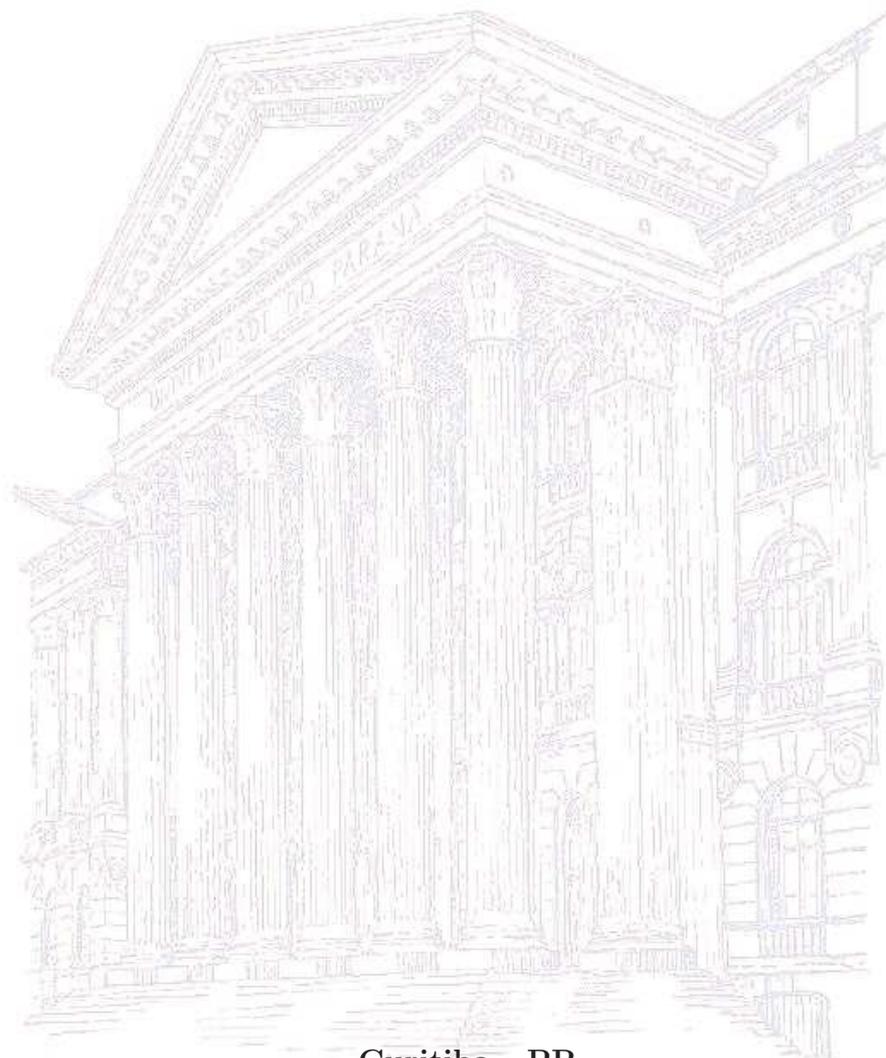


Universidade Federal do Paraná

Marcos Cesar Santos

**Modelo Geral de Busca Aleatória Markoviana:
Soluções no Limite Determinístico**



Curitiba - PR

2012

Universidade Federal do Paraná

Marcos Cesar Santos

**Modelo Geral de Busca Aleatória Markoviana:
Soluções no Limite Determinístico**

Tese apresentada à Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Marcos Gomes E. da Luz*

Curitiba - PR

2012

Dedicado à,

Minha família, pela paciência e compreensão em todos esses anos.

Agradecimentos

- À minha família;
- Ao meu orientador Prof. Dr. *Marcos Gomes Eleutério da Luz* (UFPR) pela motivação e influência decisiva na minha formação acadêmica e científica;
- Ao Prof. Dr. *Madras Viswanathan Gandhi Mohan* (UFAL) e ao Prof. Dr. *Ernesto Carneiro Pessoa Raposo* (UFPE) pelas discussões, motivação, suporte e projetos em colaboração;
- Pela motivação, confiança e críticas construtivas, decisivas ao amadurecimento na jornada acadêmica, agradeço aos professores: Prof. Dr. *Carlos Carvalho*, Prof. Dr. *Carlos Eduardo Fiore dos Santos*, Prof. Dr. *Fernando Pablo Devecchi*, Prof. Dr. *Gilberto Medeiros Kremer*, Prof. Dr. *José Arruda de Oliveira Freire*, Prof. Dr. *Marcus Werner Beims*, Prof. Dr. *Marlus koehler*, Prof. Dr. *Miguel Abbate*, Prof. Dr. *Sérgio D'Almeida Sanchez*, Prof. Dr. *Sérgio Luiz Meister Berleze*;
- À colega de grupo *Josemeri Aparecida Jamielniak* pelas discussões e suporte em Matemática e Estatística;
- Aos grandes amigos e incentivadores *Cristiano Francisco Woellner* e *Fabiano Manoel de Andrade* pelo suporte e motivação;
- Ao Prof. Dr. *Carlos de Carvalho* (UFPR) pelo suporte computacional e incentivo;
- Aos colegas e professores da Pós-graduação;
- Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro;
- À FINEP (CT-INFRA/UFPR) pela infra-estrutura computacional;
- À Universidade Federal do Paraná.

“Nenhum vento sopra a favor de quem não sabe para onde ir.”

Sêneca.

Resumo

Consideramos o problema geral de busca aleatória *Markoviana* onde um *forrageador* procura *alvos* aleatoriamente distribuídos e separados pela distância característica λ , em um ambiente de busca n -dimensional. A estratégia de busca é governada por uma heurística arbitrária e o *forrageador* além de não ter conhecimento das propriedades ambientais, só detecta *alvos* dentro de um raio de visão r_v ao longo da trajetória de busca. Nesta tese propomos uma formulação matemática geral para busca aleatória, assumindo um processo estocástico composto, no qual as variáveis relevantes são a distância percorrida e a quantidade de passos executados pelo *forrageador* entre dois eventos de detecção. Tal construção permite-nos definir diversas grandezas importantes para caracterizar o problema (i) a eficiência estatística; (ii) o balanço energético; (iii) a taxa líquida de ganho energético e sua densidade; além da (iv) probabilidade de morte, caso o ganho energético não seja suficiente para manter o processo. No caso limite de busca determinística, em que basicamente o número de passos entre alvos é igual a 1, temos a solução exata para espaços de busca tipo *Weibull*. Para a busca aleatória, o número de passos entre dois eventos de detecção é arbitrário e dependente da heurística. Para este caso, desenvolvemos um algoritmo que fornece aproximações via simulações computacionais e permite o tratamento semi-analítico do problema. Estratégias de *Lévy*, para os quais os passos do *forrageador* são sorteados através de distribuições tipo *Leis de Potência*, são discutidas em detalhes. Finalmente, um modelo baseado em simulações numéricas e ajustes analíticos é usado para descrever busca em grupo, onde *seguidores* devem manter-se próximos de um *líder*. Se regras dinâmicas específicas são adotadas para garantir a integridade estrutural do grupo, evitando assim a dispersão de seus membros, é possível usar uma dinâmica superdifusiva para os *seguidores*. Isto permite otimizar a busca aleatória e ao mesmo tempo manter a coesão do grupo.

Abstract

We consider the general problem of *Markovian* random search, in which a searcher looks for targets randomly distributed and separated by an average distance λ in a n -dimensional environment. The search strategy is ruled by arbitrary heuristics and the searcher does not have knowledge about the environment features. Also, it only can detect targets within a vision radius r_v along the search trajectory. Given such context, in this Thesis we address the following aspects. The development of a general mathematical framework for random search, assuming stochastic processes for which the relevant variables are, respectively, the traveled distance and the number of steps taken by the searcher between detection events. Such construction allow us to define different important quantities characterizing the problem, namely: (i) an statistical efficiency; (ii) the net energy; (iii) the energetic gain rate and its corresponding density; and (iv) the death probability, in the case the energy is not enough to sustain the process. In the limiting situation of deterministic search, basically when the number of steps between targets is equal to 1, we present an exact solution for *Weibull* search spaces. For an actual random search, where the number of steps is arbitrary and dependent on the specific heuristics, we propose a computation algorithm which gives proper approximations and allows to treat the problem semi-analytically. Moreover, *Lévy* strategies, where the searcher steps are drawn from power law-like distributions, are discussed in details. Finally, a model based on numerical simulations and analytical fittings is used to describe collective search, in which Followers must try to be close to a specific Leader. If proper rules to maintain the group are considered, it is possible to use a superdiffusive dynamics as the group strategy. This leads to an optimal random search, yet allowing to hold the group together.

Lista de Figuras

- 2.1 Difusão de uma partícula cuja trajetória é governada pelas colisões com as moléculas de ar da atmosfera. 20
- 2.2 **(a)** FDP *Gaussiana* $f_{\hat{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$. FDP *Binomial*, $f_{\hat{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$. FDP *Poisson*, $f_{\hat{x}}(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. FDP *Pareto*, $f_{\hat{x}}(x) = x^{-\alpha+1}$ (variância infinita). As distribuições aqui mostradas, certamente são as mais frequentemente observadas na natureza. Note que as distribuições *Gaussiana* e binomial se sobrepõem porque plotamos a *Gaussiana* com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1-p)$, que correspondem à média e variância da distribuição *Binomial*. A distribuição de *Poisson* aparece com média e variância $\lambda = np$. **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $n = 50$, $p = 0,3$, $\lambda = np = 15$, $\mu = np = 15$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3,24$, $x_{min} = 1$ e $\alpha = 1$ 24
- 2.3 Processos onde $\langle |\dot{\mathbf{R}}_N| \rangle \propto N^v$ com $v = 1/2$ evoluem com difusão normal e satisfazem o TLC. Com $v \neq 1/2$ diz-se que o processo possui difusão anômala, sendo que $v < 1/2$ caracteriza subdifusão e $v > 1/2$ caracteriza superdifusão. **(a)** Trajetória de um caminhante *Browniano* que se move com distribuição de deslocamentos $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) \sim \exp(-|\mathbf{r}|)$ –variância finita– em uma caminhada isotrópica ilustrando a difusão normal. **(b)** Trajetória de um caminhante anômalo que se move com distribuição de deslocamentos $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-2}$ –variância infinita– em uma caminhada isotrópica ilustrando a superdifusão. Em ambos os casos a caminhada consiste de 2000 passos independentes começando na origem. Compare as escala e note como o processo super difusivo afasta-se da origem mais rapidamente que no caso com difusão normal. 33

- 2.4 Distância percorrida $\overset{\circ}{X}_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Note que representamos a caminhada ao longo do eixo x e que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo x e $1 - p$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A figura com $p = 0.1$ mostra uma deriva para o sentido positivo, analogamente com $p = 0.9$, a deriva ocorre para o sentido negativo. Ambos os casos são anisotrópicos devido ao alto grau de correlação entre os deslocamentos. 36
- 2.5 Distância percorrida $\overset{\circ}{X}_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Lembre-se que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo da caminhada e $(1 - p)$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A caminhada isotrópica se verifica com $p = 0.5$ de modo a obter saltos identicamente distribuídos. Neste caso, para tempos dilatados $N \gg 1$, observamos flutuação de $\overset{\circ}{X}_N(p)$ em torno da origem. Também mostramos a FMP, $f_{\overset{\circ}{X}}(X, N, p)$, para uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 1500$ e $p = 0.5$ –caso isotrópico. 38
- 2.6 (a) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de apenas um forrageador. (b) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de 2000 forrageadores independentes. (c) Histograma, $f_{\overset{\circ}{R}}(R, N)$ mostrando a probabilidade de encontrarmos o caminhante afastado da origem por uma distância $|\mathbf{R}|$ após N passos, para uma caminhada aleatória bidimensional com passos idênticos de tamanho $a = 0.01$, partindo da origem. Obtida via simulação computacional com $N = 2000$ e 2000 caminhantes independentes. O histograma, $f_{\overset{\circ}{R}}(R, N)$ corresponde a equação (2.108) proposta por *Lord Rayleigh* em 1905 como solução para o modelo de *Pearson*. 39

2.7	<p>(a) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de apenas um forrageador. (b) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de 2000 forrageadores independentes. (c) Histograma, $f_{\hat{R}}(R, N)$ mostrando a probabilidade de encontrarmos o caminhante afastado da origem por uma distância \mathbf{R} após N passos. Trata-se de uma versão super difusiva do modelo de <i>Pearson</i>, com os deslocamentos, $\hat{\mathbf{r}}$, independentes e identicamente distribuídos segundo a lei de potência $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{r} ^{-2}$ –variância infinita–. Novamente simulamos a caminhada, partindo da origem, com $N = 2000$ passos e 2000 caminhantes independentes. Observamos que $f_N(R) \sim L(\mathbf{R}; \alpha)$ com o parâmetro, $\alpha \rightarrow 1$, –distribuição de <i>Cauchy-Lorentz</i>, ver a equação (2.64)– em concordância com o TLCG.</p>	40
2.8	<p>Caminhada discreta começando na origem e seguindo com 1000 passos idênticos em direções discretas e identicamente distribuídas num ambiente bidimensional.</p>	42
2.9	<p>Ilustração de um ambiente de busca em duas dimensões contendo uma densidade ρ de alvos posicionados aleatoriamente segundo uma distribuição homogênea, garantindo que todo o espaço de busca seja igualmente preenchido (na média sobre várias configurações) resultando num espaçamento médio típico entre alvos dado por λ. O ambiente pode ter qualquer dimensão e supomos que os alvos podem ser de três tipos: destrutíveis ($\xi = 1$), não-destrutíveis ($\xi = 2$) ou regenerativos ($1 < \xi < 2$). Assumimos que as propriedades ambientais são controladas pelos parâmetros λ e ξ, que determinam o ambiente de busca.</p>	44
2.10	<p>Ilustração da trajetória de busca com o forrageador inspecionando a área delimitada pelas linhas pontilhadas, o círculo demarca o alcance visual em cada evento de reorientação, onde uma nova direção de voo será escolhida isotropicamente e uma nova distância de voo será sorteada aleatoriamente segundo a equação (2.116).</p>	46
2.11	<p>Ilustração da caminhada de <i>Lévy</i> governada pela distribuição de passos definida na equação (2.116). Os três exemplos mostram caminhadas percorrendo a distância total de 1000 unidades, note como μ, o expoente da lei de potência afeta a frequência dos deslocamentos com tamanho muito superior à média. No limite $\mu \rightarrow 1$, observa-se superdifusão enquanto $\mu \rightarrow 3$, recupera o comportamento <i>Browniano</i>.</p>	47

2.12	Os círculos fechados representam alvos. (a) Caso unidimensional com condição de contorno de absorção. O ambiente consiste de um segmento $[0, M]$ (b) Caso β -dimensional destrutivo. O círculo aberto central representa um alvo previamente visitado, consumido e destruído. (c) Caso β -dimensional não-destrutivo. O círculo fechado central representa um alvo previamente visitado e que pode ser revisitado.	50
2.13	Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lévy que define a estratégia de busca para o modelo analítico em duas dimensões. <i>(a)</i> Caso não-destrutivo <i>(b)</i> caso destrutivo. Densidade de alvos $\rho = 10^{-4}$, alcance visual $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$	52
2.14	Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lévy que define a estratégia de busca. As curvas mostram a eficiência para vários valores de ξ , que controla as propriedades regenerativas do ambiente. Por definição, dois valores tem significado $\xi = 2$ corresponde ao caso não destrutivo e $\xi = 1$, à dinâmica destrutiva. Para valores ($1 < \xi < 2$) observamos transição suave entre a dinâmica destrutiva e não destrutiva. Aqui temos densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$	54
2.15	Produto entre a eficiência η e o livre caminho médio λ versus μ em uma dimensão para vários valores de λ , obtido a partir das equações (1) e (2) com $r_v = 1$ para o caso não destrutivo. Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$	55
3.1	Processo de busca ideal unidimensional. (a) Densidade da métrica, $f_{\ell}(\ell)$, discutida no exemplo 3.1. (b) Densidade da eficiência energética, $f_{\eta}(\eta)$, discutida no exemplo 3.2.	64
3.2	Processo de busca de três forrageadores com as respectivas taxas metabólicas $\Omega_0 = \{0.5\Omega^*, 1.0\Omega^*, 1.5\Omega^*\}$. (a) Valor esperado do balanço energético, $\langle \dot{E}(\nu) \rangle$, discutidos no exemplo 3.3. (b) Densidade da taxa de ganho líquido, $f_{\Omega}(\Omega)$, discutida no exemplo 3.4. A área hachurada cinza corresponde à probabilidade residual de morte, P_{RM} , do forrageador.	72
4.1	Ilustrações do ambiente <i>Weibull</i> para as três dimensões espaciais ordinárias, $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 1/5$	85

- 4.2 **(a)** Distribuição *Weibull* para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.12), isto é, FDP do espaçamento entre alvos –primeiros vizinhos– no ambiente *Weibull*. **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 10$ 86
- 4.3 **(a)** FDP da métrica da busca ideal em ambientes *Weibull*. A figura mostra $f_{\tilde{\eta}}(\eta)$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.20). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$ 89
- 4.4 **(a)** FDP da eficiência energética da busca ideal em ambiente *Weibull*. A figura mostra $f_{\tilde{\eta}}(\eta)$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.22). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$ 90
- 4.5 **(a)** Valor esperado da eficiência energética da busca ideal em ambiente *Weibull*. A figura mostra $\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.25). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ 91
- 4.6 **(a)** Comparativo entre a eficiência unidimensional exata, $\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle$ (curva sólida), expansão de Taylor em segunda ordem, $\mathcal{T}_{n=2}(\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle)$ (curva tracejada) e a aproximação de campo médio corrigida, $\eta_{BI}^{ACM} = \lambda_0^{a-1}(a\lambda)^{-a}$ (curva pontilhada). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = 1$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$ 92
- 4.7 Nas figuras de **(a)** até **(f)** mostramos o comparativo entre a eficiência exata, $\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle$ (curva sólida), expansão de Taylor em segunda ordem, $\mathcal{T}_{n=2}(\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle)$ (curva tracejada) e a aproximação de campo médio, η_{BI}^{ACM} (curva pontilhada). **(a)** e **(b)** AB unidimensional ($\beta = 1$). **(c)** e **(d)** AB bidimensional ($\beta = 2$). **(e)** e **(f)** AB tridimensional ($\beta = 3$). Na coluna direita, das figuras de **(a)** até **(f)** vemos versões Log-Log dos gráficos à esquerda. As figuras **(g)** e **(h)** mostram a razão, denotada por $\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0}$, entre a eficiência exata, $\langle \tilde{\eta}_{BI} \rangle$, e a aproximação de campo médio, η_{BI}^{ACM} , eq. (4.27). **(g)** $\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0}$ contra λ . **(h)** $\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0}$ contra β 93
- 4.8 **(a)** Densidade do balanço energético na ADL para a busca ideal no AB *Weibull*. **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$ 95

- 4.9 **(a)** Densidade da taxa líquida de ganho energético na ADL para a busca ideal no AB *Weibull*. **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda = 5\lambda_0$, $\epsilon = \lambda/[\lambda]$, $\Omega_0 = \Omega^* = \epsilon/\lambda_1$ 96
- 5.1 **(a)** Esquematização do AB. Os quadrados pequenos representam os alvos aleatoriamente distribuídos. **(b)** λ_a em função de L/λ_a . Para $L/\lambda_a \gg 1$ (regime 2D), λ_a é a constante $1/\sqrt{N}$, enquanto que para $L/\lambda_a \ll 1$ (1D), λ_a segue como $1/(NL)$. O cruzamento tem lugar para L/λ_a em torno da unidade. Os parâmetros que definem os regimes 1D, 2D e o regime de transição estão definidos na seção 5.3.2. 103
- 5.2 **(a)** Densidades da métrica na ASC, determinadas pela FDP da distâncias entre alvos mais próximos $\hat{f}_{\hat{\ell}(\ell)} = \hat{f}_{\hat{x}}(x/\lambda_0)$, para três valores de L/λ_a correspondentes aos casos 2D (cruz), 1D (triângulo), e região de transição (diamante). Estes valores foram definidos na seção 5.3.2, como segue: o limite 2D com $L/\lambda_a \approx 4978.56$ ($L = 1$ e $\lambda_a = 2.00861 \times 10^{-4}$), o limite 1D com $L/\lambda_a \approx 9.99474 \times 10^{-3}$ ($L = 2 \times 10^{-5}$ e $\lambda_a = 2.00105 \times 10^{-3}$) e na transição, βD , $L/\lambda_a \approx 4.21598$ ($L = 8.82 \times 10^{-4}$ e $\lambda_a = 2.09204 \times 10^{-4}$). Note que a curva intermediária (regime de transição) está próximo do caso 2D. **(b)** FDP normalizadas do tamanho do passo da caminhada $\hat{f}_{\hat{x}}(x/\lambda_a)$ –aqui no PBI, corresponde à métrica– para os mesmos parâmetros que na figura (a). Os triângulos (cruz) representam o limite 1D (2D). As curvas mostram os ajustes $1.3 \exp[-0.92\ell/\lambda_a]$ (tracejado) e $3.1(\ell/\lambda_a)^{-5.3}$ (contínua). Observe que as curvas do regime 1D (triângulos) são idênticas nas figuras (a) e (b). Este resultado motivou a proposição 5.5.1. 103
- 5.3 No regime de transição, o AB é uma faixa estreita. Neste caso o forrageador move-se em média para uma direção, quando a trajetória de busca se auto-intercepta, o forrageador é forçado a executar um salto muito longo para retornar à direção original de caminhada. 105
- 5.4 **(a)** Caso intermediário (diamante). Aqui, o ajuste é $0.23(\ell/\lambda_a)^{-2.2}$. **(b)** A distribuição $\hat{f}_{\hat{\ell}}(\ell/\lambda_a)$ ajustada como $(\ell/\lambda_a)^{-\mu}$. Os parâmetros são $L/\lambda_a = 2.37954$ e $\hat{\mu} = 2.3155$ (triângulo aberto); $L/\lambda_a = 4.21598$ e $\hat{\mu} = 2.22267$ (círculo cheio); $L/\lambda_a = 9.74390$ e $\hat{\mu} = 2.40229$ (círculo aberto); $L/\lambda_a = 22.1615$ e $\hat{\mu} = 2.65706$ (quadrado cheio); $L/\lambda_a = 38.2288$ e $\hat{\mu} = 2.96385$ (quadrado aberto) 108

- 5.5 Número de passos versus a projeção horizontal da posição do [forrageador](#) são mostrados para a região no 2D **(a)**, região de transição **(b)**, e 1D **(c)**. Note os passos essencialmente longos na região de transição **(b)**. **(d)** Distribuição angular dos ângulos de retorno entre passos consecutivos. Os triângulos (1D), cruzeiros (2D), e diamantes (região de transição) correspondem aos mesmos casos das figuras **(a)**, **(b)** e **(c)**. A curva pontilhada (para os triângulos) é apenas um guia para os olhos. 110
- 5.6 **(a)** Aproximação semi-analítica da FDP da eficiência energética do processo de busca ideal no ambiente de busca *Weibull*. A figura mostra $\hat{f}_{\eta}(\eta)$ para as três expoentes de *Lévy*. **(b)** Gráfico da figura **(a)** na escala Log-Log. 111
- 5.7 **(a)** Métrica computacional média, $\bar{\ell}$, em unidades de λ_a tomada pelo [forrageador](#) durante a busca em função de L/λ_a . A região onde $\bar{\ell}$ apresenta um pico, indicado pela seta, é mostrado em detalhe em **(b)**. As curvas contínuas são apenas guias para os olhos. 112
- 5.8 **(a)** A velocidade de deriva numérica ao longo do *eixo-x*, $\langle |X - X_0|/n \rangle / \lambda_a$ como uma função de L/λ_a . A seta indica a região de transição, onde há um ponto de inflexão para a deriva. **(b)** Aumento da região marcada em **(a)**, mostrando um mínimo local em torno de $L/\lambda_a = 1.7094$. As curvas contínuas são apenas guias para os olhos. 113
- 5.9 **(a)** Fração numérica de alvos visitados, χ como uma função de L/λ_a . **(b)** Aumento de resolução na região de transição indicada pela seta em **(a)**. As curvas contínuas são apenas guias para os olhos. 114
- 6.1 **(a)** Dinâmica do tipo “siga o líder” em duas dimensões mostrando o líder e três seguidores. Quando o líder se desloca, os seguidores movem-se de acordo com as regras descritas no texto, a fim de manter-se agrupados de forma compacta, em torno do líder. **(b)** Ilustração de quantidades médias relacionadas a um “seguidor típico” e o líder. 121
- 6.2 Modelo coletivo browniano com comportamento browniano do líder (modelo A). Ilustração da caminhada típica do líder com 6 seguidores, usando $\bar{x}_L = 100$, $\sigma_L = 0$ e **(a)** $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\theta = 0$; **(b)** $\sigma_x = 0$ e $\sigma_\theta = \pi/4$; **(c)** $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\theta = \pi/4$. A circunferência em torno do líder é apenas um guia para os olhos. 123

6.3	Modelo Coletivo de <i>Pareto</i> Médio Truncado com o comportamento do líder <i>Pareto</i> Truncado (Modelo B), utilizando $\mu_L = 1.1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $r_v = 1$, e 10^4 passos líder (somente os primeiros 10^3 são mostrados): (a) Trajetória de busca da caminhada aleatória bidimensional do líder; (b) Sequência de comprimento de passos do líder no j -ésimo passo; (c) Raio do grupo, r_j ; e (d) Coeficiente de separação c_j	125
6.4	O mesmo que na figura 6.3, mas para $\mu_L = 2$	126
6.5	O mesmo que na figura 6.3, mas para $\mu_L = 3$	127
6.6	Dependência do raio médio do grupo, $\langle r \rangle$, como função do expoente de <i>Pareto</i> do líder μ_L (o líder executa 10^6 passos; outros parâmetros como nas figuras 6.3-6.5.) para diferentes modelos de busca coletiva, usando $\mu_S = 1$, 1 e $x_{\max,L=50}$. As linhas sólidas representam cálculo analítico de $\langle r \rangle$ (ver texto).	128
6.7	Eficiência normalizada, $\lambda\eta$, <i>versus</i> expoente de <i>Pareto</i> do líder μ_L para a versão incremental do modelo coletivo de <i>Pareto</i> truncado com comportamento do líder <i>Pareto</i> truncada (modelo D). Os resultados são apresentados para busca (a) não-destrutiva e (b) destrutiva, usando $N_S = 32$ seguidores, $\mu_S = 1.1$, $r_v = 1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $x_{\max,F} = 4r_v N_S = 128$, $\lambda = 5000$ e $\sigma_\theta = \pi/4$.	131

Lista de Tabelas

2.1	Nesta tabela as linhas subsequentes são obtidas pela adição de metade do valor de cada célula em uma dada linha para cada uma das duas células diagonalmente abaixo. De fato, isto é simplesmente o triângulo de <i>Pascal</i> preenchido intercaladamente com zeros e com cada linha multiplicada por um fator $1/2$. Os valores dos coeficientes são dados pela equação (2.104). Note que os valores da tabela acima sugerem uma distribuição normal [1] e, de fato, é o que obtemos como mostra a figura 2.5.	38
2.2	Valores numéricos para $P(\beta \geq 3)$ de um caminhante retornar a um sítio durante uma caminhada discreta em ambientes com dimensão $\beta \geq 3$	42
5.1	Expoentes da Lei de <i>Pareto</i> na Transição. Estimativas do expoente, $\hat{\mu}$, para a métrica $\hat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)$ ajustada via $(\ell/\lambda_a)^{-\mu}$. Mostramos alguns AB no intervalo próximo da região de transição, $2 < L/\lambda_a < 30$	109
B.1	Normalização das Distribuições Contínuas e Discretas.	151
B.2	Representação das Leis de Potência, FDP e FD	152
B.3	Estimadores de Máxima Verossimilhança para o Parâmetro de Cauda, α . . .	153
B.4	Geradores <i>Levynianos</i> de Números Aleatórios.	154
B.5	Normalização das Distribuições <i>Brownianas</i> , Contínuas e Discretas.	155
B.6	Geradores <i>Brownianos</i> de Números Aleatórios.	155

Lista de Abreviaturas e Siglas

AB	ambiente de busca
ACM	aproximação de campo médio
ADL	aproximação de desgaste linear
ASC	aproximação via simulação computacional
BI	busca ideal
EMV	estimador de máxima verosimilhança
FD	função distribuição de probabilidade
FDP	função densidade de probabilidade
FMP	função massa de probabilidade
GNA	gerador de números aleatórios
IID	independentes e identicamente distribuídos
LDPV	lei de distribuição para primeiros vizinhos
PB	processo de busca
PBI	processo de busca ideal
TLC	teorema do limite central
TLCG	teorema do limite central generalizado
VA	variável aleatória

Lista de Símbolos

B^c	complementar do evento B (ver a definição 2.1.1 na página 6)	7, 8
\mathbb{N}	conjunto dos números reais	60
$t \in T$	t pertence ao conjunto T	60
\mathbb{R}_+	conjunto dos números reais	60, 65, 66
\mathbb{R}	conjunto dos números reais	31, 61, 65
\emptyset	conjunto vazio	8, 9
$\mathring{\mathcal{E}}$	ganho energético líquido por alvo detectado	62, 68, 69, 71
$\mathring{\ell}$	variável aleatória que denota a métrica do processo de busca	59, 61–73, 75, 76, 78
$\hat{\alpha}$	estimador de máxima verossimilhança do parâmetro α	146
Ω_0	energia mínima consumida pelo forrageador por unidade de deslocamento	69–76, 78, 81
Ω_w	taxa de fornecimento energético pelo ambiente	69
Ω^{**}	taxa máxima de fornecimento energético pelo ambiente	69, 70, 74–77
Ω^*	taxa média de fornecimento energético pelo ambiente	69–73, 75–77
$\mathring{\Omega}$	taxa ganho energético líquido por alvo detectado	62, 68–71, 74–77
$\mathring{\eta}$	eficiência energética do processo de busca	62, 64–71, 78
E_0	energia inicial do forrageador	68, 70–73, 81
\mathring{E}	energia do forrageador (balanço energético)	62, 68, 70–73
$\varphi(s)$	função característica da variável aleatória \mathring{x}	12

$F_{\hat{x}}(x)$	função de distribuição da variável aleatória \hat{x}	11
$f_{\hat{x}}(x)$	função densidade de probabilidade da variável aleatória \hat{x}	11
$m_k(\hat{x})$	momento de ordem k da variável aleatória (VA) \hat{x}	13
$M_{\hat{x}}(s)$	função geradora de momentos da VA \hat{x}	13
$M_{\hat{x}_1+\hat{x}_2+\dots+\hat{x}_n}(s)$	função geradora de momentos de $\hat{x}_1+\hat{x}_2+\dots+\hat{x}_n$	15
λ	distância característica da separação entre alvos primeiros vizinhos, $\lambda \langle \hat{w} \rangle$	v
P	probabilidade axiomática (ver a definição 2.1.3 na página 6)	7–15, 29
	espaço amostral ou espaço de eventos elementares	7–11, 14, 16, 18, 38, 139
\mathcal{A}	σ -álgebra (ver a definição 2.1.2 na página 6)	7–11
Θ	vetor de parâmetros que fixa as propriedades topológicas do ambiente bem como as propriedades que caracterizam os alvos	59–61, 64, 65
Ξ	vetor de parâmetros que fixa as propriedades da heurística da busca e o comportamento do forrageador	59–61, 65
$\mathcal{T}_{n=2}$	expansão de <i>Taylor</i> avaliada até a ordem $n = 2$	95
$\mathcal{F}\{f_{\hat{x}}(x)\}$	transformada de <i>Fourier</i> da função densidade de probabilidade (FDP) da variável aleatória \hat{x}	12
$\mathcal{L}\{f(x)\}$	transformada de <i>Laplace</i> da FDP da variável aleatória \hat{x}	13
$\sigma(\hat{x})$	desvio padrão da variável aleatória \hat{x}	13
$\sigma^2(\hat{x})$	variância da variável aleatória \hat{x}	12
$\langle \hat{x} \rangle$	valor esperado da variável aleatória \hat{x} [também denotado por $E(\hat{x})$]	12

β	dimensão espacial	x, xv, xvii, 27, 31–33, 35, 37, 40–43, 45, 46, 51–54, 59, 64, 79, 83, 85
\mathbf{r} , \mathbf{R} e \mathbf{s} , \mathbf{S}	vetores em \mathbb{R}^β	31
$\hat{x} : x \in \mathbb{R}_+, \Omega \rightarrow [a, b]$	a variável aleatória \hat{x} pertence ao conjunto dos números reais (portanto é uma VA contínua) e o espaço amostral é o conjunto definido pelo intervalo fechado $[a, b]$	139
\hat{x}	variável aleatória que denota o tamanho do passo da caminhada aleatória (no capítulo 2, apêndices A e B é usada como uma variável aleatória arbitrária e sem significado físico)	139, 140

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviaturas e Siglas	xvi
Lista de Símbolos	xvii
Sumário	xx
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos em Busca Aleatória	5
2.1 Fundamentação Teórica	5
2.1.1 Probabilidade	5
2.1.2 Principais Propriedades da Teoria de Probabilidades	7
2.1.3 Probabilidade Condicional	8
2.2 Variáveis Aleatórias	9
2.2.1 Distribuição de Probabilidade de VAs	10

2.2.2	Densidade de Probabilidade de VAs	10
2.2.3	Esperança, Variância e Momentos	11
2.3	Variáveis Aleatórias Multidimensionais	13
2.3.1	Probabilidade Condicional Multidimensional	14
2.4	Processos Estocásticos	15
2.4.1	Classificação dos Processos Estocásticos	16
2.4.2	Processo de <i>Lévy</i>	17
2.4.3	Processo Estocástico Composto	17
2.5	Alguns Processos Estocásticos em Física	19
2.5.1	<i>Einstein</i> e o Movimento <i>Browniano</i>	19
2.5.2	Teoria de <i>Langevin</i>	20
2.5.3	Equação de <i>Fokker-Planck</i>	22
2.6	Processos Estocásticos em Biologia: Teoria de Forrageamento	22
2.7	Algumas Distribuições Notáveis	23
2.7.1	Distribuição <i>Binomial</i>	24
2.7.2	Distribuição de <i>Poisson</i>	25
2.7.3	Distribuição <i>Gaussiana</i>	25
2.7.4	Distribuição de <i>Lévy</i>	25
2.7.5	Expansões da Distribuição de <i>Lévy</i> para $(r \gg 1)$ e $(r \ll 1)$	26
2.7.6	Distribuição <i>Lei de Potência</i>	28
2.7.7	Distribuição de <i>Pareto</i> Truncada	29
2.8	Teorema do Limite Central	29
2.8.1	Demonstração Multidimensional do TLC	30
2.8.2	Difusão Normal e Superdifusão	32
2.9	TLC Generalizado	33
2.9.1	Demonstração Multidimensional do TLCG	34
2.10	Caminhada Aleatória	35

2.10.1	História e Origens	35
2.10.2	Caminhada Aleatória Unidimensional ($\beta = 1$)	36
2.10.3	Caminhada Aleatória bidimensional ($\beta = 2$)	39
2.11	Sistemas Discretos	41
2.11.1	Primeira Visita e Probabilidade de Retorno	41
2.12	Processo de Busca	43
2.12.1	Modelo de <i>Viswanathan</i>	43
2.12.2	Ambientes de Busca	43
2.12.3	Heurística <i>Levyniana</i>	45
2.12.4	Vantagens das Estratégias <i>Levynianas</i>	48
2.13	Eficiência Energética do Processo de Busca	48
2.13.1	Quantidade de Saltos entre Eventos Sucessivos de Detecção de Alvos	51
2.13.2	Eficiência Energética sob Condições Ideais	54
2.13.3	Balanco Energético de <i>Raposo-Viswanathan</i>	55
3	Formulação Matemática geral do Processo de Busca Aleatória: Aplicações em 1D	57
3.1	Considerações Iniciais	57
3.2	Definição do Modelo	58
3.2.1	Ambiente de Busca	58
3.2.2	Heurística	58
3.2.3	Nosso Modelo de Busca Aleatória	59
3.2.4	Informações Requeridas pelo Modelo (“ <i>Inputs</i> ”)	60
3.2.5	Informação Obtida com o Modelo (“ <i>Output</i> ”)	60
3.3	Métrica do Processo de Busca, ℓ	61
3.3.1	Densidade de Probabilidade da Métrica	61
3.3.2	Valor Esperado e Variância da Métrica	62
3.4	Eficiência Energética do Processo de Busca, η	64

3.4.1	Densidade de Probabilidade da Eficiência	65
3.4.2	Valor Esperado da Eficiência Energética	66
3.5	Balanco Energético do Processo de Busca, \dot{E}	67
3.6	Balanco Energético na Aproximação de Desgaste Linear (ADL)	68
3.6.1	Densidades de Probabilidade na ADL	70
3.6.2	Valores Esperados na ADL	70
3.6.3	Probabilidade de Sobrevivência e Morte na ADL	72
3.7	Soluções Alternativas e Métodos de Aproximação	76
3.8	Aproximações de Campo Médio	77
3.8.1	Eficiência, η^{ACM}	77
3.8.2	Balanco Energético e Taxa de Ganho, Ω^{ACM}	77
3.9	Aproximação via Simulação Computacional (ASC)	77
3.9.1	Ambiente Computacional	78
3.9.2	Heurística Computacional	78
3.9.3	Métrica Computacional, ℓ^{ASC}	79
3.9.4	Eficiência Computacional Média, η^{ASC}	80
3.9.5	Balanco Energético Computacional E^{ASC}	80
3.9.6	Probabilidade de Morte Computacional	81
4	Processo de Busca Ideal no Ambiente <i>Weibull</i> Indestrutível	82
4.1	Processo de Busca Ideal	82
4.1.1	Definição da Busca Ideal	82
4.1.2	Propriedades da Busca Ideal	83
4.2	O Ambiente de Busca <i>Weibull</i>	84
4.2.1	Considerações sobre os Espaços Multidimensionais	84
4.2.2	Definição do AB <i>Weibull</i>	85
4.2.3	Densidade do Espaçamento entre Primeiros Vizinhos	85

4.2.4	Distâncias Notáveis no Ambiente <i>Weibull</i>	88
4.3	Solução Exata para o Processo de Busca Ideal no Ambiente de Busca <i>Weibull</i>	89
4.3.1	Métrica do Processo de Busca Ideal	89
4.3.2	Eficiência Energética Exata do PBI, η_{BI}	90
4.3.3	Eficiência Energética na ACM do PBI, η_{BI}^{ACM}	94
4.3.4	Comparativo $\langle \hat{\eta}_{BI} \rangle$ versus η_{BI}^{ACM}	94
4.4	Balanco Energético na ADL	95
4.4.1	FD e FDP na ADL	95
4.4.2	Ganho ou Perda Energética?	96
4.4.3	Probabilidade de Sobrevivência e Morte na ADL	97
4.5	Considerações Finais e Conclusão	99
5	Processo de Busca Ideal no Ambiente <i>Weibull</i> Destrutivo: Simulação Empiricamente Fundamentada na Busca Determinística Observada entre Primatas (<i>Ateles geoffroyi</i>)	100
5.1	Considerações Iniciais	101
5.1.1	Notação	101
5.2	O Experimento	101
5.3	Ambiente Computacional	102
5.3.1	Definição do AB <i>Weibull</i> Destrutivo	102
5.3.2	Parâmetros dos AB 1D, 2D e Transição (βD)	102
5.3.3	Propriedades Ambientais	104
5.4	Heurística Computacional	105
5.5	Discussão e Análise dos Resultados	106
5.5.1	Parâmetros Típicos	106
5.5.2	Métrica do Processo de Busca Ideal na Aproximação via Simulação Computacional	106
5.5.3	Métrica do Processo de Busca Ideal Unidimensional	107

5.5.4	Métrica da Transição	108
5.5.5	Aproximação Semi-Analítica da Eficiência Energética	111
5.5.6	Robustez do Efeito de Espiralamento	112
5.6	Considerações Finais e Conclusão	113
6	Processos de Busca Aleatória Coletiva: Manter a Agregação do Grupo Usando Estratégias de Lévy	115
6.1	Considerações Iniciais	116
6.1.1	Notação	116
6.2	Ambiente Gerado Computacionalmente	116
6.2.1	Definição do Ambiente de Busca	116
6.2.2	Propriedades Ambientais	117
6.3	Heurística Computacional	118
6.4	Modelos de Caminhada Aleatória Coletiva	118
6.4.1	Modelo Coletivo Browniano com o Comportamento do líder Browniano (Modelo A)	122
6.4.2	Modelo Coletivo de <i>Pareto</i> com o Comportamento do líder <i>Pareto</i> Truncado (Modelo B)	124
6.4.3	Modelo Coletivo de <i>Pareto</i> Truncado com o Comportamento do líder <i>Pareto</i> Truncado: Versão contínua (Modelo C)	129
6.4.4	Modelo Coletivo de <i>Pareto</i> Truncado com o Comportamento do líder <i>Pareto</i> Truncado: Versão Incremental (Modelo D)	130
6.5	Eficiência Energética nos Modelos de Busca Coletiva	131
6.6	Conclusões	132
7	Conclusões	134
7.1	Considerações Finais	134
7.2	Projetos Futuros	136
A	Funções de Variáveis Aleatórias	138

A.1	Densidade do Recíproco da V.A. Positiva	138
B	Leis de Potência em Dados Empíricos	140
B.1	Método de Máxima Verossimilhança	141
B.1.1	Exemplo Clássico	142
B.2	Distribuições Candidatas, seus Estimadores de Máxima Verossimilhança e Geradores de Números Aleatórios	144
B.2.1	Distribuição (1): <i>Pareto</i>	144
B.2.2	Distribuição (2): <i>Pareto Mantegna-Stanley</i>	146
B.2.3	Distribuição (3): <i>Pareto Koponen</i>	146
B.2.4	Distribuição (4): <i>Weibull</i>	146
B.2.5	Distribuição (5): <i>Zeta</i>	147
B.2.6	Distribuição (6): <i>Yule</i>	148
B.2.7	Distribuição (7): <i>Log-Normal</i>	148
B.2.8	Distribuição (8): <i>Exponencial</i>	149
B.2.9	Distribuição (9): <i>Poisson</i>	149
B.2.10	Procedimento de Validação	149
B.3	Resumo das Distribuições Consideradas	149
	Glossário	156
	Referências Bibliográficas	159

Introdução

Procurar objetos sem qualquer informação prévia sobre sua localização é uma atividade simples e muito comum nas mais diferentes situações. Envolve indeterminação, tomada de decisões (muitas vezes automáticas) e procedimentos de busca. Chamando isto tudo de estratégia, parece ser claro que algumas estratégias serão mais eficientes que outras, dependendo do exato ambiente (espaço) de busca. Assim, dada esta breve descrição coloquial (porém objetiva) de uma busca, bem como dos fatores que a compõem, não é de estranhar que idéias físicas e matemáticas possam ajudar a escolher qual estratégia seguir em cada situação particular. Na verdade, hoje em dia o assunto é uma área de ativa pesquisa dentro de Mecânica Estatística, Teoria de Probabilidades e Estatística Aplicada. Desta forma, a presente tese de doutorado tem como foco discutir alguns aspectos relevantes deste problema geral tão comum a nós todos e extremamente recorrente cada vez que perdemos nossas chaves da casa ou do carro.

A seguir, iremos contextualizar os três principais tópicos analisados ao longo do trabalho, rapidamente descrevendo nossos propósitos ao abordar cada um deles.

Processos de busca aleatória *Markoviana* constituem fenômenos complexos [2–5], que como mencionado, vêm encontrado aplicações em diversas áreas do conhecimento [4–12]. Em particular, são de grande importância no âmbito biológico. Neste contexto, os processos de busca aplicam-se à modelagem da dinâmica de seres vivos buscando abrigo, parceiros, ou alimento [4, 5, 13–17], na atividade chamada de forrageamento animal. Através de inúmeros estudos empíricos, por exemplo, de chacais (*Canis adustus* [18]), macacos-aranha (*Ateles geoffroyi*) [19] e predadores marinhos [20, 21], determinou-se que os mesmos movem-se em seu ambiente ao longo de trajetórias aparentemente erráticas à procura de presas. Tais trajetórias podem ser bem descritas como caminhadas de Lévy [22] (ver próximo capítulo). Assim, entender as propriedades estatísticas gerais de tais

trajetórias podem nos dar importante informação de como os animais se comportam, e como agem para tentar melhorar suas chances de encontrar o que procuram.

De fato, na busca de descrever de forma apropriada comportamento animal (e possíveis implicações evolutivas), a segunda metade do século XX viu um aumento notável no interesse em modelos de forrageamento ótimo [23]. Estes modelos baseiam-se na hipótese, experimentalmente motivada [14, 15, 24], de que animais utilizam estratégias de buscas que otimizam o desempenho na detecção de alimento. Exemplos são o da dieta ideal, primeiramente testado por *John Goss-Custard*, que descreve o comportamento de um **forrageador** que encontra diferentes tipos de presas e deve escolher qual atacar [25–29], ou de seleção de caminhos, descrevendo a melhor dinâmica de um **forrageamento** quando as presas então concentradas em pequenos aglomerados com distâncias consideráveis entre eles [4–9, 30–32]. Mais recentemente, dados empíricos [14, 15] descrevendo **forrageamento** animal [4, 19, 22, 33] sugerem que existe uma tendência de divergência da variância na distribuição de deslocamentos dos mesmos durante o processo de busca.

Tal descoberta mostrou que há uma forte ligação entre o problema de busca aleatória e diversos fenômenos superdifusivos. De forma geral, processos com difusão anômala superdifusiva são caracterizados por deslocamentos quadráticos médios, que para tempos suficientemente longos, crescem de acordo com t^α com $\alpha > 1$ [34, 35]. Em particular, parte deles também são associados com caminhadas e vôos de *Lévy* [36, 37], cujas distribuições das variáveis relevantes apresentam invariância de escala. Na verdade, em processos estocásticos como caminhadas aleatórias, existem diferentes razões que conduzem à observação de superdifusão e distribuições com caudas longas dadas por *Leis de Potência*. Como ilustração, podemos mencionar: (i) evolução governada pela equação de *Fokker-Planck* fracional [10, 38]; (ii) sistemas dicotômicos, nos quais dois tipos de escalas podem ser identificadas, microscópica e macroscópica [39]; (iii) existência de correlações entre os eventos relacionados às variáveis relevantes [35]; (iv) processos multiplicativamente aleatórios, na presença de condições de contorno [40, 41]. Finalmente, mencionamos que a distribuição de *Lévy* também é observada em situações tais como a diversidade de espécies em Ecologia evolucionária [42–44] como mecanismos de proteção para evitar eras de extinção em cenários de baixa disponibilidade de recursos energéticos [45].

Assim, nossa primeira proposta é desenvolver uma descrição matemática geral para o problema de busca aleatória, através de uma construção analítica que incorpore especificidades do ambiente de busca e que assuma *Leis de Potência* (distribuições de *Pareto*) para as quantidades relevantes que definem a dinâmica do buscador. Nos Capítulos 3 e 4 discutimos as estratégias ótimas de acordo com tal formalismo.

Os sistemas citados acima são basicamente processos aleatórios. Porém, o processo de busca também pode ter limites parcialmente determinísticos, descritos por caminhadas determinísticas [46–53] (aqui o parcial é usado para salientar que o ambiente é ainda constituído de *alvos* aleatoriamente distribuídos, assim não conhecidos *a priori*). Nestes casos, as regras dinâmicas de locomoção do *forrageador* não são baseadas em densidades de probabilidade. Em vez disso, são condições claras e não ambíguas que regem o movimento, conduzindo a uma dinâmica de movimento determinística [53]. Caminhadas determinísticas normalmente apresentam as dificuldades técnicas comuns a sistemas dinâmicos não lineares [46–48] e podem dar origem a processos superdifusivos [53]. Trata-se de uma classe relativamente nova de modelos conhecidos em teoria de otimização como o “*O Problema do Turista*” [46–48]. Em contraste com os exemplos anteriormente mencionados, de caminhadas puramente aleatórias, para caminhadas determinísticas não existem condições gerais que indiquem quando a evolução gera uma distribuição *Lei de Potência* para as variáveis dinâmicas.

Neste trabalho estudaremos uma situação, que embora não sendo geral (e não podendo o ser devido à última observação acima), ilustra quando pode haver a emergência de *Leis de Potência* em buscas determinísticas. Iremos mostrar como regras de “seguir o alvo mais próximo”, aplicadas a geometrias particulares, podem gerar *Leis de Potência* para a distribuição dos passos do buscador. Isto acontecendo mesmo com a distribuição dos *alvos* sendo do tipo Poisson. As análises com relação a este exemplo são apresentados no Capítulo 5 da tese.

Talvez, a situação mais desafiante em busca aleatória é determinar em quais situações a tarefa pode ser realizada de forma eficiente, mas em grupo. O problema não é tão simples como possa parecer, pois não basta “apenas” otimizar o processo para cada indivíduo. O grupo precisa ser mantido, ou seja, não podemos permitir que a difusão leve a separações espaciais tão grandes de tal forma a fragmentar o mesmo. Portanto, este é um típico problema de muitos corpos com vínculos, notoriamente difícil de tratar em física. Porém, dado o grande número de animais que vivem em grupos, o estudo de busca coletiva [54] têm grande importância em ecologia e, portanto, sendo de grande interesse.

Na situação mais simples (e não a única possível), temos um *líder* (a quem os demais devem tentar permanecer próximos) e diversos *seguidores* buscando coletivamente *alvos* aleatoriamente distribuídos e compartilhando os benefícios de proteção do *bando* e ganho energético proveniente dos alvos detectados. De fato, o estabelecimento de um *bando* pode ser vantajoso devido a muitas razões, tais como o intercâmbio de informações e aumento geral na capacidade coletiva de encontrar *alvos* [55]. A flexibilidade típica de *Bandos*

auto-organizados [56] pode ser também muito útil quando o ambiente de busca está em constante mudança [57]. Para situações críticas, por exemplo, à beira da fome [45], a cooperação pode tornar-se um ingrediente fundamental para evitar extinção. Obviamente um **bando** não tem como única finalidade a busca coletiva, assim sua formação pode envolver mecanismos complexos [54, 58, 59], que ainda não são totalmente compreendidos.

Aqui abordaremos o problema de otimização de busca coletiva para um **bando** como descrito acima, ou seja, constituído de um **líder** e de Seguidores. Discutiremos quando o processo como um todo pode se beneficiar de estratégias de *Lévy*, e ainda manter a sua integridade coletiva, evitando uma dispersão que possa fragmentá-lo. Para tal, mostraremos que regras dinâmicas extras precisam ser impostas, além daquelas usuais da própria busca. Finalmente observamos que existem muitos casos nos quais a busca coletiva ocorre com todos os elementos tendo exatamente o mesmo papel, não havendo **líder** [60, 61]. No entanto, também é comum o desenvolvimento de uma estrutura hierárquica, em que o **bando** define um **líder** que orientará a busca [58]. Na verdade, um grande conjunto de evidências empíricas para muitas espécies animais [62–64] mostram que indivíduos isolados podem tomar decisões por todo o **bando** (às vezes chamado de comportamento “despótico”). Ainda mais interessante, experiências com um tipo particular de primata durante o forrageamento [65] mostram o surgimento natural de uma relação **líder-seguidores**. Aprofundamos esta discussão no Capítulo 6.

Podemos finalmente resumir a organização da presente tese como se segue. No Capítulo 2 apresentamos uma revisão completa, baseada nas referências [66, 67] dos conceitos básicos necessários para se desenvolver uma teoria de busca aleatória. No Capítulo 3 discutimos a estruturação básica (inédita na literatura) de uma descrição matemática geral do problema. No Capítulo 4 estendemos o alcance dos resultados para ambientes multi-dimensionais e abordamos diferentes aspectos da teoria desenvolvida. No Capítulo 5 simulamos um sistema que apresenta um limite determinístico simples de se obter (e cuja motivação empírica é a dinâmica de forrageamento de primatas). Nossa construção formal dos Capítulos anteriores é então testada neste caso. No Capítulo 6 discutimos a busca coletiva, considerando diferentes modelos de vínculo ao **bando** e determinando exatamente aqueles que possibilitam otimização do processo via estratégias de *Lévy*, mas não levando à fragmentação do grupo. Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos considerações gerais finais e listamos possíveis continuações para os trabalhos aqui desenvolvidos. A notação e os símbolos matemáticos usados neste trabalho estão descritos na página **xix**. Apresentamos um breve glossário na página **158** e a lista de siglas na página **xvi**. Na página *WEB* [68] disponibilizamos vídeos ilustrativos de simulações computacionais.

Conceitos Básicos em Busca Aleatória

2.1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo abordamos o problema da busca aleatória generalizada [4–9] no contexto da teoria de processos estocásticos *Markovianos* [69] e, portanto, fundamentado na teoria de probabilidades [70]. Nesta seção apresentamos os conceitos básicos da teoria de probabilidades (baseada na seção 8.2.1 de [71]) e processos estocásticos, desenvolvidos ao longo do século XX. Começamos definindo os processos estocásticos e seguimos demonstrando um dos principais teoremas da teoria de probabilidades, conhecido como **teorema do limite central (TLC)** e algumas das suas generalizações mais importantes [72]. Na sequência apresentamos, de forma geral, as distribuições notáveis, *Binomial*, de *Poisson*, *Johann Carl Friedrich Gaussiana* e distribuição de *Lévy*, que estão certamente entre as distribuições mais frequentemente observadas na natureza. Munidos destas informações preliminares, passamos à teoria de caminhadas aleatórias *A. A. Markovianas* [73] e suas aplicações em algumas áreas do conhecimento como Física [74–76], Economia [77] e Biologia [19, 22, 33].

2.1.1 Probabilidade

Embora as ideias sobre probabilidade sejam muito antigas, o desenvolvimento da teoria da probabilidade como disciplina científica, começou realmente em 1654, quando *B. Pascal* (1623-1662) e *P. de Fermat* (1601-1665) analisaram jogos simples de acaso em uma correspondência publicada pela primeira vez em 1679. Nesse meio tempo, os conceitos básicos da teoria da probabilidade foram claramente definidos e utilizados por *C. Huygens* (1629-1695) em seu tratado “*De Ratiociniis em AleaLudo*” publicado em 1657.

No início do século XVIII, *J. Bernoulli* (1654-1705) provou a lei dos grandes números, ao passo que *A. de Moivre* (1667-1754) estabeleceu uma primeira versão do teorema do limite central. No início do século XIX, contribuições importantes, essencialmente sobre teoremas de limite, foram feitas por *P. S. M. de Laplace* (1749-1827), *J. C. F. Gauss* (1777-1855) e *S. D. Poisson* (1781-1840). Estes resultados foram estendidos no final do século XIX e início do século XX por *P. L. Chebyshev* (1821-1894), *A. A. Markov* (1856-1922) e *A. M. Lyapunov* (1857-1918). A axiomatização da teoria começou com as obras de *F. Bernstein* (1878-1956), *R. von Mises* (1883-1953) e *E. Borel* (1871-1956), mas a formulação com base na noção de medida, que tornou-se geralmente aceita, foi dada por *A. N. Kolmogorov* (1903-1987) em 1933.

De acordo com *A. N. Kolmogorov* [78], um espaço de probabilidade é uma tripla ordenada (Ω, \mathcal{A}, P) , onde Ω é o espaço amostral ou espaço de eventos elementares, \mathcal{A} é o conjunto de todos os eventos (σ -álgebra) e P é a medida de probabilidade definida em \mathcal{A} .

Definição 2.1.1. O complementar do evento B , denotado por B^c , é o evento que ocorre quando B não ocorre, ou seja,

$$B^c = \{x \in \Omega \mid x \notin B\}$$

Definição 2.1.2 (σ -álgebra). Uma classe de todos os subconjuntos de Ω , representada por \mathcal{A} , é denominada uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Se $B \in \mathcal{A}$, então $B^c \in \mathcal{A}$;
3. Se $B_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$;

Exemplo 2.1. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

(a) O conjunto $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ é uma σ -álgebra de Ω .

(b) O conjunto $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ não é uma σ -álgebra pois $\{1, 3\}^c = \{2\} \notin \mathcal{A}_2$.

(c) O conjunto $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ é uma σ -álgebra de Ω .

Definição 2.1.3 (Definição axiomática de probabilidade). Uma função P , definida na σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de Ω e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz os *Axiomas de Kolmogorov*:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $B \in \mathcal{A}$, $P(B) \geq 0$;
3. Para toda sequência $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$, mutuamente exclusivos, temos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Com os axiomas de *Kolmogorov* pode-se demonstrar com rigor matemático, diversas propriedades de probabilidade apresentadas a seguir.

2.1.2 Principais Propriedades da Teoria de Probabilidades

Apresentaremos nesta seção algumas das propriedades de probabilidade que decorrem diretamente ou quase diretamente dos axiomas da definição 2.1.3.

Considere os eventos B, B_i e C em (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Denotando por \emptyset o evento impossível, temos que $P(\emptyset) = 0$;
2. B^c é o complementar do evento B , então $P(B^c) = 1 - P(B)$;
3. Sejam B e C dois eventos de \mathcal{A} , $P(C) = P(C \cap B) + P(C \cap B^c)$;
4. Sejam B e C dois eventos de \mathcal{A} tais que $B \subset C$, tem-se que $P(B) \leq P(C)$;
5. Regra da adição de probabilidades $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$;
6. Para quaisquer B_1, B_2, \dots tem-se, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$.

Definição 2.1.4 (Função frequência). Considere um espaço amostral Ω com N eventos simples. Seja A o evento de Ω composto de n eventos simples. A frequência de A , que denotaremos por $f(A)$, é definida por

$$f(A) = \frac{n}{N}.$$

2.1.3 Probabilidade Condicional

Definição 2.1.5 (Probabilidade condicional). Considere os eventos B e C em (Ω, \mathcal{A}, P) . Sendo $P(C) > 0$, a *probabilidade condicional de B dado que ocorreu C* , é dada por

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}, \quad (2.1)$$

caso $P(C) = 0$, definimos $P(B|C) = P(B)$.

Propriedades 2.1.1 (Regra do produto de probabilidades). Para os eventos B_1, B_2, \dots, B_n em (Ω, \mathcal{A}, P) , com $P\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) > 0$, a *regra do produto de probabilidades*, é dada por

$$P(B_1 \cap B_2 \dots \cap B_n) = P(B_1)P(B_2|B_1) \dots P(B_n|B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{n-1}). \quad (2.2)$$

Definição 2.1.6 (Partição). Os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição do espaço amostral se:

1. $A_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$; (A_i e A_j mutuamente exclusivos)
3. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Teorema 2.1.1 (Lei da probabilidade total). Suponha que os eventos C_1, C_2, \dots, C_n em (Ω, \mathcal{A}, P) formam uma *partição* de Ω e todos tem probabilidade positiva, então, para qualquer evento B temos

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(C_i)P(B|C_i). \quad (2.3)$$

Prova: Observe que $P(C_i)P(B|C_i) = P(B \cap C_i)$, pela regra do produto de probabilidades.

Também, para $i = 1, 2, \dots, n$ os eventos $B \cap C_i$ são disjuntos. Então $\sum_{i=1}^n P(C_i)P(B|C_i) =$

$$\sum_{i=1}^n P(B \cap C_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap C_i)\right] = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right)\right] = P(B) \text{ uma vez que a união dos } C_i \text{'s é } \Omega.$$

Teorema 2.1.2 (Teorema de Bayes). Suponha que os eventos C_1, C_2, \dots, C_n em (Ω, \mathcal{A}, P) formam uma *partição* de Ω e todos tem probabilidade positiva. Seja B um evento qualquer

com $P(B) > 0$. Então, para todo $j = 1, 2, \dots, n$, temos

$$P(C_j|B) = \frac{P(B|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|C_i)P(C_i)}. \quad (2.4)$$

Prova: A demonstração é imediata aplicando 2.3 em 2.1.

Encerramos esta seção definindo o conceito de independência de dois eventos B e C : a ocorrência do evento C não altera a probabilidade atribuída ao evento B .

Definição 2.1.7 (Independência). Os eventos B e C em (Ω, \mathcal{A}, P) são independentes se

$$P(B|C) = P(B), \quad (2.5)$$

e decorre de (2.1) que

$$P(B \cap C) = P(B)P(C). \quad (2.6)$$

2.2 Variáveis Aleatórias

Definição 2.2.1 (Variáveis aleatórias (VA)). Considere (Ω, \mathcal{A}, P) , chamamos de *variável aleatória* qualquer função $\hat{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{x}^{-1}(I) = \{w \in \Omega \mid \hat{x}(w) \in I\} \in \mathcal{A}, \quad (2.7)$$

para todo intervalo $I \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, \hat{x} é VA se sua imagem inversa para intervalos $I \in \mathbb{R}$ pertence à σ -álgebra \mathcal{A} .

As VAs que assumem valores em conjuntos enumeráveis são denominadas VAs discretas e aquelas que assumem valores em um intervalo da reta real são denominadas VAs contínuas.

2.2.1 Distribuição de Probabilidade de VAs

Função Distribuição de VAs Contínuas

Definição 2.2.2 (Função distribuição de probabilidade (FD)). Seja \hat{x} uma VA contínua em (Ω, \mathcal{A}, P) , sua função de distribuição é definida por

$$F_{\hat{x}}(x) = P(\hat{x} \in (-\infty, x]) = P(\hat{x} \leq x), \quad \text{com } x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Uma FD de uma VA contínua \hat{x} em (Ω, \mathcal{A}, P) obedece as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
2. F é contínua à direita, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$;
3. F é não decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Densidade de VAs Discretas

Definição 2.2.3 (Função massa de probabilidade (FMP)). Seja \hat{x} uma VA com valores inteiros x_1, x_2, \dots para $i = 1, 2, \dots$ temos

$$P(\hat{x} = x_i) = P[\omega \in \Omega \mid \hat{x}(\omega) = x_i]. \quad (2.9)$$

A FMP de uma VA \hat{x} em (Ω, \mathcal{A}, P) satisfaz:

1. $0 \leq P(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots$;
2. $\sum_i P(x_i) = 1$.

Com a soma percorrendo todos os possíveis valores assumidos por \hat{x} .

2.2.2 Densidade de Probabilidade de VAs

Definição 2.2.4 (Função Densidade de probabilidade (FDP)). A FDP de uma VA contínua, \hat{x} , é uma função $f_{\hat{x}}(x) \geq 0$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{x}}(x) dx = 1. \quad (2.10)$$

A probabilidade de uma **VA** \hat{x} pertencer a um intervalo $(a, b]$ é dada por $P(a < \hat{x} \leq b) = \int_a^b f_{\hat{x}}(x)dx$, ou seja, é obtida através da integral da **FDP** neste intervalo. Assim,

$$P(a < \hat{x} \leq b) = \int_a^b f_{\hat{x}}(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.11)$$

Definição 2.2.5 (Função característica). A função característica de uma **VA** contínua, \hat{x} , é a transformada de *Fourier* da **FDP** de \hat{x} , ou seja

$$\varphi(s) = \mathcal{F}\{f_{\hat{x}}(x)\} \quad (2.12)$$

2.2.3 Esperança, Variância e Momentos

Definição 2.2.6 (Esperança de **VAs** discretas). A *esperança matemática* (ou valor esperado) de uma **VA** discreta \hat{x} que assume os valores x_i , com as respectivas probabilidades $P[\hat{x} = x_i]$, para $i = 1, 2, \dots$ é dada por

$$E(\hat{x}) = \langle \hat{x} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\hat{x} = x_i). \quad (2.13)$$

Definição 2.2.7 (Esperança de **VAs** contínuas). A *esperança matemática* de uma **VA** contínua \hat{x} , com densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por

$$E(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{x}}(x)dx. \quad (2.14)$$

Se as esperanças das **VAs** \hat{x} e \hat{y} existem, então existe a esperança de $\hat{x} + \hat{y}$ e, se c é uma constante, tem-se

$$\begin{aligned} E(\hat{x} + \hat{y}) &= E(\hat{x}) + E(\hat{y}), \\ E(c\hat{x}) &= c E(\hat{x}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Definição 2.2.8 (Variância, $\sigma^2(\hat{x})$). A *variância* de uma **VA** \hat{x} , denotada por $\sigma^2(\hat{x})$ ou por $\text{Var}(\hat{x})$, é definida por

$$\sigma^2(\hat{x}) = E(\hat{x} - E(\hat{x}))^2. \quad (2.16)$$

Pelas propriedades (2.15) podemos reescrever a equação (2.16) por

$$\sigma^2(\hat{x}) = E(\hat{x}^2) - (E(\hat{x}))^2. \quad (2.17)$$

Definição 2.2.9 (Desvio padrão, $\sigma(\hat{x})$). O *desvio padrão* de uma VA \hat{x} é a raiz quadrada da variância, denotada por $\sigma(\hat{x})$.

Definição 2.2.10 (Momento de ordem k , $m_k(\hat{x})$). A esperança de \hat{x}^k é denominada *momento* de ordem k da VA \hat{x} para $k = 1, 2, 3, \dots$

Para uma VA discreta \hat{x} temos

$$m_k(\hat{x}) = E(\hat{x}^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k P(\hat{x} = x_i). \quad (2.18)$$

Para uma VA contínua \hat{x} com densidade de probabilidade $f(x)$, temos

$$m_k(\hat{x}) = E(\hat{x}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\hat{x}}(x) dx. \quad (2.19)$$

Vimos, nas definições 2.2.2 e 2.2.3 que a toda VA está associada sua distribuição de probabilidade. Vamos associar a \hat{x} uma outra função, chamada função geradora de momentos.

Definição 2.2.11 (Função geradora de momentos, $M_{\hat{x}}(s)$). A *função geradora de momentos* da VA \hat{x} , denotada por $M_{\hat{x}}(s)$, é definida por

$$M_{\hat{x}}(s) = E(e^{s\hat{x}}), \quad (2.20)$$

para todo $s \in (-\infty, \infty)$, em que a esperança seja finita.

Para VAs discretas, a função geradora de momentos se escreve da seguinte maneira:

$$M_{\hat{x}}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{sx_i} P(\hat{x} = x_i). \quad (2.21)$$

Para VAs contínuas, a função geradora de momentos está totalmente determinada pela transformada de Laplace da FDP avaliada em $x = -s$, ou seja $\mathcal{L}\{f(x)\}$, assim

$$M_{\hat{x}}(s) = \mathcal{L}\{f(-s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx. \quad (2.22)$$

Os momentos são características importantes de distribuições de probabilidades e de acordo com o teorema de Hausdorff (*F. Hausdorff*, [79]) uma função de distribuição pode ser caracterizada por seus momentos. Um contraexemplo apresentado por *C. C. Heyd* é a distribuição *Log-Normal*, [70]. Felizmente distribuições importantes em aplicações estão cobertas pelo teorema de Hausdorff assim, para os propósitos mais comuns, o conhecimento dos momentos, quando eles existem, equivale ao conhecimento da distribuição de

probabilidade, no sentido de que eles revelam todas as propriedades da distribuição. Os momentos de uma VA podem ser determinados pelos coeficientes da série de MacLaurin da função geradora de momentos.

2.3 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Definição 2.3.1 (Função de densidade de probabilidade conjunta). Uma função $f_{\hat{x},\hat{y}}(x, y)$, não negativa, definida para as VAs $\{\hat{x}, \hat{y} : x, y \in \mathbb{R} \text{ e } -\infty \leq x, y \leq \infty\}$, satisfazendo a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{x},\hat{y}}(x, y) dx dy = 1,$$

é denominada uma função de densidade de probabilidade da VA bidimensional contínua (\hat{x}, \hat{y}) se para todo subconjunto B de pontos do \mathbb{R}^2 tivermos

$$P[(\hat{x}, \hat{y}) \in B] = \int \int_B f_{\hat{x},\hat{y}}(x, y) dx dy. \quad (2.23)$$

Definição 2.3.2 (Função massa de probabilidade conjunta). A função de massa do par de VAs discretas (\hat{x}, \hat{y}) é dada por

$$F_{\hat{x},\hat{y}}(x, y) = P(\hat{x} \leq x, \hat{y} \leq y) = \sum_{i:x_i \leq x} \sum_{j:y_j \leq y} P(\hat{x} = x_i, \hat{y} = y_j). \quad (2.24)$$

Definição 2.3.3 (Função de distribuição conjunta). A função de distribuição do par de VAs contínuas (\hat{x}, \hat{y}) , que será denotada por $F_{\hat{x},\hat{y}}(x, y)$, é dada por

$$F_{\hat{x},\hat{y}}(x, y) = P(\hat{x} \leq x, \hat{y} \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\hat{x},\hat{y}}(u, v) du dv. \quad (2.25)$$

Definição 2.3.4 (Função massa de probabilidade marginal). Seja (\hat{x}, \hat{y}) VA bidimensional discreta, a função massa de probabilidade de \hat{x} é obtida calculando-se para $i = 1, 2, \dots, n$

$$F_{\hat{x}}(x, y) = P(\hat{x} = x_i, \hat{y}) = \sum_{j=1}^m P(\hat{x} = x_i, \hat{y} = y_j). \quad (2.26)$$

Definição 2.3.5 (Função de distribuição de probabilidade marginal). Seja (\hat{x}, \hat{y}) VA bidi-

mensional contínua, a função de distribuição de probabilidade de \hat{x} é obtida calculando-se

$$F_{\hat{x}}(x, y) = P(\hat{x} = x_i, \hat{y}) = \int_{-\infty}^y f_{\hat{x}, \hat{y}}(x_i, y) dy, \quad (2.27)$$

e a **FD** marginal de \hat{y} é obtida de modo análogo. Para $j = 1, 2, \dots, m$

$$F_{\hat{y}}(x, y) = P(\hat{x}, \hat{y} = y_j) = \sum_{i=1}^n P(\hat{x} = x_i, \hat{y} = y_j), \quad (2.28)$$

$$F_{\hat{y}}(x, y) = P(\hat{x}, \hat{y} = y_j) = \int_{-\infty}^x f_{\hat{x}, \hat{y}}(x, y_j) dx. \quad (2.29)$$

Definição 2.3.6 (Independência de **VAs** multidimensionais). As **VAs** discretas $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ são ditas independentes se para todos os valores x_1, x_2, \dots, x_n tivermos

$$P(\hat{x}_1 = x_1, \hat{x}_2 = x_2, \dots, \hat{x}_n = x_n) = P(\hat{x}_1 = x_1)P(\hat{x}_2 = x_2) \cdots P(\hat{x}_n = x_n). \quad (2.30)$$

Definição 2.3.7. Para **VAs** contínuas temos que

$$f_{\hat{x}, \hat{y}}(x, y) = f_{\hat{x}}(x)f_{\hat{y}}(y). \quad (2.31)$$

Definição 2.3.8. As **VAs** \hat{x} e \hat{y} , com função de distribuição $F_{\hat{x}, \hat{y}}(x, y)$, são independentes se, e somente se,

$$F_{\hat{x}, \hat{y}}(x, y) = F_{\hat{x}}(x)F_{\hat{y}}(y), \quad (2.32)$$

onde $F_{\hat{x}}(x)$ e $F_{\hat{y}}(y)$ são as funções marginais de \hat{x} e de \hat{y} .

Definição 2.3.9. Se as **VAs** \hat{x} e \hat{y} , são independentes, tem-se

$$E(\hat{x}\hat{y}) = E(\hat{x})E(\hat{y}). \quad (2.33)$$

Definição 2.3.10. Sejam $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ **VAs** independentes cujas funções geradoras de momentos são denotadas por $\phi_{\hat{x}_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. A função geradora de momentos de $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_n$ que designaremos por $M_{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_n}(s)$ satisfaz, para todo s :

$$M_{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_n}(s) = M_{\hat{x}_1}(s)M_{\hat{x}_2}(s) \cdots M_{\hat{x}_n}(s). \quad (2.34)$$

2.3.1 Probabilidade Condicional Multidimensional

Uma definição formal de probabilidade condicional é necessária a fim de permitir definir e classificar os processos estocásticos neste trabalho. Vamos usar a notação de

Risken [76].

Se considerarmos somente as realizações de r variáveis aleatórias $\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_r$, onde as últimas $r-1$ variáveis aleatórias assumem os valores fixos $\dot{y}_2 = x_2, \dots, \dot{y}_r = x_r$, obtemos uma certa densidade de probabilidade para a primeira VA chamada densidade de probabilidade condicional, escrita como $P(x_1|x_2, \dots, x_r)$. A probabilidade $W_r(x_1, \dots, x_r)dx_1 \dots dx_r$, da VA \dot{y}_i ($i = 1, \dots, r$) estar no intervalo $x_i \leq \dot{y}_i \leq x_i + dx_i$ é a probabilidade $P(x_1|x_2, \dots, x_r)dx_1$ da primeira variável estar no intervalo $x_1 \leq \dot{y}_1 \leq x_1 + dx_1$ e das outras variáveis assumirem valores $\dot{y}_i = x_i$ ($i = 2, \dots, r$) vezes a probabilidade $W_{r-1}(x_2, \dots, x_r)dx_2 \dots dx_r$ das últimas $r-1$ variáveis estarem no intervalo $x_i \leq \dot{y}_i \leq x_i + dx_i$ ($i = 2, \dots, r$), ou seja,

$$W_r(x_1, \dots, x_r) = P(x_1|x_2, \dots, x_r)W_{r-1}(x_2, \dots, x_r). \quad (2.35)$$

Como W_{r-1} segue de W_r (detalhes em [76], seção 2.3.2 página 30) podemos expressar a densidade de probabilidade condicional em termos de W_r

$$\begin{aligned} P(x_1|x_2, \dots, x_r) &= \frac{W_r(x_1, \dots, x_r)}{W_{r-1}(x_2, \dots, x_r)}, \\ P(x_1|x_2, \dots, x_r) &= \frac{W_r(x_1, \dots, x_r)}{\int W_r(x_1, \dots, x_r)dx_1}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.4 Processos Estocásticos

Em teoria de probabilidade, um processo estocástico (ou processo aleatório) é a contrapartida de um processo determinístico. Fixada uma condição inicial, o sistema poderá evoluir por inúmeros caminhos. Todos os caminhos são possíveis, (dadas certas restrições inerentes ao sistema) mas alguns podem ser mais prováveis que outros. Esta indeterminação é introduzida pelas distribuições de probabilidade que governam a evolução do processo. Um processo estocástico (definição extraída de [80]) define-se como segue.

Definição 2.4.1. Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias

$$\{ X(t, x) : t \in T, x \in \mathcal{X} \},$$

definidas em um espaço de probabilidade, indexado por um parâmetro t , onde t varia no conjunto T e x é uma variável aleatória, ou seja, é uma função definida num espaço amostral \mathcal{X} .

Para um $t = t_0$ fixo, $X(t_0, x) = X_{t_0}(x)$ é uma variável aleatória denotada por \dot{x}_{t_0} já que x varia no espaço amostral \mathcal{X} . Por outro lado, fixando $x = x_0$, $X(t; x_0) = X_{x_0}(t)$ é uma

função que só depende de t , e é chamada de uma realização do processo. é claro que se t e x são fixos, $X(t, x)$ é um número real. Para facilitar a notação, $X(t)$ será usado daqui por diante para denotar um processo estocástico. O conjunto T é chamado de espaço de parâmetro. Os valores assumidos por $X(t)$ são chamados de estados, e o conjunto de todos os possíveis estados é chamado de espaço de estados do processo estocástico e é denotado por E . Se o conjunto T é discreto, então o processo estocástico é dito ser de tempo discreto, nesse caso ele também pode ser chamado de uma sequência aleatória. Se T é contínuo, então o processo é dito ser de tempo contínuo. Se E é discreto, então o processo é dito ser um processo de estados discretos, e pode ser chamado também de uma cadeia. Se E é contínuo, então o processo é dito ser de espaço contínuo.

2.4.1 Classificação dos Processos Estocásticos

Podemos definir a densidade de probabilidade condicional de uma VA \dot{y} no instante t_n com a condição da VA no instante $t_{n-1} < t_n$ assumir o valor x_{n-1} , no instante $t_{n-2} < t_{n-1}$ assumir o valor x_{n-2} , e assim sucessivamente, até finalmente no instante $t_1 < t_2$ assumir o valor x_1 tal que

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = \langle \delta(x_n - \dot{y}(t_n)) \rangle |_{\dot{y}(t_{n-1})=x_{n-1}, \dots, \dot{y}(t_1)=x_1}, \\ (t_n > t_{n-1} > \dots > t_1). \quad (2.37)$$

De acordo com a equação (2.36) podemos expressar a densidade de probabilidade condicional em termos de W_r

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = \frac{W_n(x_n, t_n, \dots, x_1, t_1)}{W_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1)}, \\ P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = \frac{W_n(x_n, t_n, \dots, x_1, t_1)}{\int W_n(x_n, t_n, \dots, x_1, t_1) dx_n}. \quad (2.38)$$

Classificamos assim os processos estocásticos descritos pela VA \dot{y} segundo *M. C. Wang* e *G. E. Uhlenbeck* [69] como segue:

- **Processo Puramente Aleatório:** chamamos um processo de puramente aleatório, se a densidade de probabilidade condicional P_n ($n \geq 2$ arbitrário) não depender dos valores $x_i = \dot{y}(t_i)$ ($i < n$) da VA nos instantes prévios $t_i < t_n$.

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n). \quad (2.39)$$

- **Processo *Markoviano*:** para um processo *Markoviano*, a densidade de probabilidade condicional depende apenas do valor da VA $\hat{y}(t_{n-1}) = x_{n-1}$ no último instante e não depende de $\hat{y}(t_{n-2}) = x_{n-2}$ e demais valores.

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.40)$$

- **Processo Geral:** o processo é dito geral quando a densidade de probabilidade condicional depende dos valores da VA nos dois últimos ou mais instantes.

2.4.2 Processo de *Lévy*

Na teoria da probabilidade, um processo de *Lévy* é qualquer processo estocástico de tempo contínuo que começa em zero e possui *incrementos independentes e estacionários*¹.

Definição 2.4.2. Um processo estocástico $\{X(t, x) : t \in T, x \in \mathbb{R}\}$ é dito ser um processo de *Lévy* se,

1. $\hat{x}_0 = 0$;
2. **Incrementos independentes:** para qualquer $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\hat{x}_{t_2} - \hat{x}_{t_1}, \hat{x}_{t_3} - \hat{x}_{t_2}, \dots, \hat{x}_{t_n} - \hat{x}_{t_{n-1}}$ são independentes;
3. **Incrementos estacionários:** para qualquer $s < t$, $\hat{x}_t - x_s$ é igual em distribuição a \hat{x}_{t-s} .

Usamos a notação da definição 2.4.1 de forma que $\hat{x}_{t_0} = X(t = t_0, x)$ é uma variável aleatória.

2.4.3 Processo Estocástico Composto

Um processo composto é um processo estocástico de tempo contínuo com saltos. Os saltos acontecem aleatoriamente, por algum processo, e o tamanho dos saltos também é aleatório com uma distribuição de probabilidade especificada. Um processo composto é um processo $\{\hat{y}(t) : t \geq 0\}$ dado por

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}(t)} \hat{x}_i,$$

¹A expressão *incrementos independentes e estacionários* para uma variável aleatória é análoga a expressão *independentes e identicamente distribuídos* para variáveis aleatórias.

onde $\{\dot{N}(t) : t \geq 0\}$ é um processo estocástico arbitrário e $\{\dot{x}_i : i \geq 1\}$ são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e com função de densidade $f_{\dot{x}}(x)$, que são também independentes de $\{\dot{N}(t) : t \geq 0\}$.

Usando esperança condicional [$E_y(\dot{y}) \equiv E_N(E(\dot{y}|\dot{N}))$], o valor esperado do processo pode ser calculado como segue

$$\begin{aligned}\langle \dot{y}(t) \rangle &= E_N(E(\dot{y}(t) | \dot{N}(t))) \\ \langle \dot{y}(t) \rangle &= E_N(N(t) \langle \dot{x} \rangle) \\ \langle \dot{y}(t) \rangle &= \langle \dot{N}(t) \rangle \langle \dot{x} \rangle,\end{aligned}\tag{2.41}$$

onde usamos $E(\dot{y}(t)|\dot{N}(t)) = \sum_{i=1}^{\dot{N}(t)} \langle \dot{x}_i \rangle = \dot{N}(t) \langle \dot{x} \rangle$ para obter a segunda linha.

Fazendo uso similar da lei da variância total [$\text{Var}_y(\dot{y}) \equiv E_N(\text{Var}(\dot{y}|N)) + \text{Var}_N(E(\dot{y}|\dot{N}))$], a variância do processo composto pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\text{Var}(\dot{y}(t)) &= E_N(\text{Var}(\dot{y}(t)|N(t))) + \text{Var}_N(E(\dot{y}(t)|\dot{N}(t))) \\ \text{Var}(\dot{y}(t)) &= E_N(\dot{N}(t) \text{Var}(\dot{x})) + \text{Var}_N(\dot{N}(t) \langle \dot{x} \rangle) \\ \text{Var}(\dot{y}(t)) &= \text{Var}(\dot{x}) \langle \dot{N}(t) \rangle + \langle \dot{x} \rangle^2 \text{Var}(\dot{N}(t)).\end{aligned}\tag{2.42}$$

onde usamos $\text{Var}(\dot{y}(t)|\dot{N}(t)) = \sum_{i=1}^{\dot{N}(t)} \text{Var}(\dot{x}_i) = \dot{N}(t) \text{Var}(\dot{x})$ e mais uma vez usamos $E(\dot{y}(t)|\dot{N}(t)) = \sum_{i=1}^{\dot{N}(t)} \langle \dot{x}_i \rangle = \dot{N}(t) \langle \dot{x} \rangle$ para obter a segunda linha. Para desenvolver o termo $\text{Var}_N(\dot{N}(t) \langle \dot{x} \rangle) = \sum_i \left(N_i \langle \dot{x} \rangle - \langle \dot{N} \rangle \langle \dot{x} \rangle \right)^2 f_{\dot{N}}(N_i)$ expandimos o polinômio e somamos termo a termo como segue

$$\begin{aligned}\text{Var}_N(\dot{N}(t) \langle \dot{x} \rangle) &= \sum_i \left(N_i \langle \dot{x} \rangle - \langle \dot{N} \rangle \langle \dot{x} \rangle \right)^2 f_{\dot{N}}(N_i) \\ &= \sum_i \left[\langle \dot{x} \rangle^2 N_i^2 - 2N_i \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle + \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle^2 \right] f_{\dot{N}}(N_i) \\ &= \langle \dot{x} \rangle^2 \sum_i N_i^2 f_{\dot{N}}(N_i) - 2\langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle \sum_i N_i f_{\dot{N}}(N_i) + \langle \dot{N} \rangle^2 \langle \dot{x} \rangle^2 \sum_i f_{\dot{N}}(N_i) \\ &= \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N}^2 \rangle - 2\langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle^2 + \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle^2 \\ &= \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N}^2 \rangle - \langle \dot{x} \rangle^2 \langle \dot{N} \rangle^2 \\ &= \langle \dot{x} \rangle^2 \left(\langle \dot{N}^2 \rangle - \langle \dot{N} \rangle^2 \right) \\ &= \langle \dot{x} \rangle^2 \text{Var}(\dot{N}(t)).\end{aligned}$$

As equações (2.41) e (2.42) fornecem o valor esperado e a variância do processo estocástico se conhecermos valor esperado e a variância de \dot{x} e $\dot{N}(t)$

2.5 Alguns Processos Estocásticos em Física

2.5.1 *Einstein e o Movimento Browniano*

Em 1905, *Albert Einstein* publicou seu artigo seminal sobre movimento *Browniano*, no qual estudou a difusão de uma partícula cuja trajetória é governada pelas colisões com as moléculas de um fluido, figura 2.1. O foco do trabalho era determinar uma expressão para o movimento das moléculas do fluido que servisse para calcular o número de Avogadro. A expressão determinada por *Einstein* foi $D = (RT/N_A)(1/6r)$, onde R é a constante dos gases, T é a temperatura, N_A é o número de Avogadro, e r é o raio da molécula. Medindo D e conhecendo os outros parâmetros, calcula-se N_A . Podemos reescrever a equação de forma mais geral

$$D = \mu K_B T, \quad (2.43)$$

onde K_B é a constante de *Boltzmann* e $\mu = \mu_d/F$ é a mobilidade definida como a velocidade de deriva μ_d induzida por uma dada força F . A lei de força para o problema tratado por *Einstein* é $m\dot{v} = F - \alpha v$, onde α é um coeficiente de atrito. A equação diferencial estocástica unidimensional associada à lei de força é $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ ou de forma geral

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (2.44)$$

que é a equação de difusão para $\rho(v, t)$ que é a **FDP** associada à velocidade, com

$$D = \frac{\sigma^2}{2\tau}, \quad (2.45)$$

onde σ^2 é a variância da distribuição de deslocamentos da partícula, τ o tempo decorrido entre duas colisões. A conexão entre (2.43) e (2.45) pode ser estabelecida considerando-se um processo estocástico de Bernoulli unidimensional (seção 2.10.2) com a probabilidade da partícula espalhar para direita após a colisão ser $P(\dot{x} = +a) = q$ e para esquerda ser $P(\dot{x} = -a) = p = 1 - q$, definindo-se ainda velocidade de deriva como

$$v = \langle \dot{x} \rangle / \tau = a(q - p) / \tau. \quad (2.46)$$

Do modelo acima, usando a equação (2.45) com $\sigma^2 = \langle \dot{x}^2 \rangle - \langle \dot{x} \rangle^2$, obtemos

$$D = \frac{2qpa^2}{\tau}. \quad (2.47)$$

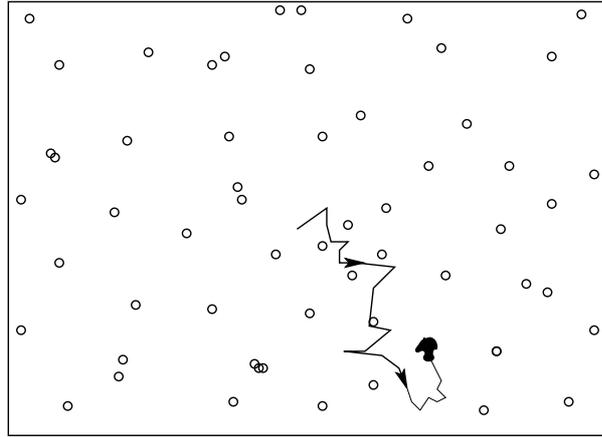


Figura 2.1: Difusão de uma partícula cuja trajetória é governada pelas colisões com as moléculas de ar da atmosfera.

Assumindo agora os desvios proporcionais à força F , temos $q - p = \frac{a}{2K_B T} F$, (neste ponto ainda não é possível estabelecer K_B como a constante de Boltzmann e T como temperatura), e então

$$v = \frac{F}{K_B T} \left(D + \frac{v^2 \tau}{2} \right). \quad (2.48)$$

Supondo finalmente que D e v são constantes no limite $\tau \rightarrow 0$, podemos escrever

$$v \approx \frac{FD}{K_B T}, \quad (2.49)$$

e então definindo a mobilidade como $\mu = v/F$, encontramos a relação de *Einstein* estabelecida em (2.43).

2.5.2 Teoria de *Langevin*

Três anos após a publicação do artigo de *Einstein*, [74] seguiu-se o desenvolvimento da teoria do movimento *Browniano* com *Langevin*. Este publicou um trabalho [75] enfatizando que a partícula descrita no modelo de *Einstein* não experimentava deslocamentos independentes. A partícula tende a preservar uma componente do momento após as colisões com as moléculas do ar devido à sua inércia. Visando introduzir o efeito das colisões aleatórias, escreveu a lei de força para a partícula como

$$m\dot{v} = F - \alpha v + m\Gamma(t), \quad (2.50)$$

onde α é um coeficiente de atrito e $\Gamma(t)$ um ruído *Browniano* –ruído branco– que satisfaz

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle &= q\delta(t-t').\end{aligned}\tag{2.51}$$

A equação acima é comparável a uma versão contínua de caminhada aleatória com passos **independentes e identicamente distribuídos (IIDs)** e q é equivalente a $2D_v$ configurando um processo de *Ornstein-Uhlenbeck* para a velocidade. Na equação (2.50) o termo associado ao ruído não é multiplicado por v então a equação reduz-se a equação diferencial estocástica de *Wiener-Îto* quando $F = 0$, ou seja, $dv = -\gamma v dt + \sqrt{D_v} dz$, onde $\gamma = \alpha/m$. A equação de *Fokker-Planck* equivalente para a **FDP** $\rho(v, t)$ (densidade da velocidade) é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \rho v}{\partial v} = D_v \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2},$$

a densidade que satisfaz a equação acima é

$$\rho(v, t) = \frac{\exp\left(-\frac{(v-\bar{v}(t))^2}{2\sigma_v(t)^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_v(t)^2}},\tag{2.52}$$

onde $\bar{v}(t) = v_0 \exp(-\gamma t)$ e $\sigma_v(t)^2 = D_v(1 - \exp(2\gamma t))/\gamma$.

No estado estacionário ($t \rightarrow \infty$) temos $\bar{v} = 0$ e $\sigma_v^2 = D_v/\gamma$, então

$$\rho(v, \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{D_v}} \exp\left(-\frac{\gamma v^2}{2D_v}\right),\tag{2.53}$$

que comparando com a distribuição de *Maxwell*

$$\rho(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{m}{K_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_B T}\right),\tag{2.54}$$

leva-nos a

$$\frac{mv^2}{2K_B T} = \frac{\gamma v^2}{2D_v},\tag{2.55}$$

ou finalmente

$$D_v = \frac{\gamma K_B T}{m} = \gamma v_{\text{termal}}^2.\tag{2.56}$$

2.5.3 Equação de *Fokker-Planck*

A maneira usual de obter a FDP de um processo estocástico é resolver a equação de *Fokker-Planck* associada. Para o caso unidimensional

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] \rho, \quad (2.57)$$

onde $D^{(2)}(x) > 0$ é o coeficiente de difusão e $D^{(1)}(x)$ é o coeficiente de deriva. Estes coeficientes também podem depender do tempo. Em N dimensões temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \right] \rho, \quad (2.58)$$

com $D_i^{(1)} > 0$ é o vetor de deriva e $D_{i,j}^{(2)}$ é o tensor de difusão.

A equação de *Fokker-Planck* pode ser resolvida por vários métodos, tais como: métodos de simulação; transformação da equação de *Fokker-Planck* em uma equação de *Schrödinger*; integração numérica e soluções analíticas para alguns potenciais. Para uma revisão completa, consulte [76].

2.6 Processos Estocásticos em Biologia: Teoria de Forrageamento

A teoria de **forrageamento**, “*Foraging Theory*”, é um ramo da ecologia comportamental que estuda as estratégias de busca de alimentos executada por animais em seus ambientes nativos. A teoria considera o comportamento de busca com relação ao custo-benefício obtido a partir de diferentes opções de procura, presumindo que as opções que maximizam os benefícios –por exemplo, ganho energético decorrente da ingestão de alimento– e minimizam os custos –por exemplo, desgaste energético devido a caminhada em busca de alimento, que implica na redução da reserva de gordura e perda de peso– favorecem o animal e maximizam a função de avaliação ou “*fitness*”,² num contexto de seleção natural. *Robert MacArthur* e *Eric Pianka* (e em um trabalho independente de *J. M. Emlen* em 1966) propuseram pela primeira vez uma teoria de **forrageamento** ótimo. Existem hoje, muitas versões de **forrageamento** ótimo relevantes em situações distintas. Algumas são:

²A função de avaliação é o critério utilizado para decidir que espécies prosperam e sobrevivem no contexto da seleção natural.

- O modelo da dieta ideal, primeiramente testado por *John Goss-Custard*, que descreve o comportamento de um [forrageador](#) que encontra diferentes tipos de presas e deve escolher qual atacar;
- Modelo de seleção de caminhos, descrevendo a dinâmica de um [forrageador](#) cujas presas estão concentradas em pequenos aglomerados com distâncias consideráveis entre eles;
- Modelo de ponto central, onde o [forrageador](#) precisa retornar a um local particular a fim de consumir sua presa.

Existe uma grande quantidade de resultados experimentais disponíveis [14, 15] descrevendo a dinâmica da busca de alimento realizada por animais. Trabalhos recentes [4, 19, 22, 33] sugerem que a distribuição de deslocamentos durante o [forrageamento](#) é bem aproximada por distribuições de cauda longa “*Long Tail Distribution*”, nas quais a probabilidade de percorrer grandes distâncias, sem eventos de reorientação, não é desprezível. Esta verificação empírica sugere a divergência do segundo momento da distribuição de deslocamentos e qualifica as distribuições de *Lévy* como a escolha adequada para ajustar estes resultados experimentais. Na seção 2.12.1 discutiremos um modelo de [forrageamento](#).

2.7 Algumas Distribuições Notáveis

No apêndice B detalhamos todas as distribuições relevantes para este trabalho, também discutimos como obter o [estimador de máxima verosimilhança \(EMV\)](#) e expressão adequada para o [gerador de números aleatórios \(GNA\)](#). Nesta seção apresentaremos as distribuições *Binomial*, de *Poisson*, *Gaussiana* e *Lévy* pois são certamente as mais frequentemente observadas na natureza, figura 2.2 de cada distribuição. Nas seções 2.8 e 2.9 veremos que o [TLC](#) e o [teorema do limite central generalizado \(TLCG\)](#) ajudam a entender e justificar a onipresença destas distribuições em matemática e em sistemas reais. Como exemplo, considere repetidas tentativas independentes onde apenas dois resultados podem ser alcançados. Este experimento convencionalmente chamado de tentativas de *Bernoulli* (“*Bernoulli Trials*”) em homenagem a *Jacob Bernoulli* (1654-1705), conduz à distribuição *Binomial* - como mostraremos a seguir. Se o número de tentativas for elevado, então a probabilidade de k sucessos em n tentativas pode ser aproximada pela distribuição de *Poisson*. A distribuição *Binomial* e a distribuição de *Poisson* aproximam-se da

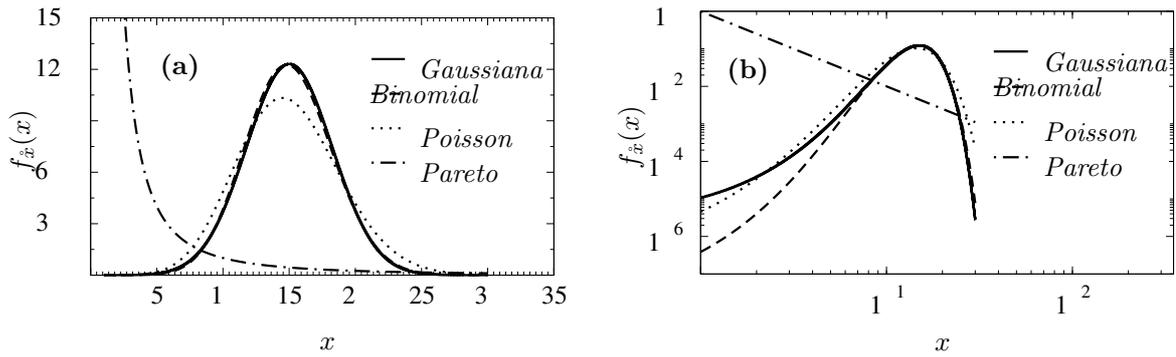


Figura 2.2: (a) FDP *Gaussiana* $f_{\hat{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$. FDP *Binomial*, $f_{\hat{x}}(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$. FDP *Poisson*, $f_{\hat{x}}(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$. FDP *Pareto*, $f_{\hat{x}}(x) = x^{-\alpha+1}$ (variância infinita). As distribuições aqui mostradas, certamente são as mais frequentemente observadas na natureza. Note que as distribuições *Gaussiana* e binomial se sobrepõem porque plotamos a *Gaussiana* com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1-p)$, que correspondem à média e variância da distribuição *Binomial*. A distribuição de *Poisson* aparece com média e variância $\lambda = np$. (b) Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $n = 50$, $p = 0,3$, $\lambda = np = 15$, $\mu = np = 15$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3,24$, $x_{min} = 1$ e $\alpha = 1$.

distribuição normal quando o número de tentativas é suficientemente grande. O mesmo é o caso da distribuição de *Lévy*, mas nos sistemas onde eventos raros são não desprezíveis.

2.7.1 Distribuição *Binomial*

Considere um experimento booleano onde apenas dois resultados, *sucesso* e *fracasso*, podem ser obtidos, respectivamente com probabilidades p e q , satisfazendo $p + q = 1$. Após n tentativas é possível obter sequências combinando fracassos e sucessos, em ordem diversa. Como as tentativas são independentes, a probabilidade de qualquer sequência particular de k sucessos e $(n - k)$ fracassos é o produto das probabilidades $p^k(1-p)^{n-k}$. Aqui usamos, $q = 1 - p$ e $(n - k)$, respectivamente como a probabilidade e a quantidade de fracassos. O número de sequências equivalentes, $\binom{n}{k}$, multiplicada pela probabilidade de se obter cada sequência, $p^k(1-p)^{n-k}$, fornece a distribuição de probabilidade de se obter k sucessos com probabilidade p após n tentativas, resultando em

$$f_{\hat{k}}(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (2.59)$$

Esta é a chamada distribuição *Binomial*. Note que a distribuição tem pico nas proximidades de np , que é uma quantidade importante na distribuição *Binomial*. De fato, a média da distribuição é $\mu = np$ e sua variância é $\sigma^2 = np(1-p)$ fornecendo o desvio padrão $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Mostramos o gráfico da distribuição na figura 2.2.

2.7.2 Distribuição de *Poisson*

A distribuição de *Poisson* pode ser deduzida como um limite da distribuição *Binomial* (portanto, com n tendendo a infinito e p tendendo a 0, de modo que $np = \lambda = \text{constante}$) ou derivada diretamente em diferentes processos reais. Como exemplo interessante, mencionamos o experimento onde queremos medir a probabilidade de detectar k fótons em um detector, considerando um intervalo de tempo entre t e $t + dt$. Encontramos então que

$$f_k(k; t) = \frac{t^k e^{-t}}{k!}, \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (2.60)$$

que é a distribuição de *Poisson* (ver figura 2.2). Uma característica interessante da distribuição de *Poisson* é o fato de possuir média $\lambda = np$ igual a sua variância $\sigma^2 = np$.

2.7.3 Distribuição *Gaussiana*

Essa distribuição aparece em diversos fenômenos na natureza, e em particular em processos relacionados à difusão normal ou *Browniana*. A razão da presença praticamente universal da distribuição *Gaussiana* se deve ao fato de emergir naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência do **TLC** (ver a seção 2.8.1). Sendo invariante por agregação de variáveis aleatórias, a distribuição *Gaussiana* é estável. O **TLC** explica assim porque distribuições com segundo momento finito convergem gradualmente para a distribuição estável *Gaussiana*. A distribuição *Gaussiana* (ver figura 2.2) é caracterizada por dois parâmetros: média μ e o desvio padrão σ . Uma **VA** *Gaussiana*, \hat{x} , possui a **FDP** abaixo

$$f_{\hat{x}}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad (2.61)$$

que é usualmente tomada como a distribuição *Gaussiana* padrão, quando a **VA** \hat{x} tem média nula e desvio padrão unitário ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$). Embora os valores $|x| < \sigma$ da parte central da distribuição possuam maior probabilidade de ocorrência, são as caudas das distribuições que fornecem informações relativas aos valores extremos.

2.7.4 Distribuição de *Lévy*

Existem muitos processos na natureza que são regidos por distribuições de *Lévy*, como o ritmo cardíaco de indivíduos saudáveis ou a foto-condutividade em semicondutores amor-

fos [77]. Para variáveis independentes e identicamente distribuídas e sob condições que serão descritas na seção 2.9, podemos encarar a distribuição de *Lévy* $f_{\tilde{r}}(\mathbf{r}) = L(\mathbf{r}; \mu, a, \alpha, B)$ como solução da equação de *Bachelier*³ (2.81) que governa os processos *Markovianos*. Sua função característica $\varphi_{\tilde{s}}(\mathbf{s}) = \mathfrak{L}(\mathbf{s}; \mu, a, \alpha, B)$ é

$$\ln \mathfrak{L}(\mathbf{s}; \mu, a, \alpha, B) = \begin{cases} i\mu\mathbf{s} - a|\mathbf{s}|^\alpha \left(1 - iB\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right), & \text{se } \alpha \neq 1 \\ i\mu\mathbf{s} - a|\mathbf{s}| \left(1 - iB\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \frac{2}{\pi} \log|\mathbf{s}|\right), & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (2.62)$$

onde $a \geq 0$, μ é real, $-1 \leq B \leq 1$ é o terceiro cumulante –“*skewness*”– e $0 < \alpha \leq 2$ –“*peakedness*”. Estamos interessados na distribuições de *Lévy* simétrica ($B = 0$) e com média nula ($\mu = 0$), reduzindo a equação (2.62) a

$$\mathfrak{L}(\mathbf{s}; a, \alpha) = \exp(-a|\mathbf{s}|^\alpha). \quad (2.63)$$

Os casos especiais importantes da distribuições de *Lévy* surgem com $\alpha = 1, 2$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathbf{s}; a, 2) &= \exp(-a|\mathbf{s}|^2) && \text{FDP Gaussiana generalizada } (\alpha = 2), \\ \mathfrak{L}(\mathbf{s}; a, 1) &= \exp(-a|\mathbf{s}|) && \text{FDP Cauchy-Lorentz } (\alpha = 1). \end{aligned} \quad (2.64)$$

A representação no espaço ordinário é obtida via transformada inversa de *Fourier* da equação (2.62)

$$L(\mathbf{r}; \mu, a, \alpha, B) = \frac{1}{(2\pi)^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \mathfrak{L}(\mathbf{s}; \mu, a, \alpha, B) ds^\beta. \quad (2.65)$$

2.7.5 Expansões da Distribuição de *Lévy* para ($r \gg 1$) e ($r \ll 1$)

A fim de obter a distribuição de *Lévy* em uma dimensão $\mathbf{r} \equiv x$, vamos substituir a função característica (2.63) em (2.65) e calcular a transformada inversa de *Fourier* no limite $x \gg 1$. Como $\mathfrak{L}(x; a, \alpha)$ é simétrica (e par) podemos explorar a simetria usando a transformada inversa de cossenos de *Fourier*, obtendo

$$L(x; a, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-a s^\alpha) \cos(sx) ds. \quad (2.66)$$

Agora, integrando por partes, encontramos

$$L(x; a, \alpha) = \frac{a\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(sx)}{x} s^{\alpha-1} \exp(-a s^\alpha) ds, \quad (2.67)$$

³discutiremos a equação de *Bachelier* na seção 2.9.1

fazendo a mudança de variável $z = sx$, $dz = x ds$

$$L(x; a, \alpha) = \frac{a\alpha}{\pi x^{1+\alpha}} \int_0^\infty z^{\alpha-1} \sin(z) \exp\left(\frac{-a z^\alpha}{x^\alpha}\right) dz, \quad (2.68)$$

tomando o limite $x \rightarrow \infty$

$$L(x; a, \alpha) \sim \frac{a\alpha}{\pi x^{1+\alpha}} \int_0^\infty z^{\alpha-1} \sin(z) dz. \quad (2.69)$$

Finalmente, a solução da integral é expressa em termos da função de Euler, $\Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})$, fornecendo o limite assintótico ($x \gg 1$)

$$L(x; a, \alpha) \sim \frac{a\alpha \Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi x^{1+\alpha}}. \quad (2.70)$$

Assim vemos que para valores grandes de x , a distribuição de *Lévy* comporta-se como lei de potência, com expoente $1 + \alpha$. Verificamos também que o segundo momento diverge para processos com $0 < \alpha < 2$.

Para obter o comportamento da distribuição de *Lévy* quando $x \ll 1$, considere a equação (2.66) com a expansão de Taylor para $\cos(sx)$

$$L(x; a, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-a s^\alpha) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (sx)^{2n}}{(2n)!} ds, \quad (2.71)$$

usando a mudança de variável $z = as^\alpha$ e $dz = \alpha a s^{\alpha-1} ds$

$$L(x; a, \alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \exp(-z) \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{z}{a}\right)^{2n/\alpha} \frac{dz}{\alpha a \left(\frac{z}{a}\right)^{(\alpha-1)/\alpha}}. \quad (2.72)$$

Estamos interessados apenas em avaliar esta equação quando $x \ll 1$ e vamos portanto desprezar termos de ordem superior a zero, logo

$$L(x; a, \alpha) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\alpha a^{\frac{2n+1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right), \quad (2.73)$$

fornecendo

$$L(x; a, \alpha) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (2.74)$$

ou seja, para $x \ll 1$ a distribuição cresce à medida que $\alpha \rightarrow 0$.

2.7.6 Distribuição *Lei de Potência*

Leis de potência podem ser definidas sobre variáveis contínuas, governadas por números reais, ou discretas, quando a variável aleatória assume apenas valores discretos, normalmente inteiros positivos. Seja \hat{x} uma variável aleatória com distribuição *Lei de Potência*. Sua FDP, $f_{\hat{x}}(x)$, é tal que $f_{\hat{x}}(x)dx = P(x \leq \hat{x} < x + dx)$, então

$$f_{\hat{x}}(x) = Cx^{-\alpha}. \quad (\text{FDP Lei de Potência}) \quad (2.75)$$

onde x é o valor observado e C é a constante de normalização. Claramente, esta densidade diverge quando $x \rightarrow 0$ e a equação (2.75) não pode ser válida para todos os valores $x \geq 0$ e deve possuir algum truncamento inferior. Denotaremos este truncamento por x_{min} . Dado $\alpha > 1$, torna-se trivial obter a constante de normalização C . Encontramos

$$f_{\hat{x}}(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}, \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (\text{FDP Pareto}). \quad (2.76)$$

No caso discreto, x podemos tomar somente um conjunto discreto de valores. Neste trabalho consideraremos somente os casos de valores inteiros com FDP da forma $f_{\hat{x}}(x) = P(\hat{x} = x) = Cx^{-\alpha}$. Novamente esta distribuição diverge em zero, então devemos impor um truncamento inferior x_{min} . Calculando a constante de normalização, obtemos

$$f_{\hat{x}}(x) = \frac{x^\alpha}{\zeta(\alpha, x_{min})}, \quad (x \in \mathbb{N}), \quad (\text{FDP Zeta}) \quad (2.77)$$

onde

$$\zeta(\alpha, x_{min}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + x_{min})^{-\alpha},$$

é a função *Zeta generalizada*. Em muitos casos é útil considerar também a FD, denotada por $F_{\hat{x}}(x)$ e definida como $F_{\hat{x}}(x) = P(\hat{x} \geq x)$, tanto no caso discreto quanto no contínuo. No caso contínuo assume a forma

$$F_{\hat{x}}(x) = \int_x^{\infty} f_{\hat{x}}(x') dx' = \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha+1}. \quad (\text{FD Pareto}).$$

e no caso discreto

$$F_{\hat{x}}(x) = \frac{\zeta(\alpha, x)}{\zeta(\alpha, x_{min})}. \quad (\text{FD Zeta})$$

2.7.7 Distribuição de *Pareto* Truncada

A distribuição de *Pareto* truncada (neste trabalho também chamaremos de distribuição de *Pareto Mantegna-Stanley*) corresponde à distribuição de *Pareto*, vista na seção anterior, desprezando-se a cauda longa, $x > b$. A FDP segue da equação (2.75), normalizada no intervalo $[a, b]$

$$f_{\hat{x}}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{a^{-\alpha} - b^{-\alpha}} \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{se, } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{FDP Pareto Truncada}) \quad (2.78)$$

Com α sempre positivo, pois $\alpha \leq 0$ fornece distribuições não normalizáveis, inaceitáveis no contexto da teoria de probabilidade.

Uma VA \hat{x} com FDP dada pela equação (2.78) possui a seguinte esperança

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{a^{\alpha-1} - b^{\alpha-1}}{a^{\alpha} - b^{\alpha}} \frac{a b \alpha}{\alpha - 1}. \quad (2.79)$$

Neste ponto observamos que a esperança da distribuição de *Pareto* diverge para $\alpha = 1$, mas isto não ocorre aqui na distribuição de *Pareto* truncada. A singularidade em $\alpha = 1$ foi removida e substituída por uma indeterminação. Usando regra de *L'Hôpital*, vemos que $\langle \hat{x} \rangle$ assume valores bem definidos em todos os pontos onde a distribuição de *Pareto* é singular. Não poderia ser diferente, já que toda distribuição truncada deve exibir esperança bem definida.

A variância de uma VA \hat{x} com FDP dada pela equação (2.78) é

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{(a^{\alpha} - b^{\alpha})^2} \left(\frac{(a^{\alpha} - b^{\alpha})(b^2 a^{\alpha} - a^2 b^{\alpha})}{\alpha - 2} - \frac{\alpha (b a^{\alpha} - a b^{\alpha})^2}{(\alpha - 1)^2} \right), \quad (2.80)$$

finita mesmo para $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$.

2.8 Teorema do Limite Central

O TLC é um alicerce da teoria de probabilidade e de fundamental importância em Mecânica Estatística. Intuitivamente, este teorema garante que a soma de N variáveis independentes, quando $N \rightarrow \infty$, tende a uma certa lei (a qual comporta-se como um atrator no espaço das distribuições). Quando a distribuição de variáveis independentes tem variância finita, o atrator para a soma será a distribuição *Gaussiana* [70] (ver uma

demonstração na seção 2.8.1). O TLC explica a frequente ocorrência da distribuição normal na natureza. Sua primeira manifestação em matemática foi devida à *Abraham de Moivre* em 1733, seguido independentemente por *Pierre-Simon de Laplace* em 1774. A distribuição foi redescoberta por *Robert Adrian* em 1808 e então finalmente por *Carl Friedrich Gauss* em sua famosa teoria de erros [81]. Um resultado central é a distribuição *Binomial* aproximar-se da distribuição *Gaussiana* para $N \rightarrow \infty$, após ser apropriadamente centralizada e reescalada (esta propriedade pode ser facilmente verificada na figura 2.2). Isto pode ser considerado como a primeira manifestação histórica do TLC e é frequentemente referenciado como teorema de *Moivre-Laplace*. Uma breve revisão histórica sobre o tema pode ser vista em [82].

2.8.1 Demonstração Multidimensional do TLC

Nesta seção apresentamos uma demonstração simples, apropriada ao contexto de caminhada aleatória, originalmente apresentada por *Chris H. Rycroft* e *Martin Z. Bazant* [83]. É uma demonstração multidimensional do TLC. Uma derivação mais rigorosa pode ser encontrada em [70].

Considere uma caminhada aleatória com N passos de tamanho $|\mathbf{r}|$, independentes e identicamente distribuídos segundo $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$, onde \mathbf{r} é um vetor com métrica *Euclidiana* em β -dimensões (neste trabalho \mathbf{r} , \mathbf{R} e \mathbf{s} , \mathbf{S} denotam vetores em \mathbb{R}^β) Desejamos avaliar $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N)$, que é a FDP associada à probabilidade de encontrar o caminhante na posição \mathbf{R} após N passos. Para deslocamentos IID, a FDP de posição final satisfaz a recursão

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N + 1) = \int f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R} - \mathbf{r}; N) d\mathbf{r}^\beta. \quad (2.81)$$

Esta é a equação de *Bachelier* –homenagem ao matemático francês, *Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier* (1870-1946)–, onde β é a dimensão espacial ($\beta = 1$ recupera o caso unidimensional comumente visto em demonstrações do TLC). A premissa chave é a independência dos passos (independência condicional), a qual permite a probabilidade de uma transição de $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ para \mathbf{R} no N -ésimo passo ser obtida pelo produto das probabilidades independentes, como indica (2.81). Note ainda que supomos a posição futura –índice $(N+1)$ – dependente apenas da posição atual –índice N – e não de toda a trajetória. Estas duas propriedades sintetizadas pela expressão *independência condicional* são as condições necessárias e suficientes para caracterizar este sistema como um processo *Markoviano*.

Partindo da equação (2.81) e sob o argumento de $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N)$ variar em escalas muito maiores que um \mathbf{r} típico, quando $N \rightarrow \infty$, expandimos $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R} - \mathbf{r}; N)$ em série de Taylor

para obter

$$\begin{aligned}
f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N+1) &= \int f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) \left[f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) - \mathbf{r} \cdot \nabla f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) + \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) \cdot \mathbf{r} + \dots \right] d\mathbf{r}, \\
f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N+1) &= f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) - 0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \langle r_i r_j \rangle \frac{\partial^2 P_N}{\partial R_i \partial R_j} + \dots, \\
f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N+1) &= f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) + \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle}{2\beta} \nabla^2 f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) + \dots
\end{aligned} \tag{2.82}$$

O termo de primeira ordem anula-se sob o argumento isotrópico (o valor esperado de $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r})$ é zero, pois assumimos que \mathbf{r} seja identicamente distribuído em todas as direções). Assumimos ainda que os passos são tomados em intervalos de tempo Δt e definimos o tempo como $t = N\Delta t$, obtendo

$$\frac{f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N+1) - f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N)}{\Delta t} = \frac{\langle \dot{r}^2 \rangle}{2\beta \Delta t} \nabla^2 f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) + \dots \tag{2.83}$$

Com $N \rightarrow \infty$, a distribuição limite $p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t)$, definida por $f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) = p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N\Delta t)$, satisfaz a equação de difusão

$$\frac{\partial p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t)}{\partial t} = D \nabla^2 p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t), \tag{2.84}$$

com $D = \langle \dot{r}^2 \rangle / 2\beta \Delta t$. Como a caminhada começa na origem, a condição inicial é $p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; 0) = \delta(\mathbf{R})$. Para resolver esta equação diferencial parcial, vamos tomar a transformada de *Fourier*, definida por

$$\rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; t) = \int e^{-i\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}} p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t) d\mathbf{R}^\beta, \tag{2.85}$$

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t) = \frac{1}{(2\pi)^\beta} \int e^{i\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}} \rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; t) d\mathbf{S}^\beta. \tag{2.86}$$

No espaço de *Fourier* a equação diferencial parcial original apresenta-se como a equação

$$\frac{\partial \rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; t)}{\partial t} = -D |\mathbf{S}|^2 \rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; t), \tag{2.87}$$

cuja solução é

$$\rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; t) = \exp(-D |\mathbf{S}|^2 t) \rho_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; 0) = e^{-D |\mathbf{S}|^2 t}. \tag{2.88}$$

Tomando a transformada de *Fourier* inversa temos

$$p_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; t) = \frac{\exp(-|\mathbf{R}|^2 / 4Dt)}{(4\pi Dt)^{\beta/2}}, \tag{2.89}$$

para termos correspondência com o problema discreto com $N \rightarrow \infty$, escrevemos

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N) = \frac{\exp(-\beta|\mathbf{R}|^2/2 \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle N)}{(2\pi \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle N/\beta)^{\beta/2}}. \quad (2.90)$$

Este é o limite de $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N)$ para valores elevados de N , numa caminhada isotrópica em β dimensões. A FDP para a posição tende para uma distribuição *Gaussiana* (ou distribuição normal) cuja largura depende apenas da variância dos deslocamentos individuais –variância de $f_{\dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r})$. A derivação prevê o mesmo limite assintótico para qualquer FDP bastando que $\langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle$ exista.

Para caminhadas isotrópicas, podemos facilmente calcular a FDP da distância $|\mathbf{R}|$ a partir da origem multiplicando (2.90) pela área da casca hiperesférica definida por $|\mathbf{R}|$

$$f_{\mathbf{R}}(|\mathbf{R}|; N) = \gamma_{\beta} |\mathbf{R}|^{\beta-1} f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N), \quad (2.91)$$

onde γ_{β} é a área da hipersuperfície da hiperesfera unitária em β dimensões ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2\pi, \gamma_3 = 4\pi, \dots$). Isto conclui a demonstração. Na seção seguinte mostramos as propriedades de difusão dos processos que satisfazem (ou não) o TLC.

2.8.2 Difusão Normal e Superdifusão

Como o TLC demonstrado na seção 2.8.1 sugere, as propriedades estatísticas da caminhada aleatória tendem para uma distribuição universal após um número elevado de passos. No caso da FDP da posição final $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N)$, o resultado para caminhadas isotrópicas constitui-se em uma generalização do TLC para soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Desde que o segundo momento $\langle r^2 \rangle$ exista para a distribuição de deslocamentos, $f_{\dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r})$, a forma assintótica de $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N)$ será dada pela equação (2.90). Como consequência do TLC a variância da posição \mathring{R}_N , após $N \gg 1$ passos, é proporcional à variância dos deslocamentos r

$$\text{Var}(|\mathring{\mathbf{R}}_N|) = N \text{Var}(|\dot{\mathbf{r}}|), \quad (2.92)$$

válido para deslocamentos independentes e identicamente distribuídos. Este resultado caracteriza a chamada difusão normal

$$\langle |\mathring{\mathbf{R}}_N| \rangle \propto \sqrt{\langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle N} \propto N^{1/2}. \quad (2.93)$$

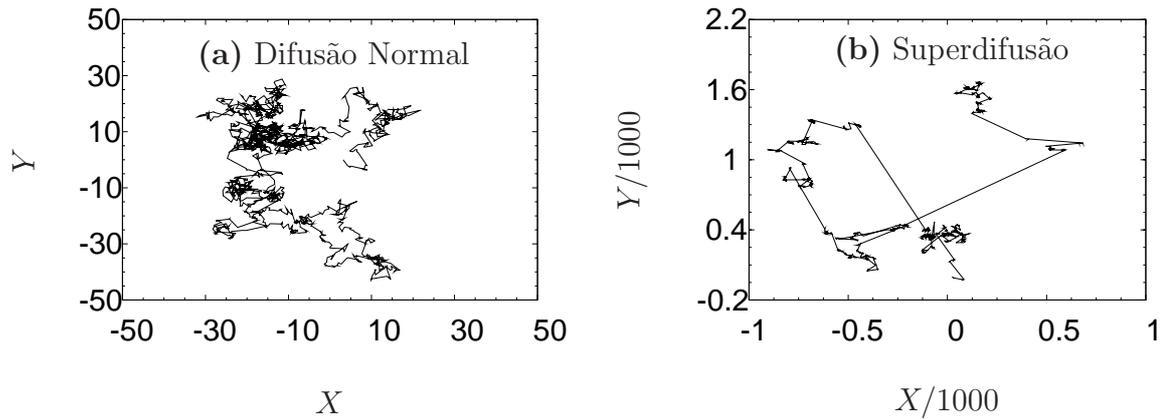


Figura 2.3: Processos onde $\langle |\dot{\mathbf{R}}_N| \rangle \propto N^\nu$ com $\nu = 1/2$ evoluem com difusão normal e satisfazem o TLC. Com $\nu \neq 1/2$ diz-se que o processo possui difusão anômala, sendo que $\nu < 1/2$ caracteriza subdifusão e $\nu > 1/2$ caracteriza superdifusão. **(a)** Trajetória de um caminhante *Browniano* que se move com distribuição de deslocamentos $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \sim \exp(-|\mathbf{r}|)$ –variância finita– em uma caminhada isotrópica ilustrando a difusão normal. **(b)** Trajetória de um caminhante anômalo que se move com distribuição de deslocamentos $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-2}$ –variância infinita– em uma caminhada isotrópica ilustrando a superdifusão. Em ambos os casos a caminhada consiste de 2000 passos independentes começando na origem. Compare as escala e note como o processo super difusivo afasta-se da origem mais rapidamente que no caso com difusão normal.

Sempre que $\langle |\dot{\mathbf{R}}_N| \rangle \propto N^\nu$ com $\nu \neq 1/2$ diz-se que o processo evolui com difusão anômala, sendo que $\nu < 1/2$ caracteriza sub difusão e $\nu > 1/2$ caracteriza superdifusão. A figura 2.3 exemplifica as duas situações no caso de caminhadas aleatórias (ver seção 2.10).

Nas situações onde as premissas do TLC não são satisfeitas podemos verificar que a distribuição assintótica para a posição final não converge para uma *Gaussiana*. Quando a variância da distribuição de deslocamentos, $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$, diverge, o atrator é a distribuição de *Lévy* [70] em conformidade com o TLCG (ver a seção 2.9). Outra forma de violar o TLC é estabelecer correlação entre os saltos ou interação entre os caminhantes de modo que $\langle |\dot{\mathbf{R}}_N| \rangle \propto N^\nu$ se dará com $\nu \neq 1/2$. Nestes casos o limite assintótico é mais abrupto e conduz a várias generalizações da equação da difusão.

2.9 TLC Generalizado

Existem algumas extensões do TLC, quando a variância é finita (primeiro e segundo momentos finitos), que relaxam a condição de eventos independentes e identicamente distribuídos, permitindo a presença de certos tipos de correlação fraca entre os eventos, a exemplo da condição de *Lindeberg* e da condição de *Lyapunov*. Outra generalização muito

importante do **TLC** é aquela que permite distribuições com variância infinita. Publicada em 1927 pelo matemático francês, *Paul Pierre Lévy* (1886-1971) [72], esta extensão estabelece que a soma dos valores independentes e identicamente distribuídos da variável aleatória $\hat{\mathbf{r}}$, que não possui o segundo momento –eventualmente também não possui o primeiro momento– e comportamento assintótico $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; \alpha) \sim \frac{1}{|\mathbf{r}|^{\alpha+1}}$, para $|\mathbf{r}| \gg 1$, é atraída para a distribuição de *Lévy*, $L(\mathbf{r}; \alpha)$ [70], com mesmo parâmetro α da distribuição de deslocamentos $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; \alpha)$. Este teorema é conhecido como **TLCG**.

2.9.1 Demonstração Multidimensional do TLCG

Obviamente, o método apresentado na seção 2.8.1 não engloba processos onde $f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r})$ possui variância infinita (superdifusão). Assim, precisamos de uma argumentação diferente [70, 83] para resolver a equação de *Bachelier*

$$f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N+1) = \int f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R} - \mathbf{r}; N) d\mathbf{r}. \quad (2.94)$$

Como a equação de *Bachelier* é uma convolução, temos

$$f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) = f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; N) * f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N-1), \quad (2.95)$$

onde “ $*$ ” denota convolução. Note que $f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N-1)$ é por si mesmo o resultado de uma convolução e então podemos escrever $f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N)$ em termos de todos os passos anteriores ($1 \cdots N$) e da **FDP** da posição inicial $f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; 0)$, tal que

$$f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) = f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; 1) * f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; 2) * f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; 3) * \cdots * f_{\hat{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}; N) * f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; 0). \quad (2.96)$$

Assumindo que a caminhada se inicia na origem, logo $f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; 0) = \delta(\mathbf{R})$, usando o teorema da convolução e lembrando que φ denota a função característica de f , temos

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; N) &= \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}; 1) * \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}; 2) * \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}; 3) * \cdots * \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}; N), \\ \varphi_{\hat{\mathbf{S}}}(\mathbf{S}; N) &= \prod_{n=1}^N \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}; n). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Agora usando a transformada inversa, obtemos a **FDP** da posição final como

$$f_{\hat{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) = \frac{1}{(2\pi)^\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}} \prod_{n=1}^N \varphi_{\hat{\mathbf{s}}}(\mathbf{S}; n) d\mathbf{S}. \quad (2.98)$$

Esta é uma solução exata, apesar da integral não poder ser resolvida analiticamente em termos de funções elementares exceto em alguns poucos casos. Porém, estamos geralmente interessados no limite de tempos longos, $N \rightarrow \infty$, onde a integral pode ser aproximada via análise assintótica. Uma demonstração formal do TLCC (que é bastante técnica) foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada em [70].

2.10 Caminhada Aleatória

2.10.1 História e Origens

Referências intuitivas a caminhadas aleatórias decorrentes de observações empíricas têm sido feitas há séculos. Em 1827 *Robert Brown*, botânico inglês, publicou suas observações a respeito dos movimentos irregulares de pequenos grãos de pólen em um líquido. *Blaise Pascal*, *Pierre de Fermat* e *Jacob Bernoulli* trataram problemas adjacentes ainda no século XVI porém, a teoria se estabeleceu no início do século XX com a publicação de trabalhos que ressaltaram caminhadas aleatórias como processos estocásticos.

O termo “*random-walk*” foi originalmente proposto por *Karl Pearson* em 1905 [73, 83] e posteriormente adotado como nomenclatura padrão. Em uma carta à *Nature*, ele apresentou um modelo simples para descrever a infestação de mosquitos numa floresta. A cada incremento de tempo, um único mosquito move-se uma distância fixa a , em uma direção aleatoriamente escolhida. *Pearson* queria saber qual a distribuição de mosquitos após muitos voos terem sido executados. A carta foi respondida por *Lord Rayleigh*, que já havia resolvido uma forma mais geral deste problema em 1880, no contexto de ondas de som em meios heterogêneos (ver a seção 2.10.3).

Primeiramente a teoria de caminhada aleatória foi também desenvolvida por *Louis Bachelier* em sua notável tese de doutoramento, “*La Théorie de la Spéculation*” publicada em 1900 [84]. *Bachelier* propôs a caminhada aleatória como um modelo fundamental para séries temporais em economia. Suas ideias básicas permanecem como base para a moderna teoria de finanças. Aparentemente *Bachelier* foi o primeiro a perceber a conexão entre caminhadas aleatórias discretas e a equação de difusão no contínuo.

Curiosamente, em 1905, no mesmo ano da carta de *Pearson* à revista *Nature* – consulte a seção 2.10.3 – *Albert Einstein* publicou seu artigo seminal sobre movimento *Browniano*, no qual estudou a difusão de uma partícula, cuja trajetória é governada pelas colisões da partícula com as moléculas do fluido. O objetivo era determinar uma expressão que

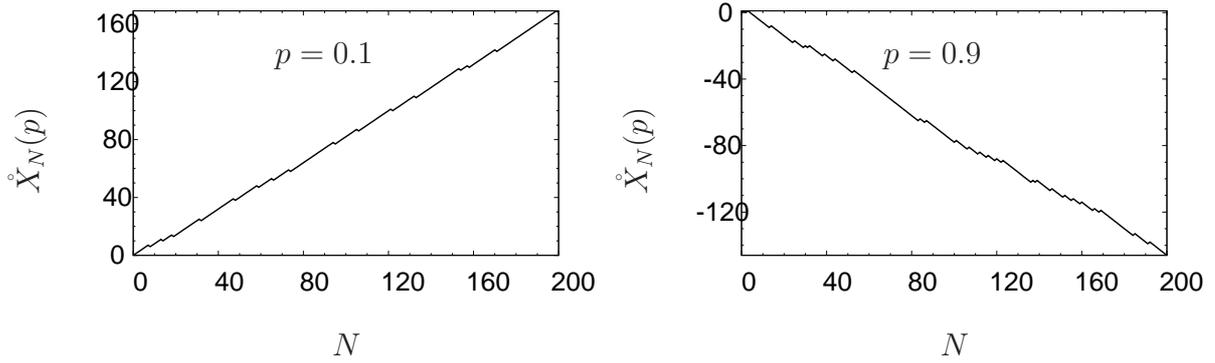


Figura 2.4: Distância percorrida $\dot{X}_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Note que representamos a caminhada ao longo do eixo x e que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo x e $1 - p$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A figura com $p = 0.1$ mostra uma deriva para o sentido positivo, analogamente com $p = 0.9$, a deriva ocorre para o sentido negativo. Ambos os casos são anisotrópicos devido ao alto grau de correlação entre os deslocamentos.

servisse para calcular o número de Avogadro por meio de medidas do coeficiente de difusão.

2.10.2 Caminhada Aleatória Unidimensional ($\beta = 1$)

Considere uma caminhada com N passos de mesmo tamanho a , executada ao longo de uma linha [1, 85]. Seja p a probabilidade de um passo ser dado para a esquerda, e q a probabilidade do passo ser para a direita. Assuma também n_1 o número de passos tomados para a direita e n_2 o número de passos para a esquerda. As quantidades p , q , n_1 , n_2 e N se relacionam por

$$\begin{aligned} p + q &= 1, \\ n_1 + n_2 &= N. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Note que a segunda equação conecta as duas VAs fixando n_2 para cada valor assumido por n_1 . Examinando a probabilidade de tomar exatamente n_1 dos N passos para a direita, existem $\binom{N}{n_1} = \binom{n_1+n_2}{n_1}$ maneiras de tomar n_1 passos para a direita e n_2 para a esquerda. A probabilidade de obter uma sequência particular de n_1 e n_2 passos é $p^{n_1}q^{n_2}$. Por isso

$$P = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2} = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} p^{n_1} (1 - p)^{N - n_1}, \quad (2.100)$$

onde $n!$ é o fatorial de n . Note que a equação acima é simplesmente a distribuição

Binomial, discutida na seção 2.7.1, portanto, o número médio de passos para a direita é

$$\langle \hat{n}_1 \rangle = pN, \quad (2.101)$$

e o número médio de passos tomados para a esquerda é $\langle \hat{n}_2 \rangle = N - \langle \hat{n}_1 \rangle = N(1 - p) = qN$. Similarmente, a variância é dada por $\sigma_{\hat{n}_1}^2 = \langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle^2 = Npq$ e o desvio padrão é

$$\sigma_{\hat{n}_1} = \sqrt{Npq}. \quad (2.102)$$

Agora considere a distância $\hat{X}_N \{ \hat{X}, X \in \mathbb{N} \text{ e } -N \leq X \leq N \}$ percorrida após um dado número de passos,

$$\hat{X}_N = \hat{n}_1 - \hat{n}_2 = 2\hat{n}_1 - N, \quad (2.103)$$

como sendo a distância líquida percorrida em uma certa direção. As figuras 2.4 mostram $\hat{X}_N(p)$ para $N = 200$ e dois valores de p , 0.1 e 0.9. Claramente observamos a tendência de andar em uma certa direção de acordo com o valor de p .

Para uma caminhada aleatória com $p = 0.5$, (ver a figura 2.5) a probabilidade $f_{\hat{X}}(X, N, p)$ de atravessar certa distancia \hat{X}_N após N passos aparece na tabela-2.1. Nesta tabela as linhas subsequentes são obtidas pela adição de metade do valor de cada célula em uma dada linha para cada uma das duas células diagonalmente abaixo. De fato, isto é simplesmente o triângulo de *Pascal* preenchido intercaladamente com zeros e com cada linha multiplicada por um fator 1/2. Os valores dos coeficientes são dados por [86]

$$f_{\hat{X}}(\hat{X}, N) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{\frac{X+N}{2}}, \quad (2.104)$$

sendo que os momentos são dados por

$$\mu_m = \sum_{X=-N, -(N-2), \dots, N} X^m f_{\hat{X}}(\hat{X}, N), \quad (2.105)$$

fornecendo $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = N$, $\mu_3 = 0$ e $\mu_4 = N(3N - 2)$. O valor esperado da distância absoluta após N passos é dada por

$$\langle |\hat{X}_N| \rangle = \sum_{X=-N, -(N-2), \dots, N} |X| f_{\hat{X}}(\hat{X}, N). \quad (2.106)$$

Esta soma pode ser feita simbolicamente, considerando-se separadamente os casos com N

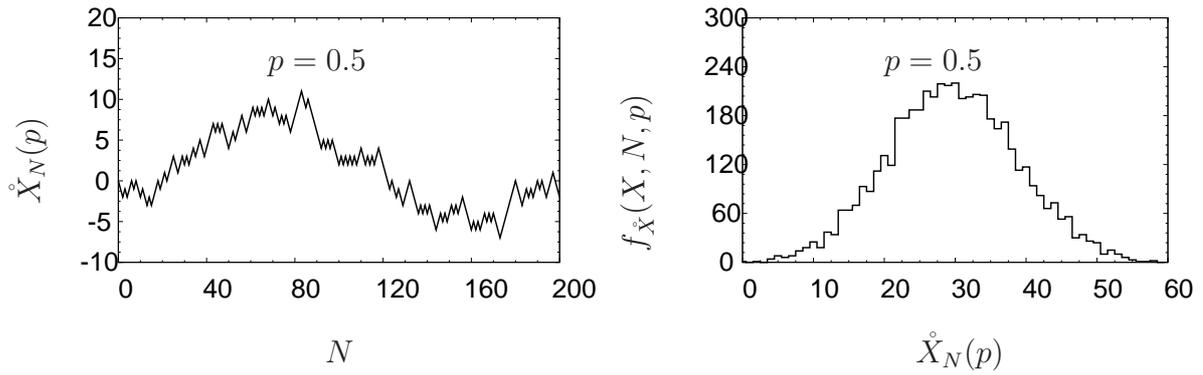


Figura 2.5: Distância percorrida $\hat{X}_N(p)$ em uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 200$. Lembre-se que p é a probabilidade de ocorrer um salto no sentido negativo do eixo da caminhada e $(1 - p)$ a probabilidade de haver um salto no sentido positivo. A caminhada isotrópica se verifica com $p = 0.5$ de modo a obter saltos idênticamente distribuídos. Neste caso, para tempos dilatados $N \gg 1$, observamos flutuação de $\hat{X}_N(p)$ em torno da origem. Também mostramos a FMP, $f_{\hat{X}}(X, N, p)$, para uma caminhada aleatória unidimensional com passos unitários idênticos, partindo da origem, obtida via simulação computacional com $N = 1500$ e $p = 0.5$ –caso isotrópico.

par e ímpar, ver os detalhes em [1]. Para valores grandes de N obtemos

$$\langle |\hat{X}_N| \rangle = \sqrt{\frac{2N}{\pi}}. \tag{2.107}$$

Tabela 2.1: Nesta tabela as linhas subsequentes são obtidas pela adição de metade do valor de cada célula em uma dada linha para cada uma das duas células diagonalmente abaixo. De fato, isto é simplesmente o triângulo de *Pascal* preenchido intercaladamente com zeros e com cada linha multiplicada por um fator $1/2$. Os valores dos coeficientes são dados pela equação (2.104). Note que os valores da tabela acima sugerem uma distribuição normal [1] e, de fato, é o que obtemos como mostra a figura 2.5.

$\hat{X}_N \Rightarrow$ $\Downarrow N$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					1/2	0	1/2				
2				1/4	0	2/4	0	1/4			
3			1/8	0	3/8	0	3/8	0	1/8		
4		1/16	0	4/16	0	6/16	0	4/16	0	1/16	
5	1/32	0	5/32	0	10/32	0	10/32	0	5/32	0	1/32

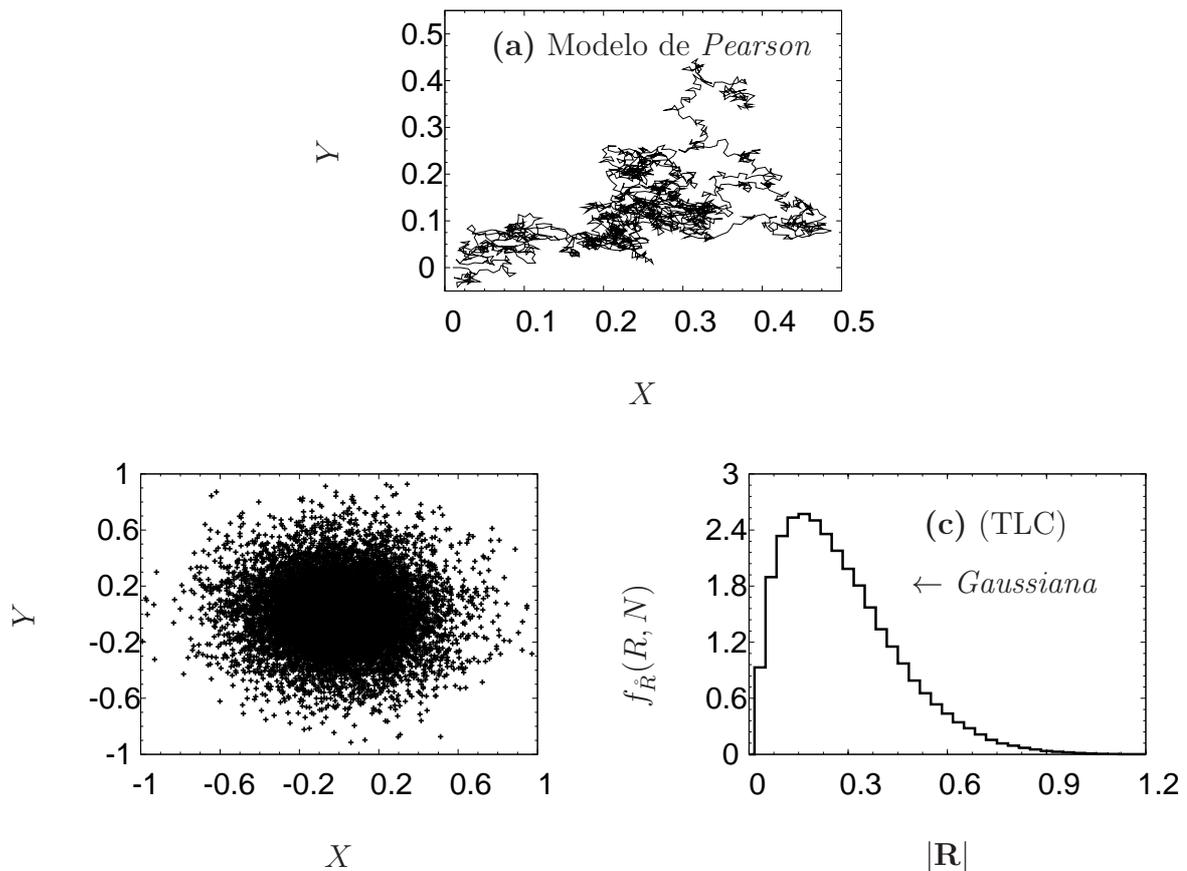


Figura 2.6: (a) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de apenas um forrageador. (b) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de 2000 forrageadores independentes. (c) Histograma, $f_{\hat{R}}(R, N)$ mostrando a probabilidade de encontrarmos o caminhante afastado da origem por uma distância $|\mathbf{R}|$ após N passos, para uma caminhada aleatória bidimensional com passos idênticos de tamanho $a = 0.01$, partindo da origem. Obtida via simulação computacional com $N = 2000$ e 2000 caminhantes independentes. O histograma, $f_{\hat{R}}(R, N)$ corresponde a equação (2.108) proposta por *Lord Rayleigh* em 1905 como solução para o modelo de *Pearson*.

2.10.3 Caminhada Aleatória bidimensional ($\beta = 2$)

Como vimos na seção 2.10.1, o modelo de *Pearson* [73, 83], figura 2.6, enviado à *Nature*, propunha-se a descrever a infestação de mosquitos numa floresta. A cada incremento de tempo, um único mosquito move-se uma distância fixa a , em uma direção aleatoriamente escolhida. *Pearson* queria saber qual a distribuição de mosquitos após muitos voos terem sido executados. A carta foi respondida por *Lord Rayleigh*, que já havia resolvido uma forma mais geral deste problema em 1880, no contexto de ondas de som em meios heterogêneos. Um modelo de ondas de som se propagando por um material pode ser pensado como a soma de vetores de onda com k constante e fase aleatória. Ondas sonoras em materiais possuem vetor de onda aproximadamente constante e suas direções são alteradas por espalhadores dentro do material. Com o objetivo de encontrar a função

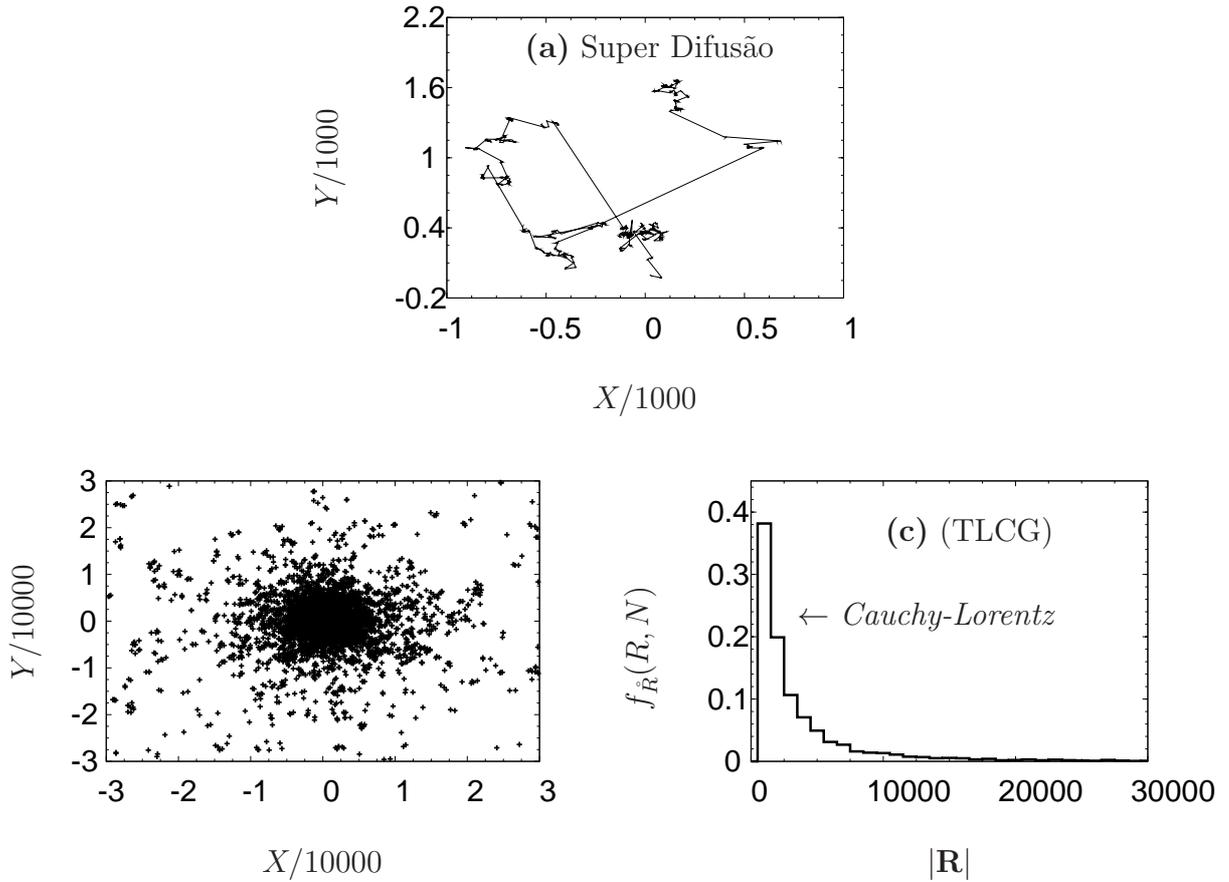


Figura 2.7: (a) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de apenas um forrageador. (b) Diagrama $X \times Y$ da trajetória de caminhada de 2000 forrageadores independentes. (c) Histograma, $f_{\dot{\mathbf{R}}}(R, N)$ mostrando a probabilidade de encontrarmos o caminhante afastado da origem por uma distância $|\mathbf{R}|$ após N passos. Trata-se de uma versão super difusiva do modelo de *Pearson*, com os deslocamentos, $\dot{\mathbf{r}}$, independentes e identicamente distribuídos segundo a lei de potência $f_{\dot{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-2}$ –variância infinita–. Novamente simulamos a caminhada, partindo da origem, com $N = 2000$ passos e 2000 caminhantes independentes. Observamos que $f_N(R) \sim L(\mathbf{R}; \alpha)$ com o parâmetro, $\alpha \rightarrow 1$, –distribuição de *Cauchy-Lorentz*, ver a equação (2.64)– em concordância com o TLCG.

densidade de probabilidade de uma onda de som após muitas interações, *Lord Rayleigh* considerou $f_{\dot{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) = P[\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}; N]$ como a probabilidade de atravessar a distância entre \mathbf{R} e $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$ em N passos. Para passos de comprimento unitário e $N \rightarrow \infty$, encontrou

$$f_{\dot{\mathbf{R}}}(\mathbf{R}; N) \sim \frac{2|\mathbf{R}|}{N} e^{-|\mathbf{R}|^2/N}. \quad (2.108)$$

Vemos que o valor esperado da distância percorrida cresce como a raiz quadrada do número de passos, $\langle \dot{\mathbf{R}}^2 \rangle \sim N$, o que é típico de fenômenos de difusão.

Encontramos a solução analítica para este problema na seção 2.8.1, onde demonstramos o TLC em um espaço β -dimensional onde o caminhante se move segundo a distribui-

ção de deslocamentos $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$ e obtemos como atrator a distribuição *Gaussiana* (2.91). No problema de *Pearson*, em duas dimensões $d = 2$, $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \delta(|\mathbf{r}| - a)$ e $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = a^2$, reduzindo a equação (2.91) a

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}; N) = \frac{2|\mathbf{R}|}{a^2 N} e^{-|\mathbf{R}|^2/a^2 N}. \quad (2.109)$$

Este resultado concorda com a solução (2.108) encontrada por *Lord Rayleigh* já que considerou deslocamentos unitários $a = 1$. O problema proposto por *Pearson* e resolvido por *Lord Rayleigh* pode ser, hoje em dia, facilmente tratado via simulação computacional. Fizemos isso e o resultado para uma caminhada de *Pearson* –isto é, uma caminhada aleatória bidimensional com passos idênticos de tamanho $a = 0.01$, partindo da origem com $N = 2000$ – pode ser vista na figura 2.6. A FMP $f_{\mathbf{R}}(R, N)$ mostrando a probabilidade de encontrarmos o caminhante afastado da origem por uma distância $|\mathbf{R}|$ após N passos, corresponde à equação (2.108), proposta por *Lord Rayleigh*.

Consideramos também um versão super difusiva do modelo de *Pearson* onde os caminhantes (mosquitos) executam voos identicamente distribuídos com deslocamentos \mathbf{r} segundo a lei de potência $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \sim r^{-2}$ –variância infinita–. Novamente simulamos a caminhada, partindo da origem com $N = 2000$ passos de 2000 caminhantes independentes, como mostra a figura 2.7. Desta vez a FDP obtida no histograma, $f_N(R)$ da posição R após N passos, não corresponde a um atrator *Gaussiano*. Em vez disso vemos $f_N(R) \sim L(\mathbf{R}; \alpha)$ com o parâmetro $\alpha \rightarrow 1$ –distribuição de *Cauchy-Lorentz*, ver a equação (2.64)– em concordância com o TLCC que prevê a distribuição de *Lévy* como atrator para soma de varáveis independentes e identicamente distribuídas por $f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r})$ com comportamento assintótico, $|\mathbf{r}| \gg 1$, escalando com $|\mathbf{r}|^{-1-\alpha}$.

2.11 Sistemas Discretos

2.11.1 Primeira Visita e Probabilidade de Retorno

A probabilidade $P(\beta)$ de um caminhante retornar a um sítio [87] durante uma caminhada discreta (ver a figura 2.8), num ambiente β -dimensional, é $P(\beta) = 1$ para $1 \leq \beta \leq 2$ indicando que todo o espaço está acessível e será visitado para tempos suficientemente longos. Já em espaços com $\beta > 2$, a probabilidade de retorno é menor do que a unidade, como demonstrado por *Pólya* em 1921.

Para dimensões superiores [88–91], *Watson* em 1939, *McCrea* e *Whipple* em 1940,

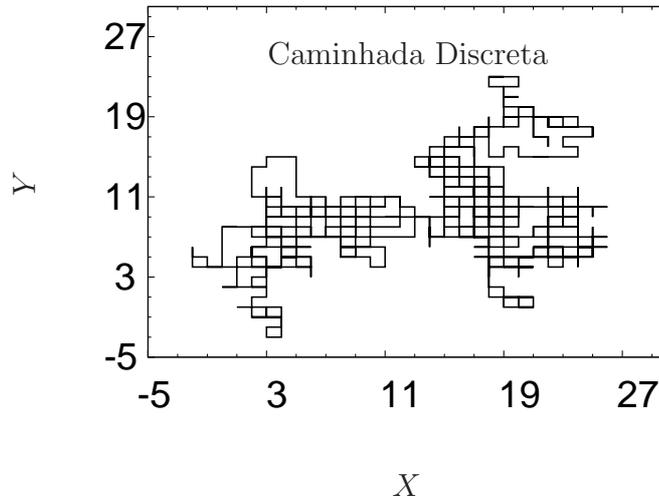


Figura 2.8: Caminhada discreta começando na origem e seguindo com 1000 passos idênticos em direções discretas e identicamente distribuídas num ambiente bidimensional.

Domb em 1954 e *Glasser* e *Zucker* em 1977 mostraram que

$$P(3) = 1 - \frac{1}{u(3)} = 0.3405373296\dots, \quad (2.110)$$

onde

$$u(3) = \frac{3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{(3 - \cos x - \cos y - \cos z)} = 1.5163860592. \quad (2.111)$$

Formas analíticas para $\beta > 3$ não são conhecidas, mas *Montroll* em 1956 [92] mostrou que para $\beta < 3$

$$P(\beta) = 1 - [u(\beta)]^{-1}, \quad (2.112)$$

onde

$$u(\beta) = \int_0^{\infty} \left[I_0 \left(\frac{t}{\beta} \right) \right]^{\beta} e^{-t} dt. \quad (2.113)$$

$I_0(z)$ é a função de *Bessel* modificada de primeira ordem. De acordo com *Montroll* em 1956, *Flajolet* e *Finch* em 2003, a equação (2.113) pode ser avaliada numericamente [92–94], fornecendo os resultados para $P(\beta \geq 3)$, mostrados na tabela-2.2

Tabela 2.2: Valores numéricos para $P(\beta \geq 3)$ de um caminhante retornar a um sítio durante uma caminhada discreta em ambientes com dimensão $\beta \geq 3$.

β	3	4	5	6	7	8
$P(\beta)$	0.340537	0.193206	0.135178	0.104715	0.0858449	0.0729126

2.12 Processo de Busca

Um [processo de busca \(PB\)](#), combina uma caminhada aleatória com um processo estocástico que determina como passos são dados e um procedimento de detecção de alvos. Definiremos o [PB](#) mais formalmente no próximo capítulo. Na próxima seção revisaremos um processo de busca particularmente interessante aos nossos propósitos, que chamaremos de Modelo de *Viswanathan*.

2.12.1 Modelo de *Viswanathan*

Entre os anos de 1996 e 2004, *G. M. Viswanathan* e colaboradores desenvolveram um modelo de busca aleatória [4–9] proposto originalmente por *Viswanathan* em 1996 [4]. Trata-se de uma aproximação de campo médio que consolidou-se na literatura e estabeleceu-se como modelo mais relevante atualmente disponível.

Nosso interesse no modelo de *Viswanathan* vai muito além da ilustração de um processo de busca biologicamente motivado. O propósito principal desta discussão é introduzir o modelo de *Viswanathan* como modelo de referência que permita a comparação com a eficiência energética exata obtida no modelo analítico, que apresentaremos nos próximos capítulos. Outro propósito é a implementação de um modelo de busca coletiva onde o comportamento de cada [forrageador](#), participante da busca coletiva, inspira-se no modelo de *Viswanathan*.

Um processo de busca é constituído por um ambiente de busca e uma heurística que governa a dinâmica do processo. Iniciaremos a revisão do modelo de *Viswanathan* descrevendo as propriedades do ambiente e dos [alvos](#) que ele encerra. Em seguida passaremos à apresentação da heurística que orienta o [forrageador](#). Concluiremos esta seção discutindo a eficiência energética do processo e o balanço energético do [forrageador](#).

2.12.2 Ambientes de Busca

Na busca biológica, os animais estão sujeitos a inúmeros vínculos impostos pela natureza, como limites determinados por acidentes geográficos ou por fronteiras com territórios de vizinhos concorrentes, além de variantes causadas pelo clima que pode afetar drasticamente a distribuição e a disponibilidade de alimentos –alvos da busca. Em sistemas tecnológicos como busca em bancos de dados, os dispositivos de indexação podem ser limitados ou até mesmo nem existir e o ambiente pode ser dinâmico, modificando aleatoriamente a

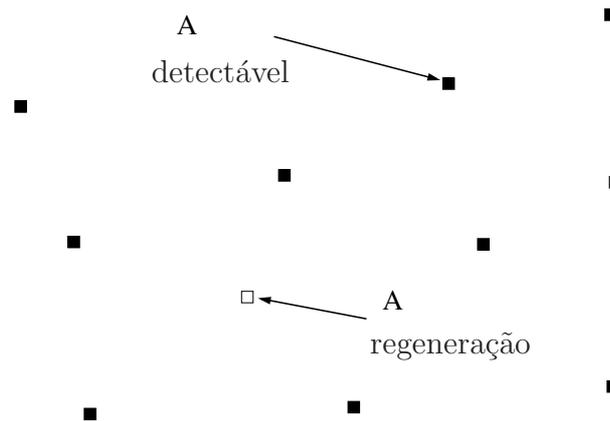


Figura 2.9: Ilustração de um ambiente de busca em duas dimensões contendo uma densidade ρ de alvos posicionados aleatoriamente segundo uma distribuição homogênea, garantindo que todo o espaço de busca seja igualmente preenchido (na média sobre várias configurações) resultando num espaçamento médio típico entre alvos dado por λ . O ambiente pode ter qualquer dimensão e supomos que os alvos podem ser de três tipos: destrutíveis ($\xi = 1$), não-destrutíveis ($\xi = 2$) ou regenerativos ($1 < \xi < 2$). Assumimos que as propriedades ambientais são controladas pelos parâmetros λ e ξ , que determinam o ambiente de busca.

disposição dos **alvos** –como na “*Internet*”. Certamente, em primeira aproximação, vamos nos limitar ao caso mais simples onde o ambiente é estático e a distribuição de **alvos** é homogênea.

Definimos o ambiente de busca como o espaço cartesiano β -dimensional contendo uma distribuição homogênea de **alvos** espalhados aleatoriamente. Os **alvos** são caracterizados por suas propriedades regenerativas sintetizadas no parâmetro ξ , de tal forma que, com $\xi = 1$, os **alvos** são voláteis (destrutíveis) indicando que cada **alvo** só pode ser visitado e consumido uma vez. Assim ao ser detectado, o **alvo** será completamente destruído tornando-se indisponível à visitas futuras. Com $\xi = 2$, o ambiente corresponde ao caso **não-destrutivo** onde os **alvos** podem ser visitado inúmeras vezes, permanecendo acessíveis a visitas futuras. Nos casos intermediários, $1 < \xi < 2$, obtemos o ambiente regenerativo, figura 2.9, e neste caso podemos considerar intuitivamente que todo **alvo** encontrado é destruído tornando-se inacessível por um certo tempo τ , até que aconteça sua auto regeneração. Decorrido o tempo de regeneração, o **alvo** estará novamente disponível e voltará a ser detectável exatamente na mesma posição onde foi detectado e destruído anteriormente pelo **forrageador**. O parâmetro $\xi = 1$ corresponde ao limite $\tau \rightarrow \infty$, enquanto que, $\xi = 2$, corresponde a $\tau \rightarrow 0$. Simulações computacionais justificam a conexão entre ξ e τ .

Não importando qual seja o ambiente de busca, ele sempre encerra uma densidade de

alvos

$$\rho = \frac{n}{V_\beta}, \quad (2.114)$$

e estamos interessados em como a concentração de **alvos** afeta o desempenho na busca. A densidade de **alvos** é definida como a quantidade de **alvos** n por unidade de hipervolume V_β , onde o índice β é a dimensão espacial. Em uma dimensão os **alvos** encontram-se distribuídos ao longo de uma cadeia de comprimento $V_1 \propto M$, em duas dimensões, sobre uma área $V_2 \propto M^2$, e assim por diante, conduzindo à $V_\beta \propto M^\beta$, onde M é o diâmetro característico do ambiente. Por meio da densidade de **alvos** definimos λ , o livre caminho médio entre **alvos** sucessivos, dado por

$$\lambda \equiv \frac{1}{2r_v\rho}. \quad (2.115)$$

Aqui r_v é o alcance visual do **forrageador** e seu papel será melhor definido na seção seguinte. Adiantamos que os parâmetros λ e r_v serão de grande importância nas seções futuras onde a razão λ/r_v será utilizada como uma espécie de parâmetro de mobilidade do **forrageador** indicando (em unidades do alcance visual) quanto é preciso caminhar em média antes de um **alvo** estar visível.

Nesta seção estabelecemos, em resumo, que o ambiente de busca se materializa num espaço β -dimensional tendo uma densidade ρ de **alvos** distribuídos homogeneamente, resultando num contínuo de **alvos** separados pela distância relativa média λ . Os **alvos** apresentam propriedades de regeneração controladas pelo parâmetro ξ . Finalmente, o ambiente estará completamente determinado ao fixarmos os valores dos parâmetros $0 < \lambda < \infty$ e $1 \leq \xi \leq 2$. Veremos como estes parâmetros afetam o desempenho da busca.

2.12.3 Heurística *Levyniana*

A heurística⁴ determina a técnica ou estratégia que orienta o processo de busca. Quanto maior a habilidade cognitiva do **forrageador** ou quanto maior o conhecimento das propriedades do ambiente de busca, maior será o refinamento e a complexidade da heurística. Considere como exemplo a busca de um registro particular em um banco de dados. Este processo de busca pode ser muito facilitado se os dados estiverem armazenados segundo alguma regra de ordenamento (ordem alfabética, numérica, etc.). No

⁴A palavra heurística deriva da palavra grega heurisko, literalmente “descubro” ou “acho” [95]. Define-se procedimento heurístico como um método de aproximação das soluções dos problemas que não segue um percurso claro, mas se baseia na intuição e nas circunstâncias a fim de gerar conhecimento novo. É o oposto do procedimento algorítmico.

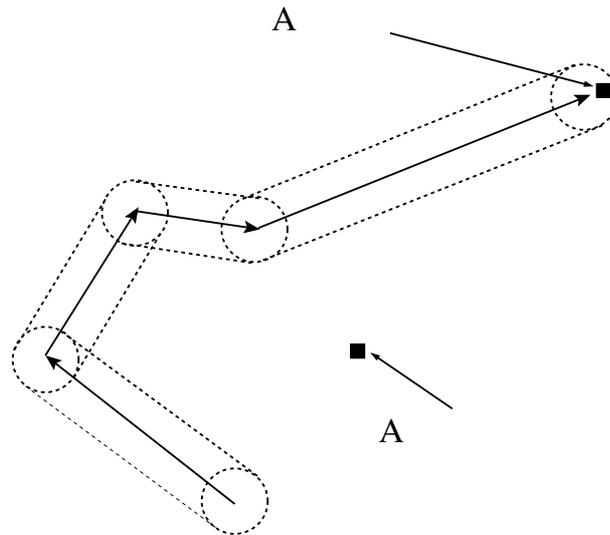


Figura 2.10: Ilustração da trajetória de busca com o forrageador inspecionando a área delimitada pelas linhas pontilhadas, o círculo demarca o alcance visual em cada evento de reorientação, onde uma nova direção de voo será escolhida isotropicamente e uma nova distância de voo será sorteada aleatoriamente segundo a equação (2.116).

caso biológico, habilidades de memória podem permitir que o forrageador lembre-se das fontes de alimento mais produtivas, evitando caminhadas desnecessárias. De modo geral, níveis elevados de cognição podem conduzir à percepção de aspectos decisivos do ambiente de busca e fornecer pistas a respeito de onde procurar alimento. A fim de manter o modelo tão genérico quanto possível, não vamos presumir o conhecimento de qualquer particularidade do ambiente, que possa permitir o refinamento da heurística a ser escolhida. Assim, nesta primeira abordagem, a busca não é orientada por qualquer habilidade cognitiva como memória ou processamento das informações ambientais⁵, isto corresponde a assumir que a heurística estará determinada por dois fatores:

1. o tipo de caminhada aleatória realizada pelo **forrageador**, que é determinado pela distribuição de deslocamentos $f_{\tilde{x}}(x)$, definido abaixo pela equação (2.116);
2. a maneira como o **forrageador** inspeciona o ambiente à procura dos alvos, ver a figura 2.10, no modelo proposto (ver a seção 2.13), isto será determinado exclusivamente pelo alcance visual r_v . Considere como exemplo o caso biológico, onde a interação com os **alvos** é feita por meio dos sentidos do animal (visão, olfato, etc.) e em sistemas tecnológicos, a interação com os **alvos** se dá pela inspeção direta ao acessar cada um dos registros. Aqui assumiremos apenas que o **forrageador** detecta apenas **alvos** que estiverem dentro do raio de visão r_v em torno da posição do **forrageador**.

⁵Para mais informações sobre processos de busca cognitiva sugerimos a referência [96].

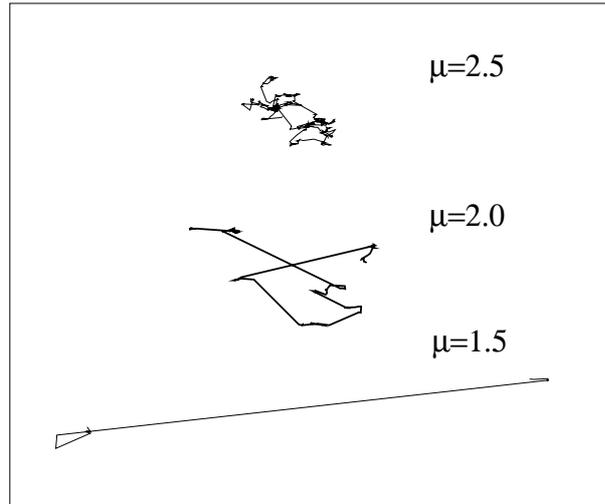


Figura 2.11: Ilustração da caminhada de *Lévy* governada pela distribuição de passos definida na equação (2.116). Os três exemplos mostram caminhadas percorrendo a distância total de 1000 unidades, note como μ , o expoente da lei de potência afeta a frequência dos deslocamentos com tamanho muito superior à média. No limite $\mu \rightarrow 1$, observa-se superdifusão enquanto $\mu \rightarrow 3$, recupera o comportamento *Browniano*.

Definimos a heurística no processo de busca aleatória apenas pelas características dos deslocamentos do *forrageador* durante sua caminhada aleatória e sua interação com os *alvos* via alcance visual r_v . Fixamos o tipo da caminhada aleatória simplesmente definindo $f_{\hat{x}}(x)$, a distribuição dos deslocamentos x_j do *forrageador*. Fazemos isto de modo a alcançar o comportamento anômalo de *Lévy* (superdifusão) e o comportamento *Browniano* (difusão normal) variando um simples parâmetro. Uma alternativa é considerar a lei de potência [36, 37, 97–99]

$$f_{\hat{x}}(x) \sim x^{-\mu}, \quad (2.116)$$

conhecida como distribuição de *Lévy* generalizada, onde o parâmetro $\mu = \alpha + 1$ pode ser ajustado a fim de se obter a dinâmica difusiva ($\mu \geq 3$) ou a dinâmica super difusiva ($1 < \mu < 3$) e a distribuição possui a propriedade de auto-afinidade, $f_{\hat{x}}(\lambda x_j) \sim \lambda^{-\mu} f_{\hat{x}}(x_j)$. A variância da distribuição de *Lévy* diverge para $1 < \mu \leq 2$, isto corresponde ao movimento com super difusão anômala [36, 97]. O *forrageador* se move com velocidade constante unitária $v = x_j/t_j = 1$, portanto, deslocar-se a distância x_j consome uma unidade de tempo cuja magnitude é $[t_j] \equiv [x_j]$ (aqui $[*]$ denota o operador que extrai a magnitude adimensional da grandeza $*$) [24, 100]. Esta distribuição também pode ser vista associada a difusão em sistemas caóticos e modelos de tempo contínuo [2, 101]. Pretendemos apenas confrontar a heurística *Browniana* com a de *Lévy* a fim de saber qual maximiza a função de avaliação generalizada –ver seção 2.13. Por isso, a princípio, não exploraremos a correlação entre os saltos, considerando uma caminhada isotrópica onde os deslocamentos ocorrem

com a mesma probabilidade em todas as direções. Portanto, os \mathbf{x}_j são independentes e identicamente distribuídos. A direção de voo $0 < \theta < 2\pi$, será escolhida de forma aleatória e isotrópica, sem privilegiar qualquer direção particular. Isto pode ser feito apenas arbitrando que $P(\theta)$, a distribuição de direções de voo, é constante em relação a θ . Ver na figura 2.11 (página 47) algumas trajetórias de busca para vários valores de μ .

2.12.4 Vantagens das Estratégias *Levynianas*

Uma questão interessante é entender de que forma a caminhada de *Lévy* pode favorecer o *forrageador* superando em eficiência energética as caminhadas *Gaussianas* ou de *Poisson*. As razões que justificam as observações empíricas, de caminhadas de *Lévy* no *forrageamento* biológico nunca foram totalmente compreendidas, mas alguns trabalhos têm oferecido algumas pistas. *Levandowsky* e colaboradores [14, 15] sugeriram que a razão pela qual microrganismos executam caminhadas de *Lévy* em ambientes tridimensionais é o fato da probabilidade de retorno ser menor que a da caminhada *Browniana* independentemente do valor de μ [24]. Uma explicação relacionada, apresentada por *Shlesinger* [24], sugere que o *forrageador* pode preferir a caminhada de *Lévy* por aumentar o número de novos *alvos* visitados correspondendo à maior ergodicidade das trajetórias de busca na caminhada de *Lévy* superando a ergodicidade da difusão normal dos processos *Brownianos* [102–105]. A divergência de um grupo de *forrageadores*, inicialmente próximos executando caminhadas de *Lévy*, também é mais rápida evitando a competição pelos recursos (*alvos*). A estratégia de *Lévy* também é uma boa solução para o problema de n estações de radar rastreando m *alvos* [106].

2.13 Eficiência Energética do Processo de Busca

Nas seções anteriores 2.12.2 e 2.12.3 definimos o processo de busca fixando as propriedades do ambiente de busca $0 < \lambda < \infty$ e $1 \leq \xi \leq 2$ e a estratégia de busca, governada pela distribuição de deslocamentos do *forrageador* dada pela equação (2.116) onde os parâmetros $1 < \mu \leq 3$ e $0 < r_v < \infty$ determinam a heurística. Resta ainda definir η , a função de avaliação generalizada capaz de qualificar o desempenho de cada estratégia de busca μ , num dado ambiente caracterizado por λ e ξ fixos. Vamos manter em mente que o comportamento de $\eta(\mu, r_v, \lambda, \xi)$ deve crescer em função de B , o *benefício generalizado* obtido pela busca, e diminuir em virtude de C , o *custo generalizado* gerado pelo desgaste

envolvido na busca. Assim temos de forma simples

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \xi) \equiv \frac{B(\mu, r_v, \lambda, \xi, \dots)}{C(\mu, r_v, \lambda, \xi, \dots)}. \quad (2.117)$$

Certamente $B(\mu, r_v, \lambda, \xi, \dots)$ e $C(\mu, r_v, \lambda, \xi, \dots)$ podem ser funções complexas dependentes de inúmeras variáveis, particulares a cada sistema, mas em favor da generalidade vamos tratá-los da forma mais simples e genérica possível. Como os **alvos** são o objeto da busca é natural supor que os benefícios aumentam com o aumento de ν , o número de **alvos** encontrados durante uma busca. Por isso, vamos admitir em primeira aproximação que $B \propto \nu$. Quanto ao custo, vamos supor que seja proporcional à *distância generalizada* média $\langle \dot{L}_\nu \rangle$, percorrida para encontrar os ν alvos. Com isso a função de avaliação assume a forma

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \xi) \equiv \frac{\nu}{\langle \dot{L}_\nu \rangle} = \frac{1}{\langle \dot{\ell} \rangle}, \quad (2.118)$$

onde $\langle \dot{\ell} \rangle = \frac{\langle \dot{L}_\nu \rangle}{\nu}$, é a distância média percorrida entre dois **alvos** sucessivos, detectados pelo **forrageador**. Podemos ver que $\eta(\mu, r_v, \lambda, \xi)$, é inversamente proporcional à distância percorrida e que tanto $\langle \dot{L}_\nu \rangle$ como $\langle \dot{\ell} \rangle$ dependem das grandezas que caracterizam a busca, μ , r_v , λ e ξ . Vamos eliminar a dependência em ν pois não fazê-lo implicaria em avaliar o limite assintótico de η , quando $\nu \rightarrow \infty$. Fazemos algo equivalente, simplesmente redefinindo $\langle \dot{\ell} \rangle$, pela estimativa

$$\langle \dot{\ell} \rangle = N_s \langle \dot{x} \rangle, \quad (2.119)$$

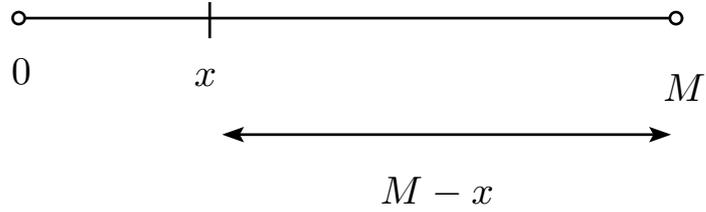
onde N_s , é a estimativa do número de saltos necessários para percorrer a distância entre dois **alvos** sucessivos detectados e $\langle \dot{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$, é o passo médio da caminhada (primeiro momento da distribuição de deslocamento do **forrageador** na equação (2.116)), fornecendo

$$\eta(\mu, r_v, \lambda, \xi) \equiv \frac{1}{N_s \langle \dot{x} \rangle}. \quad (2.120)$$

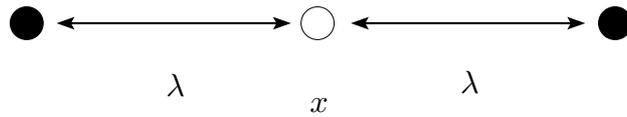
Esta função de avaliação foi proposta em 1999, por *G. M. Viswanathan* e colaboradores [4, 5].

A integral do passo médio não precisa ser avaliada em todo espaço, pois os deslocamentos são estritamente positivos, além disso vamos proibir deslocamentos menores que r_v pois não fazê-lo equivaleria a realizar a busca dentro da área já inspecionada visualmente conduzindo ao comportamento artificial de caminhada com infundáveis passos de tamanho insignificante, que só fazem o **forrageador** oscilar dentro da área visualmente

(a) Caso 1D, N_s



(b) Caso β -dimensional destrutivo, N_d



(c) Caso β -dimensional não-destrutivo, N_n

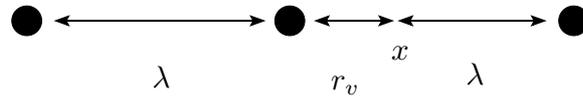


Figura 2.12: Os círculos fechados representam alvos. (a) Caso unidimensional com condição de contorno de absorção. O ambiente consiste de um segmento $[0, M]$ (b) Caso β -dimensional destrutivo. O círculo aberto central representa um alvo previamente visitado, consumido e destruído. (c) Caso β -dimensional não-destrutivo. O círculo fechado central representa um alvo previamente visitado e que pode ser revisitado.

inspecionada. Segue que

$$\langle \hat{x} \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} x^{1-\mu} dx + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} x^{-\mu} dx}{\int_{r_v}^{\infty} x^{-\mu} dx}, \quad (2.121)$$

onde o denominador é um fator de normalização requerido para área unitária e a segunda integral do numerador é espécie de aproximação de campo médio que se fundamenta no argumento da não provável execução de saltos muito maiores que λ , já que este é o espaçamento típico entre os alvos. Em última análise, esta aproximação corresponde a um truncamento na distribuição de deslocamentos do [forrageador](#) proibindo, $x_j > \lambda$ o que reflete o truncamento dos saltos longos pelo ambiente. A solução da integral fornece

$$\langle \hat{x} \rangle \approx \left(\frac{\mu - 1}{2 - \mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}, \quad (2.122)$$

2.13.1 Quantidade de Saltos entre Eventos Sucessivos de Detecção de Alvos

Caso Unidimensional, N_s

A forma funcional de N_s , foi calculada por *S. Buldyrev* em [107] e é definida num contexto da busca unidimensional admitindo que a caminhada de *Lévy* começa numa posição arbitrária x , dentro do intervalo $[0, M]$, com condição de contorno de absorção (ver a referência [108] onde problemas similares foram tratados). O número médio de passos do *forrageador* antes de alcançar os limites do ambiente (ver a figura 2.12 (a)) é

$$N_s = C \left(\frac{x(M-x)}{r_v^2} \right)^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad (2.123)$$

onde a constante C não depende de x , nem de M . Na caminhada *Browniana* ($\mu > 3$), recupera-se o resultado $N_s = x(M-x)r_v^{-2}$. A estimativa do número de saltos entre dois eventos de detecção de alvos, para ambientes com dimensão superior ($d > 1$) foi aproximada pela equação (2.123) assumindo-se que a origem vista na figura 2.12 (a) está na posição do alvo previamente visitado (alvo central nas figuras 2.12 (a) e (C))

Caso β -dimensional Destrutivo, N_d

Considere o caso *destrutivo* (ver a figura 2.12 (b)), em que todo *alvo* detectado é destruído tornando-se inacessível a visitas futuras. Esta situação corresponde à equação (2.123) para o caso onde considera-se que o *forrageador* inicia a caminhada na posição do *alvo* previamente destruído, o qual encontra-se afastado dos *alvos* vizinhos pela distância média λ , conduzindo a $x \approx \lambda$ e $M-x \approx \lambda$, assim N_d , o número médio de passos entre dois *alvos* para o caso *destrutivo*, é dado por

$$N_d \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\mu-1}. \quad (2.124)$$

Caso β -dimensional Não-destrutivo, N_n

Para o caso *não-destrutivo* (ver a figura 2.12 (c) na página 50), também com distribuição esparsa de alvos, a equação (2.124) superestima o número de passos entre dois *alvos* sucessivos em razão do ambiente não destrutivo permitir que os *alvos* sejam revisitados inúmeras vezes. Em termos da equação (2.123), esta situação corresponde ao caso onde

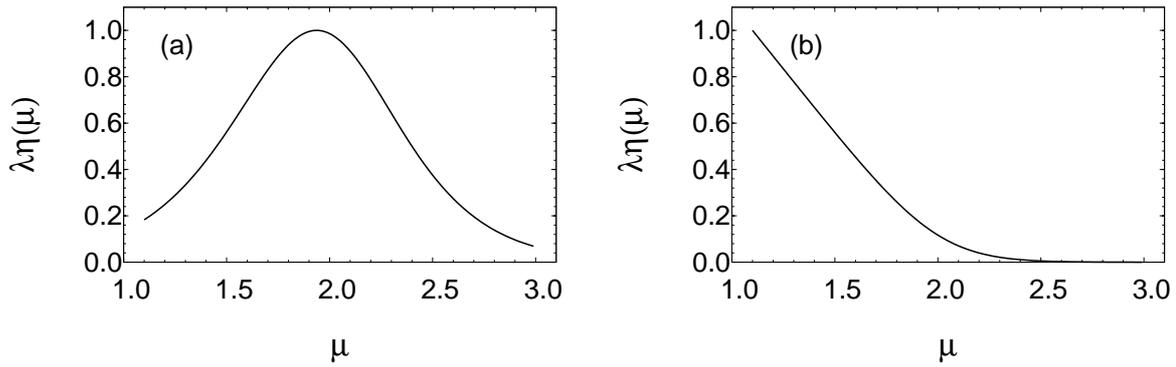


Figura 2.13: Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lévy que define a estratégia de busca para o modelo analítico em duas dimensões. (a) Caso não-destrutivo (b) caso destrutivo. Densidade de alvos $\rho = 10^{-4}$, alcance visual $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

o **forrageador** parte das proximidades da posição do último **alvo** visitado, mais precisamente a uma distância r_v do **alvo** e, o próximo **alvo** da vizinhança encontra-se afastado pela distância λ , conduzindo à $x = r_v$ e $M - x = \lambda$, portanto N_n , o número de passos entre dois **alvos** sucessivos no caso não destrutivo, é dado por

$$N_n \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad (2.125)$$

com $1 < \mu < 3$. Note que para $(\lambda \gg r_v)$, temos $(N_d \gg N_n)$.

Eficiência Energética do caso β -dimensional Não-destrutivo

Para o caso **não-destrutivo** (ver figura 2.13 (a)) a eficiência máxima do processo é obtida levando as equações (2.125) e (2.122) em (2.120) e derivando com relação a μ . A eficiência ótima é

$$\mu_{opt} = 2 - \delta, \quad (2.126)$$

onde $\delta \sim 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$. Portanto, na ausência de conhecimento prévio a respeito da distribuição dos **alvos**, e quando λ/r_v assume valores grandes, a estratégia ótima de busca configura-se com $\mu_{opt} \approx 2$.

No problema não destrutivo os sítios são preservados e isto permite que as estratégias *Brownianas*, $\mu \rightarrow 3$, caracterizadas por pequenos voos altamente frequentes, recebam o benefício de encontrar sucessivas vezes o mesmo sítio, visto que os voos longos ocorrem com frequência desprezível. Esta aparente vantagem apresenta uma contrapartida prejudicial. Devido à distribuição esparsa de sítios o **forrageador** pode levar muito tempo e caminhar

grandes distâncias em pequenos e infindáveis saltos até que seja capaz de encontrar outro sítio, isto faz com que o número de voos N aumente, diminuindo assim a eficiência η . Para as estratégias superdifusivas, $\mu \rightarrow 1$, os voos são extremamente longos e portanto é muito provável que o **forrageador** encontre um sítio durante um voo, contudo, apesar de encontrar os sítios com certa facilidade as distâncias percorridas entre dois sítios sucessivos são gigantescas e isto naturalmente afeta a eficiência de forma negativa. Nos limites onde $\mu \rightarrow 1$ e $\mu \rightarrow 3$, a curva da eficiência assume valores mínimos como discutido. Portanto, entre os mínimos deve haver um máximo. A eficiência máxima ocorre quando $\mu \approx 2$, como mostra a figura 2.13 (a), e isto deve-se a uma estratégia que combina de forma mais equilibrada as frequências dos voos longos e curtos, conseguindo assim encontrar muitos sítios a um baixo custo (em distância percorrida).

Eficiência Energética do caso β -dimensional Destrutivo

Para ($1 < \mu < 3$), o expoente $(\mu - 1)$, corresponde à dimensão fractal do conjunto de **alvos** visitados [24]. A equação (2.124) não depende de x e M , que são as variáveis do problema unidimensional. Em vez disso introduzimos o parâmetro λ , que é bem definido em qualquer dimensão pelas equações (2.114) e (2.115). A situação de interesse prático se configura quando a distribuição de **alvos** é esparsa ($\lambda \gg r_v$), substituindo nas equações (2.123) e (2.122) levando em (2.120) verificamos que η não assume máximos e os menores valores de μ conduzem ao **forrageamento** mais eficiente, como mostra a figura 2.13 (b). Note que $\mu \rightarrow 1 + \epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0^+$. No problema destrutivo os sítios são eliminados após serem visitados uma única vez, isto torna o **forrageamento** nas proximidade do regime *Browniano*, $\mu \rightarrow 3$, pouco eficiente devido seu caráter redundante que torna muito provável retornar a um mesmo local repetidas vezes. Quando $\mu \rightarrow 1$, o caráter superdifusivo das trajetórias torna menos relevante o fato dos sítios se destruírem pois o **forrageador** diverge rapidamente, sem permanecer muito tempo nas proximidade de qualquer **alvo** destruído. Isto justifica o resultado obtido onde a eficiência não possui valor μ máximo, mas aumenta à medida que $\mu \rightarrow 1$, como mostra a figura 2.13 (b).

Generalização de N_s para os casos Destrutivo e Não-Destrutivo

Podemos generalizar (2.124) e (2.125) introduzindo o parâmetro ξ , resultando em

$$N_s \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\frac{\mu-1}{\xi}}. \quad (2.127)$$

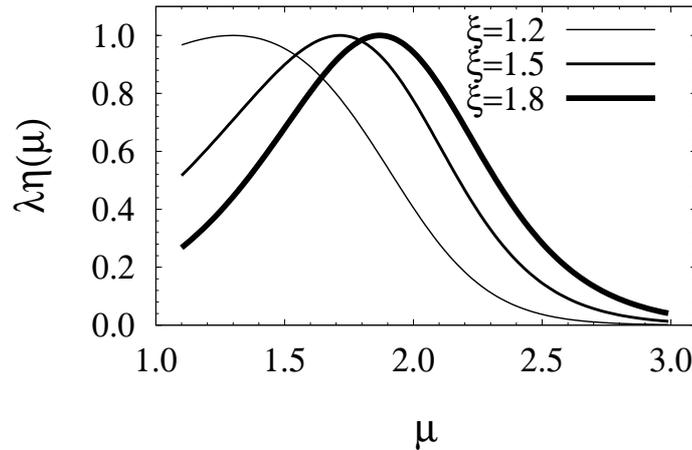


Figura 2.14: Produto entre o livre caminho médio λ e a eficiência η versus μ o expoente de Lévy que define a estratégia de busca. As curvas mostram a eficiência para vários valores de ξ , que controla as propriedades regenerativas do ambiente. Por definição, dois valores tem significado $\xi = 2$ corresponde ao caso não destrutivo e $\xi = 1$, à dinâmica destrutiva. Para valores ($1 < \xi < 2$) observamos transição suave entre a dinâmica destrutiva e não destrutiva. Aqui temos densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$, $\lambda/r_v = 5000$.

Por definição ξ está restrito aos valores 1 (no caso destrutivo) ou 2 (no caso não destrutivo), porém podemos assumir valores intermediários ($1 < \xi < 2$) como mostra a figura 2.14. Tal intervalo parametriza os [alvos](#) regenerativos onde $\tau = \tau(\epsilon)$ apesar desta função não ter uma forma simples.

As equações (2.120), (2.122) e (2.127) fornecem uma aproximação estatística que permite comparar a eficiência da busca *Browniana* e da busca de Lévy ao variar o parâmetro μ fixando r_v , λ e ξ , permitindo plotar curvas $\eta(\mu)$ versus μ , que mostram o desempenho das estratégias de busca em cada ambiente, como mostra figura 2.13 e a figura 2.14.

2.13.2 Eficiência Energética sob Condições Ideais

Em concentrações elevadas $\lambda/r_v \approx 1$, o ambiente de busca aproxima-se do limite de saturação de alvos, indicando que não é mais necessário caminhar para detectar o [alvo](#) mais próximo nas vizinhanças, já que o [alvo](#) está imediatamente visível. Podemos verificar esse regime considerando que para $\lambda/r_v \leq 1$, temos

$$\langle \hat{x} \rangle \approx \lambda \quad \text{e} \quad N_s \approx 1. \quad (2.128)$$

Levando (2.128) em (2.120), η torna-se invariante com relação à estratégia μ . As curvas de eficiência para vários valores de concentração de [alvos](#) são mostradas na figura 2.15.

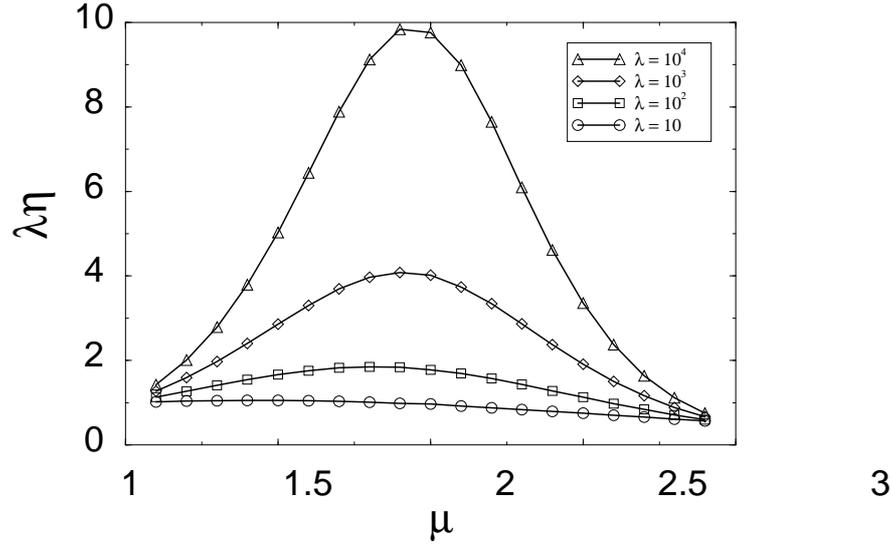


Figura 2.15: Produto entre a eficiência η e o livre caminho médio λ versus μ em uma dimensão para vários valores de λ , obtido a partir das equações (1) e (2) com $r_v = 1$ para o caso não destrutivo. Densidade $\rho = 10^{-4}$, $r_v = 1$.

2.13.3 Balanço Energético de *Raposo-Viswanathan*

Frequentemente a busca ocorre vinculada a algum tipo de balanço energético que impede o **forrageador** de prosseguir caso não seja capaz de reabastecer suas reservas. No contexto em que o modelo analítico foi construído precisamos redefinir a função de avaliação η , a fim de considerar adequadamente o desgaste energético e para isto introduzimos $f(\langle \ell \rangle)$, uma função de desgaste ou custo, arbitrária, associada à distância média percorrida entre dois **alvos** sucessivos. Esta função está condicionada apenas a ser monotonicamente crescente. A energia total líquida por unidade de distância percorrida durante um processo de busca é $\langle \dot{\Omega} \rangle \approx \langle \Delta \dot{E} \rangle / \langle \ell_t \rangle$, onde $\Delta \dot{E}$ é a energia total ganha ou perdida, durante uma busca que percorreu a distância total média $\langle \ell_t \rangle$. Podemos aproximar $\langle \ell_t \rangle = \nu \langle \ell \rangle$, onde ν denota o número de **alvos** visitados e $\langle \ell \rangle$ a distância média percorrida entre dois **alvos** detectados. A energia média líquida, $\langle \Delta \dot{E} \rangle$, obtida pelo **forrageador** ao encontrar **alvos** pode ser similarmente escrita como $\langle \Delta \dot{E} \rangle = \nu \langle \Delta \dot{E}_{alvo} \rangle$, com $\langle \Delta \dot{E}_{alvo} \rangle = \epsilon - f(\langle \ell \rangle)$ sendo a energia líquida média por **alvo** encontrado e ϵ a energia bruta ganha por **alvo** detectado e consumido. Neste ponto introduzimos o vínculo natural $\dot{E} = \dot{E} + \langle \Delta \dot{E} \rangle > 0$, refletindo o fato de que a reserva energética \dot{E} do **forrageador** deve se manter positiva, como condição de sobrevivência. Assim

$$\langle \dot{\Omega} \rangle \approx \frac{\langle \Delta \dot{E}_{alvo} \rangle}{\langle \ell \rangle} = (\epsilon - f(\langle \ell \rangle)) \dot{\eta}, \quad (2.129)$$

onde $\dot{\eta}$ é a eficiência energética definida na seção 2.13. A maximização de $\dot{\Omega}$ implica em $F(\dot{\eta}) \frac{d\dot{\eta}}{d\mu} = 0$, com $F(\dot{\eta}) = \epsilon - f - \dot{\eta}df/d\dot{\eta}$. Os possíveis extremos de $\dot{\Omega}$ implicam ou nos extremos de $\dot{\eta}$ ou nos zeros de F . Evocando a condição $\langle \Delta \dot{E}_{alvo} \rangle = \epsilon - f(\langle \dot{\ell} \rangle) > 0$ e observando que $df/d\dot{\eta} < 0$, pois f é uma função crescente de $\langle \dot{\ell} \rangle = 1/\dot{\eta}$, temos $F > 0$ e os extremos de η_E coincidem com os de η . Finalmente como $d^2\eta/d\mu^2 < 0$ os extremos são máximos de eficiência energética. Apesar da introdução de uma função arbitrária de custo não afetar os valores de μ_{opt} , ela pode limitar significativamente os valores μ que satisfazem a condição $\langle \Delta \dot{E} \rangle > 0$.

Formulação Matemática geral do Processo de Busca Aleatória: Aplicações em 1D

Neste capítulo propomos um modelo analítico de busca *Markoviana*. O mérito desta contribuição consiste no fato de ser uma formulação exata. Desconhecemos a existência de qualquer descrição desta natureza, até a presente data. As abordagens descritas na literatura usualmente tratam o problema via simulações computacionais ou aproximações de campo médio. Este capítulo está estruturado como segue: iniciamos apresentando nosso modelo de busca aleatória e discutindo a construção de todas as grandezas relevantes e de suas densidades de probabilidade. Ilustramos a teoria considerando um processo de busca determinístico unidimensional e finalizamos descrevendo a aproximação de campo médio e o algoritmo computacional para simular o sistema e aproximar soluções numericamente.

3.1 Considerações Iniciais

A compreensão de alguns conceitos deste capítulo envolvem considerações gerais, mas já discutidas na revisão bibliográfica. Assim aqui podemos passar diretamente à descrição do modelo. Recomendamos ao leitor não familiarizado com a teoria de probabilidade e processos estocásticos consultar o capítulo 2, especialmente as seções 2.1, 2.2, 2.4, 2.4.2, 2.4.3 e 2.12. Alternativamente as referências [4–9, 67] podem ser relevantes, como curso introdutório.

3.2 Definição do Modelo

Nosso modelo é definido como um processo estocástico composto¹ cuja **métrica** $\mathring{\ell}$ – solução do problema – é completamente determinada pelo ambiente de busca Θ e pela **heurística** de busca Ξ . Neste trabalho, os ambientes de busca podem ser fundamentalmente descritos pela distribuição de espaçamento entre os **alvos**. Denotamos esta distância pela variável aleatória \mathring{w} que tem FDP $f_{\mathring{w}}(w)$. O processo de busca constitui-se em caminhadas aleatórias com duração de \mathring{N} passos entre dois eventos sucessivos de detecção de **alvos**. O tamanho do passo da caminhada é denotado pela **VA** \mathring{x} que tem FDP $f_{\mathring{x}}(x)$. Estas são as principais variáveis do modelo e cada uma delas será apropriadamente definida nas próximas seções.

3.2.1 Ambiente de Busca

Definição 3.2.1 (**ambiente de busca (AB)**). Variedade topológica β -dimensional que comporta uma distribuição arbitrária de **alvos**. As propriedades topológicas do ambiente bem como as propriedades que caracterizam os **alvos** são descritas pelo vetor de parâmetros abaixo

$$\Theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}. \quad (\text{Ambiente}) \quad (3.1)$$

No exemplo 3.1 ilustraremos um ambiente de busca unidimensional. No capítulo 4 definiremos ambientes multidimensionais, que chamaremos de ambientes *Weibull*. Todos os ambientes considerados neste trabalho podem ser interpretados como variantes *Weibull*. No início de cada capítulo definiremos detalhadamente a construção do ambiente a ser discutido. Na seção 2.12.2, da revisão bibliográfica, já discutimos um ambiente de busca.

3.2.2 Heurística

Definição 3.2.2 (**Heurística**). Estratégia de busca. Trata-se de um conjunto de diretrizes e regras dinâmicas que governam o comportamento do forrageador. A **heurística** é parametrizada de forma que fica completamente definida pelo vetor de parâmetros

$$\Xi \equiv \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}. \quad (\text{Heurística}) \quad (3.2)$$

Em favor da generalidade e robustez do modelo, impomos que a **heurística** de busca

¹Discutimos o processo estocástico composto na seção 2.4.3.

seja determinada pela estratégia de caminhada² e pela distância mínima de interação entre o **forrageador** e os **alvos**. Segue que o vetor de parâmetros, Ξ , será composto por r_v –raio de interação entre o **forrageador** e os **alvos**– e pelos parâmetros que definem $f_{\hat{x}}(x)$ –FDP do passo da caminhada aleatória. Como exemplo, considere uma caminhada aleatória onde o tamanho do passo do **forrageador** é fixado por uma densidade gaussiana, com média μ e desvio padrão σ . Neste caso a **heurística** terá o vetor de parâmetros, $\Xi \equiv \{r_v, \mu, \sigma\}$.

Nossas simulações assumem a FDP de *Pareto* truncada como distribuição do tamanho do passo da caminhada aleatória³. Portanto, o vetor de parâmetros da **heurística** será

$$\Xi \equiv \{r_v, \alpha, x_{min}, x_{max}\}. \quad (\text{Heurística de Pareto}) \quad (3.3)$$

Na exemplo 3.2, ilustraremos nosso modelo considerando um **PB** determinístico. Neste caso, a caminhada aleatória não é governada pela **heurística** de *Pareto* e sim pela **heurística** ideal. Esta **heurística** conduz à caminhadas determinísticas com eficiência máxima e tem grande apelo didático e valor ilustrativo, pois pode ser tratada analiticamente exemplificando o formalismo aqui desenvolvido. No capítulo 4 discutiremos um sistema real –empiricamente motivado pelo forrageamento de primatas– governado por uma **heurística** ideal.

Definição 3.2.3 (Caminhada Aleatória). O **forrageador** caminhará deslocando-se em passos de comprimento $\hat{x} : x \in \mathbb{R}_+$ e $\rightarrow x_{min} \leq x \leq x_{max}$, com FDP

$$f_{\hat{x}}(x) = \frac{\alpha}{a^{-\alpha} - b^{-\alpha}} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad (\text{FDP da Caminhada Aleatória}) \quad (3.4)$$

onde α é o parâmetro de cauda, x_{min} e x_{max} são os truncamentos à direita e à esquerda.

3.2.3 Nosso Modelo de Busca Aleatória

Definição 3.2.4 (Processo de Busca). Dados, o ambiente de busca Θ e a **heurística** Ξ , considere o espaço de probabilidade (\cdot, \mathcal{A}, P) . Seja $\hat{x} : x \in \mathbb{R}_+$ e $\rightarrow x_{min} \leq x \leq x_{max}$ uma **VA** contínua e seja $\{\hat{N}(t \geq 0) : t \in T, N \in \mathbb{N} \text{ e } \rightarrow 0 \leq N < \infty\}$ um processo estocástico. Definimos a **métrica** do nosso modelo como o *processo estocástico composto*,

²Introduzimos a caminhada aleatória, na definição 3.2.3. Ver a revisão completa, na seção 2.10

³Os parâmetros $\{\alpha, x_{min}, x_{max}\}$ definem a distribuição de *Pareto* truncada. Consultar a seção 2.7.7.

$\{\dot{\ell}(t \geq 0) : t \in T, \ell \in \mathbb{R} \text{ e } \rightarrow \ell_{min} \leq \ell < \ell_{max}\}$, como segue

$$\dot{\ell}(t; \Theta, \Xi) \equiv \sum_{j=1}^{\dot{N}(t, \Theta, \Xi)} \dot{x}_j(\Xi), \quad (\text{Métrica do PB}) \quad (3.5)$$

onde $\dot{\ell}$ corresponde a distância percorrida pelo **forrageador** entre dois eventos sucessivos de detecção de **alvos**. Denotamos a função característica e a **FDP** da **métrica** respectivamente por $\varphi_{\dot{\ell}}(s)$ e $f_{\dot{\ell}}(\ell)$. Neste trabalho a **VA** \dot{x} depende apenas da **heurística** e corresponde ao passo da caminhada aleatória da definição 3.2.3. A caminhada aleatória possui função característica $\varphi_{\dot{x}}(s)$ e **FDP**, $f_{\dot{x}}(x)$. O processo estocástico $\dot{N}(t)$, corresponde ao número de passos executados entre dois eventos de detecção, sua **FMP** é denotada por $f_{\dot{N}}(N)$ dependente da **heurística** e do ambiente.

3.2.4 Informações Requeridas pelo Modelo (“Inputs”)

Ao modelar um **PB** o ambiente, Θ , a **heurística**, Ξ , e a caminhada aleatória, \dot{x} , são empiricamente motivados e fixados de forma relativamente simples. Por outro lado, \dot{N} , a quantidade de passos entre dois eventos de detecção, não pode ser expressa analiticamente de forma simples. Podemos resumir os elementos do modelo como segue

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} && (\text{Ambiente}) \\ \Xi &= \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} && (\text{Heurística}) \\ f_{\dot{x}}(x; \Xi) &= \text{Lei de Pareto Truncada} && (\text{FDP da Caminhada Aleatória}) \\ f_{\dot{N}}(N; \Theta, \Xi) &= \text{Indeterminada.} && (\text{FDP da Quantidade de Passos}) \end{aligned}$$

Observação 3.2.1: O resumo acima engloba uma gama considerável de processos de busca aleatória. Neste ponto chamamos a atenção para as **heurística** que produzem busca ideal. Estes processos determinísticos constituem uma classe particularmente tratável pelo nosso modelo. Nestes casos a caminhada aleatória é induzida ou determinada pela distribuição de **alvos**, conduzindo a $f_{\dot{x}}(x) = f_{\dot{w}}(w)$. A **FDP** da quantidade de passos é definida por $f_{\dot{N}}(N) = \delta_{N1}$. Definiremos a busca ideal na seção 4.1.

3.2.5 Informação Obtida com o Modelo (“Output”)

Nosso modelo fornece a **métrica** do processo de busca, equação (3.5), que é o objeto mais importante e informativo para a discussão das propriedades dinâmicas do sistema.

Uma vez conhecida a **métrica** definimos diversas grandezas relevantes como funções particulares da **métrica**. A eficiência energética, $\overset{\circ}{\eta}$, o balanço energético, $\overset{\circ}{E}$, o ganho energético líquido por **alvo** detectado, $\overset{\circ}{\mathfrak{E}}$, e a taxa ganho energético líquido por **alvo** detectado, $\overset{\circ}{\Omega}$, são alguns exemplos de funções derivadas da **métrica**. Discutiremos cada uma destas grandezas e a obtenção das suas densidades de probabilidade nas seções subsequentes.

Nosso objetivo imediato é obter, analiticamente, a densidade de probabilidade da **métrica**, $f_{\ell}^{\circ}(\ell)$. Faremos isto na próxima seção. Nas seções 3.7, 3.8 e 3.9 discutiremos soluções alternativas e métodos de aproximação.

3.3 Métrica do Processo de Busca, ℓ

3.3.1 Densidade de Probabilidade da Métrica

Em um processo estocástico composto a **FDP** da **métrica**, $f_{\ell}^{\circ}(\ell)$, é obtida pela função característica $\varphi_{\ell}^{\circ}(s)$ como segue

$$f_{\ell}^{\circ}(\ell) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \varphi_{\ell}^{\circ}(s) \right\}, \quad (3.6)$$

onde o operador \mathcal{F}^{-1} denota a transformada inversa de Fourier. Se o processo estocástico composto tem $\dot{N}(t)$ independente de \dot{x} , a função característica, $\varphi_{\ell}^{\circ}(s)$, pode ser expressa como esperança da N -ésima potência da função característica de \dot{x} , ou seja,

$$\varphi_{\ell}^{\circ}(s) = E_N \left([\varphi_{\dot{x}}(s)]^N \right). \quad (3.7)$$

Segue das equações (3.6) e (3.7) que $f_{\ell}^{\circ}(\ell) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_N \left([\varphi_{\dot{x}}(s)]^N \right) \right\} = E_N \left(\mathcal{F}^{-1} \left\{ [\varphi_{\dot{x}}(s)]^N \right\} \right)$, ou de forma explícita,

$$f_{\ell}^{\circ}(\ell) = \sum_{N=0}^{+\infty} f_{\dot{N}}(N) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\ell s} [\varphi_{\dot{x}}(s)]^N ds \quad (3.8)$$

pela definição de transformada inversa de Fourier,

$$f_{\ell}^{\circ}(\ell) = \sum_{N=1}^{+\infty} f_{\dot{N}}(N) \mathcal{F}^{-1} \left\{ [\varphi_{\dot{x}}(s)]^N \right\}.$$

Expandindo o somatório obtemos a FDP da métrica, na forma mais relevante aos nossos propósitos, como segue

$$f_{\mathring{\ell}}(\ell) = f_{\mathring{N}}(1) f_{\mathring{x}}(\ell) + f_{\mathring{N}}(2) \mathcal{F}^{-1} \{ \varphi_{\mathring{x}}(s)^2 \} + \dots + f_{\mathring{N}}(N) \mathcal{F}^{-1} \{ \varphi_{\mathring{x}}(s)^N \}, \quad (3.9)$$

onde identificamos $f_{\mathring{x}}(\ell) = \mathcal{F}^{-1} \{ \varphi_{\mathring{x}}(s) \}$ no primeiro termo do somatório.

Para determinarmos a equação acima, devemos conhecer a FMP $f_{\mathring{N}}(N)$ e a função característica $\varphi_{\mathring{x}}(s)$. Neste ponto, observamos que, para os nossos propósitos, arbitramos a forma funcional da FDP de \mathring{x} . Nossas simulações assumem a FDP de Pareto truncada como distribuição do tamanho do passo da caminhada aleatória. Portanto $f_{\mathring{x}}(x)$ está determinada pela equação (3.4). Sempre seremos capazes de obter sua função característica, $\varphi_{\mathring{x}}(s)$. Porém, ainda nos resta determinar $f_{\mathring{N}}(N)$ e isto é uma tarefa complexa. Como mostra a equação (3.5), \mathring{N} depende da heurística e do ambiente. Qualquer conclusão a respeito da forma funcional de $f_{\mathring{N}}(N)$ estará restrita ao ambiente e a heurística onde a investigação for realizada. Com estas observações em mente, fica claro que não será possível evoluir ou simplificar a equação (3.8) enquanto não especificarmos um ambiente, pois somente assim $f_{\mathring{N}}(N)$ poderá ser determinada. Não percamos de vista que é muito improvável obter uma forma funcional exata para $f_{\mathring{N}}(N)$ que seja válida para ambientes e heurística arbitrários. Na prática só podemos conhecer casos particulares da FMP de \mathring{N} por meio de simulações computacionais ou formas exatas para ambientes e heurística específicas.

3.3.2 Valor Esperado e Variância da Métrica

O valor esperado da métrica é a esperança do processo estocástico composto –ver a seção 2.4.3, equação (2.41)– e pode ser calculado sem a necessidade da FDP da métrica. Usando-se esperança condicional temos, $\langle \mathring{\ell} \rangle = \langle \langle \mathring{\ell} | \mathring{N} \rangle \rangle = \langle \mathring{N} \langle \mathring{x} \rangle \rangle$, portanto

$$\langle \mathring{\ell} \rangle = \langle \mathring{N} \rangle \langle \mathring{x} \rangle. \quad (3.10)$$

Este resultado tem importância central. Usaremos o valor esperado da métrica para obter aproximações de campo médio de todas as variáveis relevantes, faremos isto na seção 3.8. Dando sequência, calculamos a variância da métrica –consultar a seção 2.4.3, equação (2.42)– fazendo uso similar da lei da variância total, $\text{var}(\mathring{\ell}) = \langle \text{var}(\mathring{\ell} | \mathring{N}) \rangle + \text{var}(\langle \mathring{\ell} | \mathring{N} \rangle) = \langle \mathring{N} \text{var}(\mathring{x}) \rangle + \text{var}(\mathring{N} \langle \mathring{x} \rangle)$, portanto temos

$$\text{var}(\mathring{\ell}) = \text{var}(\mathring{x}) \langle \mathring{N} \rangle + \langle \mathring{x} \rangle^2 \text{var}(\mathring{N}). \quad (3.11)$$

Nesta seção obtivemos a densidade de probabilidade, esperança e variância da **métrica** do **PB**, expressas respectivamente pelas equações (3.8), (3.10) e (3.11). Estas são as propriedades estatísticas da **métrica** relevantes ao contexto deste trabalho. Nas seções seguintes introduziremos diversas grandezas de interesse, definidas como funções da **métrica**. Nosso próximo objetivo é a obtenção da **FDP** da eficiência energética, $f_{\dot{\eta}}(\eta)$.

Exemplo 3.1. Dado um ambiente $\Theta \equiv \{\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau\}$, ou seja, um ambiente unidimensional ($\beta = 1$) que encerra um contínuo de **alvos** adimensionais ($r = 0$) e indestrutíveis⁴ ($\tau \rightarrow 0$), espaçados pela distância típica $\lambda \geq \lambda_0$. Considere um **PB** determinístico, governado pela **heurística** ideal⁵, na qual o **forrageador** salta visitando **alvos** imediatamente vizinhos a cada salto, ($N = 1$). Neste caso, a **FDP** da caminhada aleatória, $f_{\dot{x}}(x)$, corresponde à distribuição de espaçamento entre os **alvos**, $f_{\dot{w}}(w)$. Em uma dimensão, a distância entre **alvos** primeiros vizinhos segue uma distribuição Poisson-Exponencial, $f_{\dot{w}}(w) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{w}{\lambda}\right)$, normalizada no intervalo $\lambda_0 \leq w \leq \infty$. Usando $f_{\dot{x}}(x) = f_{\dot{w}}(w)$, queremos determinar **(a)** a densidade da **métrica**, $f_{\dot{\ell}}(\ell)$ e **(b)** o valor esperado da **métrica**, $\langle \dot{\ell} \rangle$.

Solução: **(a)** A densidade da **métrica** segue do somatório (3.9), truncado em $N = 1$, ou

$$f_{\dot{\ell}}(\ell) = f_{\dot{N}}(1) f_{\dot{x}}(\ell).$$

Na busca ideal temos $N = 1$, portanto a massa de probabilidade apropriada é a delta de *Kronecker* $f_{\dot{N}}(N) = \delta_{N1}$. Verificamos imediatamente que $f_{\dot{N}}(1) = 1$. Segue do enunciado que $f_{\dot{x}}(x) = f_{\dot{w}}(x)$, então devemos usar $f_{\dot{x}}(\ell) = f_{\dot{w}}(\ell)$ na equação acima. A **FDP** da **métrica** torna-se

$$f_{\dot{\ell}}(\ell) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\ell}{\lambda}\right). \quad (\lambda_0 \leq \ell \leq \infty)$$

O gráfico da **FDP** da **métrica**, pode ser visto na figura 3.1 (a).

(b) Quando a **FDP** da **métrica** é desconhecida, podemos calcular o valor esperado da **métrica** via equação (3.10). Neste exemplo, conhecemos a densidade da **métrica** e

⁴Todo **alvo**, detectado e consumido, regenera-se, na mesma posição, após um tempo τ . Na aproximação de **alvos** indestrutíveis temos ($\tau \rightarrow 0$). Neste caso o **alvo** poderá ser revisitado indefinidamente.

⁵No capítulo 4 definiremos formalmente a busca ideal em ambientes β -dimensionais. Os resultados deste exemplo serão reobtidos como caso particular quando $\beta = 1$.

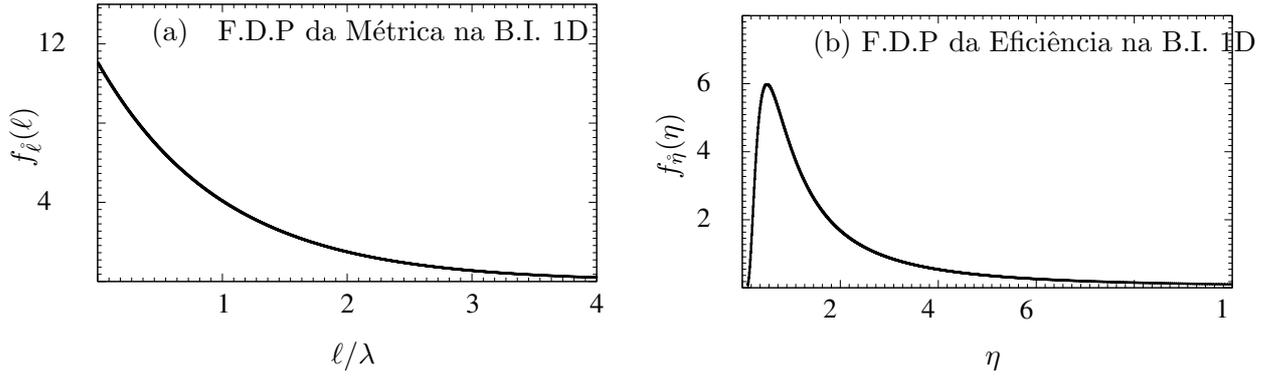


Figura 3.1: Processo de busca ideal unidimensional. **(a)** Densidade da métrica, $f_{\dot{\ell}}(\ell)$, discutida no exemplo 3.1. **(b)** Densidade da eficiência energética, $f_{\dot{\eta}}(\eta)$, discutida no exemplo 3.2.

podemos usar a definição usual do valor esperado,

$$\langle \dot{\ell} \rangle = \int_{\lambda_0}^{\infty} \ell f_{\dot{\ell}}(\ell) d\ell = \left[-(\lambda + \ell) \exp\left(\frac{\lambda_0 - \ell}{\lambda}\right) \right]_{\lambda_0}^{\infty}$$

$$\langle \dot{\ell} \rangle = \lambda + \lambda_0.$$

Se optássemos usar $f_{\dot{w}}(w)$ normalizada no intervalo $0 \leq w \leq \infty$, teríamos $f_{\dot{w}}(w) = \frac{e^{-\frac{w}{\lambda}}}{\lambda}$, $f_{\dot{\ell}}(\ell) = \frac{e^{-\frac{\ell}{\lambda}}}{\lambda}$ e $\langle \dot{\ell} \rangle = \lambda$. Esta escolha seria inconveniente pois conduziria a divergência da eficiência energética, em $\ell = 0$, como veremos na próxima seção.

3.4 Eficiência Energética do Processo de Busca, $\dot{\eta}$

Definição 3.4.1 (Eficiência do PB). A eficiência energética do PB, denotada por $\{\dot{\eta}(t \geq 0) : t \in T, \eta \in \mathbb{R} \text{ e } \rightarrow \eta_{min} \leq \eta < \eta_{max}\}$, com FDP a ser determinada, $f_{\dot{\eta}}(\eta)$, define-se pelo recíproco da métrica do PB da definição 3.2.4, como segue

$$\dot{\eta}(t, \Theta, \Xi) \equiv \frac{1}{\dot{\ell}(t, \Theta, \Xi)}, \quad (\text{Eficiência Energética do PB}) \quad (3.12)$$

Na seção 3.2.4 definimos a métrica $\{\dot{\ell} : \ell \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \rightarrow \ell_{min} \leq \ell \leq \ell_{max}\}$, com

$$\ell_{min} = \lambda_0 \quad \text{e} \quad \ell_{max} = \infty. \quad (3.13)$$

onde λ_0 corresponde ao menor espaçamento permitido entre dois alvos arbitrários. Esta condição se faz necessária para evitarmos divergências e singularidades em (3.12).

A equação (3.12) conecta os limites da métrica e da eficiência, impondo um escopo semelhante para a eficiência $\{\hat{\eta} : \eta \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \rightarrow \eta_{min} \leq \eta \leq \eta_{max}\}$, da seguinte forma

$$\eta_{min} = 1/\ell_{max} \quad \text{e} \quad \eta_{max} = 1/\ell_{min}. \quad (3.14)$$

3.4.1 Densidade de Probabilidade da Eficiência

Sejam $F_{\hat{\ell}}(\ell)$ e $f_{\hat{\ell}}(\ell)$ respectivamente a FD e a FDP de $\hat{\ell}$. Sejam, $F_{\hat{\eta}}(\eta)$ e $f_{\hat{\eta}}(\eta)$ respectivamente a FD e a FDP de $\hat{\eta}$. A FD de $\hat{\eta}$ segue da probabilidade de observarmos $\hat{\eta} > 1/\hat{\ell}$, portanto

$$F_{\hat{\eta}}(\eta) = P \left[\frac{1}{\hat{\ell}} < \hat{\eta} \right]$$

$$F_{\hat{\eta}}(\eta) = \int_{1/\eta}^{1/\eta_{min}} f_{\hat{\ell}}(\ell) d\ell = F_{\hat{\ell}}(1/\eta_{min}) - F_{\hat{\ell}}(1/\eta). \quad (3.15)$$

Observe que η assume valores partindo de η_{min} até η_{max} correspondendo ao intervalo de integração $[\ell_{min}, \ell_{max}]$ de $\hat{\ell}$.

A densidade de probabilidade de $\hat{\eta}$, determinada pela sua função de distribuição fica

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = \frac{dF_{\hat{\eta}}(\eta)}{d\eta}. \quad (3.16)$$

Levando a equação (3.15) na equação (3.16) e lembrando que $F_{\hat{\ell}}(1/\eta_{min}) = 1$, obtemos a expressão mais geral para a densidade.

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = - \frac{dF_{\hat{\ell}}(1/\eta)}{d\eta}. \quad (3.17)$$

Para avaliarmos a equação acima é mais conveniente usarmos, a variável ℓ , ou seja, $F_{\hat{\ell}}(1/\eta) = F_{\hat{\ell}}(\ell)$. Em seguida aplicamos a regra da cadeia

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = - \frac{dF_{\hat{\ell}}(\ell)}{d\ell} \frac{d\ell}{d\eta}$$

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = - f_{\hat{\ell}}(1/\eta) \frac{d\ell}{d\eta}, \quad (3.18)$$

aqui reconhecemos, $\frac{dF_{\hat{\ell}}(\ell)}{d\ell} = f_{\hat{\ell}}(\ell) = f_{\hat{\ell}}(1/\eta)$. Resta avaliar $\frac{d\ell}{d\eta}$, como segue $\frac{d\ell}{d\eta} = \frac{d1/\eta}{d\eta} = - \frac{1}{\hat{\eta}^2}$. Levando o resultado na equação (3.18), obtemos a densidade de probabi-

lidade procurada

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = \frac{1}{\eta^2} f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad (\text{FDP da Eficiência Energética}) \quad (3.19)$$

com $f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right)$ dado em (3.8). A equação acima é a *FDP recíproca*, uma densidade espontaneamente normalizada que pode ser obtida imediatamente da FDP da *métrica*. Este resultado encontra-se detalhadamente derivado na seção A.1 do apêndice A.

3.4.2 Valor Esperado da Eficiência Energética

O valor esperado da eficiência energética é

$$\langle \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_{\hat{\eta}}(\eta) d\eta,$$

lembrando que η é estritamente positivo e definido no intervalo (η_{min}, η_{max}) , dado em 3.14, obtemos

$$\langle \eta \rangle = \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \frac{1}{\eta} f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta, \quad (3.20)$$

com $f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right)$ dado em (3.8).

Exemplo 3.2. Aqui queremos usar a FDP da *métrica* obtida no exemplo 3.1 para calcular: **(a)** a densidade da eficiência, $f_{\hat{\eta}}(\eta)$ e **(b)** o valor esperado da eficiência, $\langle \hat{\eta} \rangle$.

Solução: **(a)** A densidade da eficiência segue da equação (3.19) com $f_{\hat{\ell}}(\ell) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\ell}{\lambda}\right)$.

$$f_{\hat{\eta}}(\eta) = \frac{1}{\eta^2} f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{\lambda \eta^2} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{1}{\lambda \eta}\right).$$

O gráfico da densidade da eficiência energética, pode ser visto na figura 3.1 (b).

(b) Usando a densidade da *métrica* na equação (3.20) obtemos o valor esperado,

$$\langle \eta \rangle = \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \frac{1}{\eta} f_{\hat{\ell}}\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta$$

portanto

$$\langle \hat{\eta} \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_{1/\lambda_0}^1 \frac{1}{\eta} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{1}{\lambda \eta}\right) d\eta = \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}} Ei\left(-\frac{1}{\lambda \eta}\right)}{\lambda} \right]_{1/\lambda_0}^1$$

onde $Ei(x)$ denota a *função Exponencial Integral*, $Ei(x) = -\int_x^\infty t^{-1}e^{-t}dt$. Aplicando os limites de integração obtemos o valor esperado da eficiência energética.

$$\langle \mathring{\eta} \rangle = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \Gamma\left(0, \frac{\lambda_0}{\lambda}\right),$$

onde Γ denota a função *Gama Incompleta*, $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$. Repare que $\langle \mathring{\eta} \rangle$ escala inversamente com o espaçamento típico entre **alvos**, λ . Isto é consistente com a definição $\mathring{\eta} = 1/\mathring{\ell}$. Na busca ideal a **métrica** é fixada pelo espaçamento entre **alvos**, temos $\mathring{\ell} \equiv \mathring{w}$. Lembre-se que, no exemplo 3.1, obtivemos $\langle \mathring{\ell} \rangle = \lambda + \lambda_0$. Este resultado, juntamente com resultado do item (b) nos impele a questionar se uma aproximação do tipo, $\langle \mathring{\eta} \rangle \approx 1/\langle \mathring{\ell} \rangle$, seria aceitável. Trataremos esta questão na seção 3.8 e veremos que esta aproximação –aproximação de campo médio– pode oferecer ótimos resultados sob certas condições.

3.5 Balanço Energético do Processo de Busca, \mathring{E}

Vamos utilizar o balanço energético proposto por *E. P. Raposo* e colaboradores em 2003 [6]. Este conceito encontra-se detalhadamente descrito na seção 2.13.3. Desta discussão seguem imediatamente as definições do balanço energético, \mathring{E} , ganho energético líquido por **alvo** detectado, $\mathring{\mathfrak{E}}$ e taxa de líquida de ganho energético por **alvo** detectado, $\mathring{\Omega}$, respectivamente definidos como segue:

Definição 3.5.1 (Balanço energético). A reserva energética $\mathring{E} > 0$ de um **forageador** é definida como

$$\mathring{E} \equiv E_0 + \Delta\mathring{E}, \quad (\text{Balanço Energético do PB}) \quad (3.21)$$

onde E_0 é a reserva energética inicial do **forageador** e $\Delta\mathring{E} = \nu\mathring{\mathfrak{E}}$ é a variação da reserva energética após a detecção de ν **alvos**.

Definição 3.5.2 (Energia Líquida). O custo ou ganho energético envolvido na detecção de cada **alvo**, denotado por $\mathring{\mathfrak{E}}$, é a energia líquida resultante da busca e consumo de um **alvo** detectado. $\mathring{\mathfrak{E}}$ é definida como segue

$$\mathring{\mathfrak{E}} \equiv \epsilon - f(\mathring{\ell}), \quad (\text{Ganho Líquido por Alvo}) \quad (3.22)$$

onde introduzimos ϵ , a energia bruta ganha por **alvo** detectado –consumido– e $f(\mathring{\ell})$, uma função de desgaste ou custo, arbitrária, associada à distância média percorrida entre dois

alvos sucessivos.

Definição 3.5.3 (Ganho por Unidade de Deslocamento). O custo ou ganho energético por alvo detectado e por unidade de distância percorrida é definido como

$$\dot{\Omega} \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\ell}} = [\epsilon - f(\dot{\ell})] \dot{\eta}, \quad (\text{Taxa Líquida de Ganho por Alvo}) \quad (3.23)$$

3.6 Balanço Energético na Aproximação de Desgaste Linear (ADL)

Em particular podemos assumir que a função de desgaste, $f(\dot{\ell})$ é proporcional a distância percorrida, $\langle \dot{\ell} \rangle$, da seguinte forma,

$$f(\dot{\ell}) = \Omega_0 \dot{\ell}, \quad (\text{Desgaste Linear}) \quad (3.24)$$

onde Ω_0 é a energia mínima consumida pelo forrageador por unidade de deslocamento. Trata-se de um parâmetro metabólico que depende exclusivamente do forrageador e sem qualquer dependência com relação ao ambiente. O ambiente fornece energia para o forrageador a uma taxa $\dot{\Omega}_w$, onde

$$\dot{\Omega}_w \equiv \frac{\epsilon}{\dot{w}}, \quad (\text{Taxa de Ganho Ambiental}) \quad (3.25)$$

limitado ao intervalo $0 < \Omega_w < \Omega_w^{max}$. Aqui Ω_w^{max} é determinado pelo espaçamento mínimo entre alvos, λ_0 . Usando a notação de eventos críticos denotaremos a taxa máxima por duas estrelas Ω^{**} , assim

$$\Omega^{**} \equiv \Omega_w^{max} = \frac{\epsilon}{\lambda_0}. \quad (\text{Taxa Crítica de Ganho Ambiental}). \quad (3.26)$$

Valores típicos de $\dot{\Omega}_w$ podem ser obtidos considerando-se o valor esperado de $\dot{\Omega}_w$, que por sua vez, escala aproximadamente⁶ com $\frac{\epsilon}{\langle \dot{w} \rangle}$. Portanto

$$\Omega^* \equiv \langle \dot{\Omega}_w \rangle \approx \frac{\epsilon}{\langle \dot{w} \rangle}. \quad (\text{Taxa Média de Ganho Ambiental}) \quad (3.27)$$

⁶A definição precisa seria $\Omega^* \equiv \langle \dot{\Omega}_w \rangle = \left\langle \frac{\epsilon}{\dot{w}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega_w} f_{\dot{w}} \left(\frac{1}{\Omega_w} \right) d\Omega_w$.

Ω^* e Ω^{**} são valores críticos que limitam transições de fase no balanço energético e na probabilidade de sobrevivência. As estrelas são usualmente utilizadas para denotar criticalidade, por exemplo estabilidade, equilíbrio ou transições de fase. O vínculo natural impõe que o **forrageador** consuma energia a uma taxa menor que a taxa média Ω^* oferecida pelo ambiente, portanto,

$$\Omega_0 \geq \Omega^{**}, \quad (\text{Garantia de Morte}) \quad (3.28)$$

$$\Omega_0 < \Omega^*. \quad (\text{Condição de Sobrevivência}) \quad (3.29)$$

Na **aproximação de desgaste linear (ADL)**, 3.24, a condição acima é uma garantia mínima de sobrevivência. No caso de violações da condição de sobrevivência, interpretamos que o **forrageador** não terá –em média– energia para alcançar os **alvos** vizinhos sem esgotar a energia ϵ ganha com o consumo do **alvo** previamente visitado. Neste caso, há grande taxa de mortalidade pois o ambiente é incapaz de sustentar, a longo prazo, um **forrageador** com taxa metabólica $\Omega_0 > \Omega^*$. A situação é ainda pior quando $\Omega_0 > \Omega^{**}$, a morte inevitável acontecerá depois de alguns passos, após esgotar sua reserva inicial de energia.

O balanço energético, \dot{E} , e a taxa de líquida de ganho energético por **alvo** detectado, $\dot{\Omega}$, ficam respectivamente definidos, na aproximação de desgaste linear, como segue

$$\dot{E} = E_0 + \nu \epsilon - \nu \Omega_0 \dot{\ell}, \quad (\text{Balanço Energético na ADL}) \quad (3.30)$$

$$\dot{\Omega} = -\Omega_0 + \epsilon \dot{\eta}. \quad (\text{Taxa Líquida de Ganho na ADL}) \quad (3.31)$$

O balanço energético está definido nos limites $E_{Min} \leq \dot{E} \leq E_{Max}$, onde

$$E_{Min} = 0 \quad \text{e} \quad E_{Max} = E_0 + \nu \epsilon - \nu \Omega_0 \lambda_0. \quad (3.32)$$

Similarmente a taxa líquida de ganho energético está limitada ao intervalo $\Omega_{Min} \leq \dot{\Omega} \leq \Omega_{Max}$, onde

$$\Omega_{Min} = -\Omega_0 \quad \text{e} \quad \Omega_{Max} = -\Omega_0 + \Omega^{**}. \quad (3.33)$$

Podemos ver que \dot{E} é estritamente positivo –condição de vida– enquanto $\dot{\Omega}$ pode assumir valores negativos. O tamanho do intervalo de $\dot{\Omega}$ é, por definição, $\Omega_{Max} - \Omega_{Min} = \Omega^{**}$. Veremos que a probabilidade associada a região negativa de $\dot{\Omega}$ corresponde a probabilidade de morte enquanto a região positiva está associada à probabilidade de sobrevivência.

3.6.1 Densidades de Probabilidade na ADL

Observe que nas equações (3.30) e (3.31) E_0 , ν , ϵ e Ω_0 são constantes. Portanto \mathring{E} é uma transformação linear de $\mathring{\ell}$. Similarmente, $\mathring{\Omega}$ é uma transformação linear de $\mathring{\eta}$. Logo a FDP de \mathring{E} é determinada pela FDP de $\mathring{\ell}$ e a FDP de $\mathring{\Omega}$ pela FDP de $\mathring{\eta}$. Precisamos apenas levar as equações

$$\mathring{\ell} = -\frac{\mathring{E} - E_0 - \nu \epsilon}{\nu \Omega_0}, \quad (3.34)$$

$$\mathring{\eta} = \frac{\mathring{\Omega} + \Omega_0}{\epsilon}, \quad (3.35)$$

respectivamente nas equações (3.9) e (3.19). O resultado são as FDP, não normalizadas, abaixo

$$f_{\mathring{E}}(E) = \frac{1}{I_E} f_{\mathring{\ell}}\left(\frac{E_0 + \nu \epsilon - E}{\nu \Omega_0}\right), \quad (3.36)$$

$$f_{\mathring{\Omega}}(\Omega) = \frac{1}{I_\Omega} \left(\frac{\epsilon}{\Omega + \Omega_0}\right)^2 f_{\mathring{\eta}}\left(\frac{\epsilon}{\Omega + \Omega_0}\right). \quad (3.37)$$

Note que ambas as densidades são determinadas pela FDP da métrica. As constantes I_E e I_Ω correspondem à integração sobre todo o intervalo de definição das variáveis, E e Ω . Como estas variáveis são definidas pelas transformações lineares acima, podemos adiantar que I_E escala com $\nu \Omega_0$ enquanto I_Ω escala com ϵ .

3.6.2 Valores Esperados na ADL

Conhecidas as densidades de probabilidade podemos calcular o valor esperado do balanço energético, $\langle \mathring{E} \rangle$, ganho energético líquido por alvo detectado, $\langle \mathring{\mathcal{E}} \rangle$, e taxa ganho energético líquido por alvo detectado, $\langle \mathring{\Omega} \rangle$. Essas grandezas ficam então respectivamente definidas, na aproximação de desgaste linear, como segue

$$\langle \mathring{E} \rangle = E_0 + \nu \langle \mathring{\mathcal{E}} \rangle, \quad (\text{Esperança do Balanço Energético}) \quad (3.38)$$

$$\langle \mathring{\mathcal{E}} \rangle = \epsilon - \Omega_0 \langle \mathring{\ell} \rangle, \quad (\text{Esperança do Ganho Líquido}) \quad (3.39)$$

$$\langle \mathring{\Omega} \rangle = -\Omega_0 + \epsilon \langle \mathring{\eta} \rangle, \quad (\text{Esperança da Taxa de Ganho}) \quad (3.40)$$

Exemplo 3.3. Nas condições do exemplo 3.1, seja ϵ a energia bruta obtida por alvo consumido e $\Omega^* = \epsilon / \langle \mathring{\ell} \rangle$ a taxa média de energia fornecida pelo ambiente. Considere três

forrageadores com as respectivas taxas metabólicas $\Omega_0 = \{0.5\Omega^*, 1.0\Omega^*, 1.5\Omega^*\}$. Assuma que os **forrageadores** são capazes de absorver e estocar energia, proveniente do consumo dos **alvos**, até o limite $E_{sat} = 50\epsilon$. Assumimos ainda que os **forrageadores** iniciam a busca com a energia $E_0 = 20\epsilon$. **(a)** Queremos deduzir a expressão geral para $\langle \dot{E}(\nu) \rangle$, o valor esperado da energia do **forrageador** em função de ν , Ω_0 e Ω^* . Também mostrar $\langle \dot{E}(\nu) \rangle$ para os três **forrageadores** e ilustrar graficamente os resultados. **(b)** Deduzir a expressão para o número de **alvos** visitados pelo **forrageador** antes de esgotar sua reserva de energia ($E = 0$). **(c)** Deduzir a expressão para o número de **alvos** visitados pelo **forrageador** antes de atingir a saturação energética e esgotar sua reserva de energia ($E = E_{sat}$).

Solução: **(a)** Levando o ganho líquido, equação (3.39), no balanço energético (3.38) podemos colocar $\langle \dot{\ell} \rangle$ em evidência e utilizar a condição de sobrevivência (3.27) para eliminar ϵ . Obtemos

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0 + \nu \langle \dot{\ell} \rangle (\Omega^* - \Omega_0). \quad (3.41)$$

Vemos pela equação acima que a energia do **forrageador** aumentará ao longo da caminhada somente quando $\Omega_0 < \Omega^*$. Temos o gráfico da equação (3.41) para os três **forrageadores** na figura 3.2 (a).

Para o primeiro **forrageador**, ($\Omega_0 = 0.5\Omega^*$), logo com $\Omega_0 < \Omega^*$, o mesmo sobreviverá. Na busca ideal podemos usar $\Omega^* = \epsilon / \langle \dot{w} \rangle = \epsilon / \langle \dot{\ell} \rangle$, pois a equação (4.4) no teorema 4.1.1 garante que os dois valores esperados são idênticos. Assim obtemos

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0 + \frac{\nu \epsilon}{2}.$$

Para o segundo **forrageador**, ($\Omega_0 = \Omega^*$), temos

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0.$$

Vemos que o valor esperado da reserva energética do **forrageador** permanece inalterado. Repare que se a energia inicial E_0 for nula o **forrageador** violará a condição de sobrevivência. No exemplo 3.4 calcularemos a probabilidade de sobrevivência e a probabilidade residual de morte para este **forrageador**.

Para o terceiro **forrageador**, ($\Omega_0 = 1.5\Omega^*$), temos

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0 - \frac{\nu \epsilon}{2}$$

O valor esperado da reserva energética do **forrageador** decresce com o número de passos ν . Este **forrageador** morrerá após ν_{Morte} passos. Calcularemos ν_{Morte} a seguir.

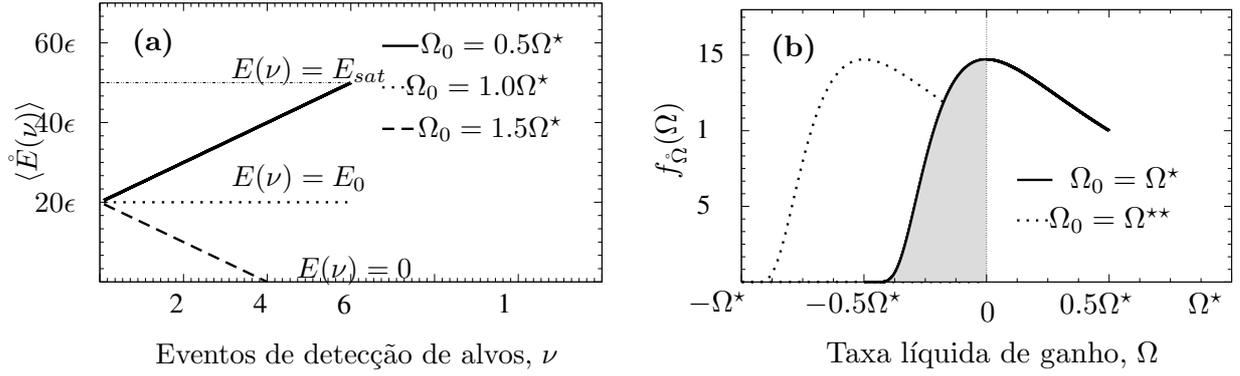


Figura 3.2: Processo de busca de três forrageadores com as respectivas taxas metabólicas $\Omega_0 = \{0.5\Omega^*, 1.0\Omega^*, 1.5\Omega^*\}$. (a) Valor esperado do balanço energético, $\langle \dot{E}(\nu) \rangle$, discutidos no exemplo 3.3. (b) Densidade da taxa de ganho líquido, $f_{\dot{\Omega}}(\Omega)$, discutida no exemplo 3.4. A área hachurada cinza corresponde à probabilidade residual de morte, P_{RM} , do forrageador.

(b) O número de **alvos** visitados pelo **forrageador** antes de esgotar sua reserva de energia é obtido pela raiz da equação $\langle \dot{E}(\nu) \rangle = 0$. Resolvendo para ν temos

$$\nu_{Morte} = - \frac{E_0}{\langle \dot{\ell} \rangle (\Omega^* - \Omega_0)}. \quad (3.42)$$

(c) O número de **alvos** o visitados pelo **forrageador** antes de esgotar sua reserva de energia é obtido pela raiz da equação $\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_{sat}$. Resolvendo para ν temos

$$\nu_{sat} = \frac{E_{sat} - E_0}{\langle \dot{\ell} \rangle (\Omega^* - \Omega_0)}. \quad (3.43)$$

Substituindo $\Omega_0 = \{0.5\Omega^*, 1.0\Omega^*, 1.5\Omega^*\}$ e usando $\Omega^* = \epsilon / \langle \dot{\ell} \rangle$ para eliminar $\langle \dot{\ell} \rangle$, as equações acima podem ser avaliadas para cada forrageador. O **forrageador** ($\Omega_0 = 0.5\Omega^*$) executará 60 passos antes de atingir seu limite de saturação energética, enquanto o **forrageador** ($\Omega_0 = 1.5\Omega^*$) morrerá após visitar 40 **alvos**. Para o **forrageador** ($\Omega_0 = \Omega^*$) o número de eventos de detecção pode ser arbitrariamente grande. Os resultados para os três **forrageadores** estão resumidos na figura 3.2 (a).

3.6.3 Probabilidade de Sobrevivência e Morte na ADL

A probabilidade de morte pode ser entendida como a probabilidade do **forrageador** defrontar-se com um evento que impossibilite sua subsequente evolução, definido como segue.

Definição 3.6.1 (Evento Mortal). Um evento mortal se verifica quando o **forrageador**

visita um [alvo](#) cujo vizinho mais próximo encontra-se a uma distância maior do que o [forrageador](#) poderia cobrir sem esgotar sua reserva energética.

Integrando a densidade de probabilidade da taxa líquida de ganho energético, $f_{\hat{\Omega}}(\Omega)$, podemos estimar a probabilidade de sobrevivência e morte do forrageador. A integração no intervalo $\Omega > 0$ fornece a probabilidade de sobrevivência enquanto a integração sobre o intervalo $\Omega \leq 0$ fornece a probabilidade de morte.

Probabilidade de Morte, P_M

Definição 3.6.2 (Probabilidade de Morte). A área associada ao intervalo negativo de Ω corresponde à probabilidade de ocorrência de um evento mortal, ou seja, probabilidade de morte. De (3.33) vemos que este intervalo começa em Ω_0 e termina no menor valor entre zero e Ω_{Max} , isto é, $\text{Min}(0, \Omega_{Max})$. Podemos definir a probabilidade de morte como segue

$$P_M \equiv \int_{\Omega_{Min}}^{\text{Min}(0, \Omega_{Max})} f_{\hat{\Omega}}(\Omega) d\Omega \equiv F_{\hat{\Omega}}(\text{Min}(0, \Omega_{Max})), \quad (3.44)$$

com Ω_{Min} e Ω_{Max} dados em (3.33). Usamos o teorema fundamental do cálculo, avaliando a [FD](#) $F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ nos limites de integração. Note que $F_{\hat{\Omega}}(\Omega_{Min}) = 0$, pois Ω não é definido em valores menores que Ω_{Min} .

Probabilidade de Sobrevivência, P_S

O caráter booleano –vida ou morte– do balanço energético sugere que devemos definir a probabilidade de sobrevivência através da probabilidade de morte e da condição de conservação da probabilidade total, ou seja $P_S = 1 - P_M$. Não há problemas em proceder desta forma, mas podemos calcular a probabilidade de sobrevivência de forma independente, dispensando a necessidade de calcular a probabilidade de morte.

Definição 3.6.3 (Probabilidade de Sobrevivência). A área associada ao intervalo positivo de Ω corresponde a probabilidade de evitar um evento mortal, ou seja, a probabilidade de sobrevivência. De (3.33) vemos que este intervalo começa em zero e termina no maior valor entre zero e Ω_{Max} , isto é, $\text{Max}(0, \Omega_{Max})$. Podemos definir a probabilidade de sobrevivência como segue

$$P_S \equiv \int_0^{\text{Max}(0, \Omega_{Max})} f_{\hat{\Omega}}(\Omega) d\Omega, \quad (\Omega_0 < \Omega^{**}) \quad (3.45)$$

ou usando a **FD** $F_{\dot{\Omega}}(\Omega)$

$$P_S \equiv F_{\dot{\Omega}}(\text{Max}(0, \dot{\Omega}R_{Max})) - F_{\dot{\Omega}}(0) = 1 - P_M \quad (3.46)$$

com Ω_{Max} dado em (3.33). Aqui usamos $F_{\dot{\Omega}}(\text{Max}(0, \Omega_{Max})) = 1$, pois corresponde a integração sobre todo o intervalo. Além disso a probabilidade de sobrevivência só faz sentido quando temos $\Omega_{Max} > 0$, neste caso identificamos $F_{\dot{\Omega}}(\text{Min}(0, \Omega_{Max})) = F_{\dot{\Omega}}(0)$ como a probabilidade de morte obtida em (3.44).

Probabilidade Residual de Morte, P_{RM}

Um caso particular da probabilidade de Morte ocorre quando Ω assume valores positivos, isto é, a probabilidade de sobrevivência não é nula. Mesmo quando a probabilidade de sobrevivência tende a unidade teremos necessariamente um probabilidade de morte associada ao intervalo $-\Omega_0 < \Omega < 0$. Chamamos a probabilidade associada a este intervalo de probabilidade residual de morte, definida abaixo

Definição 3.6.4 (Probabilidade Residual de Morte). É a probabilidade mínima de morte, $\text{Min}(P_M)$. Corresponde a área associada ao intervalo $-\Omega_0 \leq \Omega < 0$

$$P_{RM} \equiv \int_{\Omega_{Min}}^0 f_{\dot{\Omega}}(\Omega)d\Omega = F_{\dot{\Omega}}(0) = \text{Min}(P_M), \quad (\Omega_0 < \Omega^{**}) \quad (3.47)$$

Com $\Omega_{Min} = -\Omega_0 < 0$, temos $P_{RM} > 0 \forall \Omega_0$. Concluimos que todo **forrageador** estará sujeito a uma probabilidade mínima de morte, mesmo que seja capaz de realizar buscas consumindo quantidades arbitrariamente baixas de energia.

Exemplo 3.4. Nas condições do exemplo 3.1, seja ϵ a energia bruta obtida por **alvo** consumido e $\Omega^* = \epsilon/\langle \dot{\ell} \rangle$ a taxa média de energia fornecida pelo ambiente. Consideremos **forrageadores** com as respectivas taxas metabólicas $\Omega_0 = \{\Omega^{**}, \Omega^*\}$. Para ambos os **forrageadores** queremos obter: **(a)** a densidade da taxa de ganho líquido, $f_{\dot{\Omega}}(\Omega)$; **(b)** O intervalo de definição de $\dot{\Omega}$. **(c)** O intervalo de Ω associado às probabilidades de morte e sobrevivência. **(d)** A probabilidade de morte e de sobrevivência.

Solução: **(a)** A densidade da taxa de ganho líquido, $f_{\dot{\Omega}}(\Omega)$, segue de (3.35) multiplicada pelo fator $1/\epsilon$, que fornece a normalização adequada no intervalo $\Omega_{min} \leq \Omega \leq \Omega_{max}$

$$f_{\dot{\Omega}}(\Omega) = \frac{\epsilon}{\lambda(\Omega + \Omega_0)^2} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\epsilon}{\lambda(\Omega + \Omega_0)}\right).$$

(b) O intervalo de definição de Ω segue de (3.33). Para o primeiro, **forrageador** obtemos $\{\overset{\circ}{\Omega} : \Omega \in [-\Omega^{**}, 0]\}$ pois

$$\Omega_{Min} = -\Omega^{**} \quad \text{e} \quad \Omega_{Max} = 0.$$

Para o segundo **forrageador**, temos $\{\overset{\circ}{\Omega} : \Omega \in [-\Omega^*, -\Omega^* + \Omega^{**}]\}$ pois

$$\Omega_{Min} = -\Omega^* \quad \text{e} \quad \Omega_{Max} = -\Omega^* + \Omega^{**}.$$

(c) Para o primeiro **forrageador** Ω é estritamente negativo, portanto todo o intervalo está associado à probabilidade de morte.

Quanto ao **forrageador** com taxa metabólica Ω^* , o intervalo associado à probabilidade de morte é $\Omega^* \leq \Omega \leq 0$ e o intervalo associado à probabilidade de sobrevivência é $0 < \Omega \leq -\Omega^* + \Omega^{**}$. Note que $\Omega^{**} > \Omega^*$, portanto trata-se de um intervalo positivo.

(d) Não é preciso efetuar qualquer cálculo para obter a probabilidade de morte do **forrageador** com taxa metabólica crítica, Ω^{**} . Como vimos no item anterior, Ω é estritamente negativo para este forrageador, portanto a probabilidade de morte é $P_M = 1$. Obviamente a probabilidade de sobrevivência será $P_S = 1 - P_M = 0$. Veja o gráfico, na figura 3.2 (b). A curva pontilhada corresponde à densidade $f_{\overset{\circ}{\Omega}}(\Omega)$ para o **forrageador** com taxa metabólica crítica, Ω^{**} . Observe que a função está restrita ao eixo negativo de Ω .

A probabilidade de morte, P_M , do **forrageador** com taxa metabólica Ω^* é a probabilidade residual de morte, P_{RM}

$$P_M = P_{RM} = \int_{-\Omega^*}^0 f_{\overset{\circ}{\Omega}}(\Omega) d\Omega = F_{\overset{\circ}{\Omega}}(0),$$

com $f_{\overset{\circ}{\Omega}}(\Omega)$ obtido no item (a) a integração fornece a FD, $F_{\overset{\circ}{\Omega}}(\Omega) = \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\epsilon}{\lambda(\Omega + \Omega_0)}\right)$, assim

$$F_{\overset{\circ}{\Omega}}(0) = \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{\epsilon}{\lambda\Omega^*}\right) = \frac{1}{e} = 0,367879.$$

Usamos $\Omega^* = \frac{\epsilon}{\langle \dot{w} \rangle} = \frac{\epsilon}{\langle \dot{\ell} \rangle} = \frac{\epsilon}{\lambda + \lambda_0}$, pois assumimos⁷ $f_{\dot{\ell}}(\ell) = f_{\dot{w}}(w)$, logo devermos ter $\langle \dot{w} \rangle = \langle \dot{\ell} \rangle$. Calculamos $\langle \dot{\ell} \rangle$ no exemplo 3.1. Portanto a probabilidade de morte é 36,8%.

⁷Definimos o processo de busca ideal, próximo capítulo. O teorema 4.1.1 assegura $\langle \dot{w} \rangle = \langle \dot{\ell} \rangle$.

A probabilidade de sobrevivência, P_S , do **forrageador** com taxa metabólica Ω^* é

$$P_S = \int_0^{-\Omega^* + \Omega^{**}} f_{\dot{\Omega}}(\Omega) d\Omega = F_{\dot{\Omega}}(-\Omega^* + \Omega^{**}) - F_{\dot{\Omega}}(0)$$

$$P_S = 1 - F_{\dot{\Omega}}(0) = 1 - 0,367879 = 0,632121.$$

Usamos $F_{\dot{\Omega}}(-\Omega^* + \Omega^{**}) = 1$ pois corresponde a integração sobre todo o intervalo. Anteriormente calculamos $F_{\dot{\Omega}}(0)$. Portanto a probabilidade de sobrevivência é 63,2%.

3.7 Soluções Alternativas e Métodos de Aproximação

Nosso modelo analítico permite reproduzir uma grande variedade de sistemas com alvos não-destrutíveis. No entanto, para obtermos a densidade de **métrica** precisamos conhecer a densidade de \dot{N} e em seguida calcular a transformada inversa de Fourier. Na maioria dos casos isto é uma tarefa complexa e a transformada inversa nem sempre pode ser obtida em termos de funções elementares. Nestes casos podemos considerar as soluções alternativas abaixo:

- **Aproximação de campo médio (ACM):** corresponde a substituir a **VA** pelo seu valor esperado. Faremos isto na seção 3.8;
- **Aproximação via simulação computacional (ASC):** implica em construir um ambiente computacional representando todos os elementos do sistema. Simulações computacionais permitem estimar valores esperados e **FDP** das grandezas de interesse por meio de médias e de histogramas. Mostraremos como fazê-lo na seção 3.9;
- **Aproximação semi-analítica:** é a utilização de resultados experimentais, computacionais ou campo médio para obter alguma informação faltante no modelo analítico. Por exemplo, podemos obter a **FDP** da **métrica** experimentalmente ou via simulações computacionais e em seguida utilizá-la no modelo analítico. Faremos uso deste expediente no capítulo 5.

3.8 Aproximações de Campo Médio

3.8.1 Eficiência, η^{ACM}

Podemos ver na equação (3.9) que a FDP exata da métrica e da eficiência energética dependem da FDP de N , que é desconhecido, exceto para alguns casos particulares. Uma alternativa é usar a aproximação de campo médio para estimar a eficiência energética, como segue

$$\langle \dot{\eta} \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{\dot{\ell}} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle \dot{\ell} \rangle} \equiv \eta^{ACM},$$

a equação (3.10) fornece o valor esperado da métrica de um processo composto, $\langle \dot{\ell} \rangle = \langle \dot{N} \rangle \langle \dot{x} \rangle$, portanto

$$\eta^{ACM} = \frac{1}{\langle \dot{\ell} \rangle} = \frac{1}{\langle \dot{N} \rangle \langle \dot{x} \rangle}. \quad (3.48)$$

Esta é a aproximação de campo médio. Podemos ver que sua expressão corresponde exatamente ao resultado obtido por *G. M. Viswanathan* e colaboradores, como mostra a equação (2.120).

3.8.2 Balanço Energético e Taxa de Ganho, Ω^{ACM}

A aproximação de campo médio para o balanço energético segue de (3.38) e coincide com o resultado exato, portanto não pode ser encarada com uma aproximação. A taxa líquida de ganho segue imediatamente de (3.40) com $\langle \dot{\eta} \rangle = \eta^{ACM}$, ou seja

$$\Omega^{ACM} = -\Omega_0 + \epsilon \eta^{ACM}, \quad (3.49)$$

3.9 Aproximação via Simulação Computacional (ASC)

Como vimos, obter soluções exatas para ambientes e heurística arbitrárias pode ser uma tarefa difícil. Alternativamente podemos obter aproximações via simulações computacionais. A principal vantagem de fazê-lo é que podemos tratar, virtualmente, qualquer ambiente ou heurística.

3.9.1 Ambiente Computacional

Simulações implicam em armazenar, na memória do sistema, as representações do ambiente de busca. Esta particularidade logística introduz limitações específicas quanto a quantidade de **alvos** representados e o diâmetro do ambiente.

Definição 3.9.1 (Restrições do Ambiente Computacional). O ambiente computacional, somente será representável quando as condições abaixo forem satisfeitas:

1. Diâmetro finito, M ;
2. Quantidade finita de **alvos**, N_a .

As condições da definição 3.9.1 tem implicações imediatas sobre algumas grandezas, como o espaçamento típico entre **alvos**⁸ e o truncamento do passo da caminhada aleatória.

Definição 3.9.2 (Implicações do Ambiente Computacional). As condições da definição 3.9.1 implicam em:

1. Condição de contorno. Segue inevitavelmente da condição (1) na definição 3.9.1;
2. O hiper-volume de ambientes β -dimensionais escala com $V_\beta \sim M^\beta$;
3. Espaçamento médio entre **alvos** dado por, $\lambda_a = \left(\frac{V_\beta}{N_a}\right)^{1/\beta}$;
4. Truncamento do passo da caminhada aleatória, \hat{x} , em, $x \leq V_\beta^{1/\beta} \approx M$.

3.9.2 Heurística Computacional

Definição 3.9.3 (Heurística Computacional). Em condições de simulação, a **heurística** de busca se materializa em conjunto de regras dinâmicas que governam as ações do forrageador. Vamos resumi-las como segue:

1. **Condição Inicial:** sorteio da posição dos **alvos** e escolha da posição inicial do **forrageador**.
2. **Caminhada:** trata-se da maneira como o **forrageador** escolhe a orientação e comprimento do passo da caminhada. Nas nossas simulações a direção é sorteada com **FDP** constante e o comprimento do passo com **FDP** de *Pareto* truncada;

⁸Estamos supondo ambientes com distribuição homogênea de **alvos**.

3. **Busca:** refere-se a forma como o **forrageador** inspeciona o ambiente computacional à medida que caminha. No nosso caso o **forrageador** interage apenas com **alvos** que estejam distanciados da trajetória de busca por uma distância inferior à distância mínima de interação, r_v –limite do alcance visual do forrageador;
4. **Detecção de alvos:** corresponde a definição do evento de detecção de **alvos**. Nas nossas simulações o evento de detecção se verifica quando a distância entre o **forrageador** e um **alvo** arbitrário é inferior à distância de mínima de interação, r_v ;
5. **Recursão:** a simulação deve ser recursiva de modo a permitir o calculo de médias sobre vários eventos de detecção de **alvos**. Usualmente isto implica na implementação de “*loops*” que executam todas as regras citadas acima até que a condição de parada seja verificada;
6. **Condição de parada:** a simulação termina quando verifica-se o evento definido como condição de parada. Esta condição usualmente é definida pelo número máximo de **alvos** visitados, porém diversos outros critérios podem ser usados, por exemplo : (i) um tempo máximo de busca; (ii) uma distância máxima coberta na busca; (iii) esgotar a reserva energética –neste caso a condição de parada é a morte; (iv) saturar a reserva de energia –neste caso a condição de parada é atingir o limite de ganho de peso;

3.9.3 Métrica Computacional, ℓ^{ASC}

Definição 3.9.4. Para dois eventos sucessivos de detecção de **alvos** a distância percorrida pelo **forrageador** entre o **alvo** $j - 1$ e o **alvo** j é denotada por $l_{j-1,j}$, sua média sobre ν_R réplicas aleatórias do ambiente é

$$\ell^{ASC} = \frac{1}{\nu_R} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} l_{j-1,j}^{(i)}. \quad (\text{Métrica Computacional Média}) \quad (3.50)$$

Usando a função frequência, $f(l_{j-1,j})$, –retorna a frequência de cada evento do seu argumento, ver a definição 2.1.4– podemos construir histogramas normalizados, que correspondem à aproximações da FDP da **métrica**. Faremos isto nas aproximações semi-analíticas.

3.9.4 Eficiência Computacional Média, η^{ASC}

A eficiência energética associada à busca aleatória e detecção do j -ésimo alvo é

$$\eta_j = \frac{1}{l_{j-1,j}}, \quad (\text{Eficiência Computacional}) \quad (3.51)$$

onde $l_{j-1,j}$ é a métrica computacional. Assumindo simulações com condição de parada definida pela detecção de ν alvos, podemos utilizar a definição de eficiência abaixo.

Definição 3.9.5 (Eficiência Computacional Média). Definimos a eficiência média do processo de busca como

$$\eta^{ASC} = \bar{\eta} = \frac{1}{\nu_R \nu} \sum_{i=1}^{\nu_R} \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j^{(i)}. \quad (3.52)$$

Para incorporar a variância associada à condição inicial tomamos a média da equação (3.51) sobre ν_R réplicas aleatórias do ambiente. Onde (i) indica a i -ésima réplica do AB.

3.9.5 Balanço Energético Computacional E^{ASC}

A energia do forrageador ao detectar o j -ésimo alvo é

$$E_j = E_0 + \nu \epsilon - \nu \Omega_0 l_{j-1,j}, \quad (\text{Balanço Energético Computacional}) \quad (3.53)$$

onde $l_{j-1,j}$ é a métrica computacional. Assumindo simulações com condição de parada definida pela detecção de ν alvos, podemos utilizar a definição de eficiência abaixo.

Definição 3.9.6 (Balanço Energético Computacional). Definimos a energia média do forrageador como a média aritmética

$$E^{ASC} = \bar{E} = \frac{1}{\nu_R \nu} \sum_{i=1}^{\nu_R} \sum_{j=1}^{\nu} E_j^{(i)}. \quad (3.54)$$

Para incorporar a variância associada à condição inicial tomamos a média da equação (3.51) sobre ν_R réplicas aleatórias do ambiente. Onde (i) indica a i -ésima réplica do AB.

3.9.6 Probabilidade de Morte Computacional

Definição 3.9.7. A probabilidade de morte P_M^{ASC} é definida como a frequência do evento mortal da definição 3.6.1. Ou seja

$$P_M^{ASC} = \mathfrak{f}(E_j \leq 0). \quad (3.55)$$

A probabilidade de sobrevivência é calculada através da probabilidade de morte e da condição de conservação da probabilidade total, ou seja $P_S^{ASC} = 1 - P_M^{ASC}$. Construimos um espaço amostral contendo $\nu_R \nu$ eventos, onde temos ν passos em cada uma das ν_R réplicas do ambiente.

Processo de Busca Ideal no Ambiente *Weibull* Indestrutível

No capítulo anterior introduzimos nosso modelo e formulação matemática geral, discutimos casos particulares da busca ideal em ambientes unidimensionais. Neste capítulo vamos estender os resultados anteriores para ambientes com qualquer dimensão. Inicialmente definiremos o ambiente *Weibull* e descreveremos suas principais propriedades. Derivaremos a distribuição *Weibull* como densidade apropriada para descrever a distância entre alvos em qualquer dimensão topológica (observamos que não encontramos esta derivação na literatura). Estes resultados permitem-nos obter a métrica exata para um processo determinístico de busca ideal em ambientes β -dimensionais. Seguiremos comparando a solução exata com a aproximação de campo médio. Finalmente discutiremos o balanço energético e a probabilidade de sobrevivência. Seguiremos a notação do capítulo anterior.

4.1 Processo de Busca Ideal

4.1.1 Definição da Busca Ideal

Definição 4.1.1 (Busca Ideal). A busca ideal tem lugar quando o forrageador consegue o melhor desempenho possível. Entenda-se por melhor desempenho possível detectar um alvo a cada passo ($N = 1$). O forrageador caminha realizando movimentos **balísticos**, visitando o alvo imediatamente vizinho. A **FDP** dos deslocamentos do forrageador, $f_{\hat{x}}(x)$, corresponde a **FDP** da distância entre alvos, $f_w(x)$. Na busca ideal as condições abaixo

devem ser satisfeitas

$$N = 1, \quad (4.1)$$

$$f_{\hat{x}}(x) = f_{\hat{w}}(x). \quad (4.2)$$

4.1.2 Propriedades da Busca Ideal

Lema 4.1.1 (FMP de \hat{N} na Busca ideal (BI)). Segue da definição 4.1.1 que na busca ideal a massa de probabilidade adequada para \hat{N} é a delta de *Kronecker*

$$f_{\hat{N}}(N) = \delta_{N1}. \quad (4.3)$$

Prova: Da equação (4.1) devemos ter $N = 1$, portanto a massa de probabilidade é

$$f_{\hat{N}}(N) = \begin{cases} 1 & \text{se, } N = 1, \\ 0 & \text{se, } N \neq 1. \end{cases}$$

Adicionalmente deve satisfazer a condição de normalização

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} f_{\hat{N}}(N) = 1.$$

As condições introduzidas pelas equações acima correspondem justamente à definição da função delta de *Kronecker*. Portanto a equação (4.3) é a FMP procurada. Isto conclui a prova.

Teorema 4.1.1 (FDP da métrica na Busca Ideal). Na busca ideal, a FDP da métrica corresponde à FDP dos alvos –primeiros vizinhos– como segue

$$f_{\hat{\ell}}(\ell) = f_{\hat{w}}(\ell). \quad (4.4)$$

Prova: Levando as equações (4.1) e (4.2) em (3.9) somente o primeiro termo da série restará

$$f_{\hat{\ell}}(\ell) = f_{\hat{N}}(1) f_{\hat{w}}(\ell).$$

Pela equação (4.3) sabemos que, a massa de probabilidade é $f_{\hat{N}}(1) = 1$. A partir disto, obtemos o resultado, pois a equação final é (4.4).

4.2 O Ambiente de Busca *Weibull*

4.2.1 Considerações sobre os Espaços Multidimensionais

No ambiente *Weibull* o espaçamento entre alvos, \hat{w} , escala com λ . A FDP de \hat{w} é bem definida em qualquer dimensão β . Antes de seguir à obtenção desta distribuição precisamos introduzir o conceito de hipervolume e estimar o espaçamento médio, λ_a , entre N_a alvos aleatoriamente distribuídos em um hipervolume V_β .

Hipervolume é a generalização do conceito de volume, formalmente é definido via tensor métrico ou por uma métrica apropriada. Aqui definiremos utilizando a Norma.

Definição 4.2.1 (Hipervolume). Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^\beta$, um conjunto limitado no espaço *Euclidiano*. A coleção de pontos $z \in \mathbb{R}^\beta$ que pertencem ao conjunto Z satisfazem $\{z : |z| \leq w\}$. O menor hipervolume, V_β , em um espaço β -dimensional, capaz de conter Z é

$$V_\beta = \gamma(\beta) w^\beta, \quad (\text{Hipervolume em } \beta \text{ dimensões}) \quad (4.5)$$

onde

$$\gamma(\beta) = \frac{\pi^{\beta/2}}{\Gamma(\frac{\beta}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{\beta/2}}{\beta\Gamma(1/2)}. \quad (4.6)$$

No espaço ordinário, $\beta = \{1, 2, 3\}$, temos $\gamma(\beta) = \{2, \pi, 4\pi/3\}$.

Definição 4.2.2 (Espaçamento Médio Multidimensional). O espaçamento médio, λ_a , entre N_a alvos aleatoriamente distribuídos em um hipervolume V_β é

$$\lambda_a = \left(\frac{V_\beta}{N_a}\right)^{1/\beta}, \quad (4.7)$$

levando a transformação

$$\lambda_a = [\gamma(\beta)]^{1/\beta} \lambda, \quad (4.8)$$

na equação (4.7) e resolvendo para N_a , obtemos uma relação importante

$$N_a = \left(\frac{w}{\lambda}\right)^\beta. \quad (4.9)$$

Suprimos $\gamma(\beta)$ e expressamos o número de alvos em função da distância entre alvos, w , e da distancia típica entre alvos, λ .

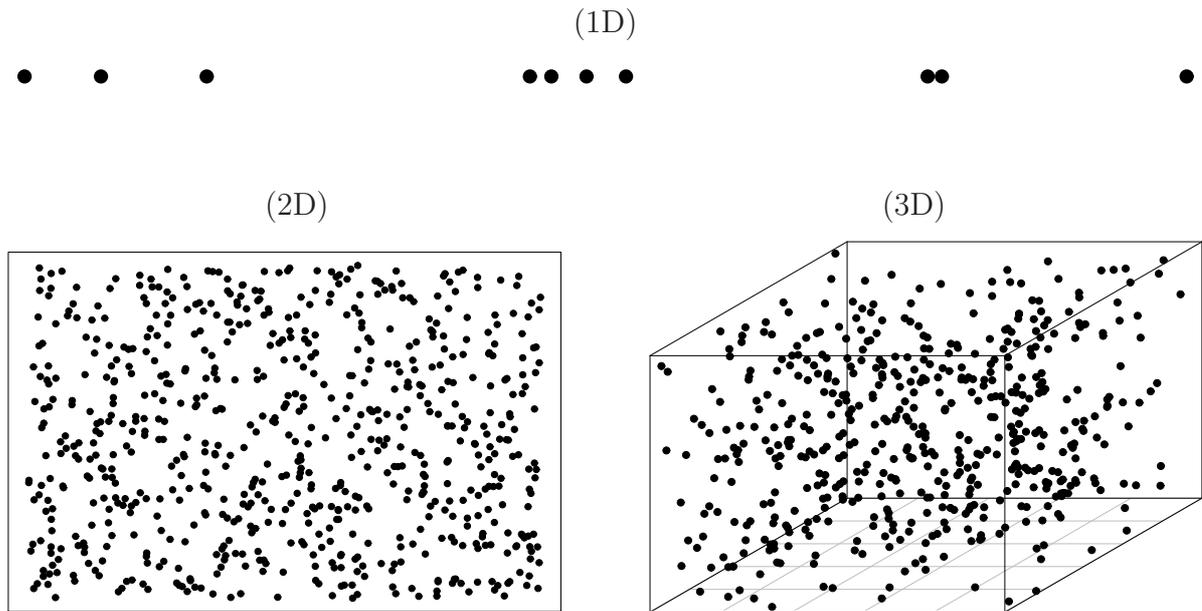


Figura 4.1: Ilustrações do ambiente *Weibull* para as três dimensões espaciais ordinárias, $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 1/5$.

4.2.2 Definição do AB *Weibull*

Definição 4.2.3 (Ambiente de Busca *Weibull*). Variedade topológica β -dimensional encerrando uma distribuição arbitrária de alvos adimensionais. O ambiente é descrito pelo vetor de parâmetros

$$\Theta \equiv \{\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau\} \quad (\text{Ambiente } Weibull) \quad (4.10)$$

Trata-se de um ambiente contínuo, com dimensão β . Os alvos são adimensionais ($r = 0$), indestrutíveis¹ ($\tau \rightarrow 0$) e espaçados pela distância típica $\lambda \geq \lambda_0 \geq 0$.

4.2.3 Densidade do Espaçamento entre Primeiros Vizinhos

Aparentemente *P. Hertz*, em 1909 [109], foi o primeiro a tentar descrever a FDP da distância entre primeiros vizinhos em uma configuração aleatória de alvos. Em 1943 *S. Chandrasekhar* [110] derivou a lei de distribuição para primeiros vizinhos (LDPV) em ambientes tridimensionais. Aqui, vamos generalizar o resultado de *Hertz-Chandrasekhar* estendendo a LDPV para ambientes β -dimensionais.

¹Todo alvo detectado e consumido regenera-se na mesma posição, após um tempo τ . Na aproximação de alvos indestrutíveis temos ($\tau \rightarrow 0$). Neste caso o alvo poderá ser revisitado indefinidamente.

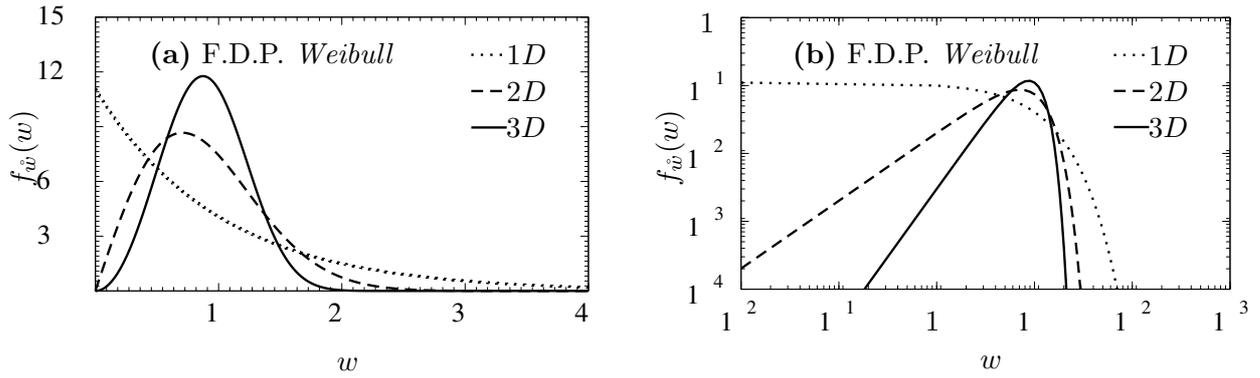


Figura 4.2: (a) Distribuição *Weibull* para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.12), isto é, FDP do espaçamento entre alvos –primeiros vizinhos– no ambiente *Weibull*. (b) Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda = 10$.

Definição 4.2.4 (Lei de *Hertz-Chandrasekhar* Multidimensional). A FDP que descreve o espaçamento entre alvos, primeiros vizinhos, deve satisfazer a condição

$$f_{\hat{w}}(w) = \left[1 - \int_0^w f_{\hat{w}}(w) dw \right] \frac{N_a dV_\beta}{V_\beta dw}, \quad (\text{LDPV Multidimensional}) \quad (4.11)$$

com N_a e V_β , definidos anteriormente. A equação acima assume que a probabilidade de um alvo arbitrário estar a uma distância \hat{w} de seu primeiro vizinho é a probabilidade –fator entre colchetes– de não haver um alvo dentro de um hipervolume V_β , centrado no alvo considerado, multiplicado pela probabilidade de haver um alvo na casca esférica encerrada pelo hipervolume.

Estabelecemos que a FDP da distância entre primeiros vizinhos, no ambiente *Weibull*, deve satisfazer a LDPV. Derivando-se a LDPV multidimensional elimina-se a integral, resultando em uma equação diferencial ordinária em $f_{\hat{w}}(w)$. Além disso, quando $w \rightarrow 0$ a região de integração na equação (4.11) anula-se. Neste caso a probabilidade entre colchetes é máxima e igual a 1. A equação resultante constitui uma condição de contorno apropriada. Usaremos estes argumentos na demonstração do teorema a seguir, que provavelmente, constitui o resultado mais importante deste capítulo.

Teorema 4.2.1 (FDP do Ambiente *Weibull*). A FDP *Weibull* satisfaz a LDPV multidimensional, portanto é a densidade associada a distância de separação entre primeiros vizinhos.

$$f_{\hat{w}}(w) = \frac{1}{I_w} \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{w}{\lambda} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{w}{\lambda} \right)^\beta \right]. \quad (\text{FDP Weibull}) \quad (4.12)$$

onde I_w é a constante de normalização obtida pela integração sobre o intervalo de definição, $\{\hat{w} : 0 \leq w < \infty\}$. Ver o gráfico da distribuição *Weibull* na figura 4.2.

Prova: Derivando a equação (4.5) podemos expressar a probabilidade de haver um alvo

sobre a casca do hipervolume como $\frac{N_a}{V_\beta} \frac{dV_\beta}{dw} = \frac{N_a \beta}{w}$. Usando a equação (4.9), obtemos

$$\frac{N_a}{V_\beta} \frac{dV_\beta}{dw} = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{\beta-1}.$$

Levando em (4.11) e integrando, a LDPV multidimensional torna-se a equação diferencial abaixo

$$\frac{d}{dw} \left[\frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{\lambda}{w}\right)^{\beta-1} f_{\hat{w}}(w) \right] = -f_{\hat{w}}(w), \quad (4.13)$$

com a condição de contorno

$$\left(\frac{\lambda}{w}\right)^{\beta-1} f_{\hat{w}}(w) \rightarrow \frac{\beta}{\lambda}, \quad \text{quando } w \rightarrow 0. \quad (4.14)$$

A solução geral é

$$f_{\hat{w}}(w) = C w^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{w}{\lambda}\right)^\beta \right].$$

Levando na condição de contorno, obtemos $C = \frac{\beta}{\lambda^{\beta-1}\lambda}$. Portanto

$$f_{\hat{w}}(w) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{w}{\lambda}\right)^\beta \right].$$

CQD.

Um demonstração alternativa consiste em derivar a *FD Weibull* em vez de sua *FDP*.

Prova: O resultado particular de *Hertz-Chandrasekhar*, em três dimensões, conduz a uma equação diferencial ordinária equivalente a nossa equação (4.13) expressa como função de N_a como segue,

$$f_{\hat{w}}(w) = \frac{dN_a}{dw} e^{-N_a}.$$

Reconhecendo $dF_{\hat{w}}(w) = f_{\hat{w}}(w)dw = e^{-N_a}dN_a$ na equação acima, podemos integrar a equação e obter imediatamente

$$F_{\hat{w}}(w) = \int_{-\infty}^{N_a} e^{-N'_a} dN'_a = 1 - e^{-N_a}.$$

Usando a equação (4.9), obtemos

$$F_{\hat{w}}(w) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{w}{\lambda}\right)^\beta \right].$$

Esta é a *FD Weibull*. CQD. Isto conclui a demonstração do teorema 4.2.1.

4.2.4 Distâncias Notáveis no Ambiente *Weibull*

Algumas distâncias típicas entre alvos desempenham papel importante na aproximação de campo médio e na determinação do escopo das grandezas de interesse. Antes de discutir estas distâncias típicas precisamos renormalizar a densidade *Weibull* no intervalo $\lambda_0 \leq w \leq \infty$. Esta medida previne problemas de divergência das grandezas derivadas da métrica, como a eficiência energética por exemplo.

Renormalização de $f_{\hat{w}}(w)$ no intervalo $\lambda_0 \leq w \leq \infty$

A distribuição vista na equação (4.12), tem $I_w = 1$, pois está normalizada no intervalo $0 \leq w < \infty$. Este intervalo é problemático. Permitir $w = 0$ implica em aceitar $\ell = 0$, que por sua vez, conduz à divergência de $\dot{\eta}$. Note que estaríamos permitindo visitar alvos sucessivos com deslocamento nulo do forrageador. Para evitar este inconveniente impomos λ_0 como a distância mínima entre alvos e renormalizamos a distribuição no intervalo $\lambda_0 \leq w \leq \infty$. A constante de normalização é

$$I_w = \int_{\lambda_0}^{\infty} f_{\hat{w}}(w) dw = \exp \left[- \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\beta} \right]. \quad (4.15)$$

O valor esperado da distância entre primeiros vizinhos é

$$\langle \hat{w} \rangle = \int_{\lambda_0}^{\infty} w f_{\hat{w}}(w) dw = \lambda \exp \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\beta} \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^{\beta} \right], \quad (4.16)$$

onde Γ denota a função *Gama Incompleta*, $\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

Passemos agora a definição das distâncias notáveis. Usaremos estas constantes frequentemente para normalizar as grandezas relevante e para resolver a escala em gráficos.

Definição 4.2.5 (Distâncias Típicas entre Alvos). As distâncias mais relevantes, escritas em função de λ , são

$$\lambda_0 = \text{Min}(\hat{w}), \quad (\text{Distância Mínima}) \quad (4.17)$$

$$\lambda_1 = \langle \hat{w} \rangle, \quad (\text{Primeiro Vizinho, eq. (4.16)}) \quad (4.18)$$

$$\lambda_a = [\gamma(\beta)]^{1/\beta} \lambda. \quad (\text{Vizinho Médio, eqs. (4.7) e (4.8)}) \quad (4.19)$$

Usando $\gamma(\beta)$ dado em (4.6) vemos que para as dimensões ordinárias $\beta = \{1, 2, 3\}$, temos $\lambda_1/\lambda_a = \{0.55, 0.504647, 0.554468\}$. Portanto, para $\beta \leq 3$ podemos usar a aproximação

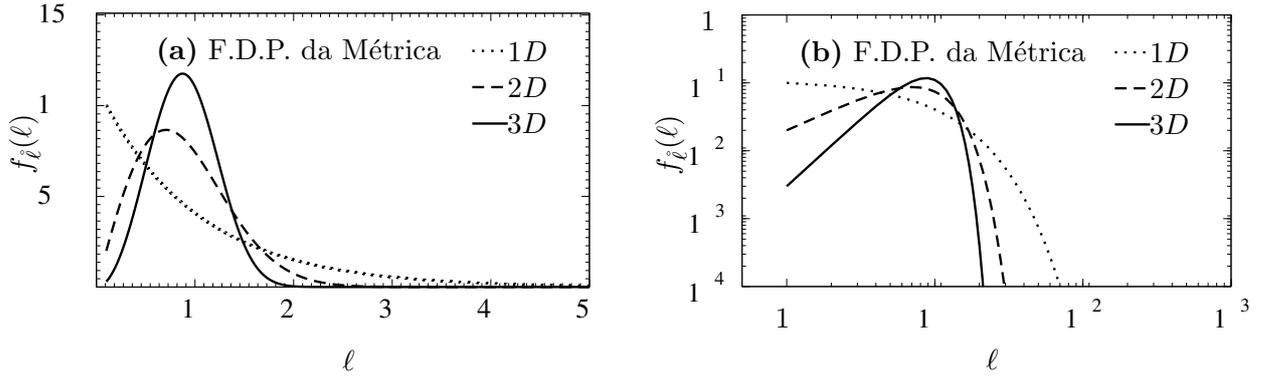


Figura 4.3: **(a)** FDP da métrica da busca ideal em ambientes *Weibull*. A figura mostra $f_{\hat{\eta}}(\eta)$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.20). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$.

$\lambda_1/\lambda_a \approx 1/2$, especialmente em duas dimensões. A relação exata é

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_a} = \frac{\langle \dot{w} \rangle}{\lambda [\gamma(\beta)]^{1/\beta}} = \frac{\beta \Gamma(1/2)}{2 \pi^{\beta/2}} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\beta} \Gamma\left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\beta}\right].$$

Isto conclui nossa discussão sobre o espaçamento entre alvos no **AB** *Weibull*.

Passemos agora à aplicação destes resultados no processo de construção da métrica do **processo de busca ideal (PBI)**. De posse da métrica obtemos a eficiência energética, balanço energético e probabilidade de sobrevivência no ambiente *Weibull*. Todo o formalismo foi descrito no capítulo anterior. Definimos a busca ideal no início deste capítulo. Assim, já foram introduzidos todos os conceitos necessários à obtenção da solução exata do **PBI** no **AB** *Weibull*, permitindo-nos obter rapidamente, nas próximas seções, as densidades e valores esperados das grandezas relevantes.

4.3 Solução Exata para o Processo de Busca Ideal no Ambiente de Busca *Weibull*

4.3.1 Métrica do Processo de Busca Ideal

Nas condições da busca ideal, definida na seção 4.1, a **FDP** da métrica do **PBI** é determinada pela densidade de espaçamento entre alvos, $f_{\hat{w}}(w)$. No ambiente *Weibull*, a densidade da métrica do **PBI** é

$$f_{\hat{\eta}}(\ell) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{\beta} - \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^{\beta}\right], \quad (\text{FDP da Métrica}) \quad (4.20)$$

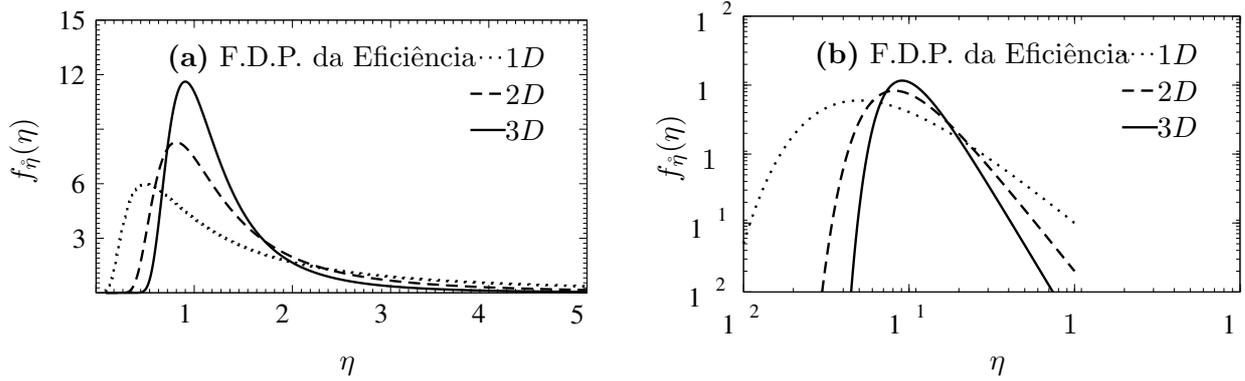


Figura 4.4: **(a)** FDP da eficiência energética da busca ideal em ambiente *Weibull*. A figura mostra $f_{\hat{\eta}}(\eta)$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.22). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$.

onde usamos o teorema 4.1.1 na equação (4.12) com I_w dado em (4.15).

Segue ainda da definição da busca ideal –teorema 4.1.1– que a métrica herda todas as propriedades estatísticas da FDP do ambiente. A equação (4.4) assegura $\langle \dot{w} \rangle = \langle \hat{\ell} \rangle$. Portanto o valor esperado da métrica é dado pela equação 4.16

$$\langle \hat{\ell} \rangle = \lambda \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta \Gamma\left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta\right]. \quad (\text{Valor Esperado da Métrica}) \quad (4.21)$$

No exemplo 3.1, calculamos a densidade e o valor esperado da métrica do PBI unidimensional. Assumindo $\beta = 1$ nas equações acima, vemos que os resultados do exemplo 3.1 decorrem imediatamente da densidade da métrica β -dimensional, expressa pela equação (4.20), bem como seu valor esperado, visto na equação (4.21).

Podemos ver, na figura 4.3 (a), os gráficos da métrica para as dimensões ordinárias, $\beta = \{1, 2, 3\}$. Para evidenciar as consequências do truncamento esquerdo $\ell \geq \lambda_0$, a figura 4.3 (b) mostra a escala Log-Log das curvas vistas em (a).

4.3.2 Eficiência Energética Exata do PBI, η_{BI}

Densidade Exata da Eficiência Energética, $f_{\hat{\eta}}(\eta_{BI})$

A densidade da eficiência energética segue da aplicação da métrica, (4.20), na definição da FDP da eficiência, (3.19).

$$f_{\hat{\eta}}(\eta_{BI}) = \beta \lambda \left(\frac{1}{\eta\lambda}\right)^{\beta+1} \exp\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta - \left(\frac{1}{\eta\lambda}\right)^\beta\right]. \quad (4.22)$$

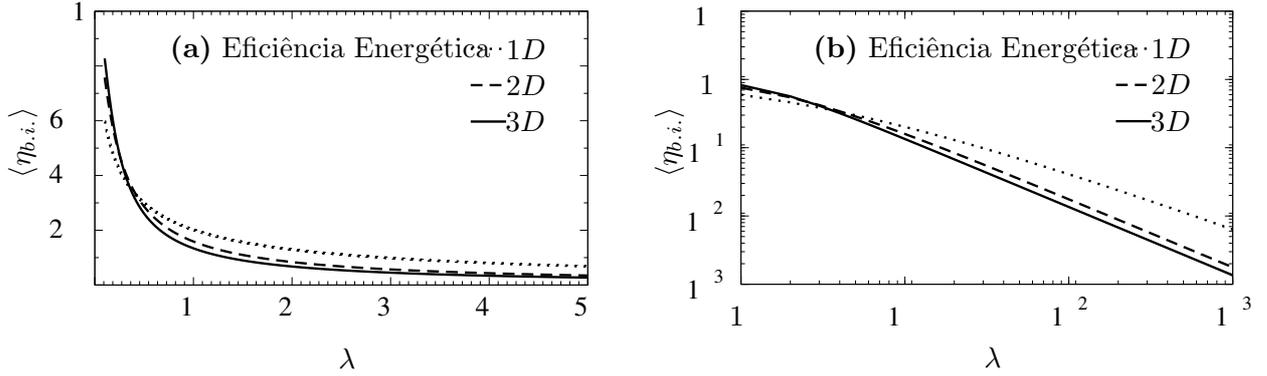


Figura 4.5: **(a)** Valor esperado da eficiência energética da busca ideal em ambiente *Weibull*. A figura mostra $\langle \hat{\eta}_{BI} \rangle$ para as três dimensões espaciais, conforme equação (4.25). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$.

A integração direta da densidade acima fornece a **FD**

$$F_{\hat{\eta}}(\eta_{BI}) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{1}{\eta\lambda} \right)^\beta \right]. \quad (4.23)$$

Em geral as **FD** permitem avaliar facilmente as integrais da densidade por meio do teorema fundamental do cálculo. Podemos calcular a probabilidade, $P_{\eta_1 \eta_2}$, de um processo de busca se a eficiência ocorrer ente $\eta_1 > \hat{\eta}_{min}$ e $\eta_2 < \eta_{max}$ como segue

$$P_{\eta_1 \eta_2} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f_{\hat{\eta}}(\eta) d\eta, = F_{\hat{\eta}}(\eta_2) - F_{\hat{\eta}}(\eta_1). \quad (4.24)$$

Valor Esperado da Eficiência Energética, $\langle \hat{\eta}_{BI} \rangle$

Uma vez conhecida a densidade podemos calcular o valor esperado de eficiência energética via (3.20), ou

$$\langle \hat{\eta}_{BI} \rangle = \frac{1}{\lambda} \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] \Gamma \left[1 - \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right]. \quad (4.25)$$

Na figura 4.5 mostramos o valor esperado da eficiência energética da busca ideal no **AB Weibull** para as três dimensões espaciais. O gráfico mostra que $\langle \hat{\eta}_{BI} \rangle$ diminui com o aumento da dimensão espacial β . Além disso, o caso unidimensional torna-se mais eficiente, frente aos casos com $\beta > 1$ a medida que o espaçamento típico λ cresce frente ao espaçamento mínimo λ_0 (na região $\lambda \geq 3\lambda_0$).

Sabemos que a distância média entre primeiros vizinhos, $\langle w \rangle$, é máxima quando $\beta = 1$ e mínima quando $\beta = 2$. Sabemos ainda que $\langle w \rangle$ cresce com $\beta > 2$, tendendo ao valor

esperado do caso unidimensional quando $\beta \rightarrow \infty$. Como a eficiência é o recíproco da métrica, isto nos deixa uma questão interessante, se $\langle w \rangle$ é máximo em $\beta = 1$, por que o caso unidimensional é o mais eficiente? Além disso, por que a eficiência do processo de busca unidimensional melhora com aumento de λ ?

As duas perguntas podem ser respondidas com o mesmo argumento. A razão desta aparente contradição está na densidade da métrica unidimensional. Observamos na figura 4.3. O caso $\beta = 1$ é o único onde a probabilidade de ocorrência do espaçamento mínimo $\ell = \lambda_0 = 1$ é maior que a probabilidade associada ao espaçamento típico $\ell = \lambda = 10\lambda_0$. Note-se que, apenas no caso unidimensional a probabilidade cresce a medida que $\ell \rightarrow \lambda_0$, enquanto nos casos $\beta > 1$ o pico de probabilidade encontra-se nas proximidades de $\ell = \lambda = 10\lambda_0$. A resposta às nossas perguntas está resumida então na observação 4.3.1.

Observação 4.3.1: No caso unidimensional, a probabilidade de saltar a distância mínima entre dois alvos é expressivamente maior do que nos casos $\beta > 1$. Isto deve-se à FDP da métrica unidimensional –Poisson-Exponencial– que é decrescente em todo o intervalo. Portanto, o valor esperado da métrica é superestimado, deslocando-se para a esquerda.

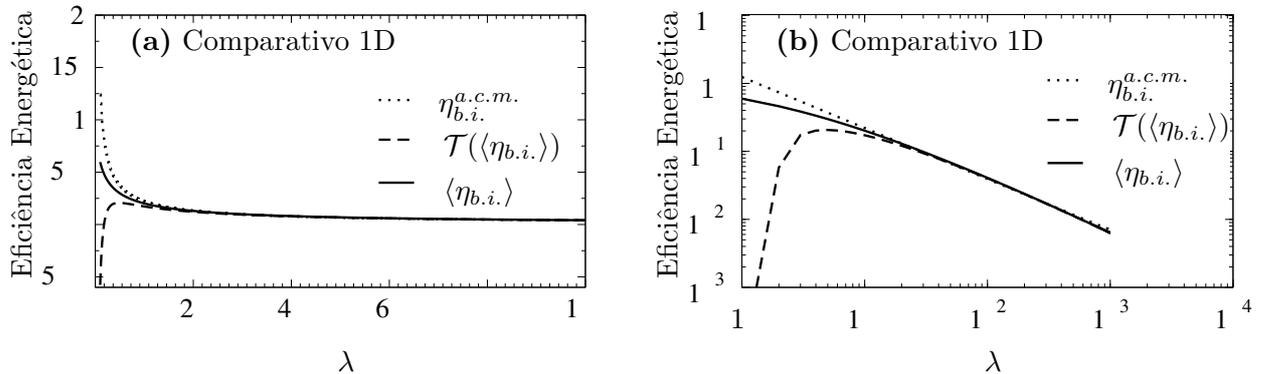


Figura 4.6: **(a)** Comparativo entre a eficiência unidimensional exata, $\langle \eta_{BI} \rangle$ (curva sólida), expansão de Taylor em segunda ordem, $\mathcal{T}_{n=2}(\langle \eta_{BI} \rangle)$ (curva tracejada) e a aproximação de campo médio corrigida, $\eta_{BI}^{ACM} = \lambda_0^{a-1} (a\lambda)^{-a}$ (curva pontilhada). **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = 1$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$.

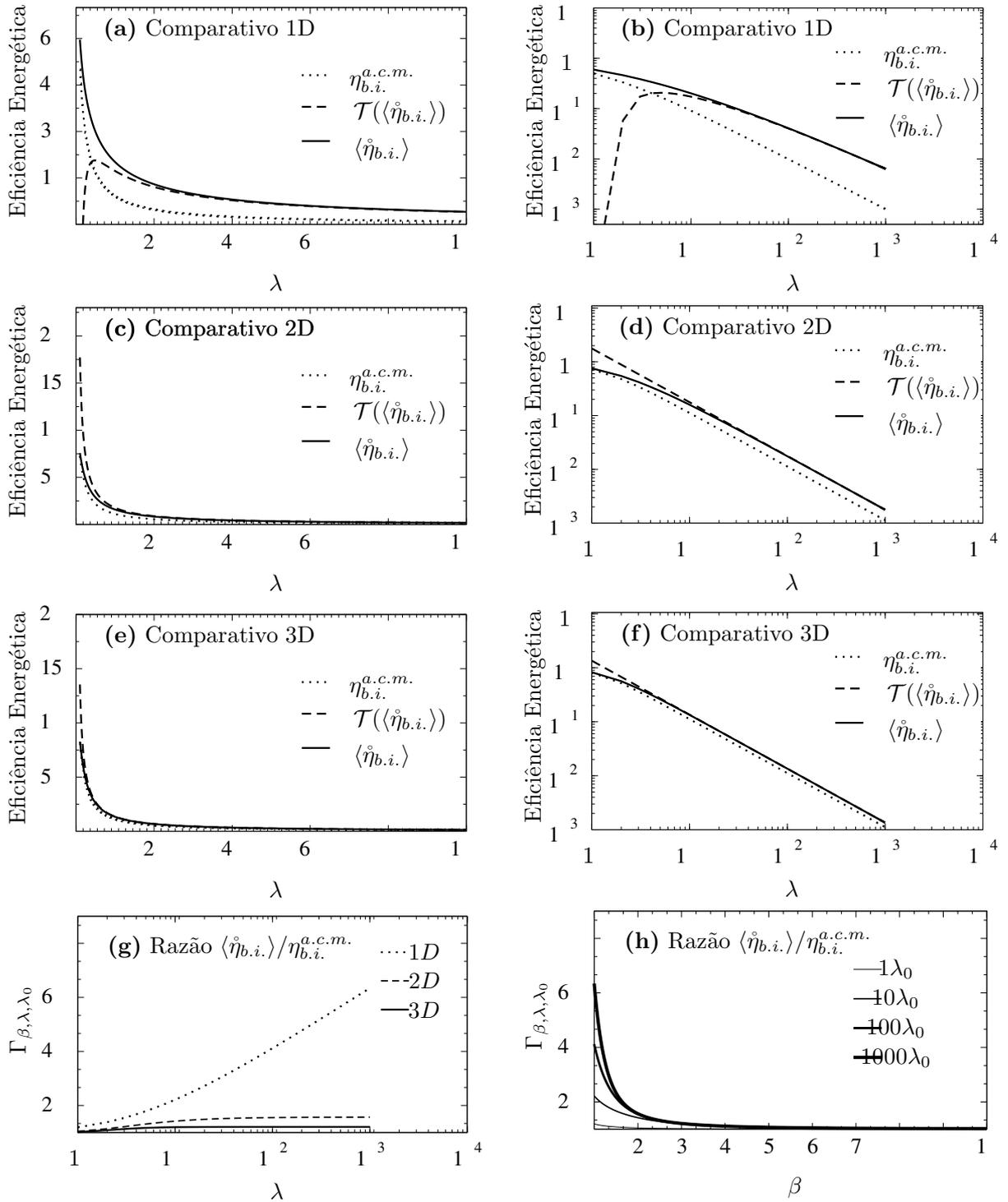


Figura 4.7: Nas figuras de (a) até (f) mostramos o comparativo entre a eficiência exata, $\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle$ (curva sólida), expansão de Taylor em segunda ordem, $\mathcal{T}_{n=2}(\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle)$ (curva tracejada) e a aproximação de campo médio, η_{BI}^{ACM} (curva pontilhada). (a) e (b) AB unidimensional ($\beta = 1$). (c) e (d) AB bidimensional ($\beta = 2$). (e) e (f) AB tridimensional ($\beta = 3$). Na coluna direita, das figuras de (a) até (f) vemos versões Log-Log dos gráficos à esquerda. As figuras (g) e (h) mostram a razão, denotada por $\Gamma_{\beta, \lambda, \lambda_0}$, entre a eficiência exata, $\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle$, e a aproximação de campo médio, η_{BI}^{ACM} , eq. (4.27). (g) $\Gamma_{\beta, \lambda, \lambda_0}$ contra λ . (h) $\Gamma_{\beta, \lambda, \lambda_0}$ contra β .

4.3.3 Eficiência Energética na ACM do PBI, η_{BI}^{ACM}

A eficiência energética, avaliada na aproximação de campo médio, segue da aplicação do valor esperado da métrica, (4.21), diretamente na definição de eficiência. Da equação (3.48) e do teorema 4.1.1, a eficiência na ACM para o PBI no AB Weibull é

$$\eta_{BI}^{ACM} = \left(\lambda \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] \right)^{-1}. \quad (4.26)$$

4.3.4 Comparativo $\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle$ versus η_{BI}^{ACM}

Vamos checar se (4.26) fornece o comportamento assintótico da eficiência energética exata, $\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle$, da equação (4.25).

Na figura 4.7, de (a) até (f), mostramos o comparativo entre a eficiência exata, $\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle$ (curva sólida), expansão de Taylor em segunda ordem, $\mathcal{T}_{n=2}(\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle)$ (curva tracejada) e a aproximação de campo médio, η_{BI}^{ACM} (curva pontilhada). As figuras (a) e (b) correspondem ao AB unidimensional ($\beta = 1$). (c) e (d) mostram o caso bidimensional ($\beta = 2$). Nas figuras (e) e (f) temos o caso tridimensional ($\beta = 3$).

A razão entre a solução exata e a ACM é denotada por $\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0} = \frac{\langle \dot{\eta}_{BI} \rangle}{\eta_{BI}^{ACM}}$, ou seja,

$$\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0} = \exp \left[2 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] \Gamma \left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] \Gamma \left[1 - \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right]. \quad (4.27)$$

Quando $\beta, \lambda \rightarrow \infty$ a exponencial aproxima-se da unidade e as funções Gama convergem para $\Gamma(1, 0) = 1$, portanto $\lim_{\beta,\lambda \rightarrow \infty} \Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0} = 1$. Nas figuras 4.7 (g) e (h) mostramos que $\Gamma_{\beta,\lambda,\lambda_0}$ tende a unidade mesmo para valores pequenos de β e λ .

Em duas e três dimensões verificamos ótima concordância entre os resultados. No caso unidimensional –veja as figuras 4.7 (a) e (b)– vemos que a aproximação de campo médio falha. Esta discrepância é, mais uma vez, explicada pela observação 4.3.1. A média superestimada conduz à divergência. Podemos reavaliar a aproximação de campo médio de modo a fitar o resultado exato. A expressão corrigida é $\eta_{BI}^{ACM} = \lambda_0^{a-1} (a\lambda)^{-a}$, com $a = 3/4$. Mostramos os resultados na figura 4.6 e podemos verificar a concordância.

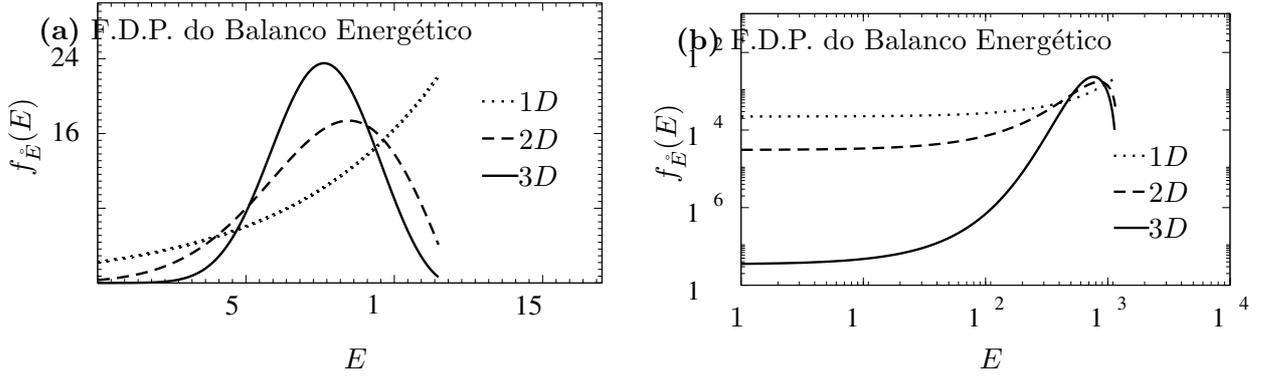


Figura 4.8: (a) Densidade do balanço energético na ADL para a busca ideal no AB *Weibull*. (b) Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda = 10\lambda_0$.

4.4 Balanço Energético na ADL

4.4.1 FD e FDP na ADL

As **FD** $F_{\hat{E}}(E)$ e $F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ seguem da integração das densidades (3.36) e (3.37)

$$F_{\hat{E}}(E) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{-E + E_0 + \nu\epsilon}{\lambda\nu\Omega_0} \right)^\beta \right], \quad (4.28)$$

$$F_{\hat{\Omega}}(\Omega) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{\epsilon}{\lambda(\Omega + \Omega_0)} \right)^\beta \right]. \quad (4.29)$$

As **FDP** $f_{\hat{E}}(E)$ e $f_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ seguem das derivadas das **FD** acima, ou diretamente das equações (3.36) e (3.37). Temos

$$f_{\hat{E}}(E) = \frac{\beta}{\lambda\nu\Omega_0} \left(\frac{-E + E_0 + \nu\epsilon}{\lambda\nu\Omega_0} \right)^{\beta-1} F_{\hat{E}}(E), \quad (4.30)$$

$$f_{\hat{\Omega}}(\Omega) = \frac{\beta\lambda}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{\lambda(\Omega + \Omega_0)} \right)^{\beta+1} F_{\hat{\Omega}}(\Omega). \quad (4.31)$$

Não devemos perder de vista que as distribuições acima são aplicáveis somente no intervalo de definição das variáveis \hat{E} e de $\hat{\Omega}$, respectivamente dados em (3.32) e (3.33). Fora destes intervalos as distribuições anulam-se. Mostramos os gráficos da **FDP** do balanço energético na figura 4.8 e a **FDP** da taxa líquida de ganho energético na figura 4.9.

Os valores esperados seguem das equações (3.38), (3.39) e (3.40) com $\langle \ell \rangle$ e $\langle \eta \rangle$ dados, respectivamente, em (4.21) e (4.25).

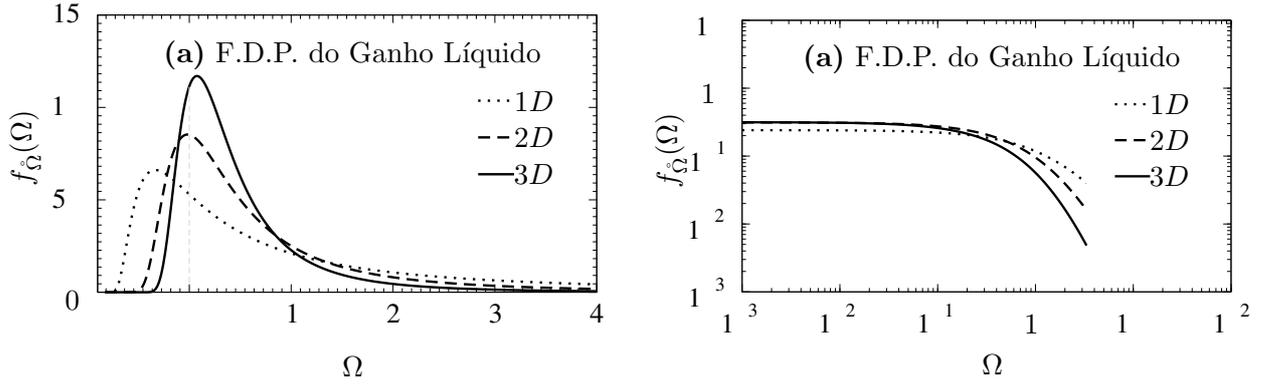


Figura 4.9: (a) Densidade da taxa líquida de ganho energético na ADL para a busca ideal no AB *Weibull*. (b) Gráfico da figura (a) na escala Log-Log. Parâmetros: $\beta = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda = 5\lambda_0$, $\epsilon = \lambda/[\lambda]$, $\Omega_0 = \Omega^* = \epsilon/\lambda_1$.

No item (a) do exemplo 3.3 obtivemos $\langle \dot{E}(\nu) \rangle$, o valor esperado da energia do forrageador após detectar ν alvos, como

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0 + \nu \langle \dot{\ell} \rangle (\Omega^* - \Omega_0).$$

Utilizando o valor esperado da métrica do PBI no ambiente *Weibull* vamos estender o resultado para ambientes β -dimensionais. Segue de (4.21) que

$$\langle \dot{E}(\nu) \rangle = E_0 + \nu (\Omega^* - \Omega_0) \lambda \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta \Gamma\left[1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^\beta\right]. \quad (4.32)$$

Para qualquer dimensão, observamos resultados qualitativamente idênticos aos ilustrados no exemplo 3.3, figura 3.2 (a).

4.4.2 Ganho ou Perda Energética?

Dado um ambiente *Weibull*, $\Theta \equiv \{\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau\}$, com alvos que fornecem energia bruta ϵ , e probabilidade $P_{\dot{E} < E_0}$ de observarmos a redução da reserva energética de um forrageador, com taxa metabólica Ω_0 , durante um PBI corresponde a área limitada pelo intervalo $(0, E_0]$. Portanto

$$P_{\dot{E} < E_0} \equiv \int_0^{E_0} f_{\dot{E}}(E) dE = F_{\dot{E}}(E_0) - F_{\dot{E}}(0) = F_{\dot{E}}(E_0), \quad (4.33)$$

onde usamos $F_{\hat{E}}(0) = 0$ pois \hat{E} é definido sobre o intervalo estritamente positivo. Usando a **FD** em (4.28) encontramos $P_{\hat{E} < E_0}(\beta, \lambda_0, \lambda, \Omega_0)$ expresso via

$$P_{\hat{E} < E_0}(\beta, \lambda_0, \lambda, \Omega_0) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{\epsilon}{\lambda \Omega_0} \right)^\beta \right]. \quad (4.34)$$

Nas mesmas condições, a probabilidade de ganho energético, $P_{\hat{E} < E_0}$, é dada por

$$P_{\hat{E} < E_0} \equiv \int_{E_0}^{E_{max}} f_{\hat{E}}(E) dE = F_{\hat{E}}(E_{max}) - F_{\hat{E}}(E_0) = 1 - F_{\hat{E}}(E_0). \quad (4.35)$$

Este é o resultado esperado e segue da conservação da probabilidade total.

Exemplo 4.1. Dado um ambiente $\Theta \equiv \{\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau, \epsilon\}$, consideramos o **PBI** e vamos discutir a probabilidade de perda/ganho energético de um forrageador, com taxa metabólica: (a) $\Omega_0 = \Omega^{**}$ e (b) $\Omega_0 = \Omega^*$.

Solução: **(a)** Para o forrageador com $\Omega_0 = \Omega^{**} = \epsilon/\lambda_0$ a equação (4.34) fornece

$$P_{\hat{E} < E_0}(\beta, \lambda_0, \lambda, \Omega_0) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] = 1.$$

Portanto a probabilidade de redução da reserva energética é de 100%.

(b) Para o forrageador com $\Omega_0 = \Omega^* = \epsilon/\lambda_1$, a equação (4.34) fornece

$$P_{\hat{E} < E_0}(\beta, \lambda_0, \lambda, \Omega_0) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^\beta \right] < 1.$$

usamos $\lambda_1 \geq \lambda_0$, que garante o argumento negativo na exponencial.

Neste caso podemos obter probabilidade não-nulas de ganho energético. Neste exemplo concluímos, novamente, que $\Omega_0 < \Omega^*$ é uma condição para sobrevivência e $\Omega_0 \geq \Omega^{**}$ é uma garantia de morte.

4.4.3 Probabilidade de Sobrevivência e Morte na ADL

Conhecemos a **FD** da taxa líquida de ganho, $F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$. Usando as definições 3.6.2 e 3.6.3 expressas em termos de $F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ calculamos imediatamente a probabilidade de morte

e sobrevivência respectivamente via $P_M = F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ e $P_S = 1 - P_M$.

$$\begin{aligned} P_M &= F_{\hat{\Omega}}(\text{Min}(0, \Omega_{Max})), \\ P_S &= 1 - F_{\hat{\Omega}}(\text{Min}(0, \Omega_{Max})). \end{aligned} \quad (4.36)$$

com Ω_{Min} e Ω_{Max} dados em (3.33) e $F_{\hat{\Omega}}(\Omega)$ dado em (4.29).

Garantia de Morte, ($\Omega_0 \geq \Omega^{**}$)

Neste caso, temos $\text{Min}(0, \Omega_{Max}) = \Omega_{Max} \leq 0$, portanto Ω não estará definido sobre o intervalo positivo. A integração sobre o intervalo negativo é necessariamente igual a 1, pois corresponde à integração sobre todo o intervalo de definição de Ω . Com isto em mente e aplicando a conservação da probabilidade, obtemos

$$\begin{aligned} P_M &= F_{\hat{\Omega}}(\Omega_{Max}) = 1, \\ P_S &= 1 - F_{\hat{\Omega}}(\Omega_{Max}) = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Esperança de Sobrevivência da Busca Ideal no Ambiente de Busca *Weibull*, ($\Omega_0 < \Omega^{**}$)

Neste caso, temos $\text{Min}(0, \Omega_{Max}) = 0$, portanto Ω estará definido sobre o intervalo positivo e negativo. As probabilidades de morte e sobrevivência são

$$P_M = F_{\hat{\Omega}}(0) = \exp \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta - \left(\frac{\epsilon}{\lambda \Omega_0} \right)^\beta \right], \quad (4.38)$$

$$P_S = 1 - F_{\hat{\Omega}}(0). \quad (4.39)$$

Note que para $\Omega_0 = \Omega^{**} = \epsilon/\lambda_0$ o argumento da exponencial se anula, resultando em garantia de morte $P_M = 1$. Repare ainda que $\Omega_0 < \Omega^{**}$ garante que $F_{\hat{\Omega}}(0)$ será uma exponencial com argumento negativo, portanto, quanto menor a taxa metabólica Ω_0 , mais negativo o argumento e menor a probabilidade de morte. Como já havíamos adiantado no capítulo anterior, concluímos que a probabilidade de morte só pode ser nula para um forrageador com taxa metabólica nula. Estas conclusões são as mesmas obtidas no exemplo 4.1, pois a equação (4.38) fornece o mesmo resultado obtido em (4.34).

Coefficiente de Adaptação

Uma espécie com taxa metabólica Ω_0 estará adaptada ao **AB** quando a probabilidade de sobrevivência for maior do que probabilidade de morte. Portanto, o coeficiente de adaptação é definido como a razão $C_A = \frac{P_S}{P_M} = \frac{1}{P_M} - 1$. Usando (4.38), obtemos

$$C_A = \exp \left[\left(\frac{\epsilon}{\lambda \Omega_0} \right)^\beta - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta \right] - 1. \quad (4.40)$$

Temos $C_A = 0$ para $\Omega_0 = \Omega^{**}$. Espécies adaptadas ao ambiente *Weibull* –na **ADL**– deverão satisfazer a condição de adaptação $C_A \geq 1$. Vamos expressar esta condição em função da taxa metabólica Ω_0 da espécie como segue

$$\Omega_0 \leq \frac{\epsilon}{\lambda} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^\beta + \ln(2) \right]^{-1/\beta} \quad (\text{Espécies Adaptadas}) \quad (4.41)$$

Para todo β temos $\lambda \approx \langle w \rangle$. Notamos que a condição acima é semelhante à condição de sobrevivência definida em (3.29).

4.5 Considerações Finais e Conclusão

Nosso modelo de busca aleatória descreve sistemas determinísticos (basicamente quando $N = 1$) como casos particulares. Um caso particularmente relevante é a busca ideal, que conduz à maximização da eficiência energética. Introduzimos o conceito de processo de busca ideal visando usá-lo como limite de busca aleatória. Definimos **AB** multidimensionais e mostramos que a **FDP** do espaçamento entre alvos adimensionais é descrita pela distribuição *Weibull*. Em seguida descrevemos as propriedades dos **AB** *Weibull*. Mostramos que, nas condições do **PBI**, o teorema 4.1.1 fornece a densidade exata da métrica, expressa em termos da densidade do espaçamentos entre alvos do **AB**. Utilizando a métrica, aplicamos o formalismo do capítulo anterior para obter a densidade da eficiência energética e o balanço energético.

Processo de Busca Ideal no Ambiente *Weibull* Destrutivo: Simulação Empiricamente Fundamentada na Busca Determinística Observada entre Primatas (*Ateles geoffroyi*)

Neste capítulo simulamos um sistema que se aproxima de um ambiente ecológico real e que satisfaz as condições, vistas na definição 4.1.1, de um processo de busca ideal. Estudamos as questões gerais anteriores para uma caminhada determinística. O processo de busca tem lugar em ambiente de busca *Weibull* com alvos destrutivos que, uma vez detectados e consumidos, tornam-se indisponíveis para visitas futuras. Nosso foco é estudar como a métrica é afetada por perturbações na topologia ambiental, por isso, variamos as dimensões do ambiente retangular fechado ($A/L \times L$), de modo a produzir uma variedade de ambientes com dimensão topológica $1 \leq \beta \leq 2$. Como esperado, a métrica do processo de busca apresenta escalas características em uma ($L \rightarrow 0$) e duas ($A/L \sim L$) dimensões. No entanto, encontramos invariância de escala para uma geometria intermediária, quando o ambiente é uma faixa estreita. Este resultado é geometricamente induzido por um mecanismo dinâmico de armadilhas, conduzindo a uma distribuição de *Lei de Potência* para o tamanho dos passos. Este fenômeno foi primeiramente reportado por um experimento de campo realizado no *Santuário de Otoch Ma'ax Yetel Kooh*, na área de floresta ao redor do lago *Punta Laguna*, na *Península de Yucatan*, México. Os resultados aqui discutidos estendem a análise previamente publicada em [96].

5.1 Considerações Iniciais

5.1.1 Notação

Neste capítulo utilizaremos simulações computacionais. Denotaremos os estimadores de densidades de probabilidade –histogramas gerados na aproximação via simulação computacional– com um acento *circunflexo*. Desta forma, o estimador da FDP da métrica $f_{\hat{\ell}}(\ell)$ e da FDP dos alvos $f_{\hat{w}}(w)$ são, respectivamente $\hat{f}_{\hat{\ell}}(\ell)$ e $\hat{f}_{\hat{w}}(w)$. Denotaremos os estimadores dos valores esperados com o supraescrito (ASC) ou pela notação de média aritmética. Assim, o estimador de $\langle \ell \rangle$ e $\langle w \rangle$ são representados por \bar{w} e $\bar{\ell}$.

5.2 O Experimento

Os dados foram coletados na área de floresta ao redor do lago Punta Laguna ($2 \times 0,75$ km), na *Península de Yucatan*, México ($20^{\circ}380'$ N, $87^{\circ}380'$ W, 14 m de altitude). Esta região é caracterizada por um clima sazonalmente seco, tropical, com temperatura média anual de cerca de 25°C e precipitação média anual de cerca de 1500 mm, dos quais 70% se concentra entre maio e outubro. O fragmento florestal principal, perto do lago, consiste de 60ha de floresta semi verde. Este, por sua vez, é cercado por uma floresta de sucessão secundária sobre 30 – 40 anos de idade em uma área de 5,367ha que recentemente foi declarada como uma área protegida, o *Santuário de Otoch Ma'ax Yetel Kooh*, na área de floresta ao redor do lago *Punta Laguna*.

Macacos-aranha usam ambos os tipos de vegetação, apesar de gastar mais de 70% do seu tempo diário e todas as noites na floresta intermediária [111]. Trilhas foram cortadas em todo o fragmento de floresta intermediária e por uma parte da floresta sucessional. Nessas trilhas, árvores e outros marcos foram usados para fazer mapas precisos da área. Condições de visibilidade são muito boas, especialmente quando os macacos utilizam as copas em alturas de 5 a 25 m. Mais detalhes sobre o local de estudo, incluindo a composição de árvore e uma densidade de espécies importantes de árvores, pode ser encontrada em [111].

5.3 Ambiente Computacional

Consideramos o modelo de caminhada determinista que foi originalmente apresentado em [33], para descrever a locomoção dos macacos-aranha durante o forrageamento [19, 22, 111]. Definimos uma região retangular da área A e comprimento $L_1 = L$ e $L_2 = A/L$ ao longo da direção vertical (*eixo-y*) e horizontal (*eixo-x*), respectivamente. Dentro deste domínio, um total de N_a pontos alvos são inicialmente distribuídos aleatoriamente. A configuração da região de busca está representada esquematicamente na figura 5.1 (a). Em todas as simulações, definimos $N_a = 2.5 \times 10^7$ e $A = 1$. Nestes experimentos as fontes de alimentos são destruídas ao serem consumidas sugerindo um ambiente **destrutivo**. Aproximaremos este ambiente utilizando **AB Weibull destrutivos**.

5.3.1 Definição do AB Weibull Destrutivo

Definição 5.3.1 (Ambiente de Busca *Weibull*). Variedade topológica β -dimensional encerrando uma distribuição arbitrária de alvos adimensionais. O ambiente é descrito pelo vetor de parâmetros

$$\Theta \equiv \{\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau\} \quad (\text{Ambiente Weibull}) \quad (5.1)$$

Trata-se de um ambiente contínuo, com dimensão β . Os alvos são adimensionais ($r = 0$), destrutíveis ($\tau \rightarrow \infty$) –pois o tempo de regeneração de um alvo previamente consumido é arbitrariamente grande– e espaçados pela distância típica $\lambda \geq \lambda_0 \geq 0$.

5.3.2 Parâmetros dos AB 1D, 2D e Transição (β D)

Na figura 5.2 (a) apresentamos a distribuição $\hat{f}_{\hat{w}}(w/\bar{w})$ da separação das distâncias w_j para as três seguintes situações: O limite 2D com $L/\lambda_a \approx 4978.56$ ($L = 1$ e $\lambda_a = 2.00861 \times 10^{-4}$), o limite 1D com $L/\lambda_a \approx 9.99474 \times 10^{-3}$ ($L = 2 \times 10^{-5}$ e $\lambda_a = 2.00105 \times 10^{-3}$) e na região de transição com $L/\lambda_a \approx 4.21598$ ($L = 8.82 \times 10^{-4}$ e $\lambda_a = 2.09204 \times 10^{-4}$). As distribuições esperadas, *Poisson-Exponencial* $\hat{f}_{\hat{w}}(w/\bar{w}) = \exp[w/\bar{w}]$ e a *Weibull-Gaussiana* $\hat{f}_{\hat{w}}(w/\bar{w}) = (\pi/2)(w/\bar{w}) \exp[-\pi w^2/(4\bar{w}^2)]$, são recuperadas nos casos 1D e 2D.

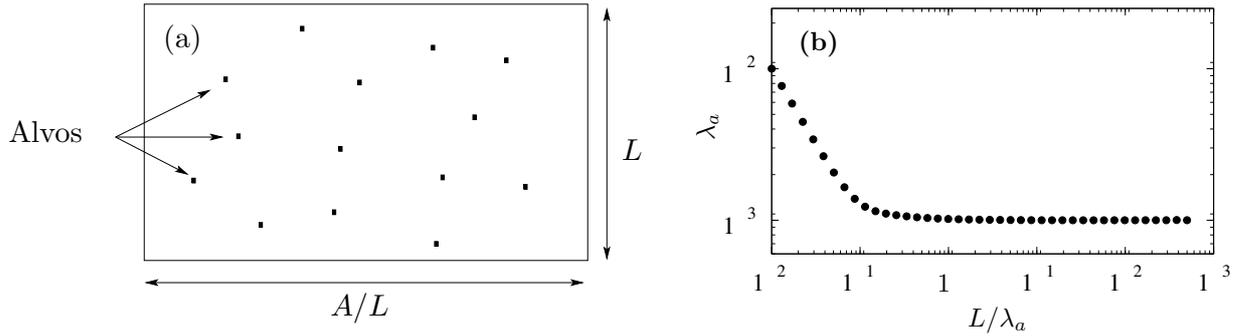


Figura 5.1: **(a)** Esquemática do AB. Os quadrados pequenos representam os alvos aleatoriamente distribuídos. **(b)** λ_a em função de L/λ_a . Para $L/\lambda_a \gg 1$ (regime 2D), λ_a é a constante $1/\sqrt{N}$, enquanto que para $L/\lambda_a \ll 1$ (1D), λ_a segue como $1/(NL)$. O cruzamento tem lugar para L/λ_a em torno da unidade. Os parâmetros que definem os regimes 1D, 2D e o regime de transição estão definidos na seção 5.3.2.

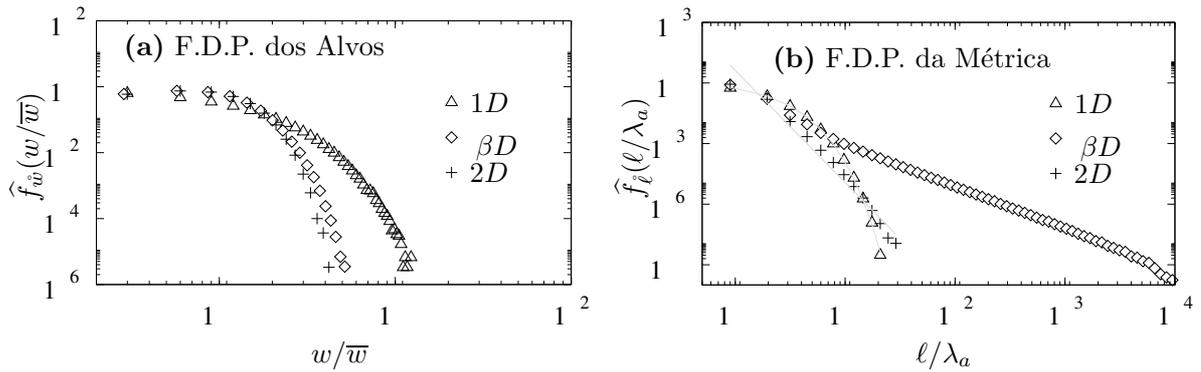


Figura 5.2: **(a)** Densidades da métrica na ASC, determinadas pela FDP da distâncias entre alvos mais próximos $\hat{f}_{\hat{\ell}(\ell)} = \hat{f}_{\hat{x}}(x/\lambda_0)$, para três valores de L/λ_a correspondentes aos casos 2D (cruz), 1D (triângulo), e região de transição (diamante). Estes valores foram definidos na seção 5.3.2, como segue: o limite 2D com $L/\lambda_a \approx 4978.56$ ($L = 1$ e $\lambda_a = 2.00861 \times 10^{-4}$), o limite 1D com $L/\lambda_a \approx 9.99474 \times 10^{-3}$ ($L = 2 \times 10^{-5}$ e $\lambda_a = 2.00105 \times 10^{-3}$) e na transição, βD , $L/\lambda_a \approx 4.21598$ ($L = 8.82 \times 10^{-4}$ e $\lambda_a = 2.09204 \times 10^{-4}$). Note que a curva intermediária (regime de transição) está próximo do caso 2D. **(b)** FDP normalizadas do tamanho do passo da caminhada $\hat{f}_{\hat{x}}(x/\lambda_a)$ –aqui no PBI, corresponde à métrica– para os mesmos parâmetros que na figura (a). Os triângulos (cruz) representam o limite 1D (2D). As curvas mostram os ajustes $1.3 \exp[-0.92\ell/\lambda_a]$ (tracejado) e $3.1(\ell/\lambda_a)^{-5.3}$ (contínua). Observe que as curvas do regime 1D (triângulos) são idênticas nas figuras (a) e (b). Este resultado motivou a proposição 5.5.1.

5.3.3 Propriedades Ambientais

Inicialmente o **AB Weibull destrutivo** é idêntico ao ambiente da definição 4.2.3, discutido no capítulo anterior. À medida que o processo de busca evolui o **forrageador** detecta e consome alvos, fragmentando o ambiente e alterando a distância entre alvos para $\beta > 1$.

Como discutimos na seção 3.9.1, o ambiente computacional está sujeito à limitações específicas quanto a quantidade de alvos representados e o diâmetro do ambiente. Isto tem implicação sobre algumas grandezas, como o espaçamento típico entre alvos¹ e o truncamento do passo da caminhada aleatória.

Propriedades 5.3.1 (Ambiente Computacional). O ambiente computacional, usado na simulação tem as propriedades abaixo:

1. Ambiente de busca retangular com área unitária, $A = 1$. Largura L e comprimento A/L ;
2. Quantidade finita de alvos, N_a . Varia em função da densidade de alvos considerada;
3. Condição de contorno de paredes rígidas;
4. Truncamento do passo da caminhada aleatória não é necessário no processo de busca ideal;
5. Espaçamento médio entre alvos dado por, $\lambda_a = \left(\frac{V_\beta}{N_a}\right)^{1/\beta}$;
6. As distâncias notáveis da definição 4.2.5 são válidas para o **AB** inicial;
7. O valor esperado da separação entre primeiros vizinhos, $\langle w \rangle$, é estimado via

$$\langle w \rangle \approx \bar{w} \equiv \frac{1}{N_a} \sum_j^{N_a} w_j. \quad (5.2)$$

Como L pode ser tomado no intervalo $[0, 1]$, temos dois casos limites. Quando $L = \mathcal{O}(1)$ o processo de busca ideal tem lugar num espaço $2D$. O espaçamento médio segue da equação (4.7), $\lambda_a = \sqrt{1/N_a}$. Por outro lado, como $L \rightarrow 0$ o domínio é $1D$ e $\lambda_a = 1/(LN_a)$. O cruzamento entre estes dois regimes é encontrado pela variação L . A figura 5.1 (b) mostra λ_a calculado numericamente como uma função de L/λ_a . Os dois comportamentos limites são claramente vistos e separados por uma passagem emergente em torno de $L/\lambda_a \approx 1$. A seguir, vamos usar L/λ_a como o parâmetro principal do modelo.

¹Estamos supondo ambientes com distribuição homogênea de alvos.

5.4 Heurística Computacional

Definição 5.4.1 (Heurística Computacional). Descrevemos a heurística de busca utilizada na simulação, baseada na seção 3.9.2. As regras dinâmicas são:

1. **Condição Inicial:** Construimos um ambiente *Weibull* sorteando aleatoriamente a posição dos alvos. Em seguida, sorteamos a posição inicial do *forrageador*, sobre um dos alvos;
2. **Caminhada-busca:** um vez posicionado sobre um alvo inicial, o *forrageador* passa diretamente para o alvo disponível mais próximo;
3. **Detecção de alvos:** o *forrageador* não volta a qualquer sítio visitado anteriormente, a busca é destrutiva, ou seja, o número total de sítios diminui à medida que são encontrados ao longo da caminhada;
4. **Recursão:** a regra (2), *caminhada-busca*, é repetida recursivamente até que a condição de parada seja verificada;
5. **Condição de parada:** O evento que determina o fim da simulação é a detecção de $\nu = 10^5$ alvos;
6. **Réplicas do AB:** As densidades de probabilidade e valores esperados são aproximados por histogramas e médias obtidas pela média aritmética dos resultados de $\nu_R = 10^3$ réplicas do AB.

A figura 5.3 ilustra uma trajetória de busca governada pela heurística descrita acima. O AB ilustrado corresponde ao caso da transição descrito na seção 5.3.2.

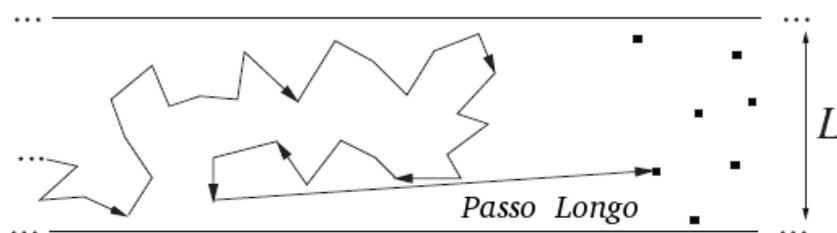


Figura 5.3: No regime de transição, o AB é uma faixa estreita. Neste caso o forrageador move-se em média para uma direção, quando a trajetória de busca se auto-intercepta, o forrageador é forçado a executar um salto muito longo para retornar à direção original de caminhada.

5.5 Discussão e Análise dos Resultados

5.5.1 Parâmetros Típicos

Consideramos ambientes com área $A = 1$, encerrando distribuições homogêneas de $N_a = 2.5 \times 10^7$ alvos aleatoriamente posicionados. A simulação do processo de busca termina quando $10^3 < \nu < 10^6$ alvos são visitados. Repetimos o processo de busca sobre $10^2 < \nu_R < 10^3$ réplicas do AB para calcular valores médios e histogramas, que correspondem a valores esperados e densidades de probabilidades na aproximação via simulação computacional.

5.5.2 Métrica do Processo de Busca Ideal na Aproximação via Simulação Computacional

Revisitamos um modelo determinístico originalmente proposto em [33, 111]. Os resultados aqui discutidos estendem a análise previamente publicada em [96]. Trata-se de um processo de busca ideal **destrutivo** onde a topologia ambiental muda, de uma para duas dimensões. Como reportado em [33], para certas condições topológicas, muito particulares, este tipo de dinâmica surpreendentemente revela uma métrica superdifusiva, com **FDP Lei de Potência**. Aqui vamos revelar os mecanismos que conduzem ao tal comportamento, mostrando que a transição associada a determinadas topologias do ambiente deve-se a um efeito de espiralamento –proposição 5.5.2. As consequências deste fenômeno assemelham-se a um ponto crítico em termodinâmica, mesmo que não haja nenhuma transição de fase no sistema real (porém este aspecto não será discutido em detalhes no presente trabalho).

A figura 5.2 (a) mostra a FDP do espaçamento inicial entre alvos, $\hat{f}_{\hat{w}}(w)$. A figura 5.2 (b) mostra a densidade da métrica na aproximação via simulação computacional –obtida em uma caminhada de ν passos– para três valores de L/λ_a correspondente aos casos 2D (cruz), 1D (triângulo), e região de transição (diamante). Estes valores encontram-se definidos na seção 5.3.2.

Comparativo das curvas 1D (triângulo), nas figuras 5.2 (a) e (b)

Observação 5.5.1: Métrica 1D. Aparentemente o processo de busca ideal no **AB Weibull destrutivo** unidimensional não é influenciado pela natureza destrutiva dos alvos. No processo de busca ideal o **forrageador** caminha saltando até o vizinho mais próximo. Quando $\beta = 1$ observamos uma situação muito particular. Na condição inicial, se o **forrageador**

estiver sobre um alvo, cujo vizinho mais próximo esteja situado a sua direita (esquerda), o **forrageador**, necessariamente, terá que caminhar para a direita (esquerda) até o fim da simulação. Portanto, o **forrageador** nunca poderá revisitar a região do **AB** que foi modificada. Desta forma a caminhada do **forrageador** não é afetado pela natureza destrutiva dos alvos.

Comparativo das curvas 2D (cruz), nas figuras 5.2 (a) e (b)

Observação 5.5.2: Métrica 2D. No caso bidimensional, $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)$ difere marcadamente do padrão de Weibull (isto é, uma distribuição Gaussiana ponderada) da distância mais próxima $\widehat{f}_{\bar{w}}(w/\bar{w})$. A curva é mais larga, mas pode ser bem ajustado por uma *Lei de Potência* rapidamente decrescente com expoente próximo de 5.3. Na verdade o comportamento é *Gaussiano*, baseado no teorema do limite central com segundo momento convergente [36, 112, 113].

Comparativo das curvas transição (diamante), nas figuras 5.2 (a) e (b)

Observação 5.5.3: Métrica da transição. Na região de transição, $\ell/\lambda_a \approx 4.21598$, a métrica claramente exhibe uma cauda muito longa, como mostrado na figura 5.2. Há uma probabilidade pequena, mas não desprezível, de caminhadas longas. Neste caso, aplicamos o formalismo do apêndice B para estimar a melhor distribuição candidata para descrever estas densidades de probabilidade. Encontramos numericamente que $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a) (\ell/\lambda_a)^{-\mu}$ com $\widehat{\mu} \approx 2.2$ ($\widehat{\mu} \approx 2.15$ considerando apenas o intervalo $10 < \ell/\lambda_a < 10^4$). Assim, a distribuição tem um comportamento da *Lei de Potência* com segundo momento divergente, semelhante aos processos de Lévy. Ilustramos, na figura 5.3, o fenômeno de espiralamento –veja a proposição 5.5.2– que produz a cauda longa da métrica.

5.5.3 Métrica do Processo de Busca Ideal Unidimensional

A observação 5.5.1 sugere que o processo de busca ideal no **AB Weibull destrutivo** unidimensional preserva a dinâmica do processo de busca ideal não **destrutivo** discutido no capítulo anterior. No caso unidimensional, a dinâmica destrutiva parece não trazer implicações sobre a métrica e vemos exatamente a mesma dinâmica do processo de busca ideal no **AB Weibull**, discutido no capítulo anterior. Detalhamos estas verificações na proposição 5.5.1

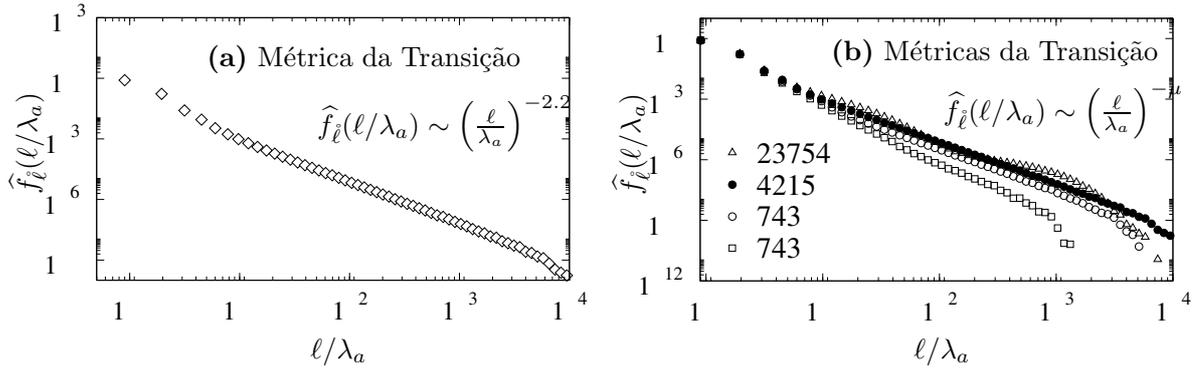


Figura 5.4: (a) Caso intermediário (diamante). Aqui, o ajuste é $0.23(\ell/\lambda_a)^{-2.2}$. (b) A distribuição $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)$ ajustada como $(\ell/\lambda_a)^{-\mu}$. Os parâmetros são $L/\lambda_a = 2.37954$ e $\widehat{\mu} = 2.3155$ (triângulo aberto); $L/\lambda_a = 4.21598$ e $\widehat{\mu} = 2.22267$ (círculo cheio); $L/\lambda_a = 9.74390$ e $\widehat{\mu} = 2.40229$ (círculo aberto); $L/\lambda_a = 22.1615$ e $\widehat{\mu} = 2.65706$ (quadrado cheio); $L/\lambda_a = 38.2288$ e $\widehat{\mu} = 2.96385$ (quadrado aberto)

Proposição 5.5.1. As propriedades dinâmicas do processo de busca ideal no ambiente *Weibull destrutivo* unidimensional correspondem às vistas no processo de busca ideal no ambiente *Weibull não-destrutivo*. Demostramos esta afirmação, confirmando que a métrica do caso *destrutivo* é idêntica à métrica do caso *não-destrutivo*. Nos dois casos obtivemos a FDP dos alvos primeiros vizinhos no ambiente *Weibull* unidimensional: $\widehat{f}_{\bar{w}}(w) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{w}{\lambda}\right)$. Nos convencemos disto comparando as curvas com triângulo nas figuras 5.2 (a) e (b). Ambas correspondem a $\widehat{f}_{\bar{w}}(w)$ do caso 1D. Assim, temos uma verificação do teorema 4.1.1. Veja a observação 5.5.1.

Todos os resultados discutidos nos exemplos 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 aplicam-se aqui.

5.5.4 Métrica da Transição

Estimador da FDP da Métrica, $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)$

Os resultados discutidos até o momento sugerem que o passo médio da caminhada aumenta na região de transição. De fato, dentro do intervalo de $2 < L/\lambda_a < 30$, a métrica, $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)$, pode ser muito bem ajustada via $\widehat{f}_{\ell}(\ell/\lambda_a)^{-\mu}$ com $2 < \widehat{\mu} < 3$. Isso nos leva a considerar os seguintes modelos como candidatos –veja a seção B.2– capazes de reproduzir a distribuição de cauda dos dados: *Exponencial*², *Exponencial Esticada*³, *Log-Normal* e distribuição *Pareto* truncada.

²Este não é um modelo promissor mas é relevante a título de comparação pois seu fracasso fortalece a hipótese da distribuição de cauda longa.

³A distribuição exponencial esticada também é conhecida como a distribuição de *Weibull Cumulativa Complementar*. Notável por ser a função característica da distribuição de *Lévy* simétrica alfa-estável.

Não podemos descartar a possibilidade de termos deixado de fora uma distribuição que se ajuste ainda melhor aos dados, porém os modelos considerados aqui, já são apropriados para analisar a situação. As FDPs que melhor se ajustam são: *Pareto* truncada, *Exponencial Esticada*, *Log-Normal* e *Exponencial*. Listadas em ordem decrescente de qualidade de ajuste no intervalo $\ell/\lambda_a > 10$.

O procedimento, descrito no apêndice B, consiste em utilizar os EMV e a estatística de *Kolmogorov-Smirnov* para validar um modelo como candidato legítimo (modelo capaz de descrever os dados) e em seguida comparar os modelos utilizando o teste da razão de verossimilhança logarítmica. Utilizamos os métodos discutidos e implementados por A. Clauset e colaboradores [114]. Estes autores gentilmente disponibilizam os algoritmos tratados no artigo [114], na página WEB [115]. Atualmente implementações em linguagem R e Matlab estão disponíveis.

Na tabela 5.1 mostramos o expoente $\mu \equiv \alpha + 1$, da *Lei de Potência*, para alguns valores de L/λ_a . Algumas das densidade listadas na tabela podem ser vistas na figura 5.4 (b). Para fins de comparação, graficamos na figura 5.4 (a), a densidade correspondente ao expoente $\hat{\mu}$ mais negativo observado.

Tabela 5.1: Expoentes da Lei de *Pareto* na Transição. Estimativas do expoente, $\hat{\mu}$, para a métrica $\hat{f}_i(\ell/\lambda_a)$ ajustada via $(\ell/\lambda_a)^{-\mu}$. Mostramos alguns AB no intervalo próximo da região de transição, $2 < L/\lambda_a < 30$.

L/λ_a	2.37	3.17	4.21	5.58	7.38	9.74	12.82	16.86	22.16	29.10
$\hat{\mu}$	2.315	2.285	2.222	2.283	2.334	2.402	2.48	2.52	2.65	2.78

Para entender os resultados acima, retornamos a dinâmica do processo de busca determinista. No limite 1D ($L \rightarrow 0$), o *forageador* tende a seguir uma linha quase reta, com apenas algumas mudanças de direção, ocorrendo principalmente durante os primeiros passos. Veja a figura 5.5 (c) que mostra a coordena X da posição do *forageador* ao longo do processo de busca. Por outro lado, o limite 2D ($L \rightarrow 1$) é caracterizado por um espaço disponível muito maior em ambas as direções. Embora a destruição dos locais visitados anteriormente faça com que o *forageador* tenda a mover-se para a frente com maior probabilidade, há uma fração finita de grandes ângulos de retorno ao longo do processo de busca. Veja a figura 5.5 (a) que mostra a coordenada X da posição do *forageador* ao longo do processo de busca. Note o comportamento isotrópico exibido pela trajetória de busca, indicando que o *forageador* oscila em torno da posição inicial. A figura figura 5.5

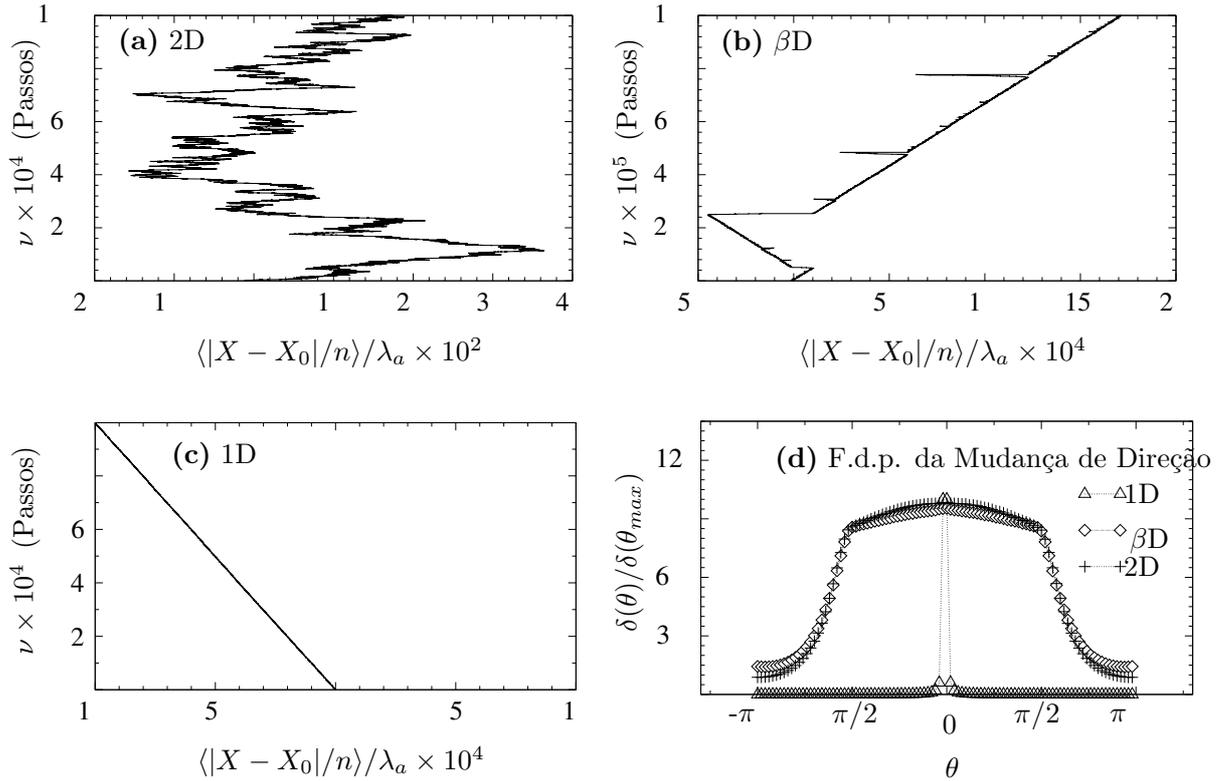


Figura 5.5: Número de passos versus a projeção horizontal da posição do **forrageador** são mostrados para a região no 2D (a), região de transição (b), e 1D (c). Note os passos essencialmente longos na região de transição (b). (d) Distribuição angular dos ângulos de retorno entre passos consecutivos. Os triângulos (1D), cruzes (2D), e diamantes (região de transição) correspondem aos mesmos casos das figuras (a), (b) e (c). A curva pontilhada (para os triângulos) é apenas um guia para os olhos.

(b) mostra a coordena X da posição do **forrageador** para o **AB** correspondente à transição. Observe a quebra do regime isotrópico marcado pela tendência de se mover predominantemente em uma direção. O resultado mais marcante são as mudanças bruscas de direção indicadas pelas “ranhuras” vistas na figura. Cada um destes desvios direcionais corresponde a um evento de espiralamento (ver a figura 5.3).

Proposição 5.5.2 (Efeito de Espiralamento). Espiralamentos se verificam quando a trajetória de busca se auto-intercepta. Este fenômeno é um processo dinâmico particularmente sensível à distância entre as duas bordas horizontais ou equivalentemente, para os valores de L/λ_a . Na verdade, para L/λ_a muito pequeno (1D) não há caminhos antiparalelos, enquanto que para L/λ_a grande (2D) a direção vertical extra fornece “rotas de fuga” de regiões pouco densas, impedindo grandes saltos nas regiões depauperadas. Nenhum desses dois aspectos, o viés direcional no caso 1D e uma dimensão extra fornecendo muitos caminhos de “escape”, estão presentes na região de transição. Ver a figura 5.3.

Para quantificar estes comportamentos, apresentamos na figura 5.5 (d) a distribuição

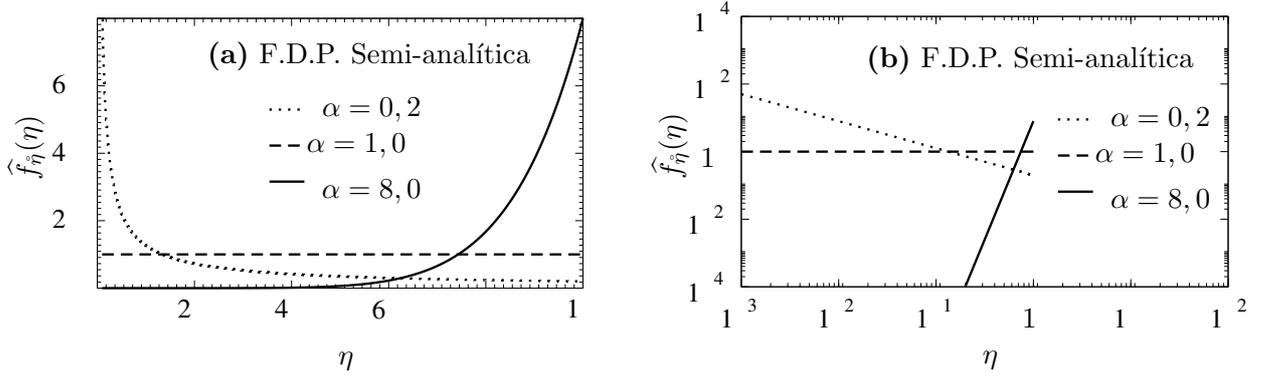


Figura 5.6: **(a)** Aproximação semi-analítica da FDP da eficiência energética do processo de busca ideal no ambiente de busca *Weibull*. A figura mostra $\hat{f}_{\hat{\eta}}(\eta)$ para as três expoentes de *Lévy*. **(b)** Gráfico da figura (a) na escala Log-Log.

angular $\delta(\theta)$ de ângulos entre dois passos consecutivos correspondentes aos exemplos das figuras 5.5 (a), (b) e (c). No limite 1D, a distribuição atingiu um pico de valores de ângulos muito pequenos, indicando que o *forrageador* raramente se desvia de um determinado sentido (esquerda ou direita, definida logo após poucos passos iniciais). No limite 2D existe um viés em direção à frente, no entanto, maiores ângulos de retorno são também prováveis de acontecer.

5.5.5 Aproximação Semi-Analítica da Eficiência Energética

Com base nos resultados obtidos na seção 5.5.4, assumiremos a distribuição de *Pareto*

$$\hat{f}_{\hat{\ell}}(\ell) = \frac{\alpha}{\ell_{min}^{-\alpha} - \ell_{max}^{-\alpha}} \frac{1}{\ell^{\alpha+1}}, \quad \ell_{min} \leq \ell \leq \ell_{max},$$

como a métrica apropriada para descrever os dados. Usamos $\ell_{min}/\lambda_a = 10$ e $\ell_{max}/\lambda_a = 10^4$. Os resultados da tabela 5.1 e da figura 5.4 são consistentes com as observações de campo do experimento [19, 22, 33, 111]. A métrica pode ser bem aproximada via leis de potência.

Usando a métrica obtida na aproximação via simulação computacional podemos aplicar o formalismo do capítulo 3 em um aproximação semi-analítica. A densidade da eficiência energética segue da aplicação da métrica de *Pareto* na definição da FDP da eficiência, (3.19), ou

$$\hat{f}_{\hat{\eta}}(\eta) = \alpha \eta^{\alpha-1}. \quad (\text{FDP da Eficiência Energética}) \quad (5.3)$$

A integração direta da densidade acima fornece a FD

$$\hat{f}_{\hat{\eta}}(\eta) = \eta^{\alpha}. \quad (\text{FD da Eficiência Energética}) \quad (5.4)$$

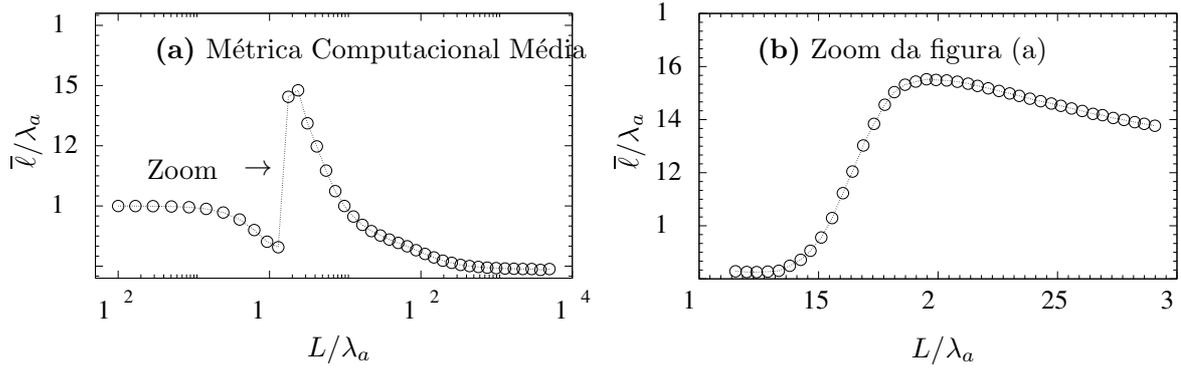


Figura 5.7: **(a)** Métrica computacional média, $\bar{\ell}$, em unidades de λ_a tomada pelo forrageador durante a busca em função de L/λ_a . A região onde $\bar{\ell}$ apresenta um pico, indicado pela seta, é mostrado em detalhe em **(b)**. As curvas contínuas são apenas guias para os olhos.

Quanto mais longa a cauda ($\alpha \ll 1$) mais a FDP concentra-se sobre η_{min}

$$\alpha \ll 1, \quad \hat{f}_{\hat{\eta}}(\eta) \rightarrow \delta(\eta - \eta_{min}) \quad \langle \eta \rangle \rightarrow \eta_{min}.$$

Por outro lado, quanto menor a cauda ($\alpha \gg 1$) maior a concentração sobre η_{max} , veja a figura 5.6,

$$\alpha \gg 1, \quad \hat{f}_{\hat{\eta}}(\eta) \rightarrow \delta(\eta - \eta_{max}) \quad \langle \eta \rangle \rightarrow \eta_{max}.$$

5.5.6 Robustez do Efeito de Espiralamento

Outra quantidade relevante é a média da métrica, $\bar{\ell}/\lambda_a$, mostrada na figura 5.7 (a) como uma função de L/λ_a . Da figura somos levados a concluir que o comprimento de passos na região de transição é realmente maior do que o observado nos limites de 1D e 2D. Temos um pico para $\bar{\ell}/\lambda_a$ na região de transição, com o máximo correspondente a $L/\lambda_a \approx 1.99 \approx 2$. Mostramos, em maior detalhe, a região correspondente à transição na figura 5.7 (b).

O cenário acima é confirmado através da análise de duas grandezas relacionadas com a dinâmica do processo de busca determinista. Em primeiro lugar, calcula-se a velocidade da deriva normalizada ao longo da direção horizontal x , definida como $\langle |X - X_0/n| \rangle / \lambda_a$ onde X_0 é a coordenada inicial e X é a coordenada do passo n . Mostramos na figura 5.8 (a) a velocidade de deriva como uma função de L/λ_a . Como esperado, anula-se no limite 2D. No entanto, o comportamento da curva na região de transição é particularmente interessante, como visto na figura 5.8 (b). Aqui, temos um mínimo local em torno $L/\lambda_a = 1.7094$. Além disso, o primeiro máximo local após este mínimo é $L/\lambda_a = 2.0368 \approx 2$, a mesma

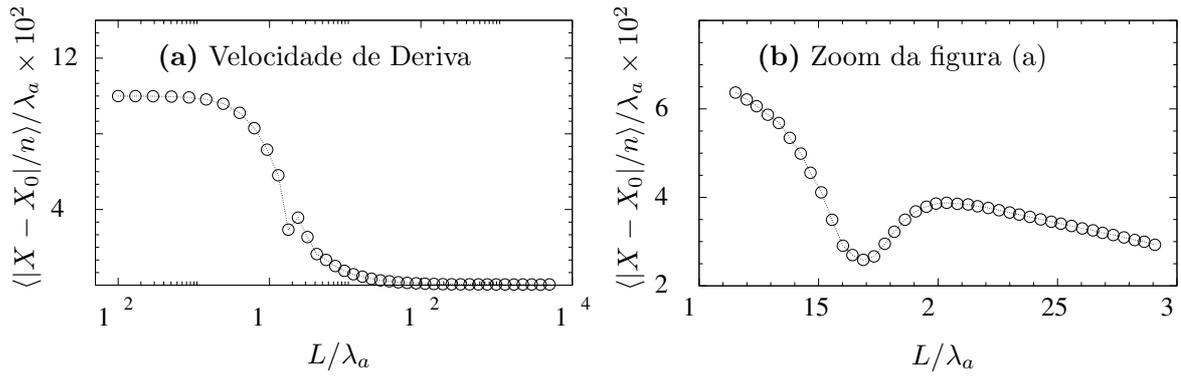


Figura 5.8: **(a)** A velocidade de deriva numérica ao longo do *eixo-x*, $\langle |X - X_0|/n \rangle / \lambda_a$ como uma função de L/λ_a . A seta indica a região de transição, onde há um ponto de inflexão para a deriva. **(b)** Aumento da região marcada em (a), mostrando um mínimo local em torno de $L/\lambda_a = 1.7094$. As curvas contínuas são apenas guias para os olhos.

posição para o máximo de $\bar{\ell}/\lambda_a$ visto na figura 5.7 (b). Até o presente momento, não temos uma clara explicação para tal fenômeno.

A segunda grandeza relevante é a fração de alvos visitados ao longo da trajetória do forrageador, definida por

$$\chi = \frac{M_{vis}}{M_0} \quad (5.5)$$

Aqui, M_{vis} é o número médio de alvos visitados na área de busca do forrageador e M_0 é o número total de alvos iniciais nessa área. A área de busca é definida pela região $[X_{max} - X_{min}] \times [Y_{max} - Y_{min}]$, onde os subscritos “min” e “max” representam os valores mínimos e máximos das coordenadas alcançados pelo forrageador durante uma caminhada completa. Assim, χ representa uma eficiência de varredura do forrageador. Para o regime 1D, todas os alvos são encontrados ao longo do caminho, de modo que $\chi = 1$. Por outro lado, no regime 2D, χ assume um valor constante pequeno. A passagem de um limite para o outro, como uma função da L/λ_a , é mostrada na figura 5.9(a). Novamente observamos um mínimo local na região de transição, como visto no “Zoom” da figura 5.9 (b).

5.6 Considerações Finais e Conclusão

Motivado pelos resultados de estudos anteriores, investigamos em mais detalhes – usando uma abordagem mais rigorosa aqui desenvolvida – um modelo de caminhada determinística onde o ambiente de busca destrutiva pode ser mudada de uma geometria 2D para uma 1D por meio do ajuste de um parâmetro de controle único, chamado, L/λ_a . O movimento do forrageador é regido pela regra dinâmica do processo de busca ideal “*ir para o alvo mais próximo*”. Em uma primeira análise, parece que o modelo deve levar a

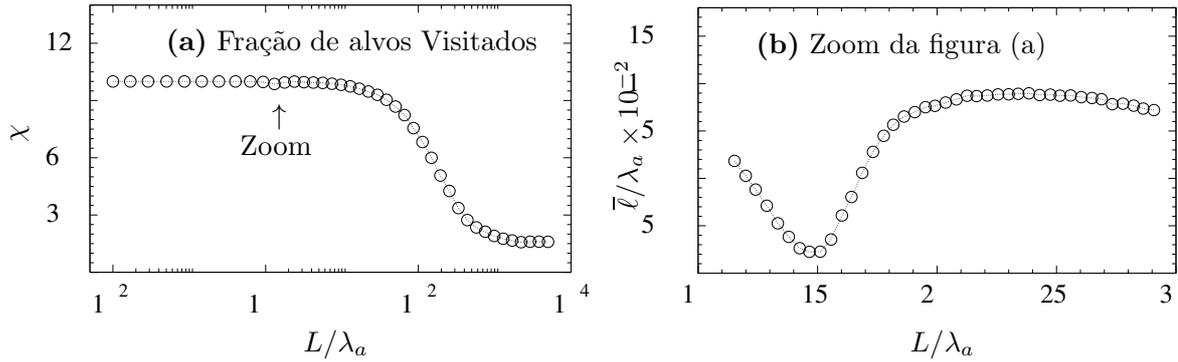


Figura 5.9: **(a)** Fração numérica de alvos visitados, χ como uma função de L/λ_a . **(b)** Aumento de resolução na região de transição indicada pela seta em (a). As curvas contínuas são apenas guias para os olhos.

um processo de *Poisson*, uma vez que a distribuição inicial dos alvos (que são destruídos após visitados) é aleatória. De fato, em ambos os casos limitantes, 1D e 2D, a métrica tem variância finita. No entanto, para alguns valores intermediários de L/λ_a , um processo dinâmico não trivial com variância muito grande tem lugar, combinando um grande número de passos relativamente pequenos com raros passos longos. Ele dá origem a uma distribuição Levyniana em que pode ser bem aproximada por uma distribuição de *Pareto* truncada, com expoentes característicos, $2 < \hat{\mu} < 3$. Por exemplo, $\hat{\mu} \approx 2.2$ para o caso mais difusivo, mostrado na figura 5.2 (a). Além disso, para valores do parâmetro de controle neste região de transição, observamos mudanças na velocidade de deriva e na fração de alvos visitados. Tais descobertas são interessantes uma vez que elas mostram que distribuições *Lei de Potência* também podem resultar em uma dinâmica simples de curto alcance combinados com uma restrição geométrica.

Assim, embora o presente estudo indique que o sistema está passando por um cruzamento entre os dois limites diferentes, a partir da discussão acima, não podemos descartar por completo a possibilidade de uma transição dinâmica. Esta questão está atualmente sendo investigada e será reportada no devido tempo.

Processos de Busca Aleatória Coletiva: Manter a Agregação do Grupo Usando Estratégias de *Lévy*

O caráter superdifusivo das caminhadas governadas por leis de potência é sabido garantir a dispersão rápida de n **fORAGEADORES** *Levynianos* que inicialmente estejam agrupados, [104, 105]. Então como efetuar buscas de *Lévy* sem fragmentar o grupo? Neste Capítulo, abordamos o processo de busca aleatória coletiva em que um grupo de **fORAGEADORES**, guiados por um **LÍDER**, estão a procura de **ALVOS** aleatoriamente localizados. Em tal tarefa há a necessidade de se manter o grupo agregado, de forma que existe uma restrição na dinâmica de forrageamento. Aqui discutimos então quatro modelos diferentes para o comportamento do sistema coletivo, com o **LÍDER** e **SEGUIDORES** realizando buscas gaussianas e/ou de *Pareto* truncadas. Em ambientes com baixa densidade de **ALVOS** mostramos que o forrageamento de *Pareto* é vantajoso para todo o grupo, quando comparado com a estratégia gaussiana. Mas para isso, mostramos que certas regras extras devem ser incorporadas na dinâmica dos **fORAGEADORES** garantindo um compromisso entre manter o grupo em conjunto e aumentar a eficiência global da busca seja cumprida. O exato caráter dessas regras depende de detalhes específicos do processo de forrageamento, como regeneração de **ALVOS** e custos de energia, [5, 6, 8, 116, 117], o que será mostrado a seguir.

6.1 Considerações Iniciais

6.1.1 Notação

Discutimos um processo de busca aleatória bidimensional e denotamos o vetor posição do **forrageador** por $\mathbf{R} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, cuja norma é $x = |\mathbf{R}|$. Escolhemos a variável x pois corresponde a notação utilizada nos Capítulos anteriores para denotar o comprimento do passo do **forrageador**. Usamos coordenadas cartesianas $\mathbf{R} = (X, Y)$ para ilustrar as trajetórias de busca e coordenadas polares $\mathbf{R} = (x, \phi)$ para definir as densidades de probabilidade. A FDP da caminhada bidimensional é a densidade conjunta $f_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}) = f_{\hat{x}}(x)f_{\hat{\phi}}(\phi)$. Tratamos duas classes de **forrageadores** (ou Buscadores). A primeira é a do **forrageador líder** –identificado pelo índice L – e a segunda classe, é formada pelos **seguidores** –identificados pelo índice S . Denotamos a densidade da caminhada do **líder** via $f_L(\mathbf{R}) = f_L(x)f_L(\phi)$ e a dos **seguidores** $f_S(\mathbf{R}) = f_S(x)f_S(\phi)$. Similarmente, N_L e N_S correspondem, respectivamente, à quantidade de passos executados pelo **líder** e a quantidade de **seguidores** (número de indivíduos) presentes no **bando**. As grandezas relevantes –detalhadas na seção 6.4– são: (i) a posição do i -ésimo **seguidor** após o j -ésimo passo do **líder**, denotada por $\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{X}_{i,j} + \mathbf{Y}_{i,j}$; (ii) o centro de massa do conjunto¹ de **seguidores** após o j -ésimo passo do **líder**, $\mathbf{R}_{CM,j}$; (iii) o raio do **bando** após o j -ésimo passo do **líder**, r_j ; e (iv) o coeficiente de separação entre o **bando** e o **líder** após o j -ésimo passo do **líder**, c_j .

6.2 Ambiente Gerado Computacionalmente

6.2.1 Definição do Ambiente de Busca

Utilizamos as duas variedades de ambientes *Weibull* definidos nos Capítulos anteriores. O ambiente de busca *Weibull não-destrutivo* foi definido na seção 4.2.3 e o destrutivo na seção 5.3.1

Definição 6.2.1 (Ambiente da busca aleatória coletiva).

$$\Theta_{ND} \equiv (\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau \rightarrow 0) \quad (\text{AB Weibull Não-Destrutivo}) \quad (6.1)$$

$$\Theta_D \equiv (\beta, r, \lambda, \lambda_0, \tau \rightarrow \infty) \quad (\text{AB Weibull Destrutivo}) \quad (6.2)$$

¹Alguns autores usam a expressão **bando** em vez de conjunto ou grupo.

Trata-se de um ambiente contínuo, com dimensão β . Os **alvos** são adimensionais ($r = 0$) e espaçados pela distância típica $\lambda \geq \lambda_0 \geq 0$. No caso não **não-destrutivo**, os **alvos** são regenerados imediatamente após serem detectados e consumidos ($\tau \rightarrow 0$). No caso destrutivo os **alvos** são eliminados da simulação após serem visitados ($\tau \rightarrow \infty$).

6.2.2 Propriedades Ambientais

Inicialmente o ambiente de busca *Weibull* destrutivo é idêntico ao ambiente não-destrutivo, mas à medida que o processo de busca aleatória evolui, o **forrageador** detecta e consome **alvos**, fragmentando o ambiente e assim alterando a distância entre **alvos**.

Como discutimos na seção 3.9.1, o ambiente (computacional) está sujeito à limitações específicas quanto a quantidade de **alvos** representados e o diâmetro do ambiente. Isto tem implicação sobre algumas grandezas, como o espaçamento típico entre **alvos**² e o truncamento do passo da caminhada aleatória.

Propriedades 6.2.1 (Ambiente Computacional). O ambiente computacional, usado na simulação, tem as propriedades abaixo:

1. Ambiente de busca de geometria quadrada, com lado M ;
2. Quantidade finita de **alvos**, N_a . Varia em função da densidade de **alvos** considerada;
3. Condição de contorno periódica;
4. Truncamento do passo da caminhada aleatória, $x_{max} = M$;
5. Espaçamento médio entre **alvos** dado por, $\lambda_a = \left(\frac{M^2}{N_a}\right)^{1/2}$;
6. As distâncias relevantes definidas em 4.2.5 são válidas aqui no ambiente de busca inicial;
7. O valor esperado da separação entre primeiros vizinhos, $\langle w \rangle$, é estimado via

$$\langle w \rangle \approx \bar{w} \equiv \frac{1}{N_a} \sum_j^{N_a} w_j. \quad (6.3)$$

²Estamos supondo ambientes com distribuição homogênea de **alvos**.

6.3 Heurística Computacional

Definição 6.3.1 (Heurística Computacional). Descrevemos a heurística de busca utilizada na simulação, seguindo de perto a seção 3.9.2. As regras dinâmicas são:

1. **Condição Inicial:** Construimos um ambiente *Weibull* sorteando aleatoriamente a posição dos **alvos**. Em seguida, sorteamos a posição inicial do **forageador**;
2. **Caminhada-busca:** O **bando** caminha de acordo com o modelo de caminhada aleatória coletiva definido na seção 6.4.4. Cada **seguidor** inspeciona a área circular de raio r_v ao longo da sua trajetória de busca. Se um alvo é detectado, o **forageador** procede de acordo com a regra (3);
3. **Detecção de alvos:** Um alvo será detectado se estiver a uma distância inferior a r_v de um **forageador**. O mesmo alvo pode ser revisitado inúmeras vezes na busca não-destrutiva enquanto na busca destrutiva cada alvo será detectado e consumido no máximo uma vez.
4. **Recursão:** a regra (2), **caminhada-busca**, é repetida recursivamente até que a condição de parada seja verificada;
5. **Condição de parada:** O evento que determina o fim da simulação é a detecção de $\nu = 10^5$ **alvos**;
6. **Réplicas do ambiente de busca:** As densidades de probabilidade e valores esperados são aproximados por histogramas. Quantidades de interesse são calculadas como médias aritméticas $\nu_R = 10^3$ réplicas do ambiente de busca.

6.4 Modelos de Caminhada Aleatória Coletiva

Nesta seção definimos quatro modelos de dinâmicas coletivas, baseadas em estratégias do tipo “siga-o-líder”. Relembramos que, por definição, um grupo é composto pelo **líder** e por um número arbitrário de **forageadores**, os **seguidores**, que são mutuamente ligados através de um conjunto de regras dinâmicas de movimento em duas dimensões. Mantemos os modelos tão simples quanto possível, mas ainda capturando a essência do comportamento coletivo.

Assumimos que as interações entre os membros do **bando** são intermediados pelo **líder**, de modo que as posições assumidas pelos **seguidores** não dependem diretamente umas das

outras. Na verdade elas oscilam em torno da trajetória descrita pelo líder. Neste sentido, uma correlação direta de estímulo-resposta existe apenas entre o líder e seguidores. Esta interação determina os valores do raio médio do grupo e coeficiente de separação entre o grupo e o líder, respectivamente denotada por r_j e c_j .

O caráter de coesão de um grupo se verifica quando as quantidades r_j e c_j não aumentam consideravelmente ao longo da dinâmica de busca. Também mencionamos que neste trabalho não estamos considerando a possibilidade realista de fragmentação do grupo devido à perda de contato, que ocorre, por exemplo, quando r_j e c_j tornam-se tão grandes que os seguidores não conseguem “ver” o líder. Assim, embora os modelos assumam que os seguidores sempre são capazes de detectar a posição do líder, não importando a distância de separação entre eles, fortes flutuações nessas quantidades –por exemplo, se r_j e c_j tornam-se maiores do que a habilidade real dos seguidores de perceber o deslocamento do líder– serão indicativos de regime de fragmentação do grupo.

Primeiramente discutiremos o comportamento do líder. Para a densidade da escolha de direção de voo, $f_L(\phi)$, usamos uma FDP uniforme, que resulta em caminhadas isotrópicas. Já, para a densidade do comprimento do passo da caminhada, $f_L(x)$, usamos uma FDP *Gaussiana* (modelo A) ou lei de *Pareto* truncada (modelos B, C e D). Neste último caso, tem-se que para qualquer passo,

$$f_L(x) \sim x^{-\mu_L}, \quad x_0 \leq x \leq x_{\max,L} \quad \text{e} \quad f_L(x) = 0 \text{ caso contrário.} \quad (6.4)$$

Aqui $\mu_L = \alpha_L + 1$ (ver a seção 2.7.7). O limite inferior x_0 representa o comprimento do passo mínimo. O comprimento do passo máximo é denotado por $x_{\max,L}$ (por razões que tornam-se claras na seção 6.5, vamos definir $x_0 = r_v$, onde r_v é o chamado “raio de visão” [5]).

Vimos que no caso de um único indivíduo, para $1 < \mu_L \leq 3$ é a escolha de parâmetros que leva a um regime eficaz [118] de caminhada superdifusiva (e truncada). Assim, faremos tal escolha para o líder também.

Passamos agora para a dinâmica dos seguidores. Para um grupo manter-se compacto, continuamente seguindo a dinâmica de um líder, os seguidores devem estar dentro de um raio r_j relativamente pequeno em torno do líder durante sua evolução espacial, qualquer que seja j . Caso contrário, se os seguidores começam a divergir da posição do líder, o caráter coletivo do processo é efetivamente perdido (um elemento de r_j muito grande já pode efetivamente dispersar o grupo).

Há muitas maneiras possíveis de implementar regras dinâmicas de movimento que

levam a valores finitos de r_j , mas várias delas levam a baixas eficiências. Aqui tentamos encontrar um compromisso. Nossas escolhas são descritas a seguir. Em primeiro lugar, suponha que depois de um certo número de passos o grupo está espacialmente distribuído em torno do líder. Então, digamos que no j -ésimo passo, o líder vai para nova posição, seguindo as regras descritas acima. Seja $\bar{\phi}_{i,j}$ o ângulo que deve ser tomado pelo seguidor i para atingir a nova posição do líder. Em todos os modelos –veja a figura 6.1– o ângulo a ser escolhido pelo seguidor i é tomado de uma FDP *Gaussiana* $g_S(\phi)$ centrada em $\bar{\phi}_{i,j}$, com desvio padrão σ_ϕ . Além disso, consideramos as seguintes opções para distribuição de comprimento do passo $f_S(x)$ dos seguidores: *Gaussiana* (modelos A e B), com média $\bar{x}_{i,j}$ e desvio padrão σ_x , ou *Pareto* truncada $x_{\max,F}$ (geralmente menor do que $x_{\max,L}$) (modelos C e D). Observe que a correlação entre o comprimento e a direção dos movimentos do líder e seguidores pode ser, essencialmente, parametrizada por σ_ϕ e σ_x (nos casos gaussianos), e por σ_ϕ e um par de regras extras, relacionando ao raios c_j/r_j e o número de passos dos seguidores (nos casos de Lévy truncados –detalhes específicos a seguir). Em particular, para uma função *Gaussiana* $f_S(x)$ com $\sigma_\phi = \sigma_x = 0$, seus movimentos tornam-se idênticos, ou seja, o grupo inteiro se desloca como um único indivíduo, implicando em correlação total; ausência de aleatoriedade na distribuição espacial dos seguidores ao redor do líder: $r_j = 0$ para $j > 1$.

Definiremos agora algumas quantidades relevantes para descrever o comportamento coletivo do líder e seguidores. Para denotar o vetor posição do seguidor i após os j passos do líder usamos $\mathbf{R}_{i,j} = (X_{i,j}, Y_{i,j})$. Assim o centro de massa do conjunto de seguidores N_S é calculado como:

$$\mathbf{R}_{CM,j} = \left(\frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} X_{i,j}, \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} Y_{i,j} \right). \quad (6.5)$$

A distribuição espacial dos seguidores em torno do líder pode ser caracterizada pelas duas quantidades seguintes: (i) o raio médio r_j da distribuição de seguidores em torno do centro de massa, e (ii) a distância entre o centro de massa e a posição do líder, ou seja, o coeficiente de separação c_j . Pode-se prontamente definir r_j como

$$r_j = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} |\mathbf{R}_{i,j} - \mathbf{R}_{CM,j}|, \quad (6.6)$$

que fornece uma indicação da compactação do grupo. Para o coeficiente de separação, definimos

$$c_j = |\mathbf{R}_{L,j} - \mathbf{R}_{CM,j}|, \quad (6.7)$$

que é uma medida de quanto o grupo ainda segue a tendência do líder depois de j passos.

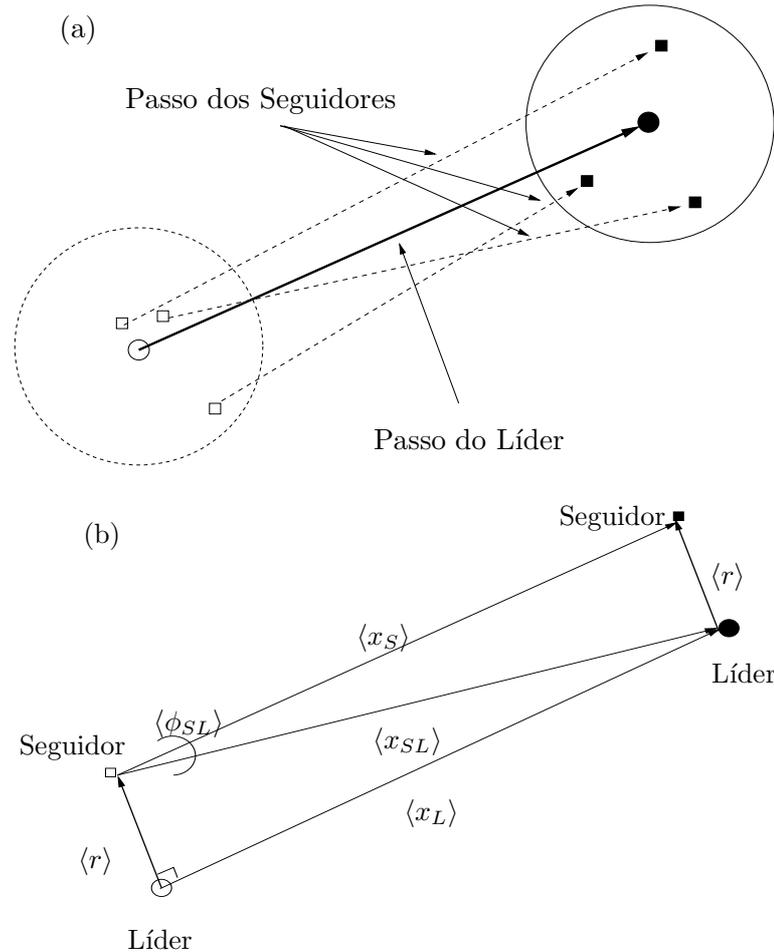


Figura 6.1: (a) Dinâmica do tipo “siga o líder” em duas dimensões mostrando o líder e três seguidores. Quando o líder se desloca, os seguidores movem-se de acordo com as regras descritas no texto, a fim de manter-se agrupados de forma compacta, em torno do líder. (b) Ilustração de quantidades médias relacionadas a um “seguidor típico” e o líder.

Com efeito, um comportamento coletivo forte é caracterizado por valores relativamente pequenos de r_j e c_j . Além disso, também é interessante definir o valor médio de r_j sobre toda a caminhada:

$$\bar{r} = \frac{1}{N_L} \sum_{j=1}^{N_L} r_j, \quad (6.8)$$

onde N_L é o número de passos do líder.

Apesar de cada seguidor ter o seu caminho particular, precisa manter-se nas imediações do líder. Logo, comportamentos médios quantitativos podem ser inferidos a partir do padrão coletivo. Primeiro, considere um “seguidor típico” de toda a caminhada. Seja $\langle x_S \rangle$ e $\langle x_L \rangle$ a média do comprimento do passo deste seguidor e do líder. Além disso, denotamos por $\langle x_{SL} \rangle$ e $\langle \phi_{SL} \rangle$ a distância média e o ângulo que o seguidor deve tomar para atingir precisamente a posição do líder após um único passo. A partir da figura 6.1 (b), temos

que

$$\langle r \rangle^2 = \langle x_S \rangle^2 + \langle x_{SL} \rangle^2 - 2\langle x_S \rangle \langle x_{SL} \rangle \cos(\langle \phi_{SL} \rangle). \quad (6.9)$$

Assim ao escrever

$$\langle x_{SL} \rangle^2 = \langle r \rangle^2 + \langle x_L \rangle^2, \quad (6.10)$$

obtemos

$$\langle r \rangle = \sqrt{(\langle x_S \rangle^2 + \langle x_L \rangle^2)^2 \left[\frac{\sec(\langle \phi_{FL} \rangle)}{2\langle x_S \rangle} \right]^2 - \langle x_L \rangle^2}. \quad (6.11)$$

Calculando analiticamente $\langle x_L \rangle$ e $\langle x_S \rangle$ diretamente das definições do modelo e obtendo $\langle \phi_{FL} \rangle$ de simulações, podemos estimar o raio médio de distribuição dos seguidores em torno do líder.

6.4.1 Modelo Coletivo Browniano com o Comportamento do líder Browniano (Modelo A)

Este modelo é caracterizado por uma FDP *Gaussiana* para o ângulo e para o comprimento dos passos dos seguidores, respectivamente, $f_S(\phi)$, com média $\bar{\phi}_{i,j}$ e desvio padrão σ_ϕ , e $f_S(x)$, com média $\bar{x}_{i,j}$ e desvio padrão σ_x . Neste caso $\bar{x}_{i,j}$ é escolhida como a distância que deve ser tomada pelo seguidor i para precisamente atingir a posição do líder depois de j passos. Além disso, o comportamento do líder é determinado pela escolha de direção de voo uniformemente aleatória, portanto $f_L(\phi)$ é constante, enquanto a densidade do passo é uma *Gaussiana* $f_L(x)$ com média \bar{x}_L e desvio padrão σ_L . Na verdade, este é o único modelo nesta análise em que a FDP do comprimento de passos do líder é *Gaussiana*; nos modelos B, C e D abaixo a função do líder segue a distribuição de *Pareto* truncada.

Na figura 6.2 ilustramos parte da evolução da caminhada do líder (com $\bar{x}_L = 100$ e $\sigma_L = 0$) e 6 seguidores em três situações, a saber:

- (a) $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\phi = 0$;
- (b) $\sigma_x = 0$ e $\sigma_\phi = \pi/4$; e
- (c) $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\phi = \pi/4$.

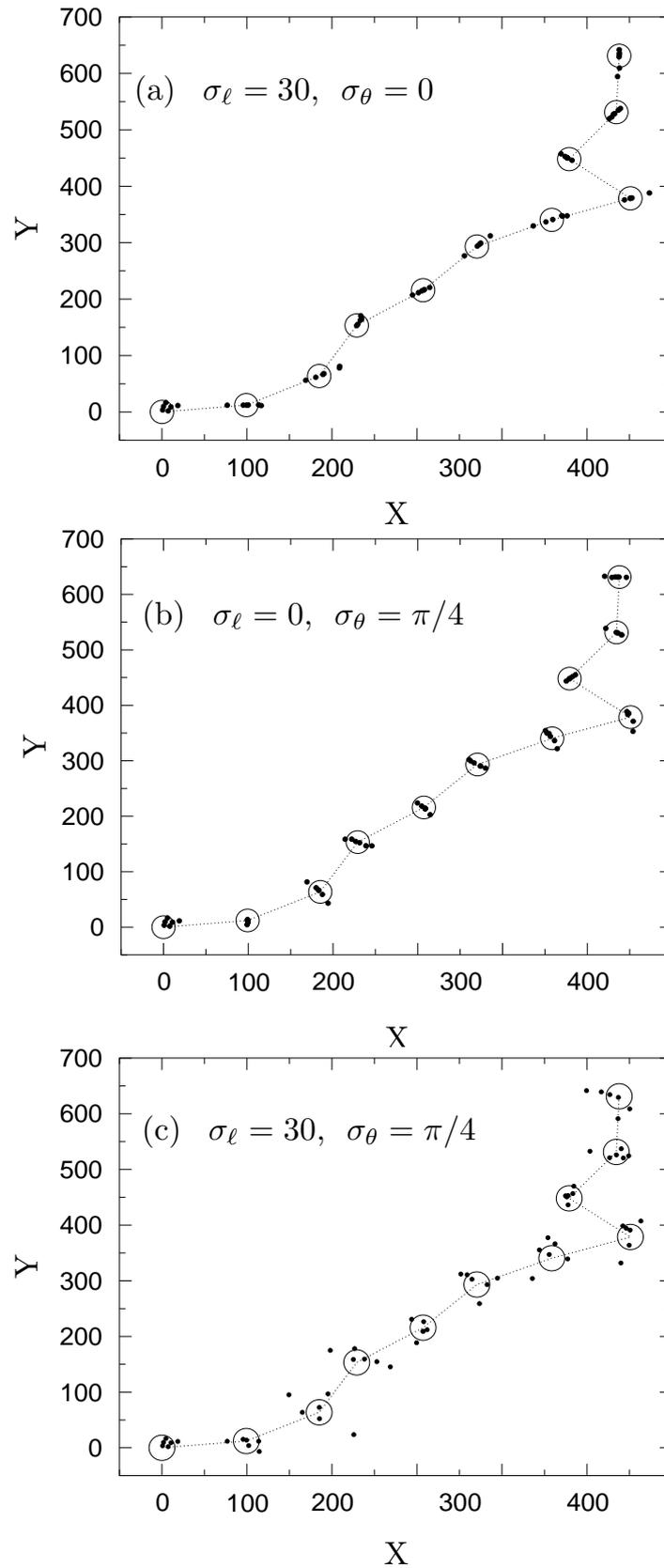


Figura 6.2: Modelo coletivo browniano com comportamento browniano do líder (modelo A). Ilustração da caminhada típica do líder com 6 seguidores, usando $\bar{x}_L = 100, \sigma_L = 0$ e (a) $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\theta = 0$; (b) $\sigma_x = 0$ e $\sigma_\theta = \pi/4$; (c) $\sigma_x = 30$ e $\sigma_\theta = \pi/4$. A circunferência em torno do líder é apenas um guia para os olhos.

Observamos, em todos os casos, uma tendência dos **seguidores** de permanecerem agrupados em torno da posição do **líder**, mesmo depois de um grande número de passos, com a maior dispersão observada obviamente quando ambos σ_x e σ_ϕ são não nulos. Na verdade, este resultado está relacionado com o pequeno desvio padrão da **FDP Gaussiana**, tanto para o **líder** quanto para os **seguidores**, se comparado com o grande segundo momento das distribuições de *Pareto* truncadas, o que geralmente tende a fazer os **seguidores** dispersarem mais facilmente com respeito ao caminho do **líder**. Além disso, a forte concentração de comprimentos de passos dos **seguidores** em torno da média $\bar{x}_{i,j}$, faz com que cada passo do **líder** seja geralmente acompanhado por apenas um único passo para cada um dos **seguidores**. Isto geralmente não é o caso em modelos *Levynianos* (ver discussão abaixo para os modelos C e D), em que uma diferença nos expoentes $\mu_L < \mu_S$ (onde o comportamento browniano dos **seguidores** é $\mu_S > 3$), ou a escolha de muitos comprimentos distintos de corte superior ($x_{\max,S} \ll x_{\max,L}$) implicam na necessidade de vários passos dos **seguidores** a fim de acompanhar um único salto do **líder**.

Apesar da manutenção evidente de um comportamento coletivo no modelo browniano, verificado pela observação de pequenas alterações em r_j e c_j com j (claro na figura 6.2), notamos que a escolha da **FDP Gaussiana** para o comprimento do passo para o **líder** e seus **seguidores** não resulta em padrões eficientes de busca coletiva no regime esparso, por exemplo, quando os **alvos** são escassos. Na verdade, a figura 6.2 vemos que tudo se passa como se o **bando** fosse um único organismo, apenas com o raio de visão r_v maior. Logo o resultado é semelhante ao que ocorre na busca individual [5, 119]. Como veremos a seguir, buscas coletivas com **FDP** de *Pareto* truncada envolvendo expoentes $\mu_L < 3$ e $\mu_S < 3$ sempre conduzem à maior eficiência neste regime (ver seção 6.5). Esta é a razão pela qual o nosso foco nos próximos modelos se concentrará nas caminhadas *Levynianas*, pelo menos para o **líder**.

6.4.2 Modelo Coletivo de *Pareto* com o Comportamento do líder *Pareto* Truncado (Modelo B)

Neste caso, a **FDP** de comprimento de passos do **líder** é uma distribuição de *Pareto* truncada, equação (6.4), e sua distribuição de direções de voo é uniforme, habitual. Por outro lado, o comprimento de passos dos **seguidores** e os ângulos de voo são dados por densidades *Gaussianas* com média $\bar{x}_{i,j}$ e desvio padrão σ_x , em princípio definidos como no modelo A. No entanto, uma vez que $\bar{x}_{i,j}$ é dado agora pela distância $x_{SL,ij}$, que deve ser tomada pelo **seguidor** i para alcançar o **líder** no j -ésimo passo (e considerando que no

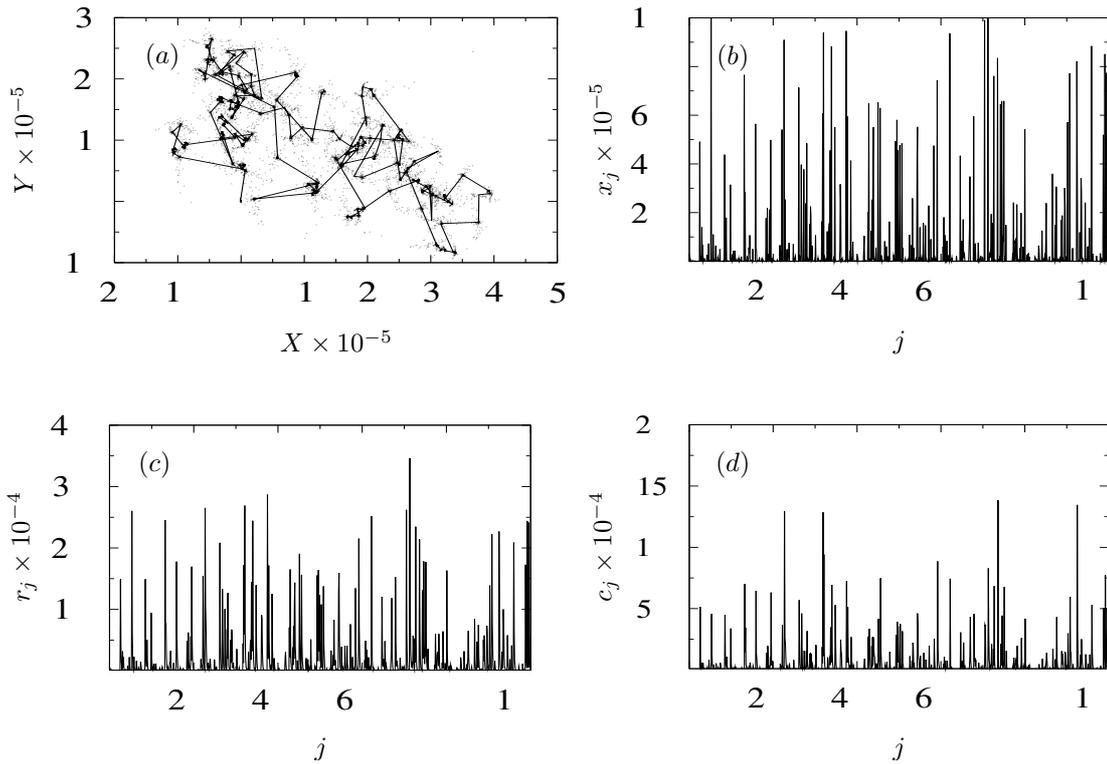


Figura 6.3: Modelo Coletivo de *Pareto* Médio Truncado com o comportamento do líder *Pareto* Truncado (Modelo B), utilizando $\mu_L = 1.1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $r_v = 1$, e 10^4 passos líder (somente os primeiros 10^3 são mostrados): (a) Trajetória de busca da caminhada aleatória bidimensional do líder; (b) Sequência de comprimento de passos do líder no j -ésimo passo; (c) Raio do grupo, r_j ; e (d) Coeficiente de separação c_j .

presente modelo as distâncias $x_{SL,ij}$ são distribuições de *Pareto* truncada, em contraste com a distribuição *Gaussiana* observado no modelo de A) a dinâmica dos seguidores torna-se mais difusiva que no modelo A.

As figuras 6.3-6.5 mostram, respectivamente para $\mu_L = 1.1$, 2 e 3, as quantidades x_j (do líder), r_j e c_j , bem como a trajetória da caminhada (líder e $N_S = 32$ seguidores) como função de j e no caso bidimensional. Em todos os exemplos, consideramos 10^4 passos do líder (só os primeiros 10^3 são mostrados), $x_{\max,L} = 10^5$, $r_v = 1$, $\sigma_x = x_{FL,j}/20$ e $\sigma_\phi = \pi/9$.

Em relação à dinâmica do líder, observa-se nas figuras 6.3 (a)-(b), 6.4 (a)-(b) e 6.5 (a)-(b) o padrão típico esperado de caminhadas de *Pareto* (truncada). O caso quase balístico (para $\mu_L = 1.1$) mostra a presença de raros saltos grandes, embora limitada pela $x_{\max,L}$, entre muitos passos curtos. Quando o valor de μ_L aumenta, a probabilidade de tais saltos grandes diminui, e um comportamento semelhante ao browniano surge [ver Figuras 6.5 (a)-(b)]. Em todos os casos a dinâmica do líder é acompanhada de forma semelhante pelos seguidores, ou seja, cada passo do líder corresponde a um único passo de cada seguidor.

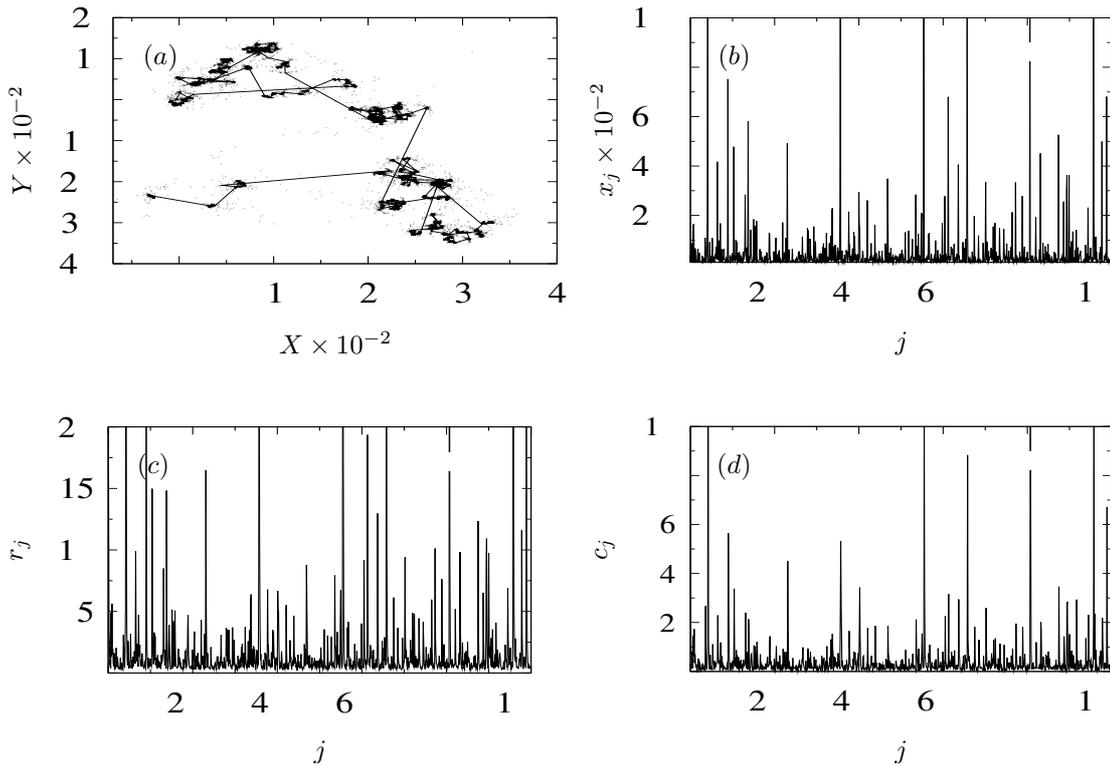


Figura 6.4: O mesmo que na figura 6.3, mas para $\mu_L = 2$.

O comportamento do raio médio do grupo e coeficiente de separação é mostrado nas figuras 6.3 (c)-(d), 6.4 (c)-(d) e 6.5 (c)-(d). Primeiro observa-se que cada grande salto do líder é, essencialmente, acompanhado por um forte aumento em r_j e c_j . Neste caso, verificamos a dificuldade dos seguidores em manter o agrupamento em torno do líder (como indica o aumento no coeficiente de separação). Ainda podemos observar o aumento simultâneo do raio do bando com relação ao seu centro de massa (distribuição espacial com maior raio médio). Esta tendência é também confirmada pela análise de histogramas de r_j (figuras 6.3 (c) e 6.4 (c)), que apresenta desvio padrão muito grande (comparando, por exemplo, os intervalos típicos de valores de r_j : $r_j \lesssim 4 \times 10^3$ para $\mu_L = 1.1$ e $r_j \lesssim 400$ para $\mu_L = 3$). Para $\mu_L \rightarrow 3$ o raio do grupo apresenta menor desvio em torno da média, indicando também que a influência do líder em r_j não é tão preponderante, em contraste com o caso $\mu_L \rightarrow 1$.

O raio médio pode ser estimado, no presente modelo [7], inserindo na equação (6.11) a expressão para o comprimento do passo médio do líder. Obtemos então

$$\langle x_L \rangle = \frac{(1 - \mu_L)(x_{\max,L}^{2-\mu_L} - r_v^{2-\mu_L})}{(2 - \mu_L)(x_{\max,L}^{1-\mu_L} - r_v^{1-\mu_L})}, \quad (6.12)$$

com a aproximação $\langle x_S \rangle \approx \langle x_L \rangle$ justificada pelas regras do modelo. Além disso, a análise

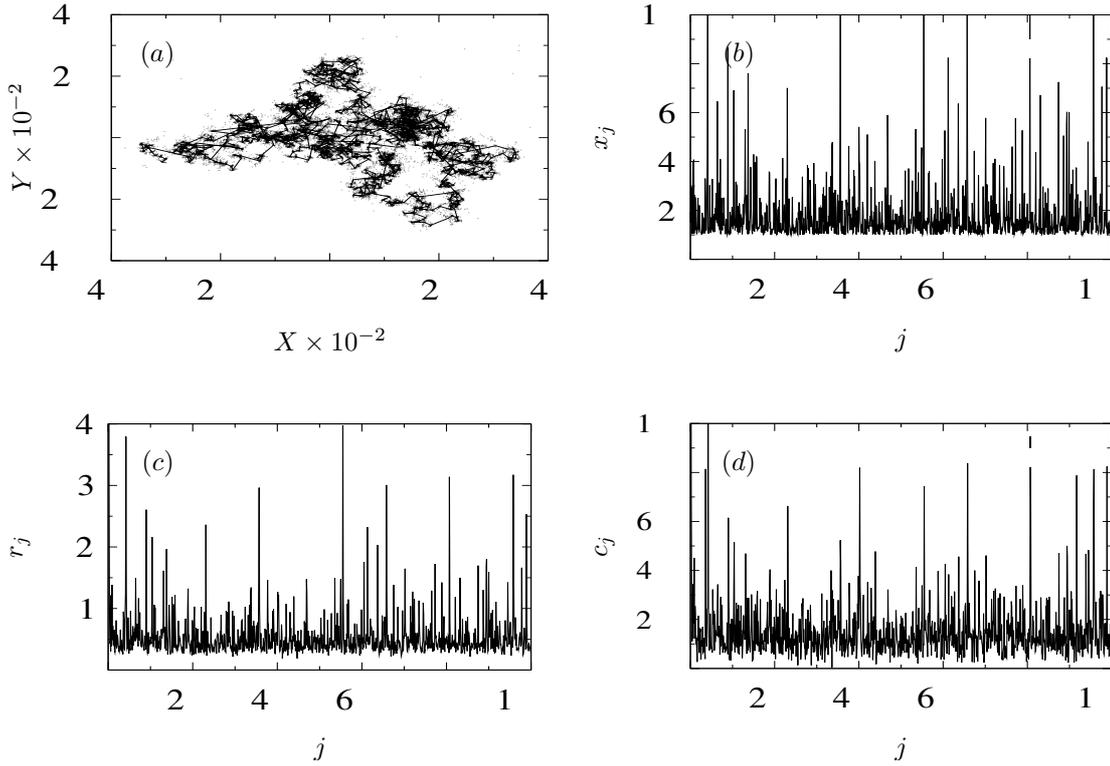


Figura 6.5: O mesmo que na figura 6.3, mas para $\mu_L = 3$.

numérica de $\langle \phi_{FL} \rangle$ fornece

$$\langle \phi_{FL} \rangle = 2 + \frac{\pi \sigma_\phi}{2} - 2e^{\alpha \sigma_\phi}, \quad (6.13)$$

com o parâmetro de ajuste $\alpha = 0.316$ (os outros fatores numéricos são ajustados de modo que $\langle x_{FL} \rangle = 0$ para $\sigma_\phi = 0$ – sem dispersão de ângulo em torno da linha reta para o líder – e $\langle x_{FL} \rangle$ quase saturado perto de 1.55, quando como $\sigma_\phi \rightarrow \pi$).

A figura 6.6 (a) exibe o bom acordo entre os resultados de $\langle r \rangle$ vs. μ_L a partir de simulações numéricas, com o uso da equação (6.8), e analítico, equações (6.11)-(6.13). Consideramos caminhadas mais longas na figura 6.6, com o líder realizando 10^6 passos; os outros parâmetros são como nas figuras 6.3-6.5. Como discutido, o raio médio aumenta consideravelmente com saltos maiores do líder tornando-se mais provável ($\mu_L \rightarrow 1$). Em contraste, nenhuma variação significativa em $\langle r \rangle$ é observada para o regime proximo gaussiano do líder ($\mu_L \rightarrow 3$). A transição inicia-se aproximadamente em $\mu_L \approx 1,7$. As

figuras 6.6 (b) e 6.6 (c) serão discutidas mais a frente

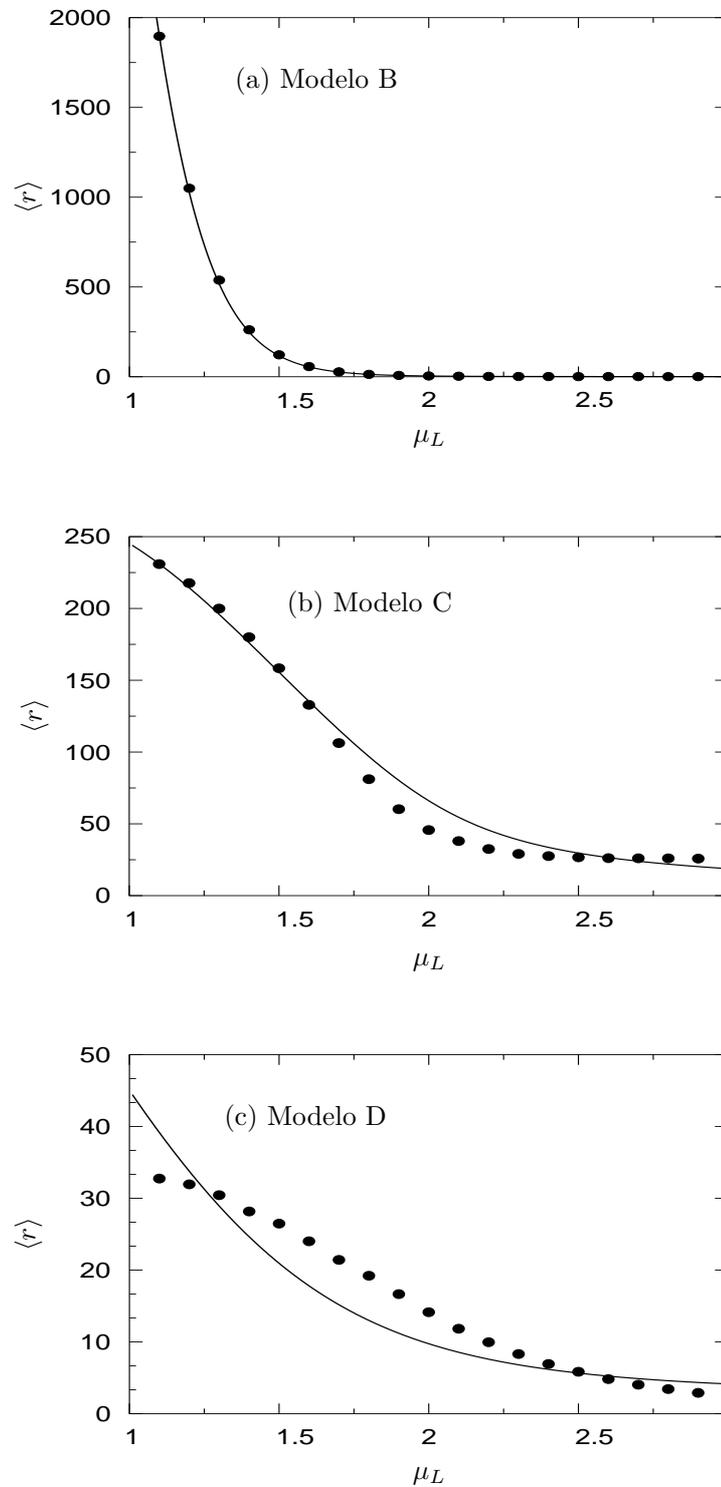


Figura 6.6: Dependência do raio médio do grupo, $\langle r \rangle$, como função do expoente de *Pareto* do líder μ_L (o líder executa 10^6 passos; outros parâmetros como nas figuras 6.3-6.5.) para diferentes modelos de busca coletiva, usando $\mu_S = 1,1$ e $x_{\max,L=50}$. As linhas sólidas representam cálculo analítico de $\langle r \rangle$ (ver texto).

6.4.3 Modelo Coletivo de *Pareto* Truncado com o Comportamento do líder *Pareto* Truncado: Versão contínua (Modelo C)

Consideraremos agora o comprimento de passo dos líderes e seguidores seguindo uma distribuição de *Pareto* truncada, com valores médios dados pela equação (6.12), ou

$$\langle x_S \rangle = \frac{(1 - \mu_S)(x_{\max,S}^{2-\mu_S} - r_v^{2-\mu_S})}{(2 - \mu_S)(x_{\max,S}^{1-\mu_S} - r_v^{1-\mu_S})}. \quad (6.14)$$

Note que, μ_L e μ_S são escolhidos arbitrariamente, então as dinâmicas do líder e dos seguidores são menos correlacionados do que no modelo B. Escolhemos também o líder com saltos possivelmente muito maiores: $x_{\max,S} \ll x_{\max,L}$. Como acima, a FDP do ângulo do líder e dos seguidores são, respectivamente, *Gaussianas* aleatoriamente uniformes. Nesta versão que chamamos de contínua, em cada novo salto do líder as regras dinâmicas são aplicados somente para os seguidores após a conclusão total do passo do líder. Devido à escolha $x_{\max,F} \ll x_{\max,L}$, há uma tendência para os seguidores de serem “deixados para trás” pelo líder a longo prazo. Para compensar tal fato, e manter o comportamento coletivo do grupo, uma regra extra deve ser imposta sobre a dinâmica dos seguidores: para um dado passo j do líder, os seguidores devem realizar uma série de passos até que o coeficiente de separação torne-se menor do que o raio médio do grupo, $c_j < r_j$. Em outras palavras, os seguidores devem evoluir até que a posição do líder torne-se o centro de massa $\mathbf{R}_{CM,j}$, assim ficando dentro da circunferência de raio r_j . Da figura 6.1 (b), vemos que o número médio de passos pode ser estimada por

$$\langle N_s \rangle \sim \frac{\langle x_L \rangle}{\langle x_S \rangle \cos(\langle \phi_{FL} \rangle)}. \quad (6.15)$$

Notamos ainda que as grandes flutuações estatísticas presentes na distribuição de *Pareto* truncada podem permitir que os seguidores alcancem o líder executando menos passos do que o estimado em N_s . Afim de agrupar os seguidores de uma forma compacta em torno do líder, também precisamos que a condição $c_j < r_j$ seja satisfeita em uma escolha mínima de $2N_s/3$ passos (fator $2/3$ obtido via simulação). Somente quando ambas as condições são satisfeitas, o líder pode dar seu próximo passo [($j + 1$)-ésimo].

O raio médio $\langle r \rangle$ como função de μ_L pode ser visto na figura 6.6 (b), para $\mu_S = 1.1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $x_{\max,F} = 50$, $r_v = 1$ e $\sigma_\phi = \pi/4$. Nota-se que, uma vez que a distribuição angular não está explicitamente correlacionado com a distribuição do comprimento do passo, a equação (6.13) é apenas uma aproximação para o presente modelo. A expressão

analítica para $\langle r \rangle$ é obtida substituindo-se a equação (6.15) e $\langle x_{FL} \rangle \sim N_s \langle x_S \rangle$ na equação (6.9), resultando em

$$\langle r \rangle = \gamma \langle x_S \rangle \tan(\langle \phi_{FL} \rangle) + \beta, \quad (6.16)$$

onde γ e β são constantes numéricas (dependentes do comportamento específico dos seguidores), introduzidas nesta abordagem a fim de corrigir os resultados do limite $\sigma_\phi = 0$. Apesar de ainda observamos boa concordância entre o resultado numérico e analítico (figura 6.6 (b)), notamos que a concordância não supera o resultado verificado no modelo B, ver figura 6.6 (a). Isto obviamente advém do conjunto mais complexo de regras envolvidos no modelo C, difíceis de modelar.

Ao comparar as figuras 6.6 (a) e (b), observamos que enquanto $\langle r \rangle$ apresenta comportamento semelhante no limite browniano $\mu_L \rightarrow 3$, o regime balístico com $\mu_L \rightarrow 1$ exibe magnitudes muito diferentes $\langle r \rangle \approx 2000$ para o modelo B e $\langle r \rangle \approx 240$ para o modelo C. Com efeito, as regras extras descritas acima atuam eficientemente no sentido de diminuir o raio médio e os coeficientes de separação.

Por outro lado, quando os resultados são obtidos utilizando diferentes valores de μ_L no presente modelo, um resultado relevante pode ser identificado (também compartilhado pelo modelo B): os líderes com comportamento de *Pareto* para $\mu_L \lesssim 2$ tendem consideravelmente a desagregar o grupo, com o aumento em $\langle r \rangle$ tornando-se pronunciado nesta extensão. Este resultado tem consequências importantes no contexto de buscas coletivas, discutidas na seção 6.5. Desta forma um quarto modelo será considerado a seguir.

6.4.4 Modelo Coletivo de *Pareto* Truncado com o Comportamento do líder *Pareto* Truncado: Versão Incremental (Modelo D)

Neste último modelo consideramos uma versão simples, incremental, do modelo C anterior, no qual se o comprimento x_j do passo do líder j é maior do que $\langle x_S \rangle$, tal passo é subdividido em $x_j/\delta x_L$ partes e após o líder atravessar cada uma destas partes (e não só após a total conclusão do passo), as regras dinâmicas são aplicadas aos seguidores. Aqui, consideramos incrementos $\delta x_L = a \langle x_S \rangle \cos(\langle \phi_{FL} \rangle)$ –ver figura 6.1 (b) e equação (6.15)– com a escolha numérica $a = 2/3$.

Como consequência desta regra incremental, a dispersão dos seguidores em torno do líder (quantificada por r_j e c_j) é muito reduzida em comparação com a versão contínua. Isto pode ser visto, por exemplo, contrastado as figuras 6.6 (b) e (c), em que o valor

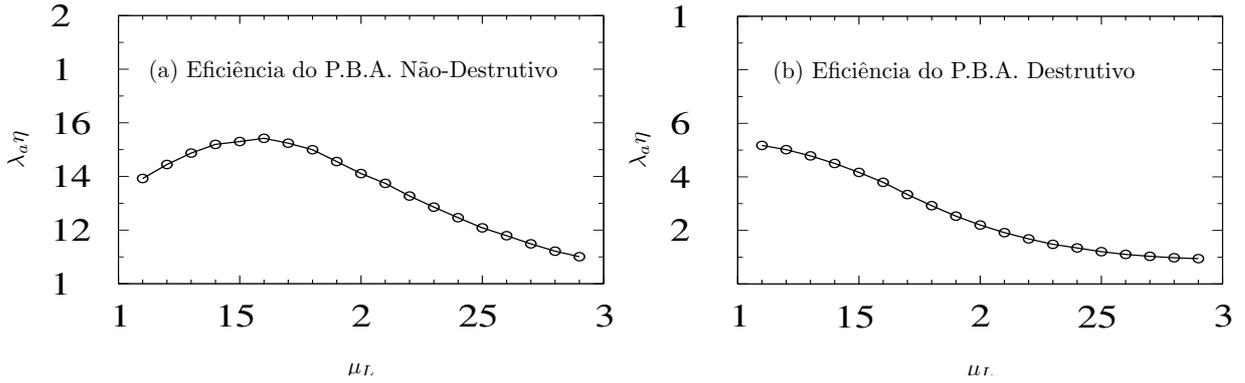


Figura 6.7: Eficiência normalizada, $\lambda\eta$, versus expoente de *Pareto* do líder μ_L para a versão incremental do modelo coletivo de *Pareto* truncado com comportamento do líder *Pareto* truncada (modelo D). Os resultados são apresentados para busca (a) não-destrutiva e (b) destrutiva, usando $N_S = 32$ seguidores, $\mu_S = 1.1$, $r_v = 1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $x_{\max,F} = 4r_v N_S = 128$, $\lambda = 5000$ e $\sigma_\theta = \pi/4$.

máximo de $\langle r \rangle$ na versão incremental é de cerca de 30 vezes menor do que a da versão contínua.

Além disso, a redução da variação do raio médio do modelo D no intervalo $1 < \mu_L \leq 3$ indica que, na versão incremental, a dificuldade em manter o grupo compacto em torno do líder é quase a mesma no regime balístico e gaussiano.

Todos esses resultados têm grande relevância para o problema da compatibilidade entre buscas coletivas eficientes e manutenção do caráter de grupo.

6.5 Eficiência Energética nos Modelos de Busca Coletiva

Consideramos agora um grupo de **forrageadores** (líder e seguidores) procurando por **alvos** com distribuição uniformemente aleatória em um espaço de busca bidimensional. Estamos basicamente interessados em estudar o caso em que a densidade de alvos é baixa, em comparação com o livre caminho médio de **forrageador**, λ . Na verdade, espaços de busca muito densos conduzem ao resultado trivial em que todas as estratégias de forrageamento são eficientes, uma vez que um sítio pode ser sempre encontrado nas proximidades do **forrageador** [5]. Além disso, vamos considerar apenas as dinâmicas coletivas da versão incremental do modelo de *Pareto* truncada D. Como visto anteriormente, os outros modelos apresentam $\langle r \rangle$ muito grande. No caso real isto implicaria em desmembramento do grupo. Logo vamos analisar somente a estratégia que mantém a estrutura do grupo.

Na figura 6.7 mostramos a eficiência normalizada vs. μ_L , para os casos (a) não-destrutivo e (b) destrutivo. Consideramos $N_S = 32$ seguidores, com $\mu_S = 1.1$, $x_{\max,L} = 10^5$, $\lambda = 5000$, $r_v = 1$ e $\sigma_\theta = \pi/4$. Cada simulação termina com a descoberta de 10^4 alvos, também fazemos (a) 10^4 e (b) 10^3 realizações.

É interessante notar na figura 6.7 que para $N_S = 32$, o comportamento qualitativo de η assemelha-se ao forrageamento único [9, 96] mas com o máximo de eficiência do caso não-destrutivo deslocando-se de $\mu_L \approx 2$ (busca não-destrutiva para um único indivíduo) para μ_L 's menores. Em qualquer caso, as buscas brownianas ($\mu_L > 3$) mostram-se bastante ineficientes.

Uma distinção importante entre forrageamento único e coletivo surge devido à necessidade inerente de manter o agrupamento no forrageamento coletivo. Com efeito, notamos nos modelos A, B e C acima a tendência geral crescente do raio médio do grupo com μ_L diminuindo, que tende a desestabilizar o comportamento coletivo, a longo prazo, para dar origem a um conjunto de indivíduos que interagem distantes demais uns dos outros. Esta restrição pode potencialmente representar um problema real sempre que for necessário o líder tornar-se muito superdifusivo. No entanto, este inconveniente pode ser essencialmente eliminado mediante a aplicação, por exemplo, de uma estratégia dinâmica incremental como no modelo D. Neste caso, a estratégia de busca ótima de eficiência coletiva surge para um valor $\mu_{\text{opt},L}$ dando um raio médio do grupo essencialmente igual às estratégias *Gaussianas* (muito menos eficiente): da figura 6.6 (c), $\langle r \rangle \approx 7,1$ para $\mu_{\text{opt},L} = 1.6$, enquanto que $\langle r \rangle \approx 6.7$ para $\mu_L = 2.9$. Assim, a necessidade de manter o grupo impõe restrições ao movimento e portanto, para seguir estratégias coletivas ótimas, o μ_L deve ser menor que aquele para um simples indivíduo

6.6 Conclusões

Apresentamos neste trabalho quatro modelos de comportamento coletivo de um líder e seus seguidores, que compreendem tanto dinâmica *Gaussiana* quanto *Pareto* truncada. Do ponto de vista único de manter o grupo agregado como um bando, o comportamento coletivo de *Pareto* mostrou-se mais dispersivo do que um comportamento gaussiano. Assim, buscas coletivas em ambientes com baixas densidades de alvos podem apresentar situações em que uma dinâmica de movimento coletivo de *Pareto* poderia entrar em conflito com a estratégia de busca ideal, com tendência para a dispersão do grupo e perda de caráter coletivo a longo prazo. Apesar disso, mostramos em um contexto simplificado que regras extras impostas para a dinâmica dos membros do bando pode realmente permitir

estratégias de *Pareto* eficientes e busca coletiva compatível –sem extrema dispersão do bando. A identificação de tais regras em cenários realistas (e complexos) é uma importante linha de investigação na teoria de busca aleatória. Neste sentido, mais estudos são ainda necessários a fim de esclarecer esta questão.

Finalmente, podemos citar uma possível extensão do presente trabalho, relacionada com a escolha da liderança durante a busca aleatória. Em uma associação puramente racional entre os diferentes elementos de um grupo, naturalmente, o líder seria o membro mais habilidoso. Este parece ser o caso [58] quando laços sociais são fracos ou inexistentes. Por outro lado, muitas espécies de animais [62–64] definem uma estrutura hierárquica baseadas na dominância e filiação [65]. Pode acontecer de tais líderes “eleitos” não serem os mais aptos para forrageamento. Um modelo que considera o desempenho de cada indivíduo durante a busca, as vantagens de mudar então para um novo líder mais “esperto”, mas também incluindo os custos de quebrar os laços estabelecidos, poderia ser uma forma interessante de estudar o equilíbrio entre as relações sociais e os objetivos de otimização dentro de um grupo, incluindo a possibilidade interessante de fissão do grupo [65].

Conclusões

7.1 Considerações Finais

Neste trabalho desenvolvemos uma nova construção teórica geral (inérita, portanto) de busca *Markoviana*, matematicamente formulada por intermédio de processos estocásticos compostos em qualquer dimensão espacial. Desta forma, um problema de busca aleatória pode ser resolvido, ou seja, sua métrica de busca calculada, bastando-se definir de forma clara o ambiente de busca e as regras *heurísticas* que governam o processo. Importante frisar também que a abordagem não é aproximada: uma vez conhecida a distribuição de passos dados entre dois alvos sucessivos e a distribuição de tamanhos de passos, a função eficiência é dada exatamente. Isto destoa dos modelos geralmente descritos na literatura, usualmente tratados via simulações computacionais ou aproximações de campo médio e restritas, em sua grande maioria, aos casos 1D e 2D. Algumas exceções existem, mas apenas para a análise analítica de modelos muito específicos (ver, por exemplo, o número especial do *Journal Physics A*, 30 de outubro de 2009).

Porém, também precisamos mencionar que há um preço pago pela generalidade do método aqui descrito. Via de regra, a distribuição de números de passos é uma quantidade bastante difícil de ser obtida, principalmente quando a geometria do espaço de busca é mais complicada. Assim, dependendo do problema específico em mãos, aproximações podem ser necessárias para, por exemplo, obter tal FDP e usá-la então na expressão da eficiência η .

Discutimos nossa formulação principalmente no contexto de processos de busca aleatória em ambientes *Weibull não-destrutivo* em qualquer dimensão. Em particular, fixamos a *heurística* por meio de caminhadas aleatórias com a FDP do comprimento de passos

dadas por *Leis de Potência*. Este caso foi escolhido por ser justamente a hipótese de *Lévy*, na qual em baixas densidades de alvos buscas aleatórias são otimizadas se seguirem estratégias tipo caminhadas de *Lévy*.

Como um bom teste para nossa formulação matemática, discutimos o limite em que uma busca aleatória passa a ser uma busca determinística, justamente quando o número de passos entre dois alvos é igual a 1. Este caso, chamado de busca ideal, tem como forte paralelo no mundo real a situação em que o **forrageador** tem alto poder cognitivo (consegue analisar o ambiente) além de também possuir grande poder de detecção (identifica alvos a grandes distâncias). Dentre o reino animal, isto é relativamente comum (observado empiricamente inúmeras vezes) na dinâmica de forrageamento de primatas. Nosso modelo reproduz com sucesso os aspectos fundamentais deste tipo de situação, testado aqui no caso unidimensional, onde a natureza destrutiva do sistema real pode ser desprezada e assim um modelo de busca não-destrutiva pode ser empregado.

No final deste trabalho discutimos um outro problema relevante, que é a busca por grupos de **forrageadores**. Devido a sua complexidade, desenvolvemos uma descrição numérica (via simulação computacional) ao invés de tentar tratá-lo com nosso formalismo exato. Discutimos um ponto chave que é como fazer busca eficaz, mas mantendo a coesão do grupo. Mostramos que isto é possível se regras extras (às usuais em busca de *Lévy*) são assumidas. Em uma dinâmica em que incrementativamente os **seguidores** fazem a busca mas tentam não perder contato com o **líder** (a qual chamamos de estratégia D), mostramos que superdifusão pode ser usada para aumentar a eficiência sem correr o risco de fragmentar o grupo.

Também discutimos que em condições ótimas (do modelo D), onde um grupo de **forrageadores** caminha mantendo um raio coletivo de mesma ordem que a soma dos raios de visão individuais, o processo de busca pode ser aproximado por uma busca efetiva, de um único indivíduo com tal raio de visão ampliado. Nesta condições, observamos resultados semelhante ao obtidos na busca de um único **forrageador**, apenas com uma pequena mudança no valor do expoente ótimo. Além disso, quando este raio ótimo do bando é da ordem da distância média entre alvos, acabamos por recuperar a dinâmica discutida na busca ideal.

7.2 Projetos Futuros

Obviamente, a área de busca aleatória é extremamente ampla e aqui apenas abordamos alguns de seus aspectos. Mesmo assim, como deveria ser esperado de um trabalho exploratório como este, muita coisa ainda pode ser feita. Descrevemos então a seguir algumas possibilidades de estudos, que podem usar os presentes resultados como ponto de partida.

- Um ponto importante, e que deveria ser abordado em desenvolvimentos futuros, é o cálculo da função massa de probabilidade (FMP) do número de passos $f_{\hat{N}}(N; \Theta, \Xi)$ através da marginalização da densidade. De forma mais específica, assumindo-se a independência entre as variáveis ambientais e da *heurística*, podemos construir a densidade conjunta

$$f_{\hat{N}}(N; \Theta, \Xi) = f_{\hat{N}}(N; \Theta) f_{\hat{N}}(N; \Xi).$$

Mas como o ambiente e a *heurística* são respectivamente definidos pelos vetores de parâmetros $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ e $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, a densidade conjunta torna-se

$$f_{\hat{N}}(N; \Theta, \Xi) = f_{\hat{N}}(N; \theta_1) \dots f_{\hat{N}}(N; \theta_n) f_{\hat{N}}(N; \xi_1) \dots f_{\hat{N}}(N; \xi_n).$$

Desta forma, apesar da necessidade de um certo esforço computacional, é possível calcular histogramas normalizados correspondentes a cada uma das densidades do lado direito da equação acima. Finalmente, poderia-se tentar usar métodos de ajuste para ter uma expressão analítica para $f_{\hat{N}}(N; \Theta, \Xi)$.

- Tendo $f_{\hat{N}}(N; \Theta, \Xi)$, como descrito acima por exemplo, nosso formalismo poderia facilmente resolver o problema de busca aleatória de forma completa em qualquer ambiente *Weibull*.
- Nesta tese não fizemos uma análise analítica do caso em que o ambiente tem geometrias especiais, por exemplo, em forma de faixa (estrito em uma dimensão e largo em outra), ou com condições de contorno periódicas. Estudar quais são as implicações no formalismo quando assumimos diferentes configurações espaciais e condições de contorno é um aspecto interessante a ser seguido.
- No caso de busca em bandos, diferentes análises foram feitas porém, não exploramos em detalhes a necessidade de mudar distintas regras de manter o bando quando variamos o número de *seguidores* e há interação entre eles. Pode ser que regras

que funcionem para muitos indivíduos não funcionem para poucos e vice-versa. Tal investigação seria importante.

- Finalmente, um problema totalmente aberto em Ecologia é qual o número ótimo de indivíduos num bando e o que leva um bando a fragmentar-se (por exemplo, como em grupo de leões e de certos primatas). Modelos baseados em forrageamento ótimo podem ser uma possível resposta para tal pergunta.

Funções de Variáveis Aleatórias

A.1 Densidade do Recíproco da V.A. Positiva

Considere as variáveis aleatórias contínuas \hat{z} e \hat{x} , definidas como segue

$$\begin{aligned}\hat{x} &: x \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \Omega \rightarrow [x_{min}, x_{max}], \\ \hat{z} &: z \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \Omega \rightarrow [z_{min}, z_{max}].\end{aligned}$$

Em $\hat{x} : x \in \mathbb{R}_+, \Omega \rightarrow [a, b]$, leia-se: “a variável aleatória \hat{x} pertence ao conjunto dos números reais (portanto é uma VA contínua) e o espaço amostral é o conjunto definido pelo intervalo aberto $[a, b]$ ”. Definimos \hat{z} como o recíproco \hat{x}

$$\hat{z} = \frac{C}{\hat{x}}, \tag{A.1}$$

onde C é uma constante arbitrária. Note que a equação (A.1) conecta os limites das variáveis, pois $z_{min} = C/x_{max}$ e $z_{max} = C/x_{min}$.

Sejam $F_{\hat{x}}(x)$ e $f_{\hat{x}}(x)$ a função distribuição e a função densidade de probabilidade de \hat{x} e $F_{\hat{z}}(z)$ e $f_{\hat{z}}(z)$ a função distribuição e a função densidade de probabilidade de \hat{z} .

A função distribuição de \hat{z} segue da probabilidade de observarmos $\hat{z} > C/\hat{x}$, portanto

$$\begin{aligned}F_{\hat{z}}(z) &= P\left[\frac{C}{\hat{x}} < \hat{z}\right] \\ F_{\hat{z}}(z) &= \int_{C/z}^{C/z_{min}} f_{\hat{x}}(x)dx = F_{\hat{x}}(C/z_{min}) - F_{\hat{x}}(C/z).\end{aligned} \tag{A.2}$$

Note-se que z assume valores partindo de z_{min} até z_{max} , correspondendo ao intervalo de

integração $[x_{min}, x_{max}]$ de \hat{x} .

A densidade de probabilidade de \hat{z} , determinada pela sua função de distribuição, é

$$f_{\hat{z}}(z) = \frac{dF_{\hat{z}}(z)}{dz}. \quad (\text{A.3})$$

Levando a equação (A.2) na equação (A.3) e lembrando que $F_{\hat{x}}(C/z_{min})$ é constante, obtemos a expressão mais geral para a densidade.

$$f_{\hat{z}}(z) = - \frac{dF_{\hat{x}}(C/z)}{dz}. \quad (\text{A.4})$$

Para avaliarmos a equação acima é mais conveniente usarmos a variável x , ou seja, $F_{\hat{x}}(C/z) = F_{\hat{x}}(x)$. Em seguida aplicamos a regra da cadeia

$$\begin{aligned} f_{\hat{z}}(z) &= - \frac{dF_{\hat{x}}(x)}{dx} \frac{dx}{dz} \\ f_{\hat{z}}(z) &= - f_{\hat{x}}(C/z) \frac{dx}{dz}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

aqui reconhecemos, $\frac{dF_{\hat{x}}(x)}{dx} = f_{\hat{x}}(x) = f_{\hat{x}}(C/z)$. Resta avaliar $\frac{dx}{dz}$ como segue

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dC/z}{dz} = - \frac{C}{z^2},$$

Levando o resultado na equação (A.5), obtemos a densidade de probabilidade procurada

$$f_{\hat{z}}(z) = \frac{C}{z^2} f_{\hat{x}}\left(\frac{C}{z}\right). \quad (\text{A.6})$$

A equação acima é a *FDP recíproca*. Como vemos pode ser obtida imediatamente da FDP da VA \hat{x} .

Leis de Potência em Dados Empíricos

Neste capítulo discutimos as distribuições *Levynianas* notáveis e algumas distribuições *Brownianas* relevantes. Iremos nos concentrar em dois objetivos centrais: (i) apresentar distribuições de lei de potência usadas como modelos relevantes a este trabalho; (ii) discutir métodos estatísticos capazes de indicar o modelo que melhor reproduz a distribuição de uma série de dados. Estes métodos materializam-se na forma de estimadores de parâmetros e testes de hipóteses, que permitem apenas descartar um modelo em favor de outro. Isto ainda deixa nas mãos do pesquisador a tarefa crítica de construir hipóteses – selecionar os modelos candidatos – capazes de descrever os dados. Resumimos os principais resultados e propriedades no final deste apêndice.

Um conjunto completo de ferramentas numéricas para inferir a distribuição de uma amostra foi publicado em 1997, por *Aaron Clauset* e colaboradores, no artigo intitulado “*Power-law distributions in empirical data*” [114]. Neste trabalho os autores discutem métodos clássicos e introduzem novas técnicas de estimação de parâmetros e testes de qualidade de ajuste. Em seguida propõem um conjunto mínimo de condições que devem ser satisfeitas antes de aceitar leis de potência como modelo adequado. A metodologia proposta foi aplicada a dezenas de conjuntos de dados publicados e erroneamente identificados como *Leis de Potência*. Não bastando a enorme contribuição deste trabalho, os autores gentilmente disponibilizaram implementações R e Matlab dos algoritmos discutidos no artigo [115].

Antes de iniciarmos esta discussão reproduzimos, na seção-B.1, uma revisão introdutória sobre o método de máxima verossimilhança encontrado em [120]. Em seguida apresentamos, na seção-B.2, as distribuições relevantes, discutimos seus *EMV* e geradores de números aleatórios. Adicionalmente, compilamos alguns resultados clássicos, como funções de verossimilhança e algumas distribuições notáveis. A seção-B.2 é um resumo

superficial de algumas idéias discutidas por *Clauset* e colaboradores, portanto o leitor mais exigente deve dirigir-se ao trabalho original [114].

B.1 Método de Máxima Verossimilhança

No período (1912-1922), o estatístico *Sir Ronald Aylmer Fisher* (1890–1962) introduziu o método de máxima verossimilhança [121], que permite estimar os parâmetros de modelos candidatos a reproduzir a distribuição de uma população amostral. Embora o método seja bastante antigo, foi apenas a partir dos anos oitenta, em função do desenvolvimento dos computadores pessoais de grande potência, que começou a ser utilizado extensivamente. Como veremos a seguir, o grande obstáculo na utilização prática do método de máxima verossimilhança consiste na frequente incapacidade de obter-se uma solução explícita para a maioria dos problemas em questão. Neste sentido, existe a necessidade de utilizar algum método de otimização numérica para a obtenção dos parâmetros de interesse. A grande importância do método de máxima verossimilhança consiste nas boas propriedades assintóticas dos estimadores, que são consistentes e assintoticamente eficientes.

Uma amostra aleatória (y_1, y_2, \dots, y_n) , retirada de uma população com uma FDP $f(y, \theta)$, indexada pelo vetor de parâmetros θ , tem uma p.d.f. conjunta dada por

$$\prod_{i=1}^n f(y_i, \theta)$$

isto é, a FDP conjunta é simplesmente o produto das densidades de cada uma das observações, $f(y_1, \theta) \cdot f(y_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(y_n, \theta)$ onde θ é um vetor de parâmetros (fixo) e y_i é uma variável aleatória. Note que, antes da retirada da amostra, cada observação é uma variável aleatória cuja FDP é igual a FDP da população. A média e a variância de cada observação a ser retirada são iguais à média e variância da população em questão. É neste sentido que dizemos que na FDP conjunta, antes de retirada a amostra, θ é fixo e y_i é variável. Contudo, uma vez que tenha sido obtida uma amostra específica, y_i , torna-se fixo e a FDP conjunta pode então ser reinterpretada como sendo uma função do vetor de parâmetros θ , que se tornam variáveis. Para uma dada amostra (y_1, y_2, \dots, y_n) a FDP conjunta vista como função do vetor de parâmetros desconhecidos θ , é denominada de função de verossimilhança. Uma possibilidade para a resolução do problema de estimação é escolher o vetor $\hat{\theta}$ que maximize a probabilidade de obtenção da amostra específica (y_1, y_2, \dots, y_n) que se tem em mãos. Em outras palavras, queremos o vetor θ que faz a

probabilidade de obtermos a amostra já obtida a maior possível, ou seja, temos que achar o $\hat{\theta}$ que maximize a função de verossimilhança.

Temos portanto, a função de verossimilhança $\Lambda(\theta, y)$, onde y é fixo e θ é a variável, e o problema consiste em obter-se o vetor $\hat{\theta}$ que maximiza esta função. O estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é o vetor que faz

$$\Lambda(\hat{\theta}, y) > \Lambda(\tilde{\theta}, y) \quad (\text{B.1})$$

onde $\tilde{\theta}$ é qualquer outro estimador de θ . Do ponto de vista matemático a implementação deste procedimento parece ser simples, pois tudo que temos a fazer é maximizar a função de verossimilhança com respeito a $\hat{\theta}$. Para tanto, basta igualar a zero as derivadas parciais da função de verossimilhança e achar o vetor $\hat{\theta}$ que resolve este conjunto de equações. Na maioria dos casos trabalharemos com o logaritmo natural da função de verossimilhança ($\ln\Lambda$) pois, maximizar o logaritmo natural de uma função é, em geral, mais simples e produz os mesmos resultados da maximização da função original. Considere agora as seguintes definições:

i) escore eficiente:

$$\frac{\partial \ln\Lambda}{\partial \theta} = S(\theta); \quad (\text{B.2})$$

ii) matriz de informação:

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln\Lambda}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right) = I(\theta); \quad (\text{B.3})$$

Note que o estimador de máxima verossimilhança ($\hat{\theta}$) será a solução do conjunto de equações $S(\theta) = 0$. Na verdade, dadas algumas condições bem gerais, é possível mostrar que $\hat{\theta}$ é consistente, assintoticamente normalmente distribuído e tem variância $[I(\hat{\theta})]^{-1}$. Este valor, $[I(\hat{\theta})]^{-1}$, é conhecido como o limite inferior de *Cramer-Rao*, pois não existe outro estimador consistente do vetor θ que tenha variância menor. Neste sentido, o estimador de máxima verossimilhança ($\hat{\theta}$) é também eficiente assintoticamente.

B.1.1 Exemplo Clássico

Estimador de Máxima Verossimilhança para a FDP *Gaussiana*

Vamos agora apresentar dois exemplos para facilitar a visualização do funcionamento do método de máxima verossimilhança e da composição da matriz de informação.

Considere uma variável aleatória y com distribuição normal, média μ e variância σ^2 ,

$y \sim G(\mu, \sigma^2)$. A FDP de cada observação é também normal e dada por $f(y_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu)^2\right)$ e a FDP conjunta é dada por $\prod_{i=1}^n f(y_i; \mu, \sigma^2)$. Logo a função de verossimilhança é

$$\Lambda = \prod_{i=1}^n f(\mu, \sigma^2; y_i)$$

e o logaritmo natural de Λ é

$$\ln\Lambda = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2. \quad (\text{B.4})$$

A equação (B.4) acima é a forma mais usual de apresentação do $\ln\Lambda$. Vamos agora encontrar os estimadores de máxima verossimilhança da média (μ) e da variância (σ^2) isto é, vamos obter o vetor (μ, σ^2) que maximizará a equação (B.4). Para tanto temos que igualar o escore eficiente a zero, $S(\theta) = 0$, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln\Lambda}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu) = 0, \\ \frac{\partial \ln\Lambda}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo para μ e σ^2 temos

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{B.5})$$

que são os estimadores de máxima verossimilhança para a média e a variância. Para obtermos a matriz de informações $I(\theta)$ precisamos encontrar as derivadas segundas de $\ln\Lambda$ com respeito aos parâmetros de interesse.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln\Lambda}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln\Lambda}{\partial (\sigma^2)^2} &= -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{2(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 \\ \frac{\partial^2 \ln\Lambda}{\partial \mu \partial \sigma^2} &= -\frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu). \end{aligned}$$

A matriz de informação é formada pelas derivadas segundas do logaritmo da função de verossimilhança avaliadas no ponto de máximo, isto é, em μ e σ^2 . Se multiplicarmos e

dividirmos o lado direito da equação (B.6) por n , lembrando que $E(y_i) = \mu$, temos

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} n/\hat{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & n/2\hat{\sigma}^4 \end{bmatrix}.$$

As variância dos estimadores de máxima verossimilhança podem então ser obtidas através da inversão da matriz de informação.

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2/n & 0 \\ 0 & 2\hat{\sigma}^4/n \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Isto encerra a revisão sobre o método de máxima verossimilhança. Estamos prontos para discutir os EMVs das leis de potência e outras distribuições relevantes.

B.2 Distribuições Candidatas, seus Estimadores de Máxima Verossimilhança e Geradores de Números Aleatórios

Nesta seção apresentamos algumas informações relevantes sobre as distribuições consideradas neste trabalho. Nosso interesse é identificar e estimar leis de potência em dados empíricos. Nas próximas seções vamos discutir o EMV clássico de *Hill* para determinar o expoente da lei de *Pareto*, nas versões: contínua, contínua exponencialmente truncada e discreta. Os e.m.v das distribuições *Weibull* e *Yule* não serão discutidos, assim como a distribuição log-normal, mas alguns resultados notáveis serão listados no final da seção. Vamos considerar os modelos abaixo como candidatos capazes de reproduzir a distribuição de cauda dos dados. Em favor da clareza, as distribuições são identificadas numericamente como segue:

B.2.1 Distribuição (1): *Pareto*

Distribuição *Levyniana* contínua.

$$p(x) = (\alpha - 1) a^{\alpha-1} x^{-\alpha}, \quad (x \geq a), \quad (\text{B.7})$$

onde a é o truncamento inferior. Esta é a lei de potência clássica. Foi nomeada em homenagem ao economista italiano *Vilfredo Pareto*, por vezes é referida como distribuição

de *Bradfordum*.

O EMV para o parâmetro de escala –calculado pela primeira vez por *Muniruzzaman* (1957)– é equivalente ao conhecido estimador de *Hill* (1975). Considere a distribuição de lei de potência contínua,

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}, \quad (\text{B.8})$$

onde α é o parâmetro de escala e x_{min} é o início do intervalo onde a lei de potência se verifica. Dado um conjunto de dados que contém as n observações $x_i > a$, gostaríamos de saber o valor de α para o modelo de lei de potência que é mais provável ter gerado os dados. A probabilidade dos dados terem sido retirados do modelo é proporcional à

$$p(x|\alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha - 1}{a} \left(\frac{x_i}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Os dados são, com maior chance, gerados pelo modelo com o parâmetro de escala α que maximiza esta função. Geralmente é preferível trabalhar com o logaritmo da probabilidade, $\Lambda = \ln p(x|\alpha)$, e que tem seu máximo no mesmo ponto, $\Lambda = \ln p(x|\alpha)$, ou seja

$$\Lambda = n \ln(\alpha - 1) - n \ln a - \alpha \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{a}. \quad (\text{B.9})$$

Fazendo $\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0$ e resolvendo para α , obtemos a estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro de escala

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{a} \right]^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

Lembre-se que $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ são os valores observados de x tal que $x_i \geq a$. Esta equação é o bem conhecido estimador de *Hill*, assintoticamente normal e consistente ($\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$ nos limites de grandes n, a , e n/a). O erro padrão de $\hat{\alpha}$ é

$$\hat{\sigma}_\alpha \approx \frac{\hat{\alpha} - 1}{\sqrt{n}} + O(1/n). \quad (\text{B.11})$$

B.2.2 Distribuição (2): *Pareto Mantegna-Stanley*

Distribuição *Levyniana* contínua, corresponde à distribuição de *Pareto* abruptamente truncada no intervalo $[a, b]$;

$$p(x) = \frac{1 - \alpha}{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}} x^{-\alpha}, \quad (a \leq x \leq b), \quad (\text{B.12})$$

onde a é o truncamento inferior e b o truncamento superior.

Aplicando o método de máxima verossimilhança, assim como fizemos na seção B.2.1 obtemos a seguinte função de verossimilhança logarítmica

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) = \frac{b^{1-\hat{\alpha}} \ln b - a^{1-\hat{\alpha}} \ln a}{b^{1-\hat{\alpha}} - a^{1-\hat{\alpha}}} - \frac{1}{1 - \hat{\alpha}}$$

Para maximizar a função acima precisamos calcular suas derivadas parciais. Note que o procedimento resulta em equações transcendentais, portanto os EMVs de a , α e b só podem ser calculados numericamente, isto é, calculando as raízes da equação transcendental via *Newton-Rapson*. Note que o EMV do parâmetro b é sistematicamente enviesado, inconsistente e não converge assintoticamente. As dificuldades relacionadas aos EMVs para a distribuição de *Pareto Mantegna-Stanley* sugerem a utilização da distribuição de *Koponen*, discutida a seguir.

B.2.3 Distribuição (3): *Pareto Koponen*

Distribuição *Levyniana* contínua. Corresponde à distribuição de *Pareto* suavemente truncada por uma exponencial negativa

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1 - \alpha, \lambda a)} x^{-\alpha} e^{-\lambda x}, \quad (x \geq a), \quad (\text{B.13})$$

onde a é o truncamento inferior e λ é o parâmetro de escala do truncamento superior.

B.2.4 Distribuição (4): *Weibull*

Distribuição *Levyniana* contínua.

$$p(x) = \beta \lambda x^{\beta-1} e^{\lambda(a-x)^\beta}, \quad (\text{B.14})$$

com $x \geq a$, $\lambda > 0$ e $0 < \beta < 1$. Em português costuma ser identificada como distribuição *Exponencial* esticada e também é conhecida como a distribuição de *Weibull* cumulativa complementar. Notável por ser a função característica da distribuição de *Lévy* simétrica alfa-estável. O código de *Clauset* [115], considerado aqui, usa a discretização *Nakagawa-Osaki*.

B.2.5 Distribuição (5): *Zeta*

Distribuição *Levyniana* discreta.

$$p(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\zeta(\alpha, a)}, \quad (\text{B.15})$$

onde a é o truncamento inferior e $\zeta(\alpha, a)$ é a função *Zeta* de *Riemann* generalizada. Corresponde à distribuição de *Pareto* discreta. Muitos autores também referem-se a ela como distribuição *Zipf*.

Também pode-se derivar uma estimador para o caso mais geral seguindo um argumento semelhante ao usado para a lei de potência contínua. Assim, podemos escrever a função de verossimilhança como

$$\Lambda = -n \ln \zeta(\alpha, a) - \alpha \sum_{i=1}^n \ln x_i. \quad (\text{B.16})$$

Tomando $\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0$, obtemos

$$\frac{-n}{\zeta(\alpha, a)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \zeta(\alpha, a) - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0.$$

Logo, o *EMV* para o parâmetro de escala é a solução de

$$\frac{\zeta'(\hat{\alpha}, a)}{\zeta(\hat{\alpha}, a)} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad (\text{B.17})$$

com erro padrão

$$\hat{\sigma}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{\zeta''(\hat{\alpha}, s_{min})}{\zeta(\hat{\alpha}, s_{min})} - \left(\frac{\zeta'(\hat{\alpha}, s_{min})}{\zeta(\hat{\alpha}, s_{min})} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (\text{B.18})$$

A equação (B.17) não pode ser resolvida analiticamente para determinarmos a forma funcional de $\hat{\alpha}$, mas podemos calcular numericamente as raízes da equação transcendental

(B.17). Alternativamente, pode-se maximizar diretamente a função de log-verossimilhança em si, Eq. (B.16). A consistência e eficiência assintótica do EMV para a lei de potência discreta está garantida –através da aplicação dos Teoremas 1 e 2 de [114].

B.2.6 Distribuição (6): *Yule*

Distribuição *Levyniana* discreta. Tem sido proposto que, ocasionalmente, a equação (B.15) não é a melhor generalização da lei de potência para o caso discreto. Uma forma alternativa, e muitas vezes mais conveniente, é $p_k = C \frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)}$, onde $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ e $C = \alpha - 1$. Podemos expressá-la de forma mais conveniente usando a função *Beta* de Legendre,

$$p_k = \frac{B(k, \alpha)}{B(a, \alpha - 1)}, \quad (\text{B.19})$$

onde a é o truncamento inferior. A função beta de Legendre comporta-se como lei de potência $B(k, \alpha) \sim k - \alpha$ para k grande. Por isto, a distribuição tem a forma assintótica desejada. Simon [122] propôs chamar a equação (B.19) de distribuição de *Yule*, em homenagem a *Udny Yule* que obteve esta distribuição como a limitante de um determinado processo estocástico [123]. A distribuição de *Yule* é interessante porque somas de suas variáveis frequentemente podem ser obtidas de forma exata enquanto somas envolvendo a equação (B.15) só podem ser escritas em termos de funções especiais, como a função Erro.

B.2.7 Distribuição (7): *Log-Normal*

Distribuição *Browniana* contínua. X tem distribuição log-normal quando o seu logaritmo tem distribuição normal.

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\ln a - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]^{-1} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (\text{B.20})$$

com $a \leq x < \infty$ e $a > 0$. A importância desta distribuição deve-se a um resultado análogo ao TLC: assim como uma distribuição normal aparece quando são somadas várias distribuições independentes, a distribuição *Log-Normal* aparece naturalmente como o produto de várias distribuições independentes (sempre positivas).

B.2.8 Distribuição (8): *Exponencial*

Distribuição *Browniana* discreta, veja a versão contínua na tabela B.1,

$$p(x) = (1 - e^{-\lambda}) \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \quad (\text{B.21})$$

com $x = a, a + 1, \dots, \infty$, $\lambda > 0$ e $a \geq 1$. Este não é um modelo promissor quando esperamos encontrar leis de potência, mas é relevante a título de comparação pois seu fracasso, em usá-la como curva de ajuste, fortalece a hipótese da distribuição de cauda longa, “*heavy-tail distribution*”.

B.2.9 Distribuição (9): *Poisson*

Distribuição *Browniana* discreta,

$$p(x) = \left[e^{\mu} - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{\mu^k}{k!} \right]^{-1} \frac{\mu^x}{x!}, \quad (\text{B.22})$$

com $x = a, a + 1, \dots, \infty$, $\mu > 0$ e $a \geq 1$. As vezes é conhecida como a lei dos acontecimentos raros, uma vez que cada um dos n eventos (independentes) de *Bernoulli* (sucesso ou fracasso) raramente ocorrem. O nome pode ser enganoso pois a contagem total de eventos de sucesso em um processo de *Poisson* não precisa ser raro, se o parâmetro np não é pequeno.

B.2.10 Procedimento de Validação

O procedimento consiste em utilizar os EMVs e a estatística de *Kolmogorov-Smirnov* para validar um modelo como candidato legítimo –modelo capaz de descrever os dados– e em seguida comparar os modelos utilizando o teste da razão de verossimilhança logarítmica.

B.3 Resumo das Distribuições Consideradas

Nesta seção resumimos, em tabelas, os principais resultados obtidos neste apêndice. A definição das principais leis de potência usadas neste trabalho pode ser vista na tabela B.1. Para cada distribuição $p(x) = Cf(x)$, apresentamos a forma funcional básica $f(x)$

e a constante de normalização C definida pela condição $\int_a^\infty Cf(x) = 1$, (caso contínuo) ou $\sum_{x=a}^\infty Cf(x) = 1$ (caso discreto). Na tabela B.2 mostramos as FDs e FDPs, na tabela B.3 os estimadores de máxima verossimilhança, na tabela B.4 os geradores de números aleatórios. Na tabela B.5 mostramos as distribuições *Brownianas* normalizadas e na tabela B.6 os geradores *Brownianos* de números aleatórios.

Tabela B.1: Normalização das Distribuições Contínuas e Discretas.

Nomeclatura da Distribuição	Distribuição $p(x) = Cf(x)$	
	$f(x)$	C
1) Pareto (<i>Lei de Potência Clássica</i>) $a \leq x < \infty$ $\alpha > 1, a > 0$	$x^{-\alpha}$	$(\alpha - 1)a^{\alpha-1}$
2) Pareto Mantegna-Stanley (<i>Pareto Abruptamente Truncada</i>) $a \leq x \leq b$ $\alpha > 1, a \geq 0, b \geq 0$	$x^{-\alpha}$	$\frac{1 - \alpha}{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}$
3) Pareto Koponen (<i>Pareto Suavemente Truncada</i>) $x \geq a$ $\alpha > 1, a \geq 0, \lambda > 0$	$x^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma^*(1 - \alpha, \lambda a)}$
4) Weibull (<i>Exponencial Esticada</i>) $x \geq a$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta}$	$\beta \lambda e^{\lambda a^\beta}$
5) Zeta ou Zipf (<i>Pareto Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 1, a \geq 1$	$x^{-\alpha}$	$\frac{1}{\zeta^\dagger(\alpha, a)}$
6) Yule (<i>Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 0, a \geq 1$	$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \alpha)}$	$(\alpha - 1) \frac{\Gamma(a + \alpha - 1)}{\Gamma(a)}$

Definição das leis de potência consideradas neste trabalho. Para cada distribuição, $p(x) = Cf(x)$, apresentamos a forma funcional básica $f(x)$ e a constante de normalização, C definida pela condição de normalização $\int_a^\infty Cf(x) = 1$, para o caso contínuo, ou $\sum_{x=a}^\infty Cf(x) = 1$, para o caso discreto. Fonte [114].

* Γ é a função *Gama*, $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$

† $\zeta(\alpha, a)$, é a função *Zeta* de *Riemann*.

Tabela B.2: Representação das Leis de Potência, FDP e FD

Nomenclatura da Distribuição	FDP, $p(x)$	F.D., $P(x)$
1) Pareto (<i>Lei de Potência Clássica</i>) $a \leq x < \infty$ $\alpha > 1, a > 0$	$(\alpha - 1) a^{\alpha-1} x^{-\alpha}$	$1 - a^{\alpha-1} x^{1-\alpha}$
2) Pareto Mantegna-Stanley (<i>Pareto Abruptamente Truncada</i>) $a \leq x \leq b$ $\alpha > 1, a \geq 0, b \geq 0$	$\frac{(1 - \alpha) x^{-\alpha}}{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}$	$\frac{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}$
3) Pareto Koponen (<i>Pareto Suavemente Truncada</i>) $x \geq a$ $\alpha > 1, a \geq 0, \lambda > 0$	$C^* x^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\frac{CE_{\alpha}^{\dagger}(\lambda a)}{a^{\alpha-1}} - \frac{CE_{\alpha}(\lambda x)}{x^{\alpha-1}}$
4) Weibull (<i>Exponencial Esticada</i>) $x \geq a$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$\beta \lambda x^{\beta-1} e^{\lambda(a-x)^{\beta}}$	$1 - e^{\lambda(a-x)^{\beta}}$
5) Zeta ou Zipf (<i>Pareto Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 1, a \geq 1$	$\frac{x^{-\alpha}}{\zeta^{\ddagger}(\alpha, a)}$	$\frac{H^{\S}(\alpha, x)}{\zeta(\alpha, a)}$
6) Yule (<i>Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 0, a \geq 1$	$\frac{B^{\P}(x, \alpha)}{B(a, \alpha - 1)}$	$1 - x \frac{B(x, \alpha)}{B(a, \alpha)}$

Representação das FDP(FMP), $p(x)$ e FD, $P(x)$. para as leis de potência consideradas neste trabalho. Fonte [114]. No caso das distribuições discretas – *Yule* e *Zipf*– usa-se a nomenclatura FMP –função massa de probabilidade– em vez da usual nomenclatura FDP que é adequada apenas para variáveis contínuas.

* C é a constante de normalização da distribuição *Pareto Koponen*, consulte a tabela B.1.

† $E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$, associável à função exponencial integral e a $\Gamma(x)$.

‡ $\zeta(\alpha, a)$ é a função *Zeta* de *Riemann*.

§ $H(\alpha, x)$ é o número harmônico generalizado, $H(\alpha, x) = \sum_{k=1}^x \frac{1}{k^{\alpha}}$.

¶ $B(x, \alpha)$ é a função beta de *Legendre*.

Tabela B.3: Estimadores de Máxima Verossimilhança para o Parâmetro de Cauda, α .

Nomeclatura da Distribuição	EMV para α , ou ao menos $\frac{\partial \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$
1) Pareto (<i>Lei de Potência Clássica</i>) $a \leq x < \infty$ $\alpha > 1, a > 0$	$\hat{\alpha} = 1 + \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{a} \right) \right]^{-1}$
2) Pareto Mantegna-Stanley (<i>Pareto Abruptamente Truncada</i>) $a \leq x \leq b$ $\alpha > 1, a \geq 0, b \geq 0$	$\overline{\log(x)}^* = \frac{b^{1-\hat{\alpha}} \ln b - a^{1-\hat{\alpha}} \ln a}{b^{1-\hat{\alpha}} - a^{1-\hat{\alpha}}} - \frac{1}{1-\hat{\alpha}}$
3) Pareto Koponen (<i>Pareto Suavemente Truncada</i>) $x \geq a$ $\alpha > 1, a \geq 0, \lambda > 0$	Não trivial, consulte [114, 115]
4) Weibull (<i>Exponencial Esticada</i>) $x \geq a$ $\lambda > 0, \beta > 0$	Não trivial, consulte [114, 115]
5) Zeta ou Zipf (<i>Pareto Discreta</i>) $x = a, a+1, \dots, \infty$ $\alpha > 1, a \geq 1$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) = -\frac{\zeta'(\hat{\alpha}, a)}{\zeta(\hat{\alpha}, a)}$
6) Yule (<i>Discreta</i>) $x = a, a+1, \dots, \infty$ $\alpha > 0, a \geq 1$	Não trivial, consulte [114, 115]

Estimadores de máxima verossimilhança para o parâmetro de cauda, α , na lei de potência. Apresentamos apenas a condição de maximização do escore eficiente $S(\alpha) \equiv \frac{\partial \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$, sempre que $S(\alpha) = 0$ é transcendental em α . As distribuições *Pareto Koponen*, *Weibull* e *Yule* possuem representações complicadas para o escore eficiente, sugerimos ao leitor ver as referências indicadas.

* $\overline{\log(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i)$.

† $\zeta'(\alpha, a)$ é a derivada da função *Zeta* de *Riemann*, $\zeta(\alpha, a)$, com relação a α .

Tabela B.4: Geradores *Levynianos* de Números Aleatórios.

Nomeclatura da Distribuição	Números aleatórios
1) Pareto (<i>Lei de Potência Clássica</i>) $a \leq x < \infty$ $\alpha > 1, a > 0$	$x = a(1 - r)^{-\frac{1}{\alpha - 1}}$
2) Pareto Mantegna-Stanley (<i>Pareto Abruptamente Truncada</i>) $a \leq x \leq b$ $\alpha > 1, a \geq 0, b \geq 0$	$x = a(1 - r)^{-\frac{1}{\alpha - 1}}$
3) Pareto Koponen (<i>Pareto Suavemente Truncada</i>) $x \geq a$ $\alpha > 1, a \geq 0, \lambda > 0$	Consulte a legenda
4) Weibull (<i>Exponencial Esticada</i>) $x \geq a$ $\lambda > 0, \beta > 0$	$x = \left[x_{min}^{\beta} - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - r) \right]^{\frac{1}{\beta}}$
5) Zeta ou Zipf (<i>Pareto Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 1, a \geq 1$	Não trivial, consulte [114, 115]
6) Yule (<i>Discreta</i>) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\alpha > 0, a \geq 1$	Não trivial, consulte [114, 115]

Fórmulas geradoras de números aleatórios, x , retirados de distribuições contínuas dada uma fonte de números aleatórios uniforme r no intervalo $0 \leq r < 1$. Não existe expressão fechada para o caso distribuição *Zeta - Pareto Discreta*, *Zipf*. Não existe expressão fechada para o caso da lei de potência truncada, mas pode-se gerar um número exponencialmente distribuídos aleatoriamente usando a fórmula acima e então aceitar ou rejeitá-la com probabilidade p ou $(1 - p)$, respectivamente, onde $p = \left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}$, e repetindo o processo até que um número seja aceito. Fonte [114].

Tabela B.5: Normalização das Distribuições *Brownianas*, Contínuas e Discretas.

Nomeclatura da Distribuição	Distribuição $p(x) = Cf(x)$	
	$f(x)$	C
7) Log-Normal $a \leq x < \infty$ $a > 0$	$\frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\ln a - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]^{-1}$
8) Exponencial $x > a$ $\lambda > 0, a \geq 1$	$e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda a}$
8a) Exponencial (Discreta) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\lambda > 0, a \geq 1$	$e^{-\lambda x}$	$(1 - e^{-\lambda}) e^{\lambda a}$
9) Poisson (Discreta) $x = a, a + 1, \dots, \infty$ $\mu > 0, a \geq 1$	$\frac{\mu^x}{x!}$	$\left[e^\mu - \sum_{k=0}^{a-1} \frac{\mu^k}{k!} \right]^{-1}$

Definição da distribuição lei de potência e várias outras distribuições estatísticas comuns. Para cada distribuição damos a forma funcional básica $f(x)$ e a normalização constante apropriada C tal que $\int_a^\infty Cf(x) = 1$ para o caso contínuo ou $\sum_{x=a}^\infty Cf(x) = 1$ para o caso discreto. Fonte [114].

Tabela B.6: Geradores *Brownianos* de Números Aleatórios.

Nomeclatura da Distribuição	Números aleatórios
7) Log-Normal $a \leq x < \infty$ $\alpha > 1, a > 0$	$x_1 = e^{\rho \sin \theta}, x_2 = e^{\rho \cos \theta}$ $\rho = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1 - r_1)}, \theta = 2\pi r_2$
8) Exponencial $x > a$ $\lambda > 0, a \geq 1$	$x = a - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$

Fórmulas para gerar números aleatórios, x , retirados de distribuições contínuas e dada uma fonte de números aleatórios uniforme r no intervalo de $0 \leq r < 1$. Note que para o caso da log-normal, não sabemos de nenhuma forma fechada, mas as expressões dadas irão gerar dois números independentes log-normalmente distribuídos aleatórios x_1, x_2 , dados dois números uniformes r_1, r_2 como entrada. Fonte, [114].

Glossário

<i>Koponen</i>	(Probabilidade e estatística) distribuição de <i>Pareto</i> exponencialmente truncada.	147, 152–155
<i>Mantegna-Stanley</i>	Distribuição de <i>Pareto</i> abruptamente truncada.	152–155
<i>Markoviana</i>	(Probabilidade e estatística) processo estocástico onde o estado futuro depende apenas do estado imediatamente anterior.	v, 1, 135
<i>Pareto</i>	(Probabilidade e estatística) distribuição de probabilidade contínua com dois parâmetros, formulada pelo sociólogo <i>Vilfredo Pareto</i> , é uma distribuição que tem aplicações em disciplinas como a sociologia , geofísica e economia plural	2, 145, 147, 152–155
<i>Weibull</i>	(Probabilidade e estatística) distribuição de probabilidade contínua. Nomenclatura em homenagem ao engenheiro sueco <i>E. H. W. Weibull</i> , que a descreveu em detalhes, em 1951, embora tenha sido identificada pela primeira vez <i>Fréchet</i> (1927) e aplicada pela primeira vez por <i>Rosin Rammler</i> (1933) para descrever a distribuição de tamanho de partículas.	v, vi, 135, 137, 145, 148, 152–155
<i>Yule</i>	(Probabilidade e estatística) distribuição de probabilidade discreta. Recebe este nome em homenagem <i>Udny Yule</i> e <i>Herbert Simon</i> que usou esta distribuição para limitar a distribuição de um determinado processo estocástico com um modelo para a distribuição dos táxons biológicos e sub-taxa.	145, 149, 152–155

<i>Zeta</i>	(Probabilidade e estatística) distribuição de probabilidade discreta. É versão discreta da distribuição de <i>Pareto</i> .	148, 152–155
<i>Zipf</i>	(Probabilidade e estatística) Distribuição discreta, exemplo de distribuição de cauda pesada cuja importância cresceu bastante desde meados dos anos 1990, as vezes referido como a distribuição <i>Zeta</i> . Possui esse nome em homenagem ao linguista <i>George Kingsley Zipf</i> que primeiro propôs essa distribuição comumente usado em linguística, seguros, e na modelagem de eventos raros.	148, 152–155
alvo	Objetos da busca. Nesta trabalho são pontos adimensionais que preenchem o ambiente e cujas propriedades são descritas pelo vetor de parâmetros do ambiente Θ , equação (3.1).	v, 3, 4, 44–50, 52–57, 59–62, 64, 65, 68–75, 79–81, 116, 118, 119, 125, 132, 133
balístico	Movimento em linha reta, sem mudança de direção. Na teoria de caminhada aleatória denota os deslocamento sem eventos de reorientação.	83
bando	(Biologia) designa um grupo de animais.	3, 4, 117, 119, 125, 127, 133, 134
destrutivo	(Teoria de busca) refere-se ao alvo que pode ser detectado e consumido somente uma vez.	52, 101, 103, 105, 107–109, 133
forrageador	Entidade que realiza a busca, inspeciona um ambiente de busca à procura de alvos com ações governadas pela heurística da busca. As propriedades que caracterizam o forrageador são descritas pelo vetor de parâmetros da heurística Ξ , equação (3.2).	v, xiii, 2, 3, 24, 44–54, 56, 60, 61, 64, 68–70, 72–77, 79–81, 105–108, 110–114, 116–119, 132, 136
forrageamento	(Biologia) Ação ou resultado de forragear, procurar alimento.	2, 23, 24, 49, 54

heurística	Estratégia de busca do forrageador .	59–61 , 63 , 64 , 78 , 79 , 135 , 137
líder	No processo de busca coletiva, designa o forrageador que lidera a a busca e determina a FDP dos deslocamentos do centro de massa do bando .	v , 3 , 4 , 116 , 117 , 119–123 , 125–128 , 130–134 , 136
métrica	Distância percorrida pelo forrageador entre dois eventos de detecção de alvos .	59–68 , 71 , 77 , 78 , 80 , 81
não-destrutivo	(Teoria de busca) refere-se ao alvo que pode ser detectado e consumido inúmeras vezes.	45 , 52 , 53 , 109 , 117 , 118 , 133 , 135
partição	(Probabilidade e estatística) conjunto das partes do espaço amostral satisfazendo que cada evento é mutuamente exclusivo e a união de todos os eventos resulta no espaço todo (veja a definição 2.1.6).	9
seguidor	No processo de busca coletiva, designa o forrageador que caminha acompanhando o líder do bando .	v , 3 , 4 , 116 , 117 , 119–123 , 125–127 , 130–133 , 136 , 137

Referências Bibliográficas

- [1] E. W. Weisstein. “Random Walk–1-Dimensional”. Technical Report, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. Walk1-Dimensional.html (2003). URL <http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk1-Dimensional.html>.
- [2] D. W. Stephens e J. R. Krebs. *Foraging Theory* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987).
- [3] J. R. Krebs e H. R. Pulliam. *Foraging Behavior* (Plenum Press, New York, 1987).
- [4] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince e H. E. Stanley. Lévy Flight Search Patterns of Wandering Albatrosses. *Nature* **381**, 413 (1996). doi: [10.1038/381413a0](https://doi.org/10.1038/381413a0).
- [5] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Halvin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo e H. E. Stanley. Optimizing the Success of Random Searches. *Nature* **401**, 911 (1999). doi: [10.1038/44831](https://doi.org/10.1038/44831).
- [6] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. da Luz, M. C. Santos, H. E. Stanley e G. M. Viswanathan. Dynamical Robustness of Lévy Search Strategies. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 24, 240601 (2003). doi: [10.1103/PhysRevLett.91.240601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.240601).
- [7] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, S. Halvin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo e H. E. Stanley. Lévy Flights in Random Searches. *Physica A* **282**, 1 (2000). doi: [10.1016/S0378-4371\(00\)00071-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6).
- [8] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan e M. G. E. da Luz. Optimal Random Searches of Revisitable Targets: Crossover from Superdiffusive to Ballistic Random Walks. *Europhysics Letters* **67**, 734 (2004). doi: [10.1209/epl/i2004-10114-9](https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10114-9).

- [9] M. C. Santos, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo e M. G. E. da Luz. Optimization of Random Searches on Regular Lattices. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **72**, 4, 046143 (2005). doi: [10.1103/PhysRevE.72.046143](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.046143).
- [10] R. Metzler e J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports* **339**, 1–77 (2000). doi: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3).
- [11] G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports* **371**, 461 (2002). doi: [10.1016/S0370-1573\(02\)00331-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00331-9).
- [12] I. Peterson. *The Jungles of Randomness: A Mathematical Safari* (Wiley, New York, 1997).
- [13] H. C. Berg. *Random Walks in Biology* (Princeton University Press, 1983).
- [14] M. Levandowsky, J. Klafter e B. S. White. Swimming Behavior and Chemosensory Responses in Protozoan Microzooplankton as a Function of Hydrodynamic Regime. *Bulletin of Marine Science* **43**, 758 (1988). doi: [10.1890/04-1806](https://doi.org/10.1890/04-1806).
- [15] F. L. Schuster e M. Levandowsky. Chemosensory Responses of *Acanthamoeba Castellani*: Visual Analysis of Random Movement and Responses to Chemical Signals. *The Journal of Eukaryotic Microbiology* **43**, 150 (1996). doi: [10.1111/j.1550-7408.1996.tb04496.x](https://doi.org/10.1111/j.1550-7408.1996.tb04496.x).
- [16] B. J. Cole. Fractal Time in Animal Behavior: the Movement Activity of *Drosophila*. *Animal Behavior* **50**, 1317 (1995). doi: [10.1016/0003-3472\(95\)80047-6](https://doi.org/10.1016/0003-3472(95)80047-6).
- [17] P. Nonacs e L. M. Dill. Is Satisficing an Alternative to Optimal Foraging? *Oikos* **67**, 371 (1993). URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/3545484>.
- [18] R. P. D. Atkinson, C. J. Rhodes, D. W. Macdonald e R. M. Anderson. Scale-free dynamics in the movement patterns of jackals. *Oikos* **98**, 134–140 (2002). doi: [10.1034/j.1600-0706.2002.980114.x](https://doi.org/10.1034/j.1600-0706.2002.980114.x).
- [19] G. Ramos-Fernandez, J. L. Mateos, O. Miramontes, G. Cocho, H. Larralde e B. Ayala-Orozco. Lévy walk patterns in the foraging movements of spider monkeys (*Ateles geoffroyi*). *Behav. Ecol. Sociobiol.* **55** (3), 223–230 (2004). doi: [10.1007/s00265-003-0700-6](https://doi.org/10.1007/s00265-003-0700-6).
- [20] N. E. Humphries, N. Queiroz, J. R. M. Dyer, N. G. Pade, M. K. Musyl, K. M. Schaefer, D. W. Fuller, J. M., Brunnschweiler, T. K. Doyle, J. D. R. Houghton,

- G. C. Hays, C. S. Jones, L. R. Noble, V. J. Wearmouth, E. J. Southall e D. W. Sims. Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators. *Nature* **465**, 1066–1069 (2010). doi: [10.1038/nature09116](https://doi.org/10.1038/nature09116).
- [21] D. W. Sims e V. A. Quayle. Selective foraging behaviour of basking sharks on zooplankton in a small-scale front. *Nature* **393**, 460–464 (1998). doi: [10.1038/30959](https://doi.org/10.1038/30959).
- [22] D. Boyer, G. Ramos-Fernandez, O. Miramontes, J. L. Mateos, G. Cocho, H. Larralde, H. Ramos e F. Rojas. Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment. *Proc. R. Soc. B* **273(1595)**, 1743–1750 (2006). doi: [10.1098/rspb.2005.3462](https://doi.org/10.1098/rspb.2005.3462).
- [23] G. H. Pyke. Optimal foraging in Hummingbirds: Testing the Marginal Value Theorem. *Integrative and Comparative Biology* **18**, 4 (1978).
- [24] M. F. Shlesinger e J. Klafter. *On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal* (Nijhoff, Dordrecht, 1986).
- [25] T. W. Schoener. Models of Optimal Size for a Solitary Predator. *Amer. Natur.* **103**, 277–313 (1969). URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2459329>.
- [26] T. W. Schoener. Theory of Feeding Strategies. *Ann Rev. Ecol. Syst.* **2**, 369–404 (1971). doi: [10.1146/annurev.es.02.110171.002101](https://doi.org/10.1146/annurev.es.02.110171.002101).
- [27] J. M. Emlen. The Role of Time and Energy in Food Preference. *Amer. Nature.* **100**, 611–617 (1966). URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2459299>.
- [28] R. M. MacArthur e E. R. Koshend. On Optimal Use of Patchy Environment. *amer. Natur.* **100**, 603–609 (1966). doi: [10.1016/0040-5809\(80\)90006-4](https://doi.org/10.1016/0040-5809(80)90006-4).
- [29] H. R. Polliam. On the Theory of Optimal Diets. *Amer. Natur.* **108**, 59–74 (1974). URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2459736>.
- [30] M. L. Cody. Finch Flocks in the Mohave Desert. *Theor. Popul. Biol.* **2**, 142–158 (1971).
- [31] G. H. Pyke. *Studies in the Foraging Efficiency of Animal*. Tese de Doutorado, University of Chicago (1974).
- [32] J. N. M. Smith e C. R. Dawkins. The Hunting Behaviour of Individual Great Tits in Relation to Spatia Variations in Their Food Density. *Ann. Behav.* **19**, 695–706 (1971). doi: [10.1016/S0003-3472\(71\)80173-2](https://doi.org/10.1016/S0003-3472(71)80173-2).

- [33] D. Boyer, O. Miramontes, G. Ramos-Fernández, J. L. Mateos e G. Cocho. Modeling the Searching Behavior of Social Monkeys. *Physica A* **342**, 329 (2004). doi: [10.1016/j.physa.2004.04.091](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.04.091).
- [34] A. I. Saichev e S. G. Utkin. Random walks with intermediate anomalous-diffusion asymptotics. *J. Exp. Theor. Phys.* **99**, 443 (2004). doi: [10.1134/1.1800201](https://doi.org/10.1134/1.1800201).
- [35] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, F. Bartumeus, J. Catalan e M. G. E. da Luz. Necessary Criterion for Distinguishing True Superdiffusion from Correlated Random Walk Processes. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **72**, 1, 011111 (2005). doi: [10.1103/PhysRevE.72.011111](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.011111).
- [36] M. F. Shlesinger e G. M. Zaslavsky. *Lévy Flights and Related Topics in Physics* (Springer, Berlin, 1995).
- [37] C. Tsallis. Why Lévy distributions are ubiquitous in nature? *Physics World* **10**, 42 (1997).
- [38] R. Metzler e J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys. A* **37**, 161 (2004). doi: [10.1088/0305-4470/37/31/R01](https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/31/R01).
- [39] B. J. W. J. Bruce, P. Grigolini, R. Metzler e T. F. Nonnenmacher. Fractional Diffusion and Lévy Stable Processes. *Phys. Rev. E* **55**, 1, 99 (1997). doi: [10.1103/PhysRevE.55.99](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.99).
- [40] M. Levy e S. Solomon. Spontaneous Scaling Emergence in Generic Stochastic Systems. *International Journal of Modern Physics C* **7**, 745–751 (1996). doi: [10.1142/S0129183196000624](https://doi.org/10.1142/S0129183196000624).
- [41] D. Sornette e R. Cont. Convergent Multiplicative Processes Repelled from Zero: Power Laws and Truncated Power Laws. *J. Phys. I (France)* **7**, 431–444 (1997). doi: [10.1051/jp1:1997169](https://doi.org/10.1051/jp1:1997169).
- [42] P. M. C. de Oliveira. Why do evolutionary systems stick to the edge of chaos? *Theory in Bioscience* **120**, 1–19 (2001). doi: [10.1007/s12064-001-0027-7](https://doi.org/10.1007/s12064-001-0027-7).
- [43] T. Gisiger. Scale invariance in biology: coincidence or footprint of a universal mechanism? *Biological Reviews* **76**, 161–209 (2001). doi: [doi:10.1017/S1464793101005607](https://doi.org/10.1017/S1464793101005607).
- [44] R. E. Ulanowicz. The balance between adaptability and adaptation. *Biosystems* **64**, 13–22 (2002). doi: [10.1016/S0303-2647\(01\)00170-8](https://doi.org/10.1016/S0303-2647(01)00170-8).

- [45] C. L. Faustino, L. R. da Silva, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo e G. M. Viswanathan. Search dynamics at the edge of extinction: Anomalous diffusion as a critical survival state. *Europhys. Lett.* **77**, 30002 (2007). doi: [10.1209/0295-5075/77/30002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/77/30002).
- [46] G. F. Lima, Martinez, S. Alexandre e O. Kinouchi. Deterministic Walks in Random Media. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 1, 010603 (2001). doi: [10.1103/PhysRevLett.87.010603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.010603).
- [47] C. A. S. Terçariol e A. S. Martinez. Analytical results for the statistical distribution related to a memoryless deterministic walk: Dimensionality effect and mean-field models. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **72**, 2, 021103 (páginas 8) (2005). doi: [10.1103/PhysRevE.72.021103](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.021103).
- [48] S. Risau-Gusman, A. S. Martinez e O. Kinouchi. Escaping from Cycles Through a Glass Transition. *Phys. Rev. E* **68**, 1, 016104 (2003). doi: [10.1103/PhysRevE.68.016104](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.016104).
- [49] H. Freund e P. Grassberger. The red queen's walk. *Physica A* **190**, 218 (1992). doi: [10.1016/0378-4371\(92\)90033-M](https://doi.org/10.1016/0378-4371(92)90033-M).
- [50] D. Gale, J. Propp, S. Sutherland e S. Troubetzkoy. Further travels with my ant. *Mathematical Intelligencer* **17**, 48–56 (1995). URL <http://arxiv.org/pdf/math.DS/9501233.pdf>.
- [51] L. A. Bunimovich. Walks in Rigid Environments: Symmetry and Dynamics. *Astérisque* **286**, 231–248 (2003). doi: [10.1023/A:1019727111513](https://doi.org/10.1023/A:1019727111513).
- [52] D. Boyer e H. Larralde. Looking for the Right Thing at the Right Place: Phase Transition in an Agent Model with Heterogeneous Spatial Resources. *Complexity* **10**, 52 (2005). doi: [10.1002/cplx.20068](https://doi.org/10.1002/cplx.20068).
- [53] L. A. Bunimovich. Deterministic walks in random environments. *Physica D* **187**, 20 (2004). doi: [10.1016/j.physd.2003.09.028](https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.028).
- [54] L.-A. Giraldeau e T. Caraco. *Social Foraging Theory* (Princeton University Press, 2000).
- [55] H. R. Esa Ranta e N. Peuhkuri. Patch exploitation, group foraging, and unequal competitors. *Behavioral Ecology* **6**, 1 (1995). doi: [10.1093/beheco/6.1.1](https://doi.org/10.1093/beheco/6.1.1).
- [56] C. Detrain e J.-L. Deneubourg. Self-organized structures in a superorganism: do ants “behave” like molecules? *Phys. Life Rev.* **3**, 162 (2006). doi: [10.1016/j.pprev.2006.07.001](https://doi.org/10.1016/j.pprev.2006.07.001).

- [57] X. Cui, R. M. Patton, J. Treadwell e T. E. Potok. *Studies in Computational Intelligence*, capítulo Particle Swarm Based Collective Searching Model for Adaptive Environment (Springer's Studies in Computational Intelligence (SCI), 2007). doi: [10.1007/978-3-540-78987-1-20](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78987-1-20).
- [58] P. Y. Quenette, J. Ferron, e S. Sirois. Group foraging in snowshoe hares (*Lepus americanus*): aggregation or social group? *Behav. Proc* **41**, 29 (1997). doi: [10.1016/S0376-6357\(97\)00027-2](https://doi.org/10.1016/S0376-6357(97)00027-2).
- [59] E. W. Seabloom e O. J. Reichman. Simulation Models of the Interaction Between Herbivore Strategies, Social Behavior and Plant Community Dynamics. *Ann. Nat.* **157**, 76–96 (2001). doi: [10.1086/317009](https://doi.org/10.1086/317009).
- [60] B. Bulka, M. Gaston, e M. Desjardins. Local strategy learning in networked multi-agent team formation. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* **29**, 29–45 (2007). doi: [10.1007/s10458-006-0007-x](https://doi.org/10.1007/s10458-006-0007-x).
- [61] A. K. Seth. Competitive foraging, decision making, and the ecological rationality of the matching law. *From animals to animats 7: Proceedings of the Seventh International Conference on the Simulation of Adaptive Behavior* **9**, 359–368 (2002). URL <http://www.sussex.ac.uk/Users/anils/php/processPdf.php?item=9>.
- [62] L. Conradt e T. J. Roper. Group decision-making in animals. *Nature* **421**, 155 (2003). doi: [10.1038/nature01294](https://doi.org/10.1038/nature01294).
- [63] G. Schaller. *The Mountain Gorilla: Ecology and Behavior*. *Science* **140**, 1081–1082 (1963). doi: [10.1126/science.140.3571.1081](https://doi.org/10.1126/science.140.3571.1081).
- [64] H. H. T. Prins. *Ecology and Behaviour of the African Buffalo: Social Inequality and Decision Making* (Springer, 1996).
- [65] A. J. King, C. M. S. Douglas, E. Huchard, N. J. B. Isaac e G. Cowlshaw. Dominance and affiliation mediate despotism in a social primate. *Current Biology* **18**, 1833 (2008). doi: [10.1016/j.cub.2008.10.048](https://doi.org/10.1016/j.cub.2008.10.048).
- [66] M. N. Magalhães. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias* (EdUSP, 2011).
- [67] M. C. Santos. *Processos de Busca Aleatória Markoviana com Difusão Anômala*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná (2009). URL <http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/handle/1884/19068>.

- [68] M. C. Santos. Página *WEB* da tese de doutorado: Modelo Geral de Busca Aleatória Markoviana (2012). URL <http://fisica.ufpr.br:/santos/tese>.
- [69] M. C. Wang e G. E. Uhlenbeck. On the Theory of the Brownian Motion II. *Rev. Mod. Phys.* **17**, 2-3, 323–342 (1945). doi: [10.1103/RevModPhys.17.323](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.17.323).
- [70] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2* (John Wiley and Sons, New York, 1971).
- [71] N. Boccara. *Modeling Complex Systems* (Springer, 2004).
- [72] P. Lévy. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires* (Gauthier-Villars, 1927).
- [73] B. D. Hughes. *Random Walks and Random Environments: Volume 1* (Oxford University Press, 1995).
- [74] A. Einstein. Brownian Motion. *Ann. d. Physik.* (Traduzido por A. D. Cowper em: Investigations on the theory of the Brownian movement, Ed. R. Fürth, London, Methuen, 1926) **4° série t. XXI**, 371 (1905).
- [75] P. Langevin. Sur la Théorie du Mouvement Brownien. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530–533 (1908). doi: [10.1119/1.18725](https://doi.org/10.1119/1.18725).
- [76] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation - Method of Solution and Applications* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989).
- [77] A. A. G. Cortines. *Dinâmica Intradiária do Mercado de Ações Brasileiro*. Dissertação de Mestrado, PUC, Departamento de Física - Rio de Janeiro. (2005).
- [78] A. N. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer-Berlin, 1933).
- [79] F. Hausdorff. Momentenprobleme für ein endliches Intervall. *Math. Z.* **16**, 220–248 (1923).
- [80] H. C. V. Lopes. Processos Estocásticos. Technical Report, PUC - Rio de Janeiro (2012). URL <http://www-di.inf.puc-rio.br/~lopes//inf2035/processosestocasticos.pdf>.
- [81] S. M. Stigler. *Statistics on the Table - The History of Statistical Concepts and Methods* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1999).

- [82] L. G. Moyan, C. Tsallis e M. Gell-Mann. Numerical Indications of a q -generalised Central Limit Theorem. *Europhys. Lett.* **73**, 813–819 (2006). doi: [10.1209/epl/i2005-10487-1](https://doi.org/10.1209/epl/i2005-10487-1).
- [83] C. H. Rycroft e M. Z. Bazant. Lecture 1: Introduction to Random Walks and Diffusion. Technical Report, Department of Mathematics, MIT (2005).
- [84] L. Bachelier. Theorie de La Especulation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17**, 21–86 (1900). doi: [10.1111/1467-9965.00098](https://doi.org/10.1111/1467-9965.00098).
- [85] G. H. Weiss. *Aspects and Applications of the Random Walks* (Elsevier, 1994).
- [86] A. Papoulis. *Random Walk, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 2nd ed.* (McGraw-Hill - New York, 1984).
- [87] E. W. Weisstein. “Random Walk–2-Dimensional”. Technical Report, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. Walk2-Dimensional.html (2003). URL <http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk2-Dimensional.html>.
- [88] G. N. Watson. Three Triple Integrals. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 2* **10**, 266–276 (1939). doi: [10.1093/qmath/os-10.1.266](https://doi.org/10.1093/qmath/os-10.1.266).
- [89] W. H. McCrea e F. J. W. Whipple. Random Paths in Two and Three Dimensions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60**, 281–298 (1940).
- [90] C. Domb. On Multiple Returns in the Random-Walk Problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 586–59 (1954). doi: [10.1017/S0305004100029716](https://doi.org/10.1017/S0305004100029716).
- [91] M. L. Glasser e I. J. Zucker. Extended Watson Integrals for the Cubic Lattices. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A* **74**, 1800–1801 (1977). doi: [10.1073/pnas.74.5.1800](https://doi.org/10.1073/pnas.74.5.1800).
- [92] E. W. Montroll. Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. *J. SIAM* **4**, 241–260 (1956). URL http://epubs.siam.org/siap/resource/1/smjmap/v4/i4/p241_s1.
- [93] S. R. Finch. *Pólya’s Random Walk Constant* (Cambridge University Press, 2003).
- [94] J. Borwein e D. Bailey. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century* (Wellesley, 2003).
- [95] Michaelis. *Heurística* (2012).

- [96] M. C. Santos, D. Boyer, O. Miramontes, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, J. L. Mateos e M. G. E. da Luz. Origin of Power-law Distributions in Deterministic Walks: the Influence Landscape Geometry. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* **75**, 1–6 (2007). doi: [10.1103/PhysRevE.75.061114](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.061114).
- [97] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter. Strange Kinetics. *Nature* **363**, 31 (1993). doi: [10.1038/363031a0](https://doi.org/10.1038/363031a0).
- [98] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza e R. Maynard. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of the Lévy Distributions in Nature. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 27, 5442 (1996). doi: [10.1103/PhysRevLett.77.5442](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.5442).
- [99] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza e R. Maynard. Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of Lévy Distributions in Nature. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 20, 3589–3593 (1995). doi: [10.1103/PhysRevLett.75.3589](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3589).
- [100] M. F. Shlesinger e J. Klafter. Comment on “Accelerated Diffusion in Josephson Junctions and Related Chaotic Systems”. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 23, 2551 (1985). doi: [10.1103/PhysRevLett.54.2551](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.2551).
- [101] R. Kutner. Hierarchical Spatio-temporal Coupling in Fractional Wanderings. I. Continuous-time Weierstrass Flights. *Physica A* **264**, 84 (1999). doi: [10.1016/S0378-4371\(98\)00348-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00348-3).
- [102] G. Berkolaiko e S. Havlin. Territory Covered by N Lévy Flights on d-dimensional Lattices. *Phys. Rev. E* **55**, 2, 1395–1400 (1997). doi: [10.1103/PhysRevE.55.1395](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.1395).
- [103] G. Berkolaiko, S. Havlin, H. Larralde e G. H. Weiss. Expected Number of Distinct Sites Visited by N Lévy Flights on a One-dimensional Lattice. *Phys. Rev. E* **53**, 6, 5774–5778 (1996). doi: [10.1103/PhysRevE.53.5774](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.5774).
- [104] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. Stanley e G. H. Weiss. Number of Distinct Sites Visited by N Random Walkers. *Phys. Rev. A* **45**, 10, 7128–7138 (1992). doi: [10.1103/PhysRevA.45.7128](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.7128).
- [105] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. E. Stanley e G. H. Eeiss. Territory Covered by N Diffusing Particles. *Nature* **355**, 423 (2002). doi: [10.1038/355423a0](https://doi.org/10.1038/355423a0).
- [106] H. Szu. *Dynamic Patterns in Complex Systems* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [107] S. V. Buldyrev, S. Havlin, A. Y. Kazakov, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley e G. M. Viswanathan. Average time spent by Lévy flights and

- walks on an interval with absorbing boundaries. *Phys. Rev. E* **64**, 041108 (2001). doi: [10.1103/PhysRevE.64.041108](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.041108).
- [108] P. M. Drysdale e P. A. Robinson. Lévy Random Walks in Finite Systems. *Phys. Rev. E* **58**, 5, 5382–5394 (1998). doi: [10.1103/PhysRevE.58.5382](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.5382).
- [109] P. Hertz. Über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik. *Annalen der Physik* **338**, 537–552 (1909). doi: [10.1002/andp.19103381202](https://doi.org/10.1002/andp.19103381202).
- [110] S. Chandrasekhar. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1–89 (1943). doi: [10.1103/RevModPhys.15.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.15.1).
- [111] G. Ramos-Fernandez e B. Ayala-Orozco. *Primates in Fragments: Ecology and Conservation* (Kluwer Academic Press, New York, 2002).
- [112] R. N. Mantegna e H. E. Stanley. Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 22, 2946–2949 (1994). doi: [10.1103/PhysRevLett.73.2946](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.2946).
- [113] I. Koponen. Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights Towards the Gaussian Stochastic Process. *Physical Review E* **52**, 1197 – 1199 (1995). doi: [10.1103/PhysRevE.52.1197](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.1197).
- [114] A. Clauset, C. R. Shalizi e M. E. J. Newman. Power-law Distributions in Empirical Data. *SIAM Review* **51**, 661–703 (2009). doi: [10.1137/070710111](https://doi.org/10.1137/070710111).
- [115] A. Clauset, C. R. Shalizi e M. E. J. Newman. Power-law Distributions in Empirical Data (2009). URL <http://tuvalu.santafe.edu/~aaronc/powerlaws>.
- [116] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan e M. G. E. da Luz. Can collective searches profit from Lévy walk strategies? *Journal of Physics. A, Mathematical and Theoretical* **42**, 434017 (2009). doi: [10.1088/1751-8113/42/43/434017](https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/43/434017).
- [117] M. G. E. da Luz, S. V. Buldyrev, S. Havlin, E. P. Raposo, H. E. Stanley, e G. M. Viswanathan. Improvements in the statistical approach to random Lévy flight searches. *Physica A* **295**, 89 (2001). doi: [10.1016/S0378-4371\(01\)00058-9](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00058-9).
- [118] F. Bartumeus, J. Catalan, G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, e M. G. E. da Luz. The influence of turning angles on the success of non-oriented animal searches. *J. Theor. Biol.* **43**, 252 (2008). doi: [10.1016/j.jtbi.2008.01.009](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2008.01.009).

- [119] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo e M. G. E. da Luz. Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches. *Phys. Life Rev* **5**, 133 (2008). doi: [10.1016/j.plrev.2008.03.002](https://doi.org/10.1016/j.plrev.2008.03.002).
- [120] M. S. Portugal. Notas Introdutórias Sobre o Princípio de Máxima Verossimilhança: Estimação e Teste de Hipóteses. Technical Report, DECON / UFRGS (1995). URL <http://www.ufrgs.br/decon>.
- [121] J. Aldrich. R. A. Fisher and the Making of Maximum Likelihood 1912-1922. *Statistical Science* **12**, 3, pp. 162–176 (1997). URL <http://www.jstor.org/stable/2246367>.
- [122] H. A. Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika* **42**, 425–440 (1955). doi: [10.1093/biomet/42.3-4.425](https://doi.org/10.1093/biomet/42.3-4.425).
- [123] G. U. Yule. A Mathematical Theory of Evolution, Based on the Conclusions of Dr. J. C. Willis, F.R.S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Containing Papers of a Biological Character* **213**, 21–87 (1925). doi: [10.1098/rstb.1925.0002](https://doi.org/10.1098/rstb.1925.0002).