

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernando de Ávila Silva

FOLHEAÇÕES TRANSVERSAIS À ESFERA TRIDIMENSIONAL

Curitiba, 2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fernando de Ávila Silva

FOLHEAÇÕES TRANSVERSAIS À ESFERA TRIDIMENSIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.

Curitiba, 2011.

À minha mãe, meu pai, irmão e irmãs.

Agradecimentos

Essa é uma parte difícil de se escrever, pois acaba-se não falando sobre várias pessoas, não por questões de maior ou menor agradecimento mas por espaço. Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles cujos nomes não forem citados.

Não posso começar a falar sem lembrar dos esforços e apoio de minha mãe, Dona Tereziinha. Creio que poderia falar páginas e mais páginas sobre ela, entretanto creio que seja suficiente lembrar que uma mulher simples, de origens humildes, que já se orgulha das grandes conquistas dos meus irmãos pode também hoje ver seu caçula obtendo mais uma grande vitória. Espero também poder estar dando muito orgulho ao meu pai, Geraldo, que mesmo estando longe, lá em Minas, tenho certeza que está sempre torcendo por mim. Quero dizer aos meus irmãos Carlos, Lilian e Eunice que eu jamais teria conseguido se não fosse por seu carinho e sua proteção. Uma vez falando na Eunice devo agradecer também ao meu cunhado Sílvio pelo apoio, respeito e evidentemente por seus filhos, meus sobrinhos, Mateus e Carolina que nos prestigiam com a felicidade que só duas crianças podem dar.

Agradeço a Ong Em Ação, não só pelo cursinho pré-vestibular que permitiu meu ingresso na universidade, mas também pelas grandes pessoas que conheci lá como, por exemplo, Marcelo, Dani, Emanuel, Ximá, Fábio Bordignon e Ana Amorim. É também consequência deste cursinho eu ter conhecido pessoas que hoje chamo de amigos: Ricardo, Lilian, Thiago, Wilton, Tiago, Kelly, Jacke, Euler e vários outros com os quais compartilho maravilhosos momentos. Num espaço em que falo dos amigos agradeço também ao meu orientador, Alexandre Kirilov, pela dedicação e confiança neste trabalho e no que ainda está por vir. Agradeço também ao professor Carlos Henrique por sua amizade e seus esforços para criar um ambiente de discussões matemáticas. Ao PPGMA, o qual agradeço pela oportunidade dos estudos no mestrado e ao seu corpo docente.

Por último, numa posição de destaque, agradeço minha noiva Pamela (...escrevo-te estas mal traçadas linhas...) por toda sua paciência, carinho e seu apoio sem o qual muitas coisas que desejo não teriam o porquê de um dia serem conquistadas.

“Se os fatos não se adequam à teoria, mude os fatos.”

Albert Einstein

“Penso que cumprir a vida seja simplesmente compreender a marcha e ir tocando em frente.”

Almir Sater e Renato Teixeira

“Complicações surgiram, continuaram e foram superadas.”

Capitão Jack Sparrow

“Ponto de Aratatância”

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a existência, bem como a quantidade, de folhas compactas de uma folheação da esfera tridimensional, no caso em que esta folheação é determinada pela interseção das curvas integrais de um campo vetorial holomorfo definido num aberto de \mathbb{C}^2 . Mais especificamente prova-se que quando a esfera é transversal à folheação gerada pelas curvas integrais do campo holomorfo, então a folheação induzida sobre a esfera deverá possuir uma, duas ou infinitas folhas compactas.

Palavras-chave: *Campos vetoriais holomorfos, campos vetoriais sobre a esfera, folhas compactas, domínios de Poincaré e de Siegel, transversalidade.*

Abstract

The objective of this work is to investigate the existence and the number of compact leaves of a foliation of three-dimensional sphere, in the case where this foliation is determined by the intersection of the integral curves of a vector field defined on an open subset of \mathbb{C}^2 . More specifically it can be shown that when the sphere is transverse to the foliation generated by the integral curves of holomorphic field, then the foliation induced on the sphere should have one, two or infinite compact leaves.

Keywords: *Holomorphic vector fields, vector fields on the three-dimensional sphere, compact leaves, Poincaré and Siegel domains, transversality.*

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Variedades e Folheações	4
1.1 Variedades Diferenciáveis	4
1.1.1 Espaço Tangente e Derivada	9
1.1.2 Campos Vetoriais Diferenciáveis	14
1.1.3 Campos Vetoriais Holomorfos	16
1.2 Folheações	18
2 Transversalidade e Campos Vetoriais Lineares	27
2.1 Domínios de Poincaré e de Siegel	27
2.2 Campos Lineares	29
3 Campos Holomorfos	35
3.1 Campos de Poincaré-Dulac	35
3.1.1 Primeira classe de exemplos	36
3.1.2 Segunda classe de exemplos	40
3.1.3 Terceira classe de exemplos	43
3.2 Campos Holomorfos	46
3.2.1 Conjectura de Seifert	49
Referências Bibliográficas	51

Introdução

"Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que, dans la grande, généralité des cas qui se présentent, on ne peut pas intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeurerait insolubles. Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples"(...)

H. Poincaré, 1881

Durante os anos da década de 1880, numa série de quatro artigos intitulados *Mémoire sur Les Courbes Définies par une Équation Différentielle*, H. Poincaré propôs uma nova direção no estudo de equações diferenciais: o estudo qualitativo das curvas soluções definidas por uma equação diferencial, com o objetivo de compreender suas características geométricas e propriedades topológicas.

Este estudo deu origem a um novo ramo da Topologia – Geometria, denominado *Topologia das Folheações*. Note que o termo folheação consegue capturar, intuitivamente, a forte ligação geométrica que existe entre soluções de uma equação diferencial e a aparência geométrica do conjunto de curvas soluções, especialmente no caso de folheações definidas pelas curvas soluções de campos vetoriais lineares e holomorfos, objetos de estudo deste trabalho.

Um primeiro exemplo para mostrar a necessidade de se estudar equações diferenciais de um ponto de vista geométrico e topológico que surge nos trabalhos de Poincaré, e posteriormente em trabalhos de Siegel, é a possibilidade de um campo vetorial holomorfo poder ser estudado como um campo linear, mesmo que localmente, na vizinhança de uma singularidade isolada. Também podemos citar problemas mais conhecidos, tais como: sob que condições pode-se garantir que um campo vetorial sobre uma variedade diferenciável possua alguma sin-

gularidade, respondido através do teorema de Poincaré-Hopf; se todo campo vetorial definido no toro possui uma solução periódica, ou ainda, quais as condições para garantir que todas as curvas integrais sejam densas; estes dois últimos problemas foram resolvidos nos trabalhos de Denjoy e Siegel.

O estudo sobre existência de curvas integrais periódicas foi também levado para um novo "lugar" geométrico: a esfera tridimensional \mathbb{S}^3 . Com trabalhos nesta área, Seifert conjecturou que: *todo campo não singular, de classe C^1 , sobre a esfera tridimensional, possui soluções periódicas, ou seja, folhas compactas*. A resposta, negativa, para esse problema foi dada por Schweitzer em 1972 que usou argumentos topológicos e construções geométricas, como o *plug de Wilson* e o campo vetorial de Denjoy-Siegel para construir um campo de classe C^1 que não possui nenhuma órbita periódica. Mais tarde, já em 1994, Krystyna Kuperberg exibiu um contra-exemplo de classe C^∞ para essa conjectura.

Nota-se assim um grande interesse em se estudar a existência de soluções periódicas para campos vetoriais definidos em variedades fechadas, particularmente sobre esferas. Nosso trabalho tem como tema principal investigar o seguinte problema:

Seja X um campo vetorial sobre a esfera \mathbb{S}^3 , obtido pela interseção de um campo vetorial holomorfo Z , em \mathbb{C}^2 , com \mathbb{S}^3 . É possível dizer se X possui folhas compactas? E, caso existam folhas compactas, é possível calcular sua quantidade e determinar sua localização sobre \mathbb{S}^3 ?

Nossa estratégia para responder a essas perguntas é começar definindo precisamente conceitos como folheação e campos vetoriais e verificando que as curvas integrais de um campo vetorial são de fato as folhas de uma folheação. Também apresentamos condições necessárias e suficientes para garantir que a restrição a \mathbb{S}^3 de uma folheação linear \mathcal{F} , definida sobre \mathbb{C}^2 , seja uma folheação sobre \mathbb{S}^3 . Aqui usaremos o conceito de transversalidade entre variedades, conforme apresentado no contexto da Topologia Diferencial.

Após cumpridos os pré-requisitos passaremos para a solução do problema proposto. Neste processo trabalharemos com alguns argumentos interessantes como, por exemplo, exigir a transversalidade da folheação gerada pelo campo com a esfera implica em se estudar o comportamento dos autovalores da parte linear deste campo. Tal comportamento diz respeito sobre localização geométrica dos autovalores no plano complexo \mathbb{C} , em particular tal condição será necessária e suficiente para um campo linear diagonalizável ser transversal a \mathbb{S}^3 .

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos, de forma sucinta, os principais conceitos e resultados para a leitura deste texto. Dentre tais conceitos destacam-se campos vetoriais diferenciáveis e holomorfos, transversalidade e folheações. Em particular, o exemplo mais importante de variedade para nosso estudo é a esfera \mathbb{S}^3 , já no caso das folheações o exemplo de interesse são aquelas cujas folhas são curvas integrais de campos vetoriais transversais a esfera.

No segundo capítulo iniciamos a procura por respostas do problema principal considerando o caso particular em que o campo holomorfo Z é linear. Para tanto utilizamos um resultado obtido por Guckenheimer, referência [6], que estabelece precisamente qual é o comportamento que os autovalores deste campo linear devem ter para que a folheação, determinada por tal campo, seja transversal à esfera.

Por fim, apresentamos no capítulo 3 as respostas obtidas na resolução do problema proposto. Começamos essa tarefa com três importantes classes de exemplos de campos vetoriais em \mathbb{C}^2 , que chamamos de *Campos de Poincaré-Dulac*. Então partimos em direção a resolução do problema utilizando como motivação resultados obtidos por Ito nas referências [8] e [9]. Em especial temos o principal resultado desta dissertação:

Se a esfera é transversal à folheação gerada pelas curvas integrais de um campo holomorfo, então a folheação induzida sobre a esfera deverá possuir uma, duas ou infinitas folhas compactas.

Concluimos o trabalho observando que a conjectura de Seifert é verdadeira para uma classe particular de campos vetoriais sobre \mathbb{S}^3 .

Capítulo 1

Variedades e Folheações

O presente capítulo, dividido nas seções *Variedades Diferenciáveis* e *Folheações*, tem como objetivo, além de fixar notações, estabelecer os fatos necessários para a leitura dos principais resultados deste trabalho. Uma abordagem mais detalhada destes conceitos pode ser obtida nos textos [12] e [11]. Ainda nesta seção apresentamos o conceito de **transversalidade** que desempenha grande importância neste trabalho. Como referência para os resultados sobre transversalidade usamos o texto [7]. Na segunda seção apresentamos os conceitos básicos de folheações utilizados neste trabalho, sendo que usamos para este estudo o livro [3].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Um espaço topológico M de Hausdorff, com base enumerável, é uma **variedade topológica** de dimensão n se M é localmente Euclidiano, ou seja, dado qualquer ponto $p \in M$, existem um aberto $U \subset M$, com $p \in U$ e um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow W$, com $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O par (U, φ) é chamado de **carta** sobre o ponto p . Evidentemente pode existir mais de uma carta para cada ponto de M , por esse motivo é então natural querer compreender as implicações em se "trocar de cartas", ou seja, fazer uma **mudança de coordenadas**.

Definição 1.1 *Seja M uma n -variedade topológica. Se (U, φ) e (V, ψ) são duas cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então o homeomorfismo*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é chamado de mudança de coordenadas de φ para ψ .

Podemos ainda considerar a regularidade destas mudanças de coordenadas e, naturalmente, estudar o caso em que todas possuem a mesma classe de diferenciabilidade. Temos então:

Definição 1.2 Um **Atlas** de classe C^r para uma variedade topológica M , de dimensão n , é uma coleção de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in \Gamma\}$, tais que a família de abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ é uma cobertura de M e cada aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é de classe C^r , para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Um atlas \mathcal{A} é dito **máximal** se não está contido propriamente em nenhum outro atlas, neste caso diz-se ainda que \mathcal{A} é uma **estrutura diferenciável**. Quando todas as mudanças de coordenadas um atlas são aplicações de classe C^∞ diz-se que este é **suave**. O diagrama abaixo exhibe a mudança de coordenada $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & U_\alpha \cap U_\beta & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)
 \end{array}$$

Assim é razoável considerar a classe das variedades topológicas que possuem uma estrutura diferenciável de classe C^r . Temos assim:

Definição 1.3 Uma **Variedade Diferenciável** de classe C^r , e dimensão n , é um par (M, \mathcal{A}) sendo M uma n -variedade topológica e \mathcal{A} uma estrutura diferenciável de classe C^r .

Usaremos a notação M^n , ou simplesmente M para indicar a variedade (M, \mathcal{A}) , quando estiverem claros o atlas \mathcal{A} e a dimensão n . Se \mathcal{A} é um atlas suave diremos que a variedade é suave.

Neste texto, a menos de menção contrária, todas as variedades serão suaves, logo diremos variedade diferenciável ou simplesmente variedade.

Um ponto importante do estudo de variedades diferenciáveis é a de regularidade de aplicações entre duas variedades M e N : Dada um aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$, dizemos que f é **diferenciável** de classe C^r , no ponto $p \in M$, se existem cartas (U, φ) e (V, ψ) , com $p \in U$ e $f(p) \in V$ tais que a aplicação

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (1.1)$$

é de classe C^r em $\varphi(p)$. Note que esta definição independe da escolha das cartas, pois se tomarmos cartas $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ sobre p e $f(p)$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} \\ &= (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \\ &= (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ F \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})\end{aligned}$$

Logo se F é diferenciável em $\varphi(p)$, então \tilde{F} também é diferenciável em $\tilde{\varphi}(p)$. De modo geral diremos que a aplicação f é diferenciável em M , se for diferenciável em cada ponto $p \in M$.

Alguns importantes exemplos de variedades são listados abaixo.

Exemplo 1.1 (Espaço Euclidiano n dimensional)

O espaço \mathbb{R}^n é trivialmente uma variedade suave.

Exemplo 1.2 (Esfera n -dimensional)

A esfera $\mathbb{S}^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1\}$, é uma variedade suave de dimensão n . Para verificar isto precisamos apenas construir um atlas suave para a esfera. Defina os subconjuntos abertos de \mathbb{S}^n :

$$\begin{aligned}U_i^+ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_i > 0\}, \\ U_i^- &= \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n; x_i < 0\},\end{aligned}$$

em que $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Considere agora as aplicações $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definidas por

$$\varphi_i^\pm(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}),$$

sendo que \hat{x}_i indica a omissão da coordenada x_i . As aplicações acima são lineares, logo suaves, e também bijetoras sobre sua imagem, possuindo inversa suave dada por

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \|u\|^2}, u_i, \dots, u_n),$$

logo os pares (U_i^\pm, φ^\pm) , para $i = 1, \dots, n + 1$, formam uma estrutura suave sobre \mathbb{S}^n .

Exemplo 1.3 (Subvariedade Aberta)

Se (M^n, \mathcal{A}) é uma variedade de classe C^r e $W \subset M$ é um aberto, então a estrutura diferenciável \mathcal{A}_W abaixo torna W um variedade de mesma classe e dimensão que M .

$$\mathcal{A}_W = \{(J_\alpha, \psi_\alpha); J_\alpha = W \cap U_\alpha, \psi_\alpha = \varphi|_{W \cap U_\alpha}, \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

Exemplo 1.4 (Produto cartesiano)

Sejam M_1, \dots, M_k variedades de classe C^r e dimensão n_1, \dots, n_k , respectivamente. Então o produto $M_1 \times \dots \times M_k$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n = n_1 + \dots + n_k$ e classe C^r . De fato, basta considerar a topologia produto e cartas (U_i, φ_i) de M_i , para cada $i = 1, \dots, k$, e definir as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_1 \times \varphi_2 \times \dots \times \varphi_k : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k &\longrightarrow \mathbb{R}^{n_1 + \dots + n_k} \\ (p_1 \times \dots \times p_k) &\longmapsto (\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_k)). \end{aligned}$$

Exemplo 1.5 (Toro)

Diretamente dos exemplos anteriores temos que o toro $\mathbb{T}^n \doteq \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$, n vezes, é uma variedade suave.

Exemplo 1.6 (Grupo de Lie)

Um **Grupo de Lie** é uma variedade diferenciável G que possui uma estrutura de grupo no sentido algébrico tal que as aplicações $m : G \times G \longrightarrow G$ e $i : G \longrightarrow G$ dadas por $m(g, h) = g * h$ e $i(g) = g^{-1}$ são suaves. Alguns exemplos conhecidos de Grupos de Lie são:

- O conjunto das matrizes reais e invertíveis $GL(n, \mathbb{R})$;
- O círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, munido do produto complexo

$$(a, b)(c, d) \doteq (ac - bd, bc + ad).$$

- O produto cartesiano de grupos de Lie $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$. Em particular o toro \mathbb{T}^n é um grupo de Lie.

Podemos considerar ainda uma classe um pouco mais geral de variedades; **Variedades com fronteira**.

Defina \mathcal{H}^n o semi-espaço

$$\mathcal{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \ x_n \geq 0\}. \quad (1.2)$$

Dizemos que um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, é uma **variedade topológica de dimensão n com fronteira**, se em cada ponto existe uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathcal{H}^n . Note que de (1.2) temos que a fronteira $\partial \mathcal{H}^n$ de \mathcal{H}^n é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_n = 0$. Assim, se M é uma variedade com fronteira dizemos que um ponto na imagem inversa de $\partial \mathcal{H}^n$ é chamado de **ponto de fronteira** de M , (figura¹ (1.1)).

O conjunto dos pontos de fronteira de M é denotado por ∂M .

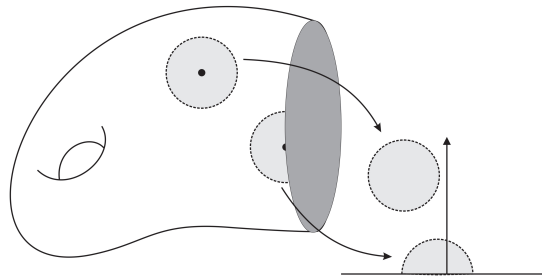


Figura 1.1: Variedade com fronteira

¹Figura retirada de [11]

Teorema 1.1 *Seja M uma variedade de dimensão n com fronteira ∂M . Então o conjunto dos pontos interiores de M , $\text{int}(M) = M \setminus \partial M$, é uma variedade de dimensão n e ∂M é uma variedade, sem fronteira, de dimensão $n - 1$.*

Demonstração: Ver [7], página 59. ■

Definição 1.4 *Uma variedade diferenciável M é dita **fechada** se é compacta e $\partial M = \emptyset$.*

As variedades trabalhadas neste texto são, a menos de menção contrária, variedades fechadas.

1.1.1 Espaço Tangente e Derivada

Nesta seção apresentamos os conceitos de vetor tangente a uma curva, espaço tangente e o de derivada.

Dada uma variedade M , uma curva sobre M é uma aplicação $l : (a, b) \rightarrow M$ de classe C^k , com $k \geq 1$. Fixado um ponto $p \in M$, considere L_p o conjunto de todas as curvas de classe C^k , $k \geq 1$, passando por p , ou seja:

$$L_p = \{l : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M; l(0) = p\}.$$

Se (U, φ) é uma carta sobre p , podemos escrever $(\varphi \circ l)(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Fica então bem definida a relação de equivalência em L_p dada por:

$$l \sim \tilde{l} \iff \frac{du_j}{dt}(0) = \frac{d\tilde{u}_j}{dt}(0), \quad 1 \leq j \leq n.$$

A classe de equivalência $[l]$ é por definição o **vetor tangente** a M no ponto p . Assim, o **espaço tangente** à variedade M no ponto p é o quociente L_p / \sim , denotado por $T_p M$.

Note que se $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ é uma carta sobre o ponto $p \in M^n$, então associado ao vetor tangente $v = [l] \in T_p M^n$ temos os n números

$$v_j = \frac{du_j}{dt}(0), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Portanto está bem definido o isomorfismo linear

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda : T_p M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v = [l] &\longmapsto (v_1, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Temos assim o seguinte resultado:

Lema 1.2 *Sejam M^n uma variedade e $p \in M$. O espaço tangente $T_p M$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} de dimensão n .*

Definição 1.5 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, no ponto $p \in M$. A **derivada** de f no ponto p é a transformação linear*

$$\begin{aligned}f'(p) : T_p M &\longrightarrow T_{f(p)} N \\ v = [l] &\longmapsto [f \circ l].\end{aligned}$$

Observação 1.1

Para verificar que a derivada de uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ entre variedades está bem definida sejam $p \in M$, (φ, U) e (ψ, V) vizinhanças de p e $f(p)$, respectivamente. Dado $v = [l] \in T_p M$ temos

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ l)'(0) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ l)'(0) \\ &= F' \circ (\varphi \circ l)'(0),\end{aligned}$$

sendo F a aplicação definida em (1.1). Temos assim:

1. A classe $[f \circ l]$ independe de $l \in [l]$, logo $f'(p) \cdot v = [f \circ l]$ está bem definido.
2. Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{f} & T_{f(p)} N \\ \Phi_U \downarrow & & \downarrow \Phi_V \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F'} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

comuta segue que $f'(p) : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ é uma transformação linear, cuja matriz é a matriz jacobiana da aplicação F definida em (1.1).

Utilizamos a seguinte notação: $f'(p) = Df(p)$.

Com relação a derivada de uma aplicação existem três importantes conceitos que devemos considerar: **Submersões, Imersões e Mergulhos**.

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma **submersão** se $f'(p)$ é sobrejetora em cada ponto $p \in M$. Analogamente, diremos que f é uma **imersão** se $f'(p)$ for injetora em cada ponto p . Um tipo especial de imersão é aplicação chamada **mergulho**, a qual, além de ser uma imersão, é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, considerando-se $f(M)$ com a topologia induzida por N .

Exemplo 1.7

(Submersão) Sejam M_1, \dots, M_k variedades diferenciáveis, então cada projeção

$$\Pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$$

é uma submersão. Em particular $\Pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma submersão.

(Imersão - Curvas) Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva de classe C^1 . Então γ é uma imersão se, e somente se, $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$.

(Imersão que não é mergulho) A curva $\gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\sin(2t), \cos(t))$ é uma imersão injetiva, porém não pode ser um homeomorfismo, pois J é aberto e $\gamma(J)$ é um compacto na topologia induzida.

(Imersão no Toro que não é mergulho) Considere $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ e um número $c \notin \mathbb{Q}$. Então a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$, definida por $\gamma(t) = (\exp(2\pi it), \exp(2\pi ict))$, é uma imersão injetiva, porém não é um mergulho, pois $\overline{\gamma(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$.

Definição 1.6 Uma **subvariedade** N^n de classe C^k de uma variedade M^m é um subconjunto $N \subset M$, com a topologia induzida por M , possuindo uma estrutura diferenciável de classe C^k , tal que a inclusão $i : N \rightarrow M$ seja um mergulho de classe C^k . Neste caso definimos a **codimensão** de N por $\text{codim}N = m - n$.

Definição 1.7 Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Um ponto $c \in N$ diz-se um **valor regular** de f se, para cada ponto $p \in f^{-1}(c)$, a derivada $f'(p) : T_pM \rightarrow T_cN$ é sobrejetiva.

Teorema 1.3 Seja $c \in N$ valor regular da aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$, de classe C^k com $k \geq 1$. Então $f^{-1}(c)$ é vazio ou $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M com dimensão $m - n$ e classe C^k .

Demonstração: Ver [12], página 169. ■

Segue do teorema acima que o conjunto das soluções da equação $f(x) = c$ forma uma subvariedade de M , admitindo que c é valor regular da aplicação $f : M \rightarrow N$.

Suponha agora que tenhamos uma subvariedade $S \subset N$ e considere o conjunto das soluções da relação $f(x) \in S$. O que podemos então dizer sobre esse conjunto solução, a pré-imagem $f^{-1}(S)$? Essa questão é respondida pelos resultados a seguir.

Definição 1.8 Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação de classe C^r e $S^s \subset N^n$ uma subvariedade de classe C^j . Dizemos que f é **transversal** a S no ponto $p \in f^{-1}(S)$ quando a soma da imagem de $f'(p)$ com o espaço tangente $T_{f(p)}S$ gerar todo o espaço $T_{f(p)}N$, ou seja, quando

$$f'(p) \cdot T_pM + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N.$$

De forma geral, diremos que f é transversal a S se for transversal a S em todos os pontos $p \in f^{-1}(S)$.

Exemplo 1.8

(a) Considere a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (0, t)$ e seja S o eixo x em \mathbb{R}^2 . Note então que aplicação f é transversal a S . Observe também que neste caso temos

$$f'(p) \cdot T_pM \oplus T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$$

e $f(\mathbb{R}) \cap S = \{(0, 0)\}$, (figura (1.2)).

(b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (t, t^2)$ e S como no exemplo anterior. Temos agora que a aplicação f não é transversal a S , (figura (1.3)).

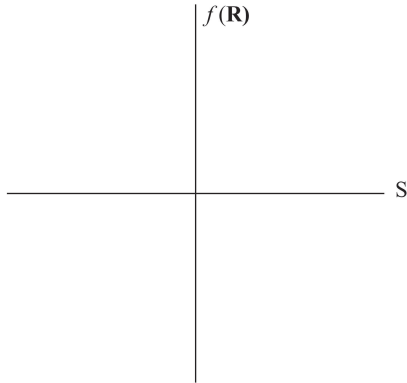


Figura 1.2: $f(\mathbb{R})$ transversal a S .

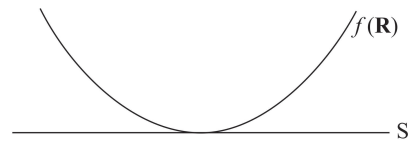


Figura 1.3: $f(\mathbb{R})$ não transversal a S .

Teorema 1.4 *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k transversal a subvariedade $S \subset N$. Então $f^{-1}(S) \subset M$ é uma subvariedade de classe C^k com codimensão em M igual a codimensão de S em N .*

Demonstração: Ver [7], página 28. ■

Observação 1.2

Note que se temos duas subvariedades $N, S \subset M$, não disjuntas, tais que a aplicação inclusão $i : N \rightarrow M$ é uma aplicação transversal a S , então

$$T_p N + T_p S = T_p M.$$

Definição 1.9 *Sejam N e S duas subvariedades de M tais que $N \cap S \neq \emptyset$. Dizemos que N e S são transversais se*

$$T_p N + T_p S = T_p M, \quad \forall p \in M \cap S.$$

Teorema 1.5 *Sejam N^n e S^s subvariedades transversais de M^m , então $N \cap S$ é uma subvariedade tal que*

$$\text{codim}(N \cap S) = \text{codim}(N) + \text{codim}(S).$$

Tem-se também $T_p(N \cap S) = T_p(N) \cap T_p(S)$.

Demonstração: Consequência imediata do teorema (1.4). ■

Observação 1.3

Um caso particular ocorre quando temos $T_p N \oplus T_p S = T_p M$, em cada $p \in N \cap S$. Neste caso $N \cap S$ é uma subvariedade de dimensão zero, logo um conjunto discreto de pontos em M . Note que esta é a situação entre $f(\mathbb{R})$ e S no exemplo (1.8).

1.1.2 Campos Vetoriais Diferenciáveis

Definição 1.10 *Seja M uma variedade diferenciável. O **Fibrado Tangente** TM é a união de todos os espaços tangentes sobre todos os pontos de M , ou seja,*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Um elemento desta união é um par (p, v) , com $p \in M$ e $v \in T_p(M)$. Definimos também a aplicação projeção:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p \end{aligned}$$

Lema 1.6 *Seja M uma n -variedade diferenciável de classe C^r . Existem uma topologia natural e uma estrutura diferenciável de classe C^{r-1} que tornam TM uma $2n$ -variedade diferenciável e a projeção $\pi : TM \longrightarrow M$ uma aplicação de classe C^{r-1} .*

Demonstração: Ver [11], página 58. ■

Definição 1.11 *Um campo vetorial de classe C^k sobre uma variedade M é uma aplicação de classe C^k*

$$X : M \longrightarrow TM,$$

tal que a composta $\pi \circ X : M \longrightarrow M$ coincide com a identidade $i : M \longrightarrow M$.

Assim um campo X associa a cada $p \in M$ um vetor tangente a p em $T_p M$ denotado por $X(p)$. Podemos então, de forma genérica, nos referir ao campo X pelo conjunto $\{X(p); p \in M\}$. Uma singularidade de X é um ponto $p \in M$ tal que $X(p) = 0$. Se X não possui singularidades dizemos que o campo é **não singular**.

Definido um campo vetorial segue naturalmente o conceito de **curva integral**.

Definição 1.12 *Dado um campo vetorial X numa variedade M , a única curva $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ que satisfaz*

- $X(\varphi(t)) = [\varphi(t)], \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$,
- $\varphi(0) = p$,

será chamada de curva integral de X passando por $p \in M$ e a indicaremos por $\varphi_p(t)$. Definimos ainda a órbita, ou trajetória, de X passando por $p \in M$ por $C(p) = \{\varphi_p(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.13 *Seja $\varphi_p(t)$ uma curva integral de um campo vetorial X sobre uma variedade M . Os conjuntos ω -**limite** e α -**limite** da trajetória $C(p)$ são os conjuntos $\ell^+(p)$ e $\ell^-(p)$, respectivamente, definidos por*

$$\ell^+(p) \doteq \bigcap_{0 \leq s < \infty} \overline{\{\varphi_p(t); s \leq t < \infty\}},$$

$$\ell^-(p) \doteq \bigcap_{-\infty < s \leq 0} \overline{\{\varphi_p(t); -\infty < t \leq s\}}.$$

Observação 1.4

Se M é uma variedade compacta então, pela propriedade da **interseção finita**, temos que os conjuntos limites são não vazios.

Teorema 1.7 *Seja X um campo de vetores de classe C^k sobre uma variedade fechada M . São válidas as duas afirmações:*

1. *Dado $p \in M$ existe uma única curva integral de X definida em \mathbb{R} que passa por p ;*
2. *A aplicação $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, definida por $\phi(t, p) = \varphi_p(t)$ é diferenciável, de classe C^k .*

Demonstração: Ver [17], página 67. ■

1.1.3 Campos Vetoriais Holomorfos

Neste trabalho estudaremos campos vetoriais sobre \mathbb{S}^3 obtidos pela interseção transversal da esfera com campos vetoriais holomorfos em \mathbb{C}^2 . Logo é conveniente introduzir aqui alguns conceitos e notações sobre aplicações e campos holomorfos. Como referência para tais resultados usamos a referência [10].

Primeiramente, seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto e considere a identificação natural entre o plano complexo e o espaço \mathbb{R}^2 . Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação de classe $C^1(\Omega)$ podemos escrever f como $f(z) = f(x + iy)$ e definir os operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Assim temos a seguinte definição.

Definição 1.14 *Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, de classe $C^1(\Omega)$, é dita **holomorfa** em Ω se*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$$

Para dimensões superiores consideramos a identificação natural de \mathbb{C}^n com \mathbb{R}^{2n} . Assim se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega$, com $z_j = x_j + iy_j$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação de classe $C^1(\Omega)$, definimos os operadores

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j} &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).\end{aligned}$$

Segue assim a generalização de aplicações holomorfas.

Definição 1.15 Dizemos que uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $C^1(\Omega)$, é **holomorfa** em Ω se, para cada j , temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0.$$

Desta forma obtemos uma definição natural para aplicações holomorfas de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^m .

Definição 1.16 Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^m$ uma aplicação de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ e f_j as funções componentes de f , com $1 \leq j \leq m$. Dizemos que f é holomorfa em Ω se cada função componente f_j é holomorfa em Ω .

Definição 1.17 Seja Ω um aberto em \mathbb{C}^n . Um campo vetorial holomorfo em Ω é uma aplicação Z que associa a cada $p \in \Omega$ ao vetor $Z(p) \in \mathbb{C}^n$.

Definição 1.18 Uma **variedade complexa** de dimensão (complexa) n é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, munido de um atlas máximo

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^n, \alpha \in \Gamma\},$$

que satisfaz:

Dadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ e $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$, com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas

$$\psi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

definidas por $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são biholomorfas, ou seja, $\psi_{\alpha\beta}$ é bijetiva e holomorfa com inversa $\psi_{\alpha\beta}^{-1}$ também holomorfa.

Definição 1.19 Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ entre variedades complexas é holomorfa no ponto $p \in M$ se existem cartas (U, φ) e (V, ψ) , com $p \in U$ e $f(p) \in V$ tais que

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n$$

é holomorfa em $\varphi(p)$.

Observação 1.5

1. As definições de subvariedades, aplicações diferenciáveis, derivada, curvas e espaço tangente para variedades reais são análogos para variedades complexas.
2. É importante observar também que uma variedade complexa de dimensão n é uma variedade real de dimensão $2n$. Entretanto note que a esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ é uma variedade real e não é uma variedade complexa.

1.2 Folheações

Intuitivamente uma folheação de dimensão n sobre uma variedade M^m é uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n . Antes de darmos a definição formal, consideremos inicialmente um exemplo, que apesar de simples, nos dará uma visão geométrica deste conceito.

Observe que, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ fixado, o plano

$$\mathbb{R}^n \times \{c\} \tag{1.3}$$

pode ser visto como uma "folha" em \mathbb{R}^m , (figura 1.4). Variando $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ podemos decompor \mathbb{R}^m como

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Portanto tais folhas definem uma folheação de dimensão n em \mathbb{R}^m . Note que um difeomorfismo local $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preserva as folhas (1.3) satisfaz, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$, a propriedade

$$f(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c'\}),$$

sendo $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$, (figura ² 1.5). Portanto este difeomorfismo deve ter a forma

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \quad (1.4)$$

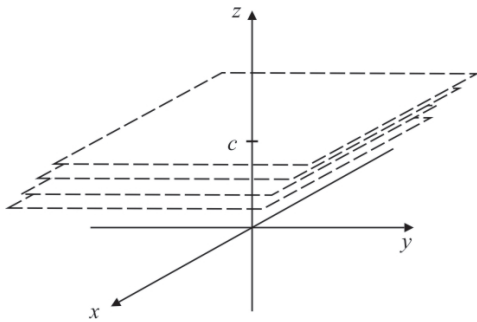


Figura 1.4: Folheação em \mathbb{R}^3 .

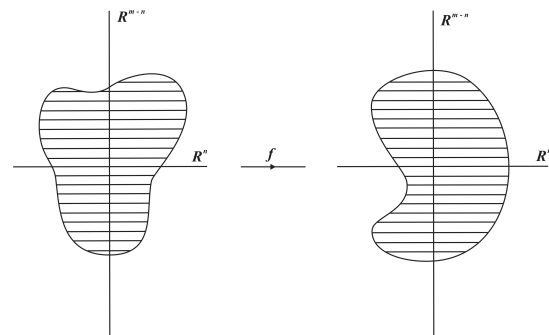


Figura 1.5: Difeomorfismo f .

Definição 1.20 Uma **folheação** de classe C^r e dimensão n de uma variedade M^m é um atlas máximo \mathcal{F} , de classe C^r , que satisfaz as duas propriedades abaixo:

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

sendo $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ discos abertos;

2. Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ satisfaz (1.4), ou seja, podemos escrever

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y)).$$

Dizemos que M é folheada por \mathcal{F} , ou que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M . Indicaremos uma folheação de dimensão n e classe C^r de uma variedade M^m por \mathcal{F} , sempre que não houver risco de confusão.

²Figura retirada de [3]

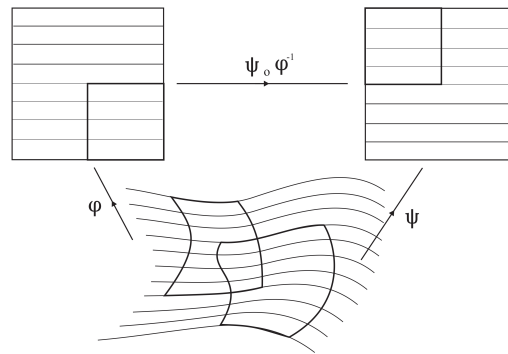


Figura 1.6: Folheação

Observação 1.6

Como uma folheação é um atlas especial, pois deve satisfazer a condição (1.4), existem variedades de dimensão m que não possuem folheações de dimensão n , com $0 < n < m$. Por exemplo a esfera \mathbb{S}^5 não admite folheação de dimensão 2; ver [3], página 34.

Definição 1.21 *Sejam \mathcal{F} uma folheação de M^m , $0 < n < m$, e $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ com*

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

*Os conjuntos $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, com $c \in U_2$, são chamados de **placas** de U , ou placas de \mathcal{F} . Dizemos ainda que um caminho de placas de \mathcal{F} é um sequência de placas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$.*

Observação 1.7

1. Ainda na notação da definição (1.21), temos que para cada $c \in U_2$ fixado a aplicação

$$f = \varphi^{-1} : U_1 \times \{c\} \longrightarrow U$$

é um mergulho de classe C^r . Portanto cada placa é uma subvariedade conexa de M .

2. Se α, β são duas placas de U , então $\alpha \cap \beta = \emptyset$, ou $\alpha = \beta$.

3. Uma vez que M possui uma cobertura de placas de \mathcal{F} definimos a seguinte a relação de equivalência em M : Se $p, q \in M$, então dizemos que $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Cada classe de equivalência é chamada de **folha** de \mathcal{F} .

Lema 1.8 *Seja \mathcal{F} uma folheação em M . Então cada folha de \mathcal{F} é um conjunto conexo por caminhos de M .*

Demonstração: Seja F um folha de \mathcal{F} com $p, q \in F$. Existe um caminho de placas, por definição, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ligando p e q . Como $\alpha_j \cap \alpha_{j+1}$ é não vazia e cada uma destas placas é conexa por caminhos, temos que $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \subset F$ é um conjunto conexo por caminhos. Logo existe um caminho contínuo que liga p e q . ■

Teorema 1.9 *Seja M^m uma variedade folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão n e classe C^r . Toda folha F de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^r e dimensão n tal que os domínios das cartas são as placas de \mathcal{F} . A inclusão $i : F \rightarrow M$ é uma imersão bijetora de classe C^r . Além disso cada folha F é uma subvariedade de M se, e somente se, i é um mergulho.*

Demonstração: Ver [3], página 30. ■

Alguns importantes exemplos de folheações são listados abaixo.

Exemplo 1.9 (Submersões)

Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma submersão de classe C^r . Pela **forma local das submersões**, existe uma folheação de M^m na qual as folhas são as componentes conexas de $f^{-1}(c)$.

Exemplo 1.10 (Ações de Grupos de Lie)

Uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M é uma aplicação de classe C^r

$$\varphi : G \times M \rightarrow M,$$

tal que, para cada $x \in M$ e cada $g_1, g_2 \in G$, vale:

- $\varphi(e, x) = x$;

- $\varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$.

A **órbita** de um ponto $x \in M$ pela ação φ é o subconjunto de M :

$$\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g, x); g \in G\}$$

Dizemos que a ação φ é uma **ação folheada** se, para cada $x \in M$, o espaço tangente a órbita de x tem dimensão fixa k , ou seja, $\dim T_{\mathcal{O}_x} M = k$, para qualquer $x \in M$.

Lema 1.10 *As órbitas de uma ação folheada definem as folhas de uma folheação.*

Demonstração: Ver [3], página 26. ■

Exemplo 1.11 (Campos Vetoriais)

Seja X um campo vetorial, não singular, sobre M . Se $\varphi_p(t)$ é uma curva integral de X passando por p , então as órbitas $C(p)$ definem uma folheação de dimensão 1 em M . De fato, este exemplo segue diretamente do anterior, pois considerando o grupo de Lie $(\mathbb{R}, +)$, temos que o fluxo φ , definido pelas curvas integrais de X , satisfaz:

- $\varphi(0, x) = x$;
- $\varphi(t_1 + t_2, x) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x))$

Exemplo 1.12 (Campos Vetoriais Holomorfos)

Um fluxo holomorfo é uma ação holomorfa

$$\phi : \mathbb{C} \times M \longrightarrow M,$$

sendo M uma variedade complexa.

Um fluxo holomorfo ϕ induz um campo vetorial holomorfo Z em M definido por:

$$Z(p) = \left. \frac{d}{dT} \phi(T, p) \right|_{T=0}$$

Observe que

- Se $Z(p) = 0$, então a órbita de ϕ passando por p é o conjunto unitário $\{p\}$;

- Se $Z(p) \neq 0$, então a órbita de ϕ passando por p tem dimensão complexa 1. Neste caso o campo Z define uma folheação holomorfa em M .

Por exemplo se $M = \mathbb{C}^n$ e ϕ é dada por

$$\phi(T, z) = \exp(T \cdot A)z,$$

com $T \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathbb{C}^{n^2}$, então ϕ induz o campo $Z(z) = A \cdot z$. Se A for não singular o fluxo ϕ induz folhas de dimensão real 2 em $\mathbb{C}^n - \{0\}$.

Exemplo 1.13 (Fibração de Hopf)

Sejam $z, \tilde{z} \in \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$. Defina a relação de equivalência em \mathbb{S}^3 por:

$$z \sim \tilde{z} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{z}_1 = z_1 e^{i\theta} \\ \tilde{z}_2 = z_2 e^{i\theta} \end{cases},$$

para algum $0 \leq \theta < 2\pi$ e $[(z_1, z_2)]$ a classe de $z = (z_1, z_2)$. Considere ainda a aplicação

$$\Phi: \mathbb{S}^3 / \sim \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

determinada por

$$\Phi([(z_1, z_2)]) = (2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2), 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2).$$

Como Φ é bijetiva podemos identificar os conjuntos \mathbb{S}^3 / \sim e \mathbb{S}^2 , logo está bem definida a **Aplicação de Hopf**:

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto [(z_1, z_2)] \end{aligned}$$

Fixado $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$ defina a curva suave $l_z: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{S}^3$ por $l_z(t) \longmapsto (z_1 e^{it}, z_2 e^{it})$ e seja $[l_z]$ o vetor tangente a \mathbb{S}^3 no ponto z . Temos assim o campo vetorial X_H sobre \mathbb{S}^3 dado por

$$\begin{aligned} X_H: \mathbb{S}^3 &\longrightarrow T\mathbb{S}^3 \\ z &\longmapsto [l_z]. \end{aligned}$$

Note então que todas curvas integrais de X_H passando por $z \in \mathbb{S}^3$ estão contidas na imagem inversa $\pi^{-1}([(z_1, z_2)])$, logo $C(z) = \pi^{-1}[z]$, portanto todas as trajetórias deste campo são periódicas.

Assim a folheação $\mathcal{F}(X_H)$ possui apenas folhas compactas.

Uma vez que cada folha de uma folheação \mathcal{F} de M é uma variedade podemos analisar a possibilidade de ocorrer transversalidade.

Definição 1.22 *Seja $f : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Dizemos que f é transversal à folheação \mathcal{F} de M quando f for transversal a todas as folhas de \mathcal{F} que passam por $f(N)$, isto é, se*

$$f'(p) \cdot T_p N + T_{f(p)}(\mathcal{F}) = T_{f(p)} M,$$

sendo que $T_{f(p)}(\mathcal{F})$ indica o espaço tangente a folha de \mathcal{F} que passa por $f(p)$. Em particular, se $N \subset M$ é subvariedade transversal a \mathcal{F} , temos:

$$T_p N + T_p(\mathcal{F}) = T_p M.$$

Observação 1.8

Como estamos interessados em estudar folheações geradas por campos vetoriais convém notar que transversalidade entre uma variedade e uma folheação gerada por um campo linear é uma propriedade qstável no seguinte sentido:

Considere o campo vetorial Z em \mathbb{C}^n definido por $Z(z) = Az$, sendo $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ e suponha que, para algum $r > 0$, a esfera \mathbb{S}_r seja transversal a $\mathcal{F}(Z)$. Seja N_z o vetor normal a \mathbb{S}_r em z e considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}_r &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, z) &\longmapsto \langle Az, N_z \rangle. \end{aligned}$$

Note que, se \mathbb{S}_r é transversal a $\mathcal{F}(Z)$ então

$$F(A, z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{S}_r,$$

e como F é contínua existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ centrada em A tal que

$$F(B, z) \neq 0, \quad \forall B \in W, \quad \forall z \in \mathbb{S}_r,$$

logo para qualquer matriz $B \in W$ a folheação gerada pelo campo $\tilde{Z}(z) = Bz$ é transversal a \mathbb{S}_r . Provamos assim o seguinte resultado.

Teorema 1.11 (Estabilidade 1) *Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ considere o campo $Z(z) = Az$. Se a esfera \mathbb{S}_r é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$, com $r > 0$, então existe uma vizinhança W de A tal que para qualquer $B \in W$ a esfera \mathbb{S}_r é transversal à folheação gerada pelo campo $\tilde{Z}(z) = Bz$.*

Esta noção de estabilidade admite a seguinte generalização para variedades mergulhadas.

Teorema 1.12 (Estabilidade 2) *Seja M uma variedade e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ um mergulho suave. Suponha que $\varphi(M)$ é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$ gerada pelo campo $Z(z) = Az$, sendo $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Então existe uma vizinhança W da matriz A tal que $\varphi(M)$ é transversal à folheação gerada pelo campo $\tilde{Z}(z) = Bz$, para qualquer $B \in W$.*

Demonstração: Defina a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, x) &\longmapsto \angle(S \cdot \varphi(x), D\varphi(x)), \end{aligned}$$

sendo \angle a função ângulo.

Como $\varphi(M)$ é transversal $\mathcal{F}(Z)$ então

$$F(A, x) = \angle(A \cdot \varphi(x), D\varphi(x)) \neq 0, \quad \forall x \in M.$$

Temos ainda da transversalidade que $0 \notin \varphi(M)$, logo a aplicação F é contínua em A e portanto existe uma vizinhança W de A tal que

$$F(B, x) \neq 0, \quad \forall B \in W, \quad \forall x \in M.$$

Assim $\varphi(M)$ é transversal a folheação gerada pelo campo $\tilde{Z}(z) = Bz$, para qualquer $B \in W$. ■

Definição 1.23 *Uma folheação \mathcal{F} é dita **singular** de dimensão k sobre M^m se existe um conjunto analítico $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset M$, de dimensão $k \leq m - 2$, tal que $\mathcal{F}|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})}$ é uma folheação de dimensão k sobre $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. O conjunto $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é chamado de conjunto singular de \mathcal{F} .*

Definição 1.24 *Sejam \mathcal{F} e $\widetilde{\mathcal{F}}$ folheações holomorfas de \mathbb{C}^n . Dizemos que \mathcal{F} é **topologicamente conjugada** a $\widetilde{\mathcal{F}}$ se existe um homeomorfismo $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(\text{Sing}(\mathcal{F})) = \text{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}})$ e Φ leva folha de \mathcal{F} em folha $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Observação 1.9

1. A conjugação topológica define uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as folheações holomorfas de \mathbb{C}^n ;
2. Se as folheações \mathcal{F} e $\widetilde{\mathcal{F}}$ são topologicamente conjugadas e \mathcal{F} é transversal a uma subvariedade $N \subset \mathbb{C}^n$, então $\widetilde{\mathcal{F}}$ também é transversal a N .

Capítulo 2

Transversalidade e Campos Vetoriais Lineares

Neste capítulo estudamos folheações sobre a esfera induzidas por campos lineares em \mathbb{C}^n . O principal resultado desta parte, obtido por Guckenheimer, ver [6], determina como deve ser o comportamento dos autovalores do campo linear para que a folheação induzida por ele seja transversal à \mathbb{S}^3 .

2.1 Domínios de Poincaré e de Siegel

Antes de verificarmos os resultados deste capítulo vamos apresentar as definições de envoltória convexa de um conjunto, domínio de Poincaré e domínio de Siegel.

Definição 2.1 A *envoltória convexa* de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A , a qual denotaremos por $\mathcal{H}\{A\}$.

Observação 2.1

1. Como $\mathcal{H}\{z_1, \dots, z_k\}$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém todos os z_i 's, segue que ele é o menor conjunto convexo que contém todos estes elementos. Por exemplo, para $k = 2$, $\mathcal{H}\{z_1, z_2\}$ é o segmento de reta que liga estes dois pontos;
2. Como \mathbb{C} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , então $\mathcal{H}\{z_1, \dots, z_k\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares $\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_s z_s$, tais que $\alpha_j \geq 0$, para cada j , e $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 1$.

Definição 2.2 Chamamos de **domínio de Poincaré** o conjunto de todos os pontos $z = (z_1, \dots, z_n)$ pertencentes a \mathbb{C}^n tais que o zero não pertence a envoltória convexa de $\{z_1, \dots, z_n\}$, ou seja, é o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}^n; 0 \notin \mathcal{H}\{z_1, \dots, z_n\}\}.$$

O complementar do domínio de Poincaré é chamado de **domínio de Siegel**.

Teorema 2.1 Um elemento $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ está no domínio de Poincaré se, e somente se,

$$\rho \leq 0 \implies \sigma \neq 0,$$

sendo $\rho + i\sigma \doteq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Demonstração: Sejam θ e β os argumentos de λ_1 e λ_2 , respectivamente, com $\beta \leq \theta$, então

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \cos(\theta - \beta) \\ \sigma &= \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \text{sen}(\theta - \beta). \end{aligned}$$

Note então que se temos $\rho = 0$, então $\theta - \beta = \frac{\pi}{2}$, ou $\theta - \beta = \frac{3\pi}{2}$, logo $\sigma \neq 0$. Suponha que possa ocorrer $\rho < 0$ e $\sigma = 0$. Neste caso temos obrigatoriamente que $\theta - \beta = \pi$, logo $0 \in \mathcal{H}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, contradizendo a hipótese de λ estar no domínio de Poincaré.

Reciprocamente, suponha que λ está no domínio de Siegel, logo o segmento de reta que contém λ_1 e λ_2 passa pela origem, então $\theta - \beta = \pi$ e portanto $\sigma = 0$, o que é uma contradição.

■

Corolário 2.2 O ponto $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ está no domínio de Poincaré se, e somente se, λ_1 e λ_2 estão no mesmo semiplano definido por uma reta S passando pela origem do plano complexo.

2.2 Campos Lineares

Discutiremos nesta seção condições para que uma folheação $\mathcal{F}(Z)$ induzida por um campo linear em \mathbb{C}^n possa ser transversal à esfera \mathbb{S}^{2n-1} . As demonstrações de alguns resultados nesta seção dependem do uso de alguns conceitos de formas diferenciais, para os quais seguimos a notação de [7].

Definição 2.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma 1-forma sobre M é uma aplicação ω , que para cada $x \in M$, associa um funcional linear sobre o espaço tangente $T_x M$, ou seja, $\omega(x)$ é um elemento do espaço dual de $T_x M$:*

$$\omega(x) \in (T_x M)^*, \quad \forall x \in M.$$

Observação 2.2

1. Dada uma função suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ considere a aplicação ω que a cada $x \in M$ associa a derivada de ϕ calculada em x . Como $D\phi(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear então a aplicação ω define uma 1-forma sobre M . Além disso, suponha que $y \in \mathbb{R}$ seja valor regular de ϕ e defina $Z = \phi^{-1}(y)$. Neste caso o núcleo do funcional $D\phi(x)$, para $x \in Z$, é exatamente $T_x Z$, ou seja, $T_x Z = \ker(\omega(x))$;

De fato, note que ϕ é constante sobre Z , logo o funcional $D\phi(x)$ é identicamente nulo sobre $T_x Z$. Por outro lado para cada $x \in Z$ a aplicação $D\phi(x)$ é sobrejetiva, assim pelo teorema do núcleo-imagem:

$$\begin{aligned} \dim \ker(D\phi(x)) &= \dim T_x M - \dim \text{Im}(D\phi(x)) = \dim M - \dim \mathbb{R} \\ &= \dim Z = \dim T_x Z. \end{aligned}$$

Então $T_x Z$ é subespaço do núcleo de $D\phi(x)$ com mesma dimensão, logo vale a igualdade.

2. Considere o caso particular em que M é uma subvariedade de \mathbb{C}^n . Temos então que uma 1-forma ω se escreve de forma única como

$$\omega(z) = \sum_{j=1}^n a_j(z) dx_j + b_j(z) dy_j, \quad (2.1)$$

com a_j, b_j funções suaves em M , sendo que aqui estamos considerando \mathbb{C}^n como um espaço vetorial real e $\{dx_j, dy_j\}_{j=1, \dots, n}$ a base dual da base canônica.

Observe então que definindo $dz_j = dx_j + idy_j$ e $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$, obtemos de (2.1) que

$$\omega(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(z) dz_j + \beta_j(z) d\bar{z}_j, \quad (2.2)$$

$$\text{com } \alpha_j = \frac{a_j - ib_j}{2} \text{ e } \beta_j = \frac{a_j + ib_j}{2}.$$

Teorema 2.3 (Guckenheimer) *Seja X o campo linear*

$$X(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

sobre \mathbb{C}^n , e suponha que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está no domínio de Poincaré. Nestas condições, para cada $r > 0$, as curvas integrais de X são transversais à esfera \mathbb{S}_r , definida por:

$$\mathbb{S}_r = \{z \in \mathbb{C}^n; \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = r^2\}.$$

Demonstração: Considere a aplicação $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\phi(z) = |z|^2$. Cada $r > 0$ é valor regular de ϕ e $\phi^{-1}(r) = \mathbb{S}_r$. Podemos então, através da expressão (2.2), definir a 1-forma

$$\omega(z) = D\phi(z) = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j$$

sobre \mathbb{C}^n .

Suponha por contradição que o resultado seja falso, neste caso existe uma esfera \mathbb{S}_r , para algum $r > 0$, que não é transversal à folheação definida pelo campo X , portanto existe $z \in \mathbb{S}_r$ tal que $X(z)$ pertence ao espaço $T_z(\mathbb{S}_r)$. Uma vez que $T_z(\mathbb{S}_r) = \ker(\omega(z))$ obtemos, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, que

$$\omega(z) \cdot \alpha X(z) = 0. \quad (2.3)$$

Da igualdade (2.3), chega-se que

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j |z_j|^2 \right) = 0. \quad (2.4)$$

Tomando $\alpha = 1$ e $\alpha = i$ em (2.4) temos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 \right) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j |z_j|^2 = 0 \\ \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n i \lambda_j |z_j|^2 \right) &= \sum_{j=1}^n \beta_j |z_j|^2 = 0,\end{aligned}$$

para $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Portanto

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j |z_j|^2 = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) |z_j|^2 = 0. \quad (2.5)$$

Mas pelo ítem 2 da observação (2.1), a equação (2.5) implica que a envoltória convexa do conjunto dos autovalores λ_j contém o zero, contrariando a hipótese de λ estar no domínio de Poincaré, logo o resultado é verdadeiro. ■

Corolário 2.4 *Nas mesmas hipóteses do teorema (2.3), a interseção das curvas integrais do fluxo ϕ , definidas pelo campo X , com cada esfera \mathbb{S}_r define uma folheação real de dimensão 1 sobre \mathbb{S}_r , a qual denotamos por $\mathcal{F}(X)|_{\mathbb{S}_r}$.*

Demonstração: Fixado $r > 0$, seja F uma folha de $\mathcal{F}(X)$ que intercepta \mathbb{S}_r . Como F é transversal à esfera temos, pelo teorema (1.5), que $\mathbb{S}_r \cap F$ é uma variedade diferenciável. Temos também que a matriz A , que determina o campo linear X , é não singular, logo o fluxo ϕ induz folhas de dimensão real 2 em $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Assim segue também do teorema (1.5) que

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}_r \cap F) &= \operatorname{codim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}_r) + \operatorname{codim}_{\mathbb{R}}(F) \\ &= 1 + (2n - 2) \\ &= 2n - 1.\end{aligned}$$

Portanto a restrição do campo X em \mathbb{S}_r define folhas de dimensão real 1, logo $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X)|_{\mathbb{S}_r}) = 1$. ■

Corolário 2.5 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonalizável de dimensão n . Se o conjunto dos autovalores λ_j de A são tais que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está no domínio de Poincaré, então o campo linear*

$$X(z) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} z_i \right) \frac{\partial}{\partial z_j},$$

determina uma folheação transversal a cada \mathbb{S}_r .

Demonstração: De fato, se A é diagonalizável então podemos escrever $A = PDP^{-1}$, sendo D a matriz diagonal formada pelos autovalores de A . Considere então os campos vetoriais $Z(z) = Az$ e $\tilde{Z}(z) = Dz$. Note então que as curvas integrais destes campos são

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= e^{tA}z \\ \psi(t, z) &= e^{tD}z. \end{aligned}$$

Note agora que o difeomorfismo $F(z) = P^{-1}z$ satisfaz:

$$F(\varphi(t, z)) = \psi(t, F(z)), \quad \forall (t, z) \in (\mathbb{C}, \mathbb{C}^n).$$

De fato,

$$\begin{aligned} F(\varphi(t, z)) &= F(e^{tA}z) = P^{-1}e^{tA}z = e^{tB}P^{-1}z \\ &= e^{tB}(F(z)) \\ &= \psi(t, F(z)), \end{aligned}$$

logo as folheações $\mathcal{F}(Z)$ e $\mathcal{F}(\tilde{Z})$ são topologicamente conjugadas. Como $\mathcal{F}(\tilde{Z})$ é transversal à \mathbb{S}_r , segue que $\mathcal{F}(Z)$ é também transversal à esfera \mathbb{S}_r . ■

Teorema 2.6 *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ no domínio de Siegel e o campo*

$$X(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Então para qualquer $r > 0$ a esfera \mathbb{S}_r não é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$.

Demonstração: Fixado $r > 0$ mostraremos que existe $z \in \mathbb{S}_r$ tal que $Z(z) \in T_z(\mathbb{S}_r)$, ou seja, pela notação utilizada na demonstração do teorema (2.3)

$$\omega(z) \cdot Z(z) = 0.$$

Como λ está no domínio de Siegel existe $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n) \in \mathbb{S}^3$ tal que $\sum_{j=1}^n \lambda_j |\tilde{z}_j|^2 = 0$, então podemos definir $z = r\tilde{z} \in \mathbb{S}_r$, assim

$$\begin{aligned} \omega(z) \cdot Z(z) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j |r\tilde{z}_j|^2 = r^2 \sum_{j=1}^n \lambda_j |\tilde{z}_j|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema. ■

Corolário 2.7 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonalizável de dimensão n . Então a folheação $\mathcal{F}(Z)$ induzida pelo campo*

$$X(z) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} z_i \right) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

é transversal a todas as esferas \mathbb{S}_r se, e somente se, o conjunto dos auto-valores λ_j de A é tal que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ está no domínio de Poincaré.

Lema 2.8 *Sejam X uma campo vetorial holomorfo em \mathbb{C}^2 e λ_1, λ_2 os autovalores da parte linear, diagonalizável, de X . Existe então um $r > 0$ tal que para esfera \mathbb{S}_ϵ , com $0 < \epsilon < r$ vale que se λ_2/λ_1 é um real negativo então para algum $\epsilon > 0$ existe uma folha de $\mathcal{F}(Z)$ que é tangente a esfera \mathbb{S}_ϵ .*

Demonstração: Ver referência [16], página 38. ■

Lema 2.9 *Sejam μ_1 e μ_2 números complexos não nulos, Z o campo*

$$Z = \mu_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \mu_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

*e M uma variedade suave, fechada e conexa de dimensão 2. Nestas condições, se μ_1/μ_2 é um número real e negativo, então **não** existe um mergulho suave $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ transversal à $\mathcal{F}(Z)$.*

Demonstração: Suponha por contradição que exista uma aplicação suave $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ que seja transversal à $\mathcal{F}(Z)$. Assim pelo teorema de estabilidade (1.12) existe uma vizinhança W da matriz $A = \text{diag}(\mu_1 \ \mu_2)$ tal que se $B \in W$ então a folheação $\mathcal{F}(\tilde{Z})$, induzida pelo campo $\tilde{Z}(z) = Bz$, é transversal à aplicação φ .

Por outro lado podemos, através da **dependência contínua** dos autovalores, escolher um racional negativo $-p/q$ suficientemente próximo de μ_1/μ_2 tal que a matriz $B = \text{diag}(p \ -q)$ esteja em W , logo o campo

$$\tilde{Z} = pz_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - qz_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

induz a folheação $\mathcal{F}(\tilde{Z})$ transversal a φ .

As folhas $L_\omega \in \mathcal{F}(\tilde{Z})$ são as curvas integrais de \tilde{Z} passando por $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, ou seja,

$$L_\omega = \{(\omega_1 e^{pT}, \omega_2 e^{-qT}), \ \forall T \in \mathbb{C}\}.$$

Se $(z_1, z_2) \in L_\omega$, então temos que $z_1^q z_2^p = \omega_1^q \omega_2^p$, portanto a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto z_1^q z_2^p \end{aligned}$$

é tal que para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, a imagem inversa $F^{-1}(\alpha)$ está contida numa folha de $\mathcal{F}(\tilde{Z})$. Considere agora a aplicação $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = |(F \circ \varphi)(x)|$.

Uma vez que Φ é contínua e M fechada, temos que existe $P \in M$ ponto maximal de Φ , portanto $D\Phi(P) \equiv 0$. Note que devemos ter $\Phi(P) > 0$ pois do contrário Φ seria identicamente nula, então:

$$DF(\varphi(P)) \circ D\varphi(P) \equiv 0$$

Definindo $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P))$ temos

$$DF(\varphi(P)) = 0 \iff \begin{cases} \varphi_1(P) = 0 \\ \text{ou} \\ \varphi_2(P) = 0 \end{cases}$$

Mas se for $\varphi_1(P) = 0$ ou $\varphi_2(P) = 0$ teremos $\Phi(P) = 0$, de modo que devemos ter $DF(\varphi(P))$ não nula, portanto $D\varphi(P) \equiv 0$ sobre as folhas de $\mathcal{F}(\tilde{Z})$, contradizendo a hipótese da transversalidade de φ com $\mathcal{F}(\tilde{Z})$. ■

Capítulo 3

Campos Holomorfos

Iniciamos este capítulo estudando três classes de exemplos de campos vetoriais definidos em \mathbb{C}^2 , os quais chamaremos de *Campos de Poincaré-Dulac*. Para tais classes são obtidas neste trabalho condições para que exista transversalidade com a esfera \mathbb{S}^3 , ou para esferas \mathbb{S}_r sendo $r > 0$ pequeno, descrevendo completamente a folheação induzida por tais campos, identificando e contando a quantidade de folhas compactas.

Na segunda seção apresentamos o teorema de Poincaré-Dulac, o qual nos permite, sob certas condições, substituir um campo holomorfo por um dos campos de Poincaré-Dulac. Na sequência apresentamos o teorema de Ito, o qual usa fortemente esse teorema para contar o número de folhas compactas existentes na folheação que o campo induz na esfera.

3.1 Campos de Poincaré-Dulac

Estudaremos as seguintes classes de campos vetoriais holomorfos em \mathbb{C}^2 :

a) $Z = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

b) $Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + \epsilon z_1) \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

c) $Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (kz_2 + \epsilon z_1^k) \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad k \geq 3, \text{ inteiro}, \quad \epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Tais classes serão denominadas de *Campos de Poincaré-Dulac*.

3.1.1 Primeira classe de exemplos

Sejam λ_1 e λ_2 números complexos não nulos tais que o quociente λ_2/λ_1 não seja um real negativo e considere o campo linear Z em \mathbb{C}^2 definido por

$$Z = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Pelo teorema (2.1) temos que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ está no domínio de Poincaré logo, fixado $r > 0$, a esfera \mathbb{S}_r é transversal à $\mathcal{F}(Z)$. Segue então do corolário (2.4) que a restrição do campo Z a \mathbb{S}_r define uma folheação sobre \mathbb{S}_r , denotada por $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$. Portanto podemos estudar, sem perda de generalidade, apenas o caso $r = 1$.

Primeiramente observe que estudar as propriedades topológicas de Z equivale a estudar as do campo

$$\tilde{Z} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

pois $Z = \lambda_1 \tilde{Z}$, logo diferem por uma rotação ou uma dilatação. Para não sobrecarregar a notação vamos escrever Z no lugar de \tilde{Z} .

Uma folha ℓ_ω de $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$, passando por $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{S}^3$, pode ser escrita como:

$$\ell_\omega = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3; (z_1, z_2) = (\omega_1 e^{t+is}, \omega_2 e^{(\rho+i\sigma)(t+is)}), \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3.1)$$

sendo $\rho + i\sigma \doteq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Assim se $(z_1, z_2) \in \ell_\omega$ obtemos

$$|\omega_1|^2 e^{2t} + |\omega_2|^2 e^{2(\rho t - \sigma s)} = 1, \quad t, s \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Vamos estudar separadamente os casos $\sigma = 0$ e $\sigma \neq 0$, pois o comportamento das folhas são distintos para cada um destes.

- O caso $\sigma = 0$;

Nesta situação temos obrigatoriamente, pelo teorema (2.1), que $\rho > 0$ e

$$\ell_\omega = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3; (z_1, z_2) = (\omega_1 e^{t+is}, \omega_2 e^{\rho(t+is)}), \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vamos estudar cada uma das seguintes possibilidades:

- (I) $\omega_1 = 0$, (II) $\omega_2 = 0$, (III) ω_1 e ω_2 não nulos.

(Possibilidade I) Note que neste caso temos $|\omega_2| = 1$ e, pela equação (3.2), $e^{2\rho t} = 1$. Como $\rho \neq 0$ devemos ter $t = 0$, portanto podemos parametrizar a folha ℓ_ω como

$$\ell_{(0,\omega_2)}(s) = (0, \omega_2 e^{i\rho s}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

(Possibilidade II) Analogamente ao caso anterior obtemos $|\omega_1| = 1$ e pela equação (3.2) temos $e^{2t} = 1$, logo $t = 0$, e podemos parametrizar ℓ_ω por

$$\ell_{(\omega_1,0)}(s) = (\omega_1 e^{is}, 0), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

(Possibilidade III) Se supormos agora que ω_1 e ω_2 são não nulos obtemos a parametrização

$$\ell_{(\omega_1,\omega_2)}(s) = (\omega_1 e^{is}, \omega_2 e^{i\rho s}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Note então que as parametrizações (3.3) e (3.4) indicam que estas duas folhas são círculos em \mathbb{S}^3 , ou seja, temos nestes caso duas folhas compactas.

Já para a terceira possibilidade note que se ρ é um número racional, então todas as folhas parametrizadas em (3.5) são curvas periódicas, portanto compactas, neste caso temos uma **fibrção de Seifert**, referências [3] e [17]. Em particular, quando $\rho = 1$, todas as curvas são círculos de raio 1 e neste caso temos uma fibração de Hopf.

Finalmente se ρ é irracional a parametrização $\ell_{(\omega_1,\omega_2)}$ é conhecida como fluxo irracional do toro e seu fecho $\overline{\ell_\omega} = \mathbb{T}^2$, portanto se temos $\rho \notin \mathbb{Q}$ a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}}$ é do tipo "toro sólido-degenerado", com degenerescências nas folhas compactas $\ell_{(\omega_1,0)}$ e $\ell_{(0,\omega_2)}$.

- O caso $\sigma \neq 0$;

Como anteriormente vamos analisar as possibilidades:

- (I) $\omega_1 = 0$, (II) $\omega_2 = 0$, (III) ω_1 e ω_2 não nulos.

(Possibilidade I) Como $\omega \in \mathbb{S}^3$ e $\omega_1 = 0$ então $|\omega_2| = 1$ logo, da equação (3.2), temos

$$e^{2(\rho t - \sigma s)} = 1 \implies s = \frac{\rho t}{\sigma}$$

e portanto

$$\ell_{(0, \omega_2)}(t) = \left(0, \omega_2 e^{i \left(\frac{\sigma^2 + \rho^2}{\sigma} \right) t} \right), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

é uma folha compacta dessa folheação.

(Possibilidade II) Como $\omega_2 = 0$ então $|\omega_1| = 1$ e podemos escrever

$$\ell_{(\omega_1, 0)}(t) = (\omega_1 e^{it}, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

ou seja, $\ell_{(\omega_1, 0)}$ é uma folha compacta da folheação.

(Possibilidade III) Se ω_1 e ω_2 são não nulos, pela equação (3.2) obtemos s em função de t :

$$s = \frac{1}{2\sigma} \ln \left[\frac{|\omega_2|^2 e^{2\rho t}}{1 - |\omega_1|^2 e^{2t}} \right], \quad t < \ln(|\omega_1|^{-1}).$$

Podemos então parametrizar (3.1) por

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}(t) = (z_1(t), z_2(t)), \quad \forall t < \ln(|\omega_1|^{-1}),$$

sendo

$$z_1(t) = \exp(t) \cdot \exp \left\{ i \left[\frac{\rho}{\sigma} t - \frac{1}{2\sigma} \ln(1 - e^{2t} |\omega_1|^2) \right] \right\} \cdot \exp \left(i \frac{\rho}{\sigma} \ln |\omega_2| \right) \omega_1,$$

$$\begin{aligned} z_2(t) = \exp \left[\frac{1}{2} \ln(1 - e^{2t} |\omega_1|^2) \right] &\cdot \exp \left\{ i \left[\frac{\sigma^2 + \rho^2}{\sigma} t - \frac{\rho}{2\sigma} \ln(1 - e^{2t} |\omega_1|^2) \right] \right\} \\ &\cdot \exp \left(i \frac{\rho}{\sigma} \ln |\omega_2| \right) \cdot \frac{\omega_2}{|\omega_2|} \end{aligned}$$

Note que quando fazemos $t \rightarrow -\infty$ temos que $z_1(t) \rightarrow 0$, mas uma vez que

$$|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 = 1, \quad (3.8)$$

segue que $|z_2(t)|$ deve obrigatoriamente se aproximar de 1, assim

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}^- = \bigcap_{-\infty < s \leq 0} \overline{\{\ell_{(\omega_1, \omega_2)}(t); -\infty < t \leq s\}} = \{(0, \omega'_2); |\omega'_2| = 1\}.$$

Por outro lado, fazendo $t \rightarrow \ln(|\omega_1|^{-1})$ temos que $z_2(t) \rightarrow 0$, logo a igualdade (3.8) implica em $|z_1(t)| \rightarrow 1$, portanto

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}^+ = \bigcap_{0 \leq s < \ln(|\omega_1|^{-1})} \overline{\{\ell_{(\omega_1, \omega_2)}(t); s \leq t < \ln(|\omega_1|^{-1})\}} = \{(\omega'_1, 0); |\omega'_1| = 1\}$$

Conclui-se assim que as únicas folhas compactas são aquelas em (3.6) e (3.7). Observe ainda que todas as outras folhas não compactas são "atraídas", ou "repelidas" pelas folhas compactas.

Podemos resumir a discussão acima no seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertencente ao domínio de Poincaré e Z o campo vetorial sobre \mathbb{C}^2 definido por*

$$Z = \lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Então as folhas $\ell_{(\omega_1, \omega_2)}$ da folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$, para $r > 0$, possuem as seguintes características:

- (i) $\ell_{(\omega_1, 0)}$ e $\ell_{(0, \omega_2)}$ são compactas, $\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^1$;
- (ii) Se $Im(\lambda_2/\lambda_1) = 0$ e $Re(\lambda_2/\lambda_1) \in \mathbb{Q}$, então todas as folhas de $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ são compactas;
- (iii) Se $Im(\lambda_2/\lambda_1) = 0$ e $Re(\lambda_2/\lambda_1) \notin \mathbb{Q}$, então o fecho da folha $\ell_{(\omega_1, \omega_2)}$ é o toro \mathbb{T}^2 para qualquer $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{S}_r$, com $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 \neq 0$;
- (iv) Se $Im(\lambda_2/\lambda_1) \neq 0$ então nenhuma folha $\ell_{(\omega_1, \omega_2)}$, com $\omega_1 \neq 0$ e $\omega_2 \neq 0$, é compacta. Além disso tais folhas são atraídas ou repelidas por $\ell_{(\omega_1, 0)}$ e $\ell_{(0, \omega_2)}$.

3.1.2 Segunda classe de exemplos

Para simplificar os cálculos considere $\epsilon \in \mathbb{R}$ e então defina o campo linear Z em \mathbb{C}^2 por

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + \epsilon z_1) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Note que a esfera \mathbb{S}_r é tangente a folheação $\mathcal{F}(Z)$ num ponto $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_r$ se, e somente,

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \epsilon z_1 \bar{z}_2 = 0. \quad (3.9)$$

Considerando as identificações naturais $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = x_3 + ix_4$ a equação (3.9) se reescreve como

$$r^2 + \epsilon(x_1x_3 + x_2x_4) + i(x_2x_3 - x_1x_4) = 0,$$

logo

$$\epsilon(x_1x_3 + x_2x_4) = -r^2. \quad (3.10)$$

Assim, considere a aplicação

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto x_1x_3 + x_2x_4 \end{aligned}$$

e defina Σ o subconjunto de \mathbb{R}^4 que satisfaz a equação (3.10).

Pelo **método de Lagrange** o máximo da aplicação f , restrita a esfera $\mathbb{S}_r \subset \mathbb{R}^4$, é igual $r^2/2$, o que ocorre quando $x_1 = x_3$ e $x_2 = x_4$. Por outro lado, o mínimo tem valor $-r^2/2$ que é atingido quando $x_1 = -x_3$ e $x_2 = -x_4$, sendo que o multiplicador λ do método é igual a $\pm|\epsilon|/2$.

Logo para $|\epsilon| < 2$ temos que

$$|\epsilon(x_1x_3 + x_2x_4)| = |\epsilon| |f(x_1, x_2, x_3, x_4)| < r^2,$$

portanto $\Sigma = \emptyset$, ou seja, \mathbb{S}_r é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$. Então sem perda de generalidade vamos supor $r = 1$ e estudar a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$.

Uma folha ℓ_ω de $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$ passando $\omega \in \mathbb{S}^3$ pode ser escrita como

$$\ell_\omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3; (z_1, z_2) = (\omega_1 e^{t+is}, (\omega_2 + \epsilon \omega_1(t+is))e^{t+is}), t, s \in \mathbb{R}\}$$

(Possibilidade III) Por fim, se ω_1 e ω_2 são não nulos, da equação (3.11) obtemos a restrição $t < \ln(|\omega_2|^{-1})$, e ainda

$$\epsilon^2 |\omega_1|^2 (t^2 + s^2) - e^{-2t} + 2\epsilon t \operatorname{Re}(\omega_2 \bar{\omega}_1) - 2\epsilon s \operatorname{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2) + 1 = 0.$$

Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, s) = \epsilon^2 |\omega_1|^2 (t^2 + s^2) - e^{-2t} + 2\epsilon t \operatorname{Re}(\omega_2 \bar{\omega}_1) - 2\epsilon s \operatorname{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2) + 1.$$

Note então que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t_0, s_0) = 0 \iff s_0 = \frac{\operatorname{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2)}{\epsilon |\omega_1|^2},$$

portanto segue do teorema da função implícita que para $s \neq s_0$ temos $f(t, s(t)) = 0$. Obtemos então a parametrização

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}(t) = (z_1(t), z_2(t)), \quad \forall t < \ln(|\omega_2|^{-1}),$$

sendo

$$\begin{cases} z_1(t) = \omega_1 e^t e^{is(t)} \\ z_2(t) = \epsilon \omega_2 t e^t e^{is(t)} + i\epsilon \omega_1 s(t) e^t e^{is(t)} + \epsilon \omega_1 t e^t e^{is(t)}. \end{cases}$$

Segue disto que fazendo $t \rightarrow -\infty$ implica $z_1(t) \rightarrow 0$ e como $|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 = 1$ temos:

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}^- = \bigcap_{-\infty < r \leq 0} \overline{\{l(t); -\infty < t \leq r\}} = \{(0, \omega'_2); |\omega'_2| = 1\}$$

Assim a restrição $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$ tem como única folha compacta aquela parametrizada por (3.12). O caso $\epsilon \in \mathbb{C}$ segue as mesmas linhas apresentadas acima. Portanto com essa discussão obtemos teorema abaixo.

Teorema 3.2 *Sejam ϵ um número complexo e Z o campo vetorial em \mathbb{C}^2 definido por*

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + \epsilon z_1) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Então para $|\epsilon| < 2$ a folheação $\mathcal{F}(Z)$ é transversal à \mathbb{S}_r , para $r > 0$, e a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ possui uma única folha compacta que será atratora das demais folhas.

3.1.3 Terceira classe de exemplos

Como feito na classe anterior vamos supor que $\epsilon \in \mathbb{R}$. Sejam k um inteiro maior do que dois e o campo

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (kz_2 + \epsilon z_1^k) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Para este exemplo utilizaremos a definição e o teorema a seguir, que são estudados na referência [1], capítulo 5.

Definição 3.1 *Considere um conjunto $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Dizemos que Λ é **ressonante** se para cada $i = 1, \dots, n$ existem inteiros não negativos m_j^i tais que*

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j m_j^i \quad e \quad \sum_{j=1}^n m_j^i \geq 2.$$

Teorema 3.3 (Teorema de Poincaré) *Se os autovalores λ_j da parte linear de um campo vetorial holomorfo numa singularidade são tais que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pertence ao domínio de Poincaré e são não ressonantes, então o campo é biholomorficamente equivalente a sua parte linear numa vizinhança da singularidade.*

Assim note que a única singularidade do campo Z é a origem e que a matriz da parte linear calculada nela é

$$DZ(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = k$, que pertencem ao domínio de Poincaré. Como $k \geq 3$ então não existem inteiros não negativos m_1, m_2 satisfazendo

$$\lambda_1 = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 \quad e \quad m_1 + m_2 \geq 2,$$

ou seja, o conjunto dos autovalores é não ressonante. Portanto pelo teorema (3.3) existe uma vizinhança W da origem na qual o campo Z é biholomorficamente equivalente ao campo

$$Z_L = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + kz_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

o qual, pelo teorema (2.3), define uma folheação transversal a cada esfera \mathbb{S}_r .

Em particular as folheações $\mathcal{F}(Z)$ e $\mathcal{F}(Z_L)$ são topologicamente conjugadas, logo podemos tomar um $r > 0$, com $\mathbb{S}_r \subset W$, tal que a folheação $\mathcal{F}(Z)$ seja transversal à \mathbb{S}_r .

Uma folha $\ell_\omega \in \mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ pode ser escrita como

$$\ell_\omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_r; (z_1, z_2) = (\omega_1 e^{t+is}, (\omega_2 + \epsilon \omega_1^k(t+is))e^{k(t+is)}), (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$$

e deve satisfazer a equação

$$|\omega_1|^2 e^{2t} + |\omega_2 + \epsilon \omega_1^k(t+is)|^2 e^{2kt} = r^2, \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Como feito anteriormente analizaremos as

- (I) $\omega_1 = 0$, (II) $\omega_2 = 0$, (III) ω_1 e ω_2 não nulos.

(Possibilidade I) Neste caso obtemos facilmente a parametrização

$$\ell_{(0, \omega_1)}(s) = (0, \omega_2 e^{iks}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

(Possibilidade II) Como $\omega_2 = 0$ e $|\omega_1| = r$ segue da equação (3.13) que

$$s = \pm \sqrt{\frac{1 - e^{2t}}{|\epsilon| r^{k-2} e^{2kt}} - t^2}, \quad t < 0.$$

Neste caso temos a parametrização

$$\ell_\omega(t) = (z_1(t), z_2(t)), \quad \forall t < 0,$$

sendo

$$\begin{cases} z_1(t) = \omega_1 e^{t+is(t)} \\ z_2(t) = \epsilon \omega_1^k(t+is(t))e^{k(t+is(t))}, \end{cases}$$

Como $|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 = r^2$, $\forall t < 0$, então fazendo $t \rightarrow -\infty$ temos obrigatoriamente que $z_2(t)$ se aproxima de um ponto ω'_2 , com $|\omega'_2| = r$, pois $z_1(t)$ se aproxima de 0. Portanto

$$\ell_{(\omega_1, 0)}^- = \bigcap_{-\infty < r \leq 0} \overline{\{\ell_{(\omega_1, 0)}(t); -\infty < t \leq r\}} = \{(0, \omega'_2); |\omega'_2| = r\}.$$

(Possibilidade III) Finalmente temos para o terceiro caso a equação

$$|\omega_1|^2 e^{2t} + [|\omega_2|^2 + 2\epsilon t \operatorname{Re}(\omega_2 \bar{\omega}_1^k) - 2\epsilon s \operatorname{Im}(\omega_1^k \bar{\omega}_2) + \epsilon^2 |\omega_1|^{2k} (t^2 + s^2)] e^{2kt} = r^2, \quad (3.15)$$

com $t < \ln(r|\omega_1|^{-1})$. Aplicando o teorema da função implícita em (3.15) podemos escrever $s = s(t)$, para

$$s \neq \frac{\operatorname{Im}(\omega_1^k \bar{\omega}_2)}{|\omega_1|^{2k}}.$$

Assim obtemos a parametrização

$$\ell_\omega(t) = (z_1(t), z_2(t)), \quad \forall t < \ln(r|\omega_1|^{-1}),$$

sendo que

$$\begin{cases} z_1(t) = \omega_1 e^{t+is(t)} \\ z_2(t) = [\omega_2 + \epsilon \omega_1^k (t + is(t))] e^{k(t+is(t))}. \end{cases}$$

Fazendo $t \rightarrow -\infty$ a equação $|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2 = r^2$, $\forall t < 0$ implica que $z_2(t)$ se aproxima de um ponto ω'_2 , com $|\omega'_2| = r$, assim

$$\ell_{(\omega_1, \omega_2)}^- = \bigcap_{-\infty < t \leq 0} \overline{\{\ell_{(\omega_1, \omega_2)}(t); -\infty < t \leq r\}} = \{(0, \omega'_2); |\omega'_2| = r\}$$

Portanto a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ possui uma única folha compacta que é dada por (3.14). Fica então provado que:

Teorema 3.4 *Sejam ϵ um número real, k um inteiro maior do que dois e o campo*

$$Z = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (kz_2 + \epsilon z_1^k) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Nestas condições se $\mathcal{F}(Z)$ é transversal à \mathbb{S}_r , para algum $r > 0$, então $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ possui uma única folha compacta que será atratora das demais folhas.

3.2 Campos Holomorfos

Considere $\mathcal{F}(Z)$ a folheação definida pelas curvas integrais do campo vetorial

$$Z = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

holomorfo em alguma vizinhança do disco fechado $\overline{D}^4 = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1\}$ e \mathbb{S}^3 a fronteira de \overline{D}^4 . O principal resultado desta seção é o fato de que se a esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^4$ é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$, então o número de folhas compactas de $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$ é menor ou igual a 2 ou a folheação possui infinitas folhas compactas.

A demonstração deste resultado, obtido por *Ito*, referência [8], envolve outros teoremas, tão interessantes quanto este, os quais exibimos na sequência, em particular utiliza-se de [9] o seguinte teorema:

Teorema 3.5 *Sejam M um subconjunto de \mathbb{C}^n difeomorfo e holomorfo ao disco fechado \overline{D}^{2n} e Z um campo vetorial holomorfo numa vizinhança de M . Então se a fronteira ∂M de M é transversal à $\mathcal{F}(Z)$ temos:*

- (i) *Existe único $p \in M$ tal que $Z(p) = 0$, sendo que podemos supor $p = 0$;*
- (ii) *O índice de Z calculado em p tem valor 1;*
- (iii) *Cada folha $L \in \mathcal{F}(Z)$ que cruza ∂M tende ao único ponto singular p ;*
- (iv) *A restrição $\mathcal{F}(Z)|_{M - \{p\}}$ é C^ω -difeomorfa a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\partial M} \times (0, 1]$.*

Não exibiremos a demonstração deste teorema pois sua generalidade, bem como teoria para demonstração, fogem aos objetivos deste trabalho. Entretanto note que restringindo ao caso particular $M = \overline{D}^4$ temos que $\partial M = \mathbb{S}^3$ e obtemos o seguinte teorema, que é de grande utilidade aos nossos objetivos.

Teorema 3.6 *Suponha Z um campo vetorial holomorfo numa vizinhança de \overline{D}^4 . Se \mathbb{S}^3 é transversal à $\mathcal{F}(Z)$, então*

- (i) *O campo Z possui única singularidade $p \in \overline{D}^4$, sendo que podemos tomar $p = 0$;*
- (ii) *O índice do campo Z , em p , tem valor 1;*

- (iii) Cada solução F de Z que cruza \mathbb{S}^3 tende a 0, ou seja, $0 \in \overline{F}$;
- (iv) Para cada $0 < r \leq 1$ a esfera \mathbb{S}_r é transversal à $\mathcal{F}(Z)$;
- (v) A restrição $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}_r}$ é C^ω -difeomorfa a $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$, para $0 < r \leq 1$.

No corolário (2.7) vimos que uma folheação $\mathcal{F}(Z)$, com $Z(z) = Az$ e A diagonalizável, é transversal à \mathbb{S}^3 se, e somente se, os autovalores de A pertencem ao domínio de Poincaré. O resultado a seguir obtido por Ito, referência [8], garante de forma mais geral a recíproca de tal corolário.

Teorema 3.7 *Sejam $Z(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$ um campo holomorfo numa vizinhança de $\overline{D}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ e 0 a única singularidade de Z em \overline{D}^{2n} . Se \mathbb{S}^{2n-1} é transversal à $\mathcal{F}(Z)$ então o conjunto de autovalores λ_j da matriz $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)$ é tal que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pertence ao domínio de Poincaré.*

Demonstração:

Apresentamos uma demonstração diferente da exibida por Ito para o caso particular $n = 2$, o qual é suficiente para os propósitos deste trabalho. Para tanto, note que se \mathbb{S}^3 é transversal à $\mathcal{F}(Z)$ então temos do teorema (3.6) que o índice de Z calculado em 0 é igual a 1, portanto cada autovalor λ_j é não nulo, ver [5]. Ainda do teorema (3.6) temos que para cada $0 < r \leq 1$ a folheação $\mathcal{F}(Z)$ é transversal à \mathbb{S}_r .

Utilizando a fórmula de Taylor, podemos escrever

$$Z = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) z_j \right) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^2 G_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (3.16)$$

Suponha então, por absurdo, que o teorema seja falso, portanto os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)$ são tais que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertence ao domínio de Siegel. Uma vez que tais valores são não nulos, temos obrigatoriamente que o quociente entre estes é um número real negativo e portanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Assim a matriz A é diagonalizável, então segue do lema (2.8) que podemos tomar $0 < \epsilon < r$ tal que alguma folha de $\mathcal{F}(Z)$ é tangente a \mathbb{S}_ϵ , contradizendo a transversalidade de $\mathcal{F}(Z)$ com \mathbb{S}_r para cada $r < 1$.

■

Observação 3.1 *A demonstração do teorema (3.7) feita por Ito segue as seguintes ideias:*

Como o índice de Z calculado em 0 é igual a 1 , temos que λ_1 e λ_2 são não nulos e pelo teorema (3.6) temos que para cada $0 < r \leq 1$ a folheação $\mathcal{F}(Z)$ é transversal à \mathbb{S}_r .

Podemos tomar $r_1 > 0$ pequeno, tal que o campo

$$Z_L = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) z_j \right) \frac{\partial}{\partial z_i},$$

o qual é a parte linear do campo Z , visto como em (3.16), é transversal à esfera \mathbb{S}_{r_1} .

Como Z_L é transversal à \mathbb{S}_{r_1} , então pelo teorema de estabilidade (1.11) existe uma vizinhança W da matriz A tal que para qualquer outra matriz $B = (b_{ij})$ nesta vizinhança o campo

$$\tilde{Z}_L = \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 b_{ij} z_j \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

é também transversal à \mathbb{S}_{r_1} .

Suponha por contradição que o teorema seja falso, logo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertence ao domínio de Siegel. Podemos então, pelo teorema (1.11), tomar uma matriz $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ em W , tal que seus autovalores μ_1 e μ_2 satisfaçam as condições do lema (2.9). Assim não pode existir uma aplicação $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$, com M compacta e conexa, transversal à folheação $\mathcal{F}(\tilde{Z}_L)$. Entretanto $\mathcal{F}(\tilde{Z}_L)$ deve ser transversal à \mathbb{S}_{r_1} , ou seja $i : \mathbb{S}_r \rightarrow \mathbb{C}^2$ é transversal à $\mathcal{F}(\tilde{Z}_L)$, uma contradição.

Teorema 3.8 *Se a esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ é transversal à folheação $\mathcal{F}(Z)$, sendo*

$$X = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

então a folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$ possui uma, duas ou infinitas folhas compactas.

Demonstração:

Pelas hipóteses temos que a origem $0 \in \mathbb{C}^2$ é a única singularidade de Z no disco \overline{D}^4 . Uma vez que \mathbb{S}^3 é transversal à $\mathcal{F}(Z)$, temos do teorema (3.7) que os autovalores λ_1, λ_2 da matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)$ são tais que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertence ao domínio de Poincaré, portanto estamos nas condições do seguinte teorema, ver referências [8] e [1], capítulo 5:

[**Teorema de Poincaré-Dulac**] *Seja X o campo vetorial holomorfo numa vizinhança da origem em \mathbb{C}^2 dado por*

$$X = f_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

sendo a origem uma singularidade isolada de X . Se os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0) \right)$ são tais que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertence ao domínio de Poincaré, então existe uma aplicação biholomorfa Φ entre vizinhanças da origem tal que:

$$\Phi(0) = 0 \quad e \quad D\Phi(X) = Z,$$

sendo Z um dos campos de Poincaré-Dulac.

Portanto podemos tomar um r_0 pequeno tal que exista um biholomorfismo

$$\Phi : \mathcal{F}(Z)|_{\overline{D^4}(r_0)} \longrightarrow \mathcal{F}(W)|_{\Phi(\overline{D^4}(r_0))},$$

tal que $\Phi(0) = 0$ e $D\Phi(X) = Z$ sendo Z um dos campos de Poincaré-Dulac, para os quais já verificamos a validade do teorema, logo este biholomorfismo garante que devem existir uma, duas ou infinitas folhas compactas na folheação $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3(r_0)}$. Note então que pelo teorema (3.6), ítem (ν), temos que $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3(r_0)}$ é C^ω -difeomorfa a $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$, o que completa a demonstração. ■

3.2.1 Conjectura de Seifert

Nesta seção temos como proposta dar as principais ideias da **Conjectura de Seifert**, que diz respeito a existência de órbitas periódicas de um campo não singular em \mathbb{S}^3 . O objetivo para isto se deve ao fato de que através do teorema (3.8) obtém-se uma resposta afirmativa, exibida em [9], para esta conjectura num caso particular.

Note que todas as folhas da folheação $\mathcal{F}(S)|_{\mathbb{S}^3}$, sendo

$$S = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

definido em \mathbb{C}^2 , são as fibras da fibração de Hopf. Em 1950, *H. Seifert* provou, [15], o seguinte resultado:

Teorema 3.9 (Seifert) *Todo campo contínuo sobre a esfera \mathbb{S}^3 obtido de uma perturbação de $\mathcal{F}(S)|_{\mathbb{S}^3}$ possui pelo menos uma curva integral fechada.*

A partir disto uma resposta afirmativa à pergunta: *Todo campo não singular sobre \mathbb{S}^3 possui curva integral fechada?*, ficou conhecida como *Conjectura de Seifert*. Em 1974, Paul Schweitzer exibiu, ver [14], um contra-exemplo para tal conjectura, na verdade de foma bem mais geral. Tal exemplo é apresentado no texto [17], que pode dividido em duas partes:

1. Construir sobre \mathbb{S}^3 um campo suave X_1 que possui apenas uma órbita fechada;
2. Eliminar a órbita fechada de X_1 sem entretanto fazer surgir outras, uma técnica chamada de *Plug de Wilson*. Para tanto usa-se o curioso campo vetorial de *Denjoy*, sobre o toro \mathbb{T}^2 , que não possui nenhuma órbita periódica e nem órbitas ergódicas.

Tendo tais ideias o que se propõe é investigar campos vetoriais não singulares em \mathbb{S}^3 induzidos por campos vetoriais holomorfos numa vizinhança de \overline{D}^4 que são transversais a \mathbb{S}^3 . Este estudo se resume no seguinte corolário do teorema (3.5):

Corolário 3.10 *Seja Z um campo holomorfo numa vizinhança de \overline{D}^4 . Se $\partial \overline{D}^4 = \mathbb{S}^3$ é transversal à $\mathcal{F}(Z)$, então $\mathcal{F}(Z)|_{\mathbb{S}^3}$ possui pelo menos uma folha compacta.*

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, vol. 250. Springer, 1988.
- [2] BRUNO SCÁRDUA E ITO, T. A survey of real transverse sections of holomorphic foliations (2005). <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1447-9.pdf> , Acessado em 12/02/2012 .
- [3] CAMACHO, C. E NETO, A. *Teoria geométrica das folheações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [4] CAMACHO, C. E SAD, P. Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in \mathbb{C}^2 ; *Inventiones Mathematicae* 67 (1982), 447–472.
- [5] CAMACHO, C. E SAD, P. *Singularidades de Campos de Vetores Holomorfos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.
- [6] GUCKENHEIMER, J. Hartman's theorem for complex flows in the poincaré domain. *Compositio Math* 24, 1 (1972), 75–82.
- [7] GUILLEMIN, V. E POLLACK, A. *Differential Topology*. Chelsea Pub Co, 2010.
- [8] ITO, T. The number of compact leaves of a one-dimensional foliation (1996). <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0955-8.pdf> , Acessado em 12/02/2012 .
- [9] ITO, T. A poncaré-bendixson type theorem for holomorphic vector fields (singularities of holomorphic vector fields and related topics) (1994). <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/84173/1/0878-01.pdf>, Acessado em 12/02/2012.
- [10] KRANTZ, S. *Function theory of several complex variables*. Amer Mathematical Society, 2001.

-
- [11] LEE, J. *Introduction to Smooth Manifolds*, vol. 218. Springer Verlag, 2003.
- [12] LIMA, E. *Variedades diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.
- [13] MILNOR, J. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton Univ Pr, 1997.
- [14] SCHWEITZER, P. Counterexamples to the seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *The Annals of Mathematics* 100, 2 (1974), 386–400.
- [15] SEIFERT, H. Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations. *The Annals of Mathematics* 1, 2 (1950), 287–302.
- [16] SILVA, A. S. Espaço moduli de germe de folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Master's thesis, 2006.
- [17] TAMURA, I. *Topology of Foliations: An Introduction*, vol. 97. Amer Mathematical Society, 2006.