

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Germán Alonso Benitez Monsalve

**UM ESTUDO SOBRE A CATEGORIA DERIVADA DE
ÁLGEBRAS STRING**

Curitiba
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Germán Alonso Benitez Monsalve

**UM ESTUDO SOBRE A CATEGORIA DERIVADA DE
ÁLGEBRAS STRING**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

Curitiba
2012

M754e Monsalve, Germán Alonso Benitez
Um estudo sobre categoria derivada de álgebras string
[manuscrito] / Germán Alonso Benitez Monsalve. – Curitiba, 2012.
101f. : il. ; 30 cm.

Impresso.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor
de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática
Aplicada, 2012.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares.

1. Álgebra. 2. Álgebras String. I. Universidade Federal do Paraná.
II. Alvares, Edson Ribeiro. III. Título.

CDD: 512

A minha família que é o motor da minha vida

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe Fabiola Monsalve e a meu pai Osvaldo Benitez por me mostrarem o caminho da educação desde que eu era criança. Agradeço a Suki por me apoiar e me acompanhar durante este projeto. Sou grato também a meus irmãos Jhon Henry e Fabian pela confiança, ao meu sobrinho Thomas por me ensinar a sorrir e brincar, mesmo nos momentos mais difíceis, e ao Dom Jaime Palacio, o qual é muito querido e estimado pela família Benitez Monsalve. Muito obrigado a minha família pelo carinho e apoio recebido. Mesmo com todas minhas doideras, são eles meus motores e minha inspiração.

Quanto ao Profesor Edson Ribeiro Alvares, faltam me palavras para agradecer toda sua dedicação e seu empenho em me orientar no mestrado. Ele, além de me dar as boas vindas a Curitiba e me ensinar muita matemática, permitiu que eu me preparasse para seguir na carreira acadêmica.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná (PPGMA-UFPR) pela qualidade acadêmica e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

Motivados pelo trabalho de Happel e Seidel que caracterizam as álgebras string de tipo \mathbb{A}_n (com um tipo bastante especial de relações) que são hereditárias por partes, resolvemos analisar quando que extensões por um ponto de álgebras string hereditárias por partes ainda são hereditárias por partes. Sabemos que este resultado é falso de maneira geral. Porém aqui apresentamos um estudos que aponta para a solução deste problema em diversos casos. No caso das álgebras de Nakayama resolvemos o problema completamente e também no caso das álgebras gentle de tipo árvore.

Palavras-chave: *Álgebras string, extensão por um ponto, categorias derivadas, álgebras hereditárias por partes, quiver de Auslander-Reiten, módulo inclinante.*

Abstract

Motivated by the work of Happel and Seidel which, characterizes the string algebras of type \mathbb{A}_n (with a very special type of relations) that are piecewise hereditary, we decided to analyze when the one-point extensions of piecewise hereditary string algebras are still piecewise hereditary. We know that this result is generally false. Moreover, here we present a study that points out the solution in several cases of this problem. Finally, we will solve the problem completely in the both the Nakayama's algebras case and gentle algebras of tree type case.

Keywords: *String algebras, One-point extension, derived categories, piecewise hereditary algebras, quiver of Auslander-Reiten, tilting module.*

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 Conceitos e Resultados Preliminares	4
1.1 Álgebras String	4
1.1.1 Módulos String	7
1.1.2 Módulos Band	10
1.2 Extensão por um ponto	13
1.3 Álgebras de Nakayama	15
1.4 Categorias Derivadas	17
2 Extensão por um ponto numa string por um módulo indecomponível	20
2.1 Extensão por um ponto por string de comprimento zero	20
2.2 Extensão por um ponto por string de comprimento um	21
2.3 Extensão por um ponto por string de comprimento dois	23
2.4 Extensão por um ponto por string de comprimento	
$n \geq 3$	42
2.5 Extensão por um ponto por módulo band	50
2.6 Teoremas Principais	55
3 Álgebras Hereditárias por Partes	57
3.1 Extensão por um ponto por módulo simples	57
3.2 O caso das Álgebras de Nakayama	58
3.3 Deslocamento da Extensão por um Ponto	66
3.4 Outra estratégia para resolver o problema principal	72
3.5 O caso das Álgebras Gentle	76

4 Apêndice	80
4.1 Funtor Especial	80
4.1.1 O Recobrimento Minimal Graduável de um Quiver	80
4.1.2 Representações de Quivers	82
4.1.3 O Funtor	85
Referências Bibliográficas	91

Introdução

O principal objetivo da Teoria de Representações de Álgebras de Artin é estudar as álgebras via categoria de módulos e encontrar nesta categoria propriedades de sua álgebra. Como algumas de suas ferramentas de estudo mais importantes citamos os Métodos Diagramáticos ([Gab72] e [Gab73]), Sequências de Auslander-Reiten ([Aus74] e [AR75]), Teoria Inclinante ([BB80]), Álgebra Homológica ([ASS06], [Ass07]), entre outras.

Para uma álgebra A denotaremos por $modA$ a categoria dos A -módulos à direita finitamente gerados. Dada a possível dificuldade em determinar propriedades de A a partir de $modA$, uma estratégia natural é considerar uma álgebra B conhecida tal que A e B sejam Morita equivalentes, isto é, tal que as categorias $modA$ e $modB$ sejam equivalentes, pois desta forma A herda propriedades de B (ver [Ass07] p. 212-213). Neste caminho pode-se fazer uso da Teoria Inclinante, introduzida por Brenner e Butler (ver [BB80]), que apresenta um A -módulo T_A chamado inclinante tal que as categorias $modA$ e $modB$ são muito próximas, onde $B = End_A(T_A)$ é a álgebra de endomorfismos de T . Além disso, pode-se garantir que $modA$ e $modB$ são equivalentes no caso em que T_A é também um progerador de A .

Nos últimos anos as técnicas de sequências de Auslander-Reiten e Teoria Inclinante foram generalizadas para Categorias Trianguladas, especialmente para Categorias Derivadas por Happel (ver [Hap88]). Estas foram introduzidas nos anos sesenta por Verdier e Grothendieck ([Ver77]). Happel, em [Hap88], estende a generalização clássica das equivalências de Morita em termos de equivalências de categorias derivadas, as quais produzem vários invariantes, por exemplo, duas álgebras A e B que têm suas respectivas categorias derivadas equivalentes, têm centros e cohomologias de Hochschild isomorfos, A tem dimensão global finita se, e somente se, B tem dimensão global finita (ver [Hap87] p.344), A é um álgebra *gentle* se, e somente se, B é *gentle* (ver [SZ03]). Por meio desses invariantes, pode-se estudar algumas classes de álgebras A via sua categoria derivada, $D^b(A)$, no entanto, estudar a categoria derivada de uma álgebra qualquer é em geral um problema difícil.

Nesta direção de estudar a álgebra via sua categoria derivada, Happel, além de apresentar os triângulos de Auslander-Reiten, constroi o *quiver* de Auslander-Reiten da categoria derivada de uma álgebra hereditária de dimensão finita, e apresenta algumas propriedades sobre este *quiver*, que suscita a seguinte pergunta: dada uma álgebra A , em quais condições existe uma álgebra hereditária H tal que suas respectivas categorias derivadas, $D^b(A)$ e $D^b(H)$, são derivadamente equivalentes? A resposta a esta pergunta leva ao conceito de álgebra hereditária por partes, isto é, uma álgebra que é derivadamente equivalente a uma álgebra hereditária. Este conceito foi introduzido por Happel e, em [Hap88], são apresentadas algumas propriedades destas álgebras.

Recentemente, Viktor Bekkert e Yuriy Drozd, em [BD09], Raymundo Bautista e Shiping Liu, em seu *preprint* [BL], apresentam (com técnicas diferentes) condições necessárias e suficientes para que uma álgebra A de dimensão finita e com $\text{rad}^2 A = 0$ seja hereditária por partes. Em 2010, Happel e Seidel ([HS10]) determinam para quais pares (n, r) as álgebras $\Lambda(n, r) = k\mathbb{A}_n/I_r$ são hereditárias por partes e de que tipo, em que

$$\mathbb{A}_n := 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow n-1 \longleftarrow n$$

e I_r é o ideal gerado por todos os caminhos de comprimento r , determinando assim uma grande classe de álgebras de Nakayama que são hereditárias por partes. Para isto, Happel e Seidel usam nas demonstrações a álgebra extensão por um ponto de A por M , $A[M]$, dado que $\Lambda(n, r)$ pode ser visto como $\Lambda(n, r) = \Lambda(n-1, r)[I_{n-r+1}]$, a extensão por um ponto de $\Lambda(n-1, r)$ por I_{n-r+1} . Desta forma, Happel e Seidel apresentam uma tabela que classifica o tipo de álgebra hereditária por partes para cada par de inteiros positivos n e r . Com esta tabela e pela técnica usada por eles, uma pergunta natural que colocamos foi: Se A é hereditária por partes, quando $A[M]$ é hereditária por partes? Resolvemos inserir esta questão no contexto das álgebras *string*.

Em [BR87], Butler e Ringel introduziram uma classe de álgebras que contém a classe das álgebras de Nakayama, chamadas *Álgebras String*. Neste artigo, apresentam de uma maneira combinatória todos os módulos indecomponíveis, morfismos irreduzíveis e sequências de Auslander-Reiten de módulos sobre uma álgebra *string*. Este tipo de álgebras tem sido tema de investigação de muitos pesquisadores. Por exemplo, não se conhece a descrição dos triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada $D^b(A)$ sobre uma álgebra *string* A , nem seus objetos indecomponíveis, mas Bekkert e Merklen descrevem em [BM03] todos os objetos indecomponíveis da categoria derivada $D^b(A)$ para uma sub-

classe das *string*, chamada *Álgebras Gentle*. Estas álgebras foram introduzidas por Assem e Skowrónski em [AS87].

Esta dissertação apresenta um estudo das álgebras *string* que são obtidas através de extensões por um ponto de álgebras *string*. No primeiro capítulo e no apêndice, são apresentados os conceitos básicos necessários para a teoria. No capítulo dois, é demonstrado que a extensão por um ponto $A[M]$ de uma álgebra *string* A que satisfaz $\text{rad}^2 A = 0$ e com M indecomponível é *string* se M for um módulo *string* dado por uma *string* de comprimento zero ou um. No capítulo três, mostramos que ao fazer a extensão por um ponto de álgebras de Nakayama de radical quadrado zero estas são hereditárias por partes. A técnica utilizada para provar este resultado consiste em construir um módulo tilting T_A e utilizar que A e $\text{End } T_A$ são derivadamente equivalentes. O problema é bastante combinatorial e através dele notamos que estas dificuldades se tornariam difíceis de transpor no caso geral. Para o caso geral, estudamos as técnicas apresentadas por Bautista e Liu e com estas analisamos o caso das álgebras *gentle*. Porém, o problema geral como esta descrito no capítulo três, ainda não apresenta uma resposta definitiva.

Ao término deste trabalho encontramos um resultado de Bekkert e Merklen [BM03] em que eles descrevem como são os complexos indecomponíveis da categoria derivada de álgebras *gentle*. Estes complexos são isomorfos a algum complexo *string* ou *band*. Nosso próximo passo seria, utilizar esta descrição destes complexos para descrever como são os complexos das extensões por um ponto e com estes poder caracterizar se a extensão por um ponto é hereditária por partes. Este será o próximo passo para finalizar esta pesquisa.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos preliminares e algumas propriedades que usaremos ao longo deste trabalho. Começaremos com o conceito de Álgebra String, continuando com as definições de string, band as quais nos permitiram dar representações do quiver com relações associado à álgebra string dada, cujas representações permitem apresentar os conceitos de módulos string e band. Logo enunciaremos sem demonstração o teorema que garante que os módulos string e band são todos os módulos indecomponíveis de uma álgebra string, além disso, daremos as definições de string direta e string inversa, para assim descrever a partir deles os módulos projetivos e injetivos como módulos string. Também daremos a definição de extensão por um ponto, a qual permite achar novas álgebras a partir de uma álgebra dada. Ao longo deste trabalho vamos considerar k como um corpo algébricamente fechado e todas as álgebras são k -álgebras de dimensão finita.

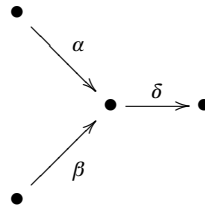
1.1 Álgebras String

Definição 1.1. *Uma k -álgebra $A = kQ/\langle \rho \rangle$ é uma **álgebra string** se satisfaz:*

- a. Para todo vértice $i \in Q_0$ existem no máximo duas flechas que começam (resp., terminam) em i .*
- b. Para toda flecha $\beta \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\alpha \in Q_1$ (resp., $\sigma \in Q_1$) tal que $\alpha\beta \notin \langle \rho \rangle$ (resp., $\beta\sigma \notin \langle \rho \rangle$).*
- c. O ideal $\langle \rho \rangle$ é gerado por monômios, isto é, ρ é um conjunto de caminhos de Q .*

Exemplo 1.1.

a. Consideremos a k -álgebra $A = kQ/\langle \rho \rangle$, em que Q é o quiver

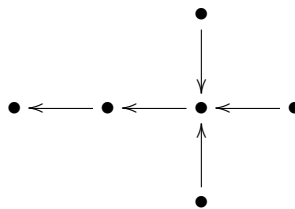


- Se $\langle \rho \rangle = 0$, então A não é string, pois para $\delta \in Q_1$ existem $\alpha, \beta \in Q_1$ tais que $\alpha\delta, \beta\delta \notin \langle \rho \rangle$.
- Se $\langle \rho \rangle = \langle \alpha\delta \rangle$, então A é string.

b. Consideremos a k -álgebra $A = kQ/\langle \rho \rangle$, em que $Q := \bullet \xleftarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$

- Se $\langle \rho \rangle = 0$, então A não é string, pois para $\beta \in Q_1$ existem $\alpha, \beta \in Q_1$ tais que $\beta\alpha, \beta^2 \notin \langle \rho \rangle$.
- Se $\langle \rho \rangle = \langle \beta^2 \rangle$, então A é string.

c. A k -álgebra $A = kQ/\langle \rho \rangle$, em que Q é o quiver



não é string para qualquer ideal $\langle \rho \rangle$, pois existe em Q um vértice que corresponde ao final de três flechas em Q .

Definição 1.2. Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string.

1. Para toda flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q_1 definimos sua **inversa** como $\alpha^{-1} : j \rightarrow i$, isto é, $s(\alpha^{-1}) = e(\alpha)$ e $e(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$.
2. Um **laço** em Q é uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = e(\alpha)$.

3. Um **passeio** p de **comprimento** $l(p) = n > 0$ é uma sequência

$$p = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n$$

tal que $p_i \in Q_1$ ou $p_i^{-1} \in Q_1$ e $e(p_i) = s(p_{i+1})$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Seu **passeio inverso** é

$$p^{-1} = p_n^{-1} p_{n-1}^{-1} \cdots p_2^{-1} p_1^{-1}.$$

Dizemos que $s(p) = s(p_1)$ e que $e(p) = e(p_n)$, portanto $s(p^{-1}) = s(p_n^{-1}) = e(p_n)$ e $e(p^{-1}) = e(p_1^{-1}) = s(p_1)$.

4. Uma **string** $S = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ de comprimento $l(S) = n > 0$ é um passeio tal que $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e tal que nenhum subpasseio $S_{ik} = s_i s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_{i+k}$, nem seu inverso pertencem ao ideal $\langle \rho \rangle$.

5. Para cada vértice $i \in Q_0$ definimos duas string ϵ_i^t de comprimento $l(\epsilon_i^t) = 0$, onde $t \in \{-1, +1\}$, as quais serão chamadas de **string triviais**.

6. Uma string S é dita **direta** (resp. **inversa**) se é composição só de flechas (resp. só de inversas).

7. Uma string B é dita **band** se B^n é string para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e B não é potência de uma string de comprimento menor, isto é, não existem uma string S e $m \in \mathbb{N}$ tal que $B = S^m$ e $l(S) < l(B)$.

Definição 1.3. Seja $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string, defina-se os seguintes conjuntos.

1. \mathcal{W} é o conjunto de todas as string.
2. \mathcal{W}' é o conjunto de todas as band.

Definição 1.4. Seja $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string.

1. Sejam $S, S' \in \mathcal{W}$, definamos em \mathcal{W} a relação “ \sim ” assim:
 $S \sim S'$ se, e somente se, $S' = S$ ou $S' = S^{-1}$.
2. Sejam $S, S' \in \mathcal{W}'$, definamos em \mathcal{W}' a relação “ \equiv ” assim:
 $S \equiv S'$ se, e somente se, S' é uma permutação cíclica de S (ou seja, $S = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ e $S' = s_l s_{l+1} \cdots s_{n-1} s_n s_1 s_2 \cdots s_{l-2} s_{l-1}$) ou a inversa de uma permutação cíclica de S .

Observação 1.1. É claro que as relações “ \sim ” e “ \equiv ” são relações de equivalências.

Definição 1.5. Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string, defina-se os seguintes conjuntos.

1. $\underline{\mathcal{W}} := \mathcal{W} / \sim$.
2. $\underline{\mathcal{W}'} := \mathcal{W}' / \equiv$.

1.1.1 Módulos String

Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $S = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n \in \mathcal{W}$

$$S := \bullet \xrightarrow{s_1} \bullet \xrightarrow{s_2} \cdots \xrightarrow{s_{n-1}} \bullet \xrightarrow{s_n} \bullet$$

Definamos uma representação $M(S)$ do quiver Q assim: Se $S = e_i^t$ é uma string trivial, então $M(S) = S_i$ é o simples associado ao vértice i , senão então definamos a representação da seguinte forma:

Passo 1: Consideremos uma aplicação

$$\begin{aligned} u : \{0, 1, \dots, n\} &\longrightarrow Q_0 \\ i &\longrightarrow u(i) := \begin{cases} e(s_i); & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ s(S); & \text{se } i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

obtemos então

$$S := u(0) \xrightarrow{s_1} u(1) \xrightarrow{s_2} \cdots \xrightarrow{s_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{s_n} u(n)$$

Passo 2: Para cada vértice $x \in Q_0$, consideremos o conjunto

$$I_x := u^{-1}(\{x\}).$$

Passo 3: Associamos a cada vértice $x \in Q_0$ um k -espaço vetorial

$$M(S)_x := {}_k \langle z_i / i \in I_x \rangle \cong k^{|I_x|}.$$

onde $|I_x|$ é o número de elementos do conjunto I_x e a notação ${}_k \langle z_i / i \in I_x \rangle$ é o k -espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{z_i / i \in I_x\}$.

Ou seja, nos vértices por onde "passa" o passeio que define a string, teremos um espaço vetorial não nulo e nos outros um espaço vetorial nulo. A dimensão deste espaço vetorial, é o número de vezes que a string "passa" por aquele vértice.

Passo 4: Associamos a cada flecha $\alpha \in Q_1$ uma transformação linear γ_α assim: Se $M(S)_{s(\alpha)} \neq 0$ e $M(S)_{e(\alpha)} \neq 0$, então

$$\gamma_\alpha: M(S)_{s(\alpha)} \longrightarrow M(S)_{e(\alpha)}$$

$$z_i \longmapsto \gamma_\alpha(z_i) := \begin{cases} z_{i+1}; & \text{se } s_{i+1} = \alpha \\ z_{i-1}; & \text{se } s_i = \alpha^{-1} \\ 0; & \text{se } s_{i+1} \neq \alpha \text{ e } s_i \neq \alpha^{-1} \end{cases}$$

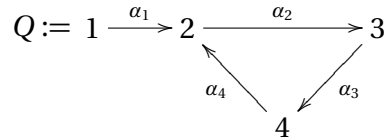
e se $M(S)_{s(\alpha)} = 0$ ou $M(S)_{e(\alpha)} = 0$, então $\gamma_\alpha = 0$.

Observação 1.2. Não é difícil ver que $M(S)$ é uma representação do quiver Q a qual satisfaz as relações de ρ , o qual implica que $M(S)$ é um A -módulo.

Definição 1.6. Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e S uma string. A representação $M(S)$ é chamado de **módulo string**.

Exemplo 1.2.

Consideremos a k -álgebra string $A = kQ / \langle \alpha_4 \alpha_2 \rangle$ dada pelo quiver



e a string $S = \alpha_1 \alpha_4^{-1} \alpha_3^{-1} \alpha_2^{-1}$. Agora construiremos o A -módulo string $M(S)$ assim:

Passo 1: Da aplicação

$$u: \{0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow Q_0$$

$$i \longmapsto u(i) := \begin{cases} e(s_i); & \text{se } 1 \leq i \leq 4 \\ s(S); & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

obtemos então

$$S := u(0) = 1 \xrightarrow{\alpha_1} u(1) = 2 \xleftarrow{\alpha_4} u(2) = 4 \xleftarrow{\alpha_3} u(3) = 3 \xleftarrow{\alpha_2} u(4) = 2$$

Passo 2: Para cada vértice $x \in Q_0$, temos os conjuntos:

$$I_1 := \{0\}, I_2 := \{1, 4\}, I_3 := \{3\}, I_4 := \{2\}.$$

Passo 3: Para cada vértice $x \in Q_0$ obtemos os k -espaços vetoriais

$$M(S)_1 := {}_k \langle z_0 \rangle \cong k, M(S)_2 := {}_k \langle z_1, z_4 \rangle \cong k^2, M(S)_3 := {}_k \langle z_3 \rangle \cong k, M(S)_4 := {}_k \langle z_2 \rangle \cong k.$$

Passo 4: Para cada flecha $\alpha \in Q_1$ temos as transformações lineares

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: {}_k \langle z_0 \rangle &\longrightarrow {}_k \langle z_1, z_4 \rangle \\ z_0 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: {}_k \langle z_1, z_4 \rangle &\longrightarrow {}_k \langle z_3 \rangle \\ z_1 &\longmapsto \mathbf{0} \\ z_4 &\longmapsto z_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_3}: {}_k \langle z_3 \rangle &\longrightarrow {}_k \langle z_2 \rangle \\ z_3 &\longmapsto z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_4}: {}_k \langle z_2 \rangle &\longrightarrow {}_k \langle z_1, z_4 \rangle \\ z_2 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

Portanto de todo o anterior temos o A -módulo string

$$M(S) := k \xrightarrow{[1 \ 0]^t} k^2 \xrightarrow{[0 \ 1]} k$$

$$\begin{array}{ccc} & & k \\ & \swarrow & \searrow \\ & [1 \ 0]^t & 1 \\ & k & \end{array}$$

Observação 1.3. Se $A = kQ/\langle \rho \rangle$ é uma k -álgebra string e S uma string, não é difícil provar que $M(S) \cong M(S^{-1})$.

Observação 1.4. Se $A = kQ/\langle \rho \rangle$ é uma k -álgebra string e $i \in Q_0$, então (ver [BR87], p.169-170 e [Pic10], p. 30):

1. O projetivo indecomponível P_i associado ao vértice i , é um A -módulo string, isto é, $P_i = M(S)$, cuja string S tem comprimento maximal da forma $S = ID$, em que $e(I) = i = s(D)$, I é uma string inversa (pode ser trivial) e D é uma string direta (pode ser trivial).
2. O injetivo indecomponível I_i associado ao vértice i , é também um A -módulo string, isto é, $I_i = M(S)$, cuja string S tem comprimento maximal da forma $S = DI$, em que $e(D) = i = s(I)$, D é uma string direta (pode ser trivial) e I é uma string inversa (pode ser trivial).

1.1.2 Módulos Band

Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $S = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n \in \mathcal{W}'$

$$S := \bullet \xrightarrow{s_1} \bullet \xrightarrow{s_2} \cdots \xrightarrow{s_{n-1}} \bullet \xrightarrow{s_n} \bullet$$

Fixemos o k -espaço vetorial Z e $\psi \in \text{Aut}(Z)$. Definamos uma representação $M(S, \psi)$ do quiver Q da seguinte forma:

Passo 1: Consideremos uma aplicação

$$\begin{aligned} u : \{0, 1, \dots, n-1\} &\longrightarrow Q_0 \\ i &\longmapsto u(i) := \begin{cases} e(s_i); & \text{se } 1 \leq i < n \\ s(S); & \text{se } i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

obtemos então

$$S := u(0) \xrightarrow{s_1} u(1) \xrightarrow{s_2} \cdots \xrightarrow{s_{n-2}} u(n-2) \xrightarrow{s_{n-1}} u(n-1)$$

$\xleftarrow{s_n}$

Passo 2: Para cada vértice $x \in Q_0$, consideremos o conjunto

$$I_x := u^{-1}(\{x\}).$$

Passo 3: Exibimos uma representação gráfica da string S , assim:

- (a) Para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ atribuímos o k -espaço vetorial $Z_i = Z$.
- (b) Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ definamos o morfismo f_i

$$f_i := \begin{cases} 1_Z : Z_{i-1} \longrightarrow Z_i; & \text{se } s_i \in Q_1 \text{ e } i < n \\ 1_Z : Z_i \longrightarrow Z_{i-1}; & \text{se } s_i^{-1} \in Q_1 \text{ e } i < n \\ \psi : Z_{n-1} \longrightarrow Z_0; & \text{se } s_n \in Q_1 \\ \psi^{-1} : Z_0 \longrightarrow Z_{n-1}; & \text{se } s_n^{-1} \in Q_1 \end{cases}$$

Passo 4: Associamos a cada vértice $x \in Q_0$ o k -espaço vetorial

$$M(S, \psi)_x := \bigoplus_{i \in I_x} Z_i \cong Z^{|I_x|}.$$

onde $|I_x|$ é o número de elementos do conjunto I_x .

Passo 5: Para cada flecha $\beta \in Q_1$ definamos o conjunto $D_\beta = I_{s(\beta)} \times I_{e(\beta)}$ e a transformação linear γ_β da seguinte forma: Se $M(S, \psi)_{s(\beta)} \neq 0$ e $M(S, \psi)_{e(\beta)} \neq 0$, então

$$\gamma_\beta : \bigoplus_{i \in I_{s(\beta)}} Z_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in I_{e(\beta)}} Z_j ,$$

dada pela soma direta

$$\gamma_\beta := \bigoplus_{(i,j) \in D_\beta} g_{ij} ,$$

onde $g_{ij} : Z_i \longrightarrow Z_j$, esta dada por

$$g_{ij} := \begin{cases} f_k; & \text{se } \exists f_k : Z_i \longrightarrow Z_j \text{ e } (s_k = \beta \text{ ou } s_k = \beta^{-1}) \\ 0; & \text{qualquer outro caso} \end{cases}$$

e se $M(S, \psi)_{s(\beta)} = 0$ ou $M(S, \psi)_{e(\beta)} = 0$, então $\gamma_\beta = 0$.

Observação 1.5. É claro que $M(S, \psi)$ é uma representação do quiver Q a qual satisfaz as relações de ρ e portanto $M(S, \psi)$ é um A -módulo.

Definição 1.7. Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e S uma band. A representação $M(S, \psi)$ é chamado de **módulo band**.

Exemplo 1.3.

Consideremos a k -álgebra de caminhos $A = kQ$ associada ao quiver

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2$$

e a band $S = \alpha^{-1}\beta$. Agora fixemos o k -espaço vetorial $Z = k$ e $\psi \in \text{Aut}(Z)$, é claro que $\psi(x) = \lambda x$, para algum $\lambda \neq 0$. Portanto denotaremos $M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)$ em lugar de $M(S, \psi)$, agora construiremos o A -módulo band $M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)$ assim:

Passo 1: Da aplicação

$$u : \{0, 1\} \longrightarrow Q_0$$

$$i \longmapsto u(i) := \begin{cases} e(s_i); & \text{se } 1 \leq i < 2 \\ s(S); & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

obtemos então

$$S := u(0) = 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} u(1) = 2$$

Passo 2: Para cada vértice $x \in Q_0$, temos os conjuntos:

$$I_1 := \{0\}, I_2 := \{1\}.$$

Passo 3: A representação gráfica de $S = \alpha^{-1}\beta$ é:

$$Z_0 = k \xleftarrow{\lambda} Z_1 = k$$

Passo 4: Para cada vértice $x \in Q_0$ obtemos os k -espaços vetoriais

$$M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)_1 := Z_0 \cong k, M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)_2 := Z_1 \cong k.$$

Passo 5: Para cada flecha $\alpha \in Q_1$ temos as transformações lineares

$$\gamma_\alpha : Z_1 \longrightarrow Z_0 \text{ dada por } \gamma_\alpha = 1_k$$

$$\gamma_\beta : Z_1 \longrightarrow Z_0 \text{ dada por } \gamma_\beta = \lambda$$

Portanto de todo o anterior temos o A -módulo band

$$M(\alpha^{-1}\beta, \lambda) := k \xleftarrow{\lambda} k .$$

Observação 1.6. Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e S uma band. Se $S \equiv S'$, então $M(S) \cong M(S')$, isto é, se S' é uma permutação cíclica de S (ou seja, $S = s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n$ e $S' = s_l s_{l+1} \cdots s_{n-1} s_n s_1 s_2 \cdots s_{l-2} s_{l-1}$) ou a inversa de uma permutação cíclica de S . Para mais detalhes ver [Pic10]

Observação 1.7. Para espaços vetoriais da forma $Z = k^n$, com $n > 1$, obtem-se transformações lineares ψ diferentes da identidade, as quais são blocos de Jordan. Para mais detalhes ver [BR87].

Teorema 1.1 (Butler-Ringel). *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string de dimensão finita. Os A -módulos $M(S)$ com $S \in \underline{\mathcal{W}}$ e os A -módulos $M(S', \psi)$ com $S' \in \underline{\mathcal{W}'}$ e $\psi \in \text{Aut}(Z)$ um automorfismo de k -espaços vetoriais, formam a lista completa de A -módulos indecomponíveis (a menos de isomorfismos).*

Demonstração: Ver [BR87].

□

Notação 1.1. Em diante denotaremos por γ_α a transformação linear associada à flecha α na representação do A -módulo string ou band $M(S)$.

1.2 Extensão por um ponto

Definição 1.8. *Seja A uma k -álgebra e $X \in \text{mod}A$*

- a. *A **extensão por um ponto de A por X** , a qual denotaremos $A[X]$ é a k -álgebra na forma de matriz triangular*

$$A[X] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X & k \end{bmatrix}$$

com a soma usual de matrizes e o produto induzido pela multiplicação usual de matrizes e a estrutura de k - A -bimódulo de X .

- b. *A **coextensão por um ponto de A por X** , a qual denotaremos $[X]A$ é a k -álgebra na forma de matriz triangular*

$$[X]A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ D(X) & A \end{bmatrix}$$

com a soma usual de matrizes e o produto induzido pela multiplicação usual de matrizes e a estrutura de A - k -bimódulo de $D(X)$, onde $D(X) := \text{Hom}_k(X, k)$.

Para maiores detalhes sobre o tema ver [SS07], [ARS95], [Rin84].

Observação 1.8. *Sejam A uma k -álgebra com quiver ordinário Q_A e $X \in \text{mod}A$.*

1. *Ao fazer extensão por um ponto de A por X o quiver ordinário Q_A pode ser visto como aquele obtido do quiver ordinário $Q_{A[X]}$ da k -álgebra $A[X]$, ao apagar um vértice fonte 0 e as flechas que têm início em 0 . Além disso, tem-se que $\text{rad}(P_0) \cong X$, onde P_0 é o $A[X]$ -módulo projetivo associado ao vértice 0 , isto é, $P_0 = e_0 A[X]$.*
2. *Ao fazer coextensão por um ponto de A por X o quiver ordinário Q_A pode-se ver como apagando do quiver ordinário $Q_{[X]A}$ da k -álgebra $[X]A$ um vértice poço 0 , junto com as flechas que chegam ao 0 . Além disso, tem-se que $I_0/S_0 \cong D(X)$, onde I_0 e S_0 são os $[X]A$ -módulos injetivo e simples respectivamente associados ao vértice 0 .*

Exemplo 1.4.

Consideremos a k -álgebra de caminhos $A = kQ$ associada ao quiver

$$Q: 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} 2$$

- a. Se $S_2 := 0 \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} k$, então $A[S_2]$ é a k -álgebra associada ao quiver

$$Q_{A[S_2]}: \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \bullet \xleftarrow{\delta} 0$$

com relações $\delta\beta = 0$, $\delta\alpha = 0$, pois $\text{rad } P_0 \cong S_2$.

- b. Se $X := k \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{0} \end{array} k$, então $A[X]$ é a k -álgebra associada ao quiver

$$Q_{A[X]}: \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \bullet \xleftarrow{\delta} 0$$

com relações $\delta\alpha = 0$, pois $\text{rad } P_0 \cong X$.

- c. Se $S_1 \oplus S_2 := k \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} k$, então $A[S_1 \oplus S_2]$ é a k -álgebra associada ao quiver

$$Q_{A[S_1 \oplus S_2]}: \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \mu \swarrow & & \searrow \delta \\ \bullet & \xrightarrow{\beta} & \bullet \\ \xleftarrow{\alpha} & & \end{array}$$

com relações $\delta\beta = 0$, $\delta\alpha = 0$, pois $\text{rad } P_0 \cong S_1 \oplus S_2$.

- d. Se $M(\alpha^{-1}\beta, \lambda) := k \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{\lambda} \end{array} k$, então $A[M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)]$ é a k -álgebra associada ao quiver

$$Q_{A[M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)]}: \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \bullet \xleftarrow{\delta} 0$$

com relações $\lambda\delta\beta - \delta\alpha = 0$, pois $\text{rad } P_0 \cong M(\alpha^{-1}\beta, \lambda)$.

Notação 1.2. Em diante denotaremos por f_α a transformação linear associada à flecha α na representação do $A[X]$ -módulo projetivo P_0 .

Definição 1.9. Sejam $A = kQ/I$ uma k -álgebra, $i, j \in Q_0$, denotemos por $N_A(i, j)$ ao número de flechas de i para j no quiver ordinário Q de A .

Proposição 1.2. *Sejam $A = kQ/I$ uma k -álgebra, $i \in Q_0$, $X \in \text{mod } A$. Se 0 é o novo vértice obtido ao fazer a extensão por um ponto de A por X , então $N_{A[X]}(0, i) = \dim_k(Xe_i/(\text{rad } X)e_i)$, onde e_x é o idempotente associado ao vértice $x \in Q_0$.*

Demonstração: De [ASS06] (p. 59-60) tem-se

$$N_{A[X]}(0, i) = \dim_k \left(\frac{e_0 \text{rad}(A[X])e_i}{e_0 \text{rad}^2(A[X])e_i} \right) = \dim_k \left(\frac{\text{rad}(e_0 A[X])e_i}{\text{rad}^2(e_0 A[X])e_i} \right)$$

logo do teorema (4.6) de [Ass07] (p. 192)

$$N_{A[X]}(0, i) = \dim_k \left(\frac{\text{rad}(e_0 A[X])e_i}{\text{rad}(e_0 A[X])\text{rad}(A[X])e_i} \right)$$

e de [SS07] (p. 2-4) obtem-se

$$N_{A[X]}(0, i) = \dim_k \left(\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{rad } A & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \right) = \dim_k \left(\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Xe_i & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{rad } X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \right)$$

$$N_{A[X]}(0, i) = \dim_k \left(\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Xe_i & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\text{rad } X)e_i & 0 \end{bmatrix}} \right) = \dim_k \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{Xe_i}{(\text{rad } X)e_i} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

portanto

$$N_{A[X]}(0, i) = \dim_k \left(\frac{Xe_i}{(\text{rad } X)e_i} \right)$$

□

1.3 Álgebras de Nakayama

Nesta seção introduziremos rapidamente o conceito e o resultado principal que necessitamos sobre as álgebras de Nakayama. Para maiores informações sobre estas álgebras citamos [ASS06], [ARS95].

Definição 1.10. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita.*

1. *Um A -módulo M se diz que tem **comprimento finito** se existe uma filtração finita de submódulos de M*

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{n-1} \supseteq M_n = 0$$

tal que para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ o quociente M_i/M_{i+1} é zero ou um módulo simples.

2. *Se diz que tal filtração de M é uma **serie de composição generalizada**.*
3. *Os módulos M_i/M_{i-1} não nulos são chamados de **fatores de composição** da filtração.*
4. *Se $M_i/M_{i-1} \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$, então a filtração é dita **série de composição** de M .*

Definição 1.11. *Um A -módulo M se diz que é **uniserial** se tem só uma única série de composição*

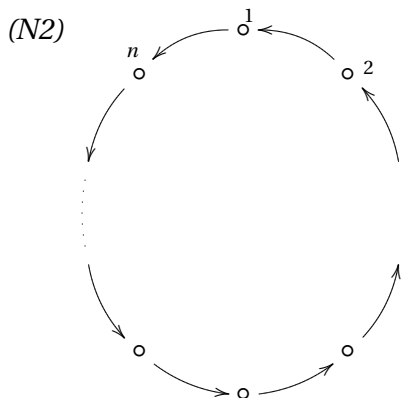
Definição 1.12.

1. *Uma k -álgebra A é chamada **serial à direita** se cada A -módulo projetivo indecomponível à direita é uniserial.*
2. *Uma k -álgebra A é chamada **serial à esquerda** se cada A -módulo projetivo indecomponível à esquerda é uniserial.*

Definição 1.13. *Uma k -álgebra A é chamada **Álgebra de Nakayama** se A é uma álgebra serial à direita e serial à esquerda.*

Teorema 1.3. *Uma k -álgebra básica e conexa A é uma álgebra de Nakayama se, e somente se, seu quiver ordinário Q_A é de uma das seguintes formas:*

(N1) $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow n - 1 \longleftarrow n$



Demonstração: Ver [ASS06] (p. 168).

□

1.4 Categorias Derivadas

Para esta seção denotaremos por \mathcal{A} uma k -categoria aditiva a qual é uma subcategoria plena de uma k -categoria abeliana \mathcal{C} .

Definição 1.14. Um **complexo** X^\bullet em \mathcal{A} está dado pelas sequências $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, onde $X^n \in \mathcal{A}$ e $d_X^n \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, X^{n+1})$ tal que $d_X^n d_X^{n-1} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Um complexo será representado pela seguinte sequência

$$X^\bullet := \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Sejam X^\bullet e Y^\bullet complexos. Um **Morfismo de Complexos** $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é uma sequência $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $f^n \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$, tais que $d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet := & \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ f^\bullet \downarrow & & & f^{n-1} \downarrow & & f^n \downarrow & & f^{n+1} \downarrow & & \\ Y^\bullet := & \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Os complexos em \mathcal{A} e os morfismos entre complexos formam a **Categoria de Complexos** denotada por $C(\mathcal{A})$.

Definição 1.15. Seja $X^\bullet \in C(\mathcal{A})$.

1. O complexo X^\bullet é dito **limitado superiormente** se $X^n = 0$ para todo inteiro n com exceção de um número finito de inteiros positivos n .
2. O complexo X^\bullet é dito **limitado** se $X^n = 0$ para todo inteiro n com exceção de um número finito de inteiros n .
3. O complexo X^\bullet é dito **Stalk centrado na componente** s se $X^n = 0$ para todo $n \neq s$.

Definição 1.16. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos o funtor aditivo $H^n : C(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ associando a cada complexo $X^\bullet \in C(\mathcal{A})$ sua n -ésima **cohomologia** $H^n(X^\bullet) = \text{Ker}(d_X^n) / \text{Im}(d_X^{n-1}) \in \mathcal{C}$ e a cada morfismo f^\bullet o morfismo induzido $H^n(f^\bullet)$.

Definição 1.17. Sejam $f^\bullet, g^\bullet \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$.

1. Um complexo X^\bullet se diz que tem **cohomologia limitada** se $H^n(X^\bullet) = 0$ para todo inteiro n com exceção de um número finito de inteiros n .
2. Dizemos que f^\bullet é um **quasi-isomorfismo** se $H^n(f^\bullet)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. Dizemos que f^\bullet e g^\bullet são **homotópicos** (e escrevemos $f^\bullet \sim g^\bullet$) se existe uma sequência de morfismos $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, onde $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ e tal que $f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow s^n & \downarrow f^n - g^n & \swarrow s^{n+1} & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Observação 1.9. A relação de homotopia “ \sim ” é uma relação de equivalência.

Definição 1.18.

1. Definamos a **Categoria de Homotopia** de \mathcal{A} denotada por $K(\mathcal{A})$ como a categoria cujos objetos são os complexos $X^\bullet \in C(\mathcal{A})$ e para todo $X^\bullet, Y^\bullet \in K(\mathcal{A})$ o conjunto de morfismo está definido como $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) / \sim$.
2. Definamos a **Categoria Derivada** de \mathcal{A} denotada por $D(\mathcal{A})$ como a localização de $K(\mathcal{A})$ com respeito ao conjunto dos quasi-isomorfismos.

Teorema 1.4. As categorias $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ são categorias trianguladas.

Demonstração: Ver [Hap88], [Gri87] e [Mon10].

□

Definição 1.19.

1. As subcategorias plenas dos complexos limitados superiormente de $C(\mathcal{A})$, $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ serão denotadas por $C^-(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ e $D^-(\mathcal{A})$ respectivamente.
2. As subcategorias plenas dos complexos limitados de $C(\mathcal{A})$, $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ serão denotadas por $C^b(\mathcal{A})$, $K^b(\mathcal{A})$ e $D^b(\mathcal{A})$ respectivamente.
3. As subcategorias plenas dos complexos que tem cohomologias limitadas de $C(\mathcal{A})$, $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ serão denotadas por $C^{-,b}(\mathcal{A})$, $K^{-,b}(\mathcal{A})$ e $D^{-,b}(\mathcal{A})$ respectivamente.

Observação 1.10. As categorias $K^b(\mathcal{A})$ e $D^b(\mathcal{A})$, $K^{-,b}(\mathcal{A})$ e $D^{-,b}(\mathcal{A})$ são categorias trianguladas. Ver [Hap88], [Gri87] e [Mon10] para mais detalhes.

Definição 1.20. Um **bicomplexo** $X^{\bullet\bullet}$ em \mathcal{A} está dado por uma sequência $(X^{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ de objetos em \mathcal{A} , e duas sequências $(d_l^{n,m})_{m \in \mathbb{Z}}$ e $(d_c^{n,m})_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos em \mathcal{A} tais que $d_c^{n,m} d_c^{n-1,m} = d_l^{n,m} d_l^{n,m-1} = d_l^{n+1,m} d_c^{n,m} + d_c^{n,m+1} d_l^{n,m} = 0$ para cada $n, m \in \mathbb{Z}$. Um bicomplexo $X^{\bullet\bullet}$ é representado pelo diagrama anticomutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & X^{n+1,m-1} & \xrightarrow{d_l^{n+1,m-1}} & X^{n+1,m} & \xrightarrow{d_l^{n+1,m}} & X^{n+1,m+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow d_c^{n,m-1} & & \uparrow d_c^{n,m} & & \uparrow d_c^{n,m+1} \\
 \dots & \longrightarrow & X^{n,m-1} & \xrightarrow{d_l^{n,m-1}} & X^{n,m} & \xrightarrow{d_l^{n,m}} & X^{n,m+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow d_c^{n-1,m-1} & & \uparrow d_c^{n-1,m} & & \uparrow d_c^{n-1,m+1} \\
 \dots & \longrightarrow & X^{n-1,m-1} & \xrightarrow{d_l^{n-1,m-1}} & X^{n-1,m} & \xrightarrow{d_l^{n-1,m}} & X^{n-1,m+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Definição 1.21. Seja $X^{\bullet\bullet}$ um bicomplexo em \mathcal{A} , definamos o **complexo total** de $X^{\bullet\bullet}$, que denotaremos por $Tot(X^{\bullet\bullet})$ como o complexo de \mathcal{A} cujas componentes são

$$(Tot(X^{\bullet\bullet}))^n := \bigoplus_{i+j=n} X^{i,j}$$

e diferenciais

$$d_{Tot(X^{\bullet\bullet})}^n := \bigoplus_{i+j=n} (d_c^{i,j} + d_l^{i,j}).$$

Para mais detalhes ver [Wei94]

Capítulo 2

Extensão por um ponto numa string por um módulo indecomponível

Nosso objetivo neste trabalho é analisar as extensões por um ponto por um módulo indecomponível de álgebras string que são hereditárias por partes. O problema colocado nesta generalidade é um problema difícil. Desta forma, vamos nos restringir ao caso em que a extensão por um ponto é feita sobre álgebras string de radical quadrado zero. Porém ao fazer a extensão por um ponto, queremos que esta extensão ainda seja uma álgebra string. Neste capítulo daremos condições necessárias e suficientes para que isso ocorra.

2.1 Extensão por um ponto por string de comprimento zero

Nesta seção vamos analisar quando que a extensão por um ponto de uma álgebra string por um módulo simples, ainda é álgebra string. Mostraremos que isso ocorre quando o número de flechas que chega no vértice $i \in Q_0$ correspondente ao simples da extensão, é no máximo 1.

Proposição 2.1. *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $i \in Q_0$. $A[S_i]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha em Q chegando no vértice i .*

Demonstração: Pela proposição (1.2) tem-se que

$$N(0, j) = \dim_k(S_i e_j / \text{rad}(S_i) e_j) = \dim_k((S_i)_j / (\text{rad}(S_i))_j) = \dim_k(0) = 0, \quad \forall j \in Q_0 - \{i\},$$

$$N(0, i) = \dim_k(S_i e_i / \text{rad}(S_i) e_i) = \dim_k((S_i)_i / (\text{rad}(S_i))_i) = \dim_k(k/0) = \dim_k(k) = 1.$$

denotaremos então esta única flecha por α .

Assim, $A[S_i] = kQ_{A[S_i]}/\langle \rho' \rangle$, onde $\rho' = \rho \cup \{\alpha\beta / \beta \in Q_1, s(\beta) = i\}$ e portanto $A[S_i]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha chegando no vértice i , porque caso contrário teríamos três flechas chegando no vértice i .

□

Corolário 2.2. *Se $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2(A) = 0$ e $i \in Q_0$, então $A[S_i]$ é uma k -álgebra string com $\text{rad}^2(A[S_i]) = 0$ se, e somente se, existe no máximo uma flecha em Q chegando no vértice i .*

Demonstração: É imediato da demonstração da proposição (2.1).

□

2.2 Extensão por um ponto por string de comprimento um

Antes de demonstrar a próxima proposição vejamos o seguinte exemplo. Consideremos a k -álgebra string $A = kQ/\langle \alpha\beta, \alpha^2 \rangle$ dada pelo quiver

$$Q := \bullet \xleftarrow{\beta} \bullet \curvearrowright \alpha$$

e a string $S = \alpha$, então o A -módulo string

$$M(S) := 0 \xleftarrow{0} k^2 \curvearrowright \gamma_\alpha$$

onde $\gamma_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]}/\langle \alpha\beta, \alpha^2, \delta\beta \rangle$ onde

$$Q_{A[M(S)]} := \begin{array}{c} 0 \\ \delta \swarrow \\ \bullet \xleftarrow{\beta} \bullet \curvearrowright \alpha \end{array}$$

Proposição 2.3. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $\alpha \in Q_1$ com $s(\alpha) = e(\alpha)$, isto é, α é um laço. $A[M(\alpha)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, não existe $\mu \in Q_1$ diferente de α tal que $e(\mu) = s(\alpha)$.*

Demonstração: Pela proposição (1.2) tem-se que para $j \in Q_0$ com $j \neq s(\alpha) = e(\alpha)$.

$$N(0, j) = \dim_k (M(\alpha)e_j / \text{rad}(M(\alpha))e_j) = \dim_k (M(\alpha)_j / (\text{rad}(M(\alpha)))_j) = \dim_k(0) = 0,$$

$$N(0, e(\alpha)) = \dim_k (M(\alpha)e_{e(\alpha)} / \text{rad}(M(\alpha))e_{e(\alpha)}) = \dim_k (k^2/k) = 1.$$

Como a dimensão é um temos uma flecha de 0 para $e(\alpha)$ que denotaremos por β . Assim, $A[M(\alpha)] = kQ_{A[M(\alpha)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\rho' = \rho \cup \{\beta\delta / \delta \in Q_1, \delta \neq \alpha, e(\beta) = s(\delta)\} \cup \{\beta\alpha\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha) = s(\delta)\}$$

e portanto podemos concluir que: Não existe $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha)$ se, e somente se, $A[M(\alpha)]$ é uma k -álgebra string. □

Olhemos agora para o caso em que $\alpha \in Q_0$ não é um laço.

Proposição 2.4. *Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $\alpha \in Q_1$ com $s(\alpha) \neq e(\alpha)$. Então, $A[M(\alpha)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha)$ e neste caso $\mu\alpha \in \rho$.*

Demonstração: Pela proposição (1.2) tem-se que para $j \in Q_0$ com $j \neq s(\alpha)$ e $j \neq e(\alpha)$.

$$N(0, j) = \dim_k (M(\alpha)e_j / \text{rad}(M(\alpha))e_j) = \dim_k ((M(\alpha))_j / (\text{rad}(M(\alpha)))_j) = \dim_k (0) = 0,$$

$$N(0, e(\alpha)) = \dim_k (M(\alpha)e_{e(\alpha)} / \text{rad}(M(\alpha))e_{e(\alpha)}) = \dim_k (k/k) = 0,$$

$$N(0, s(\alpha)) = \dim_k (M(\alpha)e_{s(\alpha)} / \text{rad}(M(\alpha))e_{s(\alpha)}) = \dim_k (k/0) = 1.$$

Como a dimensão é um temos uma flecha de 0 para $s(\alpha)$ que denotaremos por β . Assim, $A[M(\alpha)] = kQ_{A[M(\alpha)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\rho' = \rho \cup \{\beta\delta / \delta \in Q_1, \delta \neq \alpha, e(\beta) = s(\delta)\} \cup \{\beta\alpha\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha) = s(\delta)\}$$

e portanto podemos concluir que: $A[M(\alpha)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha)$ e neste caso $\mu\alpha \in \rho$. □

Corolário 2.5. *Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2(A) = 0$ e $\alpha \in Q_1$. Existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha)$, se e somente se, $A[M(\alpha)] = kQ_{A[M(\alpha)]} / \langle \rho' \rangle$ é uma k -álgebra string, onde $\rho' = \rho \cup \{\beta\delta / \delta \in Q_1, \delta \neq \alpha, e(\beta) = s(\delta)\}$ e β é a única flecha de 0 para $s(\alpha)$ ao fazer a extensão por um ponto.*

Demonstração: É imediato da demonstração das proposições (2.3) e (2.4). □

2.3 Extensão por um ponto por string de comprimento dois

Vamos analisar aqui as extensões por um ponto por uma string de comprimento dois. Mostraremos quando é que este tipo de extensão resulta em uma álgebra string.

Lema 2.6. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string. Se $S = s_1 s_2$ é uma string tal que $s_1 \in Q_1$ e $s_2^{-1} \in Q_1$ então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Suponhamos que $s_1 = \alpha_1$ e $s_2 = \alpha_2^{-1}$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2)$$

é claro que o lema fica provado se demonstramos:

- (i) Se $s(\alpha_1) = e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (ii) Se $s(\alpha_1) = e(\alpha_1)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iii) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$ e $e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iv) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$ e $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (v) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$ e $s(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (i) Suponhamos que $s(\alpha_1) = e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$



Agora, é claro que em $A[M(S)]$ tem que existir no mínimo uma flecha saindo do vértice 0 e chegando no vértice $u(0) = u(1) = u(2)$ o qual implica que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois existem três flechas chegando em $u(0)$.

Caso (ii) Se $s(\alpha_1) = e(\alpha_1)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$



Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0, z_1 \rangle \cong k^2, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_2 \rangle \cong k$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_0 &\longmapsto z_1 \\ z_1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_2 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$

$$\dots\dots \gamma_{\alpha_1} \circlearrowleft k^2 \xleftarrow{\gamma_{\alpha_2}} k \dots\dots$$

com

$$\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a representação do A -módulo $rad(M(S))$ é

$$\dots\dots 0 \circlearrowleft k \xleftarrow{0} 0 \dots\dots$$

o qual implica pela proposição (1.2) que $N(0, s(\alpha_1)) = 1$ e portanto tem-se em $Q_{A[M(S)]}$ três flechas terminando no vértice $s(\alpha_1)$, de onde $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (iii) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$ e $e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$

$$\dots\dots \bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \circlearrowright \alpha_2 \dots\dots$$

Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0 \rangle \cong k, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_1, z_2 \rangle \cong k^2$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_0 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_1 &\longmapsto 0 \\ z_2 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$

$$\dots\dots k \xrightarrow{\gamma_{\alpha_1}} k^2 \circlearrowright \gamma_{\alpha_2} \dots\dots$$

com

$$\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a representação do A -módulo $rad(M(S))$ é

$$\dots\dots 0 \xrightarrow{0} k \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} 0 \dots\dots$$

o qual implica pela proposição (1.2) que $N(0, s(\alpha_2)) = 1$ e portanto tem-se em $Q_{A[M(S)]}$ três flechas terminando no vértice $s(\alpha_2)$, de onde $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (iv) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$ e $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$ e suponhamos pelo absurdo que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string

$$\dots\dots \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet \dots\dots$$

mas como

$$M(S) := \dots 0 \dots \quad k \begin{array}{c} \xleftarrow{[1_k \ 0]} \\ \xrightarrow{[0 \ 1_k]} \end{array} k^2 \quad \dots 0 \dots$$

então pela proposição (1.2) tem-se que para $j \in Q_0$ com $j \neq s(\alpha_1)$ e $j \neq e(\alpha_1)$

$$N(0, j) = \dim_k (M(S)e_j / rad(M(S))e_j) = \dim_k ((M(S))_j / (rad(M(S)))_j) = \dim_k(0) = 0,$$

$$N(0, e(\alpha_1)) = \dim_k (M(S)e_{e(\alpha_1)} / rad(M(S))e_{e(\alpha_1)}) = \dim_k(k/k) = 0,$$

$$N(0, s(\alpha_1)) = \dim_k (M(S)e_{s(\alpha_1)} / rad(M(S))e_{s(\alpha_1)}) = \dim_k(k^2/0) = 2$$

portanto

$$Q_{A[M(S)]} := \dots\dots \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet \dots\dots$$

0
 $\swarrow \mu_1$
 $\swarrow \mu_2$

Como por hipóteses $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$ é uma k -álgebra string, então sem perda de generalidade podemos assumir que $\mu_1\alpha_2, \mu_2\alpha_1 \in \rho'$, agora juntando o fato que $M(S)e_{e(\alpha_1)} = k$ e que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string tem-se que $\mu_1\alpha_2 \in \rho'$ ou $\mu_2\alpha_1 \in \rho'$, logo na representação do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 obtem-se respectivamente $f_{\alpha_1} = 0$ ou $f_{\alpha_2} = 0$, mas na representação do módulo string $M(S)$ tem-se

$\gamma_{\alpha_1} \neq 0$ e $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$, isto implica que $rad(P_0) \not\cong M(S)$ o qual é absurdo.

Caso (v) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$ e $s(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$

$$\dots\dots\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xleftarrow{\alpha_2} \bullet \dots\dots$$

como

$$M(S) := \dots 0 \dots \quad k \xrightarrow{1_k} k \xleftarrow{1_k} k \quad \dots 0 \dots$$

então pela proposição (1.2) tem-se que para todo $j \in Q_0$ com $j \neq s(\alpha_1)$, $j \neq e(\alpha_1)$ e $j \neq s(\alpha_2)$

$$N(0, j) = dim_k(M(S)e_j / rad(M(S))e_j) = dim_k((M(S))_j / (rad(M(S)))_j) = dim_k(0) = 0,$$

$$N(0, e(\alpha_1)) = dim_k(M(S)e_{e(\alpha_1)} / rad(M(S))e_{e(\alpha_1)}) = dim_k(k/k) = 0,$$

e para $i = 1, 2$

$$N(0, s(\alpha_i)) = dim_k(M(S)e_{s(\alpha_i)} / rad(M(S))e_{s(\alpha_i)}) = dim_k(k/0) = 1$$

portanto

$$Q_{A[M(S)]} :=$$

Além disso, reparemos que $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\begin{aligned} \rho' = & \rho \cup \{\mu_i \delta / \delta \in Q_1, e(\mu_i) = s(\delta), \delta \neq \alpha_i, i = 1, 2\} \cup \\ & \cup \{\mu_i \alpha_i \delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_i) = s(\delta), i = 1, 2\} \cup \{\mu_1 \alpha_1 - \mu_2 \alpha_2\} \end{aligned}$$

Não é difícil ver que a k -álgebra $A[M(S)]$ não é isomorfa a uma k -álgebra monomial e portanto $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois toda álgebra string é monomial.

□

Lema 2.7. *Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string. Se $S = s_1 s_2$ é uma string tal que $s_1^{-1} \in Q_1$ e $s_2 \in Q_1$ então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Suponhamos que $s_1 = \alpha_1^{-1}$ e $s_2 = \alpha_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$

$$S := u(0) \xleftarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2)$$

é claro que o lema fica provado se demonstramos:

- (i) Se $e(\alpha_1) = s(\alpha_1) = e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (ii) Se $e(\alpha_1) = s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iii) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iv) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) = e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (v) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (i) Suponhamos que $e(\alpha_1) = s(\alpha_1) = e(\alpha_2)$



Agora, é claro que em $A[M(S)]$ tem que existir no mínimo uma flecha saindo do vértice 0 e chegando no vértice $u(0) = u(1) = u(2)$ o qual implica que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois existem três flechas chegando em $u(0)$.

Caso (ii) Se $e(\alpha_1) = s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$



Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0, z_1 \rangle \cong k^2, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_2 \rangle \cong k$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_0 &\longmapsto 0 \\ z_1 &\longmapsto z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_0 &\longmapsto 0 \\ z_1 &\longmapsto z_2 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$

$$\dots\dots \gamma_{\alpha_1} \circlearrowleft k^2 \xrightarrow{\gamma_{\alpha_2}} k \dots\dots$$

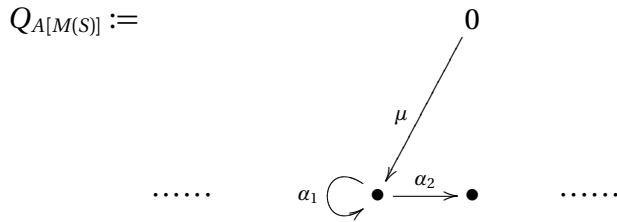
com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ Portanto, a representação do A -módulo string $rad(M(S))$ é

$$\dots\dots 0 \circlearrowleft k \xrightarrow{0} k \dots\dots$$

o qual implica pela proposição (1.2) que

$$\begin{aligned} N(0, s(\alpha_1)) &= 1 \\ N(0, j) &= 0, \forall j \in Q_0 \text{ com } j \neq s(\alpha_1) \end{aligned}$$

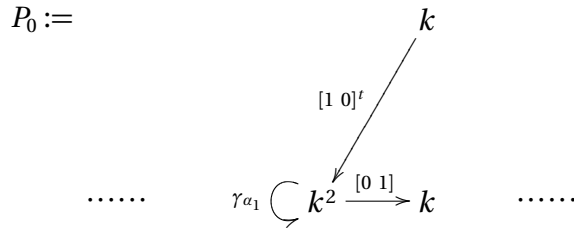
e portanto tem-se



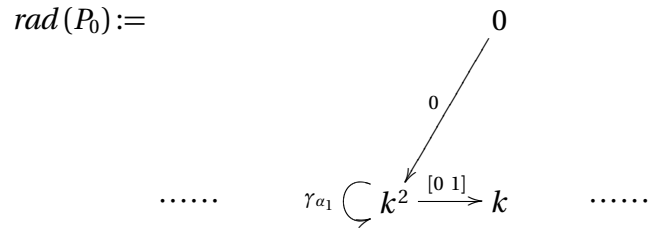
Reparemos que $\mu\alpha_2\delta = 0 = \mu\alpha_1\alpha_2\delta, \forall \delta \in Q_1$, do contrario $rad(P_0) \not\cong M(S)$. Agora suponhamos pelo absurdo que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string. Claramente podemos assumir que $\mu\alpha_1 \neq 0$, pois se $\mu\alpha_1 = 0$ tem-se da observação (1.4) que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_2)$ (se $\mu\alpha_2 \neq 0$) ou $P_0 = M(\mu)$ (se $\mu\alpha_2 = 0$) nos dois casos na representação tem-se $\gamma_{\alpha_1} = 0$ o qual contradiz o fato que $rad P_0 \cong M(S)$, pois na representação do A -módulo string $M(S)$ obtem-se $\gamma_{\alpha_1} \neq 0$. Agora dado que $\mu\alpha_1 \neq 0$ e $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string temos que $\mu\alpha_2 = 0 = \alpha_1^2$. Similarmente podemos considerar $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, pois se $\alpha_1\alpha_2 = 0$ tem-se da observação (1.4) que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_1)$ e na representação tem-se $\gamma_{\alpha_2} = 0$ o qual contradiz o fato que $rad P_0 \cong M(S)$, pois na representação do A -módulo string $M(S)$ obtem-se $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$.

Em resumo temos, $\mu\alpha_1 \neq 0, \mu\alpha_2 = 0, \alpha_1\alpha_2 \neq 0, \alpha_1^2 = 0$, portanto da observação (1.4)

obtemos que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_1\alpha_2)$, cuja representação é

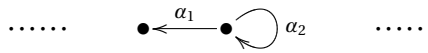


com $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e assim



de onde pode-se concluir que $rad(P_0) \not\cong M(S)$ o qual é absurdo e portanto $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

(iii) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$,



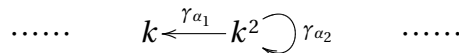
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0 \rangle \cong k, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_1, z_2 \rangle \cong k^2$$

$$\begin{array}{l} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} \longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_1 \longmapsto z_0 \\ z_2 \longmapsto 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} \longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_1 \longmapsto z_2 \\ z_2 \longmapsto 0 \end{array}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$



com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. E portanto

$$rad(M(S)) := \dots\dots k \xleftarrow{0} k \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 0 \end{array} \dots\dots$$

o qual implica pela proposição (1.2) que

$$\begin{aligned} N(0, s(\alpha_1)) &= 1 \\ N(0, j) &= 0, \forall j \in Q_0 \text{ com } j \neq s(\alpha_1) \end{aligned}$$

e portanto tem-se

$$Q_{A[M(S)]} := \dots\dots \bullet \xleftarrow{\alpha_1} \bullet \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha_2 \end{array} \dots\dots$$

0

μ

Reparemos que $\mu\alpha_1\delta = 0 = \mu\alpha_2\alpha_1\delta, \forall \delta \in Q_1$, do contrario $rad(P_0) \not\cong M(S)$. Agora suponhamos pelo absurdo que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string. Claramente podemos assumir que $\mu\alpha_2 \neq 0$, pois se $\mu\alpha_2 = 0$ tem-se da observação (1.4) que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_1)$ (se $\mu\alpha_1 \neq 0$) ou $P_0 = M(\mu)$ (se $\mu\alpha_1 = 0$), nos dois casos na representação tem-se $\gamma_{\alpha_2} = 0$ o qual contradiz o fato que $rad P_0 \cong M(S)$, pois na representação do A -módulo string $M(S)$ obtem-se $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$. Agora dado que $\mu\alpha_2 \neq 0$ e $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string temos que $\mu\alpha_1 = 0 = \alpha_2^2$. De onde $\alpha_2\alpha_1 \neq 0$, pois se $\alpha_2\alpha_1 = 0$ tem-se da observação (1.4) que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_2)$ e na representação tem-se $\gamma_{\alpha_1} = 0$ o qual contradiz o fato que $rad P_0 \cong M(S)$. Em resumo temos, $\mu\alpha_2 \neq 0, \mu\alpha_1 = 0, \alpha_2\alpha_1 \neq 0, \alpha_2^2 = 0$, portanto da observação (1.4) obtemos que o $A[M(S)]$ -módulo projetivo $P_0 = M(\mu\alpha_2\alpha_1)$, cuja representação é

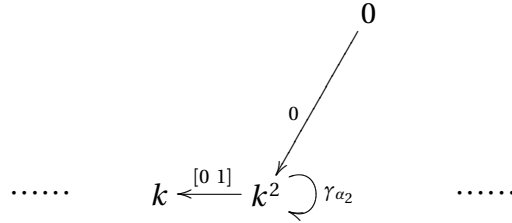
$$P_0 := \dots\dots k \xleftarrow{[0 \ 1]} k^2 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \gamma_{\alpha_2} \end{array} \dots\dots$$

k

$[1 \ 0]^t$

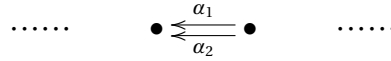
com $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e assim

$rad(P_0) :=$



de onde pode-se concluir que $rad(P_0) \not\cong M(S)$ o qual é absurdo e portanto $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (iv) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) = e(\alpha_2)$



mas como

$$M(S) := \dots 0 \dots \begin{matrix} \xleftarrow{[1_k \ 0]^t} \\ k^2 \\ \xleftarrow{[0 \ 1_k]^t} \end{matrix} k \dots 0 \dots$$

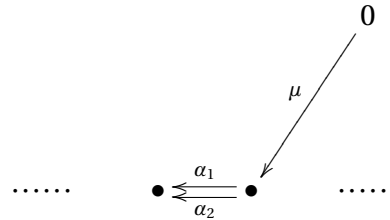
então pela proposição (1.2) tem-se que para $j \in Q_0$ com $j \neq s(\alpha_1)$ e $j \neq e(\alpha_1)$

$$N(0, j) = \dim_k(M(S)e_j / rad(M(S))e_j) = \dim_k(k^2 / k^2) = 0,$$

$$N(0, s(\alpha_1)) = \dim_k(M(S)e_{s(\alpha_1)} / rad(M(S))e_{s(\alpha_1)}) = \dim_k(k/0) = 1$$

portanto

$Q_{A[M(S)]} :=$



Além disso, reparemos que $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\rho' = \rho \cup \{\mu\alpha_i\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_i) = s(\delta), i = 1, 2\}$$

dado que para μ existem α_1, α_2 tais que $\mu\alpha_1, \mu\alpha_2 \notin \rho'$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (v) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq e(\alpha_2)$



como

$$M(S) := \dots 0 \dots \quad k \xleftarrow{1_k} k \xrightarrow{1_k} k \quad \dots 0 \dots$$

portanto

$$Q_{A[M(S)]} := \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \mu \\ \dots \bullet \xleftarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \dots \end{array}$$

e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\rho' = \rho \cup \{ \mu\alpha_i\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_i) = s(\delta), i = 1, 2 \}$$

logo que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois para a flecha μ existem α_1, α_2 tais que $\mu\alpha_1, \mu\alpha_2 \notin \rho'$

□

Lema 2.8. *Sejam A uma k -álgebra string e $S = s_1s_2$ uma string inversa. Se existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tais que $\mu_1 \neq \mu_2$, $e(\mu_1) = e(\mu_2) = e(s_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Consideremos $s_1 = \alpha_1^{-1}$ e $s_2 = \alpha_2^{-1}$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$

$$S := u(0) \xleftarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2)$$

é claro que o lema fica demonstrado se provamos:

- (i) Se $e(\alpha_1) = s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (ii) Se $e(\alpha_1) = s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iii) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.
- (iv) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

(v) Se $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso(i) Suponhamos que $e(\alpha_1) = s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$.



Agora, é claro que em $A[M(S)]$ tem que existir no mínimo uma flecha saindo do vértice 0 e chegando no vértice $u(0) = u(1) = u(2)$ o qual implica que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois existem três flechas chegando em $u(0)$.

Caso (ii) Suponhamos $e(\alpha_1) = s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$



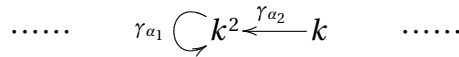
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0, z_1 \rangle \cong k^2, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_2 \rangle \cong k$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_0 &\longmapsto 0 \\ z_1 &\longmapsto z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_2 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

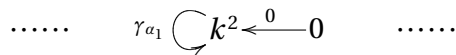
Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$



com

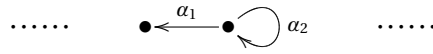
$$\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a representação do A -módulo $rad(M(S))$ é



o qual implica pela proposição (1.2) que $N(0, s(\alpha_2)) = 1$ e portanto tem-se em $Q_{A[M(S)]}$ três flechas terminando no vértice $s(\alpha_2)$, de onde $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (iii) Suponhamos que $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$



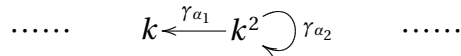
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_0 \rangle \cong k, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_1, z_2 \rangle \cong k^2$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_1 &\longmapsto z_0 \\ z_2 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} &\longrightarrow M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_1 &\longmapsto 0 \\ z_2 &\longmapsto z_1 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$



com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. E portanto

$$\text{rad}(M(S)) := \dots \quad k \xleftarrow{1} k \xrightarrow{0} 0 \quad \dots$$

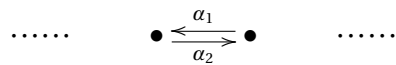
o qual implica pela proposição (1.2) que

$$N(0, s(\alpha_2)) = 1$$

$$N(0, j) = 0, \forall j \in Q_0 \text{ com } j \neq s(\alpha_2)$$

e portanto tem-se três flechas em $Q_{A[M(S)]}$ que terminam no vértice $s(\alpha_2)$, de onde podemos concluir que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Caso (iv) Suponhamos que $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$



Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S)_{s(\alpha_1)} = {}_k \langle z_1 \rangle \cong k, \quad M(S)_{s(\alpha_2)} = {}_k \langle z_0, z_2 \rangle \cong k^2$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{\alpha_1}: M(S)_{s(\alpha_1)} & \longrightarrow & M(S)_{e(\alpha_1)} \\ z_1 & \longmapsto & z_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{\alpha_2}: M(S)_{s(\alpha_2)} & \longrightarrow & M(S)_{e(\alpha_2)} \\ z_0 & \longmapsto & 0 \\ z_2 & \longmapsto & z_1 \end{array}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S)$

$$\dots\dots \quad k^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{[1 \ 0]^t} \\ \xrightarrow{[0 \ 1]} \end{array} k \quad \dots\dots$$

E portanto

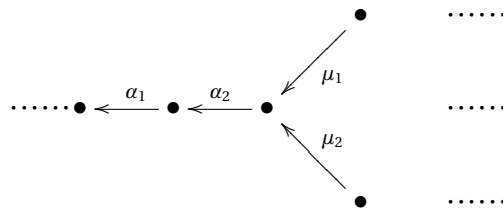
$$rad(M(S)) := \dots\dots \quad k \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{0} \end{array} k \quad \dots\dots$$

o qual implica pela proposição (1.2) que

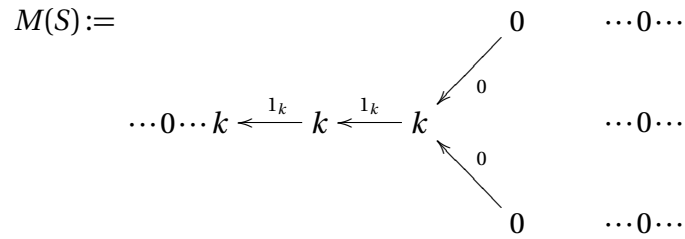
$$\begin{aligned} N(0, s(\alpha_2)) &= 1 \\ N(0, j) &= 0, \forall j \in Q_0 \text{ com } j \neq s(\alpha_2) \end{aligned}$$

e portanto tem-se três flechas em $Q_{A[M(S)]}$ que terminam no vértice $s(\alpha_2)$, de onde podemos concluir que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

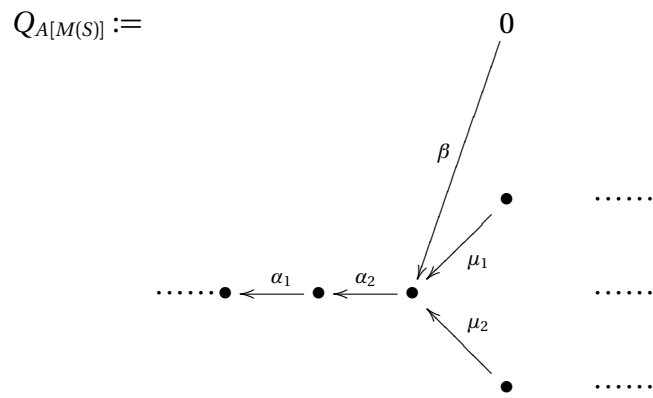
Caso (v) Suponhamos que $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$. Por hipóteses existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tal que $e(\mu_1) = e(\mu_2) = e(s_2)$



mas como



então



logo existem três flechas terminando no vértice $s(\alpha_2)$ e assim $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string o qual contradiz as hipóteses.

□

Proposição 2.9. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e S uma string de comprimento $l(S) = 2$. $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, S satisfaz uma das seguintes condições:*

1. $S = s_1 s_2$ é uma string direta, $s_1 \neq s_2$ e existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(s_1)$, neste caso $\mu s_1 \in \rho$.
2. $S = s_1 s_2$ é uma string inversa, $s_1 \neq s_2$ e existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = e(s_2)$, neste caso $\mu s_2^{-1} \in \rho$.

Demonstração:

“ \Rightarrow ” Assumamos que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string e vejamos que satisfaz uma das condições (1), (2), para isto, suponhamos que não satisfaz (2) e provemos que vale (1). É claro que S satisfaz só um dos seguintes casos:

- (i) $s_1^{-1}, s_2^{-1} \in Q_1$.
- (ii) $s_1 \in Q_1$ e $s_2^{-1} \in Q_1$.
- (iii) $s_1^{-1} \in Q_1$ e $s_2 \in Q_1$.
- (iv) $s_1, s_2 \in Q_1$.

vejamos que não satisfaz as condições (i), (ii) e (iii)

- (i) Suponhamos que $s_1^{-1}, s_2^{-1} \in Q_1$. Como não vale (2), então $S = s_1 s_2$ não é uma string inversa ou existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tal que $e(\mu_1) = e(\mu_2) = e(s_2)$, portanto existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tal que $e(\mu_1) = e(\mu_2) = e(s_2)$, logo do lema (2.8) obtemos que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, o qual contradiz a hipótese.
- (ii) Se $s_1 \in Q_1$ e $s_2^{-1} \in Q_1$, então do lema (2.6), obtem-se que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, o qual contradiz a hipótese.
- (iii) Se $s_1^{-1} \in Q_1$ e $s_2 \in Q_1$, então do lema (2.7), obtem-se que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, o qual contradiz a hipótese.

Portanto, podemos concluir que S é uma string direta, isto é, $s_1 = \alpha_1$ e $s_2 = \alpha_2$ com $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$



logo da aplicação $u : \{0, 1, 2\} \rightarrow Q_0$ temos

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2)$$

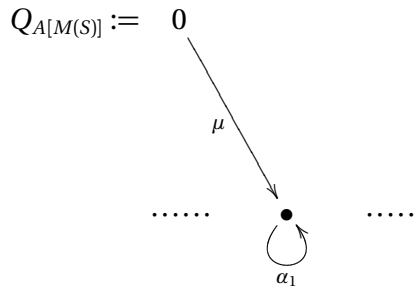
Agora mostremos que existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(s_1)$, para isto, suponhamos por absurdo que existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tais que $e(\mu_1) = e(\mu_2) = s(s_1) = s(\alpha_1)$. Agora consideremos a string inversa $S' = S^{-1}$ na qual existem duas flechas $\mu_1, \mu_2 \in Q_1$ tais que $e(\mu_1) = e(\mu_2) = s(s_1) = s(\alpha_1) = e(s_1^{-1})$ e pelo lema (2.8) obtemos que $A[M(S')]$ não é uma k -álgebra string, mas pela observação (1.3) temos que $M(S) \cong M(S')$, portanto $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, o qual contradiz a hipóteses. Disto podemos concluir que existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $e(\beta) = s(s_1)$.

Como $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, então se existir uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $e(\beta) = s(s_1) = s(\alpha_1)$ temos que $\beta s_1 \in \rho$, pois $N(0, s(\alpha_1)) \neq 1$.

Finalmente demonstremos que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, de fato, suponhamos que $\alpha_1 = \alpha_2$, agora como

$$M(S) := \dots \quad \begin{array}{c} k^3 \\ \curvearrowright \\ \gamma_{\alpha_1} \end{array} \quad \dots$$

com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, portanto



e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde ρ' é

$$\begin{aligned} \rho' = & \rho \cup \{ \mu\delta / \delta \in Q_1, e(\mu) = s(\delta), \delta \neq \alpha_1 \} \cup \\ & \cup \{ \mu\alpha_1\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_1) = s(\delta), \delta \neq \alpha_1 \} \cup \{ \mu\alpha_1^2\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_1) = s(\delta) \} \end{aligned}$$

Assim $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string, pois para a flecha α_1 existem duas flechas μ, α_1 tais que $\mu\alpha_1, \alpha_1^2 \notin \rho'$ o qual contradiz a hipóteses, portanto $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

“ \Leftarrow ” Suponhamos que $S = s_1s_2$ é uma string direta com $s_1 \neq s_2$, também suponhamos que existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(s_1)$ e que neste caso $\mu s_1 \in \rho$, isto é, $s_1 = \alpha_1$ e $s_2 = \alpha_2$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$

$$\dots \quad \bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \quad \dots$$

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2)$$

Como $s_1 \neq s_2$ e existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(s_1)$, então S não satisfaz $s(\alpha_1) = e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, portanto é claro que o lema fica demonstrado se provamos:

(i) Se $s(\alpha_1) = e(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

(ii) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

(iii) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

(iv) Se $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$, então $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

Caso (i) Suponhamos $s(\alpha_1) = e(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$



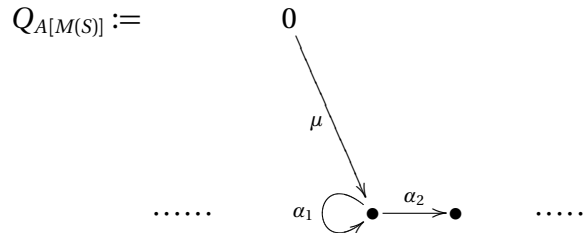
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S) := \dots \gamma_{\alpha_1} \circlearrowleft k^2 \xrightarrow{\gamma_{\alpha_2}} k \dots$$

com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ Assim

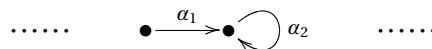
$$rad(M(S)) := \dots 0 \circlearrowleft k \xrightarrow{1} k \dots$$

logo



e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde $\rho' = \rho \cup \{\mu\alpha_2\}$, como pela hipóteses existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $e(\beta) = s(\alpha_1)$ e que neste caso $\beta s_1 \in \rho$, disto temos $\beta = \alpha_1$, $\alpha_1^2 \in \rho$ e portanto podemos concluir que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

Caso (ii) Suponhamos que $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$ e $s(\alpha_2) = e(\alpha_2)$



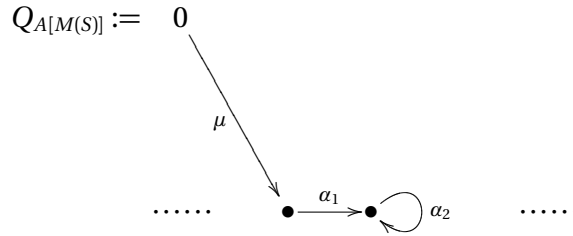
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S) := \dots k \xrightarrow{\gamma_{\alpha_1}} k^2 \circlearrowright \gamma_{\alpha_2} \dots$$

com $\gamma_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. E portanto

$$rad(M(S)) := \dots\dots 0 \xrightarrow{0} k^2 \begin{matrix} \curvearrowright \\ \gamma_{\alpha_2} \end{matrix} \dots\dots$$

logo

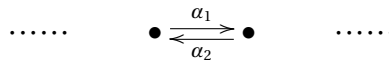


e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]} / \langle \rho' \rangle$, onde

$$\begin{aligned} \rho' = & \rho \cup \{ \mu\delta / \delta \in Q_1, e(\mu) = s(\delta), \delta \neq \alpha_1 \} \cup \\ & \cup \{ \mu\alpha_1\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_1) = s(\delta), \delta \neq \alpha_2 \} \cup \\ & \cup \{ \mu\alpha_1\alpha_2\delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_2) = s(\delta) \}, \end{aligned}$$

portanto da hipóteses $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

Caso (iii) Suponhamos que $s(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $s(\alpha_1) = e(\alpha_2)$



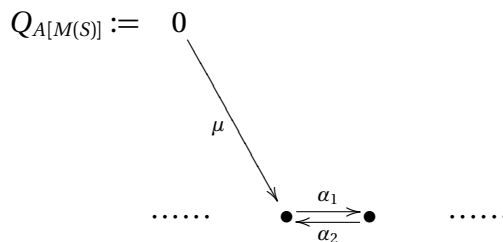
Agora da construção do módulo string tem-se

$$M(S) := \dots\dots k^2 \begin{matrix} \xrightarrow{[1 \ 0]} \\ \xleftarrow{[0 \ 1]^t} \end{matrix} k \dots\dots$$

portanto

$$rad(M(S)) := \dots\dots k \begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{matrix} k \dots\dots$$

logo



e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]}/\langle \rho' \rangle$, onde

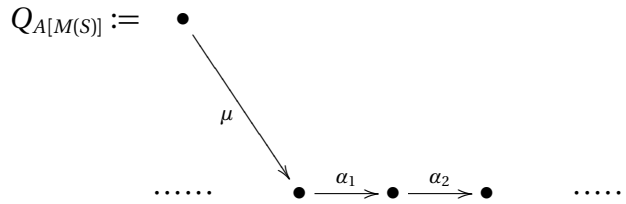
$$\begin{aligned} \rho' = & \rho \cup \{ \mu \delta / \delta \in Q_1, e(\mu) = s(\delta), \delta \neq \alpha_1 \} \cup \\ & \cup \{ \mu \alpha_1 \delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_1) = s(\delta), \delta \neq \alpha_2 \} \cup \\ & \cup \{ \mu \alpha_1 \alpha_2 \delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_2) = s(\delta) \}. \end{aligned}$$

Agora, como existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $e(\beta) = s(s_1) = s(\alpha_1)$ e que neste caso $\beta s_1 \in \rho$, então temos $\beta = \alpha_2$ e $\alpha_2 \alpha_1 \in \rho$. Portanto $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

Caso (iv) Suponhamos que $es(\alpha_1) \neq e(\alpha_1)$, $s(\alpha_2) \neq e(\alpha_2)$ e $e(\alpha_1) \neq s(\alpha_2)$. Agora como

$$M(S) := \dots 0 \dots \quad k \xrightarrow{1_k} k \xrightarrow{1_k} k \quad \dots 0 \dots$$

então



e $A[M(S)] = kQ_{A[M(S)]}/\langle \rho' \rangle$, onde

$$\begin{aligned} \rho' = & \rho \cup \{ \mu \delta / \delta \in Q_1, e(\mu) = s(\delta), \delta \neq \alpha_1 \} \cup \\ & \cup \{ \mu \alpha_1 \delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_1) = s(\delta), \delta \neq \alpha_2 \} \cup \\ & \cup \{ \mu \alpha_1 \alpha_2 \delta / \delta \in Q_1, e(\alpha_2) = s(\delta) \}, \end{aligned}$$

logo como existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $e(\beta) = s(s_1)$, então podemos concluir que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

Agora suponhamos que $S = s_1 s_2$ é uma string inversa com $s_1 \neq s_2$, também suponhamos que existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = e(s_2)$ e que neste caso $\mu s_2^{-1} \in \rho$, isto é, $s_1 = \alpha_1^{-1}$ e $s_2 = \alpha_2^{-1}$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$ e vejamos que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, para isto, consideremos a string direta $S' = S^{-1}$ a qual satisfaz que $s_1^{-1} \neq s_2^{-1}$, que existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(s_2^{-1})$ e que neste caso $\mu s_2^{-1} \in \rho$. Portanto de todo o anteriormente demonstrado podemos concluir que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string.

□

Corolário 2.10. *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$. Se S uma string de comprimento $l(S) = 2$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Segue-se da proposição (2.9), pois não existe uma string S com comprimento $l(S) = 2$, que seja direta ou inversa.

□

2.4 Extensão por um ponto por string de comprimento

$$n \geq 3$$

Observação 2.1. *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ uma string de comprimento $l(S) = n \geq 2$.*

1. É claro que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tem-se

$$s_i \in Q_1 \iff s_{i+1}^{-1} \in Q_1$$

2. Definimos a seguir a aplicação que utilizaremos no caso em que a álgebra string A é tal que $\text{rad}^2(A) = 0$

$$u : \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow Q_0$$

$$i \longmapsto u(i) := \begin{cases} e(s_i); & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ s(S); & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

a qual precisa-se para construir o módulo string $M(S)$. Assim podemos ver a string da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{s_1} u(1) \xrightarrow{s_2} \cdots \xrightarrow{s_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{s_n} u(n)$$

3. Se n é par, tem-se da observação (1) que S é da forma $S = \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n^{-1}$ ou $S = \alpha_1^{-1} \alpha_2 \alpha_3^{-1} \cdots \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_n$, onde $\alpha_i \in Q_1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ e da observação (2) tem-se que S é da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xleftarrow{\alpha_n} u(n)$$

ou

$$S := u(0) \xleftarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2) \xleftarrow{\alpha_3} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{\alpha_n} u(n)$$

4. Se n ímpar, tem-se da observação (1) que S é da forma $S = \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_n$ ou $S = \alpha_1^{-1} \alpha_2 \alpha_3^{-1} \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n^{-1}$, onde $\alpha_i \in Q_1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ e da observação (2) tem-se que S é da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{\alpha_n} u(n)$$

ou

$$S := u(0) \xleftarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2) \xleftarrow{\alpha_3} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xleftarrow{\alpha_n} u(n)$$

Definição 2.1. *Sejam Q um quiver e $x \in Q_0$ um vértice, definamos E_x como o número de flechas de Q que terminam em x , isto é*

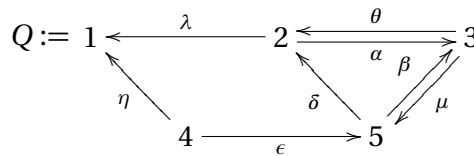
$$E_x = |\{\alpha \in Q_1 / e(\alpha) = x\}|.$$

Definição 2.2. *Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ uma string, definamos:*

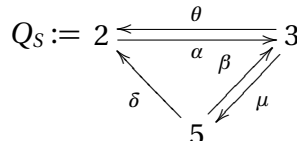
- $S_0 := \{v \in Q_0 / \exists i, \text{ tal que } u(i) = v\}$.
- $S_1 := \{\alpha \in Q_1 / \exists i, \text{ tal que } s_i = \alpha \text{ ou } s_i^{-1} = \alpha\}$.
- Dizemos que $v \in Q_0$ é uma **fonte em S** se $v \in S_0$ e não existe $\alpha \in S_1$ tal que $e(\alpha) = v$.
- Dizemos que $v \in Q_0$ é um **poço em S** se $v \in S_0$ e não existe $\alpha \in S_1$ tal que $s(\alpha) = v$.
- Denotemos por $Q_S := (S_0, S_1)$ o subquiver de Q dado pela string S .

Exemplo 2.1.

Seja $A = kQ / \langle \rho \rangle$ a k -álgebra string com $rad^2 A = 0$, onde Q é o quiver



- Consideremos a string $S := \alpha \beta^{-1} \delta \theta^{-1} \mu$, logo $S_0 = \{2, 3, 5\}$, $S_1 = \{\alpha, \theta, \mu, \beta, \delta\}$, S não tem fontes e



Demonstração: Primeiramente podemos afirmar que não existem flechas $\delta \in S_1$ tal que $\alpha \neq \delta \neq \beta$ com $e(\delta) = e(\alpha)$ ou $e(\delta) = s(\alpha)$ pois em $e(\alpha)$ já terminam duas flechas e caso exista uma flecha $\delta \in S_1$ com $\alpha \neq \delta \neq \beta$ e $e(\delta) = s(\alpha)$ então $\delta\alpha = 0 = \delta\beta$, logo $\delta \notin S_1$. Portanto $S_1 = \{\alpha, \beta\}$ e neste caso $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string. □

Observação 2.2. Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string e $S = s_1s_2 \cdots s_n$ uma string. Se v é uma fonte em S , então

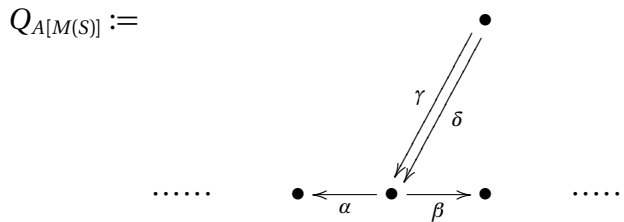
1. $rad(M(S))e_v = 0$.
2. Da proposição (1.2) temos que

$$N_{A[M(S)]}(0, v) = \dim_k(M(S)e_v / rad(M(S))e_v) = \dim_k(M(S)e_v) = |I_v| \neq 0.$$

3. Dos itens anteriores temos que se $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, então existem no máximo duas fontes em S .

Lema 2.13. Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $rad^2A = 0$, $S = s_1s_2 \cdots s_n$ string de comprimento $l(S) = n \geq 3$. Se existe uma fonte $v \in S_0$ tal que existem $\alpha, \beta \in S_1$ com $\alpha \neq \beta$, $s(\alpha) = v = s(\beta)$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Demonstração: Suponhamos que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string. Pelo lema (2.12) podemos afirmar que $e(\alpha) \neq e(\beta)$ e pela observação (2.2) item (2), existe ao menos uma flecha γ de 0 para v . Como a álgebra é string, então $\gamma\alpha = 0$ ou $\gamma\beta = 0$. Se γ for a única flecha de 0 para v em $(Q_{A[M(S)]})_1$, então na representação do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 , tem-se que $f_\alpha = 0$ ou $f_\beta = 0$, mas $\gamma_\alpha \neq 0$ e $\gamma_\beta \neq 0$ em $M(S)$ como A -módulo, logo $rad(P_0) \not\cong M(S)$ e portanto existe mais uma flecha δ de 0 para v em $(Q_{A[M(S)]})_1$.



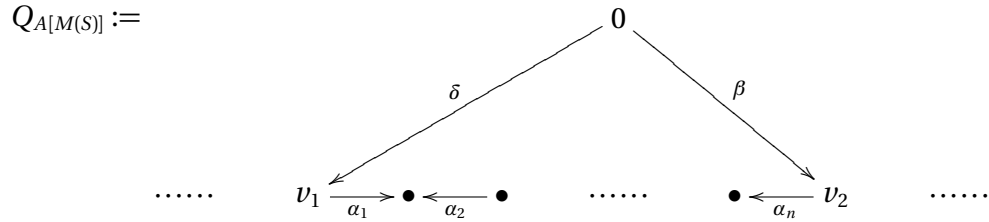
Como a string tem comprimento $l(S) = n \geq 3$, existe $\epsilon \in S_1$ tal que $\epsilon \neq \alpha$ e $\epsilon \neq \beta$, também dado que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, então não existe mais uma flecha saindo de 0. Logo $f_\epsilon = 0$ na representação do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 o qual é uma contradição pois $\gamma_\epsilon \neq 0$ em $M(S)$ como A -módulo. □

Lema 2.14. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ string de comprimento $l(S) = n \geq 3$. Se existem duas fontes diferentes em S , então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Suponhamos que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string e sejam $v_1 \neq v_2$ as duas fontes distintas em S , pelo lema (2.13) podemos assumir que $v_1 = u(0)$, $v_2 = u(n)$ e que S é uma string da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xleftarrow{\alpha_n} u(n)$$

onde $v_1 \neq u(i) \neq v_2$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ e pela observação (2.2) item (2), existem ao menos em $(Q_{A[M(S)]})_1$ uma flecha δ de 0 para v_1 e uma flecha β de 0 para v_2 . Como $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, então δ e β são as únicas flechas saindo de 0 logo $f_{\alpha_2} = 0$ na representação do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 o qual é uma contradição pois $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$ em $M(S)$ como A -módulo e $\text{rad}(P_0) \cong M(S)$.



□

Lema 2.15. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ string de comprimento $l(S) = n \geq 3$. Se existe só uma fonte em S , então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

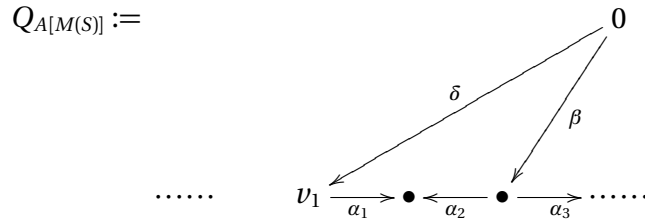
Demonstração: Suponhamos que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string e seja v a única fonte em S , pelo lema (2.13) temos que $v = u(0)$ ou $v = u(n)$ e que $u(0) \neq u(n)$. Provemos que no caso que $v = u(0)$ vamos ter uma contradição, pois o caso $v = u(n)$ a demonstração é similar.

Suponhamos que $v = u(0)$, logo S é uma string da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \cdots$$

onde $v \neq u(i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ e pela observação (2.2) item (2), existem ao menos em $(Q_{A[M(S)]})_1$ uma flecha δ de 0 para v . Como $v \neq u(2)$, então existe uma flecha β de 0 para $u(2)$ em $(Q_{A[M(S)]})_1$, do contrario tem-se $f_{\alpha_2} = 0 = f_{\alpha_3}$ na representação

do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 mas $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$ e $\gamma_{\alpha_3} \neq 0$ em $M(S)$ como A -módulo, logo $rad(P_0) \not\cong M(S)$ o que é absurdo pois $rad(P_0) \cong M(S)$, assim existe uma flecha β de 0 para $u(2)$ em $(Q_{A[M(S)]})_1$ e como $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string, tem-se $f_{\alpha_2} = 0$ ou $f_{\alpha_3} = 0$ na representação do $A[M(S)]$ -módulo projetivo P_0 o qual é uma contradição pois $\gamma_{\alpha_2} \neq 0$ e $\gamma_{\alpha_3} \neq 0$ em $M(S)$ como A -módulo e $rad(P_0) \cong M(S)$.



□

Com o que foi demonstrado anteriormente, agora estamos em condições de provar que quando fazemos uma extensão por um ponto por um módulo string com string sem laços, nem flechas duplas, nem fontes a álgebra estendida não é uma álgebra string.

Lema 2.16. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $rad^2 A = 0$, $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ string de comprimento $l(S) = n \geq 3$ sem fontes.*

1. *Seja n ímpar*

(a) *Se $s_1 \in Q_1$, então $1 \leq E_{u(n)} \leq 2$ e para todo $v \in S_0$ com $v \neq u(n)$ temos que $E_v = 2$.*

(b) *Se $s_1^{-1} \in Q_1$, então $1 \leq E_{u(0)} \leq 2$ e para todo $v \in S_0$ com $v \neq u(0)$ temos que $E_v = 2$.*

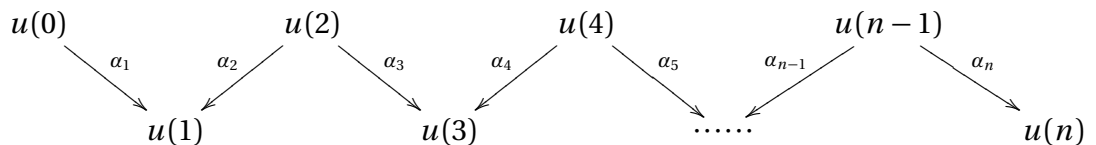
2. *Seja n par*

(a) *Se $s_1 \in Q_1$, então $E_v = 2$ para todo $v \in S_0$.*

(b) *Se $s_1^{-1} \in Q_1$, então $1 \leq E_{u(0)} \leq 2$, $1 \leq E_{u(n)} \leq 2$ e para todo $v \in S_0$ com $u(0) \neq v \neq u(n)$ temos que $E_v = 2$.*

Demonstração:

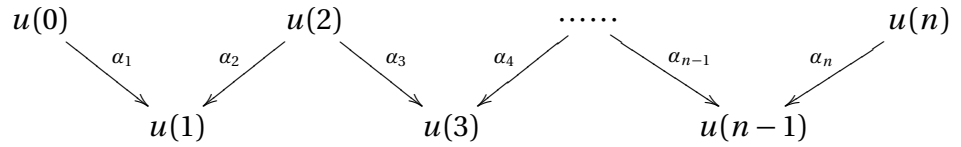
1. *Provemos só o item (a) pois a prova do item (b) é similar. A string S é da forma*



É fácil ver que $1 \leq E_{u(n)} \leq 2$. Agora, para $v \in S_0$ com $v \neq u(n)$ como não é fonte em S , então existe uma flecha em S_1 chegando em v . Mas todos os vértices em S_0 distintos de $u(n)$ que chegam ao menos uma flecha de S_1 , chegam duas. Portanto $E_v = 2$.

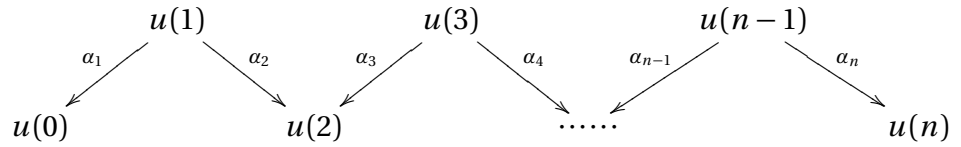
2. Seja n par

(a) A string S é da forma



Seja $v \in S_0$, como v não é fonte em S , então existe uma flecha em S_1 chegando em v . Mas todos os vértices em S_0 que chegam ao menos uma flecha de S_1 , chegam duas. Portanto $E_v = 2$.

(b) A string S é da forma



É fácil ver que $1 \leq E_{u(0)} \leq 2$ e $1 \leq E_{u(n)} \leq 2$. Agora, para cada $v \in S_0$ com $u(0) \neq v \neq u(n)$, como v não é fonte em S , então existe uma flecha em S_1 chegando em v . Mas todos os vértices em S_0 distintos de $u(0)$ e $u(n)$ que chegam ao menos uma flecha de S_1 , chegam duas. Portanto $E_v = 2$.

□

Lema 2.17. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, $S = s_1 s_2 \cdots s_n$ string de comprimento $l(S) = n \geq 3$ ímpar. Se S não tem fontes, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $A[M(S)]$ é uma k -álgebra string. Das observações (2.1) item (4) e (1.3) podemos considerar sem perda de generalidade a string S da forma $S = \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_n$

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{\alpha_n} u(n)$$

2.5 Extensão por um ponto por módulo band

Observação 2.3. Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $S = s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n \in \mathcal{W}'$ uma band.

1. Pela definição de band (ver (1.2)), S é uma string.
2. Do item (1) da observação (2.1) tem-se

$$s_i \in Q_1 \iff s_{i+1}^{-1} \in Q_1.$$

3. Como pela definição de band $S^2 \in \mathcal{W}$, então

$$s_1 \in Q_1 \iff s_n^{-1} \in Q_1$$

ou

$$s_1^{-1} \in Q_1 \iff s_n \in Q_1.$$

4. Dos itens anteriores tem-se que S é da forma $S = \alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n^{-1}$ ou da forma $S = \alpha_1^{-1} \alpha_2 \alpha_3^{-1} \dots \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_n$, isto é, é da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xleftarrow{\alpha_n} u(n)$$

ou

$$S := u(0) \xleftarrow{\alpha_1} u(1) \xrightarrow{\alpha_2} u(2) \xleftarrow{\alpha_3} \dots \xleftarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xrightarrow{\alpha_n} u(n)$$

onde $\alpha_i \in Q_1$ para $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$.

5. É claro que n é par
6. Como para estudar a extensão por um ponto precisamos do módulo, então pela observação (1.6) em diante consideraremos a band S da forma

$$S := u(0) \xrightarrow{\alpha_1} u(1) \xleftarrow{\alpha_2} u(2) \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} u(n-1) \xleftarrow{\alpha_n} u(n)$$

7. Como na representação do módulo band precisamos de um k -espaço vetorial Z e um automorfismo $\psi \in \text{Aut}(Z)$. Então pela observação (1.7) em diante consideremos o k -espaço vetorial $Z = k^n$ com $n \in \mathbb{Z}$ e o automorfismo $\psi \in \text{Aut}(Z)$ dado pelos blocos de Jordan.

Lema 2.20. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e S uma band de comprimento $l(S) = 2$, com a notação acima*

1. *Se $Z = k$, então $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha_1)$.*
2. *Se $Z = k^n$ com $n \geq 2$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Da observação (2.3) a band é da forma $S = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$,

$$Q := \cdots \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet \cdots$$

portanto da construção do módulo band tem-se

$$M(S, \psi)_{s(\alpha_1)} = Z_0 = k^n, \quad M(S, \psi)_{e(\alpha_1)} = Z_1 = k^n, \quad e \quad M(S, \psi)_v = 0, \forall v \in Q_0, \quad s(\alpha_1) \neq v \neq e(\alpha_1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha_1}: Z_0 &\longrightarrow Z_1 & \gamma_{\alpha_1} &= 1_Z \\ \gamma_{\alpha_2}: Z_0 &\longrightarrow Z_1 & \gamma_{\alpha_2} &= \psi^{-1} \\ \gamma_{\mu} &= 0, \quad \forall \mu \in Q_1, & \alpha_1 &\neq \mu \neq \alpha_2 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a representação do A -módulo string $M(S, \psi)$

$$M(S, \psi) := \cdots \bullet k^n \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{\psi^{-1}} \end{array} k^n \bullet \cdots$$

portanto, a representação do A -módulo $\text{rad}(M(S, \psi))$ é

$$\text{rad}(M(S, \psi)) := \cdots \bullet k^n \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} 0 \bullet \cdots$$

Da proposição (1.2) tem-se que $N(0, s(\alpha_1)) = n$ e $N(0, v) = 0, \forall v \in Q_0, v \neq s(\alpha_1)$ portanto tem-se que se $n > 2$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.

- (i) Se $n = 1$ é claro que $\psi(x) = \lambda x$, para algum $\lambda \in k$. Portanto temos a k -álgebra $A[M(S, \psi)] = kQ_{A[M(S, \psi)]}/\langle \rho' \rangle$, onde

$$Q_{A[M(S, \psi)]} := \cdots \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet \begin{array}{c} \nearrow \beta \\ \searrow \end{array} 0 \bullet \cdots$$

e $\rho' = \rho \cup \{\lambda^{-1}\beta\alpha_1 - \beta\alpha_2\}$. Agora, consideremos a k -álgebra $kQ_{A[M(S,\psi)]}/\langle\rho''\rangle$, onde $\rho'' = \rho \cup \{\beta\alpha_2\}$ e o isomorfismo de k -álgebras

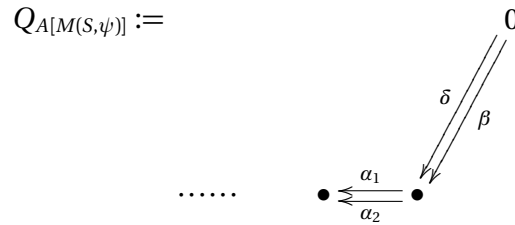
$$f: kQ_{A[M(S,\psi)]}/\langle\rho'\rangle \longrightarrow kQ_{A[M(S,\psi)]}/\langle\rho''\rangle$$

dado por $f(\bar{e}_v) := \bar{e}_v$, onde e_v é o idempotente associado ao vértice $v \in (Q_{A[M(S,\psi)]})_0$ e para cada flecha $\delta \in (Q_{A[M(S,\psi)]})_1$

$$f(\bar{\delta}) := \begin{cases} \bar{\delta}; & \text{se } \delta \neq \alpha_2 \\ \lambda^{-1}\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2; & \text{se } \delta = \alpha_2 \end{cases}$$

Claramente, $kQ_{A[M(S,\psi)]}/\langle\rho''\rangle$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha_1)$. Portanto, podemos concluir que $kQ_{A[M(S,\psi)]}/\langle\rho'\rangle$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha_1)$.

(ii) Se $n = 2$, suponhamos por absurdo que $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string.



Sem perda de generalidade assumamos $\delta\alpha_2 = 0 = \beta\alpha_1$, portanto $\dim_k(\text{Im}(f_{\alpha_2})) = 1$, mas $\dim_k(\text{Im}(\gamma_{\alpha_2})) = \dim_k(\text{Im}(\psi^{-1})) = 2$ e assim tem-se $\text{rad}(P_0) \not\cong M(S, \psi)$ o qual contradiz a definição de extensão por um ponto.

□

Lema 2.21. *Sejam $A = kQ/\langle\rho\rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band de comprimento $l(S) = n \geq 4$. Se existe um laço $\alpha \in S_1$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Seja $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tal que $s(s_i) = e(s_i)$, logo o subquiver Q_S de Q dada pela string é das seguintes formas:

(i) $Q := \dots \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet$,
 com $s(\beta) \neq e(\beta)$, onde $s_1 = \alpha$, $s_2 = \beta^{-1}$ ou $s_{n-1} = \beta$, $s_n = \alpha^{-1}$.

$$(ii) Q := \dots \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\gamma} \bullet \dots,$$

com $e(\gamma) \neq s(\alpha) \neq e(\beta)$, onde $s_{i-1} = \beta$, $s_i = \alpha^{-1}$, $s_{i+1} = \gamma$ ou $s_{i-1} = \gamma^{-1}$, $s_i = \alpha$, $s_{i+1} = \beta^{-1}$.

É claro que $N(0, s(\alpha)) \neq 0$ do contrario na representação do $A[M(S, \psi)]$ -módulo P_0 , tem-se $f_\alpha = 0$ o qual contradiz o fato que $\text{rad}(P_0) \cong M(S, \psi)$. Assim nos dois casos temos que $E_{s(\alpha)} \geq 3$ e portanto $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string. □

Lema 2.22. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band de comprimento $l(S) = n \geq 4$. Se existem $\alpha, \beta \in S_1$ tais que $\alpha \neq \beta$, $s(\alpha) = s(\beta)$ e $e(\alpha) = e(\beta)$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Primeiramente podemos afirmar que não existem flechas $\delta \in S_1$ tal que $\alpha \neq \delta \neq \beta$ com $e(\delta) = e(\alpha)$ ou $e(\delta) = s(\alpha)$ pois em $e(\alpha)$ já terminam duas flechas e caso exista uma flecha $\delta \in S_1$ com $\alpha \neq \delta \neq \beta$ e $e(\delta) = s(\alpha)$ então $\delta\alpha = 0 = \delta\beta$, logo $\delta \notin S_1$. Portanto $S_1 = \{\alpha, \beta\}$ e neste caso $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string. □

Observação 2.4. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band e $v \in S_0$ uma fonte em S .*

1. Como $(\text{rad}(M(S, \psi)))e_v = 0$, então pela proposição (1.2) tem-se

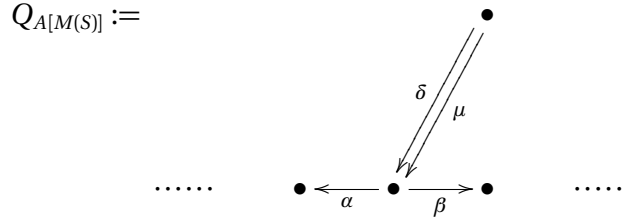
$$N(0, v) = \dim_k(M(S, \psi)e_v) = n |I_v| \neq 0.$$

2. Do item anterior temos que se $A[M(S, \psi)]$ for uma k -álgebra string, então $n \leq 2$ e existem no máximo duas fontes em S .

Lema 2.23. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band de comprimento $l(S) = n \geq 4$. Se existe uma fonte v em S , então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Suponhamos que $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string. Dado que S é uma band, então existem $\alpha, \beta \in S_1$ tais que $\alpha \neq \beta$, $s(\alpha) = v = s(\beta)$, pelo lema (2.22) podemos afirmar que $e(\alpha) \neq e(\beta)$ e pela observação (2.4) item (1), existe ao menos uma flecha δ de 0 para v . Como a álgebra é string, então $\delta\alpha = 0$ ou $\delta\beta = 0$. Se δ for a única flecha de 0 para v em $(Q_{A[M(S, \psi)]})_1$, então na representação do $A[M(S, \psi)]$ -módulo projetivo P_0 , tem-se que

$f_\alpha = 0$ ou $f_\beta = 0$, mas $\gamma_\alpha \neq 0$ e $\gamma_\beta \neq 0$ em $M(S, \psi)$ como A -módulo, logo $\text{rad}(P_0) \not\cong M(S)$ e portanto existe mais uma flecha μ de 0 para v em $(Q_{A[M(S)]})_1$.

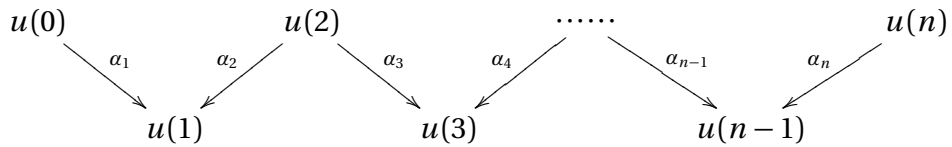


Como a string tem comprimento $l(S) = n \geq 4$, existe $\epsilon \in S_1$ tal que $\epsilon \neq \alpha$ e $\epsilon \neq \beta$, também dado que $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string, então não existe mais uma flecha saindo de 0 . Logo $f_\epsilon = 0$ na representação do $A[M(S, \psi)]$ -módulo projetivo P_0 o qual é uma contradição pois $\gamma_\epsilon \neq 0$ em $M(S, \psi)$ como A -módulo.

□

Lema 2.24. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band de comprimento $l(S) = n \geq 4$. Se não existem fontes em S , então $E_v = 2, \forall v \in S_1$.*

Demonstração: A band S é da forma



Seja $v \in S_0$, como v não é fonte em S , então existe uma flecha em S_1 chegando em v . Mas todos os vértices em S_0 que chegam ao menos uma flecha de S_1 , chegam duas. Portanto $E_v = 2$.

□

Lema 2.25. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$, S uma band de comprimento $l(S) = n \geq 4$. Se não existem fontes em S , então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.*

Demonstração: Do lema (2.24) e da definição de extensão por um ponto tem-se claramente que $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

□

Proposição 2.26. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e S uma band, com a notação da observação (2.3) tem-se*

1. Se $l(S) = 2$, então:

(a) Se $Z = k$, então $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha_1)$.

(b) Se $Z = k^n$ com $n \geq 2$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.

2. Se $l(S) \geq 4$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.

Demonstração: Se $l(S) = 2$, então do lema (2.20). Se S tem laços do lema (2.21) segue o resultado. Se S tem fonte o resultado segue do lema (2.23). Agora se S é uma band sem laços, nem fontes, então o resultado segue do lema (2.25). □

2.6 Teoremas Principais

Teorema 2.27. *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$. Se S é uma string*

1. $A[S_i]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha chegando no vértice i . Onde S_i é o simples associado ao vértice $i \in Q_0$.

2. $A[M(\alpha)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha)$. Onde $\alpha \in Q_1$.

3. Se $l(S) \geq 2$, então $A[M(S)]$ não é uma k -álgebra string.

Demonstração: O item (1) segue do proposição (2.1), o item (2) segue do corolário (2.5) e o item (3) segue do corolário (2.10) e a proposição (2.19). □

Teorema 2.28. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e S uma band, com a notação da observação (2.3) tem-se*

1. Se $l(S) = 2$, então:

(a) Se $Z = k$, então $A[M(S, \psi)]$ é uma k -álgebra string se, e somente se, existe no máximo uma flecha $\mu \in Q_1$ tal que $e(\mu) = s(\alpha_1)$.

(b) Se $Z = k^n$ com $n \geq 2$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.

2. Se $l(S) \geq 4$, então $A[M(S, \psi)]$ não é uma k -álgebra string.

Demonstração: Imediato da proposição (2.26). □

Os teoremas (2.27) e (2.28) caracterizam completamente quais são os módulos em que é possível fazer uma extensão por um ponto de álgebras string de radical quadrado zero, e cuja extensão ainda seja string. Para facilitar a notação do capítulo seguinte, introduzimos a seguir uma definição neste sentido.

Definição 2.3. *Seja $A = kQ_A/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$. Definamos o seguinte conjunto*

$$\Sigma := \{M \in \text{ind } A \mid A[M] \text{ é uma } k\text{-álgebra string}\}.$$

Capítulo 3

Álgebras Hereditárias por Partes

Neste capítulo, pretendemos abordar o seguinte problema:

Problema 3.1. *Seja A uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $M \in \Sigma$. Se A é hereditária por partes, então $A[M]$ é hereditária por partes?*

Daremos a seguir referências bibliográficas e alguns conceitos necessários para a abordagem deste problema. Usaremos a seguinte notação: $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$ para dizer que \mathcal{A} e \mathcal{C} são categorias triangularmente equivalentes. Para maiores informações sobre categorias derivadas, citamos [Gri87], [Hap88] e [Mon10]. Uma k -categoria \mathcal{A} é dita **Hereditária** se $\text{Ext}^2(-, -) = 0$, e então $\text{Ext}^n(-, -) = 0$ para todo $n \geq 2$. Uma k -álgebra de dimensão finita A é dita **Hereditária por Partes** se $D^b(A) \simeq D^b(\mathcal{H})$, onde \mathcal{H} é uma k -categoria hereditária. Neste capítulo usaremos o conceito de quiver graduável (ver definição (4.5)).

3.1 Extensão por um ponto por módulo simples

Nesta seção, apresentamos uma resposta para o Problema (3.1) quando a extensão por um ponto seja por módulo simples, esta resposta está descrita no teorema a seguir. Note que não é necessário neste caso que a álgebra seja string. Porém, é necessário uma condição sobre o número de flechas chegando no vértice que está associado ao simples da extensão.

Teorema 3.1. *Sejam $A = kQ / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra com $\text{rad}^2 A = 0$ e $x \in Q_0$. Então, A é hereditária por partes se, e somente se, $A[S_x]$ é hereditária por partes.*

Demonstração: Como $A[S_x] = kQ_{A[S_x]} / \langle \rho' \rangle$ com $\rho' = \rho \cup \{\alpha\beta \mid \beta \in Q_1, s(\beta) = x\}$, onde α é a nova e única flecha obtiva ao fazer a extensão por um ponto. Assim $\text{rad}^2(A[S_x]) = 0$ e portanto temos pela definição (4.5) que Q é graduável se, e somente se, $Q_{A[S_x]}$ é graduável.

E do teorema (4.5) obtemos que A é hereditária por partes se, e somente se, $A[S_x]$ é hereditária por partes.

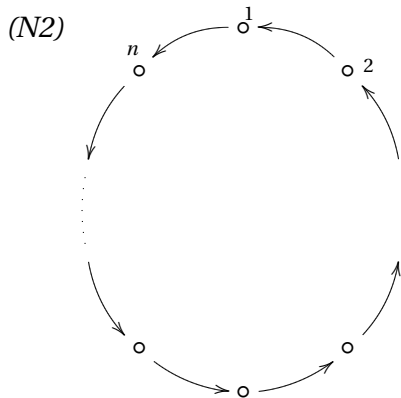
□

Na seção seguinte, continuaremos tratando do Problema (3.1), porém para um caso particular de álgebras string, isto é, as álgebras de Nakayama.

3.2 O caso das Álgebras de Nakayama

Para abordagem do nosso problema, necessitamos unicamente da seguinte caracterização do quiver ordinário desta classe de álgebras. No teorema (1.3) temos que A é uma álgebra de Nakayama se, e somente se, seu quiver ordinário Q_A é de uma das seguintes formas:

$$(N1) \quad 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow \dots \longleftarrow n-1 \longleftarrow n$$



Um estudo mais detalhado desta classe de álgebras esta em [ASS06].

Dado que o quiver do caso (N2) não é graduável, então pelo teorema (4.5) temos que a k -álgebra $A = kQ/\langle \rho \rangle$ com $rad^2 A = 0$, onde Q é um quiver do tipo (N2), não é hereditária por partes. Nesta seção demonstraremos que se Q é um quiver do tipo (N1) e $M \in \Sigma$, então $A[M]$ é hereditária por partes.

Para este proposito usaremos fortemente da definição e do lema a seguir:

Definição 3.1. *Seja A um k -álgebra. Uma A -módulo T é dito **inclinante** se satisfaz:*

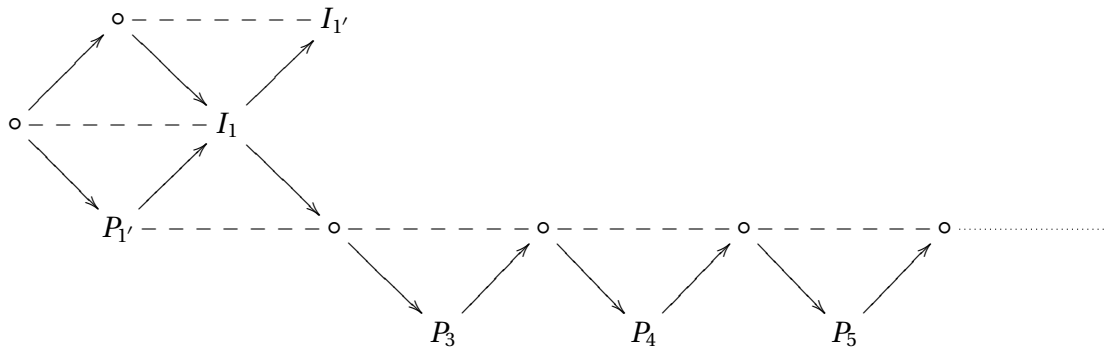
$$(T1) \quad dp T \leq 1.$$

$$(T2) \quad Ext_A^1(T, T) = 0.$$

Demonstração: Como $\Lambda(n, 1) = kQ_{\Lambda(n,1)}/\langle \rho \rangle$, com o quiver $Q_{\Lambda(n,1)}$

$$\begin{array}{c} 1' \\ \downarrow \mu \\ 1 \xleftarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3 \xleftarrow{\alpha_3} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \end{array}$$

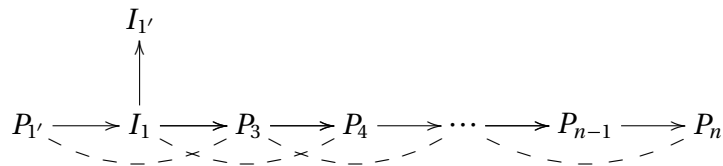
e $\rho = \{\alpha_{i+1}\alpha_i / i = 1, 2, \dots, n-3, n-2\}$, então o quiver de Auslander-Reiten é



Consideremos o $\Lambda(n, 1)$ -módulo

$$T = P_{1'} \oplus I_1 \oplus I_{1'} \oplus \bigoplus_{i=3}^n P_i$$

o qual pelo teorema (3.2) é um $\Lambda(n, 1)$ -módulo inclinante. Agora, do quiver de Auslander-Reiten temos o caminho de morfismo irreduzíveis



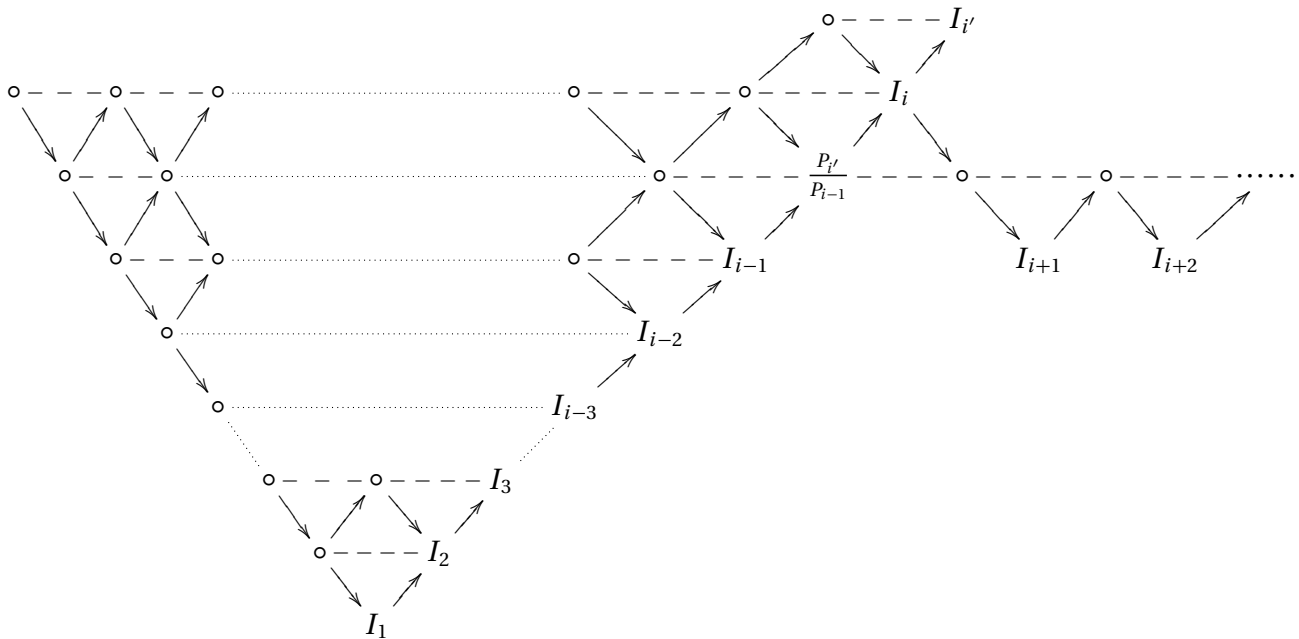
Onde as compostas contínuas da linha de abaixo são nulas. Assim obtemos que $End(T)$ é a k -álgebra dada pelo quiver

$$Q_{End(T)} := \begin{array}{c} 2' \\ \downarrow \delta \\ 1 \xleftarrow{\beta_1} 2 \xleftarrow{\beta_2} 3 \xleftarrow{\beta_3} \cdots \xleftarrow{\beta_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\beta_{n-1}} n \end{array}$$

com $\rho = \{\alpha_{k+1}\alpha_k / k = i - 1, i, \dots, n - 3, n - 2\}$.

Lema 3.7. Para toda k -álgebra B_i , existe um B_i -módulo inclinante T_i tal que $\text{End}(T_i) = B_{i+1}$.

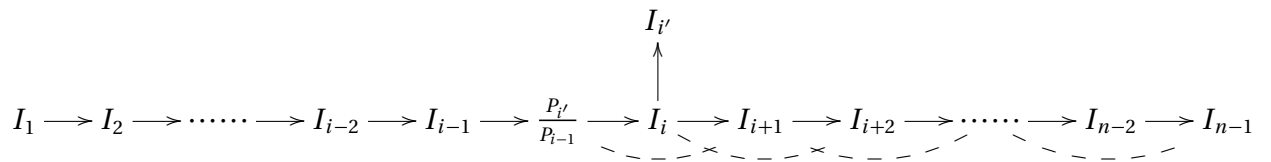
Demonstração: Como o quiver de Auslander-Reiten de B_i é



então o B_1 -módulo

$$T_i := \bigoplus_{k=1}^{n-1} I_k \oplus I_{i'} \oplus \frac{P_{i'}}{P_{i-1}}$$

é um B_1 -módulo inclinante do teorema (3.2). Além disso do quiver de Auslander-Reiten temos o caminho de morfismos irredutíveis



Onde as linhas tracejadas significam que a composta dos dois morfismos é nula. Assim obtemos que $\text{End}(T_i) = B_{i+1}$.

□

Teorema 3.8. $\Lambda(n, i)$ é hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_{n+1} , $\forall i \in \{1, 2, \dots, n - 1, n\}$.

Demonstração: Pela proposição (3.6) basta demonstrar que $\Lambda(n, 2)$ é hereditária por partes do tipo $k\mathbb{A}_{n+1}$. É claro que $B_2 = \Lambda(n, 2) = kQ_{\Lambda(n,2)}/\langle \rho \rangle$, onde

$$Q_{\Lambda(n,2)} := \begin{array}{ccccccc} & & 2' & & & & \\ & & \downarrow \mu & & & & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha_1} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3 & \xleftarrow{\alpha_3} & \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \end{array}$$

e $\rho = \{\alpha_{i+1}\alpha_i / i = 1, 2, \dots, n-3, n-2\}$. Logo pelo lema (3.7) temos que existe um B_2 -módulo inclinante T_2 tal que $\text{End}(T_2) = B_3$, onde B_3 é a k -álgebra dada pelo quiver

$$Q_{B_3} := \begin{array}{ccccccc} & & 3' & & & & \\ & & \downarrow \mu & & & & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha_1} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3 & \xleftarrow{\alpha_3} & \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \end{array}$$

com $\alpha_{k+1}\alpha_k = 0$, $\forall k = 2, 3, \dots, n-3, n-2$. Logo de [Hap88] (p. 113) concluímos

$$D^b(\Lambda(n, 2)) \simeq D^b(\text{End}(T_2)) = D^b(B_3).$$

Similarmente, do lema (3.7) existe um B_3 -módulo inclinante T_3 tal que $\text{End}(T_3) = B_4$, onde B_4 é a k -álgebra dada pelo quiver

$$Q_{B_4} := \begin{array}{ccccccc} & & & & 4' & & \\ & & & & \downarrow \mu & & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha_1} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3 & \xleftarrow{\alpha_3} & 4 \xleftarrow{\alpha_4} \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \end{array}$$

com $\alpha_{k+1}\alpha_k = 0$, $\forall k = 3, 4, \dots, n-3, n-2$ e de [Hap88] (p. 113) tem-se

$$D^b(\Lambda(n, 2)) \simeq D^b(B_3) \simeq D^b(\text{End}(T_3)) = D^b(B_4).$$

Continuando assim recursivamente, temos que

$$D^b(\Lambda(n, 2)) \simeq D^b(B_n)$$

onde B_n é a k -álgebra sem relações da pelo quiver

$$Q_{B_n} := \begin{array}{ccccccc} & & & & & & n' \\ & & & & & & \downarrow \mu \\ 1 & \xleftarrow{\alpha_1} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3 & \xleftarrow{\alpha_3} & \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n \end{array}$$

e portanto concluímos que

$$D^b(\Lambda(n, 2)) \simeq D^b(B_n) = D^b(k\mathbb{A}_{n+1}).$$

□

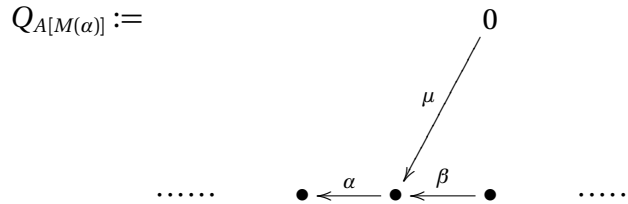
3.3 Deslocamento da Extensão por um Ponto

Na seção anterior, vimos que no caso (N1), ao fazer a extensão por um ponto pelo módulo $M(\alpha_{i-1})$, acrescentamos no quiver ordinário Q da álgebra A uma nova flecha chegando no vértice i . Por abuso de linguagem, diremos que fizemos uma extensão por um ponto no vértice i . Com isso, podemos então dizer que o resultado da seção anterior, mostra que nas álgebras do tipo (N1) como radical quadrado zero não importa onde se faz a extensão por um ponto, as álgebras obtidas a partir da extensão por um ponto, são derivadamente equivalentes. Nesta seção veremos uma generalização da proposição (3.6).

Para a demonstração do seguinte lema usaremos a técnicas combinatorias apresentadas por Butler e Ringel em [BR87], junto com a notação apresentada por Rogerio em [Pic10] (p. 31 – 34).

Lema 3.9. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $\alpha, \beta \in Q_1$ tais que $s(\alpha) = e(\beta)$ e $s(\alpha) \neq e(\alpha)$. Suponhamos que não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \alpha$, $s(\delta) = s(\alpha)$ e não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \beta$, $s(\delta) = s(\beta)$, então $\tau I_0 = P_{s(\beta)}$ e $\tau I_{s(\alpha)} = S_{s(\alpha)}$ em $\text{mod}(A[M(\alpha)])$. Onde 0 é o novo vértice obtido ao fazer a extensão por um ponto de A por $M(\alpha)$.*

Demonstração: Seja μ a única flecha de 0 para $s(\alpha)$ ao fazer a extensão por um ponto (ver (2.5))



Construamos a sequência de Auslander-Reiten induzida pela flecha μ . Consideremos a string

$$\epsilon_0 \mu \beta^{-1}$$

a qual começa num abismo e termina num cume, logo a sequência de Auslander-Reiten

induzida pela flecha μ em $\text{mod}(A[M(\alpha)])$ é

$$0 \longrightarrow M(\beta^{-1}) \longrightarrow M(\mu\beta^{-1}) \longrightarrow M(\epsilon_0) \longrightarrow 0$$

e como $I_0 = M(\epsilon_0)$, então $\tau I_0 = M(\beta^{-1}) = P_{s(\beta)}$.

Agora, para demonstrar que $\tau I_{s(\alpha)} = S_{s(\alpha)}$, construíamos a sequência de Auslander-Reiten começando no módulo string $M(S)$, onde $S = \epsilon_{s(\alpha)}$. Claramente S não começa num cume e não termina num cume, logo temos

$${}_h S = \mu S = \mu, \quad S_h = S\beta^{-1} = \beta^{-1} \quad e \quad {}_h S_h = \mu\beta^{-1}$$

finalmente temos a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(S) \longrightarrow M({}_h S) \oplus M(S_h) \longrightarrow M({}_h S_h) \longrightarrow 0$$

e como $I_{s(\alpha)} = M({}_h S_h) = M(\mu\beta^{-1})$, então $\tau I_{s(\alpha)} = M(S) = M(\epsilon_{s(\alpha)}) = S_{s(\alpha)}$.

□

Com as mesmas hipóteses do lema anterior demonstraremos que podemos deslocar a extensão por um ponto e a estratégia para isto é usar o fato que o $A[M(\alpha)]$ -módulo

$$T := \bigoplus_{x \in \Omega} P_x \oplus I_0 \oplus I_{s(\alpha)}$$

em que $\Omega := (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$ é inclinante. O seguinte lema nos permite afirmar que

$$\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau T) = 0.$$

Lema 3.10. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $\alpha, \beta \in Q_1$ tais que $s(\alpha) = e(\beta)$ e $s(\alpha) \neq e(\alpha)$. Suponhamos que não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \alpha$, $s(\delta) = s(\alpha)$ e não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \beta$, $s(\delta) = s(\beta)$, então*

1. $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(P_x, \tau I_0) = 0$, para todo $x \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$.
2. $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(P_x, \tau I_{s(\alpha)}) = 0$, para todo $x \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$.
3. $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_0) = 0$.
4. $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_{s(\alpha)}) = 0$.
5. $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, \tau I_0) = 0$.

$$6. \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (I_{s(\alpha)}, \tau I_{s(\alpha)}) = 0.$$

Demonstração:

1. Seja $x \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$ e suponhamos que existe

$$0 \neq f \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (P_x, \tau I_0) = \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (P_x, P_{s(\beta)})$$

dado que a inclusão $i : \text{rad}(P_{s(\beta)}) \hookrightarrow P_{s(\beta)}$ é um poço e que f não é epi que cinde (pois $P_x, P_{s(\beta)}$ são indecomponíveis não isomorfos), então existe $g : P_x \rightarrow \text{rad}(P_{s(\beta)})$ tal que $f = i g$

$$\begin{array}{ccc} & & P_x \\ & \swarrow \exists g & \downarrow f \\ \text{rad}(P_{s(\beta)}) & \xrightarrow{i} & P_{s(\beta)} \end{array}$$

Olhemos $g = (g_v)_{v \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0}$ como um morfismo de representações de módulos, logo como $\text{rad}(P_{s(\beta)}) = S_{s(\alpha)}$, então para $v \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0$ com $v \neq s(\alpha)$ tem-se $g_v = 0$. Agora como é claro que na representação do $A[M(\alpha)]$ -módulo P_x temos $(P_x)_{s(\alpha)} = 0$ se $x \neq 0$, então $g_{s(\alpha)} = 0$ quando $x \neq 0$. Mas, no caso que $x = 0$ temos pela flecha μ o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} k = (P_0)_0 & \xrightarrow{1} & (P_0)_{s(\alpha)} = k \\ \downarrow 0 & & \downarrow g_{s(\alpha)} \\ 0 = (\text{rad } P_{s(\beta)})_0 & \xrightarrow{0} & (\text{rad } P_{s(\beta)})_{s(\alpha)} = k \end{array}$$

em que μ é a única flecha em $Q_{A[M(\alpha)]}$ de 0 para o vértice $s(\alpha)$ após fazer a extensão por um ponto de A por $M(\alpha)$. Portanto, se $x = 0$ tem-se $g_{s(\alpha)} = 0$. Da anteriormente provado temos que $g = 0$ e portanto $f = i g = 0$ (Absurdo).

2. Seja $x \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$ e suponhamos

$$f = (f_v)_{v \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0} \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (P_x, \tau I_{s(\alpha)}) = \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (P_x, S_{s(\alpha)}).$$

É claro que para $v \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0$ com $v \neq s(\alpha)$ tem-se $f_v = 0$, similarmente ao item anterior temos que $f_{s(\alpha)} = 0$, portanto $f = 0$.

3. Seja $0 \neq f \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]} (I_0, \tau I_0)$, como $S_0 = I_0$ é simples, então f é monomorfismo e como além disso $f \neq 0$ e I_0 é injetivo, então f é mono que cinde e portanto I_0 é um

somando direto de τI_0 , mas como τI_0 é indecomponível, então $I_0 \cong \tau I_0$ e pelo lema (3.9) tem-se que $I_0 \cong P_{s(\beta)}$ o qual é absurdo, portanto $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_0) = 0$.

4. Similarmente ao item anterior obtemos que $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_{s(\alpha)}) = 0$.
5. Suponhamos que existe $0 \neq f \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, \tau I_0) = \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, P_{s(\beta)})$. Dado que a inclusão $i: \text{rad}(P_{s(\beta)}) \hookrightarrow P_{s(\beta)}$ é um poço e que f não é epi que cinde (pois $I_{s(\alpha)}, P_{s(\beta)}$ são indecomponíveis não isomorfos), então existe $g: I_{s(\alpha)} \rightarrow \text{rad}(P_{s(\beta)})$ tal que $f = ig$

$$\begin{array}{ccc} & & I_{s(\alpha)} \\ & \swarrow \exists g & \downarrow f \\ \text{rad}(P_{s(\beta)}) & \xrightarrow{i} & P_{s(\beta)} \end{array}$$

olhemos $g = (g_\nu)_{\nu \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0}$ como um morfismo de representações de módulos, logo como $\text{rad}(P_{s(\beta)}) = S_{s(\alpha)}$, então para $\nu \in (Q_{A[M(\alpha)]})_0$ com $\nu \neq s(\alpha)$ tem-se $g_\nu = 0$, e similarmente como no item (1) tem-se $g_{s(\alpha)} = 0$. Assim temos que $g = 0$ e portanto $f = ig = 0$.

6. Suponhamos que existe $0 \neq f \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, \tau I_{s(\alpha)}) = \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, S_{s(\alpha)})$, é claro que f é sobrejetor e que portanto f não é mono que cinde. Agora, como a projeção $\pi: I_{s(\alpha)} \rightarrow I_{s(\alpha)}/\text{soc}(I_{s(\alpha)}) = S_0 \oplus S_{s(\beta)}$ é um morfismo fonte, então existe $g: S_0 \oplus S_{s(\beta)} \rightarrow S_{s(\alpha)}$ tal que $f = g\pi$

$$\begin{array}{ccc} I_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\pi} & I_{s(\alpha)}/\text{soc}(I_{s(\alpha)}) \\ \downarrow f & \swarrow \exists g & \\ S_{s(\alpha)} & & \end{array}$$

assim $g = [g_1 \ g_2]$, onde $g_1 \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(S_0, S_{s(\alpha)})$ e $g_2 \in \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(S_{s(\beta)}, S_{s(\alpha)})$ e como $S_0, S_{s(\alpha)}, S_{s(\beta)}$ são simples não isomorfos, então $g_1 = 0 = g_2$ e portanto $g = 0$, o qual implica que $f = g\pi = 0$ (Absurdo).

□

Teorema 3.11. *Sejam $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma k -álgebra string com $\text{rad}^2 A = 0$ e $\alpha, \beta \in Q_1$ tais que $s(\alpha) = e(\beta)$. Suponhamos que*

1. Não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \alpha, s(\delta) = s(\alpha)$,
2. Não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \alpha, e(\delta) = e(\alpha)$,

3. Não existe $\delta \in Q_1$ tal que $\delta \neq \beta$, $s(\delta) = s(\beta)$,

então $D^b(A[M(\alpha)]) \simeq D^b(A[M(\beta)])$.

Demonstração: Consideremos o $A[M(\alpha)]$ -módulo

$$T := \bigoplus_{x \in \Omega} P_x \oplus I_0 \oplus I_{s(\alpha)},$$

onde $\Omega := (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$. Vejamos que T é um $A[M(\alpha)]$ -módulo inclinante. Para isto provemos as seguintes afirmações (ver teorema (3.2)):

(i) Para todo $A[M(\alpha)]$ -módulo projetivo P indecomponível, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

com $T', T'' \in \text{add } T$.

(ii) $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau T) = 0$.

(i) É claro que para P_x com $x \in \Omega$ existe a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow P_x \xrightarrow{1} P_x \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

E por outro lado temos as sequência exata curtas

$$0 \longrightarrow P_{s(\alpha)}^{\subset} \longrightarrow P_0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow P_{s(\beta)}^{\subset} \longrightarrow I_{s(\alpha)} \longrightarrow I_0 \longrightarrow 0$$

(ii) $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau T) = \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau (\bigoplus_{x \in \Omega} P_x \oplus I_0 \oplus I_{s(\alpha)})) \cong \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau I_0 \oplus \tau I_{s(\alpha)})$, assim temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau T) &\cong \bigoplus_{x \in \Omega} \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(P_x, \tau I_0) \oplus \bigoplus_{x \in \Omega} \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(P_x, \tau I_{s(\alpha)}) \oplus \\ &\quad \oplus \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_0) \oplus \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_0, \tau I_{s(\alpha)}) \oplus \\ &\quad \oplus \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, \tau I_0) \oplus \text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(I_{s(\alpha)}, \tau I_{s(\alpha)}). \end{aligned}$$

e do lema (3.10) temos que $\text{Hom}_{A[M(\alpha)]}(T, \tau T) = 0$. Portanto T é um $A[M(\alpha)]$ -módulo inclinante.

Por outro lado temos que o quiver de Auslander-Reiten de A é da forma

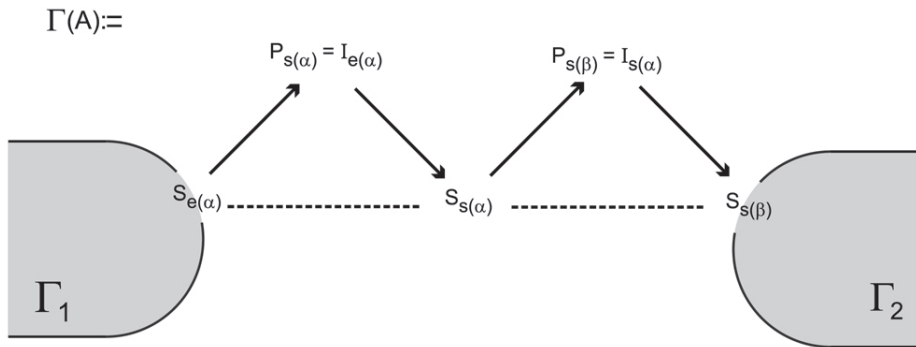


Figura 3.1: Quiver de A-R de A .

onde Γ_1, Γ_2 são as respectivas componentes à esquerda e direita do quiver incluindo os respectivos simples. Além disso, o quiver de Auslander-Reiten de $A[M(\alpha)]$ é da forma

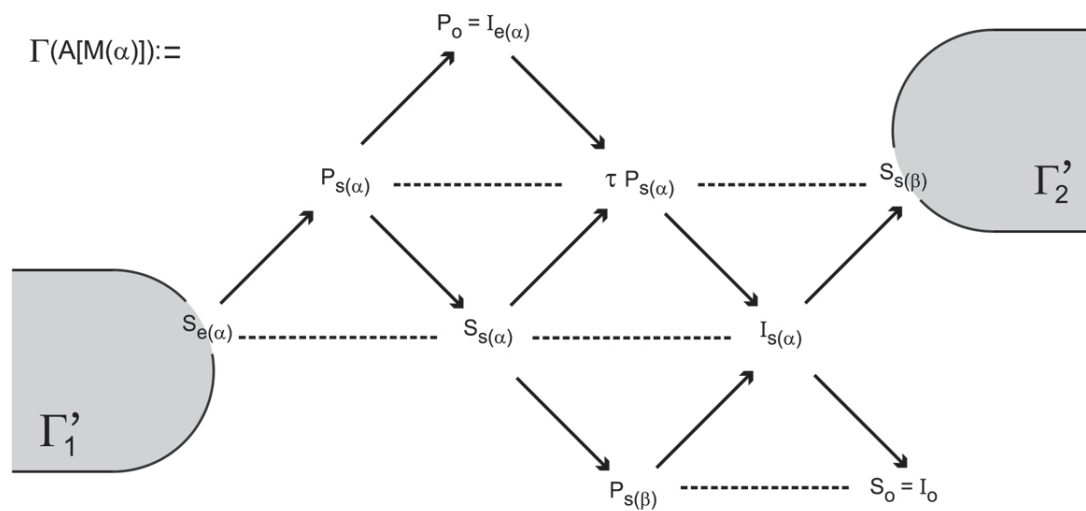


Figura 3.2: Quiver de A-R de $A[M(\alpha)]$.

onde Γ'_1, Γ'_2 são as respectivas componentes à esquerda e direita do quiver incluindo os

respectivos simples. Reparemos que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(M(\alpha), P_{s(\alpha)}) &\neq 0 \\ \text{Hom}_A(M(\alpha), S_{s(\alpha)}) &\neq 0 \\ \text{Hom}_A(M(\alpha), N) &= 0, \forall N \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \text{ pois } N_{s(\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

Portanto do corolário (1.7) do livro [SS07] (p. 12) temos $\Gamma'_1 = \Gamma_1$, $\Gamma'_2 = \Gamma_2$ e que a sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow S_{e(\alpha)} \rightarrow P_{s(\alpha)} \rightarrow S_{s(\alpha)} \rightarrow 0$ em $\text{mod}A$ também é uma sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}(A[M(\alpha)])$, sob a imersão estandar.

Agora, dado que o $A[M(\alpha)]$ -módulo inclinante é

$$T := \bigoplus_{x \in \Omega} P_x \oplus I_0 \oplus I_{s(\alpha)},$$

onde $\Omega := (Q_{A[M(\alpha)]})_0 - \{s(\alpha), s(\beta)\}$, então para cada $x \in \Omega$ tem-se que $P_x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, logo temos o caminho de morfismos irredutíveis em $\text{mod}(A[M(\alpha)])$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & I_0 & & \\ & & & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{e(\alpha)} & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & I_{s(\alpha)} \longrightarrow \cdots \\ & & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \end{array}$$

e portanto podemos concluir que $\text{End}(T) = A[M(\beta)]$ e como T é inclinante então de [Hap88] (p. 113) concluímos

$$D^b(A[M(\alpha)]) \simeq D^b(\text{End}(T)) = D^b(A[M(\beta)]).$$

□

3.4 Outra estratégia para resolver o problema principal

Na duas primeiras seções vimos que o problema (3.1) tem resposta afirmativa para o caso em que fazemos a extensão por um módulo simples de uma álgebra qualquer com radical quadrado zero, ou para as álgebras de Nakayama. Estes casos foram mais simples de serem tratados com a ferramenta de fazer o deslocamento da extensão. A forma como resolvemos o problema foi fazendo o "deslocamento" do local onde era feita a extensão por um ponto. Porém, este caminho aponta para um nível de dificuldade muito alto, como pode se notar pela combinatória do problema.

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de Bautista e Liu que permitem abordar

nosso problema com uma outra ferramenta e desta forma, evitar o tipo de combinatória apresentada nas seções anteriores. Com esta ferramenta teremos uma resposta parcial para nosso problema no caso das álgebras Gentle.

Definição 3.2. *Seja Q um quiver. Dizemos que um caminho $p = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ é um **caminho reto** se para todo $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ não existe $\beta \in Q_1$ tal que $\beta \neq \alpha_i$ com $s(\alpha_i) = s(\beta)$. Dizemos que um caminho reto p tem **comprimento maximal** se $e(p)$ é um poço.*

Definição 3.3. *Seja Q um quiver e $p = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ um caminho. Definamos o kQ -módulo N_p cuja representação esta dada por: Para cada $x \in Q_1$ temos*

$$N_p(x) = \begin{cases} k, & \text{se } x \in \{s(\alpha_1), s(\alpha_2), \dots, s(\alpha_n), e(\alpha_n)\} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

e para cada $\alpha \in Q_1$

$$N_p(\delta) := \begin{cases} 1_k, & \text{se } \delta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Dada duas álgebras derivadamente equivalentes, é possível fazer extensões por um ponto de ambas, mantendo a equivalência derivada sob determinadas condições sobre os módulos envolvidos na extensão. Este problema foi estudado por Barot e Lenzing em [BL03]. Utilizaremos este resultado e por isso apresentamos a seguir.

Teorema 3.12. *Sejam A, B duas álgebras sobre um anel comutativo R com unidade, $M \in \text{Mod}A$ e $N \in \text{Mod}B$. Para qualquer equivalência triangulada $\Phi : D^b(A) \longrightarrow D^b(B)$ tal que $\Phi(M) = N$, existe uma equivalência triangulada $\bar{\Phi} : D^b(A[M]) \longrightarrow D^b(B[N])$.*

Demonstração: Ver [BL03] (p. 4).

□

Observemos que se uma k -álgebra A é hereditária por partes existe uma equivalência triangulada $\Phi : D^b(A) \longrightarrow D^b(\mathcal{H})$, onde \mathcal{H} é uma categoria hereditária. Como nosso problema é estudar algumas extensões por um ponto de A por M , então uma boa opção seria ver qual é a imagem de M pelo funtor Φ . Mas primeiramente, precisamos de conhecer o funtor que faça esse serviço e um bom candidato é o funtor $\widehat{\mathcal{F}}$ que usaram *Bautista* e *Liu* em [BL] para demonstrar o teorema (4.5).

Teorema 3.13. *Seja $A = kQ/\langle \rho \rangle$ uma álgebra string hereditária por partes com $\text{rad}^2 A = 0$ e seja $\beta \in Q_1$. Se existe um caminho reto de comprimento maximal $p = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ com $s(p) = s(\beta)$ e $\alpha_1 \neq \beta$, então $D^b(A[M(\beta)]) \simeq D^b(kQ^{op}[N_{p^o}])$, onde $p^o = \alpha_n^o\alpha_{n-1}^o\dots\alpha_2^o\alpha_1^o$.*

Demonstração: Consideremos o caminho reto de comprimento maximal $p = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ com $s(p) = s(\beta)$ e $\alpha_1 \neq \beta$.

$$\bullet \xleftarrow{\beta} \bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bullet \xrightarrow{\alpha_n} \bullet ,$$

e sem esquecer que pode existir uma flecha em Q chegando no vértice $s(\beta)$, reparemos que o quiver Q^{op} é

$$Q^{op} := \dots \bullet \xrightarrow{\beta^o} \bullet \xleftarrow{\alpha_1^o} \bullet \xleftarrow{\alpha_2^o} \bullet \xleftarrow{\alpha_3^o} \dots \xleftarrow{\alpha_{n-1}^o} \bullet \xleftarrow{\alpha_n^o} \bullet \dots$$

Dado que A é hereditária por partes pelo teorema (4.5), temos que Q é um quiver graduável, logo pela observação (4.1) temos que o recobrimento minimal graduável $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ é um isomorfismo e portanto $\tilde{Q} = Q$. Agora fixemos o vértice $\tilde{x} = e(\beta^o)$. Lembremos que pela observação (4.10) tem-se

$$\widehat{\mathcal{F}}(M)^\bullet = F(M)^\bullet, \quad \forall M \in \text{rep } Q$$

Consideremos o kQ^{op} -módulo N_{p^o}

$$N_{p^o} = \dots \quad 0 \longrightarrow k \xleftarrow{1} k \xleftarrow{1} k \xleftarrow{1} \dots \xleftarrow{1} k \xleftarrow{1} k \quad \dots$$

Por tanto temos

$$F(N_{p^o})^\bullet := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(N_{p^o})^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} F(N_{p^o})^{-n+1} \xrightarrow{d^{-n+1}} \dots \xrightarrow{d^{-2}} F(N_{p^o})^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} F(N_{p^o})^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde

$$F(N_{p^o})^{-j} := \begin{cases} P[e(\alpha_n)] \otimes_k k, & \text{se } j = n \\ P[s(\alpha_{j+1})] \otimes_k k, & \text{se } j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} d^{-n}: P[e(\alpha_n)] \otimes_k k &\longrightarrow P[s(\alpha_n)] \otimes_k k \\ p \otimes k &\longmapsto d^{-n}(p \otimes k) := \alpha_n p \otimes k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^{-j}: P[s(\alpha_{j+1})] \otimes_k k &\longrightarrow P[s(\alpha_j)] \otimes_k k \\ p \otimes k &\longmapsto d^{-j}(p \otimes k) := \alpha_j p \otimes k \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \dots, n-1$, logo $F(N_{p^o})^\bullet \cong X^\bullet$ em $D^b(A)$,

$$X^\bullet := \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P[e(\alpha_n)] \xrightarrow{d_X^{-n}} P[s(\alpha_n)] \xrightarrow{d_X^{-n+1}} \dots \xrightarrow{d_X^{-2}} P[s(\alpha_2)] \xrightarrow{d_X^{-1}} P[s(\alpha_1)] \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde

$$\begin{aligned} d_X^{-n} : P[e(\alpha_n)] &\longrightarrow P[s(\alpha_n)] \\ p &\longmapsto d_X^{-n}(p) := \alpha_n p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_X^{-j} : P[s(\alpha_{j+1})] &\longrightarrow P[s(\alpha_j)] \\ p &\longmapsto d_X^{-j}(p) := \alpha_j p \end{aligned}$$

e considerando o quasi-isomorfismo

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} X^\bullet := \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P[e(\alpha_n)] & \xrightarrow{d_X^{-n}} & P[s(\alpha_n)] & \xrightarrow{d_X^{-n+1}} & \cdots & \xrightarrow{d_X^{-2}} & P[s(\alpha_2)] & \xrightarrow{d_X^{-1}} & P[s(\alpha_1)] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \pi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C^\bullet := \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Coker}(d_X^{-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

obtemos que $F(N_{p^o})^\bullet \cong C^\bullet$ em $D^b(A)$. E como $\text{Coker}(d_X^{-1}) = M(\beta)$, então $F(N_{p^o})^\bullet \cong M(\beta)^\bullet$ em $D^b(A)$, isto implica que

$$\widehat{\mathcal{F}}(N_{p^o})^\bullet \cong M(\beta)^\bullet$$

em $D^b(A)$.

Portanto do teorema (3.12) podemos concluir que

$$D^b(A[M(\beta)]) \simeq D^b(kQ^{op}[N_{p^o}]).$$

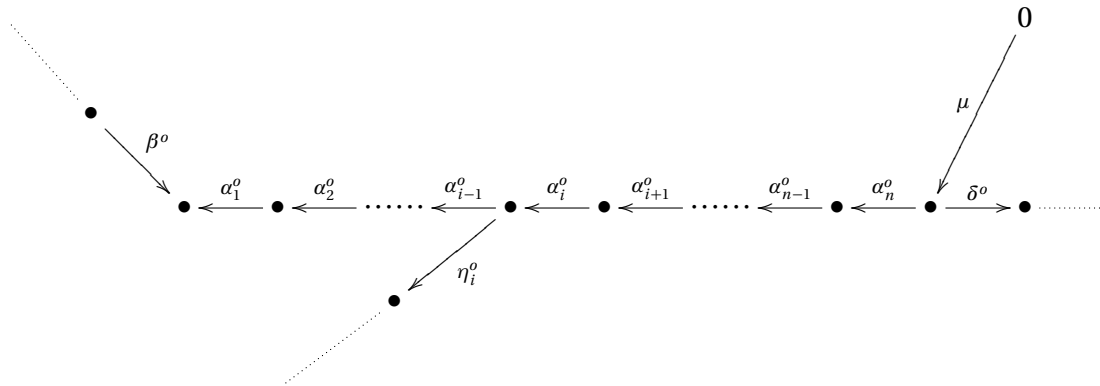
□

Observemos que $kQ^{op}[N_{p^o}] = Q_{kQ^{op}[N_{p^o}]} / \langle \rho' \rangle$ com

$$\rho' = \{\mu\delta^o \mid \delta \in Q_1, e(\delta) = e(\alpha_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{\mu\alpha_n^0 \alpha_{n-1}^0 \cdots \alpha_{i+1}^0 \alpha_i^0 \eta_i^0 \mid \eta_i \in Q_1, e(\eta_i) = s(\alpha_i)\}$$

onde μ é a única flecha obtida ao fazer a extensão por um ponto de kQ^{op} por N_{p^o} .

$$Q_{kQ^{op}[N_{p^o}]} :=$$



Também observemos que no caso que não existam as flechas $\delta, \eta_i \in Q_1$ temos que $A[M(\beta)]$ é hereditária por partes. Assim obtemos outra demonstração do teorema (3.8).

3.5 O caso das Álgebras Gentle

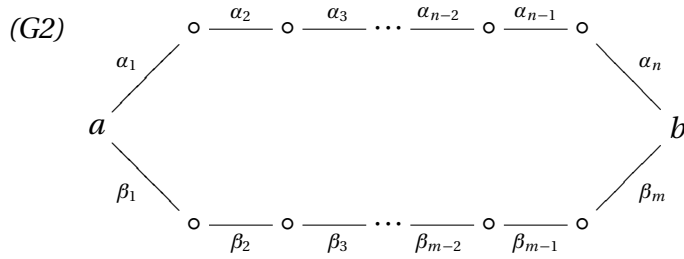
Nesta seção vamos analisar o Problema (3.1) para o caso das álgebras gentle. Primeiramente veremos que o quiver ordinário das álgebras gentle com radical quadrado zero, são de duas formas. Para a primeira forma veremos que não somente a extensão por um ponto é hereditária por partes, mas também de que tipo são estas álgebras. Para o segundo caso, faremos uma análise do problema utilizando o resultado a seção anterior.

Definição 3.4. Uma k -álgebra $A = kQ / \langle \rho \rangle$ é uma **Álgebra Gentle** se satisfaz:

- a. Para todo vértice $i \in Q_0$ existem no máximo duas flechas que começam (respectivamente, terminam) em i .
- b. Para toda flecha $\beta \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\alpha \in Q_1$ (respectivamente, $\sigma \in Q_1$) tal que $\alpha\beta \notin \langle \rho \rangle$ (respectivamente, $\beta\sigma \notin \langle \rho \rangle$)
- c. Para toda flecha $\beta \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\alpha \in Q_1$ (respectivamente, $\sigma \in Q_1$) tal que $\alpha\beta \in \langle \rho \rangle$ (respectivamente, $\beta\sigma \in \langle \rho \rangle$)
- d. O ideal $\langle \rho \rangle$ é gerado por caminhos de comprimento dois.

Da definição (3.4) temos que uma k -álgebra gentle é uma álgebra string e que o grafo induzido pelo quiver ordinário Q_A de uma álgebra gentle $A = kQ_A / \langle \rho \rangle$ com $rad^2 A = 0$, é de uma das seguintes formas:

(G1) $1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } \dots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n$



O seguinte teorema nos permitirá dar resposta a nosso problema no caso que Q seja do tipo (G1).

Teorema 3.14. *Se $A = kQ_A / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra gentle tal que o quiver Q_A é uma árvore e $n = |(Q_A)_0|$. Então existe uma sequência de k -álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m$ e uma sequência de módulos inclinantes $T_{A_0}^0, T_{A_1}^1, \dots, T_{A_{m-1}}^{m-1}$ tal que*

$$A_{j+1} = \text{End}(T_{A_j}^j) \quad \text{ou} \quad A_{j+1} = \left(\text{End}(T_{A_j}^j) \right)^{op}$$

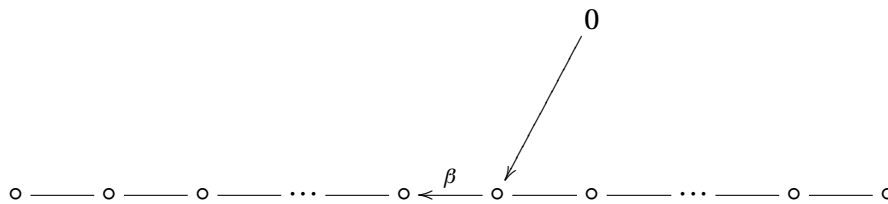
para $j \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ e A_m é hereditária do tipo \mathbb{A}_n .

Demonstração: Ver [ASS06] (p. 393).

□

Proposição 3.15. *Se $A = kQ_A / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra gentle com $\text{rad}^2 A = 0$ tal que o quiver Q_A é do tipo (G1) e $\beta \in Q_1$ tal que $M(\beta) \in \Sigma$, então $A[M(\beta)]$ é hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_{n+1} , onde $n = |(Q_A)_0|$.*

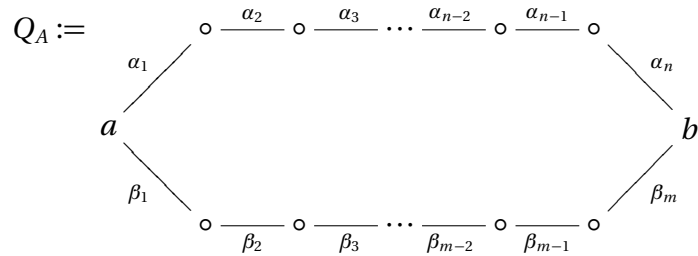
Demonstração: É imediato do teorema anterior e de [Hap88] (p. 113), pois claramente $Q_{A[M(\beta)]}$ é uma árvore e $A[M(\beta)]$ é uma k -álgebra gentle



□

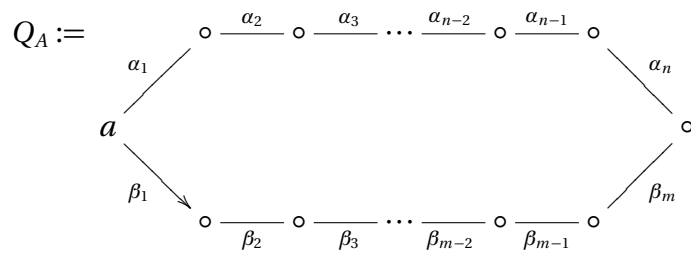
Observemos que pelo teorema (1.3) uma álgebra de Nakayama com radical quadrado zero é uma álgebra Gentle, o qual implica que a proposição anterior é mais uma demonstração do teorema (3.8).

Observação 3.2. Agora, consideremos $A = kQ_A / \langle \rho \rangle$ uma k -álgebra Gentle com $rad^2 A = 0$ tal que o quiver Q_A é do tipo (G2) e $\beta \in (Q_A)_1$ tal que $M(\beta) \in \Sigma$

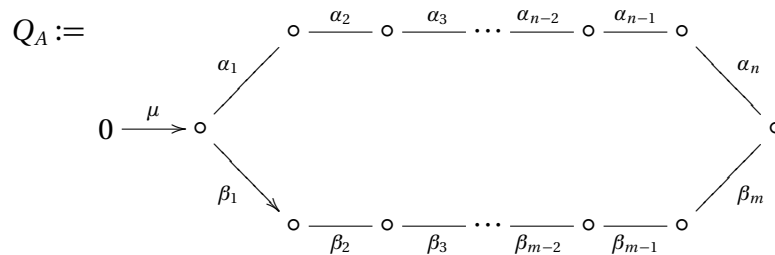


dado que estamos interessados só no caso que A seja hereditária por partes, então pelo teorema (4.5) o quiver Q_A é graduável, isto implica que o número de flechas é par, assim sem perda de generalidade, podemos assumir que $m = n$.

Como o quiver é graduável sem perda de generalidade suponhamos que $\beta = \beta_1$ e



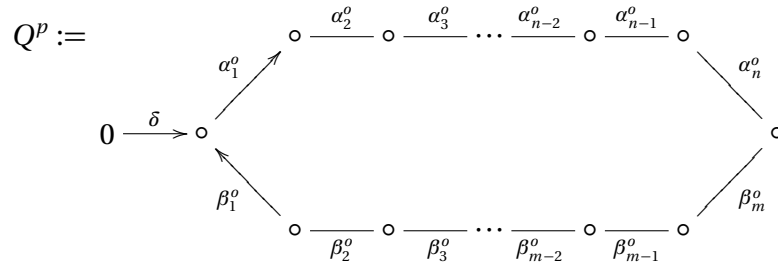
então, segue do teorema (3.13) que $D^b(A[M(\beta)]) \simeq D^b(kQ_A^{op}[N_{p^o}])$, onde p é caminho reto de comprimento maximal $p = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ com $s(p) = s(\beta)$ e $\alpha_1 \neq \beta$. Dado que $A[M(\beta)] = kQ_{A[M(\beta)]} / \langle \rho' \rangle$, onde



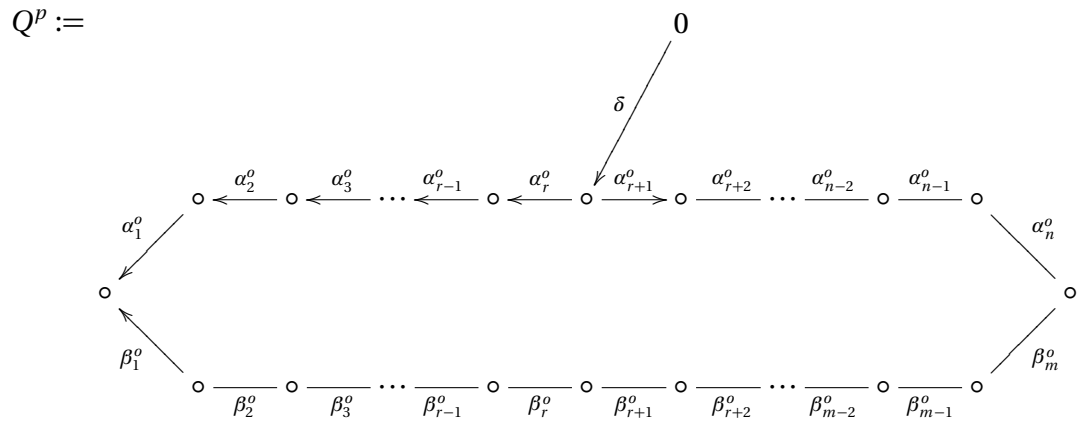
$$\rho' := \begin{cases} \rho \cup \{\mu\alpha_1, \mu\beta_1\beta_2\}, & \text{se } s(\alpha_1) = s(\beta), s(\beta_2) = e(\beta_1) \\ \rho \cup \{\mu\alpha_1\}, & \text{se } s(\alpha_1) = s(\beta), s(\beta_2) \neq e(\beta_1) \\ \rho \cup \{\mu\beta_1\beta_2\}, & \text{se } s(\alpha_1) \neq s(\beta), s(\beta_2) = e(\beta_1) \\ \rho, & \text{se } s(\alpha_1) \neq s(\beta), s(\beta_2) \neq e(\beta_1) \end{cases}$$

Portanto temos que

1. Se $s(\alpha_1) \neq s(\beta)$, então $N_{p^o} = S_{s(\alpha_1^o)}$ e assim $A[M(\beta)]$ é derivadamente equivalente a $kQ_A^{op}[N_{p^o}] := kQ^p / \langle \delta \alpha_1^o \rangle$, onde



2. Se $s(\alpha_1) = s(\beta)$, então $A[M(\beta)]$ é derivadamente equivalente a $kQ_A^{op}[N_{p^o}] := kQ^p / \langle \delta \alpha_{r+1}^o \rangle$, onde



Dos dois casos anteriores podemos observar que a k -álgebra $kQ_A^{op}[N_{p^o}]$ está muito "próxima" de ser uma hereditária por partes, e é por isso que pode-se ver novamente que o funtor apresentado por *Bautista* e *Liu* em [BL] pode ser uma boa ferramenta para a procura da solução de nosso problema.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Funtor Especial

Este apêndice servirá para fixar a notação e alguns resultados do artigo de Bautista e Liu. Usaremos a notação do artigo [BL]. Usaremos fortemente o funtor definido neste artigo, pois este nos ajudará a ter uma boa aproximação à solução do nosso problema no caso que álgebra seja *Gentle*.

4.1.1 O Recobrimento Minimal Graduável de um Quiver

Notação 4.1. Sejam Q um quiver e a um vértice em Q . Consideremos os seguintes conjuntos

1. $a^+ := \{\alpha \in Q_1 / s(\alpha) = a\}$.
2. $a^- := \{\alpha \in Q_1 / e(\alpha) = a\}$.
3. Dizemos que Q é **localmente finito** se os conjuntos a^+ e a^- são finitos, para todo $a \in Q_0$.

Definição 4.1. Seja Q um quiver.

1. Um passeio p em Q é dito **fechado** se $s(p) = e(p)$.
2. Um passeio $p = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n$ em Q é dito **reduzido** se $p_i \neq p_{i+1}^{-1}, \forall i \in 1, 2, \dots, n-1$.
3. Um passeio p em Q é um **ciclo** se p fechado, reduzido e não é um passeio trivial.
4. Sejam $x, y \in Q_0$, denotemos por $Q(x, y)$ ao conjunto dos caminhos em Q de x para y .

Definição 4.2. *Sejam Q um quiver. Definamos o **grau** $\partial(p)$ de um passeio p como segue:*

$$\partial(p) := \begin{cases} 0, & \text{se } p \text{ é um passeio trivial} \\ 1, & \text{se } p \text{ é uma flecha} \\ -1, & \text{se } p \text{ é uma flecha inversa} \end{cases}$$

e estendemos esta aplicação para passeios arbitrários, definindo $\partial(uv) = \partial(u) + \partial(v)$ sempre que u e v sejam passeios tais que $s(v) = e(u)$.

Definição 4.3. *Sejam Q e Q' dois quivers. Um **morfismo de quivers** $f = (f_0, f_1) : Q \rightarrow Q'$ é dado por duas aplicações $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ e $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ tais que $s(f_1(\alpha)) = f_0(s(\alpha))$ e $e(f_1(\alpha)) = f_0(e(\alpha))$.*

Definição 4.4. *Um morfismo de quivers $\pi = (\pi_0, \pi_1) : \tilde{Q} \rightarrow Q$ é chamado **recobrimento de quiver** se verificar:*

1. π_0 é sobrejetor.
2. Para todo $x \in \tilde{Q}_0$ as aplicações

$$\begin{array}{ll} x^+ \longrightarrow \pi_0(x)^+ & x^- \longrightarrow \pi_0(x)^- \\ \alpha \longmapsto \pi_1(\alpha) & \alpha \longmapsto \pi_1(\alpha) \end{array}$$

são bijetoras.

Definição 4.5. *Dizemos que um quiver Q é **graduável** se todos os passeios fechados tem grau zero.*

Definição 4.6. *Seja Q um quiver graduável.*

1. *Dado que todos os passeios entre dois vértices x e y em Q tem o mesmo grau, denotemos este grau por $d(x, y)$.*
2. *Definamos a relação $x \sim y$ se, e somente se, $d(x, y) = 0$ a qual é uma relação de equivalência sobre Q_0 .*
3. *As classes de equivalência em Q_0 / \sim são chamadas **classes de graduação** de Q_0 .*
4. *Fixemos um vértice $a \in Q_0$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos o conjunto*

$$Q^n(a) := \{x \in Q_0 / d(a, x) = n\}.$$

Teorema 4.1. *Seja Q um quiver conexo. Então existe um quiver graduável \tilde{Q} e um recobrimento de quivers $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ o qual age injetivamente sobre cada classes de graduação de \tilde{Q} . O recobrimento $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ é único a menos de isomorfismos.*

Demonstração: Ver [BL], teoremas (1.3) e (1.4) (p. 3 – 4) e a observação da pagina 5.

□

Definição 4.7. *Definamos tanto ao recobrimento π , como ao quiver \tilde{Q} do teorema (4.1) como o **recobrimento graduável minimal** de Q .*

Observação 4.1. É claro que Q é graduável se, e somente se, π é um isomorfismo.

4.1.2 Representações de Quivers

Nesta seção, fixemos Q um quiver conexo, localmente finito.

Definição 4.8. *Seja Q um quiver.*

1. *Uma **k -representação** M de Q está dada por uma família de k -espaços vetoriais $M(x)$ para cada $x \in Q_0$ e uma família de k -transformações lineares $M(\alpha) : M(x) \rightarrow M(y)$, para cada $\alpha \in Q_1$.*
2. *Se M não é nulo, então definamos o **suporte** de M como o conjunto*

$$\text{Supp}(M) := \{x \in Q_0 / M(x) \neq 0\}.$$

3. *Dizemos que a k -representação M é **localmente de dimensão finita** se $\dim_k(M(x))$ é finita para todo $x \in Q_0$.*
4. *Dizemos que a k -representação M é de **dimensão finita** se*

$$\sum_{x \in Q_0} \dim_k(M(x))$$

é finita.

5. *Um morfismo $f : M \rightarrow N$ de k -representações de Q está dado por uma família de k -transformações lineares $f(x) : M(x) \rightarrow N(x)$ para cada $x \in Q_0$ tal que o seguinte*

diagrama comuta para toda $\alpha : x \longrightarrow y \in Q_1$

$$\begin{array}{ccc} M(x) & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(y) \\ f(x) \downarrow & & \downarrow f(y) \\ N(x) & \xrightarrow{N(\alpha)} & N(y) \end{array}$$

6. As k -representações de Q formam uma k -categoria hereditária abeliana a qual denotaremos por $\text{Rep } Q$.
7. A subcategoria plena de $\text{Rep } Q$ das representações localmente de dimensão finita será denotada por $\text{rep } Q$.
8. A subcategoria plena de $\text{rep } Q$ das representações de dimensão finita será denotada por $\text{rep}^b Q$.

Definição 4.9. *Seja Q um quiver. A álgebra de caminhos de Q sobre k (que denotaremos por kQ) tem como k -base o conjunto de caminhos em Q e tem a multiplicação induzida pela concatenação dos caminhos.*

Observação 4.2. *A categoria $\text{Rep } Q$ é equivalente com a categoria dos kQ -módulos à direita $\text{Mod}(kQ)$.*

Definição 4.10. *Sejam Q um quiver e $a \in Q_0$.*

1. *Definamos a k -representação P_a de Q da seguinte forma: Para um vértice $x \in Q_0$, o k -espaço vetorial $P_a(x)$ tem como base o conjunto dos caminhos de a para x ; e para cada flecha $\alpha : x \longrightarrow y$, a k -transformação linear*

$$\begin{aligned} P_a(\alpha): P_a(x) &\longrightarrow P_a(y) \\ p &\longmapsto P_a(\alpha)(p) := p\alpha \end{aligned}$$

2. *Dualmente, definamos a k -representação I_a de Q da seguinte forma: Para um vértice $x \in Q_0$, o k -espaço vetorial $I_a(x)$ tem como base o conjunto dos caminhos de x para a ; e para cada flecha $\alpha : x \longrightarrow y$, a k -transformação linear*

$$\begin{aligned} I_a(\alpha): I_a(x) &\longrightarrow I_a(y) \\ p &\longmapsto I_a(\alpha)(p) := \begin{cases} q, & \text{se } p = q\alpha \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Se $M \in \text{Rep } Q$ e V é um k -espaço vetorial, então o produto tensorial é definida da seguinte forma: Para um vértice $x \in Q_0$, o k -espaço vetorial $(M \otimes_k V)(x) := M(x) \otimes_k V$; e para cada flecha $\alpha : x \longrightarrow y$, a k -transformação linear $(M \otimes_k V)(\alpha) := M(\alpha) \otimes_k 1_V$.

Observação 4.3. Para cada vértice $a \in Q_0$ temos que P_a e I_a são objetos em $\text{Rep } Q$ indecomponíveis projetivos e injetivos respectivamente.

Para o resto desta seção, assumiremos que Q é graduável e fixemos um vértice $a_0 \in Q_0$. Denotaremos por $Q^n := Q^n(a_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pelo lema (1.2) de [BL] (p. 3) tem-se que Q_0 é a união disjunta dos Q^n com $n \in \mathbb{Z}$ e cada flecha em Q é da forma $x \longrightarrow y$ com $(x, y) \in Q^n \times Q^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 4.11. Um objeto $M \in \text{Rep } Q$ é dito **limitado superiormente** se existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $M(x) = 0$ para todo $x \in Q^n$ com $n \geq r$.

Observação 4.4. Pelo item (4) do lema (1.2) de [BL] (p. 3) tem-se que a definição anterior não depende da escolha do vértice a_0 . Denotemos respectivamente por Rep^-Q e rep^-Q às subcategorias plenas de $\text{Rep } Q$ e $\text{rep } Q$ respectivamente formadas pelas representações limitadas superiormente.

Definição 4.12. Sejam $M \in \text{Rep } Q$ e $n \in \mathbb{Z}$. Definamos um objeto $M^{\leq n}$ em Rep^-Q da seguinte forma: Para cada $x \in Q_1$ temos

$$M^{\leq n}(x) := \begin{cases} M(x), & \text{se } x \in Q^m \text{ com } m \leq n \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

e para cada $\alpha \in Q_1$

$$M^{\leq n}(\alpha) := \begin{cases} M(\alpha), & \text{se } s(\alpha) \in Q^m \text{ com } m < n \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Definição 4.13. Seja $M \in \text{Rep}^-Q$ e $n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que M é **injetivo n -truncado** se

$$M^{\leq n} \cong \bigoplus_{x \in Q^n} I_x \otimes_k V_x$$

com V_x um k -espaço vetorial, ou equivalentemente, $M^{\leq n}$ é injetivo com

$$\text{soc}(M^{\leq n}) = \bigoplus_{x \in Q^n} M(x).$$

Além disso, M é chamado **injetivo truncado** se M é injetivo n -truncado para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 4.5. Note que uma k -representação de dimensão finita de Q é um injetivo truncado. Além disso, do lema (1.2) (p. 3) do lema (2.4) (p. 9) de [BL] tem-se que as definições anteriores não dependem da escolha do vértice a_0 .

4.1.3 O Funtor

Notação 4.2. Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Denotemos por:

1. $A\text{-Mod}$ à categoria dos A -módulos à esquerda.
2. $A\text{-mod}$ à categoria dos A -módulos à esquerda finitamente gerados.
3. $A\text{-Proj}$ à subcategoria plena de $A\text{-Mod}$ dos A -módulos projetivos.
4. $A\text{-proj}$ à subcategoria plena de $A\text{-mod}$ dos A -módulos projetivos.
5. $D^b(A)$ à categoria derivada de $C^b(A\text{-mod})$, chamada **Categoria Derivada Limitada** de A .

Observação 4.6. O funtor que envia a cada complexo limitado em $A\text{-mod}$ a sua resolução projetiva, induz uma equivalência de categorias trianguladas de $D^b(A)$ para $K^{-,b}(A\text{-proj})$. Escrevemos a quasi-inversa desta equivalência como $E : K^{-,b}(A\text{-proj}) \longrightarrow D^b(A)$. Observemos que $E(P^\bullet) = P^\bullet$ para cada $P^\bullet \in K^{-,b}(A\text{-proj})$.

Definição 4.14. Seja A uma k -álgebra de dimensão finita.

1. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $A\text{-Mod}$ é dito **morfismo radical** se $\text{Im}(f) \subseteq \text{rad}(Y)$.
2. Um complexo X^\bullet em $A\text{-Mod}$ é dito **complexo radical** se d_X^n é um morfismo radical, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. Para uma subcategoria plena \mathcal{A} de $A\text{-Mod}$, definamos $RC^{-,b}(\mathcal{A})$ como a subcategoria plena de $C^{-,b}(\mathcal{A})$ dos complexos radicais.
4. Definamos o funtor projeção $G : RC^{-,b}(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{-,b}(\mathcal{A})$ o qual age identicamente sobre os objetos e envia cada morfismos f^\bullet de $RC^{-,b}(\mathcal{A})$ à classe de homotopia de f^\bullet .

Observação 4.7. Para o resto desta seção consideremos:

1. $A = kQ / \langle \rho \rangle$ é uma k -álgebra conexa, elementar com $\text{rad}^2 A = 0$.

2. Para cada $a \in Q_0$, denotemos $P[a] = Ae_a$, onde $e_a = \epsilon_a + \langle \rho \rangle$ e $S[a] = P[a]/\text{rad } P[a]$.
3. Para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q , $P[\alpha] : P[a] \rightarrow P[b]$ denota a multiplicação à direita por $\bar{\alpha} = \alpha + \langle \rho \rangle$ e para um caminho trivial ϵ_a , $P[\epsilon_a] = 1_{P[a]}$.
4. Fixar o recobrimento minimal graduável $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ de Q .
5. Escolhamos um vértice $\tilde{x} \in \tilde{Q}_0$.
6. Denotar $\tilde{Q}^n = \tilde{Q}^n(\tilde{x})$, se segue do lema (1.5) de [BL] (p. 5) que todos os \tilde{Q}^n são finitos e as flechas em \tilde{Q} são da forma $x \rightarrow y$ com $(x, y) \in \tilde{Q}^n \times \tilde{Q}^{n+1}$ para algum n .
7. Denotar $u^\pi = \pi(u)$, para todo $u \in \tilde{Q}_0 \cup \tilde{Q}_1$.
8. Todos os produtos tensoriais são sobre o corpo k .

Agora definamos o funtor $F : \text{Rep } \tilde{Q} \rightarrow RC(A - \text{Proj})$ da seguinte forma: Seja $M \in \text{Rep } \tilde{Q}$ e construamos o complexo radical $F(M)^\bullet \in A - \text{Proj}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ as componentes são

$$F(M)^n := \bigoplus_{x \in \tilde{Q}^n} P[x^\pi] \otimes M(x)$$

e os diferenciais $d_{F(M)}^n : F(M)^n \rightarrow F(M)^{n+1}$ são as aplicações A -lineares dadas pela matrix $(d_{F(M)}^n(x, y))_{(x, y) \in \tilde{Q}^n \times \tilde{Q}^{n+1}}$, onde

$$d_{F(M)}^n(x, y) := \sum_{\alpha \in \tilde{Q}(x, y)} P[\alpha^\pi] \otimes M(\alpha) : P[x^\pi] \otimes M(x) \rightarrow P[y^\pi] \otimes M(y)$$

Agora, seja $f : X \rightarrow Y$ em $\text{Rep } \tilde{Q}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos

$$F(f)^n := \bigoplus_{x \in \tilde{Q}^n} 1_{P[x^\pi]} \otimes f(x) : F(M)^n \rightarrow F(N)^n$$

Dado que $\text{rad}^2 A = 0$, tem-se que o funtor F está definido de $\text{Rep } \tilde{Q}$ a $RC(A - \text{Proj})$ e este funtor é dito **induzido do recobrimento** $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$.

Reparemos que para $M \in \text{Rep } \tilde{Q}$, é claro que $F(M)^\bullet \in RC^-(A - \text{Proj})$ se, e somente se, $M \in \text{Rep}^- \tilde{Q}$.

Proposição 4.2. *Um objeto $M \in \text{Rep}^- \tilde{Q}$ é injetivo truncado se, e somente se, o complexo $F(M)^\bullet$ tem cohomologia limitada.*

Demonstração: Ver [BL] (p. 18). □

As subcategorias plenas de representações injetivas truncadas de $Rep^{-\tilde{Q}}$ e $rep^{-\tilde{Q}}$ serão denotadas por $Rep^{-,i}\tilde{Q}$ e $rep^{-,i}\tilde{Q}$, respectivamente. Pela proposição (4.2) temos que o funtor $F : Rep\tilde{Q} \longrightarrow RC(A - Proj)$ induz os funtores $Rep^{-,i}\tilde{Q} \longrightarrow RC^{-,b}(A - Proj)$ e $rep^{-,i}\tilde{Q} \longrightarrow RC^{-,b}(A - proj)$ os quais por abuso de notação, serão denotados por F .

Agora, consideremos o funtor $\mathcal{F} := EGF : rep^{-,i}\tilde{Q} \longrightarrow D^b(A)$

$$\mathcal{F} : rep^{-,i}\tilde{Q} \xrightarrow{F} RC^{-,b}(A - proj) \xrightarrow{G} K^{-,b}(A - proj) \xrightarrow{E} D^b(A)$$

Observação 4.8. $\mathcal{F}|_{Rep\tilde{Q}} = F$.

e estendamos este funtor \mathcal{F} a um funtor exacto de categorias trianguladas

$$\widehat{\mathcal{F}} : D^b(rep^{-,i}\tilde{Q}) \longrightarrow D^b(A)$$

Para este objetivo, primeiro construamos o funtor $\widehat{F} : C^b(rep^{-,i}\tilde{Q}) \longrightarrow C^{-,b}(A - proj)$ da seguinte forma: Seja $M^\bullet \in C^b(rep^{-,i}\tilde{Q})$

$$M^\bullet := \cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d_M^{n-1}} M^n \xrightarrow{d_M^n} M^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Aplicando F a cada componente de M^\bullet , obtemos um bicomplexo $F(M^\bullet)^\bullet$ em $A - proj$

$$F(M^\bullet)^\bullet := \cdots \longrightarrow F(M^{n-1}) \xrightarrow{F(d_M^{n-1})} F(M^n) \xrightarrow{F(d_M^n)} F(M^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

portanto temos o diagrama anticomutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 F(M^{n+1}) = & \cdots \longrightarrow & F(M^{n+1})^{m-1} & \xrightarrow{d_l^{n+1,m-1}} & F(M^{n+1})^m & \xrightarrow{d_l^{n+1,m}} & F(M^{n+1})^{m+1} \longrightarrow \cdots \\
 \uparrow F(d_M^n) & & \uparrow d_c^{n,m-1} & & \uparrow d_c^{n,m} & & \uparrow d_c^{n,m+1} \\
 F(M^n) = & \cdots \longrightarrow & F(M^n)^{m-1} & \xrightarrow{d_l^{n,m-1}} & F(M^n)^m & \xrightarrow{d_l^{n,m}} & F(M^n)^{m+1} \longrightarrow \cdots \\
 \uparrow F(d_M^{n-1}) & & \uparrow d_c^{n-1,m-1} & & \uparrow d_c^{n-1,m} & & \uparrow d_c^{n-1,m+1} \\
 F(M^{n-1}) = & \cdots \longrightarrow & F(M^{n-1})^{m-1} & \xrightarrow{d_l^{n-1,m-1}} & F(M^{n-1})^m & \xrightarrow{d_l^{n-1,m}} & F(M^{n-1})^{m+1} \longrightarrow \cdots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

onde $d_c^{n,m} = (F(d_M^n))^m$ e $d_l^{n,m} = (-1)^n d_{F(M^n)}^m$. Portanto definamos $\widehat{F}(M^\bullet) \in C^-(A - proj)$ como o complexo total do bicomplexo $F(M^\bullet)$

$$\widehat{F}(M^\bullet) := Tot(F(M^\bullet))$$

Usando o lema *Acyclic Assembly Lemma* (2.7.3) de [Wei94] podemos afirmar que $\widehat{F}(M^\bullet)$ tem cohomologia limitada e portanto $\widehat{F}(M^\bullet) \in C^{-,b}(A - proj)$.

Agora para um morfismo $f^\bullet : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ em $C^b(rep^{-i}\tilde{Q})$, definimos o morfismo de complexos $\widehat{F}(f^\bullet) : \widehat{F}(M^\bullet) \rightarrow \widehat{F}(N^\bullet)$ como

$$\widehat{F}(f^\bullet)^n := \bigoplus_{i+j=n} (F(f^i))^j$$

Portanto, obtemos um funtor $\widehat{F} : C^b(rep^{-i}\tilde{Q}) \rightarrow C^{-,b}(A - proj)$ tal que

$$\widehat{F}(M) = F(M), \forall M \in rep^{-i}(\tilde{Q})$$

$$\widehat{F}(f) = F(f), \forall f \in rep^{-i}(\tilde{Q})$$

Por outro lado do lema (3.12) de [BL] pode-se afirmar que se f^\bullet é um quasi-isomorfismo em $C^b(rep^{-i}\tilde{Q})$, então $\widehat{F}(f^\bullet)$ é um quasi-isomorfismo em $C^{-,b}(A - proj)$ e por tanto pode-

mos concluir que existem funtores \tilde{F} e $\widehat{\mathcal{F}}$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} C^b(\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}) & \xrightarrow{p_{\tilde{Q}}} & K^b(\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}) & \xrightarrow{q_{\tilde{Q}}} & D^b(\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}) \\ \tilde{F} \downarrow & & \tilde{F} \downarrow & & \downarrow \widehat{\mathcal{F}} \\ C^{-,b}(A - \text{proj}) & \xrightarrow{p_A} & K^{-,b}(A - \text{proj}) & \xrightarrow{E} & D^{-,b}(A - \text{proj}) \end{array}$$

onde $p_{\tilde{Q}}$, p_A são os funtores projeção e $q_{\tilde{Q}}$ o functor de localização. Assim obtemos o functor $\widehat{\mathcal{F}} : D^b(\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}) \rightarrow D^b(A)$ que chamaremos de **functor induzido**.

Observação 4.9. $\widehat{\mathcal{F}}|_{\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}} = \mathcal{F}$.

Teorema 4.3. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, conexa, elementar com radical quadrado zero. Seja $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ o recobrimento minimal graduável do quiver ordinário Q de A , e seja $\widehat{\mathcal{F}} : D^b(\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}) \rightarrow D^b(A)$ o functor induzido. Então o $\widehat{\mathcal{F}}$ é uma equivalência de categorias trianguladas se, e somente se, Q é graduável.*

Demonstração: Ver [BL] (p. 22). □

Observação 4.10. Se Q é um quiver finito sem ciclos orientados, então $\text{rep}^{-,i}Q = \text{rep} Q$ e $C^{-,b}(A - \text{proj}) = C^b(A - \text{proj})$.

Agora, se o quiver Q é graduável, então pela observação (4.1) temos que $\tilde{Q} = Q$, assim da observação (4.8) temos que $\mathcal{F}|_{\text{Rep} Q} = \mathcal{F}|_{\text{Rep} \tilde{Q}} = F$, e pela observação (4.9) temos que $\widehat{\mathcal{F}}|_{\text{rep} Q} = \widehat{\mathcal{F}}|_{\text{rep}^{-,i}\tilde{Q}} = \mathcal{F}$, portanto podemos concluir que

$$\widehat{\mathcal{F}}(M)^\bullet = F(M)^\bullet, \quad \forall M \in \text{rep} Q$$

Corolário 4.4. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, elementar com radical não zero e radical quadrado zero e seja Q quiver ordinário de A . Si Q é graduável, então $D^b(A) \simeq D^b(kQ^{op})$.*

Demonstração: Ver [BL] (p. 24). □

Havíamos apresentado o conceito de álgebra hereditária por partes num contexto mais geral no capítulo três. Apresentamos aqui o conceito no caso particular em que a categoria hereditária é uma categoria de módulos de uma álgebra hereditária. No contexto em que está inserido os resultados de Bautista e Liu, esta definição é suficiente.

Definição 4.15. *Uma k -álgebra de dimensão finita A é dita **Hereditária por Partes** se $D^b(A)$ é triangularmente equivalente a $D^b(H)$, onde H é uma k -álgebra hereditária de dimensão finita.*

Teorema 4.5. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, elementar com radical quadrado zero. Então A é hereditária por partes se, e somente se o quiver ordinário de A é graduável.*

Demonstração: Ver [BL] (p. 31). Aqui se usa o funtor induzido $\widehat{\mathcal{F}}$.

□

Referências Bibliográficas

- [ACPV08] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and M. Verdecchia. *Módulos Inclinantes y Álgebras Inclinadas*, volume 21 of *Notas de Álgebra y Análisis*. Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, 2008.
- [AR75] Maurice Auslander and Idun Reiten. Representation theory of Artin algebras. III. Almost split sequences. *Comm. Algebra*, 3:239–294, 1975.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [AS87] Ibrahim Assem and Andrzej Skowroński. Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n . *Math. Z.*, 195(2):269–290, 1987.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Ass07] I. Assem. *Algèbres et Modules*. Les Presses de l’Université d’Ottawa, 2007.
- [Aus74] Maurice Auslander. Representation theory of Artin algebras. I, II. *Comm. Algebra*, 1:177–268; *ibid.* 1 (1974), 269–310, 1974.
- [BB80] S. Brenner and M. C. R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Lecture Notes in Math.*, 832:103–169, 1980.
- [BD09] Viktor Bekkert and Yuriy Drozd. Derived categories for algebras with radical square zero. In *Algebras, representations and applications*, volume 483 of *Contemp. Math.*, pages 55–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [BL] R. Bautista and S. Liu. The bounded derived category of an algebra with radical squared zero. *Preprint*, <http://www.dmi.usherb.ca/~shiping/>.

- [BL03] Michael Barot and Helmut Lenzing. One-point extensions and derived equivalence. *J. Algebra*, 264(1):1–5, 2003.
- [BM03] Viktor Bekkert and Héctor A. Merklen. Indecomposables in derived categories of gentle algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 6(3):285–302, 2003.
- [BR87] M.C.R. Butler and C.M. Ringel. Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras. *Communications in Algebra*, 15(1-2):145–179, 1987.
- [Gab72] Peter Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103; correction, *ibid.* 6 (1972), 309, 1972.
- [Gab73] Peter Gabriel. Indecomposable representations. II. In *Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971)*, pages 81–104. Academic Press, London, 1973.
- [Gri87] Pierre-Paul Grivel. *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*. In A. Borel et al., *Algebraic D-modules, Perspectives in Mathematics, Vol. 2*, pages 1–108. Academic Press, Orlando, Florida, 1987.
- [Hap87] Dieter Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv.*, 62(3):339–389, 1987.
- [Hap88] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. ISBN 0-521-33922-7. x+208 pp.
- [HS10] Dieter Happel and Uwe Seidel. Piecewise hereditary Nakayama algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 13(6):693–704, 2010.
- [Mon10] Germán Benitez Monsalve. *Categorías Trianguladas y Derivadas*. Monografía. Universidad de Antioquia, UdeA, 2010.
- [Pic10] Rogério Carvalho Picanço. *Morfismos Irredutíveis na Categoria Derivada de Algebras Gentle*. <http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Tese027.pdf>. PhD thesis, 2010.
- [Rin84] C. M. Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, volume 1099 of *Lectures Notes in Math*. Springer, 1984.

- [SS07] D. Simson and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 72 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [SZ03] Jan Schröer and Alexander Zimmermann. Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras. *Math. Z.*, 244(3):515–530, 2003.
- [Ver77] J. L. Verdier. Catégories dérivées, état 0. *Springer Lecture Notes*, 569:262–311, 1977.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN 0-521-43500-5; 0-521-55987-1. xiv+450 pp.