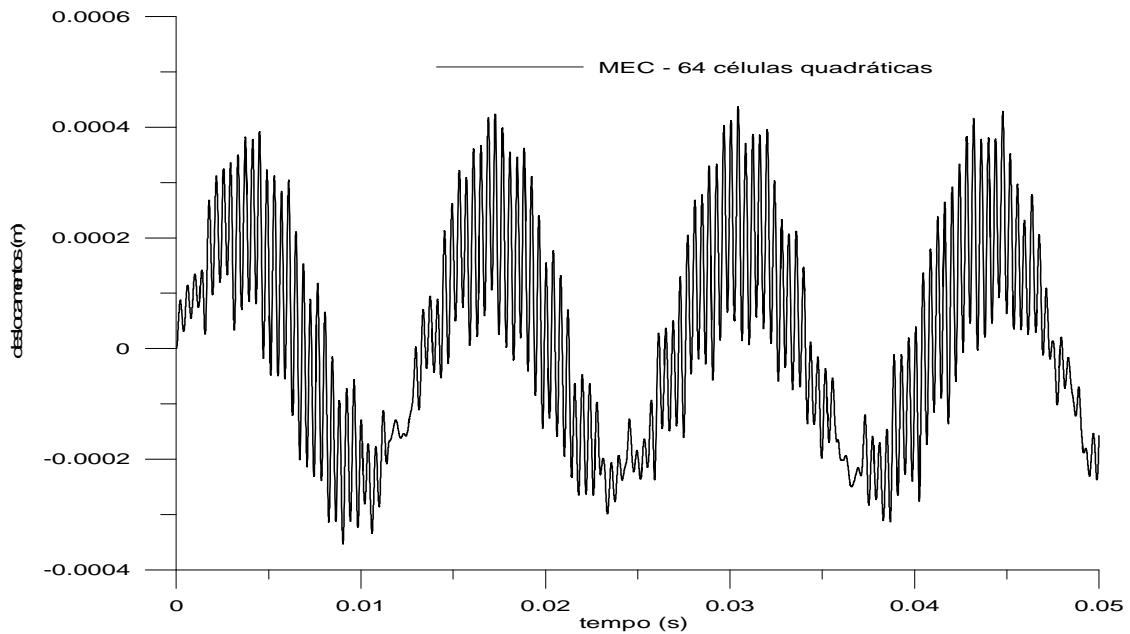


Gráfico 4.2.1.5b - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga
Frequência correspondente à ressonância associada ao cisalhamento
MEC – células quadráticas

4.2.1.6 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga aplicada no ponto médio da viga de $P = 1 \text{ kN}$. Efetuou-se novamente uma discretização mais refinada com 64 células quadráticas e o intervalo de tempo adotado foi $\Delta t = 0,000001 \text{ s}$. Os resultados foram colocados em dois gráficos para possibilitar a sua comparação.

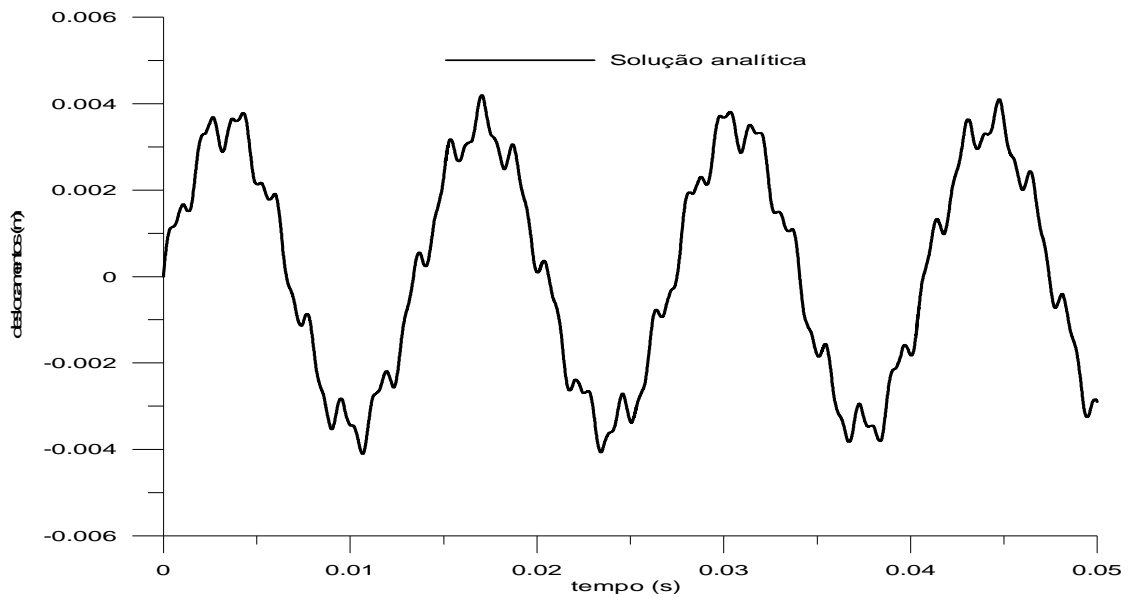


Gráfico 4.2.1.6a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Solução analítica

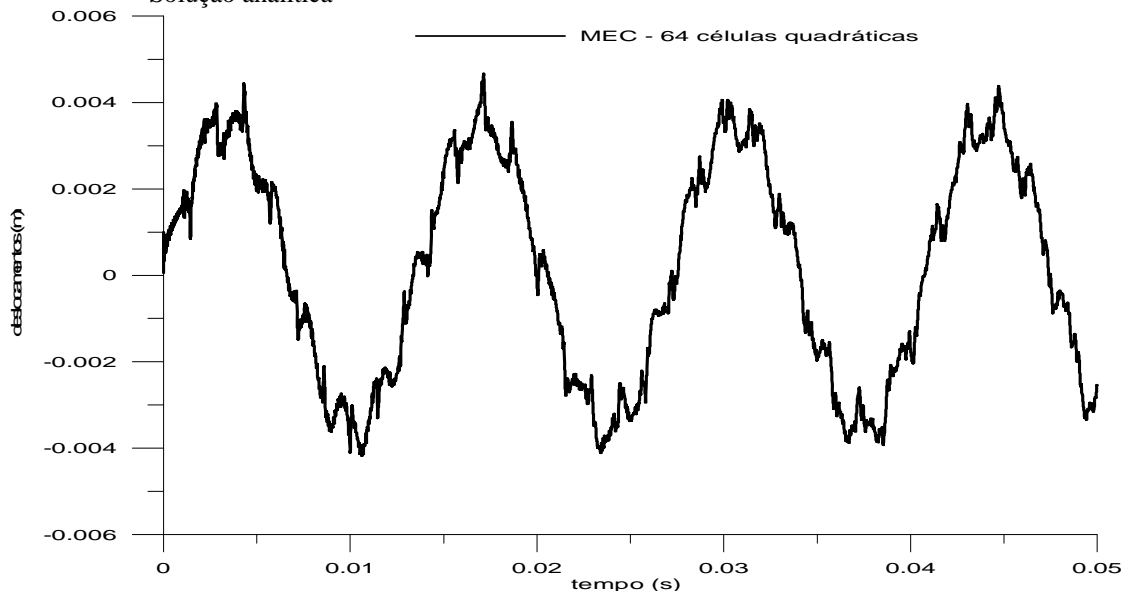


Gráfico 4.2.1.6b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Método dos Elementos de Contorno

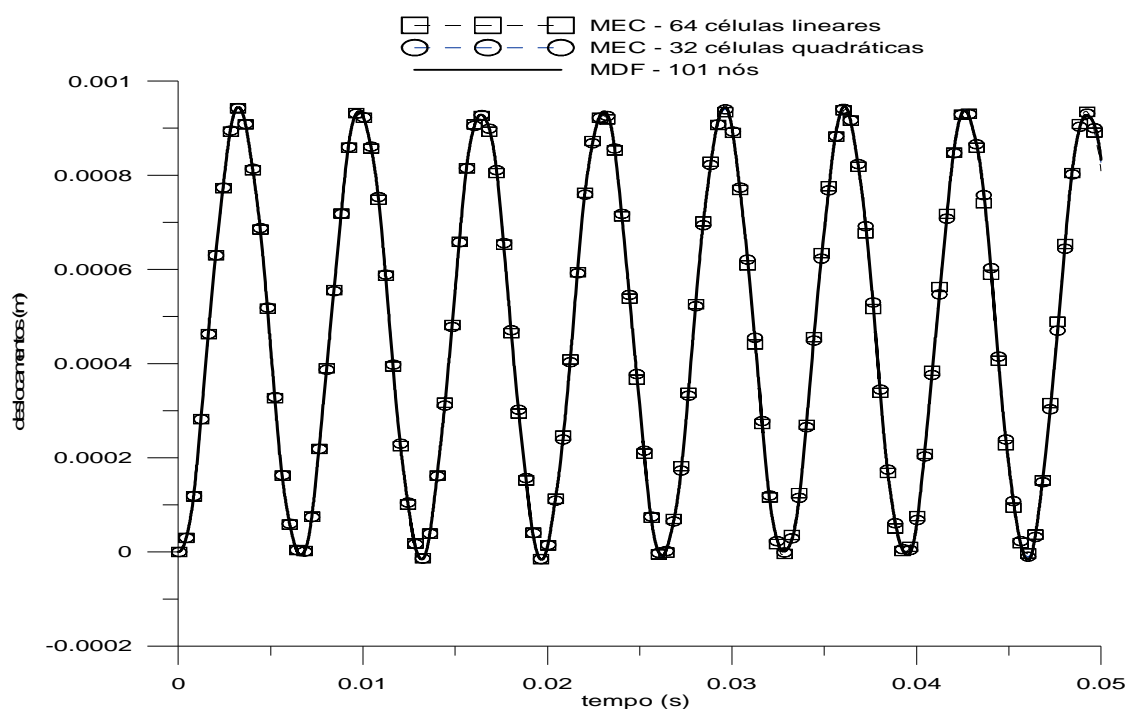
4.2.2 – Viga engastada nos extremos

Considerou-se uma viga engastada nos extremos, com a mesma seção retangular dos exemplos anteriores; para o MEC, tomou-se número de intervalos de tempo $ndt = 1.250$ e $\Delta t = 0,00004s$, e, para o MDF, tomou-se $ndt = 10.000$ e $\Delta t = 0,000005s$. Admitindo os resultados obtidos com o MDF como base para comparação, observou-se que a formulação MEC forneceu resultados confiáveis.

Foram tomadas 64 células lineares e 32 células quadráticas para o Método dos Elementos de Contorno, e 101 nós para o Método das Diferenças Finitas.

4.2.2.1 – Carga uniformemente distribuída

Considerou-se uma carga $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, e observou-se haver uma boa coincidência entre os resultados obtidos com os dois métodos utilizados.



4.2.2.2 – Carga concentrada no ponto médio da viga

Considerou-se um carregamento $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicado no ponto médio da viga e observou-se haver uma boa coincidência entre os valores obtidos com os métodos utilizados.

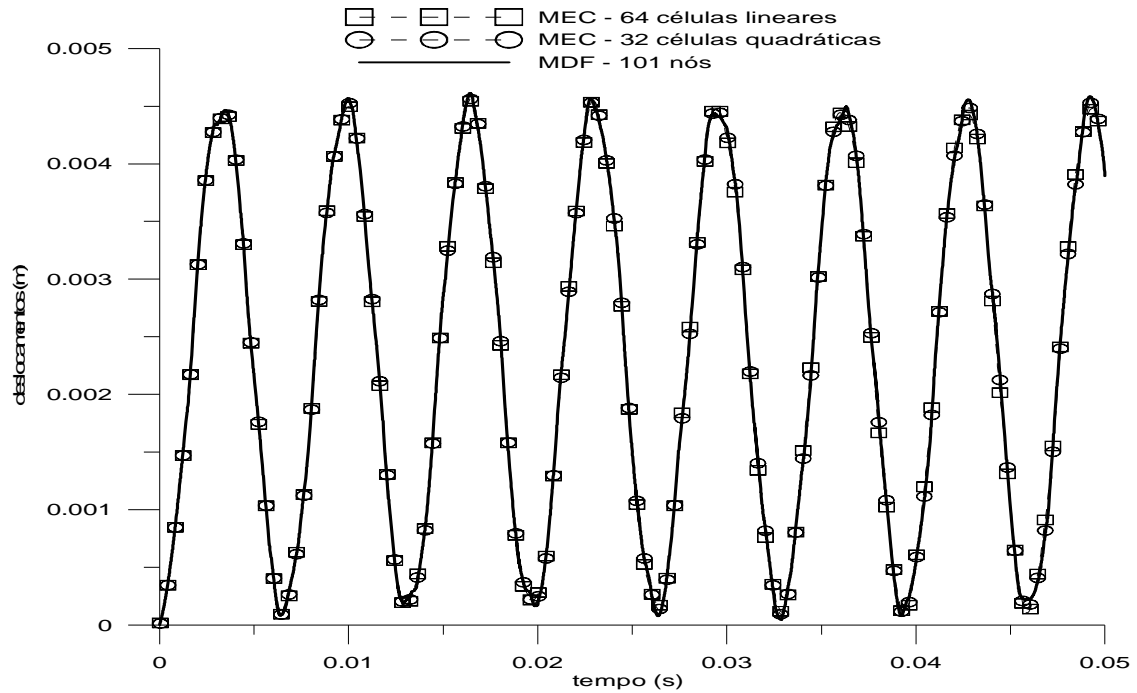


Gráfico 4.2.2.2 - Deslocamentos no ponto médio de uma viga engastada nos extremos
Carga concentrada no ponto médio da viga

4.2.2.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga, e frequência do carregamento $\omega = 1.000 \text{ Hz}$; observou-se existir uma boa coincidência entre os valores obtidos com os métodos utilizados.

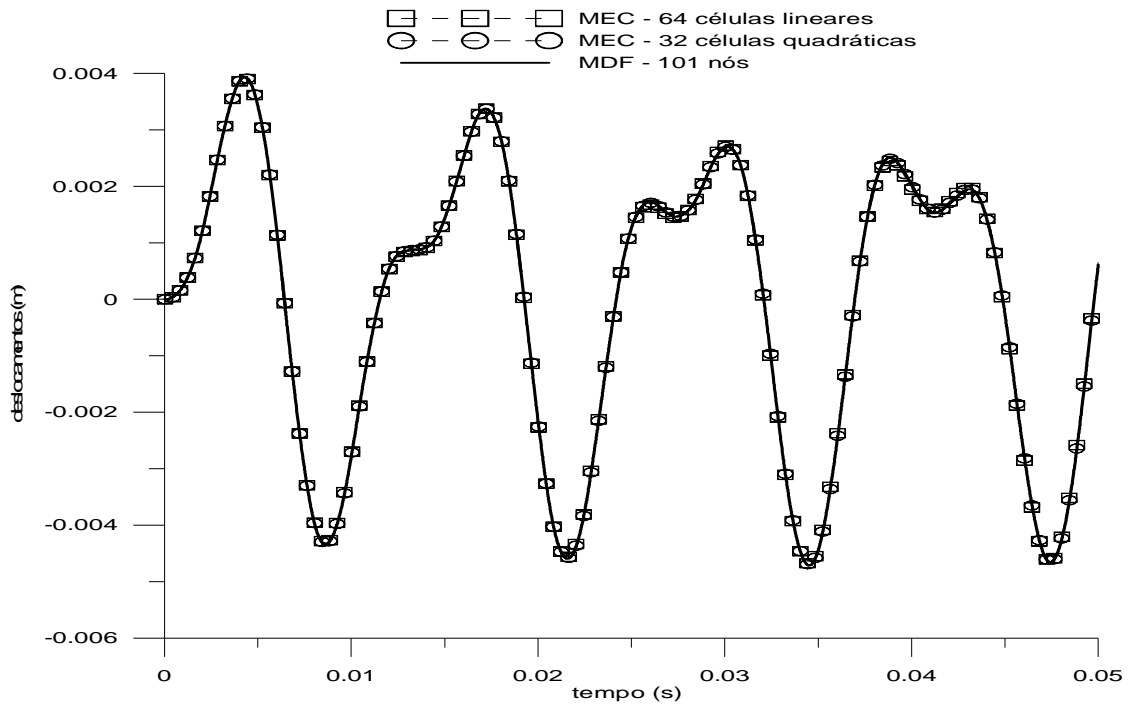


Gráfico 4.2.2.3 - Deslocamentos do eixo central de uma viga engastada nos extremos
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga

4.2.2.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga. Adotou-se a frequência $\omega = \theta_1 \cong 970 \text{ Hz}$, igual à frequência natural para os dados escolhidos correspondente à ressonância associada ao modo de deformação devido à flexão.

Verificou-se existir uma boa coincidência entre os resultados obtidos com a utilização dos dois métodos.

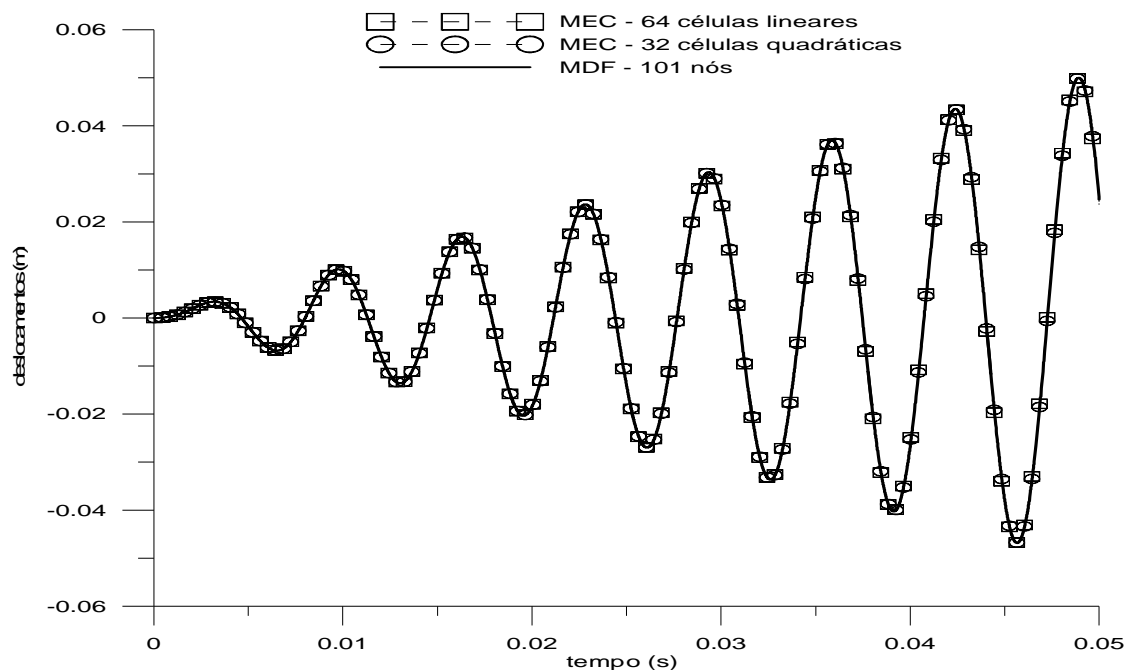


Gráfico 4.2.2.4 - Deslocamentos do eixo central de uma viga engastada nos extremos
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga
Frequência correspondente à ressonância associada à flexão

4.2.2.5 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga aplicada no ponto médio da viga de $P = 1 \text{ kN}$. Para efeito de comparação, em virtude da grande quantidade de dados, os resultados foram colocados em dois gráficos.

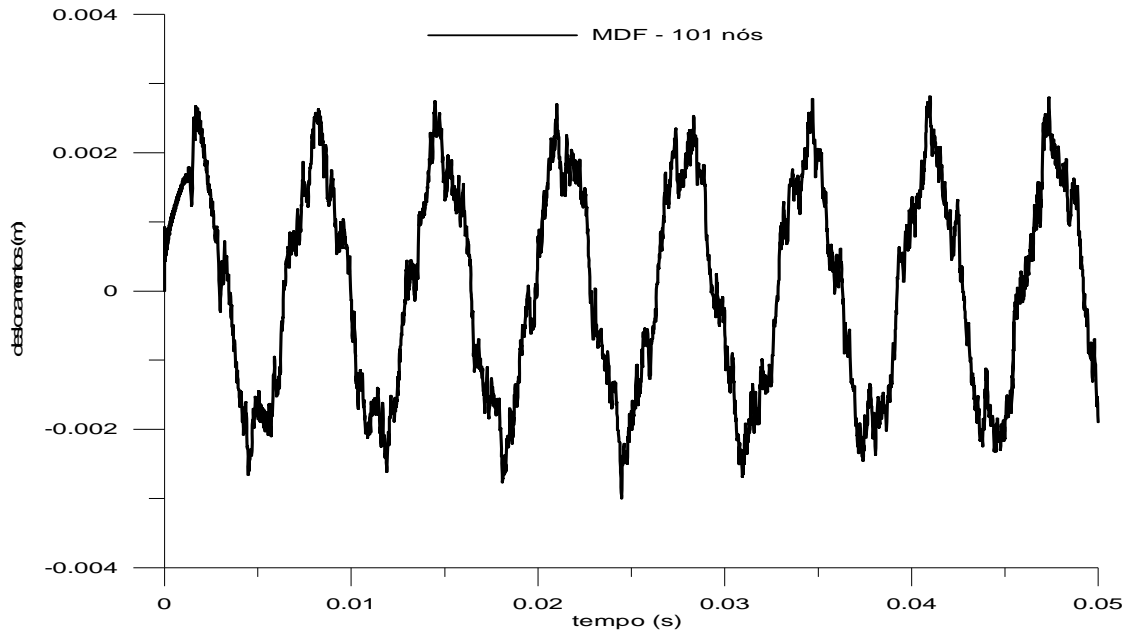


Gráfico 4.2.2.5a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Método das Diferenças Finitas

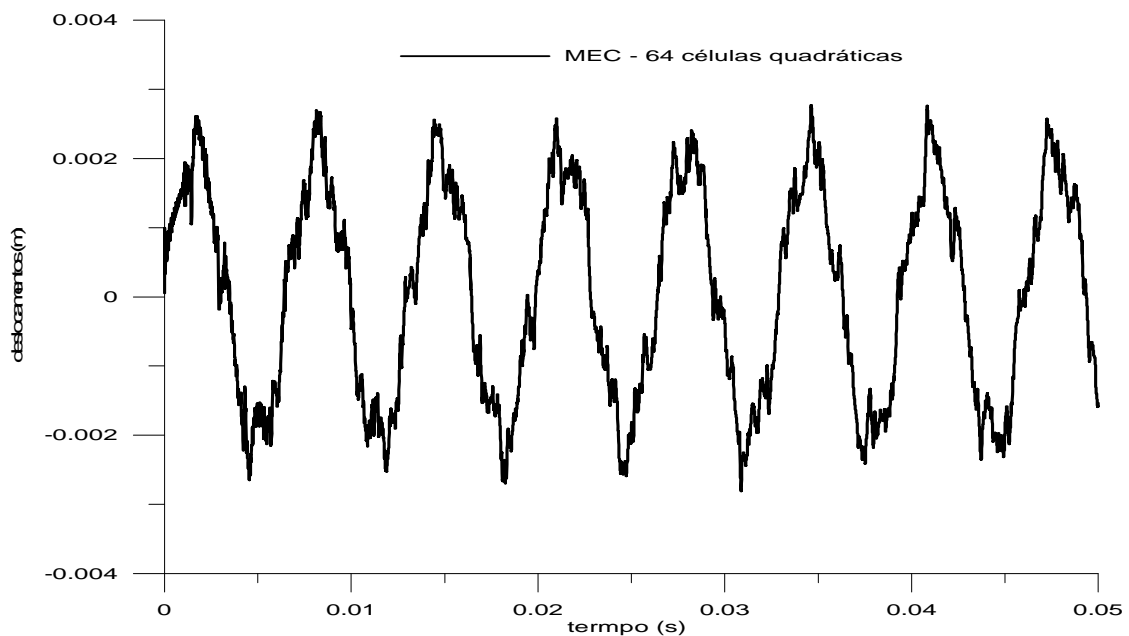


Gráfico 4.2.2.5b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada nos extremos
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Método dos Elementos de Contorno

4.2.3 – Viga engastada em um extremo e apoiada no outro

Considerou-se uma viga engastada em $x=0$ e apoiada em $x=L$, de seção retangular; para o MEC, tomou-se número de intervalos de tempo $ndt=1.250$ com $\Delta t=0,00004s$; para o MDF, adotou-se $ndt=10.000$ e $\Delta t=0,000005s$. Foram tomadas 64 células lineares e 32 células quadráticas para o Método dos Elementos de Contorno e 101 nós para o Método das Diferenças Finitas.

Observou-se uma coincidência quase completa entre os resultados obtidos pelo MEC e pelo MDF.

4.2.3.1 – Carga uniformemente distribuída

Considerou-se uma carga por unidade de comprimento $q(x)=100\text{ kN/m}$.

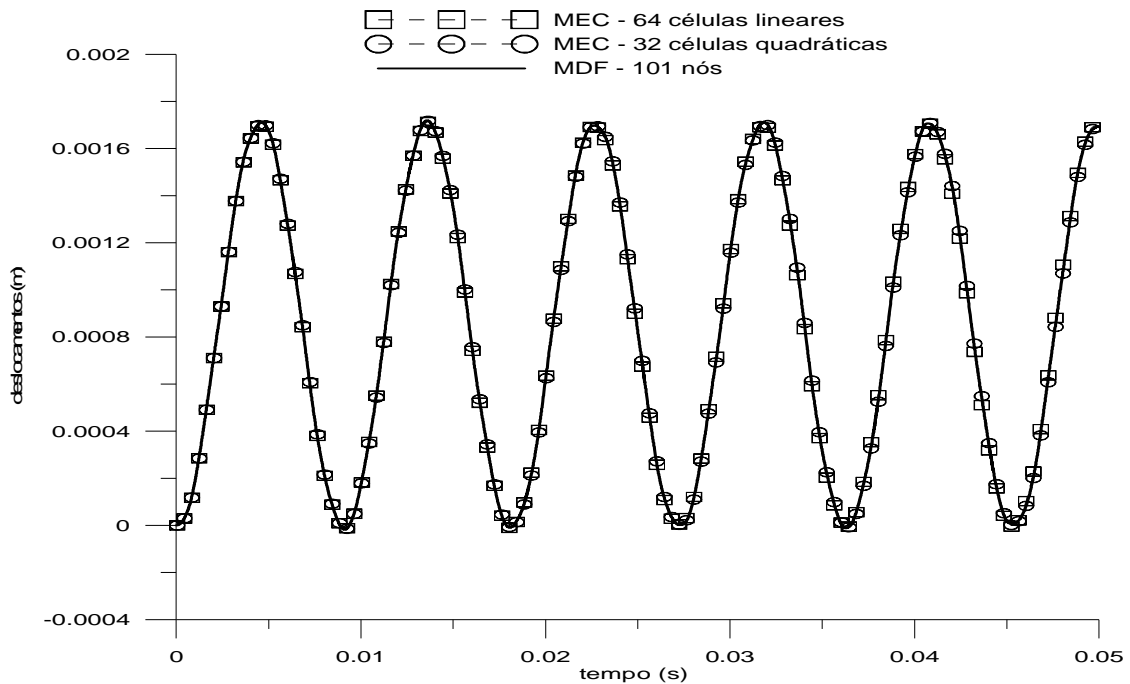


Gráfico 4.2.3.1 – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga uniformemente distribuída

4.2.3.2 – Carga concentrada no ponto médio da viga

Considerou-se um carregamento $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicado no ponto médio da viga.

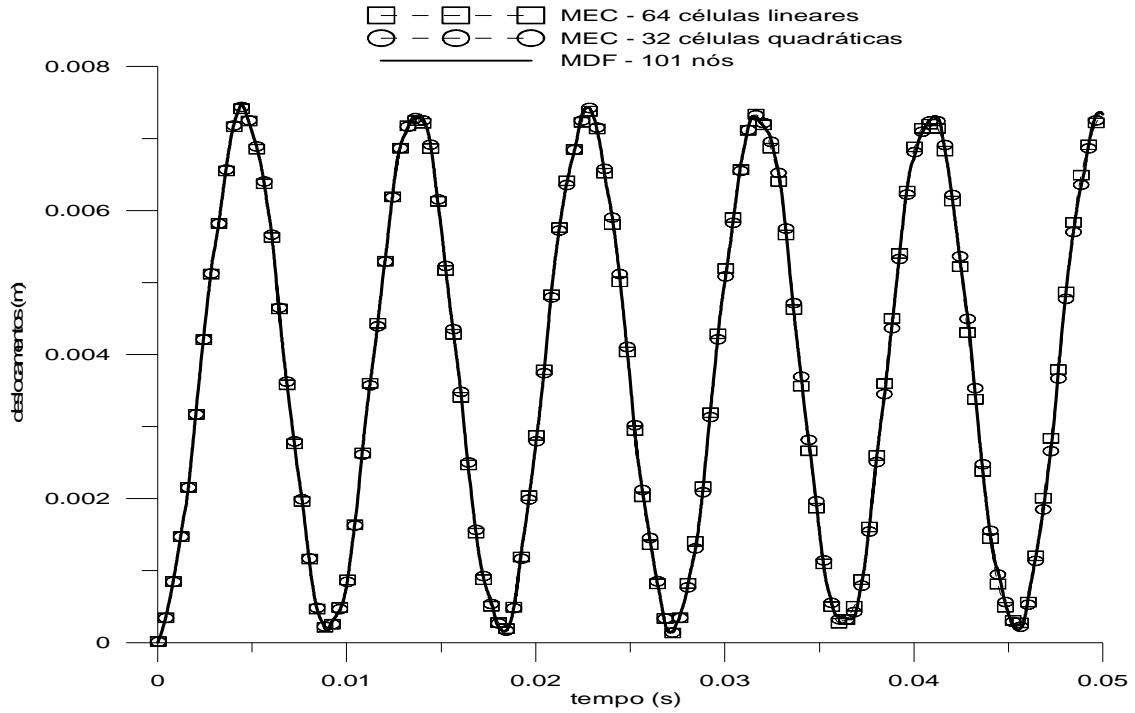


Gráfico 4.2.3.2 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga concentrada aplicada no ponto médio da viga

4.2.3.3 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ com frequência $\omega = 1.000 \text{ Hz}$, aplicada no ponto médio da viga.

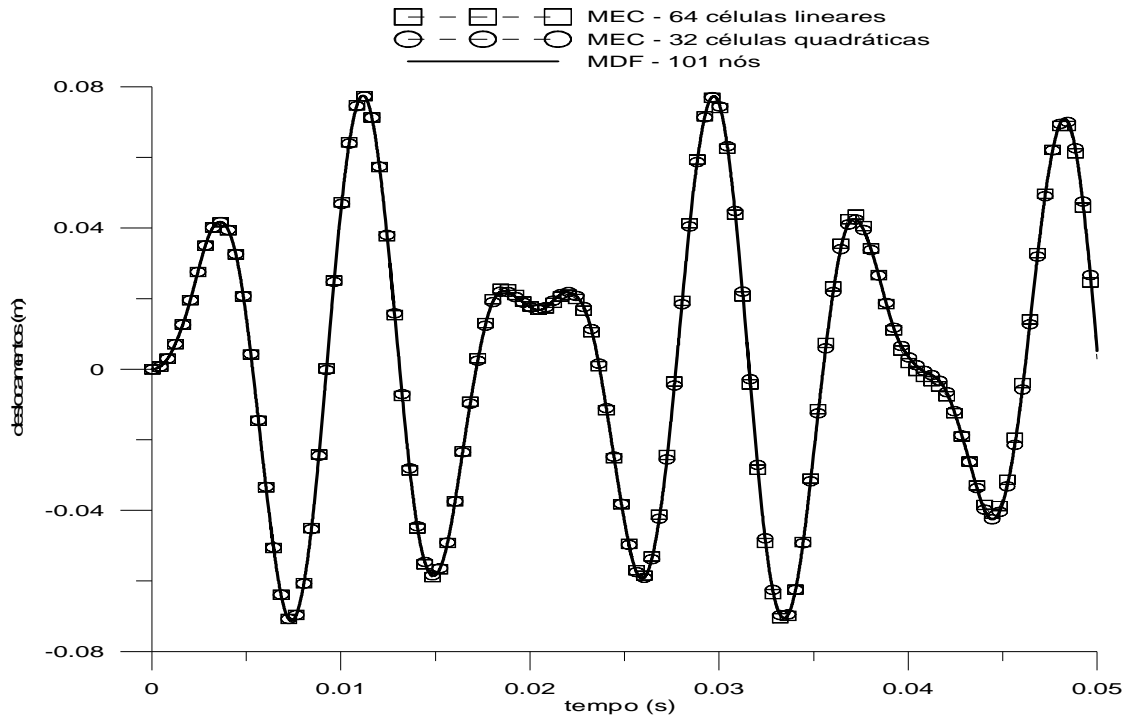


Gráfico 4.2.3.3 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga

4.2.3.4 – Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga – ressonância associada à flexão

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga. Adotou-se a frequência $\omega = \theta_1 \cong 708 \text{ Hz}$, correspondente, para os dados escolhidos, à ressonância associada ao modo de deformação devido à flexão. Observou-se uma coincidência total entre os resultados obtidos com a utilização dos diferentes métodos.

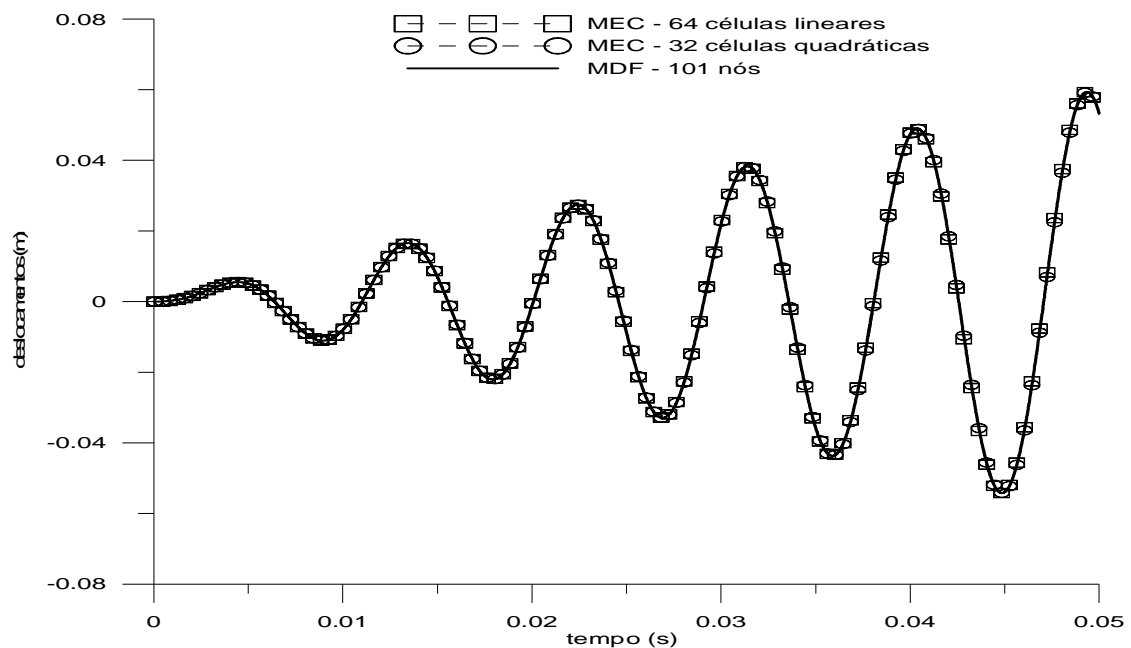


Gráfico 4.2.3.4 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga harmônica aplicada no ponto médio da viga
Frequência correspondente à ressonância associada à flexão

4.2.3.5 – Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga

Considerou-se uma carga $P = 1 \text{ kN}$ aplicada no ponto médio da viga. Para efeito de comparação, em virtude da grande quantidade de dados, os resultados foram colocados em dois gráficos.

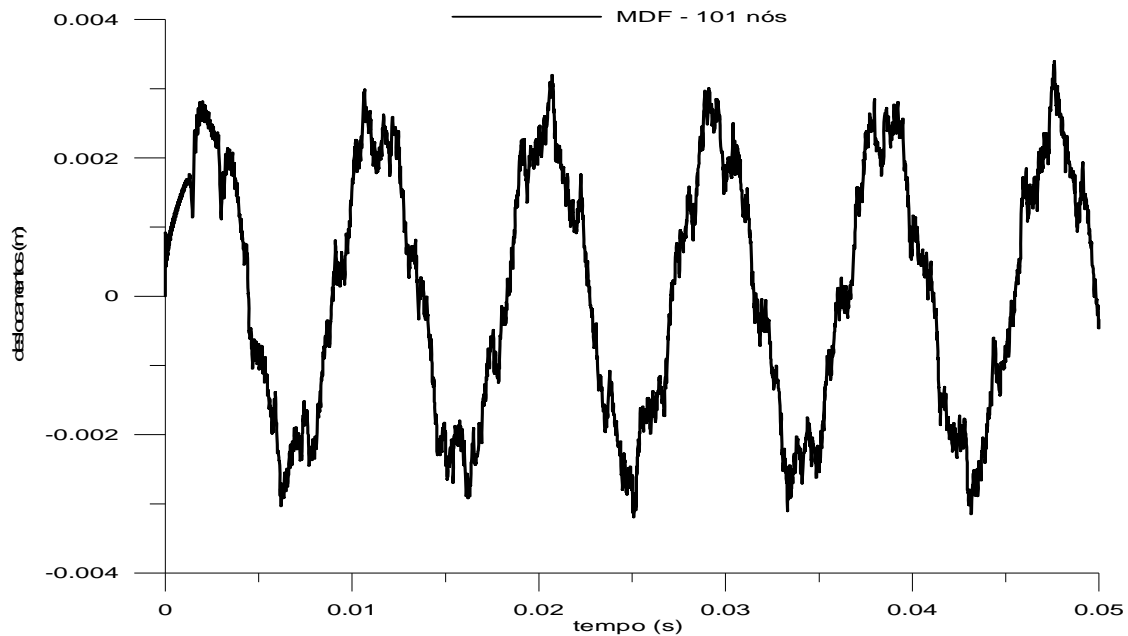


Gráfico 4.2.3.5a – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Método das Diferenças Finitas

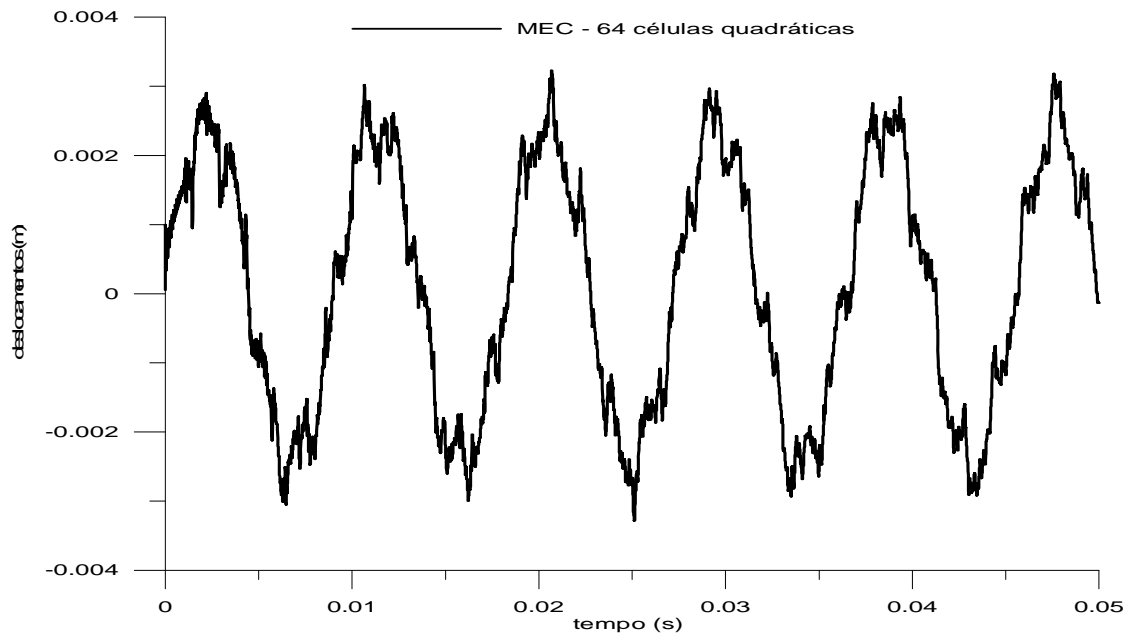


Gráfico 4.2.3.5b – Deslocamentos do ponto médio de uma viga engastada em um extremo e apoiada no outro
Carga impulsiva aplicada no ponto médio da viga
Método dos Elementos de Contorno

4.2.4 – Viga engastada em um extremo e livre no outro

Considerou-se uma viga engastada no extremo $x=0$ e livre em $x=L$; para o MEC, tomou-se número de intervalos de tempo $ndt=1.250$ e $\Delta t=0,00004s$; para o MDF, adotou-se $ndt=12.500$ e $\Delta t=0,000004s$. Foram tomadas 64 células lineares e 32 células quadráticas para o Método dos Elementos de Contorno e 101 nós para o Método das Diferenças Finitas.

Observou-se uma boa coincidência entre os resultados obtidos pelo MEC e pelo MDF.

4.2.4.1 – Carga uniformemente distribuída

Considerou-se uma carga $q(x)=100\text{ kN/m}$.

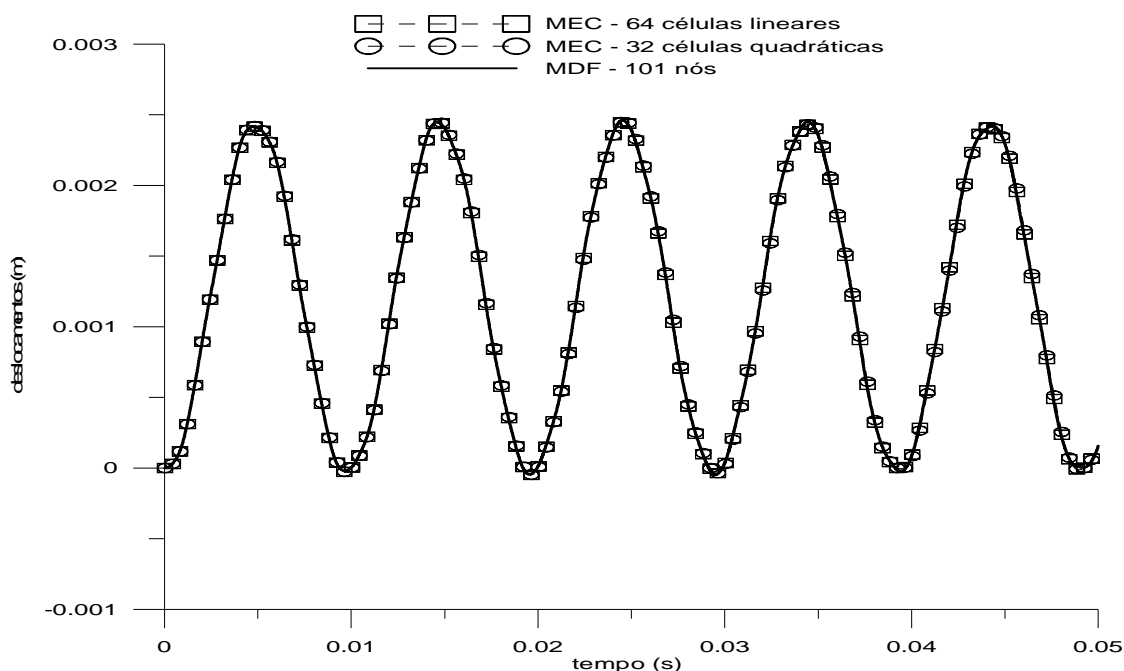


Gráfico 4.2.4.1 - Deslocamentos na extremidade de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga uniformemente distribuída

4.2.4.2 – Carga concentrada aplicada na extremidade livre

Considerou-se um carregamento $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicado no extremo livre da viga.

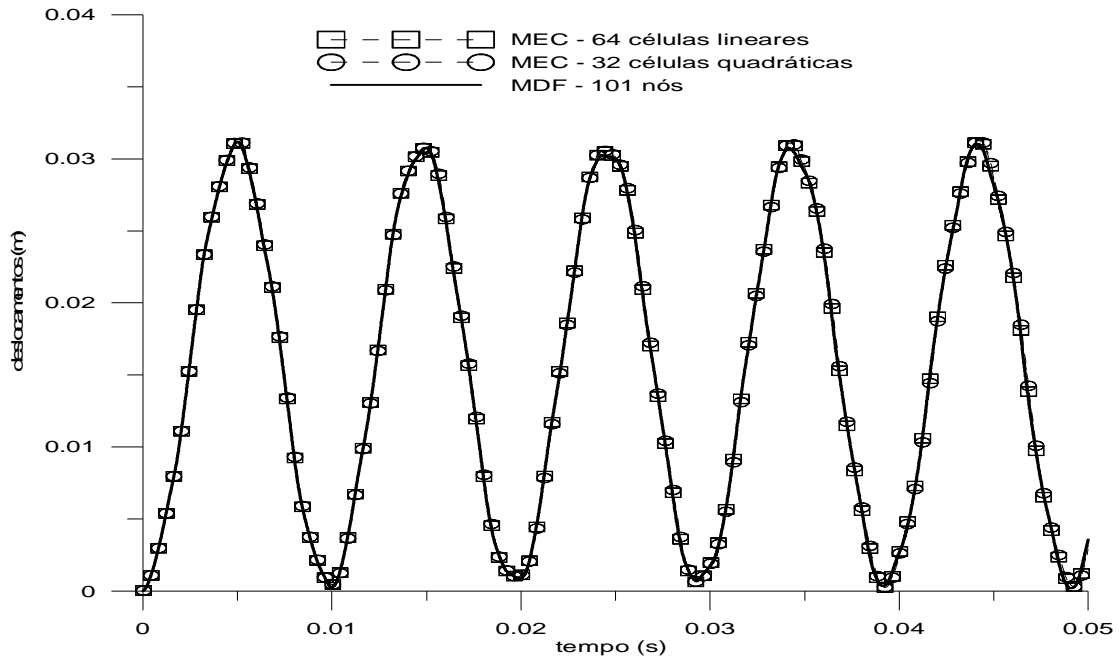


Gráfico 4.2.4.2 - Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga concentrada aplicada no extremo livre

4.2.4.3 – Carga harmônica aplicada na extremidade livre

Considerou-se uma carga $P = 1.000 \text{ kN}$, aplicada no extremo livre da viga, com frequência do carregamento $\omega = 1.000 \text{ Hz}$.

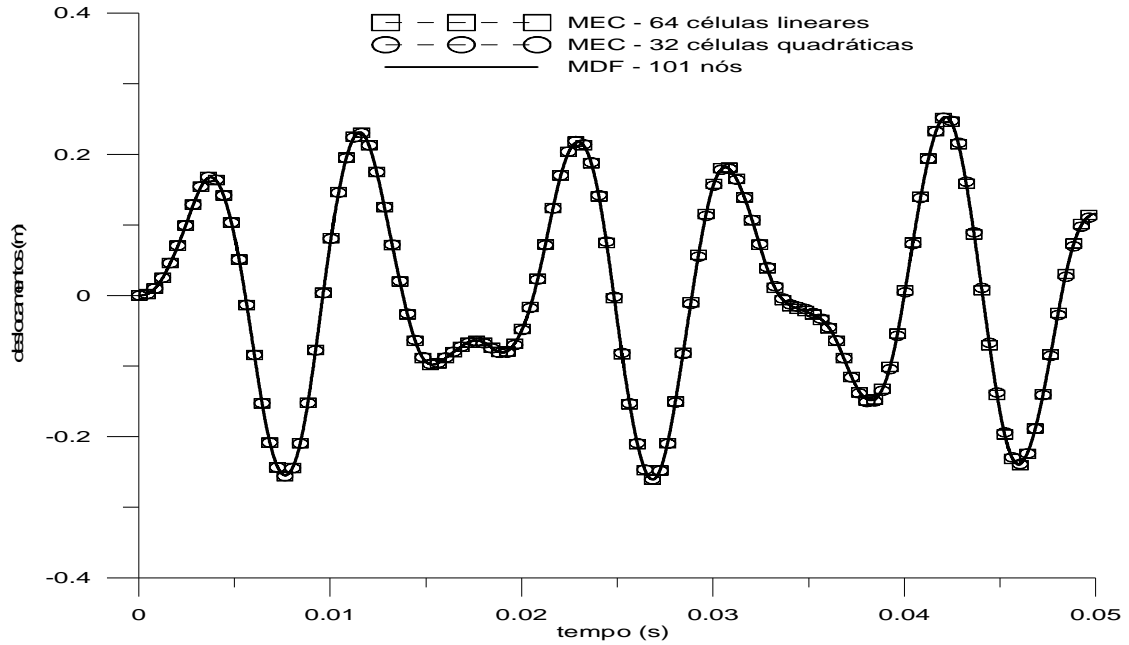


Gráfico 4.2.4.3 - Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga harmônica aplicada no extremo livre da viga

4.2.4.4 – Carga harmônica aplicada na extremidade livre – ressonância associada à flexão

Considerou-se um carregamento $P = 1.000 \text{ kN}$ aplicado no extremo livre da viga. Adotou-se $\omega = \theta_1 \cong 668 \text{ Hz}$, frequência correspondente à ressonância associada ao modo de deformação devido à flexão, para os dados escolhidos.

Observou-se existir uma completa coincidência entre os resultados obtidos pelos diversos métodos.

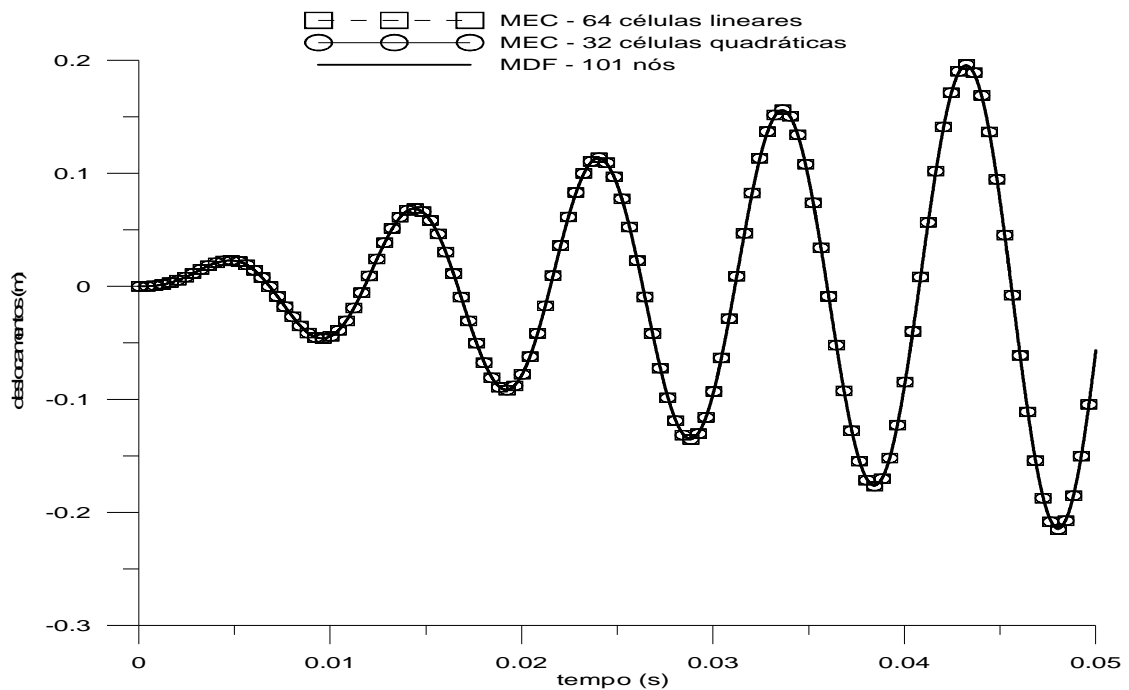


Gráfico 4.2.4.4 - Deslocamentos do extremo livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro

Carga harmônica aplicada no extremo livre da viga

Frequência correspondente à ressonância associada à flexão

4.2.4.5 – Carga impulsiva aplicada na extremidade livre

Considerou-se uma carga $P = 1 \text{ kN}$, aplicada no extremo livre da viga. Para efeito de comparação, em virtude da grande quantidade de dados, os resultados foram colocados em dois gráficos.

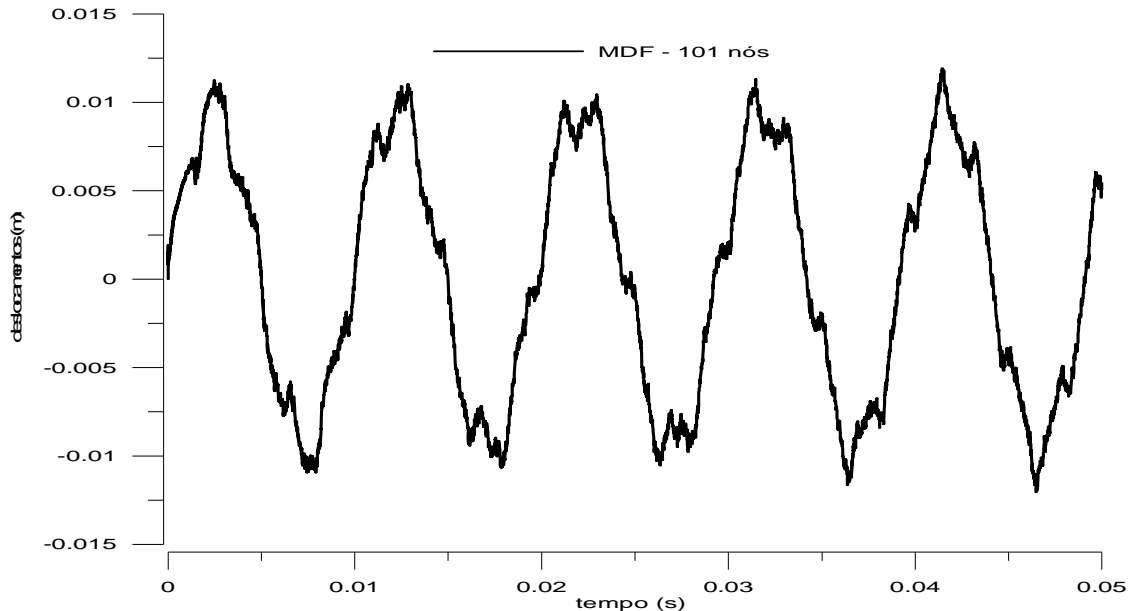


Gráfico 4.2.4.5a – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga impulsiva aplicada no extremo livre da viga
Método das Diferenças Finitas

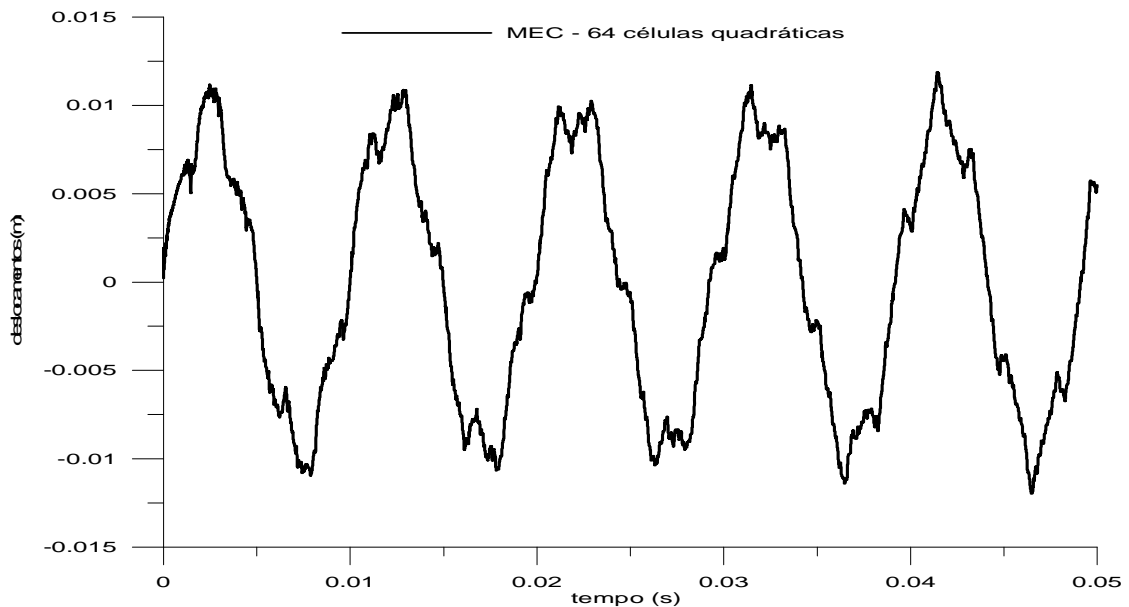


Gráfico 4.2.4.5b – Deslocamentos na extremidade livre de uma viga engastada em um extremo e livre no outro
Carga impulsiva aplicada no extremo livre da viga
Método dos Elementos de Contorno

Capítulo 5

Conclusão

O objetivo básico deste trabalho foi analisar a utilização do Método dos Elementos de Contorno no estudo dos deslocamentos de uma viga de Timoshenko quando por ocorrência de carga estática e de carga dinâmica.

No caso da existência de uma carga estática, as equações analíticas correspondentes foram deduzidas, ocasião em que se procurou evidenciar a influência do esforço cortante nos deslocamentos; visando a facilitar a comparação entre os resultados encontrados com a aplicação das duas teorias, nos apêndices A.1 até A.8 também foram deduzidas as soluções analíticas para uma viga de Euler-Bernoulli, tomados os mesmos casos de apoio e carga.

Na sequência, foram apresentadas as equações diferenciais governantes de uma viga de Timoshenko, no caso da existência de carregamentos dinâmicos.

As correspondentes soluções mediante o uso do Método dos Elementos de Contorno foram então deduzidas. O problema se mostrou governado por um sistema de duas equações diferenciais parciais, de modo que aparecem, na formulação do MEC, duas equações integrais básicas associadas àquelas equações.

A primeira delas apresenta três integrais de domínio: a primeira é dita integral do carregamento, pois a primeira equação diferencial é não homogênea; a segunda, relacionada com a derivada temporal de segunda ordem do deslocamento transversal, aparece devido ao emprego de uma solução

fundamental não dependente do tempo e é, de uma forma geral, a responsável pela formulação chamada MEC-D; finalmente, a terceira integral tem origem por existirem duas equações diferenciais simultâneas.

A segunda equação integral apresenta duas integrais de domínio: uma relacionada com a derivada temporal de segunda ordem da rotação devido à flexão, em virtude do uso de uma solução fundamental não dependente do tempo no desenvolvimento da equação integral MEC, e a outra é devida à existência das duas equações diferenciais governantes, como ocorreu na primeira equação integral.

Para o esquema de marcha no tempo, o método de Houbolt foi empregado, e sua dedução é mostrada no apêndice A.13.

As expressões matemáticas apresentadas neste trabalho foram implementadas em códigos computacionais escritos em linguagem de programação Fortran, e foram utilizadas tanto células lineares como células quadráticas; para buscar a opção mais adequada para a análise, foram efetuadas inicialmente comparações utilizando células lineares, células quadráticas e o Método das Diferenças Finitas, mostradas no apêndice A.15.

A seguir, os resultados encontrados foram comparados graficamente utilizando-se o software Grapher 4. Os exemplos consistiram dos tipos mais comuns de vigas: simplesmente apoiada, duplamente engastada, engastada e apoiada, e engastada e livre, submetidas a uma carga uniformemente distribuída ou concentrada, atuando de forma contínua no tempo, e também sujeitas a carga concentrada harmônica e carga impulsiva.

Para a representação gráfica dos resultados obtidos pelo MEC no caso de existência de uma carga estática, foram considerados:

- i) Carga uniformemente distribuída: $q(x) = 100 \text{ kN/m}$, com 64 células lineares.
- ii) Carga concentrada: $P = 1.000 \text{ kN}$, com 64 células lineares.

Para as vigas simplesmente apoiadas, duplamente engastadas e engastadas e apoiadas, a carga concentrada foi aplicada no ponto $a = 3L/4$ e, para

vigas engastadas em um extremo e livre no outro, a carga concentrada foi aplicada no ponto médio da viga.

No caso de aplicação de uma carga dinâmica, foram considerados:

- i) Carga uniformemente distribuída $q(x)=100 \text{ kN}/m$, com 64 células lineares, 32 células quadráticas e intervalo de tempo $\Delta t = 0,00004s$.
- ii) Carga concentrada $P=1.000 \text{ kN}$, com 64 células lineares, 32 células quadráticas e intervalo de tempo $\Delta t = 0,00004s$.
- iii) Carga harmônica: $P=1.000 \text{ kN}$, frequências $\omega = 50 \text{ Hz}$ e $\omega = 1.000 \text{ Hz}$, com 64 células lineares, 32 células quadráticas e intervalo de tempo $\Delta t = 0,000004s$.
- iv) Carga harmônica com frequência correspondente à ressonância associada ao modo de deformação devido à flexão e ao cisalhamento: $P=1.000 \text{ kN}$, com 64 células quadráticas e intervalo de tempo $\Delta t = 0,000004s$.
- v) Carga impulsiva: $P=1 \text{ kN}$, com 64 células quadráticas e intervalo de tempo $\Delta t = 0,000001s$.

Para vigas simplesmente apoiadas, duplamente engastadas e engastadas e apoiadas, a carga concentrada foi aplicada no ponto médio da viga e, para vigas engastadas em um extremo, e livres no outro, a carga concentrada foi aplicada na extremidade livre da viga.

No caso de vigas simplesmente apoiadas, os resultados obtidos com o MEC foram comparados com as correspondentes soluções analíticas; para os outros três tipos de vigas, os resultados MEC foram comparados com os resultados fornecidos pelo Método das Diferenças Finitas – MDF. Em todos os exemplos mostrados, houve boa concordância entre os resultados MEC e aqueles considerados como básicos.

Foram testados vários espaços de tempo Δt com valores inferiores aos utilizados neste texto e não se observou nenhuma mudança nos resultados obtidos, conservando-se a mesma acurácia.

Portanto, como é possível observar, o Método dos Elementos de Contorno – Domínio (MEC-D) mostrou ser uma técnica numérica eficiente e

com excelentes qualidades para ser utilizada no estudo dos mais diversos problemas dentro da teoria das vigas; espera-se que os resultados apresentados possam servir de estímulo para o desenvolvimento de formulações dependentes do tempo em outros problemas semelhantes.

Existe a possibilidade de serem utilizadas formulações dependentes do tempo na análise de vigas em base elástica e na análise de vigas contínuas; igualmente cabe a pesquisa sobre o emprego de soluções fundamentais que sejam dependentes do tempo ou, ainda, que sejam empregados outros esquemas de avanço no tempo, tais como o esquema de Newmark, que já é amplamente utilizado com o Método dos Elementos Finitos.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTES, H. – **Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams** – Artigo – Institute of Applied Mechanics Carolo Wilhelmina; 81: p. 383-396 – Braunschweig, Germany – 2001.
- [2] BETTI, E. – **Teoria della elasticità** – Il Nuovo Cimento – Italia – 1872.
- [3] BORGES, M. S. de S. – **Análise do efeito da deformabilidade por cisalhamento na flexão de vigas – Formulação geral do problema e determinação do coeficiente de cisalhamento** – Seminário para qualificação ao doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro/Coppe – 1996.
- [4] BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J. – **Boundary Elements: An introductory course** – Computational Mechanics Publications – McGraw-Hill – Southampton – 1989.
- [5] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. – **Boundary Element Techniques – Theory and application in engineering** – Springer-Verlag – Berlin e New York – 1984.
- [6] CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J. – **Scalar wave equation by the Boundary Element Method: a D-BEM approach with constant time-weighting functions** – International Journal for Numerical Methods in Engineering; 81: p. 1281-1297 – Rio de Janeiro – 2010.
- [7] CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J., VANZUIT, R. J. – **Scalar wave equation by the Boundary Element Method: a D-BEM approach with non-homogeneous initial conditions** – Computational Mechanics; vol 44: p. 31-44 – 2009.
- [8] CARRER, J. A. M. – **Dynamic analysis of Timoshenko beams by the Boundary Element Method** – Artigo – Curitiba, PR, Brasil – 2012.
- [9] CHENG, A. H., CHENG, D. T. – **Heritage and early history of the Boundary Element Method** – Engineering Analysis with Boundary Elements; 29: p.268-302 – Mississippi – 2005.

- [10] FLEISCHFRESSER, S. A. – **Análise do efeito da deformabilidade por cisalhamento na flexão de vigas: uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para vigas de Timoshenko** – Seminário para Qualificação ao Doutorado – PPGMNE/UFPR – Curitiba, PR, Brasil – 2012.
- [11] GRAFF, K. F. – **Wave motion in elastic solids** – Dover Publications, Inc. – New York – 1991.
- [12] FREDHOLM, E. I. – **Sur une classe d'équations fonctionnelles** – Acta Math; 27: p.365-390 – 1903.
- [13] HOUBOLT, J. C – **A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft** – Journal of the Aeronautical Sciences; 17: p. 540-550 – 1950.
- [14] JASWON, M. A. – **Integral equation methods in potential theory** - Proceedings of the Royal Society of London – 1963.
- [15] KUPRADZE, V. D. – **The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems** – Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki; 4: p. 683-715 - 1964.
- [16] de LANGRE, E., AXISA, F., GUILBAUT, D. – **Forced flexural vibrations of beams using a time-stepping Boundary Element Method, in Mechanical and Electrical Engineering** – Computational Mechanics Publication; p.139-150 – 1990.
- [17] LUBICH, C. – **Convolution quadratic and discretized operational** – Calculus I – Numerisch Mathematik; 52, p. 129-145 – 1988.
- [18] LUBICH, C. – **Convolution quadratic and discretized operational** – Calculus II – Numerisch Mathematik; 52, p. 413-425 – 1988.
- [19] MANSUR, W. J., HALBRITTER, A. L., TELLES, J. C. DE F. – **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a elasticidade linear bidimensional** – Anais comemorativos dos 15 anos da COPPE/UFRJ; p.1-22 – Rio de Janeiro – 1978.
- [20] MASSONET, C. E. – **Numerical use of integral procedures – Stress Analysis**; Wiley; p. 198-235 – New York – 1965.

- [21] PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D.E. – **Dynamic analysis of beams by the Boundary Element Method** – Computers and Structures; 22: p. 957-964 – 1986.
- [22] RAO, S. S. – **Mechanical vibrations** – Addison-Wesley Publishing Company Inc., 3rd Edition – 1995.
- [23] RIZZO, F. J. – **An integral approach to boundary-value problems of classical elastostatics** – Quarterly Journal of Applied Mathematics; 25: p.83-95 – 1967.
- [24] SHAMES, I. H., DYM, C. L. – **Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics** – New Age International – 1995.
- [25] SCHANZ, M. – **A time domain boundary integral equation for the Euler-Bernoulli beams** – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik; 79: p. 575-576 – 1999.
- [26] SOMIGLIANA, C. – **Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope** – Il Nuovo Cimento; 3: 17-20 – Italia – 1886.
- [27] TIMOSHENKO, S. – **Resistencia de Materiales** – Espasa-Calpe – Madrid – 1954.
- [28] TIMOSHENKO, S. P. – **On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars** – Philosophical Magazine; 41: p. 744-746 – 1921.
- [29] VILLAÇA, S. F., GARCIA, L. F. T. – **Introdução à Teoria da Elasticidade, 4ª edição** – COPPE/UFRJ – Rio de Janeiro – 2000.

Apêndices

A.1 – Viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v^{iv} = q \text{ ou } v^{iv} = \frac{q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se tem:

$$v''' = \frac{1}{EI_z}(qx + C_1)$$

$$v'' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)$$

$$v' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)$$

$$v = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ v'' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v = 0 \\ v'' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

Considerando as duas primeiras condições de contorno, resulta:

$$C_2 = 0 \text{ e } C_4 = 0$$

Considerando a terceira e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \text{ e } C_3 = \frac{qL^3}{24}$$

Substituindo esses valores na expressão de v , resulta:

$$v(x) = \frac{q}{24EI_z}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

A.2 – Viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada – Carga concentrada – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a uma carga aplicada em um ponto $x=a$. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v''' = -Q \quad \text{ou} \quad v''' = -\frac{Q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se obtém:

$$v'' = \frac{-Q}{EI_z} x + C_1$$

$$v' = -\frac{Q}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$v = \frac{Q}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

Para o trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1 = \frac{Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$v_1'' = \frac{-Q_1}{EI_z} x + C_1$$

As condições de contorno são:

Para $x=0$: $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1'' = 0 \end{cases}$; deslocamento e momento nulos, resulta:

$$C_1 = 0 \quad \text{e} \quad C_3 = 0.$$

Substituindo esses valores:

$$v_1 = \frac{Q_1}{6EI_z} x^3 + C_2 x$$

$$v_1' = \frac{-Q_1}{2EI_z} x^2 + C_2$$

$$v_1'' = -\frac{Q_1}{EI_z} x$$

Para o trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2 = \frac{Q_2}{6EI_z} x^3 + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6$$

$$v_2'' = \frac{-Q_2}{EI_z} x + C_4$$

As condições de contorno são:

Para $x = L$: $\begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2'' = 0 \end{cases}$; deslocamento e momento nulos, resulta:

$$C_4 = \frac{Q_2 L}{EI_z} \text{ e } C_5 L + C_6 = -\frac{Q_2 L^3}{3EI_z}.$$

Então:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{6} x^3 + \frac{Q_2 L}{2} x^2 - \frac{Q_2 L^3}{3} \right) + C_5 x - C_5 L$$

$$v_2' = \frac{Q_2}{2EI_z} (-x^2 + 2Lx) + C_5$$

$$v_2'' = \frac{Q_2}{EI_z} (-x + L)$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $v_1''(a) = v_2''(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a}{EI_z} = \frac{-Q_2 a}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z}; \quad (Q_2 - Q_1) a = Q_2 L; \quad -Pa = Q_2 L$$

donde:

$$Q_2 = \frac{-Pa}{L}; \quad Q_1 = \frac{P(L-a)}{L} \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{-Pa}{EI_z}$$

b) As rotações são iguais: $v_1'(a) = v_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_2 = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{Q_2 L}{EI_z} a + C_5$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{2EI_z} a^2 + \frac{P}{EI_z} a^2 = C_5 - C_2$$

$$C_5 - C_2 = \frac{Pa^2}{2EI_z}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^3}{6} + C_2 a = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^3}{6} + \frac{Q_2 L}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_5 a + C_6$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{6} a^3 - \frac{Q_2 L}{2EI_z} a^2 = (C_5 - C_2) a + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z}$$

Obtém-se ainda:

$$C_5 = \frac{Pa(2L^2 + a^2)}{6LEI_z}$$

$$C_2 = \frac{Pa(2L^2 + a^2 - 3La)}{6LEI_z}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{P}{6EI_z} \left[-(L-a)x^3 + a(2L^2 + a^2 - 3La)x \right]$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{Pa}{6LEI_z} \left[x^3 - 3Lx^2 + (2L^2 + a^2)x - La^2 \right]$$

A.3 – Viga de Euler-Bernoulli engastada nos extremos – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v^{iv} = q \text{ ou } v^{iv} = \frac{q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se tem:

$$v''' = \frac{1}{EI_z}(qx + C_1)$$

$$v'' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)$$

$$v' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)$$

$$v = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Introduzindo as duas primeiras condições de contorno, obtém-se:

$$C_3 = 0 \text{ e } C_4 = 0$$

Considerando a terceira e a quarta condições de contorno, resulta:

$$C_1 = -\frac{qL}{2} \text{ e } C_2 = \frac{qL^2}{12}$$

Substituindo esses valores na expressão de v :

$$v(x) = \frac{q}{24EI_z}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)$$

A.4 – Viga de Euler-Bernoulli engastada nos extremos – Carga concentrada – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a uma carga aplicada em um ponto $x = a$. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v''' = -Q \quad \text{ou} \quad v''' = -\frac{Q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se obtém:

$$v'' = \frac{-Q}{EI_z} x + C_1$$

$$v' = -\frac{Q}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$v = \frac{Q}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

Para o trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1 = \frac{Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$v'_1 = \frac{-Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0 : \begin{cases} v_1 = 0 \\ v'_1 = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Portanto: $C_2 = 0$ e $C_3 = 0$.

Substituindo esses valores, resulta:

$$v_1 = \frac{-Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2$$

$$v'_1 = -\frac{Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x$$

$$v''_1 = \frac{-Q_1}{EI_z} x + C_1$$

Para o trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2 = -\frac{Q_2}{6EI_z}x^3 + \frac{C_4}{2}x^2 + C_5x + C_6$$

$$v_2' = -\frac{Q_2}{2EI_z}x^2 + C_4x + C_5$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Portanto:

$$\frac{C_4L^2}{2} + C_5L + C_6 = \frac{Q_2L^3}{6EI_z}$$

$$C_4L + C_5 = \frac{Q_2L^2}{2}$$

Resulta:

$$v_2 = -\frac{Q_2}{6EI_z}x^3 + \frac{C_4}{2}x^2 + C_5x + C_6$$

$$v_2' = -\frac{Q_2}{2EI_z}x^2 + C_4x + C_5$$

$$v_2'' = \frac{-Q_2}{EI_z}x + C_4$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $v_1''(a) = v_2''(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1a}{EI_z} + C_1 = \frac{-Q_2a}{EI_z} + C_4; \quad \frac{(Q_2 - Q_1)}{EI_z}a = C_4 - C_1$$

$$C_4 - C_1 = -\frac{Pa}{EI_z}$$

b) As rotações são iguais: $v_1'(a) = v_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_1a = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_4a + C_5$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{2EI_z}a^2 = (C_4 - C_1)a + C_5$$

$$C_5 = \frac{Pa^2}{2EI_z}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^3}{6} + C_1 a^2 = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^3}{6} + C_4 \frac{a^2}{2} + C_5 a + C_6$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{6EI_z} a^3 = (C_4 - C_1) a^2 + C_5 a + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z}$$

Obtém-se ainda:

$$C_4 = \frac{Q_2 L}{2EI_z} - \frac{C_5}{L} = \frac{Q_2 L^2}{2EI_z} - \frac{Pa^2}{2EI_z}$$

$$C_1 = C_4 + \frac{Pa}{EI_z} = \frac{Q_2 L}{2EI_z} - \frac{Pa^2}{2LEI_z} + \frac{Pa}{EI_z}$$

$$Q_2 = \frac{Pa^2(2a - 3L)}{L^3}$$

$$Q_1 = Q_2 + P = \frac{P(L^3 - 3La + 2a^2)}{L^3}$$

e também:

$$C_4 = \frac{Pa^2(a - 2L)}{L^2 EI_z}$$

$$C_1 = \frac{Pa(L - a)^2}{L^2 EI_z}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{P(L^3 - 3La^2 + 2a^3)}{6L^3 EI_z} x^3 + \frac{Pa(L - a)^2}{2L^2 EI_z} x^2$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{Pa^2(2a - 3L)}{6L^3 EI_z} x^3 + \frac{Pa^2(a - 2L)}{2L^2 EI_z} x^2 + \frac{Pa^2}{2EI_z} x - \frac{Pa^3}{6EI_z}$$

A.5 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v^{iv} = q \quad \text{ou} \quad v^{iv} = \frac{q}{EI_z}. \text{ Por integração sucessiva:}$$

$$v''' = \frac{1}{EI_z}(qx + C_1)$$

$$v'' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)$$

$$v' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)$$

$$v = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0: \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v = 0 \\ v'' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

Introduzindo as duas primeiras condições de contorno, obtém-se:

$$C_3 = 0 \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Considerando a terceira e a quarta condições de contorno, obtém-se:

$$C_1 = -\frac{5qL}{8} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{qL^2}{8}$$

Substituindo esses valores na expressão de v , resulta:

$$v(x) = \frac{q}{48EI_z}(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2)$$

A.6 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e apoiada no outro – Carga concentrada – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a uma carga aplicada em um ponto $x = a$. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v''' = -Q \quad \text{ou} \quad v''' = -\frac{Q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se obtém:

$$v'' = \frac{-Q}{EI_z} x + C_1$$

$$v' = -\frac{Q}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$v = \frac{Q}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

Para o trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1 = \frac{Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$v_1' = \frac{-Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0 : \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Portanto: $C_2 = 0$ e $C_3 = 0$.

Substituindo esses valores, resulta:

$$v_1 = \frac{-Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2$$

$$v_1' = -\frac{Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x$$

$$v_1'' = \frac{-Q_1}{EI_z} x + C_1$$

Para o trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2 = \frac{Q_2}{6EI_z} x^3 + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6$$

$$v_2'' = \frac{-Q_2}{EI_z} x + C_4$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_2'' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e momento nulos}$$

Resulta:

$$C_4 = \frac{Q_2 L}{EI_z} \text{ e } C_5 L + C_6 = -\frac{Q_2 L^3}{3EI_z}.$$

Então:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{-Q_2}{6} x^3 + \frac{Q_2 L}{2} x^2 - \frac{Q_2 L^3}{3} \right) + C_5 x - C_5 L$$

$$v_2' = \frac{Q_2}{2EI_z} (-x^2 + 2Lx) + C_5$$

$$v_2'' = \frac{Q_2}{EI_z} (-x + L)$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $v_1''(a) = v_2''(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1 a}{EI_z} + C_1 = \frac{-Q_2 a}{EI_z} + \frac{Q_2 L}{EI_z}; \quad \frac{(Q_2 - Q_1) a}{EI_z} + C_1 = \frac{Q_2 L}{EI_z}; \quad C_1 = \frac{Q_2 L + Pa}{EI_z}$$

b) As rotações são iguais: $v_1'(a) = v_2'(a)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_1 a &= \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{Q_2 L}{EI_z} a + C_5 \\ \frac{(Q_2 - Q_1)}{2EI_z} a^2 + \frac{(Q_2 L + Pa)}{EI_z} a &= \frac{Q_2 La}{EI_z} + C_5 \\ C_5 &= \frac{Pa^2}{2EI_z} \end{aligned}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Q_1}{EI_z} \frac{a^3}{6} + C_1 \frac{a^2}{2} = \frac{-Q_2}{EI_z} \frac{a^3}{6} + \frac{Q_2 L}{EI_z} \frac{a^2}{2} + C_5 a + C_6$$

$$\frac{(Q_2 - Q_1)}{6EI_z} a^3 + \frac{(Q_2 L + Pa)}{2EI_z} a^2 = \frac{Q_2 L a^2}{2EI_z} + \frac{Pa^3}{2EI_z} + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z}$$

Obtém-se ainda:

$$Q_2 = -\frac{P(3L-a)a^3}{2L^3}$$

$$Q_1 = \frac{P(2L^3 - 3La^2 + a^3)}{2L^3}$$

$$C_4 = -\frac{P(3L-a)a^2}{2L^2 EI_z}$$

$$C_1 = \frac{P(2L^2 - 3La + a^2)a}{2L^2 EI_z}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{P(2L^3 - 3La^2 + a^3)}{12L^3 EI_z} x^2 (-x + 3La)$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{Pa^2}{12L^3 EI_z} [(3L-a)x^3 - 3L(3L-a)x^2 + 6L^3 x - 2L^3 a]$$

A.7 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e livre no outro – Carga uniformemente distribuída – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a um carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v^{iv} = q \quad \text{ou} \quad v^{iv} = \frac{q}{EI_z}. \quad \text{Por integração sucessiva:}$$

$$v''' = \frac{1}{EI_z}(qx + C_1)$$

$$v'' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)$$

$$v' = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)$$

$$v = \frac{1}{EI_z}\left(q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0 : \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

$$\text{Para } x = L : \begin{cases} v_2'' = 0 \\ v_2''' = 0 \end{cases}; \text{ momento e cortante nulos}$$

Considerando as duas primeiras condições de contorno, obtém-se:

$$C_3 = 0 \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Considerando a terceira e a quarta condições de contorno, obtém-se:

$$C_1 = -qL \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{qL^2}{2}$$

Substituindo esses valores na expressão de v , resulta:

$$v(x) = \frac{q}{24EI_z}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

A.8 – Viga de Euler-Bernoulli engastada em um extremo e livre no outro – Carga concentrada – Solução analítica

Tem-se uma viga de comprimento L , simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a uma carga aplicada em um ponto $x = a$. A equação diferencial abaixo rege os deslocamentos de uma viga de Euler-Bernoulli:

$$EI_z v'''' = -Q \quad \text{ou} \quad v'''' = -\frac{Q}{EI_z}$$

Por integração sucessiva se obtém:

$$v'' = \frac{-Q}{EI_z} x + C_1$$

$$v' = -\frac{Q}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$v = \frac{Q}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

Para o trecho da viga anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1 = \frac{Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$v_1' = \frac{-Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x + C_2$$

As condições de contorno são:

$$\text{Para } x = 0 : \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1' = 0 \end{cases}; \text{ deslocamento e rotação nulos}$$

Portanto: $C_2 = 0$ e $C_3 = 0$.

Substituindo esses valores, resulta:

$$v_1 = \frac{-Q_1}{6EI_z} x^3 + \frac{C_1}{2} x^2$$

$$v_1' = -\frac{Q_1}{2EI_z} x^2 + C_1 x$$

$$v_1'' = \frac{-Q_1}{EI_z} x + C_1$$

Para o trecho da viga posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2 = -\frac{Q_2}{6EI_z}x^3 + \frac{C_4}{2}x^2 + C_5x + C_6$$

$$v_2' = -\frac{Q_2}{2EI_z}x^2 + C_4x + C_5$$

$$v_2'' = \frac{-Q_2}{EI_z}x + C_4$$

$$\text{Para } x = L: \begin{cases} v_2'' = 0 \\ v_2''' = 0 \end{cases}; \text{ momento e cortante nulos}$$

Portanto:

$$Q_2 = 0; \quad C_4 = \frac{Q_2L}{EI_z} = 0; \quad Q = P$$

Resulta então:

$$v_2 = C_5x + C_6$$

Aplicam-se agora as condições existentes no ponto de aplicação da carga $x = a$, com $P = Q_1 - Q_2$:

a) Os momentos são iguais: $v_1''(a) = v_2''(a)$. Portanto:

$$\frac{-Pa}{EI_z} + C_1 = 0; \quad C_1 = \frac{Pa}{EI_z}$$

b) As rotações são iguais: $v_1'(a) = v_2'(a)$. Portanto:

$$\frac{-P}{EI_z} \frac{a^2}{2} + \frac{Pa^2}{2EI_z} = C_5$$

$$C_5 = \frac{Pa^2}{2EI_z}$$

c) Os deslocamentos são iguais: $v_1(a) = v_2(a)$. Portanto:

$$\frac{-Pa^3}{6EI_z} + \frac{Pa^3}{2EI_z} = \frac{Pa^3}{2EI_z} + C_6$$

$$C_6 = -\frac{Pa^3}{6EI_z}$$

Assim:

Trecho anterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_1(x) = \frac{P}{6EI_z} x^2 (x + 3a)$$

Trecho posterior ao ponto de aplicação da carga:

$$v_2(x) = \frac{Pa^2}{6EI_z} (3x - a)$$

A.9 – Viga de Timoshenko – Carga estática – MEC – Primeira equação integral de contorno

A equação (2.20) pode ser reescrita como:

$$v'' - \psi' = -\frac{q}{\kappa GA}$$

As equações do Método de Elementos de Contorno são obtidas pelo Método dos Resíduos Ponderados; considera-se, por exemplo, \hat{v} como a condição de contorno referente ao extremo $x=0$, e \hat{v}' como a condição de contorno referente ao extremo $x=L$.

Isto posto, sejam \bar{w} e $\overline{\bar{w}}$ duas funções de ponderação a determinar; adotando-se a função v^* como a solução fundamental, tem-se:

$$\int_0^L (v'' - \psi') v^* dx + \int_0^L \frac{q}{\kappa GA} v^* dx = (v - \hat{v}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (v' - \hat{v}') \overline{\bar{w}} \Big|_{x=L}$$

Depois de duas integrações por partes, obtém-se:

$$\int_0^L v'' v^* dx = v' v^* \Big|_0^L - v \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L v \frac{d^2 v^*}{dx^2} dx$$

e resulta:

$$\begin{aligned} v' v^* \Big|_0^L - v \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L v \frac{d^2 v^*}{dx^2} dx - \int_0^L \psi' v^* dx + \int_0^L \frac{q}{\kappa GA} v^* dx = \\ = (v - \hat{v}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (v' - \hat{v}') \overline{\bar{w}} \Big|_{x=L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L v \frac{d^2 v^*}{dx^2} dx - \int_0^L \psi' v^* dx + \int_0^L \frac{q}{\kappa GA} v^* dx = \\ = v \bar{w} \Big|_{x=0} - \hat{v} \bar{w} \Big|_{x=0} + v' \overline{\bar{w}} \Big|_{x=L} - \hat{v}' \overline{\bar{w}} \Big|_{x=L} - \\ - v' v^* \Big|_{x=L} + v' v^* \Big|_{x=0} + v \frac{dv^*}{dx} \Big|_{x=L} - v \frac{dv^*}{dx} \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

Faz-se:

$$v \bar{w} \Big|_{x=0} - v \frac{dv^*}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \bar{w} = \frac{dv^*}{dx}$$

$$v' \bar{w} \Big|_{x=L} - v' v^* \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow \bar{w} = v^*$$

A expressão resultante é:

$$\int_0^L v \frac{d^2 v^*}{dx^2} dx = \int_0^L \psi' v^* dx - \int_0^L \frac{q}{kGA} v^* dx + v \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^L - v' v^* \Big|_0^L$$

Com a admissão de que v^* seja tal que $\frac{d^2 v^*}{dx^2} = \delta(x - \xi)$, onde $\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac, a expressão anterior se reescreve como:

$$v(\xi) = \int_0^L \psi' v^* dx - \int_0^L \frac{q}{kGA} v^* dx + v \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^L - v' v^* \Big|_0^L$$

Integra-se por partes a primeira integral de domínio na equação anterior e, em vista de ser $Q = \kappa GA(v' - \psi)$, faz-se $\frac{Q}{\kappa GA} = p(x)$ e chega-se à equação integral de contorno relativa à primeira equação diferencial:

$$v(\xi) = - \int_0^L \psi \frac{dv^*}{dx} dx - \int_0^L \frac{q}{\kappa GA} v^* dx + v \frac{dv^*}{dx} \Big|_0^L - p v^* \Big|_0^L$$

A.10 – Viga de Timoshenko – Carga estática – MEC – Segunda equação integral de contorno

A segunda equação governante pode ser escrita da seguinte forma:

$$\psi'' - \frac{\kappa GA}{EI_z} \psi + \frac{\kappa GA}{EI_z} v' = 0, \text{ ou ainda, fazendo } \beta = \frac{\kappa GA}{EI_z} :$$

$$\psi'' - \beta \psi + \beta v' = 0$$

De forma análoga ao procedimento efetuado para a primeira equação, considera-se $\hat{\psi}$ como a condição de contorno relativa ao extremo $x=0$, e $\bar{\psi}'$ como a condição de contorno relativa ao extremo $x=L$.

Sejam \bar{w} e $\bar{\bar{w}}$ funções de ponderação a determinar; adota-se como solução fundamental a função ψ^* , e tem-se:

$$\int_0^L (\psi'' - \beta \psi) \psi^* dx + \int_0^L \beta v' \psi^* dx = (\psi - \hat{\psi}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (\psi' - \hat{\psi}') \bar{\bar{w}} \Big|_{x=L}$$

Ao se integrar duas vezes por partes obtém-se:

$$\int_0^L \psi'' \psi^* dx = \psi' \psi^* \Big|_0^L - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L \psi \frac{d^2 \psi^*}{dx^2} dx$$

donde:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(\psi \frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - \beta \psi \psi^* \right) dx + \psi' \psi^* \Big|_0^L - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_0^L + \int_0^L \beta v' \psi^* dx = \\ & = (\psi - \hat{\psi}) \bar{w} \Big|_{x=0} + (\psi' - \hat{\psi}') \bar{\bar{w}} \Big|_{x=L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \psi \left(\frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - \beta \psi^* \right) dx = - \int_0^L \beta v' \psi^* dx + \\ & + \psi \bar{w} \Big|_{x=0} - \hat{\psi} \bar{w} \Big|_{x=0} + \psi' \bar{\bar{w}} \Big|_{x=L} - \hat{\psi}' \bar{\bar{w}} \Big|_{x=L} - \\ & - \psi' \psi^* \Big|_{x=L} + \psi' \psi^* \Big|_{x=0} + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=L} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

Faz-se:

$$\psi \bar{w} \Big|_{x=0} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \bar{w} = \frac{d\psi^*}{dx}$$

$$\psi' \bar{w} \Big|_{x=L} - \psi' \psi^* \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow \bar{w} = \psi^*$$

e resulta:

$$\int_0^L \psi \left(\frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - \beta \psi^* \right) dx = - \int_0^L \beta v' \psi^* dx - \hat{\psi} \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=0} - \hat{\psi}' \psi^* \Big|_{x=L} + \psi' \psi^* \Big|_{x=0} + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=L}$$

$$\int_0^L \psi \left(\frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - \beta \psi^* \right) dx = - \int_0^L \beta v' \psi^* dx - \hat{\psi} \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=0} - \hat{\psi}' \psi^* \Big|_{x=L} + \psi' \psi^* \Big|_{x=0} + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_{x=L}$$

Admite-se, agora, uma função ψ^* tal que $\frac{d^2 \psi^*}{dx^2} - \beta \psi^* = \delta(x - \xi)$, onde

$\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac; a expressão resultante se escreve como:

$$\psi(\xi) = - \int_0^L \beta v' \psi^* dx + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_0^L - \psi' \psi^* \Big|_0^L$$

Assim, a equação integral de contorno referente à segunda equação diferencial é:

$$\psi(\xi) = \beta \int_0^L v \frac{d\psi^*}{dx} dx - \beta v \psi^* \Big|_0^L + \psi \frac{d\psi^*}{dx} \Big|_0^L - \psi' \psi^* \Big|_0^L$$

A.11 – Viga de Timoshenko – Células lineares

No caso de uma célula linear definida no intervalo $\Omega_j = [x_1^j, x_2^j]$, $1 \leq j \leq (N+1)$ e uma variável genérica $w(x,t)$ que assuma o valor de $\ddot{v}(x,t)$ ou $\psi(x,t)$, na equação (3.5), ou $\dot{\psi}(x,t)$ ou $v(x,t)$, na equação (3.14), tem-se (com a integração que envolve o carregamento tratada separadamente, de acordo com o tipo de carga):

$$w(x,t) = \phi_1^j w(x_1^j, t) + \phi_2^j w(x_2^j, t)$$

na qual:

$$\begin{cases} \phi_1^j = \frac{(x_2^j - x)}{h} \\ \phi_2^j = \frac{(x - x_1^j)}{h} \end{cases}$$

com $h = x_2^j - x_1^j$

A integração de domínio deve levar em consideração a posição relativa do ponto fonte ξ_k , $0 \leq \xi_k \leq L$, em relação à célula $\Omega_j = [x_1^j, x_2^j]$. Foram considerados dois casos: no primeiro, $\xi_k \leq x_1$, e no segundo, $\xi_k \geq x_2$. As expressões resultantes, para cada caso, são dadas adiante:

i) $\xi_k \leq x_1$

As seguintes integrais aparecem na equação (3.5):

$$\int_{x_1}^{x_2} v^*(\xi, x) \ddot{v}(x, t) dx = \begin{bmatrix} m_1^{kj} & m_2^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1^j \\ \ddot{v}_2^j \end{Bmatrix}$$

e:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) dx = \begin{bmatrix} p_1^{kj} & p_2^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1^j \\ \psi_2^j \end{Bmatrix}$$

Os termos dados pelas expressões abaixo contribuem na montagem das submatrizes \mathbf{M}^{cc} , \mathbf{M}^{cd} , \mathbf{M}^{dc} e \mathbf{M}^{dd} :

$$\begin{aligned}
m_1^{kj} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)(x - \xi)}{\Delta L} dx = \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \frac{(x_2 - \xi - u)u}{\Delta L} du \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ (x_2 - \xi) \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u du - \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u^2 du \right\} \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ (x_2 - \xi) \frac{[(x_2 - \xi)^2 - (x_1 - \xi)^2]}{2} - \frac{[(x_2 - \xi)^3 - (x_1 - \xi)^3]}{3} \right\} \\
m_2^{kj} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x - \xi)}{\Delta L} dx = \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \frac{(u + \xi - x_1)u}{\Delta L} du \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ -(x_1 - \xi) \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u du + \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u^2 du \right\} \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ -(x_2 - \xi) \frac{[(x_2 - \xi)^2 - (x_1 - \xi)^2]}{2} + \frac{[(x_2 - \xi)^3 - (x_1 - \xi)^3]}{3} \right\}
\end{aligned}$$

Os termos dados pelas expressões abaixo contribuem para a montagem das submatrizes \mathbf{P}^{cc} , \mathbf{P}^{cd} , \mathbf{P}^{dc} e \mathbf{P}^{dd} :

$$\begin{aligned}
p_1^{kj} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)}{\Delta L} \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2\Delta L} (-1) \int_{x_2 - x_1}^0 u du \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} u du = \frac{1}{2\Delta L} \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\Delta L} = \frac{\Delta L}{4} \\
p_2^{kj} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)}{\Delta L} \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{x_2 - x_1} u du \\
&= \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} u du = \frac{1}{2\Delta L} \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\Delta L} = \frac{\Delta L}{4}
\end{aligned}$$

Na equação (3.14), aparecem as seguintes integrais:

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi^*(\xi, x) \ddot{\psi}(x, t) dx = \begin{bmatrix} \bar{m}_1^{kj} & \bar{m}_2^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_1^j \\ \ddot{\psi}_2^j \end{Bmatrix}$$

e:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) dx = \begin{bmatrix} \bar{p}_1^{kj} & \bar{p}_2^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^j \\ v_2^j \end{Bmatrix}$$

As submatrizes \mathbf{M}^{cc} , \mathbf{M}^{cd} , \mathbf{M}^{dc} e \mathbf{M}^{dd} são construídas com a contribuição dos termos:

$$\bar{m}_1^{kj} = \frac{2\cosh\left[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)\right] - 2(1 + \beta h^2)\cosh\left[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)\right]}{4\beta^2 h^2} -$$

$$\frac{\sqrt{\beta}h\left\{3\sinh\left[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)\right] + \sinh\left[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)\right]\right\}}{4\beta^2 h^2}$$

$$\bar{m}_2^{kj} = \frac{\cosh\left[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)\right] - \cosh\left[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)\right]}{\beta^2 h^2} +$$

$$\frac{\sqrt{\beta}h\left\{\sinh\left[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)\right] + \sinh\left[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)\right]\right\}}{\beta^2 h^2}$$

As submatrizes \mathbf{P}^{cc} , \mathbf{P}^{cd} , \mathbf{P}^{dc} e \mathbf{P}^{dd} são construídas com a contribuição dos termos abaixo:

$$\bar{p}_1^{kj} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)}{\Delta L} \frac{\cosh(\alpha(x - \xi))}{2} dx = \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \frac{(x_2 - \xi - u)}{\Delta L} \frac{\cosh(\alpha u)}{2} du$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ (x_2 - \xi) \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \cosh(\alpha u) du - \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u \cosh(\alpha u) du \right\}$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ \frac{x_2 [\sinh(\alpha x_2) - \sinh(\alpha x_1)]}{\alpha} - \frac{[x_2 \sinh(\alpha x_2) - x_1 \sinh(\alpha x_1)]}{\alpha} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\Delta L} \left\{ \frac{[\cosh(\alpha x_2) - \cosh(\alpha x_1)]}{\alpha^2} \right\}$$

$$\bar{p}_2^{kj} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)}{\Delta L} \frac{\cosh(\alpha(x - \xi))}{2} dx = \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \frac{(u + \xi - x_1)}{\Delta L} \frac{\cosh(\alpha u)}{2} du$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ -(x_2 - \xi) \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} \cosh(\alpha u) du + \int_{x_1 - \xi}^{x_2 - \xi} u \cosh(\alpha u) du \right\}$$

$$= \frac{1}{2\Delta L} \left\{ -\frac{x_1 [\sinh(\alpha x_2) - \sinh(\alpha x_1)]}{\alpha} + \frac{[x_2 \sinh(\alpha x_2) - x_1 \sinh(\alpha x_1)]}{\alpha} \right\}$$

$$- \frac{1}{2\Delta L} \left\{ \frac{[\cosh(\alpha x_2) - \cosh(\alpha x_1)]}{\alpha^2} \right\}$$

ii) $\xi_k \geq x_2$

Os resultados para este caso são iguais aos dados pelas equações mostradas anteriormente, porém multiplicados por -1.

A.12 – Viga de Timoshenko – Células quadráticas

No caso de uma célula quadrática definida no intervalo $\Omega_j = [x_1^j, x_3^j]$, $1 \leq j \leq (N+1)$ e uma variável genérica $w(x,t)$ que assuma o valor de $\ddot{v}(x,t)$ ou $\psi(x,t)$, na equação (3.5), ou $\ddot{w}(x,t)$ ou $v(x,t)$, na equação (3.14), tem-se (com a integração que envolve o carregamento tratada separadamente, de acordo com o tipo de carga):

$$w(x,t) = \phi_1^j w(x_1^j, t) + \phi_2^j w(x_2^j, t) + \phi_3^j w(x_3^j, t)$$

na qual:

$$\begin{cases} \phi_1^j = \frac{(x-x_2^j)(x-x_3^j)}{2h^2} \\ \phi_2^j = \frac{(x-x_1^j)(x-x_3^j)}{h^2} \\ \phi_3^j = \frac{(x-x_1^j)(x-x_2^j)}{2h^2} \end{cases}$$

com $h = x_2^j - x_1^j = x_3^j - x_2^j$

A integração de domínio deve levar em consideração a posição relativa do ponto fonte $\xi_k, 0 \leq \xi_k \leq L$, em relação à célula $\Omega_j = [x_1^j, x_3^j]$. Foram considerados três casos: no primeiro, $\xi_k \leq x_1$, no segundo, $\xi_k \equiv x_2$ e, no último, $\xi_k \geq x_2$. As expressões resultantes, para cada caso, são dadas adiante:

i) $\xi_k \leq x_1$

As seguintes integrais aparecem na equação (3.5):

$$\int_{x_1}^{x_3} v^*(\xi, x) \ddot{v}(x, t) dx = \begin{bmatrix} m_1^{kj} & m_2^{kj} & m_3^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1^j \\ \ddot{v}_2^j \\ \ddot{v}_3^j \end{Bmatrix}$$

e:

$$\int_{x_1}^{x_3} \frac{\partial v^*(\xi, x)}{\partial x} \psi(x, t) dx = \begin{bmatrix} p_1^{kj} & p_2^{kj} & p_3^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1^j \\ \psi_2^j \\ \psi_3^j \end{Bmatrix}$$

Os termos dados pelas expressões abaixo contribuem na montagem das submatrizes \mathbf{M}^{cc} , \mathbf{M}^{cd} , \mathbf{M}^{dc} e \mathbf{M}^{dd} :

$$m_1^{kj} = \frac{(x_1 - \xi)h}{6}; m_2^{kj} = \frac{(x_2 - \xi)h}{3}; m_3^{kj} = \frac{(x_3 - \xi)h}{6}$$

Os termos dados pelas expressões abaixo contribuem para a montagem das submatrizes \mathbf{P}^{cc} , \mathbf{P}^{cd} , \mathbf{P}^{dc} e \mathbf{P}^{dd} :

$$p_1^{kj} = \frac{h}{6}; p_2^{kj} = \frac{2h}{3}; p_3^{kj} = \frac{h}{6}$$

Na equação (3.14), aparecem as seguintes integrais:

$$\int_{x_1}^{x_3} \psi^*(\xi, x) \ddot{w}(x, t) dx = \begin{bmatrix} \bar{m}_1^{kj} & \bar{m}_2^{kj} & \bar{m}_3^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1^j \\ \ddot{w}_2^j \\ \ddot{w}_3^j \end{Bmatrix}$$

e:

$$\int_{x_1}^{x_3} \frac{\partial \psi^*(\xi, x)}{\partial x} v(x, t) dx = \begin{bmatrix} \bar{p}_1^{kj} & \bar{p}_2^{kj} & \bar{p}_3^{kj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ v_3^j \end{Bmatrix}$$

As submatrizes \mathbf{M}^{cc} , \mathbf{M}^{cd} , \mathbf{M}^{dc} e \mathbf{M}^{dd} são construídas com a contribuição dos termos:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1^{kj} &= \frac{2 \cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] - 2(1 + \beta h^2) \cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)]}{4\beta^2 h^2} - \\ &\frac{\sqrt{\beta} h \{ 3 \sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + \sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] \}}{4\beta^2 h^2} \\ \bar{m}_2^{kj} &= \frac{\cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] - \cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)]}{\beta^2 h^2} + \\ &\frac{\sqrt{\beta} h \{ \sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + \sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] \}}{\beta^2 h^2} \\ \bar{m}_3^{kj} &= \frac{2(1 + \beta h^2) \cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] - 2 \cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)]}{4\beta^2 h^2} - \\ &\frac{\sqrt{\beta} h \{ \sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + 3 \sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] \}}{4\beta^2 h^2} \end{aligned}$$

As submatrizes $\mathbf{P}^{cc}, \mathbf{P}^{cd}, \mathbf{P}^{dc}$ e \mathbf{P}^{dd} são construídas com a contribuição dos termos abaixo:

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^{kj} &= \frac{2\sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] - 2(1 + \beta h^2)\sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)]}{4\beta^{3/2}h^2} - \\ &\frac{\sqrt{\beta}h\{3\cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + \cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)]\}}{4\beta^2h^2} \\ \bar{p}_2^{kj} &= \frac{\sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] - \sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)]}{\beta^2h^2} + \\ &\frac{\sqrt{\beta}h\{\cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + \cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)]\}}{\beta^{3/2}h^2} \\ \bar{p}_3^{kj} &= \frac{2(1 + \beta h^2)\sinh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)] - 2\sinh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)]}{4\beta^2h^2} - \\ &\frac{\sqrt{\beta}h\{\cosh[\sqrt{\beta}(x_1 - \xi)] + 3\cosh[\sqrt{\beta}(x_3 - \xi)]\}}{4\beta^{3/2}h^2}\end{aligned}$$

ii) $\xi_k \equiv x_2$

Na equação (3.5), se tem:

$$m_1^{kj} = \frac{h^2}{8}; m_2^{kj} = \frac{h^2}{4}; m_3^{kj} = \frac{h^2}{8}$$

e:

$$p_1^{kj} = -\frac{h}{4}; p_2^{kj} = 0; p_3^{kj} = \frac{h}{4}$$

Na equação (3.14), se tem:

$$\begin{aligned}\bar{m}_1^{kj} &= \frac{(2 + \beta h^2)\cosh(\sqrt{\beta}h) - 2[1 + \beta h \sinh(\sqrt{\beta}h)]}{2\beta^2h^2} \\ \bar{m}_2^{kj} &= \frac{2[1 - \cosh(\sqrt{\beta}h) + \sqrt{\beta}h \sinh(\sqrt{\beta}h)] + \beta h^2}{\beta^2h^2}\end{aligned}$$

$$\bar{m}_3^{kj} = \frac{(2 + \beta h^2) \cosh(\sqrt{\beta}h) - 2[1 + \sqrt{\beta}h \sinh(\sqrt{\beta}h)]}{2\beta^2 h^2}$$

e:

$$\bar{p}_1^{kj} = \frac{\cosh(\sqrt{\beta}h) - \sqrt{\beta}h \sinh(\sqrt{\beta}h) - 1}{2\beta h}$$

$$\bar{p}_2^{kj} = 0$$

$$\bar{p}_3^{kj} = \frac{\sqrt{\beta}h \sinh(\sqrt{\beta}h) - \cosh(\sqrt{\beta}h) + 1}{2\beta h}$$

iii) $\xi_k \geq x_2$

Os resultados para este caso são iguais aos dados pelas equações mostradas anteriormente, porém multiplicados por -1.

A.13 – Método de Houbolt

Conhecidas as posições $v_{n-2}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}$ de uma variável v nos tempos $t_{n-2}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ respectivos, distantes entre si de Δt unidades de tempo, deseja-se calcular o valor do polinômio de Lagrange que interpola esses pontos, assim como o valor de $\left. \frac{d^2 p_3(t)}{dt^2} \right|_{t=t_n}$ e $\left. \frac{d^2 p_3(t)}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}}$ e, a partir desse ponto, estabelecer o

Método de Houbolt para o cálculo das derivadas de primeira e de segunda ordem de v em relação ao tempo.

Ora, um polinômio de Lagrange de 3° grau pode ser escrito sob a forma:

$$p_3(t) = v^{n+1} \cdot L_{n+1}(t) + v^n \cdot L_n(t) + v^{n-1} \cdot L_{n-1}(t) + v^{n-2} \cdot L_{n-2}(t).$$

com:

$$\begin{cases} t_{n-2} = t_n - 2\Delta t \\ t_{n-1} = t_n - \Delta t \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{cases}$$

Tem-se assim:

$$\begin{aligned} L_{n-2}(t) &= \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(t_{n-2}-t_{n-1})(t_{n-2}-t_n)(t_{n-2}-t_{n+1})} = \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(-\Delta t)(-2\Delta t)(-3\Delta t)} = \\ &= \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{-6\Delta t^3} \\ L_{n-1}(t) &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(t_{n-1}-t_{n-2})(t_{n-1}-t_n)(t_{n-1}-t_{n+1})} = \frac{(t-t_{n-2})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(\Delta t)(-\Delta t)(-2\Delta t)} = \\ &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{2\Delta t^3} \\ L_n(t) &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})}{(t_n-t_{n-2})(t_n-t_{n-1})(t_n-t_{n+1})} = \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{(2\Delta t)(\Delta t)(-\Delta t)} = \\ &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})}{-3\Delta t^3} \\ L_{n+1}(t) &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_n)}{(t_{n+1}-t_{n-2})(t_{n+1}-t_{n-1})(t_{n+1}-t_n)} = \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_n)}{(3\Delta t)(2\Delta t)(\Delta t)} = \\ &= \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_n)}{6\Delta t^3} \end{aligned}$$

Portanto, o polinômio será:

$$\begin{aligned}
p_3(t) &= v^{n+1} \cdot \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_n)}{6\Delta t^3} + v^n \cdot \frac{(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})}{-2\Delta t^3} \\
&v^{n-1} \cdot \frac{(t-t_{n-2})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{2\Delta t^3} + v^{n-2} \cdot \frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{-6\Delta t^3} = \\
&\frac{v^{n+1}(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_n) - 3v^n(t-t_{n-2})(t-t_{n-1})(t-t_{n+1}) +}{6\Delta t^3} + \\
&\frac{3v^{n-1}(t-t_{n-2})(t-t_n)(t-t_{n+1}) - v^{n-2}(t-t_{n-1})(t-t_n)(t-t_{n+1})}{6\Delta t^3}
\end{aligned}$$

Derivando o polinômio em relação à variável t :

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{1}{6\Delta t^3} \left\{ \begin{aligned} &[(t-t_{n-1})(t-t_n) + (t-t_{n-2})(t-t_n) + (t-t_{n-2})(t-t_{n-1})]v^{n+1} - \\ &-3[(t-t_{n-1})(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-2})(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-2})(t-t_{n-1})]v^n + \\ &+3[(t-t_n)(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-2})(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-2})(t-t_n)]v^{n-1} - \\ &-[(t-t_n)(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-1})(t-t_{n+1}) + (t-t_{n-1})(t-t_n)]v^{n-2} \end{aligned} \right\}$$

Fazendo $t = t_{n+1}$, resulta:

$$\dot{v}_{n+1} = \left. \frac{dp_3}{dt} \right|_{t=t_{n+1}} = \frac{1}{6\Delta t} (11v_{n+1} - 18v_n + 9v_{n-1} - 2v_{n-2}),$$

que fornece o valor da derivada de primeira ordem da função v , para $t = t_{n+1}$.

Derivando o polinômio novamente em relação a t :

$$\frac{d^2 p_3}{dt^2} = \frac{1}{6\Delta t^3} \left\{ \begin{aligned} &[t-t_n + t-t_{n-1} + t-t_n + t-t_{n-2} + t-t_{n-1} + t-t_{n-2}]v^{n+1} - \\ &-3[t-t_{n+1} + t-t_{n-1} + t-t_{n+1} + t-t_{n-2} + t-t_{n-1} + t-t_{n-2}]v^n + \\ &+3[t-t_{n+1} + t-t_n + t-t_{n+1} + t-t_{n-2} + t-t_n + t-t_{n-2}]v^{n-1} - \\ &-[t-t_{n+1} + t-t_n + t-t_{n+1} + t-t_{n-1} + t-t_n + t-t_{n-1}]v^{n-2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d^2 p_3}{dt^2} = \frac{1}{6\Delta t^3} \left\{ \begin{aligned} &[6t - 6t_n + 6\Delta t]v^{n+1} - 3[6t - 6t_n + 4\Delta t]v^n + \\ &+3[6t - 6t_n + 2\Delta t]v^{n-1} - [6t - 6t_n]v^{n-2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{d^2 p_3}{dt^2} = \frac{1}{\Delta t^3} \left\{ (v^{n+1} - 3v^n + 3v^{n-1} - v^{n-2})(t-t_n) - (v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1})\Delta t \right\}$$

Fazendo $t = t_n$, resulta:

$$\left. \frac{d^2 p_3}{dt^2} \right|_{t=t_n} = \frac{1}{\Delta t^2} (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1})$$

ou seja:

$$\left. \frac{d^2 p_3}{dt^2} \right|_{t=t_n} = \frac{1}{\Delta t^2} [v(t_n + \Delta t) - 2v(t_n) + v(t_n - \Delta t)]$$

que é a expressão utilizada para o cálculo da derivada de segunda ordem de v no caso de uma aproximação do tipo Diferença Central, no Método das Diferenças Finitas.

Por outro lado, também pode-se escrever:

$$\frac{d^2 p_3}{dt^2} = \frac{1}{6\Delta t^3} \left\{ [6t - 2(3t_{n+1} - 6\Delta t)]v^{n+1} - 3[6t - 2(3t_{n+1} - 5\Delta t)]v^n + \right. \\ \left. + 3[6t - 2(3t_{n+1} - 4\Delta t)]v^{n-1} - [6t - 2(3t_{n+1} - \Delta t)]v^{n-2} \right\}$$

$$\frac{d^2 p_3}{dt^2} = \frac{1}{6\Delta t^3} \left\{ (v^{n+1} - 3v^n + 3v^{n-1} - v^{n-2})(t - t_{n+1}) + 2(6v^{n+1} - 15v^n + 12v^{n-1} - 3v^{n-2})\Delta t \right\}$$

Fazendo $t = t_{n+1}$, resulta:

$$\ddot{v} = \left. \frac{d^2 p_3}{dt^2} \right|_{t=t_{n+1}} = \frac{1}{\Delta t^2} (2v_{n+1} - 5v_n + 4v_{n-1} - v_{n-2})$$

que traduz o Método de Houbolt para exprimir a derivada temporal de segunda ordem de v no tempo $t = t_{n+1}$, em função do valor de v nos tempos t_{n-2} , t_{n-1} , t_n e t_{n+1} .

A.14 – Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas, MDF, é um procedimento por meio do qual, dada uma equação diferencial e um valor inicial, o domínio contínuo do problema é substituído por uma série de pontos discretos, os nós.

As derivadas que aparecem na equação original são aproximadas por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema.

Denomina-se diferença progressiva a aproximação definida pela equação

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_i + \Delta x) - v(x_i)}{\Delta x}$$

Denomina-se diferença regressiva a aproximação definida pela equação

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_i) - v(x_i - \Delta x)}{\Delta x}$$

Denomina-se diferença central a aproximação definida pela equação

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_i + \Delta x) - v(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}$$

A aproximação para a derivada de segunda ordem é uma aproximação do tipo diferença central

$$\left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{v(x_i + \Delta x) - 2v(x_i) + v(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Para a resolução numérica de um problema que envolva derivadas temporais, utilizando aproximações de diferença central, tem-se:

$$\dot{v}_i^j \approx \frac{v_i^{j+1} - v_i^{j-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{v}_i^j \approx \frac{v_i^{j+1} - 2v_i^j + v_i^{j-1}}{\Delta t^2}$$

onde o índice i refere-se à abscissa do nó considerado e os índices j referem-se ao tempo $t_j = j\Delta t$.

Para $j = 0, 1, 2, \dots$, os valores de v_{j+1} são obtidos a partir dos valores já conhecidos de v_j e v_{j-1} .

No início do processo de marcha no tempo ($j = 0$) é necessária a determinação do valor de v_{-1} ; das fórmulas de aproximação, pode-se escrever:

$$\ddot{v}_i^0 = \frac{v_i^1 - 2v_i^0 + v_i^{-1}}{\Delta t^2} \quad \text{e} \quad \dot{v}_i^0 = \frac{v_i^1 - v_i^{-1}}{2\Delta t}$$

Resolvendo-se para v_i^{-1} , obtém-se:

$$v_i^1 = 2\Delta t \dot{v}_i^0 + v_i^{-1}$$

$$\ddot{v}_i^0 = \frac{(2\Delta t \dot{v}_i^0 + v_i^{-1}) - 2v_i^0 + v_i^{-1}}{\Delta t^2}$$

ou

$$v_i^{-1} = v_i^0 - \dot{v}_i^0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{v}_i^0 \Delta t^2$$

Os valores de v_i^0 e \dot{v}_i^0 são conhecidos (condições iniciais), e da própria equação diferencial pode-se determinar o valor de \ddot{v}_i^0 .

Por ocasião da implementação numérica da equação 2.29, chega-se às seguintes expressões:

$$\ddot{v} = \frac{\kappa GA}{\rho A} v'' - \frac{\kappa GA}{\rho A} \psi' + \frac{q}{\rho A}$$

$$v_i^{j+1} = \Delta t^2 \left(\frac{\kappa GA}{\rho A} v'' - \frac{\kappa GA}{\rho A} \psi' + \frac{q}{\rho A} \right) + 2v_i^j - v_i^{j-1}$$

$$v_i^{j+1} = \Delta t^2 \frac{\kappa GA}{\rho A} \left(\frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right) - \Delta t^2 \frac{\kappa GA}{\rho A} \left(\frac{\psi_{i+1}^j - \psi_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)$$

$$+ \Delta t^2 \frac{q}{\rho A} + 2v_i^j - v_i^{j-1}$$

Por ocasião da implementação numérica da equação 2.30, chega-se às seguintes expressões:

$$\ddot{\psi} = \frac{EI_z}{\rho I_z} \psi'' + \frac{\kappa GA}{\rho I_z} v' - \frac{\kappa GA}{\rho I_z} \psi$$

$$\psi_i^{j+1} = \Delta t^2 \left(\frac{EI_z}{\rho I_z} \psi'' + \frac{\kappa GA}{\rho I_z} v' - \frac{\kappa GA}{\rho I_z} \psi \right) + 2\psi_i^j - \psi_i^{j-1}$$

$$\psi_i^{j+1} = \Delta t^2 \frac{EI_z}{\rho I_z} \left(\frac{\psi_{i+1}^j - 2\psi_i^j + \psi_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right) + \Delta t^2 \frac{\kappa GA}{\rho I_z} \left(\frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) - \Delta t^2 \frac{\kappa GA}{\rho I_z} \psi_i^j + 2\psi_i^j - \psi_i^{j-1}$$

Pode surgir algum problema quanto ao termo v_i^{j-1} que, para o tempo $j = 0$ gera um tempo negativo. Para isso, pode ser usada a seguinte condição:

$$\frac{\partial v(x, t = 0)}{\partial t} = 0$$

que, usando diferença central na discretização, fica da seguinte forma:

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^{j-1}}{2\Delta t} = 0$$

ou

$$v_i^{j+1} = v_i^{j-1}$$

Pode surgir outro problema no termo v_{i+1}^j para o qual, na última iteração espacial de i , seria necessário calcular um valor inexistente na viga, isto é, além do extremo da viga. Para sua resolução, pode ser usada a seguinte condição:

$$\frac{\partial v(x = L, t)}{\partial x} = 1$$

que, usando diferença central na discretização, fica da seguinte forma:

$$\frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x} = 1$$

ou

$$v_{i+1}^j = 2\Delta x + v_{i-1}^j$$

A.15 – Comparações iniciais entre os métodos utilizados

Considerou-se o caso de uma viga apoiada nos extremos, com seção transversal retangular, portanto de coeficiente de cisalhamento $\kappa=5/6$, ver Borges [3], submetida a uma carga uniformemente distribuída $q(x)=100 \text{ kN/m}$; adotou-se uma seção $0,20\text{m} \times 0,60\text{m}$, com área da seção, $A=0,12 \text{ m}^2$ e momento de inércia da área da seção em relação ao eixo z , $I_z=0,0036 \text{ m}^4$; densidade, $\rho=2.500 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidade longitudinal do material, $E=50 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson, $\nu=0,2$, e comprimento da viga, $L=4 \text{ m}$.

Em primeiro lugar, estudou-se a convergência dos resultados do MEC com a utilização de células lineares. Os resultados obtidos com 64 células mostraram-se bastante bons.

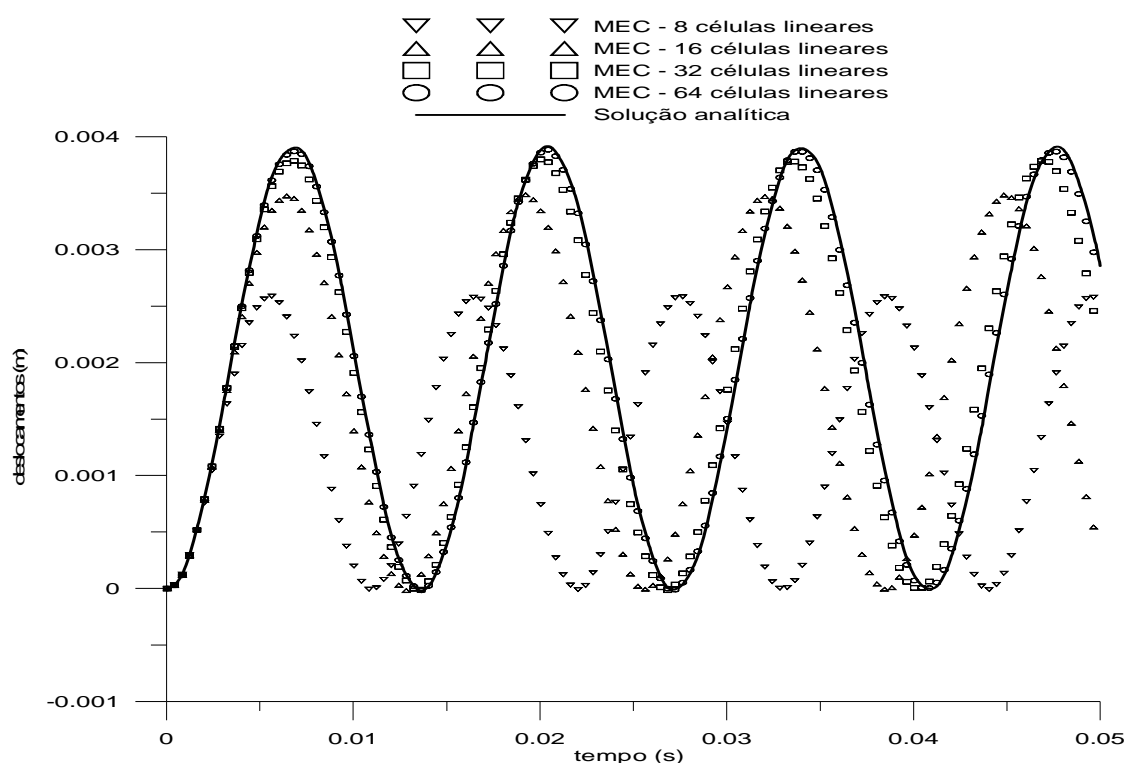


Gráfico A.15.1- Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Método dos Elementos de Contorno – células lineares

A seguir, foram utilizadas células quadráticas; a partir de 16 células já se observou uma grande convergência entre os valores obtidos; tomou-se o número de intervalos de tempo com sendo $ndt = 5.000$ e $\Delta t = 0,00001s$.

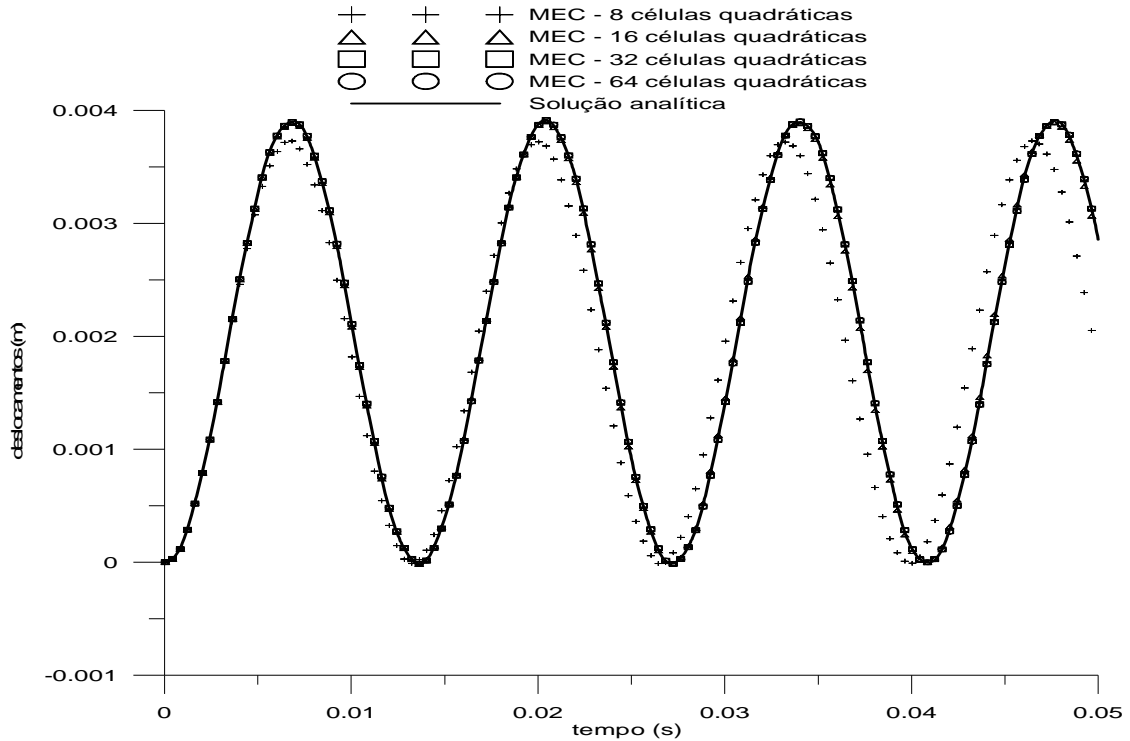


Gráfico A.15.2 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Método dos Elementos de Contorno – células quadráticas

Utilizou-se também o Método das Diferenças Finitas para a discretização espacial e temporal; tomou-se o número de intervalos de tempo $ndt = 5.000$ com $\Delta t = 0,00001s$; os resultados foram semelhantes aos obtidos anteriormente pelo MEC com células lineares.

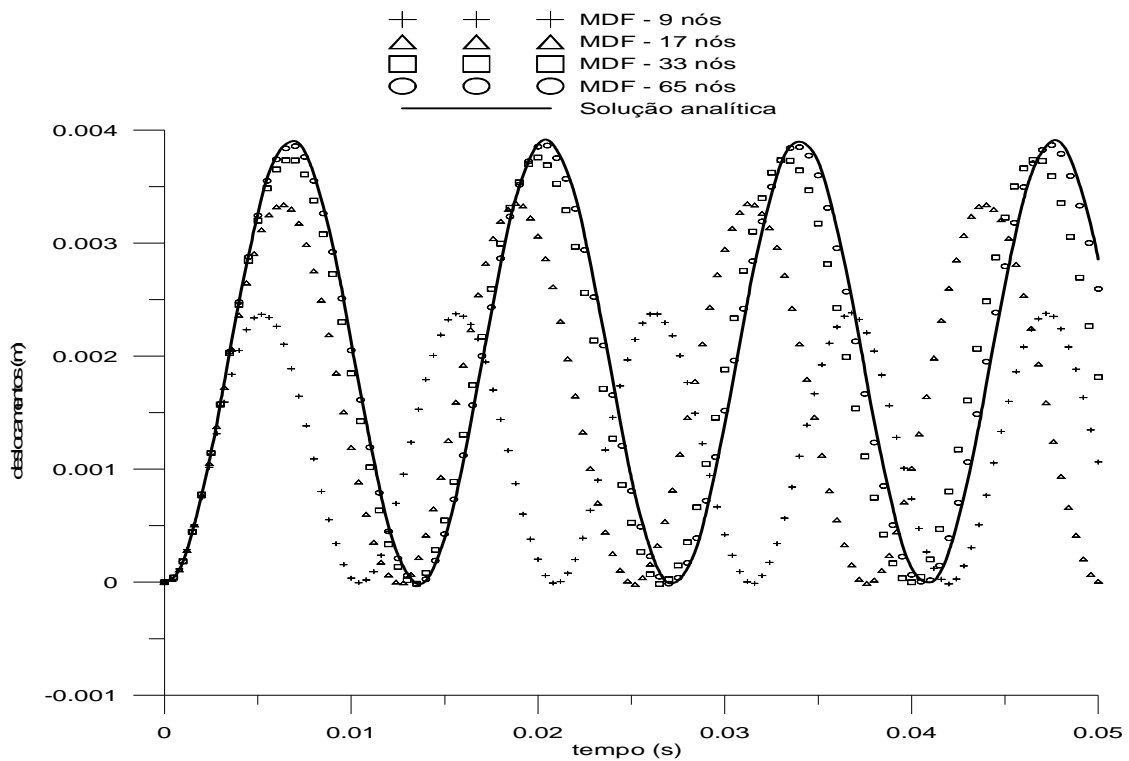


Gráfico A.15.3 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Método das Diferenças Finitas

A seguir, foram comparados os resultados obtidos em cada método, de acordo com o número de células utilizadas, e com a solução analítica.

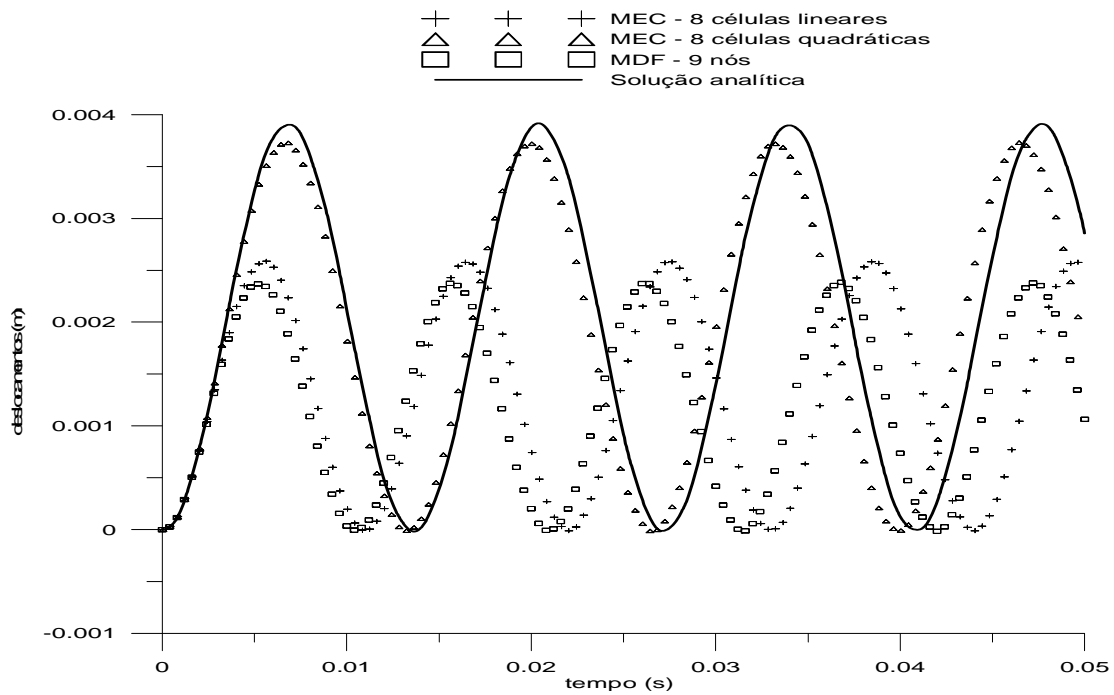


Gráfico A.15.4 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos - 8 células

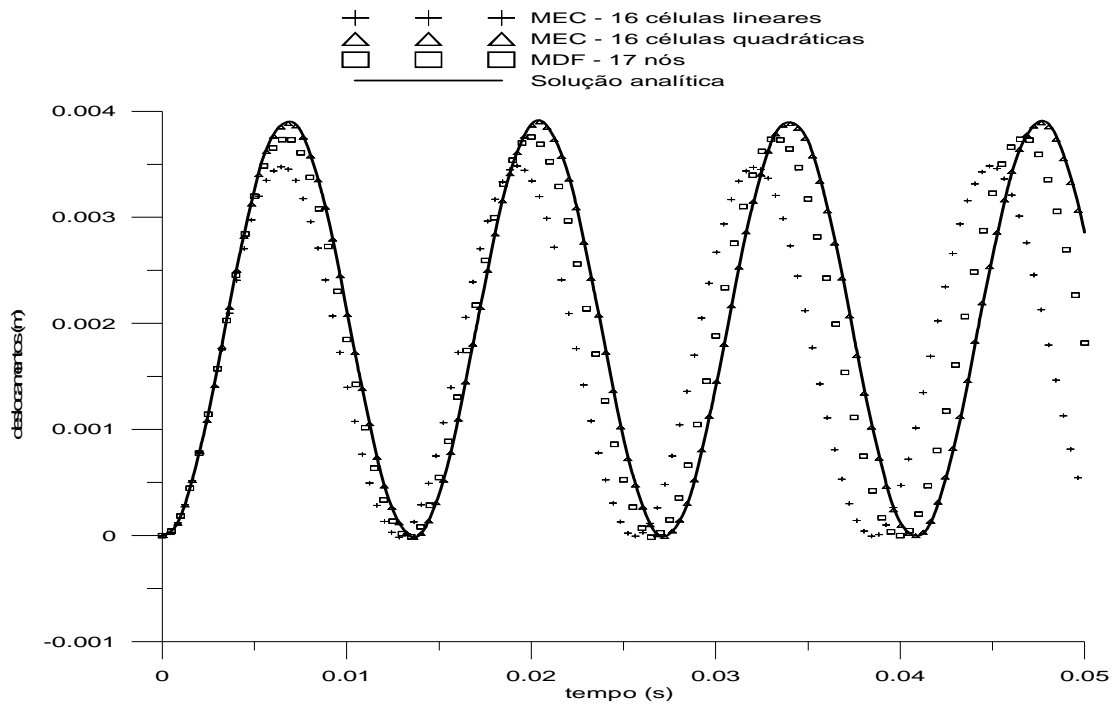


Gráfico A.15.5 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
 Carga uniformemente distribuída
 Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos - 16 células

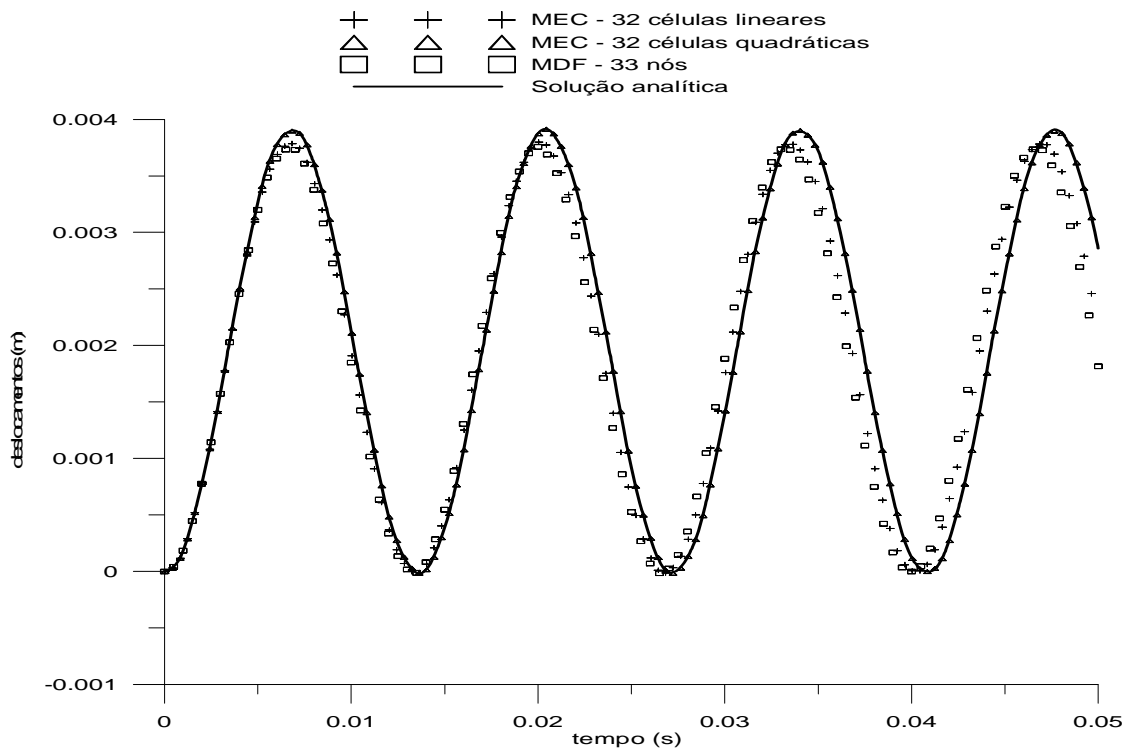


Gráfico A.15.6 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
 Carga uniformemente distribuída
 Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos - 32 células

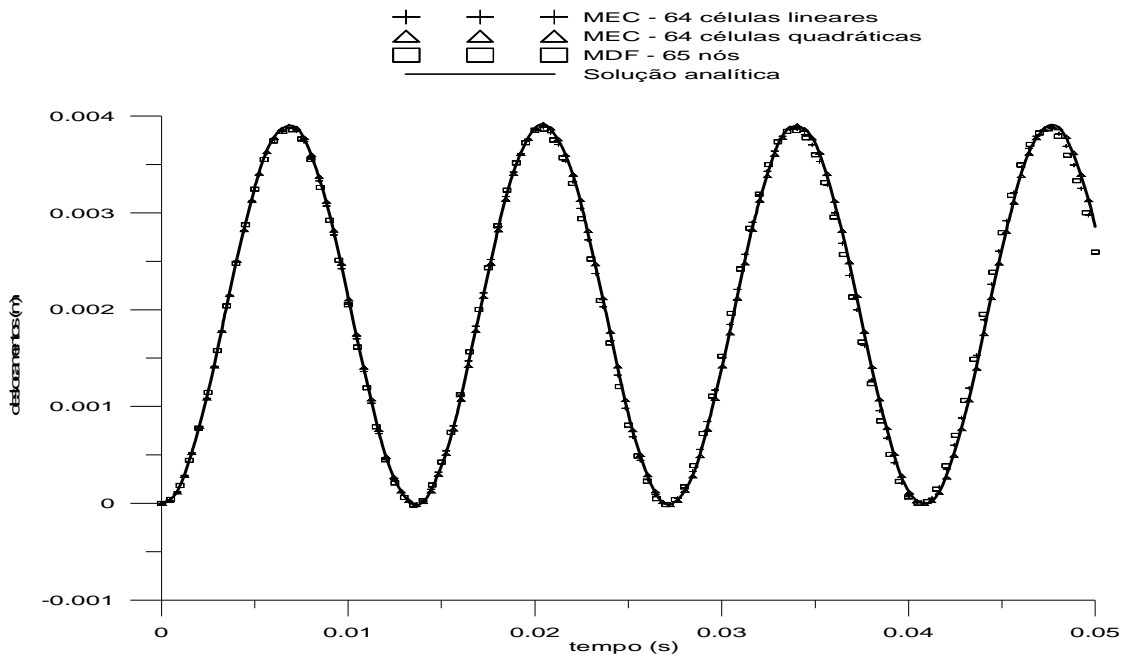


Gráfico A.15.7 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Comparação entre os resultados obtidos com os vários métodos - 64 células

Em seguida, foram efetuadas novas comparações entre os resultados obtidos com células lineares, com células quadráticas e com a solução analítica.

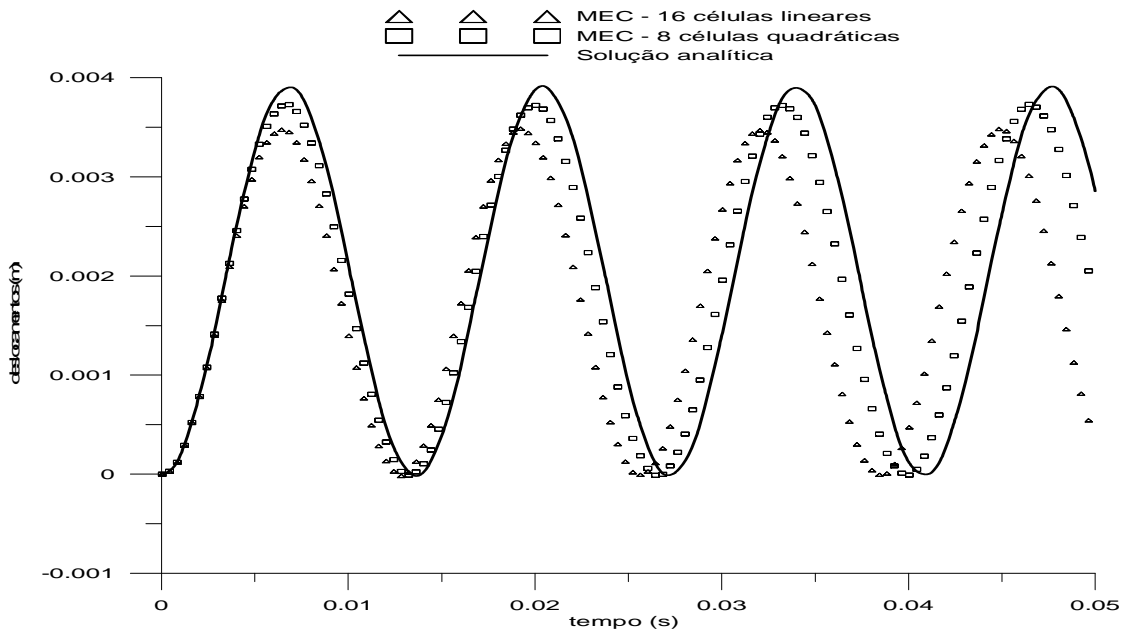


Gráfico A.15.8 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Comparação entre 16 células lineares e 8 células quadráticas – MEC

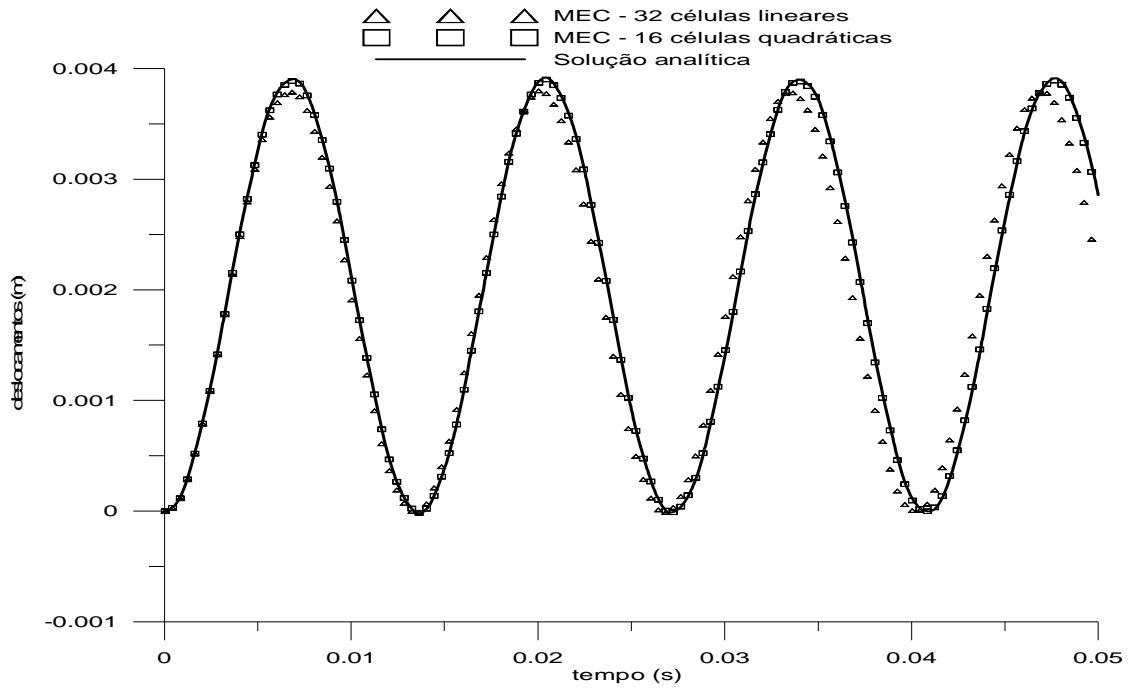


Gráfico A.15.9 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Comparação entre 32 células lineares e 16 células quadráticas – MEC

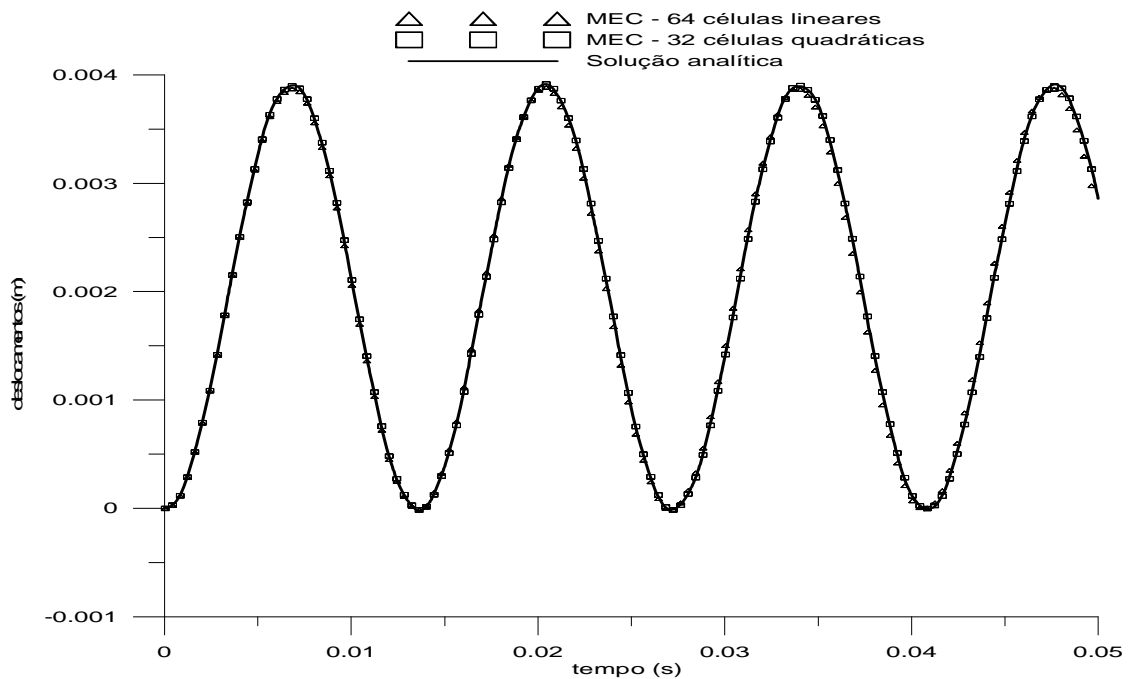


Gráfico A.15.10 - Deslocamentos do ponto médio de uma viga simplesmente apoiada
Carga uniformemente distribuída
Comparação entre 64 células lineares e 32 células quadráticas – MEC

Observou-se uma quase perfeita coincidência entre os resultados obtidos pelo MEC com 64 células lineares e 32 células quadráticas, e com a solução analítica.