

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ LUIZ EMIDIO DE ABREU

**INTERVALO DE CONFIANÇA *BOOTSTRAP* PARA VALORES DA FUNÇÃO DE
CONFIABILIDADE ESTIMADOS PELO MÉTODO DE KAPLAN-MEIER**

CURITIBA

2011

ANDRÉ LUIZ EMIDIO DE ABREU

**INTERVALO DE CONFIANÇA *BOOTSTRAP* PARA VALORES DA FUNÇÃO DE
CONFIABILIDADE ESTIMADOS PELO MÉTODO DE KAPLAN-MEIER**

Dissertação apresentada como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, do Departamento de Construção Civil e do Departamento de Matemática da UFPR, na Área de Concentração em Programação Matemática e na Linha de Pesquisa em Métodos Estatísticos Aplicados a Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto

CURITIBA

2011

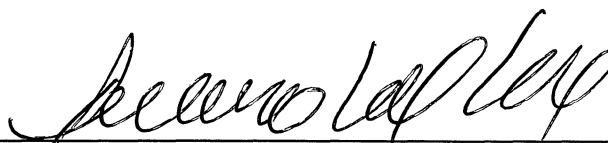
TERMO DE APROVAÇÃO

André Luiz Emidio de Abreu

“Intervalo de Confiança “Bootstrap” para Valores da Função de Confiabilidade Estimados pelo Método de Kaplan-Meier”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



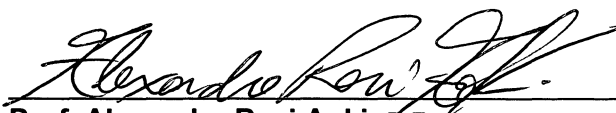
Prof. Anselmo Chaves Neto, D.Sc. (orientador)
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da UFPR



Prof. Leandro dos Santos Coelho, D.Eng.
PPGEPS / PUC-PR e PPGEE/UFPR



Prof. Leonardo Ramos Emmendorfer, D.Sc.
PPGMC / FURG



Prof. Alexandre Rasi Aoki, D.Eng.
PPGEE / UFPR e Inst. De TEc. Para o Desenv. - LACTEC

Curitiba, 04 de abril de 2011.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela força que me deu durante o percurso de mais uma etapa vencida com sucesso na minha vida.

Ao professor Dr. Anselmo Chaves Neto, pela orientação e disposição para com este trabalho.

Aos meus familiares, principalmente minha avó Venina Emidio pelo apoio irrestrito na minha trajetória, propiciando as condições para a conclusão deste curso.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná pelo esforço e dedicação no decorrer das disciplinas.

Aos colegas do mestrado pela ajuda prestada no decorrer do curso.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

A análise de confiabilidade é uma área importante, tanto para a indústria que lança novos produtos quanto para os consumidores que sempre exigem produtos cada vez melhores e que tenham uma grande durabilidade. Com isso varias técnicas foram, e ainda são, desenvolvidas para esta finalidade. Uma delas é o estimador de Kaplan-Meier, estimador da função de confiabilidade, o estimador de Kaplan-Meier é um estimador não-paramétrico assintótico, pois a assintoticidade exige que as amostras sejam grandes para que as estimativas dos valores da confiabilidade fiquem próximas aos valores reais. Uma maneira de tentar corrigir isso é a utilização de técnicas computacionalmente intensivas, tais como o método *bootstrap*, que é uma técnica de reamostragem proposto por Efron em 1979, que foi utilizado para avaliar a variabilidade de uma estatística qualquer. O trabalho apresenta a aplicação do método *bootstrap* ao estimador não-paramétrico Kaplan-Meier, e assim obter intervalos de confiança *bootstrap* para os valores das estimativas da confiabilidade. Foi desenvolvido um programa computacional em linguagem Fortran do método *bootstrap* aliado ao estimador de Kaplan-Meier, foram testadas diversas amostras de tempo de falha e comparados os resultados com os do estimador. Ao final concluiu-se que a aplicação do método resultou em resultados satisfatórios.

PALAVRAS-CHAVE: Análise de confiabilidade. *Bootstrap*. Kaplan-Meier.

ABSTRACT

The reliability analysis is an important field for the industrial as it launches new products and for consumers who demand products always better and that have a great durability. So many techniques have been and still are developed to apply this study. One is the Kaplan-Meier estimator, estimator of the reliability function. The Kaplan-Meier estimator is a nonparametric estimator, to be asymptotic requires that the samples are large for the estimates of the reliability remain close to actual values. One way of trying to fix this is to use computationally intensive techniques, such as the bootstrap method, which is a resampling technique proposed by Efron in 1979, which was used to assess the variability of a statistic any. The paper presents the application of the bootstrap method to the nonparametric Kaplan-Meier estimator, and thereby obtain confidence intervals bootstrap for values the estimates of reliability. A computer program was developed in Fortran of bootstrap method applied to Kaplan-Meier estimator, were tested several samples of failure time and compared the results with the results of estimator. In the end it was concluded that the method achieved satisfactory results.

KEYWORDS: Reliability Analysis. Bootstrap. Kaplan-Meier.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – CRONOGRAMA DE PLANEJAMENTO DA QUALIDADE DO PRODUTO	22
FIGURA 2 – EVOLUÇÃO DA CONFIABILIDADE NO DESENVOLVIMENTO DE PRODUTOS.....	23
FIGURA 3 – CLASSIFICAÇÃO DAS FALHAS	26
FIGURA 4 – CURVA DA BANHEIRA E CICLO DE VIDA DE EQUIPAMENTOS.....	27
FIGURA 5 – TIPOS DE CENSURA.....	31
FIGURA 6 – QUATRO FUNÇÕES BÁSICAS DA CONFIABILIDADE.....	33
FIGURA 7 – FUNÇÕES DE CONFIABILIDADE $R_1(t)$ E $R_2(t)$	34
FIGURA 8 – PROCEDIMENTO GERAL DE FMEA.....	42
FIGURA 9 – FORMULÁRIO FMEA	42
FIGURA 10 – HISTOGRAMA DA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS DOS TEMPOS DE FALHA POR ANO	44
FIGURA 11 – VALORES DAS ESTIMATIVAS DA CONFIABILIDADE E LIMITES DE CONFIANÇA	49
FIGURA 12 – CONFIABILIDADE ESTIMADA.....	49
FIGURA 13 – ALGORITMO DA DISTRIBUIÇÃO <i>BOOTSTRAP</i> DA ESTATÍSTICA $T_n(x,F)$	59
FIGURA 14 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	76
FIGURA 15 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	78
FIGURA 16 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	78
FIGURA 17 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 11 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	79
FIGURA 18 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 11 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	81
FIGURA 19 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 11 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	81
FIGURA 20 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 22 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	83
FIGURA 21 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 22 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	85
FIGURA 22 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 22 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	85

FIGURA 23 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 13 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	86
FIGURA 24 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 13 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	87
FIGURA 25 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 13 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	88
FIGURA 26 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	89
FIGURA 27 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	90
FIGURA 28 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 10 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	91
FIGURA 29 – HISTOGRAMA DA AMOSTRA COM 12 CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA.....	92
FIGURA 30 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 12 CATEGORIAS K-M E <i>BOOTSTRAP-T</i>	93
FIGURA 31 – INTERVALOS DA AMOSTRA COM 12 CATEGORIAS K-M E B. PERCENTIS.....	93

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – EQUAÇÕES DAS FUNÇÕES $f(t)$, $R(t)$ E $h(t)$ PARA DIFERENTES MODELOS DE PROBABILIDADE.....	35
TABELA 2 – RELAÇÕES ENTRE AS FUÇÕES $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$ E $h(t)$	36
TABELA 3 – AMOSTRAS <i>BOOTSTRAP</i> OBTIDAS DA ORIGINAL.....	65
TABELA 4 – ESTIMATIVAS <i>BOOTSTRAP</i> DA CONFIABILIDADE	65
TABELA 5 – ESTATÍSTICAS <i>BOOTSTRAP</i> PARA CADA CATEGORIA DE TENPOS DE FALHA.....	65
TABELA 6 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DE KAPLAN-MEIER E <i>BOOTSTRAP</i>	66
TABELA 7 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS.....	77
TABELA 8 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 10 CATEGORIAS.....	77
TABELA 9 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 10 CATEGORIAS.....	77
TABELA 10 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 11 CATEGORIAS.....	80
TABELA 11 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 11 CATEGORIAS	80
TABELA 12 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 11 CATEGORIAS.....	80
TABELA 13 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 22 CATEGORIAS.....	83
TABELA 14 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 22 CATEGORIAS	84
TABELA 15 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 22 CATEGORIAS.....	84
TABELA 16 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 13 CATEGORIAS.....	87
TABELA 17 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 13 CATEGORIAS	87
TABELA 18 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 13 CATEGORIAS.....	88

TABELA 19 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS.....	89
TABELA 20 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 10 CATEGORIAS	90
TABELA 21 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 10 CATEGORIAS.....	90
TABELA 22 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS.....	92
TABELA 23 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, <i>BOOTSTRAP-T</i> E <i>BOOTSTRAP</i> PERCENTILICO PARA 12 CATEGORIAS	92
TABELA 24 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA 12 CATEGORIAS.....	93

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 PROBLEMA	14
1.2 OBJETIVO.....	15
1.3 JUSTIFICATIVA	15
1.4 ESSTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	16
2 REVISÃO DE LITERATURA	17
2.1 CONFIABILIDADE DE PRODUTOS E SISTEMAS	17
2.1.1 Aplicação da confiabilidade no desenvolvimento de produtos	18
2.1.2 Evolução da confiabilidade de um produto.....	22
2.1.3 Definição de confiabilidade.....	24
2.1.3.1 Falha	25
2.1.3.2 Taxa de falha.....	26
2.1.3.3 Curva da banheira	27
2.1.3.4 Tempo médio entre falhas (MTBF).....	29
2.1.4 Censura.....	30
2.1.5 Função de confiabilidade.....	31
2.1.5.1 Definição matemática da confiabilidade	31
2.1.5.2 Funções básicas de confiabilidade.....	32
2.1.6 Função de taxa de falha	34
2.2 TESTES ACELERADOS.....	36
2.2.1 Tipos de testes acelerados.....	37
2.3 ANÁLISE DOS EFEITOS E MODOS DE FALHA (FMEA).....	39
2.4 TÉCNICAS NÃO-PARAMÉTRICAS	43
2.4.1 Estimação na ausência e presença de censura	43
2.4.2 Estimador de Kaplan-Meier	45
2.4.2.1 Kaplan-Meier com estratificação	50
2.4.3 Testes para comparação de curvas de confiabilidade	50
2.4.3.1 Teste de log-rank	50
2.4.3.2 Teste de Gehan.....	52
2.4.3.3 Teste de Peto	53
2.5 TÉCNICAS COMPUTACIONALMENTE INTENSIVAS	54
2.5.1 Método <i>Jackknife</i>	55
2.5.2 Obtenção da amostra <i>Jackknife</i>	55
2.5.3 Método <i>bootstrap</i>	56

2.5.3.1 Método <i>bootstrap</i> não-paramétrico	57
2.5.3.1.1 Definição e propriedades.....	57
2.5.3.2 Método <i>bootstrap</i> paramétrico.....	62
3 MATERIAL E MÉTODO	63
3.1 SEQUÊNCIA DA APLICAÇÃO DO MÉTODO <i>BOOTSTRAP</i>	64
3.2 ERRO PADRÃO <i>BOOTSTRAP</i>	66
3.3 INTERVALOS DE CONFIANÇA <i>BOOTSTRAP</i>	67
3.3.1 Intervalo <i>bootstrap-t</i>	67
3.3.2 Intervalo de confiança baseado nos percentis <i>bootstrap</i>	68
3.3.3 Intervalo de confiança <i>bootstrap</i> BCPB.....	69
3.3.4 Intervalos de confiança percentis BC_{α}	70
3.4 GERADOR ALEATÓRIO DE AMOSTRAS DE FALHAS.....	72
3.5 OBTENÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA <i>BOOTSTRAP</i>	73
3.6 COMPARAÇÃO DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA DE KAPLAN-MEIER E O <i>BOOTSTRAP</i>	74
4 RESULTADOS	76
4.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO <i>BOOTSTRAP</i> DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA	76
4.1.1 Amostra gerada com 10 observações com 33 itens, censurada	76
4.1.2 Amostra gerada com 11 observações com 39 itens, não censurada	79
4.1.3 Amostra gerada com 22 observações com 70 itens, censurada	82
4.1.4 Amostra gerada com 13 observações com 46 itens, censurada	86
4.1.5 Amostra gerada com 10 observações com 34 itens, não censurada	89
4.1.6 Amostra gerada com 12 observações com 56 itens, censurada	91
5 CONCLUSÃO	95
REFERÊNCIAS	97
APÊNDICES	102
APÊNDICE A	102
APÊNDICE B	104

1. INTRODUÇÃO

Durante a 2ª Guerra Mundial, pesquisas científicas foram desenvolvidas e aplicadas ou, ainda, outras já desenvolvidas foram aplicadas. Um exemplo que pode ser citado é o radar (desenvolvido pelo inglês Watson Watt em 1938-1940), outro seria o método de otimização simplex (desenvolvido pelo americano George Bernard Dantzig, com resultados publicados em 1947) e, é o caso também do desenvolvimento da confiabilidade. Nessa época, os sistemas eletrônicos tiveram uma vasta aplicabilidade e, então, evoluíram e se tornaram complexos surgindo vários problemas operacionais. A solução desses problemas exigia abordagens metódicas e bem formuladas. Assim, as forças armadas americanas criaram comitês de avaliação de problemas de confiabilidade.

No ano de 1952, o Departamento de Defesa americano coordenou os esforços do exército americano, força aérea e marinha e criou o *Advisory Group on Reability of Electronic Equipment* (AGREE). Este grupo influenciou decisivamente toda a abordagem científica sobre confiabilidade e publicou muitos artigos relatando trabalhos realizados, principalmente sobre equipamentos eletrônicos militares.

O emprego das técnicas de qualidade no Japão (1947-1950) e nos países desenvolvidos fez com que a confiabilidade fosse utilizada cada vez mais, não só na indústria bélica, mas também (e principalmente) na indústria de bens e serviços. Dessa forma, passou a ser importante nas fases industriais ou de serviços seguintes: operação, manutenção, assistência técnica e satisfação do cliente (Chaves Neto, 2010).

Seguindo essa tendência, a análise de confiabilidade foi uma das áreas da Estatística que mais cresceu nas últimas duas décadas do século passado. Isso se deve ao desenvolvimento e ao aperfeiçoamento de técnicas estatísticas em conjunto com computadores cada vez mais velozes. Essa é a área da Estatística, segundo Bailar III e Mosteller (1992), que mais se destacou no período de 1979 até 1989, tanto na área da Engenharia, quanto na área da Medicina onde é conhecida como análise de sobrevivência. Os dois artigos mais citados em toda literatura estatística no período de 1987 a 1989 foram, segundo Stigler (1994), o do estimador de Kaplan-Meier para a função de confiabilidade (1958) (sobrevivência) e o modelo de Cox (1972).

Na análise de confiabilidade, a variável resposta é, geralmente, o tempo até a ocorrência de algum evento de importância relacionada com falha. Esta variável é denominada como tempo de falha e é considerada até o tempo em que, por exemplo, o produto falhe, uma estrutura vá a colapso, ou um paciente morra, no caso da Medicina.

Uma das características dos dados de tempo de falha é a presença de censura, que é a observação parcial da resposta. A censura aparece geralmente quando um item, neste caso item pode ser considerado um componente de um sistema, uma peça de um produto ou até mesmo o produto, ou sistema, como um todo, acaba ultrapassando o ponto, ou tempo, limite do teste de vida. Geralmente, este ponto se refere ao tempo de uso, número de vezes que o produto é utilizado até atingir um número pré-estabelecido de falhas ou quando a falha ocorre de uma forma que não era esperada, por exemplo, em um teste de vida em que um monitor está sendo testado para avaliar o tempo em que o tubo de imagem suporta, em altas temperaturas, até que seu sistema eletrônico acabe falhando. Neste caso ocorreria censura do item por que a falha ocorreu no sistema eletrônico, e não no tubo. Na Medicina, seja o caso de um paciente que está sendo tratado de câncer de pulmão, mas acaba morrendo atropelado, ou de outra forma que não esteja ligada ao câncer. O paciente é retirado do estudo por censura.

Nos casos em que não ocorrem censuras, as técnicas estatísticas clássicas, como análise de regressão e outras de planejamento de experimentos, podem ser utilizadas na análise dos dados. Infelizmente isso não acontece com frequência, logo não se pode utilizar tais técnicas, uma vez que elas necessitam de todos as categorias de tempos de falha. Logo se faz necessário o uso de métodos de análise de confiabilidade, sobrevivência, que possibilitam incorporar na análise estatística a informação contida nos dados censurados. Para esses problemas foram desenvolvidas diversas técnicas estatísticas, um exemplo são os estimadores não-paramétricos, que tentam aproximar os valores da função de confiabilidade. Um muito conhecido e usado é o estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier, outro também conhecido é o estimador não-paramétrico de Nelson-Aalen (Colossimo, 2006). O primeiro, Kaplan-Meier, é o estimador utilizado neste trabalho, por ter sido comparado com o de Nelson-Aalen e obtido valores mais próximos da função de confiabilidade real.

As aplicações do estimador de Kaplan-Meier são diversas, tanto na Medicina, quanto na Engenharia e na Economia, além de outras áreas da ciência moderna. Alguns exemplos de aplicações em outras áreas podem ser observados, por exemplo, na área criminalista, onde estudam o tempo entre a liberação de presos e a ocorrência de novos crimes; estudiosos do trabalho se concentram em mudanças de emprego, desempregos, promoções e aposentadorias; demógrafos, com nascimentos, mortes, casamentos, divórcios e migrações. Mas, neste trabalho, a abordagem será estritamente na análise de confiabilidade de produtos e sistemas. Portanto, a maioria das definições, exemplos, ilustrações ou até mesmo citações são voltados à confiabilidade de produtos e sistemas.

1.1 PROBLEMA

Como mencionado anteriormente, o estudo da confiabilidade vem crescendo muito (Bailar III e Mosteller, 1992), demonstrando o interesse dos fabricantes em fornecer produtos cada vez mais confiáveis e seguros. Para isso, várias técnicas foram e ainda estão sendo desenvolvidas, e a análise de confiabilidade é uma área da estatística que tem recebido uma atenção acentuada de pesquisadores.

Com esse crescimento, várias técnicas estatísticas foram desenvolvidas, tais como os estimadores não-paramétricos da função de confiabilidade. Um método de estimação da função de confiabilidade que vem sendo utilizado por vários estatísticos e engenheiros, é o estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier, proposto em 1958, também denominado estimador Limite-produto é uma adaptação da função de confiabilidade empírica. Embora seja um estimador muito confiável, ele é assintótico, logo necessita de uma amostra grande de dados de falha, mas para produtos que ainda serão lançados, o fabricante não possui tantos dados dos tempos de falha, ou possui dados coletados do tempo de garantia que geralmente não são muitos, impondo ao fabricante que faça vários testes de vida acelerados. Mas isso pode levar a uma tabela de valores tendenciosos, sendo pouco confiável.

Logo, o principal problema é encontrar estimativas razoáveis, perto dos valores das estimativas reais, mesmo com amostras de falha de tamanho pequeno. Isso mostra que é de extrema importância a utilização de técnicas junto aos estimadores não-paramétricos para se obter estimativas cada vez melhores e mais

confiáveis, além, também, do ganho de tempo que isso pode proporcionar com o auxílio de computadores.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é utilizar a técnica computacionalmente intensiva chamada *bootstrap*, para determinar o erro padrão *bootstrap* e a partir deste erro padrão construir intervalos de confiança *bootstrap* para os valores da função de confiabilidade estimados pelo método de Kaplan-Meier. Verificando se este erro padrão *bootstrap* é menor que o do estimador, e que os intervalos de confiança *bootstrap* sejam mais curtos em torno da estimativa da função que os intervalos do estimador clássico. Com isso construir intervalos de confiança mais próximos da realidade.

Como complementação do trabalho e para a realização da aplicação e análise, desenvolveu-se um programa computacional experimental, programado na linguagem Fortran 2003, para os cálculos do método *bootstrap* e do estimador de Kaplan-Meier, para verificar a sua eficiência, além de um gerador aleatório de tempos de falha, utilizado para simular amostras de falha.

1.3 JUSTIFICATIVA

O trabalho se justifica por utilizar uma metodologia robusta na estimação dos valores da função de confiabilidade, primeiramente aplicada a produtos e sistemas, mas podendo ser ampliada para outras áreas da ciência, tais como na Medicina, Economia, confiabilidade estrutural, entre outras. Logo quando se pretende lançar um produto, um prédio, uma ponte, etc., é necessário saber quanto tempo, na média, ele pode durar, quantos quilos pode suportar, quantas vezes em média pode ser acionado, etc. Assim, como os estimadores não-paramétricos da função de confiabilidade são todos assintóticos, necessita-se de novas técnicas aliadas a estes estimadores para se obter respostas confiáveis.

Portanto, este trabalho apresenta uma aplicação do método computacionalmente intensivo *bootstrap*, associado ao estimador de Kaplan-Meier, e assim com essa aplicação, conseguir valores das estimativas mais próximas da

realidade, uma vez que o método *bootstrap* foi desenvolvido para avaliar a variabilidade de estatísticas com base em dados de amostras iniciais conhecidas. Por ser uma técnica computacionalmente intensiva, fica totalmente inviável efetuar os cálculos manualmente. Portanto, precisa-se de técnicas próprias para isso, e a principal e fundamental é o computador além de *softwares* específicos para cálculos matemáticos. Portanto, utilizou-se dos meios de computação avançados e *softwares* matemáticos, que podem ser adquiridos. Como os programas desenvolvidos são de fácil entendimento, qualquer pessoa que tenha domínio sobre o estudo da confiabilidade poderá utilizá-los com facilidade.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O trabalho está composto por esta introdução, como capítulo 1, revisão de literatura no capítulo 2, abrangendo algumas definições de confiabilidade de produtos e sistemas, suas equações principais, temas importantes que devem ser considerados, como definições de falha, censura, entre outras, o estimador de Kaplan-Meier e o método computacionalmente intensivo de reamostragens *bootstrap*. O capítulo 3 apresenta os materiais e os métodos utilizados no trabalho, com um aprofundamento no erro padrão e intervalos de confiança *bootstrap*. No quarto capítulo apresenta-se os resultados e análises feitas entre o método do *bootstrap* aplicado ao estimador de Kaplan-Meier e o próprio estimador, tais como os resultados dos intervalos de confiança e do erro padrão. Finalmente, tem-se a conclusão e as referências.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 CONFIABILIDADE DE PRODUTOS E SISTEMAS

Nos últimos anos do século passado, houve uma ênfase na Gestão de Qualidade Total, mostrando que a qualidade é tarefa de todos. Houve tempos em que nas empresas a qualidade era apenas tarefa do departamento do Controle de Qualidade. Nos dias de hoje, sob o guarda-chuva da Gestão da Qualidade Total, são incluídas as atitudes da alta liderança, do planejamento estratégico, da gestão de recursos humanos, da gestão dos processos, dos próprios resultados obtidos do negócio e da satisfação do cliente.

Referindo-se ao produto em si, que vai determinar a satisfação do cliente e conseqüentemente a sua retenção, está o desempenho das características técnicas ao longo do período estimado de vida do produto. Neste momento, é importante conceituar confiabilidade como sendo a probabilidade de que um produto desempenhe suas funções previstas por um período de tempo sob condições específicas de operação pré-determinados. É difícil encontrar uma pessoa que nunca teve um produto que deixou de funcionar ocasionando inúmeros problemas ao próprio usuário. As definições clássicas de confiabilidade e falhas serão abordadas a seguir nas próximas seções deste capítulo.

Devido à globalização, cada vez mais os produtos vêm sendo comercializados entres os países. As exportações e importações de produtos de diferentes países, com diferentes condições climáticas e de estilos de usos, como por exemplo, os automóveis que foram desenvolvidos em países de origem e passaram a ser vendidos em outros países sob outras condições de qualidade de combustíveis e de estrada, por essas diferenças podendo trazer problemas aos usuários. Essa evolução torna fundamental garantir os quatro aspectos básicos da confiabilidade: valor da probabilidade, o tempo de uso, o desempenho e as condições de operação, para poder se tornar, ou se manter, competitivo no mercado mundial.

Com a complicação técnica dos produtos que vem sendo lançados atualmente, torna-se cada vez mais importante conhecer o MTBF (*Mean Time Between Failures* – tempo médio entre falhas) de cada produto, que permite avaliar

o volume de serviços de assistência técnica, seu dimensionamento, seus requisitos de mão-de-obra ou até um programa de manutenção preventiva se necessário.

Assim, é importante mencionar que o desenvolvimento e a introdução de novos produtos que obedeçam as especificações durante um tempo pré-determinado, inserem-se no modelo sistêmico da Qualidade Total.

2.1.1 Aplicação da confiabilidade no desenvolvimento de produtos

Num ambiente de alta competição, o que é hoje muito comum nos mercados, é importante que as empresas sejam capazes de determinar e controlar a confiabilidade dos seus produtos. Sabendo-se o nível de confiabilidade dos produtos, pode-se saber de antemão se as expectativas dos clientes quanto a este produto serão atingidas, bem como o nível de qualidade do mesmo. Nesta definição, produtos são componentes, subsistemas ou sistemas que constituem um produto ou serviço.

A principal aplicação de confiabilidade em Engenharia é na prevenção de falhas. O conceito de falha será apresentado a seguir, mas pode-se adiantar que, falha pode ser definida como término da disponibilidade de um produto, para realizar sua função requerida (Hoyland e Rausand, 1994). Falhas podem ser classificadas conforme seus modos de ocorrência. Um modo de falha pode ser descrito como o efeito causador da falha em um produto. Como os produtos são desenvolvidos para realizar uma ou mais funções, um modo de falha é, portanto, definido como a não realização de uma destas funções. A maioria dos produtos apresenta diferentes modos de falha.

Saindo da teoria e entrando na prática, para analisar a confiabilidade de um sistema, o analista deve conduzir um modelo estocástico que o descreva ou escolher um modelo já existente que se adapte a ele. O modelo adotado deve descrever as funções essenciais do sistema, não sendo necessária a exatidão nesta descrição. Neyman (1954, *apud* Hoyland e Rausand, 1994), um dos pioneiros da matemática estatística, propôs que toda tentativa de uso da matemática para o estudo de algum fenômeno real deve iniciar com a construção de um modelo matemático. Este modelo matemático proposto será apropriado se não ignorar detalhes relevantes na compreensão do fenômeno estudado. A solução do problema matemático pode estar correta e não condizer com a realidade, simplesmente

porque a suposição original do modelo matemático diverge das condições práticas do problema considerado. Para ter certeza que o modelo matemático adotado é adequado, deve-se prever um número mínimo de resultados a partir deste modelo e compará-los com observações realizadas.

Segundo Box *et al.* (1978) nenhum modelo matemático de fenômenos físicos é totalmente correto. Em algumas situações particulares, alguns modelos são mais úteis do que outros. Considerando que a modelagem matemática permite um estudo mais aprofundado do fenômeno em estudo, a obtenção de modelos matemáticos é a chave em estudos de Confiabilidade.

Na maioria dos estudos de sistemas técnicos (mecânicos, químicos, elétricos, entre outros) é necessário trabalhar com modelos que representam os sistemas analisados. Estes modelos podem ser gráficos ou matemáticos. Os modelos matemáticos utilizados devem ser capazes de apresentar dados e possibilitar o uso de métodos matemáticos e estatísticos para estimar parâmetros de confiabilidade, segurança e risco. Os modelos matemáticos devem apresentar as seguintes características:

- (i) Ser suficientemente simples, para serem tratáveis através dos métodos matemáticos e estatísticos disponíveis;
- (ii) Ser suficientemente realistas, para deduzir os resultados da relevância prática (Hoyland e Rausand, 1994).

A análise de confiabilidade pode ser considerada uma tarefa multidisciplinar, pois envolve diferentes áreas de conhecimentos na execução. Os conhecimentos e recursos mínimos para a realização de um estudo de confiabilidade são os seguintes:

- (i) Conhecimento dos aspectos técnicos do sistema, ou produtos analisados e dos mecanismos físicos que podem conduzir à falhas deste sistema;
- (ii) Conhecimento dos conceitos matemático-estatísticos e métodos estatísticos necessários na análise;
- (iii) Disponibilidade de dados reais para a estimativa de parâmetros e teste dos modelos desenvolvidos;
- (iv) Disponibilidade de programas computacionais apropriados para a análise de sistemas complexos.

A quantidade de recursos necessários na análise de Confiabilidade depende da complexidade do sistema focado e profundidade da análise que se deseja realizar (Hoyland e Rausand, 1994).

A análise de confiabilidade pode ser administrada como um sub-processo do processo de desenvolvimento de produtos, uma vez que se pode determinar atividades relativas à confiabilidade em diversas etapas do desenvolvimento de produtos. Desde uma etapa preliminar, quando são estipuladas as metas de confiabilidade, até uma etapa de início de produção, quando os dados de confiabilidade de máquinas-piloto são avaliados e comparados com as metas anteriormente traçadas.

Os manuais de referência do sistema da Qualidade QS9000 fazem referência a análise de confiabilidade como parte integrante do processo de desenvolvimento de produtos. A Figura 1 ilustra como DVP&R (*Design Verification Plan & Report* – Relatório e Plano de Verificação do Projeto), está contido no processo de desenvolvimento de produtos, conforme previsto no manual APQP (*advance product quality planning* – planejamento avançado da qualidade do produto) das normas QS9000, e sua correlação com a engenharia de confiabilidade.

Já na fase do planejamento do projeto, é importante abordar o tema confiabilidade, estabelecendo-se as metas de qualidade e confiabilidade pretendidas para o novo produto. Nessa fase são estabelecidos os padrões referenciais (*benchmarks*), no qual o novo produto deverá espelhar-se em termos de qualidade e confiabilidade. Não somente dados referenciais ao produto são considerados, mas também padrões relativos a processos de fabricação e montagem. Dados de grande valia nesta avaliação são os estudos de confiabilidade em produtos similares e/ou concorrentes, bem como o uso dos dados de garantia que demonstrem a confiabilidade de produtos correntes ou que serão substituídos. São analisados dados que podem ser reportados, como tempo médio entre falhas (MTBF – *mean time between failures*), o número de falhas por máquina em um determinado período (pode ser o período de garantia), ou uma informação de grande valia para análises gerenciais, o valor gasto em garantia como um percentual de receitas financeiras.

Para se estipular as metas de confiabilidade e qualidade também devem ser adotadas técnicas que traduzam a expectativa dos clientes, tal como o QFD (*Quality Function Deployment* - desdobramento da função qualidade), por exemplo. Os dados de confiabilidade também podem ser expressos em um percentual de falhas

admitido com um determinado nível de uso do equipamento, bem como o número de defeitos por milhão de peças produzidas.

A segunda fase da abordagem da confiabilidade ocorre durante o desenvolvimento de produtos. Agora, as metas de confiabilidade estabelecidas na fase de planejamento passam a nortear o desenvolvimento do projeto e dos processos de fabricação. Os materiais e tolerâncias dimensionais são selecionados conforme as características mecânicas e químicas necessárias para atender os requisitos especificados na etapa anterior.

A confiabilidade do produto deve ser verificada em campo. Mas muito antes da construção de protótipos para testes de campo ou para testes de laboratório, diversas práticas podem ser adotadas, as quais propiciam a verificação antecipada se determinadas peças e/ou subconjuntos atendem as especificações de engenharia. Neste momento são estabelecidos os requisitos funcionais, de durabilidade e de aparência dos componentes e conjuntos. Estas verificações antecipadas são muito importantes para reduzir o custo do projeto e o ciclo de desenvolvimento. São feitas análises virtuais de desempenho de peças, como, por exemplo, análises de elementos finitos, realidade virtual e simulações de solicitações dinâmicas.

Uma vez realizadas as análises virtuais selecionadas para o projeto em questão, pode-se iniciar a fase de testes de bancada em componentes e, testes de campo, com protótipos. Desta fase de testes em diante se inicia o monitoramento dos dados de confiabilidade através do registro dos dados de falhas, para se plotar as curvas de confiabilidade e monitorar a situação real contra os objetivos estipulados na fase de planejamento.

A confiabilidade do produto é monitorada ao longo das outras fases do desenvolvimento, pelo registro e análise de falhas, permitindo uma comparação da evolução da confiabilidade do produto da fase de protótipos para a fase de lote piloto e início de produção.

Este monitoramento permite reportar para os responsáveis se as metas de confiabilidade serão atingidas e se as melhorias feitas ao longo do desenvolvimento estão sendo eficazes em elevar o tempo entre falhas do produto.

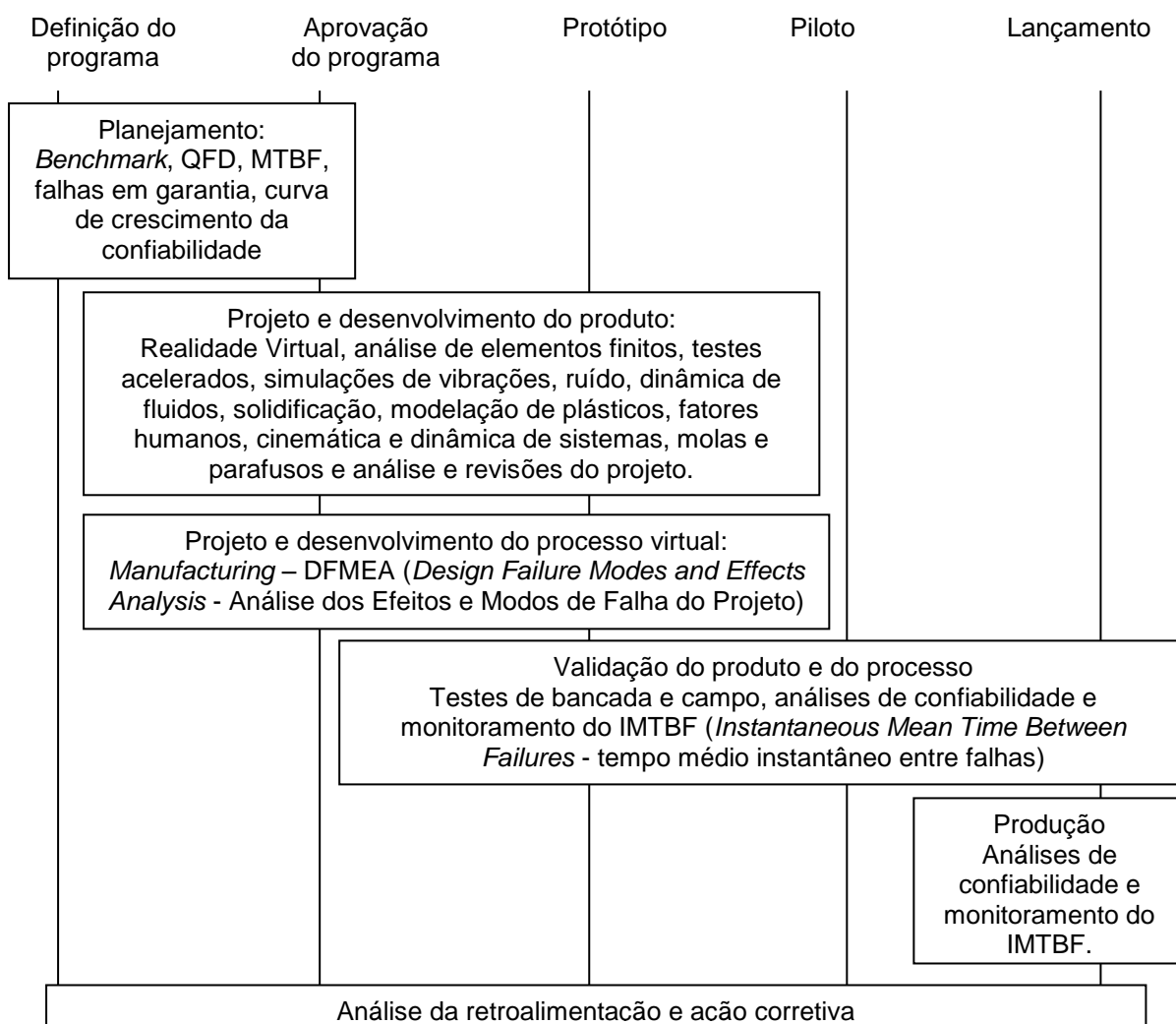


FIGURA 1 – Cronograma de planejamento da qualidade do produto
 FONTE: Richter (2004).

2.1.2 Evolução da confiabilidade de um produto

O monitoramento da evolução da confiabilidade deve ser feito a partir do momento em que haja protótipos prontos para irem a campo. O mais importante de tudo é haver rigorosidade e um bom sistema para registrar as falhas que ocorrem durante os testes de campo.

A confiabilidade deve crescer ao longo do tempo até atingir um percentual próximo ao da confiabilidade estabelecida para o início da produção. Revisões de projetos, que devem ser feitas a partir dos dados de falha, incorporam créditos ao projeto que permite o aumento do tempo entre falhas. Mesmo após o início da produção são incorporadas melhorias aos produtos, fazendo com que sua confiabilidade melhore até atingir um grau de maturidade.

Existem diversas formas de se representar a evolução da confiabilidade. Uma delas mostra a evolução do IMTBF (*Instantaneous Mean Time Between Failures* - tempo médio instantâneo entre falhas) ao longo do tempo. A Figura 2 apresenta um exemplo da evolução da confiabilidade no desenvolvimento de produtos.

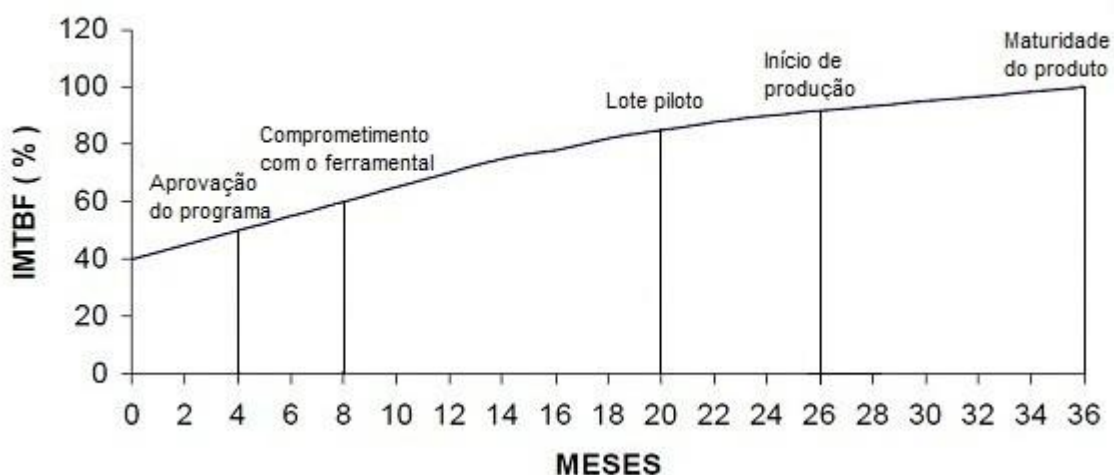


FIGURA 2 – Evolução da confiabilidade no desenvolvimento de produtos.
FONTE: Richter (2004).

O IMTBF consiste em reduzir o intervalo de análise a um valor arbitrário, para avaliar a evolução do mesmo ao longo do programa, à medida que as melhorias no projeto forem sendo incorporadas ao novo produto. A Figura 2 apresenta o progresso percentual do IMTBF em relação ao objetivo estipulado ao programa, na fase de planejamento.

Para atingir a evolução planejada do IMTBF, um plano consistente de testes e um tratamento adequado as falhas encontradas devem ser implementados. A evolução da confiabilidade pode ser considerada como um processo de teste do produto, resolução dos problemas de confiabilidade e monitoramento do seu crescimento.

Antes de serem construídos os protótipos, os engenheiros devem estimar a confiabilidade inerente e a confiabilidade inicial. A confiabilidade inicial deve ser alta o suficiente para atingir os objetivos finais, ao tempo certo estabelecido, para o programa. Melhorar a confiabilidade inicial é mais fácil que aumentar a taxa de evolução da confiabilidade.

A taxa de evolução da confiabilidade pode ser definida como a inclinação da curva da Figura 2, plotada em escala logarítmica. A confiabilidade inerente é o valor a qual o produto irá atingir em sua fase de maturidade.

A estimação da confiabilidade inicial e inerente é feita baseada na experiência das pessoas com o auxílio de técnicas e ferramentas, tais como, o desenvolvimento de FMEAS (*Failure Modes and Effects Analysis* – análise dos efeitos e modos de falha), dados de produtos similares, dados de garantia e análise de causa raiz. Caso as confiabilidades inicial e inerente não estejam em níveis aceitáveis, uma revisão do projeto deve ser feita para permitir que estas grandezas correspondam às expectativas. Algumas empresas trabalham com uma confiabilidade inicial de pelo menos 50% do objetivo de produção, para assim iniciar a construção dos protótipos.

Com os objetivos claramente estabelecidos outros pontos importantes de decisão devem ser avaliados. Momentos antes de iniciar-se a fabricação do lote piloto deve-se avaliar se uma nova revisão de projeto é necessária, caso os níveis de confiabilidade estabelecidos para aquele ponto não sejam atingidos. A mesma avaliação pode ser feita antes de iniciar a produção e mostrar ao gerenciamento se o produto ainda necessita de melhoria para atingir os níveis de confiabilidade projetados e servir como instrumento de decisão para postergar o início de produção. Esta sempre é uma decisão difícil de ser tomada, mas pode ser, estrategicamente, uma decisão importante para evitar custos indesejados de garantia e a insatisfação de clientes.

2.1.3 Definição de Confiabilidade

Conceito de Confiabilidade: Confiabilidade é um atributo inerente ao projeto do produto e representa a capacidade potencial que deveria ser atingida em condições habituais, desde que fabricado exatamente conforme projetado e operado e mantido exatamente nas condições prescritas (Bergamo, 1997).

Definição de Confiabilidade: Confiabilidade é a probabilidade de que um componente ou sistema cumpra sua função com sucesso, ou seja, tenha um bom

desempenho durante um período de tempo previsto, sob as condições de operação especificadas no seu projeto (Bergamo, 1997).

2.1.3.1 Falha

A definição de falha é um conceito fundamental para qualquer estudo em análise de confiabilidade. De maneira geral, uma falha consiste na interrupção ou alteração da capacidade de um item em desempenhar uma função requerida ou esperada, sendo que item corresponde a qualquer parte, componente, dispositivo, subsistema, unidade funcional, equipamento ou sistema que possa ser considerado individualmente (Guzzon, 2009).

O termo falha (*failure*) é frequentemente confundido com os termos erro e defeito (*fault*), principalmente devido às traduções de seus respectivos termos do inglês para a língua portuguesa. Isso gera a existência de diferentes definições para eles, muitas vezes conflitantes. O erro corresponde à discrepância entre o valor observado e o valor alvo (correto), não sendo considerado como uma falha por encontrar-se dentro de limites aceitáveis de desvio do desempenho desejado. A falha corresponde, por sua vez, ao evento que ocorre quando a função requerida é perdida (excedendo os limites aceitáveis). O estado de um item caracterizado pela incapacidade de desempenhar sua função requerida é denominado estado de falha (Avizinenis *et al.*, 2004).

Um erro pode ser referido como uma falha incipiente e é causado por um defeito. Um defeito pode ser tanto externo quanto interno. A ativação de um defeito interno latente ou a presença de um defeito externo pode gerar um erro. Um erro é sucessivamente transformado em outros erros (propagação), podendo gerar uma falha subsequente, dependendo da estrutura do sistema ou do comportamento deste. A falha de um item, por sua vez, pode ser a causa de um defeito em outro item ao qual esse se relaciona (Guzzon, 2009).

A Figura 3 apresenta a classificação das falhas sob vários aspectos, tais como origem, extensão, velocidade, manifestação, criticidade ou idade. Dessa maneira, as falhas podem ser, quanto à extensão, parciais ou completas, dependendo se conduzem à incapacidade do item de desempenhar alguma função requerida ou se ocorre perda total da função requerida deste.

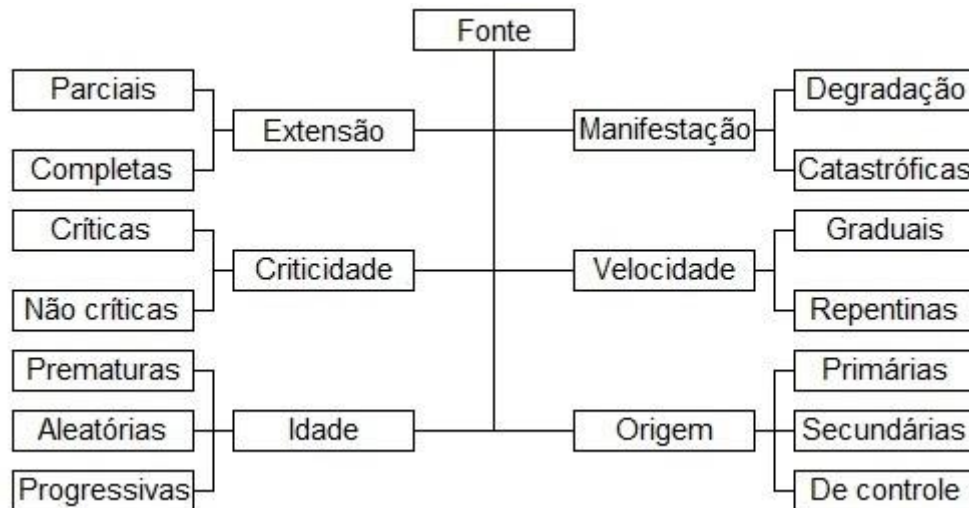


FIGURA 3 – Classificação das falhas.
 FONTE: Adaptado de Siqueira (2005).

Ainda, o complemento da confiabilidade é a probabilidade de falha (de componente ou sistema).

Tradicionalmente, as fases da vida de um componente ou sistema são descritas pela Curva da Banheira, que será apresentada e definida na secção 2.1.4.

2.1.3.2 Taxa de Falhas

A Taxa de falhas é definida como a frequência com que as falhas ocorrem num certo intervalo de tempo medida pelo número de falhas por cada hora, ou outra unidade de tempo escolhida, de operação ou número de operações do sistema (ou componente) (Chaves Neto, 2010).

Geralmente a taxa de falhas é representada por λ e o inverso da taxa de falhas é conhecido como Tempo Médio Entre Falhas (TMEF), tradicionalmente é conhecida em inglês como *Mean Time Between Failures* (MTBF). A expressão do TMEF ou MTBF é:

$$MTBF = TMEF = \frac{1}{\lambda} \quad (2.1)$$

Tipos de falhas frequentes

- **falha aleatória:** é qualquer falha cuja causa ou mecanismo de falha faça com que seu instante de ocorrência se torne imprevisível, a não ser no sentido probabilístico;

- **falha por deterioração:** é a falha que resulta de mecanismos de deterioração inerentes ao item, os quais determinam uma taxa de falha crescente ao longo do tempo;
- **falha catastrófica:** é a falha repentina, a qual não pode ser prevista por monitoração, que resulta na incapacidade.

As falhas dos produtos podem ser caracterizadas em relação ao tempo como de três categorias:

- Falhas no início da vida (mortalidade infantil);
- Falhas durante a vida útil (normal) que possui taxa de falha constante
- Falhas no final da vida (deterioração – velhice).

Estes tipos de falhas são plotados em uma curva chamada curva da banheira.

2.1.3.3 Curva da banheira

A análise do comportamento da taxa de falha de um equipamento, ou produto, ao longo do tempo pode ser representada por uma curva que possui a forma de uma banheira, a curva da banheira (*bathtub curve*), conforme apresentado na Figura 4. A curva representa as fases da vida características de um sistema: mortalidade infantil, maturidade e mortalidade senil. As fases estão associadas ao fator de forma γ , que é um dos parâmetros de uma eventual distribuição de Weibull que descreva a confiabilidade do produto (Sellitto, 2005).

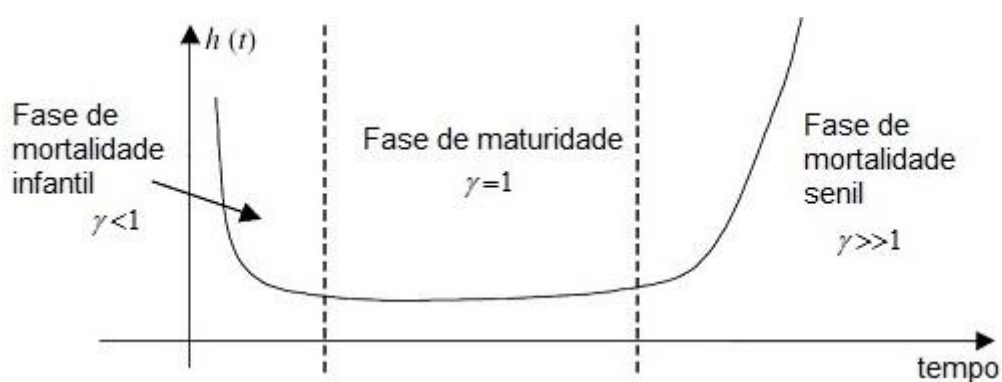


FIGURA 4 – Curva da Banheira e ciclo de vida de equipamentos.
Fonte: Sellitto (2005).

No primeiro período, período de mortalidade infantil, a taxa de falhas ($h(t)$) geralmente é alta, porém decrescente. As falhas preliminarmente são causadas por defeitos congênitos ou fraquezas, erros de projeto, peças defeituosas, processos de fabricação inadequados, mão-de-obra desqualificada, estocagem inadequada, instalação imprópria, partida deficiente entre outras. A taxa de falhas diminui com o tempo, conforme os reparos de defeitos eliminam componentes frágeis ou à medida que são detectados e reparados os erros de projeto ou de instalação. Sellitto (2005) ressalta que, neste período, a melhor estratégia de manutenção é a corretiva, ou seja, cabe à manutenção não apenas reparar o equipamento, mas corrigi-lo, para que a falha não venha a se repetir.

A fase de maturidade ou período de vida útil encontra-se entre t_1 e t_2 . O valor médio da taxa de falha é constante. Nesta fase, as falhas ocorrem por causas aleatórias, externas ao sistema, tais como acidentes, mau uso ou operação inadequada, e são de difícil controle. As falhas aleatórias podem assumir diversas naturezas, tais como: sobrecargas aleatórias, problemas externos de alimentação elétrica, vibração, impactos mecânicos, bruscas variações de temperatura, erros humanos de operação entre outros. Falhas aleatórias podem ser reduzidas projetando equipamentos mais robustos do que exige o meio em que opera ou padronizando a operação. Segundo Sellitto (2005), neste período, a melhor estratégia de manutenção é a preditiva, ou seja, monitoramento para detectar o início da fase de desgaste.

Após t_2 , há um crescimento da taxa de falhas, a mortalidade senil, ou fase da velhice, que representa o início do período final de vida do produto. Esta fase é caracterizada pelo desgaste do componente, corrosão, fadiga, trincas, deterioração mecânica, elétrica ou química, manutenção insuficiente entre outros. Para produzir produtos com vida útil mais prolongada, deve-se atentar para o projeto, utilizando materiais e componentes mais duráveis, um plano de inspeção e manutenção que detecte que iniciou a mortalidade senil e a previna, por substituição preventiva de itens, e supressão dos agentes nocivos presentes no meio. Ainda, segundo Sellitto (2005), neste período, a melhor estratégia de manutenção é a preventiva, ou seja, já que o equipamento irá falhar, cabe à manutenção aproveitar a melhor oportunidade para substituir ou reformar o item.

O término da vida útil, sob o ponto de vista da confiabilidade, que ocorre quando o item ingressa no período de mortalidade senil, não deve ser confundido

com sua obsolescência do ponto de vista mercadológico ou produtivo. Nesta, o item é substituído por haver desaparecido o valor atribuído à função que desempenha. Na fase da mortalidade senil, a substituição ocorre por queda na confiabilidade do item em produzir o valor que dele se espera. Siqueira (2005) distingue vida segura de vida econômica. Naquela, o item opera até que a probabilidade de falha ultrapasse um patamar de segurança. No período de mortalidade senil, o item opera enquanto a função que desempenha continua sendo necessária.

Siqueira (2005) comenta que sistemas industriais evoluem na curva da banheira segundo várias características. Lafraia (2001) ressalta que pode não existir alguma das fases, passando-se, por exemplo, da mortalidade infantil para a senil, diretamente. Este é o caso da pesquisa com embreagens, relatada em Sellitto, Borchardt e Araújo (2002). Sistemas eletrônicos geralmente apresentam mortalidade infantil e depois apenas falhas aleatórias, estacionando na parte baixa da curva. Tal região é dita sem memória de falha (*failure memoryless*), pois a incidência de uma falha no tempo t não tem correlação com o tempo até a próxima falha. Em *softwares*, as falhas de programação geralmente têm apenas mortalidade infantil, pois uma vez corrigidas, é impossível a reincidência, pois não se originam de processos dissipativos de energia.

2.1.3.4 Tempo Médio Entre Falhas (MTBF)

Predições de confiabilidade podem ser utilizadas para estimar as taxas de falhas de um produto ou o MTBF de um determinado sistema, ou produto. O MTBF é normalmente expresso por horas. Por exemplo, se o MTBF de um sistema é de 1000 horas, isso significa que o sistema, ou produto, na média, irá apresentar uma falha em 1000 horas de operação.

Segundo Pasetto (2002), o MTBF deve ser usado quando a função de distribuição de falhas é especificada, porque o nível de confiabilidade indicado pelo MTBF depende do tipo da distribuição de falhas. Isso significa que dois produtos com o mesmo MTBF podem ter níveis de confiabilidade diferentes se a distribuição de falhas dos mesmos também for. Existem padrões aceitos na indústria para a modelagem das taxas de falhas de componentes que podem ajudar a estimar a taxa de falha de um sistema ou seu MTBF. O objetivo é garantir que o MTBF projetado esteja sempre dentro dos limites aceitáveis pelo mercado.

Além do MTBF outro método também pode ser utilizado para quantificar a confiabilidade de um sistema ou produto, o MTTF (*Mean Time To Failure* - tempo médio até a falha) pode ser utilizado. A diferença está no tipo de sistema, para sistemas que podem ser reparados utiliza-se o MTBF, já para sistemas que não podem ser reparados utiliza-se o MTTF.

2.1.4 Censura

Nos estudos de análise confiabilidade são comuns situações em que o experimento termina antes que todos os equipamentos, ou produtos, venham a falhar.

Uma característica marcante destes estudos é a presença de observações incompletas ou parciais dos tempos de falha dos produtos observados. Dessa forma existe a necessidade de introduzir uma variável dicotômica na análise que indique se o valor do tempo de sobrevivência para um determinado produto foi ou não observado até a sua falha. Essa variável é conhecida na literatura como variável indicadora de censura, e é definida como sendo igual a um, se o tempo de sobrevivência é observado, e igual a zero, caso o tempo de sobrevivência seja censurado antes da falha acontecer.

É importante ressaltar que, mesmo censurados, todos os resultados provenientes do estudo de sobrevivência devem ser usados na análise estatística, pois a omissão das censuras no cálculo das estatísticas de interesse poderá acarretar em conclusões viciadas.

A censura pode ser de três tipos:

- **Censura por tempo ou do tipo I:** o teste termina após um período pré-estabelecido de tempo;
- **Censura por falha ou do tipo II:** o teste termina após ter ocorrido falha em um número pré-determinado de itens sob teste.
- **Censura do tipo aleatório:** o item é retirado do teste antes de ocorrer a falha; é o caso do item falhar por uma causa diferente da que foi definida.

A Figura 5 ilustra exemplos dos tipos de censura.

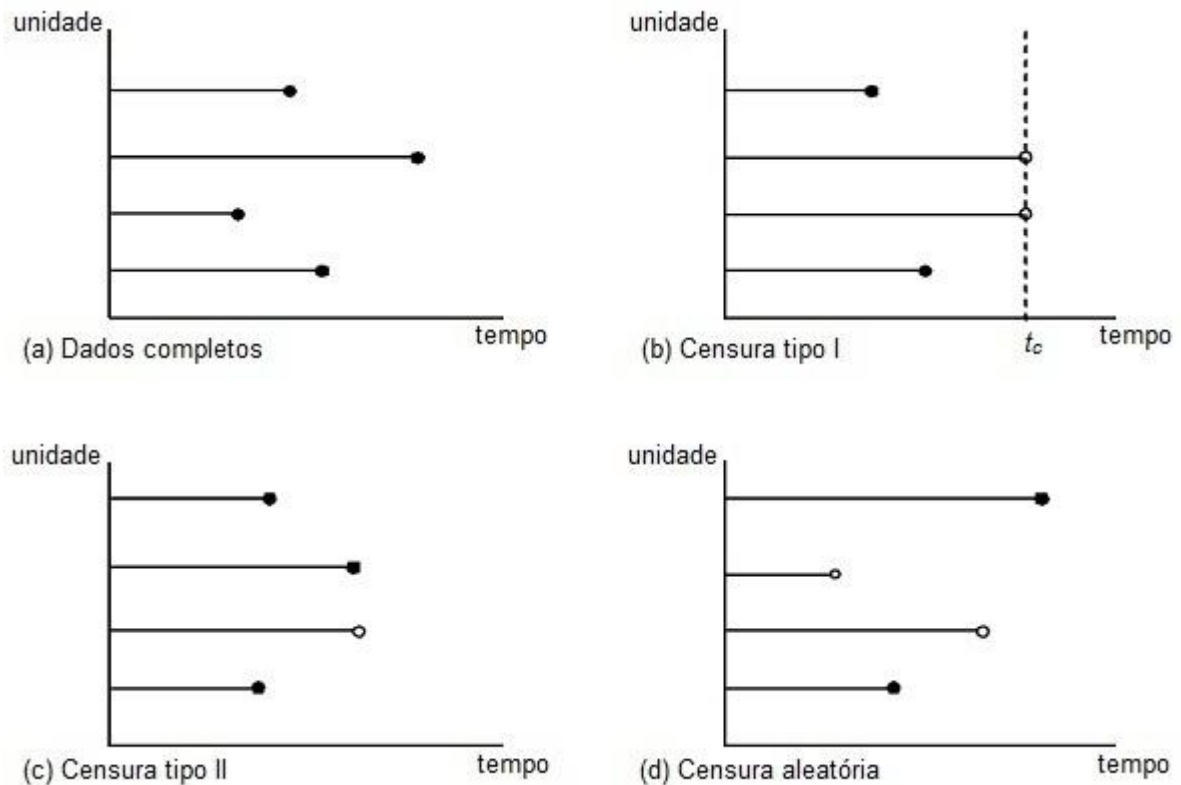


FIGURA 5 – Tipos de censura
 FONTE: Adaptado de Colossimo (2006).

2.1.5 Função de confiabilidade

Definição: A função de confiabilidade é definida como a probabilidade de um produto funcionar sem falhar até um dado tempo t (Chaves Neto, 2010).

Esta é a principal função probabilística usada para descrever dados de durabilidade e, expressando o tempo até falhar como a variável aleatória T , sua expressão é dada por:

$$R(t) = P(T > t) \quad (2.2)$$

2.1.5.1 Definição matemática da confiabilidade

Segundo Bergamo (1997), duas funções são muito utilizadas para descrever uma variável aleatória contínua x . São elas: a função de distribuição acumulada (*fda*) e a função densidade de probabilidade (*fdp*).

A *fda* indica a probabilidade de que X tenha um valor menor ou igual a x , ou seja:

$$F(x) = P(X < x) \quad (2.3)$$

Já a *fdp* indica a probabilidade de que X esteja compreendido entre x e $x + \Delta x$ à medida que Δx se torne pequeno, logo:

$$f(x) = P(x < X < x + \Delta x) \quad (2.4)$$

2.1.5.2 Funções básicas de confiabilidade

As quatro funções básicas em estudos de confiabilidade, adaptadas de Fritsch (1996) e Ribeiro (2003) são:

- Função densidade de probabilidade de falha $f(x)$;
- Função Acumulada de falha $F(t)$: Probabilidade de falha até o tempo t ;
- Função de confiabilidade $R(t)$: Probabilidade de sucesso além do tempo t ;
- Taxa de risco – $h(t)$: Taxa de falha dos sobreviventes no tempo t .

Onde as funções se relacionam conforme as equações a seguir:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx \quad (2.5)$$

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.6)$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{-dR(t)}{dt} \quad (2.7)$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.8)$$

Assim supondo que n_0 componentes idênticos sejam testados e que ao final do tempo de teste t , $n_f(t)$ componentes falharam e $n_s(t)$ componentes sobreviveram, as funções básicas da confiabilidade podem ser estimadas, para estes valores hipotéticos como:

$$\hat{F}(t) = \frac{n_f(t)}{n_0} \quad (2.9)$$

$$\hat{R}(t) = \frac{n_s(t)}{n_0} \quad (2.10)$$

$$\hat{f}(t) = \frac{n_f(\Delta t)}{n_0 \Delta t} \quad (2.11)$$

$$\hat{h}(t) = \frac{n_f(\Delta t)}{n_s(\Delta t) \Delta t} \quad (2.12)$$

A Figura 6 apresenta as representações hipotéticas para as quatro funções básicas da confiabilidade apresentadas anteriormente.

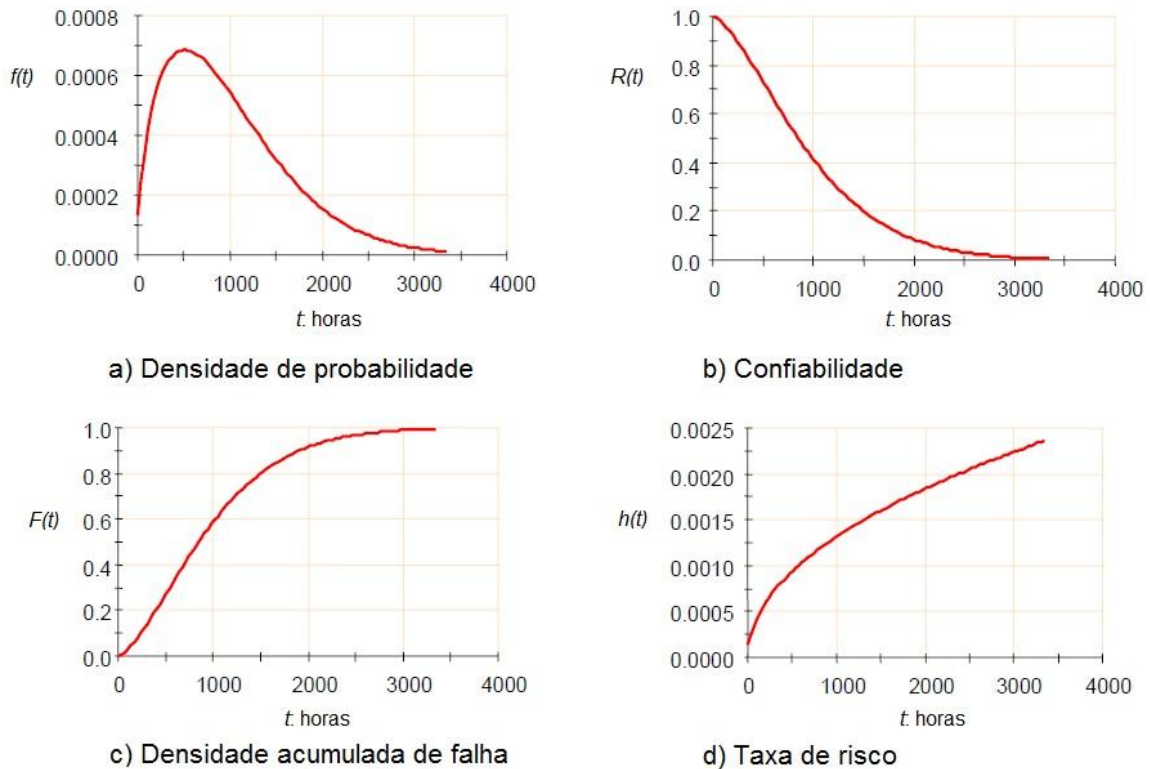


FIGURA 6 – Quatro funções básicas da confiabilidade
Fonte: Dillenburg (2005)

A Figura 7 apresenta o gráfico de duas funções de confiabilidade, $R_1(t) = e^{-0.1t}$ e $R_2(t) = e^{-0.025t}$. Uma para o tempo de falha modelado pela distribuição exponencial com parâmetro $\theta=1/10$ (curva 1) e outra com $\theta=1/40$ (curva 2).

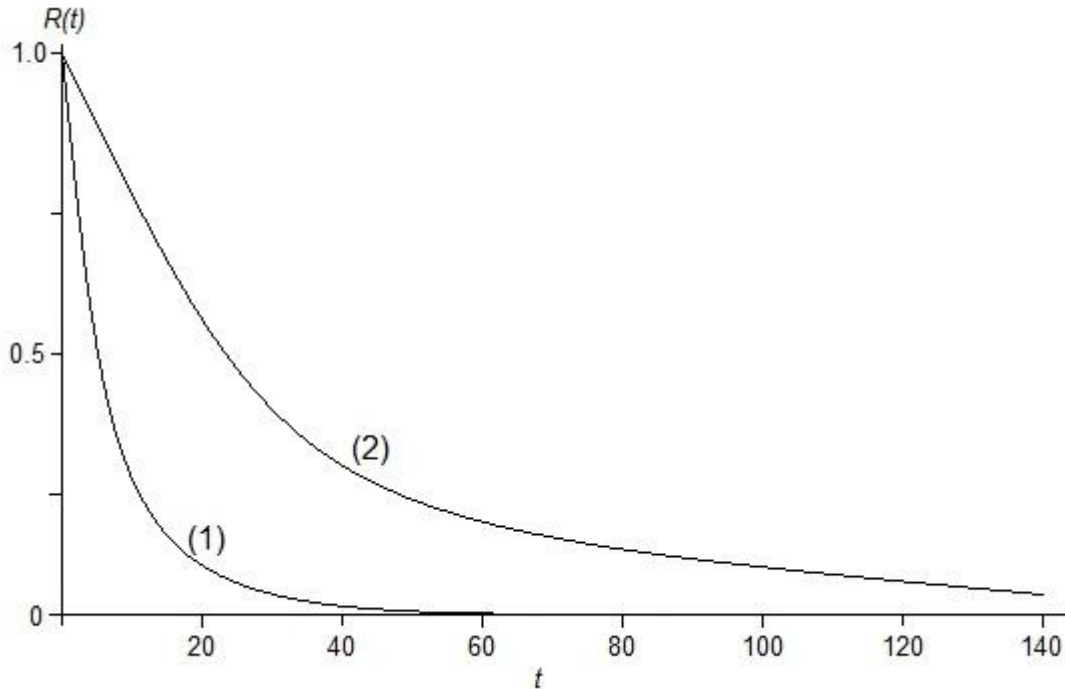


FIGURA 7 – Funções de confiabilidade $R_1(t)$ e $R_2(t)$
 FONTE: Chaves Neto (2010).

2.1.6 Função de Taxa de Falha

A probabilidade de um produto falhar no intervalo de tempo $[t_1, t_2)$ pode ser calculada pela sua função de confiabilidade dada por:

$$P[t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = R(t_1) - R(t_2) \quad (2.13)$$

E, de uma forma geral, redefinindo o intervalo como $[t, t + \Delta t)$ tem-se a taxa de falha dada por:

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} \quad (2.14)$$

E, ainda, quanto $\Delta t \rightarrow 0$, $h(t) = \lambda(t)$ representará a taxa de falha instantânea:

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2.15)$$

Na Tabela 1, são apresentadas as funções de risco, de densidade de probabilidade e de confiabilidade dos principais modelos utilizados em estudos de confiabilidade em Engenharia. A Tabela 1 foi baseada em Elsayed (1996) e Leemis (1995).

TABELA 1 – EQUAÇÕES DAS FUNÇÕES $f(t)$, $R(t)$ E $h(t)$ PARA DIFERENTES MODELOS DE PROBABILIDADE

Modelos	$h(t)$	$f(t)$	$R(t)$	Parâmetros
Constante	λ	$\lambda e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$	λ
Linear crescente	λt	$\frac{-\lambda t^2}{\lambda t e^{-\lambda t}}$	$\frac{-\lambda t^2}{e^{-\lambda t}}$	λ
Weibull	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1}$	$\frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1} e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}$	$\frac{-t^\gamma}{e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}}$	γ, θ
Exponencial	$b e^{\alpha t}$	$b e^{\alpha t} e^{-\frac{b}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)}$	$\frac{-b}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$	α, b
Normal	$\frac{\phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)}{\sigma R(t)}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}$	$1 -$	μ, σ
Lognormal	$\frac{\phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{t\sigma R(t)}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}$	$1 - \int_0^t \frac{1}{\tau\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\mu - \ln \tau}{2\sigma}\right)^2} d\tau$	μ, σ
Gamma	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\frac{t^{\gamma-1}}{\theta^\gamma \Gamma(\gamma)} e^{-\frac{t}{\theta}}$	$\int_t^\infty \frac{1}{\theta \Gamma(\gamma)} \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{\gamma-1} e^{-\frac{\tau}{\theta}} d\tau$	θ, γ

FONTE: Adaptado de Elsayed (1996) e Leemis (1995).

As funções básicas da confiabilidade possuem uma peculiaridade, uma pode ser derivada da, ou das, outras funções.

Pode-se perceber que a função de confiabilidade representa o complemento da função acumulada de falha, de maneira que, enquanto a primeira mostra a

quantidade de itens sobreviventes com o tempo, a segunda mostra a quantidade de itens que falharam nesse mesmo período de tempo. Mas não são apenas essas duas funções que se relacionam entre si.

Guzzon (2009) comenta que existem relações entre as funções acumulada de falha, densidade de falha, confiabilidade e de risco, que estão listadas na Tabela 2.

TABELA 2 – RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$ E $h(t)$

	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$h(t)$
$F(t)$	-	$\int_0^t f(u)du$		$1 - \exp\left(\int_0^t h(u)du\right)$
$f(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	-	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$h(t) \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$
$R(t)$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u)du$	-	$\exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$
$h(t)$	$\frac{dF(t)}{dt} / 1 - F(t)$	$f(t) / \int_t^\infty f(u)du$	$-\frac{d \ln R(t)}{dt}$	-

FONTE: Adaptado de Leemis (1995).

2.2 TESTES ACELERADOS

As indústrias, hoje em dia, para se manter nos mercados que são altamente competitivos devem planejar e desenvolver produtos novos que atendam às expectativas dos consumidores. Assim, devem criar ou aplicar técnicas mais avançadas, em um tempo cada vez menor e, também, manter os esforços de melhoria da produtividade e da confiabilidade.

A escassez de dados é uma característica comumente encontrada quando se avalia a confiabilidade de um equipamento, ou produto. Os métodos tradicionais de avaliação da confiabilidade envolvem a análise de dados de falha de um equipamento em suas condições de uso. Tais métodos, baseados em sua grande maioria em estimadores de máxima verossimilhança, exigem grandes amostras de dados de falha, as quais são muitas vezes difíceis, se não impossíveis, de serem obtidas.

A dificuldade em obter dados consideráveis de falha sob as condições normais (nominais) de uso é principalmente encontrada em equipamentos altamente confiáveis, os quais executam suas funções de forma bem sucedida por longos períodos de tempo, tais como anos. Entretanto, mesmo para tais equipamentos uma

avaliação da confiabilidade precisa ser realizada principalmente se exigem grandes investimentos em seu projeto de desenvolvimento.

Os produtos em desenvolvimento possuem uma dificuldade intrínseca na obtenção de dados de falha. Porém, uma empresa, ou indústria, para se tornar ou se manter competitiva deve superar essa limitação e avaliar o impacto (efeito) que modificações no projeto do produto implicam na confiabilidade do mesmo.

Assim, há necessidade de se obter informações sobre o desempenho dos produtos. Essas informações sobre o desempenho dos produtos podem ser obtidas em duas fontes: dados de campo (assistência técnica e teste de mercado, antes do lançamento) e dados experimentais (laboratório). No caso do teste de campo, certo número de produtos é repassado a uma amostra de consumidores e o desempenho desses produtos é acompanhado durante certo intervalo de tempo. Mas, nesse caso do teste de mercado, ocorre de existir produtos projetados para funcionar anos sem falhar. Então, é muito demorado acompanhar o desempenho junto à amostra de consumidores. Então, o que se faz é obter dados experimentais em laboratório em testes acelerados.

2.2.1 Tipos de Testes Acelerados

Os testes acelerados podem ser classificados em dois tipos dependendo da característica dos dados coletados no teste.

1º. Tipo: Testes de Vida Acelerados;

2º. Tipo: Testes de Degradação Acelerados.

No primeiro caso (Testes de Vida Acelerados) estão os testes em que a resposta é o tempo até a ocorrência da falha. Pretende-se usar os dados para estimar o MTTF, a função de Confiabilidade $R(t)$ e a função de Taxa de Falhas $\lambda(t)$. Os resultados dos testes são projetados para o tempo real, por meio de uma equação de regressão.

Já no caso dos Testes de Degradação Acelerados a resposta de interesse é alguma medida do desempenho do produto. Neste caso a resposta pode ser a oxidação do produto, resistência à tração, etc. Essa medida do desempenho é obtida ao longo do tempo.

Em ambos os testes há necessidade de se definir o fator estressante. Este fator é utilizado no teste em um nível superior ao nível considerado normal.

Pode ser:

- Temperatura;

Exemplo 1

Em memórias de computador tipo RAM (*Random Access Memory*) o desempenho do produto é medido pelo tempo de acesso e a falha seria um tempo superior a um limite definido. Então, nesse caso, o fator estressante poderia ser a temperatura.

Exemplo 2

Suponha um produto alimentício, por exemplo, leite, que deve ser mantido refrigerado. O fator estressante é novamente a temperatura. No teste as unidades do produto são mantidas em temperatura superior à indicada e conta-se o número de microorganismos que surgem no produto. Nesse caso, a resposta de interesse é o número de microorganismos presente no alimento ao longo de um período determinado. E, é claro, a falha seria um número de microorganismos superior a um valor especificado. Essa é a forma de se definir o tempo de validade do produto.

- Tensão.

Exemplo 3

No caso da memória RAM a voltagem nominal geralmente é de 5 V. Então, um modo de estressar o produto e, conseqüentemente, degradá-lo é elevar o nível de tensão.

O teste pode ser acelerado de dois modos:

1º. Aumentando a taxa de uso.

Nesse caso o fator de estresse é o uso. Então, deve-se elevar a taxa de uso do produto. Isto pode ser feito de duas maneiras:

1ª. Com velocidade mais alta

Ex. 1 – um motor funcionando com velocidade mais alta do que funcionaria normalmente.

2ª. Redução do tempo de parada

Ex. 2 – no mecanismo do vidro da porta do veículo deixa-se o produto funcionando por um número muito maior do que seria em condições normais.

Ex. 3 – Cafeteira elétrica, normalmente ela faz café umas quatro vezes por dia; então, o que se faz é construir um dispositivo para fazê-la funcionar um número muito grande de vezes por dia.

2º. Aceleração por altos níveis de estresse.

Nesse caso, o produto é submetido a vários níveis de estresse para encurtar o seu tempo de vida ou degradar o seu desempenho.

2.3 ANÁLISE DOS EFEITOS E MODOS DE FALHA (FMEA)

A Análise dos Efeitos e Modos de Falha (FMEA: *Failure Modes and Effects Analysis* – análise dos efeitos e modos de falha) é uma técnica de engenharia estruturada, indutiva, lógica e progressiva, utilizada com o intuito de definir, identificar, antecipar e eliminar falhas conhecidas e/ou potenciais do sistema, produto, projeto, processo e serviço antes que estes cheguem ao consumidor. Análises semelhantes à FMEA são utilizadas há muitos anos. Formalmente, a FMEA, foi desenvolvida pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration* - Administração Nacional do Espaço e da Aeronáutica), em 1963. Porém, somente após 1977 passou a ser mais comumente utilizada. Isto ocorreu quando a *Ford Motors Company* começou a empregar essa técnica na indústria automobilística. Mas apenas no ano 2000, a Sociedade dos Engenheiros Automotivos (SAE – *Society Automotive Engineers*) publicou os procedimentos especializados de FMEA para a indústria automotiva (Gilchrist, 1993; Hecht, 2003).

A FMEA é essencialmente utilizada para estudar as falhas que ocorrem em materiais e equipamentos, podendo ser também aplicada a uma ampla escala de tecnologias (como, por exemplo, em *softwares*). Foi inicialmente concebida para ser aplicada durante as fases de desenvolvimento de um produto ou de um serviço (quando está sendo definido e projetado) e quando a produção está sendo planejada. Depois, passou a ser usada, também, no projeto de sistemas e nas demais fases do ciclo de vida do produto e/ou processo. Quando utilizada na fase do projeto, tem o objetivo de identificar, antecipadamente, todos os modos de falha catastróficos ou críticos para que sejam eliminados ou minimizados no estágio inicial do desenvolvimento do sistema, evitando-se assim custos com mudanças, adaptações ou retrabalhos em estágios posteriores. Outros objetivos da FMEA são: aumentar as atividades com foco no cliente, usar o conhecimento técnico de uma equipe multifuncional, dar suporte para a melhoria contínua, aperfeiçoar as lições

aprendidas (através de documentação) e utilizar as melhores práticas da engenharia simultânea (Gilchrist, 1993; Lafraia, 2001).

Para uma aplicação mais vantajosa, ou mais eficaz, as atividades da FMEA devem ser planejadas desde o princípio do processo de desenvolvimento dos produtos e dos processos, e sua elaboração deve ser iniciada o mais cedo possível, mesmo que nem todos os fatos ou informações sejam ainda conhecidos. Assim, o melhor momento para iniciar uma FMEA é tão logo alguma informação esteja disponível. Após seu início, a FMEA deve ser constantemente atualizada conforme a disponibilidade das informações, o que caracteriza seu dinamismo. A FMEA apenas pode ser considerada completa ou terminada quando o sistema, projeto, produto, processo ou serviço é considerado completo e/ou descontínuo. Pode ser, no entanto, reaberta para revisão, avaliação e/ou melhoria a qualquer momento (Stamatis, 1996).

Em seu livro Rozenfeld *et al.* (2006) dividem a macrofase de desenvolvimento de produtos em cinco subfases, iniciando pelo projeto informacional e seguindo para o projeto conceitual, projeto detalhado, preparação da produção do produto até o lançamento do produto. Esses autores consideram que o melhor momento para a aplicação da FMEA ocorre depois da atividade de detalhamento do sistema, subsistemas ou componentes, na fase do projeto detalhado. Quando utilizada antes disso, na fase de projeto conceitual, pode deparar-se com o problema de falta de documentação detalhada e, assim, algumas falhas potenciais podem passar despercebidas pela análise.

Apesar desse inconveniente, Andrade (Zardo, Forcellini, 2005) propõem que a FMEA pode perfeitamente ser utilizada já na etapa conceitual do produto, tornando-se assim um instrumento de auxílio à seleção de concepções e não somente um mero instrumento de otimização. Para esses autores, a utilização da FMEA nessa etapa possui a vantagem de possibilitar a detecção de problemas mais cedo e, assim, resolve-los com menor custo possível, e talvez, com mais rapidez.

Para se aplicar uma FMEA eficientemente, segundo Stamatis (1995) é necessário seguir oito passos sistemáticos: definir a finalidade ou as expectativas da avaliação e selecionar a equipe, fazer um diagrama de blocos funcionais (FMEA de sistema e de projeto) ou um fluxograma de processo (FMEA de processo e de serviço), dar prioridades, coletar dados, analisar, apresentar resultados, confirmar e avaliar os resultados e realizar tudo novamente.

Assim, a FMEA é capaz de identificar muitas exigências especificadas e não especificadas do consumidor que se relacionam com o projeto do produto, seu uso, como as falhas podem ocorrer, a severidade de tais falhas, assim como a probabilidade de sua ocorrência. A Figura 8 apresenta o procedimento geral para se realizar a FMEA, que normalmente é feita em duas fases. A primeira fase consiste em coletar as informações funcionais dos componentes e processo alvo da análise. Técnicas básicas como sessões de *brainstorming* e diagramas de causa-efeito, podem ser utilizados para determinar a relação entre modos potenciais de falha, seus efeitos e as causas relacionadas a esses modos de falha para cada função analisada. Com tais informações estima-se a severidade dos efeitos das falhas, a probabilidade de ocorrência da causa das falhas e de detecção dessas antes de sua ocorrência, tendo em vista as atividades planejadas de validação, verificação e prevenção. E assim, pode calcular-se o valor do RPN (*risk priority number*) (Stamatis, 1996; Teng; Ho, 1996).

A segunda fase começa quando o valor do RPN ultrapassa o valor desejado e, por isso, ações corretivas ou alterações do projeto são requeridas. As ações corretivas visam à diminuição da probabilidade da não detecção do modo de falha, enquanto as alterações no projeto buscam reduzir a severidade das falhas e a probabilidade de sua ocorrência, sendo esta alternativa utilizada para modos de falha que possuem um alto risco associado a sua ocorrência. Após, realiza-se nova análise dos modos e efeitos de falha, a fim de verificar se o RPN sofreu a redução desejada. Ao final do processo, um relatório deve ser gerado e as modificações requeridas devem estar completas, de modo a reduzir ao mínimo o número de modos potenciais de falhas. Todas essas informações coletadas são melhores analisadas quando dispostas em forma de tabela (formulário), conforme a Figura 9 (Teng; Ho, 1996).

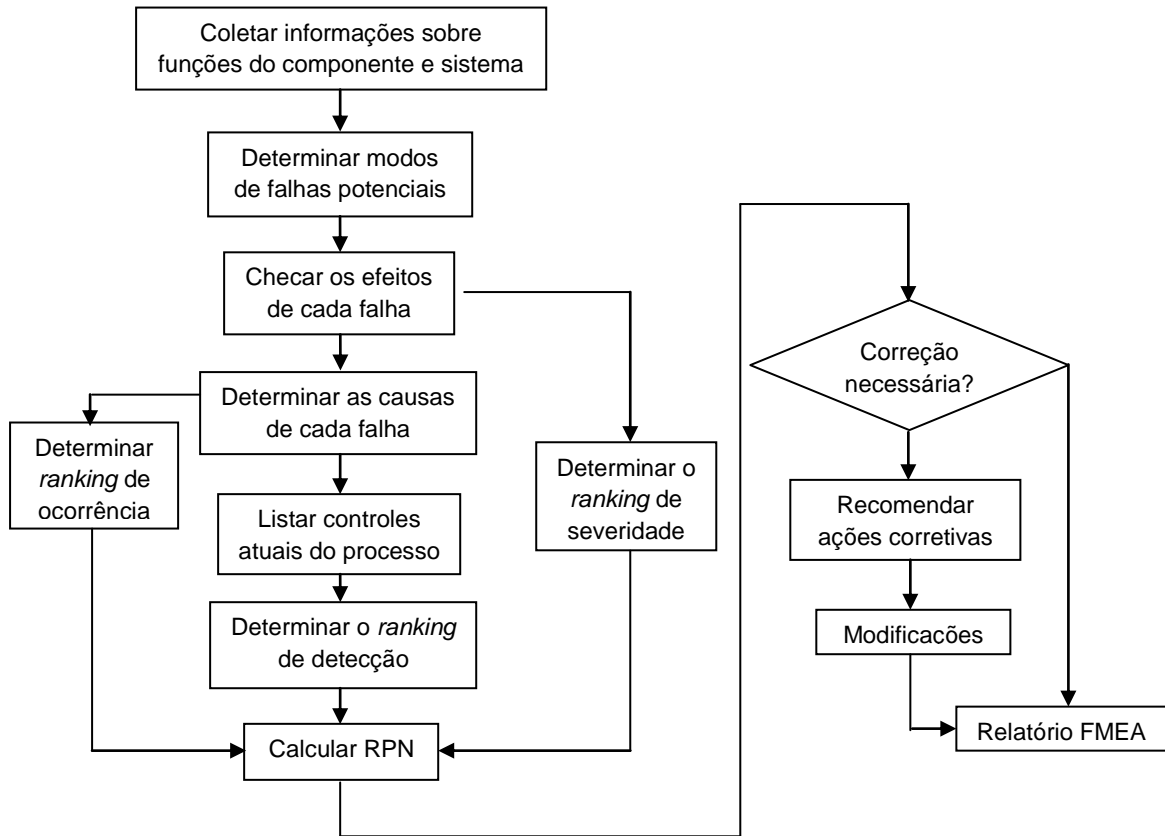


FIGURA 8 – Procedimento geral de FMEA
 FONTE: Adaptado de Teng e Ho (1996).

PRIMEIRA FASE									
Item	Função	Modos potenciais de falha	Efeitos potenciais de falha	Severidade (S)	Causas potenciais de falhas	Ocorrência (O)	Métodos de detecção	Detecção (D)	RPN

SEGUNDA FASE						
Ação recomendada	Indivíduo ou área responsável pela execução	Ação tomada	Resultados da ação			
			S	O	D	RPN

FIGURA 9 – Formulário FMEA
 FONTE: Adaptado de Stamatis (1995).

O ideal é que a informação contida no relatório da FMEA sirva como base para o controle estatístico do processo, uma vez que gera planos de controle. Em um plano de controle, a detecção de cada uma das falhas de interesse e seu método

de detecção devem ser listados, bem como deve ser realizado o controle do processo, a fim de minimizar a ocorrência de tais falhas. O plano de controle gera também informações sobre a frequência de amostragens e métodos de medição (Teng e Ho, 1996).

2.4 TÉCNICAS NÃO-PARAMÉTRICAS

2.4.1 Estimação na ausência e presença de censura

A estimação da função taxa de falha é difícil em termos não-paramétricos. Essa dificuldade é a mesma de se estimar a função de densidade. Alguns textos apresentam uma estimativa para esta função como sendo a variação da função de taxa de falha acumulada. Entretanto, esta estimativa não é boa o suficiente, principalmente para amostras pequenas. Para estimar a taxa de falha na ausência de censura utiliza-se o histograma da distribuição aproximada do tempo de falha, assim divide-se o número de itens que falharam em um determinado intervalo pelo número de itens em operação até o tempo que corresponde ao início do intervalo. A estimação da função de confiabilidade na ausência de censura também é feita empiricamente a partir do histograma da distribuição aproximada do tempo de falha. Neste caso divide-se o número de itens que ainda não falharam até determinado intervalo pelo número de itens total inicial. O mesmo procedimento pode ser realizado com relação à manutenibilidade considerando-se o histograma da distribuição aproximada do tempo de reparo (Carvalho, 2008).

A Figura 10 mostra distribuição aproximada dos tempos de falha para os dados não-censurados. O histograma foi obtido a partir de uma amostra de dados de falha simulados pelo gerador implementado, com um total de 10 categorias de tempos de falha, não censurada e um total de 25 itens, onde os tempos são dados em anos.

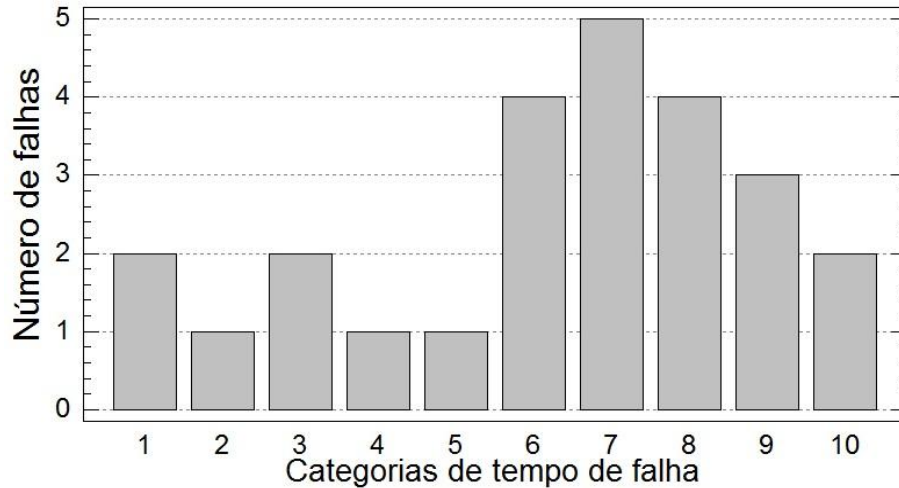


FIGURA 10 – Histograma da Distribuição de frequências dos tempos de falha por ano
 FONTE: O autor (2011).

Uma estimativa para a taxa de falha no período compreendido entre 5 e 6 anos, é dada por:

$$\hat{h}(5,6) = \frac{\text{números de falhas entre 5 e 6 anos}}{\text{número de componentes em operação até } t = 5} \quad (2.16)$$

$$\hat{h}(5,6) = \frac{5}{(25 - 7)} = \frac{5}{18} = 0,27778$$

Assim, a taxa de falha é de 27,8% durante o período de 1 ano, compreendido entre 5 e 6 anos, ou seja, um componente que não falhou após 5 anos de uso tem uma probabilidade de 0,27778, ou seja 27,8%, de vir a falhar no intervalo do 5º ao 6º ano.

Já para a Função de Confiabilidade no tempo $t = 5$ anos, é estimada por:

$$\hat{R}(5) = \frac{\text{número de componentes em operação até o tempo } t = 5}{\text{número de componentes sob teste}} = \frac{18}{25} = 0,72$$

Isso significa que 72% desses componentes duram mais que 5 anos. A estimação da Função de Confiabilidade na presença de censura pode ser feita através da Tabela de vida (Método Atuarial) ou o Estimador de Kaplan-Meier (Limite-

Produto). O estimador de Kaplan-Meier é uma adaptação da função de confiabilidade empírica, e será definido na secção 2.4.2.

2.4.2 Estimador de Kaplan-Meier

O estimador de Kaplan-Meier, ou estimador limite-produto, é um estimador não-paramétrico para a função de confiabilidade. O estimador utiliza os conceitos de independência de eventos e de probabilidade condicional para desdobrar a condição sobreviver até o tempo t em uma sequência de elementos independentes que caracterizam a sobrevivência em cada intervalo de tempo anterior a t e cuja probabilidade é condicional aos que estão em risco em cada período.

A expressão estimador limite-produto refere-se ao fato de que a probabilidade de sobreviver até a data especificada é estimada considerando-se que a sobrevivência até cada tempo é independente da sobrevivência até outros tempos, e, em consequência, a probabilidade de se chegar até o tempo t é o produto da probabilidade de se chegar até cada um dos tempos anteriores.

Por se tratar de um estimador não-paramétrico assintótico, a veracidade das suas estimativas está garantida apenas para amostras de falhas e tempos de falhas extensas. Sendo assim as estimativas calculadas pelo estimador de Kaplan-Meier ficam mais próximas dos valores reais da confiabilidade conforme o crescimento da amostra utilizada, caso a amostra seja grande, as estimativas tendem para os valores reais da confiabilidade.

Sua vantagem em relação às funções paramétricas de confiabilidade é que o estimador quando aplicado a amostras com algum tipo de censura tem um desempenho satisfatório, sendo que para funções paramétricas este cálculo é de difícil aplicação.

Pereira (2003) compara o estimador de Kaplan-Meier e o de Nelson-Aalen, que também é um estimador não-paramétrico assintótico da função de confiabilidade, mostrou que o estimador de Kaplan-Meier é mais preciso que o estimador de Nelson-Aalen (Carvalho, 2005), com uma aproximação de 3 casas decimais, quando se compara os valores da função de confiabilidade paramétrica utilizada.

O estimador pode ser utilizado em varias áreas da ciência moderna, na pesquisa médica, pode ser utilizado para medir a fração de pacientes que vivem em

um determinado período de tempo após o tratamento de sua doença. Um economista pode medir o comprimento de tempo que as pessoas permanecem desempregadas após uma perda do seu emprego. Um engenheiro pode medir o tempo até a falha de peças de máquinas. Um ecologista pode usá-lo para estimar quanto tempo frutos carnosos permanecem nas plantas antes de serem removidos por frutívoros.

Quando não há censura pode ser definido por:

$$\hat{R}(t) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de itens em operação até o momento } t}{\text{n}^\circ \text{ de itens em teste}} \quad (2.17)$$

Esse estimador é obtido da seguinte forma: suponha que existam n itens sob teste e $k \leq n$ falhas distintas nos tempos $t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Pode ocorrer mais de uma falha ao mesmo tempo, o que é chamado de empate.

O estimador da função de confiabilidade, para amostras censuradas ou não:

$$\hat{R}(t) \doteq \left[\left(\frac{n_1 - d_1}{n_1} \right) \left(\frac{n_2 - d_2}{n_2} \right) \dots \left(\frac{n_n - d_n}{n_n} \right) \right] \quad (2.18)$$

onde

d_i é o número de falhas no tempo t_i ;

n_i é o número de itens sob risco (em teste) no tempo t_i ;

t_n é o maior tempo de falha menor que t .

Sua variância é calculada a partir da fórmula de Greenwood.

$$\hat{V}[\hat{R}(t)] \doteq \hat{R}(t)^2 \left[\frac{d_1}{n_1(n_1 - d_1)} + \frac{d_2}{n_2(n_2 - d_2)} + \dots + \frac{d_n}{n_n(n_n - d_n)} \right], \quad (2.19)$$

onde

d_i é o número de falhas no tempo t_i ;

n_i é o número de itens sob risco (em teste) no tempo t_i ;

t_n é o maior tempo de falha menor que t .

E, o estimador do erro padrão dessa estatística, $\hat{V}[\hat{R}(t)]$ é:

$$\hat{e}p[\hat{R}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]} \quad (2.20)$$

Seja, agora, o cálculo do Intervalo de Confiança para $R(t)$ em um tempo fixado t . A solução é usar um pivô aproximado baseado no Teorema Central do Limite. A expressão do pivô é:

$$\frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]}} = \frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\hat{e}p[\hat{R}(t)]} \sim N(0, 1). \quad (2.21)$$

Portanto, o intervalo de confiança de nível $(1 - \alpha)$ é

$$P\left(\hat{R}(t) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{e}p[\hat{R}(t)] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{e}p[\hat{R}(t)]\right) = 1 - \alpha. \quad (2.22)$$

Quando se tem o valor real de $R(t)$ próximo de um ou de zero (valores extremos) pode acontecer do limite superior do intervalo ultrapassar o limite 1 ou do limite inferior ser negativo. Então, deve-se construir um novo intervalo baseado na transformação descrita a seguir.

Seja a estatística $\hat{U}(t)$ função de $\hat{R}(t)$

$$\hat{U}(t) \doteq \ln(-\ln[\hat{R}(t)]) \quad (2.23)$$

Cuja variância é estimada por:

$$\hat{V}[\hat{U}(t)] \doteq \frac{\hat{V}[\hat{R}(t)] / \hat{R}(t)^2}{\{\ln[(n_1 - d_1) / n_1] + \ln[(n_2 - d_2) / n_2] + \dots + \ln[(n_n - d_n) / n_n]\}^2} \quad (2.24)$$

e o erro padrão é dado por

$$\hat{e}p[\hat{U}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{U}(t)]} \quad (2.25)$$

Logo o intervalo de nível $(1 - \alpha)$ para $R(t)$ é

$$P\left(\hat{R}(t) \exp[z \cdot \hat{e}p[\hat{U}(t)]] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) \exp[-z \cdot \hat{e}p[\hat{U}(t)]]\right) = 1 - \alpha. \quad (2.26)$$

O exemplo a seguir apresenta uma amostra de tempos de falha de um teste simulado, hipotético, feito com ventoinhas, além dos tempos de falha também apresenta os valores da confiabilidade, do desvio padrão e intervalos de confiança calculados pelo estimador de Kaplan-Meier. Neste exemplo a amostra sofreu censura e os intervalos de confiança foram calculados para um limite de 95% de segurança.

Exemplo: Uma válvula de acionamento da ventoinha é avaliada com relação ao tempo de vida. O fabricante submete várias válvulas a testes onde seu funcionamento é acelerado para obter informações sobre a confiabilidade do produto. Um tipo comum de teste é aquele em que a válvula é colocada em um tanque de água que é aquecido e resfriado, acelerando o funcionamento da válvula. Estima-se que 30000 ciclos (um ciclo corresponde ao ato de abrir e fechar a válvula) equivalem a 10 anos de uso em condições normais. Considere a situação onde um lote de 30 mecanismos novos foi colocado em teste. O teste consiste em deixá-los em funcionamento por um período de até 50000 ciclos e registrar, para cada mecanismo, o número de ciclos que ele completou até falhar. Após o teste, 18 mecanismos haviam falhado antes de completar 50000 ciclos e os outros 12 continuavam funcionando. O número de ciclos até a falha para estes 18 mecanismos foram: 5626; 11223; 12128; 13566; 14922; 16513; 22138; 26791; 27144; 27847; 28613; 31225; 36229; 38590; 39580; 40278; 41325; 44540.

Tempo	Número de falhas	Quantidade em risco	Confiabilidade	Desvio padrão	Limite inferior	Limite superior
5626	1	30	0.96666666	0.03277306	0.90243263	1
11223	1	29	0.93333333	0.04554200	0.84407264	1
12128	1	28	0.9	0.05477225	0.79264835	1
13566	1	27	0.86666666	0.06206328	0.74502485	0.98830847
14922	1	26	0.83333333	0.06804138	0.69997467	0.96669199
16513	1	25	0.8	0.07302967	0.65686446	0.94313553
22138	1	24	0.76666666	0.07722022	0.61531780	0.91801552
26791	1	23	0.73333333	0.08073734	0.57509104	0.89157561
27144	1	22	0.7	0.08366600	0.53601764	0.86398235
27847	1	21	0.66666666	0.08606629	0.49797982	0.83535350
28613	1	20	0.63333333	0.08798148	0.46089280	0.80577386
31225	1	19	0.6	0.08944271	0.42469549	0.77530450
36229	1	18	0.56666666	0.09047201	0.38934477	0.74398855
38590	1	17	0.53333333	0.09108400	0.35481196	0.71185470
39580	1	16	0.5	0.09128709	0.32108058	0.67891941
40278	1	15	0.46666666	0.09108400	0.28814529	0.64518804
41325	1	14	0.43333333	0.09047201	0.25601144	0.61065522
44540	1	13	0.4	0.08944271	0.22469549	0.57530460

FIGURA 11 – Valores das estimativas da confiabilidade e limites de confiança
 FONTE: o autor (2011)

Estes resultados foram calculados a partir do programa Action®. Para os três primeiros intervalos de confiança, o limite superior apresenta valores iguais a um ou 100%, isso acontece por que o programa não faz o ajuste para limites de intervalos mal condicionados, ele apenas trunca em 0 ou 1, dependendo do limite que foi ultrapassado. No caso dos três primeiros limites superiores do intervalo de confiança, cujos valores ultrapassaram o limite de 100%, não se encaixando nos padrões reais de confiabilidade, ele os trunca em um. Assim o *software* não utiliza o ajuste da equação (2.26).

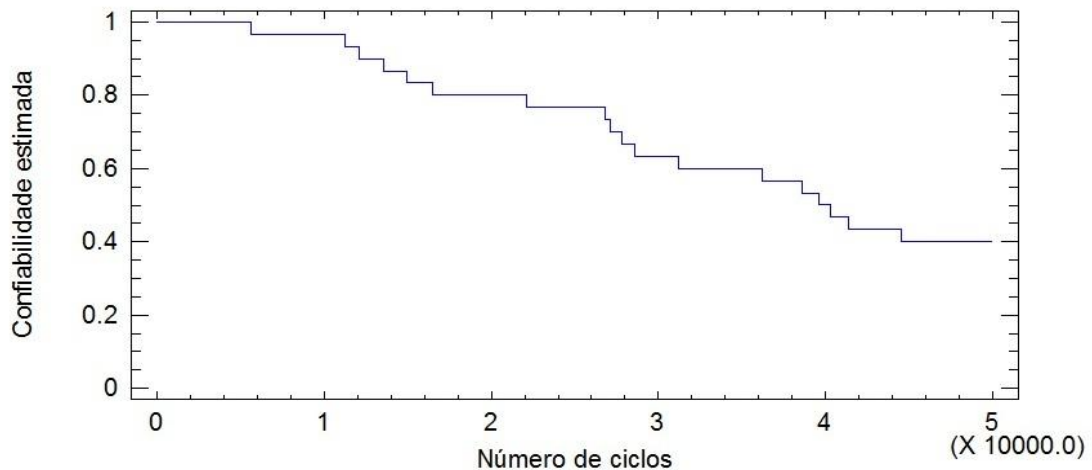


FIGURA 12 – Confiabilidade Estimada
 FONTE: Chaves Neto (2010).

2.4.2.1 Kaplan-Meier com estratificação

Uma variante do estimador de Kaplan-Meier é o estimador com estratificação, que leva em consideração peculiaridades dos objetos, ou indivíduos, que estão sofrendo o estudo da confiabilidade, ou análise de sobrevivência.

Separando uma amostra em duas ou mais sub-amostras, onde cada produto de cada sub-amostra possua as mesmas peculiaridades que os outros, obtendo assim uma amostra mais homogênea possível.

A estratificação consiste em dividir o conjunto total de observações em grupos distintos, de acordo com as covariáveis de interesse, e estimar as funções de confiabilidade separadamente para cada grupo (ou estrato). Essa variante é usada geralmente em estudos médicos, mas também pode ser utilizada quando se trabalha com confiabilidade de produtos. Um dos motivos pelo qual se utiliza tanto em estudos médicos, é que para análises de mortes de certas doenças, o sexo do indivíduo pode importar, transformando assim a amostra, deixando ela menos homogênea.

2.4.3 Testes para comparação de curvas de confiabilidade

A representação gráfica da estimativa de Kaplan-Meier com estratificação, para a função de confiabilidade, sobrevivência, permite ter uma idéia do comportamento das curvas de confiabilidade, nos respectivos grupos. No entanto, para avaliar se existe uma diferença significativa entre as várias curvas deve-se recorrer aos testes de hipóteses.

Existem vários testes não paramétricos adequados a esta comparação, sendo o teste log-rank e o teste de Peto (Carvalho, 2005), para dois grupos, os mais utilizados em análise de sobrevivência.

2.4.3.1 Teste log-rank

O teste de hipótese log-rank compara a distribuição da ocorrência dos eventos observados em cada estrato (sub-amostra) com a distribuição que seria esperada se a incidência fosse igual em todos os estratos. Caso a distribuição for

equivalente à distribuição esperada, então a curva de sobrevivência dos produtos pertencentes ao estrato é equivalente à curva de sobrevivência dos produtos em geral (a covariável não tem efeito na confiabilidade).

Para utilizar o teste, calcula-se a estatística em duas etapas: primeiro, estima-se o número de eventos esperados para cada estrato k , segundo a hipótese nula de incidência igual em todos os estratos. Esse número esperado será chamado de $E_k(t)$. Em seguida, calcula-se a estatística do teste. Esta estatística segue uma distribuição χ^2 , com $k-1$ graus de liberdade, quando a hipótese nula é verdadeira.

Assim, para calcular a distribuição esperada de eventos, o total de eventos precisamente no tempo t , $\Delta N(t)$, é redistribuído pelos k estratos, proporcionalmente ao número de itens presentes em cada estrato. Logo, tem-se:

$$E_k(t) = \Delta N(t) \frac{r_k(t)}{r(t)} \quad (2.27)$$

em que $\Delta N(t)$ é o número total de eventos observados, $r_k(t)$ é o número de itens em risco no estrato k , $r(t)$ é o número total de itens em risco no estudo, no tempo t .

Quando se possui apenas dois estratos, sub-amostras, a estatística log-rank é calculada utilizando apenas os dados de um dos estratos. O resultado do teste para um estrato se estende ao outro por simetria. Isto é, se o número esperado de casos é maior do que o esperado para um estrato, isto implica que o número de casos é menor do que o esperado para o outro estrato. Sendo E_1 , e.g., o total de eventos esperados no estrato 1 e O_1 o total de eventos observados no estrato 1, a estatística log-rank é calculada a partir da diferença entre o total de eventos observados e o número total de eventos esperados:

$$\text{Log-rank} = \frac{(O_1 - E_1)^2}{\text{Var}(O_1 - E_1)} \quad (2.28)$$

que segue uma distribuição χ^2 com um grau de liberdade.

A variância, que entra no cálculo como um fator de padronização, tem a fórmula (para $k = 2$):

$$Var(O_1 - E_1) = \sum_t \frac{r_1(t)r_2(t)\Delta N(t)[r(t) - \Delta N(t)]}{r(t)^2[r(t) - 1]} \quad (2.29)$$

Existem vários outros testes que ponderam as observações de acordo com a importância que se deseja dar ao início ou ao fim do tempo de sobrevivência. A estatística Peto que será apresentado na seção 2.4.3.3, atribui maior ponderação aos eventos ocorridos nos períodos iniciais da observação.

2.4.3.2 Teste de Gehan

O teste de Gehan Bastos (Joana e Cristina Rocha, 2007), ou teste de Wilcoxon generalizado, baseia-se numa estatística semelhante à utilizada no teste log-rank e que tem a seguinte fórmula:

$$Gehan = n(O_1 - E_1) \quad (2.30)$$

onde n é o número de itens em teste no tempo t .

Assim a diferença $O_1 - E_1$ é ponderada por n , atribuindo menos ponderação às diferenças $O_1 - E_1$ correspondentes aos instantes onde o número total de indivíduos em risco é pequeno, isto é, aos maiores tempos de sobrevivência.

A variância da estatística é dada por:

$$Var(O_1 - E_1) = \sum_t \frac{n.r_1(t).r_2(t).\Delta N(t)[r(t) - \Delta N(t)]}{r(t)^2[r(t) - 1]} \quad (2.31)$$

Como no teste log-rank, o teste de Gehan segue aproximadamente a distribuição χ^2 com um grau de liberdade.

Bastos (Joana e Cristina Rocha, 2007) constatou que o teste de Gehan é menos sensível do que o teste log-rank. Em seu trabalho Bastos conclui que o teste

log-rank é mais potente na detecção de afastamentos da hipótese de igualdade das distribuições que sejam do tipo risco proporcionais. Quando funções se cruzam, o teste log-rank pode não conseguir detectar diferenças significativas entre as curvas do estimador de Kaplan-Meier, sendo melhor aplicar o teste de Gehan.

2.4.3.3 Teste Peto

O teste Peto (Carvalho, 2005) é uma modificação do teste log-rank que dá maior peso ao perfil de sobrevivência de tempos menores, ou seja, às diferenças (ou semelhanças), no início da curva. A justificativa para isso é que o início da curva concentra a maior parte dos dados, e por isso é mais informativa. Esse maior peso no início da curva é obtido pela inclusão de um fator de ponderação igual ao valor estimado da confiabilidade $R(t)$ no estimador log-rank. A forma da estatística de Peto é:

$$Peto = \frac{(O_1 - E_1)^2}{Var(O_1 - E_1)} \quad (2.32)$$

sendo que

$$O_1 - E_1 = \sum_{t_i} S(t_i)(O_1(t_i) - E_1(t_i)) \quad (2.33)$$

Da mesma forma, a variância da estatística de Peto é igual à variância do log-rank, onde a cada tempo é ponderado pelo quadrado da função de confiabilidade - $R(t_i)^2$. Assim como a estatística log-rank, a estatística Peto segue aproximadamente a distribuição χ^2 com $k - 1$ graus de liberdade.

2.5 TÉCNICAS COMPUTACIONALMENTE INTENSIVAS

A computação intensiva veio proporcionar a estatística novas formas de abordagem não-paramétrica para alguns problemas. Isto é feito com reamostragem da amostra original e tem conquistado apoio como uma alternativa aos métodos clássicos de inferência paramétrica.

A idéia da reamostragem surgiu em meados de 1935 (Silva, 2005), entretanto a aplicação de tal técnica só foi possível com o advento de computadores velozes e de computação não dispendiosa, uma vez que procedimentos de reamostragem utilizam intensivamente o computador.

A reamostragem descarta a distribuição amostral assumida de uma estatística e calcula uma distribuição empírica – da real distribuição da estatística, com as informações da amostra original, ao longo de centenas ou milhares de amostras. Com a reamostragem, não se tem que confiar na distribuição assumida nem se tem que ser cuidadoso quanto à violação de suposições inerentes. Pode-se calcular a real distribuição de estatísticas da amostra e pode-se obter o 95º ou o 99º percentil da distribuição empírica construída.

Mas é necessário se conhecer a origem destas inúmeras amostras. É necessário reunir amostras separadas, mas isso aumenta o custo de coleta de dados. Ao longo dos anos, estatísticos desenvolveram diversos procedimentos para criar estas múltiplas amostras necessárias para a reamostragem a partir de uma amostra original inicial.

Assim, com esse procedimento pode-se gerar um grande número de outras amostras que podem ser empregadas para gerar a distribuição amostral empírica de uma estatística de interesse.

E com o aperfeiçoamento dos computadores, essas técnicas são hoje completamente viáveis, sendo possível a aplicação rápida que vem ajudar a dinâmica dos estudos científicos.

Essas técnicas baseadas nos novos e potentes computadores são chamadas de técnicas computacionalmente intensivas, e duas delas, o método *Jackknife* e o método *bootstrap*, são apresentados a seguir.

2.5.1 Método *Jackknife*

O antecessor ao método *bootstrap* foi o método *Jackknife*, que também é um método computacionalmente intensivo não-paramétrico. O método foi criado algumas dezenas de anos antes do método *bootstrap*, mas não recebeu tanta atenção dos pesquisadores quanto o método *bootstrap*. Segundo Chaves Neto (1991), a primeira abordagem feita do método *Jackknife* foi apresentada em 1949 por Maurice Quenouille (Quenouille, 1949), e que tem a proposta de reduzir o vício de um estimador de correlação serial com base na divisão da amostra original em duas semi-amostras. Posteriormente, em 1956, Quenouille completou o trabalho com a generalização do método (Chaves, 1991). Tal como o *bootstrap* é um método de reamostragem, pois se baseia na construção de sub-amostras geradas de uma amostra original inicial.

Apesar de o método *Jackknife* ter sido ultrapassado, em termos de utilização, pelo *bootstrap* como um eficiente estimador de medidas de variabilidade e intervalos de confiança, ele continua como uma medida viável de observações influentes (uma observação que exerce uma influência desproporcional sobre um ou mais aspectos das estimativas e essa influência pode ser baseada em valores extremos das variáveis) e uma opção para os pacotes estatísticos.

2.5.2 Obtenção da amostra *Jackknife*

Seja uma amostra original de tamanho n , $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$, o método *Jackknife* consiste em gerar n novas amostras de tamanho $n-1$, sendo a i -ésima nova amostra ($i = 1, \dots, n$) composta pelos valores da amostra original, com exceção da i -ésima observação (Martinez, Sandanielo e Louzada Neto, 2006).

Logo, sendo $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ a uma amostra de v.a's i.i.d., são geradas amostras $\underline{x}'_{(1)} = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$, $\underline{x}'_{(2)} = (x_1, x_3, x_4, \dots, x_n)$, $\underline{x}'_{(3)} = (x_1, x_2, x_4, \dots, x_n)$, ..., $\underline{x}'_{(n-1)} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_n)$ e $\underline{x}'_{(n)} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$. Em cada uma das novas amostras geradas, estima-se o parâmetro de interesse θ , por $\hat{\theta}_{(i)} = s(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, que são as reamostras "Jackknife" da estatística que é o estimador do parâmetro. Da amostra original \underline{x} que já disponibilizou a estimativa original do parâmetro por

$\hat{\theta} = s(x)$, tem-se as n estimativas *Jackknife* do parâmetro, $\hat{\theta}_{(j)} = \frac{\sum \hat{\theta}_i}{n}$, chamada de estimador *Jackknife* do parâmetro θ .

2.5.3 Método *bootstrap*

Como mencionado anteriormente o método *bootstrap* é considerado o sucessor do método *Jackknife*, e recebeu mais atenção por parte dos estatísticos, se tornando assim uma técnica poderosa, associada à solução de problemas de estimação, nos quais os métodos clássicos sejam assintóticos ou não existam.

Dois tipos de métodos estatísticos são usualmente utilizados nos trabalhos científicos. São eles: o paramétrico, quando se conhece o modelo de probabilidade que pode ser identificado com os dados e o não-paramétrico, quando não se tem um modelo probabilístico associado aos dados. Nesta dissertação o objetivo é aplicar o método *bootstrap* a um estimador assintótico. O erro padrão da estimativa da confiabilidade pelo método Kaplan-Meier.

O termo *bootstrap* paramétrico é utilizado quando se tem alguma suposição da distribuição, por exemplo, a suposição de que a população segue uma distribuição Weibull, ou ainda tem-se o conhecimento da distribuição amostral de algum estimador e deseja-se obter a distribuição amostral de outro estimador que depende do primeiro. Este método recebe uma breve abordagem a seguir.

Já o termo *bootstrap* não-paramétrico é utilizado quando não se tem nenhuma suposição da distribuição do conjunto de dados, ou seja, a distribuição amostral da qual os dados vieram é desconhecida.

Embora a técnica *bootstrap* seja teoricamente simples, deve-se ter disponível um *software* para fazer a reamostragem. Os *softwares*, tais como: SPSS, SAS e MINITAB, não têm um procedimento disponível para fazer a reamostragem, entretanto pode-se programar procedimentos de reamostragem, ou utilizar linguagens de programação de computadores para implementar o método, que é o caso deste trabalho.

2.5.3.1 Método *bootstrap* não-paramétrico

2.5.3.1.1 Definição e propriedades

O *bootstrap* é uma técnica estatística computacionalmente intensiva não-paramétrica que permite a avaliação da variabilidade de estatísticas com base nos dados de uma amostra existente inicial. É indicado para problemas onde os procedimentos estatísticos padrões não existam ou sejam de difícil aplicação. É vantajoso se usado em problemas com amostra finita ou com amostra grande, desde que forneça resultado semelhante ao método assintótico usual em grande amostra e superior em amostra pequena (Chaves Neto, 1991).

O *bootstrap* surgiu quando Efron em 1979 (*apud* Chaves Neto, 1991) estudava o problema da estimação da distribuição amostral de uma estatística $T_n(\underline{x}, F)$ com base nos dados da amostra de tamanho n , $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, de uma distribuição de probabilidade desconhecida F , $X_i \sim i.i.d. F$.

O procedimento *bootstrap* é feito a partir de uma amostra inicial $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ criando-se B novas amostras, ou reamostras, com tamanho igual ao da amostra inicial, com reposição dos valores. Então, calcula-se a estatística de interesse para cada reamostra *bootstrap*. Estas amostras *bootstrap* são conhecidas como pseudo-dados. Assim o conjunto de valores *bootstrap* da estatística corresponde a uma estimativa da verdadeira distribuição amostral da estatística em questão. Essa operação pode ser representada pelo seguinte esquema:

- seja o parâmetro θ e seu estimador a estatística $T_n(\underline{x}, F)$, onde $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ é a amostra aleatória disponível da variável aleatória com função distribuição desconhecida F , $X_i \sim i.i.d. F$ é:

Então:

1º) o estimador não-paramétrico de máxima verossimilhança $\hat{F}_n(x)$ de F é:

$$\hat{F}_n(x) = \left[\sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) / n \right] \quad (2.34)$$

com $I(X_i \leq x)$ sendo função indicadora. Assim esta distribuição empírica é construída colocando-se massa probabilística $1/n$ em cada ponto amostral;

2º) de \hat{F}_n toma-se B (muito grande) amostras *bootstrap* de mesmo tamanho n ,

$$\begin{array}{ll} \underline{x}_1^* = [x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*] & X_{1i}^* \sim iid \hat{F}_n \\ \underline{x}_2^* = [x_{21}^*, x_{22}^*, \dots, x_{2n}^*] & X_{2i}^* \sim iid \hat{F}_n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \underline{x}_B^* = [x_{B1}^*, x_{B2}^*, \dots, x_{Bn}^*] & X_{Bi}^* \sim iid \hat{F}_n \end{array}$$

3º) calcula-se as B estatísticas *bootstrap* $T_n^*(\underline{x}_l^*)$ com $l=1, 2, \dots, B$, correspondentes às B amostras *bootstrap* e forma-se o conjunto:

$$\{T_n^*(\underline{x}_l^*); l=1, 2, \dots, B\} \quad (2.35)$$

que é uma simulação da verdadeira distribuição amostral da estatística $T_n(\underline{x}, F)$.

Como o conjunto $\{T_n^*(\underline{x}_l^*); l=1, 2, \dots, B\}$ pode-se obter a medida da variabilidade de $T_n(\underline{x}, F)$, como o seu erro-padrão *bootstrap*. A estimativa do vício da estatística $T_n(\underline{x}, F)$ é dada por:

$$b[\theta, T_n(\underline{x}, F)] = T_n(\underline{x}, F) - T_n^* \quad (2.36)$$

onde T_n^* corresponde à estimativa *bootstrap* do parâmetro e que é dada por:

$$T_n^* = \frac{[\sum_{l=1}^B T_n(\underline{x}_l^*)]}{B} \quad (2.37)$$

Na prática constrói-se a distribuição *bootstrap*, da estatística $T_n(\underline{x}, F)$, pelo método de Monte-Carlo com um número de replicações, B , suficientemente grande.

Um indicador do tamanho adequado de B , independente do custo computacional, é a qualidade da convergência da estimativa *bootstrap* do parâmetro para a estimativa natural do parâmetro ($T_n^* \xrightarrow{B \rightarrow \infty} T_n(\underline{x}, F)$). O fluxograma da Figura 13 apresenta o algoritmo de construção da distribuição *bootstrap*.

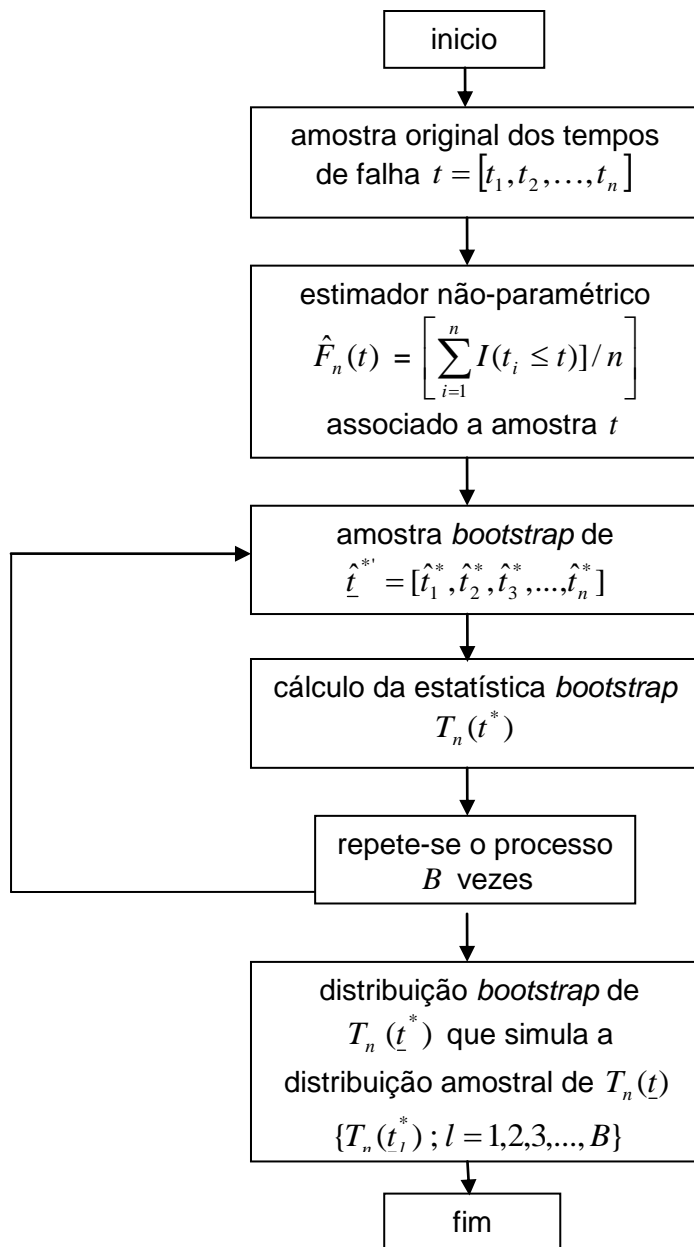


FIGURA 13 – Algoritmo da distribuição *bootstrap* da estatística $T_n(\underline{x}, F)$
 FONTE: Chaves Neto (1991).

O procedimento descrito se aplica ao método *bootstrap* não-paramétrico. Ao se optar pela utilização do método *bootstrap* paramétrico, procede-se da mesma forma, com única diferença de que cada amostra *bootstrap* é obtida da distribuição

paramétrica que originou os dados, amostras, que se possui, ao invés de reamostrar-se as observações disponíveis.

A convergência do algoritmo, ou seja, do 3º passo com B tendendo para o infinito esta assegurada pela Lei dos Grandes Números, pois $T_n^*(\underline{x}_1^*)$, $T_n^*(\underline{x}_2^*)$, ..., $T_n^*(\underline{x}_B^*)$ nada mais são do que uma amostra de v.a's i.i.d. com a distribuição condicional de $T_n(\underline{X}, \hat{F}) | \underline{X} = \underline{x}$.

Portanto quando B tende para o infinito, a média amostral T_n^* se aproxima de $E[T_n(\underline{X}, \hat{F}) | \underline{X} = \underline{x}]$. Efron sugeriu que a distribuição condicional *bootstrap* de $T_n(\underline{X}, \hat{F}) | \underline{X} = \underline{x}$ pode ser usada como a distribuição de $T_n(\underline{X}, F) | \underline{X} = \underline{x}$. Como se vê, no procedimento *bootstrap* os pontos da amostra original $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ são considerados como população com função de distribuição \hat{F} e média \bar{x} . A estatística *bootstrap* $T_n^* = T_n^*(\underline{x}, \hat{F})$ é considerada como um estimador de $T_n(\underline{x}, F)$, e ainda, a distribuição de $T_n^*(\underline{x}, \hat{F})$ pode ser usada para aproximar a distribuição amostral desconhecida de $T_n(\underline{x}, F)$. Logo, a distribuição de $(T_n^* - T_n)\sqrt{n}$ pode ser usada para aproximar a distribuição amostral de $(T_n - \theta)\sqrt{n}$. Da mesma forma que no caso *Jackknife*, a normalidade assintótica de $(T_n^* - T_n)\sqrt{n}$ e a convergência em probabilidade da variância *bootstrap*,

$$(s^*)^2 = \frac{1}{B-1} \sum [T_n(\underline{x}_i^*) - T_n^*]^2$$

para $V(T_n)$ foram investigadas e provadas por Bickel e Freedman em 1981.

Seja agora a amostra *bootstrap* $\underline{X}^* = \underline{x}^*$ obtida pelo esquema da Figura 14. O número de vezes em que o ponto amostral x_i é selecionado no procedimento é denotado por:

$$N_i^* = \# \{ \underline{X}^* = \underline{x}^* \}$$

Consequentemente, $\sum_{i=1}^n N_i^* = n$ e o vetor $\underline{N}^* = [N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*]$, segundo Chaves Neto (1991), tem distribuição multinomial. Ainda, vê-se que $N_i^* \sim b(n, 1/n)$ e, em correspondência a estes números existe uma distribuição de freqüências relativas $f_i = N_i^*/n$, sendo que f_i assume valores no conjunto $\{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n\}$. Segundo Chaves Neto (1991) a v.a. f_i possui a média igual a $1/n$ e a variância igual a $(n-1)/n^3$.

Por exemplo, seja o pivô $(\hat{n}_i - n_i)/s_i$ com distribuição t_ν para os valores n_i da estimativa de uma estatística qualquer, o intervalo de nível $1-\alpha$ para esse parâmetro é:

$$[\hat{n}_i - t_\nu(1-\alpha/2).s_i \quad ; \quad \hat{n}_i + t_\nu(1-\alpha/2).s_i].$$

A estatística s_i é o estimador clássico, utilizado pelo estimador não-paramétrico, do erro padrão de \hat{n}_i . O número de graus de liberdade, ν , da distribuição t é dado pela diferença entre o tamanho da amostra e o número de parâmetros estimados. Pode-se conseguir um intervalo de confiança *bootstrap* para o parâmetro simplesmente substituindo-se s_i pela estimativa *bootstrap* s_i^* dada por:

$$s_i^* = \left[\frac{1}{B} \sum_{l=1}^B (\hat{n}_{il}^* - \hat{n}_i^*)^2 \right]^{1/2}$$

onde \hat{n}_{il}^* é a estimativa *bootstrap* do parâmetro n_i na replicação l . Tem-se portanto:

$$[\hat{n}_i - t_\nu(1-\alpha/2).s_i^* \quad ; \quad \hat{n}_i + t_\nu(1-\alpha/2).s_i^*]$$

que é o intervalo *bootstrap* simétrico de nível $1-\alpha$ para o parâmetro n_i .

Os intervalos de confiança, que são abordados com mais ênfase no capítulo 3, podem ser construídos com base em estatísticas *bootstrap*. O mais simples dos intervalos *bootstrap* é o *bootstrap-t*, onde apenas se faz a substituição da estimativa

usual do erro padrão, pela estimativa *bootstrap*. Este e outros métodos de obtenção de intervalos de confiança são abordados no capítulo 3, sendo separados em 4 classes ou métodos.

O *bootstrap* pode apresentar problemas se acontecer algum dos seguintes casos, ou uma combinação deles:

- O método *bootstrap* é sensível ao comportamento das caudas da distribuição F da população (valores muito discrepantes);
- Para que o método seja consistente é necessário que a estatística $s(\cdot)$ tenha certo grau de suavidade;
- Às vezes a consistência do estimador *bootstrap* depende do método usado para se obter os dados.

2.5.3.2 Método *bootstrap* paramétrico

Existem diferentes métodos para gerar amostras *bootstrap*. Um desses métodos é o paramétrico. Esse método simula amostras de tamanho n a partir de uma distribuição $F(t|\hat{\theta})$, conhecida. Por exemplo, $F(t|\hat{\theta})$ pode ser a função densidade da distribuição Normal com $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, em que $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ são os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2 , respectivamente. O *bootstrap* paramétrico assume que $F(\cdot)$ é conhecida com um ou mais parâmetros desconhecidos. Por exemplo, $F(\cdot)$ poderia ser conhecida, com distribuição Log-Normal, sendo os parâmetros $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ desconhecidos. Frequentemente, os parâmetros da $F(\cdot)$ são obtidos via método de máxima verossimilhança (Barros, 2005).

3. MATERIAL E MÉTODO

Conforme mencionado na introdução, o trabalho visa apresentar mais uma aplicação do método computacionalmente intensivo *bootstrap* e assim encontrar intervalos de confiança mais próximos da realidade para os valores da função de confiabilidade, estimada pelo método de Kaplan-Meier. Além de apresentar o método, também implementou-se o modelo computacional, fazendo sua validação. A eficiência do modelo foi avaliada através de um comparativo dos intervalos de confiança *bootstrap* com o do estimador assintótico. Os *softwares* utilizados para a construção das análises foram: o Action-1.1 para comparar os valores das estimativas dos valores da função de confiabilidade, MATLAB R2009a para a plotagem dos gráficos dos intervalos de confiança e o compilador Microsoft Visual Studio 2008, para o desenvolvimento dos programas da dissertação, em linguagem Fortran 2003.

O material utilizado, amostras de tempos de falha, foi obtido de amostras sintéticas, ou seja, amostras que foram geradas de um gerador de números aleatórios de falhas, também implementado em linguagem Fortran 2003.

A linguagem Fortran 2003 foi escolhida por ser uma linguagem voltada para programas matemáticos de engenharia. Inicialmente os métodos foram implementados em linguagem C, mas como o método do *bootstrap* gera muitas amostras, a execução dos programas em C ficavam muito demorados, e, às vezes não foram possíveis os cálculos, quando o número de amostras era muito grande, impondo algumas limitações e atrapalhando o desenvolvimento do trabalho.

Para as análises e implementações foi utilizado um notebook com processador Intel® Core™ i5 CPU M460 2.53GHz. Os tempos computacionais diferem muito pouco de amostra para amostra, mas na média conseguiu uma marca de 5 segundos para cada análise, calculada a partir do término da entrada dos dados até o retorno dos valores. Estes tempos variaram durante a elaboração e refinamento do programa que calcula as aplicações. Para a primeira aplicação, onde o programa ainda estava muito carregado com cálculos desnecessários, o tempo computacional chegou à uma hora, e assim conforme os ajustes o tempo passou a diminuir muito, chegando aos valores mencionados, proporcionando uma análise eficaz e rápida para as amostras. É importante ressaltar que o tamanho da amostra influencia o tempo computacional, mas ficaram evidenciados aumentos significativos

no tempo, acima de 30 segundos, para amostras com mais de 50 categorias de tempos de falha. Caracterizando que para amostras até esta marca os tempos computacionais ficaram praticamente iguais.

3.1 SEQUÊNCIA DA APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOOTSTRAP*

A aplicação do método *bootstrap* segue a seguinte sequência:

- Efetua-se o cálculo da estatística desejada para a amostra original $\underline{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ obtendo-se $T_n(\underline{x})$;
- Após isso, inicia-se o método *bootstrap* construindo B novas amostras *bootstrap* \underline{x}_j^* $j = 1, 2, \dots, B$ a partir da amostra inicial, com reposição. Assim, amostra-se a amostra original tomando-se amostras com reposição de mesmo tamanho n . E, tem-se B amostras *bootstrap* em cada categoria de tempo, $i = 1, 2, \dots, k$;
- Terminada a construção das B reamostras, B geralmente grande, na casa das 10000, calcula-se os valores da estatística para cada amostra *bootstrap* \underline{x}_j^* $j = 1, 2, \dots, B$, obtendo-se $T_{ji}^*(\underline{x}_j^*)$ $j = 1, 2, \dots, B$. E, isto é feito para cada um dos k conjuntos de categorias de tempo de falha.
 - Calcula-se a média *bootstrap* de cada categoria de tempo, $i = 1, 2, \dots, k$;
 - Calcula-se o erro padrão *bootstrap* de cada categoria de tempo, $i = 1, 2, \dots, k$;
 - Por fim, constrói-se os intervalos de confiança.

Seja o exemplo de uma aplicação:

Seja a amostra inicial $\underline{x} = [1, 2, 1, 1, 3]'$ de número de falhas para as categorias $t = 1, \dots, 5$, para uma amostra com $n = 30$ produtos.

Assim construindo as B amostras *bootstrap* tem-se:

$$\underline{x}_1^* = [2, 2, 1, 1, 3]', \underline{x}_2^* = [1, 1, 2, 1, 3]', \dots, \underline{x}_B^* = [3, 1, 2, 1, 2]', \underline{x}_B^* = [1, 3, 2, 1, 1]';$$

$$\hat{R}(x) = [0.97, 0.90, 0.87, 0.83, 0.73]';$$

TABELA 3 – AMOSTRAS *BOOTSTRAP* OBTIDAS DA ORIGINAL

Categoria	Nº de falhas para cada categoria				
	\underline{x}_1^*	\underline{x}_2^*	...	\underline{x}_{B-1}^*	\underline{x}_B^*
$t = 1$	2	1	...	3	1
$t = 2$	2	1	...	1	3
$t = 3$	1	2	...	2	2
$t = 4$	1	1	...	1	1
$t = 5$	3	3	...	2	1

FONTE: O autor (2011).

TABELA 4 – ESTIMATIVAS *BOOTSTRAP* DA CONFIABILIDADE

Categoria	Confiabilidade estimada para cada amostra <i>bootstrap</i>				
	$\hat{R}_1(t)^*$	$\hat{R}_2(t)^*$...	$\hat{R}_{B-1}(t)^*$	$\hat{R}_B(t)^*$
$t = 1$	0.9333333	0.9666667	...	0.9000000	0.9666667
$t = 2$	0.8666667	0.9333333	...	0.8666667	0.8666667
$t = 3$	0.8333333	0.8666667	...	0.8000000	0.8000000
$t = 4$	0.8000000	0.8333333	...	0.7666667	0.7666667
$t = 5$	0.7000000	0.7333333	...	0.7000000	0.7333333

FONTE: O autor (2011).

onde \underline{x}_j^* , $j = 1, 2, \dots, B$ são as amostras *bootstrap* das falhas para cada categoria de tempo de falha, $\hat{R}(x)$ as estimativas da confiabilidade para a amostra original e $\hat{R}_j(t)^*$, $j = 1, 2, \dots, B$, a confiabilidade estimada para as amostras *bootstrap*.

Terminado esta etapa, é calculado a média $\bar{R}_i^* = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{R}_j^*$ e o erro padrão

bootstrap, $\hat{e}p^*$:

TABELA 5 - ESTATÍSTICAS *BOOTSTRAP* PARA CADA CATEGORIA DE TEMPOS DE FALHA

Categoria	Média de cada categoria \bar{R}_i^*	Erro padrão <i>bootstrap</i> $\hat{e}p^*$
$t = 1$	0.9665526	0.0299653
$t = 2$	0.9007625	0.0599207
$t = 3$	0.8674803	0.0552260
$t = 4$	0.8340740	0.0466594
$t = 5$	0.7331951	0.0600623

FONTE: O autor (2011).

TABELA 6 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DE KAPLAN-MEIER E *BOOTSTRAP*

Categorias	IC. Kaplan-Meier		IC. <i>bootstrap-t</i>		IC. <i>bootstrap</i> percentílico	
$t = 1$	0.7860770	0.9952365	0.9646863	0.9685377	0.9333333	1.0000000
$t = 2$	0.7211880	0.9666077	0.8884074	0.9104497	0.8666667	1.0000000
$t = 3$	0.6827647	0.9477520	0.8526042	0.8794839	0.8333333	0.9666667
$t = 4$	0.6449564	0.9270071	0.8189096	0.8467180	0.8000000	0.9333333
$t = 5$	0.5369106	0.8566934	0.7054614	0.7590329	0.6666667	0.8333333

FONTE: O autor (2011).

Assim tem-se a aplicação do método a uma amostra de tempos de falha de $n = 30$ itens, com $k = 5$ categorias de tempos de falha, 8 falhas e 22 censuras.

3.2 ERRO PADRÃO *BOOTSTRAP*

Para calcular alguns tipos de intervalo de confiança *bootstrap* é necessário calcular primeiramente o erro padrão *bootstrap*, já que é utilizado no lugar do erro padrão da amostra original para o intervalo clássico do estimador de Kaplan-Meier, na expressão do intervalo de confiança do estimador.

O erro padrão *bootstrap* é calculado para cada categoria de tempo de falha, utilizando todas as B amostras *bootstrap*.

Sua expressão apenas depende dos valores da confiabilidade para cada categoria de tempos de falha e a média de cada categoria:

$$\text{Erro padrão } \hat{ep}_i^* = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum \left(\hat{R}_j^{i*} - \frac{1}{B} \sum \hat{R}_j^{i*} \right)^2},$$

onde B é o número de amostras *bootstrap* e \hat{R}_j^{i*} é o valor da confiabilidade estimada para cada ponto do vetor de categorias de tempos de falha, com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, B$.

3.3 INTERVALOS DE CONFIANÇA *BOOTSTRAP*

O método *bootstrap*, juntamente com o seu erro padrão, pode ser uma técnica robusta na hora de construir um intervalo de confiança para as estimativas da função de confiabilidade. Além do intervalo de confiança *bootstrap* convencional existem vários outros métodos de cálculo do intervalo de confiança, que eliminam alguns problemas que geralmente aparecem quando se trabalha com amostras “estranhas”, ou seja, amostras que não tenham distribuições parecidas com a distribuição normal.

A seguir apresentam-se os diferentes métodos de obtenção do intervalo de confiança *bootstrap*, sendo eles o intervalo *bootstrap-t*, percentis *bootstrap*, ou intervalo *bootstrap* percentílico, BCPB e o BC_a , com estes dois últimos uma adaptação do intervalo percentílico para casos especiais.

3.3.1 Intervalo *bootstrap-t*

O intervalo de confiança *bootstrap-t* é calculado da mesma maneira que o intervalo de confiança do estimador de Kaplan-Meier, apenas substituindo o erro padrão clássico do estimador de Kaplan-Meier pelo erro padrão *bootstrap*:

$$P\left(\hat{R}(t) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{ep}^*[\hat{R}(t)] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{ep}^*[\hat{R}(t)]\right) = 1 - \alpha$$

com n o tamanho da amostra original e \hat{ep}^* é o erro padrão *bootstrap* da estatística.

Embora seja flexível e praticamente automático, o cálculo do intervalo de confiança possui um problema que pode afetar a sua eficácia. O método funciona bem quando a distribuição *bootstrap* da estatística é aproximadamente Gaussiana e a estatística pouco viciada. Sendo respeitadas estas condições o intervalo de confiança *bootstrap-t* pode ser calculado na estimação de vários parâmetros.

3.3.2 Intervalo de confiança baseado nos percentis *bootstrap*

Existem dois modos distintos de se calcular o intervalo percentílico *bootstrap* para uma confiança de $(1 - \alpha).100\%$:

- a primeira forma é calcular o percentil $(1 - \alpha/2).100\%$ e o percentil $(\alpha/2).100\%$ das estatísticas amostrais *bootstrap* e usá-los como os limites do intervalo.

$$IC^* = [P_{(\alpha/2)100\%}^* ; P_{(1-\alpha/2)100\%}^*]$$

- a segunda é obter o intervalo de confiança percentílico utilizando a técnica em estudo através dos percentis das diferenças dos valores das estatísticas nas reamostras *bootstrap* com a sua média, isto em cada categoria de tempo de falha.

Para um intervalo de confiança de um valor da função de confiabilidade $R(t)$, calcula-se o valor das estatísticas para cada uma das B amostras *bootstrap* (\hat{R}_j^{i*}) e as médias das estimativas $(\bar{\hat{R}}_i)$, $i = 1, 2, \dots, K$ e $j = 1, 2, \dots, B$. Então encontra-se para cada amostra *bootstrap*, $j = 1, 2, \dots, B$, a diferença entre o valor de cada estimativa *bootstrap* \hat{R}_j^{i*} e a média de todas as estimativas *bootstrap* na categoria i :

$$\Delta_j^* = \hat{R}_j^{i*} - \bar{\hat{R}}_i$$

Após este cálculo, essas diferenças são ordenadas de forma crescente assim obtendo-se B diferenças, podendo encontrar o percentil desejado para as diferenças.

Para um intervalo de confiança de 95%, por exemplo, encontram-se os percentis de 97,5% e 2,5% das diferenças e calcula-se o intervalo de confiança *bootstrap* percentílico da seguinte forma:

$$P[\hat{R}(t) - \Delta_{97,5\%}^* \leq R(t) \leq \hat{R}(t) - \Delta_{2,5\%}^*] = 95\%$$

Efron (1986) afirmou que se a distribuição *bootstrap* não for aproximadamente Gaussiana, mas existir uma transformação monotônica possível que a torne Normal, pode-se calcular o intervalo de confiança *bootstrap* percentílico para os dados transformados, e, posteriormente, desfazer a transformação para os limites do intervalo encontrado. Para isso a transformação deve ser monotônica, logo o intervalo de confiança *bootstrap* pelo método percentílico assim calculado terá valores iguais ao intervalo de confiança *bootstrap* pelo método percentílico para os dados não transformados. Caso o vício e a assimetria estejam presentes de forma muito forte é mais recomendável a utilização dos métodos de correção como o método BCPB e o método BC_a .

3.3.3 Intervalo de Confiança Bootstrap BCPB

No método BCPB, os extremos são os percentis da distribuição *bootstrap* ajustados para corrigir o vício e a assimetria da distribuição.

Para encontrar um intervalo de confiança BCPB de 95%, por exemplo, é preciso ajustar os percentis de um cálculo de intervalo de confiança percentílico tradicional, que seriam, para um nível de 95%, os percentis 97,5% e 2,5%, para valores que corrigiriam o vício e a assimetria. Se a estatística for viciada para cima, o BCPB move os extremos para a esquerda e se for viciada para baixo move os extremos para a direita.

Para realizar o cálculo do intervalo BCPB, primeiramente deve-se ordenar as B estimativas \hat{R}_j^* $j = 1, 2, \dots, B$ em forma crescente e calcular a probabilidade p_0 de uma estimativa ser inferior à estimativa da amostra mestre (\hat{R}):

$$p_0 = P[\hat{R}_j^* \leq \hat{R}]$$

A partir do valor encontrado p_0 é obtido o parâmetro de correção do vício z_0 que representa a inversa da normal no ponto p_0 , tal que:

$$z_0 = \Phi^{-1}(p_0)$$

O segundo passo é selecionar um nível $(1-\alpha).100\%$ de confiança para a estimativa do parâmetro a determinar $z_{\alpha/2}$. Então é possível obter os percentis P_I e P_S :

$$P_I = \Phi(2z_0 - z_{\alpha/2})$$

$$P_S = \Phi(2z_0 + z_{\alpha/2})$$

O Intervalo de Confiança, BCPB, é calculado da seguinte maneira:

$$IC_{BCPB}^* = [P_{P_I}(\hat{R}_j^*); P_{P_S}(\hat{R}_j^*)].$$

3.3.4 Intervalos de confiança percentis BC_a

O método de Correção de Vício Acelerado permite encontrar o intervalo de confiança quando assimetria estiver presente de maneira forte. Esse método é semelhante ao método BCPB, a diferença é o fato de o BC_a possuir uma constante de aceleração a que ajusta o intervalo de confiança em relação à assimetria. Segundo Efron (1986), nesta situação este método é mais indicado que o método BCPB.

O intervalo de Confiança BC_a é obtido de forma análoga ao método BCPB, realizando os mesmo passos do cálculo do intervalo de confiança com os limites P_I e P_S , porém utilizando um ajuste por meio da constante de aceleração a . A obtenção da constante a envolve cálculos não triviais, o que leva o Intervalo de Confiança BC_a ser mais utilizado quando há algum *software* estatístico disponível.

O cálculo do intervalo de confiança BC_a é feito utilizando as seguintes fórmulas para os valores de P_I e P_S :

$$P_I = \Phi \left(z_0 - \frac{(z_0 + z_{\alpha/2})}{1 - a(z_0 + z_{\alpha/2})} \right),$$

$$P_S = \Phi \left(z_0 + \frac{(z_0 + z_{\alpha/2})}{1 - a(z_0 + z_{\alpha/2})} \right)$$

e substituindo na expressão:

$$IC_{BC_a}^* = [P_{P_I}(\hat{R}_j^*); P_{P_S}(\hat{R}_j^*)].$$

Segundo Andrews e Buchinsky (2002), é possível determinar a constante a de maneira simples se as variáveis aleatórias, da amostra original, observadas forem independentes e identicamente distribuídas. Assim o cálculo da constante será:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{\hat{R}}_i^* - \hat{R}_j^{i*})^3}{6 \left(\sum_{i=1}^k (\bar{\hat{R}}_i^* - \hat{R}_j^{i*})^2 \right)^{3/2}}$$

com \hat{R}_j^{i*} sendo o valor das estimativas do parâmetro estudado para cada amostra $j = 1, 2, \dots, B$ que consiste na amostra mestre sem a categoria i , com $1 \leq i \leq k$ e $\bar{\hat{R}}_i^*$ o valor da média das estimativas *bootstrap*, \hat{R}^* .

3.4 GERADOR ALEATÓRIO DE AMOSTRAS DE FALHAS

Pensando em uma forma fácil e rápida de se obter amostras de falhas das categorias de tempos de falhas, foi desenvolvido um gerador aleatório com distribuição uniforme, programado na linguagem Fortran 2003.

O gerador pode gerar amostras com, ou sem, censura, podendo ser caracterizada como censura por tempo de uso, número de acionamentos, com valores inteiros, número máximo de falhas pré-estabelecido, entre outros.

Para a construção das amostras, é apenas necessário que se entre com a informação de que a amostra possua censura ou não, o tamanho da amostra, e caso possua censura o número de elementos máximos para a amostra. Retornando então, no caso sem censura, um vetor com o tamanho desejado e o número total de elementos, e no caso censurado o vetor do tamanho informado e o número informado de elementos, e o número de produtos que falharam na simulação.

O programa utiliza o gerador de números aleatórios das funções da linguagem Fortran 2003, que segue uma distribuição uniforme. É importante ressaltar que o gerador não retorna os tempos de falha, e sim a quantidade de elementos, produtos, que falharam na primeira categoria de tempo de falha, na segunda e assim até a n -ésima categoria de tempos de falha.

Com o auxílio do gerador foram criadas várias amostras sintéticas de categorias de tempos de falha, e assim aplicado cada amostra ao programa principal, o qual calcula as reamostragens e os intervalos de confiança *bootstrap*. Neste trabalho estão apresentadas seis aplicações às amostras sintéticas, variando entre amostras com censura e sem censura, com vários tamanhos de categorias de tempos de falha, 10 até 22 categorias, sendo 2 amostras sem censura e 4 amostras com censura.

As amostras apresentam os números das falhas para cada categoria de tempo. Seja o exemplo onde se considera $k = 5$ categorias de tempos de falha e tem-se os números de falhas para cada categoria $i = 1, 2, \dots, 5$. Então,

$$\underline{x} = [1, 2, 1, 1, 3].$$

Assim para a categoria $t = 1$ um produto falhou, para a categoria $t = 2$ dois produtos falharam e assim até a última categoria k que corresponde a $t = 5$ em que três produtos falharam. A amostra é do tipo censurada, pois considerou-se $n = 30$ itens e nem todos os itens falharam ($1 + 2 + 1 + 1 + 3 = 8 < 30$). Ocorreram vinte e duas (22) censuras.

3.5 OBTENÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA *BOOTSTRAP*

A partir dos métodos descritos nas seções anteriores, pode-se obter vários intervalos de confiança *bootstrap*, os abordados neste trabalho foram o intervalo de confiança do estimador de Kaplan-Meier, intervalo de confiança *bootstrap-t* e o intervalo *bootstrap* baseado nos percentis, percentílico, já que apenas foi trabalhado com amostras que tem distribuição parecidas com a normal. Para o intervalo *bootstrap-t* utilizou-se o erro padrão *bootstrap* já definido no começo deste capítulo.

Foram consideradas apenas amostras com censura dos tipos I e II, censura por tempo de uso, número de acionamentos e número máximo de falhas pré-estabelecido, que são os tipos mais comuns de censura para produtos e sistemas, encontrados na literatura. Além do que esse tipo de censura torna o trabalho mais simples e a análise mais eficaz, já que as censuras podem ser aceitas como falhas, ou podem ser aceitas como ausência de falha.

O valor de B para o número de replicações foi crescendo gradativamente durante as análises, para valores de B acima de 1000, os resultados começaram a ficar melhores, ou seja, os valores do erro padrão *bootstrap* ficam menores que do erro padrão calculados pelo estimador de Kaplan-Meier, e os intervalos de confiança *bootstrap* ficaram com amplitudes menores que os intervalos de estimador clássico que os resultados obtidos pelo estimador padrão, e começaram a estabilizar para valores de B próximos de 10000.

Para todos os métodos de obtenção dos intervalos de confiança *bootstrap* listados neste capítulo é utilizado o mesmo cálculo do erro padrão *bootstrap* descrito no mesmo capítulo.

Como geralmente na aplicação do *bootstrap* obtém-se um único erro padrão para cada amostra, e para o estimador de Kaplan-Meier temos valores para cada categoria de tempo de falha, foi necessário uma adaptação do cálculo do erro

padrão *bootstrap*, gerando um valor de erro para cada categoria de tempo de falha da estimação da confiabilidade.

Assim obteve-se um valor do erro padrão para a categoria $t = 1$, um valor do erro para a categoria $t = 2$, e assim sucessivamente até a categoria n , gerando um vetor de erros padrão *bootstrap*:

$$\underline{\hat{e}p}^* = [\hat{e}p_1^*, \hat{e}p_2^*, \dots, \hat{e}p_n^*]$$

Assim tem-se uma matriz $IC_{n \times 2}$ dos valores do intervalo de confiança, onde a primeira posição de cada linha refere-se ao limite inferior do intervalo e a segunda posição o limite superior do intervalo.

É evidente que haverá desigualdades entre os intervalos de confiança calculados com métodos distintos, uma vez que cada um, mesmo que usando o mesmo valor do erro padrão *bootstrap*, utilizam equações diferentes, que podem mudar os limites dos intervalos, deixando mais, ou menos, ajustados em torno do valor da confiabilidade estimada.

Com isso pode-se optar pelo intervalo que se encaixe melhor nos interesses do estudo, já que o programa principal retornará os valores do intervalo *bootstrap-t* e o percentílico, além do intervalo do estimador de Kaplan-Meier e seus reajustes se necessário, para a comparação e análise.

3.6 COMPARAÇÃO DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER E O *BOOTSTRAP*

Após a elaboração dos intervalos de confiança, é necessário fazer a comparação entre os intervalos obtidos pelo método *bootstrap* com os intervalos de confiança do estimador de Kaplan-Meier, para poder ter uma possível confirmação do que era esperado.

A relação de melhor ou pior intervalo será feita em questão da amplitude, logo o intervalo que ficar mais extenso é considerado pior, ou menos ajustado em torno da estimativa, que o outro de amplitude menor.

No método do intervalo *bootstrap-t* basta analisar apenas o valor do erro padrão *bootstrap*, já que o intervalo é, assim como o intervalo do estimador clássico,

geralmente simétrico em relação à estimativa, logo, se o erro padrão *bootstrap* for menor que o erro padrão calculado pela fórmula de Greenwood o intervalo de confiança será mais ajustado que do estimador, e assim será considerado melhor, mais ajustado em torno das estimativas, que o intervalo calculado pelo estimador clássico.

Mas quando se trata do intervalo percentílico é necessário uma análise intervalo por intervalo, uma vez que ele pode não ser simétrico em relação à estimativa. Assim essa análise exige um pouco mais de trabalho, pois se o tamanho da amostra de tempos de falha for extensa utiliza-se um tempo maior que a análise do intervalo *bootstrap-t*.

Como mencionado anteriormente, foram simuladas 6 amostras aleatórias de tempos de falha, sendo 4 com censura e 2 sem censura, outras amostras foram utilizadas mas não é possível apresentar todas as aplicações pelo espaço, podendo tornar a trabalho muito carregado. Os resultados dos intervalos de confiança foram confrontados a fim de constatar o sucesso da aplicação do método *bootstrap*.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO *BOOTSTRAP* AOS INTERVALOS DE CONFIANÇA

Os resultados da aplicação da metodologia descrita no capítulo 3 são apresentados nesta seção. As amostras foram geradas pelo gerador aleatório implementado. Sendo apresentadas seis aplicações em amostras.

Para cada amostra são apresentados: o seu histograma de distribuição aproximada das falhas, três tabelas e os gráficos com os valores da confiabilidade estimada e os intervalos de confiança do estimador de Kaplan-Meier e dois intervalos do método *bootstrap*, o intervalo *bootstrap-t* e o intervalo percentílico. A primeira tabela apresenta os valores dos tempos de falhas, número de itens que falharam para cada tempo e a confiabilidade estimada de cada tempo. A segunda mostra três tipos de intervalos de confiança, o do estimador de Kaplan-Meier, *bootstrap-t* e o *bootstrap* percentílico, para facilitar as análises dos intervalos e por fim a terceira apresenta a amplitude, comprimento, de cada intervalo de confiança, os intervalos de confiança foram todos calculados para um limite de segurança de 95%.

4.1.1 Amostra gerada com 10 categorias de tempo de falha com 33 itens, censurada

A primeira amostra, censurada, contém 10 categorias de tempos de falha, com um total de 33 componentes em teste, com 18 falhas, sendo 15 censurados.

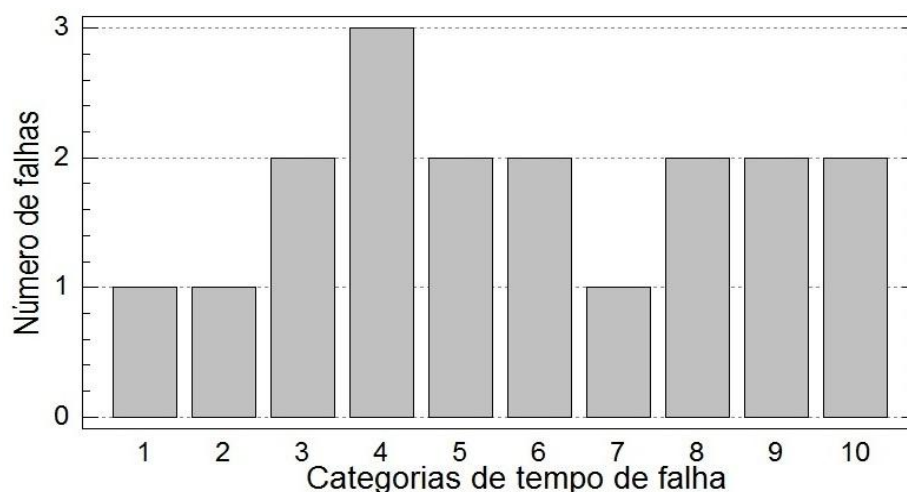


FIGURA 14 – Histograma da amostra com 10 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 7 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t) \ i = 1, 2, \dots, 10$	Média \bar{R}_i^* das categorias	Erro padrão <i>bootstrap</i> $\hat{e}p^*$
$t = 1$	1	0.9696970	0.9698923	0.0284697
$t = 2$	1	0.9393940	0.9395501	0.0384284
$t = 3$	2	0.8787879	0.8793879	0.0632171
$t = 4$	3	0.7878789	0.7887975	0.0962398
$t = 5$	2	0.7272728	0.7281400	0.0997467
$t = 6$	2	0.6666667	0.6675317	0.0999279
$t = 7$	1	0.6363637	0.6373060	0.0939728
$t = 8$	2	0.5757576	0.5765691	0.0881435
$t = 9$	2	0.5151516	0.5154868	0.0769828
$t = 10$	2	0.4545455	0.4544869	0.0581672

FONTE: O autor (2011).

TABELA 8 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILICO PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC <i>bootstrap</i> percentílico	
$t = 1$	0.8037434	0.9956753	0.9679861	0.9713178	0.9393939	1.0000000
$t = 2$	0.7787644	0.9844893	0.9348108	0.9436648	0.9393939	1.0000000
$t = 3$	0.7085648	0.9526940	0.8639367	0.8921208	0.8484849	1.0000000
$t = 4$	0.6059378	0.8927420	0.7498338	0.8208406	0.7575758	0.9696970
$t = 5$	0.5413215	0.8476930	0.6789450	0.7695858	0.6969697	0.9090909
$t = 6$	0.4794410	0.7996069	0.6106756	0.7165235	0.6363636	0.8484849
$t = 7$	0.4494479	0.7745697	0.5807734	0.6866351	0.6060606	0.8181818
$t = 8$	0.3912513	0.7226830	0.5188301	0.6284640	0.5454545	0.7575758
$t = 9$	0.3353672	0.6685141	0.4624017	0.5653012	0.4848485	0.6666667
$t = 10$	0.2818899	0.6121349	0.4132626	0.4948494	0.4242424	0.5757576

FONTE: O autor (2011).

TABELA 9 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude K-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude <i>b.</i> percentílico
$t = 1$	0.1919	0.0033 (1,72%)	0.0606 (31,6%)
$t = 2$	0.2057	0.0089 (4,32%)	0.0606 (29,5%)
$t = 3$	0.2441	0.0282 (11,6%)	0.1515 (62,1%)
$t = 4$	0.2868	0.0710 (24,8%)	0.2121 (73,9%)
$t = 5$	0.3064	0.0906 (29,6%)	0.2121 (69,2%)
$t = 6$	0.3202	0.1058 (33,1%)	0.2121 (66,2%)
$t = 7$	0.3251	0.1059 (32,6%)	0.2121 (65,2%)
$t = 8$	0.3314	0.1096 (33,1%)	0.2121 (64,0%)
$t = 9$	0.3331	0.1029 (30,9%)	0.1818 (54,6%)
$t = 10$	0.3302	0.0816 (24,7%)	0.1515 (45,9%)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier

FONTE: O autor(2011).

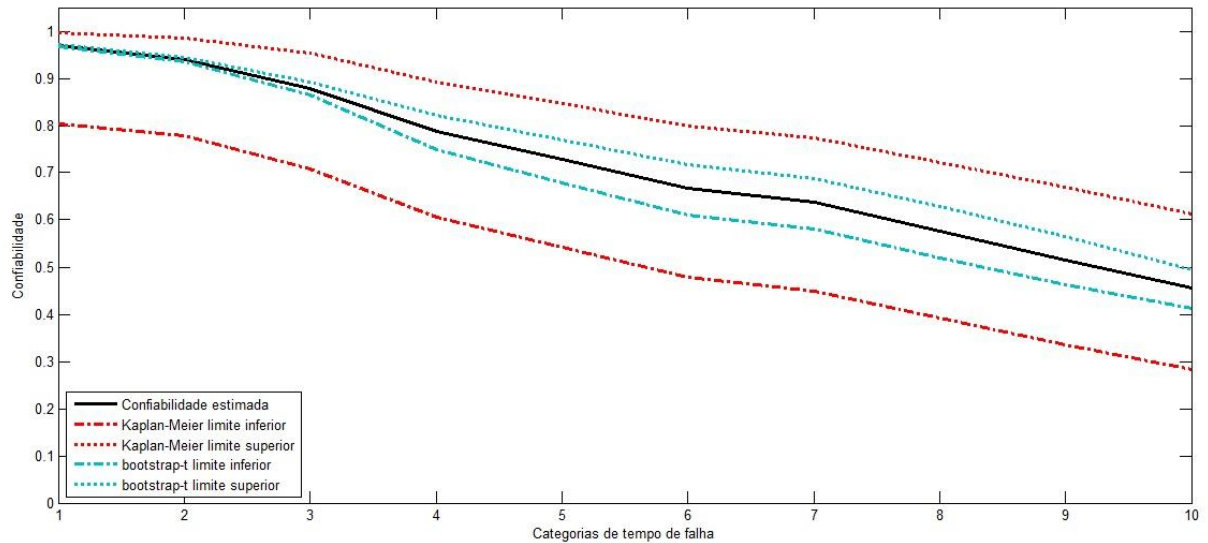


FIGURA 15 – Intervalos da amostra com 10 categorias K-M e *bootstrap-t*
 FONTE: O autor (2011).

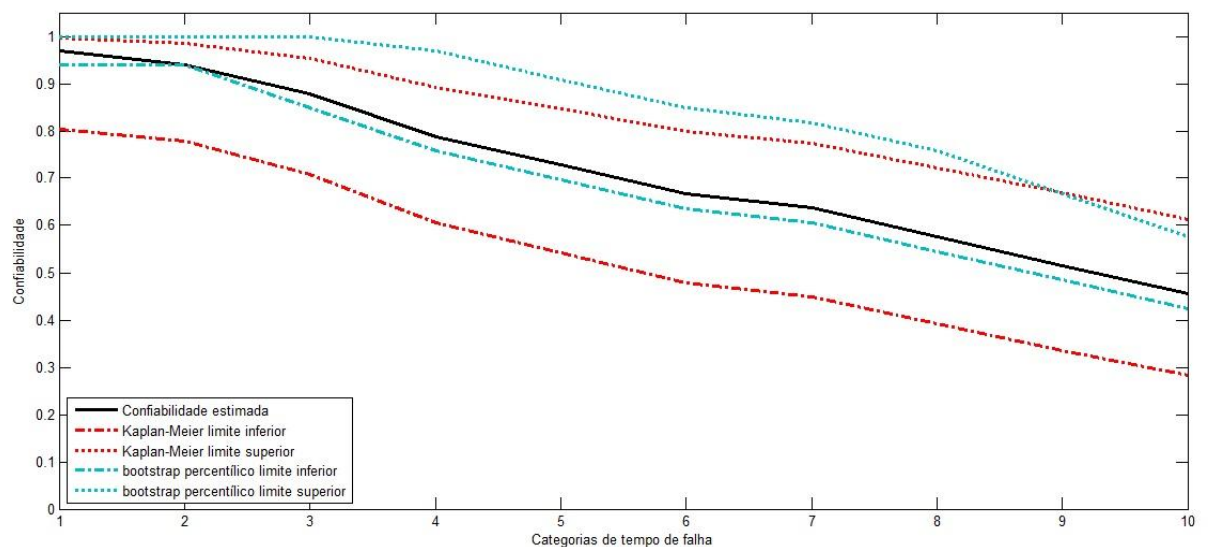


FIGURA 16 – Intervalos da amostra com 10 categorias K-M e b. percentílico
 FONTE: O autor (2011).

A Figura 14 apresenta o histograma das frequências dos números de falha para cada categoria de tempo de falha, já a Tabela 7 apresenta a confiabilidade estimada para a amostra original, a média *bootstrap* para cada categoria de tempo e o erro padrão *bootstrap*, também para cada categoria de tempo.

A Tabela 8 mostra os resultados da aplicação para uma amostra sintética censurada, ficando evidente que tanto o intervalo *bootstrap-t* quanto o percentílico são intervalos mais curtos, ou seja, têm amplitudes menores em cada uma das categorias de tempo, Tabela 9, do que o intervalo clássico para o estimador de Kaplan-Meier. Para essa amostra o intervalo *bootstrap-t* foi o intervalo melhor,

devido ao erro *bootstrap* ser muito menor que o erro calculado por Kaplan-Meier. O intervalo percentílico apresentou valores um pouco mais amplos do que o *bootstrap-t*, mas mesmo assim mais curtos que o do estimador padrão.

Observando a Figura 15, a Figura 16 e a Tabela 9, fica clara a diferença dos intervalos de confiança. O intervalo do estimador de Kaplan-Meier tem uma amplitude muito maior que o intervalo *bootstrap-t*, e também maior que a amplitude do intervalo percentílico. Para valores das estimativas da confiabilidade próximos de 1 o intervalo *bootstrap-t* não é simétrico, mas na seqüência ele tende a ser simétrico. Já para o intervalo percentílico, seu limite inferior sempre se mantém perto dos valores estimados da confiabilidade e tendo seu limite superior sempre acima do limite superior do intervalo do estimador.

4.1.2 Amostra gerada com 11 categorias de tempo de falha com 39 itens, não censurada

As figuras, tabelas e gráficos a seguir foram criados a partir de uma amostra aleatória sintética não censurada. A amostra possui 39 produtos e 11 categorias de tempos de falha, onde todos os itens falham na simulação de teste.

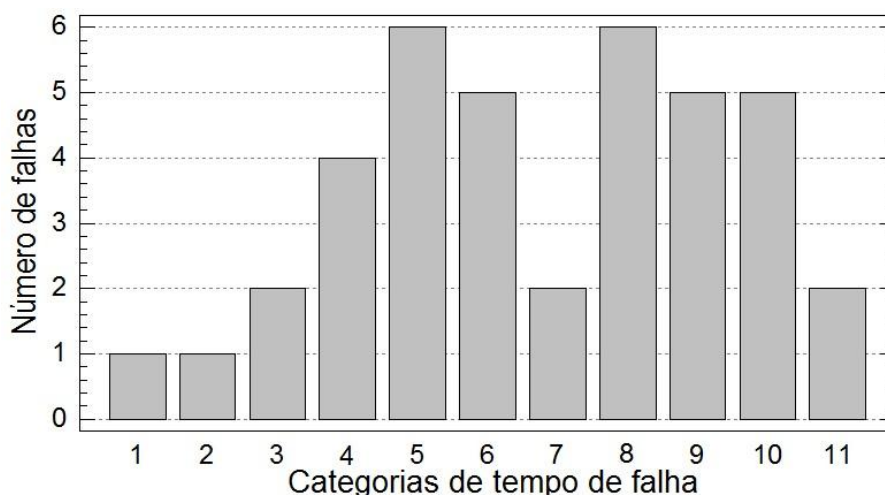


FIGURA 17 – Histograma da amostra com 11 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 10 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 11 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t) i=1,\dots,11$	Média \bar{R}_i^* das categorias	Erro padrão <i>bootstrap</i> $\hat{e}p^*$
$t=1$	1	0.9743590	0.9745176	0.0243354
$t=2$	1	0.9487180	0.9486393	0.0327115
$t=3$	2	0.8974359	0.8975456	0.0543295
$t=4$	4	0.7948718	0.7957529	0.1021979
$t=5$	6	0.6410257	0.6406971	0.1626228
$t=6$	5	0.5128205	0.5137720	0.1797573
$t=7$	2	0.4615385	0.4625213	0.1730633
$t=8$	6	0.3076923	0.3137035	0.1806893
$t=9$	5	0.1794872	0.1979244	0.1620376
$t=10$	5	0.0051282	0.0999354	0.1227658
$t=11$	2	0.0000000	0.0638045	0.0936555

FONTE: O autor (2011).

TABELA 11 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILICO PARA 11 CATEGORIAS

Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC b. percentílico	
$t=1$	0.8315876	0.9963480	0.9731233	0.9755386	0.9743590	1.0000000
$t=2$	0.8101534	0.9869226	0.9454167	0.9518247	0.9230769	1.0000000
$t=3$	0.7494106	0.9602185	0.8865899	0.9072995	0.8717949	1.0000000
$t=4$	0.6314322	0.8916929	0.7554141	0.8286961	0.7692308	0.9743590
$t=5$	0.4704332	0.7693366	0.5424722	0.7237458	0.5897436	0.9230769
$t=6$	0.3479007	0.6554656	0.3867797	0.6253031	0.4615385	0.8461539
$t=7$	0.3015959	0.6072957	0.3377575	0.5765047	0.3846154	0.7692308
$t=8$	0.1725058	0.4536018	0.1864582	0.4372966	0.2307693	0.6666667
$t=9$	0.0078973	0.3128085	0.0094445	0.2864258	0.1025641	0.5384616
$t=10$	0.0009851	0.1517384	0.0022857	0.0096795	0.0000000	0.4102564
$t=11$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3076923

FONTE: O autor (2011).

TABELA 12 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 11 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude K-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude b. percentílico
$t=1$	0.1648	0.0024 (1,45%)	0.0256 (15,5%)
$t=2$	0.1768	0.0064 (3,6%)	0.0769 (43,5%)
$t=3$	0.2108	0.0207 (9,8%)	0.1282 (60,8%)
$t=4$	0.2603	0.0733 (28,2%)	0.2051 (78,8%)
$t=5$	0.2989	0.1813 (60,7%)	0.3333 (111,5%)
$t=6$	0.3076	0.2385 (77,5%)	0.3846 (125,0%)
$t=7$	0.3057	0.2387 (78,1%)	0.3846 (125,8%)
$t=8$	0.2811	0.2508 (89,2%)	0.4359 (155,1%)
$t=9$	0.3049	0.2770 (90,8%)	0.4359 (142,9%)
$t=10$	0.1508	0.0074 (4,9%)	0.4103 (272,1%)
$t=11$	0.0000	0.0000 (-)	0.3077 (-)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier

FONTE: O autor(2011).

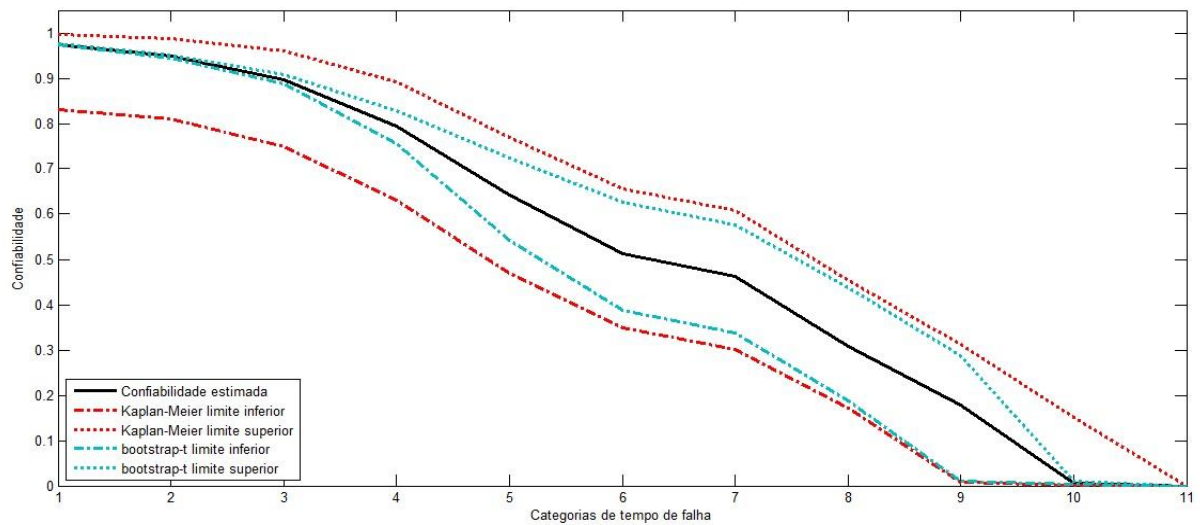


FIGURA 18 – Intervalos da amostra com 11 categorias K-M e *bootstrap-t*
 FONTE: O autor (2011).

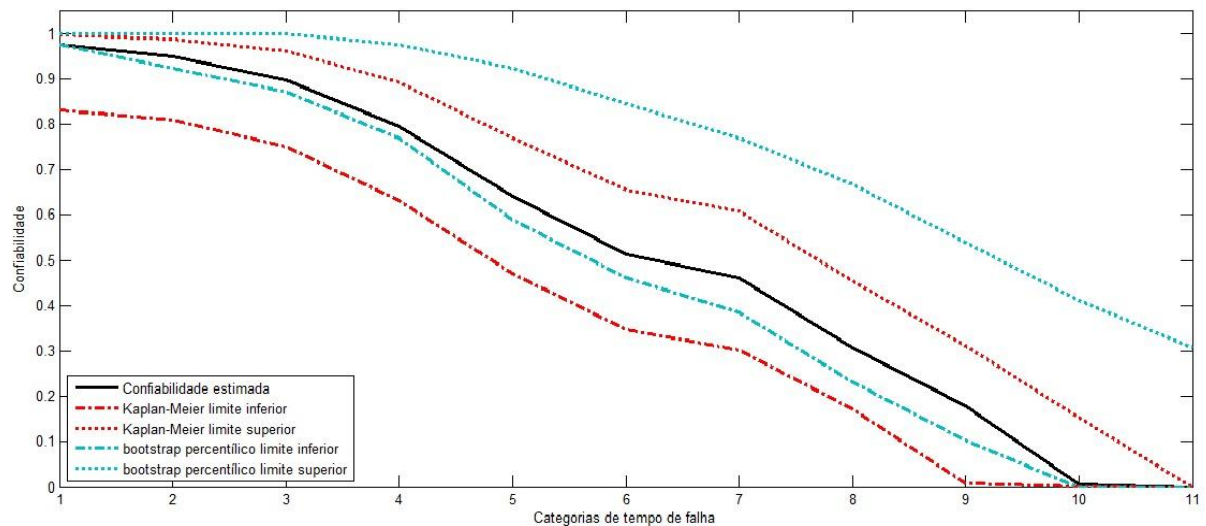


FIGURA 19 - Intervalos da amostra com 11 categorias K-M e b. percentílico
 FONTE: O autor (2011).

A Figura 17 apresenta o histograma das frequências dos números de falha para cada categoria de tempo de falha, a Tabela 10 apresenta a confiabilidade estimada para a amostra original, a média *bootstrap* para cada categoria de tempo e o erro padrão *bootstrap*, também para cada categoria de tempo.

A Tabela 11 demonstra novamente o êxito da aplicação do método *bootstrap*, mas desta vez o intervalo percentílico não se saiu tão bem quando na amostra anterior, novamente o intervalo *bootstrap-t* obteve valores bons, conseguindo intervalos mais ajustadas em torno das estimativas da confiabilidade. No último intervalo de confiança da Tabela 11 os valores do estimador de Kaplan-Meier e o *bootstrap-t* ficam com extremos iguais a zero, isso acontece devido a

fórmula, uma vez que os dois utilizam os valores da confiabilidade estimada para o cálculo do intervalo e como ela é nula então os intervalos não tem amplitude alguma.

Novamente na Figura 18 é fácil verificar que o intervalo *bootstrap-t* possui uma amplitude menor que do estimador clássico, mas nesta aplicação ocorre o inverso, neste caso o intervalo do estimador se mantém simétrico praticamente em quase todos os valores das observações e o intervalo *bootstrap-t* se demonstra menos regular, já que recebeu o ajuste uma vez que alguns dos seus limites superiores ultrapassaram a marca de 1 ponto, ou 100%. Para o intervalo percentílico, até a quarta observação possui uma amplitude visivelmente, e numericamente, menor que o intervalo do estimador de Kaplan-Meier, mas da quinta até a décima primeira observação a amplitude ficou maior para o intervalo percentílico do que para o Kaplan-Meier. Essa diferença pode ser justificada pelo tipo da amostra, por não ser censurada talvez force o intervalo percentílico ter uma amplitude maior, já que isso aconteceu com as outras amostras não censuradas utilizadas nas simulações.

Para amostras um pouco maiores os resultados ainda são melhores, já que é característico do estimador assintótico, lógico que amostras não tão extensas, pois caso a amostra seja muito grande não existe a necessidade de aplicar o método *bootstrap* já que as estimativas tendem ao valor real conforme o tamanho da amostra cresça.

Nos dois casos mostrados anteriormente ficou evidente a eficácia da aplicação do método *bootstrap*, para a amostra não censurada o intervalo percentílico não se comportou tão bem, pois teve uma amplitude maior que a amplitude do intervalo clássico do estimador, na maioria das observações, mas se demonstrou eficaz para a amostra censurada. Entretanto para os dois tipos de amostra, o intervalo *bootstrap-t* se demonstrou melhor que os outros dois sempre tendo uma amplitude menor que o intervalo do estimador de Kaplan-Meier, mostrando que a aplicação foi eficiente.

4.1.3 Amostra gerada com 22 categorias de tempo de falha com 70 itens, censurada

A seguir é apresentada a aplicação a uma amostra censurada com 22 categorias de tempo de falha, com um total de 70 itens e 57 falhas, sendo 13 censuradas.

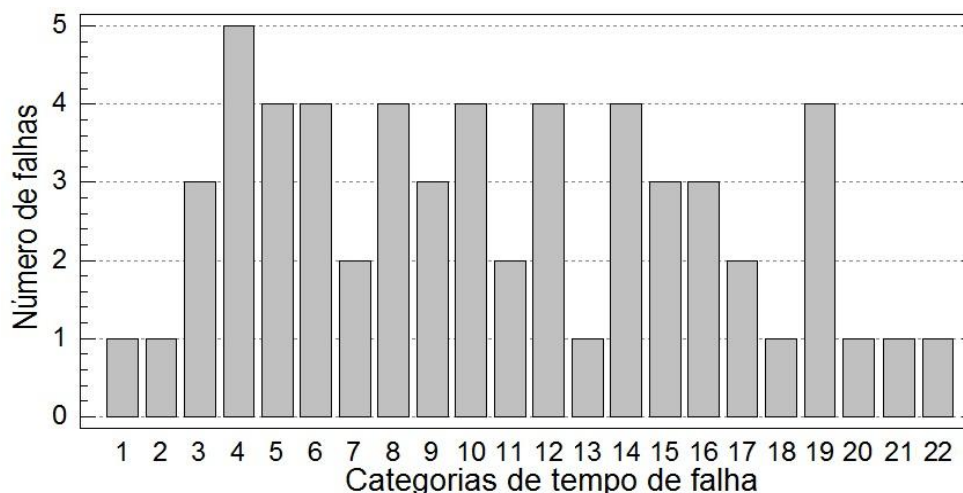


FIGURA 20 – Histograma da amostra com 22 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 13 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 22 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t) i=1, \dots, 22$	Média \bar{R}_i^* das categorias	Erro padrão <i>bootstrap</i> \hat{e}_p^*
$t=1$	1	0.9857143	0.9857251	0.0138738
$t=2$	1	0.9714286	0.9714772	0.0192419
$t=3$	3	0.9285715	0.9280913	0.0447747
$t=4$	5	0.8571429	0.8557433	0.0795369
$t=5$	4	0.8000000	0.7978839	0.0939782
$t=6$	4	0.7428572	0.7406402	0.1043036
$t=7$	2	0.7142857	0.7126486	0.1050430
$t=8$	4	0.6571429	0.6556810	0.1121111
$t=9$	3	0.6142858	0.6134459	0.1134754
$t=10$	4	0.5571429	0.5554927	0.1180758
$t=11$	2	0.5285715	0.5269166	0.1162325
$t=12$	4	0.4714286	0.4703937	0.1189218
$t=13$	1	0.4571429	0.4559103	0.1168832
$t=14$	4	0.4000001	0.3994991	0.1189335
$t=15$	3	0.3571429	0.3569044	0.1166458
$t=16$	3	0.3142858	0.3142420	0.1131285
$t=17$	2	0.2857144	0.2857353	0.1084538
$t=18$	1	0.2714286	0.2714806	0.1048753
$t=19$	4	0.2142858	0.2142218	0.1003685
$t=20$	1	0.2000001	0.2001101	0.0962219
$t=21$	1	0.1857143	0.1859751	0.0919061
$t=22$	1	0.1714286	0.1717197	0.0869427

FONTE: O autor(2011).

TABELA 14 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILÍCO PARA 22 CATEGORIAS

Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC b. percentílico	
$t = 1$	0.9028924	0.9979753	0.9853234	0.9860948	0.9857143	1.0000000
$t = 2$	0.8905523	0.9927770	0.9703469	0.9724714	0.9714286	1.0000000
$t = 3$	0.8368711	0.9696316	0.9222809	0.9343712	0.9142857	1.0000000
$t = 4$	0.7507553	0.9204527	0.8351399	0.8764293	0.8285714	0.9857143
$t = 5$	0.6857895	0.8763301	0.7646975	0.8306020	0.7714285	0.9571428
$t = 6$	0.6233769	0.8294762	0.6944205	0.7848270	0.7000000	0.9285714
$t = 7$	0.5929647	0.8052304	0.6614020	0.7604356	0.6714286	0.9000000
$t = 8$	0.5335257	0.7553414	0.5927202	0.7138882	0.6142857	0.8571429
$t = 9$	0.4900548	0.7168223	0.5440723	0.6769747	0.5571429	0.8285714
$t = 10$	0.4334640	0.6641195	0.4784279	0.6287096	0.5000000	0.7714286
$t = 11$	0.4057348	0.6372185	0.4490128	0.6018878	0.4714286	0.7428572
$t = 12$	0.3513920	0.5823445	0.3869818	0.5512108	0.4142857	0.7000000
$t = 13$	0.3380398	0.5684033	0.3737061	0.5366044	0.4000000	0.6857143
$t = 14$	0.2855879	0.5117327	0.3144799	0.4839550	0.3285714	0.6285715
$t = 15$	0.2472965	0.4682463	0.2741447	0.4407877	0.2857143	0.5857143
$t = 16$	0.2099736	0.4238591	0.2357992	0.3956323	0.2428572	0.5285715
$t = 17$	0.1856768	0.3937276	0.2123580	0.3631774	0.1857143	0.5000000
$t = 18$	0.1737182	0.3784877	0.2015634	0.3458481	0.1857143	0.4714287
$t = 19$	0.1273047	0.3162342	0.1533018	0.2821405	0.1285715	0.4142857
$t = 20$	0.1161011	0.3003092	0.1432048	0.2637350	0.1142857	0.3857144
$t = 21$	0.1050808	0.2842194	0.1332079	0.2451159	0.1142857	0.3714286
$t = 22$	0.0094259	0.2679519	0.1235335	0.2259886	0.1000000	0.3428572

FONTE: O autor (2011).

TABELA 15 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 22 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude Kaplan-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude b. percentílico
$t = 1$	0.0951	0.0008 (0,84%)	0.0143 (15,1%)
$t = 2$	0.1022	0.0021 (2,1%)	0.0286 (27,9%)
$t = 3$	0.1328	0.0121 (9,1%)	0.0857 (64,5%)
$t = 4$	0.1697	0.0413 (24,3%)	0.1571 (92,6%)
$t = 5$	0.1905	0.0659 (34,6%)	0.1857 (97,5%)
$t = 6$	0.2061	0.0904 (43,9%)	0.2286 (110,9%)
$t = 7$	0.2123	0.0990 (46,6%)	0.2286 (107,7%)
$t = 8$	0.2218	0.1212 (54,6%)	0.2429 (109,5%)
$t = 9$	0.2268	0.1329 (58,6%)	0.2714 (119,7%)
$t = 10$	0.2307	0.1503 (65,2%)	0.2714 (117,6%)
$t = 11$	0.2315	0.1529 (66,1%)	0.2714 (117,2%)
$t = 12$	0.2310	0.1642 (71,1%)	0.2857 (123,7%)
$t = 13$	0.2304	0.1629 (70,7%)	0.2857 (124,0%)
$t = 14$	0.2261	0.1695 (75,0%)	0.3000 (132,7%)
$t = 15$	0.2209	0.1666 (75,4%)	0.3000 (135,8%)
$t = 16$	0.2139	0.1598 (74,7%)	0.2857 (133,6%)
$t = 17$	0.2081	0.1508 (72,5%)	0.3143 (151,1%)
$t = 18$	0.2048	0.1443 (70,5%)	0.2857 (139,5%)
$t = 19$	0.1889	0.1288 (68,2%)	0.2857 (151,3%)
$t = 20$	0.1842	0.1205 (65,6%)	0.2714 (147,3%)
$t = 21$	0.1791	0.1119 (62,5%)	0.2571 (143,6%)
$t = 22$	0.2585	0.1025 (39,7%)	0.2429 (94,0%)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier

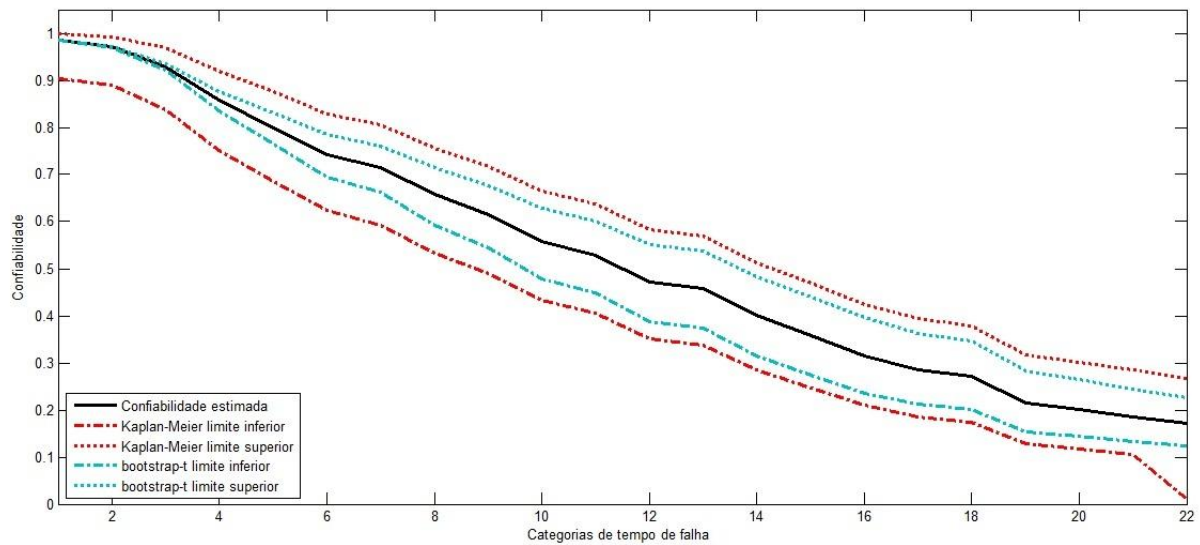


FIGURA 21 – Intervalos da amostra com 22 categorias K-M e *bootstrap-t*
 FONTE: O autor (2011).

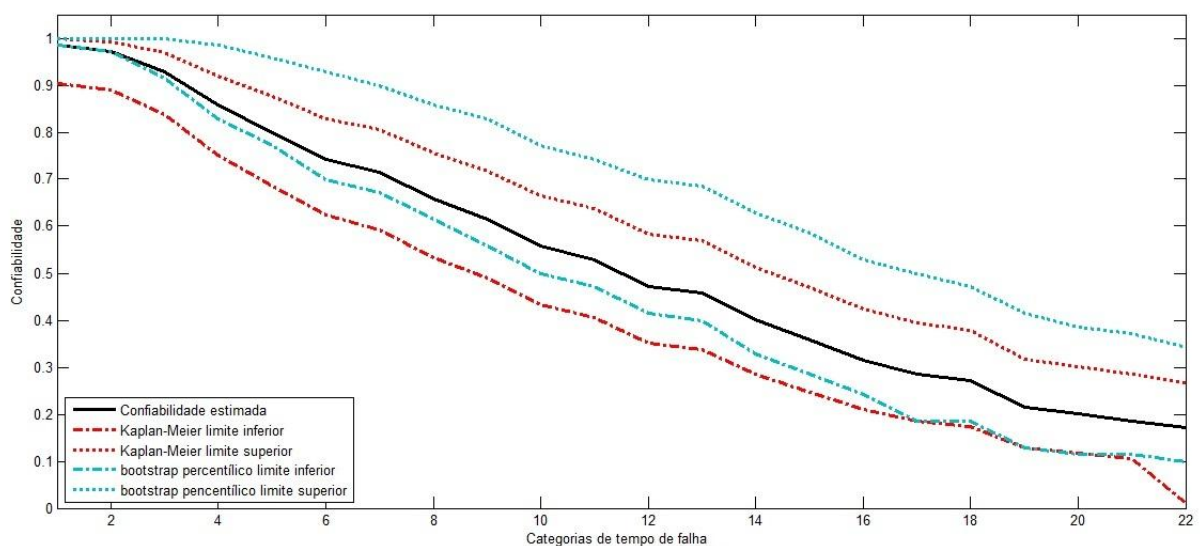


FIGURA 22 – Intervalos da amostra com 22 categorias K-M e b. percentílico
 FONTE: O autor (2011).

A Figura 20 apresenta o histograma das frequências dos números de falha para cada categoria de tempo de falha, a Tabela 10 apresenta a confiabilidade estimada para a amostra original, a média *bootstrap* para cada categoria de tempo e o erro padrão *bootstrap*, também para cada categoria de tempo.

Por se tratar de uma amostra maior que as outras, os resultados das estimativas tendem a serem melhores, ou seja, mais perto dos valores reais da função de confiabilidade. Seus intervalos de confiança ficaram todos bem justos, mas novamente o intervalo *bootstrap-t* obteve valores mais ajustados em torno das estimativas da confiabilidade que o intervalo do estimado de Kaplan-Meier. Dessa

vez os intervalos do estimador e o *bootstrap-t* se mantiveram praticamente simétricos em relação aos valores da confiabilidade estimada, lógico que novamente com o intervalo *bootstrap-t* apresentando amplitude menor. Novamente para o intervalo percentílico, o limite inferior ficou bem próximo ao valor da confiabilidade estimada e isso aconteceu com a maioria das amostras, tanto para amostras censuradas quanto para não censuradas. Talvez por utilizar um percentil elevado para o limite superior, isso force o valor geralmente para cima.

4.1.4 Amostra gerada com 13 categorias de tempo de falha com 46 itens, censurada

A quarta aplicação foi feita a uma amostra com 13 categorias de tempo de falha, contendo um total de 46 itens com censura, onde 26 produtos falharam e os outros 20 foram censurados. Fica evidente observando o histograma de frequências de falhas, que a média de falhas por categoria de tempo de falha ficou próximo à duas falhas por categoria, ficando evidente, também, que a amostra não teve uma oscilação significativa em relação ao número de falhas para cada categoria de tempo de falha.

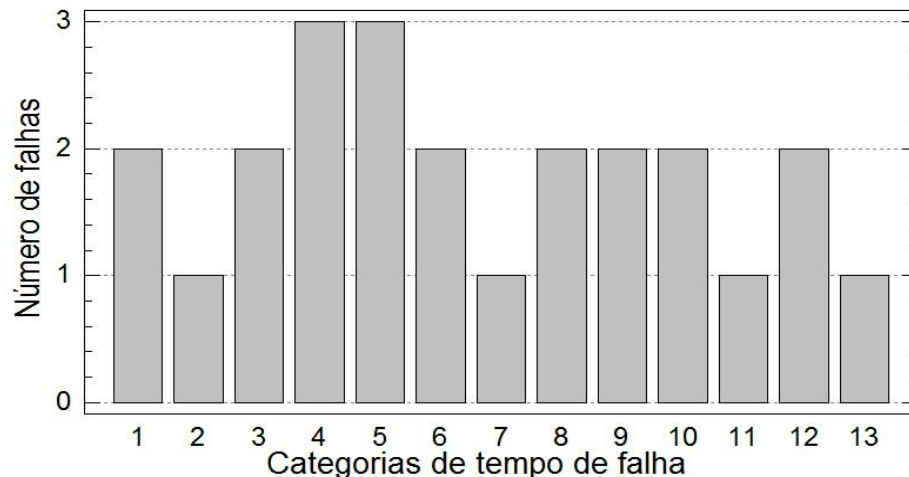


FIGURA 23 – Histograma da amostra com 13 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 16 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 13 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t) \ i=1,\dots,13$	Média \bar{R}_i^* das categorias	E. p. <i>bootstrap</i> $\hat{e}p^*$
$t=1$	2	0.9565217	0.9566387	0.0416920
$t=2$	1	0.9347826	0.9348247	0.0451813
$t=3$	2	0.8913043	0.8912892	0.0577920
$t=4$	3	0.8260869	0.8272600	0.0780496
$t=5$	3	0.7608696	0.7613980	0.0914376
$t=6$	2	0.7173913	0.7181004	0.0918350
$t=7$	1	0.6956522	0.6963377	0.0890221
$t=8$	2	0.6521739	0.6528198	0.0874045
$t=9$	2	0.6086957	0.6092139	0.0843825
$t=10$	2	0.5652174	0.5662268	0.0792279
$t=11$	1	0.5434783	0.5443282	0.0722450
$t=12$	2	0.5000001	0.5008187	0.0629458
$t=13$	1	0.4782609	0.4788754	0.0518871

FONTE: O autor (2011).

TABELA 17 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILICO PARA 13 CATEGORIAS

Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC b. percentílico	
$t=1$	0.8371413	0.9889458	0.9529082	0.9598639	0.9565217	1.0000000
$t=2$	0.8112690	0.9784886	0.9289634	0.9401407	0.9130435	1.0000000
$t=3$	0.7583610	0.9532566	0.8790879	0.9023559	0.8695652	1.0000000
$t=4$	0.6821922	0.9089689	0.8004058	0.8487811	0.8043478	0.9565217
$t=5$	0.6099356	0.8597876	0.7211301	0.7957642	0.7173914	0.9347826
$t=6$	0.5635856	0.8250001	0.6719072	0.7577344	0.6739131	0.8913043
$t=7$	0.5408964	0.8070968	0.6491532	0.7372701	0.6521740	0.8695652
$t=8$	0.4964178	0.7703686	0.6021088	0.6975743	0.6086957	0.8260869
$t=9$	0.4530708	0.7325023	0.5567035	0.6565466	0.5652174	0.7826087
$t=10$	0.4107989	0.6935738	0.5135580	0.6135564	0.5217392	0.7173914
$t=11$	0.3900554	0.6737267	0.4953352	0.5890425	0.5217391	0.6956521
$t=12$	0.3493441	0.6332846	0.4565019	0.5418882	0.4782609	0.6304348
$t=13$	0.3293763	0.6126924	0.4419499	0.5136186	0.4565218	0.5869565

FONTE: O autor (2011).

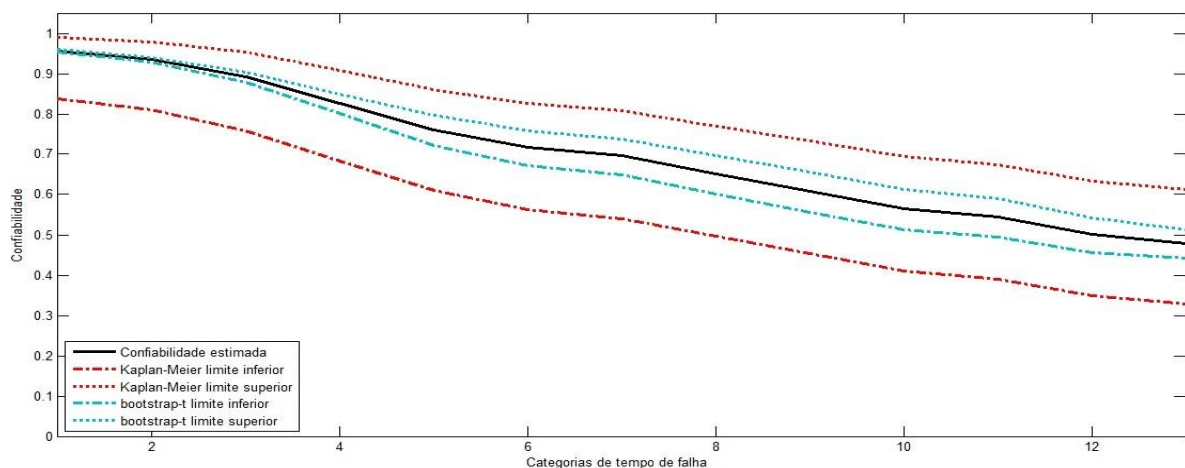


FIGURA 24 – Intervalos da amostra com 13 categorias K-M e *bootstrap-t*

TABELA 18 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 13 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude Kaplan-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude b. percentílico
$t = 1$	0.1518	0.0070 (4,6%)	0.0435 (28,7%)
$t = 2$	0.1672	0.0112 (6,7%)	0.0870 (52,1%)
$t = 3$	0.1949	0.0233 (12,0%)	0.1304 (67,0%)
$t = 4$	0.2268	0.0484 (21,3%)	0.1522 (67,1%)
$t = 5$	0.2499	0.0746 (29,9%)	0.2174 (87,0%)
$t = 6$	0.2614	0.0858 (32,8%)	0.2174 (83,2%)
$t = 7$	0.2662	0.0881 (33,1%)	0.2174 (81,7%)
$t = 8$	0.2740	0.0955 (34,9%)	0.2174 (79,3%)
$t = 9$	0.2794	0.0998 (35,7%)	0.2174 (77,8%)
$t = 10$	0.2828	0.1000 (35,4%)	0.1957 (69,2%)
$t = 11$	0.2837	0.0937 (33,0%)	0.1739 (61,3%)
$t = 12$	0.2839	0.0854 (30,1%)	0.1522 (53,6%)
$t = 13$	0.2833	0.0717 (25,3%)	0.1304 (46,0%)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier

FONTE: O autor (2011).

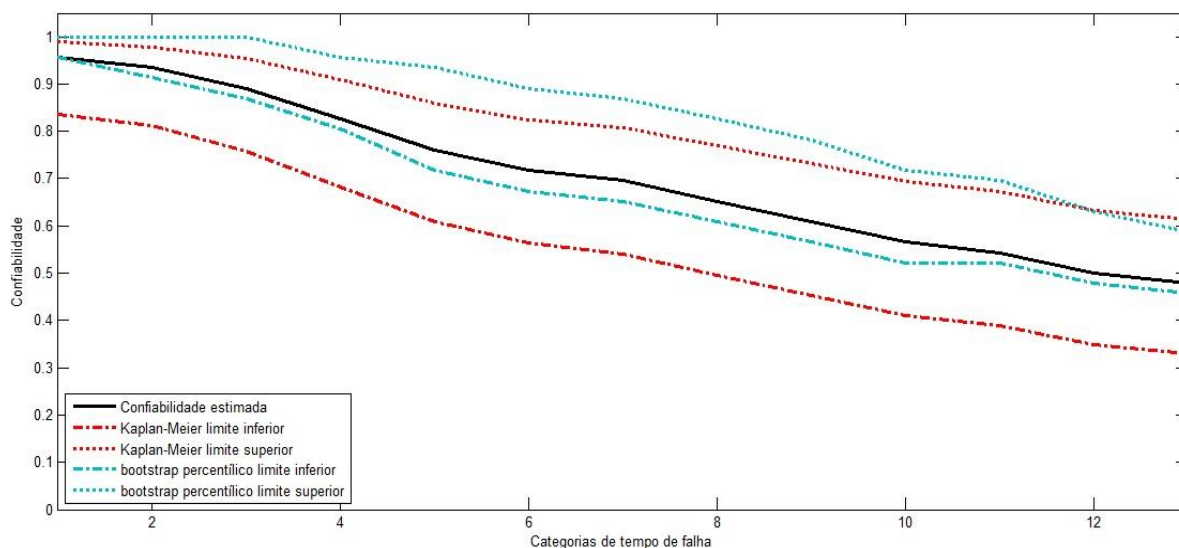


FIGURA 25 – Intervalos da amostra com 13 categorias K-M e b. percentílico

FONTE: O autor (2011).

Novamente é fácil de verificar que os intervalos do método *bootstrap* tiveram uma amplitude menor que o intervalo do estimador. Como nas outras aplicações, o intervalo *bootstrap-t* foi o que teve a menor amplitude, seguido do intervalo percentílico. Tanto o intervalo do estimador de Kaplan-Meier quanto o *bootstrap-t* se mantiveram praticamente simétricos em relação à confiabilidade estimada.

Uma característica presente em praticamente todas as aplicações é que o intervalo percentílico, para as primeiras categorias de tempos, apresenta valores com os limites superiores geralmente igual a 1, ou 100%. Talvez pelo valor das estimativas ficarem perto ou igual a um. Assim, com os valores altos o limite superior sofre influência.

4.1.5 Amostra gerada com 10 categorias de tempo de falha com 34 itens, não censurada

A quinta aplicação foi feita em uma amostra não censurada com 10 observações e 34 itens, onde todos falharam. O histograma a seguir mostra que esta amostra possui uma distribuição um pouco diferente das demais, ela tem valores altos para as falhas, com uma média de 3,4 falhas por tempo de falha simulado.

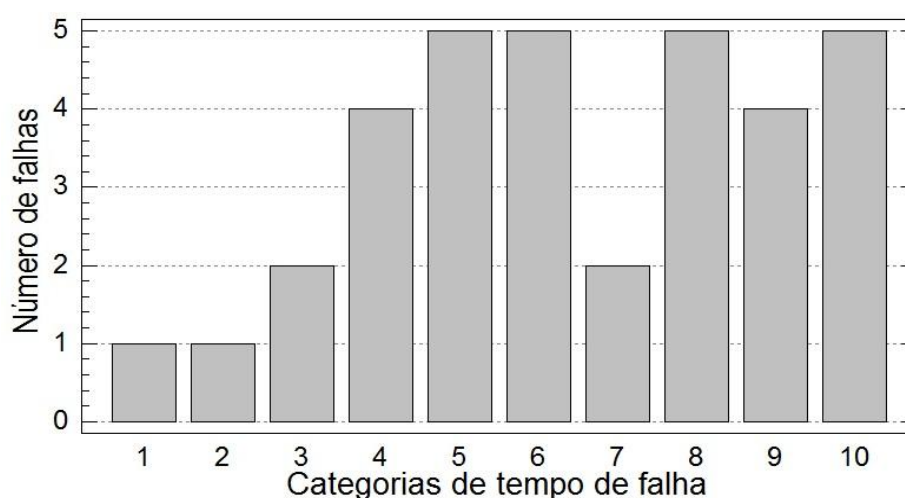


FIGURA 26 – Histograma da amostra com 10 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 19 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, 10$	Média \bar{R}_i^* das categorias	Erro padrão $bootstrap \hat{ep}^*$
$t = 1$	1	0.9705882	0.9708138	0.0276313
$t = 2$	1	0.9411765	0.9413462	0.0372984
$t = 3$	2	0.8823529	0.8828970	0.0613571
$t = 4$	4	0.7647059	0.7656875	0.1163638
$t = 5$	5	0.6176471	0.6185663	0.1608984
$t = 6$	5	0.4705882	0.4719999	0.1842956
$t = 7$	2	0.4117647	0.4135532	0.1752947
$t = 8$	5	0.2647059	0.2716411	0.1722857
$t = 9$	4	0.1470588	0.1643622	0.1441376
$t = 10$	5	0.0000000	0.0600097	0.0906538

FONTE: O autor (2011).

TABELA 20 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILICO PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC b. percentílico	
$t = 1$	0.8090042	0.9958041	0.9689771	0.9721169	0.9411765	1.0000000
$t = 2$	0.7846940	0.9849558	0.9368589	0.9452075	0.9411765	1.0000000
$t = 3$	0.7162649	0.9541398	0.8683523	0.8949559	0.8529412	1.0000000
$t = 4$	0.5841796	0.8746970	0.7139181	0.8077071	0.7058824	0.9705882
$t = 5$	0.4342162	0.7570637	0.5166025	0.7036226	0.5588236	0.9117647
$t = 6$	0.2983037	0.6251885	0.3390114	0.5914087	0.4117647	0.8235294
$t = 7$	0.2477204	0.5688185	0.2861948	0.5329645	0.3529412	0.7352941
$t = 8$	0.1318715	0.4181158	0.1552003	0.3874235	0.1764706	0.6176471
$t = 9$	0.0537068	0.2846178	0.0786529	0.2357113	0.0588235	0.4705883
$t = 10$	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3235294

FONTE: O autor (2011).

TABELA 21 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude K-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude b. percentílico
$t = 1$	0.1868	0.0031 (1,7%)	0.0588 (31,5%)
$t = 2$	0.2003	0.0083 (4,1%)	0.0588 (29,4%)
$t = 3$	0.2379	0.0266 (11,2%)	0.1471 (61,8%)
$t = 4$	0.2905	0.0938 (32,3%)	0.2647 (91,1%)
$t = 5$	0.3228	0.1870 (57,9%)	0.3529 (109,3%)
$t = 6$	0.3269	0.2524 (72,2%)	0.4118 (126,0%)
$t = 7$	0.3211	0.2468 (76,9%)	0.3824 (119,1%)
$t = 8$	0.2862	0.2322 (81,1%)	0.4412 (154,2%)
$t = 9$	0.2309	0.1571 (68,0%)	0.4118 (178,3%)
$t = 10$	0.0000	0.0000 (-)	0.3235 (-)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier
 FONTE: O autor(2011).

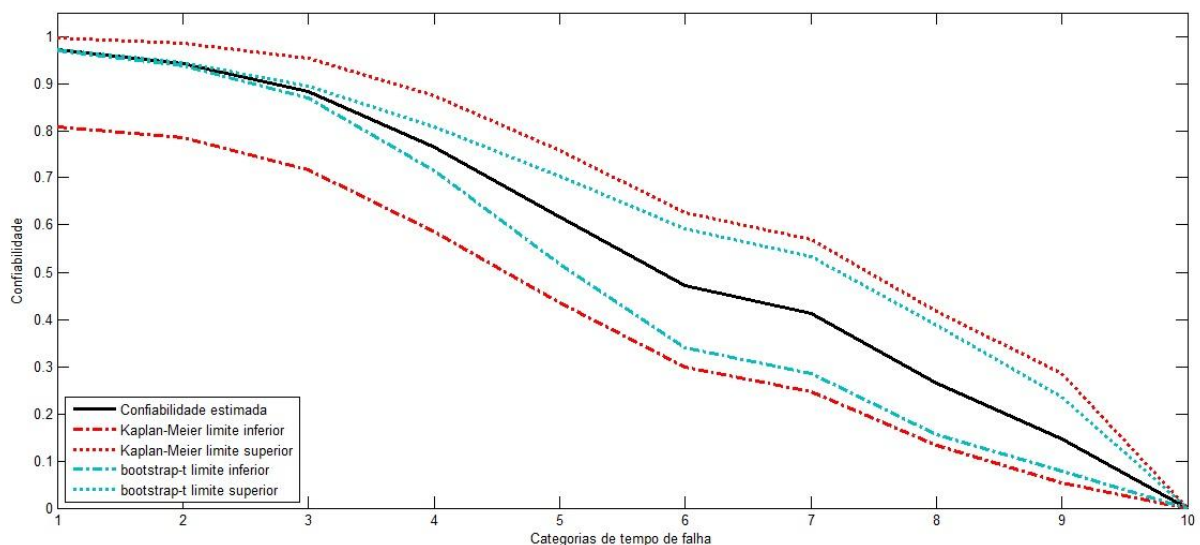


FIGURA 27 – Intervalos da amostra com 10 categorias K-M e *bootstrap-t*
 FONTE: O autor (2011).

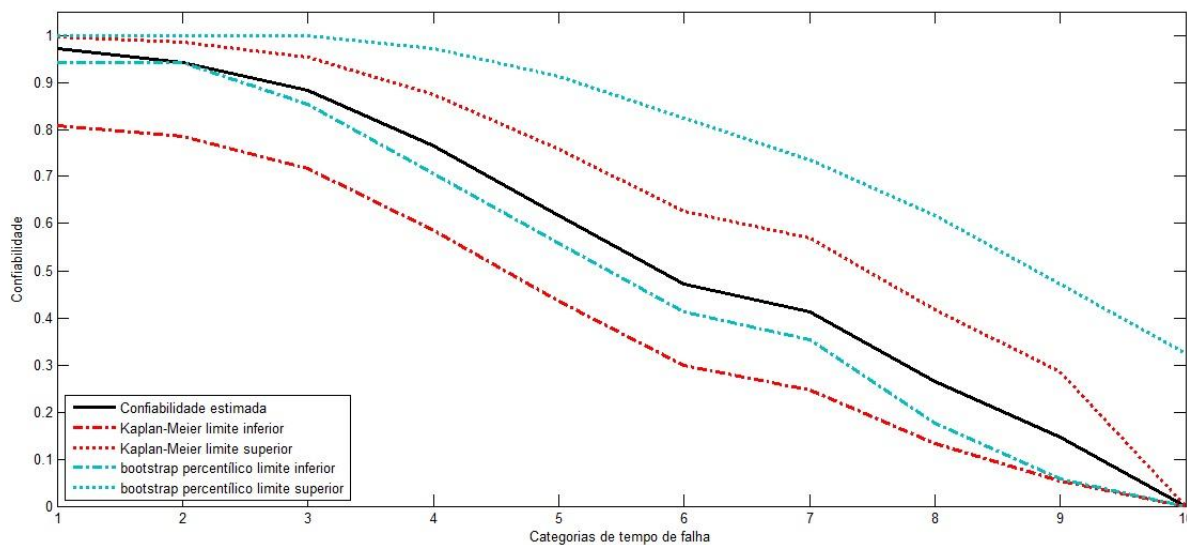


FIGURA 28 – Intervalos da amostra com 10 categorias K-M e b. percentílico
 FONTE: O autor (2011).

Assim como para a primeira amostra não censurada o intervalo percentílico obteve a maior amplitude em comparação com os outros dois intervalos, até a quarta observação o intervalo percentílico obteve uma amplitude menor que o intervalo do estimador de Kaplan-Meier, mas a partir da quinta começou a aumentar a amplitude. Os intervalos *bootstrap-t* e do estimador ficaram praticamente simétricos em relação às estimativas da confiabilidade, convergindo para zero na última observação, assim como aconteceu na segunda amostra apresentada, que também não era censurada. Para esse tipo de amostra, não censurada, em todas testadas, os intervalos *bootstrap-t* e o do Kaplan-Meier se comportaram dessa maneira, na última observação os limites, tanto inferior quanto superior, ficaram iguais a zero, e apenas o percentílico, no limite superior, não ficou igual a zero.

4.1.6 Amostra gerada com 12 categorias de tempo de falha com 56 itens, censurada

Para a sexta aplicação foi utilizado uma amostra aleatória simulada com 12 categorias de tempos de falha e um total de 56 itens, censurada contou-se 23 falhas, censurando os 33 demais. No histograma da amostra verifica-se que as falhas ficaram bem distribuídas pelas categorias, com uma média de 1,92 falhas por categoria de tempo de falha simulado.

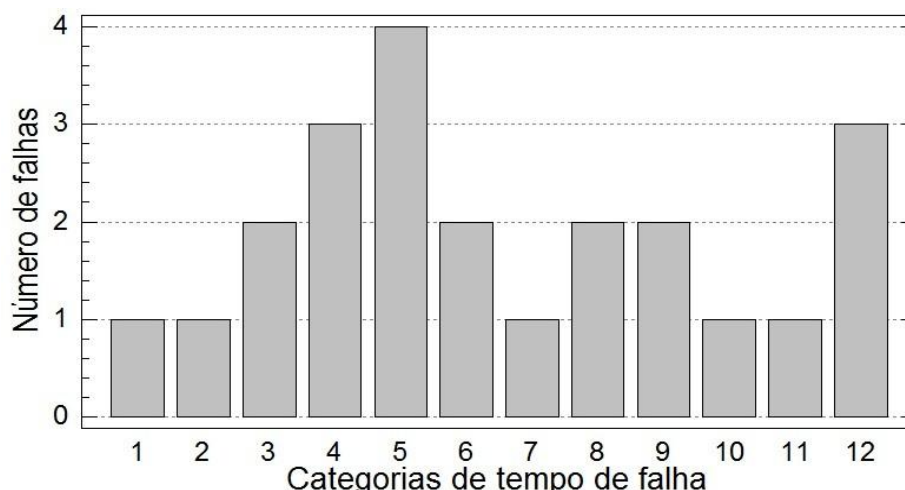


FIGURA 29 – Histograma da amostra com 12 categorias de tempos de falha
 FONTE: O autor (2011).

TABELA 22 – CATEGORIAS DE TEMPOS DE FALHA, NÚMERO DE FALHAS E CONFIABILIDADE ESTIMADA PELO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER PARA 10 CATEGORIAS

Categoria	Nº de falhas	$\hat{R}_i(t), i=1, \dots, 10$	Média \bar{R}_i^* das categorias	E. p. <i>bootstrap</i> \hat{e}_p^*
$t=1$	1	0.9821429	0.9822172	0.0170836
$t=2$	1	0.9642857	0.9642502	0.0229110
$t=3$	2	0.9285715	0.9283521	0.0385678
$t=4$	3	0.8750001	0.8756507	0.0586410
$t=5$	4	0.8035715	0.8039783	0.0811436
$t=6$	2	0.7678572	0.7682160	0.0811183
$t=7$	1	0.7500001	0.7504490	0.0787430
$t=8$	2	0.7142858	0.7151350	0.0768601
$t=9$	2	0.6785715	0.6791063	0.0732294
$t=10$	1	0.6607144	0.6612328	0.0687466
$t=11$	1	0.6428573	0.6432199	0.0630217
$t=12$	3	0.5892859	0.5894934	0.0594925

FONTE: O autor (2011).

TABELA 23 – INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTILÍCO PARA 12 CATEGORIAS

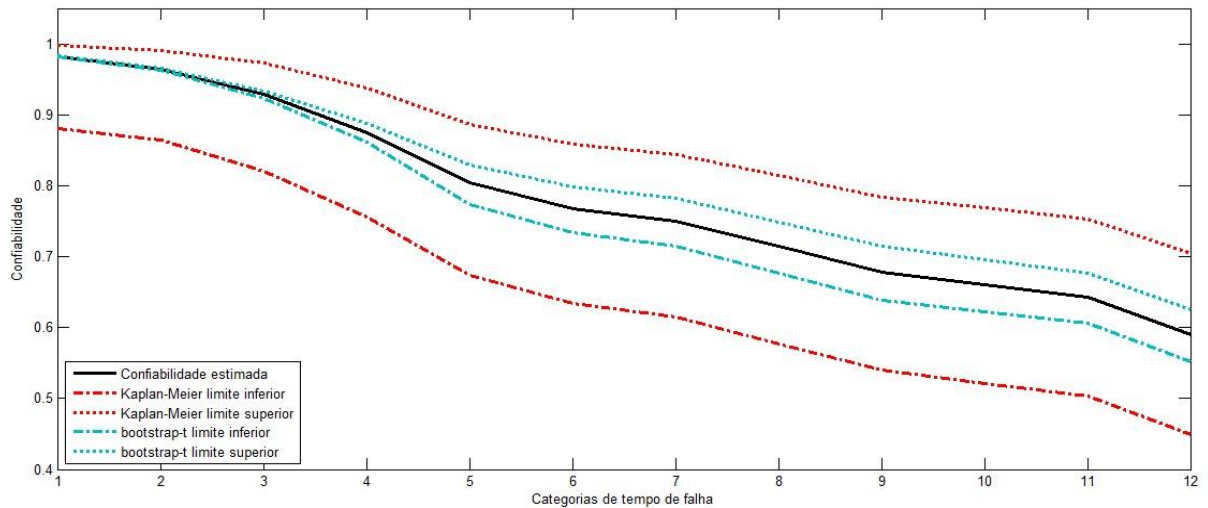
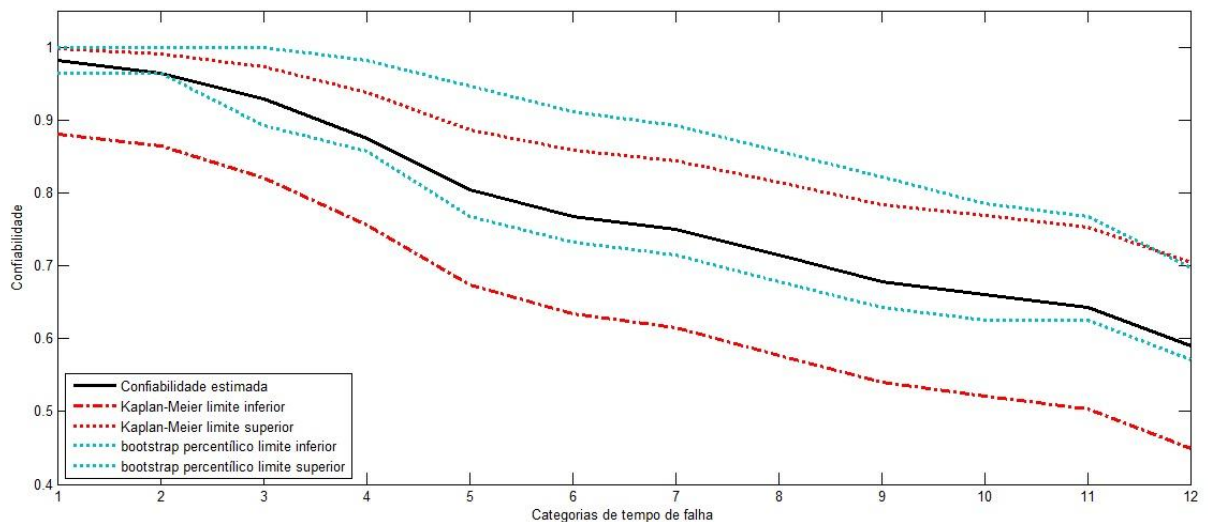
Categoria	IC Kaplan-Meier		IC <i>bootstrap-t</i>		IC b. percentílico	
$t=1$	0.8799214	0.9974653	0.9815404	0.9827258	0.9642857	1.0000000
$t=2$	0.8646516	0.9909467	0.9626764	0.9658269	0.9642857	1.0000000
$t=3$	0.8207787	0.9725758	0.9231836	0.9335951	0.8928571	1.0000000
$t=4$	0.7555916	0.9383587	0.8608838	0.8877786	0.8571429	0.9821429
$t=5$	0.6734388	0.8860640	0.7738414	0.8298309	0.7678572	0.9464286
$t=6$	0.6340398	0.8580120	0.7336873	0.7982591	0.7321429	0.9107143
$t=7$	0.6146968	0.8436050	0.7148438	0.7815011	0.7142858	0.8928571
$t=8$	0.5766604	0.8141139	0.6762601	0.7486998	0.6785715	0.8571429
$t=9$	0.5394250	0.7838017	0.6391517	0.7146808	0.6428572	0.8214285
$t=10$	0.5210883	0.7683617	0.6223748	0.6961499	0.6250001	0.7857143
$t=11$	0.5029310	0.7527424	0.6065775	0.6767236	0.6249999	0.7678571
$t=12$	0.4494910	0.7048625	0.5519769	0.6246040	0.5714285	0.6964286

FONTE: O autor (2011).

TABELA 24 – AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA 12 CATEGORIAS

Categoria	Amplitude K-Meier	Amplitude <i>bootstrap-t</i>	Amplitude b. percentílico
$t = 1$	0.1175	0.0012 (1,0%)	0.0357 (30,3%)
$t = 2$	0.1263	0.0032 (2,5%)	0.0357 (28,3%)
$t = 3$	0.1518	0.0104 (6,9%)	0.1071 (70,6%)
$t = 4$	0.1828	0.0269 (14,7%)	0.1250 (68,4%)
$t = 5$	0.2126	0.0560 (26,3%)	0.1786 (84,0%)
$t = 6$	0.2240	0.0646 (28,8%)	0.1786 (79,3%)
$t = 7$	0.2289	0.0667 (29,1%)	0.1786 (78,0%)
$t = 8$	0.2375	0.0724 (30,5%)	0.1786 (75,2%)
$t = 9$	0.2444	0.0755 (30,9%)	0.1786 (73,1%)
$t = 10$	0.2473	0.0738 (29,8%)	0.1607 (65,0%)
$t = 11$	0.2498	0.0701 (28,1%)	0.1429 (57,2%)
$t = 12$	0.2554	0.0726 (28,4%)	0.1250 (49,0%)

Obs.: As porcentagens são referentes ao intervalo do estimador de Kaplan-Meier
 FONTE: O autor (2011).

FIGURA 30 – Intervalos da amostra com 12 categorias K-M e *bootstrap-t*
 FONTE: O autor (2011).FIGURA 31 – Intervalos da amostra com 12 categorias K-M e b. percentílico
 FONTE: O autor (2011).

Para esta aplicação, Figura 30 e Figura 31, tanto o gráfico das estimativas da confiabilidade quanto os intervalos de confiança ficaram bem suaves. Novamente, como nas outras amostras apresentadas, o intervalo *bootstrap-t* teve uma amplitude menor que a amplitude dos outros dois intervalos. Outra característica presente em todas as aplicações das amostras foi que o intervalo *bootstrap-t* sempre se inicia bem próximo das estimativas e vai aumentando a amplitude. Isso se deve ao erro padrão *bootstrap* que começa muito pequeno e vai crescendo nos demais pontos de observação.

Assim temos a análise de 6 amostras aleatórias, simuladas pelo programa secundário implementado, sendo 2 amostras não censuradas e 4 censuradas. Ficou evidente em todas as amostras que o intervalo *bootstrap-t* possui uma amplitude menor que dos outros dois intervalos.

Para o intervalo *bootstrap* percentílico, o tipo de amostra influencia os resultados. Para amostras censuradas obteve amplitudes menores que do estimador de Kaplan-Meier, porém para amostras não censuradas os seus intervalos ficaram com as maiores amplitudes da análise. Sendo assim caso o interesse seja um intervalo mais justo, para as amostras não censuradas, deve-se utilizar o intervalo *bootstrap-t* ou o intervalo do estimador. E para as amostras censuradas, pode-se utilizar o intervalo *bootstrap-t* ou o percentílico.

5. CONCLUSÃO

O objetivo principal do trabalho, a construção de intervalos de confiança para os valores da função de confiabilidade estimada pelo método de Kaplan-Meier, pela técnica computacionalmente intensiva *bootstrap* foi alcançado. Assim foram construídos intervalos de confiança utilizando o método *bootstrap*, além do próprio intervalo de confiança do estimador de Kaplan-Meier. Os intervalos aplicados foram os intervalos *bootstrap-t* e o *bootstrap* percentílico, em comparação com o intervalo clássico.

O método se apresentou eficiente para amostras de diversos tamanhos, uma limitação ainda existente é que o método apenas funciona bem para amostras com censura do tipo I e II, devendo ser feitas algumas adaptações caso se trabalhe com outros tipos de censura.

Assim, sendo que dos resultados pode-se observar que:

- o intervalo *bootstrap-t* apresentou intervalos de confiança mais justos que os demais métodos, em todas as categorias de tempo de falha, sendo mais eficiente que o intervalo *bootstrap* percentílico e que o intervalo clássico de Kaplan-Meier.
- o intervalo *bootstrap* percentílico superou o intervalo clássico de Kaplan-Meier quando existe censura e superou nas categorias de tempo iniciais quando não existe censura;
- os resultados do programa desenvolvido mostraram-se eficientes.

Foram utilizados os cálculos dos intervalos de confiança para um nível de 95% de segurança, tanto para o intervalo do estimador dos valores da confiabilidade quanto para os intervalos do método *bootstrap*. Na aplicação do método *bootstrap* foram utilizadas 10000 replicações, pode-se utilizar um número maior de reamostragens, mas durante os testes, para valores de B perto e acima das 10000 replicações, os valores dos intervalos começaram a ficar iguais, apenas aumentando o tempo computacional demandado. O problema para determinar quantas replicações B são necessárias para a obtenção de boas estimativas dos limites inferiores e superiores de intervalos de confiança do método *bootstrap* e discutido em Efron e Tibshirani (1986).

Sugestões para trabalhos futuros:

- Expandir o método criado para outras áreas de estudo, tais como medicina, economia, entre outras áreas da ciência moderna citados;
- Utilizar amostras “estranhas”, ou seja, que tenham distribuição muito diferente da distribuição normal;
- Utilizar amostras reais para as análises e efetuar análises e aplicações dos outros métodos de intervalos de confiança *bootstrap*.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, L. F. S.; ZARDO, C. R.; FORCELLINI, F. A. **O uso do FMEA como uma métrica para a confiabilidade no projeto conceitual**. In: VCBGDP, Curitiba, Paraná, ago. 2005. 8p.
- ANDREWS, D. W. K.; BUCHINSKY, M. **On the number of bootstrap repetitions for BCa confidence intervals**. *Econometric Theory*, v. 18, n. 4, p. 962-984, Aug. 2002.
- AVIZIENIS, A.; LAPRIE, J. C.; RANDELL, B.; LANDWEHER, C. **Basic concepts and taxonomy of dependable and security computing**. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*. v. 1, n. 1, p. 11-33, jan./mar. 2004.
- BAILAR III, J. C., MOSTTELER, F. **Medical Uses of Statistics**. 2nd edition, NEJM Book, Boston. 1992.
- BARROS, E. A. Coelho. **Aplicações de simulação Monte Carlo e Bootstrap** (Monografia, 2005). Universidade Estadual de Maringá, UEM.
- BASTOS, J., ROCHA, C. **Notas metodológicas: Análise de Sobrevida**. Serviço de Higiene e Epidemiologia, Faculdade de Medicina da Universidade do Porto; DEIO e CEAUL, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.
- BERGAMO, V. F.. **Confiabilidade Básica e Prática**. 1^a edição. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, SP. 1997.
- BICKEL, P., FREEDMAN, D. **Some asymptotic theory for the bootstrap**. *Ann. Statistic*. n. 9, pp 1196-1197. 1981.
- BOX, G.E.P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistic for experimenters; An introduction to design, data analysis, and model building**. New York: John Wiley, 1978. 653p.
- CARVALHO, A. Lopes. **Análise de Disponibilidade Utilizando Abordagem Nebulosa** (Tese de Doutorado, 2008). Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG
- CARVALHO, M. Sá; ANDREOZZI, V. Lima; CODEÇO, C. Torres; BARBOSA, M. T. Serrano; SHIMAKURA, F. Emiko. **Análise de Sobrevida: Teoria e Aplicação em Saúde**. 20^a ed. Editora Fiocruz, Rio de Janeiro, RJ. 2005.
- CARRASCO, C. Giuglioli. **Uma introdução a análise de sobrevivência e confiabilidade**. IV Seminário de Iniciação Científica, Unidade Universitária de Ciências Exatas e Tecnologias, UEG.

CHAVES NETO, A., **“Bootstrap” em Séries Temporais**. (Tese de Doutorado, 1991). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC-RJ.

CHAVES NETO, A. **Confiabilidade e Métodos Estatísticos Aplicados a Sistemas de Engenharia**. Notas de aula. Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

COLOSSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. **Análise de Sobrevivência Aplicada**. 1ª edição. Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, SP. 2006.

DILLENBURG, M. R. **Estimativas de confiabilidade de produtos a partir das contagens mensais de vendas e falhas ao longo do período de garantia** (Dissertação de Mestrado, 2005). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

EFRON, B. **“Bootstrap” Methods: another look at the jackknife**. The Annals of Statistics 1.:1-20, 1979.

EFRON, B. **The Jackknife, the “Bootstrap”, and Other Resampling Plans**. Number 38 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. 1982. Philadelphia: SIAM.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the “bootstrap”**, volume 57 of Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, New York, 1993.

ELSAYED, E. A. **Reliability engineering**. Reading, MA: Addison Wesley Longman, 1996. 737p.

FERNANDES, C. Geordane. **Metodologia para melhorar a confiabilidade de subsistemas através da análise de falhas e testes acelerados** (Dissertação de Mestrado, 2010). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

FREITAS, M. A. e COLOSSIMO, E. A. **Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes acelerados**. Fundação Cristiano Ottoni, Belo Horizonte, Minas Gerais. 1997.

FRITSH, C. **Modelos de confiabilidade para testes de sobrevida**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFRGS. Porto Alegre, 1996.

GILCHRIST, W. Modelling failure modes and effects analysis. **International Journal of Quality & Reliability Management**. Bradford, v. 10, n. 5, p. 16-23, 1993.

GUIMARÃES, U. V. **Modelagem para análise da confiabilidade de produtos em garantia** (Dissertação de Mestrado, 2002). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

GUZZON, S. O. **Proposta de análise quantitativa de confiabilidade a partir de dados quantitativos provenientes da FMEA** (Dissertação de Mestrado, 2009). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

HECHT, H. **Systems reliability and failure prevention**. Norwood: Artech House, 2003. 230p.

HOYLAND, A.; RAUSAND, M. **System reliability theory: models and statistical methods**. New York: Wiley-Interscience, 1994.

LAFRAIA, J. **Manual de confiabilidade, manutenibilidade e disponibilidade**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 374 p,2001.

LEEMIS, L. M. Reability. **Probabilistic models and statistical methods**. Englewood Cliffs: Pretentice-Hall, 1995. 319 p.

MACHADO, R. L.; MELO, G. C. **Utilização do FMEA na melhoria de processos de fabricação da industria farmacêutica**. XXVII ENEGEP, Foz do Iguaçu, out. 2007. 10p.

MARTINEZ-ESPINOSA, M.; SANDANIELO, V. L. M.; LOUZADA-NETO, F.; **O método de “bootstrap” para o estudo de dados de fadiga dos materiais**. Ver. Mat. Estat., Sao Paulo, v.24, n.2, p.37-50, 2006.

PALADY, Paul **“FMEA – Análise de Modos e Efeitos de Falha”** Edt. IMAM, 3ª Edição, 2004.

PASETTO, S. Castro. **Previsão de falhas no período de garantia a partir da percepção do cliente: um estudo de caso junto a uma empresa de alta tecnologia** (Dissertação de Mestrado, 2002). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

PEREIRA, P. J.; PEREIRA, M. A. T. **Comparação dos estimadores de Kaplan-Meier e de Nenson-Aalen para um estudo entomológico, com introdução de censura tipo I**. 48ª Reunião da RBRAS e 10º SEAGRO, Universidade Federal de Lavras, Departamento e Ciências Exatas, 7 a 11 de Junho de 2003, Lavras, Minas Gerais.

PIAZZA, G. **Introdução a Engenharia da Confiabilidade**. Edt. EDUCS, 1ªEdição, 2000.

QUENOUILLE, M. H. **Approximate tests of correlation in time-series**. Journal os Statistical Computation and Simulation, 8:75-80, 1949.

RIBEIRO, J. L. D. **Confiabilidade de componentes e sistemas**. UFRGS/PPGEP, Porto Alegre, 2003. Paginação irregular.

RICHTER, P. R.; LOPES, L. F. D. **A confiabilidade relacionada ao desenvolvimento de produtos e à gestão de qualidade total**, XXIV ENEGEP, Florianópolis, SC, 2004.

RIZZO, A. L. T.; CYMROT, R. **Estudo e aplicações da técnica bootstrap**. II Jornada de Iniciação Científica, Universidade Presbiteriana Mackenzie.

ROZENFELD, H.; AMARAL, D. C.; ALLIPRANDINI, D. H.; FORCELLINI, F. A.; TOLEDO, J. C.; SCALICE, R. K.; SILVA, S. L. **Gestão de desenvolvimento de produtos: uma referência para a melhoria do processo**. São Paulo: Saraiva, 2006. 542 p.

SAGRILO, L.V. S. - **Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando os Métodos Analíticos FORM e SORM** (Tese de Doutorado, 1994). Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ.

SANTOS, T. G. **Modelo de confiabilidade associando dados de garantia e pós-garantia a três comportamentos de falhas** (Tese de Doutorado, 2008). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

SELLITTO, M. **Formulação estratégica da manutenção industrial com base na confiabilidade dos equipamentos**. Produção, v.15, n.1, p.44-59, 2005.

SELLITTO, M.; BORCHADT, M.; ARAÚJO, D. **Manutenção centrada em confiabilidade: uma abordagem quantitativa**. Anais do XXII ENEGEP. Curitiba: ABEPRO. 2002.

SILVA, A. H. C. **Aplicação da metodologia FMEA (failure mode and effect analysis) para realização de análise de falhas em um sistema de pontes de embarque de um aeroporto**. XXVII ENEGEP, Foz do Iguaçu, outubro, 2007. 10p.

SILVA, W. V. Junior. **Probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança assintóticos, p-Bootstrap e t-Bootstrap, para alguns parâmetros da distribuição Weibull** (Monografia, 2005). Universidade Estadual de Maringá, UEM.

SIQUEIRA, A. H. C. **Manutenção centrada na confiabilidade: manual de implementação**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2005, 374 p.

STAMATIS, D. H. Failure mode and effects analysis: an integrate approach for product design and process control. **International Journal of Quality & Reliability Management**. Bradford, v. 13, n. 5, p. 8-26, 1996.

STIGLER, S. M. **Citation Patterns in the Journals of Statistics and Probability**. Statistical Science, 94-108, 1994.

TENG, S. H.; HO, S. Y. Failure mode and effects analysis: an integrate approach for product design and process control. **International Journal of Quality & Reliability Management**. Bradford, v. 13, n. 5, p. 8-26, 1996.

WUTTKE, R. André. **Cálculo da disponibilidade e da posição na curva da banheira de uma válvula de processo petroquímico**. ABEPRO, Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROGRAMA GERADOR DE AMOSTRAS ALEATÓRIAS DE FALHAS IMPLEMENTADO EM LINGUAGEM FORTRAN

```

program gerador
implicit none

integer :: i,j,m,n
real :: x,o
character :: a
real, dimension(:), allocatable :: vec_erros, vec_erros2

n=0
externo: do
write(*,*) "VETOR COM OU SEM CENSURA, 'S' PARA SIM E 'N' PARA NAO: "
read(*,*) a

if(a=="n" .or. a=="N") then
  write(*,*) "NUMERO DE POSICOES DO VETOR DE AMOSTRAS: "
  read(*,*) m

  allocate(vec_erros(m))

  do i=1,m
    call random_number(x)
    x=ceiling(x*m)
    x=int(x)
    vec_erros(i)=x
    vec_erros(i)=ceiling(vec_erros(i)/2)
    n=n+vec_erros(i)
  end do
  write(*,*) "VETOR DE FALHAS EM CASA TEMPO: "
  do i=1,m
    write(*,*) vec_erros(i)
  end do
  write(*,*) "NUMERO TOTAL DE ITENS: "
  write(*,*) n

  exit externo

else if(a=="s" .or. a=="S") then
  write(*,*) "NUMERO DE POSICOES DO VETOR DE AMOSTRAS: "
  read(*,*) m
  write(*,*) "NUMERO TOTAL DE ITENS DA AMOSTRA: "
  read(*,*) j
  allocate(vec_erros(m),vec_erros2(m))

  do i=1,m
    call random_number(x)
    x=ceiling(x*m)
    x=int(x)
    if(x<j) then
      vec_erros(i)=x
      n=n+vec_erros(i)
      vec_erros(i)=ceiling(vec_erros(i)/3)
      if(n>j/2) then

```

```
                vec_erros(i)=ceiling(vec_erros(i)/2)
            end if
        end if
    end do
    n=0
    do i=1,m
        n=n+vec_erros(i)
    end do
    write(*,*) "VETOR DE FALHAS EM CASA TEMPO: "
    do i=1,m
        write(*,*) vec_erros(i)
    end do
    write(*,*) "NUMERO DE ELEMENTOS TOTAL: "
    write(*,*) n

    exit externo

else
    write(*,*) "!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!"
    write(*,*) "!!! MENSAGEM INVALIDA !!!"
    write(*,*) "!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!"
end if

end do externo

pause
end program gerador
```

APÊNDICE B – PROGRAMA QUE CALCULA OS INTERVALOS DE CONFIANÇA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER, *BOOTSTRAP-T* E *BOOTSTRAP* PERCENTÍLICO IMPLEMENTADO EM LINGUAGEM FORTRAN

```

program boot_KB2
implicit none

integer :: i, j, n, m, k, num, num1, num2, num3, num4, num5, kk
real:: a, b, c, x, d, ep, f1, g, aa, bb, cc1, cc2, u3, ale, sum, rtb1, alpha1, alpha2
real, dimension(:), allocatable ::
vec_tempo, vec_falha, nsuj, somaposi, confb, vec_suj
real, dimension(:), allocatable ::
erroot, mediart, confb1, erro_boots, cont, conf_kb
real, dimension(:), allocatable ::
inter_boot1, inter_boot2, percent1, percent2, var_u
real, dimension(:), allocatable ::
inter_boot11, inter_boot22, v, inter_kmi, inter_kmf
real, dimension(:), allocatable :: dvar, lg, vu, a1, inter_bi, inter_bf
real, dimension(:, :), allocatable ::
boots, acum, rtb, nsujb, acum1, somaposi1, soma_rtb
real, dimension(:, :), allocatable :: rtb_transp

write(*,*) " NUMERO INICIAL DE COMPONENTES EM TESTE: "
read(*,*) num
num1=num
num2=num
num3=num
num4=num
num5=num
write(*,*) " ENTRE COM O TAMANHO DA AMOSTRA ORIGINAL: "
read(*,*) n
write(*,*)
allocate(vec_tempo(n), vec_falha(n), nsuj(n), somaposi(n), confb(n), vec_suj(n))
allocate(erroot(n), mediart(n), confb1(n), erro_boots(n), cont(n), conf_kb(n))
allocate(inter_boot1(n), inter_boot2(n), percent1(n), percent2(n), var_u(n))
allocate(inter_boot11(n), inter_boot22(n), lg(n), vu(n), v(n), a1(n), dvar(n))
allocate(inter_kmi(n), inter_kmf(n), inter_bi(n), inter_bf(n))
write(*,*) " ENTRE COM O NUMERO DE REAMOSTRAGENS: "
read(*,*) m
write(*,*)
allocate(boots(m,n), acum(m,n), rtb(m,n), nsujb(m,n), acum1(m,n), somaposi1(m,n)
, soma_rtb(m,n))
allocate(rtb_transp(n,m))
write(*,*) " ENTRE COM O VETOR DAS CATEGORIAS DE TEMPO DE FALHA: "
do i=1,n
    read(*,*) vec_tempo(i)
end do
write(*,*)
write(*,*) " ENTRE COM O VETOR DE FALHAS PARA CADA CATEGORIA: "
do i=1,n
    read(*,*) vec_falha(i)
end do
write(*,*)

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!! ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

do i=1,n
  nsuj(i)=num
  num=num-vec_falha(i)
end do
write(*,*) " CATEGORIAS  ||  FALHAS"
do i=1,n
  write(*,*) vec_tempo(i) , vec_falha(i)
end do
write(*,*)
do i=1,n
  num4=num4-vec_falha(i)
  vec_suj(i)=num4
end do
write(*,*) " CONFIABILIDADE PARA CADA CATEGORIA DA AMOSTRA ORIGINAL: "
conf_kb(1)=(num5-vec_falha(1))/num5          ! calculo da
confiabilidade com estimador
do i=2,n
  conf_kb(i)=conf_kb(i-1)*((vec_suj(i-1)-vec_falha(i))/vec_suj(i-1))
end do
do i=1,n
  write(*,*) vec_tempo(i) , conf_kb(i)
end do
v(1)=(vec_falha(1)/(num5*(num5-vec_falha(1))))
var_u(1)=(conf_kb(1)**2)*v(1)
do i=2,n
  v(i)=v(i-1)+(vec_falha(i)/(vec_suj(i-1)*(vec_suj(i-1)-vec_falha(i))))
  var_u(i)=(conf_kb(i)**2)*v(i)
end do
dvar=sqrt(var_u)

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!          METODO BOOTSTRAP          !!!
!!!  OBTENÇÃO DAS AMOSTRAS BOOTSTRAP!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

do i=1,m                                     ! AMOSTRA BOOTSTRAP
  do j=1,n
    call random_number(x)
    x=ceiling(x*n)
    x=int(x)
    boots(i,j)=vec_tempo(x)
    acum(i,j)=vec_falha(x)
  end do
end do
acum1=0.0
do k=1,500                                   ! ORDENA A MATRIZ
  do i=1,m
    do j=1,n-1
      if(boots(i,j)>boots(i,j+1)) then
        a=boots(i,j)
        boots(i,j)=boots(i,j+1)
        boots(i,j+1)=a
        b=acum(i,j)
        acum(i,j)=acum(i,j+1)
        acum(i,j+1)=b
      end if
    end do
  end do
end do
somaposi1=0.0
do i=1,m

```

```

do j=1,n
  do k=1,n
    if (boots(i,k)==vec_tempo(j)) then
      somaposil(i,j)=somaposil(i,j)+1
    end if
  end do
end do
do i=1,m
  do j=1,n
    acum1(i,j)=somaposil(i,j)*vec_falha(j)
  end do
end do
do i=1,m
  do j=1,n
    num1=num1-acum1(i,j)
    nsujb(i,j)=num1
    if(nsujb(i,j)<0.0) then
      nsujb(i,j)=0
    end if
  end do
  num1=num2
end do
cont=0.0
do i=1,m
  do j=1,n
    if(somaposil(i,j)/=0.0) then
      cont(j)=cont(j)+1
    end if
  end do
end do
do i=1,m
  rtb(i,1)=nsujb(i,1)/num3
end do
do i=1,m
  do j=2,n
    if(nsujb(i,j)/=0.0) then
      rtb(i,j)=rtb(i,j-1)*(nsujb(i,j)/nsujb(i,j-1))
    else
      rtb(i,j)=0.0
    end if
  end do
end do
soma_rtb=0.0
confb=0.0
ale=0.0
do i=1,n
  do j=1,m
    soma_rtb(j,i)=soma_rtb(j,i)+somaposil(j,i)*rtb(j,i)
    confb(i)=confb(i)+rtb(j,i)
  end do
end do
mediart=confb/m

write(*,*)
write(*,*) " MEDIA DE CADA CATEGORIA: "
do i=1,n
  write(*,*) vec_tempo(i) , mediart(i)
end do
write(*,*)

```

```

ale=0.0
confb1=0.0
do i=1,n
  do j=1,m
    confb1(i)=confb1(i)+((rtb(j,i)-mediart(i))**2)
  end do
end do
erro_boots=sqrt((1/(m-1.0))*confb1)      ! ERRO BOOTSTRAP PARA CADA PONTO
write(*,*) " ERRO BOOTSTRAP PARA CADA CATEGORIA DE TEMPOS DE FALHA: "
do i=1,n
  write(*,*)  vec_tempo(i)      ,      erro_boots(i)
end do
inter_boot1=conf_kb-(1.96*erro_boots)      ! CALCULO DO INTERVALO BOOTSTRAP
inter_boot2=conf_kb+(1.96*erro_boots)
inter_boot11=conf_kb-(1.96*dvar)          ! CALCULO DO
INTERVALO K-M
inter_boot22=conf_kb+(1.96*dvar)
vu=0.0
vu=(var_u/(conf_kb**2))/(log(conf_kb)**2)
al=sqrt(vu)
foral:do i=1,n
  if((inter_boot11(i) < 0.0).or.(inter_boot11(i)>
1.0).or.(inter_boot22(i)<0.0).or.(inter_boot22(i)>1.0)) then
    do j=1,n
      inter_kmi(j)= conf_kb(j)**(exp(+1.96*al(j)))
      inter_kmf(j)= conf_kb(j)**(exp(-1.96*al(j)))
    end do
    exit foral
  end if
end do foral

fora2:do i=1,n
  if((inter_boot1(i) < 0.0).or.(inter_boot1(i)>
1.0).or.(inter_boot2(i)<0.0).or.(inter_boot2(i)>1.0)) then
    do j=1,n
      inter_bi(j)=conf_kb(j)**(exp(+1.96*erro_boots(j)))
      inter_bf(j)=conf_kb(j)**(exp(-1.96*erro_boots(j)))
    end do
    exit fora2
  end if
end do fora2

rtb_transp=TRANSPPOSE (rtb)          ! TRANPOE A MATRIZ
DAS CONFIABILIDADES
open(1,file='saida.txt')
do k=1,1000          ! ORDENA A MATRIZ
TRANSPOSTA
  do i=1,n
    do j=1,m-1
      if(rtb_transp(i,j)>rtb_transp(i,j+1)) then
        a=rtb_transp(i,j)
        rtb_transp(i,j)=rtb_transp(i,j+1)
        rtb_transp(i,j+1)=a
      end if
    end do
  end do
end do
do i=1,m
write(1,*) rtb_transp(:,i)
end do

```

```

close(1)
alpha1=nint(0.025*m)
alpha2=nint(0.975*m)
do i=1,n
  percent1(i)=rtb_transp(i,alpha1)
  percent2(i)=rtb_transp(i,alpha2)
end do

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!INTERVALOS DE CONFIANCA!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

write(*,*)
write(*,*) " INTERVALO DE CONFIANCA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER: "
do i=1,n
  write(*,*) inter_boot11(i) , conf_kb(i) , inter_boot22(i)
end do

write(*,*)
write(*,*) " INTERVALO DE CONFIANCA DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER AJUSTADO: "
"
do i=1,n
  write(*,*) inter_kmi(i) , conf_kb(i) , inter_kmf(i)
end do

write(*,*)
write(*,*) " INTERVALO BOOTSTRAP-t DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER: "
do i=1,n
  write(*,*) inter_boot1(i) , conf_kb(i) , inter_boot2(i)
end do

write(*,*)
write(*,*) " INTERVALO BOOTSTRAP-t DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER AJUSTADO"
do i=1,n
  write(*,*) inter_bi(i) , conf_kb(i) , inter_bf(i)
end do

write(*,*)
write(*,*) " INTERVALO BOOTSTRAP PERCENTILICO DO ESTIMADOR DE KAPLAN-MEIER: "
"
do i=1,n
  write(*,*) percent1(i) , conf_kb(i) , percent2(i)
end do

pause
end program boot_KB2=

```