

VIVIANNE LUIZA COSTA RODRIGUES

PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS POR  
MEIO DA FORMULAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

CURITIBA

2012

**VIVIANNE LUIZA COSTA RODRIGUES**

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAIS POR  
MEIO DA FORMULAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO DO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. José Antonio Marques Carrer

**CURITIBA**

**2012**

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela Sua fidelidade e Seu infinito amor, ao Senhor Jesus pela remissão dos meus pecados e ao Espírito Santo por ter me dado graça, paz e sabedoria para concluir este trabalho.

Ao meu esposo Julian, pelo amor, pelo cuidado e por estar junto a mim nos momentos mais difíceis.

À minha mãe Regina, por tudo o que tem feito por mim desde o meu nascimento.

Ao meu padrasto Jamil, pelo incentivo e ajuda financeira nos estudos.

Ao meu irmão Junior, pelo carinho e pelo apoio que sempre me deu.

Ao meu orientador Prof. Carrer, pela confiança, pela paciência e por acreditar no meu potencial.

Ao Prof. Nelson Dias, pela ajuda na disciplina Introdução à Mecânica do Contínuo.

À secretária do PPGMNE Maristela, que esteve sempre pronta a me ajudar com muita presteza, simpatia e dedicação.

Aos meus colegas do CESEC, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta obra.

À CAPES, pelo apoio financeiro, de extrema importância para a realização deste trabalho.

Ao senhor Jorge Mayorquim, por me estimular a entrar no programa e pelas boas recomendações.

Aos meus *nonnos*, Luiza e Idalino, às minhas tias, Nani, Rose e Sueli e aos meus primos, Anderson, Simone e Jaqueline, pelo interesse demonstrado e pelo apoio que sempre me deram.

Aos meus sogros, Vânia e Amantino, pelo carinho, incentivo e ajuda neste período.

Aos meus amigos da Comunhão Cristã Abba, pelas orações constantes acerca deste trabalho.

*”Para tudo há uma ocasião certa; há um tempo certo para cada propósito debaixo do céu: Tempo de nascer e tempo de morrer, tempo de plantar e tempo de arrancar o que se plantou, tempo de matar e tempo de curar, tempo de derrubar e tempo de construir, tempo de chorar e tempo de rir, tempo de prantejar e tempo de dançar, tempo de espalhar pedras e tempo de ajuntá-las, tempo de abraçar e tempo de se conter, tempo de buscar e tempo de desistir, tempo de guardar e tempo de jogar fora, tempo de rasgar e tempo de costurar, tempo de calar e tempo de falar, tempo de amar e tempo de odiar, tempo de lutar e tempo de viver em paz.”*

***Eclesiastes 3.1-8***

# Sumário

Lista de Figuras.....	vii
Lista de Siglas .....	x
Lista de Símbolos .....	xi
Resumo.....	xiv
Abstract .....	xv
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica .....	1
1.1.1 O Método dos Elementos de Contorno .....	2
1.1.2 Propagação de Ondas.....	4
1.2 Objetivo .....	8
1.3 Organização .....	8
<b>2 O MEC-DT APLICADO À EQUAÇÃO DA ONDA.....</b>	<b>9</b>
2.1 A Equação da Onda Unidimensional.....	9
2.2 A Formulação do MEC-DT .....	10
2.2.1 A Solução Fundamental Dependente do Tempo .....	13
<b>3 INTEGRAIS DE DOMÍNIO.....</b>	<b>17</b>
3.1 Integrais de Domínio para Valores do Contorno.....	17
3.2 Integrais de Domínio para os Pontos Internos.....	22

<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>26</b>
4.1	Exemplo 1 - Barra com Condições de Contorno Prescritas	26
4.1.1	Estudo Paramétrico	30
4.2	Exemplo 2 - Barra com Deslocamento Inicial Prescrito	30
4.3	Exemplo 3 - Barra com Velocidade Inicial Prescrita	33
4.4	Exemplo 4 - Barra com Condições de Contorno Variáveis no Tempo	36
4.4.1	Caso 1	37
4.4.2	Caso 2	42
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>52</b>
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	53
	Referências	54
	Apêndice A - Dedução da Equação da Onda Unidimensional	59
	Apêndice B - O Delta de Dirac e a Função de Heaviside	63
	Apêndice C - Solução Fundamental Dependente do Tempo	66

## Lista de Figuras

Figura 1	Domínio contínuo para o discreto .....	2
Figura 2	Discretização em elementos finitos .....	2
Figura 3	Discretização em elementos de contorno (caso bidimensional) .....	3
Figura 4	Domínio $\Omega$ e contorno $\Gamma$ de um problema genérico .....	10
Figura 5	Célula definida por $x = L_1$ e $x = L_2$ .....	17
Figura 6	Frente de onda: $L_1 < ct < L_2$ .....	18
Figura 7	Frente de onda: $L_2 < ct$ .....	18
Figura 8	Esquema para integrações da célula quando $\xi = L$ .....	19
Figura 9	Frente de onda: $L_1 > L - ct$ .....	20
Figura 10	Domínio com ponto interno .....	22
Figura 11	Elemento para $L_2 < \xi < L$ .....	24
Figura 12	Barra com condições de contorno prescritas .....	27
Figura 13	Deslocamento em $x = L$ .....	27

Figura 14	Reação no apoio da barra em $x = 0$ .....	28
Figura 15	Ausência do fenômeno de Gibbs na solução MEC-DT .....	29
Figura 16	Deslocamento nos pontos internos .....	29
Figura 17	Deslocamento em $x = L$ .....	31
Figura 18	Reação ao apoio da barra em $x = 0$ .....	32
Figura 19	Deslocamento nos pontos internos .....	33
Figura 20	Deslocamento em $x = L$ .....	34
Figura 21	Reação no apoio da barra em $x = 0$ .....	35
Figura 22	Deslocamento nos pontos internos .....	36
Figura 23	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	37
Figura 24	Reação no apoio em $x = 0$ .....	38
Figura 25	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	39
Figura 26	Reação no apoio em $x = 0$ .....	40
Figura 27	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	41
Figura 28	Deslocamento em $x = 0$ .....	42

Figura 29	Deslocamento em $x = L$ .....	43
Figura 30	Reação no apoio em $x = 0$ .....	44
Figura 31	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	45
Figura 32	Deslocamento em $x = L$ .....	46
Figura 33	Reação no apoio em $x = 0$ .....	47
Figura 34	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	48
Figura 35	Deslocamento em $x = L$ .....	49
Figura 36	Reação no apoio em $x = 0$ .....	50
Figura 37	Deslocamento em $x = 1,0$ .....	51
Figura 38	Tensões na barra .....	59
Figura 39	Segmento de corda tensionada .....	60
Figura 40	Função de Heaviside .....	64
Figura 41	Definição da função de Heaviside .....	65

## Lista de Siglas

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC-DT	Método dos Elementos de Contorno no Domínio do Tempo
MEC-D	Método dos Elementos de Contorno de Domínio
MEC-DR	Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade
EDP	Equação Diferencial Parcial

## Lista de Símbolos

$X$	Vetor de coordenadas $x$ , $y$ e $z$
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$c$	Velocidade de propagação da onda
$\Omega$	Domínio do problema
$\Gamma$	Contorno do problema
$\Gamma_u$	Contorno em $u = \bar{u}$
$\Gamma_p$	Contorno em $p = \bar{p}$
$n$	Normal ao contorno na direção $x$
$u(x, t)$	Potencial / Deslocamento
$p(x, t)$	Fluxo / Reação no apoio da barra
$L$	Limite superior / Comprimento da barra
$\bar{w}$ e $\bar{w}$	Funções de ponderação
$R_u$	Resíduo em $\Gamma_u$
$R_p$	Resíduo em $\Gamma_p$
$x$	Ponto campo
$t$	Tempo
$\xi$	Ponto fonte
$\tau$	Tempo anterior a $t$
$u_0^*$	$u^*$ em $\tau = 0$
$v_0^*$	$p^*$ em $\tau = 0$
$p^*$	$\frac{du^*}{dn}$
$r$	$ x - \xi $
$u_0(x)$	Deslocamento inicial
$v_0(x)$	Velocidade inicial

$I_v$ e $I_u$	Integrais de domínio
$\Delta L$	$ L_1 - L_2 $
$L_1$	Valor inicial da célula
$L_2$	Valor final da célula
$ct$	Frente de onda incidente
$\alpha$	$ct$ quando $L_1 < ct < L_2$ ou $L_2$ quando $L_2 < ct$
$\beta$	$L - ct$ quando $L(\text{ou } \xi) - L_2 < ct < L(\text{ou } \xi) - L_1$ ou $L_1$ quando $L(\text{ou } \xi) - L_1 < ct$
$\eta$	$\frac{c\Delta t}{L}$
$\phi$	$\frac{cn\pi}{L}$ ou $\frac{cn\pi}{2L}$
$\psi$	$\frac{\pi}{L}$ ou $\frac{\pi}{2L}$ ou $\frac{\pi}{3L}$
$A$	Seção transversal
$E$	Módulo de elasticidade
$\rho$	Massa específica
$T_x$	Tensão
$F$	Força resultante
$F_1$ e $F_2$	Forças de tensão nas extremidades da corda
$\theta_1$ e $\theta_2$	Ângulos entre a corda e a horizontal
$S$	Tangente do ângulo entre a corda e a horizontal
$S_1$ e $S_2$	Coefficientes angulares em cada extremidade do segmento de corda
$\Delta S$	Variação da inclinação
$m_0$	Massa da corda
$\mu$	Densidade linear da corda
$\Delta x$	Comprimento aproximado da corda
$a_0$	Aceleração da corda
$\delta_n(x)$	Função de distribuição
$f(x)$	Função qualquer
$x'$	Ponto sobre o eixo $x$

$\delta(x - x')$  Delta de Dirac

$H(x - x')$  Função de Heaviside

$\epsilon$  Raio na equação paramétrica do valor principal

## Resumo

O estudo em questão é baseado no desenvolvimento da formulação MEC-DT (com DT significando Domínio do Tempo) para a solução do problema de propagação de ondas unidimensionais, utilizando a solução fundamental dependente do tempo. Diferentes condições iniciais e de contorno são testadas na análise de 4 exemplos, utilizando uma barra unidimensional de comprimento  $L$ . Pode-se observar que o MEC-DT produz resultados eficazes em termos de precisão numérica e computacional, tendo em vista a exatidão das soluções numéricas quando comparadas com as soluções analíticas correspondentes em cada exemplo abordado.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno; Ondas Unidimensionais; Condições Iniciais.

## Abstract

The study in question is based on the development of DT-BEM (DT meaning Time Domain) formulation to solve the problem of one-dimensional wave propagation using a time-dependent fundamental solution. Different initial and boundary conditions are tested in the analysis of 4 examples, using a one-dimensional bar of length  $L$ . It can be observed that the DT-BEM produces effective results in terms of numerical and computational precision, in view of the accuracy of the numerical solutions when compared with the corresponding analytical solutions in each example discussed.

**Key-words:** Boundary Element Method; Wave Unidimensional; Initial Conditions.

# 1 INTRODUÇÃO

Um fenômeno físico é geralmente descrito por um sistema de equações diferenciais com condições de contorno e condições iniciais apropriadas. Um sistema de equações diferenciais é constituído por um domínio contínuo com infinitos graus de liberdade. Normalmente, devido à geometria complexa do meio contínuo, não é possível encontrar soluções analíticas para o sistema. Recorre-se então, aos métodos numéricos, onde as variáveis que constituem os infinitos graus de liberdade são substituídas por variáveis com um número finito de graus de liberdade, as quais são determinadas a partir da solução de um sistema de equações algébricas.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

O Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) são os métodos numéricos mais conhecidos. No MDF o domínio contínuo do problema é substituído por pontos discretos ou nós (Figura 1). As derivadas que aparecem na equação original são aproximadas por expansões truncadas da série de Taylor e a aplicação destas fórmulas aos pontos discretos gera um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 2006).

O MEF é um método baseado tanto em princípios variacionais quanto em expressões de resíduos ponderados. Consiste em dividir o domínio do problema em subdomínios de dimensões finitas chamados elementos finitos, conectados por um número finito de nós (Figura 2). Funções simples são aplicadas em cada elemento e um sistema de equações algébricas é formado. A solução deste sistema fornece os valores das incógnitas

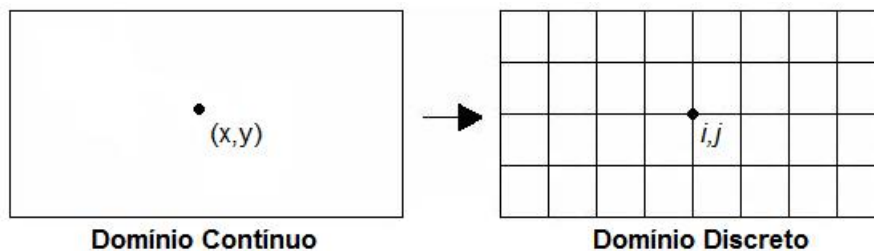


Figura 1: Domínio contínuo para o discreto

do problema em cada nó. O MEF é eficiente na análise de problemas com geometria complexa, porém, em problemas envolvendo domínio infinito ou semi-infinito a modelagem se torna difícil, uma vez que é necessário um grande número de elementos para a discretização do domínio (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 2006).

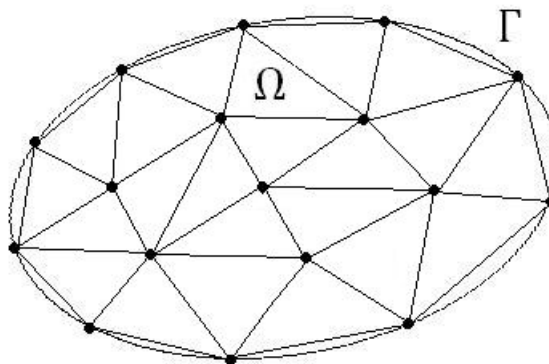


Figura 2: Discretização em elementos finitos

### 1.1.1 O Método dos Elementos de Contorno

Outra alternativa é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), uma técnica numérica que consiste em transformar a equação diferencial que descreve o problema em uma equação integral que relaciona valores do contorno. Em seguida, a equação integral é resolvida numericamente a partir da discretização do contorno em segmentos (caso bidimensional) ou superfícies (caso tridimensional) denominados elementos de contorno, conectados por pontos discretos ou nós (Figura 3) os quais conduzem à forma discretizada da equação integral. Funções de interpolação são utilizadas para aproximar os valores das variáveis no contorno e condições de contorno são impostas em cada elemento. Uma vez que as integrais em cada elemento são validadas obtém-se um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores desconhecidos do contorno.

As incógnitas no domínio (pontos internos) são obtidas após o cálculo dos valores no contorno, pela aplicação direta da expressão geral da formulação do MEC (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989).

Uma das vantagens do MEC é que o método não requer a discretização do domínio (para problemas lineares), apenas do contorno, fazendo com que os resultados sejam mais precisos. Outra vantagem está na redução da dimensionalidade do problema, ou seja, em problemas bidimensionais apenas o contorno unidimensional do domínio necessita ser discretizado, enquanto que em problemas tridimensionais apenas a superfície do contorno é discretizada. Comparado ao MDF e ao MEF isso resulta em uma redução do esforço de modelagem computacional e um sistema algébrico de equações menor.

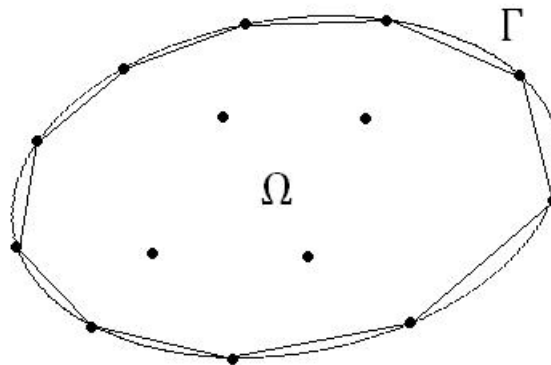


Figura 3: Discretização em elementos de contorno (caso bidimensional)

Outra característica do MEC é que para domínios infinitos ou semi-infinitos as condições de contorno são satisfeitas sem a necessidade de adotar artifícios especiais para reduzir o domínio físico a uma distância finita (ALIABADI, 2002).

Inúmeras técnicas têm sido testadas a fim de transformar a equação diferencial que descreve o problema em uma equação integral que relaciona valores do contorno. Estas técnicas podem ser empregadas de duas formas: usando a formulação direta do MEC, na qual as funções incógnitas presentes na formulação são variáveis físicas do problema, ou a formulação indireta do MEC, na qual as equações integrais são expressas em termos de uma solução singular unitária da equação diferencial original, utilizando-se variáveis fictícias distribuídas no contorno que, uma vez calculadas permitem obter variáveis físicas por simples integrações.

A primeira formulação direta do MEC foi desenvolvida para resolver problemas elásticos (RIZZO, 1967). A mesma técnica empregada por Rizzo foi estendida para resolver problemas elastodinâmicos, onde se fez uso da transformada de Laplace para se obter uma

resposta transiente <sup>1</sup> do sistema (CRUSE; RIZZO, 1968).

Os primeiros indícios dos problemas de instabilidade gerados pela formulação utilizando as integrais de contorno foram apontados por Cole, Kosloff e Minster quando aplicada aos problemas elastodinâmicos transientes (COLE; KOSLOFF; MINSTER, 1978).

Foi Brebbia em 1978 quem desenvolveu a formulação do MEC utilizando uma sentença de resíduos ponderados (BREBBIA, 1978). O Método das Funções de Green é empregado no desenvolvimento desta formulação, sendo uma base necessária para a solução da equação integral do problema singular equivalente, na variável que representa a função de ponderação existente na sentença, ou seja, a solução fundamental do operador diferencial do problema original é a função de ponderação da sentença de resíduos ponderados. Assim, o que antes se chamava “Método das Integrais de Contorno” passou a ser denominado de “Método dos Elementos de Contorno”.

Nardini e Brebbia em 1983 desenvolveram uma técnica importante para resolver problemas de ações de domínio <sup>2</sup>, a chamada Dupla Reciprocidade (NARDINI; BREBBIA, 1983). Esta técnica foi desenvolvida para evitar a necessidade de integração no domínio nos casos onde a solução empregada não é a solução fundamental do problema analisado. A técnica consiste na substituição da ação de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, transformando as integrais de domínio em integrais de contorno através da aplicação do Teorema da Divergência (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992).

Outras técnicas foram desenvolvidas a fim de melhorar a formulação. A técnica do Vetor de Galerkin, por exemplo, apresenta as integrais de domínio em termos das integrais de contorno utilizando uma solução fundamental de alta ordem e o Teorema da Divergência (PAULA; TELLES, 1989). Outra técnica, vista como uma generalização do Vetor de Galerkin, é a Múltipla Reciprocidade, que utiliza várias soluções fundamentais de alta ordem, ao invés de apenas uma (NOWAK, 1995).

### 1.1.2 Propagação de Ondas

O MEC tem uma diversidade de aplicações, abrangendo muitas áreas da Física e da Engenharia. O problema da propagação de ondas, objeto deste estudo, é um problema

---

<sup>1</sup>Um problema dinâmico ou em regime transiente é um problema em que a resposta do sistema muda com o tempo. Quando uma carga é aplicada sobre um sistema, seu efeito não se transmite instantaneamente a todo o sistema, ou seja, um ponto localizado fora da região da carga só é perturbado depois de decorrido certo tempo.

<sup>2</sup>Compreende qualquer tipo de força, fontes ou sorvedouros, incluindo os efeitos de inércia e outros que tipificam casos dinâmicos e transientes.

dinâmico, freqüentemente abordado no estudo de oscilações mecânicas, acústica, óptica e eletromagnetismo.

Os estudos de Thomas Young e Augustin Fresnel acerca da característica ondulatória da luz estimulou cientistas a estudar o fenômeno de propagação de ondas em corpos elásticos. Os primeiros estudos foram realizados por Poisson (POISSON, 1829) e mais tarde por Rayleigh (RAYLEIGH, 1885), Lamb, (LAMB, 1904) e Love (LOVE, 1911), (LOVE, 1944). Os trabalhos de Navier (NAVIER, 1827) e Cauchy (CAUCHY, 1829) também contribuíram consideravelmente para o assunto.

A primeira aplicação do MEC ao problema de propagação de ondas foi feita por Friedman e Shaw. Utilizando a solução direta das equações diferenciais hiperbólicas, os autores se concentraram na representação da equação integral de Kirchoff, considerada a representação matemática do princípio de Huygens<sup>3</sup> (FRIEDMAN; SHAW, 1962).

Muitas formulações foram apresentadas nos últimos anos demonstrando a eficiência e justificando o emprego do MEC para a solução de problemas que envolvem a variável “tempo”. Tais formulações dependem da solução fundamental empregada na sentença de resíduos ponderados e das aproximações feitas no espaço e no tempo. Uma discussão completa do MEC aplicado aos problemas dinâmicos é encontrada em (BESKOS, 1997) e (BESKOS, 2003).

Em 1983, Mansur desenvolveu uma formulação para o problema de propagação de ondas bidimensionais, utilizando a solução fundamental dependente do tempo. Esta formulação pode ser denominada MEC-DT, com DT significando Domínio do Tempo. Em problemas dependentes do tempo geralmente se observa que o processo de marcha no tempo considera cada passo de tempo como um problema novo e no final de cada intervalo de tempo os valores incógnitos são calculados para um número suficiente de pontos internos, os quais são utilizados como condições “pseudo-iniciais” na etapa de tempo seguinte, isto é, a equação integral do MEC é aplicada de 0 a  $\Delta t$ , de  $\Delta t$  a  $2\Delta t$ , assim por diante. Porém, Mansur empregou a propriedade da translação temporal para efetuar a integração no tempo. Assim, embora a integral sempre se inicie em  $t = 0$ , as únicas integrais que efetivamente são calculadas são aquelas no intervalo  $[0, \Delta t]$ . Por exemplo, ao se calcular a integral no intervalo  $[0, 2\Delta t]$  com  $t = 2\Delta t$  o que se faz é aproveitar a propriedade da translação temporal e, ao dividir o intervalo  $[0, 2\Delta t]$  em  $[0, \Delta t]$  e  $[\Delta t, 2\Delta t]$ , a integral no intervalo  $[\Delta t, 2\Delta t]$  é igual à integral calculada previamente no intervalo

---

<sup>3</sup>O princípio de Huygens afirma que cada ponto de uma frente de onda primária pode ser considerado como fonte de uma onda esférica secundária, e qualquer frente de onda secundária pode ser considerada como a envolvente das ondas esféricas geradas pelas fontes pontuais contidas na frente de onda primária.

$[0, \Delta t]$  com  $t = \Delta t$ . Mansur ainda mostrou que a adoção de passos de tempo pequenos poderia causar instabilidade, enquanto que passos de tempo muito grandes poderiam introduzir erros pela violação da condição de causalidade, principal propriedade da solução fundamental dependente do tempo (MANSUR, 1983).

Do ponto de vista matemático, a formulação MEC-DT é muito elegante e eficaz, uma vez que produz resultados com bastante precisão. Porém, estas características são contrabalanceadas pelo alto custo computacional exigido para calcular as integrais de convolução no tempo que aparecem nas equações integrais da formulação. Para superar esta dificuldade, alguns trabalhos, baseados no truncamento da integral, foram propostos: (DEMIREL; WANG, 1987), (MANSUR; SILVA, 1992), (SOARES-JR.; MANSUR, 2004), (CARRER; MANSUR, 2006). Os procedimentos para a obtenção das representações integrais em problemas de propagação de ondas utilizando a formulação MEC-DT, podem também ser encontrados em (DOMINGUEZ, 1994), (MANSUR; BREBBIA, 1982), (CARRER; MANSUR, 2002) e (CARRER; MANSUR, 1996).

Alguns pesquisadores empregaram um processo de marcha no tempo que não incrementa erros de integração. Tal processo é denominado  $\theta$ -Linear, procedimento que utiliza o princípio do método de Wilson (WILSON; FARHOOMAND; BATHE, 1973) na formulação do MEC no domínio do tempo. A técnica foi utilizada para resolver problemas bidimensionais de propagação da onda com o MEC e com o acoplamento MEC-MEF (YU et al., 1998a).

Outros trabalhos fazem uso da mesma técnica e, além disso, utilizam a formulação de Galerkin que, aplicada à equação da onda bidimensional, produzem bons resultados quando comparados à formulação direta do MEC (YU et al., 1998b), (YU; MANSUR; CARRER, 1999), (YU et al., 2000). Coda e Venturini, utilizando o mesmo método, obtiveram melhorias na estabilidade pelo uso de uma solução fundamental tridimensional modificada (CODA; VENTURINI, 1996).

Autores recentes também fizeram uso deste método. Nishikava analisou a estabilidade de problemas no domínio do tempo governados pela equação da onda bidimensional e problemas elastodinâmicos tridimensionais. O objetivo concentrava-se na implementação do processo de marcha no tempo  $\theta$ -Linear no domínio do espaço e do tempo (NISHIKAVA, 2002). Senna utilizou o mesmo método para descrever uma formulação bidimensional no domínio do tempo que emprega a solução fundamental correspondente a uma função constante no tempo (SENNA, 2003).

Outra forma de assegurar a estabilidade das integrais foi proposto por Siebrits e

Peirce, que discutiram o problema utilizando a formulação indireta do MEC e propuseram um esquema que denominaram “half-step”, melhorando substancialmente a estabilidade e a precisão; porém, seu estudo limitou-se apenas a domínios infinitos (PEIRCE; SIEBRITS, 1997).

De maneira alternativa, ao invés de utilizar a solução fundamental dependente do tempo, pode-se usar uma solução fundamental estática. A equação integral básica do MEC, neste caso, apresenta uma integral de domínio constituída pela solução fundamental multiplicada pela derivada segunda em relação ao tempo do potencial. Neste caso a formulação é chamada de MEC-D, com D significando Domínio (CARRER; MANSUR, 2004), (HATZIGEORGIU; BESKOS, 2002).

Outra formulação alternativa utiliza a técnica da Dupla Reciprocidade, na qual uma função de interpolação adequada transforma a integral de domínio em uma integral de contorno. Esta formulação é chamada de MEC-DR, com DR significando Dupla Reciprocidade (KONTONI; BESKOS, 1993), (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992), (AGNANTHARIS; POLYZOS; BESKOS, 1996), (AGNANTHARIS; POLYZOS; BESKOS, 1998).

A fim de garantir estabilidade nas integrais de domínio, são adotados alguns processos de marcha no tempo. O Método de Houbolt é obtido dos polinômios cúbicos de Lagrange (HOUBOLT, 1950). É um método de marcha no tempo atualmente em desuso no MEF, mas que tem sido muito bem empregado no MEC. Entre muitos processos de marcha no tempo apresentados pelo MEF, o Método de Newmark também tem sido bem empregado no MEC (NEWMARK, 1959). Este método em relação ao de Houbolt, produz um melhor controle da estabilidade das integrais, de acordo com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  presentes no desenvolvimento do método (BATHE, 1996), (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). Outros processos de marcha no tempo foram propostos, (CARRER; MANSUR, 2004), (SOUZA; CARRER; MARTINS, 2004), (CHIEN; CHEN; CHUANG, 2003); porém, a procura por outros métodos é uma tarefa que ainda merece atenção.

Neste trabalho, será estudado o problema de propagação de ondas unidimensionais utilizando a formulação MEC-DT. A principal característica desta formulação é que a única aproximação introduzida é no tempo, uma vez que a discretização da geometria (para meios homogêneos) resulta em apenas dois nós. O processo de marcha no tempo empregado é o mesmo utilizado por Mansur (MANSUR, 1983).

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho concentra-se em desenvolver a formulação MEC-DT para o problema de propagação de ondas unidimensionais. Em seguida, testar exemplos utilizando uma barra unidimensional de comprimento  $L$ , onde diferentes condições iniciais e de contorno são impostas. E finalmente, comparar as soluções obtidas pela formulação MEC-DT com as analíticas correspondentes em cada caso, verificando-se a eficácia do método.

## 1.3 Organização

O Capítulo 2 apresenta o desenvolvimento da formulação MEC-DT aplicada à equação da onda unidimensional. A expressão geral do MEC-DT é obtida.

No Capítulo 3 é feita uma análise das integrais de domínio para os valores do contorno e dos pontos internos.

O Capítulo 4 mostra 4 exemplos utilizando uma barra unidimensional de comprimento  $L$ . São testadas diferentes condições de contorno e condições iniciais. Os resultados obtidos no contorno e nos pontos internos são comparados às soluções analíticas correspondentes.

No Capítulo 5 são feitas as considerações finais acerca da formulação e são sugeridos possíveis trabalhos futuros.

## 2 O MEC-DT APLICADO À EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda escalar governa muitos fenômenos físicos tais como: movimentos transversais de cordas e membranas, movimentos longitudinais em barras e superfícies elásticas, entre outros. Neste capítulo discute-se a formulação MEC-DT aplicada à equação da onda escalar. Aqui, a equação da onda é reduzida a uma equação integral que relaciona valores do contorno. Para este propósito, uma sentença de resíduos ponderados é empregada.

### 2.1 A Equação da Onda Unidimensional

Sabe-se que a equação diferencial que governa o fenômeno de propagação de ondas lineares e não dispersivas é dada por

$$\frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(X,t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

onde  $u(X,t)$  é o deslocamento da onda dado em termos do vetor  $X=(x,y,z)$  e da variável tempo  $t$ . A constante  $c$  é a velocidade de propagação da onda. No caso unidimensional a equação básica que rege o fenômeno, num domínio  $\Omega$ , reduz-se a

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.2)$$

A dedução detalhada desta equação está no APÊNDICE A.

Para se obter uma solução particular da equação (2.2), correspondente a um problema específico, é necessário que sejam impostas as seguintes condições de contorno:

a) Essenciais ou de Dirichlet<sup>1</sup>

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) \quad \text{em } \Gamma_u; \quad (2.3)$$

b) Naturais ou de Neumann<sup>2</sup>

$$p(x,t) = \bar{p}(x,t) \quad \text{em } \Gamma_p; \quad (2.4)$$

com

$$p(x,t) = \frac{du(x,t)}{dn}, \quad (2.5)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$  é o contorno do problema e  $n$  é a normal ao contorno. De forma esquemática, para um problema genérico, ver Figura 4.

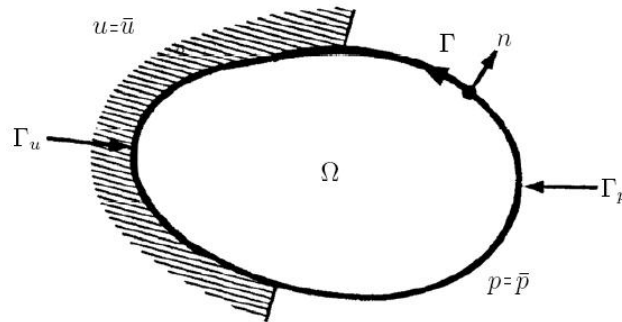


Figura 4: Domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  de um problema genérico

As condições iniciais em  $\Omega$  são

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \\ \dot{u}(x,0) &= \dot{u}_0(x) = v_0(x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

com

$$v_0(x) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0}. \quad (2.7)$$

## 2.2 A Formulação do MEC-DT

Sabe-se que a principal característica do MEC é: transformar a equação de domínio que rege o problema em uma integral de contorno. Para isso, faz-se uso de uma sentença de resíduos ponderados, onde a solução fundamental do operador diferencial do

<sup>1</sup>É dado o valor  $u|_{\Gamma}$  da solução sobre a fronteira  $\Gamma$  de uma região limitada  $\Omega$  (BRAGA, 2005).

<sup>2</sup>É dado o valor  $\frac{du}{dn}|_{\Gamma}$  da derivada normal da solução sobre a fronteira  $\Gamma$  de uma região limitada  $\Omega$  (BRAGA, 2005).

problema original é a função de ponderação.

Fazendo  $u(x,t) = u$  e  $p(x,t) = p$ , apenas para simplificar a notação, a equação (2.2) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.8)$$

Aplicando uma sentença de resíduos ponderados em (2.8), obtém-se

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) u^* d\Omega d\tau = \int_0^t \bar{w} R_u|_{\Gamma_u} d\tau + \int_0^t \bar{\bar{w}} R_p|_{\Gamma_p} d\tau, \quad (2.9)$$

para maiores detalhes sobre o Método dos Resíduos Ponderados, ver (ZIENKIEWICZ; MORGAN, 2006). Impondo os limites de integração espacial,  $[0, L]$ , e resolvendo o segundo membro tem-se

$$\int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) u^* dx d\tau = \int_0^t [\bar{w} R_u|_0 + \bar{\bar{w}} R_p|_L] d\tau, \quad (2.10)$$

onde  $\bar{w}$  e  $\bar{\bar{w}}$  são as funções de ponderação,  $R_u$  e  $R_p$  são os resíduos dados por

$$\begin{aligned} R_u &= u - \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u, \\ R_p &= p - \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p. \end{aligned} \quad (2.11)$$

No MEC,  $u$  é conhecido como potencial e  $p$ , sua derivada em relação à normal, é o fluxo. Substituindo (2.11) em (2.10), obtém-se

$$\int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* \right) dx d\tau = \int_0^t [\bar{w}(u - \bar{u})|_0 + \bar{\bar{w}}(p - \bar{p})|_L] d\tau. \quad (2.12)$$

Separando as integrais

$$\int_0^t \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx d\tau - \int_0^t \int_0^L \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* dx d\tau = \int_0^t \bar{w}(u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^t \bar{\bar{w}}(p - \bar{p})|_L d\tau. \quad (2.13)$$

Integrando por partes a primeira integral do lado esquerdo, obtém-se:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad (2.14)$$

e agora, integrando por partes a integral resultante:

$$\int_0^L \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u^*}{\partial x} u \Big|_0^L - \int_0^L u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx. \quad (2.15)$$

Logo

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u^* dx = u^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{\partial u^*}{\partial x} u \Big|_0^L + \int_0^L u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx. \quad (2.16)$$

De (2.5) sabe-se que

$$p = \frac{du}{dn}, \quad (2.17)$$

então

$$p = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dn}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.16) e esta em (2.13), tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau + \int_0^t \int_0^L u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx d\tau - \int_0^t \int_0^L \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* dx d\tau = \\ \int_0^t \bar{w}(u - \bar{u})|_0 dt + \int_0^T \bar{w}(p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Integrando por partes a integral que contém a derivada de segunda ordem de  $u$  em relação a  $\tau$  obtém-se:

$$\int_0^t \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* dt = \frac{1}{c^2} [u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} |_0^t - \int_0^t \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau]. \quad (2.20)$$

Integrando por partes a integral resultante:

$$\int_0^t \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{c^2} [\frac{\partial u^*}{\partial \tau} u|_0^t - \int_0^t u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} d\tau]. \quad (2.21)$$

Logo

$$\int_0^t \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* d\tau = \frac{1}{c^2} [u^* \frac{\partial u}{\partial \tau} |_0^t - \frac{\partial u^*}{\partial \tau} u|_0^t + \int_0^t u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} dx]. \quad (2.22)$$

De (2.6) sabe-se que

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} |_{\tau=0} = v_0(x), \quad (2.23)$$

então

$$\int_0^t \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} u^* d\tau = \frac{1}{c^2} [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x) + \int_0^t u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} dx]. \quad (2.24)$$

Substituindo em (2.19)

$$\begin{aligned} \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau + \int_0^t \int_0^L u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} dx d\tau - \int_0^L \frac{1}{c^2} [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x) + \int_0^t u \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2}] dx = \\ \int_0^t \bar{w}(u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^T \bar{w}(p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Arrumando a equação (2.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L (\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2}) u dx d\tau = \frac{1}{c^2} \int_0^L [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x)] dx \\ - \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau + \int_0^t \bar{w}(u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^T \bar{w}(p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$

No MEC, a função de ponderação é a solução do problema singular equivalente, isto é, é a solução fundamental do operador diferencial do problema original. Assim, as funções de ponderação  $\bar{w}$  e  $\bar{\bar{w}}$  são escolhidas de forma a simplificar a equação (2.26)

$$\bar{w} = -p^* \quad \text{e} \quad \bar{\bar{w}} = -u^*. \quad (2.27)$$

Fazendo as devidas substituições, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \right) u dx d\tau &= \frac{1}{c^2} \int_0^L [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x)] dx \\ &- \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau - \int_0^t p^* (u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^t u^* (p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Do lado esquerdo da igualdade foi obtida a equação da onda em termos de  $u^*$ . Logo, a função de Green para esta equação é

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau). \quad (2.29)$$

A solução de (2.29) pode ser interpretada como sendo o efeito no ponto campo  $x$  no instante  $t$  de uma fonte concentrada aplicada no ponto  $\xi$  num instante anterior  $\tau$ . Então, aplicando (2.29) em (2.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) u dx d\tau &= \frac{1}{c^2} \int_0^L [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x)] dx \\ &- \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau - \int_0^t p^* (u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^t u^* (p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando as propriedades do Delta de Dirac, ver APÊNDICE B, pode fazer:

$$\int_0^t \int_0^L \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) u(x, \tau) dx d\tau = u(\xi, t), \quad (2.31)$$

e a expressão (2.30) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \frac{1}{c^2} \int_0^L [-u_0^* v_0(x) + v_0^* u_0(x)] dx \\ &- \int_0^t (u^* p|_0^L - p^* u|_0^L) d\tau - \int_0^t p^* (u - \bar{u})|_0 d\tau + \int_0^t u^* (p - \bar{p})|_L d\tau. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Calculando as integrais restantes e rearranjando a expressão obtém-se:

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \int_0^t p^* u|_0 d\tau + \int_0^t p^* \bar{u}|_L d\tau - \int_0^t u^* p|_0 d\tau - \int_0^t u^* p|_L d\tau - \\ &\frac{1}{c^2} \int_0^L u_0^* v_0(x) dx + \frac{1}{c^2} \int_0^L v_0^* u_0(x) dx, \end{aligned} \quad (2.33)$$

que é a expressão geral do MEC-DT para o problema unidimensional. Em (2.33)  $u_0^*$  e  $v_0^*$  são  $u^*$  e  $p^*$  quando  $\tau = 0$ , respectivamente.

### 2.2.1 A Solução Fundamental Dependente do Tempo

Como dito anteriormente, a característica central da formulação MEC-DT é o emprego da solução fundamental dependente do tempo. Assim, para a equação (2.29) a

solução é:

$$u^*(x,t;\xi,\tau) = -\frac{c}{2}H(t-\tau)H[c(t-\tau) - |x-\xi|], \quad (2.34)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside.

No APÊNDICE C está apresentada a dedução da equação (2.34). Esta solução estabelece três propriedades importantes:

a) Causalidade

$$u^*(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{se} \quad c(t-\tau) < |x-\xi|; \quad (2.35)$$

b) Reciprocidade

$$u^*(x,t;\xi,\tau) = u^*(\xi, -\tau; x, -t); \quad (2.36)$$

c) Translação Temporal

$$u^*(x,t+t';\xi,\tau+t') = u^*(x,t;\xi,\tau); \quad (2.37)$$

Para encontrar  $p^*$  recorre-se à equação (2.5); assim:

$$p^* = \frac{du^*}{dn}; \quad (2.38)$$

então, para  $x > \xi$ ,  $x = L$  e  $\xi = 0$ , tem-se

$$\frac{du^*}{dn} = \frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{dx}{dn}, \quad (2.39)$$

com

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{c}{2}H(t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} H[c(t-\tau) - x] \quad (2.40)$$

e

$$\frac{dx}{dn} = 1. \quad (2.41)$$

Das propriedades do delta de Dirac e da função de Heaviside, ver APÊNDICE B:

$$H[c(t-\tau) - x] = 1 - H[x - c(t-\tau)] \quad (2.42)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} H[x - c(t-\tau)] = \delta[x - c(t-\tau)]. \quad (2.43)$$

Portanto, para  $x = L$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{c}{2}H(t-\tau)\delta[L - c(t-\tau)]. \quad (2.44)$$

Usando a seguinte propriedade do delta de Dirac:

$$\delta[L - c(t - \tau)] = \delta[c(t - \tau) - L] \quad (2.45)$$

obtém-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[c(t - \tau) - L]. \quad (2.46)$$

Para  $x < \xi$ ,  $x = 0$  e  $\xi = L$ , tem-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{c}{2} H(t - \tau) \frac{\partial}{\partial x} H[c(t - \tau) - (L - x)] \quad (2.47)$$

e

$$\frac{dx}{dn} = -1. \quad (2.48)$$

Usando as propriedades do delta de Dirac:

$$\frac{\partial}{\partial x} H[c(t - \tau) - (L - x)] = \delta[c(t - \tau) - (L - x)]. \quad (2.49)$$

Portanto, para  $x = 0$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[c(t - \tau) - L]. \quad (2.50)$$

A expressão (2.50) é igual à expressão (2.46), o que mostra que, tanto para  $x = 0$  quanto para  $x = L$ , as derivadas de  $u^*$  em relação à normal são iguais. De forma mais genérica, pode-se obter uma expressão única, para uma distância qualquer  $r$ , fazendo

$$r = |x - \xi| \quad (2.51)$$

e

$$u^* = -\frac{c}{2} H(t - \tau) H[c(t - \tau) - r]. \quad (2.52)$$

Desta forma

$$\frac{du^*}{dn} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{dr}{dx} \frac{dx}{dn}, \quad (2.53)$$

então

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{c}{2} H(t - \tau) \frac{\partial u^*}{\partial r} H[c(t - \tau) - r]. \quad (2.54)$$

Para  $x > \xi$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d(x - \xi)}{dx} = 1; \quad \frac{dx}{dn} = 1, \quad (2.55)$$

Para  $x < \xi$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d(\xi - x)}{dx} = -1; \quad \frac{dx}{dn} = -1, \quad (2.56)$$

Em (2.55) e em (2.56) observa-se que ambos resultam em

$$\frac{dr}{dx} \frac{dx}{dn} = 1. \quad (2.57)$$

Logo

$$\frac{du^*}{dn} = -\frac{c}{2} H(t - \tau) \frac{\partial u^*}{\partial r} H[c(t - \tau) - r]. \quad (2.58)$$

Utilizando as mesmas propriedades de (2.42) e (2.43), pode-se escrever:

$$\frac{du^*}{dn} = \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[r - c(t - \tau)]. \quad (2.59)$$

Fazendo  $r = |x - \xi|$  e lembrando de (2.40)

$$p^* = \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[|x - \xi| - c(t - \tau)], \quad (2.60)$$

Substituindo as expressões (2.34) e (2.60) na expressão (2.33), obtém-se:

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \int_0^t \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[|x - \xi| - c(t - \tau)] u|_0 d\tau + \int_0^t \frac{c}{2} H(t - \tau) \delta[|x - \xi| - c(t - \tau)] \bar{u}|_L d\tau - \\ &\int_0^t -\frac{c}{2} H(t - \tau) H[c(t - \tau) - |x - \xi|] p|_0 d\tau - \int_0^t -\frac{c}{2} H(t - \tau) H[c(t - \tau) - |x - \xi|] p|_L d\tau - \\ &\frac{1}{c^2} \int_0^L u_0^* v_0(x) dx + \frac{1}{c^2} \int_0^L v_0^* u_0(x) dx. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Calculando as integrais, tal que

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > \tau \\ 0 & \text{se } t < \tau, \end{cases} \quad (2.62)$$

tem-se

$$\begin{aligned} u(\xi, t) &= \int_0^t \frac{c}{2} \delta[|x - \xi| - c(t - \tau)] u(0, \tau) d\tau + \int_0^t \frac{c}{2} \delta[|x - \xi| - c(t - \tau)] \bar{u}(L, \tau) d\tau - \\ &\int_0^t -\frac{c}{2} H[c(t - \tau) - |x - \xi|] p(0, \tau) d\tau - \int_0^t -\frac{c}{2} H[c(t - \tau) - |x - \xi|] p(L, \tau) d\tau - \\ &\frac{1}{c^2} \int_0^L u_0^* v_0(x) dx + \frac{1}{c^2} \int_0^L v_0^* u_0(x) dx. \end{aligned} \quad (2.63)$$

### 3 INTEGRAIS DE DOMÍNIO

Neste capítulo será feita uma breve discussão acerca das contribuições das condições iniciais dadas por  $u_0(x)$  e  $v_0(x)$ .

As integrais de domínio da equação (2.33) são

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{c^2} \int_0^L u_0^* v_0(x) dx, \\ I_u &= \frac{1}{c^2} \int_0^L v_0^* u_0(x) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A partir disso será feito uma análise de  $I_v$  e  $I_u$  para os valores do contorno e dos pontos internos.

#### 3.1 Integrais de Domínio para Valores do Contorno

Para o problema unidimensional em questão, considera-se uma célula, no domínio  $[0, L]$ , de comprimento  $\Delta L = |L_1 - L_2|$  e um ponto  $\xi$  que coincide com  $x = 0$  ou com  $x = L$ , como apresentado na Figura 5.

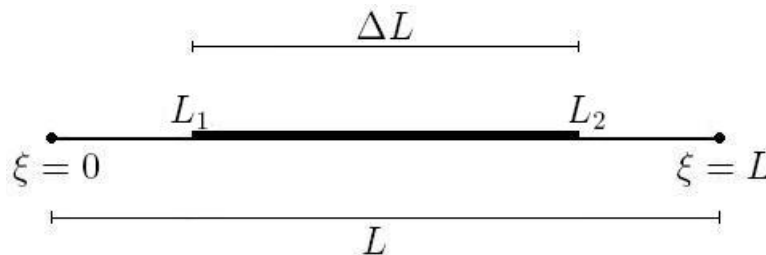


Figura 5: Célula definida por  $x = L_1$  e  $x = L_2$

Analisando  $I_v$  para  $\xi = 0$  e considerando  $ct$  como sendo a frente de onda incidente, temos

- Para  $ct < L_1$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (x - 0)] v_0(x) dx = 0. \quad (3.2)$$

- Para  $L_1 < ct < L_2$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{ct} -\frac{c}{2} H[ct - (x - 0)] v_0(x) dx. \quad (3.3)$$

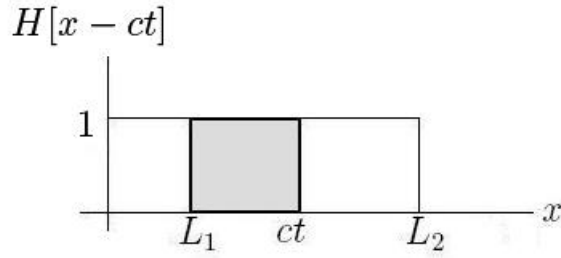


Figura 6: Frente de onda:  $L_1 < ct < L_2$

- Para  $L_2 < ct$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (x - 0)] v_0(x) dx. \quad (3.4)$$

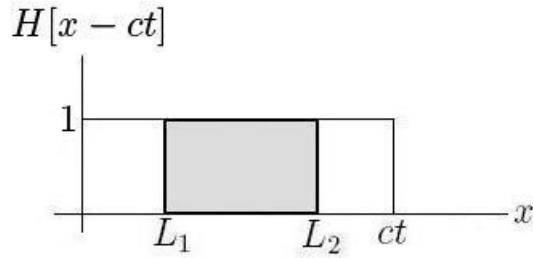


Figura 7: Frente de onda:  $L_2 < ct$

Admitindo variação linear para  $v_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$ , tem-se

$$v_0(x) = \frac{L_2 - x}{\Delta L} v_0(L_1) + \frac{x - L_1}{\Delta L} v_0(L_2). \quad (3.5)$$

De forma genérica (nota-se que o limite superior da integral é variável), pode-se escrever

$$I_v = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{\alpha} -\frac{c}{2} H[ct - x] \left[ \frac{L_2 - x}{\Delta L} \quad \frac{x - L_1}{\Delta L} \right] dx \left\{ \begin{array}{l} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{array} \right\}. \quad (3.6)$$

Calculando (3.6), sabendo que  $1 - H[ct - x] = H[x - ct]$ , obtém-se

$$I_v = -\frac{1}{2c\Delta L} \left[ L_2x - \frac{x^2}{2} \quad \frac{x^2}{2} - L_1x \right]_{x=L_1}^{x=\alpha} \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \begin{cases} ct, & \text{quando } L_1 < ct < L_2 \\ L_2, & \text{quando } L_2 < ct. \end{cases} \quad (3.8)$$

Analisando  $I_v$  para  $\xi = L$ , tendo em mente o esquema da Figura 8, tem-se

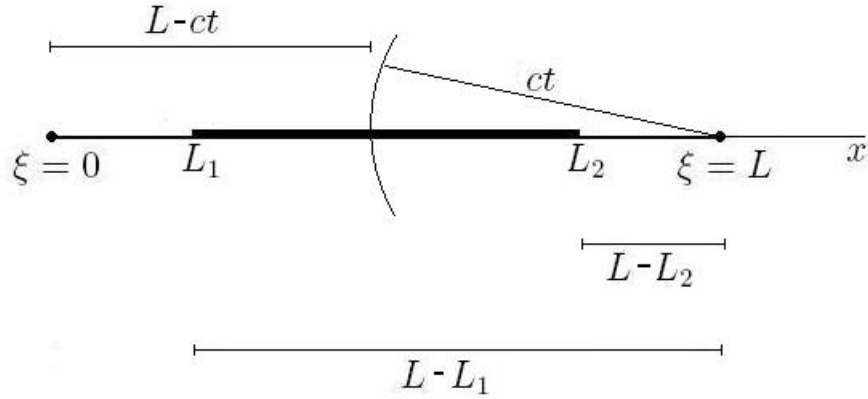


Figura 8: Esquema para integrações da célula quando  $\xi = L$

- Para  $ct < L - L_2$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (L - x)] v_0(x) dx = 0. \quad (3.9)$$

- Para  $L - L_2 < ct < L - L_1$  ou  $L - ct < L_2$  e  $L - ct > L_1$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L-ct}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (L - x)] v_0(x) dx. \quad (3.10)$$

- Para  $L - L_1 < ct$  ou  $L_1 > L - ct$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (L - x)] v_0(x) dx. \quad (3.11)$$

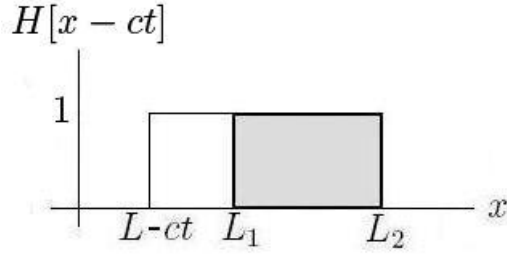


Figura 9: Frente de onda:  $L_1 > L - ct$

Para variação linear de  $v_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$ , de forma genérica tem-se

$$I_v = \frac{1}{c^2} \int_{\beta}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (L - x)] \left[ \frac{L_2 - x}{\Delta L} \quad \frac{x - L_1}{\Delta L} \right] dx \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}. \quad (3.12)$$

Calculando (3.12), obtém-se

$$I_v = -\frac{1}{2c\Delta L} \left[ L_2 x - \frac{x^2}{2} \quad \frac{x^2}{2} - L_1 x \right]_{x=\beta}^{x=L_2} \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $\beta$  é dado por

$$\beta = \begin{cases} L - ct, & \text{quando } L - L_2 < ct < L - L_1 \\ L_1, & \text{quando } L - L_1 < ct. \end{cases} \quad (3.14)$$

As equações (3.7) e (3.13) são as integrais de domínio referentes à condição inicial  $v_0(x)$  para  $\xi = 0$  e  $\xi = L$ , respectivamente.

Para fazer a análise de  $I_u$ , é importante saber que

$$v_0^* = \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad (3.15)$$

então

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ -\frac{c}{2} H[c(t - \tau) - r] \right\}. \quad (3.16)$$

Tendo em mente que  $H[c(t - \tau) - r] = H[(ct - r) - c\tau] = 1 - H[c\tau - (ct - r)]$ , tem-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} = -\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ 1 - H[c\tau - (ct - r)] \}. \quad (3.17)$$

Mudando a variável de derivação, pode-se escrever:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial (c\tau)} H[c\tau - (ct - r)]. \quad (3.18)$$

Como a derivada da função de Heaviside é a própria Delta de Dirac, ver APÊNDICE B

$$\frac{\partial u^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = v_0^* = \frac{c^2}{2} \delta(r - ct). \quad (3.19)$$

Logo, lembrando que  $r = |x - \xi|$

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta(r - ct) u_0(x) dx. \quad (3.20)$$

Para  $\xi = 0$ , tem-se

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta(x - ct) u_0(x) dx. \quad (3.21)$$

Considerando  $ct$  como sendo a frente de onda incidente, as seguintes situações ocorrem:

- Para  $ct < L_1$  e  $L_2 < ct$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta(x - ct) u_0(x) dx = 0. \quad (3.22)$$

- Para  $L_1 \leq ct \leq L_2$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta(x - ct) u_0(x) dx = \frac{1}{2} u_0(ct). \quad (3.23)$$

Admitindo variação linear para  $u_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$

$$u_0(x) = \frac{L_2 - x}{\Delta L} u_0(L_1) + \frac{x - L_1}{\Delta L} u_0(L_2). \quad (3.24)$$

Então

$$u_0(ct) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{L_2 - ct}{\Delta L} & \frac{ct - L_1}{\Delta L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}, \quad (3.25)$$

e, portanto

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{cc} \frac{L_2 - ct}{\Delta L} & \frac{ct - L_1}{\Delta L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}. \quad (3.26)$$

Para  $\xi = L$

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta((L - x) - ct) u_0(x) dx. \quad (3.27)$$

Como  $\delta[(L - x) - ct] = \delta[(L - ct) - x] = \delta[x - (L - ct)]$ , tem-se

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta[x - (L - ct)] u_0(x) dx. \quad (3.28)$$

- Para  $L - ct < L_1$  e  $L_2 < L - ct$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta[x - (L - ct)] u_0(x) dx = 0. \quad (3.29)$$

- Para  $L_1 < L - ct < L_2$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta[x - (L - ct)] u_0(x) dx = \frac{1}{2} u_0(L - ct). \quad (3.30)$$

Como foi admitida variação linear para  $u_0(x)$  em  $L_1 \leq L - ct \leq L_2$ , para  $u_0(L - ct)$  pode-se escrever:

$$u_0(L - ct) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{L_2 - (L - ct)}{\Delta L} & \frac{(L - ct) - L_1}{\Delta L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

e, portanto

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{cc} \frac{L_2 - (L - ct)}{\Delta L} & \frac{(L - ct) - L_1}{\Delta L} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}. \quad (3.32)$$

As equações (3.26) e (3.32) são as integrais de domínio referentes a condição inicial  $u_0(x)$  para  $\xi = 0$  e  $\xi = L$ , respectivamente.

## 3.2 Integrais de Domínio para os Pontos Internos

Para o cálculo das integrais de domínio nos pontos internos, considera-se o mesmo domínio  $[0, L]$ , no qual se define uma célula de comprimento  $\Delta L = |L_1 - L_2|$  e um ponto interno  $\xi$ , cuja posição relativa à célula, será analisada separadamente, ver Figura 10.

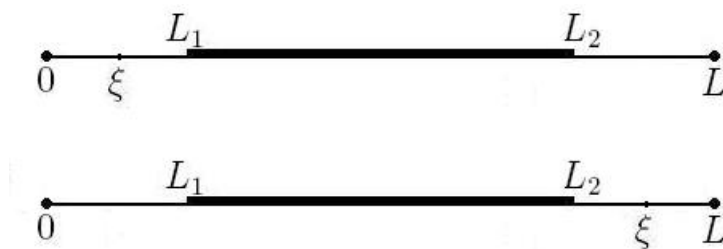


Figura 10: Domínio com ponto interno

Analisando  $I_v$  para  $0 < \xi < L_1$  e considerando  $ct$  como sendo a frente de onda incidente, tem-se

- Para  $ct < L_1$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H\{ct - [(x - \xi) - 0]\} v_0(x) dx = 0. \quad (3.33)$$

- Para  $L_1 < ct < L_2$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{ct} -\frac{c}{2} H\{ct - [(x - \xi) - 0]\} v_0(x) dx. \quad (3.34)$$

- Para  $L_2 < ct$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H\{ct - [(x - \xi) - 0]\} v_0(x) dx. \quad (3.35)$$

Admitindo variação linear para  $v_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$ , pode-se escrever:

$$I_v = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{\alpha} -\frac{c}{2} H[(x - \xi) - ct] \left[ \frac{L_2 - x}{\Delta L} \quad \frac{x - L_1}{\Delta L} \right] dx \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}. \quad (3.36)$$

Calculando (3.36), obtém-se

$$I_v = -\frac{1}{2c\Delta L} \left[ L_2 x - \frac{x^2}{2} \quad \frac{x^2}{2} - L_1 x \right]_{x=L_1}^{x=\alpha} \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}, \quad (3.37)$$

que é uma expressão idêntica à (3.7), onde

$$\alpha = \begin{cases} ct, & \text{quando } L_1 < ct < L_2 \\ L_2, & \text{quando } L_2 < ct. \end{cases} \quad (3.38)$$

Analisando  $I_v$  de maneira semelhante, para  $L_2 < \xi < L$ , tendo em mente o esquema da Figura 11, pode-se escrever:

- Para  $ct < \xi - L_2$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (\xi - x)] v_0(x) dx = 0. \quad (3.39)$$

- Para  $\xi - L_2 < ct < \xi - L_1$  ou  $\xi - ct < L_2$  e  $\xi - ct > L_1$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L-ct}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (\xi - x)] v_0(x) dx. \quad (3.40)$$

- Para  $\xi - L_1 < ct$  ou  $L_1 > \xi - ct$

$$\frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (\xi - x)] v_0(x) dx. \quad (3.41)$$

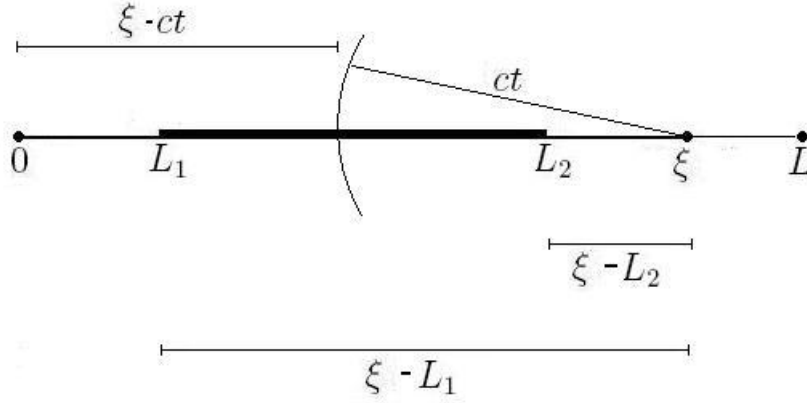


Figura 11: Elemento para  $L_2 < \xi < L$

Admitindo variação linear para  $v_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$ , de forma genérica tem-se

$$I_v = \frac{1}{c^2} \int_{\beta}^{L_2} -\frac{c}{2} H[ct - (\xi - x)] \left[ \frac{L_2 - x}{\Delta L} \quad \frac{x - L_1}{\Delta L} \right] dx \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Calculando (3.42), obtém-se

$$I_v = -\frac{1}{2c\Delta L} \left[ L_2 x - \frac{x^2}{2} \quad \frac{x^2}{2} - L_1 x \right]_{x=\beta}^{x=L_2} \begin{Bmatrix} v_0(L_1) \\ v_0(L_2) \end{Bmatrix}, \quad (3.43)$$

que é a mesma expressão obtida em (3.13), onde

$$\beta = \begin{cases} L - ct, & \text{quando } \xi - L_2 < ct < \xi - L_1 \\ L_1, & \text{quando } \xi - L_1 < ct. \end{cases} \quad (3.44)$$

As equações (3.37) e (3.43) são as integrais de domínio referentes à condição inicial  $v_0(x)$  para a posição do ponto interno  $\xi$  antes e depois da célula, respectivamente.

Para a análise de  $I_u$ , recorda-se de (3.15) e (3.20), portanto, para  $0 < \xi < L_1$ , tem-se

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta((x - \xi) - ct) u_0(x) dx. \quad (3.45)$$

Considerando  $ct$  como sendo a frente de onda incidente, ocorrem as seguintes situações:

- Para  $ct < L_1$  e  $L_2 < ct$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta((x - \xi) - ct) u_0(x) dx = 0. \quad (3.46)$$

- Para  $L_1 \leq ct \leq L_2$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta((x - \xi) - ct) u_0(x) dx = \frac{1}{2} u_0(ct + \xi). \quad (3.47)$$

Admitindo variação linear para  $u_0(x)$  em  $L_1 \leq ct \leq L_2$

$$u_0(x) = \frac{L_2 - x}{\Delta L} u_0(L_1) + \frac{x - L_1}{\Delta L} u_0(L_2), \quad (3.48)$$

então

$$u_0(ct + \xi) = \left[ \frac{L_2 - (ct + \xi)}{\Delta L} \quad \frac{(ct + \xi) - L_1}{\Delta L} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}, \quad (3.49)$$

e portanto

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ \frac{L_2 - (ct + \xi)}{\Delta L} \quad \frac{(ct + \xi) - L_1}{\Delta L} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}. \quad (3.50)$$

Analisando agora  $L_2 < \xi < L$  tem-se

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta((\xi - x) - ct) u_0(x) dx; \quad (3.51)$$

como  $\delta[(\xi - x) - ct] = \delta[(\xi - ct) - x] = \delta[x - (\xi - ct)]$ , tem-se

$$I_u = \frac{1}{c^2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{c^2}{2} \delta[x - (\xi - ct)] u_0(x) dx. \quad (3.52)$$

- Para  $\xi - ct < L_1$  e  $L_2 < \xi - ct$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta[x - (\xi - ct)] u_0(x) dx = 0. \quad (3.53)$$

- Para  $L_1 < \xi - ct < L_2$

$$\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \delta[x - (\xi - ct)] u_0(x) dx = \frac{1}{2} u_0(\xi - ct). \quad (3.54)$$

Admitindo variação linear para  $u_0(x)$  em  $L_1 \leq L - ct \leq L_2$ , para  $u_0(L - ct)$ , obtém-se

$$u_0(\xi - ct) = \left[ \frac{L_2 - (\xi - ct)}{\Delta L} \quad \frac{(\xi - ct) - L_1}{\Delta L} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\} \quad (3.55)$$

e, portanto

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ \frac{L_2 - (\xi - ct)}{\Delta L} \quad \frac{(\xi - ct) - L_1}{\Delta L} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_0(L_1) \\ u_0(L_2) \end{array} \right\}, \quad (3.56)$$

que é semelhante à equação (3.32). As equações (3.50) e (3.56) são as integrais de domínio referentes à condição inicial  $u_0(x)$  para a posição do ponto interno  $\xi$  antes e depois da célula, respectivamente.

## 4 RESULTADOS

Com a finalidade de verificar os resultados obtidos com o método, a formulação MEC-DT será empregada em 4 exemplos nos quais será utilizado uma barra unidimensional de comprimento  $L$ , onde  $L = 2$ . Além disso, adota-se  $\Delta t = 0,1$  e admite-se que  $c = 1$ . As condições iniciais e de contorno são especificadas em cada caso.

Os resultados do MEC são sempre comparados com as soluções analíticas correspondentes, calculadas de acordo com os procedimentos descritos por (STEPHENSON, 1970) e apresentados por (CARRER; MANSUR, 2010). A solução analítica em cada exemplo será esboçada juntamente com a solução numérica nos gráficos de “ $u \times t$ ” e de “ $p \times t$ ”. No problema em questão, “ $u$ ” denota o deslocamento e “ $p$ ” a reação no apoio.

### 4.1 Exemplo 1 - Barra com Condições de Contorno Prescritas

Considera-se que a barra em estudo está fixa em  $x = 0$ ; as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ p(L,t) &= 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

As condições iniciais neste caso são nulas, isto é

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0, \\ v_0(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Neste exemplo,  $p(L,t)$  denota uma carga aplicada na extremidade direita da barra,

como mostra a Figura 12.

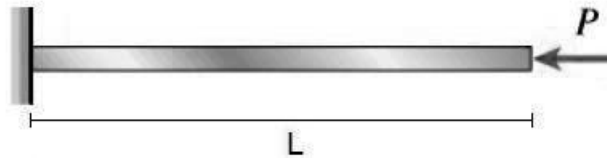


Figura 12: Barra com condições de contorno prescritas

A solução analítica deste problema é dada por, ver (CARRER; MANSUR, 2010)

$$u(x,t) = x + \frac{8L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right] \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]. \quad (4.3)$$

A Figura 13 apresenta o deslocamento em relação ao tempo decorrido.

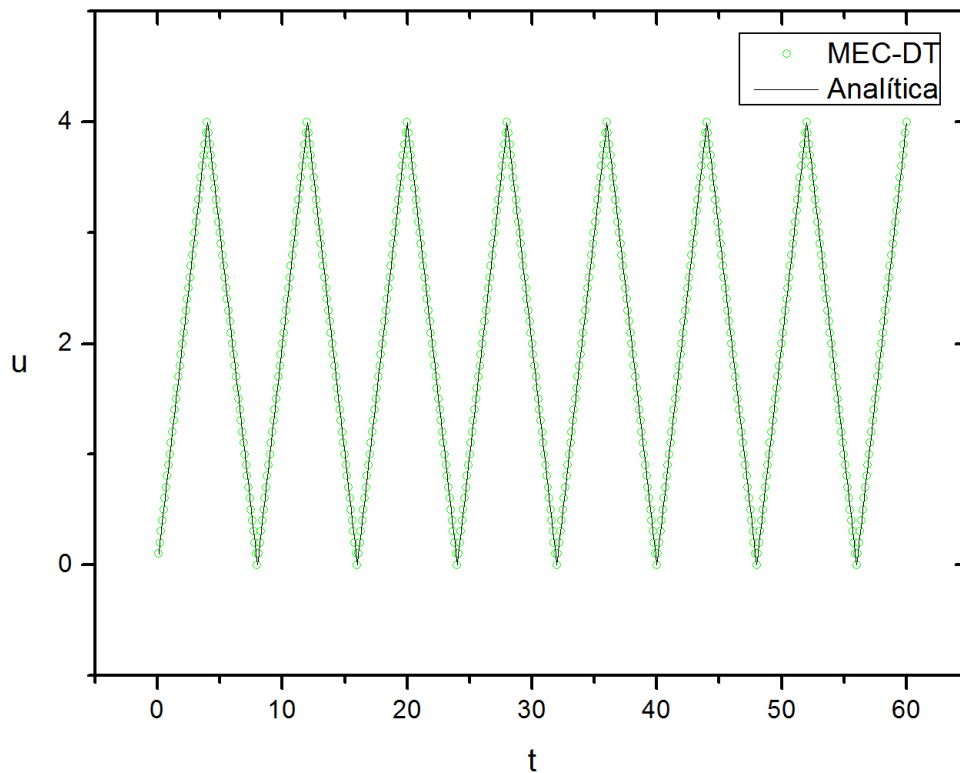


Figura 13: Deslocamento em  $x = L$

Normalmente se observa nas soluções numéricas certo grau de amortecimento,

porém, na formulação MEC-DT nota-se a ausência de qualquer tipo de amortecimento. Observa-se também que a solução numérica obtida é exatamente igual à solução analítica.

A Figura 14 apresenta a reação no apoio em relação ao tempo; pode-se observar que a solução numérica obtida pela formulação MEC-DT não apresenta o Fenômeno de Gibbs existente na solução analítica.

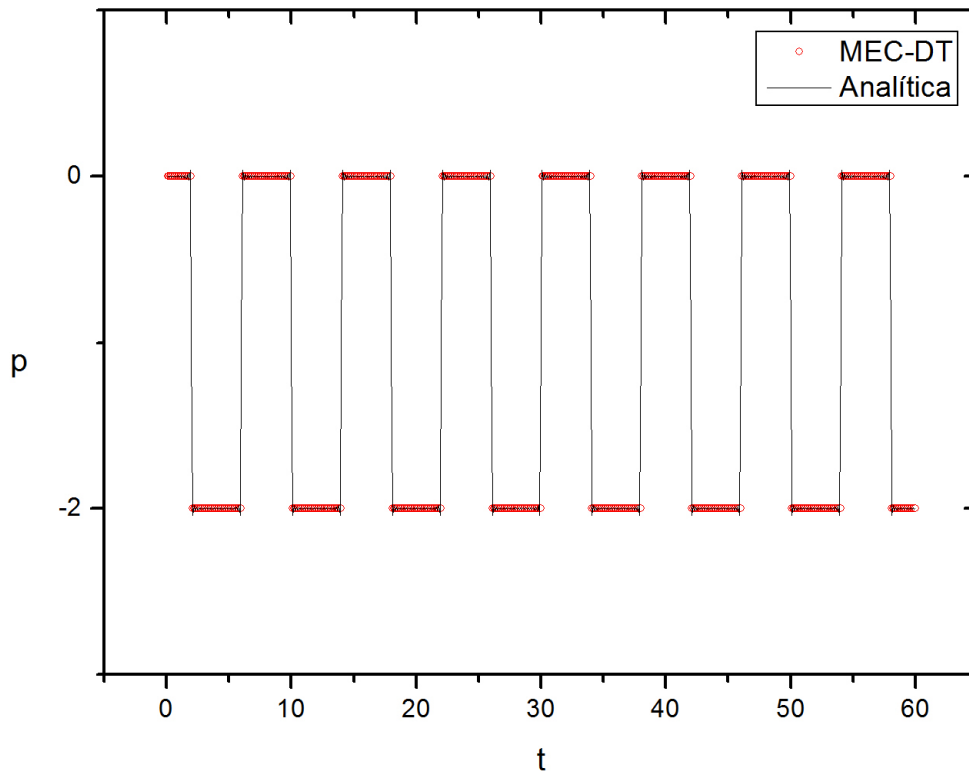


Figura 14: Reação no apoio da barra em  $x = 0$

Em matemática, o fenômeno de Gibbs, em homenagem ao físico americano J. Willard Gibbs, é a maneira peculiar em que a série de Fourier de uma função periódica diferenciável se comporta em uma descontinuidade de salto, a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier tem grandes oscilações perto do salto. A oscilação não desaparece com o aumento da frequência, mas se aproxima de um limite finito (CARSLAW, 1930). Para melhor visualizar este fenômeno na solução analítica, ver Figura 15.

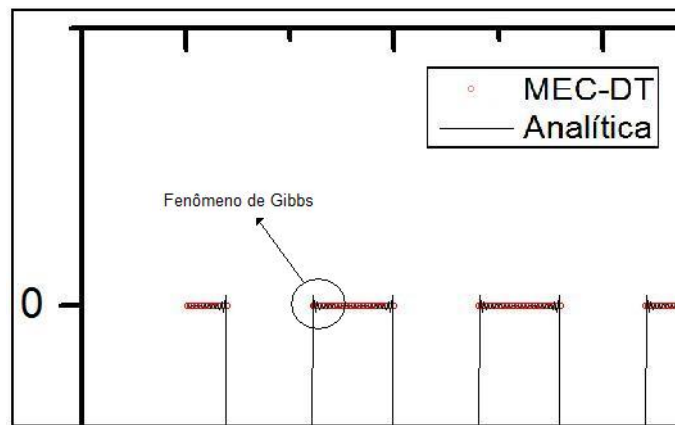


Figura 15: Ausência do fenômeno de Gibbs na solução MEC-DT

Os valores do deslocamento no domínio, em  $x = 0,5$ ,  $x = 1,0$  e  $x = 1,5$ , são apresentados na Figura 16, os quais coincidem com a solução analítica.

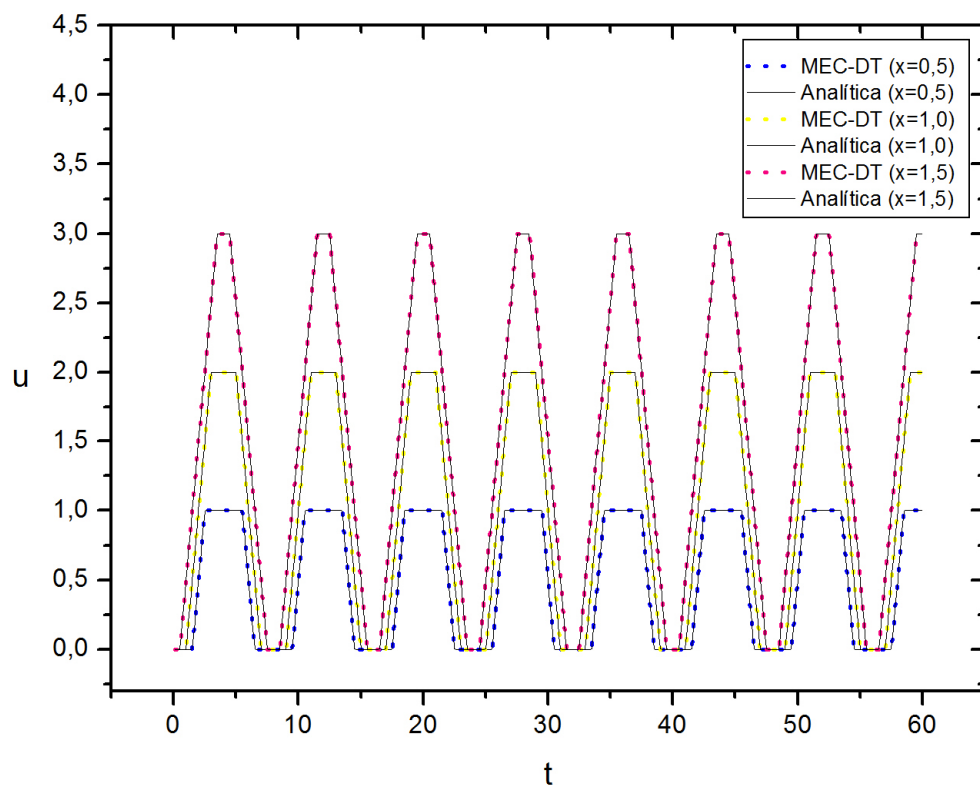


Figura 16: Deslocamento nos pontos internos

Nas Figuras 14 e 16 pode-se observar claramente que a propriedade da causali-

dade, dada pela expressão (2.34), é satisfeita.

### 4.1.1 Estudo Paramétrico

Fez-se um estudo paramétrico com o objetivo de analisar o comportamento de  $p$  em decorrência do valor de  $\Delta t$ .

Considera-se então um parâmetro  $\eta$  definido como:

$$\eta = \frac{c\Delta t}{L}. \quad (4.4)$$

Observou-se que, empiricamente, para que se obtenha bons resultados é necessário que os valores de  $L$  e  $c$  sejam escolhidos de forma que  $\frac{1}{\eta}$  seja um valor inteiro e:

$$c\Delta t < L. \quad (4.5)$$

## 4.2 Exemplo 2 - Barra com Deslocamento Inicial Prescrito

Agora, será considerado o caso da barra do exemplo anterior sujeita às condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ p(L,t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

e às condições iniciais

$$\begin{aligned} u_0(x) &= U_0x, \\ v_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Neste caso a solução analítica é dada por, ver (CARRER; MANSUR, 2010)

$$u(x,t) = \frac{8LU}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right] \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]. \quad (4.8)$$

A Figura 17 apresenta o deslocamento em função do tempo.

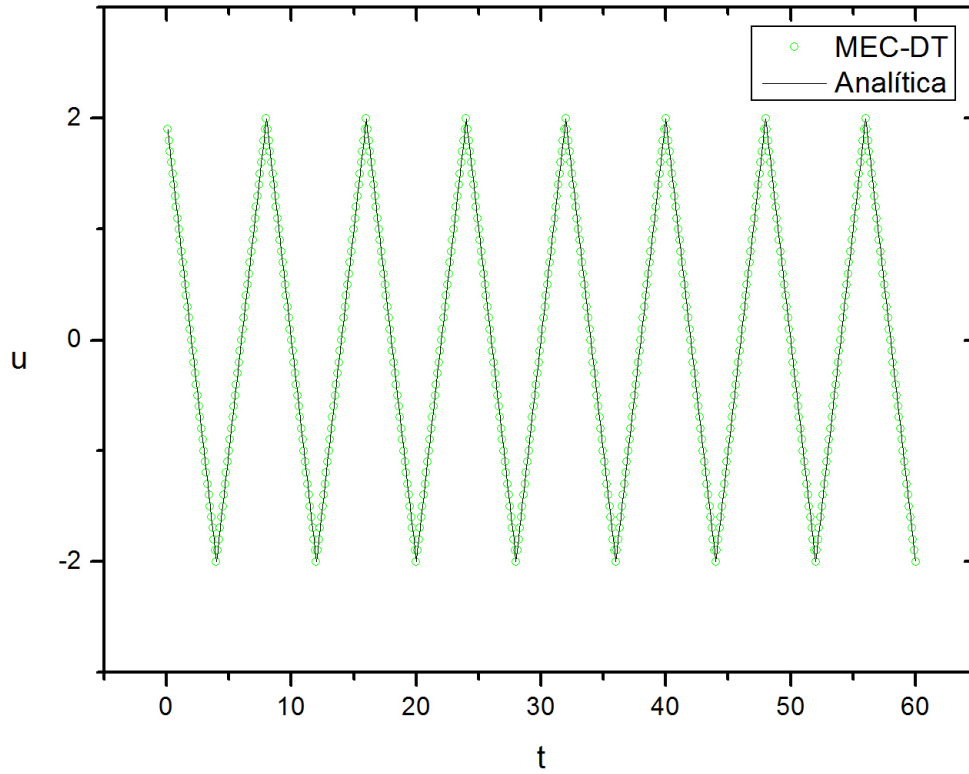


Figura 17: Deslocamento em  $x = L$

Nota-se que a solução numérica obtida pela formulação MEC-DT coincide com a solução analítica.

A Figura 18 apresenta a reação no apoio em função do tempo.

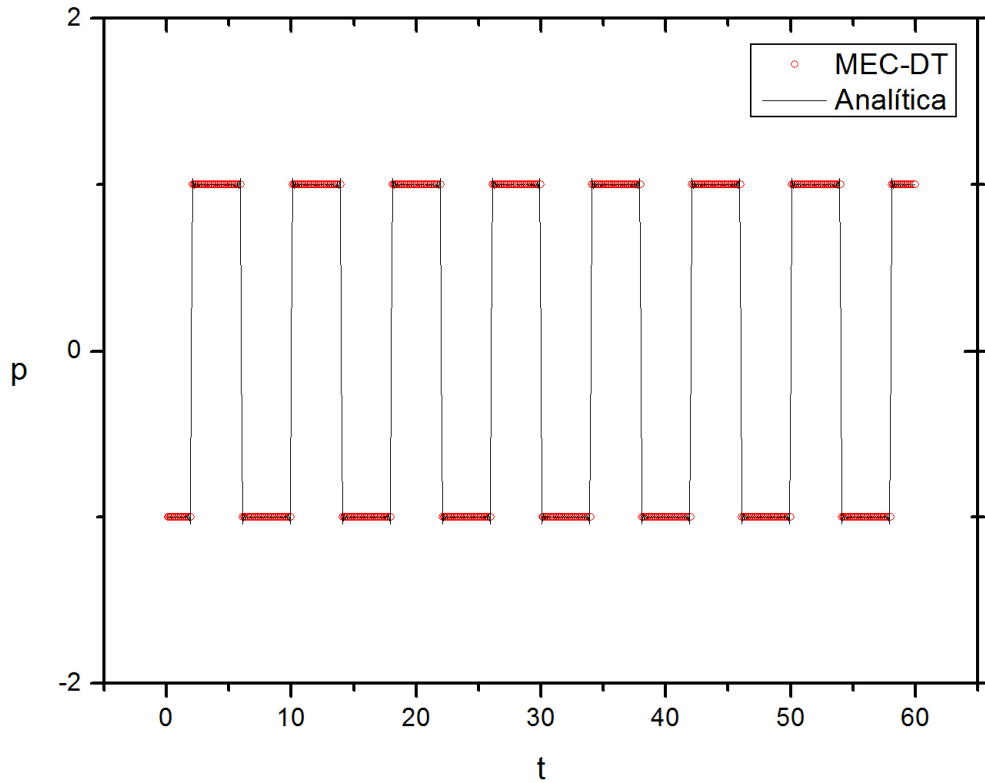


Figura 18: Reação ao apoio da barra em  $x=0$

Observa-se uma situação semelhante à do exemplo anterior, isto é, a solução numérica obtida pela formulação MEC-DT não apresenta o Fenômeno de Gibbs visto na solução analítica.

Para os pontos internos  $x = 0,5$ ,  $x = 1,0$  e  $x = 1,5$  os resultados são apresentados na Figura 19.

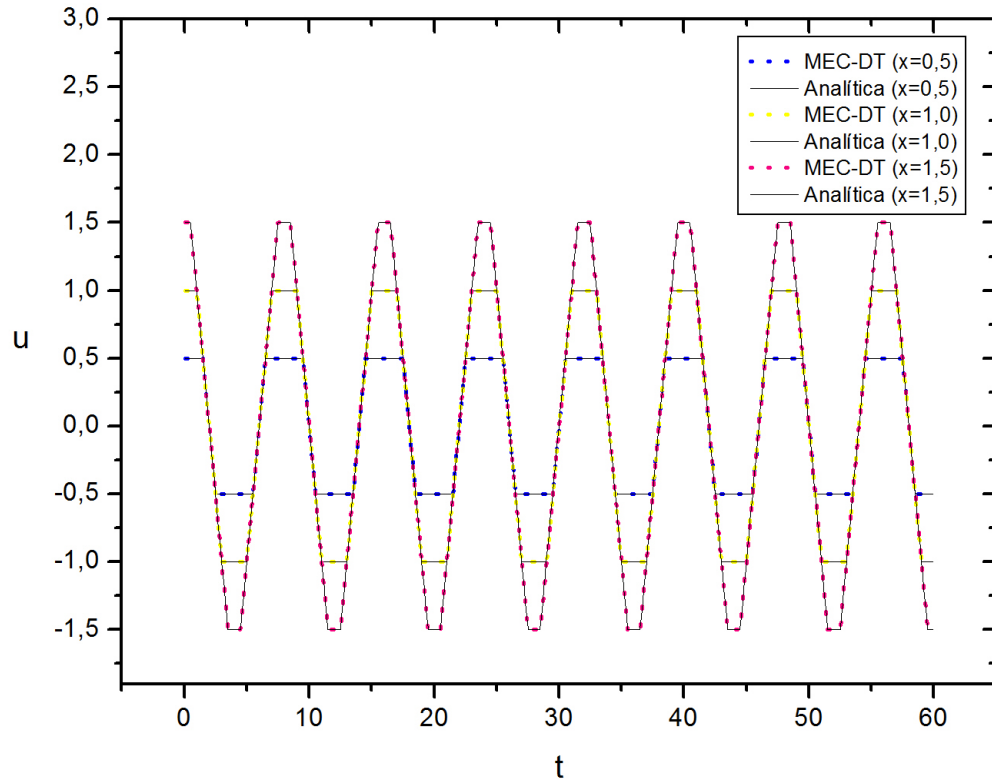


Figura 19: Deslocamento nos pontos internos

Observa-se que a solução numérica para os pontos internos coincide com a solução analítica.

### 4.3 Exemplo 3 - Barra com Velocidade Inicial Prescrita

Com as mesmas condições de contorno dos exemplos anteriores, isto é

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ p(L,t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

As condições iniciais agora são dadas por

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0, \\ v_0(x) &= 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A solução analítica é dada por, (CARRER; MANSUR, 2010)

$$u(x,t) = \frac{8LV}{c\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right] \text{sen}\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]. \quad (4.11)$$

As Figuras 20 e 21 apresentam os resultados no contorno para  $u$  e  $p$ , respectivamente.

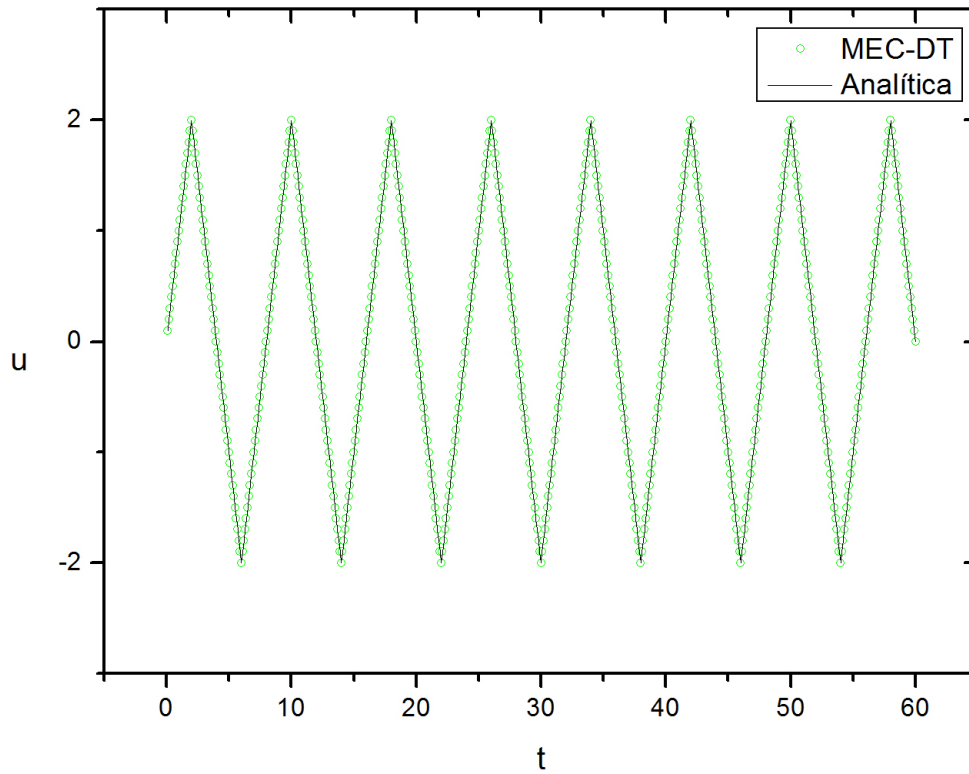


Figura 20: Deslocamento em  $x = L$

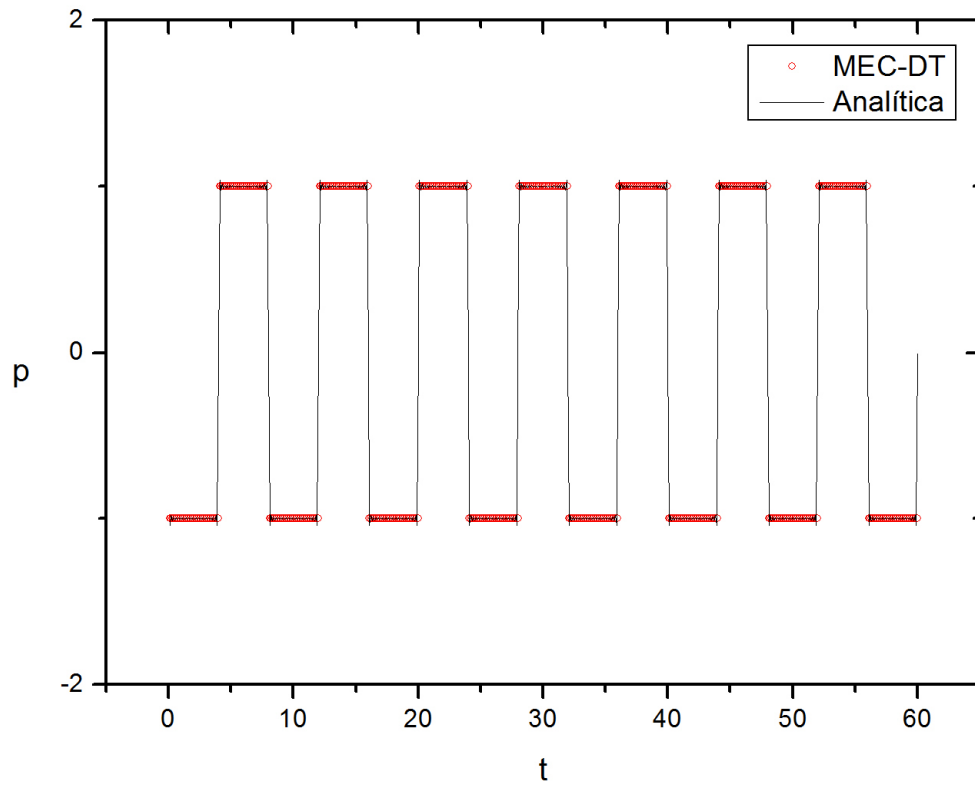


Figura 21: Reação no apoio da barra em  $x = 0$

Observa-se um comportamento semelhante ao já observado nos exemplos anteriores, ou seja, nos gráficos que apresentam o deslocamento o resultado coincide com a solução analítica. No gráfico correspondente à reação no apoio, nota-se a ausência do Fenômeno de Gibbs na solução numérica.

No domínio, obtém-se o gráfico da Figura 22.

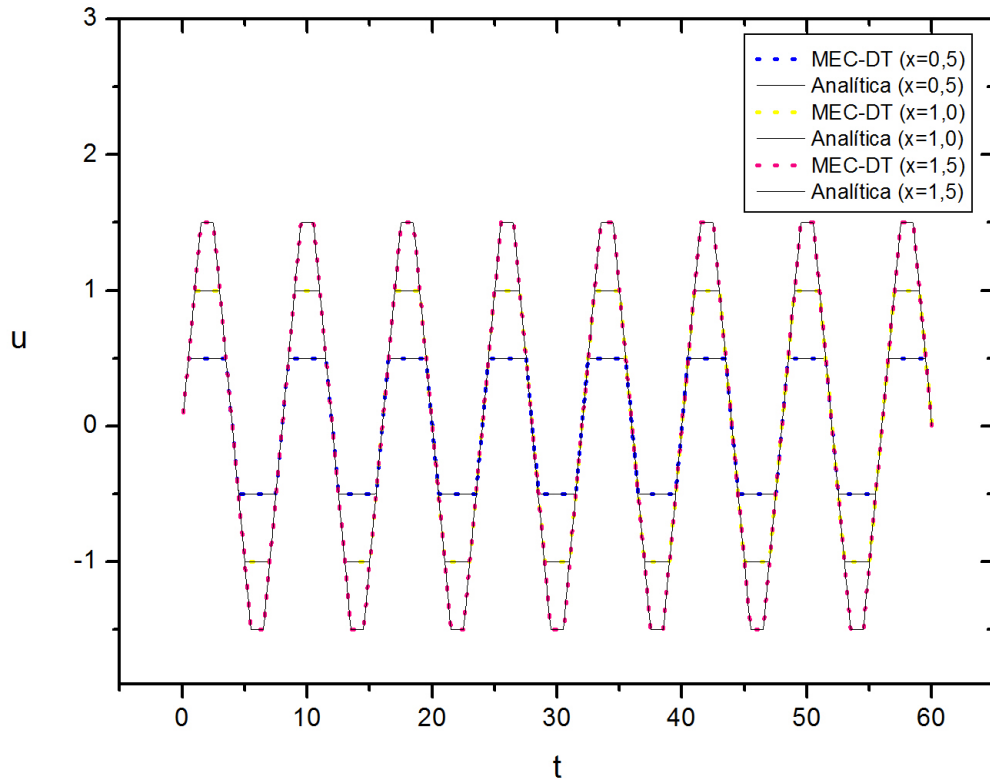


Figura 22: Deslocamento nos pontos internos

A solução numérica coincide com a solução analítica.

#### 4.4 Exemplo 4 - Barra com Condições de Contorno Variáveis no Tempo

Neste exemplo serão abordados 2 casos, nos quais, assumindo condições iniciais nulas, as condições de contorno variam senoidalmente com o tempo.

#### 4.4.1 Caso 1

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= \text{sen}(\psi t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

A solução analítica é dada pela seguinte expressão, ver (CARRER; MANSUR, 2010)

$$u(x,t) = U_0 \left\{ \frac{x}{L} \text{sen} \psi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\psi}{(\phi^2 - \psi^2)} \frac{(-1)^n}{n\pi} [\phi \text{sen}(\phi t) - \psi \text{sen}(\psi t)] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}, \quad (4.13)$$

onde  $\phi = \frac{cn\pi}{L}$ . A análise será feita em torno do parâmetro  $\psi$ , então:

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{L}$ ;

O deslocamento em  $x = 1,0$  é dado pela Figura 23.

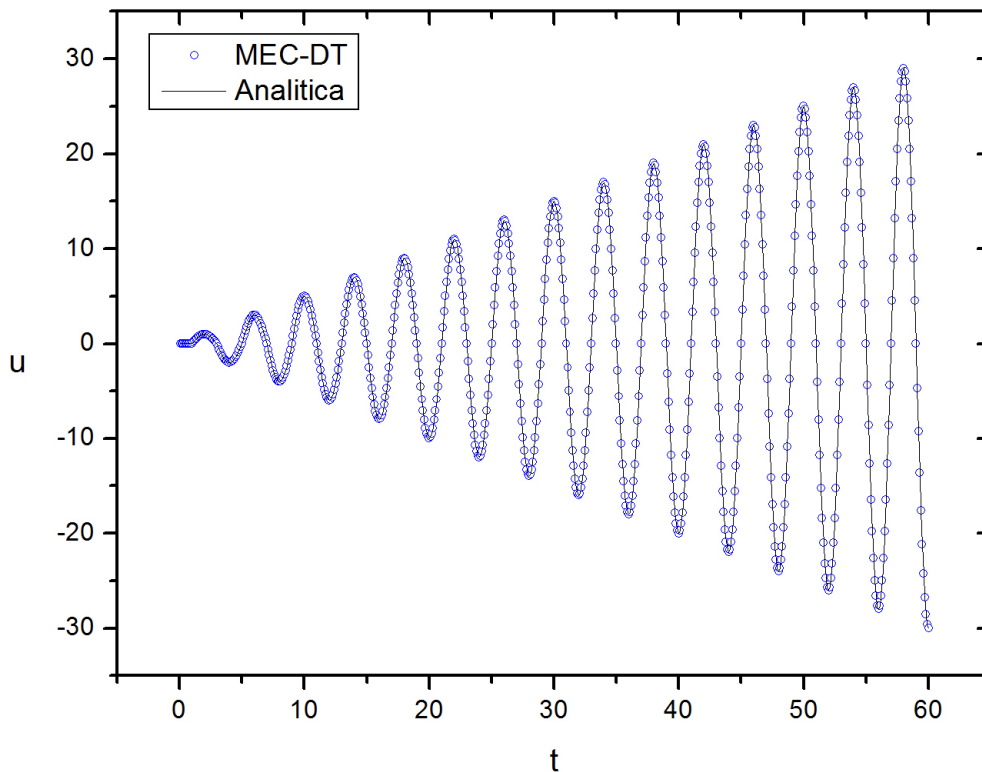


Figura 23: Deslocamento em  $x = 1,0$

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 24.

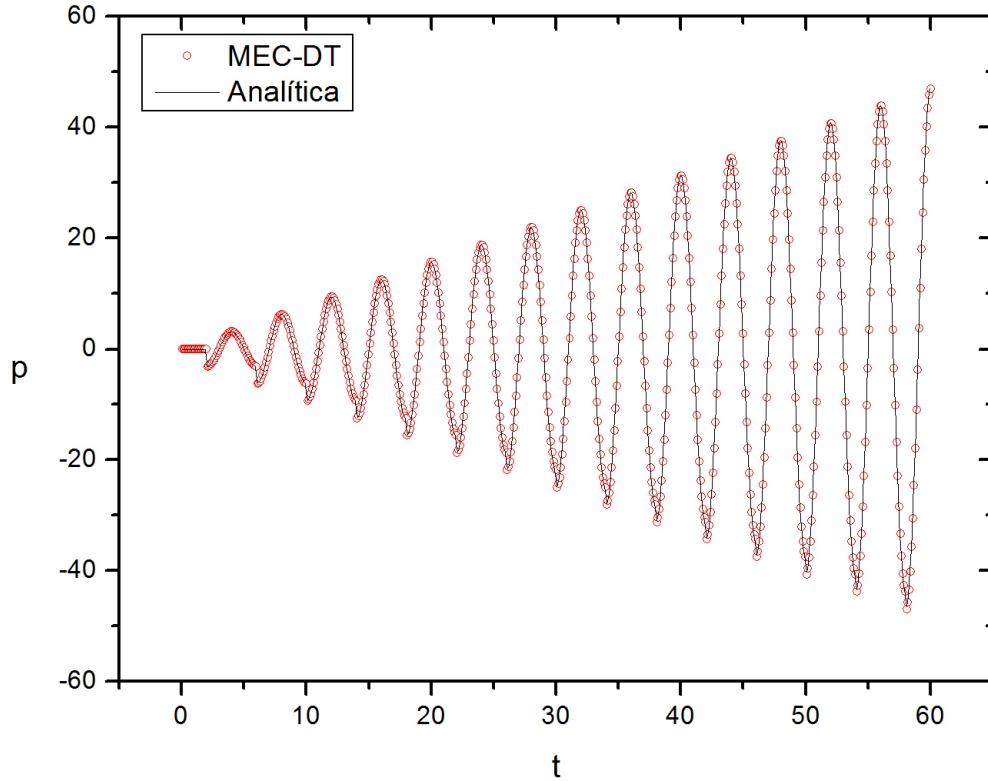


Figura 24: Reação no apoio em  $x = 0$

Observa-se nas Figuras 23 e 24 o fenômeno conhecido na física como Ressonância. Aplicando a regra de L'Hopital, quando  $n = 1$ , na equação (4.13), obtém-se a solução analítica para  $\psi = \frac{\pi}{L}$ .

$$u(x,t) = U_0 \left\{ \frac{x}{L} \text{sen}(\psi t) - \frac{1}{\pi} [\text{sen}(\psi t) + \psi t \cos(\psi t)] \text{sen}(\psi x) + \right. \\ \left. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\psi}{(\phi^2 - \psi^2)} \frac{(-1)^n}{n\pi} [\phi \text{sen}(\phi t) - \psi \text{sen}(\psi t)] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}. \quad (4.14)$$

Nota-se em ambos os gráficos que a solução numérica coincide com a analítica.

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{2L}$ ;

O deslocamento em  $x = 1,0$  é dado pela Figura 25.

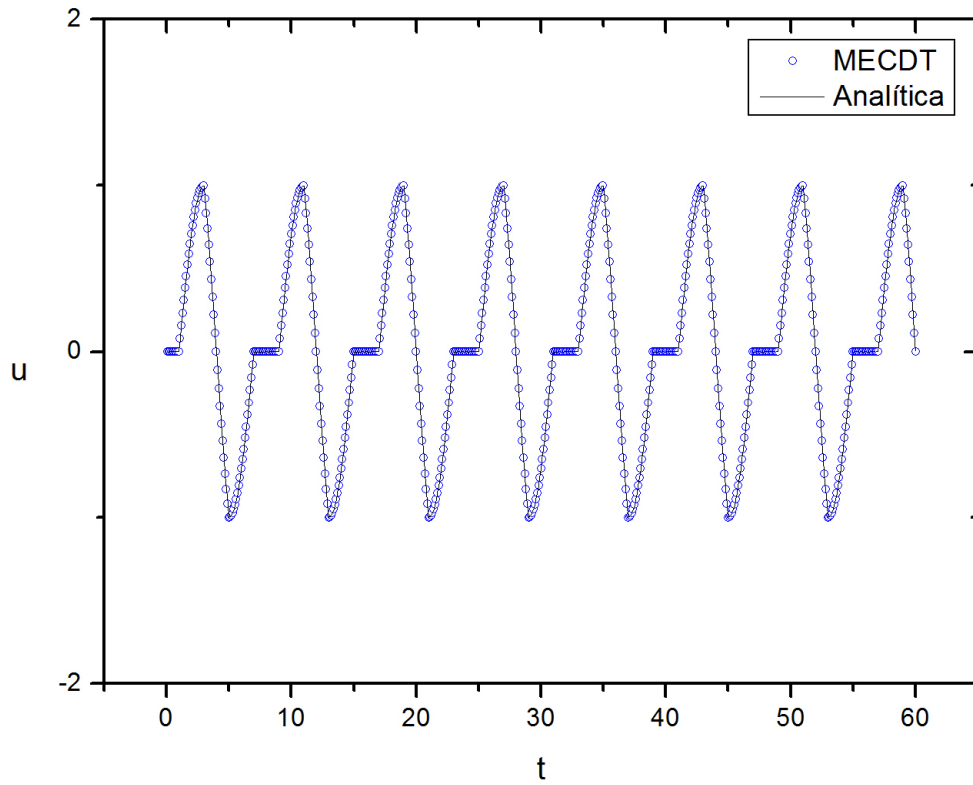


Figura 25: Deslocamento em  $x = 1,0$

A solução numérica coincide com a solução analítica.

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 26.

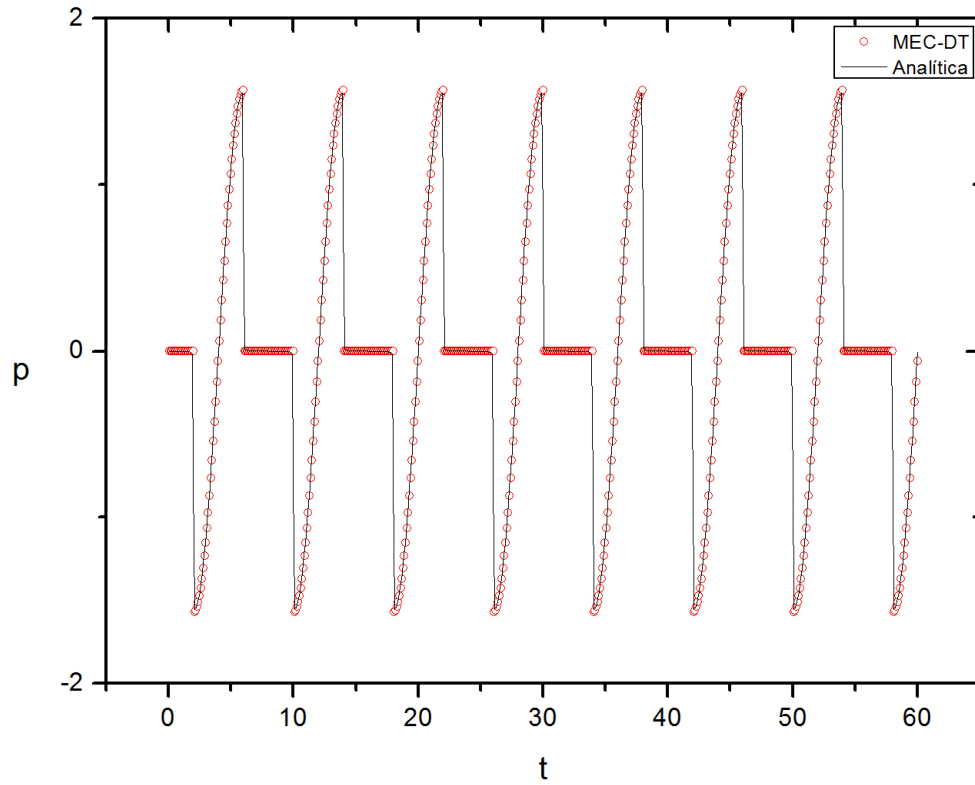


Figura 26: Reação no apoio em  $x = 0$

Nota-se que a solução analítica apresenta o fenômeno de Gibbs quando  $p$  se aproxima de 0, enquanto que a solução numérica não.

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{3L}$ ;

O deslocamento em  $x = 1,0$  é dado pela Figura 27.

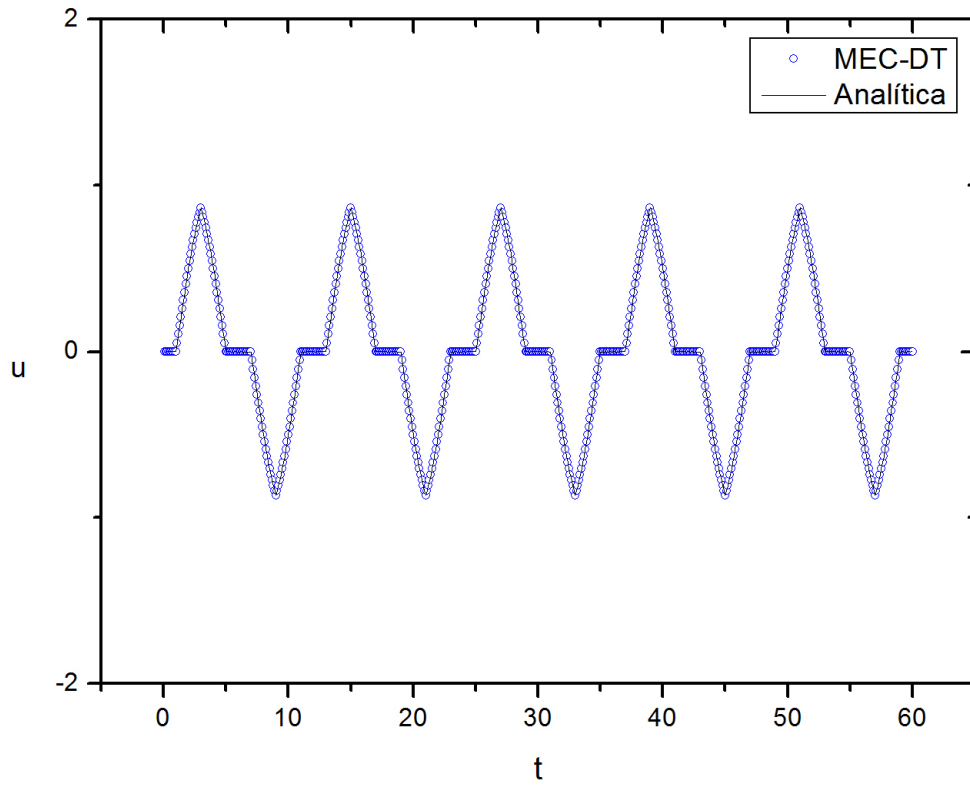


Figura 27: Deslocamento em  $x = 1,0$

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 28.

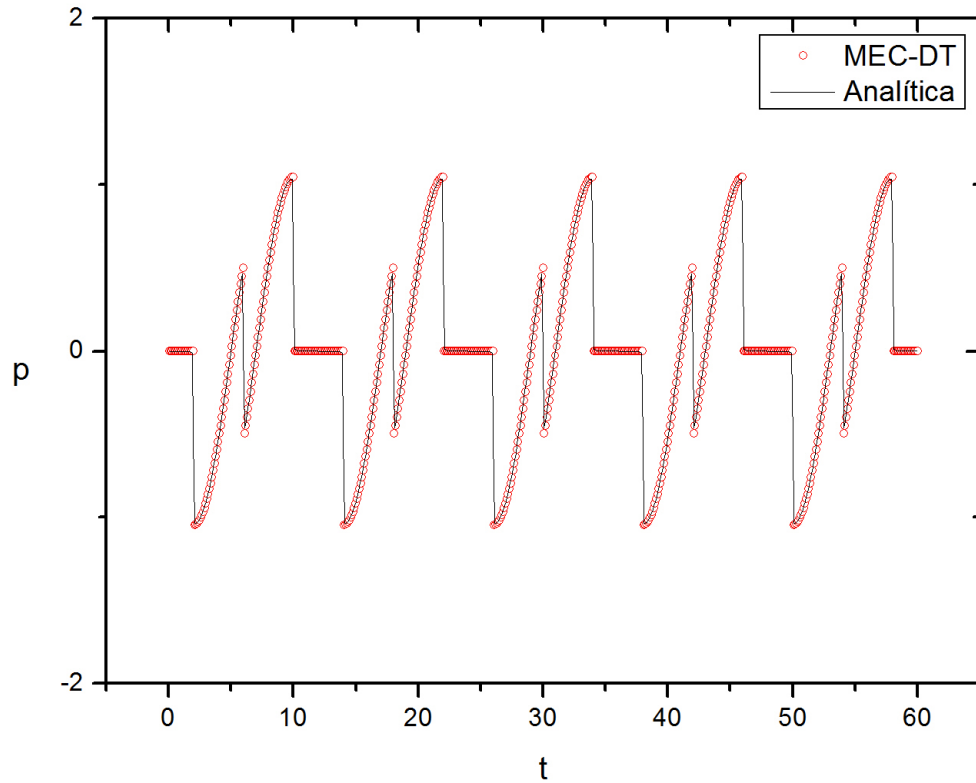


Figura 28: Deslocamento em  $x = 0$

Observa-se na Figura 27 que a solução numérica coincide com a solução analítica. Na Figura 28, mais uma vez, nota-se a ausência do fenômeno de Gibbs na solução numérica.

#### 4.4.2 Caso 2

Considera-se uma carga variável aplicada na extremidade direita da barra, como na Figura 12. As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ p(L,t) &= \text{sen}(\psi t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

A solução analítica é dada por, ver (CARRER; MANSUR, 2010)

$$u(x,t) = x \operatorname{sen} \psi t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi}{(\phi^2 - \psi^2)} \frac{8L}{(n\pi)^2} (-1)^n [\phi \operatorname{sen}(\phi t) - \psi \operatorname{sen}(\psi t)] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right), \quad (4.16)$$

onde  $n$  é ímpar e  $\phi = \frac{cn\pi}{2L}$ . A análise também será feita em torno do parâmetro  $\psi$ , então:

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{L}$ ;

O deslocamento no contorno é dado pela Figura 29.

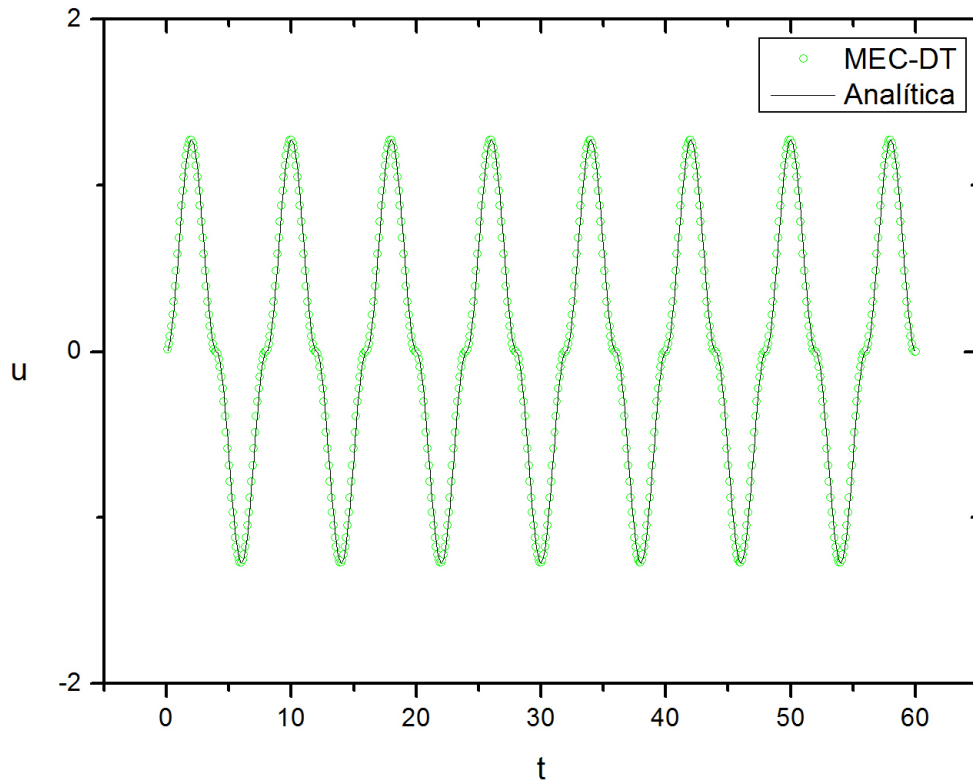


Figura 29: Deslocamento em  $x = L$

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 30.

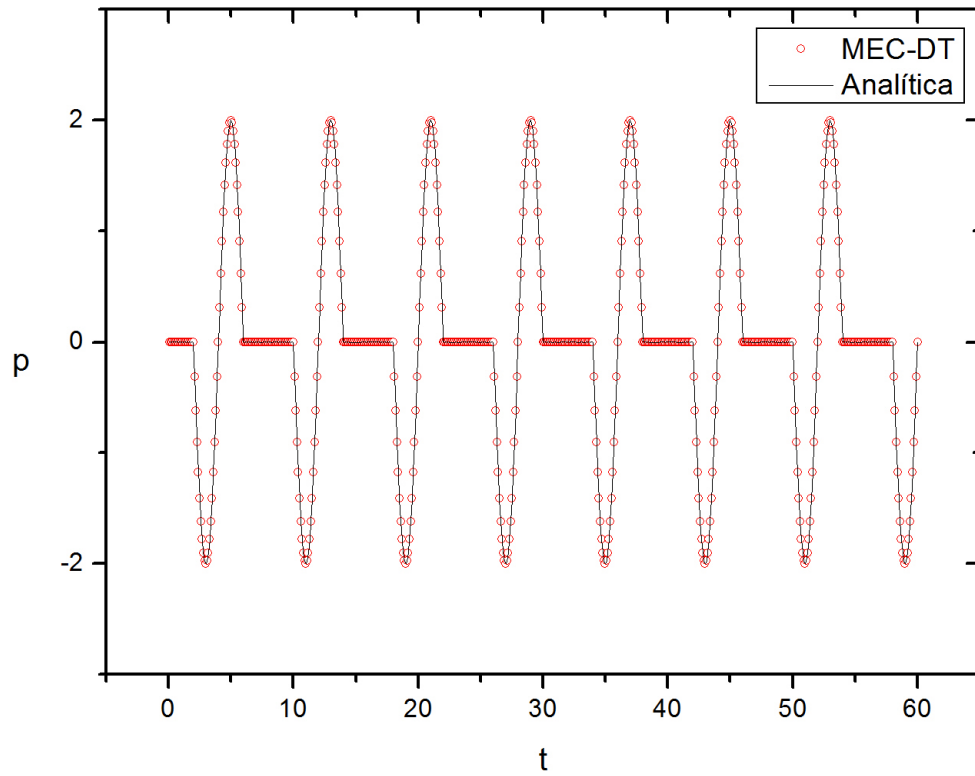


Figura 30: Reação no apoio em  $x = 0$

No domínio, o deslocamento é dado pela Figura 31.

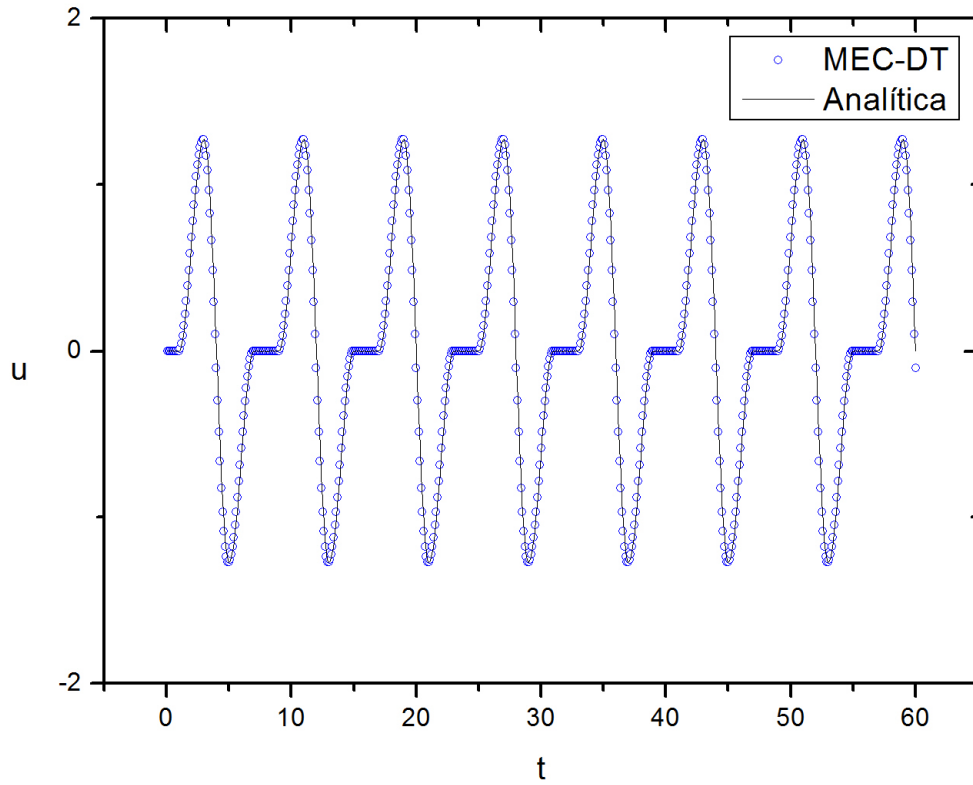


Figura 31: Deslocamento em  $x = 1,0$

Nota-se nos gráficos que a solução numérica coincide com a analítica.

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{2L}$ ;

O deslocamento no contorno é dado pela Figura 32.

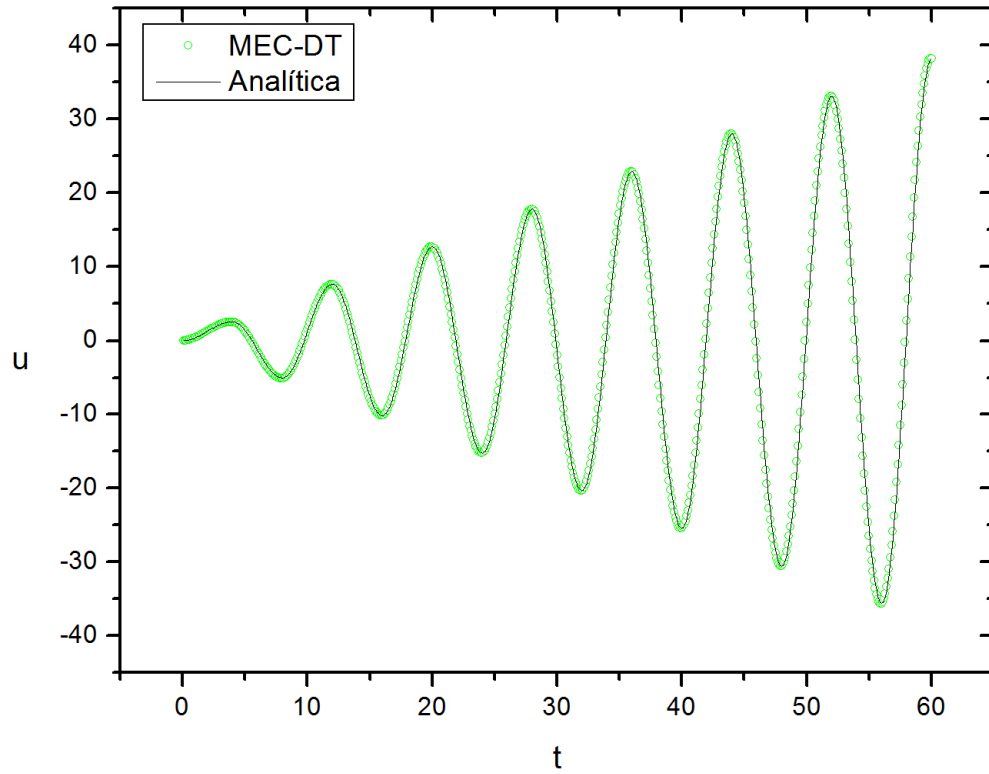


Figura 32: Deslocamento em  $x = L$

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 33.

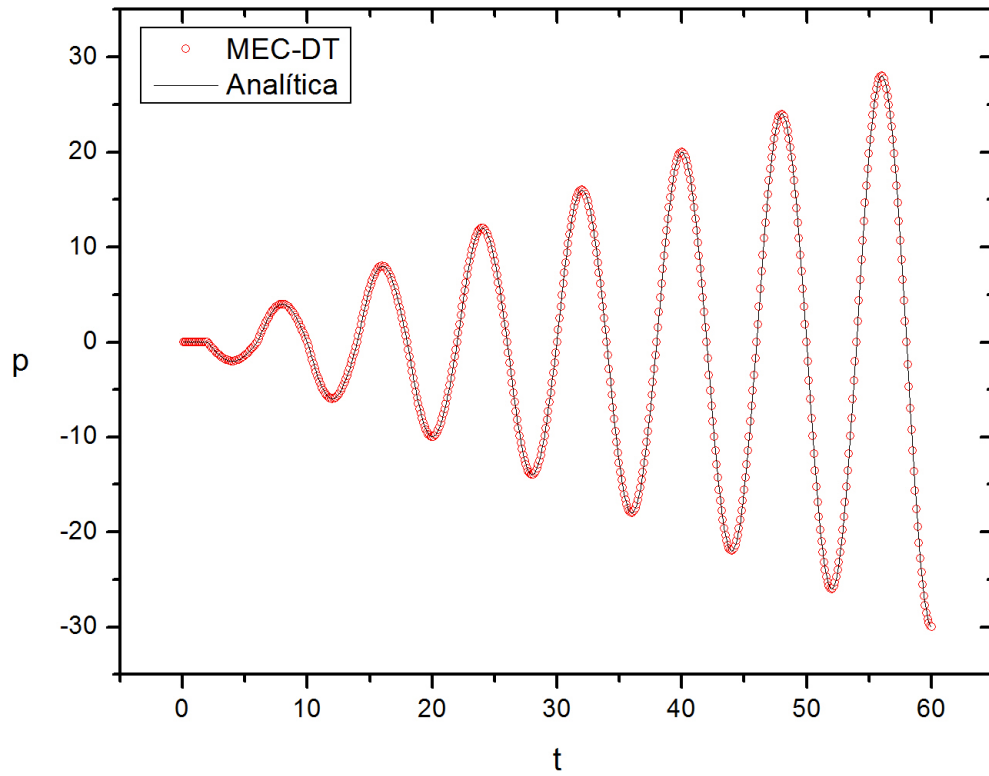


Figura 33: Reação no apoio em  $x = 0$

No domínio, o deslocamento é dado pela Figura 34.

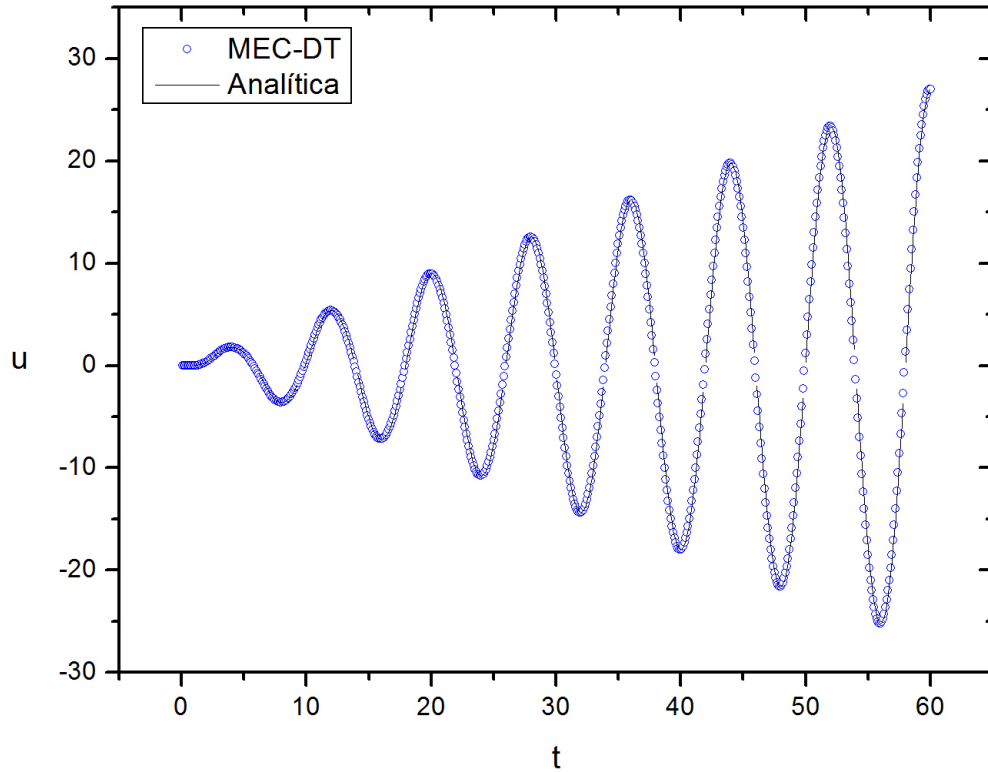


Figura 34: Deslocamento em  $x = 1,0$

Nota-se nos gráficos um comportamento ressonante. A solução numérica coincide com a analítica, que neste caso, obtém-se aplicando a regra de L'Hopital, quando  $n = 1$ , na equação (4.16)

$$\begin{aligned}
 u(x,t) = & x\text{sen}\psi t - \frac{4L}{\pi^2}[\text{sen}(\psi t) + \psi t\text{sen}(\psi t)]\text{sen}(\psi x) - \\
 & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\psi}{(\phi^2 - \psi^2)} \frac{8L}{(n\pi)^2} (-1)^n [\phi\text{sen}(\phi t) - \psi\text{sen}(\psi t)] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2L}\right).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

- Quando  $\psi = \frac{\pi}{3L}$ ;

O deslocamento no contorno é dado pela Figura 35.

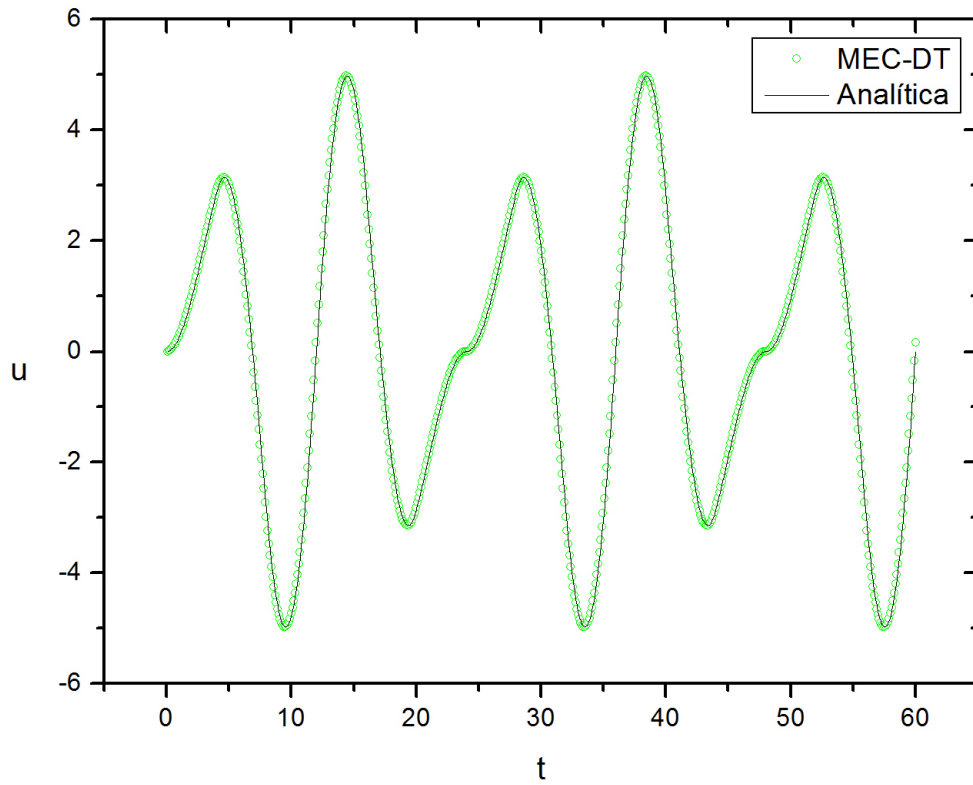


Figura 35: Deslocamento em  $x = L$

Em  $x = 0$  a reação no apoio é dada pela Figura 36.

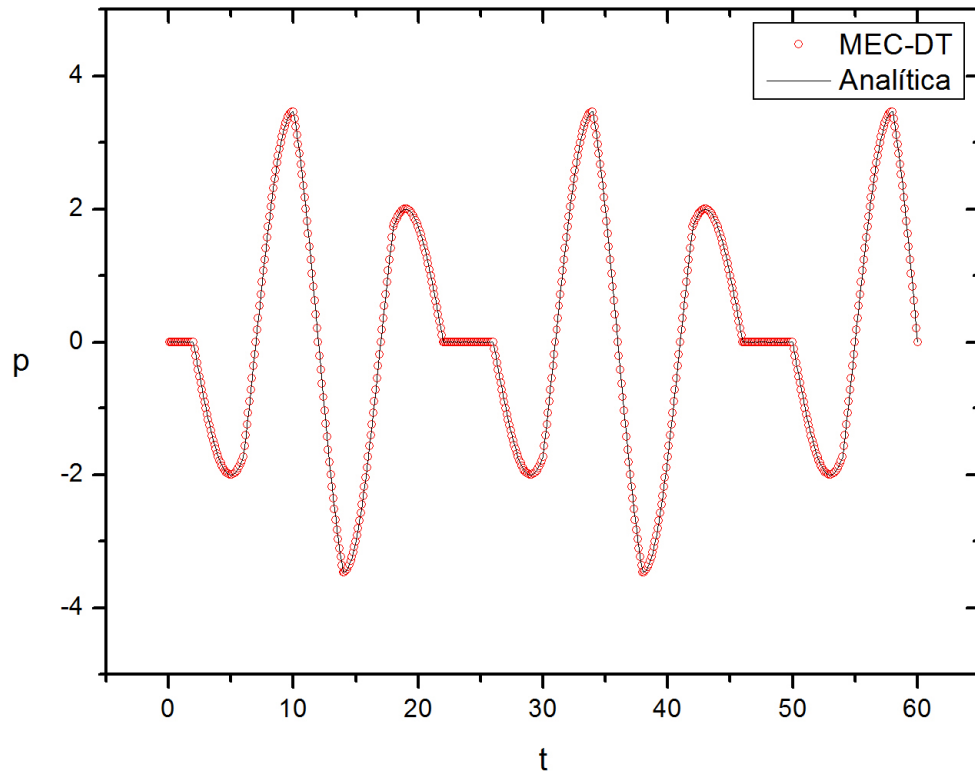


Figura 36: Reação no apoio em  $x = 0$

No domínio, o deslocamento é dado pela Figura 37.

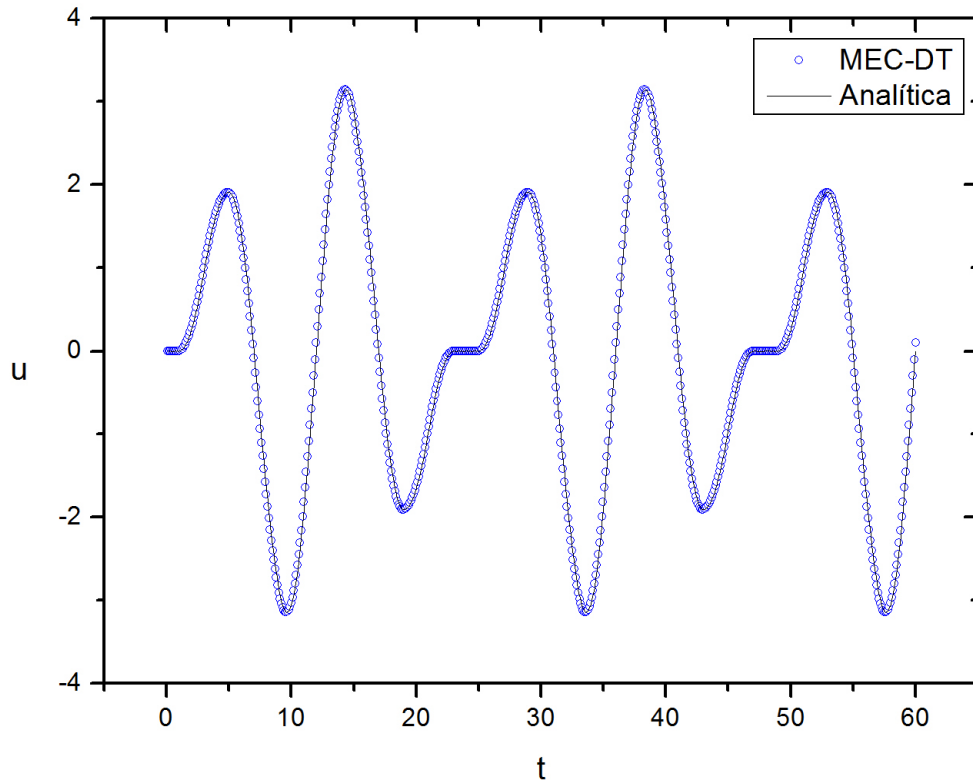


Figura 37: Deslocamento em  $x = 1,0$

Nota-se nos gráficos que a solução numérica coincide com a analítica.

Tanto para o Caso 1 quanto para o Caso 2 foram testados outros valores de  $\psi$ , para os quais, em alguns casos se obteve resultados semelhantes aos apresentados aqui, e em outros casos os resultados foram pouco relevantes.

## 5 CONCLUSÕES

Ao longo dos anos o MEC tem demonstrado ser uma ferramenta numérica que oferece uma base matemática bem estabelecida e que, pelo fato de ser um método relativamente novo, quando comparado a outros métodos numéricos, possui características próprias que o colocam no mesmo patamar dos demais. Além disso, para determinadas classes de problemas torna-se uma escolha mais adequada.

A escolha pelo tema abordado, deve-se ao fato que, os estudos da eletrodinâmica e do problema de propagação da onda escalar constituem uma das mais interessantes aplicações do MEC. Após o trabalho inicial de Mansur (MANSUR, 1983), muitas aplicações práticas foram apresentadas nos últimos anos demonstrando a eficiência e justificando o emprego do MEC para a solução de problemas que envolvem a variável “tempo”.

A principal contribuição deste trabalho foi desenvolver a formulação MEC-DT para o problema de propagação da onda escalar unidimensional, tendo em vista, até onde é do conhecimento da autora, que as formulações apresentadas até o momento envolviam apenas problemas bi e tridimensionais.

Do ponto de vista matemático, a formulação MEC-DT é muito elegante e de simples desenvolvimento, quando se domina as ferramentas matemáticas necessárias para o cálculo, além de produzir resultados com bastante precisão quando comparados com as soluções analíticas.

Os exemplos apresentados neste trabalho comprovam que na formulação MEC-DT os resultados são apurados, ou seja, tanto para os valores do contorno, quanto para os valores do domínio, a solução numérica obtida coincide com a solução analítica. Enquanto que nos gráficos de  $u(x, t)$  observa-se ausência de amortecimento, independente das

condições iniciais e de contorno, nos gráficos de " $p$  x  $t$ " nota-se ausência do fenômeno de Gibbs presente na solução analítica.

No estudo paramétrico pôde-se constatar que, empiricamente, para que se obtenha bons resultados é necessário que os valores de  $L$  e  $c$  sejam escolhidos de forma que  $\frac{1}{\eta}$  seja um valor inteiro e que  $c\Delta t < L$ .

As principais dificuldades acerca do desenvolvimento do método foi a implementação dos códigos computacionais. É necessário o domínio de uma linguagem de programação para testar os exemplos, tendo em vista que para se obter bons resultados, é importante a adoção de um número considerável de passos de tempo. Para isso fez-se uso da linguagem Fortran 95 e 2003, uma ferramenta computacional que, embora seja de simples manuseio, requer certa habilidade e conhecimento de lógica de programação para implementar os códigos.

## 5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

As sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros a partir do presente trabalho compreende:

1. Aplicar a equação integral de contorno para diferentes regiões do domínio com diferentes valores de  $c$ . Este procedimento dentro do MEC caracteriza as subregiões.
2. Desenvolver a formulação para a solução fundamental mantida constante no tempo.
3. Implantação de  $p$  linear e desenvolvimento da formulação análoga a apresentada por (MANSUR; CARRER; SIQUEIRA, 1998).

## Referências

- AGNANTIARIS, J. P.; POLYZOS, D.; BESKOS, D. E. **Some Studies on Dual Reciprocity BEM for Elastodynamic Analysis.** *Comput. Mech.*, n. 17, p. 270–277, 1996.
- AGNANTIARIS, J. P.; POLYZOS, D.; BESKOS, D. E. **Three-Dimensional Structural Vibration Analysis by the Dual Reciprocity BEM.** *Comput. Mech.*, n. 21, p. 372–381, 1998.
- ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method, Volume 2.* Chippenham: John Wiley & Sons, 2002.
- BATHE, K. J. *Finite Element Procedures.* New Jersey: Prentice Hall Inc., 1996.
- BESKOS, D. E. **Boundary Elements in Dynamic Analysis: Part II.** *Appl. Mech. Rev.*, n. 50, p. 149–197, 1997.
- BESKOS, D. E. **Dynamic Analysis of Structures and Structural Systems.** In: *Boundary Element Advances in Solid Mechanics.* Udine: CISM, 2003.
- BRAGA, C. L. R. *Notas de Física Matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2005.
- BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers.* London: Pentech Press, 1978.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course.* Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1989.
- CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Time-Domain BEM Analysis for the 2D Scalar Wave Equation: Initial Contributions to Space and Time Derivatives.** *Int. J. Numer. Methods Eng.*, n. 39, p. 2169–2188, 1996.
- CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Time-Dependent Fundamental Solution Generated by a not Impulsive Source in the Boundary Element Method Analysis of the 2D Scalar Wave Equation.** *Commun Numer. Methods*, n. 18, p. 277–285, 2002.
- CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Alternative Time-Marching Schemes for Elastodynamic Analysis with Domain Boundary Element Method Formulation.** *Comput. Mech.*, n. 34, p. 387–399, 2004.
- CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Solution of the Two-Dimensional Scalar Wave Equation by the Time Domain Time-Dependent Boundary Element Method: Lagrange Truncation Strategy in Time Integration.** *Struct. Eng. Math.*, n. 23, p. 263–278, 2006.

- CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. **Scalar Wave Equation by the Boundary Element Method: a D-BEM Approach with Constant Time-Weighting Functions.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering (Print)*, v. 81, p. 1281–1297, 2010.
- CARSLAW, H. S. *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.* 3. ed. New York: Dover Publications, 1930.
- CAUCHY, A. L. **Sur l'Équilibre et le Intérieur des Corps Considérés de Masses Continue.** *Exercices de Mathématiques*, v. 4, p. 293–319, 1829.
- CHIEN, C. C.; CHEN, Y. H.; CHUANG, C. C. **Dual Reciprocity BEM Analysis of 2D Transient Elastodynamic Problems by Time-Discontinuous Galerkin FEM.** *Eng. Anal Bound Elements*, n. 27, p. 611–624, 2003.
- CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. **A Smooth Fundamental Solution for 3D Time Domain BEM Formulations.** Eds. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald, H. Power, *Boundary Elements XVIII, Computational Mechanics Publications*, 1996.
- COLE, D. M.; KOSLOFF, D. D.; MINSTER, J. B. **A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics. I.** *Bull. Seis. Soc. America*, v. 68(5), p. 1331–1357, 1978.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.* New York: Wiley, 1989.
- CRUSE, T. A.; RIZZO, F. J. **A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I.** *J. Math. Anal. Appl.*, v. 22, p. 244–259, 1968.
- DEMIREL, V.; WANG, S. **Efficient Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Wave Propagation Problems.** *Appl. Math Model*, n. 11, p. 411–416, 1987.
- DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements in Dynamics.* Southampton, England: Computational Mechanics Publications, 1994.
- FRIEDMAN, M. B.; SHAW, R. **Diffraction of Pulses by Cylindrical Obstacles of Arbitrary Cross Section.** *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, E, n. 29, p. 40–46, 1962.
- GRAFF, K. F. *Wave Motion in Elastic Solids.* New York: Dover, 1991. 24-25 p.
- GREENBERG, M. D. *Advanced Engineering Mathematics.* 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1998. 1043-1044 p.
- HATZIGEORGIOU, G. D.; BESKOS, D. E. **Dynamic Elastoplastic Analysis of 3D Structures by the Domain/Boundary Element Method Formulation.** *Comput. Struct.*, n. 80, p. 339–347, 2002.
- HOUBOLT, J. C. **A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft.** *J. Aeronaut Sci.*, n. 17, p. 540–550, 1950.

- KONTONI, D. P. N.; BESKOS, D. E. **Transient Dynamic Elastoplastic Analysis by the Dual Reciprocity**. *Eng. Anal Bound Elements*, n. 12, p. 1–16, 1993.
- LAMB, H. **On the Propagation of Tremors Over the Surface of an Elastic Solids**. *Philos. Trans. Royal Soc., A*, n. 203, p. 1–42, 1904.
- LOVE, A. E. H. **Some Problems of Geodynamics**. *Cambridge Univ. Press.*, Cambridge, p. 165–178, 1911.
- LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. New York: Dover, 1944.
- MANSUR, W. J. **A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method**. Tese (Ph. D.) — Southampton University, 1983.
- MANSUR, W. J.; BREBBIA, C. A. **Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by Scalar Wave Equation**. *Appl. Math. Modeling*, v. 6, p. 307–311, 1982.
- MANSUR, W. J.; CARRER, J. A. M.; SIQUEIRA, E. F. N. **Time Discontinuous Linear Traction Approximation in Time Domain BEM Scalar Wave Propagation Analysis**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering (Print)*, v. 42, p. 667–683, 1998.
- MANSUR, W. J.; SILVA, W. de L. **Efficient Time Truncation in Two-Dimensional BEM Analysis of Transient Wave Propagation Problems**. *Earthquake Eng. Estruct. Dyn.*, n. 21, p. 51–63, 1992.
- NAKAO, R. **Aplicação da Equação da Onda na Análise do Comportamento de Estacas Cravadas**. Tese (M. Sc.) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1981.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. **A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements**. *Applied Mathematical Modelling* 7, p. 157–162, 1983.
- NAVIER, C. L. M. H. **Mémoire Sur les Lois de l'Équilibre et the Mouvement des Corps Solides Élastiques**. *Mém. Acad. Sci. Inst.*, France, v. 7, p. 375–393, 1827.
- NEWMARK, N. M. **A Method of Computation for Structural Dynamics**. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, n. 85, p. 67–94, 1959.
- NISHIKAVA, L. K. **Análise Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno com o Esquema  $\theta$ -Linear**. Tese (D. Sc.) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- NOWAK, A. J. **Application of the Multiple Reciprocity BEM Nonlinear Potencial Problems**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 16, p. 323–332, 1995.
- OLIVEIRA, E. C. de. **Funções Especiais com Aplicações**. São Paulo: Livraria da Física, 2005. 228-232 p.

- PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. W. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. London: Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.
- PAULA, F. A.; TELLES, J. C. F. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Southampton, London: Computational Mechanics Publications, 1989.
- PEIRCE, A.; SIEBRITS, E. **Stability Analysis and Design of Time-Stepping Schemes for General Elastodynamic BE Models**. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 40, p. 319–325, 1997.
- POISSON, S. D. **Mémoire Sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps Élastics**. *Mém. Acad. Sci.*, Paris, n. 8, p. 357–570, 1829.
- RAYLEIGH, L. **On Waves Propagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid**. *Proc. London Math. Soc.*, n. 17, p. 4–11, 1885.
- RIZZO, F. J. **An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics**. *Q. Appl. Math.*, v. 25, p. 83–95, 1967.
- SENNA, A. M. S. de. *Uma Nova Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise de Propagação de Ondas Escalares*. Tese (D. Sc.) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.
- SOARES-JR., D.; MANSUR, W. J. **Compression of Time Generated Matrices in Two-Dimensional Time Domain Elastodynamic BEM Analysis**. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, n. 61, p. 1209–1218, 2004.
- SOUZA, L. A.; CARRER, J. A. M.; MARTINS, C. J. **A Fourth Order Finite Difference Method Applied to Elastodynamics: Finite element and boundary Element Formulations**. *Struct. Eng. Mech.*, n. 17, p. 735–749, 2004.
- STEPHENSON, G. *An Introduction to Partial Differential Equations for Sciences Students*. London: Longman, 1970.
- TIPLER, P. A. *Física para Cientistas e Engenheiros, Volume 1*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. 416-417 p.
- WILSON, E. L.; FARHOOMAND, I.; BATHE, K. J. **Non-Linear Dynamic Analysis of Complex Structures**. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, n. 1, p. 241–252, 1973.
- YU, G.; MANSUR, W. J.; CARRER, J. A. M. **The linear  $\theta$ -Method for 2D Elastodynamic BE Analysis**. *Computational Mechanics*, v. 24, p. 82–89, 1999.
- YU, G.; MANSUR, W. J.; CARRER, J. A. M.; GONG, L. **A Linear  $\theta$ -Method Applied to 2D Time-Domain BEM**. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, v. 14, p. 1171–1179, 1998.
- YU, G.; MANSUR, W. J.; CARRER, J. A. M.; GONG, L. **Time Weighting in Time Domain BEM**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 22, p. 175–181, 1998.

YU, G.; MANSUR, W. J.; CARRER, J. A. M.; GONG, L. **Stability of Galerkin and Collocation Time Domain Boundary Element Methods as Applied to the Scalar Wave Equation.** *Computers and Structures*, v. 74, p. 495–506, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite Elements and Approximation.* New York: Dover Publications, 2006.

## APÊNDICE A – Dedução da Equação da Onda Unidimensional

A dedução da equação da onda é feita por meio da aplicação das Leis de Newton a uma barra de seção transversal  $A$ , módulo de elasticidade  $E$  e massa específica  $\rho$  (NAKAO, 1981). Considerando um elemento  $dx$  da barra, situado entre  $x$  e  $x + dx$ , as tensões que atuam nestas direções são, respectivamente,  $T_x$  e  $T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx$  e as deformações específicas correspondentes são  $-\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ , conforme a Figura 38.

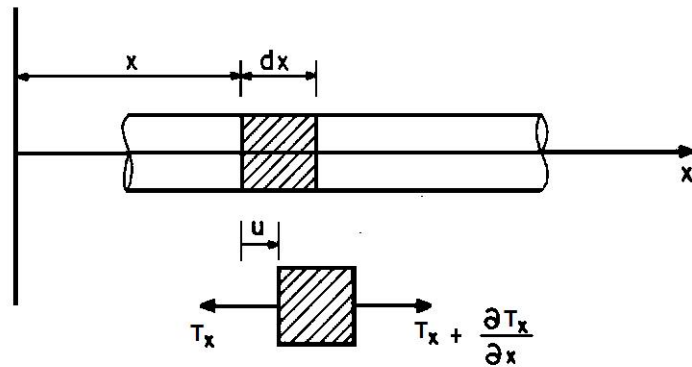


Figura 38: Tensões na barra

A força resultante na direção  $x$  é

$$F_x = -T_x A + (T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx) A = \frac{\partial T_x}{\partial x} dx A. \quad (\text{A.1})$$

De acordo com a segunda lei de Newton, esta equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx A = A dx \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.2})$$

ou

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.3})$$

Sendo a deformação na direção  $x$  igual a  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , a tensão  $T_x$  pode ser escrita como

$$T_x = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{A.4})$$

onde, derivando em relação a  $x$ , tem-se:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{A.5})$$

Logo, igualando (A.3) com (A.5), a equação do movimento é dada por

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  é a velocidade de propagação da onda.

A equação (A.7) é a equação da onda unidimensional, cuja solução é da forma:

$$u(x,t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct), \quad (\text{A.8})$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções arbitrárias.

Outra forma de deduzir a equação da onda é por meio da aplicação das leis de Newton ao movimento de um segmento de corda. Então, considerando um segmento de corda, como mostrado na Figura 39 e admitindo que o segmento se desloca verticalmente,

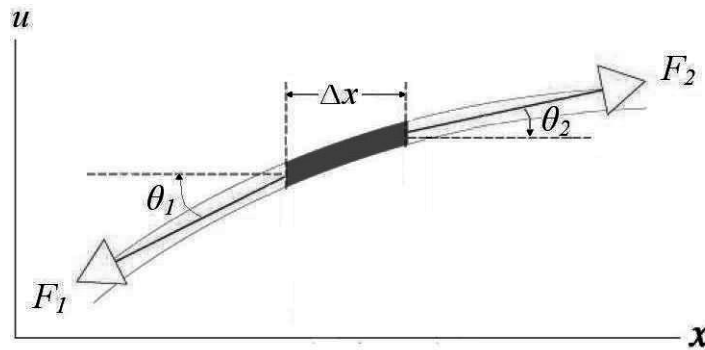


Figura 39: Segmento de corda tensionada

a força resultante nesta direção é dada por

$$F = F_2 - F_1 = F \text{sen}\theta_2 - F \text{sen}\theta_1, \quad (\text{A.9})$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são as forças de tensão nas extremidades da corda,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são os ângulos formados com a horizontal e  $F$  é a força de tensão na corda. Como os ângulos são pequenos pode-se fazer  $\text{sen}\theta \approx \text{tg}\theta$ . Então a resultante das forças verticais que atuam sobre o segmento é

$$F = F(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) \approx F(\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1). \quad (\text{A.10})$$

A tangente do ângulo entre a corda e a horizontal é o coeficiente angular  $S$  ou inclinação da curva, ou seja, é a derivada parcial de  $u(x, t)$  em relação a  $x$ , com  $t$  constante:

$$S = \text{tg}\theta = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (\text{A.11})$$

Portanto

$$F = F(S_2 - S_1) = F\Delta S, \quad (\text{A.12})$$

em que  $S_1$  e  $S_2$  são os coeficientes angulares em cada extremidade do segmento e  $\Delta S$  é a variação da inclinação. Pela 2ª Lei de Newton sabe-se que

$$F = m_0 a_0, \quad (\text{A.13})$$

onde  $m_0 = \mu\Delta x$ , com  $\mu$  sendo a densidade linear da corda;  $\Delta x$  o comprimento aproximado do segmento e  $a_0 = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  a aceleração da corda. Logo

$$F = \mu\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (\text{A.14})$$

Igualando a equação (A.12) com a equação (A.14), obtém-se

$$F\Delta S = \mu\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

ou

$$F \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (\text{A.16})$$

No limite de  $\Delta x \rightarrow 0$  tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (\text{A.17})$$

Logo, a equação (A.16) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (\text{A.18})$$

onde  $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$  é a velocidade de propagação da onda no segmento de corda.

A equação da onda é uma equação Diferencial Parcial (EDP), linear, homogênea, de segunda ordem e do tipo hiperbólica (TIPLER, 2000).

## APÊNDICE B – O Delta de Dirac e a Função de Heaviside

Para definirmos o Delta de Dirac considera-se a função de distribuição  $\delta_n(x)$  dada por

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{se } |x| < n \\ 0 & \text{se } |x| > n, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

de onde segue imediatamente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = \int_{-n}^n \frac{1}{2n} dx = \frac{1}{2n}(n + n) = 1. \quad (\text{B.2})$$

O Delta de Dirac é definido através do seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow 0} \delta_n(x) = \delta(x), \quad (\text{B.3})$$

que fornece

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

bem como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{B.5})$$

Da equação (B.3) verifica-se, pelo teorema do valor médio, que o Delta de Dirac possui a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{B.6})$$

ou ainda, de forma mais geral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x) dx = f(x'), \quad (\text{B.7})$$

que pode ser interpretado como uma propriedade de filtragem, ou seja, de todos os possíveis valores de  $f(x)$  apenas o valor calculado em  $x = x'$  contribui. Logo,  $\delta(x - x')$  é definido como

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x' \\ \infty & \text{se } x = x'. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

No caso de duas variáveis tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')\delta(y - y')f(x,y)dx = f(x',y'). \quad (\text{B.9})$$

Outras propriedades importantes do Delta de Dirac são:

$$x\delta(x) = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{B.11})$$

$$\delta(x'x) = \frac{1}{x'}\delta(x), a > 0. \quad (\text{B.12})$$

A Função de Heaviside definida como  $H(x - x')$ , também chamada de função escada, é uma função descontínua, dada por

$$H(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{se } x > x' \\ 0 & \text{se } x < x'. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Graficamente tem-se

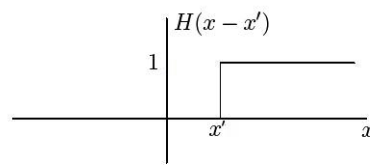


Figura 40: Função de Heaviside

Define-se também

$$1 - H(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{se } x < x' \\ 0 & \text{se } x > x'. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Pode-se relacionar a Função de Heaviside com o Delta de Dirac calculando a

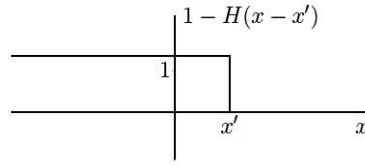


Figura 41: Definição da função de Heaviside

integral de  $\delta(x - x')$  no intervalo  $-\infty$  até  $\xi$ , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\xi} \delta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < x' \\ 1 & \text{se } \xi > x' \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

ou, pela definição da Função de Heaviside

$$\int_{-\infty}^{\xi} \delta(x - x') = H(x - x'). \quad (\text{B.16})$$

Desta expressão, utilizando a regra de Leibniz, derivando formalmente ambos os lados, pode-se escrever

$$\delta(x - x') = \frac{d}{dx} H(x - x'). \quad (\text{B.17})$$

O Delta de Dirac é conhecido na literatura como Função Delta, porém através da equação (B.17) pode-se observar que não se trata de uma função no sentido usual do cálculo, uma vez que o lado direito desta igualdade é o diferencial de uma função descontínua (OLIVEIRA, 2005).

## APÊNDICE C – Solução Fundamental Dependente do Tempo

Considera-se a equação da onda escalar unidimensional dada por

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (\text{C.1})$$

A equação que determina a solução fundamental é

$$\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2} = \delta(x)\delta(t). \quad (\text{C.2})$$

A sua Transformada de Fourier  $\tilde{G}(\xi, \tau)$  obedece à equação

$$\left(\frac{\tau^2}{c^2} - \xi^2\right)\tilde{G}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi}. \quad (\text{C.3})$$

Logo,

$$\tilde{G}(\xi, \tau) = \frac{c^2}{2\pi} \frac{1}{\tau^2 - \xi^2 c^2}. \quad (\text{C.4})$$

Conseqüentemente,

$$G(x,t) = \frac{c^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - \xi^2 c^2} d\tau \right) d\xi. \quad (\text{C.5})$$

A integral em  $d\tau$  é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{\tau^2 - \xi^2 c^2} d\tau = 2\pi i \frac{e^{it\xi c} - e^{-it\xi c}}{2\xi c}. \quad (\text{C.6})$$

Obtemos assim,

$$G(x,t) = \frac{c^2}{(2\pi)^2} \frac{2i\pi}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi(x+ct)} - e^{-i\xi(x-ct)}}{\xi} d\xi. \quad (\text{C.7})$$

Integrando como “valor principal”, onde  $\epsilon$  denota o raio na equação paramétrica

$$G(x,t) = -\frac{c}{4} [\epsilon(x+ct) - \epsilon(x-ct)], \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\epsilon(u) = \begin{cases} +1 & \text{se } u > 0 \\ -1 & \text{se } u < 0. \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Como  $t > 0$ , temos

$$G(x,t) = -\frac{c}{4} \begin{cases} 1 - \epsilon(x-ct) & \text{se } x > 0 \\ \epsilon(x+ct) + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Como

$$H(u) + H(-u) = 1 \quad \text{e} \quad H(u) - H(-u) = \epsilon(u), \quad (\text{C.11})$$

pois

$$H(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u < 0 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

e

$$H(-u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u > 0 \\ 1 & \text{se } u < 0, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

obtemos

$$G(x,t) = -\frac{c}{2} \begin{cases} H(ct-x) & \text{se } x > 0 \\ H(ct+x) & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

ou seja

$$G(x,t) = -\frac{c}{2} H(t) H(ct - |x|), \quad (\text{C.15})$$

e finalmente

$$G(x-\xi, t-\tau) = -\frac{c}{2} H(t-\tau) H[c(t-\tau) - |x-\xi|]. \quad (\text{C.16})$$

Fisicamente, esta expressão representa o movimento elementar de uma corda num ponto  $x$ , no instante  $t$ , devido a uma pequena perturbação ocorrida no ponto  $\xi$  e

no instante  $\tau$  anterior a  $t$ , de acordo, portanto, com o princípio da causalidade (BRAGA, 2005).

Uma forma alternativa de se obter a solução fundamental dependente do tempo está em (GRAFF, 1991), onde a solução é calculada utilizando a Transformada de Fourier e a Transformada de Laplace. Outra maneira de calcular é apresentado em (GREENBERG, 1998), esta solução é conhecida como Solução de d'Alembert.