

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CLAUDIA VANESSA CAVICHIOLO

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM OS FORMADORES

CURITIBA
2011

CLAUDIA VANESSA CAVICHIOLO

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR
DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM OS FORMADORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná, linha de Pesquisa Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Tereza Carneiro
Soares

CURITIBA
2011

Catálogo na publicação
Sirlei do Rocio Gdulla – CRB 9ª/985
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

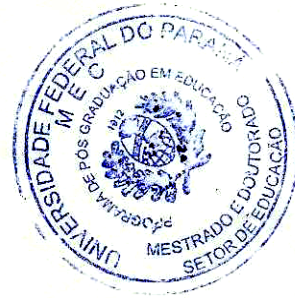
Cavichiolo, Claudia Vanessa
Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor
de matemática: o que dizem os formadores / Claudia Vanessa Cavichiolo. – Curitiba, 2011.
163f.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Tereza Carneiro Soares
Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação,
Universidade Federal do Paraná.

1. Matemática – Estudo e Ensino – Currículo – Universidade Federal do Paraná. 2. Geometria não-euclidiana. 3. Professores de matemática – Formação. I. Título.

CDD

378.199



PARECER

Defesa de Dissertação de **CLAUDIA VANESSA CAVICHIOLO** para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados, DR^a. MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES, DR^a ANA MARIA MARTENSEN ROLAND KALEFF (on-line), DR. JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS e DR. JOSÉ CARLOS CIFUENTES VASQUEZ, arguíram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Dissertação: **“GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANA NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM OS FORMADORES”**.

Procedida a arguição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIÇÃO
DR ^a . MARIA TEREZA CARNEIRO SOARES		APROVADA
DR ^a ANA MARIA MARTENSEN ROLAND KALEFF		APROVADA
DR JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS		APROVADA
DR. JOSÉ CARLOS CIFUENTES VASQUEZ		APROVADA

Curitiba, 27 de setembro de 2011.

Prof. Dr. Paulo Vinicius Baptista da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

Prof. Dr. Paulo Vinicius Baptista da Silva
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação
Matr.: 135428

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Antônio e Paulina Cavichiolo (*in memorian*), e ao meu filho Felipe Cavichiolo.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares, pelo acompanhamento, orientação e amizade.

Aos Professores Dr. José Carlos Pinto Leivas, Dra. Ana Maria M. R. Kaleff e Dr. José Carlos Cifuentes Vasquez, pelas contribuições e sugestões no trabalho.

Aos professores Dr. Carlos Roberto Vianna, Dra. Etiénne Guérios e Dra. Maria Lúcia Moro, pelos ensinamentos que proporcionaram durante o curso;

Aos cinco professores que participaram desta pesquisa;

Ao Fábio Luciano Iachtechen, Marcos Zanlorenzi, Fátima Navarro, Luci Gohl, Lélia Longen e Sandra Sausen, pelas leituras, correções, incentivo e amizade.

Ao Felipe Cavichiolo, pelo amor, companheirismo, compreensão e por suas preciosas “dicas”.

RESUMO

A inclusão de conteúdos de Geometrias não Euclidianas no currículo da Matemática escolar tem sido tema de discussões entre professores de Matemática dos vários níveis, resultando em orientações curriculares que pressupõem um professor de Matemática preparado para esse ensino. Preocupada em entender como esta inclusão está sendo considerada pelos responsáveis pela formação inicial de professores para a escola básica, esta dissertação buscou responder a seguinte indagação: o que dizem professores de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre as razões pelas quais conteúdos de Geometrias não Euclidianas são propostos na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica? O campo de investigação foi o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR), onde por meio de entrevistas semi estruturadas com cinco professores desse curso, pode-se identificar e descrever as razões pelas quais conteúdos de Geometrias não Euclidianas são incluídos na formação inicial do professor de Matemática. Os resultados foram agrupados em duas categorias, uma relacionada aos fundamentos e aspectos histórico-epistemológicos desse conhecimento matemático e outra relacionada aos aspectos didático-conceituais na difusão desse conhecimento.

Palavras-chave: Formação inicial do professor de Matemática. Licenciatura em Matemática. Geometrias não Euclidianas.

ABSTRACT

The inclusion of non-Euclidean Geometries in the curriculum of Mathematics in school, has been the theme of discussion among Mathematics teachers of various levels, resulting in curricular guidelines, which assume a Mathematics teacher to be prepared for this teaching. Concerned about understanding how this inclusion has been considered by those responsible for the initial formation of teachers for the basic education, this dissertation sought to answer the following question: what do the teachers from the Mathematics Degree Course say about the reasons the non-Euclidean Geometries are proposed in the formation of Mathematics teachers, for the basic education? The field of investigation was the Degree Course in Mathematics from the Federal University of Paraná (UFPR), where through semi-structured interviews with five teachers from the course, it is possible to identify and to describe the reasons why content from the non-Euclidean Geometries is included in the initial training of the Mathematics teacher. The results were grouped into two categories, one related to the historical and epistemological foundations of this mathematical knowledge and the other one related to the didactic-concepts in the diffusion of this knowledge.

Keywords: Initial Training of the Mathematics Teacher. Degree in Mathematics. Non-Euclidean Geometry.

LISTAS DE QUADROS

QUADRO 1	- RELAÇÃO DE DISCIPLINAS QUE ABORDAM GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS.....	16
QUADRO 2	- PESQUISAS SOBRE O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS.....	20
QUADRO 3	- A RELEVÂNCIA DO ESTUDO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.....	35
QUADRO 4	- RAZÕES PARA INCLUIR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA.....	124
QUADRO 5	- RELAÇÃO DAS INSTITUIÇÕES E DISCIPLINAS.....	136
QUADRO 6	- DISCUSSÕES SOBRE A PROPOSTA DA DISCIPLINA GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO-EUCLIDIANAS.....	138

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CTESOP	- Centro Técnico-Educacional Superior do Oeste Paranaense
DEB	- Departamento de Educação Básica
FACLENOR	- Faculdade de Ciências, Letras e Educação do Noroeste do Paraná
FAESI	- Faculdade de Ensino Superior de São Miguel do Iguaçu
FAF	- Faculdade da Fronteira
FAFICOP	- Faculdade Estadual de Filosofia Ciências e Letras de Cornélio Procópio
FAFIMAN	- Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Mandaguari
FAFIPA	- Faculdade Estadual de Educação Ciências e Letras de Paranavaí
FAFIPAR	- Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Paranaguá
FAFIUV	- Faculdade Estadual de Filosofia Ciências Letras União da Vitória
FAG	- Faculdade Guairacá
FAP	- Faculdade de Apucarana
FECILCAM	- Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão
PUCPR	- Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUCSP	- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SBEM	- Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBM	- Sociedade Brasileira de Matemática
SEED-PR	- Secretaria de Estado da Educação do Paraná
UNICENTRO	- Universidade Estadual do Centro-Oeste
UNIOESTE	- Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UEL	- Universidade Estadual de Londrina
UEPG	- Universidade Estadual de Ponta Grossa
UFF	- Universidade Federal Fluminense
UFPR	- Universidade Federal do Paraná

- UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
- UNIANDRADE - Centro Universitário Campos de Andrade
- UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas
- UNIPAR - Universidade Paranaense
- UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- UTP - Universidade Tuiuti do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS	19
2 A DIMENSÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	38
3 A PESQUISA E OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	54
3.1 O CAMPO DE INVESTIGAÇÃO.....	54
3.2 CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS SUJEITOS.....	54
3.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS	56
3.4 PROCEDIMENTOS DAS ENTREVISTAS.....	60
3.5 TRATAMENTO DOS DADOS DA PESQUISA.....	61
4 AS ENTREVISTAS E SEUS RESULTADOS	63
4.1 DESCRIÇÕES DAS ENTREVISTAS.....	64
4.1.1 Entrevista com o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas.....	65
4.1.2 Entrevista com o professor da disciplina Matemática no Ensino Fundamental.....	75
4.1.3 Entrevista com a professora da disciplina Matemática no Ensino Médio	85
4.1.4 Entrevista com o professor da disciplina Geometria no Ensino.....	90
4.1.5 Entrevista com a professora da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática	97
4.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	103
4.2.1 Dimensão histórico-epistemológica.....	106
4.2.2 Dimensão didático-conceitual.....	112
4.3 BREVE SÍNTESE DAS RAZÕES IDENTIFICADAS.....	118
4.3.1 As Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem as pesquisas e o que dizem os formadores.....	121

CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
REFERÊNCIAS.....	131
APÊNDICES	135
ANEXOS.....	153

INTRODUÇÃO

Logo que ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, percebi que estava conhecendo uma Matemática muito diferente daquela que havia aprendido na escola. A ilusão de que iria aprofundar meus conhecimentos sobre os conteúdos que foram tratados durante minha formação escolar foi se desfazendo. Com o passar do tempo, acabei me envolvendo com este novo universo matemático e passei a olhar com mais naturalidade para os conhecimentos que eu estava aprendendo na Universidade.

Quanto à relação desta Matemática com os conteúdos escolares, o estudo que eu estava realizando nem sempre me possibilitou estabelecê-la. Nos casos em que tal relação era possível, a forma pela qual se estabelecia não constituía um processo simples e imediato, pois os conhecimentos com os quais eu estava tendo contato na Universidade não tinham uma associação direta com os conteúdos matemáticos propostos no currículo escolar. Mas o caso que mais me chamou a atenção ocorreu em uma disciplina chamada Tópicos de História da Matemática, quando tive contato com um conhecimento que, até aquele momento, era totalmente novo para mim – as Geometrias não Euclidianas¹.

Durante toda a minha trajetória escolar, jamais houve situações em que a Geometria de Euclides não tivesse sido tratada como a única que existe para descrever e interpretar o espaço. Pensar na existência de outras geometrias instigou minha curiosidade.

Nessa disciplina, em relação às Geometrias não Euclidianas, fui informada da existência da Geometria Elíptica e da Hiperbólica. Soube, então, que a criação dessas geometrias teve início nas primeiras décadas do século XIX, o que me deixou surpresa, pois, apesar de ter quase dois séculos de existência, nunca foram mencionadas por meus professores nos anos em que passei na escola. Foi somente na graduação que tive meu primeiro contato com o instigante universo não euclidiano. Lembro-me de ouvir meu professor dizer algo como: *“Tratando-se de*

¹ Em concordância com o Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa (2009), nesse trabalho dispensa-se o uso do hífen na expressão “Geometrias não Euclidianas”. Além disso, como não há uma padronização para uso de letra maiúscula ou minúscula na escrita do “não” nessa expressão, optou-se por utilizar sempre letra minúscula. Essa padronização não é utilizada nas citações literais, títulos de pesquisas acadêmicas e disciplinas citadas neste trabalho.

Geometrias não Euclidianas, tudo o que você sabe sobre a Geometria de Euclides deve ser desconsiderado, pois nessas geometrias, uma mesa pode ser um ponto; um copo, uma reta; e um prato, um plano”.

Apesar do interesse que o tema despertou, minha experiência com essas geometrias, durante a graduação, não possibilitou a aquisição de um conhecimento profundo sobre elas, já que foi introduzido em uma disciplina que apenas destacava alguns tópicos referentes à História da Matemática. Como era uma disciplina semestral, era impossível realizar um estudo histórico profundo desses tópicos. Desse modo, a abordagem deste tema não ocupou tempo muito maior do que a duração de uma aula.

Tendo em vista a presente pesquisa, os estudos que realizei durante a delimitação e fundamentação do tema possibilitaram-me compreender melhor a antessala da sua criação. Por exemplo, que o caráter universal da Geometria de Euclides, soberana durante séculos, foi posto em questão a partir dos estudos de perspectiva realizados pelos artistas do Renascimento (ALMEIDA, apud CARAÇA, 2005), embora somente no século XIX a Geometria Euclidiana tenha perdido, definitivamente, o status universal com a criação da Geometria Hiperbólica e da Elíptica, nas quais o Quinto Postulado de Euclides é substituído pela sua negação e, por isso, foram denominadas “Geometrias não Euclidianas”.

Também compreendi que, com o desenvolvimento das geometrias ocorrido a partir do século XIX, multiplicaram-se as possibilidades da criação de sistemas geométricos que se diferem, de algum modo, do euclidiano, sendo a Topologia e Geometria Fractal alguns exemplos desses sistemas. Assim como essas, a Geometria Projetiva, embora tenha sido desenvolvida a partir do período renascentista com os estudos de perspectiva, portanto, anterior ao século XIX, também pode ser designada como uma geometria que não é euclidiana, visto que, no espaço projetivo, o Quinto Postulado de Euclides também não se verifica, ou seja; duas retas paralelas se interceptam em um ponto comum a ambas e que é chamado, por razões intuitivas, de ponto no infinito sobre a reta (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 223).

Com base nesses conhecimentos, embora ainda hoje seja comum encontrar na literatura que versa sobre esse tema a associação da expressão “Geometrias não Euclidianas” apenas com a Elíptica e a Hiperbólica, pude verificar que, além dessas, a Projetiva, a Topológica e a Fractal também podem ser englobadas nessas geometrias. Também verifiquei que a superfície de uma esfera é o modelo mais

óbvio da Geometria Elíptica, sendo, muitas vezes, referenciada como Geometria Esférica, especialmente, quando está voltada à Educação Básica.

Esses estudos possibilitaram-me verificar que essas geometrias desempenharam um importante papel nos avanços científicos e tecnológicos, como, por exemplo, na criação da Teoria da Relatividade de Albert Einstein. Sobretudo, compreendi que elas são perfeitamente aplicáveis ao mundo real e que servem para explicar fenômenos físicos que não podem ser descritos pela Geometria Euclidiana, como acontece na Teoria da Relatividade, na qual “[...] uma descrição não-euclidiana dos fenômenos é algumas vezes muito mais adequada do que uma descrição euclidiana” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 276).

Ao refletir sobre a importância desse conhecimento, passei a me questionar sobre o porquê da Geometria Euclidiana ser tão prevalente nos espaços escolares, inclusive nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, sendo ocultado o desenvolvimento das diferentes geometrias, centrando-se apenas em conhecimentos advindos da Geometria de Euclides. Não teriam essas outras geometrias algum lugar nos conhecimentos matemáticos que são considerados importantes para a formação dos estudantes na sociedade atual?

Há mais de 30 décadas já aparecem em algumas propostas curriculares brasileiras, por exemplo, no Currículo Básico da Prefeitura Municipal de Curitiba (1988), referências à Geometria Projetiva, à Topologia e à Geometria Esférica no rol de conteúdos para o Ensino Fundamental. A Proposta Curricular para a Matemática do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo (1991, p. 88) sugere o ensino da Geometria Esférica para “[...] concretizar as noções de círculos máximos e circunferências máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas [...]”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 24) destacam:

[...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. [...] Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para a aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico.

Mais recentemente, nas Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE-2008) para a Educação Básica do Estado do Paraná, as Geometrias não Euclidianas foram

incluídas no rol de conteúdos, desdobrando-se em Geometria Topológica, Projetiva, Fractal, Elíptica e Hiperbólica.

Pesquisadores como Reis (2006), Marqueze (2006), Kaleff (2007), dentre outros, têm defendido a inclusão de conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação dos estudantes, já na Educação Básica. De acordo com Kaleff (2007), as oportunidades para a inclusão desses conteúdos no currículo da Matemática escolar vêm sendo criadas e têm sido tema de discussões entre professores de Matemática, matemáticos e educadores matemáticos, resultando na emissão de documentos educacionais destinados à escolarização básica. Entretanto, ao pensar na inclusão dessas geometrias no currículo da Educação Básica, indago sobre as reais condições para que seu ensino se efetive na escola: estariam os professores de Matemática preparados para seu ensino?

Em 2006, quando iniciei meu trabalho como integrante da equipe de Matemática do Departamento de Educação Básica (DEB) da Secretaria Estadual da Educação do Paraná (SEED/PR), essas diretrizes estavam sendo debatidas e, em 2007, disseminadas nos cursos de formação continuada de professores promovidos por esta Secretaria. Como uma das minhas atribuições na equipe envolvia ações para a formação continuada dos professores de Matemática, atuei como docente em vários cursos, nestes, as Geometrias não Euclidianas foi um dos temas priorizados. Nestes cursos, cuja finalidade era a de apresentar e discutir possibilidades de abordagem dessas geometrias no ensino Fundamental e Médio, foi possível perceber que se tratava de um tema totalmente novo para a maioria dos professores participantes, evidenciando seu despreparo para ensiná-las.

Pode-se dizer que esses cursos proporcionaram-lhes um primeiro contato com outras geometrias e algumas possibilidades de abordá-las no Ensino Fundamental e Médio. No entanto, para que os professores estejam preparados para ensiná-las na escola, será necessário a eles um estudo mais profundo, o que demandaria uma carga horária maior do que a disponibilizada nesse modelo de curso de formação continuada. Tal estudo deveria partir da formação inicial desses professores, ofertando-se, nos cursos de Licenciatura em Matemática, disciplinas nas quais as Geometrias não Euclidianas são estudadas. Assim, se a inclusão dessas geometrias nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná pode ser considerada como um importante avanço no currículo do Estado do Paraná, ela impõe aos responsáveis pela formação continuada dos professores de Matemática um grande desafio, já que tudo indica que há ausência de estudos sobre esse tema

na formação inicial desses profissionais.

Kaleff (2007), em pesquisa realizada com professores de Matemática, apontou que mais de 50% dos profissionais em exercício afirmaram não ter estudado Geometrias não Euclidianas durante a graduação e 34% declararam que sequer sabiam o que são tais Geometrias. Santos (2009), baseando-se em sua experiência como professora no ensino superior e nos resultados obtidos em pesquisa com professores de escolas estaduais da cidade de Maringá, afirma que são raros os cursos de Licenciatura em Matemática que tratam dessas geometrias.

Marqueze (2006) declarou que seu contato com essas geometrias aconteceu somente muito tempo depois de concluída a sua formação. Após ingressar no mestrado, ele teve a oportunidade de investigar o tema mais profundamente, o que contribuiu na elaboração de alguns cursos sobre a Geometria Esférica, nos quais participaram estudantes e professores de Matemática da Educação Básica. Durante esses cursos, verificou que a maioria dos participantes também não conhecia as Geometrias não Euclidianas.

Cabariti (2004) realizou um levantamento das grades curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática do Estado de São Paulo, verificando que essas geometrias não estão incorporadas na maioria desses cursos. Na presente pesquisa, realizei um levantamento semelhante a esse, com a finalidade de identificar, nas propostas curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática, a presença de conteúdos de Geometrias não Euclidianas ou tópicos relacionados. Para tanto, optei por uma amostragem de conveniência, que foi restringida às instituições públicas e privadas do Estado do Paraná.

Esse levantamento inicial foi realizado na página do Sistema E-Mec, no qual pude identificar quais são as instituições que ofertam cursos de Licenciatura em Matemática no Paraná. Em seguida, consultei as páginas de cada uma delas para acessar as suas respectivas propostas curriculares, totalizando vinte e três instituições consultadas, dentre as quais, quatorze permitiam acesso às ementas das disciplinas. Assim, identifiquei conteúdos de Geometrias não Euclidianas, ou tópicos relacionados, em nove ementas de disciplinas ofertadas nestes cursos, sendo três de uma mesma instituição, totalizando sete cursos que ofertam disciplinas para a abordagem dessas geometrias².

Ao consultar as ementas dessas disciplinas, verifiquei que na maioria delas

² O levantamento completo encontra-se nos apêndices deste trabalho.

os conteúdos relacionados às Geometrias não Euclidianas são apresentados como um tópico da ementa, inclusive, há casos em que são abordados em disciplinas de Geometria Euclidiana, sendo poucas as que são específicas para o estudo desse tema. Percebi que os títulos dessas disciplinas sugerem diferentes enfoques pelos quais as Geometrias não Euclidianas são abordadas, entretanto, não me detive em fazer uma análise sobre esta questão, já que meu objetivo foi tão somente a identificação de conteúdos dessas geometrias, ou tópicos relacionados. A seguir apresento a relação das disciplinas que identifiquei.

DISCIPLINAS	INSTITUIÇÃO	REDE
Tópicos de Geometria	FAFIMAN	Pública
Fundamentos da Geometria Não-Euclidiana	UNICENTRO	Pública
Filosofia da Matemática	UEL	Pública
Introdução à Geometria Não-Euclidiana	UEM	Pública
Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas	UFPR	Pública
Geometria Euclidiana	CTESOP	Pública
Geometria Espacial	UEPG	Pública
Tópicos de Geometria		
Fundamentos Matemáticos da Teoria da Relatividade		

QUADRO 1 - RELAÇÃO DE DISCIPLINAS QUE ABORDAM GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Com base nos resultados obtidos por esse levantamento, foi possível constatar que o estudo dessas geometrias não faz parte da maioria dos cursos de formação inicial do professor de Matemática do Estado do Paraná. Por outro lado, verifiquei que, recentemente, alguns desses cursos incluíram disciplinas sobre essas Geometrias em suas propostas curriculares.

A partir da leitura de pesquisas sobre as Geometrias não Euclidianas no

âmbito da formação inicial e continuada do professor de Matemática, dentre as quais, oito são apresentadas no Capítulo 1 do presente trabalho, identifiquei que a investigação com professores universitários é praticamente inexistente. Diante disso, considerei relevante realizar uma investigação com professores de um curso de Licenciatura em Matemática, no qual as Geometrias não Euclidianas fazem parte da formação de futuros professores de Matemática para a escola básica. Para tanto, elaborei a seguinte questão de pesquisa:

O que dizem professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais conteúdos de Geometrias não Euclidianas são propostos na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica?

Dessa forma, os objetivos desta pesquisa são **identificar** e **descrever** como professores de um curso de Licenciatura em Matemática justificam as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática.

Para tanto, este trabalho tem a seguinte organização: com base na literatura encontrada, e comungando com outros autores, justifico a pertinência do ensino das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática e apresento a questão e os objetivos da pesquisa.

No primeiro Capítulo, apresento uma revisão de literatura envolvendo oito pesquisas acadêmicas relacionadas com o ensino das Geometrias não Euclidianas, destacando os argumentos apresentados em relação à pertinência de seu estudo durante o processo de formação do futuro professor de Matemática para a escola básica.

No Capítulo dois, destaco a dimensão histórico-filosófica das Geometrias não Euclidianas como um elemento importante na sua compreensão, especificamente, para a aprendizagem dos futuros professores de Matemática em processo de formação inicial. Com base nessa dimensão, apresento uma breve síntese do desenvolvimento histórico dessas geometrias³.

No Capítulo três, apresento a pesquisa e descrevo os procedimentos metodológicos realizados.

³ A síntese histórica realizada nesse capítulo refere-se somente ao desenvolvimento da Geometria Elíptica e da Hiperbólica.

No capítulo quatro, apresento os dados obtidos e as análises dos mesmos. Por fim, nas considerações finais, destaco as contribuições deste estudo para a Educação Matemática e as possibilidades de abertura para a realização de novas pesquisas, as quais poderão ampliar o conhecimento sobre o tema do presente trabalho.

1 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS

Ao realizar uma revisão de literatura de pesquisas sobre o ensino das Geometrias não Euclidianas, no Brasil, minha intenção foi saber quais são os problemas levantados, as constatações e as contribuições que tais pesquisas trazem para as propostas que visam incluir conteúdos dessas geometrias na formação do futuro professor de Matemática.

Durante a leitura e análise dessas pesquisas procurei identificar os argumentos que apresentam em relação à relevância do estudo das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, tendo em vista obter subsídios teóricos para elaborar meus próprios argumentos.

Para identificar os argumentos sobre a relevância do estudo das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, realizei uma análise dos relatos de oito pesquisas acadêmicas, sendo sete dissertações de mestrado e um artigo sobre uma tese de doutorado. A seguir, apresento essas pesquisas:

AUTOR	LOCAL	ANO	PESQUISA	TÍTULO
Arlete de Jesus Brito	UNICAMP	1995	Dissertação	Geometrias Não-Euclidianas: Um Estudo Histórico-Pedagógico
Isabel P. Bonete	UNIOESTE	2000	Dissertação	Geometrias Não-Euclidianas: Uma Perspectiva para o seu Ensino
Ireni Pataki	PUC/SP	2003	Dissertação	Geometria Esférica para a Formação de Professores: Uma Proposta Interdisciplinar
Eliane Cabarati	PUC/SP	2004	Dissertação	Geometria Hiperbólica: Uma Proposta Didática em Ambiente Informatizado
Joana d'Arc da S. Reis	UNESP	2004	Dissertação	Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis
João Pedro Marqueze	PUC/SP	2006	Dissertação	As Faces dos Sólidos Platônicos na Superfície Esférica: Uma Proposta para o Ensino-Aprendizagem de Noções Básicas

				de Geometria Esférica
Ana Maria M. R. Kaleff	UFF	2007	Artigo sobre a tese	Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não- Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática
Talita S. dos Santos	UEM	2009	Dissertação	A Inclusão das Geometrias não- Euclidianas no Currículo da Educação Básica

QUADRO 2 - PESQUISAS SOBRE O ENSINO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Brito (1995) realizou um estudo histórico-pedagógico centrado nas condições que permitiram o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas. Este estudo traz à tona o desenvolvimento histórico da concepção de Matemática ao longo do tempo e o modo como essa concepção influenciou o pensamento matemático e a sua forma de produção. O objetivo dessa pesquisa foi mostrar que a produção do conhecimento científico está envolvida com o contexto histórico no qual se desenvolve e é condicionada ao panorama cultural de sua época de criação. O texto é apresentado em forma de diálogos imaginários entre professora e alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, os quais ocorrem em um ambiente de sala de aula idealizado: uma disciplina sobre Geometrias não Euclidianas.

Os diálogos iniciam com uma discussão sobre a concepção de verdade difundida pelos gregos, os pressupostos históricos e filosóficos da Geometria e os Fundamentos da Matemática. Nessa discussão, a professora procurou desenvolver em seus alunos um pensamento crítico em relação às suas concepções sobre o significado da produção do conhecimento matemático. Em seguida, desenvolveu um estudo sobre as tentativas de demonstração do Quinto Postulado de Euclides, realizadas durante a Idade Moderna, apresentando para os alunos os possíveis obstáculos que impediram os matemáticos deste período de perceberem as possibilidades de construção de uma geometria diferente da tradicional Geometria Euclidiana.

Por fim, o tema da discussão entre a professora e seus alunos voltou-se para a concepção filosófica de Kant, cujas ideias eram predominantes durante o século XIX, influenciando, assim, na forma como as Geometrias não Euclidianas

foram recebidas pela comunidade científica do desse período, tendo em vista que Kant não as aceitava como uma teoria válida para descrever o espaço real. Os diálogos seguem nessa discussão até o momento em que o estatuto ontológico dessas geometrias se estabeleceu, mostrando que a tese apresentada na Teoria Transcendental de Kant passou a não ter mais aplicabilidade em todos os problemas relativos ao estudo do espaço.

De acordo com Brito (1995), para levar a compreensão da Geometria aos futuros professores de Matemática, é preciso transcender o senso comum e buscar as origens de seus conceitos. Para a autora, um estudo histórico-pedagógico das Geometrias não Euclidianas é interessante para a formação desses professores, pois conduz à reflexão sobre a concepção de verdade, de rigor, de consistência e de sistemas axiomáticos, e também abre espaço para uma discussão sobre a correspondência entre a Geometria de Euclides e as leis que regem o mundo empírico.

Com base nos argumentos apresentados pela autora, entendo que o estudo das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, além de contribuir na compreensão dos conceitos geométricos, constitui-se em tema profícuo para levar o futuro professor à compreensão da natureza e do processo de produção da Matemática. Assim, conhecer estes aspectos do conhecimento matemático poderá ser relevante para a formação do professor, oportunizando a aquisição de um conhecimento mais profundo da Matemática, uma vez que a situa em um contexto mais amplo do que o de suas relações internas, ou seja, envolve o conhecimento matemático historicamente produzido no contexto das relações sociais e culturais no qual se processaram. No terreno dessas relações, ampliam-se as possibilidades de compreender os fatores que influenciam na criação de novas teorias e no modo de conceber e produzir Matemática em diferentes períodos, caracterizando-a como um construto intelectual evolutivo e produto da necessidade humana.

Bonete (2000) realizou uma pesquisa que teve por objetivo refletir e discutir o ensino das Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática. Sua investigação envolveu a realização de três experiências com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, para os quais desenvolveu uma proposta didática para o estudo dessas geometrias, visando capacitar futuros professores para seu ensino na escola. A autora considera que o estudo das Geometrias não Euclidianas deve partir da exploração dos conceitos da Geometria

de Euclides, tendo em vista que o desenvolvimento dessas geometrias ocorreu mediante as especulações em torno do Quinto Postulado euclidiano. Assim, para elaborar sua proposta, realizou um estudo bibliográfico sobre o desenvolvimento da Geometria Euclidiana e das Geometrias não Euclidianas, visando identificar suas diferenças e semelhanças.

A ideia inicial da autora para introduzir os conceitos envolvidos em sua proposta era desenvolver um estudo histórico das Geometrias não Euclidianas, entretanto, durante a realização da primeira experiência, ocorreu uma situação não planejada, ou seja, partiu de uma discussão sobre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Diante disto, as próximas experiências foram realizadas a partir do questionamento e reflexão em torno desta propriedade, solicitando aos alunos para fazer construções de triângulos sobre diferentes tipos de superfícies. Para auxiliar os alunos nas construções, foram trazidos para a sala de aula materiais concretos como forma de representação de superfícies planas, esféricas e hiperbólicas, com a finalidade de diferenciar três tipos de geometrias: a tradicional Geometria de Euclides, a Elíptica e a Hiperbólica. Em Bonete (2000), a expressão “Geometrias não Euclidianas” refere-se apenas às Geometrias Elíptica e Hiperbólica, embora não explicita isto no texto.

Nas conclusões da pesquisa, a autora afirma que:

[...] ao realizar três experiências em diferentes salas de aula, constatou-se que o ensino das geometrias não euclidianas em um curso de licenciatura, pode proporcionar aos futuros professores, discussões sobre as suas diferentes concepções de verdade matemática e espaço, uma visão mais ampla dos conhecimentos geométricos euclidianos e não euclidianos e uma compreensão do significado filosófico desses conhecimentos (BONETE, 2000, p. 229).

Entretanto, a autora alerta que nos momentos em que essas discussões foram realizadas, não foi possível constatar se estas provocaram as mudanças esperadas nas concepções dos licenciandos sobre o conceito de espaço e verdade matemática, no entanto, ela considera possível que a continuidade dessas reflexões poderá provocar alterações nas concepções dos alunos. Também destaca a importância do estudo das Geometrias não Euclidianas na formação escolar, tendo em vista contribuir na qualidade do ensino e aprendizagem da Matemática, particularmente, no ensino da Geometria, pois, para esta autora, o professor que possui esse conhecimento estará mais bem preparado para o ensino da própria

Geometria Euclidiana. Salienta, ainda, a relevância do estudo dessas geometrias para a formação dos futuros professores de Matemática que atuarão na Educação Básica, argumentando que a efetivação de seu ensino na escola somente ocorrerá se, na graduação, o professor for preparado para realizar tal proposta.

Como Brito (1998), Bonete (2000) enfatiza a importância do estudo desse tema para ampliar a visão histórico-filosófica do professor de Matemática sobre os fundamentos do conhecimento geométrico que cabe a ele preparar para o ensino na escola básica.

Pataki (2003) realizou uma pesquisa que teve por finalidade mostrar as implicações no ensino da Geometria Esférica, considerando que, para autora, trata-se de um conhecimento ainda não incorporado ao currículo do Ensino Fundamental e Médio. De acordo com ela:

Tem-se revelado, a partir de pesquisas e em Congressos, cursos, palestras, artigos e dissertações de mestrado, a necessidade de repensar o ensino da Geometria e o papel que lhe cabe na Educação Matemática. Mais particularmente, nos referimos às Geometrias não-euclidianas, à qual pertence a Geometria Esférica, alvo de investigação, quer histórico-pedagógica, que sobre a problemática gerada pelo quinto postulado de Euclides, quer sobre experiências em cursos de licenciatura e no Ensino Fundamental, na tentativa de torná-las domínios estruturados e integrados ao conteúdo escolar (PATAKI, 2003, p. 61-62).

As hipóteses de pesquisa levantadas por esta autora são as seguintes:

- O conhecimento geométrico possibilita a compreensão/descrição/representação de forma organizada do mundo.
- A apreensão dos conteúdos constituintes da Geometria Esférica poderá nos conduzir a arguições/reflexões/transformações/conscientização da nossa posição como docente, diante da ação pedagógica.
- A utilização dos recursos da interdisciplinaridade e da sua contextualização promoverá conexões/encadeamentos/solidez de saberes inerentes à Geometria Esférica e de outros campos do conhecimento (PATAKI, 2003, p. 64).

Para investigar uma sequência didática envolvendo a Geometria Esférica, essa pesquisa contou com a participação de professores de Matemática de escolas públicas do Estado de São Paulo. Inicialmente, realizou-se um diagnóstico das concepções desses professores sobre a Geometria Esférica, cujos dados foram obtidos por meio de um questionário, que teve por finalidade identificar seus conhecimentos sobre as Geometrias não Euclidianas, em particular sobre a Geometria Esférica. Segundo a autora, esse diagnóstico mostrou que os professores

envolvidos “[...] embora soubessem da existência das Geometrias não-euclidianas, não haviam participado de algum estudo a respeito delas” (PATAKI, 2003, p. 58). Com base nisso, ela concluiu que “[...] esses conteúdos não estavam incorporadas ao currículo de muitas universidades” (PATAKI, 2003, p. 58).

Em seguida, aplicou para os professores uma sequência didática envolvendo conhecimentos da Geometria Esférica, cujos objetivos foram:

- * Propiciar aos professores a construção de conhecimento/saberes acerca de uma Geometria não-euclidiana numa superfície esférica.
- * Propor atividades que possam promover a interdisciplinaridade entre a Geometria e outros ramos do conhecimento.
- * Buscar, por meio da Teoria das situações didáticas, momentos de ação, formulação, validação e institucionalização do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em questão (PATAKI, 2003, p. 77).

A sequência didática foi composta por uma “situação-problema detonadora” e oito atividades, sendo que a situação-problema apresentada para os professores foi a seguinte:

O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: localizados naufragos numa ilha de coordenadas $l = 68^{\circ} 40' N$ e $l = 013^{\circ} 40' E$. Naquele momento, a posição do navio era $N = 42^{\circ} 10' N$ e $N = 051^{\circ} 20' W$. Que distância o navio deverá percorrer para chegar à ilha? (PATAKI, 2003, p. 81).

As atividades desenvolvidas a partir dessa situação-problema estabeleciam relação entre conceitos da Geometria Esférica, da Geografia, da Trigonometria e da História, e também faziam interconexão com os conceitos da Geometria Euclidiana.

Com base nos resultados obtidos, durante o desenvolvimento dessa sequência didática, conclui-se que as hipóteses da pesquisa foram verificadas. Pataki (2003, p. 176) considera que este estudo “[...] mostrou que é possível o professor introduzir os conteúdos abordados, em seu plano de aula, articulando teoria e prática, ensino e aprendizagem, interdisciplinaridade e contextualização”.

Em relação ao conhecimento geométrico, a autora apresentou seu ponto de vista, o qual destaca para uma reflexão posterior:

Creemos que não podemos continuar limitando o pensamento do homem moderno, quando diante dele existem fatos que a Geometria euclidiana não explica. Na escola, o professor precisa valer-se de outras Geometrias relacionadas com o nosso dia-a-dia e o aprendiz verificar que as navees espaciais percorrem sem suas viagens, trajetórias que não são retilíneas (PATAKI, 2003, p. 16-17).

Ao refletir sobre as palavras da autora, participo de suas ideias, contudo, acrescento algo que creio ser fundamental: para o professor valer-se de outras geometrias se faz necessário que ele tenha adquirido esse conhecimento de tal forma que possa articulá-lo ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, sendo que essa aquisição poderá ser oportunizada a partir de sua formação inicial.

Cabariti (2004) realizou uma pesquisa que tem como principal objetivo desenvolver uma proposta pedagógica para explorar relações entre a Geometria Euclidiana e a Hiperbólica, na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Para a autora:

[...] um trabalho envolvendo Geometrias não Euclidianas poderá ser útil nos cursos de formação de professores por vários aspectos. O primeiro deles parece-nos evidente: aprofundamento, e não apenas revisão, da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica. O segundo poderá ser a compreensão da noção de modelo, identificando os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólicos como equivalentes do ponto de vista da consistência lógica. Além destes, o constante interesse pela História da Matemática. Esse trabalho poderá, assim, contribuir para que o futuro professor dê uma nova dimensão à sua prática pedagógica, pois ele poderá desenvolver aspectos que visem a argumentação, a formulação de conjecturas e o raciocínio dedutivo (CABARITI, 2004, p. 15-16).

Para auxiliar na consolidação da proposta, inicialmente, Cabariti realizou um estudo experimental envolvendo seis professores de Geometria Euclidiana que atuam na formação inicial e continuada do professor de Matemática. A finalidade desse estudo experimental foi investigar quais relações esses professores estabelecem quando são solicitados para resolver situações envolvendo noções de Geometria Hiperbólica, com auxílio do software Cabri Géomètre.

A autora comenta que seu interesse sobre as Geometrias não Euclidianas partiu da sua graduação, na qual era ofertada uma disciplina que abordava a Geometria Hiperbólica plana. Assim, a partir de questionamentos sobre a importância e contribuição dessas geometrias na formação inicial do professor de Matemática, interessou-se por realizar uma pesquisa na perspectiva de contribuir no esclarecimento de tais questões.

Inicialmente, a autora buscou verificar se tais geometrias estavam presentes na formação inicial do professor de Matemática. Para tanto, realizou um levantamento das grades curriculares de cursos de Licenciatura em Matemática do Estado de São Paulo. Nesse levantamento, realizado via Internet, foram acessadas

as páginas de vinte e cinco instituições, das quais, apenas onze permitiam o acesso às ementas das disciplinas que compõem a grade curricular do curso, assim, a identificação de conteúdos ou temas relacionados às Geometrias não Euclidianas restringiu-se ao ementário desses onze cursos. Diante das informações obtidas nesse levantamento, a autora pode perceber que são poucos os cursos que possuem disciplinas nas quais essas geometrias são abordadas: apenas quatro instituições ofertavam disciplinas com tais características, sendo que em duas delas a disciplina era obrigatória e, nas duas outras, optativa.

Para esses cursos, a autora formulou as seguintes questões:

- Do ponto de vista do professor, com quais objetivos as *Geometrias não Euclidianas* estão sendo incluídas nos cursos de Licenciatura em Matemática?
- E do ponto de vista do licenciando, qual a importância dessa disciplina na sua formação ou futura prática docente?
- Nesse trabalho com *Geometrias não Euclidianas* utilizam-se novas tecnologias? Quais? Que papel elas cumprem? (CABARITI, 2004, p. 20).

Para obter respostas para tais questões, escolheu uma das quatro instituições que contemplam as Geometrias não Euclidianas. Tratou-se de uma universidade particular que oferta uma disciplina denominada Geometria 4, na qual a Geometria Hiperbólica é explorada, dentre outros conteúdos. Essa Geometria é abordada por meio do modelo do disco de Poincaré e do modelo do semiplano de Poincaré, com o auxílio do software Cabri Géomètre.

Para três professores que já haviam ministrado essa disciplina, Cabariti elaborou um questionário para obter as respostas das questões mencionadas. Em suas respostas, os professores declararam que o objetivo para incluir essa disciplina é proporcionar o trabalho com a História das Geometrias não Euclidianas, com a demonstração e com a visualização dos modelos em um ambiente informático. Além disso, apontaram que o trabalho com essas geometrias possibilita dar continuidade ao desenvolvimento do raciocínio abstrato e também propicia uma releitura da própria Geometria Euclidiana. Também consideraram importante o estudo dessas geometrias na formação dos professores, tendo em vista que propicia um pensamento não euclidiano e remete à discussão sobre os pressupostos que levam à construção de novas teorias. Declararam, ainda, que o estudo das Geometrias não Euclidianas permite mostrar que a Geometria Euclidiana não é única e que existe liberdade para que o homem possa criar sistemas lógicos.

Com base nos resultados do levantamento realizado e nas respostas obtidas desses três professores, Cabariti (2004, p. 22) afirma que:

Em síntese, ainda que de forma restrita e breve, juntamente com os professores entrevistados, constatamos com esse levantamento que embora as Geometrias não Euclidianas não sejam amplamente incorporadas na formação inicial de professores de Matemática, sua importância e pertinência nessa formação é relevante – o que adotaremos como hipótese de trabalho do presente estudo.

Diante da hipótese levantada, a autora direcionou sua pesquisa para uma investigação de condições didáticas para auxiliar o trabalho de professores que atuam na formação inicial e continuada do professor de Matemática, na implementação de propostas que buscam introduzir modelos não euclidianos. Para tanto, a questão formulada para nortear sua pesquisa foi:

Como potencializar uma proposta de ensino em ambiente de geometria dinâmica visando desenvolver, em uma formação inicial ou continuada de professores de Matemática, noções de Geometria Hiperbólica que contribua na compreensão e ampliação de conceitos da Geometria Euclidiana? (CABARITI, 2004, p. 22-23).

Assim, a pesquisa realizada por Cabariti intencionou discutir o ensino das Geometrias não Euclidianas, em particular, a “[...] pertinência da introdução da Geometria Hiperbólica, com o auxílio de uma ferramenta computacional, na formação de professores de Matemática” (CABARITI, 2004, p. 23).

Além dessa intenção, pretendeu-se, também, identificar características de situações didáticas destinadas a explorar relações entre o modelo euclidiano e um não euclidiano, visando o aprofundamento do primeiro. Para tanto, Cabariti realizou um experimento envolvendo atividades que utilizam o software Cabri Géomètre II. As experiências foram desenvolvidas em três sessões:

- 1.^a Sessão: Apresentação das Geometrias não Euclidianas e atividades de familiarização com as ferramentas do software, em particular, do menu hiperbólico;
- 2.^a fase: Apresentação das atividades de exploração da Geometria Hiperbólica com algumas construções no modelo do disco de Poincaré;
- 3.^a Sessão: Proposição de cinco atividades de construção no modelo do disco de Poincaré.

Cabariti ressalta que um trabalho envolvendo as Geometrias não Euclidianas poderá favorecer na compreensão por parte do professor das principais características da Matemática e de sua natureza. Salienta, ainda, que:

[...] é fundamental que o professor compreenda o “avanço” da matemática quando se supera a visão de uma única geometria do real – a Geometria Euclidiana – para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos logicamente consistentes (CABARITI, 2004, p. 153).

As colocações feitas por essa autora reforçam, ainda mais, a importância de incluir essas geometrias na formação dos futuros professores de Matemática, visto que é um conhecimento relevante não somente porque contribui para ampliar os conhecimentos geométricos do professor, mas também, por permitir ampliar sua visão sobre a própria Matemática.

Reis (2006) aponta para a existência das diversas geometrias que hoje existem e seus diferentes campos de atuação, sendo que cada uma delas pode ser mais ou menos adequada, de acordo com o tipo de problema que se quer resolver. No entanto, segundo a autora, esse fato tem sido ignorado no ensino da Geometria, haja vista que as Geometrias não Euclidianas são muito pouco exploradas, inclusive, nos cursos de Matemática.

Essa autora realizou uma pesquisa que teve o propósito de investigar o uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria Esférica em um ambiente natural de sala de aula. Para isso, desenvolveu uma proposta que visa o ensino dessa geometria na formação inicial do professor de Matemática, sendo desenvolvida em um curso de extensão universitária, com a participação de alunos de um programa de formação de professores de Matemática.

Os conteúdos vinculados nessa proposta foram abordados por meio de atividades desenvolvidas com o auxílio de materiais manipuláveis, tais como softwares de Geometria Dinâmica e caleidoscópios, os quais, conforme Reis destaca, permitem construir e visualizar figuras geométricas na superfície esférica. Sobre o ambiente de Geometria Dinâmica, a autora considera que o aluno, nesse espaço, “[...] pode formular e testar suas próprias conjecturas, visualizar conceitos, estabelecer relações, compreender e descobrir propriedades geométricas” (REIS, 2006, p. 17). Reis utilizou o programa Cinderella, tendo em vista sua possibilidade de uso no ensino das Geometrias não Euclidianas. Os caleidoscópios foram

utilizados para visualização de tesselações esféricas que utilizam padrões geométricos construídos.

A autora considerou que os conceitos e as propriedades básicas da Geometria Esférica foram adquiridos pelos alunos, no decorrer desse curso extensão universitária. Ela afirma, também, que as reflexões sobre essa Geometria e sua comparação com a Geometria Euclidiana e Elíptica ocorreram de forma satisfatória. Reis (2006, p. 140) considera, ainda, que a pesquisa realizada poderá “[...] auxiliar na busca por propostas alternativas para o ensino de Geometria, possibilitando uma melhor experiência de aprendizagem do futuro professor, enquanto aluno de graduação”.

Apesar da pesquisa de Reis ter o interesse centrado no uso de materiais manipuláveis para o ensino da Geometria Esférica, percebe-se que suas colocações a respeito da formação inicial do professor de Matemática coadunam com os argumentos apresentados nas outras pesquisas citadas neste trabalho, evidenciado, assim, a importância do conhecimento de outras geometrias nessa formação.

Marqueze (2006) investigou quais são as contribuições que uma sequência de atividades de tesselação das faces dos sólidos platônicos na superfície esférica pode proporcionar para o ensino e a aprendizagem de noções básicas de Geometria Esférica no Ensino Médio.

Os objetivos da pesquisa em questão têm duas perspectivas: uma de natureza matemática e outra de natureza educacional. O objetivo de natureza matemática focaliza tanto o aluno como o professor. No que se refere ao aluno, teve por finalidade a construção de conceitos básicos de Geometria Esférica, além de revisar conceitos da Geometria Euclidiana e, assim, comparar suas semelhanças e diferenças. O autor considera que tal objetivo pode ser alcançado, já que, durante a realização das atividades, os alunos conseguiram mostrar indícios de aprendizagem desses conceitos, bem como estabeleceram relações entre essas geometrias.

Com foco no professor, esse estudo teve por objetivo propor uma alternativa de abordagem de noções de Geometria Euclidiana e Esférica na qual são dispensadas as ferramentas utilizadas no método tradicional de ensino (giz, apagador e quadro-negro). Apesar de Marqueze não apresentar uma descrição detalhada desse objetivo, fica claro na descrição das atividades desenvolvidas que estas representam possibilidades de abordagens da Geometria Esférica, fornecendo subsídios para a elaboração de planos de aula que visam inclusão desse conteúdo na Educação Básica, em particular, no Ensino Médio.

O objetivo de natureza educacional foi proporcionar aos professores e alunos instrumentos e recursos didáticos que contribuem na aprendizagem da Geometria Esférica, como também favorecer a integração entre as disciplinas de Desenho Geométrico, Educação Artística e Geografia.

É importante destacar que Marqueze comenta que seu primeiro contato com as Geometrias não Euclidianas aconteceu somente muito tempo depois de concluída a sua formação. Foi em uma disciplina que cursou como aluno especial do programa de pós graduação em Educação Matemática da UNESP que teve contato com a Geometria Esférica. Dentre os vinte alunos que cursavam essa disciplina, verificou que, assim como ele, a maioria também não a conhecia. Para desenvolver o trabalho de conclusão dessa disciplina, motivou-se em abordar esse tema. Ao buscar as pesquisas realizadas no Brasil que versam sobre esse assunto, verificou que se trata de um tema que ainda é novidade para muitos professores de Matemática.

Em 2004, ingressou no programa de mestrado da PUC-SP, onde desenvolveu sua pesquisa sobre a Geometria Esférica e, assim, aprofundou seus conhecimentos. Com base nos estudos realizados, Marqueze passou a produzir artigos sobre o ensino da Geometria Esférica e participou de Eventos na área da Educação Matemática. Em uma dessas ocasiões, teve a oportunidade de apresentar um mini curso para estudantes de graduação e professores de Matemática da Educação Básica, intitulado Geometria Esférica de Forma Lúdica. Dentre os participantes, verificou que apenas dois deles demonstraram ter conhecimento sobre o assunto, sendo que um deles estava desenvolvendo uma monografia cujo tema era a Geometria Esférica e, o outro, também apresentaria um mini curso sobre as Geometrias não Euclidianas nesse mesmo evento. A maioria dos demais participantes declarou que foi durante esse mini curso que teve seu primeiro contato com conhecimentos de Geometria Esférica. Diante disso, a constatação de que a maioria dos estudantes e professores de Matemática desconhece a existência de outras geometrias além da Euclidiana foi, mais uma vez, evidenciada. Para o autor, as Geometrias não Euclidianas devem estar presentes nos currículos escolares, em particular, destaca a Geometria Esférica. Considera que o estudo desse tema “[...] além de proporcionar o conhecimento de outras Geometrias, contribui para dar significado à Geometria de Euclides” (MARQUEZE, 2006, p. 18).

Ao concordar com o autor sobre a inclusão dessas geometrias no currículo da Matemática escolar, reafirmo o que tem sido defendido por outros pesquisadores,

os quais alertam para a necessidade de preparar os futuros professores para seu ensino na Educação Básica, a partir de sua formação inicial.

No artigo de Kaleff (2007), sobre os resultados de sua tese de doutorado defendida em 2004, a partir de sua prática pedagógica em cursos de formação de professores de Matemática, essa autora declara ter identificado dificuldades na apreensão de conceitos geométricos não Euclidianos por parte desses profissionais. Pelas observações da autora, a presença dessas dificuldades pode influenciar o desempenho dos professores e futuros professores de Matemática na sua prática escolar. Visando contribuir com a formação inicial de professores de Matemática, essa autora realizou uma pesquisa que teve por objetivo compreender as formas pelas quais adultos, com certa cultura Matemática, se deparam com os conhecimentos geométricos não euclidianos.

Participaram dessa pesquisa cinquenta e um professores de Matemática que tinham, em média, dez anos de experiência, e dois estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática que já haviam sido aprovados em uma disciplina sobre sistemas axiomáticos não Euclidianos.

O objetivo da pesquisa de Kaleff foi investigar o comportamento de adultos durante o processo de solução de atividades introdutórias aos conhecimentos geométricos não Euclidianos, o que permitiu identificar categorias de obstáculos cognitivos relacionados a registros semióticos (gráficos e simbólicos) que se apresentam durante esse processo. Kaleff concluiu que tais obstáculos são balizadores do desempenho dos sujeitos durante a solução de atividades introdutórias às Geometrias não Euclidianas.

Para verificar a formação e o conhecimento dos professores sobre as Geometrias não Euclidianas, Kaleff, entre outros instrumentos de investigação, aplicou um questionário aos participantes que já atuavam nas escolas como professores de Matemática, identificando que aproximadamente 7% dos professores não sabiam o que é o Plano Euclidiano, 18% desconheciam os axiomas relativos a este plano, 20% desconheciam o Quinto Postulado de Euclides, 34% não sabiam o que são as Geometrias não Euclidianas ou desconhecem outra geometria além da Euclidiana, e pouco mais de 50% afirmaram não ter estudado Geometrias não Euclidianas na graduação.

Kaleff alerta para a necessidade, nas licenciaturas, de enfrentamento dos possíveis obstáculos cognitivos que podem trazer impedimentos para os futuros professores, os quais são responsáveis pelo ensino e pela aprendizagem dos

estudantes da Educação Básica, e devem superar seus limites cognitivos diante da realidade que se apresenta. Também chama a atenção para a necessidade de haver uma transformação profunda na formação do professor, no sentido de capacitá-lo para o acesso e para o ensino de conhecimentos geométricos não Euclidianos na escola. Para a autora, “[...] a aquisição de conhecimentos geométricos não-euclidianos se apresenta como um significativo desafio aos meios de formação de professores” (KALEFF, 2007, p. 93).

Santos (2009), em face da inclusão das Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (2008) para a Educação Básica, realizou uma pesquisa com professores de Matemática da Rede Estadual de Ensino, com o objetivo de investigar o modo pelo qual esses professores sentiram a inclusão dessas geometrias no currículo escolar.

Para esclarecer como as Geometrias não Euclidianas são apontadas nesse documento, faço um breve relato do modo pelo qual os conteúdos estão organizados: na disciplina de Matemática há quatro Conteúdos Estruturantes⁴, entendidos como os temas de grande amplitude que estruturam uma disciplina. Em cada um deles, inserem-se tópicos relacionados que são chamados de Conteúdos Básicos. O conteúdo Geometrias configura-se como um dos Estruturantes, no qual estão inseridos os Conteúdos Básicos Geometria Plana, Espacial, Analítica e Geometrias não Euclidianas. Por sua vez, os Conteúdos Básicos são desdobrados em subtópicos relacionados, dentre os quais, a Topologia, as Geometrias Fractal, Esférica e Hiperbólica são apontadas como desdobramentos das Geometrias não Euclidianas.

A pesquisa de Santos foi desenvolvida em um curso de formação continuada, que teve por finalidade introduzir noções básicas das Geometrias não Euclidianas propostas nas Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática. O curso foi ofertado pelo Núcleo Regional de Ensino da cidade de Maringá-PR, em parceria com a UEM, com carga horária de vinte e quatro horas, distribuídas em seis encontros. Durante esses encontros, os professores foram colocados em contato com os conhecimentos das Geometrias não Euclidianas e, de acordo com a autora, muitos professores declararam ter a sensação de que todo o conhecimento da Geometria que possuíam até aquele momento parecia estar errado. A autora pode verificar que, além de não conhecerem essas geometrias, muitos professores

⁴ Os outros Conteúdos Estruturantes são Funções, Grandezas e Medidas, Números e Álgebra e Tratamento da Informação.

demonstraram que seus conhecimentos sobre a própria Geometria Euclidiana eram insuficientes.

Sobre a construção de conhecimentos geométricos não euclidianos apresentados durante o curso, muitos professores reconheceram não tê-la alcançado e alguns demonstraram ter adquirido entendimento parcial. Quando solicitados para que elaborassem um plano de aula envolvendo uma das Geometrias não Euclidianas abordadas durante o curso, a maioria não conseguiu realizar. Para a autora, esses fatos demonstram que a maioria dos professores de Matemática da Educação Básica não se encontra preparada para incorporar essas geometrias na sua prática docente e, assim, limitam as possibilidades de inclusão desses conteúdos nas suas aulas. Diante dessas constatações, reforçam-se os argumentos que apontam para a necessidade de haver, na formação inicial dos professores de Matemática, o preparo desses profissionais para o ensino dessas geometrias na escola.

Em síntese, todas as pesquisas apresentadas neste estudo denunciam que o estudo das Geometrias não Euclidianas não está amplamente incorporado na formação inicial do professor de Matemática. Percebe-se que em grande parte, dos cursos de Licenciatura em Matemática, essas geometrias não são contempladas nas suas propostas curriculares e, quando são, nem sempre são exploradas com vistas à preparação do futuro professor para estes possam ensiná-las na escola básica.

Nos estudos apresentados, encontram-se vários argumentos que apontam para a relevância de incorporar o estudo das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de matemática para a escola básica. Tais argumentos podem ser caracterizados como importantes razões para inclui-las nessa formação, os quais estão destacados no quadro a seguir.

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	
Argumentos/razões	Autor (data)
Abrir espaço para uma discussão sobre a correspondência entre a Geometria de Euclides e as leis que regem o mundo empírico.	Brito (1995)
Conduzir à reflexão sobre a concepção de espaço, de verdade matemática, de rigor, de consistência e de sistemas axiomáticos.	

Proporcionar, aos futuros professores, discussão sobre diferentes concepções de espaço e de verdade matemática.	Bonete (2000)
Ampliar visão do futuro professor dos conhecimentos geométricos euclidianos e não euclidianos.	
Proporcionar ao futuro professor uma compreensão do significado filosófico dos conhecimentos geométricos.	
Contribuir na qualidade do ensino e da aprendizagem da Geometria na escola básica, pois, o professor que possui conhecimentos sobre as Geometrias não Euclidianas estará mais bem preparado para o ensino da própria Geometria Euclidiana.	
Possibilitar ao futuro professor valer-se de outras geometrias que se relacionam ao dia a dia dos estudantes da escola básica e mostrar que existem fatos que a Geometria Euclidiana não explica.	Pataki (2003)
Proporcionar ao futuro professor o aprofundamento da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica.	Cabariti (2004)
Compreender a noção de modelo e identificar sistemas axiomáticos euclidianos e não euclidianos, em particular, o hiperbólico, como equivalentes em relação à consistência lógica.	
Contribuir para que o futuro professor inove sua prática pedagógica, pois possibilita o desenvolvimento de sua capacidade de argumentar, conjecturar, bem como o seu raciocínio dedutivo.	
Conduzir discussões sobre os pressupostos que levam à construção de novas teorias e favorecer a compreensão das principais características da Matemática e de sua natureza.	
Compreender a evolução da Matemática ao superar a visão da Geometria Euclidiana como a única que existe para a aceitação de diversos de modelos geométricos.	Reis (2006)
Possibilitar ao futuro professor uma melhor experiência de aprendizagem da Geometria, de modo que possam buscar propostas alternativas para seu ensino na escola básica.	
Proporcionar ao futuro professor alternativas de abordagens dessas geometrias na escola básica, em particular, da Geometria Esférica.	Marquezi (2006)
Capacitar o futuro professor o acesso e para o ensino de conhecimentos geométricos não euclidianos na escola.	Kaleff (2007)
Superar possíveis obstáculos cognitivos relacionados aos registros semióticos (gráficos e simbólicos) que se apresentam durante o processo de aquisição dos conceitos geométricos não euclidianos.	

Preparar o futuro professor para incorporar as Geometrias não Euclidianas na sua prática docente e, assim, ampliar as possibilidades de inclusão desses conteúdos nas suas aulas.	Santos (2009)
---	---------------

QUADRO 3 - A RELEVÂNCIA DO ESTUDO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Além desses argumentos, de um modo geral, essas pesquisas também apontam para a importância de incorporar essas geometrias no currículo da Matemática escolar, salientando que os futuros professores devem ser preparados para seu ensino na escola. Diante disso, apontam para a formação inicial do professor de Matemática como o ponto de partida para a efetivação de propostas que visam incluir as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica.

No que tange esse assunto, Mammana e Villani (1998) defendem a importância de incorporar essas geometrias nos cursos de Licenciatura em Matemática, bem como propor seu estudo na formação continuada dos professores.

A relevância da inclusão das Geometrias não Euclidianas no currículo da Matemática escolar se justifica quando se pretende desenvolver um ensino e aprendizagem da Geometria escolar que proporciona aos estudantes um conhecimento mais amplo sobre as possibilidades de interpretação do espaço, já que, há mais de um século, sabe-se que a Geometria de Euclides não é a única forma de interpretá-lo e compreendê-lo.

De acordo com Kaleff (2010, p. 5), “[...] desde os anos 90, existem estudos internacionais que ressaltam explicitamente a importância de se considerar, no ensino, a inclusão de outras geometrias além da GE”. Apesar disso, grande parte das escolas ainda se prende a um currículo que oculta o que se desenvolveu em Geometria após o século XIX, sendo que existem conhecimentos geométricos não Euclidianos tão importantes para a compreensão do espaço como aqueles advindos da Geometria de Euclides.

Mammana e Villani (1998) alertam que os conhecimentos geométricos não Euclidianos são praticamente inexistentes no âmbito da formação escolar, até os dias atuais. Para esses autores, o fato da Geometria ter sido considerada, durante séculos, como uma das mais relevantes disciplinas da formação escolar dos jovens acabou inibindo o progresso de seu próprio conhecimento, “[...] resultando num ‘congelamento’ do conhecimento geométrico por quase dois mil anos dentro do esquema euclidiano” (MAMMANA; VILLANI, 1998, p. 2, tradução livre da autora).

O problema se agrava ainda mais quando, nas instituições de ensino superior que formam o professor de Matemática, essas geometrias são consideradas como um saber científico e, assim, não fazem parte dessa formação. Leivas e Soares (2011) salientam que a maioria dos cursos de formação de professores de Matemática não insere, na sua proposta curricular, conteúdos de Geometrias não Euclidianas, alertando que muitos professores da escola básica desconhecem a existência, por exemplo, de triângulos não euclidianos. Dessa forma, presume-se que se não houver uma preocupação em preparar os licenciandos para o ensino dessas geometrias na escola, a inclusão de conteúdos geométricos não Euclidianos no currículo escolar não será efetivada. Portanto, torna-se relevante considerar, nas licenciaturas, a criação de disciplinas que desenvolvem “[...] abordagens e conceitos geométricos mais recentes de conhecimentos matemáticos, além daqueles que usualmente são desenvolvidos nos diversos currículos” (LEIVAS; SOARES, 2011, p. 74).

Com base no levantamento que realizei das propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná, verifiquei, em alguns desses cursos, a oferta de disciplinas que abordam as Geometrias não Euclidianas. Isso pode ser considerado um avanço, porém, resta saber de que forma esses conhecimentos estão sendo veiculados nessa formação. Estes cursos estariam tratando pedagogicamente os conhecimentos relativos às Geometrias não Euclidianas de tal modo que o futuro professor, ao iniciar seu trabalho na escola, conseguirá estabelecer relações entre aquilo que aprendeu na Universidade e as geometrias que deverá ensinar aos seus alunos do ensino Fundamental e Médio?

Para Leivas (2009, p. 15), nessas disciplinas, muitas vezes:

[...] não há uma concepção a ser seguida, pois determinados professores, por exemplo, desenvolvem suas disciplinas pelo caminho de resolução de exercícios rotineiros de simples aplicações de fórmulas. Alguns utilizam direta e exclusivamente o método axiomático e outros sequer fazem conexões da Geometria com outras áreas do conhecimento matemático ou conexões de outras áreas com a Geometria.

Citando Mammana e Villani (1998), Kaleff destaca que, há mais de dez anos, já existem propostas que buscam:

[...] sensibilizar colegas das universidades para um fato, considerado essencial e necessário, tanto à pesquisa matemática, quanto para o ensino: o de um conhecimento profundo e crítico da geometria elementar,

incluindo o reconhecimento da importância do papel da habilidade da visualização, os fundamentos das geometrias não-euclidianas, bem como suas aplicações, seus aspectos epistemológicos, históricos e didáticos (MAMMANA; VILLANI⁵, 1998, p. 326, apud KALEFF, 2010, tradução livre da autora).

No que se refere aos aspectos históricos das Geometrias não Euclidianas, poderá ser interessante aliá-los aos seus aspectos filosóficos, considerando as conexões entre a dimensão histórica e a filosófica dessas geometrias como elemento importante na sua compreensão, particularmente, na aprendizagem dos futuros professores de Matemática em formação inicial. Nessa perspectiva, apresento, no capítulo seguinte, uma breve síntese do desenvolvimento histórico das Geometrias não Euclidianas.

⁵ MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

2 A DIMENSÃO HISTÓRICO-FILOSÓFICA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”
Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856).

Alguns pesquisadores como Ponte (1997), Arthury (2007), dentre outros, têm apontado para o estudo das questões históricas e filosóficas da Ciência como importante elemento na formação dos futuros professores para a escola básica. De acordo com Arthury (2007, p. 29): “Uma formação acadêmica mais voltada às questões de ordem histórica e filosófica pode contribuir para uma visão de ciência mais próxima do que conhecemos hoje sobre sua natureza [...]”.

Este autor considera que as concepções sobre a natureza da Ciência influenciam na forma pela qual a educação é organizada. Para ele: “Ignorar esta influência na educação é um passo perigoso rumo a uma metodologia de ensino pueril, quando não pernicioso” (ARTHURY, 2007, p. 16). Argumenta, ainda, que se tratando da formação de professores, desconsiderar tal influência pode comprometer significativamente a qualidade dessa formação.

Em particular, na formação dos futuros professores de Matemática para a escola básica, a abordagem de questões de ordem histórica e filosófica da Matemática poderá trazer significativas contribuições. De acordo com Ponte (1997, p. 1):

Se a Matemática for descrita em termos dos seus conceitos, características, história e práticas, abre-se espaço para que a filosofia da Matemática, para além de reflectir sobre questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, se debruce também sobre questões externas relacionadas, nomeadamente, com a origem histórica e os contextos sociais de produção desse conhecimento. A actividade matemática poderá, assim, ser discutida como parte integrante da cultura humana em geral.

Essa formação pressupõe preparar um professor capaz de fazer a transposição do conhecimento científico para objeto de ensino da Matemática escolar. No entanto, o papel desta transposição não focaliza apenas seus conteúdos

específicos, mas também as diferentes particularidades dessa ciência, as quais relacionam as concepções filosóficas adotadas para a Matemática ao longo do tempo e as características do contexto histórico de sua produção.

Nessa perspectiva, leva-se em conta a influência das concepções e posturas filosóficas relativas aos conceitos e princípios que orientam o ensino e a aprendizagem da Matemática. Sobre isto, Ponte (1997, p. 28) argumenta:

De facto, situarmo-nos na perspectiva de ajudar quem aprende a compreender um corpo de saberes matemáticos que é o produto contingente de forças evolutivas históricas e culturais, é um problema diferente de ensinar segundo uma perspectiva que supõe a existência de um saber matemático imutável, eterno, fortemente estruturado, infalível, rigoroso e abstracto por natureza, que é exterior aos alunos, mas que estes podem receber do professor através de mecanismos de transmissão, imitação e absorção geral.

Com base no exposto, pode-se dizer que o estudo das Geometrias não Euclidianas, na formação de futuros professores de Matemática, poderá ser mais significativo se, para além de contemplar as características internas de seus conteúdos específicos, possibilite também a investigação sobre a sua natureza e o processo de sua produção. Ao explorar o desenvolvimento histórico dessas geometrias emergem questionamentos a respeito dos Fundamentos da Matemática, que conduzem à reflexão sobre a sua natureza, bem como abrem espaço para a discussão de questões de ordem filosófica envolvidas no conhecimento matemático.

Embora as Geometrias não Euclidianas tenham sido divulgadas para a comunidade científica somente na segunda metade do século XIX, a história da criação dessas geometrias iniciou-se em um período muito anterior a esse século. Pode-se dizer que ela se inicia na própria história da Geometria Euclidiana. No entanto, não pretendo apresentar uma cronologia sobre a história da Geometria, tampouco realizar uma exposição detalhada de seu desenvolvimento, tendo em vista que, na literatura, há um número expressivo de trabalhos que abordam esse tema.

Além disso, as pesquisas sobre o ensino das Geometrias não Euclidianas apresentadas na Revisão de Literatura deste estudo destacam momentos da história da Geometria Euclidiana e das não Euclidianas, de forma que, na medida em que se fizer necessário prestar esclarecimentos históricos mais detalhados, me reportarei a esses trabalhos, dentre outros que são considerados relevantes para fundamentar a presente pesquisa.

O que pretendo abordar, nesta pesquisa, são as conexões existentes entre a

história da Geometria Euclidiana e os fatos que desencadearam a criação de novas geometrias. Darei destaque, portanto, aos avanços que ocorreram no desenvolvimento da produção dos conhecimentos geométricos, tendo como pano de fundo o contexto cultural e social do período em que se processaram, pois, conforme Pavanello (1989, p. 56): “Não há como negar as conexões entre o desenvolvimento material da sociedade e o da ciência”.

Embora a Geometria Euclidiana e não Euclidiana pertençam a períodos que distam mais de vinte séculos, a história de ambas se relacionam e revelam os motivos que levaram matemáticos, cientistas e filósofos do século XIX ao enfrentamento e a um choque de concepções diante da descoberta das novas geometrias. Este choque envolveu tanto a concepção de Geometria como também transformou o modo de conceber a própria ciência Matemática.

Trata-se de uma longa trajetória que tem seu marco de partida no período em que Euclides iniciou o projeto de sistematização da Geometria, em meados do século III a. C. Para esclarecer a primeira conexão entre essas geometrias, é importante lembrar que, na época em que viveu Euclides, o filósofo mais influente entre os intelectuais gregos era Platão.

Por meio de sua filosofia, Platão tinha por finalidade estipular uma forma de descobrir o conhecimento que revelaria as verdades escondidas atrás da realidade aparente do mundo objetivo. Para ele, todas as coisas que podem ser vistas neste mundo são meras ilusões da mente. Ou seja, tudo deste mundo são apenas cópias das verdadeiras coisas que pertencem a um mundo de formas perfeitas, que é eterno e imutável – o Mundo das Ideias. Na concepção platônica, é somente nesse mundo ideal que a inteligibilidade do universo é revelada.

Dentre os adeptos dessa filosofia, Euclides era um dos mais notáveis. Assim, ele adotou para a Matemática a concepção platônica, a qual, conforme Davis e Hersh (1995) explicam, considera que os objetos matemáticos não possuem uma estrutura física, pois existem fora do espaço e do tempo, portanto, são entes reais, independente de serem conhecidos ou não. Além disso, não são criados e nunca poderão ser modificados ou até mesmo destruídos. Por isso é que o matemático platonista não constrói nenhum conhecimento, seu trabalho é descobri-lo.

Porém, se os objetos matemáticos são preexistentes e para conhecê-los necessitam ser descobertos, a questão que se coloca é: como os matemáticos platonistas descobrem esses conhecimentos?

Na concepção platônica de Matemática, por não possuírem uma realidade

física, os objetos matemáticos são colocados no plano da intuição, portanto, para aceitar a sua existência não se faz necessário submetê-los a qualquer tipo de experiência. Nesse sentido, os matemáticos platonistas necessitam da intuição para que possam dar significado à existência dos objetos matemáticos.

Por exemplo, a reta é um objeto matemático que não tem uma existência material. É no plano da intuição que é concebida como um conjunto de infinitos pontos – esta é uma verdade intuitiva para os adeptos da concepção platônica de Matemática, isto é, uma verdade evidente para a mente. A Geometria Euclidiana, no seio da concepção platônica, desempenhou um papel fundamental no legado de Platão, uma vez que: “As verdades da geometria tratavam das formas ideais, cuja existência era evidente para a mente” (DAVIS; HERSH, 1995, p. 306).

A Geometria, mais do que qualquer outro ramo da Matemática, representava o melhor e o mais seguro caminho para alcançar essa certeza. De acordo com Miguel (1995, p. 23), “[...] foi com esse olhar platônico transcendental [...] que Euclides olhou a produção matemática de seus antecessores [...]”. Com isto, constituiu-se o primeiro elo da corrente de ideias que há entre a Geometria Euclidiana e a Filosofia de Platão.

Assim, Euclides iniciou seu projeto de axiomatização da Geometria, reunindo, em uma única obra – Os Elementos – quase toda a produção matemática acumulada até aquele momento. Composta de treze livros, a obra de Euclides é considerada o primeiro tratado científico e modelo para todas as demais ciências, exercendo, até os dias atuais, poderosa influência no modo de conceber a Matemática e seu ensino.

Na axiomática euclidiana, utiliza-se o método de redução ao absurdo para demonstrar os teoremas, assim, Euclides adota uma série de afirmações para as quais não se exige prova, pois são consideradas verdades autoevidentes. A partir dessas afirmações, executa-se um conjunto de passos por meio de raciocínio puramente lógico e, não havendo nenhuma contradição durante esse procedimento, conclui-se a demonstração dos teoremas e propriedades da Geometria. Segundo Barbosa (1995), os postulados e noções comuns são separados em dois grupos, porém, a distinção entre esses dois grupos não é suficientemente clara, sendo as noções comuns as hipóteses que são consideradas verdadeiras por qualquer pessoa inteligente e os postulados são as hipóteses peculiares da Geometria.

Os postulados foram apresentados no Livro I da obra Os Elementos, enunciados por Euclides da seguinte forma:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Cabe lembrar que o postulado número cinco ficou conhecido como Postulado das Paralelas.

Na sequência, são apresentadas as noções comuns, conforme segue:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- [4. E, caso iguais seja adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.]
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Essa forma de descrever a Geometria garantiu a certeza da verdade matemática e também que não havia outra forma de conceber o espaço. Assim, a Geometria Euclidiana perdurou hegemônica por mais de vinte séculos.

Até meados do século XIX, a possibilidade de existência de outras geometrias jamais fora aventada e não havia por que se preocupar com aquilo que era consenso – a Geometria Euclidiana era a única possibilidade de interpretação do espaço. É neste ponto que identifico, como tanto outros autores já o fizeram, outra conexão entre a Geometria Euclidiana e as não Euclidianas, pois a criação destas últimas partiu das inquietações provocadas por um dos postulados de Euclides – o Postulado das Paralelas.

Os relatos sobre a História da Matemática revelam que o referido postulado foi alvo de investigação de matemáticos de várias gerações, que consideravam seu enunciado pouco evidente, o que era necessário para ser aceito como um postulado. Diante do intrigante enunciado, suspeitava-se que o Postulado das Paralelas poderia ser demonstrado como uma proposição derivada dos outros quatro. Caso isso fosse conseguido, tratar-se-ia de um teorema, porém, isto jamais fora alcançado.

A História da Matemática também revela que as oportunidades de criação das novas geometrias ocorreram em períodos muito anteriores ao século XIX. Trata-

se de momentos históricos nos quais suas relações desencadeiam questões filosóficas acerca do pensamento geométrico e que implicaram na ruptura do paradigma euclidiano, cuja hegemonia se manteve por mais de dois mil anos nas teorias matemáticas.

Se a criação das Geometrias não Euclidianas não ocorreu antes, possivelmente foi porque o paradigma geométrico colocado por Euclides impediu os matemáticos de levarem adiante suas investigações em torno do Postulado das Paralelas. Para isso, teriam que levantar uma suspeita de que a Geometria Euclidiana poderia não ser a única base sólida para a compreensão do espaço.

Nenhum dos geômetras que viveram e investigaram o Postulado das Paralelas até meados do século XIX pensou em tal possibilidade, pois isto significaria que a certeza de que existia uma verdade matemática absoluta, eterna e imutável, poderia ser solapada.

Assim, a aliança entre Euclides e Platão assegurou, por muitos séculos, a confiança na Matemática. Contrariar Euclides colocaria em xeque não só a Geometria, mas abalaria toda a estrutura da Matemática que se pensava ter alcançado, isto é, a solidez de seus fundamentos.

Pode-se dizer que, a partir do momento em que o Quinto Postulado de Euclides suscitou inquietações, começou a ser germinada a semente que deu origem às Geometrias não Euclidianas. Embora não exista nenhum registro sobre o que Euclides pensava sobre esse postulado, não seria surpreendente que ele, em algum momento, tenha se empenhado em demonstrá-lo. Não se pode afirmar se isso realmente ocorreu, mas poderiam ter nascido na mente do próprio Euclides as primeiras raízes dessas geometrias, ainda que de forma totalmente inconsciente.

Se a História da Matemática não pode confirmar nada sobre essa possibilidade, por outro lado, ela revela que passados cerca de 100 anos após a axiomatização da Geometria, Ptolomeu (séc. II a. C.) já investigava o famoso Postulado das Paralelas; assim como ele muitos outros o sucederam: Proclus (410-485), Nasiredin (1201-1274), Comandino (1509-1575), Clavio (1537-1612), Cataldi (1548-1626), Boreli (1608-1679), Vitale (1633-1711), Wallis (1616-1703). Todos esses matemáticos, de alguma forma, fizeram parte da História das Geometrias não Euclidianas. As principais investigações sobre o Postulado das Paralelas que se tem registro foram realizadas por Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777) e Legendre (1736-1813).

O jesuíta italiano Girolamo Saccheri, um admirador da obra de Euclides, foi o

primeiro que realizou uma investigação realmente científica sobre o Postulado das Paralelas, publicando os resultados de seus estudos em seu livro *Euclides Ab Omne Naevo Vindicatus* – Euclides Livre de Toda Imperfeição (EVES, 2004).

Considerando a admiração de Saccheri à obra de Euclides, não seria surpreendente pensar que seu principal intento não era outro senão afastar qualquer menção duvidosa sobre a Geometria Euclidiana. No entanto, ele não conseguiu encontrar uma prova satisfatória para o referido postulado, pois, utilizando o método de redução ao absurdo, acabou forçando uma contradição em seu desenvolvimento. “Não tivesse ele se mostrado tão ávido de exhibir uma contradição e, em vez disso, tivesse admitido sua incapacidade de alcançá-la sem dúvida, os méritos da descoberta das Geometrias não Euclidianas caberia a ele” (EVES, 2004, p. 540).

Pouco mais de trinta anos seguidos dos estudos de Saccheri, o matemático suíço Johan Heinrich Lambert (1728 - 1777) investigou o postulado euclidiano, cujos resultados só foram publicados após a sua morte, na obra intitulada *Die Theorie des Parallellinien*. Apesar de ter avançado consideravelmente em relação aos estudos de Saccheri, as conclusões de Lambert também não foram precisas (EVES, 2004).

Outro matemático que buscou a tão esperada prova foi Adrien-Marie Legendre. Porém, igualmente sem sucesso. Por outro lado, Legendre contribuiu significativamente para a popularização do postulado, pois suas várias tentativas de prová-lo foram publicadas por ele em seu *Éléments de Géométrie*, obra amplamente adotada e reeditada diversas vezes (EVES, 2004).

Como mostra a História da Matemática, nenhum desses matemáticos pensou na possibilidade de existir outras geometrias que não fosse a Euclidiana. Se não o fizeram, possivelmente foi porque o paradigma geométrico colocado por Euclides os impediu de levar adiante suas investigações em torno do Postulado das Paralelas. Para isso, teriam que levantar uma suspeita de que a Geometria Euclidiana poderia não ser a única base sólida para a compreensão do espaço.

Cumprе salientar que todos esses matemáticos trouxeram significativas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e, mesmo que nenhum deles tenha suspeitado da existência das Geometrias não Euclidianas, eles abriram caminhos para que, mais tarde, outros estudiosos o fizessem.

Os esforços de dois mil anos para mudar o status da famosa afirmação de Euclides, de um postulado para um teorema, resultou em fracasso no que diz respeito a esse objetivo, mas eles foram muito bem-sucedidos em outro aspecto. Eles serviram para reorientar o pensamento dos homens a respeito da natureza da **geometria**, foram eles que fizeram a preparação necessária

para um ambiente cultural que permitiu aos seus beneficiários a realização de uma obra de maior importância ainda (BLUMENTHAL, 1961, p. 11-12, tradução livre da autora).

De acordo com Blumenthal, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o maior matemático do século XIX, ou até mesmo de todos os tempos, talvez tenha sido o primeiro a conceber uma Geometria diferente da Euclidiana. Mais do que qualquer outro matemático que o antecedeu nas tentativas de prova do Quinto Postulado, ele compreendeu a profundidade do problema que por tantos séculos vinha ocupando a mente de muitos estudiosos. Percebendo a impossibilidade de encontrar uma contradição na demonstração do Quinto Postulado, Gauss formulou uma Geometria na qual esse postulado é, de fato, negado, chamando-a de Geometria não Euclidiana.

Em uma carta destinada ao seu amigo Franz Adolf Taurinus, com data de 08 de novembro de 1824, Gauss revela as conclusões de sua investigação. Há um trecho da carta no qual Gauss afirma:

A suposição de que a soma dos ângulos [de um triângulo] é menor do que 180° leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa [a euclidiana], mas completamente consistente, a qual tenho desenvolvido para minha inteira satisfação. Os teoremas desta geometria parecem paradoxais, e para os não iniciados, absurdos; mas a reflexão calma, constante, revela que eles não contêm nada de impossível (BLUMENTHAL, 1961, p. 11-12, tradução livre da autora).

Em Barbosa (1995) também encontra-se uma tradução desta carta, da qual retiro um trecho em que Gauss relata sobre a possibilidade de existir um espaço que se opõe à concepção euclidiana:

Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria não euclidiana tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe à nossa concepção é que, se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (por nós desconhecida). Mas, me parece que conhecemos apesar do que dizem os metafísicos, muito pouco, ou muito próximo do nada, a respeito da verdadeira natureza do espaço, para considerar como absolutamente possível aquilo que se nos apresenta como não natural (BARBOSA, 1995, p. 39).

É interessante observar que o próprio Gauss chama a atenção para a existência de uma geometria diferente da Euclidiana, sugerindo uma nova realidade em relação à concepção de espaço e, diferente do que se pensava até aquele

momento, remetia o fato ao pouco conhecimento que se tinha sobre o espaço.

As decobertas de Gauss nesse campo eram realmente surpreendentes, mas, apesar disso, ele nunca as levou a público. Mesmo na carta que escreveu à Taurinus, ele tomou cuidado para que suas ideias não fossem divulgadas, advertindo-o para que a considerasse “[...] uma publicação privada, da qual nenhum uso público, ou a utilização deliberada em qualquer meio de publicidade, devesse ser feito” (BLUMENTHAL, 1961, p. 12, tradução livre da autora).

Blumenthal esclarece que a prudência de Gauss não era injustificada, pois, segundo esse autor, a sociedade ainda não havia se libertado totalmente do tradicionalismo e autoritarismo que aprisionou a liberdade de pensamento durante toda a Idade Média.

Além disso, tratava-se de um período em que a filosofia exercia forte influência no pensamento científico e, dentre os filósofos mais influentes, destacava-se Immanuel Kant (1724-1804). Segundo Eves (2004, p. 545): “A teoria Kantiana predominava tão amplamente naquele tempo que quem defendesse um ponto de vista contrário corria o risco de ser considerado meio maluco”.

Sobre esse assunto, Blumenthal (1961, p. 13) destaca:

A imensa autoridade do filósofo alemão Immanuel Kant, que morreu em 1804, apoiou a doutrina de que a geometria euclidiana era inerente à natureza. (Assim, embora Platão dissesse apenas que Deus geometriza, Kant afirma, com efeito, que Deus geometriza de acordo com os Elementos de Euclides). Gauss recuou diante das controvérsias que a publicação da sua nova geometria o teria envolvido. Ele tinha maneiras mais importantes para gastar o seu tempo.

Barbosa (1995, p. 39-40) destaca a relação estabelecida entre a Igreja Romana e a filosofia Kantiana:

[...] a filosofia de Kant havia sido assimilada pela Igreja Romana e considerada como um dogma. Era a época em que as sombras da inquisição assustavam todos, particularmente as pessoas que adquiriam o domínio de qualquer conhecimento que pudesse ser considerado, de qualquer forma, contrário à doutrina. Na base da explicação do universo daqueles dias, estava a Geometria euclidiana.

Nos comentários desses dois autores, pode-se perceber que, naquela época, parecia ser inadmissível aceitar a existência de outras geometrias e ninguém ousava pensar nessa possibilidade. Conforme Davis e Hersh (1995, p. 306)

esclarecem:

A perda da certeza na geometria era filosoficamente intolerável, pois ela implica a perda de qualquer certeza no conhecimento humano. A geometria representava, desde Platão, o exemplo acabado da possibilidade de certeza do conhecimento humano.

Contudo, alguns matemáticos continuavam a realizar investigações sobre a possibilidade de existência de outras geometrias e, em certos casos, suas conclusões eram muito semelhantes, senão idênticas. Um desses casos ocorreu entre o jovem húngaro Janos Bolyai e o renomado Gauss. Porém, conforme mostra a História da Matemática, tudo indica que Gauss o antecedeu.

Bolyai ficou impressionado com o fato de haver proposições independentes do Quinto Postulado, as quais eram válidas em qualquer geometria, independentemente da hipótese assumida sobre as paralelas. Tal fato foi considerado por ele como a base de uma geometria geral, absoluta para o espaço, na qual a Geometria Euclidiana seria um caso particular (BARBOSA, 1995).

Entusiasmado com suas descobertas sobre a independência do Postulado das Paralelas, em uma carta escrita para seu pai, o jovem matemático escreveu: “Do nada eu criei um universo novo e estranho” (EVES, 2004, p. 542). Após tomar conhecimento por intermédio de seu pai que Gauss, possivelmente antes dele, já havia descoberto as mesmas coisas em relação às novas geometrias, Bolyai ficou profundamente decepcionado. Acabou publicando suas investigações como um apêndice de vinte e seis páginas em um livro de seu pai (EVES, 2004).

Dois anos antes da publicação de Bolyai no apêndice, o matemático Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) já havia publicado suas descobertas a respeito das Geometrias não Euclidianas. Lobachevski foi um dos primeiros matemáticos que desenvolveu um novo sistema geométrico autoconsistente – a Geometria Hiperbólica. Em 1829 foi publicado seu primeiro artigo sobre Geometrias não Euclidianas. Desenvolveu outros trabalhos importantes sobre esse tema, tais como o texto escrito em alemão *Geometrische Unter Zur Theorie* (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas), publicado em 1840, e a obra escrita em francês intitulada *Pangéométrie (Pangeometria)*, publicada em 1855, um ano antes de sua morte e pouco depois de ter perdido a visão. Como nesse período (século XIX) as novas descobertas científicas eram propagadas de forma extremamente lenta, Lobachevski morreu antes de ver seu trabalho reconhecido de forma ampla

(EVES, 2004).

No ano de 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) desenvolveu um sistema geométrico igualmente autoconsistente – a Geometria Elíptica. Riemann substituiu o Quinto Postulado de Euclides pela negação da existência de retas paralelas, assim como a possibilidade de prolongar, indefinidamente, um segmento de reta.

Durante aproximadamente trinta anos, iniciando com os estudos de Gauss, Bolyai, Lobachevski e, depois, Riemann, as ideias sobre a existência de novas geometrias foram sendo criadas e constituindo outros sistemas geométricos, porém, o estatuto ontológico dessas geometrias não se estabeleceu imediatamente após a sua divulgação. Na verdade, pode-se dizer que até mesmo o temor de Gauss em divulgar suas ideias poderia não ter fundamento, quando essas geometrias foram levadas a público, não houve quem lhes desse muita credibilidade. Assim, nem mesmo a audácia intelectual de Lobachevski permitiu que ele desfrutasse das honras de ter seu nome vinculado à criação de uma dessas geometrias, pois até a sua morte ninguém as havia reconhecido como teorias válidas.

De certa forma, as Geometrias não Euclidianas mantiveram-se à margem do conhecimento até o ano de 1868, quando, finalmente, os matemáticos souberam que elas existiam. Porém, a aceitação dessas geometrias não foi imediata. Quando as novas geometrias foram amplamente divulgadas para a comunidade de matemáticos, filósofos e cientistas do século XIX houve um choque de concepções que impediu que elas fossem bem aceitas, já que desencadeavam questões filosóficas para as quais não se tinha uma solução simples. Para a maioria dos intelectuais desse período, aceitar a existência de outras geometrias implicava um problema mais abrangente, pois “[...] o que estava em causa era não só a antiga crença grega da verdade matemática como chave para conhecer o Universo, mas o próprio poder da razão para aceder ao conhecimento verdadeiro” (PONTE, 1997, p. 12).

Diante disso, os matemáticos, filósofos e cientistas se viram ante uma situação que poderia abalar suas convicções sobre o conhecimento humano. Assim, o estatuto das Geometrias não Euclidianas no conhecimento foi adiado o tanto quanto possível, permanecendo “[...] na obscuridade durante um longo tempo, até poderem ser associadas com as novas teorias que surgiram” (SILVA, 2006, p. 117).

Conhecer esse momento histórico do desenvolvimento do conhecimento geométrico poderá contribuir na compreensão dos fatores que levaram a uma

significativa mudança na concepção de Matemática e nos modos de sua produção. Porém, de acordo com Freudenthal (1973), apesar do desenvolvimento histórico dessas geometrias ser considerado como um dos capítulos mais conhecidos da História da Matemática, o modo como elas foram recebidas pela comunidade de intelectuais do século XIX é um assunto bem menos familiar.

Na perspectiva de realizar uma abordagem histórica, ainda que seja breve, das implicações dessas geometrias na mentalidade científica do século XIX, tomo por princípio que olhar para os conhecimentos científicos, historicamente produzidos, implica mergulhar em um contexto mais amplo do que o campo restrito de sua produção, tendo em vista que não sofre influências somente do contexto interno da Ciência, mas também do contexto geral no qual se processaram. Nas palavras do historiador Eric. J. Hobsbawam (2006, p. 384):

[...] mesmo o mais apaixonado crente da imaculada pureza da ciência pura é consciente de que o pensamento científico pode, ao menos, ser influenciado por questões alheias ao campo específico de uma disciplina, ainda que só porque os cientistas, até mesmo o mais antimundano dos matemáticos, vivem em um mundo mais vasto que os de suas especulações. [...]. Em todo ele há um grande espaço para o estímulo ou a formação do pensamento através dos fatores externos.

De um modo geral, o século XIX foi um período que passou por grandes transformações intelectuais que refletiram na forma de pensar e agir sobre o mundo e, segundo Hobsbawam (2002, p. 340-341):

[...] implicava o fim da compreensão do universo na imagem do arquiteto ou do engenheiro: um edifício ainda inacabado, mas cujo término não tardaria muito; um edifício baseado “nos fatos”, ligados entre si pelos firmes andaimes de causas determinando efeitos e pelas “leis da natureza”, e construído com as ferramentas confiáveis da razão e do método científico, uma construção do intelecto, mas que também expressava, quando vista de forma mais acurada, as realidades objetivas do cosmos. [...] Foram esse modelo de universo e a maneira de a mente humana compreendê-lo que agora faliam.

Dentre as revoluções científicas que marcaram aquele século uma das mais profundas ocorreu no campo da Matemática. A criação das Geometrias não Euclidianas é exemplo disso e, apesar de não ter repercussão no contexto geral da sociedade daquela época, trouxe grandes contribuições aos avanços científicos do século que viria. De acordo com Paty (2005), a existência matemática das novas geometrias colocaria seriamente em questão a filosofia de Kant, “[...] que tinha

privilegiado a geometria euclidiana a ponto de torná-la a referência da racionalidade pura enquanto 'sintética a priori' [...]" (PATY, 2005, p. 646).

Assim, iniciou-se um novo período histórico do desenvolvimento da Matemática, modificando a forma de concebê-la, assim como a maneira pela qual se compreendia o espaço e, sobretudo, mudou a forma de conceber a própria Ciência. Conforme Foguel (2007, p. 27) destaca: "Os homens da ciência, filosofia, psicologia e outras áreas tiveram que abrir mão da visão euclidiana do real aparente".

Foi no contexto dessas transformações que se inaugurou uma discussão científica e filosófica sobre a natureza da Geometria. Ao admitir a existência uma multiplicidade de sistemas geométricos, a questão se uma geometria é ou não verdadeira perdeu significado. O que passou a ser importante saber era qual delas é a mais apropriada para descrever as diferentes regiões do espaço.

Não foi por acaso que a tomada de consciência sobre a invenção na atividade científica só teve início no século XIX (e bem mais para os seus finais): sem dúvida, foram decisivos os acontecimentos que a partir de então se deram na matemática e na física. Com efeito, é a época em que vemos afrouxar o laço até então apertado entre a matemática e a natureza, com a invenção das matemáticas que pareciam contradizer a "evidência" da experiência comum – tais como as Geometrias não Euclidianas – ou ainda puramente abstratas ou formais (PATY, 2001, p. 6).

As Geometrias não Euclidianas, prematuras para a Física de sua época, encontraram seu lugar no desenvolvimento da Teoria da Relatividade de Einstein, no século seguinte. No reencontro da Matemática com a Física, o modo de conceber o universo passou por novas transformações.

Foi através das novas geometrias que os cientistas iniciaram a busca por explicar o mundo físico dos nossos dias, por meio de ferramentas teóricas modernas ligadas à Teoria da Relatividade. Essa grande abertura científica e filosófica, trazida pelo surgimento das GNE⁶ às ideias euclidianas e às de Newton relacionadas à Física, que fez com que os conceitos anteriores ao século XIX fossem considerados insuficientes para a representação dos fenômenos físicos (KALEFF, 2010, p. 3).

Com a independência do Postulado das Paralelas, a Geometria se libertou de suas amarras que, por séculos, a limitaram em um único sistema, no qual só

⁶ A autora utiliza a abreviatura GNE para a expressão "Geometrias não Euclidianas".

valiam as regras da axiomática euclidiana.

[...] nem os velhos hábitos de pensar nem a autoridade filosófica poderiam suprimir a convicção de que o interminável registro de fracassos na busca de uma prova para o postulado das paralelas se devia não a uma falta de engenhosidade, mas, antes, ao fato de que o postulado das paralelas era realmente *independente* dos outros (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 267).

No entanto, a independência do Postulado das Paralelas levantou um problema clássico da Geometria: a demonstração de sua consistência. Diz-se que um sistema de axiomas é consistente se não houver quaisquer pares de teoremas contraditórios que são dedutíveis a partir de um axioma. Nesse sentido, o sistema de axiomas da Geometria Euclidiana é consistente.

Porém, a consistência das Geometrias não Euclidianas não é demonstrada dessa mesma forma, mas sim, a partir de modelos que são construídos de tal maneira que é possível verificar que todos os postulados euclidianos, com exceção do Postulado das Paralelas, são satisfeitos. O matemático Eugenio Beltrami (1835-1900) realizou a primeira tentativa de construção de um modelo para a Geometria Hiperbólica, denominado Pseudo-Esfera. Outro modelo para a Geometria Hiperbólica foi criado por Félix Klein (1849-1945), no qual:

[...] o “plano” é o conjunto dos pontos interiores do círculo; pontos fora deste não são considerados. Cada ponto dentro do círculo é denominado de “ponto” não-euclidiano; cada círculo é denominado de “reta” não-euclidiana, “deslocamento” e “congruência” no sentido não-euclidiano permanece o mesmo que na Geometria Euclidiana. É fácil demonstrar que o novo sistema satisfaz todos os postulados da Geometria Euclidiana, com a única exceção do postulado das paralelas (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 269).

Mammana e Villani (1998) comentam que o matemático Henri Poincaré (1854-1912), em um livro de memórias datado de 1887, apresentou um modelo para a Geometria Hiperbólica, conhecido como disco de Poincaré. Nesse modelo as propriedades geométricas dos pontos e das retas são as mesmas dadas no modelo de Klein. De acordo com esses autores:

Os pontos do plano hiperbólico no modelo de Poincaré são pontos no interior do círculo ou disco. As linhas são os arcos de circunferência que interseccionam a fronteira do círculo ou disco ortogonalmente. Pode-se equiparar o plano hiperbólico com uma medida de comprimento, de modo que certas distâncias são constantes na geometria euclidiana, mas quando medida pela distância hiperbólica eles vão para o infinito quando nos aproximamos do círculo limite. Os ângulos são medidos por seus valores

como ângulos euclidianos (MAMMANA; VILLANI, 1998, p. 13. Tradução livre da autora).

Para a Geometria Elíptica, a superfície do globo terrestre é o modelo mais simples e óbvio a ser tomado. Na superfície esférica, a menor distância entre dois pontos quaisquer A e B trata-se sempre de uma linha curva.

Como se pode perceber, com a independência do Postulado das Paralelas “[...] surgem novos horizontes para a Geometria, ou seja, começam a surgir novas interpretações para ponto, reta, plano e para o próprio espaço concebido por Euclides” (LEIVAS, 2009, p. 160-161). Assim, os matemáticos tiveram liberdade para construir outros sistemas geométricos nos quais o Postulado das Paralelas é substituído pela sua negação. Na Geometria Hiperbólica nega-se a **unicidade** de retas paralelas que passam por um mesmo ponto. Já na Geometria Elíptica, nega-se a **existência** de tais retas. As propriedades dessas geometrias apresentam resultados, de certa forma, conflitantes quando comparadas às propriedades da Geometria Euclidiana.

Davis e Hersh (1995) apresentam uma comparação entre essas três geometrias, da qual destacamos conceitos e propriedades básicas. Por exemplo, na Geometria Euclidiana, a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, enquanto que na Hiperbólica e na Elíptica, essa distância é uma linha curva. Também, quaisquer pares de retas paralelas são equidistantes no plano euclidiano, no entanto, na superfície hiperbólica as linhas paralelas nunca equidistam uma da outra. Mais surpreendente ainda é a inexistência de linhas paralelas na Geometria Elíptica.

Conforme já foi comentado, a criação das Geometrias não Euclidianas partiu das inquietações causadas pelo Quinto Postulado euclidiano, cujo enunciado parecia não ser tão evidente quanto o dos quatro primeiros. Ao longo dos anos, com o objetivo de simplificar sua escrita, o matemático britânico John Playfair (1748-1819) apresentou uma formulação do enunciado desse postulado, que é mais convencional e ficou conhecida como Axioma de Playfair: Em um plano, dada uma linha r e um ponto P exterior a r , existe uma e somente uma linha que passa P e é paralela a r .

Na Geometria Hiperbólica, esse enunciado é substituído por: Em um plano, dada uma linha r e um ponto P exterior a r , existem pelo menos duas linhas que passam por P e são paralelas a r . Já na Geometria Elíptica é feita a seguinte

substituição do enunciado das paralelas: Em um plano, dada uma linha r e um ponto P exterior a r , existem linhas que passam por P e são paralelas a r .

Talvez, uma das propriedades mais interessantes dessas geometrias é a da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, cujo resultado é sempre igual a 180° para triângulos euclidianos. Porém, nos triângulos hiperbólicos esse resultado é sempre inferior a 180° , enquanto que nos triângulos elípticos ou esféricos, essa soma é sempre superior a 180° .

Até o século XIX, esses resultados eram desconhecidos da maioria dos matemáticos, chocando-se fortemente com a concepção euclidiana de espaço adotada pelos homens da Ciência daquela época. Desde a época de Euclides, vinte séculos se passaram até que se conjecturasse a possibilidade de construção de sistemas geométricos logicamente consistentes. Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann (1826-1866) mostraram que isso é possível.

Foram esses estudiosos que nos permitem, nos dias de hoje, olhar para além da janela aberta pelos conhecimentos e paradigmas propostos por Euclides, pois a negação do Quinto Postulado teve como consequência a descoberta da *geometria hiperbólica* (em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta) e da *geometria elíptica* (na qual não existem retas paralelas), e o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao euclidiano, conhecidos como *geometrias não-euclidianas* (KALEFF, 2010, p. 3).

Conforme procurei destacar nessa breve síntese, a dimensão histórico-filosófica do conhecimento sobre as Geometrias não Euclidianas poderá ser um elemento importante no desenvolvimento de seu estudo durante a formação inicial do professor de Matemática. Acredito que um estudo que destaca o processo evolutivo dessas geometrias e a sua repercussão no desenvolvimento do pensamento matemático poderá contribuir para superar modelos tradicionais de ensino que apresentam a Matemática como um conhecimento pronto, sem origem e sem história.

3 A PESQUISA E OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa teve por finalidade investigar professores de um curso de Licenciatura em Matemática, no qual as Geometrias não Euclidianas estão inclusas em sua proposta curricular, com o objetivo de identificar e descrever como justificam as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática.

Para realizar esta pesquisa segui os passos de uma abordagem de natureza qualitativa. De acordo com Borba (2004, p. 2), a pesquisa qualitativa pode ser definida como aquela que:

[...] prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado “verdadeiro”, dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado.

3.1 O CAMPO DE INVESTIGAÇÃO

Com base no levantamento inicial das propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná, delimito o campo de investigação da presente pesquisa ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná (UFPR), tendo em vista que este oferta uma disciplina intitulada Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Além disso, foi neste curso que realizei minha formação inicial, o que permitiu uma maior aproximação com o campo de pesquisa.

3.2 CRITÉRIOS DE SELEÇÃO DOS SUJEITOS

Inicialmente, pensei em realizar a investigação com professores que

ministram ou ministraram a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, porém, verifiquei que apenas um professor havia ministrado esta disciplina desde a sua implementação no curso. Considerei que restringir a investigação a um único sujeito poderia minimizar as possibilidades de obtenção de dados, o que comprometeria uma análise mais profunda.

No entanto, durante o percurso em que se desenvolve uma pesquisa, muitas vezes, novas possibilidades são reveladas, as quais podem enriquecer o estudo e trazer maior profundidade à investigação. Dessa maneira, deparei-me com uma dessas possibilidades quando realizei uma segunda leitura das ementas de todas as disciplinas presentes na proposta curricular do curso. Percebi que certas disciplinas, embora não apontem diretamente conteúdos de Geometrias não Euclidianas, possuem ementas que permitem certa liberdade na seleção de conteúdos, o que me levou a pensar na hipótese de que, de alguma forma, tais conteúdos poderiam ter sido abordados em algum momento no desenvolvimento dessas disciplinas.

Em um primeiro momento, identifiquei três disciplinas com essa característica, sendo elas:

- Geometria no Ensino;
- Matemática no Ensino Fundamental;
- Matemática no Ensino Médio.

Ao abrir o leque das possibilidades para encontrar outras disciplinas, passei a me interessar, também, pelas disciplinas de natureza pedagógica. Em geral, essas têm por objetivo colocar o estudante de Licenciatura em contato com as diferentes estratégias didáticas e metodológicas para o ensino da Matemática, o que pressupõe a seleção de um conteúdo a ser mediado por tais estratégias. Com base nisso, considerei a possibilidade de encontrar disciplinas pedagógicas que poderiam abordar conteúdos de Geometrias não Euclidianas, em algum momento.

Na perspectiva de encontrar outras disciplinas que se enquadrassem nessa característica, realizei uma terceira leitura das ementas, porém, com a atenção focada nas disciplinas ofertadas pelo Departamento de Educação, identificando a disciplina Metodologia do Ensino da Matemática.

Diante desses fatos, os sujeitos desta pesquisa são os professores dessas cinco disciplinas. Esses professores serão designados por:

- P1 – Professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas;
- P2 – Professor da disciplina Matemática no Ensino Fundamental;
- P3 – Professor da disciplina Matemática no Ensino Médio;
- P4 – Professor da disciplina Geometria no Ensino;
- P5 – Professor da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática.

As caracterizações dos sujeitos e das suas respectivas disciplinas se encontram no início da descrição das entrevistas realizadas com os cinco professores.

3.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Considerando o objetivo desta investigação, optei pela entrevista como o principal instrumento de coleta dos dados. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 120):

A entrevista é, nas ciências sociais, o procedimento mais usual no trabalho de campo. Trata-se de uma conversa a dois com propósitos bem definidos. Etimologicamente, a palavra “entrevista” é construída a partir de duas palavras: entre (lugar ou espaço que separa duas pessoas ou coisas) e vista (ato de ver, perceber).

Dentre as modalidades de entrevista existentes, optei pelas semi estruturadas, pois, segundo os autores:

Essa modalidade é muito utilizada nas pesquisas educacionais, pois, o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem deles e, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 121).

Esses autores também esclarecem que apesar da entrevista ser vantajosa para obter informações de pessoas com menor grau de instrução e que possuem dificuldade para expressar sua opinião por escrito; ela também pode trazer vantagens quando realizadas com pessoas bastante instruídas, pois “[...] permite ao

entrevistado fazer emergir aspectos que não são normalmente contemplados por um simples questionário” (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 120). Assim, ao optar pela entrevista, levei em conta uma característica importante dos entrevistados, ou seja, são pessoas que possuem um alto grau de instrução.

Para elaborar os roteiros das entrevistas, busquei subsídios no referencial teórico que apresento no Capítulo 1 deste trabalho; em particular, a pesquisa realizada por Cabariti (2004) contribuiu nessa elaboração, pois tomei por base algumas questões do questionário elaborado por essa autora para professores de uma universidade de São Paulo. Além do referencial teórico utilizado, busquei conhecer a estrutura, a proposta e o objeto de estudo das disciplinas de cada um dos professores entrevistados⁷, o que também foi fundamental para favorecer o diálogo com esses professores durante as entrevistas.

Como a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas constitui o elemento central desta investigação, considerei importante realizar uma análise, ainda que breve, de alguns aspectos envolvidos na elaboração de sua proposta, a fim de compreender a perspectiva sob a qual foi idealizada e concebida⁸. Cumpro salientar que essa análise não teve por finalidade apresentar uma descrição detalhada da elaboração dessa disciplina, visto não ser esse o objetivo da presente pesquisa, mas sim, buscar subsídios para a elaboração dos roteiros das entrevistas.

Com base nesses aportes, elaborei roteiros distintos⁹: um para o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas; e outro para os demais professores entrevistados. Entretanto, ambos contêm questões comuns para os cinco professores entrevistados. O primeiro foi elaborado para a entrevista com o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas e, a partir deste, elaborei o roteiro das demais entrevistas, embora estas diferenciem-se na ordem das questões, bem como no enunciado de uma delas, pois envolveu conteúdos específicos de suas respectivas ementas.

Os roteiros foram submetidos à apreciação de um professor do departamento de Matemática que possui uma extensa experiência no magistério, ministrando aulas de conteúdos específicos da Matemática para alunos da Licenciatura e do Bacharelado, além de orientar pesquisas de mestrado e doutorado

⁷ As caracterizações das cinco disciplinas se encontram nos apêndices da presente dissertação.

⁸ A síntese dessa análise se encontra nos apêndices da presente dissertação.

⁹ Os roteiros das entrevistas encontram-se nos apêndices deste trabalho.

na área da Educação Matemática. Uma das sugestões dada por esse professor foi a demarcação prévia do contexto relativa a algumas questões. Por exemplo, na questão que se refere à inclusão das Geometrias não Euclidianas nas Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática, implementadas no Estado do Paraná, a sugestão foi fazer, antes da questão, uma afirmativa sobre as geometrias que foram incluídas nesse documento. Ao fazer isso, a intencionalidade da questão se destacou, porém, sem direcionar ou influenciar as respostas dos professores.

Outra sugestão importante foi para o roteiro da entrevista com o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas: elaborar uma questão sobre os conteúdos da ementa de sua disciplina na formação dos licenciandos. Mais tarde, esta sugestão me trouxe uma nova ideia: mostrar a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas para os demais professores e apresentar-lhes essa mesma questão. Porém, antes, seria interessante apresentar-lhes questões sobre a contribuição das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, sem levar em conta o que está descrito na ementa da referida disciplina. Com isso, a minha intenção foi verificar se o que apontam como sendo a contribuição do conhecimento dessas geometrias, na futura prática docente dos licenciandos, defronta-se, ou não, com o que apontam sobre a contribuição trazida pelos conteúdos da ementa dessa disciplina.

As sugestões desse professor foram de grande contribuição para a realização da entrevista, cujas perguntas buscariam responder o que esses professores dizem sobre as razões pelas quais as Geometrias não Euclidianas estão inclusas na formação do futuro professor de Matemática.

As questões contidas nos roteiros foram separadas em dois grupos: grupo das “questões-chave” e grupo das “questões-exclusivas”, sendo que este último possui dois subgrupos: subgrupo das questões-exclusivas para o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, e subgrupo das questões-exclusivas para os demais professores entrevistados.

Grupo das Questões-Chave

As questões contidas neste grupo buscaram respostas sobre:

- os motivos que levaram à inclusão dessa disciplina no currículo do curso, tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura;

- se a inclusão das Geometrias não Euclidianas em um documento de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ou não ser considerada na Licenciatura;
- quais são as principais razões para incluir conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica;
- de que forma os conhecimentos de Geometrias não Euclidianas poderão contribuir na prática docente do professor de Matemática da escola básica.

Grupo das Questões-Exclusivas

Subgrupo 1: Questões-exclusivas para o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas.

As questões contidas nesse subgrupo tiveram por objetivo obter respostas sobre:

- qual é a finalidade principal da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas;
- é possível avaliar se os objetivos da disciplina têm sido alcançados, tanto pelos alunos do Bacharelado quanto pelos da Licenciatura;
- se, após a oferta dessa disciplina, foram necessárias alterações na programação (em caso afirmativo, quais alterações);
- qual é forma de abordagem utilizada pelo professor para introduzir os conteúdos da disciplina;
- quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam na proposta da disciplina;
- de que forma o professor busca por superá-las;

- se os conteúdos propostos na ementa da disciplina apresentam relações com as Geometrias não Euclidianas propostas na DCE de Matemática (PARANÁ, 2008).

Subgrupo 2: Questões-exclusivas para os professores das demais disciplinas.

As questões neste subgrupo tiveram por objetivo obter respostas sobre:

- se, nessas disciplinas, houve momentos em que as Geometrias não Euclidianas foram abordadas (em caso afirmativo: de que forma ocorreu a abordagem, em caso negativo: por quais motivos não foram abordadas);
- se esses professores pensariam na possibilidade de incluir as Geometrias não Euclidianas no planejamento de suas disciplinas, tendo em vista o preparo dos futuros professores para o ensino das geometrias apontadas nas DCE de Matemática (PARANÁ, 2008);
- qual é a contribuição trazida pelos conteúdos descritos na ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas na formação do professor de Matemática para a escola básica, na visão dos professores entrevistados (antes de apresentar a questão, será solicitado a leitura da ementa);
- se esses professores fariam, ou não, alguma modificação na ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas;
- se esses professores apontam concordâncias ou discordâncias em relação a algum ponto da ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas.

3.4 PROCEDIMENTOS DAS ENTREVISTAS

Para realizar as entrevistas, segui alguns critérios éticos, ou seja, antes de

iniciar a entrevista, expliquei para o entrevistado o objetivo e a natureza da pesquisa, bem como o critério que utilizei para selecioná-lo para a entrevista. Por intermédio de autorização por escrito, assegurei ao entrevistado o seu anonimato, o sigilo de seu depoimento, bem como o acesso à transcrição da entrevista para que pudesse fazer a leitura e possíveis revisões, caso considerasse necessário. Assegurei, ainda, que somente depois de sua leitura e revisão, o entrevistado concederia (ou não) a autorização para a utilização de sua entrevista na pesquisa.

Vale destacar, também, que ao final de todas as entrevistas, abriu-se espaço para que o professor pudesse comentar livremente sobre algum ponto que não foi discutido ou que não foi destacado nas questões.

Todas as entrevistas foram transcritas considerando que o ato de transcrever significa:

[...] uma nova experiência da pesquisa, um novo passo em que todo o processamento dela é retomado, com seus envolvimento e emoções, o que leva a aprofundar o significado de certos termos utilizados pelo informante, de certas passagens, de certas histórias que em determinado momento foram contadas, de certas mudanças na entonação da voz. Tudo isso é material que o pesquisador obteve, de cuja construção diretamente participou – pois no processo de que resultou foi ele parte, numa legítima ação de “observação participante”, com todos os riscos que essa posição comporta (QUEIROZ, 1991, p. 88).

3.5 TRATAMENTO DOS DADOS DA PESQUISA

Para analisar o material coletado durante as entrevistas, inspirei-me nas técnicas de Análise de Conteúdo propostas por Bardin (1977, p. 42), que a define como:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

A Análise de Conteúdo é organizada em três fases: fase da pré análise, fase da exploração do material e fase do tratamento dos resultados, as quais são descritas por Bardin (1977) da seguinte maneira:

- Pré-análise: fase de organização do material disponível para operacionalizar e sistematizar ideias iniciais de acordo com os objetivos da investigação.
- Exploração do material: fase de administração sistemática das decisões tomadas, que consiste de operações de codificação, ou seja, definem-se as unidades de análise.
- Tratamento dos resultados: fase em que se realizam as inferências e a interpretação por meio da classificação das unidades em categorias, em síntese, é nesta fase que se atribui significação aos resultados.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), a principal função da análise de conteúdo é: “[...] descobrir o que está por trás de uma mensagem, de uma comunicação, de uma fala, de um texto, de uma prática etc.”. Os autores destacam a recomendação de Bardin (1985) aos pesquisadores que utilizam essa técnica: para que o processo de análise de conteúdo seja bem-sucedido, o pesquisador deve realizar repetidas leituras do texto, de tal modo que os elementos comuns e divergentes contidos de forma subjetiva nos discursos se evidenciem, o que permite estabelecer relações e conduzir às compreensões em torno do objeto de estudo.

Nesta pesquisa, as fases propostas por Bardin serviram apenas de inspiração para o procedimento que utilizei para a descrição e análise dos dados. Nela, primeiro apresento na descrição de cada uma das entrevistas o modo como foram organizados, explorados e tratados os dados obtidos.

No próximo capítulo, apresento a descrição das entrevistas e, em seguida, a análise e discussão dos resultados.

4 AS ENTREVISTAS E SEUS RESULTADOS

Antes da data marcada para cada entrevista, fiz um contato inicial com os cinco professores. O primeiro contato foi via e-mail, no qual eu perguntei sobre a possibilidade de conceder entrevista para pesquisa de mestrado, apresentando em linhas gerais, a finalidade da pesquisa.

Em um segundo momento, fiz um contato pessoal com os professores das disciplinas Matemática no Ensino Fundamental, Matemática no Ensino Médio e Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Com os professores das outras disciplinas, esse contato não foi necessário, pois ambos já conheciam um pouco melhor os objetivos de minha pesquisa, tendo em vista que a professora de Metodologia do Ensino da Matemática foi minha professora em uma das disciplinas que cursei no mestrado. Com o professor de Geometria no Ensino, o contato já havia sido feito anteriormente, pois ele foi o segundo sujeito selecionado.

É importante frisar que todos eles foram informados sobre o teor da minha pesquisa e, principalmente, sobre os critérios que me levaram a selecioná-los como sujeitos dessa investigação. Assim, estavam cientes de que eu havia feito uma análise das ementas de suas disciplinas e que faria perguntas tanto sobre estas, como também proporia algumas questões sobre a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, além de algumas questões voltadas para a formação inicial do professor de Matemática.

Antes da data marcada para cada entrevista, fiz um contato inicial com os cinco professores. O primeiro contato foi via e-mail, no qual eu perguntei sobre a possibilidade de conceder entrevista para pesquisa de mestrado, apresentando em linhas gerais, a finalidade da pesquisa.

Em um segundo momento, fiz um contato pessoal com os professores das disciplinas Matemática no Ensino Fundamental, Matemática no Ensino Médio e Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Com os professores das outras disciplinas, esse contato não foi necessário, pois ambos já conheciam um pouco melhor os objetivos de minha pesquisa, tendo em vista que a professora de Metodologia do Ensino da Matemática foi minha professora em uma das disciplinas que cursei no mestrado. Com o professor de Geometria no Ensino, o contato já havia sido feito anteriormente, pois ele foi o segundo sujeito selecionado.

É importante frisar que todos eles foram informados sobre o teor da minha pesquisa e, principalmente, sobre os critérios que me levaram a selecioná-los como sujeitos dessa investigação. Assim, estavam cientes de que eu havia feito uma análise das ementas de suas disciplinas e que fazia perguntas tanto sobre estas, como também proporia algumas questões sobre a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, além de algumas questões voltadas para a formação inicial do professor de Matemática.

No que segue, apresento as descrições das cinco entrevistas.

4.1 DESCRIÇÕES DAS ENTREVISTAS

As entrevistas serão descritas na seguinte ordem:

- com o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas (P1);
- com o professor da disciplina Matemática no Ensino Fundamental (P2);
- com a professora da disciplina Matemática no Ensino Médio (P3);
- com o professor da disciplina Geometria no Ensino (P4);
- com a professora da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática (P5).

Os códigos utilizados na descrição das entrevistas são:

- [...] - utilizado quando parte do texto da transcrição foi omitida;
- [] - utilizado quando faço interferência no texto da transcrição das entrevistas.

As falas dos entrevistados estão apresentadas de duas formas:

- Em parágrafos separados: letra em tamanho 10, espaçamento simples entre linhas e recuo de 4,0 cm da margem esquerda do texto.
- Integradas aos parágrafos: citações entre aspas e formato da fonte em itálico.

No início de todas as entrevistas, apresento uma breve caracterização dos professores e de suas respectivas disciplinas.

4.1.1 Entrevista com o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas

Caracterização do Professor P1:

O professor P1 tem especialização, mestrado, doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), e dois pós doutorados, o primeiro pela Universidad Nacional de Mar del Plata e o segundo pela Université de Sherbrooke (Canadá). Todas as suas titulações têm ênfase na área de Álgebra. Atua principalmente nos seguintes temas: Representações de Álgebras, Auslander-Reiten quivers, Álgebras de Artin, Radical da Categoria de Módulos, Radical Infinito. Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal do Paraná, ministrando disciplinas para o curso de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Tem vários artigos publicados em periódicos especializados na área de Álgebra, tais como “*Journal of Algebra and its Applications*”, “*Communications in Algebra*” e “*Algebras and Representation Theory*”. Em 2006, publicou um artigo na Revista do Professor de Matemática intitulado “*O comprimento do período de dízimas a/b não depende do numerador*”.

Caracterização da disciplina:

A disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas foi incluída na proposta curricular do curso de graduação em Matemática da UFPR a partir do ano de 2006. Pertence ao Núcleo de Conteúdos Básicos e está inserida no Eixo de Conhecimentos Matemáticos. Trata-se de uma disciplina obrigatória, tanto para o curso de Bacharelado como de Licenciatura, e é ofertada pelo Departamento de Matemática, no 6.º semestre para o período diurno e no 8.º semestre para o noturno, com 60 horas de carga horária. Não é equivalente a nenhuma disciplina do currículo antigo e sua ementa é a seguinte:

Ementa: O Plano Euclidiano e seu grupo de isometrias. Transformações Afins no plano Euclidiano, geometria afim e congruências de triângulos.

Grupos finitos de isometrias, órbitas e estabilizadores, polígonos regulares. Geometria Esférica e grupos de isometrias da esfera. Geometria Hiperbólica, isometrias hiperbólicas e sua classificação.

Para cursar esta disciplina, o estudante necessita ter sido aprovado na disciplina Teoria dos Grupos, cujo pré-requisito é a disciplina Teoria dos Números. Por sua vez, esta última tem como pré-requisito a disciplina Complementos da Matemática. Assim, o aluno terá que ter cursado a seguinte sequência de disciplinas: Complementos da Matemática, Teoria dos Números, Teoria dos Grupos. Para ter uma noção dos conhecimentos que o aluno deve dominar para cursar a referida disciplina, seguem as respectivas ementas:

Complementos da Matemática: Introdução à lógica proposicional. Quantificadores. Técnicas de demonstração matemática. Relações. Funções. Indução matemática.

Teoria dos Números: Apresentação Axiomática dos inteiros. Divisibilidade. Congruências. Números algébricos e transcendentales. Representações decimais finitas e infinitas. Aplicações.

Teoria dos Grupos: Grupos, subgrupos, e homomorfismos. Grupos de permutações. Grupos Abelianos finitamente gerados. Ações de Grupos e aplicações a contagem. Extensões algébricas. Grupo de Galois de uma extensão. Correspondência de Galois e suas aplicações. Grupos solúveis. Resolução de equações por radicais. Aplicações.

A entrevista:

Na perspectiva de buscar desvelar qual é a relevância, na formação dos estudantes do curso, de uma disciplina que aborda conteúdos de Geometrias não Euclidianas, iniciei a entrevista com o professor P1, questionando-o sobre os motivos que levaram à inclusão desta disciplina na proposta curricular do curso de Matemática da UFPR. Como é ofertada para os alunos da Licenciatura e do Bacharelado, não fiz essa distinção, pois eu buscava uma resposta que não tivesse a interferência desses aspectos.

Inicialmente, o professor P1 reportou-se às discussões que ocorreram no período da reformulação do curso de Matemática da UFPR. Comentou que, nesse período, “depois de muitas discussões”, observou-se que não havia uma disciplina básica que mostrasse para o aluno iniciante no curso: “[...] qual é o objetivo da Matemática, qual é o objetivo do professor de Matemática e qual é a forma de pensar Matemática”.

P1 também mencionou que se pretendia resolver outra questão: “[...] que era fazer com que nem todas as disciplinas do curso fossem tão compartimentadas”.

Para exemplificar, citou as disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, cujas ementas são específicas para abordar determinados assuntos. Assim, explicou que a intenção era ofertar disciplinas nas quais fossem usadas “todas ou algumas das ferramentas desenvolvidas em outras disciplinas do curso”.

O professor P1 comentou que a ideia era desenvolver, nesta disciplina, o ensino da Geometria nos moldes do programa de Félix Klein, ou seja, a disciplina foi elaborada para “abordar Geometria usando Teoria de Grupos”. Dessa forma, seriam pré-requisitos para cursá-la: conhecimentos de “Álgebra Linear, Teoria de Grupos, algumas coisas de Teoria de Números e de Fundamentos da Geometria”.

Conforme P1 mencionou:

A gente queria criar a oportunidade de fazer uma disciplina que fosse interdisciplinar e ao mesmo tempo abordasse um tema básico que é a Geometria Euclidiana e abre porta pra outras possibilidades, para o aluno ver, de fato, e não apenas saber, ouvir falar que existem outras geometrias, mas ver, de fato, como elas funcionam, como são os problemas nas outras geometrias, o que elas têm a ver com o mundo real. [...] você tem outras possibilidades de interpretação do mundo real e que a Geometria Euclidiana, de fato, é bastante limitada.

Na continuidade da entrevista, P1 comentou que, nesta disciplina, os problemas propostos são resolvidos por meio das ferramentas da Teoria de Grupos, ou da Álgebra Linear e, até mesmo, da própria Geometria Básica. Assim, o aluno percebe que:

[...] o mesmo problema tem várias abordagens. Isso ocorre com muita frequência porque ele já viu todas essas ferramentas. É no decorrer da disciplina que cada um vai lançando mão das ferramentas e arriscando palpites. E, isso, leva às soluções dos problemas. Isso é bastante interessante.

Em seguida, perguntei para o professor P1 se, na sua avaliação, os objetivos da disciplina estavam sendo alcançados ao longo das três vezes que foi ofertada, tanto aos alunos do Bacharelado como aos da Licenciatura. Ao perguntar sobre os estudantes dessas duas modalidades de formação, minha intenção foi captar elementos de comparação e/ou diferenciação entre o desenvolvimento desses estudantes na disciplina. P1 considerou que, em relação à

interdisciplinaridade, os objetivos têm sido alcançados, pois: “[...] entra com toda a força todas as ferramentas usadas. O aluno sente desde o primeiro dia de aula as ferramentas usadas”.

Para explicar como ocorre essa interdisciplinaridade na disciplina, P1 comenta:

[...] a gente não usa o método axiomático pra abordar a Geometria Euclidiana. A gente quer provar para os alunos as coisas interessantes que preservam a distância no plano, que são as isometrias, que elas são somente translação, reflexão ou rotação, reflexão seguida de translação. Somente essas, as únicas que preservam alguma coisa. [...] Então, você vai desenvolver uma série de ferramentas algébricas pra poder fazer isso. E é via Teoria de Grupos que você mostra que as reflexões geram tudo. E para fazer isso demanda muitas contas de Álgebra Linear, demanda muitas coisas de Teoria de Grupos. Então, essa interdisciplinaridade ocorre assim de uma maneira muito natural. Bastante natural.

Ao focalizar nos motivos da inclusão desta disciplina, a intenção foi verificar se estes estavam relacionados, de algum modo, com a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), uma vez que as datas em que esses dois eventos ocorrem são relativamente coincidentes. Caso isso fosse confirmado, poderia ser destacada uma razão para incluí-las na formação dos licenciandos. No entanto, no decorrer da entrevista, ficou claro que o professor não tinha conhecimento desse documento, portanto, a inclusão dessa disciplina no curso não teve qualquer relação com a inclusão dos conteúdos de Geometrias não Euclidianas naquelas diretrizes.

Apesar de P1 ter apresentado comentários que evidenciam a via de abordagem dos conteúdos de sua disciplina, considereei que poderia ser relevante questioná-lo, diretamente, sobre isso. Inicialmente, o professor argumentou que era difícil responder esta questão, pois, para ele, a abordagem depende das características de cada turma. Dessa forma, comentou que a primeira turma em que a disciplina foi ofertada era composta somente de alunos do Bacharelado e, de acordo com o professor P1: “Nessa turma tinham alguns raciocínios que eram muito mais simples pra eles, eram bem naturais. Então, deu pra ir muito a fundo em relação ao que foi feito nas duas vezes seguintes”.

Conforme informou, nas duas turmas seguintes começou a ter muitos alunos na disciplina, especificamente, muitos licenciandos e: “[...] aí, deu pra pensar melhor na disciplina pra Licenciatura, que um dos objetivos também era esse”. Em seguida, P1 salientou: “A gente tem essa disciplina que ocorre junto com a Licenciatura e o

Bacharelado, mas um dos objetivos também é assim: pensar numa disciplina bastante específica pra Licenciatura”. Nesse momento, o professor P1 declarou: “É difícil responder essa questão... Metodologia. Por que a gente... Como abordar... Assim, depende muito... Eu digo assim, eu não tenho assim uma linha que sigo sempre”.

Buscando obter mais detalhes sobre o modo pelo qual o professor aborda os conteúdos, considerei que uma forma de obtê-los seria investigando-o com questões relativas ao desenvolvimento dos alunos na turma composta somente de bacharelados. Assim, perguntei como o professor considerava o fato de que, nessa turma, ele pôde aprofundar mais os temas em relação às turmas seguintes. Sobre isso, P1 comentou:

[...] o bacharel, a gente tem outros objetivos. A preocupação dele não é muito pensar em como ensinar. É bem diferente. Como ensinar, porque ensinar, pra que eu estou vendo esta disciplina. Então a gente não tem muito essa preocupação. E o professor sim.

Considerarei que poderia ser interessante descobrir mais detalhes sobre os objetivos desses dois tipos de estudantes e, para instigá-lo a prosseguir, comentei que “o licenciando olha o conteúdo, pensando em como eu vou ensinar, como que eu vou transpor”. Além de concordar, P1 complementou o meu comentário, dizendo que “é uma das perguntas dele, básica, natural, é como isso me serve, como que isso vai entrar no meu dia a dia”.

Após esse comentário de P1, percebi, então, que algo de interessante poderia emergir e, assim, questionei-o sobre qual resposta apresenta aos licenciandos quando levantam esse tipo de questão. P1 explicou que quando essas questões são levantadas, procura chamar a atenção desses alunos para o seguinte fato:

[...] aquela ferramenta que havia sido desenvolvida, das quais eles haviam participado do desenvolvimento, das quais viram o resultado – grande teorema – fazia com que eles tivessem uma visão muito mais ampla do assunto para quando eles forem ensinar. É como se tivesse voando sobre o assunto, voando sobre o terreno, do qual você tem uma visão muito mais global, com outras ferramentas.

Em seguida, exemplificou com a seguinte situação:

Quando ele for ensinar, se ele só for ensinar Geometria Euclidiana, ele vai estar preocupado com detalhes específicos do ensino daquele conteúdo, com as ferramentas disponíveis no 1.º e no 2.º grau, mas, no entanto, ele já tem outras, ele já tem outra visão... Inclusive, de porque é importante estudar as congruências, as semelhanças, etc. Ele já vai ter uma visão muito mais ampla daquilo, que é um pequeno detalhe dentro de um mundo muito maior, cheio de problemas interessantes.

Sobre as dificuldades enfrentadas pelos alunos, tanto do Bacharelado como da Licenciatura, inicialmente, P1 comentou que não consegue identificar quais nesses dois tipos de estudante e, para ele, cada aluno tem um tipo de dificuldade. Em seguida, destacou:

Mas, dá pra identificar, claramente, dois tipos de alunos: tem alguns alunos com um pensamento geométrico muito rápido e tem um grupo de alunos que usa muito a Álgebra pra abordar as coisas. Os que usam muito a Álgebra têm dificuldade em entender a maneira geométrica. Tem alguns que trabalham tranquilamente com as duas coisas. Mas têm alunos que usam muito a Geometria e pouquíssima Álgebra, ele não sabe do poder que tem a ferramenta.

Com o objetivo de direcionar a entrevista para as questões relativas à inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), discorri, brevemente, sobre esse documento, em particular, sobre as geometrias elencadas no rol de conteúdos básicos para o Ensino Fundamental e Médio. O professor mencionou que não conhecia esse documento, porém, com base nas informações que forneci, antes da entrevista, P1 comentou que havia ficado curioso.

Assim, destaquei que as Geometrias não Euclidianas apontadas nessas diretrizes desdobram-se em: Geometria Topológica, Projetiva, Fractal, Elíptica e Hiperbólica. Em seguida, perguntei se P1 identificava alguma relação entre essas geometrias e os conteúdos apontados na ementa da sua disciplina. Inicialmente, P1 considerou:

Eu não sei..., quer dizer, precisaria olhar, especificamente, esses conteúdos. Eu não saberia te dizer. Eu acredito que sim. Mas eu acho que a grande questão é: como utilizar ou como que essa disciplina será útil pra você ensinar esses conteúdos em nível de Ensino Fundamental e Médio. Mas, isso iria requerer um outro trabalho depois dessa disciplina, e que não é um trabalho fácil, aliás é um trabalho, aliás é um trabalho bastante difícil. Você pegar conhecimentos avançados e tentar transformar em linguagem simples. Muitas vezes, fica sempre nos gargalos. Você acaba tendo que engolir coisas tais como: os matemáticos já provaram tais coisas, e você usa porque está aí, vale, são propriedades da natureza.

Em seguida, o professor especificou sua resposta para a Geometria:

[...] no caso de geometria, eu acho que o que teria que fazer, já isso faz parte da proposta curricular [da Educação Básica], é nosso licenciando começar a pensar, dentro das outras disciplinas que ele tenha a oportunidade de fazer isso e pegar esses conteúdos e tentar transformá-los numa linguagem a ser ensinada.

O professor P1 apresentou um exemplo de uma forma de abordar uma dessas geometrias, em disciplinas da Licenciatura:

Por exemplo, ensinar a Trigonometria da Esfera, pensar em quais seriam os tópicos que o aluno do Ensino Fundamental ou Médio deveria ver e, em seguida, elaborar uma quantidade de problemas razoáveis, interessantes, sobre esse tema. Por exemplo, na Geometria Esférica, explorar a Trigonometria da Geometria Esférica, as relações como a dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica.

Porém, alertou sobre as dificuldades que se apresentam ao professor para que possa desenvolver essas abordagens:

[...] É trabalhoso. Eu não sei se o professor, quando ele já estiver no seu dia a dia... Ele não vai ter tempo de fazer isso. Levando em conta a grande quantidade de horas-aulas que ele tem que dar, hoje em dia, pra sobreviver, é muito raro ele ter tempo de fazer isso e de pensar em como ensinar um conteúdo que está numa linguagem tal e ele mudar essa linguagem.

Diante disso, P1 especificou os ambientes nos quais os licenciandos deverão ser preparados para o trabalho com as Geometrias não Euclidianas na Educação Básica:

Então, eu acho que é na universidade que tem que pensar nisso. Ou em ambientes como, por exemplo, na Secretaria de Educação, para as pessoas tentarem elaborar propostas nesse sentido, exemplos e tal. Não é uma coisa muito fácil não. Aliás, é bastante difícil. E aí, eu acho que na universidade, em algumas disciplinas específicas para o ensino, eles poderiam pensar sobre isso.

Quanto à possibilidade de relacionar os conteúdos desenvolvidos na sua disciplina com as abordagens das Geometrias não Euclidianas apontadas nas DCE de Matemática (PARANÁ, 2008), o professor mencionou que, talvez, as disciplinas do curso de Licenciatura, que poderiam desenvolver esse trabalho, ocorram antes.

Apesar disso, destacou:

Mas eu acho que nada impede a professora que trabalha com esses alunos, ou professores que vão trabalhar com esses alunos, já anteciparem o tema. Porque, na verdade, você não precisa entrar a fundo no tema, pra poder pensar nos problemas. Os problemas são fáceis de serem colocados. Contar como é o problema na Geometria Esférica, por exemplo. E, a partir daí, começar a pensar em problemas interessantes pra poder falar sobre isso. Na Geometria Projetiva, eu não sei, talvez seja mais complicado.

Ainda considerando a possibilidade de estabelecer tais relações, comentei que a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas aponta “Geometria Hiperbólica” e “Isometrias da Esfera”. Com base no estudo desses tópicos, perguntei se o licenciando poderia elaborar abordagens da Geometria Hiperbólica e da Esférica para serem aplicadas na escola. O professor considerou que “sozinho, eu acho que não. Eu acho que é bastante complicado”.

Diante desse comentário, perguntei se o licenciando teria que cursar disciplinas específicas para estabelecer as relações entre os conteúdos de sua disciplina com as abordagens voltadas à escola. As considerações do professor P1 foram as seguintes:

Eu não sei, não tem uma disciplina específica, eu acho, pra isso. Na verdade, eu acho que teriam que ser projetos mesmo... A pessoa querer fazer isso. Porque é o seguinte, a Matemática, ela avança. E as pessoas criam linguagens pra poder resolver problemas. Muitas vezes, a linguagem abstrata faz com que você tenha uma dimensão tal em que os problemas ficam resolvidos com aquela linguagem. E o que a gente estaria tentando fazer é o oposto: pegar um problema que foi resolvido numa linguagem e, tentar trazer ele de, usando algumas ferramentas. Isso é bastante complicado de se fazer. Então, algumas coisas podem ser feitas para que a pessoa tenha a noção de que não existe só a [Geometria] Euclidiana e de que existem outras propriedades geométricas interessantes, além daquelas que a gente estuda na [Geometria] Euclidiana.

Apesar de considerar a possibilidade de oportunizar o conhecimento da existência de outras geometrias e propriedades geométricas, P1 mencionou: “Mas, eu acho que é bastante complicado”. Assim, sugeriu o desenvolvimento de projetos sobre as abordagens dessas geometrias na perspectiva escolar.

Teriam que ser projetos. Vários projetos específicos sobre isso, pra ir pensando. Então, uma pessoa pegar alguma coisa lá na [Geometria] Esférica e tentar escrever alguma coisa sobre o tema. Alguma pessoa pensar na Geometria Hiperbólica e tentar fazer alguma coisa sobre o tema.

Perguntei se tais projetos poderiam partir dos encaminhamentos da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Quanto a essa possibilidade, P1 destacou:

Na disciplina, na verdade, na disciplina o que eu tento é despertar a curiosidade dos alunos para fazerem isso. Porque é assim, como o conteúdo dela é amplo, a gente não consegue nem dar todas essas geometrias que estão no conteúdo, é bastante difícil fazer isso.

Em seguida, o professor P1 destacou os procedimentos da Escola Francesa:

É como a gente vê na Escola Francesa de Matemática, que estão bastante habituados a isso. O pessoal que faz... Eu não sei se chama Educação ou Educação Matemática, eu não sei, especificamente, mas, eu vou usar a palavra “educadores”. Vários educadores franceses, enfim, eles pegam temas de nível avançado montam livros sobre o tema em linguagem mais fácil.

Na sequência da entrevista, perguntei ao professor se a inclusão das Geometrias não Euclidianas em documentos de orientações curriculares para Educação Básica deveria, ou não, ser considerada nas Licenciaturas. O professor P1 comentou que “gostaria que sim”, entretanto, considerou:

Mas isso depende de várias forças, em geral, quem faz a proposta sofre... Quando colocam a proposta nova, assim, a pessoa sofre vários ataques, de vários lados, e aí tem toda uma dificuldade de sustentar a proposta, depois de todos esses ataques. Se sobrevive, aí se torna mais forte a posição de quem propôs.

Após essas considerações, o professor P1 passou a discorrer sobre os conhecimentos matemáticos nas propostas curriculares da Educação Básica, como também destacou a possibilidade de tornar a Ciência mais acessível:

Eu gostaria, obviamente, que quanto mais agregar coisas de matemática na proposta curricular, eu acho melhor, quanto mais agregar mais coisas, muito melhor. Porque é muito amplo, os temas são muito amplos, a Matemática é muito ampla. Como a humanidade avançou muito, não tem razão você ficar discutindo coisas tão básicas em nível fundamental e médio. E menos ainda, a razão não pode ser dificuldade, pelo contrário, a dificuldade tem que ser o desafio. E cabe a nós, se a humanidade avançou tanto, com ideias tão avançadas que temos hoje em vários campos da Ciência, eu acho que a gente, como professores, como cientistas, nós temos que pensar que esta Ciência seja acessível. [...] Isso, em vários níveis, e usando de todas as ferramentas possíveis, desde o professor, desde um livro, desde uma aula, desde um seminário, desde um pequeno exemplo, ou até

mesmo assim, um programa que alguém bolou na tv, que visa o público infantil ou o estudante, etc., pois a televisão deveria cumprir um papel educativo também. As revistas científicas... Têm várias maneiras de você tentar atingir as pessoas com a Ciência. Então, toda ideia vale. Eu acho que se você coloca ideias, mais matemáticas, melhor ainda, porque tirar eu acho que é sempre ruim.

Apesar de manifestar-se favoravelmente em relação à incorporação de novos conteúdos matemáticos nas propostas curriculares para a escola básica, o professor chamou a atenção para um problema:

Agora, obviamente, se coloca, a gente está diante de um problema, como fazer aquilo acontecer e que não fique apenas no papel. Porque se você olhar especificamente, tem uma série de outras coisas que já estão no papel e a gente não consegue fazer. Ensinar Funções, ensinar Trigonometria... Então é só um problema a mais, na verdade.

Destacou, ainda, os aspectos que considera interessante da proposta de inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), apontando, novamente, o papel das universidades:

Agora, o que é interessante é que só o fato de colocar você já cria polêmica, já cria, mas o que são as outras? Com a problemática que a gente tem com o desnível dos professores que estão atuando dentro da escola, tanto pública quanto privada, em nível de Ensino Fundamental e Médio, o fato de você colocar já implicou, provavelmente, em alguma aprendizagem, o cara tem que descobrir o que é isso. Então, já tem algum ganho aí. Eu acho que vale a pena. Agora, obviamente, que as universidades terão que repensar como fazer isso.

Na próxima questão da entrevista, relacionou, especificamente, quais são as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica. Sobre essa questão, o professor destacou as seguintes considerações:

O nosso mundo é bastante limitado se você pensar só na Geometria Euclidiana. Seria bastante limitado assim. E o professor, ele tem que ter acesso, ele tem que ter conhecimento sobre essas outras possibilidades de você analisar as coisas que têm no mundo. E pra ele analisar, ele precisa de outras ferramentas, mesmo que ele não vá aplicar, diretamente, mas ele precisa deter um conhecimento prévio sobre várias outras abordagens, sobre várias outras formas de ideias, sobre vários aspectos geométricos que têm no mundo, que não é aquele mundinho da Geometria Euclidiana. Fora isso, quando ele está inserido lá naquele contexto de aprender essas ideias novas da Geometria, ele se depara com problemas assim, desde uma definição mal colocada, uma definição que se eu mudo aqui vai me resolver uma série de outros problemas ali. Então, ele tem a oportunidade, isso também ocorre em outras disciplinas, mas, acho que de forma menor.

Também ocorre nessas disciplinas, mas nessa disciplina ocorre muito de ele se deparar com essa situação, e aí ele vê que a Matemática não é tão estática, que ele pode mudar a Matemática, pode alterar as coisas que estão diante dele. As definições elas são feitas por causa de uma necessidade latente que alguém tem pra resolver alguma coisa, então não é assim, é isso e simplesmente acabou. Então ele tem vários, vários aspectos, não é só do ponto de vista do ensino, de como ensinar, da Ciência, da amplitude de visão do professor, tem muitos aspectos que essa disciplina acaba criando.

Nas suas considerações finais, P1 apontou para questões mais específicas de sua disciplina, em particular, sobre as oportunidades que ela cria. Apesar disso, foi possível identificar aspectos que interessam aos objetivos desta pesquisa. Um desses aspectos foi identificado no seguinte trecho de sua explanação:

A troca de experiências, a troca de ideias com esses estudantes que enfrentaram essa disciplina, enfrentaram a dificuldade de ver uma outra Geometria, enfrentaram a dificuldade de abordar problemas um tanto estranhos pra eles que estavam acostumados só com a Geometria Euclidiana. Eu vejo bastante importância, porque eu vejo o amadurecimento desses estudantes que fizeram isso no decorrer desses anos. Mas eu acho que ainda é cedo pra saber qual é o resultado disso. Eu, dentro de tudo aquilo que eu frisei, ela é extremamente relevante por conta daquelas oportunidades que ela cria, por conta de trabalhar a interdisciplinaridade, por conta de ver problemas distintos sendo tratados de maneiras diferentes, sendo resolvidos com ferramentas mais distintas possíveis. Criou-se a oportunidade de ver o conteúdo novo, claro, de ver os conceitos novos que envolvem a Geometria. Criou-se a oportunidade de ele ter que repensar definições e o quanto elas mudam as coisas e de ver que ele pode fazer Matemática. Conceitos, não são simplesmente dados, você faz por uma razão muito forte pra poder construir as suas próprias demonstrações. Você define, de alguma maneira, pra que as demonstrações, muitas vezes, fiquem bem feitas.

4.1.2 Entrevista com o professor da disciplina Matemática no Ensino Fundamental

Caracterização do Professor P2:

O professor P2 é graduado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (1989), possui mestrado em Matemática pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada e doutorado em Ciências - Engenharia Biomédica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Tem experiência na área de

Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada – Biomatemática. Atua principalmente, nos seguintes temas: eritrócito, filtros artificiais. Tem dezoito anos de experiência no magistério, sendo que entre os anos 1989 e 1989 foi professor do Ensino Fundamental e Médio de escolas da rede privada. Atualmente é professor associado da Universidade Federal do Paraná. Além disso, está envolvido com a capacitação permanente de docentes, atuando na coordenação do Curso de Especialização em Professores de Matemática da UFPR e com ensino a distância.

Caracterização da disciplina:

Pertence ao Núcleo de Conteúdos Profissionalizantes e é uma disciplina de integração entre os eixos do conhecimento, contemplada na Dimensão do Ensino. Ofertada pelo Departamento de Matemática no 6.º semestre do curso, com 60 horas de carga horária, tem como pré-requisito a disciplina Geometria no Ensino. No currículo atual substitui a disciplina Projetos Integrados em Educação Matemática I.

Ementa: Conteúdos do ensino fundamental e sua relação com a matemática do ensino superior. Pensamento algébrico, geométrico, aritmético e probabilístico em situações de ensino. Planejamento e simulação de aulas.

A entrevista:

A seguir, apresento a síntese da análise realizada sobre as respostas às questões da entrevista com o professor P2, na qual destaco as razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica.

Em relação à abordagem das Geometrias não Euclidianas na disciplina Matemática no Ensino Fundamental, P2 declarou que esse tema foi abordado em uma das monografias que orientou durante o 2.º semestre de 2010. Como a proposta desta disciplina é a elaboração de uma monografia que envolva a abordagem de um conteúdo matemático do Ensino Fundamental, esse trabalho teve por finalidade apresentar uma abordagem da Geometria Esférica para esse nível de

ensino. P2 informou que a motivação do aluno para desenvolver esse tema partiu da verificação de que, dentre os documentos educacionais consultados, essas geometrias estão postas nas DCE de Matemática (PARANÁ, 2008).

Em sua explanação sobre o desenvolvimento dessa monografia, P2 destacou os passos de uma abordagem voltada ao ensino da Geometria Esférica no Ensino Fundamental, conforme foi realizado pelo aluno autor da monografia sob sua orientação:

[...] foi desenvolvendo desde o histórico, onde começou, porque que começou as Geometrias não Euclidianas. Na verdade, a motivação é pelo quinto postulado de Euclides. Depois, investigamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, aonde que se situavam essas geometrias. Descobrimos também que, recentemente, as Geometrias não Euclidianas haviam sido incluídas nas DCE de Matemática. Achamos, então, uma motivação a mais para, justamente, introduzir o assunto através de um probleminha que o aluno montou. Com elaboração de material de apoio, que foi uma esfera de isopor, a gente pode trabalhar a noção de que uma reta poderia ser uma curva, no caso, um círculo máximo, na esfera. Então, a partir daí, foi desenvolvido um trabalho que teve todo um acompanhamento.

Perguntei para o professor P2 se, nesse trabalho, foram abordadas algumas das propriedades da Geometria Esférica, como, por exemplo, a da soma dos ângulos internos de um triângulo. Conforme declarou:

Sim, exatamente. Então foi trabalhado a Geometria Esférica através de um probleminha, que um aluno tentava se deslocar de uma cidade, por exemplo, de Curitiba até uma cidade da África do Sul: qual que seria o caminho, a distância mais curta? Como ele imagina, seria uma reta, mas, na verdade, não é. Em cima da esfera, que é o planeta terra e é o exemplo melhor que se pode iniciar o assunto, ele vai percorrer, na verdade, uma curva. E aí, com esse material de apoio – era de isopor e elásticos – ele foi mostrando em sua aula expositiva.

Eu quis saber, ainda, se esse trabalho foi desenvolvido individualmente, o que foi confirmado por P2. Em seguida, perguntei se, durante a apresentação do trabalho, ele havia percebido se alguns alunos mostraram-se surpresos com os resultados apresentados sobre a Geometria Esférica. O professor P2 comentou:

Como eram alunos de graduação, já se esperava algo diferente. Daí a razão pela qual se deve tentar ensinar as Geometrias não Euclidianas, inclusive, no Ensino Fundamental, ou dar a noção. Porque vai ser uma coisa diferente que vai instigar o aluno a se interessar. Ele achava que toda distância que era o caminho mais curto, era uma reta, e não é! Isso é fundamental.

Em seguida, P2 complementou: “Mas é claro que muitos não conheciam, ou talvez ainda não tivessem feito as disciplinas da graduação sobre Geometrias não Euclidianas. Então, foi mais proveitoso ainda”.

Diante do último comentário de P2, perguntei se ele estava se referindo à disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas - o que foi confirmado por ele. Apesar disso, P2 considerou que essas geometrias podem ser abordadas em disciplinas anteriores, pois, para ele “as coisas se completam, porque você vai usar noções elementares”.

Ele exemplificou essa possibilidade com a abordagem de um triângulo esférico e a propriedade da soma dos seus ângulos internos:

[...] você vai partir da definição do triângulo, a união de três segmentos de retas consecutivos, com os vértices unidos em três pontos não colineares. Mas, como que fica esse triângulo na esfera? Então, você vai ver que é um triângulo esférico, cuja soma dos ângulos internos é 270° e não mais 180° . É outra coisa que surpreende o aluno e que leva a novos pensamentos, novas ideias, ou seja, que há um mundo novo a ser explorado nas Geometrias não Euclidianas.

Em seguida, P2 acrescentou:

Ficou bem completo o trabalho dele, embora, bem resumido também. Porque a ideia era ter um texto pra introduzir um assunto lá na Matemática do Ensino Fundamental, com um probleminha motivador.

Considerando esse comentário, presume-se que o professor P2 utilizou a monografia mencionada para ilustrar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico que, ao que parece, explorou um triângulo cujos ângulos internos medem 90° , ou seja, “[...] um triângulo trirretângulo, logo, a soma de seus ângulos internos é igual a 270° ” (LEIVAS e SOARES, 2011, p.90). Assim, justifica-se o valor apresentado pelo professor para a soma desses ângulos, embora existam triângulos esféricos nos quais esse somatório não é 270° , podendo ser inferiores (desde que maiores do que 180°), ou mesmo superiores, como, por exemplo, triângulos cuja soma dos ângulos internos é 540° .

Na sequência da entrevista, perguntei ao professor se a abordagem da Geometria Esférica apresentada na monografia poderia ser considerada como uma maneira interessante de introduzir o tema na escola, ao que P2 respondeu:

É. E, com esse material de apoio e com os pensamentos destacados – que uma exigência nessa disciplina foi que, conforme estava no programa, que o aluno detalhasse aonde que ele usou os pensamentos algébricos, geométricos, os pensamentos de raciocínio ou probabilístico, ou tratamento da informação. A Matemática é interdisciplinar, então, ao mesmo tempo em que você está estudando Geometria, você está fazendo alguma coisa de Álgebra.

Diante da menção da relação entre Geometria e Álgebra, perguntei se, no trabalho sobre a Geometria Esférica, o aluno havia usado alguma coisa da Álgebra. P2 comentou o seguinte: “A Álgebra, aí, fica mais limitada. Depois que você colocar os conceitos geométricos, vem as contas, como a da soma dos ângulos internos”.

Na próxima questão, comentei sobre os tópicos da ementa de sua disciplina: “pensamento geométrico” e a “relação dos conteúdos matemáticos com a Matemática no Ensino Superior”, perguntado qual deles foi mais explorado no trabalho que abordou a Geometria Esférica. De acordo com P2:

Foi o pensamento geométrico. [...] Não foi muito explorada, a nível superior, toda a axiomática das Geometrias não Euclidianas. É claro que, quando ele coloca a Geometria Esférica – que foi a que ele deu ênfase – evidentemente, que passa por tudo: vai investigar o que é ponto, o que é reta, o que é um triângulo em cima da esfera.

Nesse momento da entrevista, comentei sobre a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), destacando que se desdobram em: Geometria Topológica, Projetiva e Fractal; Elíptica e Hiperbólica. Em seguida, questionei se a inclusão dessas em documentos de orientações curriculares para a Educação Básica deveria, ou não, ser considerada nas Licenciaturas. Sobre essa questão, P2 destacou: “Com certeza. Inclusive, você já falou que tem a disciplina Geometria Euclidianas e não Euclidianas. Primeiro, eu contemplaria, só que a nível mais teórico”.

O professor salientou, ainda: “Nas disciplinas Matemática no Ensino Fundamental e Matemática no Ensino Médio, é que deve ser contemplada essa parte mais voltada para o ensino, em nível Fundamental e Médio”.

Em suas considerações, o professor P2 acrescentou, ainda, sua concordância em relação à inclusão dessas geometrias nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), declarando:

Inclusive, eu achei muito feliz essa escolha nas DCE de Matemática. Porque as Geometrias não Euclidianas são um mundo novo a ser

explorado, onde você vai ter novas propriedades, novas descobertas do aluno, saindo do espaço convencional, do nosso espaço euclidiano convencional. É isso que eu acho maravilhoso. É o que deve ser, realmente, colocado.

O professor P2, ainda, acrescentou “[...] eu sou a favor dessa inclusão, eu sou de acordo”. Apesar de seu posicionamento em favor dessa inclusão, por outro lado considerou:

Mesmo que, na graduação – não aqui na Federal, que contempla – mas, em outros lugares, não explorem este assunto. Os professores têm condições, através de sua formação Matemática, de ir atrás, de elaborar, de preparar uma aula sobre as Geometrias não Euclidianas. Ele tem a responsabilidade de correr atrás pra apresentar este assunto lá para os pequenos do Ensino Fundamental e Médio.

Na continuidade da entrevista com esse professor, a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas foi comentada, em particular, questionei-o sobre quais teriam sido os motivos que levaram à sua inclusão no curso de Matemática da UFPR. Inicialmente, P2 mencionou que em anos anteriores já havia uma disciplina de Geometria Projetiva, mas que foi retirada do programa das disciplinas obrigatórias passando a ser ofertada como optativa. Em seguida, salientou:

Mas a gente tem que estar sempre atento. Veja que as disciplinas Matemática no Ensino Fundamental e Matemática no Ensino Médio falam dos pensamentos algébricos, mas não falam que você tem que explorar as Geometrias não Euclidianas. Mas aí é que entra o papel do professor, de estar atento, inclusive porque foi, agora, incluído nas DCE de Matemática. Então, a gente observou isso e escolheu esse tema para incluir nesse último semestre da disciplina.

Com base no seu comentário sobre as DCE de Matemática (PARANÁ, 2008), perguntei se a inclusão dessas geometrias nesse documento deveria ter sido considerada na elaboração desta disciplina. Inicialmente, P2 comentou que, na época em que foi discutida a proposta desta disciplina, ele não fazia parte do colegiado, portanto, como não participou das discussões, não saberia responder se a inclusão dessas geometrias nesse documento teria sido considerada nessa questão. Porém, com base nas informações fornecidas sobre a pesquisa, em particular, sobre o critério utilizado para selecionar os professores entrevistados, P2 comentou:

Mas, como você já entrevistou, ou vai entrevistar o professor da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, ele vai poder responder o que motivou, aqui dentro do curso de graduação, a inclusão dessa disciplina. Mas, acredito que, sem dúvida nenhuma, deve ter sido o fato de estar lá nos currículos, um dos motivos para a inclusão da disciplina. [...] espero que o professor que está a cargo da elaboração do programa, da ementa dessa disciplina, cite que foi com base nisso. Justificando que, agora, está nas DCE de Matemática para Educação Básica, o tópico “Geometrias não Euclidianas”.

Questionei, ainda, se ele achava que teriam, ainda, outros motivos para que essa disciplina tenha sido incluída no curso, lembrando que ela é ofertada tanto para a Licenciatura como para o Bacharelado. Em sua resposta, P2 apresentou as seguintes colocações:

Claro, pra que serviria a Matemática? A Matemática se justifica na aplicação, serve de modelo para resolver os problemas do cotidiano, do dia a dia. [...] Você tem que aplicar. Só, aí, você vai convencer o aluno do Ensino Fundamental que é interessante, importante, essa parte das Geometrias não Euclidianas, como apresentar para ele alguma coisa que sirva para a realidade dele. Então, que não fique somente no nível teórico, axiomático, ou histórico, como era feito aqui antigamente. Realmente, era muito limitado, não havia essa exploração. Acho até, que incluir lá no Ensino Fundamental, vai motivar que os bacharéis também procurem as aplicações. Inclusive, acho até que para modelar o GPS, deve-se usar isso aí. É uma coisa nova, quer dizer, problemas do dia a dia não faltam para as Geometrias não Euclidianas.

Em seguida, perguntei ao professor P2 de que forma considera que o conhecimento das Geometrias não Euclidianas poderá contribuir na futura prática docente dos lecionando. Em sua resposta, P2 direcionou suas considerações para as possibilidades de abordagens dessas geometrias na escola, que podem ser realizadas pelo professor:

Têm que ser contemplados, no mínimo, problemas instigantes, motivadores para o aluno. Então, eu acho que se deve começar com o histórico, ou com problemas instigantes, como esse que a gente citou na Geometria Esférica: qual seria a menor distância de uma cidade de Curitiba a uma cidade da África do Sul. [...] Então, esse seria um problema instigante para você começar o conteúdo.

Também destacou a abordagem histórica dessas geometrias:

Aí, você pode remontar a História da Matemática. Então, você vai comentar que a motivação das Geometrias não Euclidianas veio do quinto postulado de Euclides: o Postulado das Paralelas, o qual, vários outros cientistas, como Gauss e Lobachevski, tentaram provar, não conseguindo. Então,

acabou motivando o início das Geometrias não Euclidianas, quer dizer, por um ponto fora de uma reta você poderia ter mais de uma paralela, em vez de uma única, como é o caso da axiomatização da Geometria Euclidiana. Começa por aí.

As DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008) foram mencionadas pelo professor: “Depois, você pode fazer, também, pegar as explicações das DCE, sobre a importância de se ensinar esse tópico”.

O professor discorreu, ainda, sobre a forma pela qual os problemas poderiam ser colocados para os alunos.

Poderia esse problema ser colocado para os alunos de uma forma totalmente aleatória, só para descobrir quais seriam as respostas desses alunos. Até porque, os alunos podem nos ensinar muito com seus raciocínios, ouvindo como se tem essa distância mínima na esfera, como se pode chegar a essa conclusão, como é que eles calcularam, ele pode descobrir mais coisas que o próprio professor. Depois, finalmente, também com material de apoio, levando umas esferinhas para os alunos de isopor, um elástico, como foi essa atividade, e começar a trabalhar o assunto.

Retomando a abordagem realizada na monografia de um de seus alunos, P2 sugere também o uso de materiais na exploração dos conceitos das Geometrias não Euclidianas, em particular, da Geometria Esférica:

Começa com a investigação do aluno e, se apoiando em material concreto, como esses que eu citei, como a esfera de isopor e os elásticos, e em seguida você vai partindo para as definições, ou verificando quais são os elementos primitivos dessa geometria, quais seriam, então, os novos axiomas em comparação com os de Euclides. Daí vem a importância. Você vai ver quais que ficam válidos. O que vai ser uma reta, o que vai ser um triângulo. E agora? Como é que fica? Vamos somar os ângulos internos do triângulo. Será que vai dar 180 graus? Está passando. Por que está passando? Vai dar quanto? Então, eu acho que uma aula, conduzida deste modo, poderá ser muito motivadora e, conseqüentemente, o problema já veio dessa aplicação: ver a distância mais curta entre duas cidades. Então, acho que já contempla também um problema real.

Em seguida, solicitei ao professor P2 para ler a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Após sua leitura, perguntei o que ele pensava a respeito da contribuição trazida pelos conteúdos propostos nessa para a formação dos futuros professores de Matemática. O professor P2 destacou que os conteúdos propostos irão “[...] dar uma bagagem mais teórica para o professor, sobre as Geometrias não Euclidianas”. Também, mencionou que, em um currículo de um curso de graduação, sempre deve-se “[...] incluir tópicos que vão além do que

você iria propor para o aluno”. Assim, considerou:

Mas, que o professor tenha uma formação de conteúdo que vá além do que simplesmente, ele ter as noções básicas para ensino. O ensino inicial das Geometrias não Euclidianas, conforme eu sugeri, com material como esferas e elásticos, haveria a necessidade de estar trabalhando, digamos, coisas muito teóricas, como são colocadas no curso. Conforme você falou, também é para alunos do Bacharelado. E o aluno do Bacharelado precisa estudar essa relação que está colocada, como os grupos finitos, as isometrias, etc. E aí, vai haver uma comutatividade com a Álgebra, que é fundamental.

Diante do comentário sobre a relação da Álgebra com as Geometrias, perguntei se ele estava referindo-se à formação do bacharel. A resposta de P2 foi:

Para o bacharelado e até para o licenciando. Porque seria uma forma de contemplar aquilo que nós estávamos falando. Eu falei que na aplicação, para o aluno do Ensino Médio e Fundamental, a Álgebra vai se reduzir a cálculos. Porque passando disso complica. Falar em Grupos, para o aluno do Ensino Fundamental e Médio, não daria. Mas aqui, estaria contemplando no Ensino Superior uma conexão com a Álgebra, com a isometria.

P2 apresentou sua posição em relação à ementa desta disciplina, a qual considerou adequada e, também, destacou:

Então, a ementa, eu acho que também está feliz, é mais do que simplesmente passar o básico para o aluno, seja as noções básicas de uma introdução das Geometrias não Euclidianas. Aqui, vai um pouco mais. Vai explorar um pouco mais sobre as Geometrias não Euclidianas. Até porque, é um curso de graduação da Universidade Federal do Paraná, então, tem que ir para esse lado do aprofundamento teórico mesmo. Embora, isso não quer dizer que é isso que tem que saber para se aplicar lá no Ensino Fundamental. Como eu falei, mesmo um professor que não tenha visto no currículo, na sua graduação.

Perguntei ao professor se faria alguma modificação na ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, caso fosse pensada especificamente para a Licenciatura. Quanto a essa questão, P2 considerou:

Sim, aí, necessariamente, nós contemplaríamos toda aquela parte das aplicações, do dia a dia do aluno. Olhar como é que ele estaria explorando esse assunto, digamos, se fosse a Geometria Esférica, para ele poder ver as implicações no ensino. Acho que poderia incluir nessa ementa, mesmo para o bacharelado, poderiam ser incluídas questões do pensamento geométrico, que vão entrar, aí, as implicações no ensino para o aluno do Ensino Médio e Fundamental. Embora, não é esse o perfil de uma ementa para os cursos de graduação, principalmente para o bacharel. Mas, poderia ser uma oportunidade de incluir.

Na continuidade de suas explicações, as DCE de Matemática (PARANÁ, 2008), novamente, foram salientadas pelo professor P2:

Pode ser que os professores que elaboraram essa ementa não pensaram nisso: que está lá na DCE. Então, seria agora, uma oportunidade de você, que está fazendo essa dissertação de mestrado, em nível superior de educação, contatar o professor e colocar ele a par disso e, de repente, recomendar que pense nesse viés de ensino, já que está incluso nas DCE.

Além disso, P2 considerou que a “conexão” dessas geometrias com as questões relativas ao ensino é relevante para os licenciandos e, até mesmo, para os alunos do Bacharelado, considerando que:

Os alunos da Licenciatura, para eles que vão ser professores, vão fazer, mas, mesmo nossos colegas bacharéis acabaram se tornando professores, mesmo que de universidade, mas acabaram sendo professores de licenciandos.

Diante dessa consideração do professor, comentei que o bacharelado poderá ser aquele que irá formar futuros professores de Matemática para a escola básica. Assim, P2 destacou:

O objetivo é formar o professor de sala de aula. Eu acho que caberia, depois de você contatar o professor que, em seguida, você vai entrevistar e que, provavelmente, foi quem fez a ementa, que ele incluía também essa preocupação com o ensino no nível Fundamental e Médio.

Na sequência da entrevista, apresentei a questão que destaca, diretamente, quais seriam as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica. Em resposta a essa questão, P2 declarou:

A Matemática, de maneira geral, serve como modelo para a resolução de problemas reais. E a Geometria não Euclidiana é um mundo novo a ser explorado, no qual o aluno vai contatar com pensamentos diferentes e com as limitações que ele tem do seu espaço tridimensional, que é nosso espaço real. E isso vai contribuir muito, tanto para seu raciocínio básico, até para fazer aplicações para resolver problemas da área de Ciência e Tecnologia que virão no futuro.

4.1.3 Entrevista com a professora da disciplina Matemática no Ensino Médio

Caracterização da professora P3:

A professora P3 é graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia, possui mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Paraná. Atualmente é Professor Adjunto da Universidade Federal do Paraná. Atua, principalmente, nos seguintes temas: Ensino Superior, Álgebra Abstrata, Educação Matemática.

Caracterização da disciplina:

A disciplina Matemática no Ensino Médio pertence ao Núcleo de Conteúdos Profissionalizantes e é uma disciplina de integração entre os eixos do conhecimento contemplada na Dimensão do Ensino. Ofertada pelo Departamento de Matemática no 7.º semestre do curso, com 60 horas de carga horária, tem como pré-requisito a disciplina Matemática no Ensino Fundamental. No currículo novo substitui a disciplina Projetos Integrados em Educação Matemática II.

Ementa: Conteúdos do ensino médio e sua relação com a matemática do ensino superior. Pensamento algébrico, geométrico, analítico e probabilístico em situações de ensino. Planejamento e simulação de aulas.

A entrevista:

A seguir, apresento a síntese da análise realizada sobre as respostas às questões da entrevista com a professora P3, na qual destaco as razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica.

Em relação à abordagem das Geometrias não Euclidianas na disciplina

Matemática no Ensino Médio, P3 declarou que esse tema foi abordado em algumas monografias, principalmente a Geometria Fractal, porém, não foram muitas. De acordo com P3, “em uma, ou duas monografias. Só, também”. A professora mencionou que, em certos casos, essas geometrias aparecem indiretamente relacionadas com outros temas, como foi o caso de uma monografia sobre Números Complexos que, para mostrar uma aplicação, utilizou o exemplo de um Fractal.

Sobre a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática (PARANÁ, 2008), P3 esclareceu que inicia o trabalho na sua disciplina com a leitura desse documento para destacar os principais pontos, em particular, para que os licenciandos verifiquem quais são os conteúdos matemáticos apontados nessas diretrizes e, assim, identifiquem essas geometrias. P3 também mencionou que os alunos escolhem livremente os conteúdos que irão abordar em suas monografias, comentando:

Eu já tentei fazer uma coisa mais direcionada, mas o que eu vejo é assim: como eles não passaram pela disciplina [Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas] fica difícil de fazer a ligação. Porque essa nossa disciplina [Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas], é mais algébrica.

A professora P3 salientou, ainda: “[...] se a gente conseguisse, desse algébrico, tirar algumas coisas que podem ser algumas atividades, alguns pontos que podem ser usados lá na escola”.

Em relação aos conteúdos da ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, a professora P3 considerou positivo o foco no Grupo de Isometrias, ou seja:

[...] no sentido de pegar todos aqueles conteúdos da disciplina de Grupos e fazer uma aplicação daquilo em algo que o aluno nunca teria imaginado. Você fundamenta a parte das Geometrias não Euclidianas dessa forma: com a Álgebra.

Para P3, essa abordagem é importante por dois aspectos:

Primeiro, porque tem uma aplicação da Álgebra. E, segundo, porque faz uma amarração boa entre Geometria e Álgebra. E aí, mais uma vez, a gente tira aquela coisa de caixinhas totalmente separadas e que você pode fazer toda aquela coisa ligada.

No que se refere aos aspectos geométricos, a professora P3 considerou:

O que, pra mim, falta um pouquinho, é que de repente, os aspectos geométricos das coisas podem ficar, não de fora, mas, não ter um destaque maior. Porque, de repente, a gente fica muito preocupada com a parte algébrica e esquece-se da parte geométrica. E aí, não é bom. A gente precisa dessa parte geométrica, desses desenhos. Porque aparecem uns desenhos estranhos, pra poder fazer essa coisa visual, também.

Em seguida, salientou a possibilidade de equilibrar os aspectos algébricos e geométricos nessa abordagem, pois: “[...] a gente consegue todos os aspectos: o aspecto algébrico, o aspecto geométrico e a ligação dos dois”.

Para P3, essa relação é importante para o licenciando, pois: “[...] justifica algumas coisas. Justifica, por exemplo, porque eu tenho que aprender Grupos, porque eu tenho que saber dessas coisas de Geometria. Mas, ainda fica faltando, para o licenciado, a ligação com a escola”.

Segundo P3, o “problema maior é o que disse ele vai levar lá pra sala de aula”. Argumentou que o professor não pode falar de Grupo de Isometria ou de Transformações Geométricas na escola, mas pode falar que: “[...] na [Geometria] Esférica, a soma dos ângulos [internos] de um triângulo é diferente. Na [Geometria] Hiperbólica, [a soma dos ângulos internos de um triângulo] é diferente”.

Assim, a professora P3 apontou o que precisa ser considerado, ou seja: “Como que eu proponho atividades, lá na escola, pra eu poder falar sobre isso? Se a gente pensar que não tem um livro didático pra dar suporte, então, aonde que eu procuro estas coisas?”.

P3 considerou que o estudo dessas geometrias pode ser desenvolvido ainda que os licenciandos não tenham “[...] esse conteúdo matemático bem estruturado, como está na disciplina [Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas]”. Assim, destacou o que vem sendo realizado pelo professor da disciplina Geometria no Ensino, como, por exemplo, a abordagem da Geometria do Táxi, além dos textos sobre a Geometria Esférica e a Hiperbólica, trazidos para os alunos. Dessa forma, considerou que o estudo que envolve a elaboração de abordagens dessas geometrias na escola não precisa ser realizado na disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, mas sim, conforme a professora mencionou: “[...] que a gente tivesse uma coisa meio paralela, sabe? Uma extensão ou um trabalho que fosse diferenciado, alguma coisa, uma orientação desse tipo”.

Porém, em relação ao estudo formalizado realizado na referida disciplina, P3 considerou:

No caso das Geometrias não Euclidianas, eu acho que tem que ter uma formalização. No caso do nosso curso, eu acho que está faltando a outra parte: da dimensão pedagógica, que é pra você ver esse conteúdo todo aí. Como é que funciona isso, lá na escola. Como que você pode fazer. Eu acho que, no nosso currículo, é isso que está faltando.

Quanto aos motivos que levaram à inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR, a professora P3 destacou:

Eu acho que é pra conhecimento mesmo, porque você tem uma visão da Geometria não Euclidiana que é totalmente diferente do que ele [o aluno] vinha fazendo. Então, isso é pra ampliação, mesmo, do pensamento matemático. A Geometria não é única e exclusiva, Euclidiana. Você tem outros modelos. Nesses modelos, acontecem coisas que na Geometria Euclidiana não acontece. E as pessoas se espantam quando não têm esse conhecimento. Então, de repente, duas paralelas se encontrar em algum lugar! Como assim? A definição diz que elas não se encontram nunca! Então, eu acho que é pra isso: pra ampliar os horizontes, mesmo, do graduando. Você ter outras visões. Você saber que, na Matemática, não está tudo acabado, que é isso e pronto. E a Geometria não Euclidiana é uma geometria nova, então, quer dizer que a Matemática ainda está sendo construída, não é aquela coisa pronta e acabada. Você quebra aquele paradigma de que a Geometria Euclidiana é a única verdadeira. E isso é muito interessante para os alunos.

Questionei a professora P3 sobre quais seriam as contribuições do conhecimento dessas geometrias na prática docente dos futuros professores. De acordo com essa professora:

Acho que a primeira coisa que a gente vê é exatamente isso que a gente falou: ele ter a consciência de que a Matemática não é essa caixinha fechada. E que, se ele muda alguma coisa naqueles axiomas, ou, se ele deixa de pensar daquela forma, ele pode criar coisas novas. E não é que elas não são verdadeiras, elas são diferentes. Então, ele pode trabalhar com esse tipo de coisa. Para o licenciando, é muito importante, porque ele consegue entender coisas que acontecem dentro da sala de aula. Porque, às vezes, o aluno faz um procedimento que não foi o que ele ensinou, mas a coisa funciona. Se ele tem aquela mente fechada, que tem que ser daquele jeito e pronto, ele não vai considerar nada do que aquele aluno fez. E quando ele descobre que a Matemática é essa coisa viva, ele vai entender e vai procurar analisar o que aquele aluno fez. Porque, de repente, a ideia do aluno vem de um atalho que ele criou. E funciona. E não está errado aquilo. Eu acho que isso é fundamental para o nosso licenciando. Ele tem que saber. Ele tem que dar conta dessas coisas.

Em seguida, apresentei a questão que teve por finalidade saber se, na visão da professora P3, a inclusão das Geometrias não Euclidianas em documentos de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ser considerada nas

licenciaturas. A professora considera que sim, argumentando que “você não pode, em uma formação inicial, mandar o aluno tão despreparado assim”.

É claro que a gente nunca vai conseguir cobrir tudo isso, com certeza, mas eu acho que a gente tem que dar as ferramentas, aquele conteúdo inicial, pra que ele vá se virar depois. Se ele passa pela universidade, pela formação inicial dele, inteira, sem nunca ter ouvido falar de Geometrias não Euclidianas, a coisa vai ficar muito complicada. Eu acho que a gente não precisa chegar a um grau de especialização, nem cabe, na formação inicial. Mas essa discussão do porque ela começou, porque que se chamam Geometrias não Euclidianas, quais são os tipos que têm... Porque a gente não tem um modelo só. A gente tem vários modelos. A Geometria Fractal está dentro de algum desses modelos. Então, essa discussão, eu acho que tem ter em qualquer curso, que é uma coisa que está sendo pedida.

Os próximos comentários da professora P3 envolveram a questão específica das principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica. Em sua resposta, P3 reafirmou o que já havia considerado em momentos anteriores:

As razões são: que ele tem que conhecer o que é Geometria Euclidiana e o que é não Euclidiana, quais são as diferenças, quais são os modelos que têm. Isso, pra abrir o conhecimento matemático dele, entender que a Matemática não é só aquele axioma que ele aprende na Geometria Axiomática. Ele tem que saber de Geometria não Euclidiana. Porque é algo que vai ser cobrado dele na escola. Como professor, ele tem que saber dessas coisas. E serve pra que ele tenha esse conhecimento geral, que se uma coisa não é feita daquela forma, ela pode estar correta mesmo assim. Acho que o ponto principal é tirar a Matemática das caixinhas, sempre.

A professora P3 apresentou, em seguida, argumentos que completam uma de suas colocações:

[...] ele consegue entender coisas que acontecem dentro da sala de aula. Porque, às vezes, o aluno faz um procedimento que não foi o que ele ensinou, mas a coisa funciona. Se ele tem aquela mente fechada, que tem que ser daquele jeito e pronto, ele não vai considerar nada do que aquele aluno fez. E quando ele descobre que a Matemática é essa coisa viva, ele vai entender, ele vai procurar analisar o que aquele aluno fez. Porque, de repente, a ideia do aluno vem de um atalho que ele criou. E funciona. E não está errado aquilo. Eu acho que isso é fundamental para o nosso licenciando. Ele tem que saber. Ele tem que dar conta dessas coisas.

4.1.4 Entrevista com o professor da disciplina Geometria no Ensino

Caracterização do professor P4:

É graduado em Licenciatura em Matemática, possui mestrado e doutorado em Educação Matemática. Foi professor da Educação Básica durante vários anos e, atualmente, é professor da Universidade Federal do Paraná. Também desenvolve atividades de pesquisa, ensino e extensão na área de Educação Matemática. Tem vários artigos publicados em periódicos, nos quais discorre sobre temas da Educação Matemática, tais como os artigos intitulados “Demonstrações em Geometria: alunos de licenciatura, ambiente informatizado e reflexões para a formação do professor Matemática” e “Histórias de Vida de Professores de Matemática”, dentre outras produções bibliográficas de sua autoria.

Caracterização da disciplina:

A disciplina Geometria no Ensino, pertence ao Núcleo de Conteúdos Profissionalizantes e é uma disciplina de integração entre os eixos do conhecimento, contemplada na Dimensão do Ensino. Ofertada pelo Departamento de Desenho no 5.º semestre do curso, com 60 horas de carga horária, não possui pré-requisitos. No currículo atual substitui a disciplina do currículo antigo denominada de Projetos Integrados em Geometria.

Ementa: Desenvolvimento e elaboração de projetos na área de Geometria. Aplicação e Execução de projetos de ensino na área de Educação Matemática através de recursos de Geometria Descritiva e Desenho Geométrico.

A entrevista:

Iniciei a entrevista com o professor P4 comentando sobre a inclusão das

Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática (PARANÁ, 2008), destacando que, neste documento, apontam-se: Noções de Topologia, Geometria Projetiva e Geometria Fractal. Para o Ensino Médio propõem-se: Geometria Fractal, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica. Considerando os futuros professores de Matemática que atuarão nas escolas do Paraná, perguntei ao professor se pensaria na possibilidade de incluir estas geometrias no planejamento de sua disciplina. De acordo com este professor:

Independente de ter nas DCE, ou não, eu acho que ela tem que existir dentro de um curso de Matemática. Eu acho que é uma parte fundamental da Matemática, porque você tem uma ruptura histórica na questão da Geometria Euclidiana e das não Euclidianas e é um problema interno da disciplina interessante: discutir a questão do quinto postulado, independente de que fosse aplicável ou não, portanto, faz parte da formação matemática do professor de Matemática.

Em seguida, P4 comentou sobre o currículo do Ensino Fundamental e Médio: “[...] eu entendo que esse currículo deve ser formado por duas coisas: uma, pela parte formativa da Matemática: a Matemática pela Matemática e, outra: a Matemática utilitária”.

O professor especificou, ainda, para o caso das Geometrias não Euclidianas: “[...] eu olho para as Geometrias não Euclidianas e elas preenchem esses dois aspectos”.

Para esclarecer seu ponto de vista, P4 destacou três geometrias: a Geometria do Táxi, a Esférica e a Fractal, salientando que elas são aplicáveis. Sobre a aplicabilidade da Geometria Fractal, o professor considerou: “No mínimo, ela permite um pensar diferente sobre algumas coisas que são interessantes do ponto de vista matemático, é surpreendente”.

Assim, o professor reafirmou sua colocação sobre os aspectos do conhecimento matemático:

Enfim, você tem, pelo menos, essas três geometrias que têm essas duas visões, ou seja, ela participa desses dois subconjuntos: a Matemática do matemático: a Matemática pela Matemática e, a Matemática utilitária. Então, eu acho que ela deve estar incluída ali. Independente que estivesse ou não [nas DCE]. Como ela está, é claro que é mais um motivo para que eu a inclua dentro do meu rol de conteúdos.

Para P4, a inclusão dessas geometrias em um documento de orientações

curriculares para a Educação Básica deve ser considerada nas Licenciaturas. Porém, conforme P4 já havia mencionado, não é somente por esse motivo que esse assunto deve ser tratado na formação inicial, mas sim, pelos seus aspectos matemáticos. Entretanto, salientou:

O problema maior que se enfrenta não é Geometria não Euclidiana – Geometria Hiperbólica, Geometria Fractal... O que da Geometria Hiperbólica, o que da Geometria Esférica, o que da Geometria Fractal e; o que da Geometria do Táxi? É essa a pergunta, na verdade.

Na continuidade de sua explanação, o professor passou a destacar questões específicas do currículo escolar, pois, para ele, alguns conteúdos deveriam ser retirados, especialmente, quando novos conteúdos são inseridos, como é o caso das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008). Assim, direcionou seus comentários para questões mais pontuais, destacando seu ponto de vista em relação a outros conteúdos.

A próxima questão que apresentei referia-se aos motivos que levaram à inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR. Em sua resposta a esta questão, P4 reportou-se à dissertação de Kátia Silva (2007), na qual se encontram transcritas as discussões da comissão de reformulação curricular do curso:

Isso você pode ver no trabalho da Kátia. No trabalho da Kátia, a gente escutava as fitas e, inclusive, na transcrição. Ali mostra, claramente, o objetivo que tinha que ser discutido: a questão do quinto postulado, porque era uma questão importante para a História da Matemática, para a construção do conhecimento matemático. Do ponto de vista da formação matemática, isso é imprescindível. Então, a resposta seria: a questão da formação matemática do professor de Matemática. Não tem como ele sair da universidade, não tem mesmo, sem ele ter ideias sobre outras geometrias, que não seja a Euclidiana. Eu acho que isso é básico em qualquer discussão de formação de professores de Matemática. É importante do ponto de vista da Matemática pela Matemática e do ponto de vista da questão utilitária. Em particular, a Geometria Esférica, eles não conseguem entender a rota de um avião, se eles não têm a mínima base de Geometria Esférica.

O professor P4 também comentou sobre a possibilidade de estabelecer relação entre os conteúdos das disciplinas específicas da Matemática e os conteúdos escolares. Em particular, sobre as Geometrias não Euclidianas, comentou o professor, ao ingressar na escola:

[...] ele não vai saber como encaminhar uma discussão sobre a Geometria do Táxi, o que ele vai fazer com isso? Como encaminhar uma discussão sobre Geometria Esférica? O que ele vai abordar? Porque isso também não está claro. O que é importante? O importante é que eu mostre pra ele, por exemplo, que na Geometria Esférica, a soma dos ângulos no triângulo, internos do triângulo não é 180° , mas é maior? Qual é a proposta? Então, isso é uma coisa muito interessante pra você pensar.

Percebe-se que, em diversos momentos, o professor P4 reafirmou sua preocupação com “o que” das Geometrias não Euclidianas é pertinente destacar quando trata-se da formação inicial do professor de Matemática.

Na sequência de sua explanação, P4 comentou sobre algumas possibilidades de abordagens dessas geometrias que podem ser realizadas na sua disciplina:

Agora, eu não consigo pensar isso a nível macro, eu só consigo pensar na minha disciplina e o que eu posso fazer com o meu aluno. Então, o que eu posso fazer com meu aluno? Eu posso dar situações, porque eu também não tenho um compromisso que, de repente, um outro professor assume pra ele, que é dar conta de milhares de axiomas e demonstrações, etc. e tal, daquelas geometrias. Mas eu posso, na minha disciplina, mostrar o Cinderela para que ele possa fazer algumas construções, pegar a esfera de isopor e a gente pode fazer algumas situações. E sempre com olhar muito crítico. Olhar para aquilo e falar: o que o aluno aprendeu com isso? Brincar com a questão da definição, que eu acho muito legal. Brincar, por exemplo, com a definição da circunferência na Geometria do Táxi, como é que ela fica. Então, você tem que seguir a definição, aonde que vão estar os pontos e efetivamente o que vai ser essa circunferência na Geometria do Táxi. Porque eu acho que essas coisas são importantes, você brincar com definições, eu acho que isso é uma coisa que faz parte da Matemática do matemático. E é algo que está na escola, porque faz parte da Matemática.

A questão seguinte buscou saber quais seriam, para P4, as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica. Em sua resposta, o professor P4 destacou:

Porque é um conteúdo utilitário importante, ou seja, ele é útil para a vida do aluno. Claro, e do professor. Vamos deixar assim: o importante é que ele vai ter que ensinar aquilo. Mas por que ele vai ter que ensinar aquilo? Ele vai ter que ensinar aquilo porque é importante para entender alguns fatos da vida cotidiana. Então, é ponto de vista utilitário. O professor vai ter que ensinar, lá na ponta. Então, ele vai ter que aprender aqui. Porque ele vai ter que ensinar, por conta disso. Eu acho importante a inclusão dela nas DCE. Então, eu acho importante a inclusão dela no curso de Licenciatura, é a primeira coisa. Ela é importante do ponto de vista histórico e de construção da Matemática. Então, ela faz parte de um momento histórico da Matemática e que vai mostrar para o aluno, como que o conjunto de conhecimentos matemáticos dele pode ser construído em uma determinada vertente. Porque, no caso específico das Geometrias não Euclidianas, particularmente, a Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica, você tem

uma discussão sobre um postulado que você tenta demonstrar e, de repente, você descobre que ele não é demonstrável. Mas aí, você cria dois mundos. E isso é uma coisa muito bonita. Então, até pela beleza estética de construção de conhecimento. Faz parte da formação cultural do professor de Matemática, ter esse conhecimento. Isso, se vamos pensar só na formação do professor de Matemática. Então, acho que, basicamente, por essas duas vertentes.

Apoiando-me no seu comentário sobre o ponto de vista histórico das Geometrias não Euclidianas, perguntei ao professor se, dentre os conteúdos matemáticos, essas geometrias poderiam ser consideradas como um dos mais motivadores para abrir espaço para as discussões sobre a História da Matemática. De acordo com P4:

Ele é um exemplo exemplar disso. Tem um outro exemplo exemplar que é o dos números complexos. Ele é um exemplo exemplar intrinsecamente matemático. Um problema intrinsecamente matemático, que gera a necessidade de construção de conhecimentos que, mais tarde, são utilizados para outras coisas. Então, eu acho isso muito bonito. Tanto na parte de Geometrias não Euclidianas, como na parte de números complexos. Eu acho que são dois momentos bonitos, em relação a isso.

A próxima questão teve por finalidade saber, na visão de P4, de que forma o conhecimento destas geometrias poderá contribuir na prática docente dos estudantes do curso, quando estes iniciarem seu trabalho na escola. Inicialmente, o professor considerou que “[...] depende. Isso aí, absolutamente, depende de como que ele foi ministrado”.

Para ilustrar sua argumentação, P4 passou a relatar uma experiência que vivenciou em certas disciplinas, quando era aluno do curso de Licenciatura em Matemática da UFPR, nas quais poderia dizer que os conhecimentos tratados não serviram para sua prática docente ou, serviram muito pouco. Nesse sentido, P4 evidenciou o que havia mencionado, isto é, que a contribuição do conhecimento das Geometrias não Euclidianas, na prática docente, depende da forma como elas são abordadas na Licenciatura.

Diante disso, solicitei para que apontasse tais contribuições na perspectiva da qual idealiza o ensino dessas geometrias na Licenciatura. P4 utilizou, como exemplo, a forma pela qual aborda as Geometrias não Euclidianas na sua disciplina:

Veja, é muito importante que as Geometrias não Euclidianas, no meu caso, elas são coisas muito pontuais. Se eu fosse dar a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, daí, eu passaria pela Geometria Hiperbólica,

pela Esférica, pela Geometria do Táxi, pela Geometria Fractal. Certamente eu passaria por essas geometrias e, talvez, mais alguma que me escape. [...] Vamos pegar o caso da Geometria Fractal, por que ela serve? Porque que eu acho que o aluno, depois que ela passa pelas experiências que eu proporciono pra ele, o que é que ele tem lá na ponta?

Na continuidade de sua explanação, o professor P4 destacou a História da Matemática: “Então, é uma oportunidade que eu tenho de mostrar uma parte histórica interessante da Matemática. Isso é possível que ele leve pra sua prática”.

Destacou, também, o uso de “várias ferramentas matemáticas”:

É uma oportunidade muito grande que eu tenho de usar várias ferramentas matemáticas pra resolver o mesmo problema. Então, no caso da Geometria fractal, eu faço o seguinte com eles: eu pego vários recursos didáticos, então, eu uso cartolina, eu uso a calculadora, eu uso o computador. Do Floco de Neve de Koch, a gente monta uma tabela, daí, eu jogo essa tabela do Excel, estou trabalhando com Aritmética e a necessidade de transpor Aritmética pra Álgebra. Mas eu saí de uma situação geométrica, entende? Então, eu posso fazer essa relação. E enfatizo pra eles essa relação: “gente, olha, observem a Geometria, a Aritmética, a Álgebra”. E daí, o que eu vou fazer com tudo isso. Bom, eu vou jogar em um gráfico no Excel e ploto o gráfico. Daí, ele vai ver o gráfico daquilo. Então, ele vai ter mais uma representação. Pra mim, isso é muito rico pra pessoa, lá na prática.

A questão histórica foi, novamente, salientada pelo professor P4, como também outros aspectos da abordagem das Geometrias não Euclidianas:

Ele tem a questão histórica, ele tem algo que é surpreendente, porque ainda que você não tenha o limite, derivada, integral, lá na escola, você pode ter a ideia de limite em algo que é muito surpreendente. Você tem, no caso, do Floco de Neve de Koch, um perímetro que tende ao infinito e uma área que tem um valor. Até do ponto de vista filosófico é interessante. Eu quero chamar a atenção pra eles, que eles podem sair dali com essa ideia: que coisa interessante! Eu posso levar essa ideia pra sala de aula, porque eu passei por uma situação de aprendizado, reaprendizado e de utilização das ferramentas que eu já possuo, na minha formação como professor. Então, é possível que isso sirva pra mim lá na frente.

Assim, além de apontar o conhecimento dos aspectos históricos dessas geometrias, o professor apontou os aspectos filosóficos envolvidos.

Com o objetivo de questioná-lo sobre quais seriam as contribuições dos conteúdos da disciplina Geometrias Euclidianas e não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica, pedi para o professor ler a ementa da disciplina. Após a leitura, ele comentou que a resposta seria a mesma que apresentou anteriormente, ou seja: “Depende de como que a pessoa explora

cada uma dessas questões. Se ela explorar do ponto de vista mais intuitivo, levando um material didático interessante, com recursos”.

Em seguida, P4 apresentou algumas colocações sobre disciplinas que são ofertadas tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura:

Veja, é engraçado porque, eu não sei, imaginando aqui algumas pessoas sentadas aqui, imagine que estivessem matemáticos, eles poderiam falar assim: mas você não está trabalhando com criança pra você levar esses materiais. Daí, eu falaria assim: não, você está trabalhando com professor que vai trabalhar com criança. Então, já seria o suficiente pra gente poder fazer essa discussão. Por isso que é muito difícil você unir Bacharelado com Licenciatura, não tem a menor, o menor sentido, a ideia é completamente diferente. Então, veja, eu não sou contra, eu não acho que a ementa não seja razoável, ela é razoável. Por outro lado, depende de como a pessoa vai trabalhar. Se ela pegar isso aqui e for extremamente formalista, desculpa, mas só um bobo não vê que a maior parte das pessoas vai decorar, assim como eu decorei em Análise, não tem como. Então, depende, na verdade. Não é a ementa, não é a disciplina, é o como.

Ainda sobre a ementa da disciplina em questão, P4 apontou para algumas possibilidades de direcioná-la mais especificamente para a Licenciatura:

Poderia melhorar a ementa pra que ela tivesse mais cara de uma disciplina da Licenciatura, se o que eu quero é formar um bom professor pra trabalhar com isso? Claro que poderia. Eu poderia passar recursos didáticos para o trabalho com as Geometrias não Euclidianas, em particular, Geometria Esférica, Geometria do Táci, definições da Geometria do Táci. Poderia melhorar. Poderia fazer algumas modificações, tendo em vista o que se quer. Porque da maneira como está, não tem jeito, ele vai decorar. Ele vai, do meu ponto de vista, dando um baita de um chute, mas eu acho difícil que ele consiga começar a trabalhar com uma disciplina de Geometrias não Euclidianas, a partir do que ele tem visto no curso de Licenciatura em Matemática. Ele não consegue começar. Porque ele não viu um desenho nessa disciplina, é muito raro, agora que começou haver algum desenho.

A próxima questão da entrevista teve por finalidade saber se houveram abordagens das Geometrias não Euclidianas na disciplina Geometria no Ensino. Sobre isso, o professor P4 informou que, nesta disciplina, foram abordadas as Geometrias do Táci, Esférica e Fractal, as quais foram desenvolvidas por meio de atividades investigativas.

Nas suas considerações finais, o professor P4 salientou:

De uma maneira ou de outra eu acho que isso é um avanço, um baita de um avanço você ter isso numa diretriz. Não tem nem o que discutir a respeito disso. Também acho, não vou dizer que seja um avanço pra Licenciatura em Matemática ter essa disciplina porque várias outras já tinham, entende. Então, isso, eu acho que é algo necessário dentro do curso de Matemática,

pelo que a gente já falou, acho importante estar na diretriz, acho que é um avanço mesmo. Enfim, de qualquer forma, estou satisfeito. As minhas insatisfações não estão localizadas na disciplina de Geometrias não Euclidianas é localizada em qualquer disciplina dentro da universidade. Mas, não os culpo, meus colegas, por isso é algo difícil de fazer, difícil de começar e você não tem recurso humano pra fazer isso a todo o momento. Isso era algo que eu queria falar.

4.1.5 Entrevista com a professora da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática

Caracterização da professora P5:

Doutora em Educação. Atua no Departamento de Teoria e Prática de Ensino e no Programa de Pós-Graduação em Educação. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, e também em Cognição, Aprendizagem e Desenvolvimento Humano, atuando principalmente com os seguintes temas: formação de professores (inicial e continuada), Educação Matemática, ensino de Matemática, didática e metodologia do ensino em todos os níveis, educação à distância.

Caracterização da disciplina:

Pertence ao Núcleo de Conteúdos Profissionalizantes e está inserida no Eixo de Conhecimentos das Ciências da Educação. Ofertada pelo Departamento de Educação no 6.º semestre do curso diurno e 7.º semestre do curso noturno, com 60 horas de carga horária; e não tem pré-requisitos.

Ementa: Diferentes enfoques no ensino de Matemática. Análise da situação do ensino de Matemática na Educação Básica. Fundamentos teóricos e possibilidades didático-metodológicas para o ensino de Matemática.

A entrevista:

Iniciei a entrevista com a professora P5, comentando sobre a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas ofertada no curso de Matemática da UFPR, a partir de 2006. Assim, perguntei para a professora P5 o que diria, enquanto professora de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre os motivos que teriam levado à inclusão desta disciplina no curso, tanto para a Licenciatura como para o Bacharelado, visto que é ofertada para essas duas modalidades de formação inicial.

Sobre isso, a professora mencionou que não participou da comissão de reformulação curricular do curso, pois naquela época encontrava-se parcialmente afastada das atividades do Programa de Graduação. Porém, comentou algo sobre esse assunto, explicitando que o que diria seria uma opinião estritamente pessoal e também que, em suas explicações, sempre estaria referindo-se à Licenciatura, pois este é seu espaço de atuação no curso. Dessa forma, apresentou as seguintes considerações:

Eu acho importante porque o aluno, na sua formação inicial, ter o contato com as Geometrias não Euclidianas amplia, sobremaneira, o conhecimento que ele tem no campo da Geometria, e dá a ele, inclusive, uma possibilidade de melhor compreensão da própria Geometria Euclidiana.

Em seguida, a professora comentou sobre certos conteúdos matemáticos que são desenvolvidos durante a formação inicial do professor de Matemática:

Acho importante porque nós, na nossa formação inicial, às vezes, temos conteúdos de altíssima complexidade, mas não necessariamente conteúdos que nos apoie no conhecimento do conteúdo com que vamos trabalhar na sala de aula da Educação Básica. E aí eu vejo a importância das Geometrias não Euclidianas, não porque o professor vai trabalhar isso na Educação Básica, mas para a sua compreensão e a sua possibilidade de compreensão da própria Geometria Euclidiana.

Embora a professora P5 já tivesse destacado uma das razões para incluir essas geometrias na formação dos licenciandos, perguntei se, além do que havia apresentado, apontaria outras razões. Assim, apresentou outras considerações:

Vou acrescentar uma coisa. Eu ainda lembro, embora já faça muito tempo, eu ainda lembro a primeira vez que eu tive contato com as Geometrias não Euclidianas. Veja, foi tão importante que eu lembro até hoje. Primeiro, eu

tive uma reação de espanto. Como é que pode existir uma Geometria que não é a Euclidiana! E esse espanto, no primeiro momento, eu pensei assim, só podia ser coisa de matemático. Depois do espanto, eu passei por uma fase de encantamento. E essa fase de encantamento me foi importantíssima, porque abriu meu horizonte matemático. Embora eu não me tornasse uma grande conhecedora de Geometrias não Euclidianas, mas eu fiquei realmente encantada. E esse encantamento me fez querer compreender mais ainda as Geometrias não Euclidianas. Então, eu realmente acho que, acho não, eu tenho certeza que, na formação do professor é muito importante. Até para o licenciando perceber o quanto o conhecimento matemático é amplo e o quanto ele não está inserido apenas naquele conhecimento que você trabalha na Educação Básica, ou que você trabalha nos fundamentos, na própria Licenciatura. Eu acho importantíssimo, eu acho muito bonito.

Na continuidade da entrevista, perguntei à professora de que forma o conhecimento destas geometrias, no seu modo de pensar, poderá contribuir na prática docente dos estudantes do curso, quando estes iniciarem seu trabalho na escola. Em resposta a essa questão, P5 destacou:

Veja, na Educação Básica, dificilmente, ele vai trabalhar com esses conteúdos e, se for trabalhar, vai ser de um modo muito inicial. Eu acho que a maior contribuição do estudo das Geometrias não Euclidianas na Licenciatura é ampliar e possibilitar um conhecimento muito mais substantivo da Geometria Euclidiana. Veja, ele não precisa trabalhar com o conteúdo pra fazer uso do conteúdo. Esse conteúdo está inserido no cabedal de conhecimento do próprio professor. Porque pra gente ensinar, a gente precisa saber muito mais do que a gente ensina, até pra poder trabalhar com os fundamentos daquilo que você ensina. E aí, eu acho que a contribuição é muito grande, de fato.

Ainda em relação à disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, solicitei a leitura da sua ementa e em seguida que ela apresentasse comentários a respeito das possíveis contribuições dos conteúdos apontados na formação dos licenciandos. Assim, a professora P5 comentou:

Olha, veja bem, o modo como está a ementa, ela é uma ementa estritamente matemática. A ementa não traduz nenhum elemento vinculado à formação de professores. Então, eu insisto que essa ementa contribui para o conhecimento teórico do professor. Eu vejo que é uma ementa quase genérica, digamos assim, é toda voltada pra um conhecimento muito específico, eu diria até, um conhecimento basilar. O primeiro item da ementa “o plano euclidiano e seu grupo de isometrias”, é um conteúdo estritamente teórico, fundamental. Mas ao mesmo tempo eu vejo que se não houver um vínculo no trabalho dessa disciplina, ela se torna apenas mais uma disciplina.

Em sua explanação, P5 apresentou comentários relativos ao vínculo dos

conteúdos matemáticos desenvolvidos no curso de Matemática com a formação inicial do professor de Matemática:

Muito do conhecimento específico que se tem da Matemática, ele acaba se encerrando em si. Porque ele termina ali, sem que se façam vínculos com a questão de formação de professores. Por outro lado, um professor que tenha em mente a formação de professores, ele vai, na sua metodologia de ensino, fazer o vínculo desses conteúdos com a formação do professor, e não só do Bacharelado. Então, a contribuição é teórica, formativa do ponto de vista teórico, especificamente da Matemática, como está aqui. Agora, tornar isto fundamental sob o ponto de vista da formação do professor vai depender dos professores. Porque eu penso que uma ementa, uma grade curricular, ela tem um compromisso vinculado com especificar, viabilizar com quais conteúdos que serão trabalhados. Ela não traz a metodologia. Mas eu acho que aí, tem que ter um pouco de bom senso também, se eu estou trabalhando essa disciplina pensando na formação do professor, então, enquanto eu estou trabalhando eu vou fazendo esse vínculo, eu vou chamando a atenção, eu vou mostrando para o professor em formação que esse conteúdo é importante, sob o ponto de vista da compreensão do conteúdo que ele trabalha na escola. Porque eu tenho certeza que o professor da Educação Básica tem que ter um conhecimento profundo de Matemática, para que ele possa compreender, conceitualmente, o que ele trabalha e não apenas operativamente. E o que nós vemos, tanto na formação continuada dos professores que estão em exercício, como dos nossos próprios alunos, é que, muitas vezes, nós sabemos a Matemática profundíssima, enorme, mas desvinculada daquele trabalho que vamos fazer na escola. Então, na disciplina de metodologia, que nós não temos por objetivo trabalhar conteúdos matemáticos, mas trabalhar metodologicamente esses conteúdos, muitas vezes nós temos que trabalhar o conteúdo da Educação Básica. Porque existe muito conteúdo aqui [nessa ementa], nenhum deles deve ser minimizado ou excluído, todos eles são importantes. Quem elaborou a ementa, elaborou bem, mas de nada adianta se isso ficar encerrado aqui.

Encerrando os comentários sobre a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, mencionei as DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), destacando que, nesse documento, as Geometrias não Euclidianas foram incluídas no rol de conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio. Dessa forma, questionei-a sobre a possibilidade de incluir estas geometrias no planejamento de sua disciplina, pensando na formação dos futuros professores de Matemática que atuarão nas escolas do Paraná. A essa questão, a resposta da professora P5 foi a seguinte:

Sim, em princípio, eu não vejo porque não, agora, para trabalhar com esses conteúdos é preciso que o aluno tenha esse conhecimento. Então, essa é a primeira questão. Como agora nós temos essa disciplina, isso torna-se muito mais possível. Com Fractais nós já trabalhamos bastante. Já tivemos uns três ou quatro trabalhos, no decorrer dos meus vinte e tantos anos aqui na universidade. [...] Pouquíssimas vezes, de fato, esses conteúdos apareceram. Mas Fractais apareceram, até pela beleza dos Fractais e também porque tem uma professora na UFPR que publicou livros e eu

trouxe esses livros pra sala de aula. [...] E naquela fase que começou a sair, nos meios de comunicação, os Fractais, aquela coisa bonita, etc., daí surgiu. Aconteceram uns projetos muito interessantes, não saberia agora te detalhar esses projetos, mas surgiram. Mas surgiram por uma instigação externa e não surgiram naturalmente por uma questão curricular. Surgiram pela mídia, ou pela instigação da própria provocação que a gente fez com a produção da professora, mas espontaneamente não surgiram.

Em seguida, perguntei para a professora se a inclusão destas geometrias em documentos de orientações curriculares para a Educação Básica, de acordo com sua forma de pensar, deveria ou não ser considerada na Licenciatura. Para essa professora:

Quanto melhor você forma o professor para que ele atue na realidade dele melhor. Eu acho que o curso de Matemática e a Educação só têm a ganhar, obviamente, porque está inserido. Agora, existe um problema sério que os professores não conhecem essas geometrias, ou eles conhecem assim, sabem que existem.

A professora comentou, ainda, sobre a relação da universidade com as propostas implementadas pelas secretarias de educação, estaduais ou municipais:

[...] tem uma coisa interessante, há os que digam que universidade não pode estar vinculada a situações específicas, porque a universidade não forma o professor para uma situação, mas forma para o magistério. É fato, eu concordo com isso, mas eu concordo com isso no sentido de que você não pode vincular-se a isso. Mas eu penso que a universidade não pode eximir-se de como o conhecimento acontece na sala de aula. Nós não somos vinculados à Secretaria de Educação, mas nós formamos o professor para um sistema de ensino. E esse é um sistema de ensino. Eu penso que tenho o compromisso com as propostas do Estado, do Município. Eu acho que a gente, obviamente, não vai trabalhar isso porque a Secretaria propõe, mas você trabalhar com o seu aluno, aquilo que a Secretaria propõe pra que ele conheça e, até possa, depois, na sua prática, estar ensinando sobre isso.

Destacando pontos da ementa da disciplina Metodologia do ensino da Matemática: “diferentes enfoques” e “possibilidades didático-metodológicas no ensino da Matemática”, questionei sobre a possibilidade de explorar as Geometrias não Euclidianas sob estes enfoques e possibilidades didático-metodológicas, pensando no seu ensino na Educação Básica. A professora apresentou as seguintes considerações:

Então, nós não trabalhamos os conteúdos específicos, nós trabalhamos quando eles acontecem. Nós não temos como meta trabalhar esses conteúdos, como não temos com os outros, mas eu não vejo problema algum em trabalhá-los. Obviamente, isso em uma dinâmica de projeto.

Posso trabalhar em uma dinâmica de jogos, uma dinâmica dos processos metodológicos, obviamente que isso é possível. Aliás, todas as vezes que eu trabalhei com Fractais foi em atividades com projetos. Então, eu não vejo problema, pelo simples fato que não há limitação de conteúdos. [...] Então, acho que é até uma oportunidade de trabalhar as próprias diretrizes, nesse contexto.

Perguntei à professora P5 se houve, em algum momento, o desenvolvimento de projetos com outras Geometrias não Euclidianas, além do projeto que mencionou sobre Fractais. Ela informou que essas geometrias não apareceram em nenhum outro projeto, mas comentou que:

O que, algumas vezes, apareceu, foi a existência das Geometrias não Euclidianas como algo, normalmente citado como longe da escola. Na posição dos alunos, sempre sugerindo, dizendo e defendendo que ela não deve aparecer na Educação Básica porque o aluno não consegue nem compreender a Geometria Euclidiana. Então apareceu muito em discussões, isso aparece. Mas como uma proposta de projeto, ele não tem proposto. E se a gente propõe ou insinua uma proposta, eles preferem trabalhar com algo mais próximo deles. Se forem alunos que já atuam na Educação Básica, daí que eles querem trabalhar, especificamente, com aquilo que eles têm dificuldade, no que eles estão cobertos de razão, eu acho isso uma inteligência, porque significa que ele está preocupado com a sua prática, ele está olhando a sua prática, se ele quer trabalhar na disciplina algo que vai ajudá-lo na escola é porque ele está olhando a sua prática. Os meus alunos que já estão em sala de aula muito raramente querem trabalhar com esse conteúdo.

Ao final da entrevista, perguntei se a professora P5 gostaria de acrescentar algum comentário sobre o tema em discussão. P5 direcionou seu comentário final para alguns aspectos desta pesquisa, em particular, salientou que sua relevância será maior, na medida em que estabelecer relações com a prática do professor de Matemática da escola básica na sua realidade atual. Assim, foi encerrada a entrevista com essa professora.

Ao descrever essas entrevistas, minha intenção foi apresentar o contexto no qual identifiquei as razões expressas pelos professores entrevistados para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação do futuro professor de Matemática para a escola básica. Portanto, considerei que, para que fosse possível captar toda a riqueza dos detalhes contidos nas falas dos professores durante as entrevistas, foi necessário descrevê-las em sua totalidade, extraindo apenas algumas partes consideradas não pertinentes aos objetivos desta pesquisa.

Dessa forma, acredito que o caminho percorrido durante a análise dos dados obtidos será mais bem compreendido, pois não constituiu trajeto linear, mas sim, um

processo que buscou alinhar ideias desenvolvidas pelos professores ao longo das entrevistas. Portanto, exigiu desordená-las e reordená-las sob uma observação minuciosa, pois os pontos de alinhamento, na maioria das vezes, não estavam explícitos. Encontrar esses pontos constituiu a essência da análise dessas entrevistas, as quais serão apresentadas a seguir, juntamente com a discussão dos resultados obtidos.

4.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nas entrevistas com os professores participantes desta pesquisa, não me limitei a questioná-los tão somente sobre quais seriam as razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na Licenciatura em Matemática, pois isso não traria o contexto geral do qual emergem tais razões. As perguntas – por exemplo, sobre: os motivos da inclusão, no curso de Matemática, de uma disciplina que aborda essas geometrias; a contribuição desse conhecimento na formação dos licenciandos, se a inclusão de conteúdos de Geometrias não Euclidianas nas orientações curriculares para a Educação Básica deve ser considerada na Licenciatura, dentre outras questões – permitiram tecer a rede de significados na qual as razões por eles apresentadas tomaram sentido mais amplo, profundo e crítico.

Foi na totalidade das respostas de cada um dos professores entrevistados que foi possível captar o sentido de cada uma das razões, por exemplo, no caso da seguinte razão apresentada por um desses professores:

A Matemática, de maneira geral, serve como modelo para a resolução de problemas reais. E a Geometria não Euclidiana é um mundo novo a ser explorado, no qual o aluno vai contatar com pensamentos diferentes e com as limitações que ele tem do seu espaço tridimensional, que é nosso espaço real (P2).

Isolada do conjunto de ideias desenvolvidas por esse professor ao responder a outras questões, essa razão não seria compreendida com a mesma profundidade que foi possível captar no processo de análise, pois, ao discorrer sobre uma abordagem das Geometrias não Euclidianas no Ensino Fundamental, ele mostrou o que, de fato, está considerando importante para a formação do futuro

professor de Matemática, como pode ser observado no seguinte trecho de seu relato:

[...] você vai partir da definição do triângulo, a união de três segmentos de retas consecutivos, com os vértices unidos em três pontos não colineares. Mas, como que fica esse triângulo na esfera? Então, você vai ver que é um triângulo esférico, cuja soma dos ângulos internos é 270° e não mais 180° . É outra coisa que surpreende o aluno e que leva a novos pensamentos, novas ideias, ou seja, que há um mundo novo a ser explorado nas Geometrias não Euclidianas.

Analisando esses dois trechos do relato do professor P2, compreende-se que “o mundo novo” das Geometrias não Euclidianas não está restrito ao universo de conhecimentos inacessíveis aos estudantes da escola básica, mas sim, passível de ser explorado por eles e, sobretudo, interessante do ponto de vista da aprendizagem dos estudantes da sociedade atual, visto que os surpreende, instiga-os e, principalmente, leva-os a ter “novos pensamentos” e “novas ideias”.

Esse foi apenas um exemplo dentre tantas ideias que todos esses professores compartilharam durante a entrevista.

Obviamente, a percepção das conexões entre essas ideias não foi imediata. Em um primeiro momento, as razões identificadas pareciam distanciar-se entre seus significados, pois cada uma parecia isolar-se em um contexto específico. Nas repetidas leituras das transcrições que realizei, muitas vezes, as razões pareciam estar submersas ao texto, pois ora parecia que iam emergir, ora afundavam na totalidade das informações apresentadas. Assim, pelo caráter essencialmente qualitativo dos dados obtidos, a busca por estas razões foi um processo de total imersão no texto, até poder alcançar a essência do seu significado. Significado este vinculado a uma determinada concepção de Matemática e de formação inicial de futuros professores de Matemática para a escola básica.

Os comentários de Kaleff (2010) sobre as propostas existentes há mais de uma década para o ensino da Geometria, destacadas por Mammana e Villani (1998) em seu livro sobre as perspectivas do ensino da Geometria no século XXI, apontam para a existência de propostas que procuram:

[...] sensibilizar colegas das universidades para um fato, considerado essencial e necessário, tanto à pesquisa matemática, quanto para o ensino: o de um conhecimento profundo e crítico da geometria elementar, incluindo o reconhecimento da importância do papel da habilidade da visualização, os fundamentos das geometrias não-euclidianas, bem como suas aplicações, seus aspectos epistemológicos, históricos e didáticos

(MAMMANA; VILLANI¹⁰, 1998, p. 326, apud KALEFF, 2010, tradução livre da autora).

Também Cabariti (2004) destaca que na formação do professor o estudo das Geometrias não Euclidianas poderá ser útil pelos seguintes aspectos:

[...] O primeiro deles parece-nos evidente: aprofundamento, e não apenas revisão, da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica. O segundo poderá ser a compreensão da noção de modelo, identificando os sistemas axiomáticos, euclidianos e hiperbólicos como equivalentes do ponto de vista da consistência lógica. Além destes, o constante interesse pela História da Matemática. Esse trabalho poderá, assim, contribuir para que o futuro professor dê uma nova dimensão à sua prática pedagógica, pois ele poderá desenvolver aspectos que visem a argumentação, a formulação de conjecturas e o raciocínio dedutivo (CABARITI, 2004, p. 15-16).

A mesma autora ressalta ser:

[...] fundamental que o professor compreenda o “avanço” da matemática quando se supera a visão de uma única geometria do real – a Geometria Euclidiana – para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos logicamente consistentes (Ibid., p. 153).

Foi então que comecei a compreender que as razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, que foram identificadas nesta pesquisa, relacionavam-se, de alguma forma, a esses aspectos destacados na literatura, e a partir da análise das informações obtidas nas entrevistas decidi agrupar as razões manifestadas em duas categorias: uma relacionada aos fundamentos e aspectos histórico-epistemológicos e outra relacionada aos aspectos didático-conceituais.

As razões identificadas e agrupadas nessas duas categorias serão apresentadas individualmente, ou seja, de acordo com os relatos de cada um dos professores entrevistados, seguindo a mesma ordem em que foram descritas.

¹⁰ MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

4.2.1 Dimensão histórico-epistemológica

As razões relacionadas à dimensão histórico-epistemológica caracterizam-se não apenas pelas possibilidades de ampliar os conhecimentos geométricos do professor, mas, sobretudo, pela ampliação de sua visão sobre a própria Matemática, mostrando que os conhecimentos matemáticos são historicamente produzidos em função das necessidades humanas. Também mostram que o estudo das Geometrias não Euclidianas permite romper o paradigma euclidiano da existência de uma única Geometria verdadeira para a interpretação e descrição do espaço, mostrando que existe uma multiplicidade de sistemas geométricos logicamente consistentes. Dessa forma, o conhecimento de outras geometrias permite mostrar as diversas possibilidades de interpretação do espaço e das aplicações dessas geometrias nos fenômenos do mundo real.

Nessa categoria, as razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação do futuro professor de Matemática foram identificadas nos relatos de quatro dos cinco professores entrevistados, que serão apresentadas e discutidas a seguir.

Razões identificadas no relato do professor P1:

É importante destacar que, para tecer a rede de significados das ideias desenvolvidas por esse professor durante a entrevista, foi necessário realizar uma análise que, em momento algum, permitiu destacar partes do texto para analisá-las isoladamente, pois, nas diversas tentativas que fiz de tal procedimento, percebi que se perdia a essência do significado daquilo que, de fato, estava sendo considerado por esse professor, inclusive, até mesmo alterava esse significado.

Sua resposta à questão sobre os motivos da inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR é especificada no seguinte trecho:

A gente queria criar a oportunidade de fazer uma disciplina que fosse interdisciplinar e ao mesmo tempo abordasse um tema básico que é a Geometria Euclidiana e que abre porta pra outras possibilidades, para o

aluno ver, de fato, e não apenas saber, ouvir falar que existem outras geometrias, mas **ver, de fato, como elas funcionam, como são os problemas nas outras geometrias, o que elas têm a ver com o mundo real.** [...] **você tem outras possibilidades de interpretação do mundo real** e que a Geometria Euclidiana, de fato, é bastante limitada.

Essas considerações mostram que para além de saber que as Geometrias não Euclidianas existem, para esse professor, é importante possibilitar aos estudantes conhecer as diversas formas de interpretação do mundo, ver como essas geometrias funcionam, como são os seus problemas e suas relações com o mundo real.

Na resposta do professor P1 à questão específica sobre as principais razões para incluir essas geometrias na formação inicial do professor de Matemática, evidenciaram-se aspectos essencialmente epistemológicos desse conhecimento, conforme pode-se observar no seguinte trecho:

O nosso mundo é bastante limitado se você pensar só na Geometria Euclidiana. Seria bastante limitado assim. **E o professor, ele tem que ter acesso, ele tem que ter conhecimento sobre essas outras possibilidades de você analisar as coisas que têm no mundo.** E pra ele analisar, **ele precisa de outras ferramentas**, mesmo que ele não vá aplicar, diretamente, mas **ele precisa deter um conhecimento prévio sobre várias outras abordagens, sobre várias outras formas de ideias, sobre vários aspectos geométricos que têm no mundo, que não é aquele mundinho da Geometria Euclidiana.**

Cumprе salientar que, nesse trecho, a identificação de tais razões exigiu uma análise que levou em consideração que essas geometrias são estudadas em uma disciplina que as abordam por meio da Álgebra. Diante disso, foi necessário relacionar essa resposta com os comentários que esse professor apresentou ao explicitar que, para resolver os problemas propostos nessa disciplina, os alunos precisam utilizar diferentes ferramentas – da Teoria de Grupos, ou da Álgebra Linear ou mesmo da Geometria Básica – uma vez que se pretende levar o aluno a perceber que “[...] o mesmo problema tem várias abordagens” (P1).

Com base nesses comentários, entendo que mesmo as ferramentas algébricas podem ser consideradas necessárias para que o professor possa compreender que existem diversas possibilidades de analisar o mundo em seus diferentes aspectos geométricos, para além das limitações de uma análise realizada tão somente sob o ponto de vista da Geometria Euclidiana. Assim, proporcionar ao futuro professor essa compreensão, caracterizou uma das razões para incluir outras

geometrias, ainda que nas disciplinas da área da Álgebra, na formação do futuro professor de Matemática para a escola básica.

Além disso, na continuidade da resposta desse professor a essa mesma questão, pude identificar outras razões para tal inclusão:

Fora isso, **quando ele está inserido lá naquele contexto de aprender essas ideias novas da Geometria, ele se depara com problemas assim, desde uma definição mal colocada, uma definição que se eu mudo aqui vai me resolver uma série de outros problemas ali.** Então, ele tem a oportunidade, isso também ocorre em outras disciplinas, mas, acho que de forma menor. Também ocorre nessas disciplinas, mas nessa disciplina ocorre muito de ele se deparar com essa situação, **e aí ele vê que a Matemática não é tão estática, que ele pode mudar a Matemática, pode alterar as coisas que estão diante dele.** As definições elas são feitas por causa de uma necessidade latente que alguém tem pra resolver alguma coisa, então não é assim, é isso e simplesmente acabou. Então ele tem vários, vários aspectos, **não é só do ponto de vista do ensino, de como ensinar, da Ciência, da amplitude de visão do professor,** tem muitos aspectos que essa disciplina acaba criando.

Com base nessas considerações e, situando-as na totalidade de ideias desenvolvidas por esse professor ao longo da entrevista, identifiquei que uma das principais razões para incluir essas geometrias na Licenciatura é contribuir para ampliar a visão de Matemática do futuro professor dessa disciplina, pois, ao saber que as definições da Matemática podem ser modificadas, o licenciando perceberá que ela não é estática, mas passível de ser alterada.

Nas considerações apresentadas por P1, percebe-se que a razão dessa inclusão envolve aspectos para além de questões relativas ao ensino dessas geometrias, mas, sobretudo, possibilita a amplitude da visão de Matemática do futuro professor.

Razões identificadas no relato do professor P2:

O trecho seguinte refere-se à resposta do professor P2 à questão específica sobre as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na Licenciatura:

A Matemática, de maneira geral, serve como modelo para a resolução de problemas reais. E a **Geometria não Euclidiana é um mundo novo a ser explorado, no qual o aluno vai contatar com pensamentos diferentes e**

com as limitações que ele tem do seu espaço tridimensional, que é nosso espaço real. E isso vai contribuir muito, tanto para seu raciocínio básico, até para fazer aplicações para resolver problemas da área de Ciência e Tecnologia que virão no futuro.

Esses argumentos mostraram que esse professor considera o estudo das Geometrias não Euclidianas importante, uma vez que permite o contato com diferentes pensamentos e limitações que o estudante possui do seu espaço real. Diante disso, identifiquei que umas das principais razões para incluí-las na formação dos licenciandos é possibilitar uma compreensão do espaço de tal modo que supere as limitações impostas pela visão de uma única Geometria – a Euclidiana – do espaço real.

Razões identificadas no relato da professora P3:

Em resposta à questão sobre os motivos da inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR, a professora P3 destacou:

Eu acho que é pra conhecimento mesmo, **porque você tem uma visão da Geometria não Euclidiana que é totalmente diferente do que ele [o aluno] vinha fazendo. Então, isso é pra ampliação, mesmo, do pensamento Matemático. A Geometria não é única e exclusiva, Euclidiana. Você tem outros modelos.** Nesses modelos, acontecem coisas que na Geometria Euclidiana não acontece. E as pessoas se espantam quando não têm esse conhecimento. Então, de repente, duas paralelas se encontram em algum lugar! Como assim? A definição diz que elas não se encontram nunca!

A análise desse trecho permitiu constatar que essa professora considera que o conhecimento das Geometrias não Euclidianas contribui para ampliar o pensamento matemático do futuro professor, uma vez que possibilita a aquisição de uma visão geométrica totalmente diferente daquela que é possibilitada pela Geometria Euclidiana. Para a professora P3, é importante que o futuro professor conheça outros modelos geométricos, nos quais as definições, propriedades e teoremas apresentam resultados diferentes daqueles obtidos no modelo euclidiano.

Essas razões são corroboradas por Kaleff (2010, p. 10) quando diz que a

importância desse estudo, no âmbito das licenciaturas:

[...] reside no fato dessas teorias possibilitarem a quebra de paradigmas e padrões visuais, trazendo o visualmente inesperado para a sala de aula e a oportunidade de criação de novas imagens e conceitos. Ou seja, de possibilitar trazer padrões de desenhos e relacioná-los a expressões e palavras com outros significados além dos euclidianos, unindo-se aspectos geométricos aparentemente antagônicos, quando apresentados em diferentes linguagens e em outros registros gráficos de representação.

A professora P3 completou sua resposta com os seguintes apontamentos:

Então, eu acho que é pra isso: **pra ampliar os horizontes**, mesmo, do graduando. **Você ter outras visões. Você saber que, na Matemática, não está tudo acabado**, que é isso e pronto. E a **Geometria não Euclidiana é uma Geometria nova, então, quer dizer que a Matemática ainda está sendo construída, não é aquela coisa pronta e acabada. Você quebra aquele paradigma de que a Geometria Euclidiana é a única verdadeira.** E isso é muito interessante para os alunos.

Tais razões se caracterizam por proporcionar o conhecimento de novas geometrias, o que permite ao futuro professor perceber que a Matemática está em constante construção e, assim, romper o paradigma de que a única Geometria verdadeira é a Euclidiana.

Cabariti (2004) corrobora com tais razões, quando salienta que o estudo dessas geometrias contribui na compreensão da noção de modelos geométricos e na identificação de sistemas axiomáticos não euclidianos equivalentes, do ponto de vista da consistência lógica, ao sistema axiomático euclidiano. Também coadunam com tais razões os comentários dessa autora sobre a importância de levar o professor a compreender os avanços da Matemática e a superação da ideia de que a única Geometria do real que existe é a Euclidiana.

Razões identificadas no relato do professor P4:

Com base nos comentários do professor P4 sobre a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE de Matemática para a Educação Básica (PARANÁ, 2008), especificamente em sua resposta sobre a possibilidade de inserí-las no planejamento de sua disciplina – Geometria no Ensino –, mediante a proposição dessas geometrias nesse documento, pude identificar razões para incluí-las na formação dos licenciandos, conforme observa-se no seguinte trecho:

Independente de ter nas DCE, ou não, eu acho que ela tem que existir dentro de um curso de Matemática. Eu acho que **é uma parte fundamental da Matemática, porque você tem uma ruptura histórica na questão da Geometria Euclidiana e das não Euclidianas e é um problema interno da disciplina interessante**: discutir a questão do quinto postulado, independente de que fosse aplicável ou não, portanto, **faz parte da formação matemática do professor de Matemática**.

Na resposta desse professor à questão sobre os motivos que levaram à inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR, evidenciaram-se outras razões. É importante mencionar que o professor respondeu essa questão com base nas gravações e transcrições das reuniões da comissão de reformulação da proposta curricular do curso de Matemática da UFPR, conforme segue:

[...] **a questão do quinto postulado, porque era uma questão importante para a História da Matemática, para a construção do conhecimento matemático**. Do ponto de vista da formação matemática, isso é imprescindível. Então, a resposta seria: **a questão da formação matemática do professor de Matemática**. Não tem como ele sair da universidade, não tem mesmo, sem ele ter ideias sobre outras geometrias, que não seja a Euclidiana. Eu acho que isso é básico em qualquer discussão de formação de professores de Matemática.

O trecho a seguir refere-se à resposta apresentada pelo professor P4 à questão específica sobre as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática:

Ela **é importante do ponto de vista histórico e de construção da Matemática**. Então, ela **faz parte de um momento histórico da Matemática e que vai mostrar para o aluno como que o conjunto de conhecimentos matemáticos dele pode ser construído em uma determinada vertente**. Porque, no caso específico das Geometrias não Euclidianas, particularmente, a Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica, você tem uma discussão sobre um postulado que você tenta demonstrar e, de repente, você descobre que ele não é demonstrável. Mas aí, você cria dois mundos. E isso é uma coisa muito bonita. Então, **até pela beleza estética de construção de conhecimento**. Faz parte da formação cultural do professor de Matemática ter esse conhecimento.

De acordo com Kaleff (2010, p. 5):

Pode-se dizer que, a partir do momento histórico da criação das Geometrias não Euclidianas, também surgiu uma maneira inovadora de se criar conhecimentos científicos, qual seja, a de se desenvolver um novo conhecimento a partir da negação de outro previamente instituído.

Entendo que a dimensão histórico-epistemológica relacionada às questões que envolveram o Quinto Postulado de Euclides, conforme o professor P4 salientou, e que aparecem também na citação acima, são razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação dos licenciandos.

As demais razões identificadas relacionam-se à categoria da Dimensão didático-conceitual desse conhecimento.

As razões relacionadas à dimensão histórico-epistemológica caracterizam-se não apenas pelas possibilidades de ampliar os conhecimentos geométricos do professor, mas, sobretudo, pela ampliação de sua visão sobre a própria Matemática, mostrando que os conhecimentos matemáticos são historicamente produzidos em função das necessidades humanas. Também mostram que o estudo das Geometrias não Euclidianas permite romper o paradigma euclidiano da existência de uma única Geometria verdadeira para a interpretação e descrição do espaço, mostrando que existe uma multiplicidade de sistemas geométricos logicamente consistentes. Dessa forma, o conhecimento de outras geometrias permite mostrar as diversas possibilidades de interpretação do espaço e das aplicações dessas geometrias nos fenômenos do mundo real.

Nessa categoria, as razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação do futuro professor de Matemática foram identificadas nos relatos de quatro dos cinco professores entrevistados, que serão apresentadas e discutidas a seguir.

4.2.2 Dimensão didático-conceitual

As razões relacionadas à dimensão didático-conceitual caracterizam-se pela relevância de formar um professor que detém um duplo conhecimento, profundo e integrado, dos conceitos matemáticos e didáticos envolvidos em todos os conteúdos de Matemática da escola básica. Além disso, também identifiquei razões que se caracterizam pela possibilidade que esse estudo traz para o aprofundamento dos conceitos da própria Geometria Euclidiana. Tais razões foram identificadas no relato

de quatro dos cinco professores entrevistados, conforme segue.

Razões identificadas no relato do professor P2:

Sua explanação a respeito da boa receptividade dos alunos da Licenciatura em Matemática, durante a apresentação de uma monografia sobre o ensino da Geometria Esférica no Ensino Fundamental, contém evidências da aceitação de que esse conteúdo deve ser incluído desde a escola básica:

Como eram alunos de graduação, já se esperava algo diferente. Daí a **razão pela qual se deve tentar ensinar as Geometrias não Euclidianas**, inclusive, no Ensino Fundamental, ou dar a noção. **Porque vai ser uma coisa diferente que vai instigar o aluno a se interessar.** Ele achava que toda distância, que era o caminho mais curto, era uma reta, e não é! Isso é fundamental.

Sobre os motivos que levaram à inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR, o comentário de P2 é bastante abrangente:

Claro, pra que serviria a Matemática? A Matemática se justifica na aplicação, serve de modelo para resolver os problemas do cotidiano, do dia a dia. [...] **Você tem que aplicar. Só, aí, você vai convencer o aluno do Ensino Fundamental que é interessante, importante, essa parte das Geometrias não Euclidianas, como apresentar para ele alguma coisa que sirva para a realidade dele.**

Mediante esses comentários do professor P2, entendo que o conhecimento dos futuros professores sobre as Geometrias não Euclidianas deverá permitir-lhes explorar, na escola, os conceitos que mostram fatos surpreendentes que ocorrem nessas geometrias. Por exemplo, o conceito de distância na superfície de uma esfera, que não é entendido da mesma forma que na superfície plana. Do ponto de vista didático, essa abordagem é fundamental, pois instiga o interesse dos alunos a partir de aplicações em situações reais e, assim, mostra a importância desse conhecimento na solução de diversos problemas da realidade.

Razões identificadas no relato da professora P3:

Na resposta à questão sobre se a inclusão dessas geometrias em documentos de orientações curriculares para a Educação Básica deve ou não ser considerada nas licenciaturas, P3 assim se manifestou:

É claro que a gente nunca vai conseguir cobrir tudo isso, com certeza, mas eu acho que a **gente tem que dar as ferramentas, aquele conteúdo inicial, pra que ele vá se virar depois**. Se ele passa pela universidade, pela formação inicial dele, inteira, sem nunca ter ouvido falar de Geometrias não Euclidianas, a coisa vai ficar muito complicada. Eu acho que a gente não precisa chegar a um grau de especialização, nem cabe, na formação inicial. Mas **essa discussão do por que ela começou, por que se chamam Geometrias não Euclidianas, quais são os tipos que têm... Por que a gente não tem um modelo só. A gente tem vários modelos**. A Geometria Fractal está dentro de algum desses modelos. Então, essa discussão, eu acho que tem que ter em qualquer curso, que é uma coisa que está sendo pedida.

Em resposta à questão específica sobre as principais razões para incluir essas geometrias na formação dos licenciandos, reafirmou o que já havia considerado anteriormente:

As razões são: que **ele tem que conhecer o que é Geometria Euclidiana e o que é não Euclidiana, quais são as diferenças, quais são os modelos que têm**. Isso, pra abrir o conhecimento matemático dele, entender que a Matemática não é só aquele axioma que ele aprende na Geometria Axiomática. **Ele tem que saber de Geometria não Euclidiana. Porque é algo que vai ser cobrado dele na escola**. Como professor, ele tem que saber dessas coisas. E serve pra que ele tenha esse conhecimento geral, que se uma coisa não é feita daquela forma, ela pode estar correta mesmo assim. **Acho que o ponto principal é tirar a Matemática das caixinhas, sempre**.

Sobre o modo pelo qual o conhecimento das Geometrias não Euclidianas poderá contribuir na futura prática docente dos licenciandos, reiterou:

Acho que a primeira coisa que a gente vê é exatamente isso que a gente falou: ele **ter a consciência de que a Matemática não é essa caixinha fechada**. E que, **se ele muda alguma coisa naqueles axiomas, ou, se ele deixa de pensar daquela forma, ele pode criar coisas novas**. E não é que elas não são verdadeiras, elas são diferentes. Então, ele pode trabalhar com esse tipo de coisa. Para o licenciando, é muito importante, **porque ele consegue entender coisas que acontecem dentro da sala de aula**. Porque, às vezes, o aluno faz um procedimento que não foi o que ele ensinou, mas a coisa funciona. Se ele tem aquela mente fechada, que tem que ser daquele jeito e pronto, ele não vai considerar nada do que aquele

aluno fez. **E quando ele descobre que a Matemática é essa coisa viva, ele vai entender e vai procurar analisar o que aquele aluno fez.** Porque, de repente, a ideia do aluno vem de um atalho que ele criou. E funciona. E não está errado aquilo. Eu acho que isso é fundamental para o nosso licenciando. Ele tem que saber. Ele tem que dar conta dessas coisas.

Mediante as considerações da professora P3, uma das razões para a inclusão dessas geometrias na formação inicial é possibilitar a compreensão dos conceitos básicos das Geometrias não Euclidianas. Assim, para essa professora, a formação matemática do licenciando deve proporcionar um conhecimento dessas geometrias que possibilite ao futuro professor buscar meios para transformá-las em objeto de ensino da Matemática escolar.

Além disso, as considerações da professora remetem à ideia de que é importante a inclusão dessas geometrias na Licenciatura para que o futuro professor perceba o dinamismo da Matemática, uma vez que a criação de outras geometrias, tais como a Elíptica e a Hiperbólica, tornou-se possível a partir do momento em que os matemáticos perceberam que o Postulado das Paralelas poderia ser alterado, o que não significou que cometeram um erro na Matemática, mas sim, que não existe uma única forma de descrevê-la, interpretá-la e processá-la.

De acordo com os apontamentos dessa professora, identifiquei que a principal razão para que essas geometrias sejam incluídas na Licenciatura, segundo ela, é o futuro professor tomar consciência de que a Matemática é uma Ciência em movimento, sempre em mudança, passível de ser questionada e recriada e, desse modo, compreender a realização dos alunos. Para essa professora, a dinamicidade do pensamento matemático deve estar presente na prática do professor de Matemática em relação ao modo como aprecia os procedimentos dos seus alunos, independentemente do nível em que ele atue.

Razões identificadas no relato do professor P4:

Transcrevo, a seguir, outra parte de sua resposta à questão sobre as principais razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação dos licenciandos, e que entendo relacionar-se à dimensão didático-conceitual desse conhecimento (parte dessa resposta relaciona-se à categoria anterior):

Porque é um conteúdo utilitário importante, ou seja, ele é útil para a vida do aluno. Claro, e do professor. Vamos deixar assim: **o importante é que ele vai ter que ensinar aquilo**. Mas por que ele vai ter que ensinar aquilo? Ele vai ter que ensinar aquilo porque é importante para entender alguns fatos da vida cotidiana. Então, é do ponto de vista utilitário. **O professor vai ter que ensinar, lá na ponta. Então, ele vai ter que aprender aqui.**

Para esse professor a finalidade da inclusão é essencialmente o fato de ser um conteúdo útil para que o aluno compreenda fatos de sua vida em sociedade.

Razões identificadas no relato da professora P5:

Em determinado momento de sua explanação sobre os motivos que levaram à inclusão da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas no curso de Matemática da UFPR, essa professora considerou:

Eu acho importante porque o aluno na sua formação inicial ter o contato com as Geometrias não Euclidianas **amplia, sobremaneira, o conhecimento que ele tem no campo da Geometria**, e dá a ele, inclusive, uma **possibilidade de melhor compreensão da própria Geometria Euclidiana.**

Na sequência de suas explanações, essas considerações foram reafirmadas, conforme pode-se observar no trecho a seguir:

Acho importante porque nós, na nossa formação inicial, às vezes, temos conteúdos de altíssima complexidade, mas não necessariamente conteúdos que nos apoie no conhecimento do conteúdo com que vamos trabalhar na sala de aula da Educação Básica. E aí eu vejo **a importância das Geometrias não Euclidianas, não porque o professor vai trabalhar isso na Educação Básica, mas para a sua compreensão e a sua possibilidade de compreensão da própria Geometria Euclidiana.**

Um dos aspectos do estudo das Geometrias não Euclidianas, segundo Cabariti (2004), diz respeito ao “[...] aprofundamento, e não apenas revisão, da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica”. Nas considerações da professora P5, a importância desse aspecto foi ressaltada e caracterizou a razão pela qual essas geometrias devem fazer parte da formação do futuro professor de Matemática para a escola básica, ainda que não tenha por

finalidade ensiná-las na escola.

Ao ser questionada sobre as principais razões para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação dos licenciandos, a professora P5, na perspectiva de explicitar seu ponto de vista em relação à importância desse conhecimento, descreveu como foi seu primeiro contato com tais geometrias:

Eu ainda lembro, embora já faça muito tempo, eu ainda lembro a primeira vez que eu tive contato com as Geometrias não Euclidianas. Veja, foi tão importante que eu lembro até hoje. Primeiro, eu tive uma reação de espanto. Como é que pode existir uma Geometria que não é a Euclidiana! E esse espanto, no primeiro momento, eu pensei assim, só podia ser coisa de matemático. Depois do espanto, eu passei por uma fase de encantamento. E essa fase de encantamento me foi importantíssima, **porque abriu meu horizonte matemático**. Embora eu não me tornasse uma grande conhecedora de Geometrias não Euclidianas, mas eu fiquei realmente encantada. E esse encantamento me fez querer compreender mais ainda as Geometrias não Euclidianas. Então, eu realmente acho que, acho não, eu tenho certeza que, na formação do professor é muito importante. Até **para o licenciando perceber o quanto o conhecimento matemático é amplo e o quanto ele não está inserido apenas naquele conhecimento que você trabalha na Educação Básica, ou que você trabalha nos fundamentos, na própria Licenciatura**. Eu acho importantíssimo, eu acho muito bonito.

Nessa descrição, a professora salientou que o conhecimento matemático adquirido pelo licenciando, durante sua formação inicial, é muito mais amplo do que o conjunto de conteúdos que ensinará na Educação Básica e, nesse sentido, o estudo das Geometrias não Euclidianas torna-se relevante nessa formação.

Sobre as possíveis contribuições do conhecimento dessas geometrias na futura prática docente dos licenciandos, a professora P5 considerou:

Eu acho que a **maior contribuição do estudo das Geometrias não Euclidianas na Licenciatura é ampliar e possibilitar um conhecimento muito mais substantivo da Geometria Euclidiana**. Veja, ele não precisa trabalhar com o conteúdo pra fazer uso do conteúdo. Esse conteúdo está inserido no cabedal de conhecimento do próprio professor. Porque **pra gente ensinar, a gente precisa saber muito mais do que a gente ensina**, até pra poder **trabalhar com os fundamentos daquilo que você ensina**. E aí, eu acho que **a contribuição é muito grande, de fato**.

Já em sua resposta à questão sobre a contribuição dos conteúdos propostos na ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, em determinado momento, a professora apontou os seguintes aspectos relativos ao conhecimento matemático do futuro professor:

[...] a contribuição é teórica, formativa do ponto de vista teórico, especificamente da Matemática, como está aqui. [...] se eu estou trabalhando essa disciplina pensando na formação do professor, então, enquanto eu estou trabalhando eu vou fazendo esse vínculo, eu vou chamando a atenção, eu vou mostrando para o professor em formação que **esse conteúdo é importante, sob o ponto de vista da compreensão do conteúdo que ele trabalha na escola.** Porque eu tenho certeza que **o professor da Educação Básica tem que ter um conhecimento profundo de Matemática, para que ele possa compreender, conceitualmente,** o que **ele trabalha e não apenas operativamente.** E o que nós vemos, tanto na formação continuada dos professores que estão em exercício, como dos nossos próprios alunos, é que, **muitas vezes, nós sabemos a Matemática profundíssima,** enorme, mas **desvinculada daquele trabalho que vamos fazer na escola.**

Nesses comentários, P5 reafirmou suas considerações a respeito do aprofundamento dos conceitos da própria Geometria Euclidiana, bem como destacou que o conhecimento dessas geometrias deve fazer parte da formação matemática do futuro professor, mesmo que não as inseriram no seu plano de ensino, pois, para essa professora, o professor deve ter um conhecimento matemático que vai além dos conteúdos escolares, de modo que possa fundamentar o ensino da Matemática que desenvolve na escola.

4.3 BREVE SÍNTESE DAS RAZÕES IDENTIFICADAS

Com base na totalidade dos relatos dos professores entrevistados, bem como na literatura encontrada, pude compreender que o estudo sobre a dimensão histórico-epistemológica das Geometrias não Euclidianas é parte fundamental da formação do professor de Matemática, pois trata-se de um tema profícuo para mostrar que o conhecimento matemático é historicamente produzido a partir das necessidades humanas e está sempre em construção. Portanto, a Matemática não poderá ser concebida como um conhecimento pronto e não passível de ser questionado, mas sim, compreendida com a liberdade que permite modificá-la, criá-la e reconstruí-la sob as mais diversas perspectivas, mostrando o desenvolvimento histórico-epistemológico das ideias matemáticas.

Lembrando que no segundo capítulo deste trabalho destaco a dimensão histórico-filosófica das Geometrias não Euclidianas, cumpre salientar que, durante a

análise das entrevistas, não identifiquei considerações que pudessem evidenciar razões relacionadas explicitamente aos aspectos filosóficos dessas geometrias. Apenas observei uma breve menção em um dos comentários do professor P4, porém, não suficientemente significativa para evidenciar uma razão relacionada apenas aos aspectos filosóficos, conforme pode-se verificar no trecho que segue:

Ele tem a questão histórica, ele tem algo que é surpreendente, porque ainda que você não tenha o limite, derivada, integral, lá na escola, você pode ter a ideia de limite em algo que é muito surpreendente. Você tem, no caso, do Floco de Neve de Koch, um perímetro que tende ao infinito e uma área que tem um valor. **Até do ponto de vista filosófico é interessante.**

Entendo que oportunizar discussões no âmbito das diferentes correntes filosóficas envolvidas nesse tema poderá contribuir para que o futuro professor de Matemática busque desenvolver uma compreensão histórico-epistemológica dos conhecimentos inerentes à sua área de atuação. Em particular, o conhecimento das Geometrias não Euclidianas conduz à reflexão filosófica, pois, a história dessas geometrias revela que a partir do momento em que se tornaram públicas no seio da comunidade científica do século XIX, foi inaugurado um amplo debate, tanto no âmbito científico como filosófico, sobre a natureza da Geometria.

As razões relacionadas à dimensão didático-conceitual identificadas nos relatos de quatro dos cinco professores entrevistados caracterizam-se pelas possibilidades de preparar os licenciandos para o ensino das Geometrias não Euclidianas na escola. Segundo os argumentos que apresentaram durante as entrevistas, o futuro professor poderá desenvolver abordagens por meio de aplicações dessas geometrias em problemas da realidade dos alunos da Educação Básica, mostrando a importância e a utilidade desse conhecimento no seu cotidiano. Assim, é essencial que a formação inicial do futuro professor propicie os conhecimentos básicos sobre essas geometrias, de modo que possa buscar, futuramente, meios de abordá-las na escola.

Outro fator relevante envolvido nas razões relacionadas à dimensão didático-conceitual das Geometrias não Euclidianas consiste na ideia de que o conhecimento dessas geometrias conduz à percepção de que a Matemática é dinâmica, oportunizando ao futuro professor articular essa ideia na prática que realizará em sala de aula, ou seja, suas análises sobre os procedimentos dos alunos serão embasadas na ideia de que não existe uma única forma considerada correta de raciocinar e de elaborar conceitos matemáticos.

Além disso, foram identificadas razões para a inclusão dessas geometrias na formação inicial do professor de Matemática, apoiadas no pressuposto de que seu estudo amplia as possibilidades de aprofundamento da própria Geometria Euclidiana, cujo ensino faz parte de sua prática docente, bem como contribui para fundamentar o ensino dos conteúdos matemáticos que desenvolve na escola básica.

Com base na totalidade dos relatos dos professores entrevistados, bem como na literatura encontrada, pude compreender que o estudo sobre a dimensão histórico-epistemológica das Geometrias não Euclidianas é parte fundamental da formação do professor de Matemática, pois trata-se de um tema profícuo para mostrar que o conhecimento matemático é historicamente produzido a partir das necessidades humanas e está sempre em construção. Portanto, a Matemática não poderá ser concebida como um conhecimento pronto e não passível de ser questionado, mas sim, compreendida com a liberdade que permite modificá-la, criá-la e reconstruí-la sob as mais diversas perspectivas, mostrando o desenvolvimento histórico-epistemológico das ideias matemáticas.

Lembrando que no segundo capítulo deste trabalho destaco a dimensão histórico-filosófica das Geometrias não Euclidianas, cumpre salientar que, durante a análise das entrevistas, não identifiquei considerações que pudessem evidenciar razões relacionadas explicitamente aos aspectos filosóficos dessas geometrias. Apenas observei uma breve menção em um dos comentários do professor P4, porém, não suficientemente significativa para evidenciar uma razão relacionada apenas aos aspectos filosóficos, conforme pode-se verificar no trecho que segue:

Ele tem a questão histórica, ele tem algo que é surpreendente, porque ainda que você não tenha o limite, derivada, integral, lá na escola, você pode ter a ideia de limite em algo que é muito surpreendente. Você tem, no caso, do Floco de Neve de Koch, um perímetro que tende ao infinito e uma área que tem um valor. **Até do ponto de vista filosófico é interessante.**

Entendo que oportunizar discussões no âmbito das diferentes correntes filosóficas envolvidas nesse tema poderá contribuir para que o futuro professor de Matemática busque desenvolver uma compreensão histórico-epistemológica dos conhecimentos inerentes à sua área de atuação. Em particular, o conhecimento das Geometrias não Euclidianas conduz à reflexão filosófica, pois, a história dessas geometrias revela que a partir do momento em que se tornaram públicas no seio da comunidade científica do século XIX, foi inaugurado um amplo debate, tanto no âmbito científico como filosófico, sobre a natureza da Geometria.

As razões relacionadas à dimensão didático-conceitual identificadas nos relatos de quatro dos cinco professores entrevistados caracterizam-se pelas possibilidades de preparar os licenciandos para o ensino das Geometrias não Euclidianas na escola. Segundo os argumentos que apresentaram durante as entrevistas, o futuro professor poderá desenvolver abordagens por meio de aplicações dessas geometrias em problemas da realidade dos alunos da Educação Básica, mostrando a importância e a utilidade desse conhecimento no seu cotidiano. Assim, é essencial que a formação inicial do futuro professor propicie os conhecimentos básicos sobre essas geometrias, de modo que possa buscar, futuramente, meios de abordá-las na escola.

Outro fator relevante envolvido nas razões relacionadas à dimensão didático-conceitual das Geometrias não Euclidianas consiste na ideia de que o conhecimento dessas geometrias conduz à percepção de que a Matemática é dinâmica, oportunizando ao futuro professor articular essa ideia na prática que realizará em sala de aula, ou seja, suas análises sobre os procedimentos dos alunos serão embasadas na ideia de que não existe uma única forma considerada correta de raciocinar e de elaborar conceitos matemáticos.

Além disso, foram identificadas razões para a inclusão dessas geometrias na formação inicial do professor de Matemática, apoiadas no pressuposto de que seu estudo amplia as possibilidades de aprofundamento da própria Geometria Euclidiana, cujo ensino faz parte de sua prática docente, bem como contribui para fundamentar o ensino dos conteúdos matemáticos que desenvolve na escola básica.

4.3.1 As Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: o que dizem as pesquisas e o que dizem os formadores

No primeiro capítulo deste trabalho, relatei, a partir da literatura encontrada, o que dizem as pesquisas sobre o ensino das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, das quais destaquei argumentos que caracterizam razões para incluí-las nesse processo.

Ao finalizar a análise das entrevistas dos cinco professores que participaram desta pesquisa, de um modo geral, percebo a convergência de ideias sobre a relevância desse conhecimento na Licenciatura de Matemática. Dentre as razões

identificadas na literatura investigada e na análise das entrevistas, foi possível elaborar alguns agrupamentos e identificar sua localização nas categorias estabelecidas.

Com base nessas categorias, apresento uma síntese sobre o que dizem as pesquisas e o que dizem os formadores sobre as razões para a inclusão dessas geometrias na formação inicial do professor de Matemática. Para tanto, elaborei um quadro síntese, em que o que é retirado da literatura e as razões identificadas nos relatos dos professores serão apresentados por enunciados por mim elaborados, nos quais procurei manter com fidelidade o que foi expresso.

Cumprе salientar que, além do que foi retirado da literatura apresentada no Capítulo 1, acrescento a esse quadro, ainda, outras razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática. As razões acrescidas ao quadro foram retiradas do artigo referente à palestra proferida por Kaleff (2010) durante o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), o qual também subsidiou na elaboração das categorias apresentadas nesta pesquisa.

RAZÕES PARA INCLUIR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA	
DIMENSÃO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA	
O que dizem as pesquisas	O que dizem os formadores
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Abrir espaço para uma discussão sobre a correspondência entre a Geometria de Euclides e as leis que regem o mundo empírico. ▪ Conduzir à reflexão sobre a concepção de espaço, de verdade matemática, de rigor, de consistência e de sistemas axiomáticos (BRITO 1995). ▪ Proporcionar, aos futuros professores, discussão sobre diferentes concepções de espaço e de verdade matemática. ▪ Ampliar visão do futuro professor dos conhecimentos geométricos euclidianos e não euclidianos. ▪ Proporcionar ao futuro professor uma compreensão do significado filosófico dos conhecimentos geométricos (BONETE, 2000). ▪ Compreender a noção de modelo e identificar sistemas axiomáticos euclidiano e não 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Conhecer as diversas formas de interpretação o mundo, ver como essas geometrias funcionam, como são os seus problemas e suas relações com o mundo real. ▪ Conhecer outras possibilidades de você analisar no mundo, as várias abordagens, formas de ideias e aspectos geométricos que têm no mundo, para além das limitações da Geometria Euclidiana. ▪ Perceber que a Matemática não é tão estática e que pode ser modificada (P1). ▪ Propiciar o contato com novos pensamentos e ir além das limitações do espaço euclidiano (P2). ▪ Ampliar o pensamento matemático do futuro professor e compreender que a Geometria

<p>euclidianos, em particular, o hiperbólico, como equivalentes em relação à consistência lógica.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Conduzir discussões sobre os pressupostos que levam à construção de novas teorias e favorecer a compreensão das principais características da Matemática e de sua natureza. ▪ Compreender a evolução da Matemática ao superar a visão da Geometria Euclidiana como a única que existe para a aceitação de diversos de modelos geométricos (CABARITI, 2004). ▪ Conhecer o momento histórico da criação das Geometrias não Euclidianas e a instituição de uma nova forma inovadora de produzir conhecimentos científicos. ▪ Compreender que o processo de negação do Quinto Postulado de Euclides, possibilitou a criação de uma variedade de sistemas e modelos geométricos não euclidianos. ▪ Reconhecer a influência do processo de criação das Geometrias não Euclidianas no desenvolvimento da Matemática do século XX e do atual. ▪ Romper paradigmas e padrões visuais para compreender as imagens inusitadas das Geometrias não Euclidianas. ▪ Possibilitar ao futuro professor conceber a Matemática como um sistema de conhecimentos historicamente construídos, passível de questionamentos, revisões e reformulações, as quais acarretam na criação de novas teorias matemáticas (KALEFF, 2010). 	<p>Euclidiana não é a única existente, mas sim, que há vários modelos geométricos cujos resultados não são os mesmos que os obtidos na Geometria Euclidiana.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Ampliar os horizontes do futuro professor, pois proporciona outras visões da Matemática, a compreensão de que ela está sendo construída, portanto, não está pronta e acabada, bem como quebra o paradigma de que a Geometria Euclidiana é a única verdadeira (P3). ▪.Mostrar como que o conjunto de conhecimentos matemáticos pode ser construído em uma determinada vertente. Conhecer um problema interno da disciplina interessante que envolveu a questão do quinto postulado, considerado importante para a História da Matemática e para a construção do conhecimento matemático (P4).
DIMENSÃO DIDÁTICO-CONCEITUAL	
O que dizem as pesquisas	O que dizem os formadores
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Contribuir na qualidade do ensino e da aprendizagem da Geometria na escola básica, pois, o professor que possui conhecimentos sobre as Geometrias não Euclidianas estará mais bem preparado para o ensino da própria Geometria Euclidiana (BONETE, 2000). ▪ Possibilitar ao futuro professor valer-se de 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Elaborar abordagens que instiguem o interesse dos alunos da Educação Básica a partir de aplicações e situações reais para convencê-los da importância desse conhecimento, mostrando como se aplicam na realidade (P2) ▪ Proporcionar os conhecimentos iniciais sobre

<p>outras geometrias que se relacionam ao dia a dia dos estudantes da escola básica e mostrar que existem fatos que a Geometria Euclidiana não explica (PATAKI, 2003).</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Proporcionar ao futuro professor o aprofundamento da Geometria Euclidiana, cujos conceitos serão ensinados na Educação Básica. ▪ Contribuir para que o futuro professor inove sua prática pedagógica, pois possibilita o desenvolvimento de sua capacidade de argumentar, conjecturar, bem como o seu raciocínio dedutivo (CABARITI, 2004). ▪ Possibilitar ao futuro professor uma melhor experiência de aprendizagem da Geometria, de modo que possam buscar propostas alternativas para seu ensino na escola básica (REIS, 2006). ▪ Proporcionar ao futuro professor alternativas de abordagens dessas geometrias na escola básica, em particular, da Geometria Esférica (MARQUEZI, 2006). ▪ Capacitar o futuro professor o acesso e para o ensino de conhecimentos geométricos não Euclidianos na escola. ▪ Superar possíveis obstáculos cognitivos relacionados aos registros semióticos (gráficos e simbólicos) que se apresentam durante o processo de resolução de problemas introdutórios às Geometrias não Euclidianas (KALEFF, 2007). ▪ Possibilitar ao licenciando a quebra de paradigmas e padrões visuais, de modo que possa explorar, na escola, conceitos e padrões de desenhos para além dos limites da Geometria Euclidiana (KALEFF, 2010). <p>Preparar o futuro professor para incorporar as Geometrias não Euclidianas na sua prática docente e, assim, ampliar as possibilidades de inclusão desses conteúdos nas suas aulas (SANTOS, 2009).</p>	<p>as origens e características dessas geometrias que permitam ao futuro professor ensiná-los na escola.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Conhecer o que é Geometria Euclidiana e não Euclidiana e quais são as diferenças e os modelos que existem, pois é algo que vai ser cobrado dele na escola (P3). ▪ Entender a utilidade desse conhecimento na vida cotidiana dos alunos da Educação Básica (P4). ▪ Possibilitar a ampliação do conhecimento do futuro professor do campo da Geometria e sua melhor compreensão da própria Geometria Euclidiana. ▪ Ampliar e possibilitar um conhecimento substantivo da Geometria Euclidiana, pois o professor deve saber muito mais do que aquilo que ensinará na escola, ou seja, o futuro professor deverá ter um conhecimento profundo de Matemática para que ele possa compreender, conceitualmente, os conteúdos escolares, e não apenas operativamente. ▪ Permitir ao futuro professor perceber o quanto o conhecimento matemático é amplo e o quanto ele não está inserido apenas naquele conhecimento pertinente à Educação Básica (P5).
---	---

QUADRO 4 - RAZÕES PARA INCLUIR AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Com base nas razões identificadas, tanto nas pesquisas como nas entrevistas, conclui-se que o estudo das Geometrias não Euclidianas na Licenciatura de Matemática contribuirá não somente para a ampliação e aprofundamento do conhecimento da Área da Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática. Além disso, poderá oportunizar ao futuro professor a compreensão dos conceitos envolvidos nos conteúdos geométricos das disciplinas ofertadas na universidade e da disciplina de Matemática oferecida na escola. A identificação de aspectos conceituais relacionados aos didáticos aparece como uma das razões relevantes para que se efetive um ensino de melhor qualidade, tanto na literatura quanto nas entrevistas.

Conclui-se, ainda, que o estudo dessas geometrias conduz à reflexão sobre a natureza e os processos de construção da Matemática, mostrando-a como constructo intelectual dinâmico e, portanto, passível de mudanças decorrentes das necessidades do homem de resolver determinados problemas em diferentes épocas, quer sejam internos da Matemática ou da própria realidade social. Entender essa dinâmica pode contribuir significativamente no agir pedagógico do futuro professor, em particular, no modo como organiza o conhecimento a ser ensinado e analisa as estratégias utilizadas pelos seus alunos na solução do que lhe é proposto em direção à elaboração dos conceitos matemáticos, aceitando que existem diferentes formas de pensar e organizar o conhecimento matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve a pretensão de se inserir no debate sobre a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática para a escola básica. Para apresentar algumas considerações sobre os resultados obtidos neste estudo, tomo como referência as palavras de Fiorentini (2007, p. 9):

Sempre que se fala em conhecimentos fundamentais para a formação do professor de Matemática, todos – matemáticos e educadores matemáticos – concordam que este precisa ter um domínio sólido e profundo de matemática. Raros, entretanto, são aqueles que se aventuram a questionar, refletir e investigar o que significa um conhecimento profundo de Matemática, tendo em vista o desafio de ensiná-la às crianças e aos jovens da escola básica.

Inspirando-me nessas palavras, com esta pesquisa tive a pretensão de instigar o questionamento e a reflexão sobre o significado do conhecimento das Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática, tendo em vista o preparo daqueles que enfrentarão o desafio de ensiná-las na escola básica. Para compreender esse significado, procurei, na voz de cinco professores de um curso de Licenciatura em Matemática, identificar e descrever as razões pelas quais incluem essas geometrias na formação dos licenciandos. Portanto, esta investigação foi um processo de busca por razões.

No entanto, ao entrevistar esses professores, não solicitei meramente que elencassem tais razões, pois, mais do que apresentar um rol de argumentos sobre possíveis contribuições deste estudo na Licenciatura, minha intenção foi compreender profundamente o significado que eles manifestaram sobre a relevância desse conhecimento, no contexto da formação do futuro professor de Matemática. Assim, foi necessário elaborar uma estratégia que pudesse ultrapassar a objetividade de uma resposta lacônica e imediata. Para tanto, elaborei várias questões a serem apresentadas para esses professores.

Ao questioná-los, por exemplo, sobre os motivos da oferta de uma disciplina que aborda essas geometrias, no curso em que atuam como formadores do futuro professor de Matemática, minha intenção foi captar elementos que pudessem evidenciar aspectos subjetivos no desenvolvimento de suas ideias.

Ao perguntar se abordam essas geometrias em suas respectivas disciplinas e, em caso afirmativo, como as abordam, pretendi comparar suas respostas com as razões que consideram importantes para incluí-las na formação dos licenciandos. Além dessas, nas outras questões apresentadas, também pude perceber, além de complementos, alinhavos de significados mais profundos.

Dessa forma, o corpus do texto constituído como material de análise apresentou uma riqueza de dados, cuja natureza essencialmente qualitativa, de certa forma, implicou na complexidade de sua análise, exigindo a busca por compreender o não expresso com palavras diretas, mas sim, o que estava entre as palavras ditas.

Apesar dessa dificuldade, os objetivos propostos por esta pesquisa foram alcançados, uma vez que foi possível identificar e descrever razões para a inclusão das Geometrias não Euclidianas na formação dos licenciandos, apresentando-as com a riqueza de significados pretendida. Apoiada na literatura e nos resultados obtidos nas entrevistas, tais razões foram agrupadas em duas categorias: dimensão histórico-epistemológica e didático-conceitual.

Para além desses objetivos, outros aspectos do estudo das Geometrias não Euclidianas foram observados, como as características de uma abordagem essencialmente algébrica dessas geometrias, desenvolvida na disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Durante a entrevista com o professor da disciplina, o que foi evidenciado como contribuição dessa abordagem, especificamente, na formação dos licenciandos, é que ela consiste em oportunizar-lhes outras visões dos conteúdos geométricos que ensinarão na escola, para além da visão puramente geométrica. Para esse professor, o conhecimento de diferentes possibilidades de abordar um mesmo problema matemático é parte fundamental do aprendizado dos licenciandos, ainda que não utilizem, diretamente, as ferramentas algébricas para ensinar os conteúdos de Geometrias na escola.

Para futuros estudos, no que diz respeito à formação de futuros professores de Matemática, seria interessante verificar se a abordagem algébrica das Geometrias não Euclidianas poderá trazer contribuições mais significativas em relação a uma abordagem na qual, de acordo com a professora P3, os aspectos geométricos não podem ser omitidos ou menos enfatizados. No estudo dessas geometrias, conforme essa professora destacou: “A gente precisa dessa parte geométrica, desses desenhos. Porque aparecem uns desenhos estranhos, pra poder fazer essa coisa visual, também” (P3).

Segundo Cifuentes (2005, p. 58):

A linguagem formal não pode captar o conhecimento emotivo e, por isso, no caso da apreciação estética da matemática, necessitamos de uma linguagem visual. O visual na matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a um certo tipo de percepção intelectual, ligada fortemente à intuição matemática.

Tal questão não caberia ser discutida nesta pesquisa, entretanto, é uma reflexão interessante e não menos importante do que foi proposto neste trabalho. Nesse sentido, emergem novas possibilidades de investigação das Geometrias não Euclidianas no âmbito da formação inicial do professor de Matemática, podendo ser focalizadas sob diferentes perspectivas, como, por exemplo, a da relação entre seus aspectos algébricos e geométricos.

Além disso, na maioria das entrevistas foi possível observar que há uma preocupação em preparar os licenciandos para a elaboração de estratégias de ensino das Geometrias não Euclidianas na escola. Esta preocupação foi observada tanto nas sugestões como nas descrições das estratégias utilizadas por esses professores nas suas disciplinas. O professor P1, por exemplo, apresentou uma sugestão de abordagem da Geometria Esférica na Educação Básica que consiste em “[...] explorar a Trigonometria da Geometria Esférica, as relações como a dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Esférica” (P1).

Ao discorrer sobre uma monografia realizada sob sua orientação, cujo teor foi o desenvolvimento de uma abordagem, também, da Geometria Esférica no Ensino Fundamental, o professor P2 destacou:

Começa com a investigação do aluno e, se apoiando em material concreto, como esses que eu citei, como a esfera de isopor e os elásticos, e em seguida você vai partindo para as definições, ou verificando quais são os elementos primitivos dessa Geometria, quais seriam, então, os novos axiomas em comparação com os de Euclides. Daí vem a importância. Você vai ver quais que ficam válidos.

Dentre as Geometrias não Euclidianas abordadas na disciplina do professor P4, a Geometria do Táxi foi comentada no seguinte trecho de seu relato:

Brincar, por exemplo, com a definição da circunferência na Geometria do Táxi, como é que ela fica. Então, você tem que seguir a definição, aonde que vão estar os pontos e efetivamente o que vai ser essa circunferência na Geometria do Táxi. Porque eu acho que essas coisas são importantes, você

brincar com definições, eu acho que isso é uma coisa que faz parte da Matemática do matemático. E é algo que está na escola, porque faz parte da Matemática.

Em outro momento da entrevista, esse professor descreveu o modo como aborda a Geometria Fractal em suas aulas:

[...] no caso da Geometria fractal, eu faço o seguinte com eles: eu pego vários recursos didáticos, então, eu uso cartolina, eu uso a calculadora, eu uso o computador. Do Floco de Neve de Koch, a gente monta uma a uma tabela, daí, eu jogo essa tabela no Excel, estou trabalhando com Aritmética e a necessidade de transpor Aritmética pra Álgebra. Mas eu saí de uma situação geométrica, entende? Então, eu posso fazer essa relação. E enfatizo pra eles essa relação: “gente, olha, observem a Geometria, a Aritmética, a Álgebra”. E daí, o que eu vou fazer com tudo isso. Bom, eu vou jogar em um gráfico no Excel e ploto o gráfico. Daí, ele vai ver o gráfico daquilo. Então, ele vai ter mais uma representação. Pra mim, isso é muito rico pra pessoa, lá na prática (P4).

Tanto a literatura utilizada como os resultados desta pesquisa evidenciaram que a preocupação em proporcionar esse estudo nas licenciaturas tem se fortalecido nos meios acadêmicos, ainda que observada somente em algumas instituições de ensino superior, conforme mostrou o levantamento que realizei das propostas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná.

Entendo que a difusão de novos conhecimentos, quer seja nos meios acadêmicos ou escolares, é um processo que leva algum tempo para ser aceito, assimilado e efetivado. Todavia, arrisco-me a dizer que o início desse processo já está em andamento. Resta trilhar esse caminho a passos mais largos para tornar o conhecimento sobre essas geometrias mais acessível ao professor que atua e atuará na escola básica. Para tanto, se faz necessário motivar todos os responsáveis por essa formação para que reflitam sobre as possibilidades de incluí-las no conjunto de conhecimentos considerados necessários ao professor de Matemática. Cabe também aos próprios licenciandos e professores da escola básica reivindicar esse conhecimento como parte integrante de sua formação.

Dessa forma, especialmente por expressar o ponto de vista daqueles que formam professores para a escola básica, acredito que o diferencial desta pesquisa é integrar respostas de professores de disciplinas de eixos distintos dos conhecimentos curriculares da Licenciatura em Matemática: dos conhecimentos da Matemática e das Ciências da Educação, bem como, de disciplinas que contemplam, na dimensão do ensino, a integração entre estes e os demais eixos do

curso.

Assim, finalizo esta pesquisa com a certeza de que há razões relevantes para incluir as Geometrias não Euclidianas na formação inicial do futuro professor de Matemática da escola básica, porém, dentre elas destaco: ampliar a visão de Matemática dos licenciandos e a compreensão do fazer matemático como um processo que não se finda, que é passível de mudanças e, principalmente, que é produto da criação humana.

REFERÊNCIAS

ACADEMIA BRASILEIRA DE LETRAS. **Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa**. Global, São Paulo, 2009.

ALMEIDA, P. Anexos. In: CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2005.

ARTHURY, L. H. M. **A Cosmologia Moderna à Luz dos Elementos da Epistemologia de Lakatos**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Física e Matemática (USC), Florianópolis, SC, 2007.

BARBOSA, J. L. M. Geometria Hiperbólica. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 20, 1995, Rio de Janeiro: IMPA. **Anais...** Rio de Janeiro: 1995.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BLUMENTHAL, L. M. **A Modern View of Geometry**. Madrid: Aguilar, 1961.

BONETE, I. P. **As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências**. Dissertação (Mestrado) – UNICENTRO/UNICAMP, Guarapuava, PR/Campinas, SP, 2000.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27, 21-24 Nov. 2004, Caxambu, MG. **Anais...** Caxambu, MG: 2004. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a_pesquisa-qualitativa-em-em.pdf. Acesso em: 2/12/2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. J. **Geometrias não Euclidianas: Um Estudo Histórico-Pedagógico**. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente**

informatizado. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2004.

CIFUENTES, J. C. **Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro. n.º. 46, p. 55-72, jun. 2005.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CURITIBA. Secretaria Municipal da Educação. **Currículo básico**: uma contribuição para a escola pública brasileira, 1988.

DALL'AGNOL, D. Proposições Fulcrais: As observações de Wittgenstein sobre seguir regras e a semântica transcendental. **Kant e-prints**, Campinas, Série 2, v. 1, n.1, p. 1-17, jan./jun. 2006. Universidade Federal de Santa Catarina/CNPq.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995. (Coleção Ciência Aberta).

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: Percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. revista. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. (Coleção Formação de Professores).

FOGUEL, E. S. **O projeto de 1895**: a escritura do recalque no novo espírito científico. 170 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, BA, 2007.

FREUDENTHAL, H. **Perspectivas da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

HOBBSAWM, E. J. **A Era das Revoluções**: 1789-1848. 20. ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2006.

_____. **A era dos impérios**: 1875-1914. 7. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.

KALEFF, A. M. R. Geometrias não Euclidianas na Educação Básica: Utopia ou possibilidade? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10, 7 a 9 Jul. 2010, Salvador, BA. **Anais...** Salvador, BA: 2010.

_____. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 20, n. 28, p. 69-94, 2007.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 294 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2009.

LEIVAS, J. C.; SOARES, M. T. C. Triângulos Diferentes: Dos Planos Aos Geodésicos. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, p.77-93, 2011. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/current>>. Acesso em: 1/6/2011.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, n. 4, p. 3-13, 1.º semestre 1995.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

MARQUEZE, J. P. **As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica**: uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas da geometria esférica. 162 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006.

MIGUEL, A. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. **Zetetiké**, Ano 3, n. 3, 1995.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, PR, 2008. Disponível em: <http://www.diadiaeducacao.pr.gov.br/diadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica>. Acesso em: 1/6/2010.

PATAKI, I. **Geometria Esférica para a Formação de professores**: Uma proposta

interdisciplinar. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, PUC-SP, São Paulo, SP, 2003.

PATY, M. A criação científica segundo Poincaré e Einstein. Tradução de: Sérgio Alcides. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 15, n. 41, p. 157-192, jan./abr. 2001. (halshs-00186139, version 1 – 8 Nov. 2007).

_____. Introdução a três textos de Einstein sobre a geometria, a teoria física e a experiência. Tradução do original em francês de: Pablo Rubén Mariconda. **Scientiae Zudia**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 641-62, 2005.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino da Geometria**: Uma visão histórica. 196 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1989.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. Capítulo 2. In: _____. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/PBGA2-NaturezaMat.doc>. Acesso em: 16/8/2010.

REIS, J. D. S. **Geometria Esférica por meio de Materiais Manipuláveis**. Dissertação (Mestrado) – UNESP, Rio Claro, SP, 2006.

SANTOS, T. S. **A Inclusão das Geometrias não Euclidianas no Currículo da Educação Básica**. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Centro de Ciências Exatas, UEM-PR, Maringá, PR, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de Matemática, 1.º grau**. 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SILVA, A. P. B. da. **O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Campinas, SP: [s.n.], 2006.

UFPR. Universidade Federal do Paraná (UFPR). **Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática**. Curitiba, PR, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Instituições	Rede	Acesso ementas	Nome das disciplinas
CTESOP	Privada	Sim	Geometria Euclidiana
FACLENOR	Privada	Não	
FAESI	Privada	Não	
FAF	Pública	Sim	Não há
FAFICOP	Pública	Sim	Não há
FAFIMAN	Pública	Sim	Tópicos de Geometria
FAFIPA	Pública	Sim	Não há
FAFIPAR	Pública	Não	
FAFIUV	Pública	Não	
FAG	Privada	Não	
FAP	Privada	Não	
FECILCAM	Pública	Sim	Não há
PUCPR	Privada	Não	
UNICENTRO	Pública	Sim	Fundamentos da Geometria Não-Euclidiana
UNIOESTE	Pública	Sim	Não há
UEL	Pública	Sim	Filosofia da Matemática
UEM	Pública	Sim	Introdução à Geometria Não-Euclidiana
UEPG	Pública	Sim	Geometria Espacial
			Tópicos de Geometria
			Fundamentos Matemáticos da Teoria da Relatividade
UFPR	Pública	Sim	Geometrias Euclidianas Não-Euclidianas
UTFPR	Pública	Sim	Não há
UNIANDRADE	Privada	Não	
UNIPAR	Privada	Não	
UTP	Privada	Sim	Não há

QUADRO 5 - RELAÇÃO DAS INSTITUIÇÕES E DISCIPLINAS CONSULTADAS

APÊNDICE B

A PROPOSTA DA DISCIPLINA GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO-EUCLIDIANAS

A proposta da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas foi apresentada e discutida em reuniões da comissão de reformulação curricular do curso de Matemática da UFPR, ocorridas entre os anos de 2004 e 2005 e, após a implementação no novo currículo, em 2006, passou a ser ofertada como disciplina obrigatória tanto para a licenciatura como para o bacharelado.

As vinte e cinco reuniões dessa comissão foram registradas em atas (disponíveis na página do curso) e, em algumas, identifiquei momentos em que o tema em debate era a proposta da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas. Além dos registros em atas, essas reuniões foram gravadas em material de áudio e, especificamente, as discussões sobre disciplinas da área da Geometria encontram-se transcritas no trabalho de Silva (2007)¹¹ no qual, também, identifiquei trechos em que a proposta dessa disciplina estava em debate.

Ao consultar esses materiais foi possível identificar alguns aspectos importantes envolvidos na elaboração de sua proposta¹², o que possibilitou destacar algumas de suas principais características, em particular, da via pela qual os conteúdos são abordados. Ao ler a ementa dessa disciplina e as ementas das disciplinas que são pré-requisitos para cursá-las¹³, percebe-se que há relações com alguns trechos das atas e das transcrições. Presume-se que os comentários dos professores representam, de maneira muito próxima, a proposta da referida disciplina tal como se apresenta no novo currículo.

A seguir, apresento os trechos extraídos dessas quatro atas, seguidos dos trechos das transcrições das reuniões Comissão de Reformulação do Curso de

¹¹ Os sujeitos participantes da pesquisa de Silva são professores da UFPR, dos departamentos de Matemática (indicados por DM1, DM2, DM3, DM4, DM5, DM6 e DM7), de Desenho (indicados por DD1, DD2 e DD3) e de Teoria e Prática de Ensino de Planejamento e Administração Escolar (Indicados por SE1 e SE2).

¹² Foram destacados apenas os trechos nos quais consta a expressão “Geometrias não Euclidianas”, ou temas relacionados.

¹³ Tais ementas foram apresentadas no Capítulo 4 do presente trabalho.

Matemática¹⁴, nos quais identifiquei esses aspectos.

DISCUSSÕES SOBRE A PROPOSTA DA DISCIPLINA GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO-EUCLIANAS	
Nas atas	Nas transcrições
<p>[...] a disciplina Geometrias Euclidianas e não-Euclideanas na qual se estudariam reflexões, rotações, translações, grupos diedrais da geometria euclidiana, hiperbólica e esférica, além de classificar os grupos de transformações (Ata da Sexta Reunião).</p> <p>[...] a preocupação do Prof. Edson é que a Geometria Euclidiana não seja apresentada como algo acabado, mas que os alunos compreendam que cada axioma acrescentado tem novas implicações e a negação deles leva a outras, ele gostaria de fazer relações com teoria de números e dar ênfase aos métodos de demonstração (Ata da Décima Primeira Reunião).</p> <p>[...] a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas seja pré-requisito para a disciplina Matemática do Ensino Médio, por acreditar que o aluno teria melhores condições para cursá-la. Concordou-se que este deveria ser um pré-requisito sugerido e não obrigatório (Ata da Vigésima Segunda Reunião)</p>	<p>“Aí a gente colocou a disciplina Geometria Euclidiana e não-Euclidiana que estuda rotações, translações, reflexões, grupos diedrais, das Geometrias Euclidianas Hiperbólicas e Esféricas e classificar os grupos de transformações.” (DM1).</p> <p>“Eu lembro de um problema que eu trabalhava com os alunos do Ensino Médio, que era demonstrar o quinto postulado a partir dos anteriores Os alunos ficavam loucos e diziam que não era possível. Tentavam, eu deixava eles uma ou duas semanas. Eles achavam que era completamente intuitivo aquilo e tinha que dar pra demonstrar. Depois disso você apresenta os outros modelos em que é possível deduzir as outras geometrias. [...] esse exercício era muito interessante porque eles viam realmente o quanto era independente as coisas quando você introduzia as outras possibilidades de Geometria. Aí acredito que caberia colocar uma outra disciplina de Geometrias não Euclidianas. Eu não sei se vale a pena colocar de maneira axiomática ou não, quem tem mais experiência que eu pode falar” (DM1).A disciplina de Geometrias Não-Euclidianas deve ser obrigatória ou optativa?(DM5).</p> <p>Tem que ser obrigatória (DM1).</p> <p>Eu acho que deveria ser obrigatória, por que se não o cara sai do curso de graduação sem saber que existem outras geometrias. Infelizmente essa é a realidade (DM3).</p> <p>E, além disso, é um curso que vai usar Álgebra Linear, Teoria de Grupos e a Geometria, tudo na mesma, muito legal (DM1).</p> <p>E vocês estão pretendendo dividir em Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana? (DD1).</p> <p>Não, não (DM1).</p> <p>Então qual é a diferença? (DD1).</p> <p>Aquela lá a gente utiliza todo o conteúdo de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Álgebra, Teoria de Grupos, pra estudar Geometria Euclidiana e Geometria Não-Euclidiana (DM1).</p> <p>Aquela lá é um momento que você reúne uma série de conteúdos e conhecimentos que o aluno adquiriu ao longo do curso e faz um fechamento desses conteúdos todos via Geometria, usa a Geometria como argumento pra você... (DM2).</p> <p>De modo analítico (DD1).</p> <p>Não só analítico, algébrico, é... (DM2).</p> <p>Só, analítico e algébrico (SE1).</p> <p>Você propõe no sexto semestre Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana, o que contempla esta disciplina? (DD1).</p> <p>Bom, essa disciplina ela..., toda ferramenta que é utilizada, discutida a Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana, só que a ferramenta que é utilizada agora é Teoria de Grupos, Álgebra Linear e um pouco do que você vê em Análise, então aí você converge toda ferramenta que os alunos: pra que serve isso, etc. Aí teríamos um encontro de todas essas disciplinas, então tudo aquilo que vocês trataram vai ser tratado de novo, só que usando essas ferramentas (DM1).</p>

QUADRO 6 - DISCUSSÕES SOBRE A PROPOSTA DA DISCIPLINA GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO-EUCLIDIANAS

¹⁴ Todas as transcrições das falas dos professores foram reproduzidas conforme consta no trabalho de Silva (2007), bem como foram utilizadas os mesmos códigos para indicá-los.

Com base no exposto, a síntese que realizei é a de que a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas foi elaborada sob a perspectiva de uma abordagem algébrica dos conteúdos geométricos (euclidianos e não euclidianos), tendo como principais objetivos:

- Estudar rotações, translações, reflexões, grupos diedrais e classificação dos grupos de transformações das Geometrias Euclidianas, Hiperbólicas e Esféricas.
- Abordar as Geometrias por meio dos conteúdos de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Álgebra e Teoria de Grupos.
- Utilizar as ferramentas da Teoria de Grupos, Álgebra Linear e alguns tópicos de Análise, convergindo todas estas disciplinas em uma só.

Com base nas atas e nas transcrições, presume-se que a proposta dessa disciplina foi defendida por um ou mais professores do Departamento de Matemática e, ao que tudo indica, entre concordâncias e discordâncias, venceram seus argumentos, visto que sua ementa tem uma conotação fortemente, ou mesmo exclusivamente, algébrica. De acordo com Silva (2007 p. 87-88):

[...] há uma reflexão sobre o papel que ocupa a Geometria no cenário da Matemática, visto por professores com formações distintas, porém que têm em comum, o fato de lecionarem no curso de Licenciatura em Matemática. A Geometria seria para esses professores um ramo da Matemática altamente depende de outras áreas, tais como Álgebra, Cálculo ou Análise? Seria um ramo da Matemática independente, porém vassalo de outras áreas da Matemática? Ou seria um modo de fazer matemática, uma área com características próprias?

Entretanto, o ponto de vista dos professores do Departamento de Matemática que participaram da comissão de reformulação curricular não pode ser generalizado, pois, na ata da 11.^a Reunião da comissão de reformulação curricular consta que um deles fez a leitura um texto Raciocínio Visual vs. Raciocínio Formal em Geometria, mostrando-se favorável ao apelo visual na aprendizagem da Geometria. É possível supor que, no trabalho de Silva (2007), esse professor é o que se indica por DM4, pois em algumas reuniões comentou sobre esse assunto, como, por exemplo, é observado nos seguintes trechos¹⁵ de sua fala:

No campo da Geometria há uma concepção que nós matemáticos temos

¹⁵ Extraídos integralmente de Silva (2007).

uma idéia errada do que é Geometria, que o próprio Hilbert deu ênfase na reformulação da Geometria. E nós, matemáticos em geral, achamos que o que hoje nós chamamos de Geometria Euclidiana é o que Euclides chamava de Geometria Euclidiana. Euclides desenvolveu a Geometria Euclidiana, mas a axiomática que ele usou a metodologia que ele usou, o padrão de rigor de demonstração que para ele significava demonstrar algo, é completamente diferente do que nós usamos hoje. Por exemplo, Euclides usava desenhos geométricos para fazer demonstrações, não que ele acreditasse no que via, que ele acreditasse no visual para chegar a um resultado, mas, era parte da metodologia dele. Para mim, a diferença é que na Geometria Euclidiana, Euclides dá ênfase ao raciocínio visual em contraposição ao raciocínio formal. O raciocínio visual não é algo completamente descartável, e Hilbert descartava a indução porque achava que isso levava à problemas. Eu acho que o Departamento de Desenho trabalha dando mais ênfase à Geometria Euclidiana, ao raciocínio visual-formal, compatibilizando com o Desenho Geométrico. Agora, o enfoque que o DM1 está querendo dar a Elementos de Geometria é mais formal, uma dedução não visual para ver quais são as limitações que o desenho possui. Eu acho importante que nossos alunos, futuros professores que trabalharão no Ensino Fundamental e Médio, aprendam também a forma de raciocinar visualmente. Demonstrações em Geometria podem ser realizadas tendo como ponto de partida, observações visuais construtíveis.

[...] desenho é muito importante pra conjecturar a coisa certa para depois, de repente encontrar a demonstração. Esse enfoque do desenho eu acho importantíssimo.

Porque para o aluno chegar a compreender certas coisas eu acho, francamente, que o enfoque dado pelo desenho é mais adequado. Não é Prática de Ensino de Geometria, é Geometria através de métodos computacionais. Essa seria a idéia, porque a parte visual é importante, essa experiência.

O apelo a figuras (num sentido construtivo) e ao “movimento” delas, isto é, ao aspecto visual da matemática, do ponto de vista histórico, foi parte essencial (e não um defeito!) do método axiomático, mais especificamente, do método axiomático material ou concreto com que foi desenvolvida a geometria euclidiana, ou seja, tendo como modelo intuitivo a “realidade espacial”. Do ponto de vista pedagógico, um desafio para a didática da matemática será sugerir e implementar técnicas ou métodos de visualização como um caminho para o aprimoramento da maturidade no raciocínio matemático, tanto visual quanto formal.

Lendo as transcrições das falas de outros professores, percebe-se, conforme Silva (2007, p. 97) salienta, “[...] a defesa ao enfoque formalista e algébrico da Geometria em contraposição ao raciocínio visual e intuitivo”.

No que diz respeito à abordagem algébrica da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, questionar se esta é ou não a via mais adequada para compreensão dos conteúdos geométricos por parte dos estudantes, em particular, dos licenciandos, não é algo que tenho a pretensão de questionar. Mesmo porque entendo que a abordagem algébrica da Geometria tem aspectos positivos. Porém, penso ser importante refletir sobre até que ponto a excessiva algebrização da Geometria pode trazer contribuições mais significativas em relação a uma

abordagem geométrica, na qual o apelo visual é considerado elemento importante na aprendizagem.

APÊNDICE C

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA O PROFESSOR DA DISCIPLINA GEOMETRIAS EUCLIDIANAS E NÃO-EUCLIDIANAS

1. Professor, até o ano de 2006, a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas não fazia parte da grade curricular do curso de Matemática. Você poderia falar um pouco sobre os motivos que levaram à inclusão dessa disciplina no currículo do curso, tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura?
2. Em sua opinião, qual é a finalidade principal dessa disciplina?
3. É possível avaliar se os objetivos da disciplina têm sido alcançados, tanto pelos alunos do Bacharelado quanto pelos da Licenciatura?
4. Após a oferta dessa disciplina, foram necessárias alterações na programação? Quais?
5. Você poderia falar sobre a sua forma de abordagem para introduzir os conteúdos dessa disciplina?
6. Quais as principais dificuldades que os alunos enfrentam nessa proposta?
7. Que forma você procurou por superá-las?

Texto introdutório para a próxima questão: *Professor, o Estado do Paraná implementou um documento de orientações curriculares – As Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE). Na DCE da disciplina de Matemática, as Geometrias não Euclidianas foram incluídas no rol de conteúdos geométricos para a Educação Básica. Para o Ensino Fundamental propõem: Noções de Topologia, Geometria Projetiva e Geometria Fractal. Para o Ensino Médio propõem: Geometria Fractal, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.*

8. Pensando na formação inicial dos professores de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná, os conteúdos de Geometrias não Euclidianas propostos na ementa de sua disciplina apresentam relações com os conteúdos propostos na DCE?

Em caso afirmativo:

- Quais relações e como se estabelecem?

Em caso negativo?

- Em sua opinião, por que não há essa relação?
- Você acha que deveria existir essa relação? Por quê?

9. Em seu modo de pensar, a inclusão dessas geometrias em um documento de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ou não ser considerada na Licenciatura? Explique sua posição.

10. Pensando especificamente na Licenciatura, quais são, em sua opinião, as principais razões para incluir conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica?

11. De que forma esses conhecimentos poderão contribuir na prática docente do futuro professor ao iniciar seu trabalho na escola?

12. Sobre tudo que conversamos você gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

APÊNDICE D

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA O PROFESSOR DA DISCIPLINA MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL/MÉDIO

1. Lendo a ementa da disciplina Matemática no Ensino Fundamental/Médio, percebi que há certa liberdade na seleção dos conteúdos matemáticos a serem abordados. Por exemplo, aponta “Conteúdos do ensino fundamental/médio e sua relação com a matemática do ensino superior” e “Pensamento geométrico em situações de ensino”. Durante o período em que ministrou essa disciplina, houve momentos em que algum desses dois itens envolveu conteúdos de Geometrias não Euclidianas?

Em caso afirmativo:

- Qual ou quais geometrias foram abordadas?
- Por que selecionou essa(s) geometrias (s)?
- Qual foi o objetivo dessa abordagem?
- Você poderia contar um pouco como foi o modo que abordou o tema?
- Quais foram as suas impressões em relação à aprendizagem dos estudantes sobre essas geometrias?
- Dessa abordagem, quais são os pontos positivos que você aponta em relação ao preparo dos futuros professores de Matemática para o ensino dessas geometrias no Ensino Médio?
- Houve pontos que considerou negativo? Quais foram?

Em caso negativo:

- Você poderia falar por que não realizou abordagens dessas geometrias na sua disciplina?
- Apesar de não ter realizado tais abordagens, você poderia expor sua opinião sobre a relevância, ou não, em desenvolvê-las na sua disciplina?

Texto introdutório para a próxima questão: *Professor, o Estado do Paraná implementou um documento de orientações curriculares – As Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE). Na DCE da disciplina de Matemática, as Geometrias não Euclidianas foram incluídas no rol de conteúdos geométricos para a Educação Básica. Para o Ensino Fundamental propõem: Noções de Topologia, Geometria Projetiva e Geometria Fractal. Para o Ensino Médio propõem: Geometria Fractal, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.*

2. Pensando na formação inicial dos professores de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná, você pensaria na possibilidade de incluir essas geometrias no planejamento de sua disciplina, caso seja você o professor que irá ministrá-la? Comente e justifique a sua posição em relação a essa possibilidade.
3. Em seu modo de pensar, a inclusão dessas geometrias em um documento de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ou não ser considerada como uma dentre as razões pelas quais essas geometrias são propostas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica? Explique sua posição.
4. Professor, até o ano de 2006, a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas não fazia parte da grade curricular do curso de Matemática. Como professor de um curso de graduação em Matemática, quais são, em sua opinião, os motivos que levaram à inclusão dessa disciplina no currículo do curso, tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura?
5. Pensando especificamente na Licenciatura, quais são, em sua opinião, as principais razões para incluir conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica?

6. Em sua opinião, de que forma o conhecimento dessas geometrias poderá contribuir na prática docente dos estudantes do curso, quando esses iniciarem seu trabalho na escola?
7. Ao ler a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas (mostrar a ementa), qual é a sua opinião a respeito da contribuição que os conteúdos propostos trazem para a formação dos futuros professores de Matemática que estão se formando nesse curso?

Ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Geometrias Não-Euclidianas: O Plano Euclidiano e seu grupo de isometrias. Transformações Afins no plano Euclidiano, geometria afim e congruências de triângulos. Grupos finitos de isometrias, órbitas e estabilizadores, polígonos regulares. Geometria Esférica e grupos de isometrias da esfera. Geometria Hiperbólica, isometrias hiperbólicas e sua classificação.

8. Com base no que respondeu na questão 5 e 6, você vê concordância ou discordância com algum ponto do que está proposto na ementa da referida disciplina? Quais?
9. Você faria alguma modificação nessa ementa ou a manteria, quer seja em relação aos conteúdos ou à forma de abordagem? Explique suas considerações.
10. Sobre tudo que conversamos você gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

APÊNDICE E

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA O PROFESSOR DA DISCIPLINA GEOMETRIA NO ENSINO

Texto introdutório para a próxima questão: *Professor, o Estado do Paraná implementou um documento de orientações curriculares – As Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE). Na DCE da disciplina de Matemática, as Geometrias não Euclidianas foram incluídas no rol de conteúdos geométricos para a Educação Básica. Para o Ensino Fundamental propõem: Noções de Topologia, Geometria Projetiva e Geometria Fractal. Para o Ensino Médio propõem: Geometria Fractal, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.*

1. Pensando na formação inicial dos professores de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná, você pensaria na possibilidade de incluir essas geometrias no planejamento de sua disciplina, caso seja você o professor que irá ministrá-la? Comente e justifique a sua posição em relação a essa possibilidade.
2. Em seu modo de pensar, a inclusão dessas geometrias em um documento de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ou não ser considerada na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica? Explique sua posição.
3. Professor, até o ano de 2006, a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas não fazia parte da grade curricular do curso de Matemática. Como professor de um curso de graduação em Matemática, quais são, em sua opinião, os motivos que levaram à inclusão dessa disciplina no currículo do curso, tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura?
4. Pensando especificamente na Licenciatura, quais são, em sua opinião, as principais razões para incluir conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica?

5. Em sua opinião, de que forma o conhecimento dessas geometrias poderá contribuir na prática docente dos estudantes do curso, quando esses iniciarem seu trabalho na escola?
6. Ao ler a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas (mostrar a ementa), qual é a sua opinião a respeito da contribuição que os conteúdos propostos trazem para a formação dos futuros professores de Matemática que estão se formando nesse curso?

Ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Geometrias Não-Euclidianas: O Plano Euclidiano e seu grupo de isometrias. Transformações Afins no plano Euclidiano, geometria afim e congruências de triângulos. Grupos finitos de isometrias, órbitas e estabilizadores, polígonos regulares. Geometria Esférica e grupos de isometrias da esfera. Geometria Hiperbólica, isometrias hiperbólicas e sua classificação.

7. Com base no que respondeu na questão 4 e 5 você vê concordância ou discordância com algum ponto do que está proposto na ementa da referida disciplina? Quais?
8. Você faria alguma modificação nessa ementa ou a manteria, quer seja em relação aos conteúdos ou à forma de abordagem? Explique suas considerações.
9. Lendo a ementa da disciplina Geometria no Ensino, percebi que há certa liberdade na seleção dos conteúdos matemáticos a serem abordados. Por exemplo, aponta “Desenvolvimento e elaboração de projetos na área de Geometria”. Durante o período em que ministrou essa disciplina, houve momentos que esses projetos elaborados tematizaram conteúdos de Geometrias não Euclidianas?

Em caso afirmativo:

- Qual ou quais geometrias foram temas do(s) projeto(s)?
- Essa opção partiu de você ou dos próprios alunos?
 - Se opção do professor: por que selecionou esse conteúdo?

- Se opção do aluno: saberia dizer o que o motivou para optar por esse conteúdo?

- Qual foi o objetivo dessa abordagem?
- Você poderia contar sobre como foi essa situação?
- Dessa situação, quais foram as suas impressões em relação às possibilidades de ensino dessas geometrias na Educação Básica?
- Quais foram os pontos que considerou positivos em relação ao preparo dos futuros professores de Matemática para o ensino dessas geometrias na Educação Básica?
- Houve pontos que considerou negativos? Quais foram?

Em caso negativo:

- Você poderia apontar os motivos pelos quais essas geometrias não foram selecionadas como temas desses projetos?
- Apesar de não ter sido temas dos projetos, você poderia expor sua opinião sobre a relevância, ou não, em envolvê-las nos projetos desenvolvidos em sua disciplina?

10. Sobre tudo que conversamos você gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

APÊNDICE F

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA A PROFESSORA DA DISCIPLINA METODOLOGIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA

1. Professora, até o ano de 2006, a disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas não fazia parte da grade curricular do curso de Matemática. Como professora de um curso de graduação em Matemática, quais são, em sua opinião, os motivos que levaram à inclusão dessa disciplina no currículo do curso, tanto para o Bacharelado como para a Licenciatura?
2. Pensando especificamente na Licenciatura, quais são, em sua opinião, as principais razões para incluir conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica?
3. Em sua opinião, de que forma o conhecimento dessas geometrias poderá contribuir na prática docente dos estudantes do curso, quando esses iniciarem seu trabalho na escola?
4. Ao ler a ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas (mostrar a ementa), qual é a sua opinião a respeito da contribuição que os conteúdos propostos trazem para a formação dos futuros professores de Matemática que estão se formando nesse curso?

Ementa da disciplina Geometrias Euclidianas e Geometrias Não-Euclidianas: O Plano Euclidiano e seu grupo de isometrias. Transformações Afins no plano Euclidiano, geometria afim e congruências de triângulos. Grupos finitos de isometrias, órbitas e estabilizadores, polígonos regulares. Geometria Esférica e grupos de isometrias da esfera. Geometria Hiperbólica, isometrias hiperbólicas e sua classificação.

5. Com base no que respondeu nas questões 2 e 3, você vê concordância ou discordância com algum ponto do que está proposto na ementa da referida disciplina? Quais?
6. Você faria alguma modificação nessa ementa ou a manteria, quer seja em

relação aos conteúdos ou à forma de abordagem? Explique suas considerações.

Texto introdutório para a próxima questão: *Professora, o Estado do Paraná implementou um documento de orientações curriculares – As Diretrizes Curriculares para a Educação Básica (DCE). Na DCE da disciplina de Matemática, as Geometrias não Euclidianas foram incluídas no rol de conteúdos geométricos para a Educação Básica. Para o Ensino Fundamental propõem: Noções de Topologia, Geometria Projetiva e Geometria Fractal. Para o Ensino Médio propõem: Geometria Fractal, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.*

7. Pensando na formação inicial dos professores de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná, você pensaria na possibilidade de incluir essas geometrias no planejamento de sua disciplina nos próximos semestres em que será ofertada, caso seja você a professora que irá ministrá-la? Comente e justifique a sua posição em relação a essa possibilidade.
8. Em seu modo de pensar, a inclusão dessas geometrias em um documento de orientações curriculares para a Educação Básica deveria ou não ser considerada como uma dentre as razões pelas quais essas geometrias são propostas na formação de futuros professores de Matemática para a escola básica? Explique sua posição.
9. Na ementa de sua disciplina constam “diferentes enfoques” e “possibilidades didático-metodológicas” no ensino da Matemática. Em sua opinião, seria possível explorar as Geometrias não Euclidianas sob esses enfoques e possibilidades didático-metodológicas para seu ensino na Educação Básica? Comente um pouco sobre essa questão.
10. Durante o período em que lecionou essa disciplina, houve momentos em que as Geometrias não Euclidianas foram exploradas sob esses enfoques e possibilidades didático-metodológicas?

Em caso afirmativo:

- Qual ou quais geometrias foram abordadas?
- Essa opção partiu de você ou de alunos?
 - Se opção do professor: por que selecionou esse conteúdo?
 - Se opção do aluno: saberia dizer o que o motivou para optar por esse conteúdo?
- Qual foi o objetivo dessa abordagem?
- Você poderia contar sobre como foi essa situação?
- Dessa situação, quais foram as suas impressões em relação às possibilidades de ensino dessas geometrias na Educação Básica?

Em caso negativo:

- Você poderia apontar os motivos pelos quais essas geometrias não foram abordadas durante suas aulas?
- Apesar de não ter realizado tais abordagens, você poderia expor sua opinião sobre a relevância, ou não, em desenvolvê-las na sua disciplina?

11. Sobre tudo que conversamos você gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em ser entrevistado e/ou participar na pesquisa de mestrado intitulado Geometrias Não-Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática, desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Paraná, Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (41) 8425-5279, ou e-mail: claucavich@yahoo.com.br.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é: identificar, descrever e analisar os depoimentos de professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática.

Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio de entrevista semi-estruturada a ser gravada a partir da assinatura desta autorização e posteriormente transcrita para o relatório da pesquisa. Fui informado que antes de sua efetiva incorporação ao texto da pesquisa, terei acesso à transcrição das informações por mim concedidas, para validá-la.

Fui informado ainda de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Eu, Edson Ribeiro Alvares, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente de meus direitos, atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Assinatura do participante:

Assinatura da pesquisadora:



Curitiba, 20 de Dezembro de 2010.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em ser entrevistada e/ou participar na pesquisa de mestrado intitulado Geometrias Não-Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática, desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Paraná, Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (41) 8425-5279, ou e-mail: claucavich@yahoo.com.br.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informada dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é: identificar, descrever e analisar os depoimentos de professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática.

Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio de entrevista semi-estruturada a ser gravada a partir da assinatura desta autorização e posteriormente transcrita para o relatório da pesquisa. Fui informada que antes de sua efetiva incorporação ao texto da pesquisa, terei acesso à transcrição das informações por mim concedidas, para validá-la.

Fui informada ainda de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.


Eu, Elisângela de Campos, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente de meus direitos, atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Curitiba, 20 de Dezembro de 2010.

Assinatura do participante:


Elisângela de Campos

Assinatura da pesquisadora:


Claudia Vanessa Cavichiolo

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em ser entrevistado e/ou participar na pesquisa de mestrado intitulada Geometrias não Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática, desenvolvida por Cláudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Paraná, Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (41) 8425-5279, ou e-mail: claucavich@yahoo.com.br.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é: identificar, descrever e analisar os depoimentos de professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias não Euclidianas na formação inicial do professor de matemática.


Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio de entrevista semi-estruturada a ser gravada a partir da assinatura desta autorização e posteriormente transcrita para o relatório da pesquisa. Fui informado que antes de sua efetiva incorporação ao texto da pesquisa, terei acesso à transcrição das informações por mim concedidas, para validá-la.

Fui informado ainda de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Eu, José João Rossetto, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente de meus direitos, atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Curitiba, 20 de Dezembro de 2010.

Assinatura do participante:



José João Rossetto

Assinatura da pesquisadora:



Cláudia Vanessa Cavichiolo

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em ser entrevistado e/ou participar na pesquisa de mestrado intitulado Geometrias Não-Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática, desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Paraná, Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (41) 8425-5279, ou e-mail: claucavich@yahoo.com.br.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é: identificar, descrever e analisar os depoimentos de professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática.

Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio de entrevista semi-estruturada a ser gravada a partir da assinatura desta autorização e posteriormente transcrita para o relatório da pesquisa. Fui informado que antes de sua efetiva incorporação ao texto da pesquisa, terei acesso à transcrição das informações por mim concedidas, para validá-la.

Fui informado ainda de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Eu, Emerson Rolkouski, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente de meus direitos, atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Curitiba, 23 de Dezembro de 2010.

Assinatura do participante:

Assinatura da pesquisadora:

The image shows two handwritten signatures in black ink. The first signature is positioned above the label 'Assinatura do participante:' and the second is above 'Assinatura da pesquisadora:'. Both signatures are fluid and cursive.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaro, por meio deste termo, que concordei em ser entrevistado(a) e/ou participar na pesquisa de mestrado intitulado Geometrias Não-Euclidianas na Formação Inicial do Professor de Matemática, desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE) da Universidade Federal do Paraná, Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Prof^a Dr^a Maria Tereza Carneiro Soares, a quem poderei contatar/consultar a qualquer momento que julgar necessário através do telefone nº (41) 8425-5279, ou e-mail: claucavich@yahoo.com.br.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais é: identificar, descrever e analisar os depoimentos de professores de um curso de Licenciatura em Matemática sobre as razões pelas quais propõem conteúdos de Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática.

Minha colaboração se fará de forma anônima, por meio de entrevista semi-estruturada a ser gravada a partir da assinatura desta autorização e posteriormente transcrita para o relatório da pesquisa. Fui informado(a) que antes de sua efetiva incorporação ao texto da pesquisa, terei acesso à transcrição das informações por mim concedidas, para validá-la.

Fui informado(a) ainda de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem prejuízo para meu acompanhamento ou sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Eu, Ettiène Guérios, após ter recebido todos os esclarecimentos e ciente de meus direitos, atesto recebimento de uma cópia assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Curitiba, 07 de fevereiro de 2011
Assinatura do(a) participante: _____
Assinatura do(a) pesquisador(a): _____

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO USO DA ENTREVISTA

Eu, Edson Ribeiro Alvares, portador do RG 16.110.897, declaro por meio deste termo que autorizo na íntegra, o uso das informações por mim oferecidas por meio de entrevista.

Esta autorização inclui o uso de todo o material transcrito da entrevista e/ou recortes do mesmo, a ser veiculado de forma impressa e/ou digital na dissertação de mestrado desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de pós Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (PPGE), Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares.

Estou ciente de que terei uma cópia assinada deste Termo.

Curitiba, 5 de julho, 2011.



Assinatura do Sujeito da pesquisa:

Assinatura da Pesquisadora:



TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO USO DA ENTREVISTA

Eu, Elisângela de Campos, portadora do RG 22624032-0, declaro por meio deste termo que autorizo na íntegra, o uso das informações por mim oferecidas por meio de entrevista.

Esta autorização inclui o uso de todo o material transcrito da entrevista e/ou, recortes do mesmo, a ser veiculada de forma impressa e/ou digital; na dissertação de mestrado desenvolvida por Cláudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de pós Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (PPGE), Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação de a Prof^a Dr^a Maria Tereza Carneiro Soares.

Estou ciente de que terei uma cópia assinada deste Termo.

Curitiba, 9 de julho, 2011.

Assinatura do Sujeito da pesquisa:



Assinatura da Pesquisadora:



TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO USO DA ENTREVISTA

Eu, Elleine Júnior, portador do RG 895.520-4, declaro por meio deste termo que autorizo na íntegra, o uso das informações por mim oferecidas por meio de entrevista.

Esta autorização inclui o uso de todo o material transcrito da entrevista e/ou recortes do mesmo, a ser veiculado de forma impressa e/ou digital na dissertação de mestrado desenvolvida por Cláudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de pós Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (PPGE), linha de pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares.

Estou ciente de que terei uma cópia assinada deste termo.

Curitiba, 08 de Agosto, 2011.


Assinatura do sujeito da pesquisa

Assinatura da pesquisadora



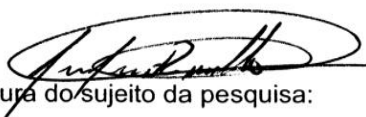
TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO USO DA ENTREVISTA


Eu, José João Rossetto, portador do RG 4.114.348-7, declaro por meio deste termo que autorizo, na íntegra, o uso das informações por mim oferecidas por meio de entrevista.

Esta autorização inclui o uso de todo o material transcrito da entrevista e/ou recortes do mesmo, a ser veiculado de forma impressa e/ou digital na dissertação de mestrado desenvolvida por Claudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de pós Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (PPGE), linha de pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares.

Estou ciente de que terei uma cópia assinada deste termo.

Curitiba, 19 de Agosto, 2011.


Assinatura do sujeito da pesquisa:

Assinatura da pesquisadora: 

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DO USO DA ENTREVISTA

Eu, Emerson Rolkouski, portador do RG 5323314-7, declaro por meio deste termo que autorizo na íntegra, o uso das informações por mim oferecidas por meio de entrevista.

Esta autorização inclui o uso de todo o material transcrito da entrevista e/ou recortes do mesmo, a ser veiculado de forma impressa e/ou digital na dissertação de mestrado desenvolvida por Cláudia Vanessa Cavichiolo, no Programa de pós Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná (PPGE), Linha de Pesquisa Educação Matemática, sob a orientação da Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares.

Estou ciente de que terei uma cópia assinada deste Termo.

Curitiba, 5 de Julho, 2011.

Assinatura do Sujeito da pesquisa:



Assinatura da Pesquisadora:

