UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Josélia Euzébio da Rosa

PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO ESCOLAR: INTER-RELAÇÕES DOS SISTEMAS DE SIGNIFICAÇÕES NUMÉRICAS

Curitiba
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO
LINHA DE PESQUISA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Josélia Euzébio da Rosa

PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO ESCOLAR: INTER-RELAÇÕES DOS SISTEMAS DE SIGNIFICAÇÕES NUMÉRICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, como exigência parcial à obtenção do título de doutora em Educação (Linha de pesquisa Educação Matemática), sob a orientação da profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares e co-orientação do Prof. Dr. Ademir Damazio.

Curitiba

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA CENTRAL – COORDENAÇÃO DE PROCESSOS TÉCNICOS

R788p Rosa, Josélia Euzébio da
Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar [manuscrito] : inter-relações dos sistemas de significações numéricas / , Josélia Euzébio da Rosa. – 2012.
244 f. : il. [algumas color.] ; 30 cm.

Impresso.
Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Humanas, Curso de doutorado em Educação, Linha de pesquisa: Educação Matemática, 2012.
"Orientadora: Profª. Drª. Maria Tereza Carneiro Soares e co-orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio".
Bibliografia: f. 232-244.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Davydov, Vasilii Vasil'evich - Crítica e interpretação. 3. Número - Conceito. I. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências Humanas. II. Soares, Maria Tereza Carneiro, 1955-. III. Damazio, Ademir. IV. Título.

CDD: 372.7

Bibliotecário: Arthur Leitis Junior - CRB 9/1548

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

PARECER

Defesa de Tese de **JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA** para obtenção do Título de DOUTORA EM EDUCAÇÃO. Os abaixo assinados: DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES (Presidente), DR. MANOEL ORIOSVALDO DE MOURA, DRª MARIA ELIZA MATTOSINHO BERNARDES, DR. JOSÉ ROBERTO BOETTGER GIARDINETTO e DRª LÍGIA REGINA KLEIN (Membros Titulares) argüiram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Tese: "**PROPOSIÇÕES DE DAVYDOV PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO ESCOLAR: INTER-RELAÇÕES DOS SISTEMAS DE SIGNIFICAÇÕES NUMÉRICAS**".

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de DOUTORA EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIAÇÃO
DRª MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES	MTCSoares	Aprovada
DR. MANOEL ORIOSVALDO DE MOURA	[signature]	aprovada
DRª MARIA ELIZA MATTOSINHO BERNARDES	[signature]	aprovada
DR. JOSÉ ROBERTO BOETTGER GIARDINETTO	[signature]	Aprovada
DRª LÍGIA REGINA KLEIN	[signature]	aprovada

Curitiba, 24 de fevereiro de 2012.

Paulo Vinícius B. Silva

Prof. Dr. Paulo Vinícius Baptista da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

Prof. Dr. Paulo Vinícius Baptista da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação
Matr. 1[illegible]

Para Alessandro, Gabriel
e prof. Ademir Damazio

AGRADECIMENTOS

Para quem:

- Saiu da roça falando partilera (em vez de prateleira), frizi (em vez de freezer), barde (em vez de balde)...

- Esteve imersa em uma cultura que não se permitia filha mulher estudar sozinha, tinha que esperar o irmão mais novo chegar à idade escolar para acompanhá-la;

- Teve uma educação escolar que “respeita” a cultura do estudante, que o “ajuda” com alguns pontinhos na nota para que seja aprovado...

- E, finalmente, chegar ao doutorado, não foi tarefa fácil...

Foi necessária a interação e colaboração de muitas pessoas. Desse modo, muito obrigada a todos, em especial:

- À orientadora, professora Drª Maria Tereza Carneiro Soares;

- Ao co-orientador, professor Dr. Ademir Damazio;

- Aos professores membros da banca, Drª Flavia Asbahr, Dr. José Roberto Boettger Giardinetto, Drª Lígia Regina Klein, Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura e Drª Maria Eliza Mattosinho Bernardes;

- Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação;

- Aos integrantes do GPEMAHC - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural - Alex, Ana, Anderson, Andréia, Andri, Cris, Day, Dani Darolt, Dani Pacheco, Elaine, Eliza, Eloir, Ester, Fernanda, Gi, Graça, Iuri, Jaque, Josi Barbosa, Josi Goularte, Juliana, Juliane, Julian, Ledina, Lucas Lemos, Lucas Sid, Marga, Maria Júlia, Marlene Beckhauser, Marlene Pires, Mila, Silvana, Simone, Sol, Taís, Tati, Vanessa, Vivi e William.

- Aos integrantes do GEPAPe – Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica - Algacir, Ana Paula, Amanda, Ana Rebeca, Anemari, Bel, Carol, Daniela, Débora, Elaine, Everton, Flávia Dias, Flávio, João Paulo, Malu, Marisa, Marta, Neuton, Ronaldo, Silvia, Vanessa e Wellington;

- Ao esposo, Alessandro;

- Ao filho, Gabriel;

- À mãe, Maria;

- Ao pai, Hélio;

- Aos sogros, Lucas e Léia;

- Aos avós, Leonel e Nilda;

- A todos os familiares e amigos, em especial: tia Doia, tio Vana, tia Vilmar, Cintia, Loreni, Alex, Cris, Mila, Gisi e Alisson;

- A todos os brasileiros e brasileiras que com seus impostos financiaram o doutorado;

- Ao CNPq, pelo auxílio financeiro para a realização da pesquisa em forma de bolsa de estudos;

- À Universidade Federal do Paraná;

- À Universidade do Extremo Sul Catarinense por permitir o trânsito em seus setores, principalmente, por disponibilizar o Laboratório de Estudos em Educação Matemática prof. Dr. Ademir Damazio, com todos os seus acervos para a realização da pesquisa.

MUITO OBRIGADA!

RESUMO

Na presente tese, de natureza teórica, investigamos os possíveis nexos e relações entre os sistemas de significações nas proposições davydovianas, para introdução do conceito de número. Davydov expressa que suas proposições de ensino superam ou minimizam o divórcio existente entre as significações aritméticas e a algébricas. Nesse contexto, definimos a tese de que suas proposições não só minimizam tal divórcio como não permitem o distanciamento, além de incluir as significações geométricas. Os fundamentos teóricos e metodológicos da investigação derivam da Teoria Histórico-Cultural, com ênfase nas questões filosóficas, psicológicas e matemáticas. A referência da análise é o manual das proposições davydovianas para o professor. Durante a investigação, revelamos a base geneticamente inicial da interconexão entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, modelamos sua forma universal e procedemos à síntese. No decorrer da tese ficou demonstrado que, nas proposições davydovianas, as múltiplas relações entre significações algébricas, aritméticas e geométricas do conceito de número são interconectadas no seguinte movimento: geral ↔ particular ↔ universal↔ particular ↔ singular.

Palavras-chave: Proposições davydovianas; número; significações aritméticas, algébricas e geométricas.

ABSTRACT

In this theoretical thesis, it was investigated the possible links and relationships between systems of signification in Davydov's propositions to introduce the concept of number. Davydov claims that his propositions of teaching enable to overcome the gaps between arithmetic and algebra. In this context, the present thesis shows that Davydov's preposition not only minimizes such gaps but also includes the geometric meanings. The theoretical and methodological backgrounds are based on the historical-cultural theory, with emphasis philosophical, psychological and mathematical issues. The data analyses are from the Davydov's prepositions for the teacher. During the investigation, it was revealed the genetic initial basis of the interconnection between the arithmetic, algebra and geometry meanings, and its universal form is presented followed by the synthesis. Throughout this thesis it was shown that, in Davydov's propositions, the several relations between algebraic, geometric and arithmetic meanings of the concept of numbers are interconnected in the following motion: general ↔ particular ↔ universal ↔ particular ↔ singular.

Keywords: Davydov's prepositions. Number. Arithmetic, algebra and geometry meanings.

ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Pesquisar em Educação Matemática tem se constituído, na atualidade, a nossa “atividade principal” (LEONTIEV, 1978), pois a ela temos nos dedicado exclusivamente, em termos profissionais. Todos os esforços intelectuais se voltam para a produção da presente tese de doutoramento, movida por sentimentos de compromisso com o processo de apropriação dos conceitos científicos de Matemática, por parte dos estudantes, em especial aqueles que frequentam a escola pública brasileira.

Dada a trajetória de estudo, desde o curso de graduação, construímos uma opção pela Teoria Histórico-Cultural, que fundamenta todas as nossas produções científicas e acadêmicas. Nossas preocupações têm se voltado para a organização do ensino com base na referida perspectiva teórica. Nessa caminhada, questionamos algumas proposições para o ensino da Matemática que se dizem fundamentadas nesse referencial, por deixarem dúvidas quanto à sua interpretação, que se traduz em equívocos no momento da objetivação em sala de aula.

Como forma de contribuir para o debate sobre as manifestações dos pressupostos histórico-culturais no ensino da Matemática, adotamos como referência seus estudiosos, especificamente Davydov e colaboradores. Eles elaboraram e pesquisaram a implementação de um sistema de ensino que consideramos a expressão mais atual e fiel aos princípios da teoria anunciada.

No entanto, na presente pesquisa delimitamos para uma especificidade da objetivação da referida proposta, qual seja: a interconexão dos sistemas de significações numéricas (algébrico, geométrico e aritmético) na forma pela qual o conceito de número é introduzido no primeiro ano escolar.

Para tanto, estruturamos o texto da tese em quatro capítulos: 1) O contexto da tese; 2) Contextualização teórica das proposições davydovianas; 3) Apresentação e análise das proposições davydovianas referentes ao objeto de estudo; 4) Síntese das inter-relações da tese.

O primeiro capítulo trata da contextualização do objeto de estudo em nossa trajetória acadêmica, definição da tese a ser defendida e dos objetivos, apresentação dos dados de referência para a análise, especificação do método e do percurso de investigação.

No capítulo seguinte anunciamos o contexto teórico das proposições davydovianas para o ensino da Matemática. O focamos nas relações que integram sua natureza teórica e na explicitação da fidelidade de Davydov aos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

O terceiro capítulo é dedicado ao processo de produção da resposta ao problema de investigação. Nele, apresentamos e analisamos, de forma articulada com os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural, o movimento expresso por Davydov e seus colaboradores na primeira tarefa de estudo para o ensino de Matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental.

Tratamos, pois, da proposta davydoviana concretizada no manual de orientações metodológicas do professor que constituiu o ponto de partida na análise. Por isso, reproduzimos cada ação de estudo e algumas de suas respectivas tarefas particulares. A análise seguiu o movimento real pelo qual o conceito de número é introduzido, com atenção especial para a identificação da existência das relações entre os diferentes sistemas de significações, como se relacionam e sua composição na totalidade das proposições.

Estabelecemos um diálogo com alguns livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do livro didático do Ministério da Educação e Cultura, como parâmetro indicador das diferenças internas em relação às proposições davydovianas. Também com a finalidade de apontar as contradições entre as proposições brasileiras e as davydovianas para introdução do conceito de número.

As relações desvendadas na análise foram abstraídas em forma de modelo no último capítulo. E, a partir dele, sintetizamos a interligação e a integração da totalidade dos sistemas das significações numéricas, a partir do contexto teórico, que permitiu a explicitação do nosso entendimento sobre a tese definida.

1 – O CONTEXTO DA TESE

A Matemática, como produção humana, existe há pelo menos cinco mil anos. Faz parte do rol das disciplinas escolares desde a Idade Média, nas primeiras escolas da Europa. Mas foi somente a partir das três grandes revoluções da Idade Moderna[1] que as preocupações com seu ensino começaram a tomar corpo.

No entanto, a consolidação da Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação, de natureza interdisciplinar, se dá com a fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), liderada por Felix Klein, durante a realização do Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na cidade de Roma, em 1908 (SCHUBRING, 2003).

No espaço de tempo compreendido entre as duas guerras mundiais (1918 e 1945), no contexto do surgimento de proposições pedagógicas, apresentam-se preocupações com a superação no modo de ensinar Matemática. Cita-se o Movimento da Escola Nova, com teor pragmatista, surgido nos Estados Unidos da América, que teve como precursor John Dewey. No Brasil, Euclides Roxo se destacou como um dos principais adeptos, com produção de livros e orientações didáticas para a Matemática fundamentadas na referida pedagogia.

O período precedente à Segunda Guerra Mundial, ao longo dos anos 1950, marca a efervescência da Educação Matemática no cenário internacional e, por extensão, a inquietação com o ensino. Propostas de renovação curricular, como a do Movimento da Matemática Moderna (MMM), ganharam visibilidade em vários países da Europa e dos Estados Unidos. No MMM, entre

---

[1] Revolução Industrial (1767), Revolução Americana (1776) e Revolução Francesa (1789).

outros, configurava o objetivo de ensinar abstrações matemáticas adiantadas em qualquer série (MIGUEL et al, 1992). De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), os propósitos desse movimento foram:

- Tentativa de união dos três campos fundamentais da Matemática por meio de elementos unificadores como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações. Acreditava-se que tais elementos constituiriam a base de sustentação do novo edifício matemático.
- Ênfase na precisão Matemática e na linguagem adequada para expressá-la, substituindo o pragmatismo e a mecanização presentes no ensino antigo da Matemática.
- Crença de que o ensino básico deveria refletir o espírito da Matemática contemporânea: mais rigorosa, precisa e abstrata, graças ao processo de algebrização da Matemática clássica.

No Brasil, de acordo com Baraldi (2003), o movimento foi divulgado em um momento sócio-político-econômico bastante conturbado. Um silêncio foi imposto pelo regime militar, em 1964, e o MMM pode dar sua contribuição com uma Matemática isenta de aspectos que favorecessem uma análise crítica do cotidiano vivenciado por estudantes e professores.

Para Fiorentini (1995 *e.g.*), esse Movimento coincide e se confunde com a pedagogia oficial do regime militar, a tecnicista, que pretendia inserir a escola nos moldes do sistema de produção capitalista. A finalidade da educação escolar era preparar e integrar o indivíduo na sociedade, para torná-lo capaz e útil ao sistema. Com essa orientação pedagógica, a Matemática, concebida como uma ciência neutra, foi reduzida a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos. O aluno deveria realizar uma série de exercícios conforme o modelo sugerido pelos manuais didáticos. A ênfase incidia no fazer em detrimento de outros aspectos importantes como compreender, refletir, analisar e justificar/provar. A significação histórico-cultural e a essência das ideias e conceitos não eram consideradas.

A abertura política no país, a partir do início dos anos de 1980, favoreceu as possibilidades de manifestações sociais em favor da escola pública, que impulsionou críticas aos limites das teorias defensoras de que à instituição educacional cumpria o simples papel de reprodução social e cultural. Nesse contexto, trabalhos de Gramsci (1978 e. g.) sobre Estado e Escola passaram a constituir uma importante referência em nosso país por subsidiar, inclusive, a elaboração de propostas curriculares, como é o caso da primeira versão da proposta curricular do Estado de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 1991). O referido documento assume explicitamente como fundamento básico as reflexões gramscianas.

Em 1998, a Secretaria de Educação do estado editou a segunda versão da proposta curricular (SANTA CATARINA, 1998) com acréscimo de um novo elemento inspirador, a Teoria Histórico-Cultural. E, em 2005, surge a terceira versão (SANTA CATARINA, 2005), que explicita a continuidade de sua fundamentação na Teoria Histórico-Cultural, cuja matriz filosófica é o materialismo histórico e dialético.

No ano de 1999, quando a Teoria Histórico-Cultural ainda se apresentava como novidade no meio educacional catarinense, iniciamos na educação como professora substituta em escolas públicas estaduais e ingressamos no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC).

A Proposta Curricular de Santa Catarina nos foi apresentada (tanto na condição de discente de ensino de graduação quanto docente estreante no ensino fundamental) como a objetivação da Teoria Histórico-Cultural no processo escolar.

Nesse mesmo período, ingressamos (como bolsista) do Programa de Iniciação Científica – PIC da UNESC – sob a orientação de um professor estudioso da abordagem histórico-cultural. Concomitantemente, participamos dos cursos de capacitação da Secretaria Estadual de Educação e Desportos (SED). A convivência com o referido professor e as leituras realizadas foram determinantes na opção do referencial teórico para os nossos trabalhos, naquele período, que permanece até os dias atuais: a Teoria Histórico-Cultural.

O aprofundamento do referido referencial suscitou-nos alguns questionamentos em relação à Proposta Curricular De Santa Catarina e seu embasamento teórico. Em um dos cursos de formação continuada sobre metodologias de ensino, com base nos fundamentos da proposta, chamou-nos a atenção a seguinte afirmação do ministrante: “Vocês devem usar qualquer material que faça a ligação entre o conceito e o conhecimento que o aluno tem”. E, para que nós pudéssemos entender sua proposição, apresentou o exemplo abaixo, onde *m* significa milho e *f* significa feijão:

$$
\begin{array}{r} 45 \\ +\ \underline{29} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 4m + 5f \\ \underline{2m + 9f} \\ 6m + 14f \end{array}
$$

$$
6m + 1m + 4f \quad \text{"aqui eu transformei 10 feijões em 1 milho"}
$$

$$
7m + 4f = 74 \quad \text{"portanto a resposta vai ser 74"}
$$

As leituras realizadas, anteriormente, subsidiávamos para a não aceitação da possibilidade conceitual de transformação dos dez feijões em um milho para relacionar a ideia de sistema de numeração decimal – no contexto do algoritmo da adição – com o conhecimento cotidiano do aluno. Considerávamos, pois, incoerente com os princípios teóricos preconizados.

Outro ministrante, ao enfatizar a necessidade de motivar os alunos, propôs: “Se um determinado aluno é fanático por futebol, para ele sacar alguma coisa de geometria seria interessante começar do futebol”. Tal sugestão levava-nos à reflexão do cotidiano da sala. Apresentar o ensino de um conceito matemático em atenção a um fanático em futebol é extremamente sonhador para quem dispõe de apenas 45 minutos de aula. A experiência mostrava-nos que somente os alunos adeptos ao referido esporte se envolveriam nas discussões. A participação ativa se dissiparia no momento em que ocorresse a exigência de esforço psíquico relacionado ao estudo dos conceitos científicos.

Sendo assim, a probabilidade seria que a aula se centraria nas questões sobre o futebol que o aluno discutia na rua, em casa, no recreio e outros ambientes. Precisava ir para escola? E os alunos não adeptos ao futebol? Observávamos, em circunstâncias similares, que não precisávamos de esforços para proporcionar um ambiente favorável a essa discussão. O contrário acontecia no processo de apropriação dos conceitos científicos, ainda mais quando diz respeito aos alunos de escolas públicas que, para muito deles, é o único lugar para atingi-los.

Ao mesmo tempo, as questões que mais nos confundiam eram: que significações matemáticas historicamente produzidas pela humanidade tinham os grãos dos cereais naquela situação didática exemplificada pelo ministrante anteriormente mencionado? Qual a relação conceitual da geometria com o fanatismo por futebol?

Em outro curso, o ministrante apresentou algumas frases do tipo: "A Matemática é um conhecimento produzido historicamente pelo homem com o objetivo de conhecer, interpretar e transformar a realidade"; "a função social do educador matemático é instrumentalizar o aluno para que, através do processo de alfabetização matemática, ele possa ser cidadão crítico, consciente e atuante na transformação social". E, para concluir, a transparência apresentada dizia o seguinte:

Matemática do Amor

Homem esperto	+	Mulher esperta	=	Romance
Homem esperto	+	Mulher burra	=	Caso
Homem burro	+	Mulher esperta	=	Casamento
Homem burro	+	Mulher burra	=	Gravidez

A apresentação da "matemática do amor" desencanou uma série de sátiras vulgarizadoras das mulheres. Ao comentarmos com alguns colegas a banalidade de tudo aquilo, eles ridicularizavam-nos com o argumento de que era um jeito agradável de falar da teoria. A preocupação se intensificava ao supormos que, para os professores, tais alegorias poderiam ser entendidas com a essência da Proposta Curricular e de sua base teórica.

Enfim, o que ficou do curso foram algumas frases feitas, que poderiam "enfeitar" nossos planos de aula e projetos políticos pedagógicos, mas sem uma contribuição efetiva, em nossas práticas pedagógicas, condizentes com a Teoria Histórico-Cultural.

Diante de tantas contradições, outras questões foram surgindo, tais como: 1) A PC/SC é realmente fundamentada na Teoria Histórico-Cultural? 2) Os professores que ministraram os cursos mencionados anteriormente têm compreensão dos fundamentos da Teoria Histórico-Cultural?

Na dissertação de mestrado[2], buscamos resposta para a primeira pergunta, apresentada anteriormente. Investigamos "os possíveis pontos de convergências e divergências entre as orientações para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos apresentados na atual PC/SC e o desenvolvimento de conceitos na abordagem histórico-cultural" (ROSA, 2006, p. 4). Salientamos que a atual PC/SC ainda é a versão de 1998, os documentos publicados posteriormente continuam fundamentados na versão em questão. Como resultado encontramos mais divergências que convergências entre a PC/SC e a Teoria Histórico-Cultural.

> [...] as orientações metodológicas e a seqüência dos conceitos são conduzidas ao oposto sugerido por Vigotski (relação entre conceitos científicos e espontâneos) e Davydov (relação entre pensamento teórico e o pensamento empírico). Quanto à aprendizagem a PC/SC apenas tangencia. E, embora seja um documento destinado a todos, as questões teóricas abordadas são relacionadas apenas à educação infantil (ROSA, 2006, p. 65-66).

Na dissertação, chegamos a algumas respostas que suscitaram outras questões, principalmente em relação à **objetivação** dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural no Ensino. Ao considerarmos que a SEE mantém a opção teórica e como forma de contribuir para o seu aprofundamento, o estudo dessas questões se tornam ainda mais urgentes.

Além disso, a presença da Teoria Histórico-Cultural no currículo de Santa Catarina levou alguns municípios do Estado a adotar os mesmos fundamentos em suas propostas curriculares. Cita-se o município de Criciúma, localizado no extremo sul do Estado (CRICIÚMA, 2008), que, em seu processo de implementação, sem desconsiderar os demais autores da Teoria Histórico-Cultural, foca para o ensino da Matemática as proposições de ensino de Vasili Vasilievich Davydov[3], autor referência da presente tese de doutorado.

---

[2] Universidade Federal do Paraná, UFPR. Mestrado em Educação, linha de pesquisa educação matemática. Banca examinadora: Dr. Ademir Donizetti Caldeira, Dr. Ademir Damazio e Drª Maria Tereza Carneiro Soares.

[3] No decorrer do texto será utilizada a grafia Davydov. Porém, ao se tratar de referência, será mantida a escrita conforme apresentada na obra, quais sejam: Davídov, Davidov, Davydov e Давыдов

Davydov, doutor em psicologia e seguidor de Vygotski[4], nasceu em 1930 e faleceu em 1998. Vygotski foi um dos criadores da Psicologia Histórico-Cultural, com base no Materialismo Histórico e Dialético. Vygotski, diz Davydov, foi um dos mais eminentes psicólogos soviéticos e um dos fundadores da psicologia marxista. Dentre os seus discípulos e continuadores pode-se citar Lúria, Leontiev, Zapórozhets, Elkonin, Galperin e outros. Vale destacar que Davydov compôs a terceira geração.

Na União Soviética, na década de 1960, ocorreu um processo de reestruturação curricular, considerado cientificamente fundamentado, para a melhoria da educação com a intenção de proporcionar às gerações mais jovens um ensino que considerasse ao máximo as novas condições sociais. Enfim, uma educação com teor moderno que contemplasse o mais alto estágio de desenvolvimento intelectual e físico humano (DAVYDOV, 1988b).

Nesse movimento, dentre os autores que elaboraram propostas para o ensino da Matemática pode-se destacar: Davydov, Galperin, Talízina, Zankov, entre outros. As proposições de Davydov e seus colaboradores, de acordo com Galperin, Zarporózhets e Elkonin (1987), se diferenciam significativamente dos demais, tanto pela amplitude quanto pela profundidade. Os alunos das escolas experimentais manifestavam não só um nível mais elevado de apropriação como "também um nível consideravelmente mais elevado de pensamento, de formação da capacidade para estudar" (TALÍZINA, 1988, p. 327).

Shuare (apud MARTINELI, 2009, p. 203) destaca Davydov como:

> Autor de uma originalíssima concepção sobre o ensino, na qual se outorga um lugar decisivo ao desenvolvimento nos escolares do pensamento teórico e faz uma crítica fundamentada da pedagogia que se apoia no pensamento empírico para estruturar o conteúdo dos programas escolares e que tem a finalidade, justamente, a formação deste tipo de pensamento como o resultado mais alto do processo de ensino.

Uma das singularidades das ideias de Davydov advém da relação entre pensamento empírico e pensamento teórico (pensamento dialético). Para

[4] No decorrer do texto será utilizada a grafia Vygotski, conforme apresentada nas obras escolhidas. Porém, ao se tratar de referência, será mantida a escrita apresentada na obra.

Davydov (1998), na educação escolar a prioridade deve ser para o desenvolvimento do pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Este tem sua importância na vida cotidiana, porém, obstaculiza o caminho quando se pretende que o estudante compreenda os conceitos científicos e desenvolva o pensamento teórico (DAVYDOV, 1982).

Ao analisar as proposições para o ensino de sua época, Davydov (1982) concluiu que a ênfase incidia nos conceitos que desenvolvem o pensamento empírico. Por exemplo, no processo de formação do conceito de número cada um deles era apresentado ao estudante com a ideia de relação direta com a quantidade de objetos em referência, conforme a ilustração 01:

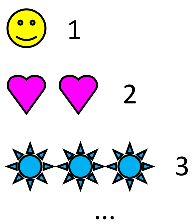


Ilustração 01

Assim, o número *dois* também poderia ser correlacionado com um par de sapatos, o *quatro* com os quatro pés da mesa, entre outros. Segundo Davídov (1987), essa forma de tratar pedagogicamente o conceito de número contribui apenas para o desenvolvimento dos mecanismos do pensamento empírico utilitário. Tal orientação ainda é muito comum na educação escolar brasileira (ROSA, 2001 e 2006; CEDRO, MORAES e ROSA, 2010). As práticas que promovem o desenvolvimento do pensamento teórico "não se fazem presentes, de uma forma geral, na educação escolar em nenhum nível de escolarização na atualidade" (BERNARDES e MOURA, 2009).

Davydov também concluiu que a preocupação do ensino primário consistia em conservar a relação com os conhecimentos cotidianos que a criança recebeu antes de entrar na escola. Em cada etapa do ensino se propõe aos estudantes apenas aquilo que são capazes de assimilar na idade dada. O ensino utiliza unicamente as possibilidades já formadas e presentes na criança. "Naturalmente, assim se pode justificar a limitação e a pobreza do ensino primário, apelando a características evolutivas da criança de sete anos"

(DAVÍDOV, 1987, p. 147). Ou seja, subestima-se tanto a “natureza histórica concreta das possibilidades da criança como as ideias sobre o verdadeiro papel que a educação desempenha no desenvolvimento” (idem). O ensino assim organizado é trágico para o desenvolvimento mental por: enfatizar apenas a base sensorial, reduzir os conceitos ao seu fundamento empírico e, consequentemente, desenvolver exclusivamente o pensamento empírico (DAVÍDOV, 1987).

Em contraposição, o autor defende que a educação escolar desenvolva, nos estudantes, os fundamentos do pensamento teórico, que opera mediante conceitos científicos, o que daria outra dimensão ao pensamento empírico (DAVYDOV, 1982). Para tanto, faz-se necessária a mudança do conteúdo e dos métodos de ensino. Ao entrar na escola, a criança deve sentir claramente o caráter novo do conceito pelo seu teor científico, o que leva à percepção da diferença do lugar que ocupa em relação à experiência pré-escolar.

Constitui tarefa da educação: influenciar, dirigir, isto é, transformar em princípio a criação das condições e as premissas para a mudança do tipo geral e dos ritmos do desenvolvimento psíquico das crianças. Cada novo conceito deve começar com a introdução das crianças em situações que dele necessite seu caráter teórico. Mas, para tal, Davídov (1987) propõe o estudo do conteúdo geral dos conceitos como base para, posteriormente, identificá-lo em suas manifestações particulares. Em outras palavras, cada conceito tem sua especificidade, que é expressão da particularidade de modo geral de uma determinada matéria ou disciplina escolar.

Porém, no meio escolar brasileiro, as proposições que se apresentaram em Educação Matemática, como aquelas apresentadas no início deste capítulo, é o predomínio da formação do pensamento empírico, nos escolares dos anos iniciais. Isso significa que é esse tipo de pensamento que desenvolvemos, quando recebemos os primeiros ensinamentos do conceito de número e de todo o sistema conceitual do qual ele faz parte.

Urge, pois, a adoção de um sistema de ensino que promova o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes por meio da aprendizagem dos conceitos científicos. No âmbito dessa nova exigência germina a necessidade social da presente pesquisa, traduzida em tese de doutoramento.

Para tanto, buscamos Davydov, Elkonin e seus colaboradores que elaboraram e desenvolveram em sala de aula, da Rússia, um sistema educacional a partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. As produções relacionadas ao ensino de Matemática foram coordenadas por Davydov, seus colaboradores e continuadores.

O Sistema de Ensino de Elkonin-Davydov é recomendado, ainda hoje, pelo Ministério da Educação e Ciência da Federação Russa para o desenvolvimento em instituições de ensino daquele país (EDITORA VITA-PRESS, 2010). Além disso, é referência de algumas investigações desenvolvidas em países como Ucrânia, Cazaquistão, Noruega, França, Alemanha, Holanda, Canadá, Japão e Estados Unidos (idem).

Davydov diz que um dos conceitos fundamentais de toda a matemática escolar é o de número real (DAVYDOV, 1982; DAVYDOV, 1988 a e b; DAVÍDOV, 1988; *e.g.*), por isso, foi foco na presente pesquisa.

No Brasil, o ensino do conceito de número, em consonância com as orientações apresentadas na maioria das proposições didáticas atuais, adota a sequência fragmentada que parte dos números naturais até os reais (números naturais $\rightarrow$ números racionais $\rightarrow$ números inteiros $\rightarrow$ números irracionais e reais). Tal orientação pode ser observada em livros didáticos de Matemática, nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Proposta Curricular do estado de Santa Catarina. Geralmente, o ponto de partida no ensino de cada campo numérico são situações do dia-a-dia dos estudantes, da realidade imediata em que são utilizados tais conceitos (ROSA, 2006).

O movimento linear, apresentado anteriormente, aproxima-se das etapas do desenvolvimento histórico desse objeto matemático: números naturais $\rightarrow$ números racionais $\rightarrow$ números irracionais e reais $\rightarrow$ números relativos (CARAÇA, 1984). Com uma única exceção, na evolução histórica, os relativos foram os últimos números a serem produzidos no campo que conhecemos hoje como campo dos reais. Nas duas sequências, o movimento do desenvolvimento do conceito segue do particular para o geral.

Entretanto, a ordem genética do desenvolvimento dos conceitos em Vigotski, na idade escolar, consiste no inverso, de “cima para baixo, do geral para o particular e do topo da pirâmide para base” (2000, p. 165). Um conceito se sobrepõe aos outros e incorpora o mais particular. Isso implica começar na escola, como sugere Davydov, com a gênese de número real e não apenas pelos números naturais.

No contexto do conhecimento matemático, Caraça (1984, p. 04) afirma que o número natural “não é um produto puro do pensamento, independe da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números para depois contarem”, ao contrário, “os números naturais foram se formando lentamente pela prática diária de contagens*”*. Os números racionais, por sua vez, surgiram da necessidade prática da medida. Medir consiste em “comparar duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.” (idem, p. 29). Do ponto de vista aritmético, os racionais surgiram da impossibilidade da divisão, nos casos em que o dividendo não era múltiplo do divisor.

Medir e contar, segundo Caraça (1984, p. 29), “são operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência”. Da realidade prática, por meio da medida e da contagem, a humanidade tirou a ideia dos números naturais e racionais, depois, produziu todas as consequências: os irracionais, para resolver o problema teórico da medida, e, por último, os números relativos para resolver o problema das grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos opostos, concluindo o campo relativo, tradicionalmente conhecido como o campo dos reais. Ou seja, *é o* “número natural, surgindo da necessidade da contagem, o número racional da medida e o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes” (CARAÇA, 1984, p. 125).

De acordo com Vigotski (2000, p. 372), existe uma relação de generalidade entre os conceitos:

> O pré-conceito é uma abstração de número a partir do objeto e uma generalização nela fundada das propriedades numéricas do objeto. O conceito é uma abstração a partir do número e uma generalização nela fundada das outras relações entre os números.

Considerando o movimento histórico, o número natural e o racional são pré-conceitos, são uma abstração de número a partir do objeto. No entanto, o número real, por ser uma abstração a partir do número, é o conceito propriamente dito. É no conceito (números reais) que todas as operações fundamentais do cálculo são possíveis de serem realizadas. “O conceito, segundo a lógica dialética, não inclui unicamente o geral, mas também o singular e o particular” (VYGOTSKI, 1996, p. 78).

As propriedades das sete operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação, logaritmação e potenciação) constituem o conjunto das leis operatórias do cálculo que, juntamente com as propriedades estruturais, são mantidas em todos os campos numéricos. Porém, quanto mais particular for o campo numérico menos operações serão possíveis de serem realizadas.

No campo natural, por exemplo, “todas as operações inversas apresentam casos de impossibilidade, por vezes mais freqüentes que os de possibilidade” (CARAÇA, 1984, p. 28). As operações inversas são: subtração como inversa da adição; divisão como inversa da multiplicação; radiciação e a logaritmação como inversa da potenciação. Na inversa mais elementar, a subtração, uma simples operação do tipo 5 – 6 =___, não tem solução no campo dos naturais.

Portanto, não faz sentido ficar nos primeiros anos do ensino escolar somente no campo dos naturais em que há mais casos de impossibilidades de serem realizadas do que possibilidades. Em Matemática, as propriedades formais são aplicadas constantemente e quem as conhecer bem terá “a chave do cálculo algébrico” (CARAÇA, 1984, p. 25).

Restringir o conceito de número, durante todo o primeiro ano do ensino fundamental, à ideia de número natural a partir da contagem de objetos, como se faz comumente, significa orientar a criança por uma etapa de desenvolvimento já realizada, o que torna ineficaz sob o ponto de vista das possibilidades gerais da criança. Isso acontece porque o ensino, assim orientado, ocorre atrás do processo de desenvolvimento ao invés de orientá-lo.

Na escola, a criança precisa aprender o novo, o que ainda não sabe e pode lhe ser acessível por meio da colaboração. Davydov (1982) aponta que o ensino escolar deve: proporcionar às crianças conceitos genuinamente científicos, desenvolver o pensamento científico e as capacidades para o sucessivo domínio independente do número sempre ascendente de novos conhecimentos científicos. Para o referido autor, a gênese do conceito de número natural é a mesma do conceito de número racional: a partir do estudo das grandezas.

A criança elabora, nas atividades espontâneas, algumas significações empíricas do conceito de número (sabe dividir uma barra de chocolate para três pessoas, sabe que três figuras mais duas figuras são cinco figuras...). Cabe à escola começar no que ainda não foi desenvolvido nos conceitos espontâneos, em seu aspecto mais geral a partir da ideia de número real (DAVYDOV, 1982).

É só no campo dos reais, tomados em sua dinâmica, atividade e movimento, que o conceito de número reflete sua verdadeira natureza. A relação do número real com o objeto pressupõe a existência de relação entre os naturais, racionais, irracionais e inteiros, ou seja, um sistema de conceitos. Segundo Vigotski (2000, p. 294), cada conceito precisa ser tomado em conjunto da mesma forma que uma “célula deve ser tomada com todas as suas ramificações através das quais ela se entrelaça com o tecido comum”.

Em um determinado momento do desenvolvimento histórico da Matemática, quando a humanidade só havia produzido os números naturais, seria aceitável limitar seu ensino ao conceito de número natural. Mas, atualmente, o conceito não só foi ampliado e recebeu maior precisão, como também foi renovado como um sistema integral. O conteúdo de uma disciplina não é idêntico à totalidade dos avanços da ciência correspondente, mas é obrigação da educação proporcionar as abstrações e generalizações ao nível inteiramente moderno (DAVYDOV, 1982).

Conforme anunciado, para Davydov (1982, p. 431), o objetivo da disciplina de Matemática durante o ensino fundamental é “criar nos alunos uma concepção circunstanciada e válida de número real a partir do conceito de grandeza”. Para o autor, os números, naturais e reais, são um aspecto particular de um objeto matemático geral, o conceito de grandeza. Ele propõe que primeiro a criança se familiarize com este objeto geral para, posteriormente, estudar os casos particulares de sua manifestação. Para o matemático americano Devlin's Angle, uma das vantagens das proposições davydovianas está na sua proposição de que os números reais são a base, os inteiros e os racionais constituem-se somente pontos particulares na reta real (ANGLE, 2009).

De acordo com Davydov (1982, p. 433-434), o "simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativo das propriedades fundamentais das grandezas, são inteiramente acessíveis às crianças", mesmo antes de conhecer "as características numéricas dos objetos" (idem, p. 434). Suas proposições apresentam elevadas exigências para o intelecto da criança. Porém, com certa organização do ensino, elas são capazes de assimilá-las.

Consequentemente, surge nelas, antes do que de costume, as premissas para formar a aptidão do raciocínio teórico. Dessa forma, constitui um vigoroso impulso para o desenvolvimento de sua capacidade para avaliar as relações abstratas dos objetos, "o que se revela já ao estudar as etapas seguintes do programa, por exemplo, ao familiarizar-se com o número - segundo semestre do primeiro ano" de escolarização (DAVYDOV, 1982, p. 434).

Davydov se apoia em Vygotski ao dizer que o ensino constitui a forma internamente indispensável, pois se adianta ao desenvolvimento intelectual. As leis da educação exercem influência sobre o desenvolvimento. Por isso, "constitui um dos problemas mais difíceis, porém mais importante quando se trata da organização da escola futura" (DAVÍDOV, 1987, p. 151).

Na organização atual do ensino da Matemática, em nosso país, é comum nos depararmos com a seguinte sequência: inicialmente a aritmética, depois a geometria e a álgebra. O estudo da álgebra inicia na 6ª série/7ª ano do Ensino Fundamental e aprofunda-se na 7ª série/8ª ano do Ensino Fundamental (GIL e RUTH, 2008). Como dito anteriormente, o primeiro conceito matemático abordado é o de número com ênfase na contagem, que contempla apenas a significação aritmética. Tal tricotomia ainda é muito presente na Educação Matemática escolar brasileira, e, segundo Khidir (2006), há, inclusive, uma desconexão como se fossem elementos de ciências distintas.

Davydov (1982) acredita que suas proposições de ensino possibilitam a superação do divórcio existente entre as significações aritméticas e algébricas. É no contexto dessa aproximação que definimos nossa tese e, antes de elaborá-la, perguntamos: E as significações geométricas? Em momento algum da obra davidoviana há menção à inclusão das significações geométricas do conceito de número, porém, defendemos a tese de que as proposições davydovianas para o ensino do conceito de número contemplam de forma inter-relacionada não só as significações aritméticas e algébricas, como também as geométricas. Embora Davydov não tenha explicitado tal inclusão em seus artigos, capítulos de livros e livros, defendemos que suas proposições para o ensino de número são expressão da inter-relação de tais significações.

A partir da interpretação leontieviana das significações (LEONTIEV, 1978) entendemos que, como cristalização da experiência humana, elas expressam a síntese histórica e as formas pelas quais o homem se apropria do conceito de número.

Há muito tempo, no processo histórico de evolução da Matemática, os números adquiriram sua verdadeira natureza na inter-relação das suas significações aritméticas, algébricas e geométricas. Uma forma de elucidar essa gênese é observarmos sua expressão na sequência numérica (significação aritmética), sua localização na reta numérica (significação geométrica) e seu valor genérico, privado de uma expressão concreta (significação algébrica).

A aritmética e a geometria não só se aplicam uma à outra como também são fontes de outros métodos, ideias e teorias gerais. Para medir o comprimento de um objeto, adota-se certa unidade e se calcula quantas vezes é possível repetir essa operação: o primeiro passo (aplicação) é de caráter geométrico, o segundo (cálculo) é aritmético (ALEKSANDROV, 1976). Por sua vez, a relação entre o comprimento e a unidade é de caráter algébrico.

No âmbito de tais inter-relações e considerando as proposições davydovianas para a introdução do conceito de número, surge-nos a seguinte questão, que traduz o problema da tese de doutoramento: Quais os nexos e relações entre as significações numéricas nas proposições davydovianas para introdução do conceito de número?

No entanto, esta tese é parte de um processo maior de investigação desenvolvido pelos integrantes do GPEMAHC[5] e do GEPAPe[6] sobre os princípios teórico-metodológicos da Teoria Histórico-Cultural para Educação Matemática.

Porém, adquire sua especificidade na formulação do seguinte objetivo: investigar, nas proposições davydovianas para introdução do ensino do conceito de número, a possível interconexão das significações aritméticas, algébricas e geométricas.

Na especificidade desta pesquisa, de natureza teórica, iniciamos com o aprofundamento do estudo das obras de Davydov em espanhol, traduzidas diretamente da língua russa por Marta Shuare (DAVÍDOV, 1987; DAVÍDOV e MARKOVA, 1987 a e b; DAVIDOV, 1988; DAVYDOV, 1982)[7]. Também foram referências os seus livros em inglês (DAVYDOV, 1988 a e b; DAVYDOV, 1999). Acresce-se, ainda, o livro didático de Matemática para o primeiro ano do ensino fundamental, elaborado por Davydov, Gorbov, Mikulina e Savieliev (ДАВЫДОВ et al, 1997). O referido livro didático foi traduzido do russo para o português, por solicitação do GPEMAHC, por Elvira Kim[8].

Durante o estudo do livro didático, percebemos que não é possível compreender as proposições davydovianas para o ensino de número sem a leitura do seu manual com as orientações metodológicas para o professor, produzido pelo mesmo grupo de colaboradores e continuadores de Davydov (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

---

[5] Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural) Coordenação: prof. Dr Ademir Damazio na UNESC.

[6] Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre Atividades Pedagógicas. Coordenação: prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura e profª Elaine Sampaio Araújo.

[7] As citações diretas em português foram por nós traduzidas do espanhol.

[8] Professora de nacionalidade russa. Atualmente leciona a disciplina de Russo no centro de idiomas da Universidade Federal do Paraná.

A busca na produção científica brasileira sobre Davydov identificou que só ocorre a referência das suas obras e indicações teóricas para o ensino[9], mas em nenhuma delas menciona o referido Manual (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008) e o livro didático (ДАВЫДОВ et al, 1997) que, em nosso entendimento, traduzem a objetivação de sua proposta educativa em relação à Matemática.

Ao tomarmos conhecimento da existência e importância do Manual de Orientação ao professor e de sua inexistência nos meios acadêmicos e científicos brasileiros, ficamos em dúvida, o que se caracterizou em momento crítico da pesquisa. Tínhamos três alternativas: mudar o objeto de estudo; continuá-la superficialmente; ou adquirir a obra. A opção foi pela última possibilidade, com respaldo do grupo de pesquisa (GPEMAHC). A obra encontra-se à disposição do público na biblioteca da UNESC e também foi traduzido por Elvira Kim.

Tal aquisição não só possibilitou a continuidade da pesquisa como se constituiu em seus dados e referência de análise. O manual compõe-se de 10 capítulos, cada qual com subcapítulos, compostos por sistemas de tarefas particulares.

Focamos nos nove primeiros capítulos do Manual, por traduzirem a objetivação da "primeira tarefa de estudo", apresentada por Davidov (1988, p. 188) para a atividade de estudo.

Vale esclarecer que:

> O termo "atividade de estudo", que designa um dos tipos de atividade reprodutiva das crianças, não deve identificar-se com o termo "aprendizagem". Como se sabe, as crianças aprendem nas formas mais diversas de atividades (no jogo, no trabalho, no esporte, etc.). A atividade de estudo tem um conteúdo e uma estrutura especial e há que diferenciá-la de outros tipos de atividade que as crianças realizam tanto na idade escolar inicial como em outras (por exemplo, há que diferenciá-la da atividade lúdica, social organizativa, laboral).

[9]Como por exemplo, Amorim (2007), Araújo (2003), Araújo e Cardoso (2006), Bernardes (2006), Cedro (2008), Cunha (2008), Damazio (2000), Damazio (2001) Dias (2007), Khidir (2006), Landó (2009), Libâneo (2004), Lins e Gimenes (1997), Lopes (2004), Miranda (2010), Moraes (2008), Moretti (1998), Moretti (2007), Moura (1992), Moura et al (2010), Nascimento (2010), Oliveira (2003), Rolindo (2007), Rosa (2006), Rosa, Caldeira e Damazio (2008), Serrão (2004), Sforni (2003), Soares (2007) e Veiga (2003).

> Além disso, na idade escolar inicial, as crianças realizam outros tipos de atividade, porém, a principal é a de estudo (DAVIDOV, 1988 p. 159).

As crianças não chegam à escola sabendo estudar, ao contrário, isso ocorre mediante um processo de apropriação, previamente organizado. “No princípio, muitas das operações serão efetuadas ou sugeridas pelo pedagogo. Porém, pouco a pouco, o aluno se tornará cada vez mais independente, adquirindo uma real aptidão para a aprendizagem [estudo]” (RUBTSOV, 1996, p. 133-134).

A criança só se apropria de algo em forma de atividade de estudo quando experimenta uma necessidade interna para tal apropriação. Esta surge no processo de apropriação real dos conhecimentos, pois os conhecimentos teóricos também são geradores da necessidade de aprender. A aptidão para o estudo “é, na verdade, resultado de uma determinada interiorização” (RUBTSOV, 1996, p. 134), a interiorização dos “conceitos científicos” (DAVÍDOV, 1987, p. 150).

A estrutura da atividade de estudo inclui componentes tais como a tarefa de estudo, as correspondentes ações e as tarefas particulares. Conforme já anunciamos, delimitamos a análise na primeira tarefa de estudo davydoviana, que tem como finalidade a “obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas”. A tarefa é composta por seis ações de estudo, desenvolvidas por meio de um sistema de tarefas particulares, que enunciaremos no segundo capítulo da tese.

A compreensão de cada tarefa particular resultou de um estudo intensivo realizado, durante 18 meses, no laboratório de Estudos em Educação Matemática prof. Dr. Ademir Damazio da UNESC, com a colaboração dos integrantes do GPEMAHC. O referido estudo foi mediatizado pelas leituras realizadas da obra de Davydov, mas, durante esse processo, se fez necessário retomá-las em função da complexidade das tarefas.

A compreensão das tarefas particulares possibilitou a elaboração das imagens que traduzem a ideia básica de cada uma delas e, consequentemente, a organização dos dados para a realização da análise.

Assumimos como finalidade dessa investigação a possível tradução da interconexão essencial entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas, em cada tarefa. Para tanto, procuramos a orientação teórica e metodológica do materialismo histórico e dialético para a apreensão do conceito de número nas proposições davydovianas em seu processo de origem e desenvolvimento. Por isso, selecionamos aquelas tarefas que reproduzem a unidade da totalidade do movimento entre o geral ↔ particular ↔ universal ↔ particular ↔ singular de introdução do conceito de número. Consideramos que "o singular, o particular e o universal, assim como outras categorias da dialética materialista, refletem o mundo objetivo e caracterizam alguns aspectos essenciais do conhecimento; são como etapas do conhecimento da realidade" (ROSENTAL e STRAKS, 1958, p. 257).

As tarefas iniciais das proposições davydovianas, em especial do primeiro capítulo, embora não estejam diretamente relacionadas ao conceito de número, foram reproduzidas na análise por revelarem as condições necessárias para o surgimento do referido conceito.

A análise foi mediatizada pelos fundamentos matemáticos, filosóficos e psicológicos (ALEKSANDROV, 1976; BOYER, 1974; CARAÇA, 1984; DAVÍDOV, 1987; DAVÍDOV, 1987a; DAVÍDOV, 1987b; DAVYDOV, 1998; DAVYDOV, 1988a; DAVYDOV, 1988b; DAVYDOV, 1982; DAVYDOV, 1999; ELKONIN, 1987; EVES, 2007; GALPERIN, TALYZINA, 1967; GALPERIN, TALYZINA, 1987; GALPERIN, ZAPORÓZHETS, ELKONIN, 1987; KALMYKOVA, 1991; KOPNIN, 1978; KOSIK, 1976; KRUTETSKY, 1991; LEONTIEV, 1978; LEONTIEV, 1991; LEONTIEV, 2001; LUKÁCS, 1978; MARX, 2003; MARX, DEVILLE, 1998; MARX, 1985; MARX, 1983; OBÚJOVA, 1987; RÌBNIKOV, 1987; RUBINSTEIN, 1960; RUBINSTEIN, 1976; TALIZINA, 2001; TALIZINA, 1987; TRIVIÑOS, 1987; VIGOTSKI, 2008; VIGOTSKI, 2000; VYGOTSKY, 1991; VYGOTSKI, 1996; VYGOTSKI, 1993; ZAPORÓZHETS, 1987).

Como forma de expressar a essência das proposições davydovianas desprovidas de possível ofuscamento da sua aparência externa, estabelecemos um diálogo com os livros didáticos de Matemática (para o primeiro ano do Ensino Fundamental) aprovados pelo Programa Nacional do

Livro Didático para os anos letivos de 2010, 2011 e 2012. A avaliação do referido programa foi publicada pelo Ministério da Educação no Guia de Livros Didáticos (PNLD, 2009) com resenhas das coleções consideradas aprovadas. Durante a análise não faremos referência a um livro em específico, dada a similaridade entre todos os livros no que se refere ao conteúdo e aos métodos de ensino.

Durante o processo de análise, revelamos a base geneticamente inicial da interconexão entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas no sistema integral da tarefa de estudo davidoviana para introdução do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental. Além disso, em concernência com o método de pesquisa, procedemos à síntese e modelamos a forma universal das interconexões entre os sistemas de significações numéricas.

2 – CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA DAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS

No presente capítulo, apresentamos alguns fundamentos teórico-metodológicos considerados por Davydov e seus colaboradores ao elaborarem suas proposições para a introdução do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental. No entanto, eles serão retomados e aprofundados nos capítulos subsequentes, uma vez que, por se tratar de uma pesquisa teórica, essa possibilidade existe e se apresenta – do ponto de vista metodológico – como uma necessidade.

Davydov, ao propor seu sistema de ensino, é extremamente rigoroso no que se refere à observância dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e sua matriz, o materialismo histórico e dialético. A fidelidade teórica se explicita nos seus escritos sobre os estudos experimentais nos quais estão sempre presentes, que ele denomina de principais teses da teoria materialista dialética do pensamento.

Dentre outras, anunciamos: a atividade prática como base do pensamento humano; o ideal como reflexo do objeto; pensamento empírico e o pensamento teórico têm suas particularidades e conteúdos específicos; a modelação como meio do pensamento científico; o pensamento tem seus componentes (sensorial e o racional); o procedimento da ascensão do abstrato ao concreto.

Vale destacar que Davydov dá ênfase ao papel da educação e do ensino no desenvolvimento intelectual do homem. Por isso, assim como os demais psicólogos/educadores russos atribui como objeto da Psicologia a atividade.

No âmbito dessa teoria, o destaque é o papel do trabalho para a formação das características tipicamente humanas. No processo do desenvolvimento histórico-social do homem, conforme Davydov e demais autores da Psicologia soviética, a atividade de trabalho foi a base genética para os demais tipos de atividades humanas. Ou seja, o gênero fundamental de atividade é o trabalho (DAVYDOV, 1999). Por exemplo, o jogo e o estudo são tipos de atividade divergentes do trabalho, mas a ele vinculados e dele derivados (RUBINSTEIN, 1960).

Para Marx (1998, p. 211-212), o trabalho

> é um processo de que participam o homem e a natureza, processo em que o ser humano, com sua própria ação, impulsiona, regula e controla seu intercâmbio material com a natureza. Defronta-se com a natureza como uma de suas forças. Põe em movimento as forças naturais de seu corpo - braços e pernas, cabeça e mãos -, a fim de apropriar-se dos recursos da natureza, imprimindo-lhes forma útil à vida humana. Atuando assim sobre a natureza externa e modificando-a, ao mesmo tempo modifica sua própria natureza. Desenvolve as potencialidades nela adormecidas e submete ao seu domínio o jogo das forças naturais. Não se trata aqui das formas instintivas, animais, de trabalho. (...) Pressupomos o trabalho sob forma exclusivamente humana. Uma aranha executa operações semelhantes às do tecelão, e a abelha supera mais de um arquiteto ao construir sua colmeia. Mas o que distingue o pior arquiteto da melhor abelha é que ele figura na mente sua construção antes de transformá-la em realidade. No fim do processo do trabalho aparece um resultado que já existia antes idealmente na imaginação do trabalhador. Ele não transforma apenas o material sobre o qual opera; ele imprime ao material o projeto que tinha conscientemente em mira, o qual constitui a lei determinante do seu modo de operar e ao qual tem de subordinar sua vontade. E essa subordinação não é um ato fortuito. Além do esforço dos órgãos que trabalham, é mister a vontade adequada que se manifesta através da atenção durante todo o curso do trabalho. E isto é tanto mais necessário quanto menos se sinta o trabalhador atraído pelo conteúdo e pelo método de execução de sua tarefa, que lhe oferece, por isso, menos possibilidade de fruir da aplicação das suas próprias forças físicas e espirituais.

Em outras palavras, a previsão e a antecipação, pelo homem, do que deverá ser produzido por um trabalho ocorre no próprio processo. Como tal, toma forma de representação ideal que ocorre, ao mesmo tempo, como finalidade consciente, precede a produção do objeto. Esta finalidade, assim como uma lei, determina o modo e o caráter das ações do homem, que subordina a ela sua vontade.

Assim, o trabalho é uma atividade humana consciente e orientada para certos fins, com vistas a algo almejado, um resultado, que existe idealmente antes da atuação do sujeito e é regulado por sua vontade que, por sua vez, está vinculada ao seu objetivo consciente. É pela atividade, em sua especificidade o trabalho, que ocorre a transformação, pelos humanos, da realidade circundante. Por isso, o trabalho é considerado a atividade criativa do homem (MARX, 1998).

A principal característica da atividade humana é seu caráter objetal que, necessariamente, está dirigido para a criação de um objeto, seja ele material ou espiritual. O caráter objetal está relacionado àquilo que o ato se dirige. Por exemplo, pela atividade do pedreiro se criam edifícios, pela atividade do artista se criam obras artísticas, entre outras (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

A atividade humana abarca uma estrutura integral composta por elementos que se interligam e se transformam um em outro: necessidade ↔ motivo ↔ finalidade ↔ condições para obter a finalidade. Além disso, possui outros componentes, correlacionáveis: atividade ↔ ação ↔ operação (LEONTIEV, 2001).

Davydov (1999) concorda com tal estrutura, mas ao considerá-la interdisciplinar[10] inclui o desejo, núcleo básico de uma necessidade, e ambos compõem a base sobre as quais funcionam as emoções. Estas não podem ser consideradas separadamente das necessidades que se mostram nas manifestações emocionais.

A necessidade, a base da atividade do sujeito, expressa a carência de algo que o sujeito experimenta. Ela provoca o sujeito a visar o que está dado somente como finalidade e ainda não como realidade. A busca pelos objetos que correspondem à necessidade leva ao aparecimento do seu motivo, que incita um indivíduo a propor-se uma tarefa para assegurar a finalidade. Desse modo, a unidade da atividade aparece concretamente como unidade constituída de fins para os quais está orientada e de motivos dos quais deriva (RUBINSTEIN, 1960).

[10] Com aspectos da filosofia, sociologia, psicologia, fisiologia...

O percurso da atividade é condicionado pela lógica objetiva das tarefas a executar pelo homem. Uma tarefa é uma unidade de uma meta e as condições para atingi-las (RUBINSTEIN, 1960). Estabelecer uma tarefa para um indivíduo é determinar uma meta a ser atingida em condições específicas.

A tarefa requer a realização de ações para que o indivíduo possa criar ou adquirir o objeto que responde às demandas do motivo e satisfaça a necessidade. O procedimento e o caráter do cumprimento da ação para resolver a tarefa estão determinados por sua finalidade. As condições da tarefa determinam as operações concretas na execução da ação (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Davydov (1999) concorda com Leontiev (1978) que as ações, motivos e meios podem ser incluídos como elementos constituintes, da estrutura da atividade, mas inclui a tarefa. Esta se apresenta no plano da percepção, memória, pensamento ou imaginação. Ela é perceptual, mnemônica, pensante e aquela conectada à imaginação, base psicológica da criatividade.

Trata-se de processos cognitivos, por meio dos quais, ou na realização das tarefas correspondentes, encontra-se um caminho para que o individuo atinja a meta no plano da percepção, memória, pensamento e imaginação. Além disso, há algo que leva aos objetivos por meio da realização de certas tarefas: a *vontade,* que sempre está conectada ao desenvolvimento de um plano para se conseguir atingir a meta desejada.

De acordo com Davydov (1999), as ações, como formações integrais, se conectam somente com necessidades que têm por base os desejos. Elas ajudam na realização de certas tarefas a partir dos motivos. Por sua vez, os motivos são formas específicas de necessidades, quando uma pessoa estabelece para si uma tarefa e realiza ações para cumpri-las. Dessa forma, motivos são consistentes com ações. Ações têm como base motivos e o agir é possível se estiverem disponíveis certos meios materiais ou simbólicos.

A estrutura da atividade não é estática, seus componentes sofrem transformações. A atividade pode perder seu motivo e transformar-se em uma ação, e esta, se modificada sua finalidade, pode converter-se em operação. O motivo de certa atividade pode passar a ser finalidade da ação, como resultado do qual a ação se converte em outra atividade (LEONTIEV, 2001).

Com base nas mudanças essenciais da atividade, da posição vital e do estabelecimento de novas relações com as pessoas é que ocorre o desenvolvimento psíquico do ser humano, cuja periodização está relacionada à análise do processo de formação de sua atividade e de sua consciência (DAVIDOV, 1988).

As fontes da consciência estão na relação do homem com a realidade, em sua vida social. Esta constitui a fonte das formas mais complexas da atividade consciente do ser humano. Em cada estágio de desenvolvimento lhe é inerente uma atividade principal e sobre essa base surgem e se formam novas estruturas psicológicas.

No desenvolvimento ontogenético, de acordo com Davidov (1988, p. 78), durante o processo de comunicação, se constituem no bebê “neoformações fundamentais como a comunidade psíquica com outras pessoas (inicialmente com a mãe), as atitudes emocionais para com elas, a apreensão de objetos e uma série de ações perceptivas”. A primeira necessidade que surge na criança é a de comunicação, cujo objeto é outra pessoa. Desse modo, *a comunicação emocional direta com os adultos* constitui a primeira atividade principal da criança.

No processo de colaboração com os adultos começa a formar-se no bebê a ação *objetal-manipulatória* que, segundo Davídov (1988), mais tarde se converte na forma principal de atividade. Nesse segundo estágio do desenvolvimento infantil, a criança reproduz os procedimentos de ação com os objetos elaborados socialmente pela humanidade. Surgem novas formações psicológicas relacionadas à linguagem, uma operação intelectual consciente, altamente complexa, converte no meio mais importante de comunicação e colaboração com os adultos. A neoformação central é a consciência que começa a ser mediada pela linguagem.

De acordo com Leontiev (2001), a simples manipulação de objetos vai sendo superada quando a criança começa a reproduzir ações humanas com tais objetos: toma uma roda qualquer como volante e dirige um carro, um cabo de vassoura como cavalo e cavalga... Como diz Davidov (1988), a criança deseja atuar como um adulto e faz isso em forma de jogo, o qual se transforma para a criança na terceira atividade principal marcada pelo início de um novo estágio de desenvolvimento, o pré-escolar.

Nesse período, de início, surgem formas simples do jogo temático de papéis, que as crianças realizam somente no plano da atividade externa, com objetos reais. Ou seja, não há qualquer complementação de objetos e ações ausentes à situação dada, a partir da fantasia. Porém, ao dominar gradativamente os procedimentos generalizados de substituições e ao assimilar as formas específicas de modelação da realidade circundante, a criança adquire, com o jogo, a capacidade geral de criar e transformar essa realidade no plano imaginativo com ajuda da fantasia. Isso significa que a operação não é mais com objetos reais e com seus substitutos externos, mas com imagens, com representações visuais sobre os correspondentes objetos e sobre aquelas ações que com eles podem realizar (ZAPORÓZHETS, 1987).

A ação lúdica da criança corresponde, ainda que de forma peculiar, com as ações dos adultos. As crianças reproduzem o conteúdo dessas ações e as cumprem totalmente, porém sem as condições necessárias à obtenção dos resultados, uma vez que seu motivo consiste em apenas cumpri-las. Isso significa dizer que não há coincidência entre o conteúdo da ação (dirigir um carro, por exemplo) e suas operações (girar uma roda qualquer), pois elas cumprem a ação lúdica em uma situação imaginada. Contudo, tomam consciência das normas sociais do comportamento humano e dos procedimentos para cumpri-los.

Elkonin (1987) considera o jogo um poderoso meio educativo quando se introduzem nele temas que possuem grande importância para a educação das crianças. O importante é o conteúdo do tema em jogo. No exemplo do motorista, pode-se destacar a atitude cuidadosa consigo mesmo, com seus passageiros, com os demais motoristas, com o carro, com as leis de trânsito, entre outros.

A sugestão de Elkonin é que o professor ajude as crianças a colocarem conteúdo nos papéis assumidos no jogo, de modo que as regras de comportamento estejam, na medida do possível, ligadas com o papel desempenhado pelo conteúdo e não sejam somente convencionais. Sobre esta base, se constitui uma série de novas formações psicológicas como a imaginação e a função simbólica.

Na brincadeira,

> a criança está sempre acima da média de sua idade, acima de seu comportamento cotidiano [...]. A brincadeira em forma condensada contém em si, como na mágica de uma lente de aumento, todas as tendências do desenvolvimento; ela parece tentar dar um salto acima de seu comportamento comum (VIGOTSKI, 2008, p. 35).

As brincadeiras, o jogo temático de papéis favorecem o surgimento dos interesses cognoscitivos, ainda que não possam ser satisfeitos plenamente. Como consequência, as crianças em idade pré-escolar se empenham em satisfazer seus interesses cognoscitivos por meio da comunicação com os adultos e das observações sobre o mundo que as rodeia (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988) Esses interesses atuam como premissas psicológicas para que mais tarde surja a necessidade da criança se apropriar de conhecimentos teóricos.

O ingresso na escola aos seis anos de idade marca, segundo Davídov (1988), o início de um novo estágio de desenvolvimento: a idade escolar inicial, cuja atividade principal é a de *estudo*. Sob a direção do professor, a criança passa a assimilar, sistematicamente, o conteúdo teórico (conceitos científicos, imagens artísticas, valores morais, normas jurídicas), das formas desenvolvidas da consciência social (ciência, arte, moral e direito) e as capacidades de atuar em correspondência com as exigências dessas formas[11].

A atividade de estudo, quando corretamente organizada, propicia aos estudantes as bases de todas as formas da consciência e, consequentemente, o desenvolvimento multilateral da personalidade criativa. Uma das capacidades humanas que constituem a base da personalidade é a de estruturar autonomamente e transformar de modo criador sua própria atividade vital, ou

---

[11] Em sentido amplo, o conceito de teoria é sinônimo de consciência social, nas formas mais altas e desenvolvidas de sua organização. Como produto superior do pensamento organizado, a teoria mediatiza toda a relação do homem com a realidade e é condição para a transformação verdadeiramente consciente desta (DAVÍDOV, 1988).

seja, de ser seu verdadeiro sujeito. Cabe também à educação o desenvolvimento de propriedades da personalidade tais como o coletivismo e a solidariedade; o companheirismo e a civilidade; o caráter firme e a vontade férrea; o amor ao trabalho e a firmeza; combinados com a iniciativa e a independência (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Segundo Davídov (1988), a organização da atividade de estudo das crianças requer a elaboração e a introdução de novas formas e meios para realizá-la. Não bastam os hábitos culturais gerais de leitura, escrita e cálculo, é necessário, também, prepará-las para um prolongado trabalho de estudo. Isso significa que as crianças precisam obter o indispensável desenvolvimento psíquico geral e uma boa capacidade para estudar.

A atividade de estudo não é inata, isto é, as crianças não chegam à escola sabendo estudar, do contrário, isso ocorre mediante um processo de apropriação, previamente organizado. Nesse sentido, Davídov e Markova (1987a) alertam: se nos anos iniciais as crianças desenvolverem a capacidade para estudar e operar com conceitos teóricos, então estarão preparadas para um prolongado trabalho de estudo.

As crianças dos anos iniciais apresentam reservas no desenvolvimento intelectual (TALIZINA, 2001; GALLPERIN e TALYZINA, 1967; DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988), que possibilitam formar o conhecimento propriamente científico. Sobre esta base, desenvolvem: o pensamento teórico (pensamento dialético), a relação teórica com a realidade e os momentos iniciais da consciência teórica (DAVÍDOV e MARKOVA, 1987a). Nesse contexto, o respeito à infância passa pelo desenvolvimento dos procedimentos específicos da atividade de estudo e pelo enriquecimento de seu conteúdo.

Uma síntese sobre o início da atividade de estudo pode se expressar da seguinte forma: a criança pode aprender sob a direção e o controle do professor. Ao passar por diferentes formas de colaboração com os adultos e colegas, ela começa a cumprir a atividade de estudo de forma autônoma, que expressa o seu estado de verdadeiro sujeito. Por isso, apresenta as condições para: distinguir seus conhecimentos e desconhecimentos, suas habilidades e inabilidades; converter seus desconhecimentos em uma tarefa cognitiva de estudo e encontrar, em colaboração com os outros, um meio geral para resolver a referida tarefa (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Nos adolescentes, duas características se apresentam: a necessidade de comunicação (com colegas e adultos) e a busca de si mesmo nas múltiplas relações interpessoais. Também surge a necessidade de que os adultos reconheçam a aspiração pela independência, a autoafirmação e a auto expressão. A *comunicação é a referência no cumprimento de diferentes tipos de atividades socialmente úteis* (artística e desportiva, por exemplo), pois fundamenta a constituição de novas formações psicológicas características da adolescência. A aplicação dos conhecimentos obtidos na atividade anterior, a de estudo, leva os adolescentes a compreenderem o valor social de seus êxitos pessoais. A autoconsciência é a neoformação psicológica central dessa idade (DAVÍDOV, 1988).

De acordo com Vygotski (1996), uma das características fundamentais do adolescente é a passagem do pensamento em complexo ao pensamento em conceito. Como consequência tudo o que se apresentava como exterior (convicções, interesses, concepção de mundo, normas éticas, regras de conduta, inclinações, ideais) é interiorizado. Por extensão, abre-lhe o mundo da consciência social objetiva, isto é, da ideologia social, e permite-lhe a compreensão de sua realidade interior e o mundo de suas próprias vivências.

Novamente é destacável o papel da educação escolar, que deve assegurar a cada adolescente uma posição favorável e socialmente aprovada no coletivo de colegas. Além disso, oferecer-lhe a possibilidade de comprovar suas forças na criação, na elaboração das normas da atividade de estudo, de trabalho, artística, social e desportiva (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Para os estudantes do ensino superior e das escolas técnicas a atividade principal é a de *estudo profissional* cuja necessidade é o trabalho. Os jovens elegem, conscientemente, o caminho a seguir na vida e pensam sobre as perspectivas de sua atividade futura (DAVÍDOV, 1988).

De acordo com Leontiev (2001), os estágios de desenvolvimento psíquico, apresentados anteriormente, estão vinculados aos processos de substituição de uma necessidade por outra, e, consequentemente, incide na mutação da atividade principal. “O que representa uma enorme riqueza para o bebê quase deixa de interessar à criança na primeira infância. Essa maturação de novas necessidades, de novos motivos da atividade, deve ser posta em primeiro plano” na educação da criança (VIGOTSKI, 2008, p. 24).

A mudança de estágio é marcada por uma ruptura. Caso não seja devidamente orientada, isto é, caso aconteça espontaneamente, pode se traduzir em crises. Estas ocorrem quando a criança se dá conta que o lugar ocupado no mundo das relações humanas não corresponde mais as suas atuais potencialidades. A crise, conforme Leontiev (2001, p. 67),

> é a prova de que um momento crítico ou uma mudança não se deu em tempo. Não ocorrerão crises se o desenvolvimento psíquico da criança não tomar forma espontaneamente e, sim, se for um processo racionalmente controlado, uma criação controlada.

O mesmo autor diz que as crises assumem formas que violam a disciplina, conforme transcrição a seguir:

> No começo, no grupo inicial e intermediário do jardim de infância, ela [a criança] se junta com interesse e avidez à vida do grupo, e seus jogos e ocupações são cheios de sentido para ela [...] o tempo passa, e o conhecimento da criança aumenta. Como resultado disso tudo, a atividade no jardim de infância perde o sentido que possuía anteriormente para a criança e ela cada vez mais desliga-se do jardim de infância. Ou melhor, procura descobrir novo conteúdo nele. Formam-se grupos de crianças que a viver sua própria vida, uma vida especial, secreta, não mais “pré-escolar”; a rua; o pátio, a companhia das crianças mais velhas tornam-se cada vez mais atraentes. A auto-afirmação da criança vai cada vez mais frequentemente assumindo formas que infringem a disciplina. É o que se conhece como crise dos sete anos de idade (LEONTIEV, 2001, p. 66-67).

A crise dos sete anos surge a partir do antagonismo entre as potencialidades da criança e seu ensino formal que se inicia naquele momento, como estudante. Como diz Leontiev (2001), ela se apresenta na contradição entre o modo de vida da criança e seu potencial indicador de superação do até então vivido. É, pois, um estado indicador de ser atual e o devir.

Em sentido propositivo para a educação, Davydov (1988, p. 90) alerta:

> se os educadores levam em consideração as mudanças que estão surgindo no comportamento da criança, os períodos de viragem em seu desenvolvimento não adquirem as claras particularidades negativas, cuja presença serviu, a nosso ver, como fundamento para a utilização ilícita do termo "crise".

Em outras palavras, o autor chama a atenção para que os professores estejam alerta às mudanças no comportamento da criança em períodos de transição de estágio de desenvolvimento para evitar que mudanças próprias do ser humano adquiram particularidades impresumíveis.

O conteúdo do desenvolvimento psíquico se expressa em avanços qualitativos regulares, que ocorrem na atividade reprodutiva e na composição das capacidades apropriadas. Por exemplo, na atividade do jogo, a criança se apropria da capacidade imaginativa e, ao passar para a atividade estudo, adquire a capacidade de pensar teoricamente (DAVIDOV, 1988).

Mas essas capacidades não são inatas, elas são apropriadas e desenvolvidas, em um processo em que o indivíduo reproduz, em sua própria atividade, as capacidades humanas formadas historicamente (LEONTIEV, 2001). Assim, o desenvolvimento ocorre por meio da apropriação da experiência histórico-social. Isso significa dizer que não há identificação entre apropriação e desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

Davídov e Markova (1987b) dizem que nem sempre a apropriação conduz ao desenvolvimento, o que depende do modo de organizar o ensino. Em alguns casos a apropriação pode levar ao domínio de conhecimentos, habilidades e hábitos. Em outros, conduz às capacidades, às formas gerais de atividade psíquica que é a condição para avanços essenciais no desenvolvimento psíquico.

De acordo com Vigotski (2000), Leontiev (2001), Davydov (1982), entre outros, o ensino é o sistema de organização e os meios pelos quais se transmite ao indivíduo a experiência socialmente elaborada. Ele constitui a forma internamente indispensável e geral do desenvolvimento. Só é eficiente aquele que se adianta e se orienta para o amanhã do desenvolvimento, por meio do conteúdo do conhecimento a ser apropriado (VIGOTSKI, 2000).

É nesse contexto de prospectividade, de devir, que Vigotski (2000) propôs o conceito de zona de desenvolvimento próximo para expressar a relação interna entre aprendizagem (fonte propulsora de desenvolvimento) e desenvolvimento. O referido conceito consiste na etapa do desenvolvimento em que a criança, sem orientação, não consegue resolver certo grupo de tarefas e ações. É zona de desenvolvimento próximo porque as tarefas e ações realizadas com ajuda logo serão desempenhadas de forma independente, ou seja, está próximo um estágio mais elevado de desenvolvimento.

A atividade de estudo**,** foco da presente pesquisa, tem como objetivo, de acordo com Davidov (1988), a apropriação da experiência socialmente elaborada (conhecimentos e capacidades) que supõe a formação, nos estudantes, desde o primeiro ano escolar, de abstrações e generalizações constituintes da base do pensamento teórico. Ou, como Davidov (1988), citando Hegel, do pensamento racional-dialético.

O conteúdo da atividade de estudo é o conceito teórico. As mudanças qualitativas, no desenvolvimento psíquico da criança, ocorrem com base na apropriação dos procedimentos generalizados de ação na esfera dos conceitos teóricos (DAVÍDOV E MARKOVA, 1987a). Por sua vez, o conteúdo do conceito teórico, que expressa a relação objetiva do universal com o singular, é a existência refletida, mediatizada e essencial a reprodução universal dos objetos e fenômenos.

Em Davydov (1988b) e Davidov (1988) encontra-se a afirmação de que o conteúdo é a base do ensino que promove o desenvolvimento. Dele se originam os métodos de organização do processo educativo. Para tanto, a atividade de estudo das crianças, na idade escolar, se estrutura em correspondência com o processo de exposição dos conhecimentos que resultam da investigação dos cientistas. Porém, há diferença entre ambos, no que se refere à forma de pensamento, pois o processo de produção científica se inicia com a análise da diversidade sensorial concreta dos tipos particulares de movimento do objeto e dirige-se para a revelação de sua base interna universal. Ou seja, segue das manifestações particulares para a base universal e, desse modo, o movimento é de redução do concreto ao abstrato.

A exposição dos resultados da investigação tem o mesmo conteúdo objetivo, porém, desenvolve-se da base universal - encontrada no processo de investigação - para a reprodução mental de suas manifestações particulares, que conservam a unidade interna. Desse modo, o movimento parte da base universal para as manifestações particulares, ou seja, ascende do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Existe, pois, um movimento de ascendência e descendência entre em relação ao conceito científico que Nuñes (2009, p. 50) explica:

> [...] uma vez que o conceito científico reflete os processos de transformação da relação universal em suas variadas formas particulares. Na via de cima para baixo, o processo se inicia pela própria definição dos conceitos (o abstrato) para as suas manifestações concretas, na dialética do geral ao particular, do abstrato ao concreto. Sendo assim, o conceito teórico se apoia na generalização teórica.

Conforme Davidov (1988), de certa forma o pensamento dos estudantes, no processo da atividade de estudo, se assemelha ao raciocínio dos cientistas, ao expor os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações e conceitos teóricos. Os conhecimentos são considerados como resultado das ações mentais (abstração, generalização) e como processo para obtê-lo. Os conhecimentos empíricos e teóricos correspondem, respectivamente, às ações empíricas (ou formais) e teóricas.

Davydov (1998) alerta para que o enfoque teórico não seja identificado como abstrato e o empírico como concreto. As relações entre ambos são bem mais complexas e exigem maior aprofundamento. Nesse sentido, Davídov e Markova (1987a e b) e Davydov (1982) tratam de explicitar as diferenças cruciais entre as duas abordagens. O conhecimento empírico se elabora por meio da comparação de objetos e das suas representações, o que permite a separação das propriedades iguais, comuns. Em tal comparação separa-se a propriedade formalmente geral, cujo conhecimento permite catalogar objetos individuais, soltos em uma determinada classe formal, independentemente de estes objetos estarem, ou não, relacionados entre si.

Na base do conhecimento empírico encontra-se a observação, que reflete só as propriedades externas dos objetos e, por isso, se apoia totalmente nas representações visuais. Formalmente, a propriedade geral e as propriedades particulares dos objetos são colocadas em um mesmo plano. A concretização do conhecimento empírico consiste na possibilidade de seleção de ilustrações e exemplos. O meio indispensável para fixar o conhecimento empírico é a palavra – termo.

No que se refere ao conhecimento teórico, Davídov e Markova (1987a) e Davydov (1982) dizem que tem sua base na análise do papel e da função que cumpre certa relação entre as coisas, dentro do sistema desmembrado, desarticulado. Em tal análise, busca-se a relação que serve como base genética de outras manifestações do sistema. Esta relação atua como forma geral ou essencial do todo reproduzido mentalmente. Surge, pois, com base na transformação dos objetos, que reflete suas relações e enlaces internos. De acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), tal transformação revela, no material de estudo, as relações internas ou essenciais, cuja análise permite aos estudantes seguirem a origem das manifestações externas do material a ser apropriado.

Para Davídov e Markova (1987a) e Davydov (1982), durante a reprodução do objeto em forma de conhecimento teórico, o pensamento sai dos limites das representações sensoriais, se fixa na conexão entre a relação geral e suas manifestações particulares. A concretização do conhecimento teórico requer sua conversão em uma teoria desenvolvida por via da dedução e explicação das manifestações particulares do sistema, a partir de sua fundamentação geral. O conhecimento teórico se expressa nos procedimentos da atividade mental e em diferentes sistemas simbólicos e de signos.

Embora o pensamento das crianças, em idade escolar, tenha alguns traços em comum com o pensamento dos cientistas, elas não criam conceitos, os apropriam no processo da atividade de estudo. Para Rubinstein (1960), os conhecimentos não surgem dissociados da atividade cognitiva do sujeito e não existem sem relação com ela. Nesse processo, os estudantes reproduzem, em sua própria atividade, o processo pelo qual os indivíduos criam conceitos, imagens, valores e normas (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Trazemos novamente Davídov e Slobódchikov (1991) para reafirmar que a apropriação é a reprodução, pelo estudante (em sua consciência), da experiência socialmente elaborada e expressa pela humanidade nas formas ideais da cultura. Porém, a criança só se apropria de algo em forma de atividade de estudo quando experimenta uma necessidade interna e uma motivação para tal apropriação. Esta apropriação é de caráter ativo, ou seja, deve estar ligada à transformação do material de estudo e, com isso, a obtenção de um novo produto espiritual, ou seja, de um sistema de conceitos de certo fragmento da realidade.

Por sua vez, o ensino, forma de organização dessa apropriação, tem como essência e finalidade o desenvolvimento das capacidades gerais da criança, no qual se inclui a aquisição, por parte dela, dos procedimentos universais da atividade.

Para tanto, em Davidov (1988), é considerado de suma importância o papel do professor, pois é sob sua direção que as crianças, ao iniciarem o estudo de qualquer matéria curricular, analisam o conteúdo e identificam a relação geral (principal) e suas manifestações em relações particulares. Ao registrarem a relação geral constroem uma abstração teórica. E, ao detectarem a vinculação regular da relação principal com suas manifestações particulares, realizam a generalização teórica do assunto estudado.

Desse modo, elas utilizam consistentemente tanto a abstração quanto a generalização teórica para deduzir, com a direção do professor, outras abstrações mais particulares e para uni-las ao objeto integral. O núcleo do assunto estudado serve como um princípio geral pelo qual elas podem se orientar em toda a diversidade do material curricular a ser apropriado, conceitualmente, pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

Neste percurso de apropriação do conhecimento, de acordo com Davídov (1987), destacam-se duas características principais. A primeira é que o pensamento dos estudantes se move de forma orientada do geral para o particular. O geral é compreendido como a conexão geneticamente inicial do sistema estudado, que gera o caráter do sistema concreto. Ou seja, no início identifica-se o "núcleo" inicial do sistema estudado e, a partir dele, são deduzidas as suas particularidades.

A segunda consiste na revelação, pelos estudantes, das condições de origem dos conhecimentos, em vez de recebê-los prontos. Para tanto, é necessário que as crianças: realizem as transformações específicas dos objetos e fenômenos, reproduzem e modelam (na forma objetal, gráfica e literal) suas propriedades internas que se convertem em conteúdo do conceito. São essas ações que revelam e constroem a conexão essencial e universal, fontes para as abstrações, generalizações e conceitos teóricos.

A atividade de estudo se efetiva quando as crianças realizam as ações mentais correspondentes, cujo domínio requer que o sujeito passe das ações desenvolvidas externamente, as verbais e, finalmente, aquelas desenvolvidas no plano mental (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988). Mas qualquer atividade individual parte da atividade coletiva. O desenvolvimento psíquico acontece na passagem das formas externas, coletivas de atividade, para as formas internas individuais de sua realização. Ou, nas palavras de Vigotski (2000), no processo de interiorização (internalização), de transformação do interpsíquico para o intrapsíquico.

Os processos psíquicos internos (intrapsíquicos) representam ações ideais, em particular, mentais, formadas como reflexo das ações externas, materiais (GALPERIN, ZAPORÓZHETS, ELKONIN, 1987), que são realizadas ativamente pela criança. “Aprender não é absorção passiva, não é receber meramente os conhecimentos transmitidos pelo mestre, mas a apropriação ativa destes conhecimentos” (ZAPORÓZHETS, 1987, p. 131).

Nessa perspectiva, o conceito de apropriação ativa não significa que a criança, em situação escolar, deve ser colocada em movimento ou em aulas dinâmicas que trazem à tona apenas as questões do cotidiano. Trata-se, como diz Kosik (1976), do processo de conhecer as coisas em si. Para tanto, deve-se:

> primeiro transformá-las em coisas para si; para conhecer as coisas como são independentemente de si, tem primeiro de submetê-las à própria *práxis*: para poder constatar como são elas quando não estão em contacto consigo, tem primeiro de entrar em contacto com elas. O conhecimento não é contemplação. A contemplação do mundo se baseia nos resultados da *práxis* humana (KOSIK, 1976, p. 28).

O caráter ativo, no processo de apropriação da experiência socialmente significativa, constitui a condição essencial para o surgimento de neoformações (novas estruturas evolutivas) no desenvolvimento mental. Ao estar em atividade de estudo, concomitantemente com a apropriação dos conhecimentos teóricos, os estudantes desenvolvem tanto a consciência (um tipo superior de psiquismo, o psiquismo humano) quanto o pensamento teórico.

Conforme mencionamos anteriormente, o ingresso na escola marca o início de uma nova etapa na vida da criança, pois ela sai dos limites do período infantil e ocupa uma nova posição na vida: desempenhar a atividade de estudo. Gradativamente, de acordo com Davidov (1988), os estudantes passam a sentir necessidade de fontes mais amplas de conhecimento, querem assumir a posição de uma criança que frequenta a escola. Assim, a atividade de estudo passa ser a principal entre as outras desempenhadas pelas crianças.

Nessa atividade, forma-se e se desenvolve uma importante neoestrutura psicológica, constituída pelas bases da consciência, pelo pensamento teórico, bem como pelas capacidades psíquicas a eles vinculadas, tais como: planejamento, habilidade para orientar-se corretamente na atividade conjunta e individual; análise, habilidade para diferenciar em seus conhecimentos e ações o fundamental e o derivado, o principal e o secundário; reflexão, habilidade para passar do exame dos resultados de suas ações ao esclarecimento dos procedimentos mesmos de sua realização (DAVÍDOV e SLOBÓDCHIKOV, 1991).

No início da atividade de estudo, a criança ainda não experimenta a necessidade de conhecimentos teóricos. Esta, surge no processo de apropriação real dos conhecimentos, durante o desenvolvimento de ações de estudo dirigidas para solução das tarefas correspondentes, sob orientação do professor. Como mencionado, para Vigotski (2000), a base psicológica do ensino não se desenvolve antes do seu início, mas junto com ele. Segundo Davydov (1982), a formação de uma autêntica atividade de estudo, no processo escolar, requer a introdução, desde o primeiro ano, das formas iniciais do pensamento teórico.

Davídov e Slobódchikov (1991) dizem que os conhecimentos teóricos, conteúdo da atividade de estudo, também são geradores da necessidade de aprender, componente fundamental desta, sem a qual não pode existir. Ou seja, na ausência de tal necessidade torna-se impossível forçar os estudantes a realizarem a atividade de estudo. Por sua vez, o resultado e a finalidade da atividade de estudo é a transformação do estudante, o desenvolvimento de sua consciência e personalidade criativa. Consequentemente, assume a característica de uma atividade de autotransformação.

Para Davidov (1988), é da necessidade da atividade de estudo que deriva sua concretização na diversidade de motivos que exigem das crianças a execução de ações de estudo. Tais ações impulsionam os estudantes a se apropriarem dos procedimentos de reprodução e do conteúdo dos conhecimentos teóricos. Estes refletem a inter-relação do interno e o externo, da essência e o fenômeno, do inicial e o derivado.

Ainda, no que diz respeito à necessidade da atividade de estudo, Davídov e Slobódchikov (1991) consideram-na como a estimuladora para que as crianças se apropriem dos conhecimentos teóricos. Dependendo da forma que a atividade é organizada, a necessidade dos estudantes é de experimentarem, real ou mentalmente, os objetos e fenômenos, com a finalidade de separar os aspectos gerais, essenciais e particulares externos assim como suas inter-relações. Conjuntamente com os motivos, as necessidades de estudo orientam as crianças na apropriação dos conhecimentos como resultado da própria atividade transformadora.

A apropriação dos procedimentos de reprodução destes conhecimentos, de acordo com Davidov (1988), ocorre por meio das ações de estudo, que orientam a resolução de tarefas de estudo. A tarefa é a união do objetivo com a ação e das condições para o seu alcance. Davídov e Slobódchikov (1991) esclarecem que a solução das tarefas de estudo exige uma organização especial do seu material para que as crianças possam realizar as correspondentes transformações, a experimentação material ou mental com elas.

A tarefa de estudo, de acordo com Davidov (1988), se diferencia das tarefas particulares. Estas, ao serem lidadas pelas crianças, proporcionam-lhes o domínio dos procedimentos particulares de sua solução. Ao compararem os diversos procedimentos de solução de muitas tarefas particulares, os estudantes acabam por identificar certa via geral. A apropriação deste procedimento é realizada por meio da passagem do pensamento do particular para o geral.

O movimento inverso ocorre quando as crianças resolvem as tarefas de estudo. Durante sua solução, elas, aos poucos, dominam o procedimento geral de ação para, posteriormente, resolver rapidamente e sem erros diferentes problemas particulares. A tarefa de estudo estimula o pensamento dos estudantes a explicarem o que ainda desconhecem e se apropriarem de novos conceitos e procedimentos de ação (DAVYDOV, 1982; DAVIDOV, 1988).

Na relação tarefa de estudo, ações e tarefas particulares está o que consideramos fundamental na sua proposição de organização do ensino. Para cada tarefa de estudo, Davydov propõe seis ações de estudo, cada uma é executada por um sistema de tarefas particulares.

As seis ações de estudo são (DAVÍDOV, 1988):

1. Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
2. Modelação da relação universal na unidade das formas literal, gráfica e objetal;
3. Transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em forma pura;
4. Dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
5. Controle da realização das ações anteriores;
6. Avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada.

A primeira e fundamental ação de estudo, *transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado*, começa com a introdução das crianças em situações que levam à necessidade dos correspondentes conceitos em caráter teórico (DAVYDOV, 1982). Consiste na transformação dos dados objetais da tarefa de estudo, não solucionável pelos procedimentos já conhecidos, com o fim/finalidade de revelar a relação universal (conteúdo da análise mental) do objeto. Tal relação constitui o aspecto real dos dados transformados e atua como base genética e fonte de todas as propriedades e peculiaridades do objeto integral.

Assim, por exemplo, o objetivo/finalidade principal das proposições de Davydov e seus colaboradores é que, ao finalizar o ensino fundamental, o estudante tenha formado uma concepção autêntica e completa do número real[12], com base no conceito de grandeza (comprimento, área, volume, massa, etc.).

Para um melhor entendimento da manifestação dessa primeira ação da atividade de estudo, abriremos um parênteses para expressar a concepção de número que Davydov adota em seu sistema de ensino, desde o primeiro ano. A palavra aritmética, de acordo com Aleksandrov (1976, p. 27), que é referenciado por Davydov, significa “arte de calcular”, seu objeto é o sistema de números com suas regras e relações mútuas. Assim, por exemplo, seis é igual a cinco mais um, três vezes dois, fator de 30, etc. Ou seja, os números estão em inter-relação, na qual consistem suas propriedades.

A geometria opera com corpos geométricos e figuras. Estuda suas relações a partir de sua grandeza e posição. Um corpo geométrico é um corpo real do ponto de vista de sua forma espacial (inclusive das dimensões), mas sem as propriedades, tais como densidade, cor ou peso. Uma figura geométrica é abstraída de extensão espacial; assim, uma superfície só tem duas dimensões; uma linha, apenas uma e um ponto, nenhuma. O alto nível de abstração é que distingue a geometria das outras ciências que também estudam as formas espaciais e suas relações (ALEKSANDROV, 1976).

A álgebra é a doutrina das operações matemáticas consideradas formalmente do ponto de vista geral, com abstração dos números concretos. Seus problemas estão relacionados, fundamentalmente, com as regras formais para a transformação de expressões e a solução de equações. O simbolismo algébrico é a forma adequada ao conteúdo da álgebra. Assim como foi

---

[12] Em Davídov (1988, p. 185) há um equívoco, está escrito número natural em vez de número real.

necessário criar símbolos para operar aritmeticamente com números, também foi para operar algebricamente e dar regras gerais para seu uso (ALEKSANDROV, 1976).

Conforme mencionamos no capítulo de introdução, os números racionais surgiram partir da inter-relação da aritmética com a geometria. De acordo com Caraça (1984, p. 53), “um segmento de reta é uma grandeza geométrica”. A comparação entre dois segmentos é uma operação do campo geométrico e a expressão numérica da medição significa a tradução no campo aritmético.

Por exemplo, para medir o segmento de reta $\overline{AB}$ (Ilustração 02) se aplica a este uma unidade de comprimento *u*, o segmento $\overline{CD}$ (caráter geométrico) e se calcula quantas vezes é possível repetir essa operação: $\frac{1}{3}$ de vez (caráter aritmético).

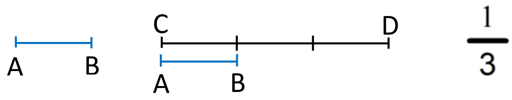


Ilustração 02

Um número racional é o quociente $\frac{p}{q}, q \neq 0,$ de dois números inteiros. Para Eves (2007), o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros (que surgiram do processo de contagem de coleções finitas de objetos) e todas as frações.

Porém, Aleksandrov (1976) diz que o desenvolvimento histórico do conceito de número racional, a partir da relação mútua da aritmética e da geometria, foi só a primeira etapa. A seguinte foi a partir da incomensurabilidade. De posse apenas dos números racionais, os matemáticos acreditavam que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Ou seja, “dados dois segmentos de reta, sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados” (EVES, 2007, p. 106).

Porém, existem segmentos de reta incomensuráveis, “isto é, segmentos de reta para os quais não há unidade de medida comum” (Idem, p. 106). Como por exemplo, a diagonal de um quadrado $(\overline{OB})$ cujos segmentos dos lados são considerados como medem uma unidade. Nesse caso, não há uma unidade de medida comum entre o lado unitário do quadrado e sua diagonal. Ou seja, não há nenhum número racional que corresponda ao ponto B da reta (ilustração 03).

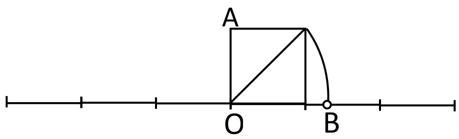


Ilustração 03

Para expressar a medida de $\overline{OB}$, tomando $\overline{OA}$ como unidade, foi necessário que os matemáticos criassem novos números mais gerais que os racionais, os irracionais. Vale salientar que a incomensurabilidade entre os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$ não é uma exceção, “na medida de segmentos, o caso mais geral é o da incomensurabilidade” (CARAÇA, 1984, p. 54).

Outros dois segmentos, bastante conhecidos, que não têm unidade de medida comum, são o comprimento do perímetro de uma circunferência (*m*) e seu diâmetro (*n*), Ilustração 04.

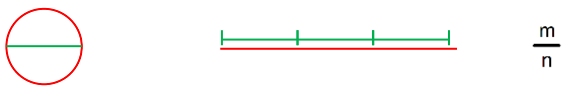


Ilustração 04

O cociente do comprimento da circunferência (*m*) tomado seu diâmetro (*n*) como unidade $\frac{\text{m}}{\text{n}}$ é três vezes e mais uma parte do diâmetro. Porém, não é possível subdividir a unidade (diâmetro) de modo que ambos os segmentos tenham uma unidade de medida comum, ou seja, $\frac{m}{n} = 3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846...$ Esse número é conhecido como o número pi (π).

Segundo Caraça (1984), o leitor que observe a igualdade anterior sem considerar seu significado "pode ser levado a supor, erradamente, que π é um número racional, visto que é $\frac{\text{m}}{\text{n}}$ a expressão geral dos números racionais; mas, para que assim seja, é preciso que *m* e *n* sejam números inteiros, o que não acontece" na igualdade anterior (CARAÇA, 1984, p. 86)

Segundo Ríbnikov (1987), a irracionalidade gerou a necessidade da criação de uma teoria geral das relações, capaz de dar as definições e introduzir as operações aplicáveis, tanto nas grandezas racionais quanto nas irracionais. Eis que surgem os números reais.

O conceito de número real, diz Newton em sua "Aritmética Geral" (apud ALEKSANDROV, 1976), é um cociente abstrato de certa grandeza tomada outra como unidade. Este número (cociente) pode ser inteiro, racional, ou, se a grandeza for incomensurável com a unidade, irracional. Em outras palavras: um número real "é aquilo que se relaciona com a unidade como um segmento de uma reta a outro tomado como unidade" (RÍBNIKOV, 1987, p. 313)[13].

Em casos particulares é um cociente de segmentos, porém também pode ser um cociente de áreas, volumes, etc. Deste modo, a aritmética dos números reais consiste nas relações quantitativas entre grandezas contínuas, ou seja, aquelas que são susceptíveis de serem subdivididas infinitamente (ALEKSANDROV, 1976). Em síntese, foi a partir das relações entre grandezas que os números foram criados historicamente.

Foi a partir de tais relações gerais que Davydov e seus colaboradores desenvolvem a gênese do referido conceito, no primeiro ano do Ensino

[13] A primeira versão em russo é de 1974.

Fundamental. Também considera o estágio atual de desenvolvimento dos números reais, formado pelos números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Desse modo, a fim de abstrair a relação essencial, genética do conceito de número, Davydov e seus colaboradores iniciam, na primeira ação de estudo, com a introdução do conceito de grandeza, pelas relações de igualdade e desigualdade ("igual", "maior", "menor")[14]. A orientação para estas relações gerais permite comparações entre grandezas apresentadas objetalmente. Logo, os estudantes fixam tais relações por meio de fórmulas expressas por letras, o que comporta a passagem para o estudo das propriedades das relações de igualdade e desigualdade em sua forma pura. Sendo assim, mesmo antes de se apropriar do conceito de número, a criança consegue determinar os resultados desta comparação, com a ajuda de fórmulas literais tais como: $a = b$, $a > b$, $a < b$ (DAVYDOV, 1982).

Porém, em algumas situações é difícil ou quase impossível efetuar a comparação direta entre duas grandezas e revelar a igualdade ou desigualdade. Para tanto, será necessário uma terceira grandeza (uma unidade de medida). A busca de quantas vezes a terceira medida cabe nas duas grandezas anteriores permite à criança determinar sua relação múltipla universal a ser modelada na próxima ação de estudo (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988). O processo é realizado por meio da discussão e reflexão, em que se evita tarefas idênticas para não conduzir a uma generalização empírica da relação geral (múltipla).

A segunda ação de estudo consiste na *modelação da relação universal, já identificada, na unidade das formas literal, gráfica e objetal*. Nem toda representação pode ser considerada "modelo de estudo", apenas aquela que estabelece a relação universal, essencial de um objeto integral e possibilita sua análise ulterior. O conteúdo do modelo de estudo estabelece as propriedades internas do objeto, não observáveis de maneira direta. O modelo de estudo, como produto da análise mental, pode ser um meio especial da atividade

[14] Em Davídov (1988, p. 185) há um equívoco, em vez de "igual", "maior", "menor" está escrito “igual”, “mais” e “menos”.

mental humana. Davídov (1988, p. 213) considera o modelo como “uma expressão objetal-semiótica do ideal”.

No exemplo da matemática escolar, referente ao processo de apropriação do conceito de número, essa segunda etapa resulta da relação entre grandezas que pode ser representada por meio de tiras de papel, depois por segmentos e, finalmente, por letras. Ao partir da análise das múltiplas relações entre grandezas, a criança identifica a conexão essencial e a reproduz nas formas objetais, gráficas e literais. A reflexão sobre quantas vezes uma unidade de medida está contida na grandeza, direcionada pelo professor, leva a criança a reproduzir o modelo: A/c = N ou A = cN.

Além dos modelos expressos por letras, os modelos gráfico-espaciais cumprem, de acordo com Davídov (1988), um importante papel na formação dos conceitos matemáticos. Eles unem o sentido abstrato com a concretização objetal. A abstração da relação matemática pode ser produzida só com ajuda das fórmulas expressas por meio de letras. Porém, nelas se fixam os resultados das ações realizadas real ou mentalmente com os objetos. As representações espaciais (segmentos, retângulos...), por terem uma grandeza visível (extensão), permitem que as crianças realizem transformações reais, cujos resultados não só podem ser supostos como também observados.

A modelação está ligada ao caráter visual, amplamente utilizado pela didática tradicional. Porém, no (sistema educacional Elkonin - Davydov) de ensino de Davídov, o caráter visual tem um conteúdo específico, pois reflete as relações e as vinculações essenciais ou internas do objeto. Na didática tradicional, o visual concreto reflete apenas as propriedades externamente observáveis.

A terceira ação de estudo consiste na *transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em forma pura*. Esta relação, nos dados reais da tarefa, parece estar "oculta” pelas propriedades particulares que, em conjunto, dificultam a sua revelação, porém, se faz visível no modelo "em forma pura". A adoção do trabalho pedagógico com o modelo é um processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração teórica da relação universal. Consiste em transformar o modelo da relação encontrada de modo a permitir o estudo de suas propriedades gerais. Assim, a modificação da unidade de medida com a mesma grandeza inicial **A** leva à mudança do número concreto que representa sua relação. Por exemplo, se A/c = n e b > c, então A/b > n (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Em síntese, Davídov e Slobódchikov (1991) dizem que a terceira ação de estudo consiste na experimentação com o modelo a fim de estudar minuciosamente as propriedades da relação geral antes identificada.

A quarta ação de estudo se refere à *dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral*. Os estudantes concretizam a tarefa de estudo inicial e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), apropriado durante a realização das ações de estudo anteriores. O caráter eficaz deste procedimento se verifica, justamente, na solução de tarefas particulares, que são focadas pelos estudantes como variantes da tarefa de estudo inicial. Os escolares separam em cada uma a relação geral e orientam-se naquela que aplica o procedimento geral de solução apropriado (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Reafirmamos, em consonância com Davidov (1988), que esta ação é a expressão da concretização do procedimento geral para revelar a relação de multiplicidade e resolver as tarefas particulares. Estas pressupõem a busca e a identificação de números concretos que caracterizam as relações entre grandezas.

Por exemplo, encontrar a propriedade numérica de uma ou outra grandeza contínua ou discreta em relação a uma medida dada. Isso permite que as crianças identifiquem o princípio geral de obtenção do número com as condições particulares de cálculo e medição. Elas compreendem o referido conceito quando conseguem passar livremente de uma unidade de medida a outra, no processo de definição da propriedade numérica da grandeza e correlacionar com ela diferentes números concretos.

O conteúdo e as consequências da quarta ação, de acordo com Davidov (1988), têm grande importância para a familiarização da criança com o mundo dos números. Além disso, constitui um traço característico da solução da tarefa de estudo, em que certas propriedades gerais dos números são estudadas antes de conhecerem a multiplicidade de suas manifestações particulares.

De acordo com Davidov (1988), as crianças resolvem a tarefa de estudo inicial por meio da construção de um método geral para obter o número e, simultaneamente, se apropriarem do conceito de número. A partir desse momento, elas podem aplicar este procedimento e seu conceito nas mais diversas situações da vida que requerem a definição das propriedades numéricas das grandezas.

Desse modo, diz Davídov (1988), a passagem do geral ao particular se realiza não só ao concretizar o conteúdo das abstrações iniciais, mas também ao substituir os símbolos expressos por letras pelos símbolos numéricos concretos. Esse trânsito se realiza como estruturação autêntica do concreto a partir do abstrato sobre a base das regularidades estabelecidas.

Davídov (1988) também propõe a quinta ação de estudo, *controle da realização das ações anteriores*. A função principal é assegurar que este procedimento geral da ação tenha todas as operações indispensáveis para que o estudante resolva exitosamente a diversidade de tarefas concretas particulares. O controle assegura a requerida plenitude na composição operacional das ações e a forma correta de sua execução.

Ao conservar a forma geral e o sentido das quatro ações anteriores, a ação de controle permite às crianças modificarem sua composição operacional, em conformidade com as condições particulares de sua aplicação e com as diferentes propriedades concretas do material envolvido, o que culmina com a conversão das ações em atitudes e hábitos (DAVYDOV, 1988b; DAVIDOV, 1988).

Em outras palavras, com base em Galperin, Zaporózhets, Elkonin (1987), o conhecimento sobre as coisas se forma como resultado das ações com estas coisas. Na medida em que se formam, as ações se convertem em capacidades, e, na medida em que se automatizam, em hábitos.

Quando a criança domina o procedimento geral de medição das grandezas e mede um determinado volume, o professor propõe a repetição, segundo Davidov (1988), de forma que ocorra alguma operação executada de forma incorreta. Assim, por exemplo, cada vez que o estudante ou professor encher a unidade de medida, deve também usar um volume de líquido diferente. Pode ocorrer que não se faça referência a um numeral durante a contagem das unidades de medida. Às crianças, compete o esclarecimento das causas da variação do resultado da medição. Tal atribuição permite-lhes que se apropriem de uma série de operações concretas indispensáveis para a medição correta. Esse procedimento, o controle, garante ao estudante a correção no cumprimento das ações.

A ação de controle está estreitamente ligada à sexta ação de estudo que é *a avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada*. Em todos os estágios da resolução da tarefa de estudo, a avaliação orienta as demais ações para seu resultado final: "A obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas" (DAVÍDOV, 1988, p. 186).

De acordo com Davidov (1988), essa ação possibilita: a determinação da ocorrência ou não de apropriação; a observação em que medida sucede o procedimento geral de solução da tarefa de estudo e do conceito correspondente e a identificação se o resultado das ações de estudo corresponde, ou não, ao objetivo final. Também traz evidência das reais condições da criança para resolver outra tarefa de estudo, que exige um novo procedimento de solução.

Para Davídov e Slobódchikov (1991), em particular, a avaliação determina o grau de formação do procedimento geral de solução da tarefa anterior e orienta a busca de um diferente procedimento de solução de uma nova tarefa de estudo. Permite ao estudante determinar a apropriação ou não do procedimento geral de solução da tarefa de estudo e suas múltiplas modificações.

Ao executar as ações de controle e avaliação, conforme alertam Davidov (1988), a atenção das crianças deve ser dirigida ao conteúdo das próprias ações e à reflexão dos seus fundamentos, em consonância com o resultado exigido pela tarefa. A reflexão, uma qualidade tão fundamental da consciência humana, é condição essencial para que estas ações se estruturem e se modifiquem corretamente.

Na ação da avaliação, quando os estudantes formaram o procedimento geral de solução da tarefa de estudo, propõe-lhes que o utilizem para solucionar tarefas parciais de caráter prático. Em sua investigação, Davidov (1988) relata que nessa ação propôs às crianças alguns problemas de matemática que incluía a relação todo-partes. No início, elas destacaram seu conteúdo com ajuda de um esquema espacial-gráfico ou de uma equação, o que permitiu-lhes o exame dos dados do problema por meio das categorias “todo e partes” e encontrar a solução correta. Os dados correspondentes foram anotados no texto do problema e, por último, os estudantes resolviam rapidamente sem manifestar externamente o processo de análise dos dados. Como resultado, o procedimento geral de solução de diferentes tarefas particulares era utilizado imediatamente.

Para Davídov e Slobódchikov (1991), a organização correta da atividade de estudo consiste em que o professor, apoiando-se na necessidade e na disposição dos estudantes para dominar os conhecimentos teóricos, propõe-lhes a tarefa de estudo, que pode ser resolvida por meio de um sistema de ações de estudo. Desse modo, o professor ensina uma ou outra disciplina escolar em correspondência com os requerimentos desta atividade e os alunos se apropriam do sistema conceitual científico que está na base do pensamento teórico como atitude especial, pessoal, diante do mundo.

Enfim, no decorrer do presente capítulo apresentamos a única forma possível de superação, ainda que parcial, da alienação historicamente instituída na sociedade, um caminho para a emancipação humana. Retomaremos ao conjunto de conceitos e pressupostos tratados até o momento no capítulo seguinte. Porém, de forma articulada com a objetivação da Proposta de Davydov, em sua especificidade o ensino do conceito de número para o primeiro ano do Ensino.

3 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS REFERENTES AO OBJETO DE ESTUDO

Nessa terceira parte apresentamos e analisamos as proposições desenvolvidas por Davydov e seus seguidores, entre eles Gorbov, Mikulina e Savieliev, para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental. O foco da análise é para as possíveis interconexões entre as significações algébricas, geométricas e aritméticas do conceito de número no movimento orientado do geral ao particular e singular. A referência da análise será o manual das proposições davydovianas para o professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). A adoção dessa obra como referência deve-se a sua relevância para o trabalho docente, conforme diz o próprio Davidov (1988, p. 199):

> Entre os materiais elaborados por nós tem especial importância os manuais para os professores, os que têm sido escritos como planos ou resumos detalhados das lições de uma ou outra disciplina escolar (apoiando-se neles o professor pode ensinar sistematicamente as crianças). Nestes manuais se descreve a sequência das tarefas de estudo, cuja solução (utilizando os correspondentes materiais didáticos) permite aos alunos assimilar, sob a direção do professor, os conhecimentos e as capacidades por meio da realização das ações de estudo. Os manuais em questão foram criados durante o prolongado trabalho investigativo psicopedagógico que transcorreu em forma de ensino e educação experimentais. Neles se encarnaram as ideias psicológicas do nosso coletivo de investigação referidas ao conteúdo e os métodos de ensino e educação que impulsionam o desenvolvimento das crianças.

Antecipamos que as proposições apresentadas em nossa análise não expressam todas as tarefas particulares e nem são suficientes para serem desenvolvidas com os estudantes em situação escolar. Isso significa dizer que não referenciamos todas as tarefas, mas apenas algumas delas que consideramos como representativas de sua totalidade para expressar o movimento subjacente às proposições davydovianas para o ensino do conceito de número no primeiro ano escolar. No entanto, na análise, não perdemos de vista que elas se inserem num contexto mais amplo: a tarefa da atividade de estudo, no que se refere à Matemática.

A estrutura da atividade de estudo inclui componentes tais como, a tarefa de estudo, as correspondentes ações e operações (DAVIDOV, 1988). Durante o desenvolvimento da tarefa de estudo "as crianças vão dominando o procedimento geral de solução de todas as tarefas particulares de uma determinada classe" (DAVIDOV, 1988, p. 245). As ações correspondem "com a finalidade da tarefa; suas operações, com as condições desta" (idem, p. 181).

A proposição de Davydov (1982, p. 431) para o ensino de matemática do primeiro ao décimo ano escolar estabelece como finalidade que os estudantes compreendam o mais claramente possível a concepção unitária "de número real". E acrescenta: essa compreensão deve ser adquirida na escola primária. Ter por base tal entendimento representa um diferencial, até certo ponto incomensurável, em relação ao proposto no atual ensino brasileiro – como é possível observar, por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) –, que estabelece como ponto de partida e foco de ensino nos anos iniciais apenas no conceito de número natural.

Davydov (1982) estabelece a introdução, desde o primeiro ano escolar, do fundamento genético de todos os tipos de número real: o conceito de grandeza. Considera os números naturais e reais como sendo um aspecto particular deste objeto matemático geral. Das grandezas é que se deduzem os casos particulares de sua manifestação. Os números são considerados "caso singular e particular de representação das relações gerais entre grandezas, quando uma delas se toma como medida de cálculo da outra" (DAVYDOV, 1982, p. 434).

O conteúdo do conceito teórico de número é estruturado em correspondência com o movimento de ascensão do pensamento abstrato ao concreto (ou segundo o movimento do pensamento geral para o particular e singular). Inicialmente, procede-se análise das condições de origem do referido conceito a partir das relações gerais e abstratas entre grandezas por meio de ações objetais. Na sequência, introduz-se a unidade de medida como elemento mediador das diferentes expressões singulares de número. A conexão geneticamente inicial (geral) é reproduzida em modelos. Os modelos permitem o estudo das propriedades do conceito de número em forma pura e a resolução de sistemas de tarefas particulares.

O resultado final da tarefa de estudo, em matemática, no primeiro ano escolar é a "obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas" (DAVIDOV, 1988, p. 188). Para tanto, são propostas ações e operações desenvolvidas por meio de tarefas particulares que levam à reprodução, pelas crianças, das capacidades psíquicas, socialmente elaboradas, vinculadas ao pensamento teórico, tais como: análise, planejamento e reflexão. Estas, de acordo com Davidov (1988, p. 82), "constituem as novas formações psicológicas da idade escolar inicial".

Feita essa apresentação a respeito das questões nucleares da proposta foco e objeto do presente estudo, passaremos a sua análise com respaldo em seus próprios fundamentos matemáticos, filosóficos e psicológicos. Além disso, estabelecemos um diálogo com as proposições apresentadas nos livros didáticos brasileiros, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático, para o ensino de Matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental (PNLD, 2009).

Como já mencionado anteriormente, dada a similitude entre eles, não faremos referência a um livro em específico, pois as orientações apresentadas nos diferentes livros, em sua essência, são extremamente semelhantes. As diferenças incidem apenas na aparência externa. Os princípios que fundamentam o conteúdo e os métodos de ensino de tais livros mais se aproximam ao que Davídov (1987) denomina de tradicional.

A organização dessa terceira parte da tese segue a sequência e a estrutura apresentada no manual das proposições davydovianas para o professor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). O referido manual compõe-se de dez capítulos, no entanto, trataremos dos nove primeiros, cada qual com seus subcapítulos, compostos por um sistema de tarefas particulares, conforme segue. O décimo capítulo deixou de ser analisado por reproduzir, em função do próprio método, o movimento apresentado nos anteriores.

3.1 PROPRIEDADES DOS OBJETOS E FIGURAS: 3.1.1 Cor e a forma; 3.1.2 Cor, forma e tamanho; 3.1.3 Posição; 3.1.4 Não é vermelho e não é círculo; 3.1.5 Tamanhos (maior–menor).

3.2 GRANDEZAS: 3.2.1 Pontos, segmentos, linhas retas e curvas; 3.2.2 Comprimento; 3.2.3 Linhas fechadas abertas; 3.2.4 Limites das figuras; 3.2.5 Área; 3.2.6 Volume e capacidade; 3.2.7 Massa; 3.2.8 Modelagem gráfica das relações de igualdade e desigualdade; 3.2.9 Quantidade.

3.3 OPERAÇÕES COM GRANDEZAS: 3.3.1 Alteração das grandezas; 3.3.2 Igualando as grandezas; 3.3.3 Arcos; 3.3.4 Marcando as grandezas com letras; 3.3.5 Permanência da medida da grandeza em detrimento da forma; 3.3.6 Registro dos resultados de comparação = e ≠; 3.3.7 Ordem das grandezas.

3.4 INTRODUÇÃO DO NÚMERO: 3.4.1 Comparação das grandezas com ajuda da unidade de medida; 3.4.2 Medição, medidas e marcas; 3.4.3 Palavras e marcas; 3.4.4 Como deve ser a sequência de palavras; 3.4.5 Unidade de medida composta; 3.4.6 Quantas medidas são?

3.5 RETA NUMÉRICA: 3.5.1 Introdução da reta numérica; 3.5.2 Representação de grandezas na reta numérica.

3.6 COMPARAÇÃO DE NUMERAIS: 3.6.1 Comparação de numerais na reta numérica; 3.6.2 Relação entre os números e grandezas medidas com a mesma unidade de medida; 3.6.3 Correlação entre o resultado da medição e escolha da unidade de medida; 3.6.4 Régua; 3.6.5 Unidades de medida de comprimento padronizadas; 3.6.6 Unidades de contagem.

3.7 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NUMERAIS: 3.7.1 Diferença de números; 3.7.2 Diferença entre grandezas; 3.7.3 Como encontrar um valor a partir de outro valor e da diferença; 3.7.4 Adição e subtração; 3.7.5 Os casos a ± 1, a ± 2, a ± 3; 3.7.6 Utilização das letras para representar os números; 3.7.7 O número zero.

3.8 TODO-PARTES: 3.8.1 Todo-partes em uma situação concreta; 3.8.2 Como determinar o significado do todo; 3.8.3 A ordem dos números na adição; 3.8.4 As variantes dos significados das partes do todo; 3.8.5 Como encontrar o significado da parte.

3.9 OS PROBLEMAS-TEXTOS: 3.9.1 A análise dos problemas-textos com ajuda do esquema; 3.9.2 Compondo problemas.

Essas tarefas não representam a totalidade daquelas propostas por Davydov e seus colaboradores mas são exemplo do movimento orientado do geral para o particular e singular. Esclarecemos, ainda, que nem todas foram analisadas particularmente, em alguns casos ocorreu no contexto do sistema de tarefas particulares que expressavam o mesmo propósito, isto é, características de um novo elemento conceitual.

3.1 PROPRIEDADES DOS OBJETOS E FIGURAS

Ao ingressar na escola, aos seis anos de idade, a criança inicia o processo de transição para atividade de estudo, cujo conteúdo, conforme já mencionado, são os conhecimentos teóricos. Trata-se do início de um novo estágio de seu desenvolvimento, cuja atividade principal será a de estudo. Irá se apropriar dos conteúdos teóricos e das capacidades de operar com estes.

Mas para tanto Davidov (1988) diz que se faz necessário, inicialmente, colocar a criança em **ação investigativa**, que contribuirá para desenvolver-lhe a capacidade de estruturar autonomamente e transformar de modo criador sua própria atividade de estudo. Além disso, promover no ser seu verdadeiro sujeito, preparado para um prolongado trabalho de estudo. Portanto, para o autor, a capacidade para estudar também precisa ser desenvolvida, pois não é inata e nem é desenvolvida na atividade principal precedente, do jogo.

Nesse sentido, as crianças são conduzidas à elaboração de perguntas, inicialmente direcionadas ao professor, depois aos seus colegas. O meio utilizado para desenvolver a ação investigativa, em sala de aula, é as propriedades que permitem diferenciar objetos (cor, forma, tamanho e posição). Elas permitem encaminhar os estudantes para o mundo da matemática. Portanto, o foco não é só a capacidade das crianças diferenciarem os objetos pela cor, forma e tamanho, pois Davydov pressupõe que elas já sabem fazer tal distinção quando ingressam no Ensino Fundamental.

Davydov considera que a base de todo o conhecimento humano é a prática-objetal. Desse modo, os objetos e figuras são os instrumentos que orientam as crianças na realização do sistema de tarefas que promovem o desenvolvimento da ação investigativa, sob a direção do professor.

3.1.1 Cor e forma

Passaremos a apresentar, analiticamente, algumas tarefas que colocam os alunos em desenvolvimento da ação investigativa, com destaque para duas características das figuras: cor e forma.

3.1.1.1 - Na tarefa de introdução, apresenta-se às crianças o desenho de uma casa inacabada, porém sem um pilar de sustentação. Separadamente, são apresentadas algumas possibilidades de pilares, diferentes pela cor e pela forma, para que os alunos escolham convenientemente aquele que falta, conforme Ilustração 05 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

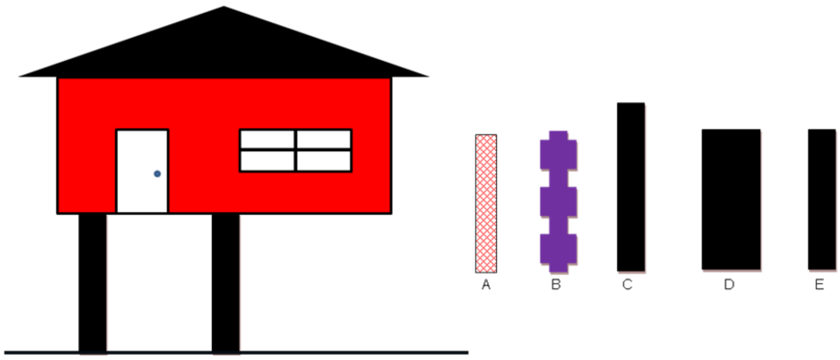


Ilustração 05

Provavelmente, as crianças escolherão a figura E (pilar) ao observar as possibilidades apresentadas. No entanto, também é preciso discutir as variantes erradas. Para isso, o professor sugere, como hipótese, as demais alternativas a fim de justificar a conclusão de que elas não apresentam as propriedades desejadas, pelo critério estabelecido: a cor e/ou a forma.

Trazer à tona a discussão sobre cada uma das cinco opções (A, B, C, D, E) descaracteriza o que poderia ser denominado de procedimentos tecnicistas de testes de múltiplas escolhas, em que o estudante, muitas vezes por razões óbvias e por critério unicamente empírico, escolhe uma alternativa sem a devida análise que demonstra a pertinência teórica da escolha (FIONENTINI, 1997).

Observar cada um dos pilares propostos e expressar suas peculiaridades, como também as similaridades com os demais, oportuniza a construção de argumentos que justificam a opção por aquele considerado correto. Além disso, mesmo que se tenha estabelecido o critério cor e forma, abre possibilidade para expandir esses limites para outras propriedades, como tamanho e superfície.

A extrapolação para outros referenciais de distinção atendem ao princípio de caráter desenvolvedor do ensino proposto por Davydov, em atenção ao conceito vygotskiano de zona de desenvolvimento próximo (VIGOTSKI, 2000). Ou seja, não deixa a criança expor somente aquilo que consegue observar espontaneamente, como dá oportunidade de, com a orientação do professor, dirigir a atenção para aspectos que sozinha passariam despercebidos. Por sinal, essa é tônica adotada em todas as tarefas.

3.1.1.2 - Ainda com base nas propriedades cor e forma propõe-se outra investigação, com a apresentação de algumas figuras. O professor ou um colega pensa em uma delas e os demais deverão investigar qual está sendo pensada, com a condição de que seja formulado o menor número de perguntas possível. No primeiro momento, as figuras em questão têm a mesma cor, mas se diferem pela forma (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

Ilustração 06

As crianças investigam as possibilidades de uma figura pensada pelo professor. Para tanto, elas podem fazer qualquer pergunta e, provavelmente, nomearão cada uma das figuras na forma afirmativa: Círculo. Quadrado... Cabe ao professor orientá-las para que emitam as perguntas: *É o círculo? É o quadrado?...* Pode acontecer que elas interroguem para descobrir a figura pensada pelo professor. Nessa situação, é possível a ocorrência de até quatro perguntas, pois têm à disposição cinco possibilidades.

Nesse momento, os estudantes são interrogados para que possam elaborar a resposta esperada com apenas uma pergunta. Assim, a pergunta ideal é: Qual a forma da figura que você está pensando? Não faria sentido fazer referência, por exemplo, à cor da figura, uma vez que todas são pretas.

3.1.1.3 - No segundo momento, apresenta-se a situação inversa, isto é, todas as figuras têm a mesma forma (Ilustração 07), o que não seria pertinente perguntar: *Qual é forma da figura?* Como a diferença está na cor, então é para essa variante que os estudantes dirigirão a atenção na formulação de perguntas, que tem como a ideal: *Qual a cor da figura* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008)?

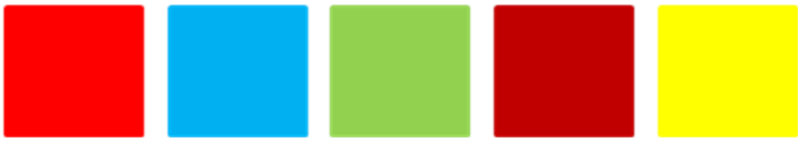


Ilustração 07

3.1.1.4 - As figuras apresentam cores e formas diferentes (Ilustração 08). Assim como nas tarefas anteriores, as crianças devem investigar aquela pensada pelo professor, porém, em qualquer sequência, o que induz à formulação de no mínimo duas perguntas, pois uma só não é mais suficiente: *Qual é a cor da figura? E qual é a forma?* Cada uma delas estreita consideravelmente a zona de busca, o que requer a retirada das figuras depois de obter a resposta para cada uma das perguntas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

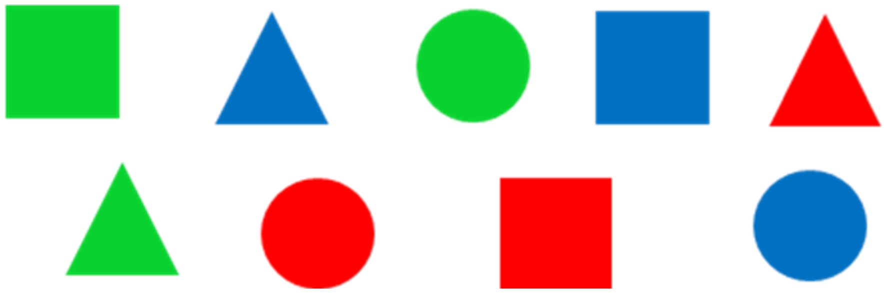


Ilustração 08

Para concluir as tarefas referentes apenas à cor e à forma, sugere-se outras similares às anteriores, porém, quem pensa e investiga a figura são as próprias crianças.

Como diz Obújova (1987), no processo de desenvolvimento das tarefas as operações das crianças devem estar socialmente organizadas. Um dos meios para tal é em grupos. Somente nas condições de cooperação a criança começa a compreender o ponto de vista de outras pessoas e a diferenciá-los do seu.

Situações referentes às formas de objetos e figuras também são apresentadas nos livros didáticos brasileiros, mas não como ponto de partida. A ênfase é na relação com as formas dos objetos utilizados pelas crianças em seus afazeres diários: uma bola é associada a uma esfera, um dado a um cubo, entre outras.

Além disso, são disponibilizados aos alunos alguns agrupamentos de figuras iguais, como por exemplo: só com círculos de quatro tamanhos distintos, outro com quatro quadrados com tamanhos e disposição espacial diferentes, entre outros. Cabe à criança observá-los e relacioná-los aos objetos que lembram tais figuras: uma caixa de CD, cuja superfície lembra o quadrado, a do CD com o círculo, e assim por diante.

Cada abstração verbal (esfera, cubo, quadrado, círculo) é correlacionada com uma imagem sensorial. É com base na comparação de objetos e figuras formalmente iguais que se procede a generalização. Diferentemente das proposições davydovianas, que promovem o desenvolvimento das tarefas por meio da relação entre formas diversas.

3.1.2 Cor, forma e tamanho

Esse nível da ação investigativa atende as condições atingidas pelas crianças, como também lhes instiga novas possibilidades. Cada tarefa particular ou conjunto delas traz um novo componente com teor prospectivo no que se refere ao desenvolvimento do pensamento conceitual teórico.

3.1.2.1 - Acrescenta-se uma nova propriedade, o tamanho, nos limites da relação “grande-pequeno”. Com isso, as figuras são consideradas diferentes pela cor, forma e também pelo tamanho (Ilustração 09). Como antes, é preciso investigar a figura pensada pelo professor, com o mínimo de perguntas possível (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

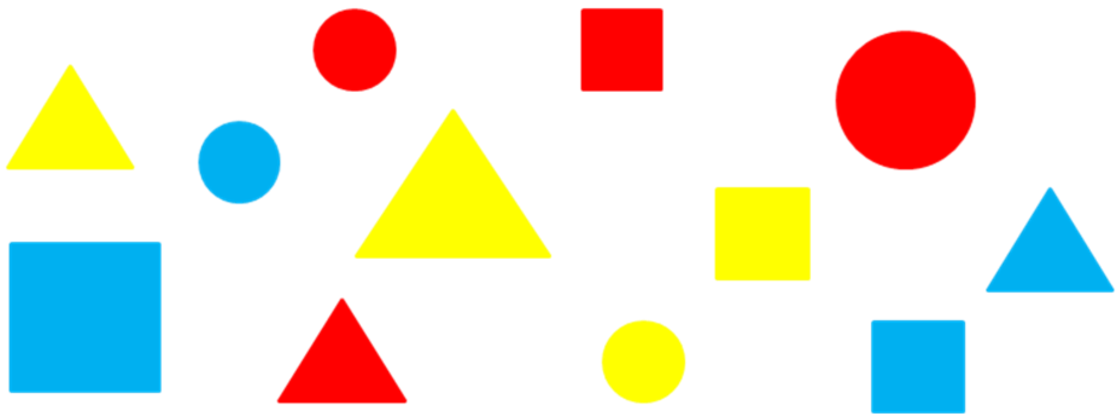


Ilustração 09

O professor pode pensar em uma das duas superfícies circulares vermelhas ou em uma das duas superfícies triangulares amarelas ou, ainda, em uma das duas superfícies quadradas azuis. Como consequência das tarefas executadas anteriormente, as crianças conseguem elaborar as perguntas pertinentes à cor e à forma da figura. Porém, com as duas perguntas, sobrarão duas figuras da mesma forma e mesma cor, que não são mais suficientes. É necessário, pois, a elaboração de uma terceira pergunta relacionada ao tamanho.

A propriedade tamanho possibilitará a introdução do conceito de grandeza, gênese do conceito de número. Por isso, não entramos em detalhes nesse momento, pois retomaremos, mais adiante, com aprofundamento na análise do primeiro capítulo e, principalmente, do segundo e terceiro.

3.1.3 Posição

De acordo com Davidov (1988, p. 213), as tarefas relacionadas à solução de problemas geométricos conduzidas pela posição e forma de figuras favorecem o desenvolvimento, nas crianças, das “representações espaciais elementares e a capacidade de raciocinar”.

3.1.3.1 - Insere-se um novo modo de diferenciar um objeto ou figura: por sua posição em relação aos demais. Nesse caso, a especificidade são as seguintes relações: “acima – abaixo”, “à esquerda – à direita”, “fica entre” (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).


Ilustração 10

Apresenta-se no quadro o desenho de sete superfícies quadradas de tamanhos iguais, posicionados verticalmente (Ilustração 10). Quatro dessas superfícies são de cor azul, alternados com três de cores diferentes (verde, vermelha e amarela).

O professor pensa, propositadamente, em uma superfície quadrada azul. As crianças devem questionar sobre aquela que o professor pensou, mas não podem apontar a figura e dizer: *é esta?*

As perguntas sobre a forma e o tamanho são inúteis, pois a única propriedade pela qual as superfícies quadradas se diferem é a cor. Então, a provável questão que as crianças produzirão é: *De que cor que é superfície quadrada?*

O professor responde que é de superfície azul. Tal tarefa leva à busca de alternativas, pois existem quatro possibilidades além do que as propriedades conhecidas pelas crianças são insuficientes para a identificação da figura pensada. A conclusão será que as superfícies quadradas azuis se diferem apenas pelo lugar que ocupam na sequência vertical. Por isso, as perguntas serão sobre a posição envolvendo: *acima de, abaixo de, mais acima, mais abaixo, em cima, em baixo e entre.*

3.1.3.2 - A próxima tarefa, com base na ilustração 11, é similar à anterior, só que as figuras são posicionadas na horizontal. Durante sua execução, surgem ou apresentam-se novas expressões linguísticas: à *direita de, à esquerda de, mais à direita, mais à esquerda e entre* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 11

3.1.3.3 - Por fim, contemplam-se todas as propriedades estudadas até então. As figuras (Ilustração 12) são organizadas na horizontal e diferem-se pela forma, cor e tamanho (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 12

As crianças descreverão as figuras de acordo com a sua posição. O professor propõe algumas perguntas, como por exemplo:

1) Quais são as figuras que ficam à direita do grande círculo de superfície azul?
2) Quais são as figuras que ficam entre o grande triângulo de superfície amarela e o grande círculo de superfície azul? Quais são as figuras que ficam à esquerda do círculo azul pequeno?

A sugestão é que o professor elabore outras perguntas, além das três apresentadas, e proponha outra tarefa similar, porém, com as figuras colocadas na vertical.

A solicitação para que seja observada a posição de objetos e figuras também aparece nas proposições brasileiras. Apresenta-se, por exemplo, a ilustração de três crianças correndo. Os estudantes deverão identificar quem está na frente de todos; quem está atrás de todos; finalmente, quem está entre o da frente e o de trás. Também são propostas situações em que a análise está voltada para a incidência nos objetos que estão acima e abaixo de algo.

Esse tipo de proposição, segundo Davidov (1987), conserva a relação com os conhecimentos cotidianos que a criança adquiriu antes de entrar na escola. Tal sucessão, de acordo com o referido autor, leva à indistinção entre os conceitos científicos e cotidianos. Por extensão, conduz à aproximação exagerada entre a atitude propriamente científica e a cotidiana diante das coisas. “O conteúdo matemático torna-se restrito aos parâmetros daquilo que pode ser apropriado fora da escola pelo cotidiano. Assim, a prática escolar desescolariza o indivíduo” (GIARDINETTO, 1997, p. 20).

Para Davydov, ao ingressar na escola a criança deve sentir claramente o caráter novo do conteúdo que agora recebe, bem como perceber que é diferente da experiência pré-escolar, trata-se de conteúdo do conhecimento teórico. Este, por sua vez, não é a simples continuidade, aprofundamento e ampliação da experiência cotidiana. Portanto, na escola, deve-se começar por operações não espontâneas da atividade de estudo, tais como: levantar hipóteses, delimitar perguntas, estabelecer relações, entre outras.

3.1.4 Não é vermelho e não é círculo

Vale observar que as próximas tarefas seguem uma finalidade: colocar a criança em ação investigativa. Porém, cada uma delas não rompe definitivamente com o teor da anterior, mas apresenta um elemento novo que, nesse caso, é a negação.

3.1.4.1 - Como anteriormente, é preciso descobrir a figura que o professor pensou com o menor número de perguntas possível, com a diferença de que ele responde aos alunos de forma negativa. As figuras se diferem pela forma e pela cor, conforme ilustração 13, a seguir (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

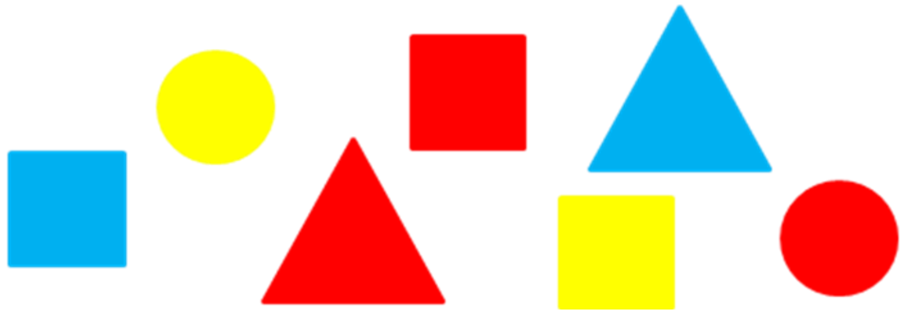


Ilustração 13

As perguntas serão aquelas sobre a cor e a forma. Por exemplo, se a criança perguntar: D*e que forma é a figura*? O professor pode responder que *não é de superfície quadrada.* Apagam-se as superfícies quadradas, o que faz permanecer somente superfícies circulares e triangulares (Ilustração 14).

Ilustração 14

A criança pode perguntar: *De que cor é a figura*? O professor responderá, por exemplo, que *ela não é vermelha*, e apaga as figuras dessa cor. Isso reduzirá o conjunto a duas unidades (Ilustração 15).

Ilustração 15

Consequentemente, torna-se possível qualquer pergunta sobre a cor ou a forma. Assim sendo, toda resposta, tanto na forma negativa quanto na afirmativa, permitirá descobrir a figura em questão. Tarefas similares podem ser realizadas, com a diferença que quem pensa a figura e responde as perguntas na forma negativa são as próprias crianças.

Vale observar que cada elemento novo, ou mesmo a troca de papéis entre alunos e professor, atende ao pressuposto de Davidov (1988) de que a educação escolar seja estruturada de modo que influencie e dirija o desenvolvimento da criança. A tarefa da escola não consiste em dar ao aluno uma ou outra soma de fatos conhecidos, mas ensinar-lhe a orientar-se, independentemente, na formação científica. Em outras palavras, compete à educação escolar ensinar os alunos a pensar, ou seja, desenvolver ativamente os fundamentos do pensamento contemporâneo.

Davidov (1987) faz críticas ao ensino que utiliza unicamente as possibilidades formadas e presentes na criança. Menosprezar o potencial do estudante é expressão que justifica a limitação e a pobreza do ensino primário, apelando a características evolutivas da criança. É, pois, sinal de subestimação tanto às possibilidades da criança quanto ao papel que a educação desempenha no seu desenvolvimento.

3.1.5 Tamanhos (maior–menor)

Nessa tarefa, parte-se do princípio de que não é possível determinar o tamanho de um objeto isolado, ou dizer se ele é grande ou pequeno, pois a referida propriedade tem caráter relativo. Um objeto será pequeno em relação a outro maior. A comparação entre dois objetos, diferentes pelo tamanho, conduz somente a duas possibilidades de distinção: qual deles é maior ou qual é menor. E, ao se considerar o tamanho, também é possível a organização em ordem crescente ou decrescente.

3.1.5.1 – Para as noções de tamanho, a tarefa prevê a apresentação de figuras na horizontal, que se diferem pela cor, forma e tamanho, conforme a ilustração 16 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 16

A intenção é fazer com que as crianças descrevam as figuras por sua posição. O professor faz as seguintes perguntas:

1. Quais são as figuras que ficam à direita da superfície triangular azul?
2. Quais são as figuras que ficam à esquerda da superfície triangular azul?
3. Qual é a figura que fica entre a superfície triangular azul e a circular verde?

O professor apaga a superfície quadrada que está à esquerda das figuras (pequena) e desenha uma de cor vermelha grande à direita das figuras, maior que aquela que ficou no quadro (Ilustração 17).

Ilustração 17

Depois, repete a última pergunta: *Qual é a figura que fica entre a superfície triangular azul e a superfície circular verde?* A conclusão *será que o* quadrado é grande em relação ao que foi apagado e pequeno se comparado ao que foi acrescentado.

3.1.5.2 - O professor desenha no quadro uma superfície circular amarela e interroga os alunos sobre a sua cor, forma e tamanho. Diante da impossibilidade de resposta para esse último atributo, acrescenta-se mais uma figura, por exemplo, uma superfície circular verde de tamanho maior. Isso possibilita às crianças concluírem que uma superfície circular amarela é pequena. Em seguida, o professor acrescenta mais uma superfície circular menor que a amarela, conforme a ilustração 18 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 18

As crianças devem tornar suas respostas mais precisas, por exemplo: uma superfície circular amarela é maior que o azul e menor que o verde, ou seja, em relação aos dois, seu tamanho é médio. Consequência do modo como são encaminhadas as discussões, chega-se à seguinte conclusão: não é possível dizer se a figura é grande ou é pequena quando ela encontra-se isolada. A síntese a elaborar é que a possibilidade de determinar o tamanho de uma figura ocorre somente na relação com outra. Ela sempre é maior ou menor se for comparada com outra, portanto, não se pode dizer que uma é pequena e outra é grande, isoladamente.

Nos livros didáticos brasileiros o caráter relativo da propriedade tamanho dos objetos e figuras não é considerado. Apresentam apenas algumas situações que envolvem, de forma estática, os atributos pequeno, médio e grande, maior-menor, ou mais curto-mais comprido.

Tal orientação é indispensável para afazeres cotidianos, porém, segundo Davidov (1987), é insuficiente para que a criança possa assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo para a realidade. A referida relação supõe a compreensão das contradições internas das coisas, ignoradas precisamente pelo raciocínio empírico.

A superfície circular amarela, na tarefa anterior, de pequena passou a ser média. Esse movimento só foi possível porque não foi considerado isoladamente, ou estaticamente, mas em interação com outras superfícies circulares, num sistema de relações.

3.1.5.3 - Na sequência (Ilustração 19), as crianças recebem cinco recortes de base triangular que se diferem pelo tamanho e pela cor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 19

A sugestão do professor às crianças é que comparem o recorte azul (maior) com o verde (menor). Na sequência, solicita-lhes que coloquem o recorte azul à direita do verde. Depois, comparem o recorte vermelho com o azul e o verde. Observa-se que ele é, respectivamente, menor e maior. Segue o questionamento sobre a melhor posição para colocá-lo, que implicará a conclusão que deve ser entre o verde e o azul por ser maior que um e menor que o outro (Ilustração 20).

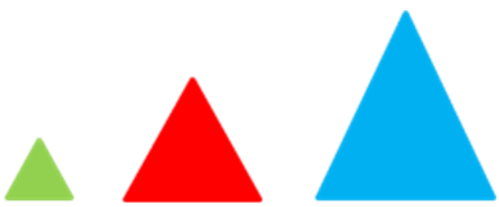


Ilustração 20

Discute-se com as crianças sobre a disposição dos recortes, na ordem crescente, do menor para o maior, de modo que cheguem à síntese: quanto maior é o recorte, mais à direita ele fica. Posteriormente, são colocados os outros recortes nesta sequência, com o propósito de que, na execução da tarefa, as crianças argumentem as ações desenvolvidas. A participação do professor centra-se na sugestão de posicionamentos errados, para que as crianças o contestem. O resultado da tarefa será o seguinte (Ilustração 21):

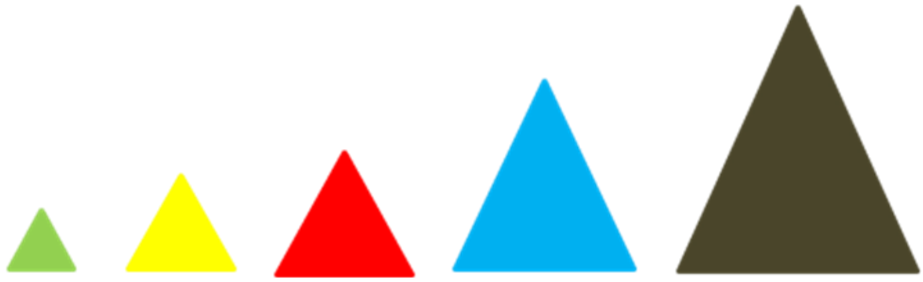


Ilustração 21

Ao final, o professor recomenda às crianças a organização dos recortes, na ordem inversa, do maior para o menor. A sequência objetal organizada em ordem crescente e decrescente constitui um dos fundamentos para introdução, mais tarde, da sequência numérica.

A mesma sequência de objetos também é contemplada nos livros didáticos brasileiros, mas com a finalidade de apenas observar, pois seus elementos são fixos. Trata-se de ilustrações que não contemplam o movimento dos objetos no espaço e as condições de origem da sequência. Diferentemente da tarefa anterior, da proposta de Davydov, em que o experimento com os objetos sai dos limites da exterioridade imediata ao considerar as relações entre os tamanhos dos recortes.

Em síntese, nesse primeiro capítulo das orientações para o desenvolvimento das tarefas, Davydov e seus colaboradores propõem o desenvolvimento de algumas propriedades básicas das relações matemáticas relacionadas à posição, tamanho e forma. Por sinal, também aparecem nos livros didáticos brasileiros, porém de forma fragmentada, estática e voltam-se somente para a observação empírica.

A singularidade das proposições davydovianas incide no movimento do sistema de tarefas, ou seja, cada nova tarefa é introduzida no sistema de outras tarefas que inter-relacionam diferentes propriedades. Prima-se pelo desenvolvimento, em todas as crianças, de um novo tipo de pensamento, o teórico, para investigar e compreender a complexidade das relações entre figuras e objetos.

Além disso, contribui para o surgimento de qualidades pessoais, como a capacidade de cooperar em ações desenvolvidas coletivamente sem, no entanto, nenhuma apologia ao aluno que chegue primeiro à conclusão esperada. Por exemplo, não se fez destaque à criança que imediatamente pode dizer corretamente a figura pensada pelo professor ou pelo colega. As tarefas são desenvolvidas coletivamente, seja com a participação do professor ou apenas entre as crianças.

Na próxima seção, serão analisadas as tarefas do capítulo dois do livro em referência (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008), que levam às transformações práticas com os objetos e figuras a fim de explicitar suas conexões internas, essenciais e indispensáveis para introdução do conceito de número.

3.2 GRANDEZAS

O problema central do ensino de matemática nos anos iniciais, no entendimento de Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 306), foi resolvido pela proposta de Davydov ao possibilitar que a criança revele “a grandeza como propriedade dos parâmetros físicos dos objetos materiais e a passagem aos tipos de relações possíveis entre as grandezas e suas determinações quantitativas”.

Vale reafirmar que as grandezas se constituem em elemento central do processo de formação do pensamento teórico da Matemática. Como forma de promover a apropriação dessa essencialidade, as tarefas são organizadas, inicialmente, a partir da realidade objetiva, concreta. Ou seja, o material é dado de forma imediata, visível e tangível, mas passível de transformações práticas.

As grandezas são destacadas “nos objetos físicos”, o que permite a familiarização da criança “com suas propriedades fundamentais” (DAVYDOV, 1982, p. 431). Em momento posterior, por meio da abstração elaborada, as referidas tarefas são organizadas de forma que ocorra a separação dos aspectos fundamentais para a captação dos nexos e relações essenciais.

Vale lembrar também que, para Davydov (1982), o ensino deve promover a apropriação, pelas crianças, da essência dos conceitos. No que diz respeito ao número, significa encontrar o geral, como base e fonte única, que é o conceito de grandeza. Este geral, como consequência da realização do processo de medida, determina o surgimento dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, bem com a relação mútua entre eles.

Nessa seção, a referência é o segundo capítulo das proposições davydovianas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008), cujo foco ainda são as propriedades dos objetos, iniciado no primeiro capítulo. No entanto, a ênfase é para os parâmetros gerais das grandezas, com vinculação às relações de “igual”, “maior”, “menor” e suas propriedades, que são reveladas durante as operações com comprimentos, áreas, volumes, massas, entre outros (DAVIDOV, 1988). Nessa etapa, ainda são adotados somente os termos *mais curto, mais longo, mais pesado, mais leve, maior que, menor que e igual a,* de forma geral, isto é, sem o uso do número.

3.2.1 Pontos, segmentos, linhas retas e curvas

Nas tarefas a seguir analisadas, a centralidade volta-se para algumas representações geométricas (linhas, ponto e segmento) com olhar para a posição de uma em relação à outra. Os elementos são considerados no sistema de sua constituição, ou seja, um está ligado a outro e se conformam num sistema.

Os elementos geométricos, incialmente, se expressam em ações práticas e, depois, dadas as características das tarefas, ocorre a passagem para o plano ideal. Tal acesso atende o pressuposto de Marx (1983, p. 20), que “*não é nada mais que o material*, transposto e traduzido na cabeça do homem”.

Trata-se de um processo que, sob a condução do professor, as crianças se orientam pelos órgãos dos sentidos. Isso não significa que as conexões internas poderão ser observadas diretamente, mas, conforme mencionado, são mediadas por um sistema em movimento a partir da diversidade de figuras e objetos interatuantes.

3.2.1.1 - O professor distribui duas folhas de papel sulfite para as crianças e solicita-lhes que dobrem uma delas. A conclusão será que a dobra tem forma de linha reta. Esta é considerada uma figura com uma só dimensão. Com a outra folha, o professor propõe que desenhem uma linha reta, sem fazer uso de instrumentos, e comparem com aquela formada pela dobra da primeira folha. Os estudantes concluirão que a linha desenhada a mão livre é torta ou curva. É, então, apresentado o seguinte questionamento: *Como fazer para desenhar uma linha reta*? Após ouvir as possibilidades propostas pelas crianças, a conclusão será de que há três possibilidades: dobrar a folha, utilizar qualquer outro objeto com os lados retos e a régua (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Vale destacar que o direcionamento dado na execução das tarefas sempre coloca a criança em ação investigativa. Além disso, encaminha para a busca da essência teórica sem ficar estritamente nas características externas ou no movimento físico que permite apenas a percepção empírica do objeto.

3.2.1.2 – Solicita-se às crianças para que contornem a palma da sua mão e indica-lhes que a linha traçada na folha em vez de reta é curva. Não há necessidade de focar, no momento, a diferença entre os dois tipos de linhas, em nível conceitual. Contudo, vale lembrar ao leitor que a linha é reta porque sua curvatura é zero (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas sugerem a apropriação, pela criança, dos procedimentos, socialmente elaborados de ação com os objetos que, de acordo com Elkonin (1987), é internamente indispensável para que ela se oriente no mundo objetal. Ao reproduzir a linha – que também é elemento da cultura humana – a criança desenvolve a orientação de forma cada vez mais complexa no mundo objetal. E, sobre essa base, forma as forças intelectuais cognoscitivas, suas possibilidades operacionais.

No desenvolvimento histórico da humanidade, os conhecimentos foram se fixando nas formas de atividade objetal. Nesse processo, segundo Davidov (1987), o órgão principal foi a mão com sua capacidade de realizar movimentos e, em interação com ela, e os demais órgãos dos sentidos. Foi assim, de acordo com o autor em referência, que os mencionados órgãos adquiriram, historicamente, a função de orientação no mundo objetal e a capacidade para observar e separar, nos objetos, as propriedades e relações que eram importantes para um determinado fim.

3.2.1.3 - É proposto que as crianças copiem do quadro uma linha curva e, em seguida, tracem uma reta em qualquer direção que a intercepte. Além disso, identifiquem os locais em que se cruzam, como sendo muito pequenos, isto é, pontos. A ilustração 22 mostra a sequência de procedimentos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

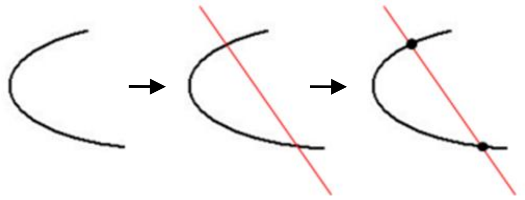


Ilustração 22

Cada criança obterá os pontos de encontro em locais diferentes. Isso é possível porque as duas linhas são formadas por infinitos pontos, dentre os quais dois deles são comuns e representam a interseção de ambas (Ilustração 23).

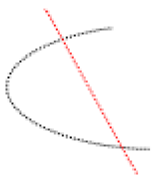


Ilustração 23

3.2.1.4 – A tarefa subsequente estabelece que as crianças desenhem, com auxílio da régua, uma linha reta e nela marquem dois pontos, além de destacar com lápis de outra cor a parte da reta que fica entre ambos. Também é indicado pelo professor que a parte destacada chama-se segmento. Por isso, às vezes, as extremidades dos segmentos são marcadas com riscos, como se fosse a linha de corte, conforme a ilustração 24 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

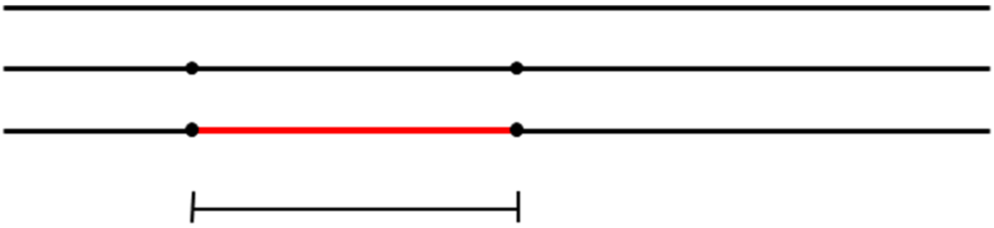


Ilustração 24

Nessa tarefa são destacadas duas propriedades do conceito de segmento: é uma parte da reta e está limitado pelos dois lados. Da presença dessas duas propriedades se deduz a conexão entre a reta e o conceito de segmento de reta (TALIZINA, 1987).

3.2.1.5 – A tarefa é marcar dois pontos no quadro e o segmento de reta que os une, depois o prolonga, com a régua, para ambos os sentidos (Ilustração 25). O diálogo entre professor e as crianças deverá contemplar as seguintes questões: Qual tipo de linha foi desenhada? O quanto ela pode ser estendida? Ela tem fim ou não? Tais questionamentos tornam-se referência para a reflexão sobre a diferença entre o segmento e linha reta. Também para elaborar a conclusão de que a linha reta não tem fim, pela possibilidade de continuá-la ilimitadamente; por sua vez, o segmento é uma parte dela e tem suas extremidades definidas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

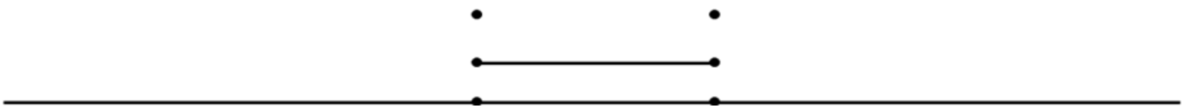


Ilustração 25

Observa-se que o ensino da geometria em Davidov se inicia com as ideias conceituais de ponto, reta e segmento, gênese de todas as figuras e corpos geométricos e, inclusive, do lugar geométrico do conceito de número.

Diferentemente do modo de apresentação dos livros didáticos brasileiros, que adotam apenas a visualização de imagens espaciais prontas.

As tarefas referentes à introdução da geometria no ensino do primeiro ano escolar, na proposta de Davydov, trazem a preocupação com as inter-relações e conexões entre elementos como ponto, segmento de reta e reta inseridos em um sistema, como integridade objetiva. Traduz, pois, o que o materialismo histórico e dialético denomina de “unidade do diverso” (MARX, 2003, p. 248), como concreto. Fora dessa unidade, a reta não existe, uma vez que ela se constitui de infinitos segmentos, cada um deles, por menor que seja, é formado por infinitos pontos. Consequentemente, a reta também é constituída por infinitos pontos.

O sistema de tarefas sobre linhas, segmentos e pontos consiste em representar o concreto como algo em formação, no movimento que permite revelar as conexões internas, isto é, os nexos entre as singularidades (pontos), particularidades (segmentos) e a universalidade (linha).

A linha reta, que mais tarde será o contexto geométrico para o conceito de número, só existe na diversidade em que seus elementos (segmento de reta e ponto) se encontram concatenados entre si. Esse concreto, no processo de desenvolvimento do pensamento numérico, se converterá em abstrato.

3.2.2 Comprimento

A primeira grandeza contemplada nas proposições davydovianas é o comprimento que, segundo Freudenthal (1975a, p. 211), é “a mais matemática das grandezas” e um dos conceitos fundamentais da geometria. É a unidade básica entre todas as grandezas, pois com ele é possível estabelecer as unidades para as demais grandezas (EVES, 2007).

Por tal razão matemática, o comprimento é o ponto de partida do estudo das grandezas em Davydov. Por isso, indica que se coloque à disposição das crianças objetos, um ao lado do outro, para que elas analisem a primeira especificação de tamanho, o comprimento. A direção dada pelo professor é para que se elabore a conclusão de que um objeto tem vários comprimentos (na horizontal, na vertical e em outras dimensões) e, geralmente, têm nomenclaturas específicas: largura, grossura, altura, profundidade, etc.

3.2.2.1 – Essa tarefa volta-se, novamente, para a reflexão sobre o pilar que falta na casa, já referida no primeiro capítulo, que requer a identificação daquele que seria o ideal. Entre as variantes, há apenas um que serve, pela cor, pela forma, pelo comprimento e pela largura. O professor diz que altura, largura, bem como grossura e profundidade podem ser chamados com o mesmo nome: comprimento (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Segundo Talizina (1987), é indispensável desenvolver a operação da comparação desde o primeiro ano escolar. É necessário que as crianças aprendam a determinar as bases da comparação, para que se orientem por propriedades gerais. Importa, ainda, o entendimento de que a comparação dá-se tanto por propriedades qualitativas (como, por exemplo, a cor e a forma), quanto quantitativas (as grandezas).

A comparação entre grandezas requer, mais adiante, a execução de tarefas que coloque a necessidade de estabelecer uma unidade de medida, com ajuda da qual se realizará a comparação. Esta é primordial, conforme a referida autora, pois estudantes dos anos intermediários e inclusive os superiores, ao não considerarem essa exigência, comparam, por exemplo, as frações sem levar em conta o fator comum e não se preocupam com a base do sistema de numeração durante o trabalho com o sistema numérico de medidas.

3.2.2.2 – Nesse momento, é preciso uma tarefa que dirija a atenção da criança para a comparação de comprimento. Dispõem-lhes recortes de papel de superfícies retangulares (um verde e outro vermelho). Primeiramente, faz-se um acordo sobre qual comprimento será considerado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

A título de ilustração para a análise, optamos pelo lado mais comprido dos recortes, mas poderia ser qualquer outro. O professor mostra dois recortes, um em cada mão, bem distante uma da outra, e questiona sobre a possibilidade de compará-los pelo comprimento. A síntese a ser elaborada é de que os recortes devem ser aproximados. Dentre as várias possibilidades de aproximação dos objetos, para comparar o comprimento combinado que aparece a seguir (Ilustração 26).

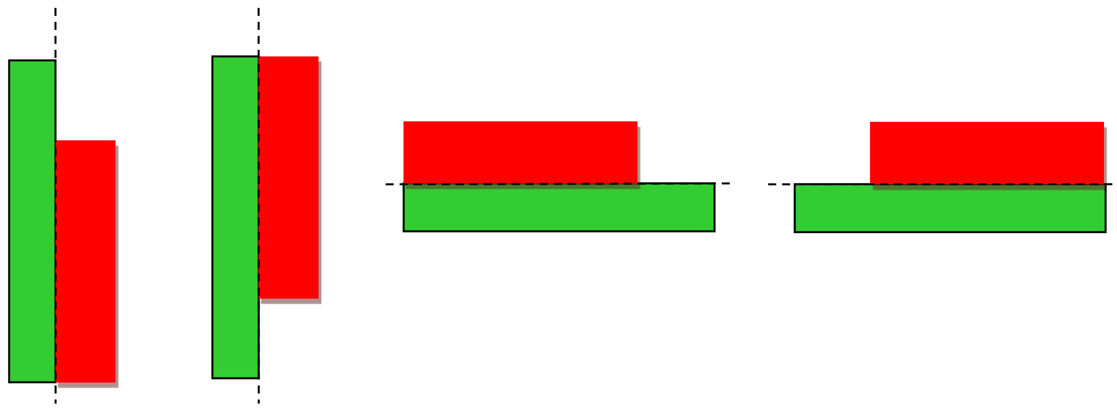


Ilustração 26

A finalidade da tarefa é que as crianças aprendam tanto os modos de comparação pelo comprimento quanto à linguagem apropriada: o recorte verde é maior que o recorte vermelho pelo comprimento, o comprimento do recorte verde é maior que o comprimento do recorte vermelho, etc.

Talizina (1987) diz que, numa sólida apropriação conceitual de relação, as crianças devem não só determinar as propriedades ao comparar objetos uns com os outros, mas também nomeá-los, conforme sugere a tarefa anterior em relação ao comprimento.

3.2.2.3 - As crianças executam uma tarefa que lhes exige a comparação de dois recortes de papel, iguais em relação ao tamanho. Depois de analisarem e concluírem que são idênticos pelo critério estabelecido, o professor corta parte de um dos recortes, diminuindo-o pelo comprimento da largura, porém sem alterar em relação à altura. Posteriormente, apresenta-os para as crianças que opinam sobre a nova relação de comprimentos dos recortes. Também lhes sugere que desenhem um comprimento único para ambos os recortes. Abre-se espaço para que elas indiquem e expressem as várias possibilidades. Nesse caso, a direção é para que construam um segmento entre os recortes que representa o comprimento da altura de ambos, como a ilustração 27 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

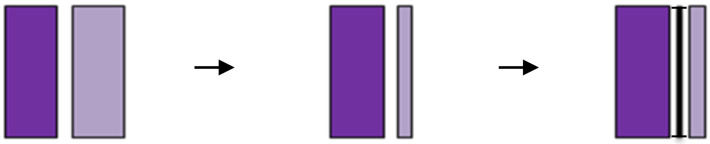


Ilustração 27

A variação do tamanho dos recortes põe em evidência, a partir dos dados em observação, o movimento das relações entre comprimentos. Inicia-se o processo das diferentes formas de representação da relação entre grandezas, sendo a primeira delas o segmento, objeto de estudo da sessão anterior. Aos poucos, se constitui um sistema integral objetivamente inter-relacionado que determinará a introdução do “sistema conceitual” numérico (VYGOTSKI, 1996, p. 72).

3.2.2.4 - O professor desenha no quadro três “buracos” e propõe aos estudantes que os comparem pelo tamanho (Ilustração 28). A situação é propícia para detectar dois tipos de tamanhos: a profundidade (comprimento vertical) e a largura (comprimento horizontal), representadas por segmentos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

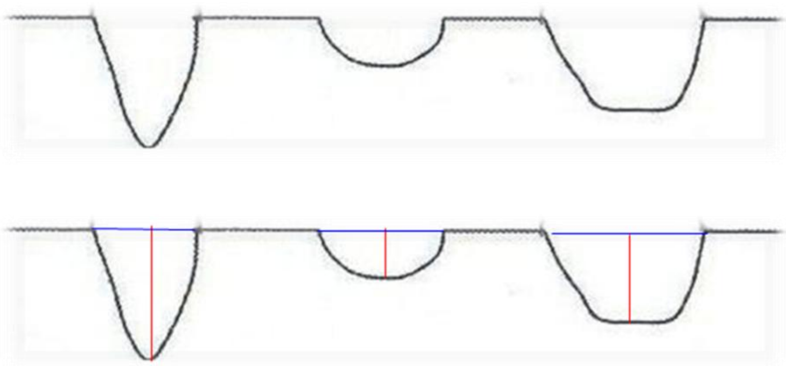


Ilustração 28

Entre as conclusões está a evidência para a comparação pela profundidade em vez da largura, pois os segmentos indicativos das respectivas medidas se distinguem um em relação ao outro, o que permite a visualização de qual deles é mais comprido.

Na sequência, última tarefa com o mesmo teor conceitual, sugere-se a comparação dos tamanhos dos próprios estudantes referente à altura (comprimento na vertical) e representá-la por meio de segmentos. No entanto, o estudo da grandeza comprimento será retomado em outros momentos. Nessa sessão, a análise incide nas relações gerais entre comprimentos, mas aos poucos se volta à dedução dos casos particulares e singulares de manifestação de tais relações.

Com um olhar para as situações apresentadas, isoladamente, nos livros didáticos brasileiros, poder-se-ia concluir, equivocadamente, que tais livros contemplam as relações gerais entre comprimentos. Porém, elas expressam apenas particularidades empíricas, restritas aos aspectos visuais em detrimento dos conceituais. Eles apresentam ilustrações, por exemplo, com animais e crianças pulando. E compete aos estudantes apenas identificar o pulo mais longo, o mais curto, o cabelo mais comprido, a árvore de altura maior, entre outros.

Nos livros didáticos brasileiros, o foco não incide na análise <u>da relação</u> dos comprimentos e muito menos para a sua representação, mas apenas na <u>identificação do objeto</u> no que se refere ao comprimento que pode ser, definitivamente, maior, menor ou médio. Os comprimentos não são passíveis de variação e a operação a ser realizada pela criança limita-se em identificar o objeto maior, menor ou os iguais.

3.2.3 Linhas fechadas abertas

Retoma-se o estudo das linhas, pontos e segmentos de diferentes comprimentos. A partir da conexão entre esses elementos serão introduzidas as linhas fechadas, sejam elas quebradas ou curvas. Desse modo, procede-se a metamorfose de uns objetos em outros e a redução deles em um todo único.

3.2.3.1 – A tarefa consta de quatro pontos de cores diferentes marcados no quadro de modo que não fiquem em linha reta, não colineares. As crianças devem copiá-los em seus cadernos e uni-los por meio de segmentos. Por exemplo, o ponto verde com o vermelho, este com o azul que, por sua vez, é ligado ao preto (Ilustração 29). Diz-se à criança que se trata de uma linha composta de segmentos e não é reta, sua denominação é: linha quebrada ou simplesmente quebrada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 29

3.2.3.2 – Na sequência, o professor faz novamente, no quadro, quatro pontos de cores diferentes. As crianças copiam em seus cadernos e os unem na ordem sugerida, inclusive os dois pontos extremos da linha quebrada. Por exemplo, pode-se adotar a seguinte ordem de união dos pontos: verde, vermelho, azul, preto e, finalmente, os dois extremos, o preto com o verde. Assim, nova linha quebrada não tem começo e fim ou qualquer um dos pontos marcados é, simultaneamente, começo e fim. Por isso, formam uma linha quebrada fechada, conforme a ilustração 30 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 30

O conceito de linha quebrada fechada em formação se generaliza, independente da quantidade de segmentos que compõem a linha, porém recebem denominações diferentes: com três segmentos, será um triângulo; com quatro, um quadrilátero; cinco, um pentágono, e assim sucessivamente. O foco não está na forma específica da linha quebrada que se formou, trata-se de uma linha poligonal fechada em seu caráter geral.

3.2.3.3 - Novamente, no quadro e nos cadernos, desenham-se dois pontos a serem unidos por duas linhas curvas, não quebradas (Ilustração 31). Nesse caso, formou-se uma linha curva fechada, ou seja, não é quebrada (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

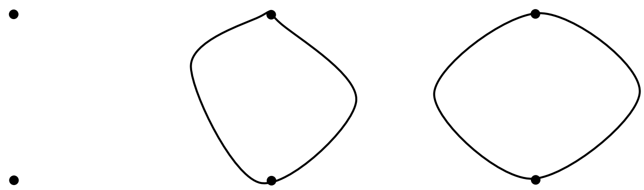


Ilustração 31

Conforme já mencionado, as tarefas são realizadas ativamente e externamente pela criança. Como diz Talizina (1987), da mesma forma que os conceitos não podem ser formulados sem os objetos exteriores, tão pouco as ações internas podem ser formuladas sem uma ação externa. Esta não precisa, necessariamente, ser com objetos, pode ser substituída por modelos, esquemas e desenhos, como é o caso das linhas, pontos e segmentos, ou das tarefas do capítulo anterior sobre o desenvolvimento da ação investigativa por meio da análise das figuras.

A compreensão de como fazer não é a garantia de possibilidade de fazer. Para Talizina (1987, p. 14), compreender como resolver um problema nem sempre significa saber resolvê-lo. Por isso, só "podemos falar sobre os conhecimentos dos alunos na medida em que sejam capazes de realizar determinadas ações com estes conhecimentos". É nesse sentido que Davydov propõe que as crianças produzem as linhas a não as recebam prontas.

3.2.4 Limites das figuras

As tarefas, a seguir, conduzem à apropriação da ideia simples de que a linha fechada serve de limite de uma região, que subsidiará o estudo da grandeza da área na próxima sessão.

3.2.4.1 – Com fio de arame macio, as crianças fazem várias formas e, posteriormente, utilizam-nas para desenhar as linhas fechadas que as limitam. Também se sugere que elas construam uma linha fechada de modo que não passe por um ponto dado. Na análise das variantes de posição, observar-se-á que em algumas figuras o ponto ficou no interior e em outras na região externa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

3.2.4.2 – As crianças recebem um kit com recortes de papel grosso, os contornam e indicam o tipo de linha obtida, como indicado na ilustração 32 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

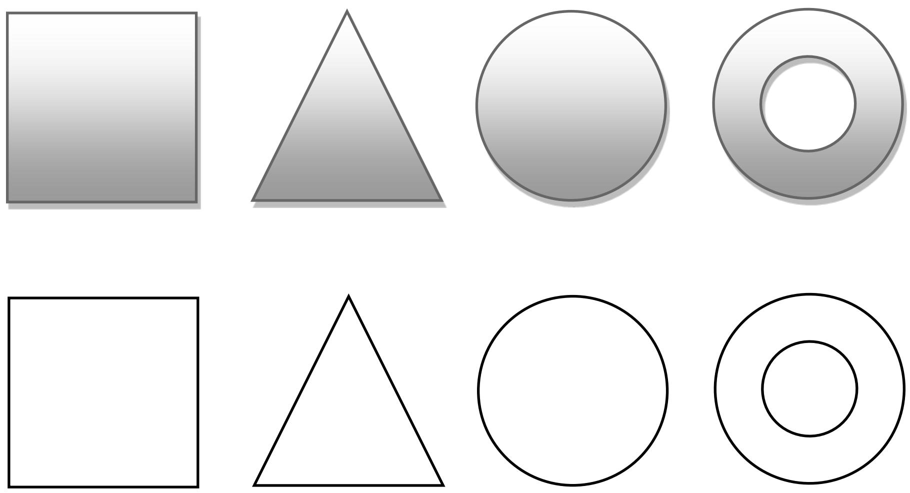


Ilustração 32

O conceito de quadrado, triângulo, círculo, circunferência, entre outros, não é sistematizado no primeiro ano. As crianças podem dizer, por exemplo, que obtiveram um quadrado. O professor sugere que falem o nome da linha e não da figura. Assim, na ilustração 32, a primeira figura é uma linha quebrada fechada composta por 4 segmentos; a segunda, uma linha quebrada fechada composta por 3 segmentos; a terceira é uma circunferência; na última, a linha pode ser chamada de anel, seus limites interior e exterior são circunferências. A diferenciação entre círculo e circunferência ocorrerá com tarefas próprias que não serão desenvolvidas no primeiro ano. Nesse momento, a preocupação é apenas analisar a ideia de limite de figura.

É comum nas proposições brasileiras para o ensino de Matemática a apresentação de uma situação em que as crianças recebem blocos (cubo, cilindro, prisma de base triangular e retangular) para serem pressionados sobre uma base de massa de modelar e observarem as respectivas marcas. Depois, apresentam-se os nomes das formas geométricas das marcas: quadrado, círculo, triângulo e retângulo. Trata-se de um equívoco conceitual matemático, pois as formas são, respectivamente: quadrangular, circular, triangular e retangular.

As marcas deixadas na massa de modelar têm três dimensões: altura, largura e profundidade. Diferentemente do quadrado, círculo, triângulo e retângulo que possuem apenas duas dimensões: altura e largura.

Também são propostas algumas situações envolvendo o contorno dos objetos. Os estudantes devem observar nas ilustrações os contornos e identificar o objeto utilizados para obter cada contorno.

O referido contorno está pronto, não é uma produção dos estudantes, o que pode ser considerado sensato, pois, nessa idade, nem todas as crianças têm a coordenação motora fina desenvolvida para realizar tal tarefa. No entanto, vale perguntar: Qual é o papel da educação escolar? Não seria promover o desenvolvimento da criança a partir da colaboração e direção do adulto, que, nesse caso, é o professor? Conforme já mencionamos, a base do ensino não se desenvolve antes do seu início, mas junto com ele (VIGOTSKI, 2000). As habilidades motoras se educam, não se formam por si mesmas (LEONTIEV, 1978; ZAPORÓZHETS, 1987).

Outra questão a ressaltar referente ao contorno que, aparentemente, se aproxima da proposição davidoviana é que a análise incide apenas nos aspectos externos observados diretamente, empiricamente. As propriedades gerais de cada linha formada a partir do contorno dos objetos não são consideradas.

Assim, por exemplo, o que fica para a criança sobre triângulo é de um tipo singular, o equilátero (figura com três lados iguais). Isso requer um novo tratamento para os outros dois tipos (isósceles e escaleno), porque não foram apresentadas as propriedades geneticamente iniciais que são válidas para todos os triângulos independentemente das medidas particulares de cada um dos três lados e dos três ângulos.

Tal orientação é antagônica aos fundamentadas do Materialismo Histórico-Dialético, em que

> a análise das figuras geométricas não se restringe às suas formas, mas elas passam a ser investigadas no que diz respeito às suas propriedades qualitativas mais intrínsecas. Pode-se afirmar neste caso que o concreto (ponto de partida e de chegada) são as figuras geométricas. Entretanto, o concreto ponto de partida são as figuras geométricas em seus aspectos empíricos, suas formas mais imediatamente perceptíveis e definidas. O concreto ponto de chegada são essas mesmas figuras geométricas, só que entendidas num nível qualitativamente maior em relação ao concreto ponto de partida. Trata-se das propriedades euclidianas até então não esmiuçadas. As mediações, isto é, as abstrações que garantem esse salto qualitativo são exatamente a caracterização de tais propriedades. Os conceitos euclidianos são, portanto, a mediação entre a figura sincrética só manifestada em sua imagem geométrica e essa figura apreendida nas suas propriedades mais intrínsecas sistematizadas nos conceitos euclidianos (JARDINETTI, 1996, p. 51).

Nesse sentido, de acordo com Talizina (1987), as propriedades mais intrínsecas a serem contempladas dependem do conteúdo do próprio conceito e de quanto os estudantes avançaram por ele. No início do estudo do conceito de triângulo, poderá destacar aquelas propriedades que estão contidas em sua gênese: linha quebrada, fechada, composta por três segmentos de reta. Nos anos seguintes, diz a autora, os estudantes irão destacar uma série de propriedades complementares, tais como: a soma dos ângulos internos é igual a 180º, a soma das medidas dos comprimentos dos dois lados menores é maior que o terceiro, entre outras.

3.2.5 Área

Retomam-se as ideias sobre tamanho com acréscimo de mais um parâmetro de comparação, a área de regiões delimitadas por linhas fechadas, sejam elas quebradas ou curvas.

3.2.5.1 - Têm-se dois recortes do mesmo formato, bastante irregular (Ilustração 33), o que dificulta a identificação do comprimento da altura e da largura (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

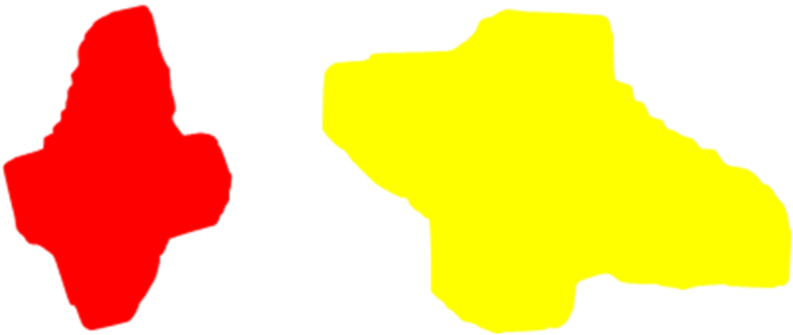


Ilustração 33

O professor sugere a comparação dos recortes pelas diferentes propriedades. São iguais pela forma e diferentes pela cor. Em relação ao tamanho, não é tão simples. Se as crianças falarem que o recorte amarelo é maior que o recorte vermelho, o professor concorda. No entanto, solicita que especifiquem o tipo de tamanho a que se referem. É o início do processo de problematização da situação, que segue com o movimento giratório dos recortes, pelo professor, o que requer uma decisão nada simples para determinar a posição que seria referência para a indicação do comprimento da altura e largura. Feita essa indicação, sobrepõem-se as figuras de modo que permita a visualização de que o comprimento do recorte vermelho é maior que o do amarelo, embora seja o contrário (Ilustração 34).

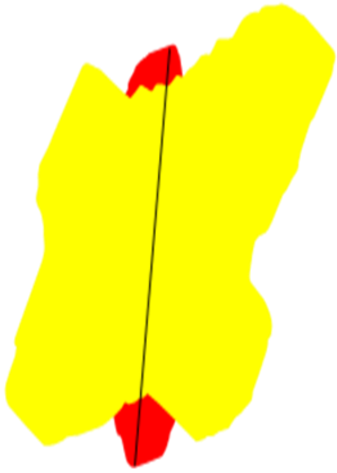


Ilustração 34

Nesse momento, o professor conduz as discussões de modo que as crianças sejam levadas a contestar a posição adotada, conforme a ilustração anterior. A sugestão é que elas mesmas sobreponham as figuras, a seu modo, como forma de comprovarem ou não a conclusão emitida por ele, anteriormente. A tarefa será finalizada quando for identificada a possibilidade de dispor um recorte sobre o outro, de tal modo que o vermelho fique completamente sobre o amarelo e se perceba a diferença entre as duas superfícies (Ilustração 35).

Ilustração 35

A culminância da tarefa acontece com a reflexão que sugere o modo de comparação anterior (Ilustração 35) como o correto, porque a referência é a área total da superfície (passa-se a mão sobre a superfície inteira) e não algum comprimento isolado, como o procedimento da ilustração 34.

Na sessão anterior, a proposição era contornar o recorte ou os arames para observar a linha formada e analisar a posição de um ponto dado: se estava na região interna ou na região externa. Agora, o foco da análise incide para a região interna, que é formada por infinitos pontos. Novamente se explicita uma consistência entre uma ideia conceitual e outra. Dito de outra forma, existe um movimento no processo de apropriação do conhecimento que, a cada tarefa, se torna mais complexo pela inserção de novos conceitos ou propriedades, que encaminha o desenvolvimento do pensamento. Como diz Politzer (1963), na realidade tudo se relaciona e está em interação de uma forma ou de outra, cuja essência é a mudança incessante, a transformação.

3.2.5.2 – Uma próxima tarefa propõe a comparação de dois recortes (superfícies retangulares) pela área, comprimento da altura e comprimento da largura (Ilustração 36). Convenciona-se com as crianças a face e comprimento (largura ou altura) a analisar. Em cada caso, exige-se atenção ao modo correto de comparação que requer a colocação um ao lado do outro, quando o foco é comprimento, e um sobre o outro, no caso da grandeza área (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 36

Na ilustração anterior (36), a título de exemplo, foi considerada a altura o comprimento maior do recorte. Assim sendo, o primeiro caso representa a comparação pela altura, o segundo pela largura e o terceiro, concomitantemente, pela área, comprimento e largura.

3.2.5.3 – Para o desenvolvimento da próxima tarefa, as crianças têm à disposição, sobre a carteira, kits de recortes (superfícies triangulares) com cores diferentes. O professor solicita que elas peguem um deles em conformidade com as condições postas (Ilustração 37). Por exemplo, escolhe um recorte azul e sugere encontrar outro da mesma altura, mas de área menor. Uma vez identificada a peça, faz-se a sobreposição para a comprovação (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

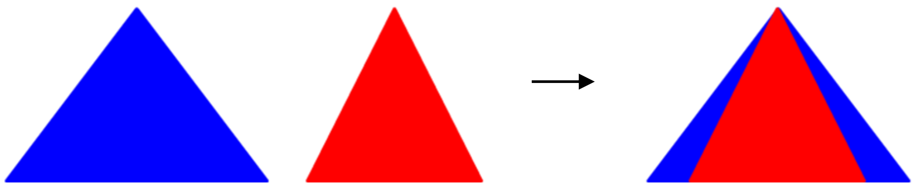


Ilustração 37

É muito importante, diz Galperin (1987), que as crianças compreendam quais propriedades dos objetos e com que elas podem ser comparadas. Por exemplo: área com área, comprimento da altura com comprimento da altura. Além disso, as discussões conduzirão para identificar que um mesmo objeto possui várias propriedades passíveis de serem comparadas. Essa orientação se faz necessária, uma vez que a criança, ao iniciar a comparação entre os objetos – estabelecer as relações entre maior, menor e igual –, considera como um todo e fundamenta-se na propriedade que aparece em primeiro plano. Faz-se necessária a análise sobre o que há subjacente à propriedade do objeto que aparece em primeiro plano, sua estrutura interna.

3.2.5.4 – Na tarefa subsequente, a comparação ocorre entre dois recortes iguais de superfície quadrangular. De forma visível aos alunos, corta-se uma parte próxima à extremidade da região de um deles, que conduz à conclusão de que o comprimento da altura e da largura não sofreram alterações, porém a área ficou menor, conforme Ilustração 38 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).


Ilustração 38

A questão que se apresenta nessa tarefa é que a alteração de uma das grandezas, no caso a área, não interfere em duas outras, o comprimento da largura e da altura. Tal variação e conservação das grandezas coexistem porque os objetos em questão são passíveis de transformação real. Tal duplicidade – variação e conservação – só é possível porque o sistema de tarefas foca nas propriedades relativamente autônomas dos objetos e não neles em si, dados em sua imediatez. Sobre esta base forma-se, segundo Galperin (1987, p. 138), o "princípio da conservação de quantidade", embora este não seja o foco principal, mas trata-se de uma consequência.

3.2.6 Volume e capacidade

O detalhamento da ideia de tamanho tem continuidade com um novo parâmetro: o volume. Além disso, as crianças começam a representar as relações com ajuda de tiras de papel, o que permite o primeiro passo para atingir o conceito abstrato de grandeza.

3.2.6.1 – Inicialmente, foca-se na diferença entre as figuras planas e os corpos. Cada criança tem três tiras iguais na cor e no comprimento da largura, duas delas têm o mesmo comprimento da altura e a terceira é mais curta. O professor mostra duas figuras para que os estudantes as comparem e elaborem, em silêncio, suas conclusões. Por exemplo, se a propriedade comparada for a forma e elas forem iguais, as crianças mostram tiras iguais, caso contrário, se forem desiguais, mostram duas tiras desiguais, conforme ilustrações 39 e 40 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 39

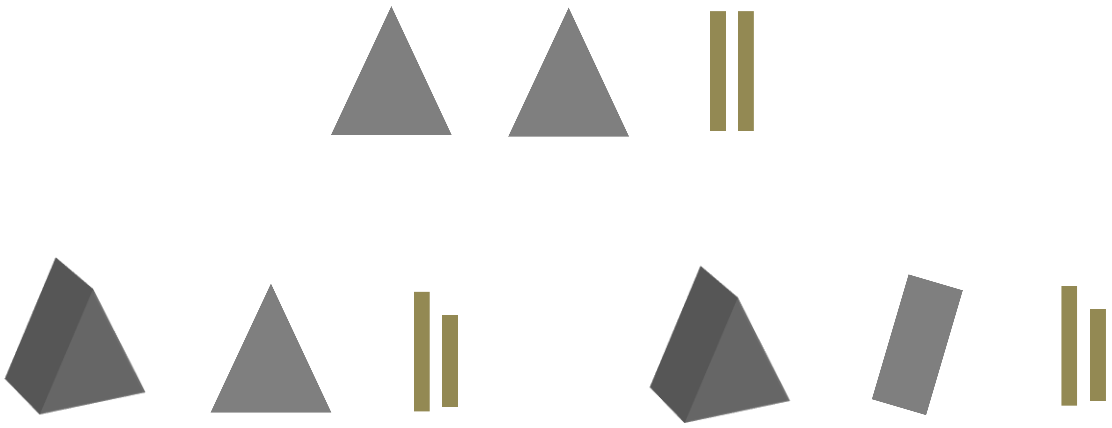


Ilustração 40

O uso das tiras é a primeira forma de representação das relações entre os objetos e figuras. A síntese que o professor direcionará durante as discussões é que as figuras que não são planas são chamadas de corpos, são prismas. Também analisar-se-ão objetos de outras formas, como o cone, o cilindro, a esfera... e conclui-se que na vida real eles são corpos. Não há necessidade de as crianças lembrarem os nomes geométricos de todos. O objetivo, nesse momento, é formar a ideia genérica do corpo, vinculada ao conceito do volume.

3.2.6.2 - Para a tarefa de introdução do volume dos corpos, o professor apresenta duas caixas, em forma de paralelepípedo, de modo que uma delas caiba dentro da outra. As crianças deverão compará-las pelo tamanho que, dependendo da posição, a mesma caixa pode ser mais alta ou mais baixa que a outra. No caso dos lados (faces), a sua área também não terá a mesma medida, pois depende de como elas serão aproximadas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Como procedido em relação à área, as crianças devem encontrar um modo que permita a comparação das caixas em sua totalidade e não apenas em suas dimensões separadas (Ilustração 41).

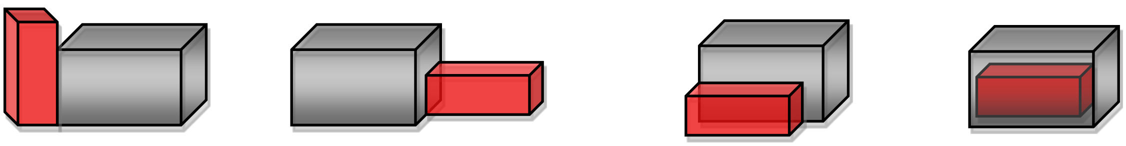


Ilustração 41

Para tanto, o procedimento que as crianças deverão adotar como uma possibilidade de comparação em sua totalidade é inserir a caixa pequena na maior, uma vez que cabe por inteiro e com sobra de espaço. A nomenclatura a adotar é que esse tamanho total das caixas chama-se volume.

3.2.6.3 - O professor apresenta dois recipientes cilíndricos que se diferem somente pela altura. As crianças as comparam pelo volume e, em silêncio, informam o resultado por meio das tiras. Dado que, visivelmente, o volume do recipiente mais alto é maior, dá-se como condição que elas verifiquem a impossibilidade do mais baixo ser colocado dentro do mais alto, por serem de bases iguais (Ilustração 42). Propõe-lhes para encher com líquido ou grãos o recipiente menor e, depois, transferir o conteúdo para o recipiente mais alto, em que se evidenciará a sobra de espaço (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 42

Como o recipiente mais alto pode absorver uma quantidade maior de líquido, diz-se que sua capacidade é maior que o mais baixo. Isso significa dizer que o volume de líquido do recipiente mais baixo que ocupa todo o seu espaço não encherá o mais alto.

3.2.6.4 - Uma tarefa semelhante à anterior é proposta aos estudantes, em que os recipientes têm formas diferentes. Utiliza-se líquido ou outro material como medida para que seja possível identificar que possuem capacidades diferentes. A situação se inverte em relação à anterior, pois o maior está completamente cheio, o que implicará sobras ao transferir o líquido para o menor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

A representação das relações entre os volumes e capacidades por meio de tiras marca o início da modelação das relações entre grandezas, que, gradativamente, serão reproduzidas na forma gráfica e literal. Tais relações se converterão em “objeto das ações” das crianças e suas leis em objeto de apropriação (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 311).

3.2.7 Massa

O caráter ativo do processo de apropriação continua em todas as tarefas, por ser a condição essencial para que a criança estabeleça relações, bem como levante, refute ou confirme hipóteses, particularidades evidenciadoras de que a criança está em ação investigativa e, consequentemente, em atividade de estudo.

3.2.7.1 – Tal preocupação se faz presente na tarefa de introdução do conceito de massa. O professor tem duas caixas de cores diferentes e mesma forma. Solicita que as crianças as comparem com base nas diferentes propriedades (cor, forma, comprimento, área e volume). Porém, o essencial desta tarefa só se explicita ao mostrar outras duas caixas que coincidem em todas as propriedades já conhecidas, mas diferentes pela massa. O professor simula um contexto em que outras crianças ao compará-las expressaram o resultado correto, por meio de duas tiras diferentes. Propõe que os estudantes investiguem qual a propriedade considerada na situação fictícia. Com a apresentação, por eles, das diversas hipóteses, solicita-se que um deles pegue as caixas e conclua que se diferenciam pela massa: uma é mais pesada que a outra (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Assim, por trás da aparência dos objetos e figuras revela-se, para a criança, sua estrutura interna. E, ainda, reforça a ideia de que para compará-los corretamente é preciso destacar a grandeza (comprimento com comprimento, área com área, volume com volume e massa com massa).

3.2.7.2 - As crianças, com as mãos, estabelecem comparação pela massa entre vários objetos. Quando as massas dos objetos se diferem muito, é fácil distingui-las. Porém, em alguns casos fica difícil determinar qual dos dois objetos é mais leve, por simulação de pesagem com as mãos. Por isso, o professor sugere o uso da balança de dois pratos, como instrumento próprio de comparação dos objetos pela massa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas aos poucos revelam os aspectos da realidade que tanto constituem o conteúdo quanto orientam ações do conceito de número, tais como: comprimento, área, volume, massa, entre outros. Desse modo, as orientações davidovianas atendem, dentre outras, uma das tarefas da educação escolar que, segundo Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 306), é:

> Por ao descoberto, diante dos alunos, aqueles aspectos da realidade que constituem o conteúdo da ciência dada e nos que os alunos deverão orientar suas ações durante o estudo. Esta tarefa surge porque ditos aspectos da realidade, suas propriedades e inter-relações, que constituem o objeto de uma ciência e não está dado em forma imediata.

Enfim, a etapa inicial do ensino davidoviano consiste em revelar às crianças as propriedades da realidade, base do conteúdo geral da matemática, e, por consequência, do conceito de número. Ou, na linguagem de Galperin (1987), consiste em formar a base orientadora das ações da criança nessa área.

3.2.8 Modelagem gráfica das relações de igualdade e desigualdade

A reprodução das relações entre as grandezas na forma objetal – com tiras de papel – é apenas o primeiro passo para se chegar ao modelo geral. O próximo incide na representação gráfica, por meio da correlação de segmentos. Assim como na elaboração das tarefas, em que cada uma sempre apresenta algo novo em relação às demais, observa-se a preocupação de Davydov e seus colaboradores com detalhes diferenciadores de complexificação da própria representação do conhecimento elaborado. Incialmente, objetal; na presente seção as tarefas direcionam para a gráfica; mais adiante se atinge o modelo algébrico.

3.2.8.1 - Para introduzir a modelagem gráfica das relações de igualdade e desigualdade, as crianças dispõem de dois objetos para serem comparados por todas as propriedades conhecidas. Elas mostram o resultado com as tiras, além da representação, no quadro, por meio dos segmentos, considerada mais conveniente em relação ao desenho das tiras. Em seguida, estabelece-se outra propriedade a ser comparada, de modo que o resultado se difere do anterior, mas também apresentado com as tiras e segmentos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

3.2.8.2 – Em continuidade, o professor desenha no quadro alguns pares de segmentos iguais e desiguais (Ilustração 43). Aponta um deles e cabe às crianças mostrarem um par de objetos em que a relação de uma das propriedades pode ser expressa por aquela representação. Os exemplos citados são analisados, com o acréscimo indicativo da existência ou não de outros pares de segmentos que representam tal questão (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

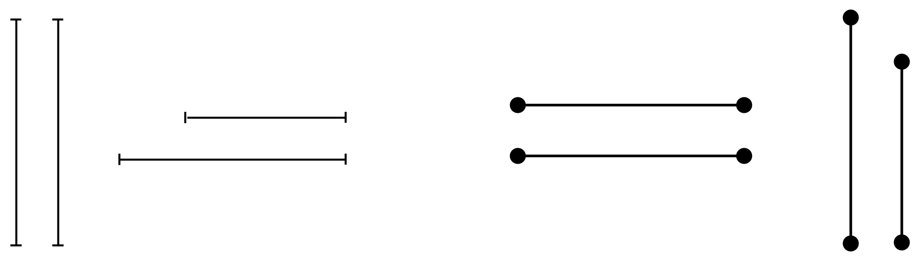


Ilustração 43

É preciso separar dois tipos de propriedades: de um lado cor e forma e do outro massa, comprimento, área, volume. Para tanto, considera-se os objetos que permitem as metamorfoses correspondentes ao segundo grupo de propriedades para atingir a finalidade a que são direcionadas as tarefas: introdução e estudo do conceito de número.

3.2.8.3 - O professor mostra dois objetos de volumes diferentes e sugere que as crianças indiquem o segmento respectivo que os representam. Posteriormente, toma-se como referência dois objetos que se diferem apenas pela cor (por exemplo, azul e vermelho) para que elas indiquem o segmento que representa cada um deles. A questão principal está no estabelecimento da comparação com as variantes cor e forma, em que só é possível falar sobre a diferença (desigualdade). Nos outros casos (comprimento, área, volume, capacidade e massa), a diferença pode ser descrita com maior precisão: é maior que o outro, este é menor que o primeiro. Nessas situações, a grandeza maior é representada pelo segmento mais comprido e a menor pelo mais curto. O professor acrescenta: a propriedade pela qual o objeto pode ser maior ou menor é chamada de grandeza. Desde então, a palavra propriedade, nas situações cabíveis, é substituída por grandeza, base de todos os sistemas conceituais da matemática (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Atingir esse nível de apropriação, que aos poucos se torna mais complexa em função do desenvolvimento de novas tarefas, atende ao chamamento de Kosik (1976, p. 29):

> Não é possível apropriar-se, e, portanto, tampouco compreender, a matemática e a realidade a que a matemática nos introduz, mediante uma intencionalidade não correspondente à realidade matemática, por

> exemplo, mediante a experiência religiosa ou a percepção artística. O homem vive em muitos mundos, mas cada mundo tem uma chave diferente, e o homem não pode passar de um mundo para o outro sem chave respectiva, isto é, sem mudar a intencionalidade e o correspondente modo de apropriação de realidade.

Então, a pergunta de cunho epistemológico que se apresenta é: Qual seria a chave correspondente ao conceito de número? Na proposta davidoviana, a resposta diria que não contempla todas as propriedades dos objetos, mas apenas aquelas que se pode aumentar, diminuir, medir. Enfim, que a partir delas, as grandezas, pode-se definir a igualdade, desigualdade, contagem, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, logaritmação, radiciação, entre tantos outros.

As grandezas constituem a base geral e necessária, a unidade e a interação de todos os aspectos e formas do sistema dos números reais. Em outras palavras, a base geral sobre a qual surge e se desenvolve o sistema dos números reais é a relação entre elas. Assim, os números naturais, racionais, irracionais e inteiros não são desenvolvidos como a junção de diferentes campos numéricos, mas como um processo único, sujeito a lei.

Nesse processo, o conceito científico de número avança pelo caminho que ascende do abstrato ao concreto, que reflete cada vez com mais profundidade e exatidão o nexo e a interação que se dão entre todos os seus aspectos e propriedades.

3.2.9 Quantidade

Após destacar nos objetos e figuras as grandezas contínuas e sobre sua base estabelecer relações e representá-las, procede-se a comparação entre as grandezas discretas.

3.2.9.1 – Para a execução da primeira tarefa que cumpre a referida finalidade, cada estudante tem quatro cartões com a figura de uma bandeira e outros quatro com o desenho de uma criança (os desenhos podem ser outros). A tarefa tem como objetivo a identificação da suficiência de quantidade de bandeiras para dividir entre as crianças. A conclusão será de que a quantidade de bandeiras é igual à quantidade de crianças, cujo resultado da comparação (igualdade) é representado com dois segmentos de mesmo comprimento conforme ilustração 44 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 44

A operação de correspondência, necessária para resolver a tarefa anterior, "é uma das ideias basilares da matemática" (CARAÇA, 1984, p. 07). Há uma criança para cada bandeira e, reciprocamente, há uma bandeira para cada criança, ou seja, entre os elementos dos dois conjuntos há uma correspondência biunívoca. Consequentemente, pode-se dizer que entre os dois conjuntos existe uma relação de equivalência, que intervém diretamente na contagem.

Observa-se que a proposta de Davydov não despreza ideia de correspondência um a um, porém não é ponto de partida e base única no início do ensino do conceito de número como se apresenta no ensino tradicional (DAVYDOV, 1982).

Se as proposições davydovianas ficassem limitadas apenas à relação um a um – dada diretamente aos órgãos dos sentidos, com ênfase na experiência empírica – se descaracterizaria de sua peculiaridade inovadora, uma vez que pouco se conseguiria em termos de desenvolvimento do pensamento teórico. Como diz Libâneo (2004, p. 27), "se o ensino nutre a criança somente de conhecimentos empíricos, ela só poderá realizar ações empíricas".

É assim que procedem os livros didáticos brasileiros. Por exemplo, quando apresentam uma ilustração com quatro meninas e quatro meninos, em pares, cabe aos estudantes que apenas liguem cada menino a uma menina para formar os pares que estão visualmente formados. Depois perguntam se há a mesma quantidade de meninos e meninas e a sugestão é que as crianças conversem entre elas.

A presença do professor para dirigir a conversa não é conclamada, nem pertinente, pois a resposta está dada, sem necessidade de análise da situação que pode ser resolvida mecanicamente. Consequentemente, não possibilita a reflexão das operações realizadas na elaboração da resposta à pergunta em referência.

Nas demais situações apresentadas sobre quantidade, nos diferentes livros didáticos brasileiros, o apelo é para a semelhança externa. O único aspecto que varia diz respeito aos objetos que representam uma determinada quantidade: duas bolas, duas bonecas, duas petecas, entre muitos outros. Esta é a primeira abstração dos números: a identificação em diversos agrupamentos de objetos o que há de igual, de comum em cada um deles, que no exemplo anterior seria o número 2. Abstração com tais características, segundo Davydov (1982, p. 171), tem teor empírico, uma vez que “ao nomear cada um dos números há de surgir na criança a imagem correta dos variados grupos de objetos designados por esse número”.

No ensino tradicional do conceito de número, diz o referido autor, todo objeto solto é uma unidade e um grupo de objetos constitui uma pluralidade de unidades. Primeiro a criança aprende a destacar essa singularidade e, assim, se forma a abstração de quantidade. A grandeza quantidade não varia, é estática. Desconsidera-se a análise das relações internas entre as quantidades representadas de forma geral, conforme a proposição davidoviana, a seguir.

3.2.9.2 – Nessa tarefa, o foco é a relação entre o todo e a parte quando não são equivalentes, isto é, seus elementos não podem ser correspondidos *um-a-um* entre si. O professor sugere redistribuir entre as crianças as bandeiras (Ilustração 44), de modo que cada uma receba duas delas. Neste caso, faltarão bandeiras, dado que há uma quantidade menor do que a necessária. O resultado da comparação (desigualdade) entre crianças e pares de bandeiras também é representada com os segmentos como na ilustração 45 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 45

Discute-se sobre as razões de comparar os mesmos objetos, cuja representação com os segmentos eram iguais, numa determinada situação, e em outras desiguais. Os estudantes são convidados a pensar e explicar sobre algo desconhecido. Como resultado, apropriam-se de novas significações conceituais e de procedimentos que levarão às conclusões pertinentes. As discussões promovidas pelos estudantes são direcionadas pelo professor.

Esse processo interativo é conduzido para a produção da síntese: na tarefa anterior, comparavam-se as quantidades iguais de crianças e bandeiras; na atual, centrou-se na relação entre as crianças, quantidade maior, com os pares de bandeiras que, dadas as condições postas, tornou-se quantidade menor. Nesse caso, a correspondência não é completa, é desigual. O todo não é equivalente à parte, o todo é "prevalente" à parte (CARAÇA, 1984, p. 09).

3.2.9.3 – A presente tarefa tem similaridades com aquelas desenvolvidas anteriormente com objetos reais, organizados em conjuntos, e, também, com figuras que os representem. São distribuídos entre as crianças, por exemplo, pratos e talheres, rodas e quadros de bicicleta... Questiona-se sobre a função e a pertinência desses objetos ou instrumentos na vida real, que permite estabelecer a relação, por exemplo: um garfo e uma faca para cada prato, duas rodas para um tipo de quadro da bicicleta, três para outro (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). Ainda continua a exigência de que os resultados da comparação, pela quantidade, entre dois conjuntos sejam representados com os segmentos.

Um conjunto de certos objetos, por si só, não possui quantidade. Esta se refere a uma produção humana que aparece como resultado quando um conjunto corresponde de forma equivalente ao outro. Por exemplo, se a referência é cada roda ou pares delas. Assim sendo, o valor da quantidade não se identifica inicialmente com o numeral, procedimento amplamente adotado pelos livros didáticos brasileiros. O argumento mediador da discussão sobre a relação de igualdade e desigualdade das quantidades é a equivalência. Outra tarefa sugerida tem como base conceitual a transformação de desigualdades em igualdades com acréscimos dos objetos necessários.

Essas tarefas trazem, implicitamente, o teor de equivalência entre conjuntos numéricos. Exemplificando: o conjunto dos inteiros é equivalente ao conjunto dos números pares (Ilustração 46). Ambos são conjuntos infinitos: {1, 2, 3,…} e {2, 4, 6,…}. Os números pares são uma parte do conjunto dos inteiros, mas entre eles pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca, pois o todo e a parte se equivalem.

1	↔	**2**
2	↔	**4**
3	↔	**6**
4	↔	**8**
5	↔	**10**
...	↔	**...**
n	↔	**2*n***

Ilustração 46

As questões referentes à relação todo-parte serão retomadas no decorrer deste estudo. As tarefas que foram desenvolvidas tinham como finalidade destacar a gênese do conceito de número que irá subsidiar, inclusive, a elaboração do procedimento geral de resolução de problemas.

Em síntese, as tarefas do segundo capítulo das proposições davydovianas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008) propõem a identificação, nos objetos e figuras, das diferentes grandezas e, sobre sua base, as relações de igualdade e desigualdade. Geram a necessidade de, ao analisar os objetos e figuras, considerar não só manifestações externas, mas as determinações internas ofuscadas pela aparência dada diretamente. Também promovem a necessidade de reprodução das representações objetais e gráficas das relações entre grandezas.

Além disso, propiciaram a abstração, a partir do concreto sensorial, de todas as propriedades desiguais, diferentes, multifacéticas, não coincidentes, e destacou-se aquelas consideradas essenciais aos conceitos científicos da Matemática. Mais especificamente, mediante a análise, separou-se a relação essencial que irá desempenhar o papel de abstração inicial para a reprodução do sistema de número real: a relação entre grandezas.

Importa reafirmar que não existe número sem a relação entre grandezas, sejam elas discretas ou contínuas. Em outras palavras, sem ela não se pode compreender teoricamente o conceito de número, por outro lado, é possível compreender a relação entre grandezas sem conhecer o número. Enfim, as relações entre grandezas são a abstração inicial, que reflete a essência, a causa do conceito de número. A partir dela, o referido conceito surge e se desenvolve, com todos os seus elementos e características, tais como: maior, menor, igual, sequência, classe, série, correspondência, unidade, medida (a contagem é uma forma de medir), subdivisão da unidade, adição, subtração, entre muitos.

Nas proposições davydovianas as relações entre grandezas discretas e contínuas determinarão a consistência dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Em síntese, formam o sistema dos números reais como unidade das relações diversas: comprimento com comprimento, área como área, volume com volume, capacidade com capacidade, massa com massa e quantidade discreta com quantidade discreta. Porém, a apreensão de tal unidade só ocorre mediante abstração teórica, formulação do modelo (lei universal do conceito de número), para a qual se direcionam as tarefas dos próximos dois capítulos.

3.3 OPERAÇÕES COM GRANDEZAS

Depois da centralidade no estabelecimento das relações de igualdade e desigualdade entre as grandezas – identificadas nos objetos e figuras – e representá-las nas formas objetal e gráfica, procede-se a análise da <u>variação</u>

das relações entre grandezas e sua reprodução na forma gráfica e literal (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas são minuciosamente organizadas para que durante o processo de execução os estudantes desenvolvam o pensamento teórico de número. Por isso, o foco é a variação das relações gerais entre grandezas para revelar a gênese, a essência do referido conceito.

3.3.1 Alteração das grandezas

As tarefas, que até agora foram apresentadas, conduziam os estudantes apenas para representações gráficas das relações entre grandezas de maior, menor ou igual. A sequência de tarefas, a seguir expostas e analisadas, contemplarão as mesmas representações, mas trazem um novo elemento conceitual: reproduzir o movimento entre as grandezas. Nesse sentido, o propósito davidoviano é que os estudantes, com a direção do professor, se orientem pelo movimento entre as grandezas (representado objetalmente) e reproduzam graficamente.

3.3.1.1 – A tarefa prevê que, sobre a mesa do professor, estejam dois recipientes iguais e, no quadro, dois segmentos de comprimentos diferentes que representam o volume de líquido que as crianças devem colocar nos recipientes (Ilustração 47). Elas recebem a orientação para que, inicialmente, encham o volume representado pelo segmento menor e, depois, o outro recipiente. Envolto às discussões, conduzidas pelo professor, se conclui: não importa o quanto de líquido é colocado em cada recipiente e sim que o volume no primeiro recipiente seja menor que no segundo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

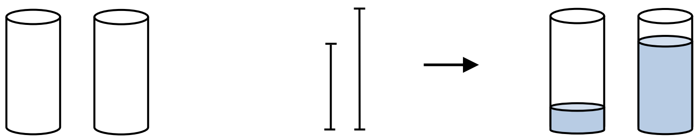


Ilustração 47

Implicitamente nessa tarefa está a preocupação para que, gradativamente, ocorra o trânsito da evidência natural da conexão real entre as grandezas em sua forma sensório-contemplativa, para a orientação em representações abstratas. A referida passagem, segundo Davydov (1982), é uma das condições importantes para iniciar a criança no domínio da matemática.

3.3.2 Igualando as grandezas

Nas diversas tarefas sobre as relações entre comprimento com comprimento, área com área, volume com volume, entre outras, por meio da análise, será formada a base genética do conceito de número. Na presente sessão, o conjunto de tarefas centra-se nos métodos de passagem da desigualdade para a igualdade e vice-versa, no contexto de um sistema conceitual que envolve ideias básicas de adição, subtração e equação.

3.3.2.1 – Essa tarefa tem por base dois recipientes iguais, com volumes distintos de líquido, que estão na mesa do professor. As crianças representam cada qual com segmentos. Em seguida, recebem a orientação que se faz necessário igualar o volume de líquido do primeiro recipiente com o do segundo. O professor acrescenta a quantidade que falta, ou seja, a diferença. Além disso, estabelece que as crianças adotem o mesmo procedimento com os segmentos. Elas prolongam, com outra cor, o segmento menor para que ambos fiquem com o mesmo comprimento conforme ilustração 48 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

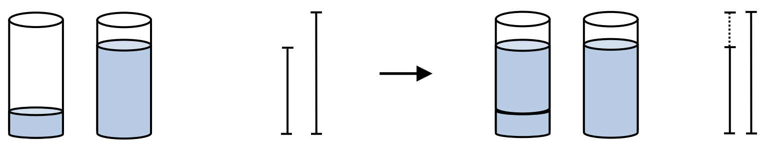


Ilustração 48

O acréscimo de líquido, à primeira vista, envolve uma das ideias da operação de adição. No entanto, ela é apenas um elemento mais evidente de uma unidade dialética em que se confluem a ideia comparativa da subtração (o acréscimo de líquido ou prolongamento do segmento representa a diferença entre um e outro), a equivalência entre os volumes e algumas noções do conceito de equação.

3.3.2.2 - A tarefa se assemelha à anterior, pois é preciso igualar o maior ao menor. A sua execução, se bem direcionada, possibilita a conclusão de que é preciso diminuir do maior a diferença em relação ao menor. Necessário se faz retirar a quantidade de líquido a mais do segundo recipiente (Ilustração 49). No que se refere aos segmentos, uma das possibilidades é riscar uma parte do maior (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

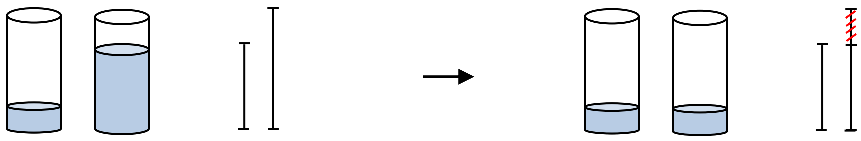


Ilustração 49

Observa-se que, nessa tarefa, a operação realizada é inversa àquela realizada anteriormente, o que parece tornar mais evidente a subtração para que o volume maior de líquido possa ser reduzido e posto em equivalência ao menor. No movimento dessa unidade de contrários, os conceitos de subtração e adição se confundem, porém não se pode perder de vista que, como produções humanas, têm suas particularidades conceituais.

Vale chamar a atenção que ainda não está sendo considerado o valor numérico do volume, mas o valor genérico. O processo de apropriação do conceito teórico de número requer a reprodução do modo geral pelo qual este objeto de conhecimento foi construído, em seu estágio atual. Por isso a preocupação para que também os segmentos expressem o movimento real entre as grandezas em sua forma geral. Ou seja, ainda não se sabe o valor concreto do volume (como síntese de múltiplas determinações), apenas seu valor genérico.

A próxima tarefa envolve o mesmo sistema conceitual, mas leva em consideração a grandeza discreta: a quantidade. Isso significa que Davydov não a nega. Sua crítica incide no ensino unilateral delas, em detrimento das grandezas contínuas que, segundo Aleksandrov (1976), são suscetíveis de serem divididas ilimitadamente.

Os objetos caracterizam-se como discretos se a grandeza considerada for a quantidade, tais como de quadrados e de círculos tomados separadamente uns dos outros, conforme a tarefa subsequente. Porém, serão contínuos se comparados pela área de suas superfícies, pelos comprimentos, das alturas, larguras e de seus perímetros. Essas propriedades, nas proposições davydovianas, unem os aspectos discretos e contínuos durante a introdução e desenvolvimento do conceito de número, por meio do processo de medida, tal como ocorreu no processo histórico do <u>atual</u> conceito de número real. Este, de acordo com Aleksandrov (1976), se desenvolveu precisamente como resultado da união dos contrastes discretos e contínuos, por meio da medição.

3.3.2.3 – Conforme anunciado, essa tarefa consiste em igualar as quantidades de quadrados e círculos. Inicialmente, há mais círculos que quadrados, a desigualdade é representada com segmentos de comprimentos diferentes. Cria-se a necessidade de tomar a decisão entre diminuir a quantidade maior (círculos) ou aumentar a quantidade menor (quadrados). O mesmo procedimento deve ser realizado em relação aos segmentos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

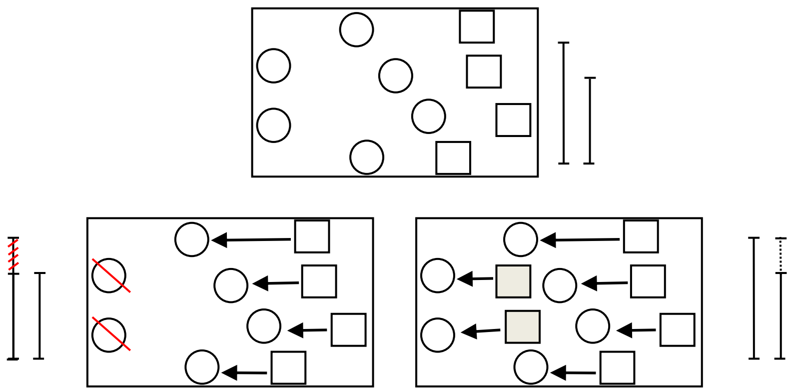


Ilustração 50

Assim, em uma mesma tarefa podem ser resolvidas duas operações diferentes, e por que não dizer, inversas entre si, embora o fim seja o mesmo, atingir a equivalência na correspondência entre as quantidades de círculos e quadrados.

Os livros didáticos brasileiros também abordam as relações entre quantidades, com a grande e decisiva diferença que não são passíveis de variação, dadas estaticamente.

Cada abstração verbal (*um*, *dois*, *três*...) é relacionada com a quantidade de objetos que representa (*um*: 1 balão, 1 lápis, 1 boneca...), ou seja, empiricamente. Como diz Rubstov (1996, p. 129), apoiado em Davydov, "o conhecimento empírico é elaborado quando se compara os objetos às suas representações, o que permite valorizar as propriedades comuns dos primeiros". E continua: "qualquer conhecimento empírico baseia-se na **observação**. Reflete apenas as propriedades exteriores dos objetos e apoia-se inteiramente nas representações concretas" (idem, p. 130 – destaque do autor).

3.3.2.4 – A tarefa requer ao professor a construção, no quadro, de um segmento que representa o comprimento de uma tira de papel distribuída às crianças (Ilustração 51). Depois, risca uma parte do segmento para que elas façam o mesmo com as tiras, o que implica cortá-la (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

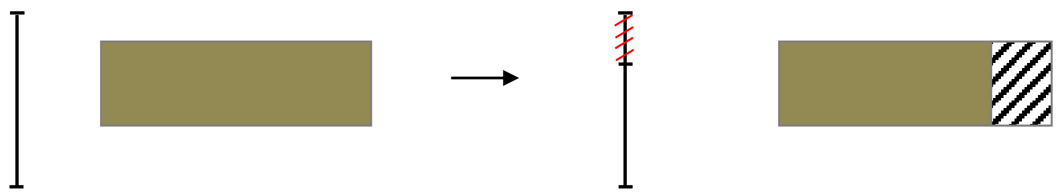


Ilustração 51

Nas primeiras três tarefas dessa seção, o movimento das relações gerais entre as grandezas foi reproduzido graficamente. Na quarta, referência dessa discussão, acontece o contrário, pois a representação gráfica mediatiza a ação objetal. Como decorrência, exige uma reestruturação no movimento do pensamento, em sentido inverso, conforme ficará caracterizado nas próximas tarefas.

3.3.3 Arcos

Os arcos constituirão uma importante ferramenta no processo de elaboração do esquema geral de resolução de problemas de adição e subtração. Além disso, subsidiarão a introdução de um novo tipo de representação das relações entre grandezas, a representação literal que, por sua vez, possibilitará a expressão das relações entre grandezas em sua forma abstrata.

3.3.3.1 – As crianças dispõem de um pacote de cereal, cuja massa é representada por um segmento no quadro. O professor risca uma parte do segmento e pergunta: O que é preciso fazer com o cereal? A resposta esperada é que se retire uma parte do cereal do pacote. Um estudante é convidado a simular com as duas mãos, sobre o segmento riscado, o intervalo correspondente à massa inicial. Outra criança adotará o mesmo procedimento em relação ao que ficou depois de ter sido diminuída. Posteriormente, constrói-se a representação da referida demonstração gestual com linhas em forma de arcos, como é possível observar na ilustração 52.

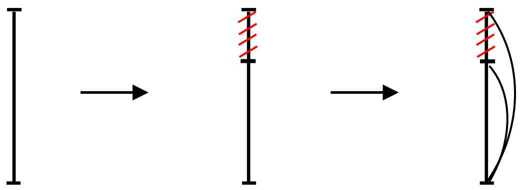


Ilustração 52

3.3.3.2 - A tarefa tem como referência um retângulo e um segmento construídos no quadro pelo professor (Ilustração 53). Os estudantes têm a incumbência de propor um procedimento, que demanda como alternativa ideal o aumento do retângulo. Após a alteração, eles mostram a área inicial, gestualmente, com as duas mãos no retângulo e no segmento. Em seguida, o gesto é substituído por arcos. O mesmo procedimento se repete com a área final do retângulo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

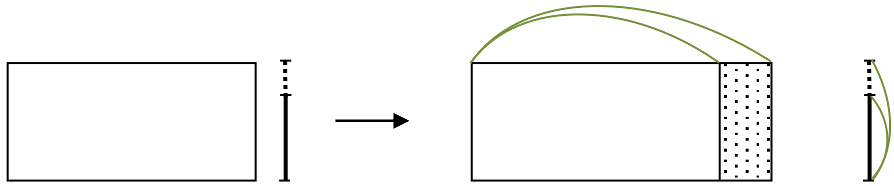


Ilustração 53

3.3.4 Marcando as grandezas com letras

Com a explicitação de que na comparação de qualquer grandeza se destacam e se consideram só as relações entre aquelas homogêneas (comprimentos com comprimentos, áreas com áreas...), inicia a substituição da representação gráfica pela literal. Para Slovin e Venenciano (2008), esta primeira utilização de letras expressa o geral ao invés de quantidades específicas. Nesse processo, de acordo com Angle (2009), introduz-se os elementos da álgebra abstrata de forma significativa.

Por serem cada vez mais abstratas, as próximas tarefas promovem a explicitação dos nexos internos das mais diversas relações entre grandezas que possibilitarão a redução a uma fonte comum para introdução do conceito de número.

3.3.4.1 – O componente dessa tarefa é a apresentação de um recipiente com líquido e, concomitantemente, um esquema no quadro (Ilustração 54), que se transformará em modelo para a resolução de problemas referentes às operações de adição e subtração (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

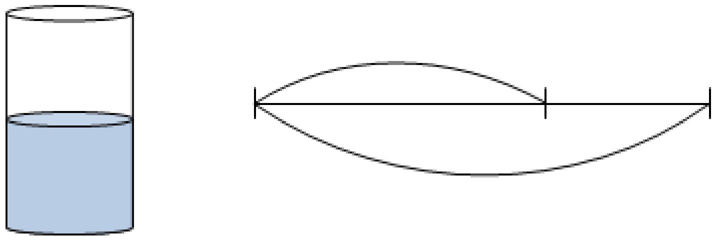


Ilustração 54

Novamente o professor adota como recurso a simulação ao dizer que os estudantes de outra sala alteraram o volume de líquido no recipiente e o demonstraram no esquema exposto no quadro. Propõe às crianças que adivinhem o procedimento adotado. Com sua colaboração, elas percebem a impossibilidade de, somente pela observação do esquema, dizer se o volume aumentou ou diminuiu. É possível identificar que houve um movimento naquilo que estava depositado no interior de um invólucro, porém sem qualquer indicativo para discernir qual é o estado inicial e o final. A resolução do problema não está dada em sua imediatez, pela aparência externa, isto é, empiricamente.

O impasse torna-se anunciativo da zona de desenvolvimento próximo dos estudantes, que se constituiu por estarem em ação investigativa necessária à execução da tarefa. Assim sendo, conclama pela participação do professor que sabe qual o procedimento adotar e manifesta sua disposição em ajudá-los. Então, apresenta um novo esquema composto por letras e símbolo (flecha), observável na ilustração 55:

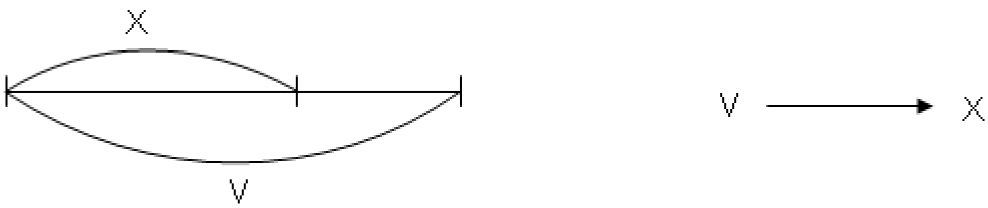


Ilustração 55

Consequência das discussões orientadas pelo professor, as crianças concluirão que, no esquema (Ilustração 55), o “V” representa o volume maior e o “X” o volume menor. A seta indica o movimento que vai do volume inicial ao final. Isso significa dizer que o volume de líquido inicialmente era maior. A tarefa do pensamento é a apreensão da representação abstrata.

O modo de organização da tarefa permite a explicitação de novos componentes conceituais teóricos. O professor fala aos estudantes que, em matemática, as grandezas, geralmente, são representadas por letras. Como forma de evitar que só se pode adotar uma determinada letra, ele sugere que as crianças reescrevam o registro com a adoção de novas designações. Como decorrência da análise dos esquemas produzidos, prevê-se a elaboração da síntese conclusiva referente à liberdade de escolha das letras para representar grandezas (Ilustração 56).

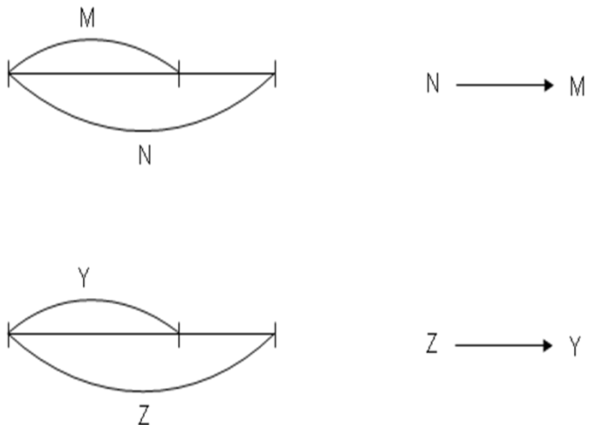


Ilustração 56

Da mesma forma, gradativamente, as crianças passam a considerar o arco ou a letra como representações da grandeza e não mais o segmento. Representa, pois, a grandeza do objeto e não ele em si.

Vale lembrar que as proposições davydovianas têm como um dos princípios o caráter objetal, que consiste no ensino exato dos procedimentos indispensáveis com os objetos para revelar o conteúdo do futuro conceito e representá-lo em forma de modelos.

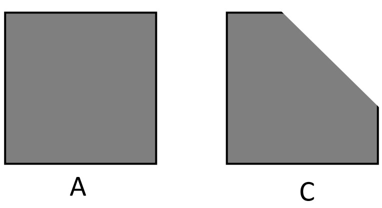
O estágio atual do processo de formação do modelo universal do conceito de número, nas proposições davydovianas, consiste na passagem gradativa da representação gráfica para a literal. As letras aparecem como meio de reprodução das relações entre grandezas, em um sistema que envolve segmentos, arcos e setas. O movimento entre as grandezas (no caso, entre os volumes, ilustrações 55 e 56) não está dado imediatamente, mas mediado por um sistema de símbolos, que conduz à conexão entre o externo e o interno. O movimento interno entre as grandezas aparece como objeto do pensamento teórico. Como diz Davydov (1982, p. 303), “revelar e expressar em símbolos o ser mediatizado das coisas, sua generalidade, é efetuar a passagem para a reprodução teórica da realidade”.

Na próxima seção, as tarefas analisadas dão a base para se afirmar que o pensamento abstrato não se desenvolve a partir de relações entre grandezas fixas, pelo contrário, seu processo em movimento por serem passíveis ou não de alterações.

3.3.5 Permanência da medida da grandeza em detrimento da forma

Para atingir o objetivo anunciado no parágrafo anterior, a tarefa seguinte apresenta como peculiaridade a percepção do movimento que ocorre na transformação do objeto, figura, em análise.

3.3.5.1 – Para o desenvolvimento dessa tarefa, o professor expõe uma figura de superfície quadrangular e solicita a indicação de uma letra para representar área da face maior (A, por exemplo). Corta um canto e separa-o, pois a referência, de início, passa ser a área da superfície restante, e, para sua identificação, adota-se outra letra (C). Registra-se no quadro o esquema representativo do movimento da relação entre as grandezas, conforme ilustração 57 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).



$A \longrightarrow C$

Ilustração 57

Com sua diminuição, a área inicial A não pode mais ser representada pela mesma letra, por isso a inclusão de C para representar a nova área, menor que a primeira. Na sequência, o professor repõe a parte retirada em seu lugar, o que se obtém novamente A. Essa junção sugere um novo esquema de representação (Ilustração 58).

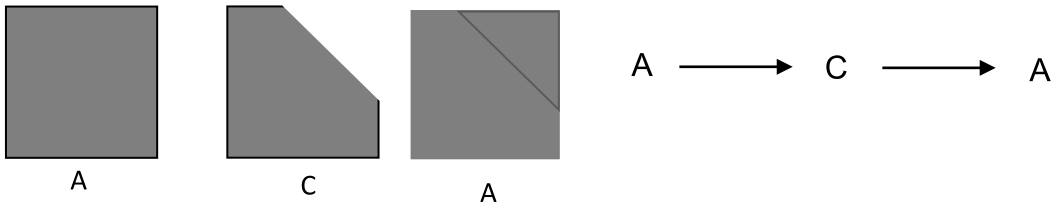


Ilustração 58

A tarefa prevê, em continuidade, a inclusão de novos elementos e procedimentos que ampliam as possibilidades conceituais. O professor retira novamente o canto cortado para aproximá-lo em outro lugar de C e questiona sobre a variação ou não da área em relação a A. A conclusão a ser elaborada é de que, independente da parte de C na qual será anexada o pedaço recortado, permanecerá com área A, embora altere sua forma. Por isso, o registro permanece o mesmo (Ilustração 59).

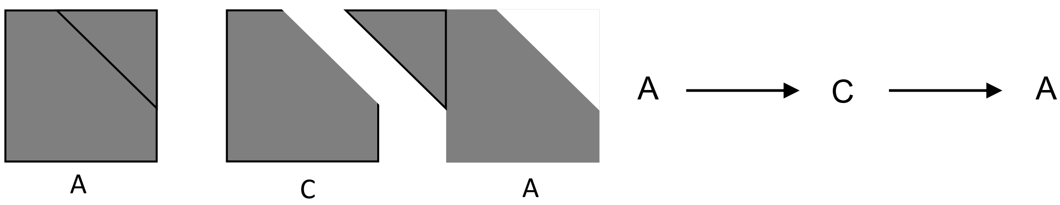


Ilustração 59

A conclusão sobre a permanência da área, independente do arranjo posicional das duas partes de A, ocorre porque no processo de análise a referência foram as propriedades externas e, principalmente, as conexões internas, a partir de transformações práticas do recorte, com foco para a grandeza área e suas relações com a forma.

No processo de apropriação conceitual, conforme proposta de Davydov, a centralidade nas conexões das relações internas do objeto traduz a busca pela compreensão do essencial, do fundamento de leis e propriedades. Afinal, como as demais ciências, a Matemática reflete “as leis do mundo que nos rodeia e serve de potente instrumento para o conhecimento e domínio da natureza” (ALEKSANDROV, 1976, p. 11). O conhecimento das propriedades e leis do mundo objetivo, em situação escolar, se dá por meio da interação entre a criança e o objeto. Segundo Ilienkov (2006), nas situações criadas pela experiência humana, pelo experimento, se refletem propriedades objetivas de fenômenos reais e o homem chega a conhecê-las. De outro modo, resultaria impossível a utilização na prática social de tais propriedades e leis da natureza em benefício do homem.

3.3.6 Registro dos resultados de comparação = e ≠

As duas tarefas, a seguir analisadas, exemplificam o foco a considerar no processo de apropriação do registro de resultados relacionados à comparação de grandezas, em duas especificidades: igual e diferente. A partir das representações das grandezas por meio de letras, procede-se à elaboração de fórmulas ($a = b$, $a < b$ e $a > b$), que permitem o estudo das propriedades entre relações de igualdade e desigualdade das grandezas. Porém, em seu nível abstrato, que, segundo Aleksandrov (1976), trata das relações quantitativas e formas espaciais abstraídas de todas as demais propriedades do objeto.

3.3.6.1 – Para a execução dessa tarefa, os estudantes trabalham em dupla, recebem dois objetos de cor e forma diferentes e iguais na massa. Discute-se sobre as propriedades dos objetos passíveis de comparação e indica-se a opção pela massa. Um estudante de cada dupla escolhe e informa as letras que designarão a massa dos objetos. Registra-se no quadro, por exemplo, **A** para representar a massa do objeto verde e **T** para a massa do objeto azul (Ilustração 60). Sugere-se o uso da balança de dois pratos para a comparação e, em seguida, o registro do resultado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 60

O professor dirá que geralmente em Matemática adotam-se letras e símbolos especiais para registrar o resultado da comparação entre grandezas. Escreve no quadro: A = T. Ao mesmo tempo, fala: A *Massa **A** é igual à massa **T***. O outro estudante recebe um terceiro objeto para comparar com a massa de um dos objetos, por exemplo, o de massa **A** usado pelo seu colega. Escolhe **L** ou outra letra para designar a massa. Como não são iguais, apresenta-se o registro da desigualdade: A ≠ L. As crianças leem: A massa **A** não é igual à massa **L**.

A instigação, por parte do professor, é para que as crianças adivinhem o resultado da comparação das massas **T** e **L**. As crianças comprovam suas respostas com o uso da balança. Registram: T ≠ L, precedido da leitura "a massa **T** não é igual à massa **L",** e completa-se o esquema (Ilustração 61).

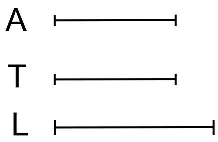


Ilustração 61

Na leitura do registro, se faz necessária a indicação da grandeza, para evitar que as crianças passem a entendê-lo como a letra **A** não é igual à letra **L**. Os resultados abstratos da tarefa anterior (A = T, A ≠ L e T ≠ L) tiveram origem no mundo real (a partir da comparação entre os objetos verde e azul). Porém, como não se trata de uma abstração empírica, pode ser generalizada para estabelecer relações entre quaisquer objetos e, ainda, entre quaisquer grandezas (comprimentos, áreas, volumes, etc.), independentemente da propriedade numérica singular, pois T, A e L representam valores universais. Em outras palavras, por meio da abstração geneticamente inicial (teórica), as relações entre grandezas foram reduzidas a sua forma universal.

A grandeza **A**, por exemplo, pode ter uma massa de duzentos gramas, dois quilogramas, duas toneladas... Dependerá, pois, da quantidade e da unidade de medida utilizada, conforme veremos no capítulo quatro das proposições davydovianas.

Diferentemente, os livros didáticos brasileiros priorizam proposições particulares e empíricas. Como forma de ilustração, a introdução dos símbolos abstratos = (igual) e ≠ (diferente) se dá a partir da análise de quantidades iguais ou diferentes de objetos.

A situação de introdução é composta por perguntas e, imediatamente, suas respectivas respostas. Não há nada a ser resolvido ativamente pela criança, que apenas observa o desenho. As abstrações $3 = 3$ e $5 \neq 3$, por exemplo, se generalizam somente para estabelecer relações entre quantidades bem definidas de objetos. Centram-se somente em grandezas discretas, com um valor numérico singular. E reduz a amplitude de uma importante significação matemática produzida historicamente pela humanidade, suas aplicações**.**

> A matemática encontra extensa aplicação na vida diária, na tecnologia e na ciência; nas ciências exatas e nos problemas mais complicados da tecnologia encontram aplicação inclusive aquelas teorias que nascem da matemática mesma. Esta é uma das características peculiares da matemática, junto com sua abstração, rigor e conclusão de seus resultados (ALEKSANDROV, 1976, p. 23).

Quanto mais gerais forem as abstrações iniciais, mais amplo será o terreno das aplicações. E, segundo Davydov (1982), quanto mais cedo a criança se apropriar do aspecto geral, mais facilidade terá em compreender as manifestações particulares e sua importância nas aplicações. Por isso, "é necessário mostrar francamente às crianças a essência abstrata das matemáticas, inculcar-lhes a faculdade de fazer abstrações e de aproveitar sua força teórica" (DAVYDOV, 1982, p. 157).

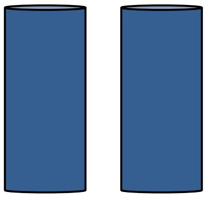
Vigotski (2000), em seus estudos sobre o desenvolvimento dos conceitos na infância, identificou dois níveis: pré-conceitos e conceitos. Exemplifica o pré-conceito como sendo uma abstração aritmética do número, a partir do objeto, como 3 = 3 e 5 ≠ 3. Em contraposição, toma a álgebra como conceito propriamente dito que, de acordo com o referido autor, eleva ao nível superior o pensamento matemático do estudante e permite a compreensão de qualquer operação matemática como caso particular.

Vygotski afirma que a aprendizagem da álgebra liberta o pensamento das dependências numéricas concretas e eleva a um nível mais generalizado. A operação com os conceitos algébricos é mais livre, "por partir da fórmula geral por força da qual ela é independente de uma expressão aritmética determinada" (VIGOTSKI, 2000, p. 372).

Mas a álgebra é acessível às crianças em seus primeiros anos escolares? Já mencionamos que os resultados obtidos por Davydov nas pesquisas realizadas no ensino experimental, durante vinte e cinco anos, permitiram-lhe a conclusão de que o simbolismo literal e as fórmulas são inteiramente acessíveis aos estudantes mesmo antes de conhecer as propriedades numéricas dos objetos.

Desse modo, pelas razões apresentadas anteriormente, não faz sentido limitar o ensino da matemática em todo o primeiro ano escolar às significações aritméticas, conforme fazem os livros didáticos brasileiros.

3.3.6.2 – A tarefa seguinte tem por base dois recipientes opacos iguais na forma, além do registro no quadro está relação dos volumes de líquido: P ≠ A. O professor questiona: C*omo se pode fazer para que o segundo recipiente tenha o mesmo volume de líquido que o primeiro?* E faz outro registro que deve esclarecer a situação: P > A. Também apresenta a linguagem dessa relação num contexto revelador de algo apreendido pela humanidade. Fala aos estudantes: os adultos iriam entender logo o que têm de fazer, porque eles sabem ler o novo sinal: "maior que" (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).



$P \neq A$ $\quad$ $P > A$

Ilustração 62

No momento em que as crianças estabelecem o meio de igualar os dois volumes de líquidos, o professor levanta a seguinte questão: *Será que existe também o sinal de "menor"?* A atenção também se volta para a semelhança dos sinais de "maior que" (>) e "menor que" (<), que se distinguem por se voltarem para lados opostos.

Necessário se faz a demonstração de que o registro de comparação começa por qualquer das duas grandezas relacionadas, mas o sinal muda quando se tratar da relação "maior/menor".

O princípio interno de igualdade e desigualdade entre as grandezas é reconstruído, sob a forma de conceito teórico, na tarefa desenvolvida coletivamente pelas crianças e o professor, que a dirige. A interação criança/objeto implica mediações simbólicas, inicialmente, na forma objetal, depois na forma gráfica e, finalmente, na forma literal. Esse movimento de reprodução das relações gerais entre as grandezas, mediado pelos símbolos, promove, segundo Davidov (1988), a reestruturação e desenvolvimento do pensamento teórico e das ações mentais (abstração, generalização, etc.).

Os sistemas simbólicos são meios para estabelecer os padrões na relação entre grandezas e na passagem destes para o plano mental. A revelação e a expressão em símbolos das relações essenciais entre grandezas permitirão, mais tarde, sua reprodução teórica por meio do modelo geral (lei). Ou seja, uma abstração produzida com a ajuda das fórmulas literais. Quanto mais as tarefas adentram na essência das relações entre grandezas, mais abstratas são as formas de expressão de tais relações e, consequentemente, mais concretas e plenas de conteúdo teórico.

3.3.7 Ordem das grandezas

A tarefa para o desenvolvimento conceitual da ordem das grandezas consta da orientação do professor, que tem quatro recipientes de volumes diferentes, enquanto as crianças dispõem de quatro tiras de alturas e cores diferentes. Os recipientes são colocados na ordem decrescente de volumes, procedimento que os estudantes adotarão para dispor as fichas (Ilustração 63).

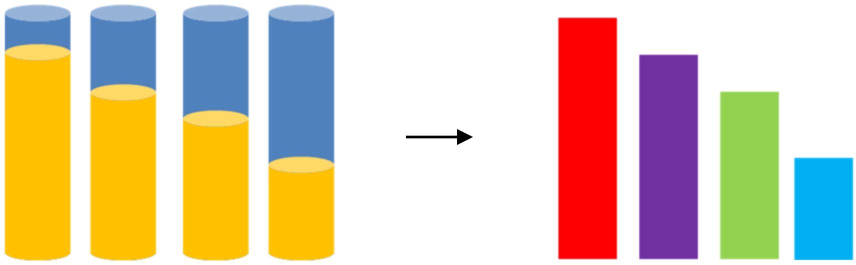


Ilustração 63

Depois, as crianças escrevem as letras nas tiras, representativas das marcas dos volumes dos recipientes (Ilustração 64).

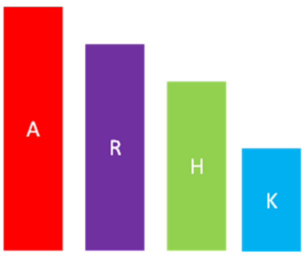


Ilustração 64

Desencadeia-se um processo de discussão, orientado pelo professor, por meio de perguntas do tipo:

1) Qual volume é menor que o volume K? (Resposta a elaborar: Não tem);

2) Qual volume é maior que o volume A? (Resposta a elaborar: Não tem);

3) Qual volume é maior que o volume R? (Resposta a elaborar: O volume A);

4) Qual volume é menor que o volume R? (Resposta a elaborar: Os volumes H e K);

5) Qual foi o volume que eu pensei se ele é maior que o K, mas é menor que o R? (Resposta a elaborar: O volume H);

6) Qual foi o volume que eu pensei se é maior que o H, e menor que o A? (Resposta a elaborar: O volume R).

No âmbito das discussões, introduzem-se novos termos como **crescente** e **decrescente,** sem necessidade de repetição pelas crianças, mas sim que elas os compreendam. A tarefa pressupõe uma resolução teórica. Conforme Rubinstein (1960, p. 211), "resolver um problema no plano teórico significa resolvê-lo não só para o caso concreto dado, mas também para todos os casos da mesma natureza". A resolução da tarefa anterior não serve apenas para o caso particular dos volumes, se expande para todos os casos sobre a ordem crescente e decrescente, independentemente do tipo de grandeza e da sua propriedade numérica.

Pressuposto distinto se explicita no modo que as proposições brasileiras introduzem o conceito de ordem crescente e decrescente. O ponto de partida geralmente incide na observação de situações do dia-a-dia em que um grupo de crianças estão organizadas em fila, pelo critério comprimento da altura. Esse modo de apresentação consiste na relação direta dos conhecimentos aprendidos na escola com uma imagem sensorial bem definida e próxima da "realidade" da criança. Tal orientação se mantém mesmo substituindo as crianças por blocos, ou qualquer outro material, conforme segue a ilustração 65:

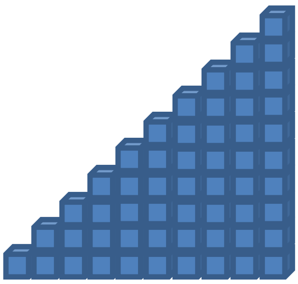


Ilustração 65

Independentemente do material utilizado, o teor é o mesmo, uma vez que conduz apenas à observação em vez de se promover um diálogo mediador para a apropriação das relações internas. Trata-se de situações isoladas sem se traduzir em manifestações particulares que podem ser resolvidas a partir do procedimento geral, como apresentado na tarefa davidoviana (3.3.7 A ordem das grandezas). Se assim fosse, um possível procedimento a adotar seria, inicialmente, organizar os dados em um quadro (Ilustração 66):

Ordem	**Agrupamento**	**Caráter visual direto da sequência**	**Número de Blocos**
1º	A	1	1
2º	B	1 + 1	2
3º	C	1 + 1 + 1	3
4º	D	1 + 1 + 1 +1	4
5º	E	1 + 1 + 1 + 1+1	5
6º	F	1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1	6
7º	G	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	7
8º	H	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	8
9º	I	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	9
10º	J	1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	10

Ilustração 66

Posteriormente, a tarefa se desenvolveria com uma série de questionamentos, como:

1) Qual agrupamento é menor que o agrupamento A? (Resposta a elaborar: Não tem);
2) Qual agrupamento é maior que o agrupamento J? (Resposta a elaborar: Não tem);
3) Qual agrupamento é maior que o agrupamento G? (Resposta a elaborar: O agrupamento H);
4) Qual agrupamento é menor que o agrupamento C? (Resposta a elaborar: Os agrupamentos A e B);
5) Ou então, com base na característica numérica do agrupamento:
6) Qual foi o número que eu pensei se ele é maior que 6, mas é menor que o 8? (Resposta a elaborar: O número 7);

7) Qual foi o número que eu pensei se é maior que o 8 e menor que o 10? (Resposta a elaborar: O número 9).

Ou seja, os procedimentos de resolução das tarefas davidovianas de caráter geral também se aplicam às situações empíricas. A questão não é ignorar o conhecimento empírico, mas ir além. Como diz Davydov (1982), na formação dos conceitos matemáticos torna-se mais fecundo iniciar o ensino pelo conhecimento dos conceitos mais gerais para depois passar ao estudo das particularidades e singularidades, conforme se procede no próximo capítulo.

3.4 INTRODUÇÃO DO NÚMERO

O presente capítulo marca a transição da primeira para a segunda "ação de estudo" proposta por Davidov (1988), respectivamente: *transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado*, para a *modelação da relação universal na unidade das formas literal, gráfica e objetal*. Nos capítulos anteriores do livro em análise foram abordadas as relações de igualdade e desigualdade entre grandezas ("igual", "maior", "menor"), que culminou com o registro por meio de fórmulas literais tais como: $A \neq B$, $A = B$, $A > B$, $A < B$. No capítulo que segue inicia-se com a introdução da unidade de medida. Na sequência, identifica-se a conexão interna das múltiplas relações entre a unidade de medida e a grandeza a ser medida e, finalmente, chega-se ao modelo universal do conceito de número que possibilita a revelação da característica numérica da grandeza.

Contudo, importa a interpretação de Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 306) sobre as proposições de Davydov ao alertar que, "do simples fato que o sistema dos números reais possuírem todas as propriedades das grandezas escalares, não se deduz, de nenhuma maneira, que o número e a grandeza sejam idênticos". Vale reafirmar que, em Matemática, o número é um caso singular das relações entre grandeza. Por isso,

> Para a criança, que recém começa a estudar matemática, isto está **estabelecido** e ela deve chegar a compreender as relações exatas, regulares entre os números e a grandeza. Precisamente por isso, a introdução do número é um dos problemas mais importante no programa de matemática (GALPERIN, ZAPORÓZHETS e ELKONIN, 1987, p. 306 – grifo dos autores).

Foi como consequência da expressão “mais importante” na citação anterior – lembrando o contexto de apresentação da justificativa da nossa opção pelo objeto de estudo – que elegemos o conceito de número como foco da presente pesquisa.

3.4.1 Comparação das grandezas com ajuda da unidade de medida

A partir do método de comparação direta entre duas grandezas criam-se novas situações que requerem uma terceira grandeza para realizar a comparação. Esta possibilitará, durante o experimento objetal, a introdução da unidade de medida e a reprodução do modelo concernente à forma universal do número real: cociente de uma grandeza a outra tomada como unidade. O modelo será expresso por duas fórmulas matemáticas que se deduzem uma da outra pelo princípio multiplicativo: $A/c = N$ ou $A = cN$.

O mundo das fórmulas científicas, diz Ilienkov (2006), não pode existir independente do mundo real. Atualmente existem equações matemáticas que não podem mais ser expressas em forma sensorialmente perceptível, porém não diminui seu enorme conteúdo objetivo. De acordo com o autor, quanto mais abstrata é a forma de expressão, tanto mais concreta e cheia de conteúdo se torna. A ciência, no processo de seu desenvolvimento, reflete de maneira cada vez mais exata a natureza objetiva. As teorias científicas fundem-se com a essência da realidade, isto é, expressam a verdade objetiva.

São muitos os conhecimentos cuja expressão não é sensorialmente perceptível, porém, não deixam de reproduzir no pensamento os fenômenos no que estes têm de concreto, ou como diz Marx (2003), como unidade de numerosas determinações, como unidade da diversidade. Esse caminho, diz Ilienkov (2006), é o único que permite aproximar o pensamento do mundo objetivo concreto.

O sistema dos números reais é síntese do processo histórico do desenvolvimento do conceito de número composto por particularidades (as diferentes unidades de medida) e singularidades (os números naturais, inteiros, racionais e irracionais). Cada novo conceito numérico que surge no processo histórico de desenvolvimento reflete de maneira cada vez mais exata a natureza objetiva. Assim, os números reais englobam uma variedade de fenômenos diversos do mundo objetal sensorial em um sistema único.

Desse modo, o número real é unidade do diverso, é um sistema de nexos e relações que constitui um todo indissolúvel em conexão com cada sistema numérico singular, ou seja, é o concreto.

> O concreto é concreto por ser a síntese de múltiplas determinações, logo, unidade da diversidade. É por isso que ele é para o pensamento um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e, portanto, igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação (MARX, 2003, p. 248).

Se retirarmos os irracionais, por exemplo, do concreto (números reais), este deixa de ser número real, deixa de ser concreto. Teremos apenas o sistema dos números racionais, o que deixaria espaços vazios na reta numérica, lugar geométrico do todo, dos infinitos números reais. Para cada número real há um ponto correspondente na reta real. Entre dois pontos quaisquer existem infinitos deles, o que caracteriza a reta numérica como densa.

Mesmo assim, os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, ambos os conjuntos têm a mesma potência. Do mesmo modo, a potência do conjunto de pontos da reta é a mesma do conjunto de pontos de um segmento de reta, por menor que ele seja. Também a mesma potência ocorre no conjunto de pontos de um segmento de reta unitário e o conjunto de pontos de uma área unitária ou de um volume unitário, ou ainda, de todos os conjuntos do espaço tridimensional (BOYER, 1974).

Porém, a potência dos números reais é maior que a potência dos números racionais. Ao se considerar apenas os números racionais ocorrem espaços vazios na reta numérica, não contemplaria a totalidade. Por isso, não pode ser concebido como concreto.

O abstrato, por sua vez, é uma parte de um todo, extraída e separada do todo. Porém, não se trata de qualquer parte, mas daquela que constitui o nexo e permite a interação com os demais aspectos e relações do todo. Estas, segundo Ilienkov (2006), constituem-se na característica principal que faz da abstração o contrário do concreto. A diferença entre o concreto e o abstrato não é absoluta, mas relativa. O concreto, em uma conexão, pode ser abstrato em outra e vice-versa. Em relação ao número natural, o número real é concreto, porém, em relação aos números complexos, o número real é abstrato, pois constitui apenas uma parte desse sistema.

Para considerar um conceito abstrato ou concreto depende do nível a que se tenha chegado no complexo processo de análise. No caminho da ascensão, se produzem metamorfoses nos conceitos: os abstratos se tornam concretos e os concretos se transformam em abstratos em relação aos novos conceitos (ILIENKOV, 2006).

A proposição de Davydov (1982) para o ensino da Matemática leva em consideração que a aprendizagem das crianças seja organizada em correspondência com o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Sob a direção do professor, as crianças analisam e identificam a relação geral (principal), suas manifestações em relações particulares e suas expressões singulares. Os estudantes se envolvem na busca da apreensão das condições de origem do conceito de número, sua gênese, não as recebem pronto.

Vale lembrar que quando as crianças se apropriam de certos conhecimentos que lhes são apresentados em sua forma pronta, mesmo que realizem algum trabalho de estudo, a atividade de estudo não pode ser realizada. Pois o trabalho de estudo não possui todos os elementos dessa, como, por exemplo, a revelação da relação geneticamente inicial do conceito em estudo (DAVIDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Mas qual é a relação geneticamente inicial, a origem, a abstração essencial, dos números reais? Ou qual é o nexo entre os números naturais, inteiros, racionais e irracionais? Em outras palavras, qual é a célula que determina o surgimento e o desenvolvimento dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, enfim, dos números reais, em seu estágio atual de desenvolvimento? Davydov, em consonância com o que dizem os teóricos dos fundamentos da Matemática (CARAÇA, 1984; ALEKSANDROV, 1976), considera esta célula: a relação complementar de multiplicidade e divisibilidade.

As tarefas a seguir contemplam tal relação para que o número real seja reproduzido teoricamente como unidade dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Para tanto, criam a necessidade de um elemento mediador, a unidade de medida, para proceder a comparação entre duas grandezas.

3.4.1.1 – A tarefa estabelece que, sobre a mesa do professor, há algumas tiras de cartolina e, do outro lado da sala, está o professor com um pedaço de madeira na mão. Ele sugere que as crianças encontrem uma tira que tenha o mesmo comprimento da altura que a madeira (Ilustração 67). Num ambiente de debates e de levantamento de hipóteses, atinge-se a conclusão de necessidade da aproximação dos objetos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 67

Isso significa que o procedimento utilizado para resolver a tarefa ainda foi a comparação direta entre as duas grandezas, o que sugere uma nova tarefa que propicie a criação de necessidade da superação dessa forma de estabelecer a relação comparativa.

3.4.1.2 – Essa tarefa prevê que: do lado esquerdo do quadro, o professor faz um segmento de comprimento **A**; na parte da direita, mais quatro **E**, **C**, **H** e **P,** em que **E** e **H** não são iguais ao **A**, P > A, C = A (Ilustração 68). Cabe às crianças escolher um que tenha a mesma medida de **A** (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

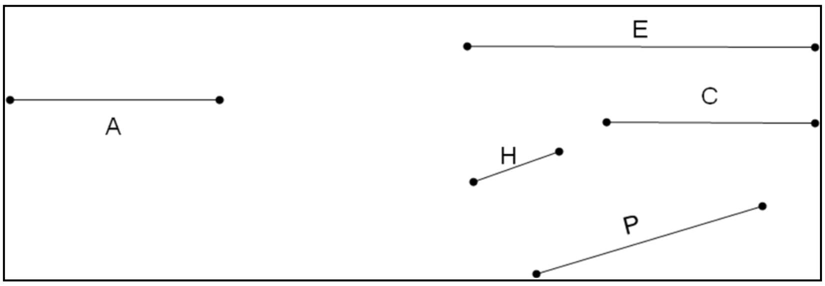


Ilustração 68

Como não é possível mover os segmentos para proceder a comparação direta entre as duas grandezas, faz-se necessário um elemento mediador, por exemplo, um barbante. Trata-se de uma situação que depende de um elemento que torna possível o cumprimento da tarefa pelos estudantes, por isso, uma comparação mediatizada.

3.4.1.3 – Nessa tarefa, cada criança receberá um envelope com recortes quadrangulares. Dentre eles, um tem a área da superfície maior, igual à área de um quadrado desenhado numa folha - quadrado da esquerda na ilustração 69 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 69

Tendo como parâmetro cada um dos recortes da direita (Ilustração 69), as crianças verificam qual tem a mesma área do quadrado da folha (esquerda).

A necessidade de um elemento mediador para a medição surgiu historicamente e é reproduzida nessa tarefa, assim como nas subsequentes. Tal necessidade é expressão da carência de algo, que provocará o estudante à busca do elemento que a satisfaz, desde que a tarefa seja devidamente dirigida pelo professor.

Trata da reprodução das vivências da humanidade no processo de produção do conceito de número real em seu estágio atual. Portanto, não está limitado à sua forma primitiva com base apenas em quantidades discretas que não ultrapassam os limites dos números naturais, que são uma pequena parte dos números reais (conforme os livros didáticos brasileiros). Portanto, o que Davydov (1982) propõe é a reprodução do processo de origem e desenvolvimento do **atual estágio** do conteúdo de estudo e não somente na biunivocidade das relações entre elementos discretos dados apenas em sua forma empírica.

> Os conceitos mudam, seja porque muda a realidade, como ocorre com os conceitos dos fenômenos sociais, ou porque se aprofunda no conhecimento dos fenômenos do mundo exterior. Em algumas etapas da história da ciência, se reproduz uma radical transformação dos velhos conceitos ao mesmo tempo em que surgem outros novos; se põe de relevo, também, uma livre discordância entre os fatos da realidade e os conceitos dela, o que conduz a uma modificação do conteúdo destes últimos (ROSENTAL e STRAKS, 1958, p. 306).

Em determinado estágio do desenvolvimento histórico do conceito de número em que havia apenas a necessidade do controle de grandezas discretas os números naturais eram suficientes. Porém, com a necessidade da medida de grandezas contínuas fez-se necessário uma radical transformação do velho conceito e, ao mesmo tempo, surgiram outros novos, tais como os racionais, irracionais e inteiros. O foco na educação escolar, segundo Davydov (1982), deve ser para os conceitos novos, os conceitos contemporâneos. As tarefas devem ser organizadas de tal forma que gerem a necessidade dos conceitos teóricos em seu estágio atual. Assim, a contagem, por exemplo, será introduzida, em Davydov, a partir das relações entre o discreto e o contínuo.

Para Davidov (1988), a criança só se apropria de um conceito quando experimenta uma necessidade interna, quando está em atividade. No sistema de tarefas que segue, assim como aquelas discutidas anteriormente, a proposição é de que o estudante realize as transformações necessárias no material de estudo, para que a apropriação tenha um caráter ativo.

Durante a transformação experimental do material de estudo há um momento criador: o caráter ativo da apropriação dos conhecimentos referentes ao objeto de experimentação. É nesse momento que as crianças se deparam com tarefas que exigem a realização da atividade de estudo (DAVIDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

É necessário destacar que, no início da atividade de estudo, não é premente o conhecimento teórico de número. Ele surge no processo de apropriação de tal conhecimento, durante o desenvolvimento ativo das tarefas de estudo, que gera a necessidade de aprender, e sem a qual, segundo Davidov (1988) a atividade de estudo não existe.

3.4.2 Medição, medidas e marcas

Nas tarefas desenvolvidas até o momento, as grandezas eram consideras como um todo. A partir desse momento do processo, elas são organizadas para promover o movimento que ascende do único ao múltiplo, do indivisível ao divisível, com a introdução da unidade de medida. Assim, evidencia-se a conexão essencial, a unidade entre os números naturais, racionais e irracionais.

Estes números existem como partes e aspectos de um mesmo edifício, os números reais. Quanto maior é a profundidade e a exatidão com que se alcançam os aspectos singulares desse todo, maior será a aproximação do momento em que se abarca a conexão interna e a interdependência entre os números singulares. A unidade dos resultados obtidos nos diferentes campos numéricos, a unidade do diverso, reproduz o conceito de número concreto, em sua integridade.

3.4.2.1 – Para cumprir a finalidade exposta no parágrafo anterior, a tarefa inicial determina que as crianças recebam um envelope com vários recortes de base retangulares, cujas áreas estão marcadas por letras. Além disso, têm uma folha com o desenho de um retângulo, conforme Ilustração 70 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

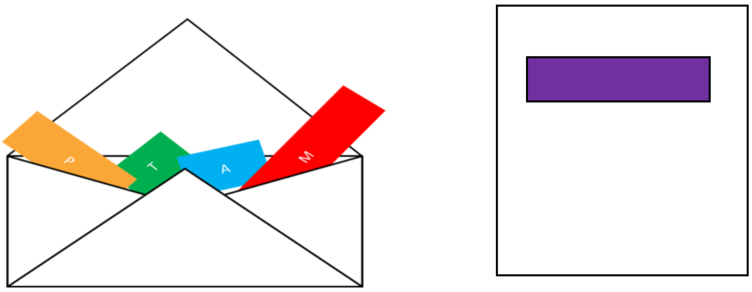


Ilustração 70

As crianças precisam encontrar a área do retângulo desenhado na folha (área B). No entanto, no envelope não tem nenhum recorte correspondente. Consequentemente, a área B será formada por mais de uma parte que, ao serem identificadas, serão contornadas (marcadas) sobre a referida superfície B (Ilustração 71).

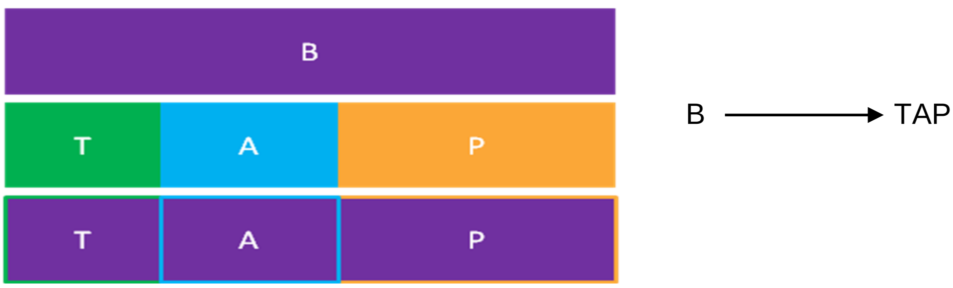


Ilustração 71

A conclusão a ser conduzida pelo professor é que a área B foi obtida com as medidas das áreas T, A e P, ou seja: T + A + P.

No desenvolvimento histórico da matemática Rosental e Straks (1958, p. 308-309) distinguem três graus de abstração:

> Primeiro: nascimento do conceito de número (identificação dos objetos, independentemente da infinita diversidade de suas qualidades individuais) e criação dos símbolos numéricos, ou seja, os numerais. Segundo passo: passagem dos números concretos ao uso de letras como símbolos (passo da aritmética para a álgebra). Terceiro: eliminação não só do conteúdo numérico dos símbolos, como também do conteúdo quantitativo concreto das operações matemáticas...

No processo de organização do ensino, Davydov percorre o movimento inverso. Inicia com os símbolos sem o conteúdo numérico concreto e segue das significações algébricas para as aritméticas com a introdução dos símbolos numéricos, sempre em conexão com as significações geométricas. Pois, segundo Rosental e Straks (1958, p. 318), o conceito científico não é uma abstração separada, "mas uma síntese de inumeráveis abstrações". E, além disso, "a matemática não se divorcia da realidade ao elevar-se ao grau mais alto de abstração; ao contrário, graças às abstrações [...], tem assimilado os processos mais complexos da natureza" (idem, p. 309).

3.4.2.2 – A presente tarefa toma por referência que em duas mesas distantes uma da outra há dois recipientes e no meio delas outra com um copo pequeno, além de um vaso maior com líquido para ser transferido para aqueles indicados inicialmente, com a seguinte condição: devem receber o mesmo tanto de líquido, sem que sejam movidos nem transferidos de uma mesa para outra. Com tal imposição, cria-se a impossibilidade de determinar a igualdade entre os volumes de líquido por meio da comparação direta, uma vez que estão distantes e não podem ser aproximados (Ilustração 72). A alternativa será recorrer a um terceiro volume, tomado como unidade de medida para mediar a comparação, no caso, o copinho do centro (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 72

Para cada copinho de líquido colocado no recipiente da esquerda é feito uma marca no esquema (Ilustração 73), em um pedaço de papel grosso ou compasso com abertura fixa. Também diz-se: “medimos uma vez, mais uma vez, ..., e mais uma”. No segundo copo, as crianças “conduzem” o professor na execução da medição e falam: “uma vez” e riscam a primeira marca, mais “uma vez” e riscam a segunda marca, etc. Como são as crianças que riscam e o professor não vê o registro, ele quer continuar mesmo quando todas atingem as marcas suficientes, pois não lembra quando tem que parar, já que não foram contadas as unidades colocadas no primeiro recipiente. Diante de tal situação, a expectativa é que as crianças anunciem o momento de parar por atingir a última marca. Para verificar se a tarefa foi realizada corretamente, colocam-se os dois recipientes um do lado do outro.

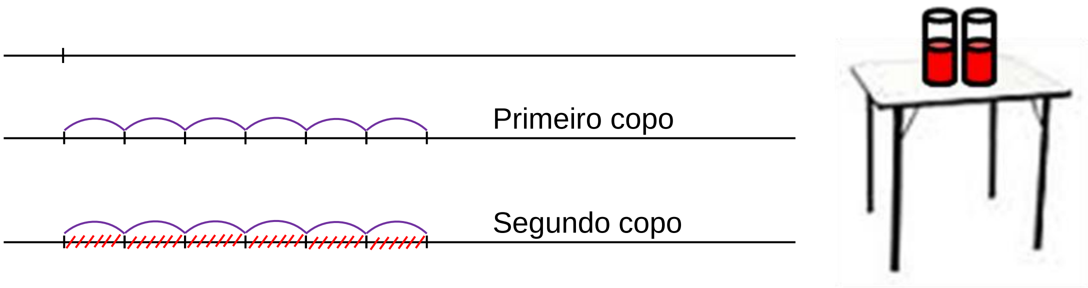


Ilustração 73

A análise da igualdade dos volumes obtida a partir de uma unidade de medida, comum para ambos os recipientes, permite a conexão interna (universal) entre grandezas a ser modelada, posteriormente. As ações objetais propiciam que os estudantes adentrem na apreensão da conexão interna de divisibilidade e multiplicidade – gênese do conceito teórico de número real – a partir das relações entre grandezas mediadas pela unidade de medida. Aos poucos, durante o registro das unidades nos esquemas, também se explicitam as condições de origem da reta numérica. Em síntese, as inter-relações entre as grandezas permitem a reprodução gradativa de propriedades que serão convertidas em conteúdo do conceito teórico de número.

Nos livros didáticos brasileiros, a unidade é considerada como uma ou grupo de individualidades desvinculadas entre si. Esse tipo de tratamento didático, segundo Davydov (1982), traz à tona somente a abstração e a generalização empíricas de um atributo do objeto, sensorialmente dado e extrínseco, em sua individualidade e singularidade.

> A face qualitativa dos objetos se destaca mediante *comparação* dos mais diversos grupos destes, e expressa um atributo similar e formalmente geral: constituir um ‘grupo de individualidades’ cujos elementos não estão realmente vinculados entre si, não dependem um do outro e não formam uma unidade real. Nenhum desses elementos perde nada si se separa do grupo e se analisa como unidade independente (DAVYDOV, 1982, p. 173).

O atributo similar, formalmente geral e explícito (uma bola, um carrinho, uma lua, uma estrela...) é o numeral 1, a unidade. Ou seja, há um grupo de individualidades que não formam uma unidade real, como na tarefa davidoviana, em que as várias unidades formavam o volume total de líquido de cada um dos dois recipientes. Ou ainda a área B, que foi formada pela unidade do diverso (T + A + P), se for retirada a unidade A, por exemplo, ficaria só T + P, que não representam mais a área B. Para formar a área B, há necessidade de T + A + P, essas dependem uma da outra, formam uma unidade real.

No desenvolvimento do conceito de número, de acordo com Galperin (1987), o conceito de unidade ocupa um lugar fundamental, pois se constitui na referência de todos os números e as ações com eles. Porém, desde que tomada como elemento mediador da medição, em vez de algo desconexo, conforme fazem os livros didáticos brasileiros.

3.4.3 Palavras e marcas

Introduz-se um novo modo de registro das medidas, a contagem, cuja base se solidifica na ideia da série ordenada dos números, em que cada um deles possui seu lugar. Portanto, respalda-se no aspecto ordinal do número, como um procedimento consciente (e não uma ação mecânica) que parte de sistemas não padronizados. Por exemplo, parlendas, cantigas e outros textos.

3.4.3.1 - Na tarefa de introdução, é preciso buscar no depósito (longe do quadro) um pedaço de barbante de comprimento igual à extensão da largura do quadro. O trabalho é realizado em duplas: um estudante mede o quadro com um pedaço fino de madeira e outro marca as medidas no esquema. Essa divisão de funções se justifica, pois para quem trabalha no quadro é difícil se desligar da medição toda vez que marcar e vice-versa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Para agilizar, o professor sugere uma sequência de palavras conhecidas que serão utilizadas oralmente, pelas crianças, sem fazer o registro das marcas. Correlaciona-se cada unidade de medida com uma palavra da sequência (Ilustração 74).

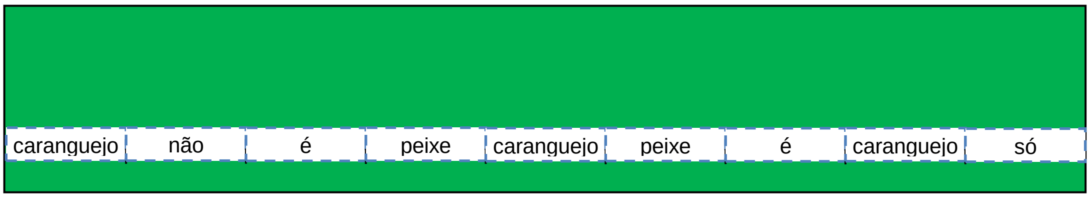


Ilustração 74

Anota-se a última palavra como forma de lembrá-la posteriormente. Para medir o barbante com a mesma unidade utilizada na medição do quadro tem que pronunciar as palavras da parlenda para cada unidade de medida até chegar à pronúncia de *só*. A parte medida do barbante deve ser colocada contra o quadro para as crianças verificarem se a tarefa foi resolvida corretamente. Desenvolvem-se outras tarefas envolvendo diferentes tipos de parlendas, poemas... e grandezas (comprimento, área, volume e quantidade).

A tarefa reproduz duplo procedimento: um que gera a necessidade de uma sequência padronizada para realizar a contagem das unidades de medida de uma determinada grandeza; o outro para medi-la. Assim como as parlendas, as limitações também surgem em situações com cantigas e outros tipos de textos adotados no processo de medição, como veremos nas tarefas da próxima seção.

3.4.4 Como deve ser a sequência de palavras

Nas tarefas que seguem, utilizam-se parlendas, cantigas, poemas e outros textos, como sistemas numéricos “defeituosos”. Esses permitem refletir as seguintes propriedades básicas da sequência numérica: 1) os números seguem um ao outro em uma determinada ordem que não pode ser alterada; 2) os números, numa série, não podem ser repetidos; 3) Caso for preciso, é possível sempre continuar a série numérica; 4) os números devem ser iguais para todas as pessoas.

3.4.4.1 - Considerando a necessidade de utilizar um sistema padronizado de numerais e sinais especiais (algarismos) para sua representação, essa tarefa consiste na apresentação, às crianças, dos algarismos adotados pelos diversos povos, inclusive aqueles que usamos atualmente (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

3.4.4.2 - Discute-se o problema das palavras repetidas na sequência. Supomos que na parlenda anterior da tarefa anterior (Ilustração 74, p. 146) a última palavra pronunciada no processo de medição seja *caranguejo* em vez da palavra *só*, como ocorreu no processo de medição do quadro (Caranguejo não é peixe. Caranguejo peixe é. Caranguejo só é peixe na enchente da maré...). Conclui-se que este tipo é “ruim”, pois a mesma palavra representa quantidades diferentes de unidades medidas, conforme ilustração 75 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

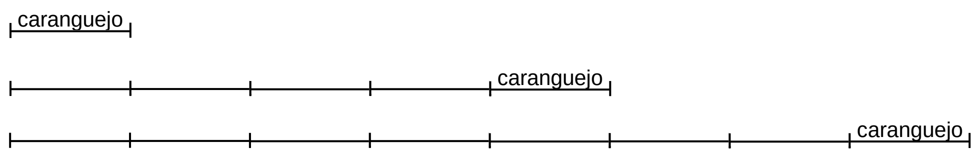


Ilustração 75

Caso as crianças adotassem o barbante como comprimento da largura de *caranguejo* unidades, poderiam surgir comprimentos diversos. A mesma palavra (caranguejo) representa quantidades de unidades diferentes: no primeiro caso, uma unidade; no segundo, cinco; no terceiro, oito unidades, e assim por diante. A sugestão é que as crianças comparem as grandezas diretamente e concluam que são diferentes, em vez de contar as unidades a partir da sequência numérica (Ilustração 76).

Ilustração 76

O professor ajuda as crianças a formularem uma exigência para que se obtenha resultado único da medição. Conclui-se que as sequências de palavras – sejam elas parlendas, músicas, poemas, entre outros – não podem ter repetições. Para cada unidade de medida pode ter uma e somente uma palavra correspondente. Além disso, todas as crianças devem utilizar a mesma sequência e conhecer a ordem em que as palavras aparecem.

3.4.4.3 – Nesse tipo de tarefa, o professor também sugere a medição de certa grandeza e, para tal, oferece uma medida. Apresenta uma parte de um poema com menos palavras que a quantidade de medidas cabíveis na grandeza. Quando as crianças detectarem a falta de palavras para concluir o processo de medição, o professor propõe mais uma parte do poema (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

A quantidade de palavras do poema não é equivalente à quantidade de unidades de medida. Para que a tarefa possa ser resolvida, faz-se necessário acrescentar novas palavras e estabelecer uma correspondência biunívoca. Assim, cada palavra do poema corresponde a uma única unidade de medida e cada unidade de medida corresponde a uma única palavra do poema.

3.4.4.4 – Essa tarefa difere da anterior por propor uma grandeza ainda maior. Novamente, precisa-se de mais palavras, que implica adicionar mais uma parte do poema. Com esse acréscimo, discute-se o quanto ainda pode-se continuar medindo e quantas palavras serão necessárias (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

O objetivo é que as crianças compreendam a necessidade de continuar o poema, ilimitadamente. Embora mais tarde, na sistematização dos números naturais, o foco incida inicialmente na primeira dezena, introduz-se aqui a ideia geral da sequência numérica infinita.

As tarefas com as parlendas geram necessidades que levam à reprodução da gênese do conceito científico de número natural, com suas leis fundamentais. Em fins do século XIX, o matemático Peano organizou o primeiro corpo axiomático definidor das leis desse sistema numérico. A partir de então, o conjunto N dos números naturais se distingue por quatro propriedades fundamentais das quais resultam todas as afirmações verdadeiras que se pode fazer a seu respeito. De acordo com Lima (1997), os axiomas são:

1. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural;
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes (números que têm o mesmo sucessor são iguais);
3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um";
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com N, isto é, contém todos os números naturais.

O último *axioma de Peano* é conhecido como o axioma da indução. Tem como significado que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 por meio de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. Por exemplo, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor do sucessor de 2, etc. Assim temos N = {1, 2, 3,…}. Enfim, os números naturais, na concepção de Peano, formam o conjunto N que têm uma operação “sucessor” $S(n) = n + 1$ e um elemento distinguido 1.

Nas tarefas com as parlendas, os axiomas são contemplados quando as crianças concluem que: não deve ter palavras repetidas para que o resultado da medição seja único; as palavras vêm sempre na mesma ordem; é necessário continuá-la ilimitadamente. A proposição, portanto, reproduz todo o sistema de nexos e relações que caracterizam os números naturais.

Os livros didáticos brasileiros também contemplam as sequências de palavras em forma de músicas infantis ou parlendas com o objetivo exclusivo de memorizá-las, tais como a cantiga infantil dos indiozinhos: Um, dois, três indiozinhos. Quatro, cinco, seis indiozinhos. Sete, oito, nove indiozinhos. Dez num pequeno bote. Vinham navegando pelo rio abaixo. Quando o jacaré se aproximou. E o pequeno bote dos indiozinhos. Quase, quase virou!

A cantiga anterior geralmente é utilizada para memorizar a sequência numérica e relacioná-la à quantidade de indiozinhos que cada numeral representa.

Vale observar, como forma de distinguir a essência das proposições brasileiras em relação às proposições de Davydov, que os referidos livros não consideram outras grandezas pelas quais se podem estabelecer relações entre os indiozinhos, tais como: massa, comprimento da altura, entre outros. Promover a introdução do conceito de número apenas em seu aspecto discreto, conforme mencionamos, limita-o ao campo dos naturais. Nesse caso, a unidade (um indiozinho) torna-se indivisível, pela impossibilidade de existir um meio, um quarto, etc., de indiozinho. Enfim, não é passível de subdivisão, como ocorre na sequência das tarefas davidovianas.

3.4.5 Unidade de medida composta

Nessa seção, voltamos a atenção para o modo que as tarefas propostas por Davydov levam os estudantes à apropriação da introdução da sequência numérica padronizada, cujas relações internas se apresentam por meio de sequências de palavras de parlendas, poemas, entre outros, que se constituíram o objeto de análise na seção anterior. O processo de formação da medição das grandezas com ajuda da unidade de medida se adianta quando ela é composta. Isso é importante para que a criança não a tenha como um objeto, mas realmente a unidade de medida.

Do ponto de vista matemático, foi a partir da divisão da unidade de medida que surgiram, historicamente, os números racionais (quando dividida em partes iguais) e irracionais (sem possibilidade de dividi-la em partes congruentes). Portanto, ultrapassa os limites dos números naturais.

3.4.5.1 – A tarefa propõe que três plantas de tamanhos diferentes precisam ser regadas (Ilustração 77). Para isso, é preciso três pequenos recipientes com volumes distintos. O professor apresenta um recipiente grande com água e interroga: Quantas vezes será possível regá-las? Conclui-se que é preciso utilizar as três vasilhas menores para regar as plantas com a água que está no recipiente maior, pois se correria o risco de uma delas não receber o referido líquido. O professor coloca líquido nos três recipientes e rega as três plantas. As crianças falam *um*. Depois, coloca o líquido em apenas um recipiente e diz *dois*. O objetivo é que as crianças percebam que está incompleta, que a medida integral corresponde aos três recipientes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

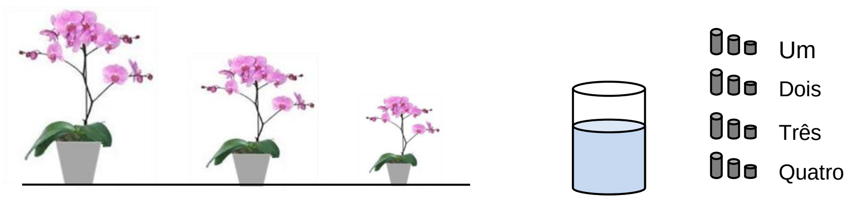


Ilustração 77

Observa-se que, nessa tarefa, a contagem não se refere a objetos isolados, no caso de pequenos copos individuais, mas da quantidade de vezes que as plantas foram regadas, cuja unidade era composta pelos três recipientes menores. Mesmo com tal complexidade trata-se, segundo Angle (2009), de conceitos pré-numéricos de grandezas e relações de parte e todo em que se insere a quantificação, a ser apropriados pelas crianças. A sequência numérica é introduzida a partir da união do contraste discreto-contínuo no processo de medição: o contínuo (volume de água) é medido por unidades de medidas discretas que, por sua vez, compõem-se pelo volume de água (grandeza contínua) dos três copinhos.

O professor precisa assegurar que as crianças tenham o domínio do procedimento geral, da ação objetal de medição. Por isso, ao colocar líquido em apenas um recipiente fala *dois*, mesmo sem completar integralmente a segunda unidade de medida. Tal procedimento não tem o propósito de confundir as crianças. Em vez disso, trata-se do controle de que – independente da composição operacional, que varia de acordo com as condições particulares da tarefa – a medição será realizada corretamente.

Em Davydov, o número é expressão da relação entre uma unidade de medida e uma grandeza (SLOVIN E VENENCIANO, 2008). Na tarefa anterior, por exemplo, o número quatro expressa a relação entre os três copinhos e o volume total de líquido do recipiente maior.

Por outro lado, nos livros didáticos brasileiros, o número se caracteriza apenas pela quantidade de objetos discretos dados diretamente. Nesse processo inerente ao ensino tradicional, segundo Davydov (1982), ao nomear cada um dos números deve surgir na criança a imagem correta do objeto ou grupo deles designados pelo símbolo correspondente, com um conteúdo inteiramente determinado visualmente. Subjacente a cada palavra de acepção numérica surge a representação do conjunto de objetos correspondentes. Na situação dos indiozinhos, mencionada anteriormente, por exemplo, as palavras *um, dois, etc.,* estão relacionadas somente a *indiozinho*. Configura-se, pois, o conceito empírico de número que "apoiando-se nas observações, refletem nas representações as propriedades externas dos objetos" (DAVIDOV, 1988, p. 154).

A função do conceito empírico de número, de acordo com Davydov (1982), consiste em diferenciar as diversas pluralidades de unidades com uma exatidão não inferior à unidade (um objeto). Contudo, a subdivisão da unidade não ocorre no primeiro ano do ensino escolar tradicional. Toda a pluralidade de entes obtém no discurso como uma marca especial e se vincula associativamente com a palavra número. Entender essa palavra significa representá-la com nitidez o conjunto de objetos a ela associados. Tal "entendimento" surge a partir das várias situações idênticas realizadas repetidas vezes.

Nas proposições davydovianas, por sua vez, as tarefas idênticas são evitadas para não conduzir à generalização empírica da relação universal entre grandezas, cujo processo de modelação discutiremos na próxima seção. A modelação, produzida historicamente, portanto, tornar-se-á uma reprodução, pelas crianças, conduzidas pelo professor, a partir do experimento de ordem objetal-sensorial.

Gradativamente, os experimentos adquirem o caráter cognitivo, o que permitirá sua realização posterior no plano mental. Como diz Davydov (1982), o conceito constitui o procedimento e o meio da reprodução mental do objeto como sistema integral. Ter um conceito sobre um determinado objeto significa dominar o procedimento geral de sua construção mental.

3.4.6 Quantas medidas são?

O modelo é formulado por meio das letras que representam as grandezas. O resultado *maior*, *menor* ou *igual* não é suficiente na maioria dos casos que envolve a comparação de grandezas. Por isso, se faz necessária a introdução da unidade de medida. Em geral, é preciso saber quantas vezes uma grandeza cabe na outra (CARAÇA, 1984). Desse modo, aparece e adota-se o aspecto quantitativo do número como caso singular de representação das relações gerais entre grandezas, quando uma delas se toma como medida particular de cálculo da outra. Em outras palavras, quando se toma uma delas como unidade de medida para expressar numericamente a outra.

3.4.6.1 – A tarefa consiste na produção da resposta à pergunta: O comprimento do segmento **A** é igual ao comprimento do segmento **E** (Ilustração 78)?

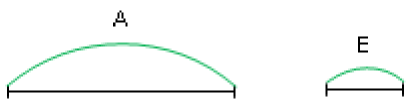


Ilustração 78

À primeira vista a conclusão parece óbvia que o comprimento **A** não é igual ao comprimento **E**. Então, lança-se o questionamento: O comprimento **A** é igual a quantas vezes o comprimento **E**? Para respondê-la, faz-se uso do aspecto quantitativo do número, correspondente ao resultado da medição. Para tanto, insere-se sobrepostamente E em A, conforme ilustração 79 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

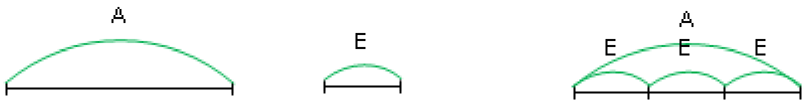


Ilustração 79

Conclui-se que o comprimento **A** é três vezes o comprimento **E**: A = 3E. A grandeza **A**, tomado **E** como unidade de medida, mede três. Ou seja, a propriedade numérica da grandeza **A** é três, se considerado **E** como unidade de medida. Eis a fórmula da relação de multiplicidade entre grandezas: A = ***n***E. Em que **A** é a grandeza a ser medida, **E** a unidade e ***n*** o número que representa a medida.

A mesma tarefa transforma-se em outra em que se busca a solução pela operação inversa, com base na relação de divisibilidade, direcionada pela seguinte pergunta-guia: Se a grandeza **A** for dividida em partes iguais a **E**, quantas partes serão no total? A resposta é traduzida no modelo genérico: $\frac{A}{E} = n$ que, para aquela situação específica, será igualmente três. O todo (grandeza **A**) pode ser dividido em três partes iguais a **E**.

Procede-se, então, a modelação prevista na segunda ação de estudo proposta por Davydov. O modelo abstrato do conceito teórico de número é expresso por duas fórmulas que se complementam mutuamente: $\frac{A}{E} = n$ e A = *n*E.

Portanto, atinge-se o que vinha sendo preparado pelas tarefas anteriores para que o número se apresentasse como propriedade numérica da grandeza, a partir da relação de uma grandeza com a outra tomada como unidade. Na tarefa anterior, o comprimento **A**, tomado **E** como unidade, mede 3. Expressa, pois, que a propriedade numérica da grandeza **A**, ao considerar a unidade de medida **E**, é três. Vale observar e novamente esclarecer que as unidades que integram o número três, na tarefa anterior, não coincidem com três objetos discretos, soltos, dados diretamente aos órgãos dos sentidos. Esse número expressa uma singular relação entre as grandezas E e A, como resultado do processo de medida. Por outro lado,

> na metodologia tradicional de iniciação da criança no conhecimento dos números se fazem coincidir por certo as unidades do número com objetos físicos soltos. A criança não distingue claramente o objeto mesmo do cálculo e os meios consolidativos do resultado. Isto é um defeito essencial do conceito de número. Manifesta-se em que a criança não pode efetuar o cálculo ou a medição com medidas arbitrárias estabelecidas de antemão. Além disso, identificará os elementos do objeto com as unidades do número (DAVYDOV, 1982, p. 174).

Tal concepção de número e de seu ensino é expressa nos livros didáticos brasileiros. O número três, por exemplo, embora traduzido em termos verbais, deriva diretamente da percepção de três objetos dados sensorialmente, na esfera externa, imediata: três indiozinhos, três carrinhos, três balões...

Portanto, epistemologicamente, as proposições davydovianas se diferenciam, pois a relação entre o objeto e o conceito de número é mediada pela unidade de medida, na relação de multiplicidade e divisibilidade. Tem como base o conceito científico de número que emerge, conforme propõe Vigotski (2000), num sistema conceitual. Ou seja, o número ocupa um lugar no princípio relacional entre grandezas, como resultado do processo de medida.

Contempla, pois, o conceito de medir que, segundo Caraça (1984, p. 29), consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc. Para o autor, o processo de medição acontece em três fases distintas: 1) Escolha da unidade, 2) comparação com a unidade e 3) expressão do resultado dessa comparação por um número, ou seja, a medida da grandeza em relação à unidade de medida.

Assim, o conceito de número se apresenta num contexto de inter-relação das significações geométricas, aritméticas e algébricas. Na tarefa anterior, a unidade de medida estava posta, sem necessidade de sua escolha. O processo de aplicar a unidade de medida **E** sobre o comprimento **A** é de caráter geométrico, por se tratar de segmento. A conclusão de que cabem 3 medidas **E** no comprimento **A** traduz o teor aritmético que surge a partir do modelo algébrico $\frac{A}{E} = n$ e A = *n*E.

O importante, ainda, é que ao mudar a unidade de medida (**E**) pode modificar o resultado da medição. O número depende da relação que envolve o procedimento inicial de sua formação. Para operação com o conceito de número (tanto natural quanto real) é necessário conhecer o procedimento inicial e avaliar a relação indicada.

Como dito algumas vezes, anteriormente, os números naturais surgiram, historicamente, no processo de contagem de coleções de objetos. No entanto, as necessidades atuais da vida diária demandam, também, a medição de grandezas contínuas e não apenas a contagem de objetos soltos (grandeza discreta). Para satisfazer as necessidades básicas relativas às medições os números naturais não são suficientes, uma vez que raramente uma unidade estabelecida cabe uma quantidade exata de vezes na grandeza a ser medida. Surge, então, conforme mencionamos, o número racional que é o quociente $\frac{P}{Q}$, $Q \neq 0$, de dois números inteiros. Tal sistema contém todos os inteiros e todas as frações e é suficiente para fins práticos que envolve medições (EVES, 2007).

Como visto na tarefa anterior, o comprimento **A** medido com a unidade **E** mede 3**E**. Ou seja, $\frac{A}{E} = 3$. Porém, o mesmo comprimento, medido com a unidade de medida **U,** que equivale à metade de **E**, por exemplo, mede 6, ou seja, $\frac{A}{U} = 6$. Desse modo, o resultado da medição tanto pode ser expresso pelo número inteiro 3**E,** pelo número racional $\frac{6}{2}$**E**, por 6**U**, entre muitos outros, (Ilustração 80):

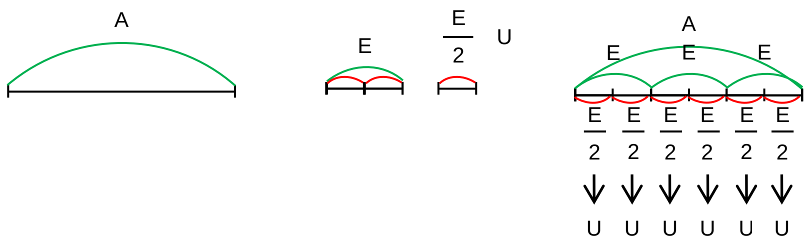


Ilustração 80

Vale ressaltar que a subdivisão da unidade só se faz necessário quando a unidade de medida não cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida, o que não é o caso da situação anterior. Assim procedemos apenas para mediar a análise sobre as diversas manifestações singulares do número a partir da relação universal de multiplicidade e divisibilidade, mediatizada pela unidade de medida.

Por se tratar de algo fundamental na proposta de Davydov, importa novamente a menção de que a gênese é a mesma para todos os números no campo dos reais. Segundo Davydov (1982, p. 436), "a formação nas crianças do conceito de número se reproduz mediante a revelação das condições necessárias para o surgimento do mesmo (ou seja, por meio da generalização essencial)". Gênese aqui não se refere ao ponto de partida primitivo no processo de desenvolvimento filogenético do conceito de número, nem tão pouco a reprodução da sequência histórica casual, mas do elo universal, da lei que constitui uma unidade de nexos e relações essenciais, que Davydov denomina de modelo. Como diz Lukács (1978, p. 88),

> a ciência autêntica extrai da própria realidade as condições estruturais e as suas transformações históricas e, se formula leis, estas abraçam a universalidade do processo, mas de um modo tal que deste conjunto de leis pode-se sempre retornar – ainda que frequentemente através de muitas mediações – aos fatos singulares da vida. É precisamente esta dialética concretamente realizada de universal, singular e particular.

O modelo expresso pelas fórmulas $\frac{A}{E} = n$ e A = nE é a unidade entre a essência universal (relação de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas) e sua expressão singular (os números naturais, inteiros, racionais e irracionais) mediatizada pela unidade de medida. Se a unidade couber um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida o resultado da medição será um número inteiro, se não, é racional. E, ainda, se a unidade for incomensurável em relação à grandeza, o resultado será um número irracional.

Davydov (1982, p. 408-409) afirma que os estudantes devem estudar a “conexão do geral com o particular e singular, ou seja, operar com o conceito (...) no processo de transição do geral ao singular". Esse movimento é expresso nas proposições davydovianas, pois inicialmente se analisou as relações gerais e abstratas entre grandezas. Na sequência, introduziu-se a unidade de medida, como elemento particular, que mediou a gênese de uma singularidade, o número.

> Por seu conteúdo, o conceito teórico aparece com reflexo dos processos de desenvolvimento, da relação entre o universal e o singular, da essência e os fenômenos; por sua forma aparece como procedimento da dedução do singular a partir do universal, como procedimento de ascensão do abstrato ao concreto (DAVIDOV, 1988, p. 152).

Os sistemas matemáticos mais perfeitos, de acordo com Rosental e Straks (1958, p. 317), “são aqueles que se elevam também do abstrato ao concreto, de alguns axiomas que fixam as propriedades e leis mais gerais para uma reprodução do concreto em toda sua concreticidade”.

Na proposta de Davydov, o sistema numérico surge, concretamente, como síntese de múltiplas relações entre grandezas, inicialmente dadas abstratamente. Sua expressão singular é deduzida a partir da relação universal de multiplicidade e divisibilidade. Ou seja, apresenta-se como conceito teórico.

> Os conceitos, historicamente formados na sociedade existem objetivamente nas formas da atividade do homem e seus resultados, ou seja, nos objetos criados de maneira racional. As pessoas isoladas (e principalmente as crianças) os captam e os assimilam antes de

> aprender a atuar com suas manifestações empíricas particulares. O indivíduo deve atuar e produzir as coisas segundo os conceitos que, como normas, já existem na sociedade anteriormente; ele não os cria, mas, os capta, os apropria. Apenas então se comporta com as coisas humanamente (DAVIDOV, 1988, p. 128).

A apropriação do conteúdo do conceito teórico promove o desenvolvimento do pensamento teórico. Este, por sua vez, é o processo de idealização do aspecto fundamental da atividade prática-objetal, a reprodução, nela, das formas universais das coisas, de suas leis (DAVYDOV, 1982; DAVIDOV, 1988).

Desse modo, no processo de estudo das relações entre as grandezas, as crianças são levadas à reprodução teórica, no plano ideal, da forma universal do conceito de número, produzida historicamente. Esta explica o nexo e a unidade indissolúvel de uma grande quantidade de fatos com a qual permite o conhecimento para que as crianças avancem com maior firmeza e segurança no caminho da explicação da diversidade concreta dos números. Esse salto é promovido pela execução do sistema de tarefas, a seguir apresentado.

3.5 RETA NUMÉRICA

Até aqui foram apresentadas duas ações de estudo. A primeira consistiu na transformação dos dados da tarefa de estudo com o fim se separar a relação que constitui a base do procedimento geral para sua solução. E a segunda, modelação da relação de multiplicidade e divisibilidade das grandezas como base geral do conceito de número.

Nesta seção, que se refere à análise do quinto capítulo do livro referência (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008), inicia-se a terceira ação de estudo, que consiste na experimentação com o modelo, no estudo minucioso das propriedades da relação geral antes identificada (DAVIDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991). Esta ação tem importância substancial no processo geral de apropriação dos conhecimentos teóricos porque, segundo Davidov (1988), permite que os estudantes compreendam a especificidade da orientação no plano ideal, pois o modelo é uma expressão objetal-semiótica do ideal.

Na sequência, inicia-se uma construção geométrica específica, a reta numérica. Nesse processo se consideram as seguintes condições: escolha do ponto inicial, da direção e da unidade. A experiência com as diferentes grandezas contribui para a utilização da reta de forma mais significativa e a grandeza comprimento, em especial, transforma-se num importante elemento mediador de sua constituição.

3.5.1 Introdução da reta numérica

Nos sistemas de tarefas anteriores foi proposto o desenvolvimento do experimento objetal, que permitiu a revelação e a modelação da relação universal entre as grandezas (multiplicidade e divisibilidade). Na próxima tarefa, a proposição apresenta o processo inverso. O modelo, a abstração geneticamente inicial, orientará a ação objetal por expressar a essência do conceito de número de maneira abstrata.

Além disso, contribuirá para esclarecer as propriedades secundárias do conceito de número, desconsideradas no processo de abstração. Em síntese, no desenvolvimento da tarefa, com orientação do professor, os estudantes se apropriarão da generalização teórica do conceito de número ao detectarem a vinculação regular da relação essencial com suas manifestações particulares.

3.5.1.1 – Para a execução da tarefa, sobre a mesa do professor há um recipiente com líquido e outro vazio que será usado como unidade de medida (**C**). No quadro está escrito o seguinte registro: A = 5C. O professor informa que **A** é o volume de líquido a ser despejado no recipiente, mas um determinado tanto fora colocado, porém, se faz necessário completá-lo. No entanto, eles precisam identificar a quantidade de medidas de líquido já existente no recipiente. O professor lamenta não ter visto o que foi feito, pois quando se mede o líquido não se vê as medidas, diferentemente do que acontece na medição de área ou comprimento. A sugestão é medir o líquido posto. Para tornar “visíveis” as medidas, utiliza-se caneta ou elástico para marcar, no recipiente, cada unidade (Ilustração 81). Em seguida, faz-se o registro do esquema no quadro. Como decorrência, conclui-se que no recipiente há apenas 3 medidas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

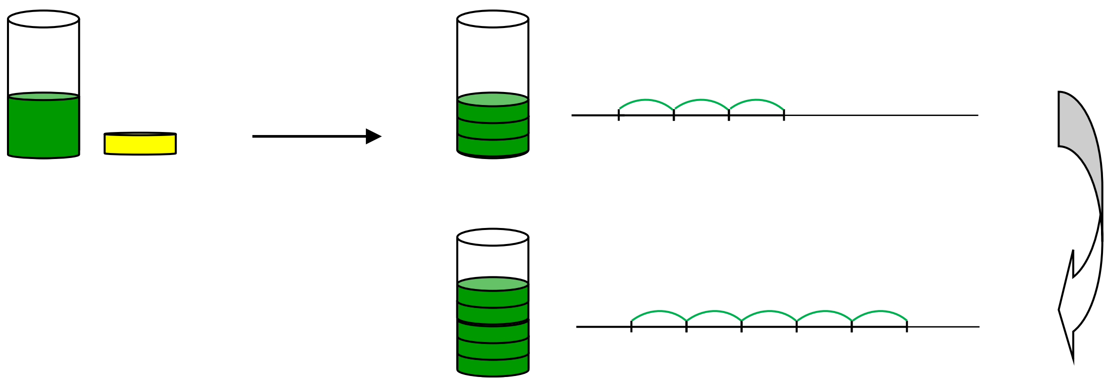


Ilustração 81

As crianças fazem um arco no esquema para cada medida de líquido. A quantidade deles equivale ao número de medidas de líquido. Sobre o referido esquema, se processará a construção da reta numérica que, assim como o esquema, terá uma medida unitária livre: a unidade. Desse modo, o conceito de número é formado “como relação algébrica de uma grandeza com respeito a outra tomada como unidade” (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 306).

3.5.1.2 - Na ilustração 82, referência da presente tarefa, os esquemas representam o volume de líquido do recipiente. Eles são base de análise, por parte dos alunos, quando o professor sugere-lhes que identifiquem o volume de líquido. Como expressão das discussões, chega-se à conclusão de que o segundo esquema, ao apresentar os numerais, permite a identificação da propriedade numérica da grandeza sem contar as unidades. O professor informa que o referido esquema chama-se reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

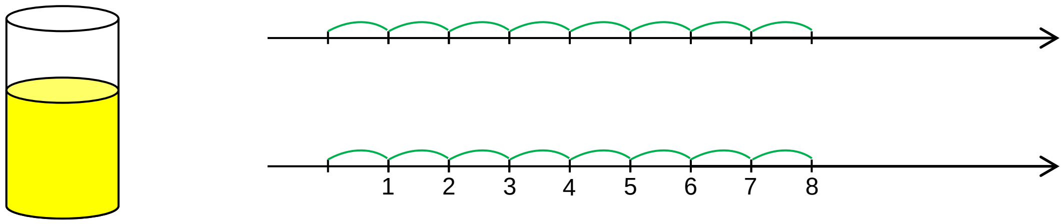


Ilustração 82

Como resultado de um processo de análise, orientado pelo professor, espera-se dos estudantes nível de síntese com o seguinte conteúdo: a medição das grandezas é representada pelo número de unidades que tem como referência na reta a partir de seu ponto inicial; o numeral que está no final da última unidade na reta indica o valor da medida; a unidade deve ser sempre a mesma, apesar de ser fruto de uma escolha livre; sua marcação ocorre estritamente numa direção de modo que, entre dois numerais imediatos, há apenas uma unidade; marca-se o sentido da reta numérica com uma seta; o seu início está ao lado contrário da direção da seta; a contagem se realiza na correspondência entre unidades de segmentos e a sequência numérica.

Na tarefa anterior, o número oito representa a medida do volume de líquido. A expressão concreta do número na reta numérica não é um ato pelo qual se capte em forma elementar e primariamente sensorial, mas é mediada pela relação essencial, universal de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas. Dito de outro modo, o volume de líquido do recipiente, dividido em uma determinada unidade de medida, resulta oito.

Não encontramos nos livros didáticos brasileiros (para o primeiro ano do Ensino Fundamental) o contexto geométrico dos números reais. Por outro lado, nas proposições davydovianas, por ter uma finalidade bem distinta, a reta numérica reproduz o processo de desenvolvimento, de formação do sistema integral. Sua reprodução se refere à tarefa do pensamento teórico de "elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que geram o concreto dado, revelar sua essência" (DAVIDOV, 1988, p. 142).

A reta numérica, como objetivação do conceito de número, expressa a concatenação dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Na interação de todos os seus aspectos e partes, ela permite o estudo da multiplicidade das propriedades da estrutura interna do conceito de número. Gradualmente, propõe-se a passagem das ações objetais à realização no plano mental: à construção da objetivação idealizada.

Trata-se de uma realidade objetiva, refletida na consciência. “Assim surgem as sensações, as percepções, representações, conceitos e juízos. Todos eles são imagens. Reflexões adequadas, verdadeiras, da realidade objetiva. Estas imagens são produtos ideais” (TRIVIÑOS, 1987, p. 62). Nesse sentido, a reta numérica é a imagem ideal do conceito de número.

3.5.2 Representação de grandezas na reta numérica

Qualquer número é composto por certa quantidade de unidades e sua representação na reta se dá em correspondência biunívoca entre quantidade de segmentos. Por isso, é possível representar o resultado da medição na reta, começando não só pela marca (ponto) inicial, mas por qualquer ponto, apesar disso não ser tão cômodo.

3.5.2.1 – Nessa tarefa, dispõe-se de três recipientes com volumes de líquido diferentes e um quarto bem maior, vazio, para o qual foi transferido o volume de líquidos dos anteriores. O procedimento foi representado na reta numérica e as crianças deverão identificar quantas medidas **E** contém em cada recipiente que, respectivamente, contém as seguintes medidas: o primeiro, duas medidas (volume **B**); o segundo, uma medida (volume **C**), e o terceiro quatro medidas (volume **T**), conforme ilustração 83 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2008).

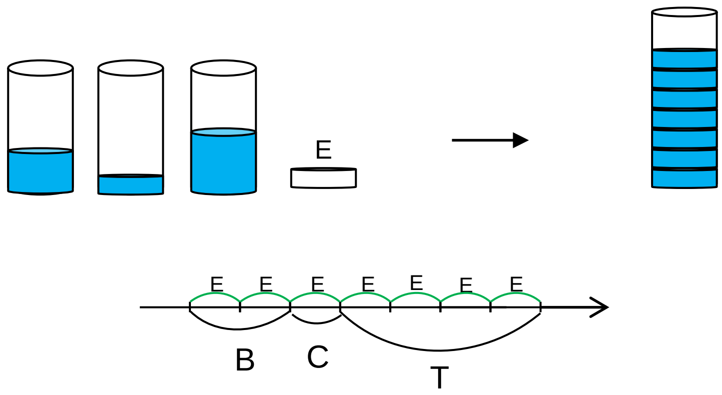


Ilustração 83

O esquema anterior, ilustração 83, une o sentido abstrato com a concretização objetal do volume. As crianças realizam as relações reais com as grandezas, cujos resultados podem ser supostos e observados. A revelação e representação das relações entre grandezas, analisadas objetalmente, aos poucos, se torna cada vez mais completa e abstrata.

De posse apenas do esquema em referência, consegue-se estabelecer várias relações entre os volumes, nele representados: o volume T é quatro vezes o volume C; o B é o dobro de C e a metade de T; este é maior que C e B juntos, entre outras. A representação das relações entre grandezas no esquema que, por sua vez, é substituído pela reta numérica, possibilitará o estudo dos números em sua forma pura.

3.5.2.2 – Como tarefa subsequente, as crianças deverão compor uma figura, a partir de uma unidade de referência, a superfície K (Ilustração 84). A área total está representada pelo arco na reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

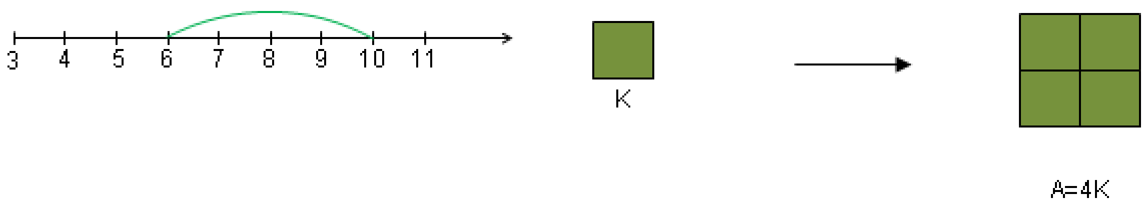


Ilustração 84

O número quatro é expressão singular da relação particular entre as áreas A e K. Essa tarefa, assim como as demais, trata do processo de generalização da relação geral do conceito de número abstraída e modelada anteriormente.

Conforme já mencionado, em Davydov, o número resulta da relação entre grandezas e não como denominação para um grupo de objetos. A partir das orientações dos livros didáticos brasileiros, para identificação de que em um agrupamento há quatro objetos, nos estágios iniciais da cognição, procede-se a contagem do número um até o quatro. Depois, subjacente ao numeral há de se visualizar, no plano mental, a representação do conjunto de objetos correspondente. Ao analisar orientações semelhantes, Davydov (1982, p. 172) diz, em tom de crítica:

> A capacidade da criança de ver determinada quantidade de unidades em quaisquer objetos (nos 'meninos', nas 'rodas,' nos 'palitos', etc.) e designá-la com um numeral trata-se da presença do *conceito* sobre a quantidade dada e o número dado. Assim, se forma o conceito de número 'um', de número 'dois', etc. (DAVYDOV, 1982, p. 172).

Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 311) completam:

> As ideias sobre a quantidade e o número, formadas sobre essa base, contradizem as representações matemáticas contemporâneas e, uma vez formadas, criam obstáculos internos para dominar a matemática em seu nível atual. A orientação utilitária do programa vigente de aritmética, que presta especial atenção à formação de hábitos de cálculo, aprofunda o desenvolvimento incorreto dos principais conceitos matemáticos.

Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 310-311) dizem que tal orientação é expressão do empirismo, em que predomina "o caráter dado e direto da quantidade como propriedade do grupo de objetos", a unidade "se identifica com um objeto separado" e não como expressão de relações.

3.5.2.3 - A tarefa se assemelha à anterior. As crianças deverão compor um segmento, considerando a unidade **M**. O comprimento total está representado pelo arco na reta numérica, como se observa na ilustração 85. Cada estudante adota a letra **C** como indicativa da sua medida assim expressa: C= 4M (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

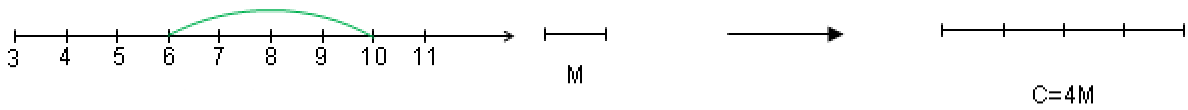


Ilustração 85

3.5.2.4 - As duas tarefas anteriores (5.2.2 e 5.2.3) foram compostas por duas grandezas diferentes, respectivamente: a área 4K e o comprimento 4M. Na presente tarefa, lança-se a pergunta: Qual delas é representada na reta numérica? A produção e a apropriação da resposta decorrem de um processo interativo, que leva à conclusão: só se representa quantidade de unidades e não é possível saber o tipo de grandeza. Assim, a unidade representa o numeral 1, e não a grandeza (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). A extensão do arco indica a quantidade de unidades (4) que compõem a grandeza: a sua propriedade numérica (Ilustração 86).

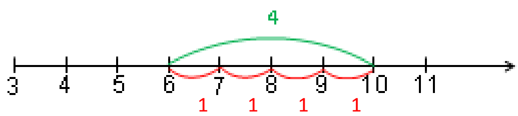


Ilustração 86

O número 4 é a propriedade comum de todas as coleções que contêm quatro objetos e todas as grandezas que medem quatro unidades, independentemente se são áreas, comprimentos, volumes, entre outros. O número de objetos da coleção é uma propriedade da coleção; o número de unidades de uma grandeza significa a sua propriedade, porém, o número em si é uma propriedade abstrata. Desse modo, procede-se a generalização teórica que consiste na redução dos diversos fenômenos à sua base única, na dedução da correspondente diversidade, como concreticidade.

Na concretização empírica, o número 5, por exemplo, torna-se apenas a propriedade comum a todas as coleções que contêm tantos objetos e a todas as grandezas que têm tantas unidades quanto os dedos de uma mão. Neste caso, a igualdade se estabelece pela simples relação: para cada objeto da coleção ou para cada unidade da grandeza dobra-se um dedo da mão até completar a mão inteira. Em geral, segundo Aleksandrov (1976, p. 25), ao se colocar as unidades de duas coleções de objetos em correspondência biunívoca, é possível estabelecer, sem fazer uso dos números, se ambas "tem ou não o mesmo número de objetos".

> O processo de concretização dos conhecimentos empíricos consiste em selecionar ilustrações, exemplos, que se encaixam na correspondente classe dos objetos. A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal (DAVIDOV, 1988, p. 154-155).

De acordo com Alexandrov (1976), o conceito de número, como qualquer outro conceito teórico-abstrato, não tem uma imagem imediata, nem pode ser exibido, só concebido na mente. O símbolo "5" se apresenta à mente em forma de uma imagem visível. Ao ouvir "*cinco*", a pessoa não vai imaginar como representativo dessa quantidade de objetos ou de medidas de uma grandeza, mas o símbolo *5*, que é uma espécie de marco tangível para o número abstrato cinco.

Além disso, um número como 18.273 não pode ser imaginado com nenhuma precisão em forma de um conjunto de objetos ou de unidades de uma grandeza. Os símbolos deram lugar à concepção de números tão grandes que nunca seriam criados por observação direta de quantidades. Eles materializaram o conceito de número abstrato e proporcionaram um meio particularmente simples de realizar operações com eles (ALEKSANDROV, 1976). É nessa materialidade que são imersas as tarefas do próximo capítulo.

3.6 COMPARAÇÃO DE NUMERAIS

No capítulo anterior do livro em análise (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008), centrou-se no processo de representação do número na reta numérica. Esta não foi simplesmente apresentada como algo dado e acabado para que os estudantes observassem a sequência de número nela presente ou, quando muito, colocassem os numerais sem contexto de significações. Pelo contrário, o conjunto de tarefas propiciou o desenvolvimento de um processo em que número e reta se traduziam num sistema conceitual tão bem articulado que ambos se confundiam, pois um produzia significado e sentido ao outro.

Dessa articulação, a reta se apresenta como composta de início, direção e unidade. Constitui-se pelo princípio da posição sequencial: cada próximo número à direita está a uma unidade do anterior. E as propriedades numéricas das grandezas passaram a ser representadas por segmentos de retas.

No capítulo que passaremos a analisar, as tarefas estão organizadas de um modo tal que, na sua execução, os estudantes elaboram a síntese conceitual: quanto mais adiante do início está o número na sequência ou reta numérica, maior ele é. A relação “maior-menor” passa a valer também para os números, o que permite a comparação das grandezas por suas propriedades numéricas sob a condição de serem medidas pela mesma unidade. Como decorrência, introduz-se unidades de medidas padronizadas da grandeza comprimento e de contagem das quantidades discretas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

3.6.1 Comparação de numerais na reta numérica

Nessa seção, a análise volta-se para as tarefas que continuam a focar a reta numérica como elemento de interpretação geométrica do conceito de número. Os acréscimos ou especificidades em relação às tarefas anteriores são: a comparação dos números pela posição que ocupam na reta, a ideia de antecessor e sucessor e, também, a contagem no sentido crescente e decrescente.

3.6.1.1 – Para essa tarefa, apresenta-se um esquema constituído de uma reta numérica e arcos (Ilustração 87) que correspondem aos resultados da medição das grandezas **K** e **M**. As crianças são orientadas para que comparem as medidas e completem – utilizando os sinais de *maior*, *menor* ou *igual* – a seguinte situação: M___K. Depois de analisar o esquema, conclui-se: M > K (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

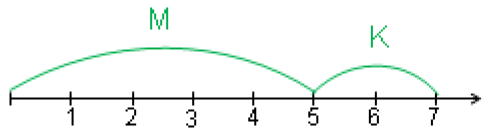


Ilustração 87

As relações entre as grandezas – uma das características do pensamento algébrico, com base nos parâmetros maior, menor e igual – foram focadas durante o desenvolvimento da primeira ação de estudo. Porém, em sua forma abstrata, como grandezas gerais. Agora, na terceira ação de estudo, trata-se de números concretos, oriundos das relações entre grandezas mediadas por uma unidade de medida que possibilita sua expressão singular: **M**=5 e **K**=2.

3.6.1.2 – A tarefa a ser realizada pelas crianças é: medir duas superfícies **K** e **M** com a unidade de medida *u* e representar os resultados por meio de arcos na reta numérica, conforme ilustração 88 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

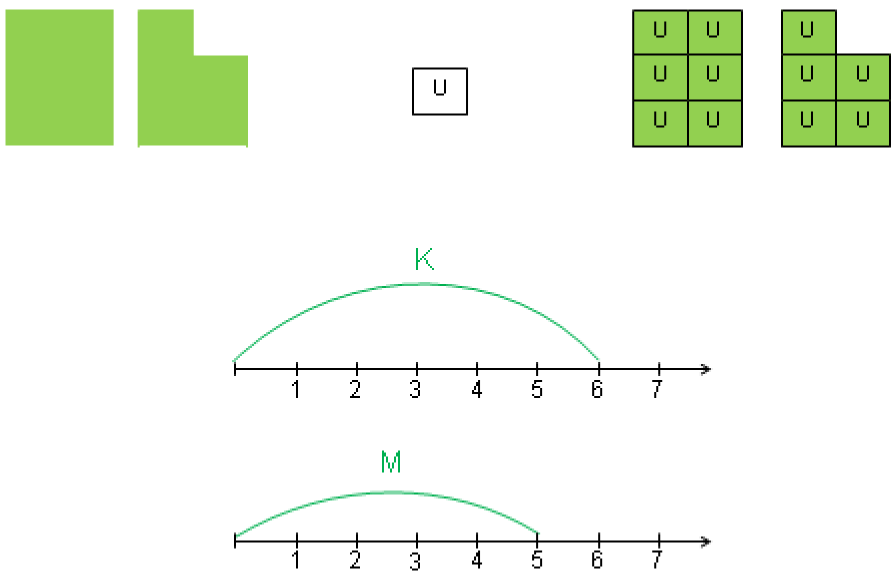


Ilustração 88

A realização da tarefa possibilita a análise de que cada número é maior, em uma unidade, que o seu antecessor. A comparação entre as duas grandezas contínuas (as áreas) mediadas por uma terceira grandeza (a unidade de medida particular, em seu aspecto discreto) possibilita a sua expressão na reta numérica. Aborda-se, pois, uma representação que tem por base a relação entre o discreto e o contínuo. Segundo Kalmykova (1991, p. 13), a "comparação de conceitos opostos, mas relacionados entre si, ajuda a compreender melhor as diferenças". Por meio dos opostos – discreto e contínuo, relacionados entre si –, possibilita a compreensão da diferença entre as áreas das superfícies K e M, como também de suas respectivas propriedades numéricas.

A tarefa do pensamento teórico, segundo Davydov (1982), consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que geram o concreto dado, descobrir sua essência.

Nas próximas tarefas, ainda sobre a reprodução teórica do conceito de número, o pensamento sai dos limites das representações sensoriais sobre grandezas, para penetrar na conexão entre a relação geral da sequência numérica e suas manifestações particulares e singulares na reta numérica. Consiste, segundo Ilienkov (2006), num movimento dialético em sua lei da negação: é necessário distanciar-se dos dados de maneira imediata para voltar-se a ele, porém sobre uma base mais profunda.

Assim, o conhecimento teórico da sequência numérica poderá ser expresso nos procedimentos da atividade mental e em diferentes sistemas simbólicos. Gradativamente, ocorre a passagem das tarefas desenvolvidas externamente para as verbais e, finalmente, àquelas no plano mental. Tal passagem faz-se necessário para a efetivação plena da atividade de estudo que, segundo Davydov (1982), só ocorre quando as crianças realizam as ações mentais correspondentes.

3.6.1.3 – Na presente tarefa, apresenta-se às crianças o esboço da reta numérica para que escrevam os números conhecidos que estão faltando conforme ilustração 89 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

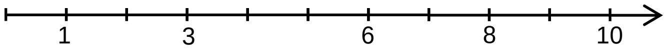


Ilustração 89

Chama atenção nessa tarefa o detalhe na expressão “os números conhecidos” da orientação dada às crianças. Isso significa que há um processo conceitual em formação, cujo modo de organização produziu ideias de possibilidades da existência de números que se apresentarão gradativamente. Porém, as apropriações, até então realizadas, indicam que o esquema será completado com 2, 4, 5, 7 e 9, o número zero será introduzido mais tarde.

3.6.1.4 - Na sequência, a proposição é que se estabeleçam as relações entre os números, com a indicação de maior e menor. O argumento para um número ser maior que outro é que ele esteja mais distante do início da reta numérica, desde que sua direção esteja indicada com a seta e o seu início incida na extremidade contrária. Propõe-se a inclusão de números “grandes”, desconhecidos das crianças, mas de forma que, ao analisar o lugar ocupado na reta, elas poderão estabelecer a relação de comparação. Também extrapola-se para números abstratos, conforme segue a ilustração 90 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

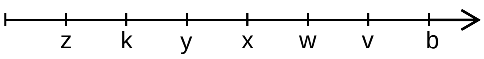


Ilustração 90

Nessa tarefa (Ilustração 90), introduziu-se o conceito de variável, ou seja, *z*, *k, y, x, w, v e b* representam qualquer número, mas sem ser nenhum específico. Como diz Caraça, a variável é “o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela" (1984, p. 127).

Esse fundamento é completamente descaracterizado nas proposições brasileiras. Em algumas delas, nas situações a serem desenvolvidas pelas crianças, a ideia subjacente é que as letras servem para escrever palavras e os números para contar, inclusive o número de letras de uma palavra. Portanto, não contempla a simbologia algébrica.

Além disso, promove uma ruptura ou um distanciamento entre simbologia algébrica e a aritmética. Consequentemente, induz a elaboração da síntese: em matemática se estuda os números e, em português, as letras. Dada a proposição, surge-nos a questão: Qual será a reação dos estudantes que aprenderam que as letras servem para escrever palavras e os números para contar ao se depararem com letras, na referida disciplina, nos anos mais avançados do Ensino Fundamental?

Enfim, as situações apresentadas anteriormente, como o primeiro contato da criança com letras e números, levam à esterilidade das abstrações da própria matemática, reduzindo-a a sua significação aritmética dada empiricamente. Nesse sentido, vale o alerta de Vygotsky (1991, p. 8 – grifo do autor):

> Tomemos como ponto de partida o fato de que *a aprendizagem da criança começa muito antes da aprendizagem escolar*. A aprendizagem escolar nunca parte do zero. Toda a aprendizagem da criança na escola tem uma pré-história. Por exemplo, a criança começa a estudar aritmética, mas já muito antes de ir à escola adquiriu determinada experiência referente à quantidade, encontrou já várias operações de divisão e adição, complexas e simples; portanto a criança teve uma pré-escola de aritmética, e o psicólogo que ignorasse este fato estaria cego.

Diríamos nós: o educador que ignorasse este fato estaria cego. Por assumir esse posicionamento, necessário se faz o esclarecimento, o que leva-nos a traduzir a continuidade do pensamento expresso pelo referido autor.

> O curso da aprendizagem da criança não é continuação direta do desenvolvimento pré-escolar em todos os campos; o curso da aprendizagem escolar pode ser desviado, de determinada maneira, e a aprendizagem escolar pode também tomar uma direção contrária. Mas tanto se a escola continua a pré-escola como a se impugna, não podemos negar que a aprendizagem escolar nunca começa no vácuo, mas é precedida sempre de uma etapa perfeitamente definida de desenvolvimento, alcançado pela criança antes de entrar para a escola (VYGOTSKY, 1991, p. 9).

Diferentemente do que sugerem os livros didáticos brasileiros, as tarefas correspondentes às proposições davydovianas promovem um desenvolvimento relativamente elevado da linguagem matemática, por considerar que a aprendizagem da criança inicia muito antes da atividade de estudo. Na escola, ela deve aprender o novo, o que ainda não sabe, durante o desenvolvimento das tarefas, sob a direção do professor.

Davydov (1982) discorda da organização do ensino da aritmética como continuação natural do desenvolvimento do ensino pré-escolar, pelo fato de permitir o desenvolvimento do ensino da matemática somente em estreita relação com a vida imediata.

3.6.1.5 – A pretensão com essa tarefa é a condução dos estudantes para a memorização da sequência numérica. Parte-se de algumas perguntas orais, como por exemplo: *Qual é o número que antecede o 16? E qual é o número que sucede o 16?* Depois, o professor fala um número e sugere que as crianças falem os três próximos números, sem relacioná-los à reta numérica e, muito menos, a grupo de objetos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Davydov (1982, p. 156) alerta que “na prática, a manutenção excessiva das crianças no nível das representações sobre os objetos reais circundantes e seus conjuntos, entorpece a formação dos conceitos genuinamente matemáticos”. Por isso, suas proposições levam o estudante ao pensamento, à idealização dos aspectos experimentais da produção da sequência numérica. Por isso, dá-lhes, inicialmente, a forma de experimento cognoscitivo objetal-sensorial, na relação entre as grandezas e a reta numérica e, posteriormente, de experimento mental. Como tal movimento não é linear, retoma-se a reta numérica, mas com a apresentação de dois antecessores, conforme proposição da próxima tarefa.

3.6.1.6 - Apresenta-se às crianças uma parte da reta numérica no quadro, o início está oculto, mas com a direção e com alguns pontos marcados. O professor aponta o último ponto e fala um número qualquer. Os estudantes devem indicar os dois números que o antecedem. Por exemplo, se o professor falar o número 9 (Ilustração 91), as crianças dirão: 8 e 7 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

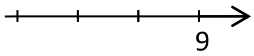


Ilustração 91

Consequência do processo de abstração, encontrou-se a propriedade da sequência numérica que constitui a base essencial e a unidade de todas as manifestações entre antecessor e sucessor. Depois, iniciou-se o processo de ascensão que levou esse momento abstrato até o concreto e, também, a generalização do abstrato que expressa, ainda unilateralmente, a essência, a base de toda a sequência numérica. Esse movimento continua sendo proporcionado na próxima tarefa.

3.6.1.7 – A tarefa ainda tem como referência a reta numérica com indicação da sua direção e o seu início oculto. Porém, tem como diferença que os pontos são marcados por números abstratos. Por exemplo, o professor aponta o y e diz: *Digamos que este seja o número 4, quais seriam os outros dois? E se este número for 6* (Ilustração 92)*?* Muda-se o significado do mesmo ponto e da mesma letra várias vezes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

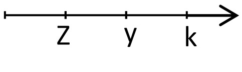


Ilustração 92

Destaca-se, na execução da tarefa, a vinculação regular da relação antecessor – sucessor, como base da unidade interna da sequência numérica, com suas diversas manifestações singulares. Obtém-se, assim, uma generalização teórica.

3.6.1.8 – A tarefa ainda se volta ao processo de desenvolvimento da memória relativa à contagem do maior para o menor e do menor para o maior. O professor fala um número e solicita que as crianças, coletivamente, nomeiem dois números que o antecedem e dois que o sucedem (ГОРБОВ, МИКУЛИНА е САВЕЛЬЕВА, 2008).

As tarefas que compuseram a análise da presente seção conduzem à transformação, no plano mental, da sequência numérica na unidade entre as significações: aritméticas (antecessor e sucessor), geométricas (reta numérica) e algébricas (variáveis). Isso ocorre num sistema de nexos mentais, como síntese de múltiplas determinações, base do pensamento teórico, pois não opera com representações, mas com conceitos. Desse modo, a sequência numérica aparece em forma de atividade mental, por meio da qual se reproduz seu sistema integral de inter-relações.

3.6.2 Relação entre os números e grandezas medidas com a mesma unidade de medida

A análise em pauta ainda se refere ao meio de comparação das grandezas por sua propriedade numérica, porém, sem o apoio da reta numérica. Tem como particularidade a condição de <u>usar a mesma unidade</u> de medida para desenvolver a seguinte ideia: quanto maior for a grandeza, maior será o número que resulta da sua medição; o contrário também é verdadeiro, quanto maior é o número, maior será a grandeza.

> A introdução do número como procedimento especial socialmente elaborado para fixar os resultados das relações quantitativas entre as grandezas leva [...] a que na criança se estabeleça uma orientação correta nas relações entre a grandeza e o número (GALPERIN, ZAPORÓZHETS e ELKONIN, 1987, p. 312).

3.6.2.1 Para tanto, na mesa do professor há três recipientes de mesma forma e mesma capacidade, no entanto, contêm volumes de líquido diferentes (Ilustração 93). Além disso, a tarefa estabelece que na participação do professor informe as crianças que, ao serem medidos com a medida **M,** foram obtidos os números 4, 3 e 2. Aos estudantes compete a identificação do volume de líquido correspondente a cada número. Para a solução da tarefa se estabelece a relação entre os volumes, com base no conhecimento da relação entre os números, sem realizar a medição. Dadas as condições de diálogo, expressam-se argumentos do tipo: o número maior corresponde ao volume maior (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

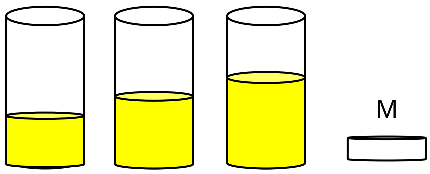


Ilustração 93

Como forma de confirmar as respostas conclusivas, mede-se os volumes. Acentua-se que os números indicam a relação entre as grandezas apenas quando a medição é feita com a mesma unidade de medida. Com a variação da unidade, obtém-se outro resultado numérico, como veremos na próxima seção.

3.6.3 Correlação entre o resultado da medição e escolha da unidade de medida

O processo de concretização do conceito de número continua, com o acréscimo da correlação entre as unidades de medida e os números que resultam desse processo. Ou seja, eles surgem das variações do resultado da medida, sua expressão singular, em dependência da unidade na relação de multiplicidade e divisibilidade entre variáveis dependentes e independentes.

3.6.3.1 – A tarefa se desenvolve com base na seguinte situação: duas crianças recebem duas caixas iguais e duas unidades de medidas diferentes, **A** e **B,** (Ilustração 94). Cada estudante deverá tomar uma dessas unidades para determinar a área de uma das faces (combinadas previamente). Consequentemente os resultados serão diferentes, pois a criança que utiliza a unidade **A** obtém 3 medidas, enquanto aquele que adota **B** tem como resultado 4. Ao receber as respostas diferentes, o professor supõe que as crianças têm caixas de tamanhos diferentes. Porém, ao compará-las diretamente, por sobreposição, conclui-se que as áreas das faces comparadas são iguais. Compete ao professor questionar: Por que, no resultado do processo de medida, elas encontraram números diferentes? Nesse contexto, conclui-se que a desigualdade numérica ocorreu por consequência da adoção de unidades de medidas diferentes: a medida maior gera um número menor e vice-versa (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

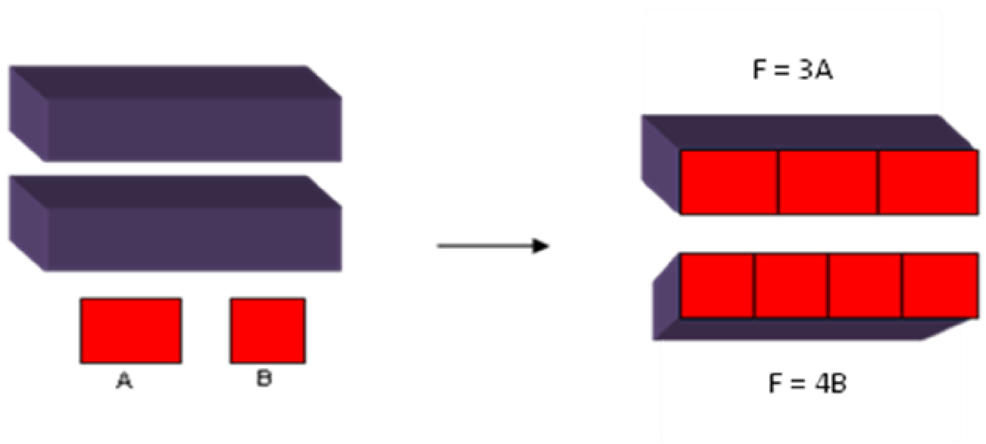


Ilustração 94

Ao medir uma mesma grandeza com unidades diferentes, conclui-se que a propriedade numérica da grandeza não depende apenas de si, mas também da unidade de medida escolhida.

Quando a superfície da face (**F**) foi medida com a unidade **A**, sua área é três, ou seja, três vezes a unidade **A** (F = 3A); a grandeza **F** dividida pela unidade **A** é igual a três $\left(\frac{F}{A}=3\right)$. O mesmo ocorre quando a grandeza **F** é comparada com a unidade **B**, sua propriedade numérica é quatro (F = 4B); o quociente entre **F** e **B** é igual a quatro $\left(\frac{F}{B}=4\right)$

Essa transformação do modelo, característica da terceira ação de estudo proposta por Davydov, possibilita a conclusão de que ao variar a unidade de medida também ocorre a variação do resultado da medição. "Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas medidas quantas as unidades com que a medição se faça" (CARAÇA, 1984).

Vale lembrar que o modelo foi formulado por meio de letras na segunda ação de estudo. Uma de suas expressões era: $\frac{A}{E} = n$. Em que **A** é a grandeza a ser medida, **E** a unidade de medida e **n** a propriedade numérica da grandeza (o resultado da medição). Ressalta-se que o modelo pode ser expresso por quaisquer letras, desde que represente a conexão geneticamente essencial do número.

A tarefa em questão (3.6.3.1) trata de uma particularidade: a identificação da propriedade numérica da grandeza **F**. Mesmo assim, é instigante em termos de processo de elaboração do pensamento conceitual, ao se questionar: O que ocorre com tal propriedade quando a unidade de medida for cada vez maior ou menor? Essa questão, aparentemente simples, requer uma análise cuidadosa. Não se trata de um modelo aritmético, se assim fosse, a pergunta poderia ser do tipo: O que ocorre com o valor de $\frac{1}{2}$, quando 2 se torna cada vez maior ou cada vez menor? (USISKIN, 1994). Essas perguntas não têm sentido no plano aritmético. Mas têm sua razão de ser na tarefa em discussão, porque se trata de um modelo fundamentalmente algébrico: **E** (unidade de medida) é a variável independente e *n* (resultado da medição) a variável dependente, isto é, depende de **E**.

Desse modo, reafirma-se que, nas proposições davydovianas, o conceito de número é introduzido a partir de um modelo entre variáveis, em que a variação da unidade de medida, a propriedade numérica da grandeza também varia.

A transformação da propriedade aritmética da grandeza é um ato de superação de sua imediatez. As unidades de medida possibilitam as metamorfoses correspondentes, como por exemplo, de 3A para 4B. Nesse processo o conceito de número adquire forma de movimento e concreticidade.

3.6.4 Régua

Na presente seção introduz-se a régua como um dos instrumentos utilizados para medir comprimentos. Será orientada pela concepção de número formada até o presente estágio.

3.6.4.1 – Como tarefa a executar, as crianças recebem em um envelope vários recortes (Ilustração 95), que se diferenciam pelo comprimento da largura, entre os quais deverão encontrar aquele que é a medida exata para o recorte laranja (esquerda) (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

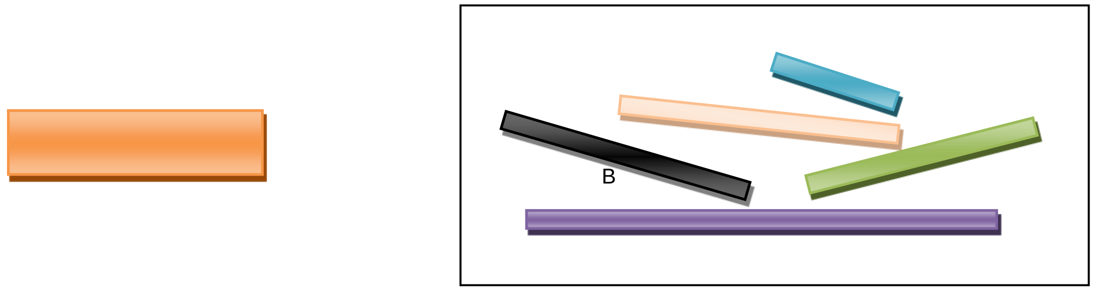


Ilustração 95

A medida correta será a medida B (recorte de cor preta). A proposição traz a ideia de possibilidade de diferentes unidades, porém condiciona àquela que gera um resultado numérico inteiro.

3.6.4.2 – Para essa tarefa, as crianças devem medir o comprimento da largura do recorte rosa com a medida E, cujo comprimento da largura mede 1 cm conforme ilustração 96 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

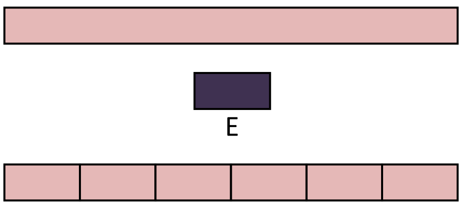


Ilustração 96

Para a obtenção da área e do comprimento da largura da face, torna-se conveniente marcar onde termina uma medida e começa a outra. No entanto, o professor sugere a régua para medir o comprimento, com a justificativa que ela tem as medidas traçadas. As crianças encontram a marca inicial da régua e concluem que o resultado foi o mesmo da tarefa anterior (3.6.4.2), conforme ilustração 97. A reflexão deverá ser direcionada para a conclusão de que a unidade de medida era a mesma: E = 1 cm (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

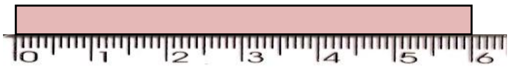


Ilustração 97

Um olhar analítico para o conjunto de todas as situações apresentadas nos livros didáticos brasileiros, dá subsídios para dizer que elas geram a seguinte síntese do conceito de número (Ilustração 98):

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ilustração 98

Esse modo de apresentação da referida síntese conceitual em parâmetro com a proposta de Davydov produz os seguintes questionamentos: Como a criança se orienta no processo de medição com base na concepção de número subjacente as proposições brasileiras? Iniciará do número um (primeira unidade), do zero ou ainda do início da régua? Damazio e Amorim (2005) mostram a existência dessas três possibilidades e a mais evidente é ter como ponto de referência de medida, na régua, o 1 (um) em vez do zero.

Segundo esses autores, a adoção de tal procedimento ocorre até por alunos da oitava série do ensino fundamental. Sugerimos uma pesquisa que investigue a gênese de tal conduta fossilizada. No entanto, temos elaborado a hipótese de que seja consequência da apropriação do conceito de número limitado ao seu aspecto discreto, que interfere não só no ponto de partida do processo de medição, como também em seu ponto de chegada, conforme explicitaremos a partir da próxima tarefa.

3.6.4.3 – A tarefa traz como papel do professor que proponha às crianças a utilização da régua para medir o comprimento da largura dos seguintes objetos: caderno, folha do livro, etc. Os números obtidos que não forem inteiros serão lidos com a indicação do intervalo de números inteiros, entre o qual se encontra. Por exemplo: *o número é maior que 4 e menor que 5* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Outra questão que surge no diálogo entre as proposições davydovianas e as dos livros didáticos brasileiros é a seguinte: o conceito de número elaborado a partir de quantidades discretas permite a concepção de números maiores que *quatro* e menores que *cinco*? De acordo com Davydov, a resposta seria negativa, uma vez que o tipo de grandezas, como aquelas apresentadas nos referidos livros, medem apenas unidades indivisíveis.

Tal limitação não acontece na proposta de Davydov porque o conjunto de tarefas para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental não se limita aos números naturais. Embora a introdução sistematizada dos números racionais aconteça só no terceiro ano escolar, sua base geral é desenvolvida desde o momento que as crianças entram na escola. Por isso, ao atingir o nível de complexidade da presente tarefa, a medida de uma grandeza pode ser, sim, maior que *quatro* unidades e menor que *cinco* unidades. Assim como também o ponto de partida da medição pode ser qualquer, desde que se considerem as unidades compreendidas no intervalo correspondente à grandeza. Porém, conforme mencionado anteriormente (nas tarefas 5.2.2 e 5.2.3), é mais cômodo iniciar da origem (do zero).

3.6.5 Unidades de medida de comprimento padronizadas

Como evidenciado várias vezes, para medir necessita-se de unidades de medida. Entretanto, há de se considerar que existe a possibilidade de se apresentar uma variedade de unidades de medida, bem como uma diversidade de grandezas na mesma proporção. Como diz Freudenthal (1975), o comprimento, a área, o volume, a massa, são algumas das noções que se transformam em valores pelo procedimento de medição.

A medição dessas grandezas, entre outras, desempenha um papel importante nas aplicações da Matemática. No entanto, como dito anteriormente, a unidade básica entre todas, a mais pertinente para estabelecer unidades para as demais grandezas é o comprimento.

3.6.5.1 – Essa tarefa coloca à disposição das crianças: duas réguas com escalas diferentes (uma de papel, outra de plástico ou madeira) e um recorte de papel para trabalharem em duplas (Ilustração 99). Também estabelece: cada criança ficará com uma régua, uma fará um segmento com 5 unidades de comprimento e a outra deverá recortar uma tira com 5 unidades de comprimento na largura (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

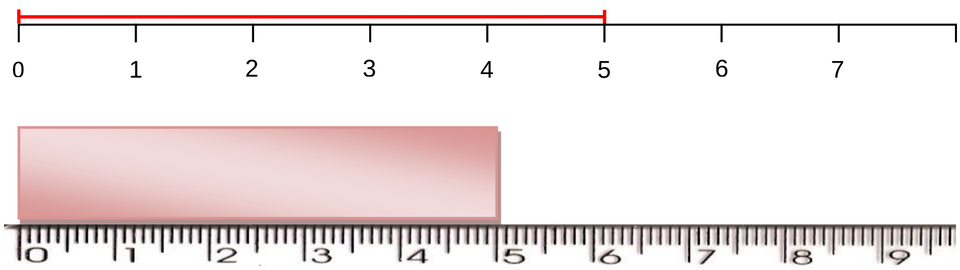


Ilustração 99

Observa-se que ambos os comprimentos medem 5 unidades. Como procedimento de confirmação, o professor propõe a aproximação da tira e ao segmento (Ilustração 100).

Ilustração 100

Dada as circunstâncias, ocorre um impasse, pois, para que os dois comprimentos sejam iguais, se faz necessária a opção, em comum acordo, por uma mesma unidade de medida. Nesse momento, o professor traduz a necessidade histórica de que as pessoas, no mundo inteiro, também fizeram um acordo sobre a adoção de algumas medidas, chamadas simplesmente de medidas ou unidades de medida.

Então, para medir os comprimentos, por exemplo, a humanidade adota as seguintes unidades de medidas: metro (m), decímetro (dc) e centímetro (cm). Enquanto fala os nomes das medidas, o professor mostra as tiras de cartolina com medidas correspondentes a cada uma delas. Ele comenta, ainda, que existem outras unidades de comprimento, como o quilômetro e milímetro, mas, por enquanto, não serão vistas.

As crianças examinam as duas réguas e concluem que a de papel possui as unidades maiores que um centímetro. Essa tarefa se completa com a apresentação de outros instrumentos de medida com outras unidades, como por exemplo a fita métrica.

De acordo com Talizina (1987), os estudantes devem compreender que: a grandeza pode ser medida com diferentes unidades e, por isso, sua propriedade numérica pode ser diversa; só se pode comparar, adicionar e subtrair se for considerada a mesma unidade de medida. Tal exigência do processo de aprendizagem se justifica por garantir, de forma mais conveniente teoricamente, as operações com os números racionais. Se as crianças do primeiro ano escolar compreenderem que só se realiza as operações com os números obtidos de medidas com a mesma unidade, então elas compreenderão "por que é indispensável remeter-se a um denominador" comum (TALIZINA, 1987, p. 52). Ou seja, remeter-se a uma unidade de medida comum.

Quando somamos, por exemplo, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ significa que, em um caso, a unidade foi dividida em três partes e se tomou uma delas e, no outro, em duas partes e também se tomou uma delas. "É evidente que são diferentes 'medidas' e, portanto, não se pode somar. Para somá-las há que levá-las a uma mesma unidade medida – denominador comum" (TALIZINA, 1987, p. 52). Porém, se os estudantes realizarem as diferentes operações mecanicamente, sem compreenderem seu sentido matemático, diz a autora em referência, eles não desenvolverão seu pensamento matemático.

3.6.5.2 – O foco estabelecido por esta tarefa é a medida de vários objetos que estão na sala de aula, com a utilização de diferentes unidades de comprimento. As crianças devem indicar a unidade de medida conveniente, uma vez que não há restrições quanto ao resultado, que pode ser racional. Nesse caso, utilizam-se expressões como, por exemplo, o comprimento do quadro é 3m e mais um pouco, mas não chega a ser 4m (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

3.6.5.3 – Essa tarefa prevê a medição do comprimento **H** (1dc)**,** com ajuda da medida-decímetro. Faz-se o respectivo segmento e o registro. Posteriormente, **H** é medido novamente com a unidade centímetro (10 cm). Os estudantes são instigados a adivinhar o número: vai ser maior ou menor do que aquele obtido ao medir com decímetro? Chega-se à conclusão que 1 decímetro contém 10 centímetros (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Nessas tarefas, identifica-se a vinculação regular da relação universal do conceito de número com suas manifestações particulares e singulares: a manifestação singular (o valor que resulta da medição) varia ou não em função da unidade de medida, particular. Assim sendo, o processo de generalização teórica do conceito de número ainda se estende por meio da experimentação do modelo.

3.6.6 Unidades de contagem

Na análise do segundo capítulo evidenciamos algumas relações gerais estabelecidas entre grandezas, inclusive as discretas. Na próxima tarefa, elas são retomadas a fim de revelar algumas unidades particulares utilizadas para medir as quantidades discretas que, por sua vez, resultam em diferentes expressões numéricas singulares. Desse modo, fecha-se o ciclo do movimento que segue do geral ao particular e singular.

3.6.6.1 - As crianças, nessa tarefa, recebem alguns recortes (6 recortes circulares e 4 quadrangulares), que em sua totalidade recebe o valor **A**. É preciso saber o número. O provável procedimento a adotar, pelas crianças, é a contagem das figuras uma por uma, e obterão o número 10. Então, solicita-se que diga qual foi a medida, a unidade de cálculo. Não se pode dizer que foi 10m ou 10cm, mas 10 figuras ou 10 unidades. Na sequência, o professor propõe que contem as figuras de duas em duas (pares), o que leva à obtenção de 5 pares de figuras e não de 5 figuras, pois a unidade de medida é composta por duas unidades (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Observa-se nas tarefas da proposta de Davydov que, mesmo sendo a contagem o foco, não se limita a relação *um – a – um*. A partir das unidades de contagem introduzida nessa tarefa é que, no segundo ano do Ensino Fundamental, são abordadas as diferentes bases do sistema de numeração, inclusive a decimal.

Assim, o conhecimento do conceito de número não se detém na abstração, mas, valendo-se dela, volta-se aos fenômenos concretos. Gradativamente as tarefas abordam a lei geral que rege a unidade da relação entre grandezas de maneira mais precisa e profunda. A familiarização com a diversidade de unidades de medidas e de números existentes "é um importante caminho para concretizar o conceito de grandeza" (DAVIDOV, 1988, p. 208).

Enfim, até o presente estágio de introdução do conceito de número promoveu-se a inter-relação do inicial e o derivado e, consequentemente, do desenvolvimento teórico do conceito de número.

3.7 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NUMERAIS

O sistema de tarefas do capítulo precedente centralizou-se na comparação entre os números na reta numérica e a síntese de que quanto mais adiante do início da reta o número estiver maior ele é. Como decorrência, evidenciou-se a correlação entre as grandezas a serem medidas, as unidades de medidas e os números. Acresce-se, ainda, o início da sistematização de algumas unidades de medidas padronizadas, quais sejam: comprimento e contagem.

No presente capítulo, as tarefas são organizadas para que se acentue o desenvolvimento do pensamento teórico com base na relação de desigualdade entre as grandezas, mas com destaque para a diferença entre elas, isto é, o valor que caracteriza o grau de desigualdade. Esta relação é representada na reta numérica, o que possibilita a introdução das operações de adição e subtração na forma de acréscimo e decréscimo de unidades.

Adota-se dois tipos de registros da inter-relação entre as duas operações: os esquemas gráfico-espaciais e as fórmulas expressas com letras. Somente nesse capítulo, a partir da subtração**,** que o número zero se apresenta e é introduzido na reta numérica, com perspectivas para constituição, nos próximos anos escolares, dos números negativos. O desenvolvimento das tarefas também propicia o deslocamento no plano mental da reta numérica, que até então era realizado a partir da sua visualização.

3.7.1 Diferença de números

Nessa seção propõe-se a análise da diferença entre as propriedades numéricas das grandezas e sua correlação com a reta numérica.

3.7.1.1 – Essa tarefa tem por base dois recipientes iguais na forma e tamanho, mas com volumes de líquidos diferentes. Executam-se, tanto com os líquidos quanto no esquema, os dois procedimentos que os tornam iguais: aumentar o menor até o nível do maior ou diminuir o maior até o volume do menor (Ilustração 101). Nesse movimento, o professor propositalmente coloca ou retira a quantidade de líquido que não proporciona a igualdade dos volumes. Isso caracteriza um erro gerador de discussão, na qual se acentuará que não é qualquer volume que deve ser acrescentado ou diminuído, mas a diferença entre eles: o excesso no volume maior ou falta no volume menor (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

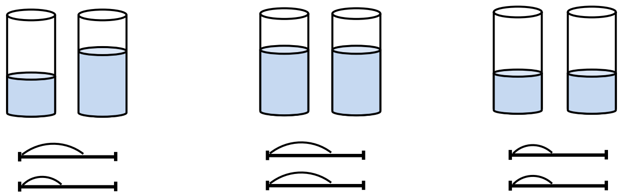


Ilustração 101

Novamente retomam-se as relações genéricas sobre a diferença e, gradualmente, procede-se a generalização propriamente dita. Quando o professor coloca ou retira a quantidade errada de líquido, o faz intencionalmente para verificar se as operações concretas, indispensáveis para a identificação da diferença das grandezas, foram realmente apropriadas, pelas crianças. Também tem a finalidade de desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre seus erros (as causas e as possibilidades de correção) e, consequentemente, de atuar autonomamente.

3.7.1.2 – A execução dessa tarefa ocorre com base na análise de dois recipientes de tamanhos diferentes, com volumes de líquidos diferentes, que estão sobre a mesa do professor e, ainda, no quadro a representação da reta numérica. O volume de líquido no primeiro recipiente é menor que no segundo. Por isso, o professor sugere que se igualem os volumes, com a adoção de um dos procedimentos (acrescentar ou retirar), porém, desta vez não é possível orientar-se pelo nível dos líquidos. *Para determinar o volume de líquido a ser acrescentado* se faz necessário uma unidade de medida (um copinho). As crianças medem os líquidos dos recipientes e marcam o resultado na reta numérica (2 e 5), com a condição determinada pelo professor que elas mostrem a diferença de volumes na reta. As crianças concluem que será necessário acrescentar 3 medidas no primeiro recipiente ou retirá-las do segundo. A ilustração 102 foi elaborada a partir da primeira opção: acrescentar a diferença no primeiro recipiente para igualar os volumes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

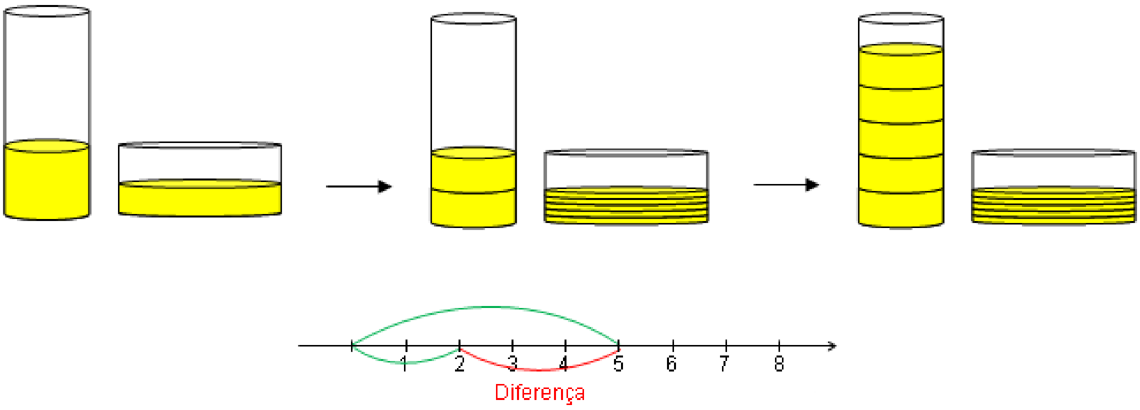


Ilustração 102

Na sequência, os líquidos são transferidos para dois recipientes iguais pela forma e pelo tamanho, a fim de comparar as grandezas de forma direta. O professor insiste para que as crianças determinem, pela reta numérica, a quantidade de medidas *a mais* do segundo recipiente ou *a menos* no primeiro. Chama a atenção, em tom de discussão e análise, que na reta numérica o número 5 tem 3 unidades *a mais* que o 2. Também ajuda as crianças a escrever e a ler os seguintes registros: 5 > 2 (5 é maior que 2, com a diferença de 3 unidades) e 2 < 5 (2 é menor que 5 com a diferença de 3 unidades).

São as necessidades e os motivos de estudo, segundo Davídov e Slobódchikov (1991), que orientam as crianças a obterem o conhecimento como resultado da sua própria atividade transformadora. A transformação do material de estudo possibilita a revelação das relações internas, cujo exame permite ao estudante seguir a origem de todas as manifestações externas do material a apropriar. A necessidade de estudo é a necessidade de a criança experimentar com um ou outro objeto (real ou mentalmente), com o fim de separar nele os aspectos gerais essenciais e particulares externos e suas inter-relações.

É proposital reafirmar a presença das particularidades visuais externas nas proposições davydovianas, focado nas relações internas das grandezas e números, abstraídas por meio das correspondentes transformações. Não se limita, pois, apenas às propriedades externamente observáveis. A tarefa não está dada diretamente, o que promove a formação do pensamento conceitual teórico. Vale destacar mais uma vez que os conhecimentos teóricos, de acordo com Davydov (1982), são aqueles que refletem a inter-relação do interno e o externo, da essência e o fenômeno, do inicial e o derivado.

3.7.1.3 – Esta é uma tarefa que coloca as crianças em situação de procura, na reta numérica, do número anunciado pelo professor, com a indicação da sua posição em relação ao seu antecessor e o sucessor. Por exemplo, o professor diz 6 e elas falam: o número 5 está uma unidade antes e uma unidade seguinte o 7 (Ilustração 103). O professor lembra que esses números são, respectivamente, antecessor e sucessor de 6 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

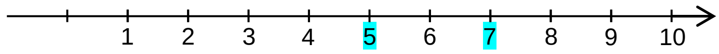


Ilustração 103

Os colaboradores de Davydov (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008) ressaltam que as crianças costumam contar nos dedos, mas deixam de adotar tal procedimento com o desenvolvimento de várias tarefas na reta numérica.

De acordo com Vigotski (2000), a contagem nos dedos traduz uma conduta produzida historicamente, atrelada á ideia de número como propriedade de coleções de objetos. Isso é observável, segundo Aleksandrov (1976), nos nomes de certos números, como por exemplo, mão para cinco, homem completo para vinte. O número cinco não era entendido no sentido abstrato, mas simplesmente que havia tantos quanto os dedos de uma mão. O vinte era tantos quanto os dedos das mãos e dos pés de um homem.

Em épocas muito remotas, os símbolos escritos eram riscos que representavam o número correspondente de dedos levantados ou estendidos. Ainda hoje, nas Américas do Sul e do Norte, alguns indígenas e algumas tribos de esquimós adotam o mesmo procedimento (EVES, 2007).

A orientação para utilização dos dedos e de risquinhos, embora oriunda de um estágio inicial do desenvolvimento histórico da matemática, também aparece nos livros didáticos brasileiros. Isso significa dizer que as proposições brasileiras para o ensino de Matemática no primeiro ano do Ensino Fundamental, em sua maioria, contemplam o estágio inicial do desenvolvimento do conceito de número pela humanidade em detrimento de seu estágio atual.

Para resolver a operação 2 + 3 = __, por exemplo, as crianças estendem dois dedos em uma mão e três na outra, para saber o resultado contam o total de dedos estendidos: 1, 2, 3, 4, 5. Ou ainda fazem 2 riscos, mais 3 riscos e contam o total de riscos (5): ││ + │││= │││││. O mesmo ocorre na operação inversa, a subtração. Em 5 – 3 = ___, por exemplo, estende-se 5 dedos e baixa-se 3, o resultado é a quantidade de dedos que ficou estendida. Ou ainda, por meio de riscos, faz-se 5 riscos e cortam-se 3, o número de riscos sem cortes (2) corresponde ao resultado: ┼┼┼││.

Como a orientação teórica das proposições davydovianas não é desenvolver o pensamento do homem primitivo nas crianças de hoje, mas o contemporâneo, as tarefas sugerem que a utilização dos dedos e de riscos soltos seja substituída pela reta numérica.

3.7.2 Diferença entre grandezas

Nesta seção volta-se a evidenciar que a propriedade numérica das grandezas depende da unidade de medida utilizada no processo de sua medição.

3.7.2.1 Esta tarefa consta de dois recipientes iguais na forma e no tamanho, mas com volumes de líquidos distintos (A < B) para serem medidos com as unidades de medida E e K, conforme ilustração 104 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

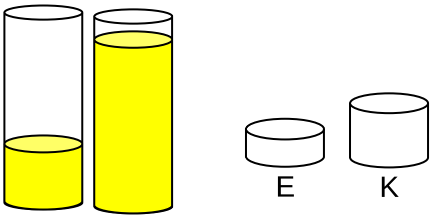


Ilustração 104

As crianças recebem do professor a instrução para medir os volumes com a unidade de medida **E.** Além disso, encontrar a diferença entre eles com ajuda da reta numérica. Se medirem corretamente os dois volumes, obterão os números 2 e 6, bem como a diferença entre eles de 4 medidas. Em outras palavras, o volume **A** é menor que o volume **B**, em 4 unidades. A medição é realizada novamente, desta vez com a unidade de medida **K**, e obterão os números 1 e 3, cuja diferença entre eles, marcada na reta numérica, é de 2 unidades (Ilustração 105).

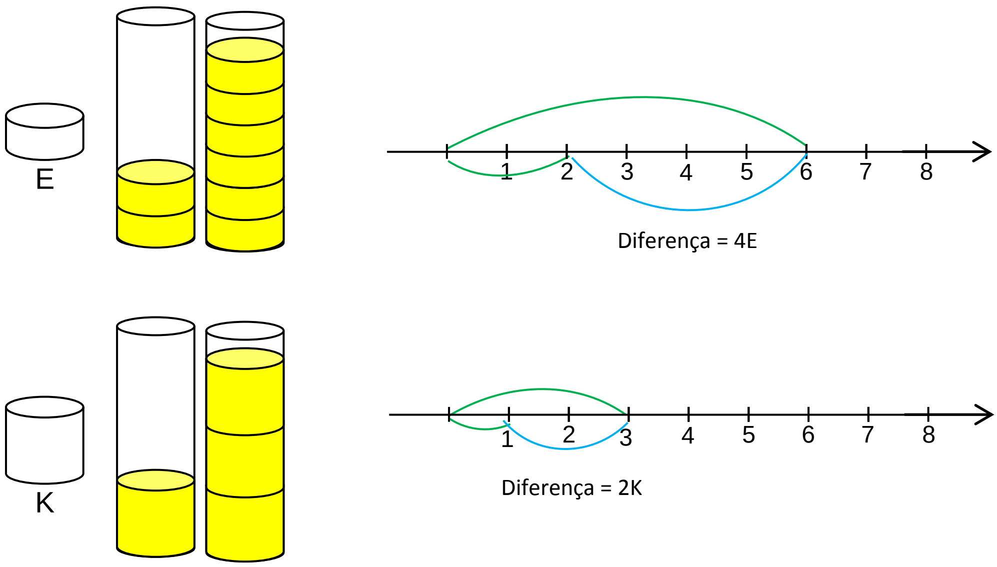


Ilustração 105

Diante de duplo resultado, o professor pergunta: Afinal, são *duas* ou *quatro* unidades a diferença entre os volumes? As crianças, orientadas pelo professor, concluirão que a diferença é única, o que torna o resultado distinto é a unidade adotada na medição. Em termos de representação matemática, fica: A < B, com diferença de 4E ou 2K (Ilustração 106).

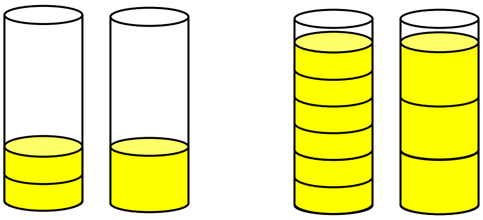


Ilustração 106

Segundo Talizina (1987), muitos alunos realizam as operações aritméticas corretamente, sem o entendimento do sentido matemático. Tal compreensão só acontece se precedida da aquisição de uma concepção de número como uma relação e, também, da propriedade numérica como resultado da relação de comparação entre a grandeza e a unidade de medida.

Por isso, a mesma grandeza pode ter propriedades numéricas diferentes, quando comparada com distintas unidades de medidas. Nem sempre *quatro* é maior que *dois* e, vice-versa, dois é menor que quatro, isso só é verdade nos casos em que a unidade de medida for a mesma. Sem esse alcance teórico, “nos estudantes se formará uma representação incorreta sobre o número” (Idem, p. 51).

Se mostrar aos estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental um lápis e perguntar-lhes: “Crianças, digam quanto há? Eles geralmente respondem ‘um’” (TALIZINA, 1987, p. 51). Porém, a resposta só é correta se a grandeza que se tome seja a quantidade. Caso seja o comprimento, por exemplo, a resposta dependerá da unidade de medida eleita para a medição (cm, mm, dc).

3.7.3 Como encontrar um valor a partir de outro valor e da diferença

A partir da relação entre duas grandezas, em que se conhece a propriedade numérica de uma delas e a diferença entre ambas, é possível determinar a propriedade numérica desconhecida.

3.7.3.1 – Consta dessa tarefa a apresentação, pelo professor, de dois recipientes de mesma forma, um com oito unidades de volume de líquido e outro vazio. No quadro, aparece o seguinte registro: 5E < 8E (Diferença 3E). Ao analisar o registro, chega-se à conclusão de que o líquido foi medido pela medida **E** e que a diferença entre ambos é 3**E** (Ilustração 107).

As crianças deverão, ainda, colocar o líquido no recipiente vazio, com a opção de sugerir o caminho prático: primeiro, colocar o mesmo volume (8E), depois, retirar 3 medidas. Mas o professor questiona: não existe outra possibilidade de descobrir quantas medidas devem ser colocadas dentro do recipiente vazio? Caso seja necessário, sugere a reta numérica. Como forma de ajuda, lança algumas perguntas, como por exemplo: *Qual é o número que deve ser encontrado, maior ou menor? Para que lado devemos nos deslocar, a partir do número conhecido? E em quantas unidades* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008)*?*

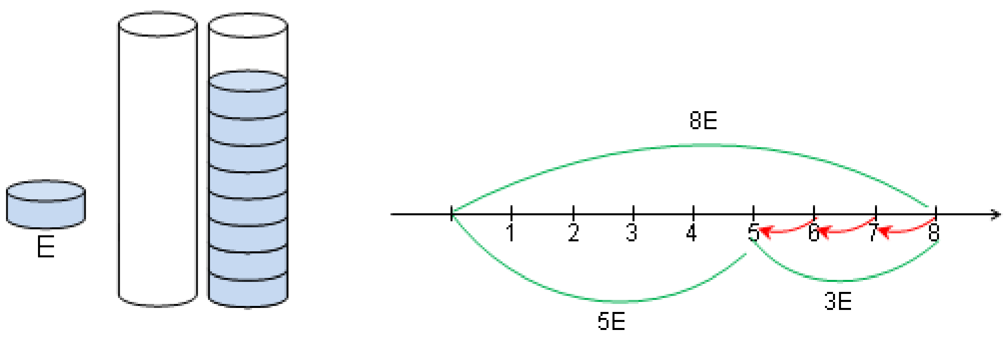


Ilustração 107

Ao concluírem a tarefa, o professor enfatiza que o volume foi encontrado pelo movimento entre os números na reta numérica. Caso algumas crianças adotarem procedimento mental, devem explicar o processo que o levou a obter o resultado.

A partir da diferença entre grandezas, Davydov introduz a interconexão do movimento inverso das operações de adição e subtração na reta numérica. O conhecimento teórico de tais operações surge no processo de análise da diferença entre grandezas, base geneticamente inicial de ambas as operações.

3.7.4 Adição e subtração

Nessa seção, retoma-se a ideia de que se um valor é conhecido e sabe-se o quanto ele é maior ou menor que outro valor este último pode ser determinado na reta numérica. A adição e a subtração são introduzidas, respectivamente, como contagem para frente ou para trás; posteriormente, registradas como sentenças e, gradualmente, elevadas ao plano mental.

3.7.4.1 Por isso, a tarefa toma por base a reta numérica, para que as crianças completem o seguinte registro: __ > 5, com a condição que a diferença seja de 2 unidades. O professor sugere que elas localizem na reta o número 5 e direciona a continuidade do desenvolvimento da tarefa com as seguintes perguntas: o número desconhecido é maior ou menor que 5? Para que lado deve-se prosseguir na reta numérica, na direção da seta (se distanciando do início) ou para o lado contrário da seta (voltando ao início)? Quantas unidades precisam ser deslocadas a partir do número 5? Com a conclusão que serão 2 unidades ao lado oposto da origem, porque o número procurado é maior que 5 e a diferença é 2 unidades, o professor faz no quadro o registro da operação realizada (5 + 2). E explica: partimos do 5; estamos à procura de um número maior, por isso vamos para o lado contrário do início e marcamos com o sinal de “adição”; no final colocamos quantas unidades são deslocadas a partir do 5. O resultado será: 5 + 2 = 7. Este registro pode ser lido de várias maneiras, como por exemplo, “cinco mais dois dá sete”, “se acrescentar dois ao cinco vai dar sete” (Ilustração 108). O mesmo ocorre com a subtração (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

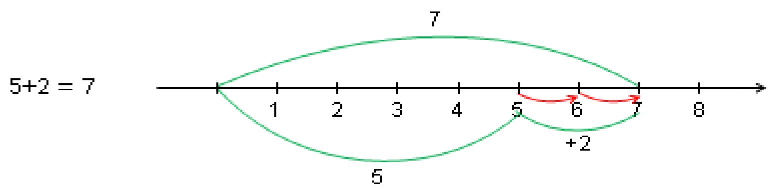


Ilustração 108

O professor informa que a operação de aumento de um número por outro é chamado de *adição* e a diminuição denomina-se *subtração*.

A introdução para operação da adição, na maioria das proposições brasileiras, é realizada a partir da contagem nos dedos. Por exemplo, para a resolução da operação 3 + 2 levanta-se três dedos em uma mão e dois na outra. Inicia-se a contagem nos dedos levantados em uma das mãos e prossegue-se na outra mão, em forma única: *um*, *dois*, *três*, *quatro*, *cinco*. Isso significa que a operação de adicionar não é realizada, trata-se apenas da contagem de todos os dedos. Então, fica somente a ideia: a operação da adição consiste na contagem conjunta dos objetos de agrupamento distintos.

De acordo com Menchinskaya, a ênfase na etapa do "reconto" dos objetos, no primeiro ano do Ensino Fundamental, exerce "uma influência negativa sobre a formação do conceito de número; as crianças continuarão a contar um objeto de cada vez, em vez de somar ou diminuir" (apud KALMYKOVA, 1991, p. 13).

Na maioria das proposições brasileiras, para introduzir a adição apresenta-se uma situação completa como exemplo, as demais que os estudantes resolverão são extremamente semelhantes, pois apenas varia o número de dedos levantados em cada mão. Como consequência, promove o desenvolvimento da generalização empírica da operação da adição. Vale lembrar que a generalização teórica difere consideravelmente da generalização formal empírica. Essa última, conforme Rubstov (1996, p. 131),

> consiste em valorizar as propriedades comuns e externamente semelhantes de uma variedade de objetos, no momento em que é feita uma comparação, enquanto que a generalização teórica supõe uma análise das **condições de construção iniciais** de um sistema de objetos por meio da sua transformação (destaque do autor).

Os livros didáticos brasileiros introduzem a adição, depois a subtração e, finalmente, a inter-relação entre ambas. Em Davydov o movimento é o oposto. Primeiro estuda-se a conexão geneticamente inicial (condições de construção iniciais) do movimento inverso entre ambas, depois se analisa as especificidades de cada uma e, finalmente, retoma-se ao sistema integral para introdução de resolução de problemas envolvendo as duas operações.

3.7.4.2 – Nessa tarefa, o professor mostra na reta numérica o número 7, que é anotado no caderno, pelas crianças. Em seguida, ele demonstra um deslocamento para a esquerda e as crianças indicam o operador (menos). Por fim, o professor desloca duas unidades pela reta, as crianças escrevem número 2 e falam o número encontrado. Lê-se o registro: 7 – 2 = 5. Gradativamente, substituem-se por gestos os procedimentos na reta numérica realizados com desenho de arcos (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Nessa seção, a ideia central foi a interconexão entre o registro das operações e o movimento realizado na reta numérica, que traduz a unidade das significações geométricas e aritméticas do conceito de número, fecundadas a partir das relações algébricas entre as grandezas.

3.7.5 Os casos a ± 1, a ± 2, a ± 3

Nesta seção, a tarefa de introdução contempla o teor teórico-abstrato do conceito de número, que, por sua vez, é desconsiderado nos livros didáticos brasileiros, em função do que Giardinetto (1997) denomina de excesso da valorização do conhecimento cotidiano.

3.7.5.1 - As crianças recebem cinco cartões com números abstratos (☼, ♬, #, ☺ e ¥). Sugere-se que elas inventem uma sequência numérica com eles, como por exemplo, a ilustração 109 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

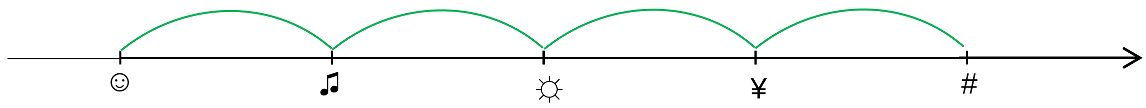


Ilustração 109

Depois de expor os números abstratos na reta, o professor escreve uma sentença e as crianças levantam o cartão que corresponde à resposta. Por exemplo, se o professor escreve a operação ☺+ 1 = ___, as crianças deverão mostrar o cartão com o símbolo ♬. Ou seja, ☺+ 1 = ♬. Todas as sentenças são localizadas na reta (Ilustração 110).

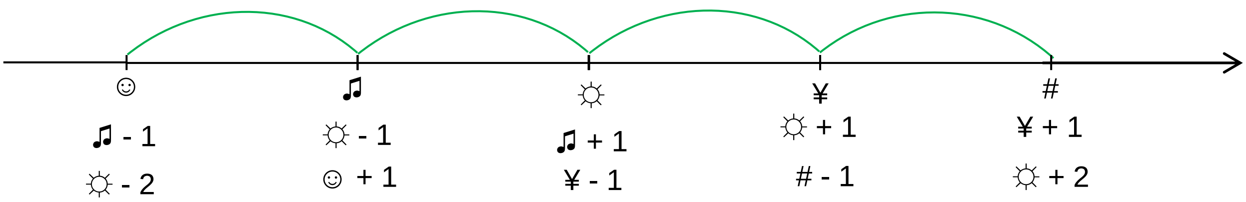


Ilustração 110

O desenvolvimento dessa tarefa possibilita a generalização de que o número anterior ao número ponto de referência é menor em uma unidade e o seguinte é maior em uma unidade. Da mesma forma, o segundo número anterior e o segundo posterior são, respectivamente, menor e maior em duas unidades.

Em termos operacionais, adicionando-se uma unidade conta-se *para frente* e subtraindo uma unidade conta-se *para trás*. Este princípio, movido pela contagem, constitui o sistema de nexos e relações gerais entre os números na sequência numérica, como unidade infinitamente diversa.

Na continuidade, sugere-se o trabalho mental com a reta numérica. É importante relacionar a direção do deslocamento na reta com os operadores "+" e "-" e com os termos antecessor e sucessor. Por exemplo, quando o professor fala 5 + 1, ou o sucessor de 5, as crianças deverão falar o número 6.

Ao se questionar sobre quanto é 5 – 1, ou qual é o antecessor de 5, elas responderão 4.

As crianças precisam desenvolver várias situações similares para que, posteriormente, consigam resolver estas operações mentalmente de forma correta e rápida. Desse modo, a reta numérica, convertida em meio para o estudo das propriedades do conceito de número, possibilita sua passagem ao plano mental.

Ter um conceito sobre um ou outro objeto, diz Davydov (1982, p. 126), “significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência”. Primeiro a criança se apoia na reta e depois realiza as operações mentalmente, como se fosse de maneira automática, porém, como alerta Galperin (1987), com compreensão.

3.7.6 Utilização das letras para representar os números

As tarefas que seguem estão organizadas de um modo que propicia a expansão do conceito de número no contexto das operações de adição e subtração. Cada vez mais se insere nas inter-relações das significações dos campos da Matemática produzidos historicamente: aritmética, geometria e álgebra.

3.7.6.1 – Para essa tarefa, cada criança recebe uma folha com a reta numérica (Ilustração 111). O professor explica que alguns números desconhecidos estão marcados com letras, mesmo assim é possível compará-los. Também chama atenção para o fato de que, diferentemente das grandezas que são marcadas com letras maiúsculas, os números geralmente são distinguidos com letras minúsculas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

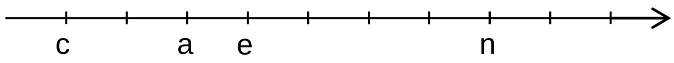


Ilustração 111

Não se sabe qual é o início da reta, mas a seta indica a direção. Compara-se aos pares e identifica-se a diferença entre eles. As crianças se orientam pela noção que o número dado está mais adiante ou mais próximo do início da reta. O professor revela que o número *a* é 3. Com essa informação, as crianças completam o restante da reta numérica (Ilustração 112).

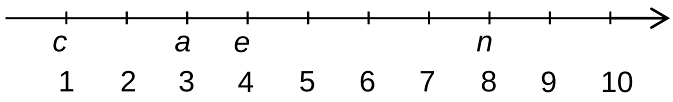


Ilustração 112

Desse modo, sintetizam-se as múltiplas relações entre significações algébricas, aritméticas e geométricas do conceito de número, ou seja, concretiza-o. Segundo Talizina (1987), a completa apropriação dos conhecimentos pressupõe a formação de operações cognitivas, que são procedimentos específicos, característicos de uma ou outra esfera do conhecimento. Não é possível "formar procedimentos do pensamento matemático sem ter em conta os conhecimentos sobre matemática" (idem, p. 49).

Os livros didáticos brasileiros, por sua vez, ao abordarem o conceito de número contemplam apenas as significações aritméticas. Considerando a afirmação de Talizina, inferimos que não é possível formar os procedimentos do pensamento numérico sem considerar as significações produzidas historicamente pela humanidade sobre este. Para tanto, os mencionados livros carecem das significações geométricas e algébricas do referido conceito.

3.7.6.2 – Para a execução da tarefa, há uma reta numérica com o número *c* marcado, um recipiente com *c* medidas de líquido e uma unidade de medida (copinho), mas não se apresenta o número singular (Ilustração 113). É preciso colocar duas medidas a mais de líquido num outro recipiente da mesma forma e tamanho. Pode-se colocar a mesma quantidade de líquido que o primeiro (mesmo nível) e adicionar mais 2 unidades de medidas. Representa-se a operação, na reta numérica, com um arco e encontra-se o ponto que corresponde ao volume obtido. Esse novo número não pode ser *c* porque representa o volume inicial. O professor explica que este número também pode ser marcado com uma expressão: $c + 2$ (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

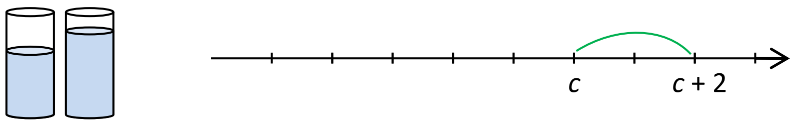


Ilustração 113

Ao estabelecer interconexões no sistema conceitual, as proposições davydovianas promovem a formação de conceitos cada vez mais abstratos. Isso porque “a matemática é essencialmente uma ciência que se ocupa das propriedades abstratas e generalizadas dos objetos e das suas relações” (KRUTETSKY, 1991, p. 60).

Na sequência, o professor coloca o mesmo volume *c* em um terceiro recipiente e tira três medidas. Feito isso, as crianças devem concluir que o terceiro recipiente contém três medidas a menos de líquido que o primeiro. Elas marcam com uma sentença o respectivo ponto na reta numérica (Ilustração 114).

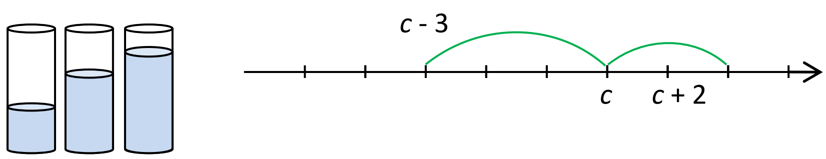


Ilustração 114

O material abstrato é utilizado para a solução de tarefas relacionadas ao procedimento geral das operações de adição e subtração. Os símbolos servem como meio para a captação dos fundamentos da ação objetal. A passagem ao concreto se dá também pela substituição dos “símbolos expressos por letras pelos símbolos numéricos concretos” (DAVIDOV, 1988, p. 215). Tal substituição é proporcionada no desenvolvimento da próxima tarefa.

3.7.6.3 - Os números 5 e 10 estão na reta numérica e, entre eles, há uma marca (Ilustração 115). O professor propõe que as crianças formulem duas sentenças que representam o mesmo número (8), uma partindo de 5 e outra partindo de 10. Conclui-se que as sentenças são 5 + 3 e 10 – 2 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

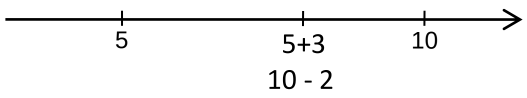


Ilustração 115

O professor acentua que apesar de serem visualmente diferentes as expressão 5 + 3 e 10 - 2 representam o mesmo número (8). Portanto, não se forma uma única conexão entre o número e a quantidade de objetos que representa. O referido conceito se desenvolve por meio de múltiplas conexões que refletem sua composição numérica. O resultado é o mesmo, mas em termos operacionais são diferentes. As formas de movimento do conceito de número estão vinculadas entre si, umas podem transformar-se em outras, ou seja, trata-se da diversidade em sua profunda unidade.

O conteúdo do conceito de número consiste, de acordo com Aleksandrov (1976), nas regras e nas relações mútuas do sistema numérico. Toda operação determina uma conexão entre os números. Nas proposições davydovianas o número é concebido como relações. Por exemplo, o número 8 (8 = 5 + 3, 8 = 10 – 2), assim como os demais números, está relacionado com outros, embora nos limites das operações de adição e subtração, visto que se trata de proposições para o primeiro ano do Ensino Fundamental (crianças com seis anos de idade).

3.7.7 Número zero

Nessa seção, o número zero é introduzido a partir de subtrações sucessivas. Ele representa o ponto de origem da reta e a ausência de unidades.

3.7.7.1 – A tarefa toma por base a reta numérica para que as crianças realizem as seguintes operações: 4 – 1 =__, 4 – 2 =__, 4 – 3=__ e 4 – 4=__ , conforme ilustração 116 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

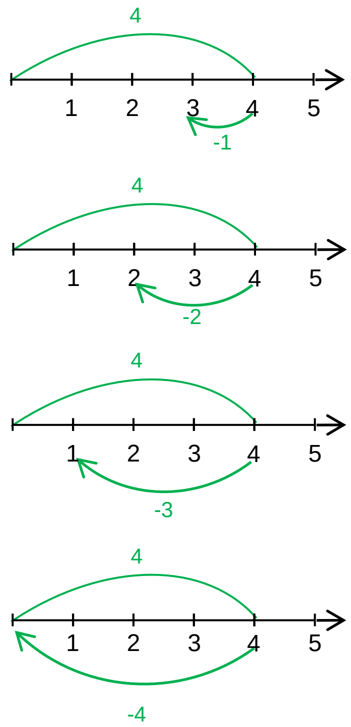


Ilustração 116

Ao resolver a operação 4 - 4=__, a atenção das crianças está para o início da reta numérica. Após levantarem as hipóteses sobre que número anotar como resultado, o professor informa que, neste caso, coloca-se o zero (0), isto é, o início da reta numérica, conforme ilustração 117.

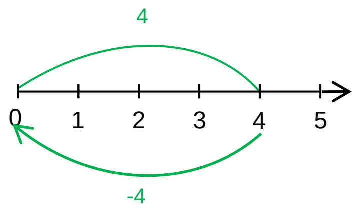


Ilustração 117

Agora a reta numérica tem uma origem, o zero. O movimento realizado para chegar ao zero, por subtrações sucessivas, prepara o terreno para a introdução dos números negativos no quinto ano do Ensino Fundamental. Nos inteiros positivos, não há possibilidade de se efetuar a subtração de 4 – 5, por exemplo. Para tanto, se farão necessários novos números no sentido oposto, a esquerda de zero para que tal operação seja realizada. Ou seja, futuramente a reta numérica terá dois sentidos opostos, cuja origem será o número zero. Os números negativos serão representados na reta pelos pontos situados à esquerda do ponto correspondente ao zero.

Após a apresentação do zero como o número que fica no início da reta numérica, apresenta-se a ideia de que ele pode significar “nenhuma medida” (significado quantitativo).

3.7.7.2 – Para cumprir essa tarefa, as crianças traçam segmentos de vários comprimentos, inclusive de 0 cm. Nesse caso, conclui-se que não há necessidade de sair do ponto inicial, 0 cm significa “nenhum centímetro” (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008). Assim, até o número zero surge a partir do estudo das grandezas na unidade dos opostos discreto e contínuo e não apenas o representante do nada, como fazem os livros didáticos brasileiros.

Grattan-Guinnes (1999, p. 23) diz que o ensino do zero “é frequentemente deplorável, especialmente quando se identifica esta noção com o nada. Isto é completamente incorreto, pois o zero tem propriedades tais como: 7 + 0 = 7 (ao passo que *7* + nada não é definido)”.

3.7.7.3 – Para essa tarefa, são apresentadas algumas operações a serem realizadas na reta, dentre elas algumas envolvendo o número 0, como por exemplo, 4 + 0=__. Nesse caso, desloca-se 0 unidade, a partir de número 4, para direita, o que significa que nenhuma delas permanece no ponto que está (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

A produção de um símbolo para representar o *nada* é, de acordo com Pelseneer (apud CARAÇA, 1984), um dos atos mais audaciosos do pensamento, uma das maiores aventuras da razão humana. Trata-se de algo relativamente recente, talvez dos primeiros séculos da Era Cristã, devido às exigências da numeração escrita (CARAÇA, 1984, p. 06). O zero permitiu a elaboração de uma particularidade importante no sistema de numeração decimal, a “posicional”. Isto é, um mesmo numeral tem distintos significados, de acordo com sua posição. Ele permite, por exemplo, a distinção entre os números 21 e 201. No primeiro caso, o numeral 2 representa duas dezenas e no segundo, duas centenas.

Ressalta-se que o valor posicional do número é abordado, nas proposições davydovianas, só no segundo ano escolar, a partir das relações entre grandezas por meio de unidades de medidas compostas e suas interconexões na reta numérica.

Nesse capítulo, foram realizadas algumas transformações com a reta numérica, modelo visual que reflete as relações e vinculações internas do conceito de número, em duas direções: as operações entre as grandezas foram representadas na reta ou vice-versa, o movimento registrado na reta determinava a operação a ser realizada entre as grandezas. Além disso, foram explicitadas interconexões entre as significações algébricas, geométricas e aritméticas do conceito de número que subsidiarão a elaboração, no próximo capítulo, do esquema geral de resolução de problemas envolvendo a adição e subtração.

3.8 TODO-PARTES

As tarefas do capítulo anterior focaram a diferença entre grandezas e entre números, sua representação na reta numérica e a execução das operações de adição e subtração. Nas tarefas do presente capítulo, são estudadas as possibilidades de composição das grandezas e números e, em seguida, o significado numérico das grandezas na relação todo-partes. As operações na reta numérica levarão à conclusão de que são distintas as operações para encontrar o significado do todo e da parte.

3.8.1 Todo-partes em uma situação concreta

Nessa seção, identifica-se o todo como um valor composto de outros valores (as partes) e registra-se a relação no esquema. Formam-se conexões múltiplas, entre partes-todo, que possibilitam a resolução de problemas e sintetizam-nas em um modelo geral para resolução de problemas que envolvam as operações de adição e subtração.

3.8.1.1 – A referência de execução da presente tarefa são dois recipientes com líquido e um terceiro maior que os dois primeiros, vazio. O professor informa que tem 7 copos de líquido no primeiro recipiente e 9 no outro. Os números são anotados no quadro. Também informa que, inicialmente, todo líquido estava no terceiro recipiente, que agora está vazio. Desse modo, 7 copos e 9 copos são as partes que compõem *k* copos. Ou seja, o todo (k) é composto por duas partes: 7 copos mais 9 copos. A relação entre o todo e as partes é representada por meio de esquema, ilustração 118 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

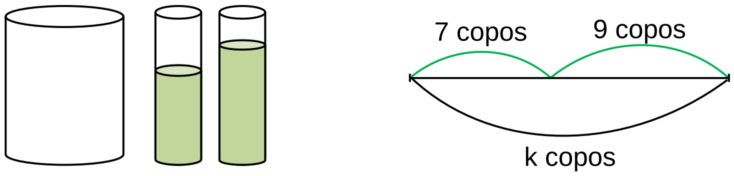


Ilustração 118

A situação dada nos recipientes expressa somente as propriedades externamente observáveis. Já o esquema reflete as relações internas entre os três valores dos volumes, ou seja, que o valor k é composto pelos valores 7 e 9. Portanto, havia 16 copos de líquido no recipiente maior.

Se nessa tarefa o todo foi dividido em partes, na subsequente será o contrário, o todo será composto a partir das partes.

3.8.1.2 – Na execução da tarefa, disponibilizam-se três novelos de corda, cujos comprimentos são 8 metros, c metros e 3 metros (Ilustração 119). É preciso estender uma corda de *n* metros no quintal que será obtida pela junção das três medidas. A situação deve ser representada em esquema que possibilita a conclusão de que n metros é o todo em relação aos demais valores (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

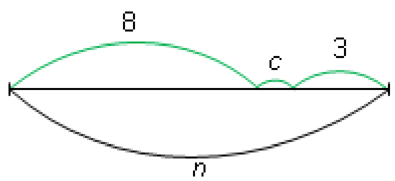


Ilustração 119

As medidas c e n não representam uma quantidade concreta de metros, mas um valor genérico qualquer. Por isso, não é possível saber quanto medem especificamente. Os livros didáticos brasileiros, por sua vez, não abordam as letras para representar os números, pois esses são apresentados a partir da relação direta com a quantidade de objetos que representam. Como representar *n* objetos ou *c* objetos? Não é possível, primeiro porque não se trata de grandezas discretas, e, segundo, porque não se sabe a quantidade de metros que representam, pode ser um valor qualquer.

As proposições brasileiras são semelhantes às detectadas por Davydov (1982) ao analisar os livros didáticos de matemática utilizados nas escolas de seu país. Elas desenvolvem, nas crianças, a necessidade de se apoiarem no visualmente perceptível ou manipulável ao lidar com os números. Portanto, não é uma característica inerente à criança no período em que sua atividade principal é o estudo, mas uma consequência dos conteúdos e dos métodos utilizados no ensino.

Como diz Talizina (1987), se no ensino se formam procedimentos cognitivos particulares, se desenvolverão nos estudantes o pensamento empírico. Por outro lado, se o foco for para os procedimentos generalizados, orientados para a essência, propriedades gerais de todo um sistema de casos particulares, dar-se-á aos estudantes a possibilidade de pensar teoricamente. E consequentemente avançar de forma autônoma na esfera do conhecimento dado.

3.8.2 Como determinar o significado do todo

Nesta seção, as tarefas são organizadas para que os alunos concluam que o todo é composto pelas partes, que só podem ser adicionadas umas às outras se forem oriundas de unidades de medidas comuns.

3.8.2.1 – A tarefa assume característica de problema. *Uma dona de casa tinha 7 quilos de frutas na caixa e mais 5 na cesta. Ela resolveu fazer doce, para isso, é preciso comprar a mesma quantidade de açúcar. Como descobrir, com ajuda da reta numérica, quantos quilos de frutas no total a dona tem* (Ilustração 120)? Nesse caso, o todo será composto por 7 quilos mais 5 quilos, independente da ordem: 5 + 7 ou 7 + 5 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

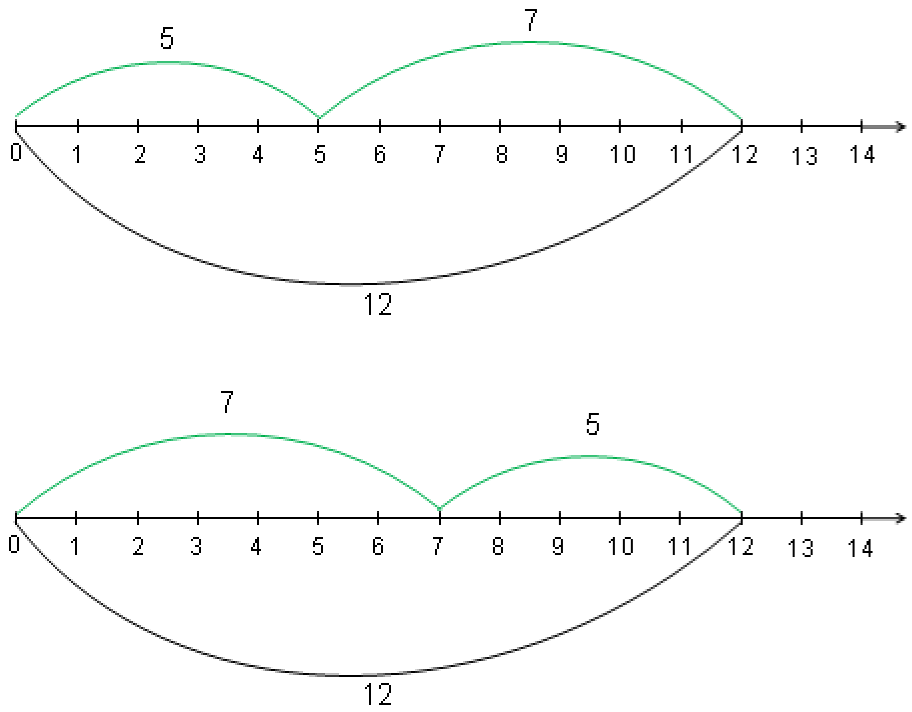


Ilustração 120

3.8.2.2 – A tarefa estabelece que o professor deposite duas xícaras grandes de líquido em um recipiente e um copo pequeno em outro. Na sequência, passa os dois volumes de líquidos anteriores em um terceiro recipiente e questiona: qual é o novo volume. Provavelmente as crianças responderão que há 3 medidas. Então, o professor sugere dupla medição: com o copo e, depois, com a xícara. Consequentemente, obter-se-á medidas diferentes: 2 xícaras e 1 copo ou vice-versa. Isso significa que não se pode somar resultados de medição que foram obtidos com medidas distintas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Nos capítulos precedentes, as tarefas tinham o propósito de revelar as condições particulares para a obtenção dos números singulares e a interdependência entre a unidade de medida e o número. Nesse momento, tal ideia é retomada na especificidade operacional e gera uma síntese profícua do ponto de vista algébrico pelo fato de a resposta ser uma expressão particular e não um número singular.

Marquis (1994, p. 235) fez um levantamento dos vinte e dois erros mais cometidos pelos alunos em álgebra. Segundo ele, um dos mais comuns é do tipo 3a + 4b = 7ab. Com base nas proposições davydovianas, tal erro pode ser evitado, pois a expressão teria a seguinte interpretação: existem três unidades ***a*** e mais quatro unidades ***b***. Como são unidades de medidas diferentes, torna-se impossível a operação com agregação de ambas.

3.8.3 A ordem dos números na adição

A atenção se volta para uma particularidade da adição. Embora apresente a comutatividade – a ordem das parcelas não altera a soma (a + b = b + a) – torna-se cômodo iniciar a operação pelo número maior, devido ao caráter passivo do primeiro fator.

3.8.3.1 – Para a execução da tarefa, as crianças deverão obter na reta o todo formado pelas seguintes partes: 8 e 3, 3 e 8, que têm o mesmo resultado. O professor deve alertá-las que a segunda variante (3 + 8) pode levar mais tempo. É sempre mais cômodo adicionar o número menor ao número maior: 8 + 3 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

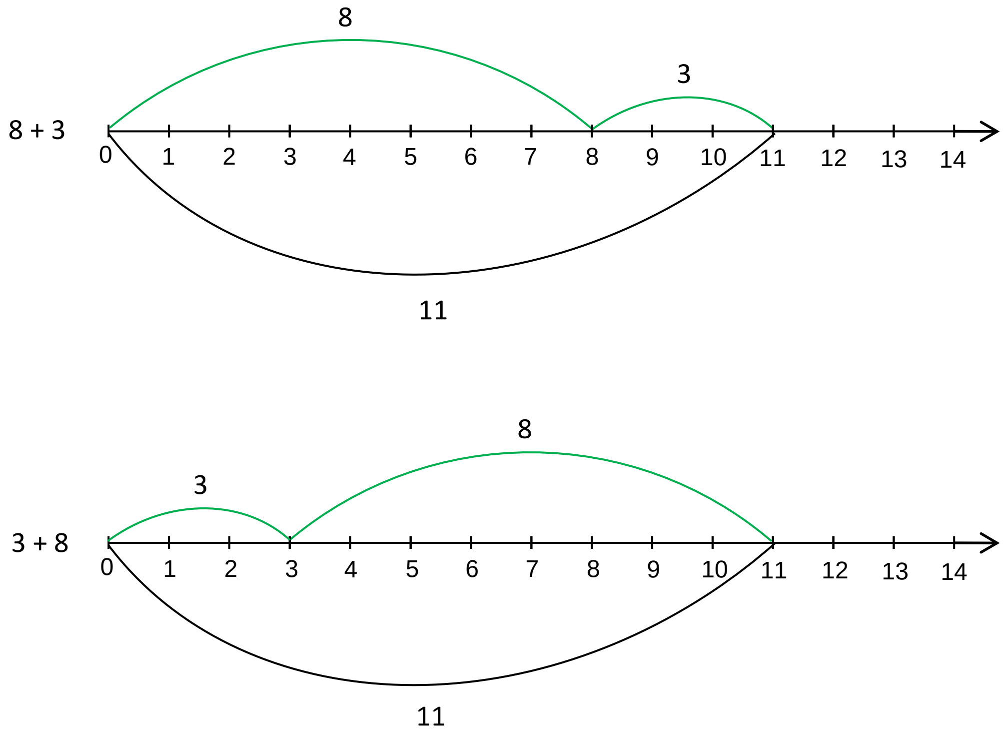


Ilustração 120

A conclusão de que é mais cômodo adicionar o número menor ao maior resulta da ideia de adicionar uma parte a outra. A adição é

> a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. A ideia *adicionar* ou *somar* está já incluída na própria noção de número natural – o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número? Pois bem, somar a um número *a*, dado, outro número *b*, é efetuar a partir de *a*, *b* passagens sucessivas pela operação elementar (CARAÇA, 1984, p.17).

Portanto, descaracteriza-se a orientação de, na adição, proceder à contagem, a partir do 1 (um), correspondente a cada uma das parcelas e, posteriormente, reiniciá-la centrada no conjunto de todas as unidade obtidas. Por exemplo, em 8 + 3, conta-se: inicialmente, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, posteriormente, 1, 2, 3 e, finalmente, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Com tal procedimento, não se teria problema iniciar por 3, depois pelo 8. Nesse caso, a ordem das parcelas seria indiferente. Dessa forma, a opção da referência inicial ser o maior valor das parcelas contribui para a descaracterização da adição com a ideia de apenas contagem e centrar-se no acréscimo. Nesse caso, ao adicionar três unidades a oito, esse último representa na operação “um papel passivo” e o número três “um papel ativo” (CARAÇA, 1984, p. 17).

3.8.4 As variantes dos significados das partes do todo

A tarefa a seguir tem como finalidade elucidar que o conhecimento sobre as interconexões da relação todo-partes possibilita a resolução dos problemas-textos, que visam determinar qualquer um dos componentes por meio da adição ou subtração.

3.8.4.1 - Há dois grupos de figuras depositadas num envelope: um com 6 rosas e outro com 5 margaridas. O professor questiona sobre a possibilidade de determinar a quantidade de figuras que está no envelope, com a utilização da reta numérica. Os estudantes realizam a operação 6 + 5 = 11 (Ilustração 121). O resultado para a outra variante (5 + 6) deve ser obtido sem a reta numérica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

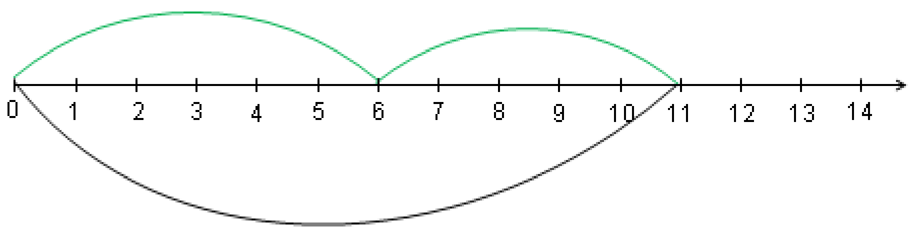


Ilustração 121

Em seguida, o professor retira do envelope 3 rosas e 2 margaridas e pergunta: Quantas flores ficaram no envelope? As crianças provavelmente não responderão, o que faz necessária a participação do professor para propor-lhes o uso da reta numérica. Ao final, registra-se a operação: 11 – 5 = 6 (Ilustração 122).

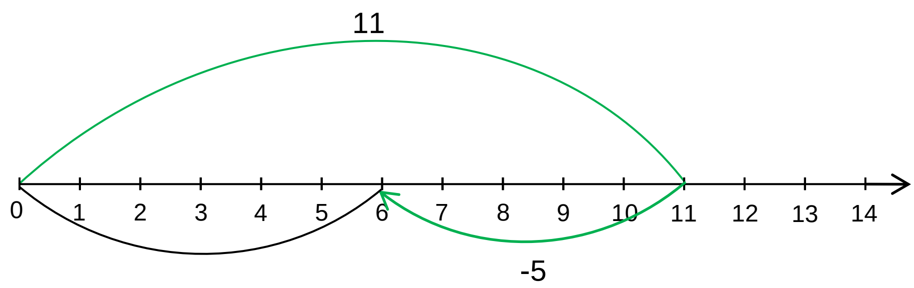


Ilustração 122

No entanto, podem ocorrer diversos procedimentos. Um deles é que, primeiramente, somarão 3 (rosas) + 2 (margaridas), o que leva à obtenção da quantidade de flores a retirar e, na sequência, farão a representação de 11 – 5. Outro modo é fazer, inicialmente: as duas subtrações 6 (rosas) – 3 (rosas) = 3 (rosas restantes no envelope) e 5 (margaridas) – 2 (margaridas) = 3 (margaridas restantes). Posteriormente, as quantidades de flores de cada espécie que permanecem: 3 + 3 = 6.

Depois de obter o resultado esperado, novamente todas as figuras são colocadas no envelope e retira-se 3 rosas e 3 margaridas. As crianças devem responder: quantas figuras ficaram dentro do envelope? Depois de ter consultado a reta numérica faz-se o registro: 11 – 6 = 5 (Ilustração 123).

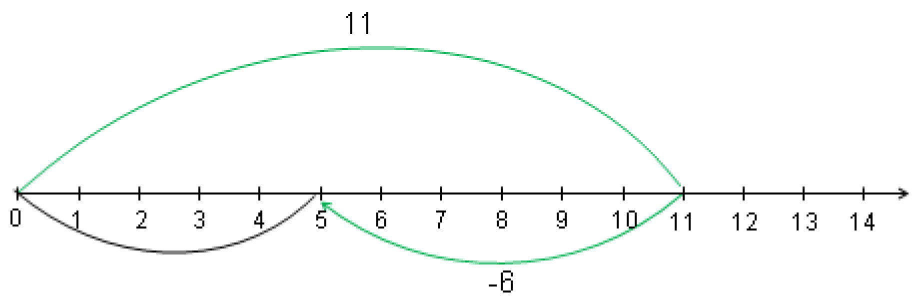


Ilustração 123

Desse modo, desenvolve-se o método geral de análise das condições do problema, da produção do esquema e do plano de resolução. Os problemas de adição e subtração aparecem de forma interconectada na relação todo-partes.

Esses procedimentos, ao serem generalizados, elevam substancialmente "o efeito do desenvolvimento do ensino e contribuem para a formação do pensamento teórico" (TALIZINA, 1987, p. 61).

Para a mesma autora, quando um estudante não consegue resolver um problema, geralmente o professor mostra como fazê-lo ou simplesmente aconselha-o a pensar melhor. Cumprir essa orientação nem sempre é possível porque a criança não sabe pensar sobre o problema, justamente por isso, não foi resolvido e "nem sempre a escola ajuda a pensar melhor" (OLIVEIRA, 1999, p. 94).

Como diz Davydov (1982), a escola, historicamente, não se preocupou em desenvolver o pensamento dos seus estudantes, no que diz respeito à resolução de problemas; ao contrário, voltou-se para a classificação dos problemas. Como consequência, é comum ouvirmos dos estudantes, ao estar diante de um problema matemático, a pergunta: é de mais ou de menos?

Isso representa que se faz necessária a discussão sobre o que leva o estudante a pensar: quais as operações compõem o processo de solução de qualquer problema e a ordem de sua realização (TALIZINA, 1987, p. 63).

3.8.5 Como encontrar o significado da parte

As duas tarefas, a seguir, são representativas daquelas que levam os estudantes ao aprofundamento do desenvolvimento do pensamento conceitual de número com teor operativo de adição e subtração. A centralidade está no procedimento de busca do significado da parte, a partir do todo.

3.8.5.1 – Nessa tarefa, sobre a mesa estão dois recipientes com líquido e, no quadro, o esquema com os arcos na reta em que fica explícito a existência de 4 medidas de líquido no primeiro recipiente e nos dois juntos tem 11 medidas. As crianças já sabem que o líquido do segundo recipiente pode ser medido. Porém, compete-lhes que determinem o volume sem tocar no líquido, mas com procedimentos com os números na reta numérica. O professor esclarece sobre a necessidade de saber o tipo de número: o todo ou a parte. Conclui-se que o número desconhecido é obrigatoriamente menor que o 11, em 4 unidades, portanto é uma das partes (Ilustração 124). Comprova-se o resultado obtido com ajuda da reta numérica por meio de medição do líquido. O professor lembra que a operação para determinar o número menor chama-se subtração: 11 – 4 = 7 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

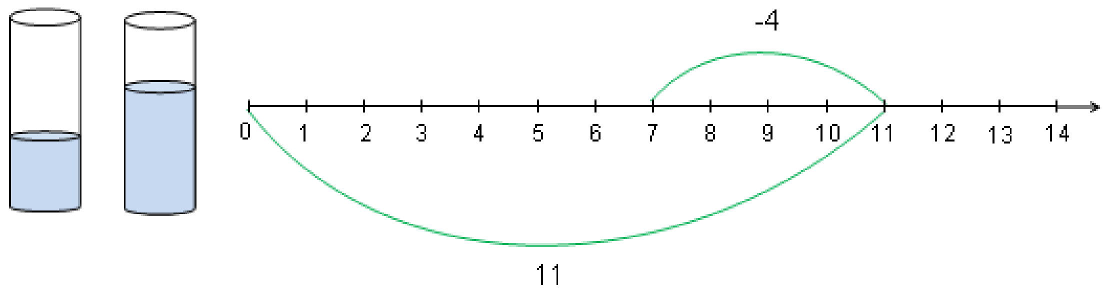


Ilustração 124

A subtração "é a operação pela qual se determina um número *c* que, somado com *b*, dá *a*" (CARAÇA, 1984, p. 21). Traduzindo a definição apresentada por Caraça para a operação da tarefa anterior, diríamos: é a operação pela qual se determina a *parte* que, somada com 4, dá 11. Tal parte é composta por 7 unidades. Esse resultado, assim como todo o movimento para atingi-lo, é expresso na reta numérica.

Banzatto (2003) investigou os procedimentos utilizados pelos estudantes da antiga sétima série, atual oitavo ano, na resolução de problemas com números negativos. Os estudantes que mais obtiveram êxito utilizaram a reta numérica e os que menos obtiveram êxito seguiram a ordem em que os dados apareciam no enunciado para escrever as operações de adição e subtração.

Os dados obtidos por Banzatto (2003) confirmam a importância de se considerar no ensino a reta numérica, o inteiro, as partes e como estes interferem na ordem dos elementos, durante a elaboração das operações de adição e subtração, conforme se faz nas proposições davydovianas.

Na última tarefa do presente capítulo insere-se um instrumento novo, a calculadora, conforme segue.

3.8.5.2 – A tarefa se desenvolve com base no que está exposto no quadro: duas figuras de dois maços, respectivamente com 8 e 5 maçãs.

Recomenda-se, aos estudantes, que determinem o todo, com a indicação que a medida é a unidade. Discute-se e executa-se, com ajuda da reta numérica, a solução: 8 + 5 = 13, conforme ilustração 125 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

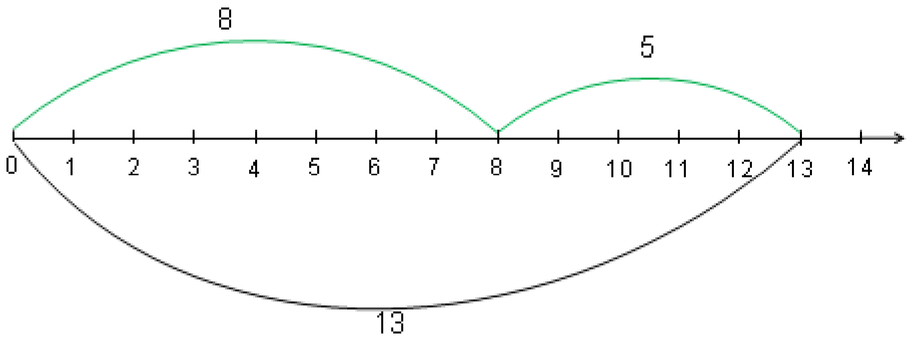


Ilustração 125

Na sequência, o professor expõe que é trabalhoso realizar a operação na reta numérica e apresenta a calculadora para as crianças. Orienta sobre o procedimento a adotar e elas percebem que o resultado é o mesmo obtido por meio de uso da reta. Isso deve ser explicitado, obrigatoriamente, para confirmar que a máquina opera desde que usada corretamente. É importante dizer que esse aparelho realiza tanto adição quanto subtração, assim como outras operações. Porém, não pode escolher a operação por conta própria, o que só é feito por um ser humano.

A "solução de problemas exige [...] o conhecimento de uma vasta gama de conceitos concretos e abstratos que refletem as relações quantitativas entre os objetos" (KALMYKOVA, 1991, p. 09). Tal exigência foi atendida nos sistemas de tarefas precedentes e acentuada neste capítulo. Também foram elaboradas duas sínteses fundamentais: para encontrar o todo é preciso somar as partes; para encontrar uma das partes é preciso subtrair a parte conhecida do todo.

3.9 OS PROBLEMAS-TEXTOS

No capítulo anterior, contemplou-se a inter-relação entre elementos das operações de adição e subtração com grandezas registradas em fórmulas expressas por letras, na reta numérica e esquemas gráfico-espaciais. A partir do caráter unívoco da estrutura do esquema, leva-se à conclusão que: se são conhecidos os valores de dois elementos, pode-se determinar o valor do terceiro elemento. Além disso, para determinar o valor do todo, é indispensável somar as partes conhecidas. Também, se desconhece uma das partes, para determiná-la subtrai-se do todo a parte conhecida. Atingir esse nível de conclusão abre a possibilidade da passagem gradativa do trabalho com esquemas para as fórmulas expressas com letras.

Tal trânsito será o foco do presente capítulo, que também apresenta as aplicações em diferentes situações da vida que requerem a determinação das propriedades numéricas das grandezas por meio de problemas-textos. A resolução de tais problemas ocorre a partir do procedimento geral, sintetizado no capítulo anterior. Portanto, explicitar-se-á a *dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral*, ou seja, a quarta ação de estudo davidoviana. O processo para chegar aos problemas-textos particulares é necessário porque

> uma assimilação consciente dos métodos de resolução dos problemas não só exige que se assimile o correspondente sistema de operações aritméticas, como também que se assimile a forma de raciocínio mediante a qual os alunos analisam o conteúdo de um problema e escolhem determinadas operações (KALMYKOVA, 1991, p. 24).

Vale antecipar que, desde o início, o professor insiste em esclarecer sobre a importância do esquema de caráter geral e abstrato para a compreensão do enunciado do problema. Ele permite determinar se o valor desconhecido é o todo ou a parte e, consequentemente, a operação a ser realizada. Nesse sentido, Eves (2007, p. 640) esclarece:

> Quando se entende apenas parcamente a teoria subjacente a uma operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e, talvez, ilógica. O executante desinformado das possíveis limitações da operação é levado a usá-la em exemplos nas quais ela não se aplica necessariamente (EVES, 2007, p. 640).

Por isso, sugere-se alertar as crianças que as palavras descritas no enunciado de um problema nem sempre coincidem com a operação a ser realizada.

3.9.1 A análise dos textos dos problemas com ajuda do esquema

A preocupação volta-se às condições para relação dos números não apenas com a medida dos objetos, mas também com os outros números. As crianças já sabem duas operações: a adição para determinar o todo e a subtração para determinar uma das partes.

3.9.1.1 – A tarefa se pauta no questionamento do professor sobre a operação a ser realizada para resolver o seguinte problema: *Mamãe trouxe 11 pepinos. 4 deles eram compridos, os restantes eram curtos. Quantos pepinos curtos mamãe trouxe?* Faz-se a leitura de forma rápida e em seguida as crianças apresentam várias sugestões de resolução. O professor propõe que elas desenhem um esquema (Ilustração 126), enquanto lê o enunciado, agora pausadamente (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

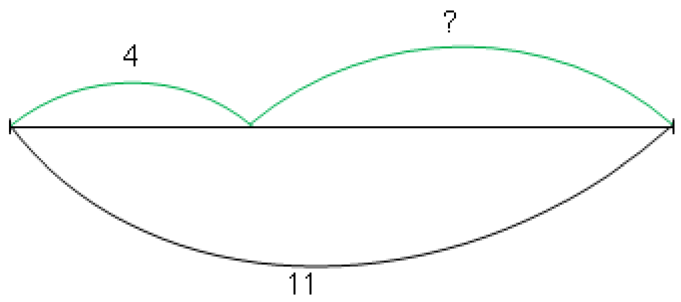


Ilustração 126

No âmbito das discussões elabora-se a síntese de que o valor desconhecido é uma parte do todo e, para obtê-lo, subtrai-se do todo a parte conhecida. Para determinar o resultado, recorre-se à calculadora ou aos processos mentais.

Nos livros didáticos brasileiros, a proposição para resolução de problemas no primeiro ano é representar, empiricamente, a situação dada. Assim, o problema anterior seria resolvido (Ilustração 127):

Ilustração 127

A ilustração de problemas-textos com desenhos ou situações do dia-a-dia levam, segundo Davydov (1982), à omissão dos aspectos matemáticos do problema, bem como suas interconexões. O objeto de análise, no processo de resolução, está dado diretamente, ou, nas palavras de Davydov, empiricamente. Mesmo que a criança não precisasse desenhar os pepinos, mas imaginasse a situação dada, isto é, resolvesse o problema a partir da imagem ideal, ainda assim seria um processo empírico em função do caráter meramente ilustrativo e externo. A questão que fica é: quando for uma quantidade maior?

No contexto pedagógico, Saviani (2003, p. 14) expressa que a "escola diz respeito ao conhecimento elaborado e não ao conhecimento espontâneo; ao saber sistematizado e não ao saber fragmentado; à cultura erudita e não à cultura popular". Por sinal, posicionamento similar ao de Davydov, quando diz que a cultura popular, o conhecimento espontâneo e o saber fragmentado promovem o desenvolvimento do pensamento empírico em detrimento do pensamento teórico-abstrato.

Para formar "conceitos matemáticos mais abstratos é necessário intensificar os exercícios de abstração e generalização. Um meio para chegar a esse fim consiste em exprimir o texto de um problema em termos matemáticos mais generalizados" (KALMYKOVA, 1991, p. 09).

No esquema davidoviano para resolução de problemas de adição e subtração, a análise é mediada pela objetivação da situação, idealizada ou desenhada, mas no plano teórico. Não há uma representação direta, esta é mediada pelo esquema, que reflete as relações essenciais e suficientes para que o problema seja resolvido. Trata-se de uma expressão concreta, em imagem, das relações essenciais, mas que não captadas de forma elementar e primariamente sensorial.

O esquema pressupõe a recorrência aos conhecimentos teóricos e da experiência acumulada durante os sistemas de tarefas anteriores. Também está ligado ao caráter visual, porém com um conteúdo específico, reflete as relações internas e não apenas as propriedades externamente observáveis dos dados do problema.

3.9.2 Compondo problemas

Na próxima tarefa, apresentar-se-ão três problemas a partir de uma narração composta por três valores. A reprodução do texto em um problema matemático "exige um pensamento muito ativo e uma análise muito precisa" (KALMYKOVA, 1991, p. 22). "Quanto mais ativa for a atividade intelectual, tanto mais fácil lhes será descobrir as conexões e tanto mais estáveis estas serão" (Idem, p. 23).

3.9.2.1 - O professor sugere que as crianças resolvam, com ajuda do esquema, o seguinte problema: *Yuri tinha 13 nozes. Quando ele comeu 8 nozes, restaram 5. Quantas nozes o Yuri tinha inicialmente?* Para produzir o esquema no caderno, se faz necessário que, no decorrer da leitura, as crianças percebam que a resposta para a pergunta do problema encontra-se no enunciado (Ilustração 128). Todos os números são dados, o que significa não se tratar de um problema e sim de uma história com os números (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

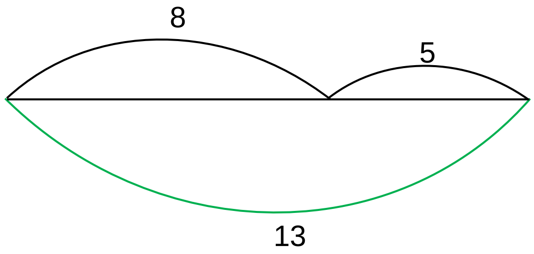


Ilustração 128

Nesse momento inicia-se a transformação do texto em três problemas matemáticos. O professor incita os estudantes a optarem por um valor considerado desconhecido, representando-o no esquema com o ponto de interrogação, conforme segue:

1) *Yuri tinha 13 nozes. Quando comeu 8 nozes, restaram quantas?*

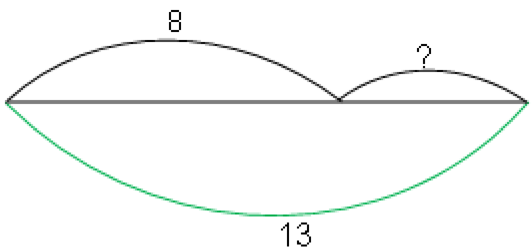


Ilustração 129

2) *Yuri comeu 8 nozes e restaram 5. Quantas nozes o Yuri tinha inicialmente*?

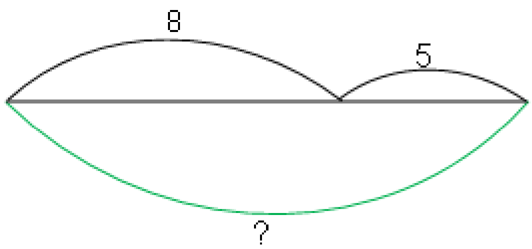


Ilustração 129

3) *Yuri tinha 13 nozes. Quando ele comeu 5 nozes, restaram quantas?*

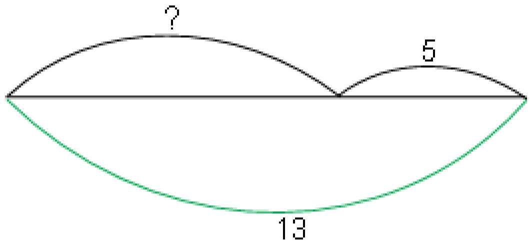


Ilustração 130

O professor direciona as crianças para: elaborar os novos enunciados, anotar os processos de resolução e formular as respostas. Assim, de uma situação geral, produzem-se três problemas-textos particulares, resolvidos a partir de um esquema inicialmente abstrato, mas que se concretiza no processo.

O mais importante na aproximação do abstrato ao concreto é a prática, a atividade prática. Por mais abstratos que se pareçam os conceitos, existe, segundo Ilienkov (2006), um critério que os fazem acessíveis ao homem e lhes dá caráter de realidade viva imediata: o critério do fazer prático.

O movimento do abstrato ao concreto, de acordo com Ilienkov (2006), ocorre para o mundo sensorial, porém reversível, permite a formação de uma melhor visão e compreensão do mundo, se comparado ao pensamento desenvolvido quando inicia o caminho somente do concreto sensorial ao abstrato. O concreto obtido como resultado de todo o processo da cognição volta-se à realidade viva imediata dos objetos investigados, como uma bússola que permite orientar-se, firmemente, pelo mundo sensorial.

3.9.2.2 – Nessa tarefa, apresenta-se o seguinte texto: *As crianças estavam jogando bola. A eles se juntaram mais* ***p*** *crianças, então ficaram* ***c*** *crianças jogando bola* (Ilustração 131). O professor lembra as crianças que os números podem ser marcados por letras e questiona: quantos problemas podem ser formulados com base na história anterior? Dadas as apreensões anteriores e o modo como o professor orienta, os estudantes concluem que há três possibilidades de formulação de problemas, porque são três números e cada um deles pode ser considerado o valor desconhecido, a ser determinado por meio do cálculo (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

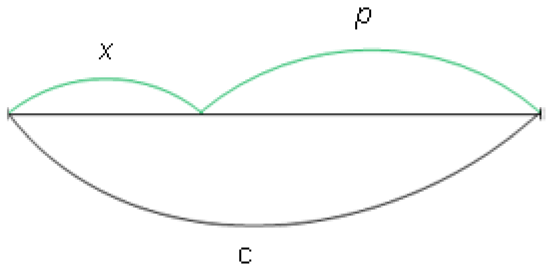


Ilustração 131

No capítulo anterior, durante o processo de formação do esquema de resolução de problemas, traduziu-se o caráter unívoco de sua estrutura, que permite a construção de vários tipos de equações. De posse de tal organização, o problema possibilita a formulação de tantas equações quantos forem os elementos incluídos na igualdade: $x + p = c$; $c – x = p$, $c – p = x$. Como decorrência, nesse processo, as crianças também aprendem a formular as equações, não as recebem prontas.

Embora tais proposições possam parecer complexas, Kalmykova (1991) nos alerta que “para resolver bem um problema, tem que existir sínteses ao nível de análises complexas”.

Giardinetto (1997, p. 18) também afirma:

> Na escola, o indivíduo tem a possibilidade de aprender a matemática enquanto conteúdo e processo de pensamento. Na medida em que não ultrapassa os raciocínios mais imediatos, ele não só não aprende esse processo de pensamento complexo, como não se apropria das formas sistematizadas do saber matemático determinando a impossibilidade de se objetivar num grau cada vez mais complexo.

E Davydov (1982) diz que se as crianças forem mantidas em nível das representações sobre os objetos reais circundantes e seus conjuntos, a formação de conceitos genuinamente matemáticos será debilitada.

É importante observar que, na proposta de Davydov, a solução de situações particulares acontece somente depois de desenvolvido o procedimento geral de solução da tarefa de estudo. Vale citar, como exemplo, os problemas-textos que incluem a relação entre todo-partes, registrada por meio de esquemas gráfico-espaciais ou de equações. Tal organização permitiu: a análise dos dados do problema, por meio das categorias todo e partes, e determinar a solução correta. No ensino experimental, desenvolvido por Davydov e seus colaboradores, ao final do primeiro ano os "alunos o resolviam rapidamente sem ter que revelar externamente o processo de análise dos dados" (DAVIDOV, 1988, p. 216).

No capítulo nove, conclui-se a primeira tarefa de estudo proposta por Davydov e, consequentemente, as seis ações de estudo, anunciadas na segunda parte da presente tese. Os números de 11 até 20 são introduzidos no décimo capítulo como continuidade de segmentos na reta numérica: mais uma unidade na reta, número 11; mais uma, 12, e assim sucessivamente. Embora esse processo vá só até o número 20, a ideia de acrescentar mais uma unidade, na sequência numérica, prepara o terreno para a compreensão, mais tarde, do infinito nos naturais (N: 1, 2, 3, 4, ... *n*, *n* + 1 ...).

Não analisaremos o décimo e último capítulo das proposições davydovianas para o ensino do primeiro ano, porque o movimento e os procedimentos são os mesmos apresentados nos capítulos anteriores. As diferentes bases numéricas, inclusive a base 10, são abordadas a partir do segundo ano.

No que diz respeito às ações de controle e avaliação, elas são desenvolvidas durante todo o processo até o momento analisado. A ação de controle tem por base a reflexão teórica, como forma de assegurar que o procedimento de solução com êxito da tarefa tenha todas as operações indispensáveis. Por exemplo, o professor pode propor ao estudante, que já domina o princípio de obtenção do número por meio da medição, repetir o processo de medida com a substituição do procedimento correto por um incorreto. Assim, a criança aprende a advertência da não correspondência entre o resultado anterior (correto) e o novo (incorreto) e estabelece as condições indispensáveis para a realização correta da medição.

A ação de avaliação, segundo Davidov (1988), consiste em verificar se o estudante está preparado para resolver uma nova tarefa que exige um novo procedimento de solução. Desse modo, ela orienta as demais ações, desenvolvidas por sistemas de tarefas particulares, para o resultado final da tarefa de estudo do primeiro ano do Ensino Fundamental, qual seja: obtenção e emprego do número como meio especial de comparação das grandezas.

Feitas essas considerações sobre o controle e avaliação, concluímos a análise a que nos propomos das proposições davydovianas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008) referente à introdução do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental. Na sequência, apresentaremos as considerações finais.

4 – SÍNTESE DAS INTER-RELAÇÕES DA TESE

No presente capítulo, apresentamos a reprodução – em nível de síntese – da análise realizada anteriormente sobre a interconexão entre os sistemas de significações numéricas nas proposições davydovianas para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar. Adotamos como forma de tradução desse processo um modelo (Ilustração 132) que reflete os nexos e relações entre as significações aritméticas (sequência numérica concreta, numerais...), algébricas (variável, expressão algébrica...) e geométricas (reta numérica, segmento de reta, ponto...) do conceito de número em Davydov, objeto do estudo.

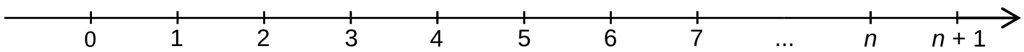


Ilustração 132

Da mesma forma, tomamos o modelo (ilustração 133) representativo dos propósitos dos livros didáticos brasileiros, como parâmetro indicador das diferenças internas em relação às proposições davydovianas, ofuscadas pelas similaridades externas.

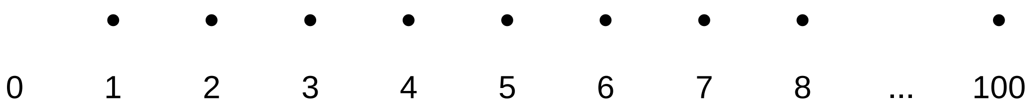


Ilustração 133

Isso significa dizer que há duas propostas educativas distintas, em relação à Matemática, cada qual com sua perspectiva de formação humana. No entanto, entendemos que a expressão da síntese do conceito de número elaborada a partir das proposições davydovianas é mais abstrata e, consequentemente, mais concreta e plena de conteúdo teórico. Ela reproduz o sistema de nexos e relações que constitui os números reais como um todo indissolúvel em conexão com os naturais, inteiros, racionais e irracionais, ou seja, é o concreto do conceito, em sua integridade.

Além disso, reflete a gênese, o elo universal de todos os números no campo dos reais, a relação complementar de multiplicidade e divisibilidade e sua expressão singular mediada pela variação da unidade. Em outras palavras, como declaração da tese em defesa: reflete, pois, a relação algébrica de multiplicidade e divisibilidade e sua expressão aritmética mediada pela significação geométrica.

O conceito de número, em Davydov, não é dado imediatamente com a ideia de numeral. Ele é apresentado, aos estudantes, num processo de múltiplas determinações, que se constituem como consequência do modo de organização das tarefas. No caso do livro analisado, elas compõem os primeiros cinco capítulos, que explicitam a relação geral entre grandezas, suas manifestações em relações particulares e suas expressões singulares. Além disso, é ponto de partida para a realização das tarefas dos demais capítulos.

Portanto, o conceito de número não existe sem a relação entre grandezas, sejam elas discretas ou contínuas: comprimento com comprimento, área como área, volume com volume, massa com massa, quantidade discreta com quantidade discreta, entre tantas outras.

Há um movimento no procedimento da relação entre grandezas que ascende do único ao múltiplo, do indivisível ao divisível, do geral ao particular, com a introdução da unidade de medida. Inicialmente, se estabelece as relações gerais de *maior*, *menor* ou *igual; d*epois, mediada por uma unidade de medida particular e no contraste do discreto/contínuo, gera-se a formulação do modelo universal do conceito de número por meio de letras. E, consequentemente, a introdução da propriedade numérica da grandeza, como resultado da medição.

O processo de aplicar a unidade de medida sobre a grandeza a ser medida é de caráter geométrico. A quantidade de vezes que a unidade cabe na grandeza traduz o teor aritmético, que surge a partir da relação algébrica entre grandezas. A propriedade numérica da grandeza varia em dependência da variação da unidade de medida. O conceito de unidade é referência para todos os números singulares e suas operações no campo algébrico, aritmético e geométrico. Nessa confluência conceitual está o argumento para confirmarmos a tese de que a proposta de Davydov, em vez de minimizar o divórcio entre as significações aritméticas e algébricas, como o próprio autor anuncia em seus escritos, não permite tal distanciamento, além de incluir as significações geométricas.

O resultado da medida representa a propriedade numérica da grandeza e não a grandeza em si. De posse apenas do resultado da medição não é possível saber o tipo de grandeza que foi medida. Assim, o número é apresentado como uma abstração teórica, de caráter geral, em seu estágio atual, passível de ser generalizado para estabelecer relações entre qualquer outro no campo dos reais e aplicado nas diversas situações particulares e singulares em que se façam necessárias.

O lugar geométrico dos infinitos números reais é a reta, nela há um ponto correspondente para cada número real. Como objetivação do conceito de número, a reta expressa a concatenação dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Ela possibilita a introdução da inter-relação entre as operações de adição e subtração na forma de acréscimo e decréscimo de unidades. Por meio de deslocamentos para a direita realiza-se a operação da adição e para a esquerda a subtração.

O número zero não surge como concepção de nada, mas a partir de subtrações sucessivas na reta, com perspectivas para constituição dos números negativos. Gradualmente as operações realizadas a partir da visualização na reta são reproduzidas no plano mental.

Por outro lado, as orientações apresentadas nos livros didáticos brasileiros para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar estão muito próximas ao que Davidov (1987) denominou de ensino tradicional. No modelo (ilustração 133, p. 225), as significações algébricas e geométricas do conceito de número não são contempladas. O número se caracteriza apenas pela quantidade de objetos discretos, dados diretamente no limite dos números naturais em sua significação aritmética.

A ênfase apenas na representação visual das quantidades de objetos soltos, relacionados ao dia-a-dia das crianças ou não, reduz o conteúdo do conceito de número as suas significações empíricas, próprias do estágio inicial do desenvolvimento do conceito de número pela humanidade, em detrimento do conteúdo teórico, em seu estágio atual de elaboração.

Nas proposições davydovianas, conforme demonstramos no decorrer desta tese, as múltiplas relações entre significações algébricas, aritméticas e geométricas do conceito de número são interconectadas no seguinte movimento: geral ↔ particular ↔ universal ↔ particular ↔ singular.

Dado o exposto, cumpre-nos manifestar que a produção deste estudo proporcionou-nos momentos de reflexão, alicerçados no interesse de entender a proposta de Davydov com o fascínio de algo novo para prover os estudantes, em especial das escolas públicas, de um ensino de Matemática que os desenvolvam de acordo com todas as suas possibilidades. Embora não expressamos na escrita do texto, às vezes colocamo-nos em posição de questioná-la e até rejeitá-la. No entanto, essa pretensa indisposição foi impossível de mantê-la acesa. Afinal, o estudo de cada tarefa traduzia-nos a articulação entre elas, coerentemente, com a teoria Histórico-Cultural e sua matriz, o materialismo histórico e dialético. Além disso, expressava todo esse fundamento no movimento conceitual de número com acenos uníssonos para os demais conceitos da Matemática.

Agrupamo-nos àqueles que entendem a referida proposta como promissora e se diferencia daquelas que o próprio Davydov denomina de tradicionais. Trata-se, pois de algo prospectivo e novo para uma realidade brasileira. Adotá-la e implementá-la, na certa, expor-se-á a críticas e rejeições. Porém, de modo algum apagará seu mérito de ineditiçidade e de organicidade de forma detalhada sem perder de vista os princípios e conceitos da base teórica, dentre os quais, cita-se: ascensão do abstrato ao concreto, unidade dos contrários, a relação geral ↔ particular ↔ universal ↔ particular ↔ singular.

Enfim, no caminho percorrido durante a realização da presente tese surgiram muitas questões, dentre elas permearão nossos próximos estudos as seguintes: Qual a expressão do movimento lógico-histórico nas proposições davydovianas para o ensino conceito teórico de número em seu estágio atual de desenvolvimento? Quais os motivos de estudo (eficazes e compreensíveis) gerados a partir das proposições brasileiras e davidovianas de ensino? Qual a interpretação dos princípios didáticos da Teoria Histórico-Cultural subjacente às proposições brasileiras para o ensino do conceito de número elaboradas a partir desse referencial?

5 - REFERÊNCIAS

ABRANTES, A. A. A educação escolar e a promoção do desenvolvimento do pensamento: a mediação da literatura infantil. In: 16° encontro nacional ABRAPSO, 2011, Recife. **Anais do 16° encontro nacional ABRAPSO**, 2011. Disponível em: http://www.encontro2011.abrapso.org.br/trabalho/view?ID_TRABALHO=1855 Acesso em: 26 dez. 2011.

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la Matemática. In: **La matemática:** su contenido, métodos y significado. 1 ed. 2ª reimpresión. Madrid: Alianza Universidad, 1976. p. 17-91.

ANGLE, D. **Should children learn math by starting with counting? MMA**. 2009. Disponível em: <http://www.maa.org/devlin/devlin_01_09.html>. Acesso em: 15 Set. 2010.

AMORIM, M. P. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico-cultural. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2007.

ARAÚJO, E. S. **Da formação e do formar-se**: a atividade de aprendizagem docente em uma escola pública. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2003.

ARAÚJO, V. R. N.; CARDOSO, E. F. M. Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática. **UNIrevista**. São Leopoldo, Vol.1, n°2. abr. 2006. Disponível em: <http://www.unirevista.unisinos.br>. Acesso em: 31 ago. de 2010.

BANZATO, G. B. **Educação Matemática e investigação-Ação:** Aprendendo problemas aditivas com números negativos junto aos meus alunos. Dissertação (Mestrado da Educação). Faculdade de Educação, Universidade Metodista de Piracicaba, 2003.

BARALDI, I. M. **Retraços da educação Matemática na região de Bauru (SP):** uma história em construção. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BERNARDES, M. E. M. **Mediações Simbólicas na atividade pedagógica**: contribuições do enfoque histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2006.

BERNARDES, M. E. M.; MOURA, M. O. de. Mediações simbólicas na atividade pedagógica. **Educação e Pesquisa** (USP. Impresso), v. 35, p. 463-478, 2009.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984.

CEDRO, W. L.; MORAES, S. P. G. ; ROSA, J. E. A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em matemática. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru. v. 16, n. 2, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132010000200011&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 19 dez. 2011.

CEDRO, W. L. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática: uma perspectiva histórico-cultural**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2008.

CUNHA, M. R. K. **Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino**. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, 2008.

DAMAZIO, A.; AMORIM, M. P. O desenvolvimento do pensamento geométrico de escolares do ensino fundamental. In: **IV Fórum de Investigação Qualitativa**. Juiz de Fora: UFJF, 2005.

DAMAZIO, A. Mathematical Cognition in the Class-room: A Cultural-historical Approach. In: Mariane Hedegard. (Org.). **A Cultural-Historical Approach Learning in Classrooms.** 1ª ed. Aarhus: Aarhus University Press, 2001, p. 191-210.

________. **O desenvolvimento de conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão.** Tese (Doutorado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; MARKOVA. A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, p. 173-174, 1987a.

________. La concepción de la actividad de estudio. In: SUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú, Progreso. p. 300-316, 1987b.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza:** una mirada al futuro. Progreso, Moscú, p. 118-144, 1991.

DAVYDOV, V.V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía**. Santiago: N. 403, p. 197 - 199, jun. 1998.

________. Learning activity in the Younger school-age period. **Soviet uducation "problems of developmental teaching".** New York: M. E. Sharpe. p. 3-47, set - 1988a.

________. Problems of the child’s mental development. **Soviet Education “Problems of developmental teaching XXX (8),**New York: M. E. Sharpe. p. 44-97, Aug. 1988b.

________. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3ª. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

________. What is real learning activity? In: HEDEGAARD, M.; LOMPSHER**,** J. (Eds.). **Learning activity and development.**Aarhus: Aarhus University Press, 1999.

DIAS, M. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico - histórica.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2007.

EDITORA VITA-PRESS. **Система развивающего обучения Д.Б.Эльконина - В.В. Давыдова.** Rússia, 2010. Disponível em: <http://www.vita-press.ru>**.** Acesso em: Ago. 2010.

ELKONIN, D. Sobre el problema de la periodización del desarrollo psíquico en la infancia. In: SHUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progresso, p. 104-126, 1987.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática.** Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Unicamp, 2007.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Zetetiké,. Campinas, Unicamp, Ano 3 – n°4, p. 1-37, 1995.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

GALPERIN, P. Sobre la investigación del desarrollo intelectual Del niño. In. SHUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Editorial Progreso, Moscú, p. 125-143, 1987.

GALPERIN, P.; TALYZINA, N. F. La formación de conceptos geométricos elementales y su dependencia sobre la participación dirigida de los alumnos. In: **Psicología Soviética Contemporánea**. Instituto Del Libro, p. 273-302, 1967.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú, Progreso, p. 300-316, 1987.

GIARDINETTO, J. R. B.. **O fenômeno da supervalorização do saber cotidiano em algumas pesquisas da educação matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade de São Carlos, São Carlos, 1997.

GIL, K. H.; RUTH, P. Repensando as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra. In: BORGES, R. M. R.; ROCHA FILHO, J. B.; BASSO, N. R. S. [org.]. **Avaliação e interatividade na educação básica em ciências e matemática**. Porto Alegre: Edipucrs; CAPES, p. 115-127, 2008.

GRAMSCI, A. **Concepção dialética da história.** Rio de Janeiro, Civilização Brasileira, 1978.

GRATTAM-GUINES, I. Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos. **Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, v. 7, n. 11, p. 09-28, jun. 1999.

ILIENKOV, . la ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: Alfredo Tecla Jiménez, **Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 151 - 200, 2006.

JARDINETTI, J. R. B. O abstrato e o concreto no ensino da matemática**:** algumas reflexões. **Bolema**, Rio Claro, 1996. Disponível em <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/Bolema%2012.pdf>. Acesso em 10 jun. 2011.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LÚRIA; LEONTIEV, VYGOTSKI, et al. **Pedagogia e Psicologia II.** Lisboa: Estampa, p. 9 - 26,1991.

KHIDIR, K. S. **Aprendizagem da álgebra**: uma análise baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davídov/ Kaled Sulaiman Khidir. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento***.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. **Dialética do concreto**. Trad. Célia Neves e Alderico Toríbio. Rio de janeiro: Paz e Terra, 1976.

KRUTETSKY, V. A. Algumas características do desenvolvimento do pensamento nos estudantes das escolas superiores. In: LÚRIA; LEONTIEV, VYGOTSKI, et al. **Pedagogia e Psicologia II.** Lisboa: Estampa, 1991.

LANDÓ, S. L. Z. **A atividade lúdica em práticas de ensino com crianças da educação infantil em creche**. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade católica de Goiás, 2009.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

________. Os princípios psicológicos da brincadeira pré escolar. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. (orgs.). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1991.

________. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L.S., LURIA, A.R. & LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 9ª ed. São Paulo: Ícone, 2001.

LIAO, T. Os símbolos matemáticos enquanto signos e seus diferentes significados**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.** UFSC**.** Florianópolis: v. 3.5, p.55-61, 2008.

LIBANEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro, n.27, p. 5-24. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-24782004000300002&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em: ago. 2010.

LIMA, E. L. **Análise real**. 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA. 1997.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOPES, A. R. L. V. **A aprendizagem docente no estágio compartilhado**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. Universidade de São Paulo, 2004.

LUKÁCS, G. **Introdução a uma estética Marxista**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MARQUIS, J. Erros comuns em álgebra. In: COXFORD, Arthur e SHULTE, Albert P. **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

MARTINELI, T. A. P.; LOPES, S. M. A.; DAVIDOV, V. V. A concepção materialista histórica e dialética como método de análise da psicologia contemporânea. **Revista Cadernos da Pedagogia.** Ano 03 v. 01, n. 05 Jan – Jul. 2009. Disponível em: <http://cadernosdapedagogia.ufscar.br/index.php/cp/article/viewFile/121/72>. Acesso em: 20 dez. 2011.

MARX, K. **Contribuição à critica da economia política.** 3ª ed. São Paulo: Martins, Fontes, 2003.

MARX, K; DEVILLE, G. **O capital.** Bauru: Edipro, 1998.

MARX, K. **O capital**: crítica da economia política. 2ª ed. São Paulo, Nova Cultural, 1985.

________. Posfácio à segunda edição. **O capital**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

MIGUEL, A. et al. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**. ANPED. Rio de Janeiro, n. 27, p. 70-93 Set. / Dez. 2004. Disponível em: **<**http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a05.pdf>. Acesso em: ago. 2008.

MIGUEL A.; FIORENTINI D.; MIORIM M. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-posições**: Revista quadrimestral da faculdade de Educação da UNICAMP, São Paulo. v. 3, n.1, p. 39-54, mar. 1992.

MIRANDA, M. J. A teoria do ensino desenvolvimental e o contexto da educação contemporânea. **Revista Didática Sistêmica**. Rio Grande, v.11, p. 2-17, 2010. Disponível em: <http://seer.furg.br/ojs/index.php/redsis/article/view/1634/772>. Acesso em: 28 dez. 2010.

MORAES, S. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino: Uma teoria Histórico-Cultural para a formação docente.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2007.

MORETTI, V. D. **O conceito de função**: uma investigação sobre os conhecimentos desenvolvidos pelo sujeito em momento anterior ao ensino formal. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo. Universidade de São Paulo, 1998.

MOURA, M. O. **A construção do signo numérico em situação de ensino**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1992.

MOURA, M. O.; et al. Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Diálogo Educacional.** v. 10, n. 29, p. 205-229 jan./abr. 2010.

MOURA, M. O.; LOPES, A. R. L. V; CEDRO, W. L. A formação inicial de professores que ensinam matemática**:** a experiência do Clube de Matemática. **Revista da Educação**, v. XVI, n. 2, p. 123 – 137, 2008.

NASCIMENTO, C. P. **A organização do ensino e a formação do pensamento estético-artístico na teoria histórico-cultural**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo. Universidade de São Paulo, 2010.

OBÚJOVA, L. Dos vias para formar un sistema simples de conceptos científicos. In: SHUARE, M. **La psicología evolutiva y pedagogía en la URSS: antología.** Moscú: Editorial Progreso, p. 194 - 205. 1987.

OLIVEIRA, N. M. de. A concepção de aprendizagem nos ciclos de formação – algumas aproximações e algumas lacunas em relação às idéias de Vygotsky e Davídov. **Anais do I Encontro Estadual de Didática e Prática de Ensino**, 2003. Disponível em: http://www.ceped.ueg.br/anais/Iedipe/Gt9/11-a_concepcao.htm Acesso em: 22 dez. 2011.

NUÑES, B. I. **Vygotsky, Leontiev e Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília, Líber Livro, 2009.

OLIVEIRA, M. K. Organização conceitual e escolarização. In: OLIVEIRA, M. (org.). **Investigações cognitivas:** conceitos, linguagem e desenvolvimento. Porto Alegre: artes médicas sul. 1999.

PNLD. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2010**: alfabetização em matemática e matemática. Brasília, 2009. Disponível em: <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guia_pnld_2010/matematica.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2011.

POLITZER, G. **Princípios fundamentais da filosofia.** Trad. João Cunha Andrade. São Paulo: Fulgor, 1963.

RIBEIRO, F. D. **A aprendizagem da docência de ensino e no estágio:** contribuições da teoria da atividade. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, faculdade de Educação. 2011.

RÌBNIKOV, R. **História de las matemáticas.** Moscú: Mir, 1987.

ROLINDO, J. M. R. Contribuições da teoria Histórico-Cultural e da teoria da atividade para educação atual. **Revista de Educação**, v.10, n. 10, p. 48-57, 2007.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CALDEIRA, A. D. O conceito de número na proposta curricular do Estado de Santa Catarina: uma análise a luz da abordagem histórico –cultural. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática,** UFSC. Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 5 - 15, fev. 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/13024/12130>. Acesso em: 21 dez. 2011.

ROSA, J. E. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural.** Dissertação (Mestrado em Educação: linha de pesquisa Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

________. O estado da arte do ensino da matemática: criando zonas de possibilidades. In: **V Simpósio Sul Catarinense Infanto Juvenil de Ensino de Ciências e I Seminário de Integração dos Cursos de Ciências Biológicas e Matemática da** UNESC com as Redes de Ensino. Criciúma, 2001.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. 1958.

RUBINSTEIN, S. L. **El ser y la consciencia.** Montevideo: ediciones Pueblos Unidos, 1960.

________. **Princípios de psicologia geral**. Lisboa: Estampa Ltda, 1976.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizagem e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, Catherine et al (org.). **Após Vygostsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes médicas. p. 129-137,1996.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular: uma contribuição para a escola pública do pré-escolar,** 1º grau, 2º grau e educação de adultos. Florianópolis: IOESC, 1991.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia. **Proposta curricular de Santa Catarina**: **estudos temáticos**. Florianópolis: IOESC, 2005.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta curricular de Santa Catarina**. Florianópolis: GOGEM, 1998.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica**. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SCHUBRING, G. L'Enseignement Mathématique and the first International commission (IMUK): the emergence of international communication and cooperation. In: **ONE HUNDRED YEARS OF L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE. MOMENTS OF MATHEMATICS EDUCATION IN THE TWENTIETH CENTUR.** Geneva: L'Enseignement Mathématique, p. 47 - 66, 2003. Disponível em: <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ST/Papers/HOLTONEM.pdf>. Acesso em: 26 set. 2008.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. **The development of algebra in Davydov's elementary curriculum, the mathematics educator.** 2004. Disponível em <math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Schmittau.pdf>. Acesso em: 18 out. 2010.

SCHMITTAU, J. The development of algebraic thinking: a Vygotskian perspective. Zentralblatt Fuer Didaktik Der Mathematik **International Review of Mathematics Education**, v. 37 (1), p. 16 - 22. 2005. Disponível em <http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html>. Acesso em: 15 nov. 2010.

SCHUBRING, G. **Pesquisar sobre a história do ensino da Matemática: metodologia, abordagens e perspectivas.** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005. Disponível em: < http://www.spce.org.pt/sem/2.pdf>. Acesso em: 22 set. 2008.

SERRÃO, M. I. B. **Estudantes de Pedagogia e a "Atividade de aprendizagem" do ensino em formação.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2004.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino: contribuição da teoria da atividade**. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2003.

SLOVIN, H.; VENENCIANO, L. **Succes in algebra**. Paper presented at the PME 32 and PME-NA XXX, July, in Morelia, Mexico. 2008. Disponível em: <http://www.pme32-na30.org.mx/about.htm>. Acesso em: 23 nov. 2011.

SOARES, F. C. C. **O Ensino Desenvolvimental e a Aprendizagem de Matemática na Primeira Fase do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Católica de Goiás, 2007.

TALIZINA, N. F. **La formación de las habilidades del pensamiento matemático**. Facultad de Psicología de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. S.L.P., México, 2001.

________. **La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares.** Moscu: Editorial Progresso, 1987.

________. **Psicologia de la enseñanza**. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

TAVARES, S. **A profissionalidade ampliada na atividade educativa.** Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2002.

TREVISOL, M. T. C. A (In)disciplina na escola: cartografando o fenômeno. In: I Congresso de Pesquisas em Psicologia e Educação Moral: crise de valores ou valores em crise? **Anais do I Congresso de Pesquisas em Psicologia e Educação Moral**. Campinas: Unicamp/FE, p. 01-13, 2009.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciência sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola media e utilizações das variáveis. **In: As Idéias da Álgebra.** Coxford, A. F.; Shulte, A. P. São Paulo: Atual, 1994.

VEIGA, P. M. B. V. A. Atividade de aprendizagem para as crianças em idade escolar – contribuições da teoria histórico-cultural da atividade. **Anais do I Encontro Estadual de Didática e Prática de Ensino.** 2003. Disponível em: http://www.ceped.ueg.br/anais/index.htm Acesso em: 19 dez. 2011.

VIGOTSKI, L. S. A Brincadeira e seu papel no desenvolvimento da Criança. **Resvista Virtual de Gestão de Iniciativas Sociais**. (Tradução: Zóia Prestes).Laboratório de tecnologia e Desenvolvimento Social (Programa de Engenharia de produção da COPPE/UFRJ). p.23-36, jun. 2008.

________. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: LURIA, A. R; et al . **Psicologia e Pedagogia: bases psicológicas**

da aprendizagem e do desenvolvimento. São Paulo: Editora Moraes ltda, 1991.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II**: Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas IV:** Incluye Paidologia del Adolescente, Problemas de la Psicología Infantil. Madrid: Visor Distribuciones, 1996.

ZAPORÓZHETS, A. Importancia de los periodos iniciales de la vida en la formación de la personalidad infantil. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú, Progreso, p. 228-249, 1987.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental** (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Мпрос - Аргус, 1997. [Davidov, V.V. **Matemática, 1ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série. Moscou: MIROS, Argus, 1997.