

TÂNIA CORDEIRO LINDBECK DA SILVA

NOVA METODOLOGIA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE
EM CASOS ESPARSOS

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ciências. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de concentração: Programação Matemática. Setores de Tecnologia e Ciências Exatas. Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Arinei Carlos Lindbeck da Silva.

CURITIBA

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

TÂNIA CORDEIRO LINDBECK DA SILVA

NOVA METODOLOGIA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE
EM CASOS ESPARSOS

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Arinei Carlos Lindbeck da Silva
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia – **UFPR**
Orientador

Prof^a. Dr^a. Angela Olandoski Barboza
Departamento de Matemática
UTFPR

Prof. Dr. Lauro Cesar Galvão
Departamento de Matemática - UTFPR
UTFPR

Prof^a. Dr^a. Sonia Isoldi Marty Gama Müller
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
UFPR

Prof^a. Dr^a. Deise Maria Bertholdi Costa
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia – **UFPR**

Prof. Dr. Paulo Henrique Siqueira
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia - **UFPR**

Curitiba, 12 de janeiro de 2012

Dedico este trabalho ao meu muito amado marido e aos nossos filhos.

Agradeço a Deus, por ter colocado no meu caminho todos aos quais agradeço a seguir. Aos meus pais, Rubens e Lucy, que me mostraram os primeiros passos do conhecimento, através de suas experiências, das primeiras histórias que contaram e dos livros que puseram à disposição. Aos professores, que foram grandes incentivadores e, sempre prontos a esclarecer muitas dúvidas, contribuíram para que o objetivo final desta etapa fosse alcançado. Aos amigos que fiz durante o curso, que ajudaram a enfrentar e resolver os problemas que surgiram e estão guardados para sempre em minha memória e coração. Em especial ao Gustavo Valentim Loch, por sua grande colaboração no presente trabalho. À Maristela Bandil, sempre disposta, alegre e solícita, que ajuda nas questões burocráticas, faz deliciosos cafezinhos e chás e é uma pessoa muito especial e inesquecível.

RESUMO

Entre áreas de estudo da Programação Linear o Problema de Transporte é uma das aplicações de destaque. Os Problemas de Transporte podem ser classificados em densos ou esparsos. O modelo é denominado denso quando existem todas as ligações entre origens e destinos e esparsos quando algumas ou várias destas ligações não existem. O presente trabalho propõe uma alteração no algoritmo de resolução do Problema de Transporte para o caso esparsos, que consiste basicamente da inclusão de uma nova origem e um novo destino com elevado custo de transporte para as origens e destinos originais e custo nulo entre a origem e destino acrescentados. O método é demonstrado e testado para instâncias geradas aleatoriamente. Depois de feita a explanação sobre o funcionamento do método e de demonstrar a validade das modificações, os conceitos são implementados computacionalmente. Os testes realizados mostram ganhos significativos no tempo de processamento. Para problemas com densidade 0,05, este tempo chega a ser de somente 25% do necessário para resolver o mesmo problema através do algoritmo tradicional, onde as ligações não existentes são admitidas com custo extremamente elevado. Em problemas com densidade 0,3 este tempo é de aproximadamente 50% daquele necessário pelo tradicional. O método desenvolvido tem desempenho equivalente quando utilizado sobre Problemas Densos. Também é feita uma explanação sobre a utilização de grafos, que são facilitadores na determinação de locais para colocação de variáveis degeneradas e sua aplicação na determinação dos ciclos. Discute-se a importância de utilizar características peculiares de um problema para métodos específicos de resolução. A economia no processamento pode viabilizar a utilização de modelagens deste tipo em processos meta-heurísticos que utilizem iterativamente o problema de transporte.

Palavras chave: Problema de Transporte. Esparsidade. Grafos.

ABSTRACT

Among the Linear Programming areas, the Transport Problem is one of the highlights applications. The Transport problems may be classified as dense or sparse. The model is named dense if there are connections from every origin to each destinations and sparse when some or several of these connections do not exist. This paper proposes a change in the algorithm of solving the transportation problem for the sparse case which basically consists of adding a new origin and a new demand with high transportation cost to the original sources and demands, and a null cost between the source and demand added. The method is demonstrated and tested for randomly generated instances. After the explanation made on the method operation and demonstrate the validity of the modifications, the concepts are computationally implemented. Tests showed significant gains in processing time. For problems with density 0.05, the time was only 25% of the time necessary to solve the same problem using the traditional algorithm, in which not permitted connections are admitted with extremely high cost. Problems with density 0.3 presented time approximately 50% of that required for the traditional algorithm. The method developed has an equivalent performance when used on dense problems. It's also made an explanation on the use of graphs, which are facilitators in determining locations for degenerate variables allocation and is applied in determining cycles. It is discussed the importance of using the unique characteristics of a specific problem solving methods. The savings in processing time can enable this modeling usage in metaheuristics processes that iteratively uses the transportation problem.

Keywords: Transportation Problem, Sparsity, Graphs.

LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 –	EXEMPLO DE RESPOSTA PARA RETIRADA DAS MÉDIAS	94
TABELA 6.2 –	COMPARATIVO DE TEMPO E CICLOS COM PRODUTO <i>m.n</i> = 40.000 CASO DENSO	95
TABELA 6.3 –	SIMETRIA NO TEMPO.....	98
TABELA 6.4 –	SIMULAÇÃO COM 200 EXEMPLOS CASO ESPARSO – DENSIDADE 0,3.....	98
TABELA 6.5 –	TEMPO POR CICLO	100
TABELA 6.6 –	COMPARAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE CICLOS.....	101
TABELA 6.7 –	DADOS COMPARATIVOS DE EXEMPLO 200X200 COM DIFERENTES DENSIDADES.....	102
TABELA 6.8 –	DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE	104
TABELA 6.9 –	DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E MANTENDO DENSIDADE	105
TABELA 6.10 –	DADOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05	107
TABELA 6.11 –	ANÁLISE DE INFACIBILIDADE EM PROBLEMAS 200X200 COM DENSIDADE 0,03.....	108
TABELA 6.12 –	ANÁLISE DE INFACIBILIDADE EM PROBLEMAS 500X500 COM DENSIDADE 0,02.....	109

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 –	MODELO BÁSICO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE	22
FIGURA 2.2 –	REPRESENTAÇÃO DA LINHA E COLUNA NO GRAFO	32
FIGURA 2.3 –	REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL x_{ij}	32
FIGURA 2.4 –	REPRESENTAÇÃO DE ÁRVORE DE SBF1.....	33
FIGURA 2.5 –	REPRESENTAÇÃO DA FLORESTA.....	34
FIGURA 2.6 –	SBF 1 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS	35
FIGURA 2.7 –	SBF 2 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS	36
FIGURA 2.8 –	EXEMPLO DESCONEXO.....	37
FIGURA 2.9 –	REPRESENTAÇÃO POR GRAFO	39
FIGURA 3.1 –	DIAGRAMA PARA O EXEMPLO DE TRANSPORTE UTILIZANDO ARCOS NÃO EXISTENTES	50
FIGURA 3.2 –	DIAGRAMA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE MODIFICADO	61
FIGURA 3.3 –	FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO MÉTODO PROPOSTO	62
FIGURA 4.1 –	EXEMPLO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE ESPARSO	64
FIGURA 5.1 –	INTERFACE DO APLICATIVO	80
FIGURA 5.2 –	BOTÃO GERAR PROBLEMA ATIVADO – EXEMPLO DE GERAÇÃO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE.....	81
FIGURA 5.3 –	OPÇÃO ESPARSO ATIVADA – RESPOSTA UTILIZANDO MÉTODO ESPARSO.....	82
FIGURA 5.4 –	OPÇÃO TRADICIONAL ATIVADA – RESPOSTA UTILIZANDO O MÉTODO TRADICIONAL.....	83

FIGURA 5.5 –	OPÇÃO AMBOS ATIVADA – EXEMPLO DE PROBLEMA INFACTÍVEL RESOLVIDO PELOS MÉTODOS TRADICIONAL E ESPARSO	84
FIGURA 5.6 –	OPÇÃO MOSTRAR VARIÁVEIS BÁSICAS ATIVADA – RESPOSTA OBTIDA PELO MÉTODO TRADICIONAL.....	85
FIGURA 5.7 –	OPÇÃO MOSTRAR VARIÁVEIS BÁSICAS ATIVADA – RESPOSTA OBTIDA PELO MÉTODO ESPARSO.....	86
FIGURA 5.8 –	EXEMPLO MOSTRANDO VARIÁVEIS BÁSICAS OBTIDAS PELO MÉTODO TRADICIONAL	86
FIGURA 5.9 –	DIAGRAMA DO PROBLEMA EXEMPLO	87
FIGURA 5.10 –	BOTÃO VÁRIOS TESTES ATIVADOS.....	89
FIGURA 5.11 –	RESPOSTAS DOS TESTES MÚLTIPLOS – BOTÃO MOSTRAR RESULTADOS PRESSIONADO	90
FIGURA 5.12 –	MÉDIAS OBTIDAS – BOTÃO CALCULAR MÉDIA ATIVADO.....	91
FIGURA 5.13 –	EXEMPLO DE SCRIPT – BOTÃO SCRIPT ATIVADO	91

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 6.1 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X TEMPO DE RESOLUÇÃO (ms) – CASO DENSO.....	96
GRÁFICO 6.2 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X NÚMERO DE CICLOS – CASO DENSO.....	96
GRÁFICO 6.3 – TEMPO MÉDIO POR CICLO NO CASO DENSO (MS).....	97
GRÁFICO 6.4– PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X TEMPO DE RESOLUÇÃO (MS) – CASO ESPARSO COM DENSIDADE 0,3	99
GRÁFICO 6.5 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X NÚMERO DE CICLOS – CASO ESPARSO COM DENSIDADE 0,3	99
GRÁFICO 6.6 – COMPORTAMENTO DOS DOIS MÉTODOS.....	100
GRÁFICO 6.7 – COMPARATIVO TEMPO DE EXECUÇÃO (ms) X DENSIDADE – CASO 200X200	102
GRÁFICO 6.8 – COMPARATIVO NÚMERO DE CICLOS DE EXECUÇÃO X DENSIDADE – CASO 200X200	103
GRÁFICO 6.9 – FRAÇÃO DE TEMPO (MÉTODO ESPARSO/MÉTODO TRADICIONAL) VARIANDO DENSIDADE	104
GRÁFICO 6.10 – DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE	105
GRÁFICO 6.11 – TEMPOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE	106
GRÁFICO 6.12 – CICLOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE	106

GRÁFICO 6.13 – TEMPOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05	107
GRÁFICO 6.14 – CICLOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05	108

LISTA DE QUADROS

QUADRO 2.1 – QUADRO DE TRANSPORTE.....	22
QUADRO 2.2 – SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL INICIAL PARA O CASO $i = 1, 2$ E $j = 1, 2, 3$:	28
QUADRO 2.3 – SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL	31
QUADRO 2.4 – SBF INICIAL	32
QUADRO 2.5 – SOLUÇÃO ACÍCLICA.....	34
QUADRO 2.6 – SBF 1 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS	35
QUADRO 2.7 – SBF 2 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS	36
QUADRO 2.8 – EXEMPLO DE RESPOSTA QUE NÃO É SBF	36
QUADRO 2.9 – X VARIÁVEIS BÁSICAS E VARIÁVEL θ A ENTRAR	38
QUADRO 2.10 – CICLO AO INSERIR A VARIÁVEL θ	39
QUADRO 3.1 – EXEMPLO DE TRANSPORTE UTILIZANDO ARCOS NÃO EXISTENTES	50
QUADRO 3.2 – MODELO COM ARCOS NÃO EXISTENTES DESCARTADOS ..	51
QUADRO 3.3 – CÉLULAS COM ARCOS EXISTENTES	52
QUADRO 3.4 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (1,1)	52
QUADRO 3.5 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (3,3)	53
QUADRO 3.6 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (1,3)	53
QUADRO 3.7 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (2,4)	54
QUADRO 3.8 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (4,4)	54

QUADRO 3.9 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (2,2)	55
QUADRO 3.10 – DEMANDAS E ORIGENS NÃO TOTALMENTE UTILIZADAS	55
QUADRO 3.11 – SBFI COM A INSERÇÃO DE CUSTOS INFINITOS PARA c_{12}, c_{42} E c_{45}	56
QUADRO 3.12– UTILIZAÇÃO DE ALGUMAS CÉLULAS COM ARCOS NÃO EXISTENTES	57
QUADRO 3.13 – SBFI COM INCLUSÃO DE ARCO NÃO EXISTENTE	58
QUADRO 3.14 – VALORES DE u E v NA IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO <i>STEPPING STONE</i>	58
QUADRO 3.15 – CUSTOS ATUALIZADOS.....	59
QUADRO 3.16 – QUADRO OBTIDO COM INSERÇÃO DE LINHA E COLUNA.....	60
QUADRO 3.17 – SFBI DO PROBLEMA MODIFICADO.....	60
QUADRO 5.1 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CUSTO MÍNIMO.....	73
QUADRO 5.2 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA EQUILIBRIO OFERTA- DEMANDA.....	74
QUADRO 5.3 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA ESPARSIDADE	75
QUADRO 5.4 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CORRIGIR BASE	76
QUADRO 5.5 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA MELHORIA	77
QUADRO 5.6 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CICLO.....	78
QUADRO 5.7 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA TRANSPORTE	79
QUADRO 5.8 – SOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL.....	88
QUADRO 5.9 – SOLUÇÃO PELO MÉTODO QUE UTILIZA A ESPARSIDADE ...	88
QUADRO 5.10 – CICLO NO QUADRO ÓTIMO DA RESOLUÇÃO TRADICIONAL	89

QUADRO A1.1 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE.....	116
QUADRO A1.2 – 1ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	117
QUADRO A1.3 – 2ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	117
QUADRO A1.4 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	118
QUADRO A1.5 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	118
QUADRO A1.6 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	119
QUADRO A1.7 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO.....	119
QUADRO A2.1 – EXEMPLO DE SBFi.....	120
QUADRO A2.2 – CICLO NO QUADRO DE TRANSPORTE	121
QUADRO A2.3 – CICLO NO QUADRO DE TRANSPORTE	122

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	JUSTIFICATIVA	17
1.2	IMPORTÂNCIA	17
1.3	OBJETIVOS	18
1.4	LIMITAÇÕES	18
1.5	ESTRUTURA	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1	PROBLEMAS DE TRANSPORTE	20
2.1.1	Método do Canto Noroeste	24
2.1.2	Método de Vogel	25
2.1.3	Método do Custo Mínimo	25
2.1.4	Método de Russell	26
2.2	TESTE DE OTIMALIDADE – <i>STEPPING-STONE</i>	27
2.3	DEGENERESCÊNCIA	29
2.4	METODOLOGIA PARA REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE TRANSPORTE EM ÁRVORE	30
2.4.1	Representação de uma Solução Básica do Problema de Transporte em Árvore	31
2.4.2	Criação de uma Solução Básica Factível Inicial	33
2.5	TRABALHOS RELACIONADOS	40
3	CASO ESPARSO PARA MODELOS DE TRANSPORTE	44
3.1	DEFINIÇÃO DE MODELO DENSO E MODELO ESPARSO	44
3.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	45
3.3	PROBLEMA DE PLANEJAMENTO FLORESTAL DE CURTO PRAZO	46
3.4	PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE CAMPOS DE VENTO	48
3.5	RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE TRANSPORTE ESPARSO	49
3.5.1	Problema com Solução Básica Factível Inicial (SBFI) Utilizando Somente Arcos Existentes	49
3.5.2	Problemas com SBFI Utilizando Arcos não Existentes	49
3.5.3	Não suficiência na busca de uma SBFI Utilizando Arco de Custo Infinito	57
3.6	MÉTODO PROPOSTO	61
4	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	63
4.1	DEFINIÇÕES	63
4.2	TEOREMAS	66
4.3	CONCLUSÕES	71
5	ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO	72
5.1	ROTINAS COMPUTACIONAIS	72
5.1.1	Custo Mínimo	72
5.1.2	Equilíbrio	73
5.1.3	Esparsidade	74
5.1.4	Correção da Base	75
5.1.5	Melhoria	77
5.1.6	Ciclo	78
5.1.7	Algoritmo de Transporte	79
5.2	APLICATIVO	79
5.2.1	Criação Aleatória dos modelos	80

5.2.2	Resolução.....	81
6	RESULTADOS	93
6.1	PADRÃO DE RESULTADOS ANALISADOS.....	93
6.2	FORMATO COM MAIOR TEMPO DE RESOLUÇÃO.....	95
6.3	ANÁLISE DE TEMPO DE RESOLUÇÃO ENTRE OS DOIS MÉTODOS.....	101
7	CONCLUSÕES	110
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	111
	REFERÊNCIAS.....	112
	APÊNDICE 1	116
	APÊNDICE 2.....	120

1 INTRODUÇÃO

Entre as aplicações de Programação Linear, alguns problemas típicos podem ser citados, tais como o problema da mistura e o de planejamento de produção. Outro que normalmente se destaca é o Problema de Transportes, que tem seus estudos confundindo-se com a própria história do método Simplex. Tanto, que sua primeira formulação, com base em Programação Linear, foi feita por Dantzig em 1951. No entanto, apesar do grande desenvolvimento de alguns programas, o Problema de Transporte não apresentou evolução significativa desde então.

Da mesma forma que a teoria em Programação Linear evoluiu, também os programas para a resolução destes problemas têm avançado muito. *Softwares* como Cplex, Lingo, Xpress e outros, têm gerado excelentes resultados. Os tempos para resolução de qualquer programa que possa ser formulado matematicamente como problema linear são cada vez menores, mesmo para problemas de grande porte. Porém, muitos projetos não podem ficar dependentes de *softwares* de custo elevado e de difícil integração, pois acabariam aumentando o preço final para uma possível comercialização ou inviabilizando o desenvolvimento para projetos que não tivessem um aporte financeiro.

Com base nesta argumentação, percebe-se que é válido investir em desenvolvimento de algoritmos que resolvam problemas específicos e que possam ser implementados unicamente para um determinado fim. Por exemplo, elaborar uma metodologia que adéque o algoritmo de resolução do Problema de Transporte quando este tem certas peculiaridades.

O Problema de Transporte é estudado desde o início do século XX. Sua formulação matemática já é conhecida desde 1941 e sua resolução através de algoritmo específico desde 1951. Ji e Chu (2002) afirmam que o Problema de Transporte pode ser utilizado para resolver problemas de controle de estoque, sequenciamento de horário de funcionários, designação de pessoal entre outras aplicações. Na literatura, as resoluções não consideram características de problemas que não tenham todas as ligações entre as origens e os destinos. Este trabalho tem como premissa básica o estudo, resolução e avaliação desse tipo de problema.

1.1 JUSTIFICATIVA

No capítulo 3 deste trabalho são apresentados dois exemplos de problemas esparsos, um através do Problema de Transporte e outro pelo de designação, onde é mostrado que, em várias situações, não existem todas as possibilidades de comunicação entre as origens e os destinos. Barr *et al* (1981) já cita que problemas ditos esparsos, onde existem poucos arcos admissíveis, ocorrem frequentemente no mundo real. Além destas aplicações onde a matriz representativa das ligações entre oferta e demanda não é completamente utilizada, podem-se resolver problemas densos, onde todas as ligações existem, fazendo-se simplificações e considerando que ligações a partir de uma determinada distância não sejam consideradas, com o intuito de diminuir o tempo computacional.

Silva (2007) ressalta que a otimização de problemas lineares esparsos tem grande interesse prático. Problemas de planejamento e controle de produção, transportes, fluxos de rede e outros problemas de cunho industrial e econômico são exemplos de sua aplicação. Estes problemas podem ter suas estruturas particulares aproveitadas, implicando em economia de tempo de processamento e de memória.

Kumar *et al* (1994) citam que a importância do estudo de sistemas esparsos não se deve somente por ter aplicações em problemas reais, mas também pela determinação e estudo das estruturas de dados mais complexas que os dos sistemas densos.

Poucas referências foram encontradas sobre a resolução deste tipo de problema e desta forma, este trabalho tem a pretensão de ajudar a completar esta lacuna.

1.2 IMPORTÂNCIA

Métodos específicos que procurem tirar vantagem de características dos problemas estudados têm grande valia no desenvolvimento de algoritmos. O presente trabalho apresenta um método inédito para resolução de Problemas de Transporte Esparsos, melhorando o tempo para resolução comparado ao método tradicionalmente conhecido.

Além disto, o Problema de Transporte, como outros na Pesquisa Operacional, é utilizado como subproblema na resolução de outros maiores, tais

como as meta-heurísticas que precisem calcular o valor da função objetivo associada ao Problema de Transporte. A melhora no tempo de resolução viabiliza sua utilização como sub-rotina em processos iterativos.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma metodologia que, modificando a abordagem tradicional do método de transporte, seja mais eficiente na resolução de problemas esparsos, apresentando melhora no tempo para a resolução, sem piorar seu desempenho em problemas densos.

Para que este objetivo seja alcançado, outros específicos são propostos, que são:

- revisar os conceitos de grafos aplicados em transporte;
- determinar ciclos e discutir sobre como resolvê-los;
- provar matematicamente a validade do método;
- implementar computacionalmente a metodologia;
- comparar o tempo de resolução com o método tradicional.

1.4 LIMITAÇÃO

Os testes realizados foram sobre exemplos gerados aleatoriamente.

1.5 ESTRUTURA

O presente trabalho, composto de sete capítulos, introduz no capítulo 1 o seu escopo, os objetivos, a importância e limitações.

No Capítulo 2 faz-se uma explanação sobre o Problema de Transportes e conceitos utilizados para sua resolução. Apresenta-se uma ligação entre a resolução do problema e o estudo de grafos. Também é feita uma revisão bibliográfica sobre trabalhos relacionados ao assunto.

No Capítulo 3 conceitua-se o Problema de Transporte Esperso e apresentam-se exemplos de casos esparsos para problemas de transporte e designação.

O Capítulo 4 tem a finalidade de formular conceitos e demonstrar teoremas que comprovam o método proposto neste trabalho.

Depois de conhecer a conceituação e mostrar matematicamente que o método pode ser utilizado, no Capítulo 5 apresenta-se o desenvolvimento computacional de uma ferramenta utilizando os conceitos desenvolvidos.

O Capítulo 6 apresenta alguns resultados obtidos com o programa desenvolvido, comparando o novo método com o tradicional.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões sobre o trabalho e sugeridas algumas possibilidades de continuação da pesquisa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O Estudo do Problema de Transporte iniciou antes da primeira metade do século XX e, devido a sua grande aplicabilidade, permanece atual e importante. Neste capítulo discute-se sobre as características deste tipo de problema e suas utilizações. Além de ser feita uma aplicação sobre o problema, também se faz uma revisão bibliográfica sobre o mesmo.

2.1 PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Problemas sempre surgem em qualquer atividade humana e determinar um modelo matemático que reflita a realidade é parte do desafio para encontrar uma solução. Uma área da Pesquisa Operacional trata da modelagem matemática destes problemas, tanto quando os fenômenos envolvidos são estáticos ou determinísticos, onde todos os componentes do problema são conhecidos e sem aleatoriedade, quanto dinâmicos ou estocásticos, onde os seus componentes apresentam uma probabilidade de ocorrer de determinada forma.

Inicialmente, dois eventos motivaram o desenvolvimento da Pesquisa Operacional: o algoritmo Simplex proposto por Dantzig em 1947 (publicado em 1949) e o desenvolvimento de computadores, indispensáveis nos dias atuais e cada vez melhores com o aumento em sua velocidade de processamento (TREFETHEN, 1954).

Os problemas determinísticos contínuos podem ser classificados em problemas de Programação Linear, que podem ser resolvidos pelo algoritmo Simplex e em problemas de Programação não Linear, que possuem métodos específicos para resolução, dependendo de suas características.

Segundo Murty (1983), um problema qualquer de programação linear pode ser modelado com a intenção de reproduzir o seu funcionamento ou determinar uma estrutura ideal. São três os elementos principais do modelo: as variáveis de decisão que são incógnitas a serem determinadas e os parâmetros que são os valores fixos do problema; as restrições que o limitam e a função objetivo, que é uma função matemática que determina a qualidade da solução em função das variáveis de decisão.

Uma classe da programação linear com aplicações importantes é conhecida comumente como Problema de Transporte. Este problema foi formulado por Hitchcock em 1941, que também esboçou um procedimento construtivo para resolvê-lo, similar ao método Simplex. Independentemente, durante a II Guerra Mundial, Koopmans (1947) também estudou este problema, o que fez com que fosse chamado de Problema de Transporte Hitchcock-Koopmans (FORD e FULKERSON, 1956).

O Problema de Transporte envolve o transporte de determinadas mercadorias de vários pontos de origem a vários pontos de destino e, classicamente, deve considerar a distribuição ótima de um produto de modo que este:

- se encontre disponível em m origens nas quantidades fixas $A_i > 0$ (oferta), com $i = 1, 2, \dots, m$;
- seja necessário em n destinos nas quantidades fixas $D_j > 0$ (destino), com $j = 1, 2, \dots, n$;
- seja enviado diretamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo as necessidades em cada destino, ou seja a demanda total do produto deve ser igual à oferta total;
- seja carregado e distribuído com o objetivo de minimizar o custo total envolvido no programa de distribuição desse produto, em que se supõe que os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino, c_{ij} , são independentes das quantidades transportadas, x_{ij}

A figura 2.1 traz um esquema do Problema de Transporte com uma rede de m origens e n destinos onde os arcos que ligam as origens aos destinos representam os percursos pelos quais o produto deve ser transportado.

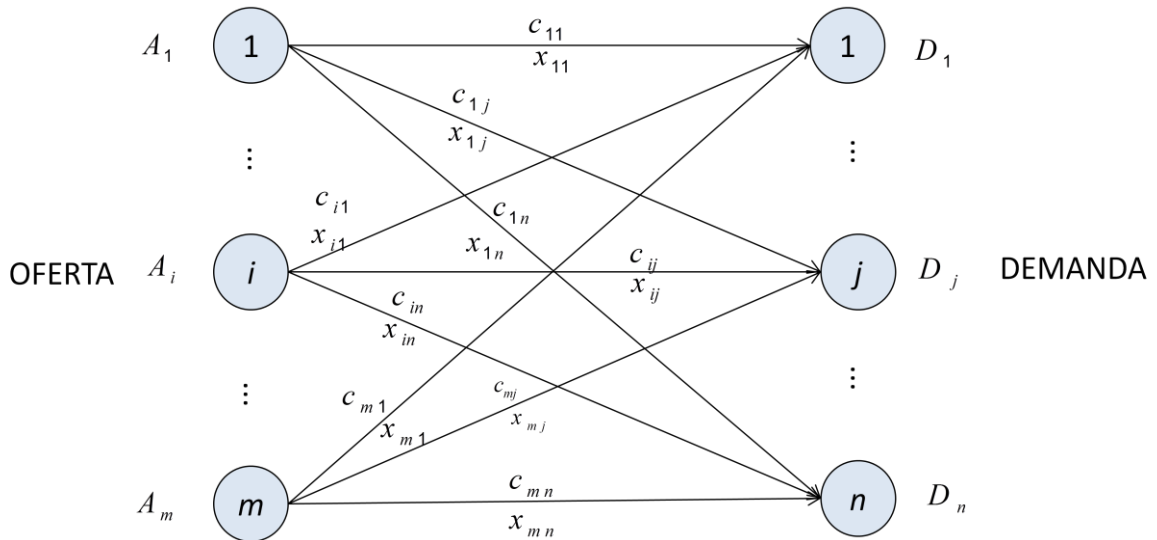


FIGURA 2.1 – MODELO BÁSICO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

Todas as informações do Problema de Transporte podem ser representadas através de um quadro (quadro de transporte). Neste quadro, cada linha (i) é relativa a uma origem e cada coluna (j) a um destino. A última coluna é utilizada para informar as quantidades disponíveis nas origens e a última linha as quantidades necessárias nos destinos. Em cada célula (i, j) são informadas as quantidades a transportar da origem i para o destino j , denominado x_{ij} e o custo unitário de transporte, denominado c_{ij} .

O quadro 2.1 apresenta a representação descrita para o Problema de Transporte:

Destino \ Origem	1	2	...	n	Oferta
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	A_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	A_2
...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	A_m
Demanda	D_1	D_2	...	D_n	$\sum A_i = \sum D_j$

QUADRO 2.1 – QUADRO DE TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

A soma das quantidades x_{ij} nas linhas é igual à oferta A_i e a soma dos x_{ij} nas colunas é igual à demanda D_j . O custo de cada percurso (i, j) é dado por $c_{ij} \cdot x_{ij}$ e a soma do custo total de transporte é dado pela equação (2.1).

$$\text{custo total} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

A formulação, conforme Murty (1983), do Problema de Transporte como um problema de programação linear é apresentada a seguir:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (2.2)$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} \sum_i x_{ij} = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) & \text{restrições de oferta} & (2.3) \\ \sum_j x_{ij} = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) & \text{restrições de demanda} & (2.4) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

onde $A_i > 0$, $D_j > 0$ para todo i, j e c_{ij} pode ser um número real arbitrário. Neste modelo, A_i , e D_j representam a oferta e a demanda requerida, respectivamente. O problema de transporte deve estar equilibrado, isto é, a quantidade total da oferta deve ser igual à quantidade de demanda ($\sum A_i = \sum D_j$).

A restrição (2.3) garante que não será excedida a capacidade de oferta de cada origem, enquanto (2.4) garante que todos os destinos serão atendidos. A função objetivo apresentada em (2.2) minimiza o custo total de transporte.

No caso em que a oferta é maior que a demanda, deve-se inserir um destino (coluna) artificial no quadro 2.1, para representar a folga, com custo zero. Se a demanda for maior que a oferta, insere-se uma origem (linha) artificial no quadro 2.1, para representar o excesso de demanda com custo zero. A soma da coluna ou linha representa o excesso ou folga (TAHA, 2008).

No quadro de transporte, as variáveis não básicas não são escritas explicitamente.

A resolução do Problema de Transporte pode ser feita pelo método Simplex. Porém, por ser muitas vezes trabalhosa, devido à dimensão do problema, outras técnicas foram desenvolvidas, considerando os passos para resolução de um problema de Programação Linear pelo método Simplex, que incluem: obter uma solução básica factível inicial (SBFI), verificar o critério ótimo que se atingido, o processo termina e caso contrário, fazer a melhoria da solução.

Para encontrar a solução básica factível inicial (SBFI) muitos métodos foram desenvolvidos (SOUZA, 2004), tais como o método do Canto Noroeste, método de Vogel, método do Custo Mínimo e método de Russell.

2.1.1 Método do Canto Noroeste

Para utilizar o método do Canto Noroeste devem-se seguir os seguintes passos, de acordo com Zions (1974):

- Passo 1 Atribuir à variável x_{11} (canto noroeste) a maior quantidade possível, isto é, o mínimo entre a oferta A_1 e a demanda D_1 . Se for zero, x_{11} terá o valor zero.
- Passo 2 Substituir a oferta e demanda iniciais, pelas diferenças $(x_{11} - A_1)$ e $(x_{11} - D_1)$, respectivamente.
- Passo 3 Se ainda houver oferta disponível, passar para a variável $x_{i+1,j}$.
- Passo 4 Se só houver demanda disponível, passar para a variável $x_{i,j+1}$.
- Passo 5 Prosseguir até obter todas as variáveis básicas. As outras variáveis (não básicas) serão nulas.

Este método não considera os custos de transporte, dependendo somente das ofertas das origens e das demandas dos destinos (WISTON, 2004) e tem aplicação computacional simples. Normalmente não oferece uma solução muito eficiente, ou seja, próxima da ótima, mas é uma solução válida (factível).

2.1.2 Método de Vogel

Neste método, em cada quadro de transporte deve-se calcular para cada linha e coluna a diferença entre os dois menores custos, ou “penalização”. Na linha ou coluna onde ocorrer a maior penalização escolher a célula, denominada célula básica, que tiver o menor valor. Os passos a serem seguidos, conforme Murty (1983), são:

- Passo 1 Acrescentar ao quadro de transporte uma linha e uma coluna, com as diferenças entre os dois menores custos, em coluna e em linha respectivamente.
- Passo 2 Selecionar a maior das diferenças.
- Passo 3 Selecionar o menor dos custos para a linha ou coluna que apresenta a maior diferença. Traçar uma linha sobre a linha ou coluna que contenha a maior diferença.
- Passo 4 Calcular as novas diferenças relativas apenas aos elementos admissíveis, ou seja, aqueles que não foram selecionados ou que não tenham uma linha sobre eles e voltar ao Passo 1.

2.1.3 Método do Custo Mínimo

Neste método, segundo Puccini e Pizzolato (1987), a solução inicial depende dos valores das ofertas e demandas e dos custos de transporte, visando uma solução inicial mais próxima do ótimo do que a fornecida pelo Canto Noroeste.

- Passo 1 Selecionar o x_{ij} de menor custo, dentre todos os que não tenham oferta e demanda anulada (riscada). Se existir mais de um, pode-se usar o critério de escolher onde se pode transportar a maior quantidade x_{ij} .
- Passo 2 Atribuir a maior quantidade possível ao x_{ij} selecionado.
- Passo 3 Subtrair da oferta e da demanda o valor atribuído a x_{ij} .
- Passo 4 Eliminar do quadro de transporte a linha ou coluna com resultado zero na oferta ou demanda, após a subtração. Se ambas tem resultado zero,

escolher uma delas. Se não houver mais oferta ou demanda, fim. Caso contrário, voltar ao Passo 1.

Um exemplo é apresentado no apêndice 1.

2.1.4 Método de Russell

Este método leva em consideração a matriz de custos no modelo equilibrado. É um método eficaz e simples em sua implementação quando comparado ao método de Vogel tem, muitas vezes, mostrado melhores soluções básicas iniciais (RUIZ e LANDÍN, 2003).

O método de Russel segue os seguintes passos (LEE, 1986):

Passo 1: Calcular as quantidades

$$\bar{u}_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{c_{ij}\} \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{u}_j = \max_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

e o valor

$$\bar{\Delta}_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{u}_j \quad \forall i, j$$

Passo 2 Selecionar a variável x_{ij} que tem o valor mais negativo de $\bar{\Delta}_{ij}$. Se ocorrerem valores iguais de $\bar{\Delta}_{ij}$, selecionar x_{ij} com o menor custo c_{ij} . Se ocorrerem valores iguais também para c_{ij} , selecionar x_{ij} com o maior valor restante de oferta ou demanda.

Passo 3 Atribuir a x_{ij} o maior valor entre a oferta A_i e a demanda D_j .

Passo 4 Subtrair x_{ij} de A_i e D_j . Eliminar do quadro de transporte a linha ou coluna com resultado zero na oferta ou demanda, após a subtração. Parar se todos A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) e D_j ($j = 1, 2, \dots, n$) forem iguais a zero, se não, voltar ao passo 1.

2.2 TESTE DE OTIMALIDADE – STEPPING-STONE

Os métodos apresentados nas seções anteriores, não garantem uma solução ótima. Conseguem sempre uma solução básica factível inicial (SBFI). Esta deve ser submetida ao teste de otimalidade. Se o critério não for satisfeito, procura-se outra solução, repetindo-se o processo até se obter a solução ótima. Baseado na solução dual, Dantzig desenvolveu um método para este teste. Os resultados da dualidade servem para calcular os custos reduzidos \bar{c}_{ij} do problema primal, que são analisados para determinar se a solução é ótima ou não.

Segundo Murty (1983), o primeiro passo é determinar uma solução dual $(u, v, \text{variáveis duais})$ para as variáveis básicas tais que $c_{ij} - u_i - v_j = 0$. O dual do Problema de Transportes é apresentado a seguir:

$$\text{Maximizar } w(u, v) = \sum_i A_i u_i + \sum_j D_j v_j \quad (2.5)$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i, \forall j \\ u_i, v_j \text{ quaisquer} \end{cases} \quad (2.6)$$

A restrição (2.6) está associada à variável primal x_{ij} . Assim, a variável de folga dual não-negativa associada à variável primal não-negativa x_{ij} é $c_{ij} - u_i - v_j$ e o par $(x_{ij}, c_{ij} - u_i - v_j)$ forma um par complementar deste par primal-dual dos problemas.

As variáveis duais u_i estão associadas às restrições primais que requerem que a soma das variáveis na i -ésima linha do quadro de transportes deve ser igual a A_i . Da mesma forma, a variável dual v_j está associada à j -ésima coluna no quadro de transporte.

As restrições primais junto com as variáveis duais associadas, podem ser representadas no quadro de transporte, como a representada no quadro 2.2, para o caso em que $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

	1	2	3	Oferta	u
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	A_1	u_1
	x_{11}	x_{12}	x_{13}		
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	A_2	u_2
	x_{21}	x_{22}	x_{23}		
Demanda	D_1	D_2	D_3		
v	v_1	v_2	v_3		

QUADRO 2.2 – SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL INICIAL PARA O CASO $i = 1, 2$ E $j = 1, 2, 3$:

Fonte: a autora (2011)

Depois de obtida a solução inicial, consideram-se os seguintes passos para determinar se é a melhor solução:

- Passo 1 Se x_{ij} é básica, então $c_{ij} - u_i - v_j = 0$. Calcular o sistema de n variáveis e $n - 1$ equações que resultará desse procedimento. Se não ocorrer este sistema, tem-se uma solução degenerada.
- Passo 2 Se x_{ij} é não básica, então $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Aplicando-se os resultados u_i e v_j , já encontrados no passo anterior, encontram-se todos os coeficientes finais que indicarão se é ou não a solução ótima. Se todos os coeficientes forem positivos, a solução encontrada é ótima. Fim. Caso contrário, a variável correspondente ao valor \bar{c}_{ij} mais negativo entra na base.
- Passo 3 Construir um circuito de compensação entre as variáveis básicas a partir da variável que entrará. Este circuito sempre deve conter o maior número possível de variáveis básicas, iniciando e terminando obrigatoriamente na variável que vai entrar na base. Cada vértice do circuito vai recebendo um sinal + e - alternadamente, que indicará se do valor desta célula será somado ou subtraído o menor valor de todos os vértices que possuem valor negativo, denominado θ . Após atualizar a solução, retirar da base a variável que foi anulada e retorne ao passo 1.

Um exemplo completo é apresentado no apêndice 2.

2.3 DEGENERESCÊNCIA

A seguir, apresenta-se a definição e solução para problemas de degenerescência segundo Murty (1983).

Seja β um conjunto de células básicas do quadro de transporte 2.1, associado à SBFI $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij})$. Neste caso, \tilde{x} é dita degenerada se $\tilde{x}_{ij} = 0$ para pelo menos uma célula básica (i, j) . Sempre que uma SBFI degenerada é obtida durante o algoritmo, é necessário distinguir entre uma célula básica com valor zero e uma célula não básica, que também é nula. Caso contrário a solução dual não pode ser calculada.

Se \tilde{x} é uma SBFI degenerada e (p, q) é selecionada como uma variável de entrada nesse passo deve-se fazer:

$$\theta_1 = \min \{ \tilde{x}_{ij}: (i, j), \text{ uma célula básica no ciclo em } \beta \cup \{(p, q)\} \}$$

A operação de entrar com (p, q) no conjunto básico β é um pivoteamento degenerado se $\theta_1 = 0$ e, não degenerado caso contrário. No pivoteamento degenerado, a célula de entrada substitui uma célula básica de valor zero do conjunto básico e não existe mudança no valor objetivo da SBFI atual. Em todo o pivoteamento não degenerado, uma nova SBFI é obtida, acompanhada por um decréscimo no valor objetivo.

No processo de resolução do Problema de Transporte, se um pivoteamento degenerado aparece, ele deve ser realizado e o algoritmo continua.

Na solução de um Problema de Transporte genérico pode ocorrer o ciclismo em degenerescência. Neste caso, o algoritmo fica em torno do conjunto básico e nunca termina. Um método usando perturbações de A_i e D_j pode garantir, matematicamente, que ao final de um número finito de pivoteamento, uma solução ótima do problema será obtida.

A técnica de perturbação tem o objetivo de identificar as variáveis básicas nulas. Desta forma, consegue-se um novo Problema de Transporte, sem degenerescência, modificando os valores de A_i e D_j , da seguinte maneira:

$$A_i = A_i + \varepsilon \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$D_j = D_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$D_n = D_n + m\varepsilon$$

para ε um valor positivo, muito pequeno, de maneira que a solução obtida seja muito próxima da solução correta.

É comum, na bibliografia (MURTY, 1983, ARENALES *et al*, 2007), a colocação da variável degenerada com um valor não nulo muito pequeno. No entanto, neste trabalho será utilizado um princípio diferente que elimina esta necessidade. Este princípio utiliza um vetor auxiliar para indicar quais variáveis são básicas. Se este vetor apontar para uma variável nula, então ela é degenerada.

2.4 METODOLOGIA PARA REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE TRANSPORTE EM ÁRVORE.

Para a resolução de um Problema de Transporte, o método *Stepping-Stone*, que a partir de uma solução inicial busca uma solução melhor, é bastante conhecido e difundido. No entanto, vários autores, ao resolver o problema de determinação de uma solução inicial factível ou de inclusão de uma nova variável básica sem a formação de ciclos, utilizam o termo “conveniente” sem entrar em detalhes de como se obter esta conveniência.

Com o intuito de facilitar a descrição do método desenvolvido neste trabalho para resolver este problema, utilizou-se uma estrutura de árvores. Uma estrutura semelhante pode ser consultada em Papamantou *et al* (2004) e O'Connor (2002).

A primeira evidência do uso de grafos data de 1736, quando Euler utilizou-os para resolver um problema de caminhar através de pontes entre duas ilhas cortadas por um rio (SZWARCFITER, 1984). Desde então têm sido utilizados em uma grande variedade de aplicações que vão desde circuitos elétricos até ciências sociais.

Alguns conceitos básicos da teoria dos grafos são necessários para uma boa compreensão da seção seguinte. Baseado em Cormen *et al* (2002) e Gersting (2004), define-se:

1. Um grafo G consiste de dois conjuntos: um conjunto de vértices finito e não vazio V e um conjunto A de pares não ordenados de vértices chamados arestas.

2. Um grafo é conexo se existe um caminho de qualquer nó para qualquer outro.
3. Um ciclo em um grafo é um caminho de algum nó para ele mesmo, tal que nenhum arco aparece mais de uma vez.
4. Uma árvore é um grafo conexo acíclico com um nó especial, denominado raiz da árvore.

2.4.1 Representação de uma Solução Básica do Problema de Transporte em Árvore

Seja o quadro 2.3 do Problema de Transporte com uma solução básica factível.

Destino Origem	1	2	...	n	Oferta
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	A_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	A_2
...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	A_m
Demanda	D_1	D_2	...	D_n	$\sum A_i = \sum D_j$

QUADRO 2.3 – SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL

Fonte: a autora (2011)

Serão consideradas as seguintes convenções para construção de uma árvore:

- Cada linha e cada coluna serão representadas como um nó do grafo. As linhas serão representadas por circunferências e as colunas por retângulos, conforme exemplo da figura 2.2.

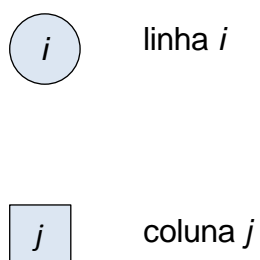


FIGURA 2.2 – REPRESENTAÇÃO DA LINHA E COLUNA NO GRAFO

Fonte: a autora (2011)

- Se uma variável básica está sendo utilizada, o seu valor está em x_{ij} e na construção do grafo está associado ao arco que liga a linha i e a coluna j , conforme a figura 2.3.

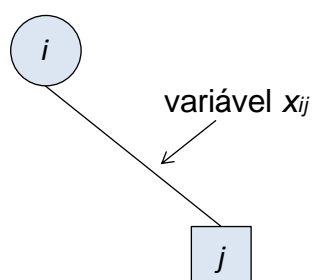


FIGURA 2.3 – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL x_{ij}

Fonte: a autora (2011)

- Nunca serão ligados linha com linha ou coluna com coluna.

Uma solução básica factível inicial de um exemplo, resolvida pelo método do Canto Noroeste, pode ser observada no quadro 2.4 e na forma de árvore na figura 2.4.

	1	2	3	4	Oferta
1	80	20			100
2		100	50		150
3			100	150	250
Demanda	80	120	150	150	

QUADRO 2.4 – SBF INICIAL

Fonte: a autora (2011)

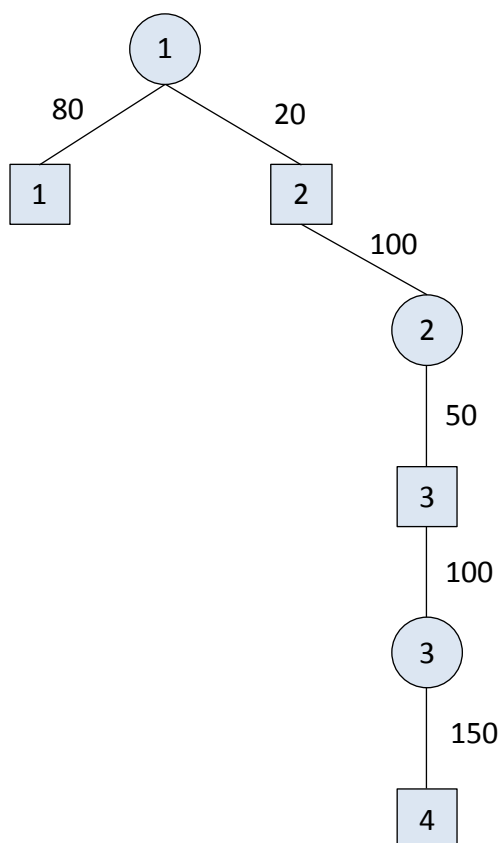


FIGURA 2.4 – REPRESENTAÇÃO DE ÁRVORE DE SBFÍ

Fonte: a autora (2011)

Pela teoria de grafos, tem-se que em uma estrutura com k nós, uma árvore terá $k - 1$ arcos. No caso do Problema de Transporte com m linhas e n colunas tem-se $(m + n)$ nós e conseqüentemente, $(m + n - 1)$ arcos. Como cada arco correspondente a uma variável básica, tem-se $(m + n - 1)$ variáveis básicas.

Se uma determinada solução utilizada no Problema de Transporte forma ciclos, o grafo correspondente não será uma árvore e, portanto, não será uma SBF.

2.4.2 Criação de uma Solução Básica Factível Inicial

Ao aplicar qualquer método usual para a determinação de uma solução básica factível inicial (SBFI) no Problema de Transporte, quando não se tem $m + n - 1$ variáveis básicas, é comum encontrar indicações para acrescentar uma variável básica degenerada (igual a zero) de forma conveniente (MURTY, 1983) ou de maneira a não formar ciclos. O problema é como inserir esta variável.

Uma solução que não forma ciclos é trabalhada com uma estrutura em grafos equivalente às árvores. Um grafo com $(m + n)$ nós, ou seja, com um número menor que $(m + n - 1)$ arestas e acíclico, é denominado desconexo. Neste caso, tem-se mais de uma árvore e, portanto, uma floresta. Um exemplo pode ser observado no quadro 2.5 e figura 2.5:

	1	2	3	4	5	Oferta
1					100	100
2			80			80
3				120		120
4	60					60
5		40			80	120
Demanda	60	40	80	120	180	

QUADRO 2.5 – SOLUÇÃO ACÍCLICA

Fonte: a autora (2011)

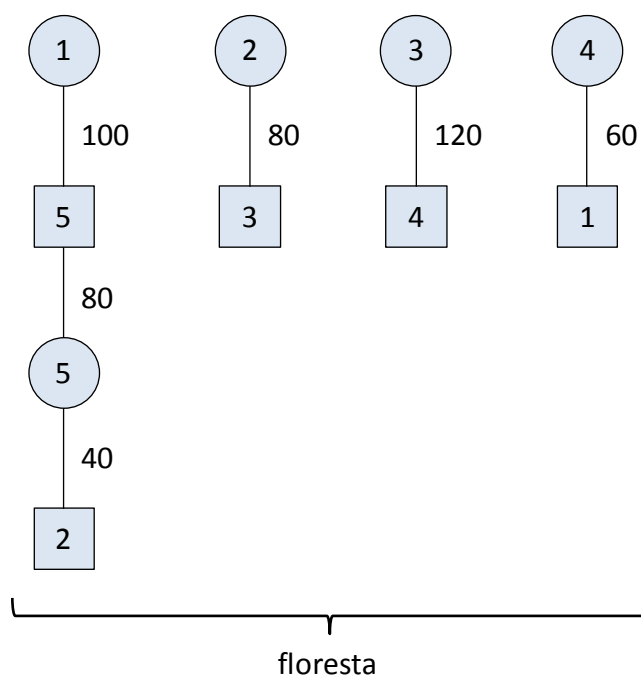


FIGURA 2.5 – REPRESENTAÇÃO DA FLORESTA

Fonte: a autora (2011)

Neste exemplo, $m = 5$, $n = 5$ e o número de variáveis básicas é 6, mas deveria ser $5 + 5 - 1 = 9$. Portanto são necessárias 3 variáveis degeneradas para completar a SBF. Podem-se unir quaisquer duas árvores através de ligações entre

linha e coluna (circunferência e quadrado). Uma solução pode ser como a representada na figura 2.6.

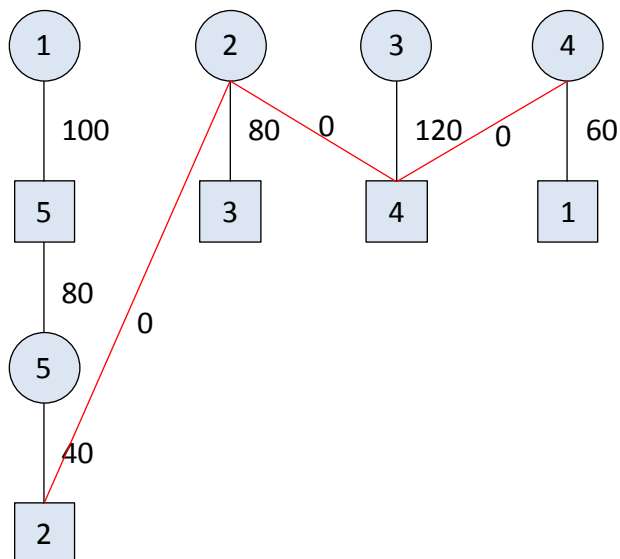


FIGURA 2.6 – SBF 1 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS

Fonte: a autora (2011)

O quadro 2.6 mostra a SBF correspondente.

	1	2	3	4	5	Oferta
1					100	100
2		0	80	0		80
3				120		120
4	60			0		60
5		40			80	120
Demanda	60	40	80	120	180	

QUADRO 2.6 – SBF 1 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS

Fonte: a autora (2011)

Outra solução pode ser observada na figura 2.7 e no quadro 2.7 correspondente.

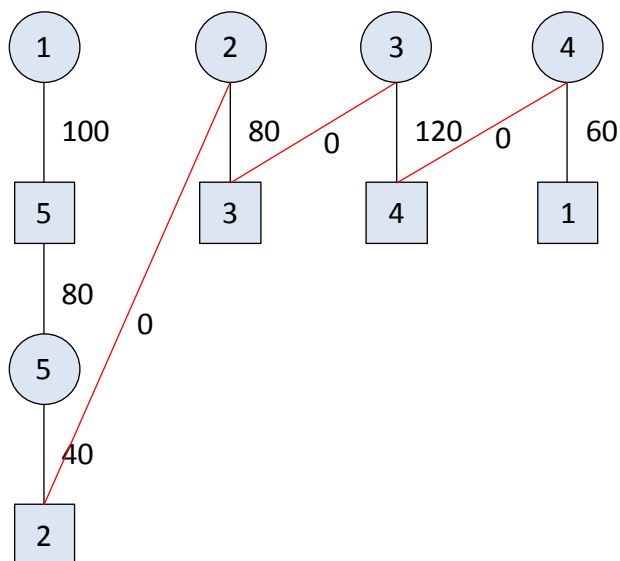


FIGURA 2.7 – SBF 2 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS

Fonte: a autora (2011)

	1	2	3	4	5	Oferta
1					100	100
2		0	80			80
3			0	120		120
4	60			0		60
5		40			80	120
Demanda	60	40	80	120	180	

QUADRO 2.7 – SBF 2 COM VARIÁVEIS DEGENERADAS INSERIDAS

Fonte: a autora (2011)

Um exemplo, no qual foram inseridas três variáveis degeneradas, que não resulta em uma SBF, pode ser visualizado no quadro 2.8 e figura 2.8.

	1	2	3	4	5	Oferta
1		0			100	100
2			80			80
3			0	120		120
4	60			0		60
5		40			80	120
Demanda	60	40	80	120	180	

QUADRO 2.8 – EXEMPLO DE RESPOSTA QUE NÃO É SBF

Fonte: a autora (2011)

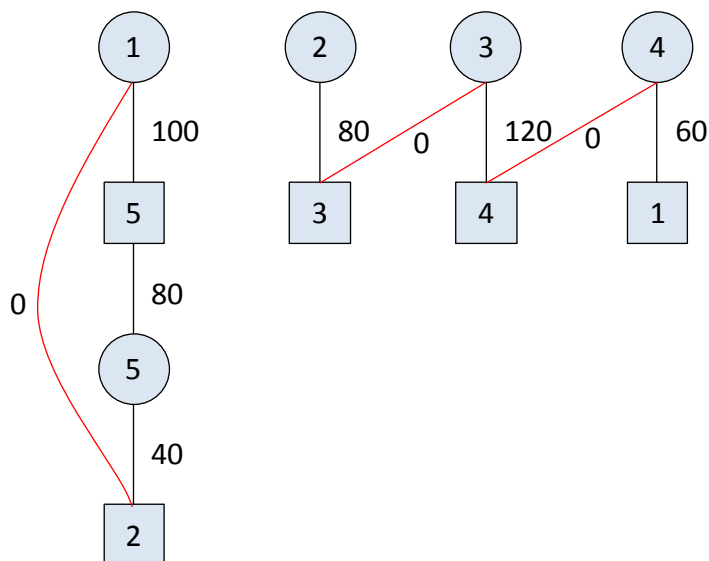


FIGURA 2.8 – EXEMPLO DESCONEXO

Fonte: a autora (2011)

Pelo exemplo acima, observa-se que a estrutura de grafos é indicada para, além de representar soluções básicas factíveis, auxiliar na determinação da inclusão de variáveis básicas degeneradas. Outra vantagem dessa representação é a de facilitar a determinação de ciclos quando da inclusão de uma nova variável na base.

Como a árvore representativa do Problema de Transporte tem exatamente $(m + n - 1)$ arcos, sendo que cada arco corresponde a uma variável básica, ou seja, um novo arco, necessariamente um ciclo é formado. Este ciclo, facilmente identificado, é o mesmo procurado no quadro do problema.

Por exemplo, seja o quadro 2.9 de uma SBF no qual o objetivo é colocar uma nova variável, denominada θ , na posição (6,7):

	1	2	3	4	5	6	7	8	Oferta
1		x		x	x				
2		x					x		
3			X			x			
4					x				
5	X		X		x				
6						x	θ		
7				x				x	
Demanda									

QUADRO 2.9 – X VARIÁVEIS BÁSICAS E VARIÁVEL θ A ENTRAR

Fonte: a autora (2011)

Ao inserir uma nova variável θ , deve-se encontrar um ciclo. Esta operação de inserção nem sempre é trivial. Um método para resolver este problema pode ser visto em Souza (2004). Este método consiste em percorrer repetidamente todas as linhas e colunas retirando-se aquelas que possuem uma única variável básica, até que sobrem só linhas e colunas com duas variáveis. Este procedimento, no entanto, tem um elevado custo computacional.

A representação por grafo é dada pela figura 2.9, onde a inserção da variável $x_{6,7}$ é representada pela ligação tracejada, provocando um ciclo formado pelas variáveis $x_{6,7}$, $x_{2,7}$, x_{22} , x_{12} , x_{15} , x_{55} , x_{53} , x_{33} , $x_{3,6}$ e x_{66} .

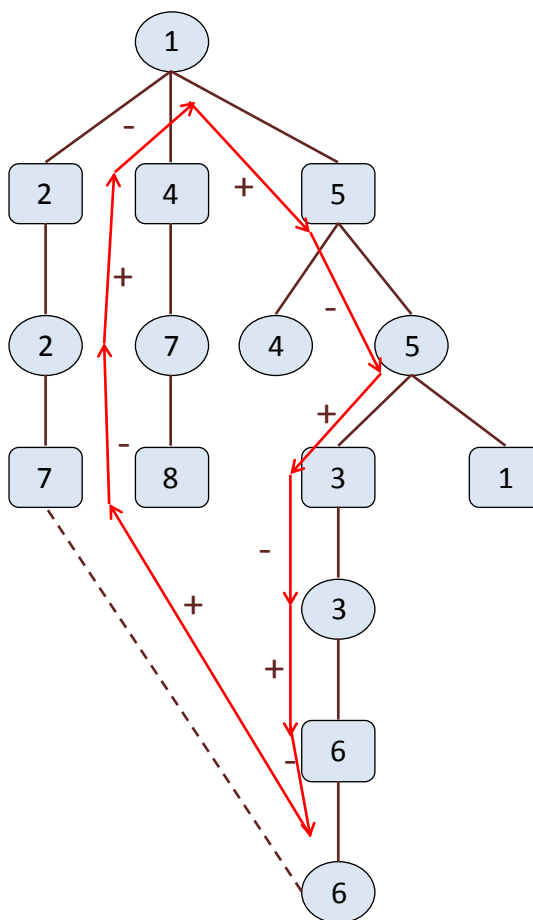


FIGURA 2.9 – REPRESENTAÇÃO POR GRAFO

Fonte: a autora (2011)

O mesmo ciclo encontra-se representado no quadro 2.10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	Oferta
1		x	x	x	x				
2		x					x		
3			x			x			
4					x				
5	x		x		x				
6						x			
7				x				x	
Demanda									

QUADRO 2.10 – CICLO AO INSERIR A VARIÁVEL θ

Fonte: a autora (2011)

Sendo $\theta = \min\{x_{27}, x_{12}, x_{55}, x_{33}, x_{66}\}$, os valores atualizados das variáveis básicas são $\tilde{x}_{27} = x_{27} - \theta$, $\tilde{x}_{12} = x_{12} - \theta$, $\tilde{x}_{55} = x_{55} - \theta$, $\tilde{x}_{33} = x_{33} - \theta$, $\tilde{x}_{66} = x_{66} - \theta$

e o valor atualizado que zera, corresponde à variável que sai da base. Se ocorrer mais de um valor atualizado nulo, escolhe-se aleatoriamente um deles. Assim a representação em árvore pode ser usada para determinar a solução inicial, a inclusão e a retirada de variáveis da base.

2.5 TRABALHOS RELACIONADOS

Monge (1781), um matemático conhecido no campo da geometria descritiva, trabalhou sob as ordens de Napoleão Bonaparte em obras de infraestrutura para o seu exército. Seu trabalho consiste em minimizar o custo de aterrar m lugares com os excedentes de n outros.

Em 1939, Tolstoi apresenta um Problema de Transporte de carga entre fontes e destinos em uma rede ferroviária e o resolve combinando duas heurísticas. Tal problema apresenta 68 destinos, 10 origens e 155 ligações entre origem e destinos. Todas as demais ligações são consideradas de custo infinito.

Em 1947, Dantzig propôs o método *Simplex* (publicado posteriormente) que possibilitou a solução de problemas de otimização, entre os quais o Problema de Transporte. Posteriormente apresentou a formulação do problema como um problema de Programação Linear (DANTZIG, 1951).

Em 1981, Barr *et al* apresenta um algoritmo *branch-and-bound* para resolver problemas de custo fixo de transporte, onde nem todas as células existem. O algoritmo explora essa ausência de densidade de várias maneiras, obtendo um procedimento que é especialmente aplicável para resolver problemas do mundo real, que normalmente são bastante esparsos. Além disso, novos procedimentos simplificados para podar a árvore de decisão e as restrições de cálculo são apresentados.

Pandian e Anuradha (2011) propõem um novo método, nomeado Método do Ponto Flutuante, para encontrar uma solução ótima para o Problema de Transportes com restrições adicionais. A vantagem deste método, é que o problema é apresentado de forma que não necessita do uso do método Simplex e do método da matriz inversa.

Uma generalização do algoritmo de leilão, para resolver o Problema de Transporte, foi demonstrada por Bertsekas e Castanon (1989). A ideia é converter o Problema de Transporte em um problema de atribuição, criando múltiplas cópias de

indivíduos para cada fonte e então modificar o algoritmo do leilão aproveitando a vantagem dessas múltiplas cópias.

Williamson e Nieuwenhuis (1993) apresentam um modelo cujo objetivo é minimizar o custo de transporte de madeira das florestas aos locais de processamento, considerando restrições de oferta e demanda para cada uma das categorias dos produtos considerados, podendo adicionar restrições de transporte. O modelo de Programação Linear correspondente visa minimizar a distância de transporte em geral, considerando o custo anual. Este método pode ser aplicado em problemas de planejamento estratégico.

Uma generalização do Problema de Transporte é apresentada por Hochbaum e Hong (1996), onde os autores consideram o problema de minimização côncava sobre restrições de transporte, denominado problema de produção-transporte. Neste problema é necessário decidir não somente a capacidade de remessa de cada origem a cada destino, como também a capacidade de estoque de cada origem. A função custo de produção é associada à atribuição de suprimentos para as origens. A função objetivo é a soma dos custos de transporte linear com o custo de produção côncavo.

Também, Sharma e Sharma (2000) dão uma formulação diferente para o Problema de Transporte e exploram a estrutura do problema dual para uma nova heurística que tem a intenção de melhorar a solução dual utilizada para resolver Problemas de Transporte e, portanto, melhorar o desempenho computacional. Essa heurística obteve a solução ótima para vários pequenos Problemas de Transporte e para os grandes problemas obteve, em média, 82% de soluções ótimas. Em 2003, os mesmos autores propuseram uma heurística que obtém uma melhor solução inicial para o Problema de Transporte Primal, comparado com o método Vogel de aproximação.

Para resolver problemas de sequenciamento de entrega de produtos em empresas com vários locais de atividade, Sauer *et al* (2000) apresenta um método de solução utilizando o Problema de transporte.

Devido à sua estrutura especial, o método *Stepping-Stone* é comumente adotado, a fim de melhorar a eficiência computacional do método Simplex regular. Ji e Chu (2002) propõem um algoritmo de aproximação matriz-dual para resolver o Problema do Transporte. Este algoritmo mostrou-se mais eficiente computacionalmente.

Com o objetivo de desenvolver um modelo de algoritmo genético de modo a permitir que os tomadores de decisão pudessem determinar o período de intervenção das equipes de corte nos pontos de produção e o fluxo de madeira entre os pontos de produção e as fábricas, minimizando custo de atividades relacionadas às colheitas e ao transporte principal de madeira, SOUZA (2004), adotou três estratégias independentes de melhorias de solução, totalizando oito variedades de algoritmos genéticos. Comparou os resultados com a solução do modelo de Programação Linear Inteira Mista, sem considerar variações de produção de frentes de corte e climáticas.

SILVA (2004) propõe um Modelo de Transporte em Rede, resolvido numericamente por Programação Linear associado à aplicação de alternativas de tarifa e sentido de fluxo, com restrições de capacidade, para auxílio na tomada de decisão com relação à melhor combinação de fluxos de gás natural a serem comercializados entre mais de um consumidor e mais de um fornecedor. O estudo se limita ao gás fornecido em gasodutos de transporte e tem o objetivo de minimizar o custo total de fornecimento.

Su Sheng *et al* (2006) investigaram o Problema de Transporte com custo linear por partes descontínuas, utilizando o algoritmo genético baseado na representação de redes da solução básica factível. A solução básica viável é representada pela árvore geradora, que consiste em todas as arestas básicas e não básicas com um montante de fluxo positivo. O conjunto de arestas ordenadas é utilizado para representar a árvore de expansão. Arestas de uma árvore geradora são classificadas pelo padrão *root* de busca em primeiro lugar na representação.

Ho e Wong (2006) apresentam um modelo de resolução para problemas bidimensionais contínuos onde considerando a possibilidade de quantidades não inteiras no transporte.

A abordagem de problemas de custos de transporte em situações reais, em que os custos são não-lineares, em geral côncavos, é feita por Altıparmak e Karaoglan (2006), com um algoritmo híbrido baseado nos conceitos da busca tabu e *simulated annealing*.

Uma aplicação do Problema de Transporte é feita para problemas envolvendo derivados de petróleo em oleodutos utilizando uma heurística GRASP por Milidiú *et al* (2011).

Exceto pelo trabalho de Barr *et al* (1981), não foram encontrados estudos que procurassem resolver problemas onde ocorresse um grande número de impossibilidade de conexões entre origens e destinos. Os grafos que representam esses problemas, onde ocorrem poucas ligações entre nós, recebem o nome de grafos esparsos. Pode-se dizer que estes seriam Problemas de Transportes Esparsos, conceito que posteriormente, neste trabalho, é melhor definido.

Esta dificuldade em se encontrar métodos que tratassem de problemas de transporte com esta peculiaridade foi um dos motivos do desenvolvimento deste trabalho.

3 CASO ESPARSO PARA MODELOS DE TRANSPORTE

A inclusão deste capítulo é necessária para apresentar conceitos não comuns na bibliografia quando se trata de Problemas de Transportes. Os trabalhos publicados sobre estes problemas consideram, normalmente, que existe uma ligação entre todas as origens e todos os destinos. Isto, no entanto não é verdade, ou pelo menos não precisa ser assim considerado, em muitas aplicações. Define-se aqui um modelo esparso do Problema de Transporte.

3.1 DEFINIÇÃO DE MODELO DENSO E MODELO ESPARSO

Quando um Problema de Transporte possui todos os custos entre origens e destinos conhecidos e limitados, diz-se que é um Problema de Transporte Denso (PTD). Neste tipo de problema, cada origem é conectada a todos os destinos, ou seja, em um problema com m origens e n destinos, cada origem estará conectada a n destinos, conseqüentemente existem $m \cdot n$ custos. Este produto indicará a totalidade de arcos no grafo representativo do caso denso e será denominado pela seguinte expressão:

$$total_arcos = m \cdot n \quad (3.1)$$

Em casos esparsos, a quantidade total de arcos será diferente da mencionada anteriormente. Algumas ou todas as origens se conectam a um menor número de destinos, ou talvez a nenhum deles, formando um número de arcos (num_arcos) dado pelo somatório das conexões existentes entre origens e destinos.

$$num_arcos = \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \quad (3.2)$$

onde E é o conjunto de arcos existentes.

De posse deste valor, pode-se definir o grau de densidade do grafo como sendo a razão entre o número de arcos e o total de arcos:

$$densidade = \frac{num_arcos}{total_arcos} = \frac{\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}}{m \cdot n} \quad (3.3)$$

Observa-se que em modelos densos, onde todas as origens se ligam a todos os destinos, a densidade é igual a 1.

Pode-se definir a esparsidade por:

$$esparsidade = (1 - densidade) = 1 - \frac{\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}}{m \cdot n} \quad (3.4)$$

Deste modo, se um determinado problema apresenta $densidade = 0,3$ e conseqüentemente $esparsidade = 0,7$, isto indica que 70% dos arcos de ligação entre origem-destino não existem. Na modelagem clássica do Problema de Transporte implicaria que 70% dos custos deveriam ser preenchidos com valores muito grandes.

O presente trabalho trata este tipo de problema como Problema de Transporte Esperso (PTE).

3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A formulação matemática de um problema, inicialmente, é feita tendo como aplicação um caso específico. Muitas vezes esta formulação acaba sendo utilizada em outros problemas que têm características semelhantes àquelas do problema original, ou ainda é adaptada para outras circunstâncias. O problema da mochila pode ser tomado como exemplo. Marques e Arenales (2002) mostram aplicações desta formulação no corte de bobinas de aço.

De forma semelhante, o Problema de Transporte, além de algumas formulações específicas, como o Problema de Designação, pode aparecer na solução de outros problemas.

Quando se estuda o problema clássico de transporte, utiliza-se o custo unitário de transporte entre uma origem e um destino (c_{ij}). Nem sempre isto é possível, pois muitas vezes não existe ligação direta origem-destino. Neste caso, pode-se simplesmente estabelecer um custo muito grande para cada unidade transportada entre eles, o que permite o uso do algoritmo de transporte (*stepping-stone*) sem problemas.

No entanto, nas situações onde a quantidade de ligações não possíveis entre origem e destinos aumenta, pode-se melhorar o tempo de resolução e aproveitamento de memória no algoritmo do transporte.

Neste capítulo é discutido o caso esparso do Problema de Transporte. Inicialmente são apresentados dois problemas que ilustram aplicações de Problemas de Transportes Esparsos e, mais adiante, é formalizado o conceito de esparsidade e detalhes são apresentados.

3.3 PROBLEMA DE PLANEJAMENTO FLORESTAL DE CURTO PRAZO

Souza (2004) utiliza o modelo de transporte na resolução de problemas de coleta de madeira em talhões que sofreram corte. O planejamento florestal é um campo promissor para aplicações de modelagens matemáticas, como as realizadas nos trabalhos de Carnieri (1989) e Gomide (2009).

O planejamento estratégico de corte florestal é estudado por Johnson e Scheurman (1977) e indica como e quando manejar talhões (locais com mesmas características onde as árvores são plantadas) em longos períodos de tempo, normalmente acima de 30 anos.

Uma dificuldade para os gestores das empresas florestais é planejar a sequência de corte dos locais disponíveis para trabalho em períodos de tempo mais curtos. Esta dificuldade aparece devido a certas características necessárias para o manejo, tais como:

- vários talhões estão disponíveis para serem cortados;
- cada talhão apresenta uma diferente produtividade, quer dizer, a mesma área em diferentes talhões fornece um diferente volume de madeira;
- uma vez iniciado o trabalho de corte em um talhão, o mesmo não pode ser abandonado;
- existem diferentes equipes que podem trabalhar simultaneamente nos talhões. Cada equipe apresenta diferente produtividade para diferentes tipos de talhões;
- a empresa pode atender vários clientes que apresentam diferentes necessidades diárias de madeira;
- a madeira cortada, em virtude das características químicas e físicas, tem um prazo de validade. Depois de um período curto de tempo seu valor comercial é quase nulo.

O objetivo do planejamento operacional florestal é determinar qual a sequência de corte dos diversos talhões. Esta sequência pode ser resolvida por métodos meta-heurísticos, como Algoritmo Genético, *Simulated Annealing* ou outros. Qualquer que seja o método utilizado é necessário estabelecer como transportar a madeira cortada nos talhões para cada cliente.

Toda a madeira cortada em um determinado talhão, em um dia, forma uma pilha de madeira que pode ser transportada para qualquer um dos clientes.

A madeira disponível em um determinado dia pode ser entregue ao cliente em qualquer dia posterior ao seu corte dentro do prazo de validade. Esta entrega deve ser feita a um custo mínimo.

Para formular este problema, pode-se utilizar o Problema de Transporte, onde cada origem será a pilha cortada diariamente e cada destino será a necessidade diária de cada cliente.

A distância utilizada para cálculo no Problema de Transporte será considerada entre o talhão, onde a pilha foi cortada e o cliente para o qual esta pilha será enviada.

Supondo, como exemplo, que uma pilha foi cortada no 13º dia e que o prazo de validade da madeira seja de 30 dias. Por parte dos clientes só existe interesse por esta madeira entre o 14º e o 43º dia. Antes do 14º dia não é possível o transporte, pois a madeira não está disponível. Depois de 30 dias, a madeira não será mais aceita. Se esta pilha é uma origem no Problema de Transporte, então só existirão 30 ligações possíveis entre ela e cada um dos clientes. As demais ligações serão inexistentes. Isto não impede que seja resolvido um Problema de Transporte para determinar o quanto de cada pilha será transportado para cada cliente em cada dia.

Se for considerado um período de planejamento de 360 dias, tem-se que cada pilha (origem) terá uma conexão com menos de 10% das necessidades diárias dos clientes (destinos).

Para se ter uma idéia do tamanho do problema acima exposto, suponha-se que uma empresa florestal tenha 200 talhões para manejar, tendo como período médio de trabalho em cada talhão, 10 dias (talhões podem ser cortados no mesmo dia por diferentes frentes de corte). Tem-se 2 000 pilhas ou origens. Se forem considerados 10 diferentes clientes e suas necessidades diárias tem-se 3 600

(360 · 10) destinos. Um problema de 2 000 origens com 3 600 destinos deverá ser resolvido em cada iteração da meta-heurística escolhida.

Deve-se observar, no entanto, que no Problema de Transporte existem $2\,000 \cdot 3\,600 = 7\,200\,000$ custos associados aos pares origens/destinos e em consequência 7 200 000 variáveis. Dentre estes custos, em torno de 720 000 correspondem aos 10% das ligações possíveis, ou seja, aos 10% das necessidades dos clientes. Os demais não devem ser considerados.

Isto mostra o caráter esparsa deste tipo de problema, pois para resolvê-lo interessa apenas as ligações possíveis entre origens e destinos. Ao se supor um valor muito grande de custo para, por exemplo, o transporte de uma madeira que ainda não foi cortada para o cliente e esta ligação for a única que viabilize o problema, a resposta do Problema de Transporte a indicará como solução, sendo o problema original, inviável.

3.4 PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE CAMPOS DE VENTO

Em sua dissertação de Mestrado, Santos (2011) apresenta uma nova metodologia para determinação de campos de vento, um problema meteorológico que tem sua solução baseada na comparação de imagens consecutivas de radar.

Para resolver o problema, o autor divide a imagem do radar em células (200 divisões na horizontal e 200 na vertical) e faz uma análise de correlação entre as células de uma imagem e a subsequente. Para fazer isto, utiliza uma maximização da correlação entre as células, formulando e resolvendo um problema de designação, que nada mais é do que um Problema de Transporte onde ofertas e demandas são unitárias.

Em seu trabalho, Santos explica que não existe sentido analisar correlação entre células muito afastadas (este afastamento é calculado em função da velocidade máxima do vento). Assim, cada célula só admite ser designada para um conjunto menor de células e não para a totalidade das 39 999 restantes. Da mesma maneira que no exemplo anterior, a quantidade de ligações possíveis entre os pares origem/destino é muito menor que o produto de seus valores e novamente tem-se um problema esparsa.

3.5 RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE TRANSPORTE ESPARSO

Neste capítulo, analisa-se a possibilidade em se aproveitar a esparsidade de um modelo de transporte, modificando-o, de maneira a obter na sua resolução, um tempo computacional menor.

Toda a argumentação deste capítulo é feita considerando que o modelo de transporte está equilibrado.

Basicamente, tenta-se utilizar os custos existentes, procurando descartar aqueles onde a ligação não existe.

3.5.1 Problema com Solução Básica Factível Inicial (SBFI) Utilizando Somente Arcos Existentes.

A primeira ideia é considerar que um Problema de Transporte Esparso admite uma solução inicial onde a base pode ser encontrada utilizando os arcos de conexão entre origem e destino que existam e tenham custo finito.

Assim, como cada quantidade básica x_{ij} está associada a um custo finito c_{ij} e como cada iteração do algoritmo de transporte melhora a solução da iteração anterior, não é necessário utilizar quaisquer dos arcos de custo infinito ligando origens e destinos. Qualquer valor que entre na base utiliza um dos custos finitos.

3.5.2 Problemas com SBFI Utilizando Arcos não Existentes.

O ideal é que sempre seja possível e fácil achar uma SBFI utilizando somente arcos existentes no problema. Para explicar que tal atitude não é possível em alguns casos, utilizar-se-á um exemplo como base. Tal exemplo não tem a finalidade de provar o método proposto neste trabalho, serve apenas como contraexemplo para algumas situações, para descartar ideias simplistas de resolução que não podem ser aplicadas.

Seja o exemplo 1 do Problema de Transporte já equilibrado, representado pelo quadro 3.1, onde só são indicados os custos das ligações existentes.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2		3			100
2		4		3		150
3			2		5	120
4	4			3		130
Demanda	80	100	130	90	100	

QUADRO 3.1 – EXEMPLO DE TRANSPORTE UTILIZANDO ARCOS NÃO EXISTENTES
Fonte: a autora (2011)

Graficamente, corresponderia ao diagrama da figura 3.1.

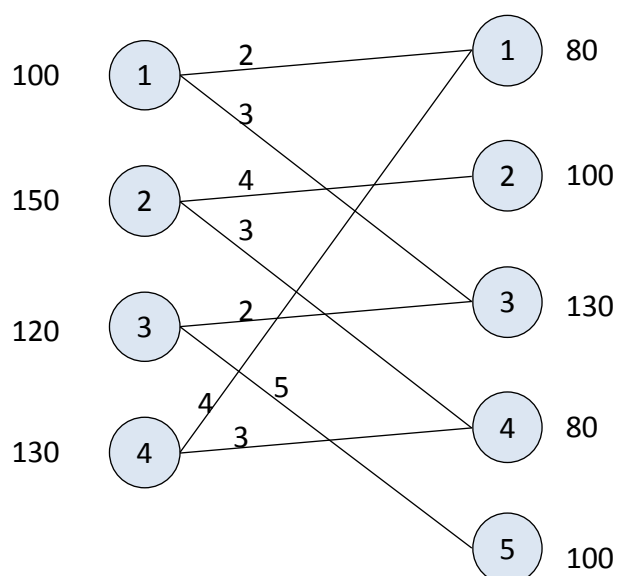


FIGURA 3.1 – DIAGRAMA PARA O EXEMPLO DE TRANSPORTE UTILIZANDO ARCOS NÃO EXISTENTES

Fonte: a autora (2011)

Neste exemplo existem 8 arcos possíveis ligando origens a destinos. Mas, considerando todas as ligações entre a origem e o destino (possíveis ou não), o total de arcos é de 20 ($4 \cdot 5$). Assim a densidade é igual a $\frac{8}{20} = 0,4$ e a esparsidade é igual a $(1 - 0,4) = 0,6$.

A ideia básica é utilizar somente as células correspondentes aos arcos existentes. Assim sendo, as células sombreadas no quadro 3.2 não devem ser utilizadas durante o processamento.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2		3			100
2		4		3		150
3			2		5	120
4	4			3		130
Demanda	80	100	130	90	100	

QUADRO 3.2 – MODELO COM ARCOS NÃO EXISTENTES DESCARTADOS

Fonte: a autora (2011)

Pode-se utilizar o procedimento do algoritmo de transporte sobre este quadro inicial, o que, neste caso acarreta a necessidade de se colocar um custo infinito em todas as células sombreadas. Se esta ação for efetivada, não se aproveita a esparsidade do problema.

A possibilidade de se utilizar o algoritmo somente com os elementos existentes, reduz a quantidade de cálculos a serem executados, porém vários problemas surgem. Estes são contornados com a aplicação do método proposto neste trabalho.

Os dados a serem utilizados podem também ser organizados como no quadro 3.3.

Ponto	Linha	Coluna	Custo
1	1	1	2
2	1	3	3
3	2	2	4
4	2	4	3
5	3	3	2
6	3	5	5
7	4	1	4
8	4	4	3

QUADRO 3.3 – CÉLULAS COM ARCOS EXISTENTES

Fonte: a autora (2011)

A tentativa de achar uma SBFI tendo como método o Canto Noroeste não é profícua, pois não existe continuidade no processo de determinação das células. Assim, utiliza-se o método de Custo Mínimo, na seqüência crescente de valor de custos.

A seguir, os valores das células obtidos por este método.

Célula (1,1) – quantidade = $\min(100, 80) = 80$ (quadro 3.4).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3			20
2		4		3		150
3			2		5	120
4	4			3		130
Demanda	0	100	130	90	100	

QUADRO 3.4 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (1,1)

Fonte: a autora (2011)

Célula (3,3) – quantidade = $\min(130, 120) = 120$ (quadro 3.5).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3			20
2		4		3		150
3			2 120		5	0
4	4			3		130
Demanda	0	100	10	90	100	

QUADRO 3.5 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (3,3)

Fonte: a autora (2011)

Célula (1,3) – quantidade = $\min(10, 20) = 10$ (quadro 3.6).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3 10			10
2		4		3		150
3			2 120		5	0
4	4			3		130
Demanda	0	100	0	90	100	

QUADRO 3.6 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (1,3)

Fonte: a autora (2011)

Célula (2,4) – quantidade = $\min(90, 150) = 90$, (quadro 3.7).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3 10			10
2		4		3 90		60
3			2 120		5	0
4	4			3		130
Demanda	0	100	0	0	100	

QUADRO 3.7 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (2,4)

Fonte: a autora (2011)

Célula (4,4) – quantidade = $\min(130, 0) = 0$, não pode ser utilizada (quadro 3.8).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3 10			10
2		4		3 90		60
3			2 120		5	0
4	4			3 x		130
Demanda	0	100	0	0	100	

QUADRO 3.8 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (4,4)

Fonte: a autora (2011)

Célula (2,2) – quantidade = $\min(60, 100) = 60$, (quadro 3.9).

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3 10			10
2		4 60		3 90		0
3			2 120		5	0
4	4			3		130
Demanda	0	40	0	0	100	

QUADRO 3.9 – ATRIBUIÇÃO DE VALOR À CÉLULA (2,2)

Fonte: a autora (2011)

Célula (4,1) – não pode ser utilizada.

Célula (3,5) – não pode ser utilizada.

Observa-se no quadro 3.10, que nem todas as demandas dos destinos foram atendidas e nem todas as ofertas das origens foram utilizadas.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80		3 10			10
2		4 60		3 90		0
3			2 120		5	0
4	4			3		130
Demanda	0	40	0	0	100	

QUADRO 3.10 – DEMANDAS E ORIGENS NÃO TOTALMENTE UTILIZADAS

Fonte: a autora (2011)

Por este exemplo, apesar da conexidade do grafo de transporte, a SBFI não pode ser obtida diretamente utilizando-se somente as células representativas das conexões existentes entre oferta e demanda.

Os métodos tentados foram somente os do Canto Noroeste e o de Custo Mínimo.

Uma solução para este problema pode ser desenvolver um método que mude o posicionamento de linhas e/ou colunas, de maneira que se encontre uma SBFI. No entanto, tal método não é o objetivo do presente trabalho, mesmo porque podem existir problemas em que esta resolução não seja possível. Um exemplo dessa impossibilidade é considerar um problema em que uma origem não esteja conectada a qualquer um dos destinos. Pode parecer um pouco forçado tal exemplo, mas se isto ocorre nada pode ser feito e este procedimento não pode ser generalizado.

Pode-se pensar em uma solução que designe valores infinitos para as células que pudessem resolver estes problemas, sem considerar as demais. Aceitam-se somente alguns arcos inexistentes como válidos. Neste caso designa-se um valor infinito (ou muito grande, aqui representado por M) para os custos c_{12} , c_{42} e c_{45} . Este tipo de procedimento viabiliza uma SBFI. Com estas operações executadas tem-se o quadro de custos e o diagrama correspondente como se apresenta no quadro 3.11.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	2 80	M 10	3 10			0
2		4 60		3 90		0
3			2 120		5	0
4	4	M 30		3	M 100	130
Demanda	0	0	0	0	0	

QUADRO 3.11 – SBFI COM A INSERÇÃO DE CUSTOS INFINITOS PARA c_{12} , c_{42} E c_{45}

Fonte: a autora (2011)

Feita uma análise para verificar se a utilização somente destas células são suficientes para continuar as iterações do algoritmo de transporte, conclui-se que não. A justificativa é encontrada no exemplo 2 da seção a seguir.

3.5.3 Não suficiência na busca de uma SBFi Utilizando Arco de Custo Infinito

No exemplo 2, representado pelo quadro 3.12, é apresentado um problema que pode ocorrer quando se utiliza somente algumas células com ligação não existente entre origem e demanda. Neste problema pode-se observar que talvez seja necessário utilizar mais células com a mesma característica.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	15	6				100
2		5				60
3			7	8		70
4				9	10	80
Demanda	90	80	30	90	20	

QUADRO 3.12– UTILIZAÇÃO DE ALGUMAS CÉLULAS COM ARCOS NÃO EXISTENTES

Fonte: a autora (2011)

Uma SBFi, encontrada pelo método do Canto Noroeste, já considerando a necessidade de utilizar uma célula que represente um arco não existente é apresentada no quadro 3.13.

	1	2	3	4	5	Oferta
1	15 90	6 10				100
2		5 60				60
3			7 30	8 40		70
4		M 10		9 50	10 20	80
Demanda	90	80	30	90	20	

QUADRO 3.13 – SBFi COM INCLUSÃO DE ARCO NÃO EXISTENTE

Fonte: a autora (2011)

A célula (4,2) foi utilizada para que a demanda de 2 fosse atendida e para que a oferta de 4 fosse totalmente utilizada.

A etapa seguinte é aplicar o algoritmo de transporte (*stepping-stone*) somente utilizando as células válidas (não sombreadas). O cálculo dos valores de u e v , passo 1 do algoritmo, são apresentados no quadro 3.14.

	1	2	3	4	5	Oferta	u
1	15 90	6 10				100	0
2		5 60				60	-1
3			7 30	8 40		70	$M-7$
4		M 10		9 50	10 20	80	$M-6$
Demanda	90	80	30	90	20		
v	15	6	$-M+14$	$-M+15$	$-M+16$		

QUADRO 3.14 – VALORES DE u E v NA IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO STEPPING STONE

Fonte: a autora (2011)

Considerando M para os demais custos das ligações não existentes, os custos atualizados, passo 2 do algoritmo, são então calculados para todas as células. O resultado é apresentado no quadro 3.15.

	1	2	3	4	5	Oferta	u
1	15	6	$2M-14$	$2M-15$	$2M-16$	100	0
	90	10					
2	$M-14$	5	$2M-13$	$2M-14$	$2M-15$	60	-1
		60					
3	-8	1	7	8	$M-9$	70	$M-7$
			30	40			
4	-9	M	$M-8$	9	10	80	$M-6$
		10		50	20		
Demanda	90	80	30	90	20		
v	15	6	$-M+14$	$-M+15$	$-M+16$		

QUADRO 3.15 – CUSTOS ATUALIZADOS

Fonte: a autora (2011)

Observa-se que as células (3,1) e (4,1) apresentam custos atualizados negativos, significando que se elas estivessem na base o custo total seria melhorado. Mas estas células não fazem parte do universo de possibilidades. Assim, não existe garantia de que tendo uma SBFI o método possa continuar sem utilizar os arcos não existentes.

A ideia do método proposto é acrescentar uma linha e uma coluna, de modo que seja sempre possível encontrar uma SFBI. Esta modificação para o exemplo 1, é mostrada no quadro 3.16.

Os custos atribuídos a cada célula incluída é grande (igual a M) exceto para aquela correspondente à intersecção da linha e coluna inserida, que terá custo nulo. A oferta atribuída a esta nova linha (origem) é igual à soma de todas as demandas. O mesmo valor é atribuído à demanda da nova coluna.

A intenção é garantir existência de uma SFBI utilizando somente os arcos inicialmente existentes ou os novos arcos correspondentes às células inseridas. As células sombreadas em cinza não fazem parte do processo.

Como a capacidade da nova origem é igual à soma de todas as demandas esta poderá atender a todas elas, o mesmo acontecendo com a demanda do novo destino, que poderá consumir qualquer oferta. A quantidade não necessária para complementar oferta e demanda será alocada diretamente da nova origem para o novo destino, como representado no quadro 3.17.

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	2 80		3 10			M	10
2		4 60		3 90		M	0
3			2 120		5	M	0
4	4			3		M	130
5	M	M	M	M	M	0	500
Demanda	0	40	0	0	100	500	

QUADRO 3.16 – QUADRO OBTIDO COM INSERÇÃO DE LINHA E COLUNA

Fonte: a autora (2011)

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	2 80		3 10			M 10	100
2		4 60		3 90		M	150
3			2 120		5	M	120
4	4			3		M 130	130
5	M	M 40	M	M	M 100	0 360	500
Demanda	80	100	130	90	100	500	

QUADRO 3.17 – SFBI DO PROBLEMA MODIFICADO

Fonte: a autora (2011)

As células com preenchimento na cor amarela indicam as variáveis básicas do problema, neste caso tem-se 10 variáveis ($6 + 5 - 1$). Partindo-se desta SFBI, aplica-se o método *Stepping-Stone* utilizando-se somente as células (variáveis) correspondentes aos arcos existentes do programa modificado, conforme mostra a figura 3.2.

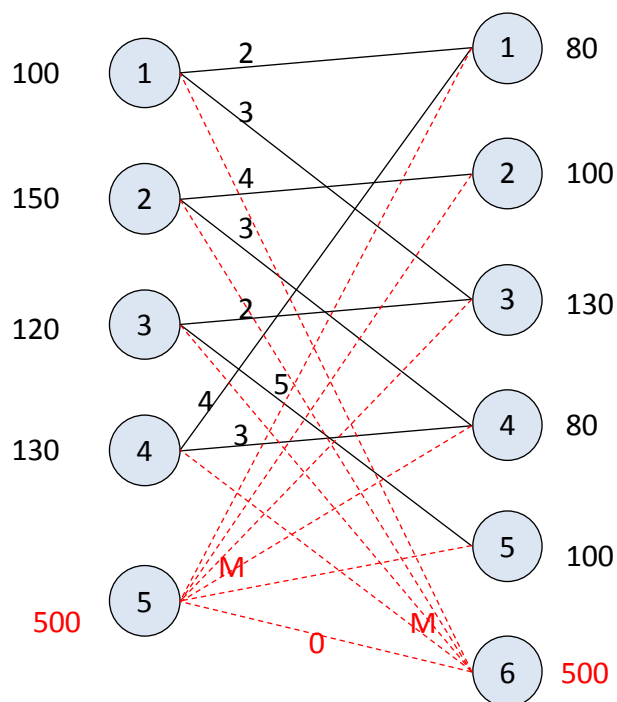


FIGURA 3.2 – DIAGRAMA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE MODIFICADO

Fonte: a autora (2011)

A partir destas inclusões o processo do Problema de Transporte é aplicado normalmente, porém utilizando somente os arcos existentes.

Com este procedimento, reduz-se o número de cálculos de custos atualizados, diminuindo o tempo de processamento.

3.6 MÉTODO PROPOSTO

Para resolução de problemas esparsos a proposta deste trabalho está esquematizada no fluxograma apresentado na figura 3.3.

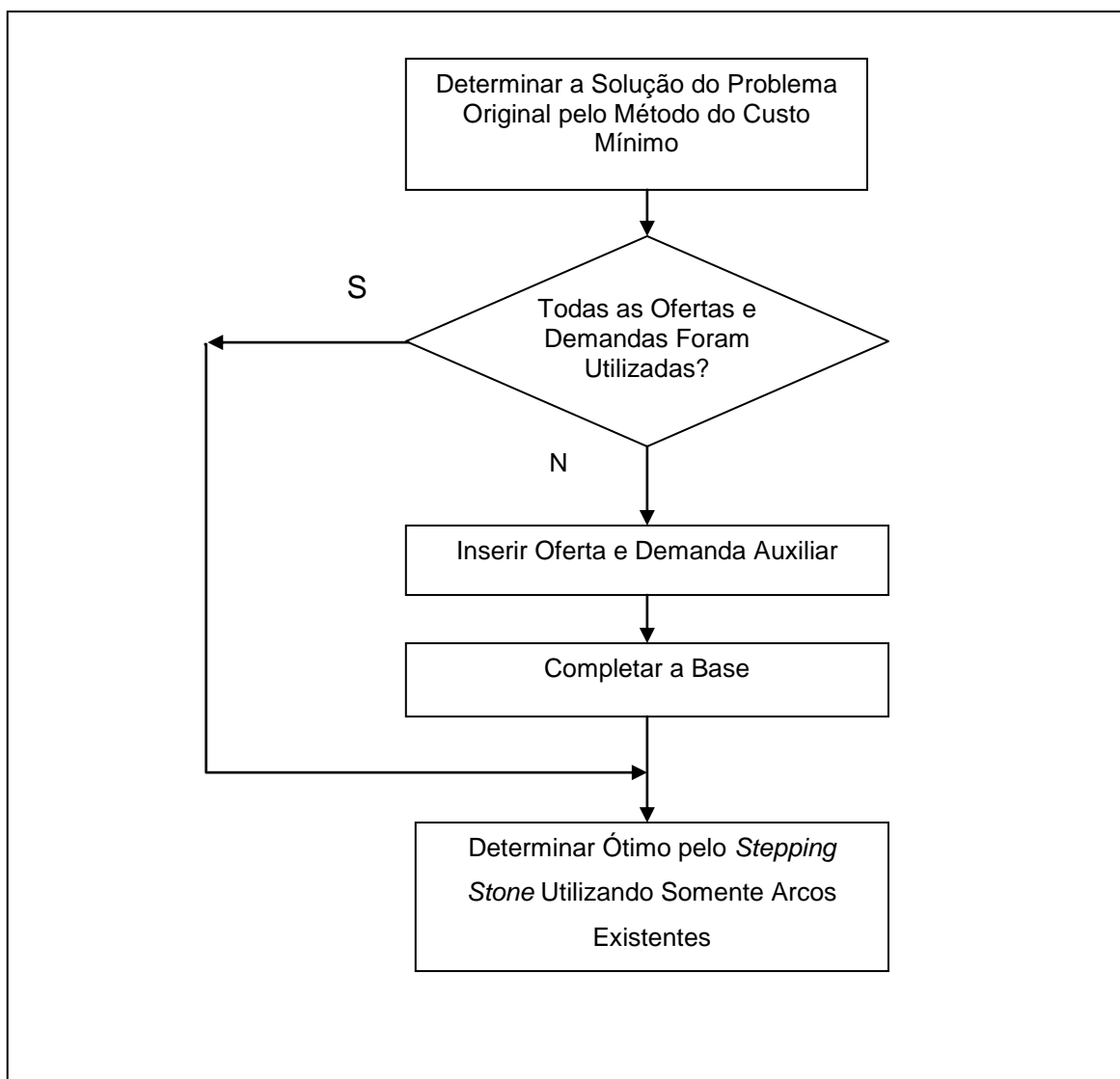


FIGURA 3.3 – FLUXOGRAMA SIMPLIFICADO DO MÉTODO PROPOSTO

Fonte: a autora (2011)

O método aparenta muita simplicidade, porém ficam ainda perguntas relacionadas à sua validade:

- Sempre será possível formar uma SBFI utilizando-se esta alteração?
- Se a SBFI for possível, o ótimo obtido pela aplicação do método de transporte do problema modificado pode ser usado para determinar a solução do problema original?
- Será necessário utilizar alguma ligação não existente durante o processo de melhoria?

No capítulo seguinte estes questionamentos são respondidos.

4 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma modificação no método tradicional de resolução do Problema de Transporte de maneira que seja possível resolver problemas esparsos com maior eficiência. No entanto, não basta apenas apresentar os algoritmos utilizados, deve-se formalizar matematicamente a modificação.

Este capítulo tem a finalidade de apresentar os teoremas, com as devidas demonstrações, que embasam o desenvolvimento do algoritmo.

Algumas definições já foram inseridas em seções anteriores, mas vale colocá-las novamente.

4.1 DEFINIÇÕES

Definição 1 - Problemas de Transporte Denso e Esparso

Um Problema de Transporte é dito DENSO se existe ligação entre todas as origens a todos os destinos. Será dito ESPARSO se alguma destas ligações não existir.

Definição 2 - Problema de Transporte Equilibrado

Um Problema de Transporte é Equilibrado se o somatório das ofertas é igual ao somatório das demandas.

Definição 3 - Conjunto das conexões

O conjunto das conexões, ou ligações, existentes em um problema esparso é dado por:

$$E = \{(i, j); \exists \text{ a ligação entre } i \text{ e } j, \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.1)$$

Em um problema denso o número de elementos do conjunto E é igual a $m \cdot n$. O mesmo não ocorre em um problema esparso. O exemplo dado na figura 4.1 ilustra um problema esparso onde $E = \{(2,1), (2,2), (3,3)\}$.

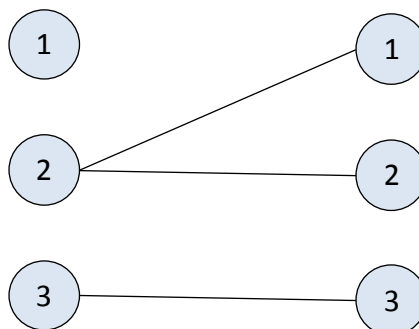


FIGURA 4.1 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE ESPARSO

Fonte: a autora (2011)

Definição 4 - Problema de Transporte

O modelo de Programação Linear abaixo é para o Problema de Transporte (PT).

$$PT: \min z_{PT} = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \quad (4.2)$$

$$s. a. \begin{cases} \sum_{i; (i,j) \in E} x_{ij} = D_j & j = 1, 2, \dots, n \quad (PT_1) \\ \sum_{j; (i,j) \in E} x_{ij} = A_i & i = 1, 2, \dots, m \quad (PT_2) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{onde } \sum_{j=1}^n D_j = \sum_{i=1}^m A_i = L \quad (4.4)$$

Este modelo representa tanto Problemas de Transporte Densos como Problemas de Transporte Esparsos. A equação (4.4) garante o equilíbrio do problema.

Vale observar que em um Problema de Transporte Denso e equilibrado existe garantia de factibilidade do modelo. Mas, mesmo que equilibrado, um Problema de Transporte Esparsos pode ser infactível, como comprova o exemplo visto no capítulo 3, onde uma origem não é conectada a destino algum.

Definição 5 - Problema de Transporte derivado

Partindo-se de PT pode-se criar um novo problema, aqui denominado Problema de Transporte Derivado e denotado por PT' , através do acréscimo de uma origem com capacidade A_{m+1} e um destino com demanda D_{n+1} , tal que:

$$A_{m+1} = D_{n+1} = L = \sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n D_j \quad (4.5)$$

com custos associados à ligação desta nova origem a todos os destinos e deste novo destino a todas as origens, tal que:

$$\begin{cases} c_{m+1,j} = M \gg 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, n \\ c_{i,n+1} = M \gg 0, & \text{para } i = 1, 2, \dots, m \\ c_{m+1,n+1} = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

Desta forma este novo problema é dado por:

$$PT': \min z_{PT'} = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n M x_{m+1,j} + \sum_{i=1}^m M x_{i,n+1} + 0 \cdot x_{m+1,n+1}$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} \sum_{i;(i,j) \in E} x_{ij} + x_{m+1,j} = D_j & j = 1, 2, \dots, n & (PT'_1) \\ \sum_{j;(i,j) \in E} x_{ij} + x_{i,n+1} = A_i & i = 1, 2, \dots, m & (PT'_2) \\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = A_{m+1} & & (PT'_3) \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = D_{n+1} & & (PT'_4) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\text{onde } \sum_{j=1}^n D_j = \sum_{i=1}^m A_i = A_{m+1} = D_{n+1} = L$$

Este problema corresponde a colocar uma linha e uma coluna a mais no problema original, conforme feito no final do capítulo 3.

Definição 6: O conjunto de ligações do Problema de Transporte Derivado (E') é o conjunto de todas as ligações de PT acrescido das novas ligações.

$$E' = E \cup \{(m+1, j) \cup (i, n+1) \mid i = 1, 2, \dots, m+1, j = 1, 2, \dots, n+1\} \quad (4.8)$$

4.2 TEOREMAS

Teorema 1

PT' é sempre factível.

Prova:

Basta mostrar que existe pelo menos uma solução factível. Tomam-se como variáveis básicas do problema:

$$\begin{cases} x_{i,n+1} & i = 1, 2, \dots, m \\ x_{m+1,j} & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{m+1,n+1} \end{cases}$$

Desta forma, tem-se $x_{ij} = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, por serem não básicas e conseqüentemente $x_{i,n+1} = A_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $x_{m+1,j} = D_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $x_{m+1,n+1} = 0$, variável básica degenerada.

Substituindo nas restrições, vem:

$$\text{em } PT'_2: \quad \sum_{j;(i,j) \in E} x_{ij} + A_i = A_i \Rightarrow \sum_{j;(i,j) \in E} x_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0; (i,j) \in E$$

$$\text{em } PT'_1: \quad \sum_{i;(i,j) \in E} x_{ij} + D_j = D_j \Rightarrow \sum_{i;(i,j) \in E} x_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij} = 0; (i,j) \in E$$

$$\begin{aligned} \text{em } PT'_3: \quad & \sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^n x_{m+1,j} + x_{m+1,n+1}, \text{ como } x_{m+1,j} = D_j \\ & \Rightarrow \sum_{j=1}^n D_j + x_{m+1,n+1} = A_{m+1} = L \therefore \sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = A_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{em } PT'_4: \quad & \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} + x_{m+1,n+1}, \text{ como } x_{i,n+1} = A_i \\ & \Rightarrow \sum_{i=1}^m A_i + x_{m+1,n+1} = D_{n+1} = L \therefore \sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = D_{n+1} \end{aligned}$$

Todas as restrições são satisfeitas, logo PT' tem pelo menos uma solução factível. Como PT' tem solução factível inicial, admite uma região factível. Conseqüentemente existe pelo menos um ponto ótimo, aqui denotado por:

$$y_{ij}^*, \quad (i, j) \in E'.$$

Como, por definição,

$$A_{m+1} = D_{n+1} = L = \sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n D_j,$$

existem duas possibilidades para o valor de $y_{m+1,n+1}^*$: ou ele vale L ou é diferente (menor) de L . Os Teoremas 4 e 5 analisam estas possibilidades.

Teorema 2

Se $y_{ij} \in E'$ é factível em PT' e $y_{m+1,n+1} = L$, então PT admite solução factível.

Prova:

Substituindo-se $y_{m+1,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ e $y_{m+1,n+1}$ em PT'_3 e PT'_4 tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} y_{m+1,j} &= \sum_{j=1}^n y_{m+1,j} + y_{m+1,n+1} = L \Rightarrow \sum_{j=1}^n y_{m+1,j} + L = L \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n y_{m+1,j} = 0 \Rightarrow y_{m+1,j} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

De forma análoga, tem-se

$$\sum_{i=1}^m y_{i,n+1} = 0 \Rightarrow y_{i,n+1} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Substituindo em PT'_1 e PT'_2 vem

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} + y_{m+1,j} = D_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = D_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (PT_1)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} + y_{i,n+1} = A_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = A_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (PT_2)$$

Tomando-se $x_{ij} = y_{ij}; (i, j) \in E$, tem-se que PT_1 e PT_2 são satisfeitas. Logo, PT admite pelo menos esta solução como factível.

Teorema 3

Se PT admite x_{ij} factível, então $\{x_{ij}; (i, j) \in E \text{ e } x_{m+1,n+1} = L\}$ é factível para PT' .

Prova:

$$\text{Se } x_{m+1,n+1} = L \Rightarrow \begin{cases} x_{m+1,j} = 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ x_{i,n+1} = 0 & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

assim,

$$\sum_{j;(i,j) \in E} x_{ij} + x_{i,n+1} = A_i + 0 = A_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (PT'_2)$$

$$\sum_{i;(i,j) \in E} x_{ij} + x_{m+1,j} = D_j + 0 = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (PT'_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = \sum_{j=1}^n x_{m+1,j} + x_{m+1,n+1} = 0 + L = L = A_{m+1} \quad (PT'_3)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} + x_{m+1,n+1} = 0 + L = L = D_{n+1} \quad (PT'_4)$$

logo $x_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$, e $x_{m+1,n+1} = L$ é uma solução factível para PT' .

Teorema 4

Se PT' admite um ótimo $y_{ij}^*; (i, j) \in E'$ e $y_{m+1,n+1}^* = L$, então $y_{ij}^*; (i, j) \in E$ é ótimo de PT .

Lembrando que E é o conjunto dos arcos do problema PT e E' é o conjunto dos arcos do problema PT' , se y_{ij}^* é uma solução de PT' , ao se escrever $z_{PT}(y^*)$, calcula-se o valor da função em y_{ij}^* ; $(i, j) \in E$.

Prova:

Como y_{ij}^* é ótimo em PT' e $y_{m+1, n+1}^* = L$, tem-se:

$$z_{PT'}(y^*) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{i,j}^* + \sum_{j=1}^n M y_{m+1,j}^* + \sum_{i=1}^m M y_{i,n+1}^* + 0 y_{m+1,n+1}^* = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{i,j}^*$$

y_{ij}^* ; $(i, j) \in E$ é factível em PT (Teorema 2)

Suponhamos que y_{ij}^* não é ótimo de PT então $\exists x_{ij}^*$; $(i, j) \in E$ factível em PT tal que:

$$z_{PT}(x^*) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j}^* < \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} y_{i,j}^* = z_{PT}(y^*)$$

Mas, pelo Teorema 3, x_{ij}^* ; $(i, j) \in E$, e $x_{m+1, n+1}^* = L$ é factível para PT' , e:

$$z_{PT'}(x^*) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j}^* + \sum_{j=1}^n M x_{m+1,j}^* + \sum_{i=1}^m M x_{i,n+1}^* + 0 x_{m+1,n+1}^*$$

$$z_{PT'}(x^*) = \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} x_{i,j}^* < \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{i,j}^* = z_{PT'}(y^*)$$

$$\therefore z_{PT'}(x^*) < z_{PT'}(y^*)$$

Absurdo, pois y_{ij}^* é mínimo em PT' . Assim y_{ij}^* ; $(i, j) \in E$ é ótimo de PT .

Em todas as demonstrações anteriores consideram-se como possibilidade de solução todos os reais não negativos. Para o próximo teorema considera-se somente a condição de resultado como sendo **números inteiros não negativos**.

Teorema 5

Se PT' tem solução ótima y_{ij}^* ; $(i, j) \in E'$ e $y_{m+1, n+1}^* < L$, então PT não admite solução factível.

Prova:

Sejam

$$\bar{c} = \max \{c_{ij}; (i,j) \in E\}$$

$$\bar{k} = m \cdot n$$

$$\bar{r} = \max \{A_i, D_j\} \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$M > \bar{c} \cdot \bar{k} \cdot \bar{r} \geq \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Se y^* é solução ótima de PT' e $y_{m+1,n+1}^* < L$ então

$$\sum_{i=1}^m y_{i,n+1}^* = \sum_{j=1}^n y_{m+1,j}^* \geq 1$$

e como

$$z_{PT'} = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n M x_{m+1,j} + \sum_{i=1}^m M x_{i,n+1} + 0 \cdot x_{m+1,n+1}$$

tem-se

$$z_{PT'}(y^*) \geq \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{i,j}^* + 2M$$

Supondo-se que PT admite solução factível \hat{x} , sabe-se que esta solução junto com a variável $\hat{x}_{m+1,n+1} = L$ é factível em PT' (Teorema 3) e, avaliando o valor da função objetivo neste ponto em PT' , tem-se:

$$z_{PT'}(\hat{x}) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \hat{x}_{ij} < M < \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{i,j}^* + 2M = z_{PT'}(y^*),$$

o que é absurdo, pois y^* é mínimo em PT' . Portanto PT não admite solução factível.

Com os Teoremas 3 e 4 prova-se que se o problema PT' é factível e $y_{m+1,n+1}^* = L$ então, resolvendo-se PT' tem-se a resolução de PT .

Além disto, pelo Teorema 5, se PT' tiver ótimo $y_{m+1,n+1}^* < L$, o PT será infactível.

Desta forma, conclui-se que, resolvendo-se o PT' tem-se a resolução do PT .

Com estes teoremas prova-se matematicamente a validade em se trabalhar sobre o problema modificado PT' . Mas ainda falta justificar que é suficiente trabalhar sobre as células correspondentes às ligações existentes, para que se possa

desconsiderar o cálculo dos custos atualizados sobre as ligações não existentes (custo infinito).

Teorema 6

Seja um Problema de Transporte onde existe um conjunto E , correspondente às ligações existentes entre origens e destinos e cujo maior valor de custo seja M (número real finito). Os demais custos têm valor infinito. Se o problema iniciar a partir de uma solução factível usando somente arcos existentes, então, nenhum arco não pertencente a E entrará na base.

Prova:

Como os custos associados a todas as variáveis básicas são finitos, todos os u_s e v_s são finitos. O custo atualizado de uma variável não pertencente a E seria calculado por: $\bar{c}_{i,j} = c_{i,j} - u_i - v_j = \infty - u_i - v_j = \infty > 0$. Ou seja, nunca entraria na base.

Logo, todos os custos atualizados correspondentes às variáveis não pertencentes a E não precisam ser calculados.

4.3 CONCLUSÕES

Como PT' sempre admite solução factível, aplicando o método de transporte e considerando o custo sobre as ligações não existentes como infinito, chega-se ao ótimo. Assim, resolvendo-se PT' têm-se duas situações:

- PT' admite ótimo e $x_{m+1,n+1}^* = L \Rightarrow PT$ tem solução ótima que é obtida pelas variáveis não nulas de PT' desconsiderando-se $x_{m+1,n+1}^*$
- PT' admite ótimo e $x_{m+1,n+1}^* < L \Rightarrow PT$ é infactível.

5 ALGORITMO E IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo são mostradas as rotinas necessárias para a criação de um aplicativo para a resolução do Problema de Transporte, tanto da maneira tradicional, quanto da maneira que aproveita a estrutura esparsa de problemas que tenham esta característica. Apresentam-se também, as interfaces do programa implementado, com considerações sobre seu funcionamento.

5.1 ROTINAS COMPUTACIONAIS

Cada rotina apresentada neste tópico é utilizada no desenvolvimento do aplicativo. É feita uma explicação reduzida de sua funcionalidade e em seguida um pseudocódigo, em linguagem lógica é apresentado.

5.1.1 Custo Mínimo

A Rotina de Custo Mínimo tem como função determinar uma solução básica factível fundamentada na utilização prioritária dos melhores custos. Para que isto seja possível, ela deve ter como entrada um Problema de Transporte já equilibrado.

Todos os custos são colocados em um vetor e posteriormente ordenados. Então os custos não zerados são utilizados em ordem crescente. Os custos zerados são os utilizados para incluir a origem/destino de equilíbrio e só são utilizados depois dos outros não zerados. O pseudocódigo é apresentado no quadro 5.1.

Rotina Custo Mínimo		
Objetivo – Determinar solução básica de mínimo custo para o Problema de Transporte		
Parâmetros de trabalho	Vetor de Ofertas	Entrada
	Vetor de Demandas	Entrada
	Valores dos Custos	Entrada
	Vetor de Variáveis Básicas	Saída
	Número de Variáveis básicas (NumBas)	Saída
Cria cópia de Ofertas (COF)		
Cria cópia de Demandas (CDe)		
Colocar a matriz de custos em forma de vetor (Vcustos) com relacionamento custo-posição		
Colocar em ordem crescente de custo, Vcustos		
Ler Vcustos		
	Se Vcustos>0	
	i – posição da linha do custo lido, j – posição da coluna	
	Se COF(i)<>0 E Cde(j)<>0	
	NumBas=Numbas+1	
	Valor_a_atribuir = min(COF(i),CDe(j))	
	Carregar Básica(NumBas) com (i,j,Valor_a_atribuir)	
	COF(i)=COF(i)-Valor_a_atribuir	
	CDe(j)=CDe(j)-Valor_a_atribuir	
	Fim Se	
	Fim Se	
	Fim Ler	
	Ler Vcustos	
	Se VCusto>0 Sair de Ler	
	i – posição da linha do custo lido, j – posição da coluna	
	Se COF(i)<>0 E Cde(j)	
	NumBas=Numbas+1	
	Valor_a_atribuir = min(COF(i),CDe(j))	
	Carregar Básica(NumBas) com (i,j,Valor_a_atribuir)	
	COF(i)=COF(i)-Valor_a_atribuir	
	CDe(j)=CDe(j)-Valor_a_atribuir	
	Fim Se	
	Fim Ler	

QUADRO 5.1 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

5.1.2 Equilíbrio

A rotina de Equilíbrio de oferta e demanda é utilizada para os casos onde o somatório de oferta é diferente do somatório da demanda. Caso uma das duas condições aconteça, uma oferta ou uma demanda, dependendo do caso, será incluída de maneira que o equilíbrio ocorra. Todos os custos associados terão valor 0 (zero). O quadro 5.2 apresenta o pseudocódigo desta rotina.

Rotina Equilíbrio Oferta-Demanda

Objetivo – Equilibrar um Problema de Transporte no caso da quantidade de oferta ser diferente da quantidade de demanda

Parâmetros de trabalho -	Vetor de Ofertas - Of	Entrada/Saida
	Número de Ofertas - Nof	Entrada/Saída
	Vetor de Demandas - De	Entrada/Saida
	Número de Demandas-NDe	Entrada/Saída
	Valores dos Custos	Entrada/Saida

Total_oferta = soma Ofertas

Total_demanda = soma Demandas

Se Total_ofertas > Total_demandas

 Aumentar Vetor Demandas em uma posição

 Carregar esta posição com Total_oferta – Total_demanda

 Criar Custo para cada origem com esta nova demanda com valor de custo 0

 Número de Demandas = Número de demandas + 1

Se Total_ofertas < Total_demandas

 Aumentar Vetor Ofertas em uma posição

 Carregar esta posição com Total_demanda - Total_oferta

 Criar Custo para nova oferta com cada destino com valor de custo 0

 Número de Demandas = Número de Demandas + 1

Fim Se

QUADRO 5.2 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA EQUILIBRIO OFERTA-DEMANDA

Fonte: a autora (2011)

5.1.3 Esparsidade

A rotina de esparsidade tem a função de viabilizar que todas as ofertas sejam utilizadas e que todas as demandas sejam atendidas, mesmo com a impossibilidade de atendimento pelas ligações entre ofertas e demandas existentes. Isto é obtido com a inclusão de uma nova oferta com custo M (de valor extremamente elevado) de transporte, a todas as demandas. Caso ocorra uma impossibilidade de utilização desta oferta no problema original, ela será utilizada através desta ligação. O mesmo ocorre com o acréscimo de uma demanda. O pseudocódigo é apresentado no quadro 5.3.

Rotina Esparsidade

Objetivo – Incluir origem e destino extras para garantir solução básica inicial factível

Parâmetros de trabalho -	Vetor de Ofertas - Of	Entrada/Saida
	Número de Ofertas - Nof	Entrada/Saída
	Vetor de Demandas - De	Entrada /Saida
	Número de Demandas-NDe	Entrada/Saída
	Valores dos Custos	Entrada/Saida

Total_oferta = soma Ofertas

Total_demanda = soma Demandas

Acrescentar um elemento ao vetor de oferta com capacidade Total_Demanda- NOf = NOf + 1

Acrescentar um elemento ao vetor de demandas com capacidade Total_Oferta- NDe = NDe + 1

Estabelecer custo entre nova oferta a todas as demandas igual a $M \gg 0$

Estabelecer custo entre todas as ofertas à nova demanda igual a $M \gg 0$

Estabelecer custo entre nova oferta e nova demanda igual a 0 (zero)

QUADRO 5.3 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA ESPARSIDADE

Fonte: a autora (2011)

5.1.4 Correção da Base

Como existe a possibilidade de que, utilizando a rotina de custo mínimo, o número de variáveis básicas não atenda as condições para a resolução de um Problema de Transporte, esta rotina tem a função de acrescentar as variáveis básicas degeneradas de maneira que não sejam formados ciclos. O funcionamento desta rotina é baseado na conexão de árvores formadas durante o processo de cálculo das variáveis duais: u e v . Se várias árvores são criadas tem-se uma floresta. A conexão entre cada uma das árvores geradas forma uma única árvore e cada uma destas conexões representa uma variável degenerada. No quadro 5.4 encontra-se o pseudocódigo desta rotina.

Rotina Corrigir Base

Objetivo – Incluir variáveis básicas degeneradas caso necessário

Parâmetros de trabalho	Vetor de Ofertas	Entrada
	Vetor de Demandas	Entrada
	Valores dos Custos	Entrada
	Vetor de Variáveis Básicas	Saída
	Número de Variáveis Básicas (NumBas)	Saída

Colocar na fila Linha, 1

Enquanto fila não vazia

Retirar elemento da fila Tipo, número

Se Tipo é Linha

Problema = -1

Marcar u(linha) como calculado

Última_linha = número

Para cada coluna da base tal que v(coluna) não é calculado

Se existe elemento na base nesta linha/coluna ainda não calculado

Colocar na fila a coluna, Número Coluna

Problema = 0

Fim Se

Fim Para

Se Tipo é coluna

Problema = -1

Marcar v(coluna) como calculado

Última_Coluna = número

Para cada linha da base tal que u(linha) é não calculado

Se existe elemento na base nesta linha/coluna ainda não calculado

Colocar na fila linha, Número Linha

Problema = 0

Fim Se

Fim Para

Fim Se

Se Problema = -1 E fila está vazia

Se Tipo é Coluna

Encontre primeira Linha não calculada

NumBas = NumBas + 1

Coloque na base na Posição NumBas , Linha – Última_coluna

Marcar u(linha) como Calculada

Coloque na fila linha, Número Linha

Fim Se

Se Tipo é Linha

Encontre primeira Coluna não Calculada

NumBas = NumBas + 1

Coloque na base na Posição Numbas, Última_linha – Coluna

Marcar v(coluna) como calculada

Coloque na fila coluna, Número Coluna

Fim Se

Fim se

Fim Enquanto

QUADRO 5.4 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CORRIGIR BASE

Fonte: a autora (2011)

5.1.5 Melhoria

A rotina de melhoria encontra a variável com custo atualizado mais negativo (ou até mesmo zero, caso nenhum custo negativo seja encontrado) que entrará na base, com o objetivo de melhorar a resposta atual. Se todos os valores dos custos atualizados das variáveis não básicas forem maiores que zero, a rotina retorna um valor nulo, o que indicará que o processo de transporte deve ser terminado. Esta rotina está representada no pseudocódigo do quadro 5.5.

Rotina Melhoria		
Objetivo – Achar a variável que deve entrar na base		
Parâmetros de trabalho	Vetor de Ofertas Vetor de Demandas Valores dos Custos Vetor de Variáveis Básicas Número de Variáveis básicas (NumBas) Variável para entrar na base	Entrada Entrada Entrada Entrada Entrada Saída
Colocar na fila Linha 1		
Enquanto fila não vazia		
Retirar elemento da fila (tipo,número)		
Se tipo é linha		
Para cada elemento da base não calculado que está nesta linha		
Calcular $u(\text{linha}) = \text{custo}(\text{linha}, \text{coluna}) - v(\text{coluna})$		
Se existe elemento na base nesta linha/coluna ainda não calculado		
Colocar na fila a coluna, número coluna		
Fim Se		
Fim Para		
Se tipo é coluna		
Para cada elemento da base não calculado que está nesta coluna		
Calcular $v(\text{coluna}) = \text{custo}(\text{linha}, \text{coluna}) - u(\text{linha})$		
Se existe elemento na base nesta linha/coluna ainda não calculado		
Colocar na fila linha, número linha		
Fim Se		
Fim Para		
Fim Se		
Fim Se		
Melhor = 0,0		
MelhorCusto = 0		
Para cada elemento não básico		
Atualizar custo = custo – $u(\text{linha}) - v(\text{coluna})$		
Se custo < MelhorCusto		
MelhorCusto = custo		
Melhor = linha,coluna		
Fim Se		
Fim Para		
Retornar variável a entrar na base como Melhor		

QUADRO 5.5 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA MELHORIA

Fonte: a autora (2011)

5.1.6 Ciclo

Quando se inclui uma nova variável na base de um Problema de Transporte existe a formação de um ciclo, em conjunto com as variáveis básicas iniciais. Esta rotina tem a função de determinar o ciclo e qual variável deve deixar a base. Durante esta rotina, deve ser executada uma manutenção na estrutura de árvore formada pelas variáveis básicas, fazendo com que na próxima utilização de verificação de ciclo não seja preciso refazer a árvore. No quadro 5.6, tem-se o pseudocódigo da rotina Ciclo.

Rotina Ciclo		
Objetivo – Controlar a estrutura de variáveis básicas		
Parâmetros de trabalho -	Valores dos Custos Vetor de Variáveis Básicas Número de Variáveis básicas (NumBas) Variável para entrar na base Já_calculado	Entrada Entrada/Saída Entrada Entrada Entrada/Saída
Se Já_calculado é falso		
Contar quantas básicas tem em Cada linha – ContLin		
Contar quantas básicas tem em cada coluna – ContCol		
Criar Estrutura de árvore Partindo como Nó Raiz a linha 1		
Já_calculado = Verdadeiro		
Fim Se		
Linha = linha da variável que entra na base		
Coluna = coluna da variável que entra na base		
Criar dois caminhos		
Arv1 – caminho partindo de Linha até nó raiz		
Arv2 – caminho partindo de Coluna até nó raiz		
Determinar ponto de intersecção dos dois caminhos (PInt)		
Criar ciclo Coluna – Pint – Linha - Coluna		
Achar ponto de mínima quantidade – MinQuant – LinhaSai - ColunaSai		
Atualizar quantidade de cada nó do Ciclo		
Atualizar Árvore		
Atualizar ContLin e ContCol		

QUADRO 5.6 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA CICLO

Fonte: a autora (2011)

5.1.7 Algoritmo de Transporte

A resolução do Problema de Transporte utiliza as rotinas descritas anteriormente, neste capítulo. No pseudocódigo mostrado no quadro 5.7 tem-se a sequência a seguir destas rotinas.

Rotina Transporte	
Objetivo – Resolver o Problema de Transporte	
Chamar rotina Equilíbrio Oferta-Demanda	
Chamar rotina Custo Mínimo	
Chamar rotina de Esparsidade	
Chamar rotina Corrigir Base	
Calcular valor da solução associado à solução inicial	
Laço	
	Chamar rotina de melhoria
	Chamar rotina ciclo
	Calcular valor da solução atual
	Comparar com solução anterior
	Se não houve melhora sair do Laço
	Solução anterior = solução atual
Fim Laço	

QUADRO 5.7 – PSEUDOCÓDIGO DA ROTINA TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

5.2 APLICATIVO

O aplicativo para implementação e verificação da metodologia proposta, bem como do método tradicional de resolução do Problema de Transporte foi desenvolvido na plataforma Visual Studio 2010 utilizando a Linguagem Visual Basic.NET para Windows 7, 32 bits.

Basicamente, o programa é dividido em duas diferentes atividades: a geração de exemplos aleatórios e a resolução dos problemas. O programa tem duas interfaces. A primeira interface tem a função de receber os comandos básicos para geração e resolução de exemplos, ela pode ser observada na figura 5.1.

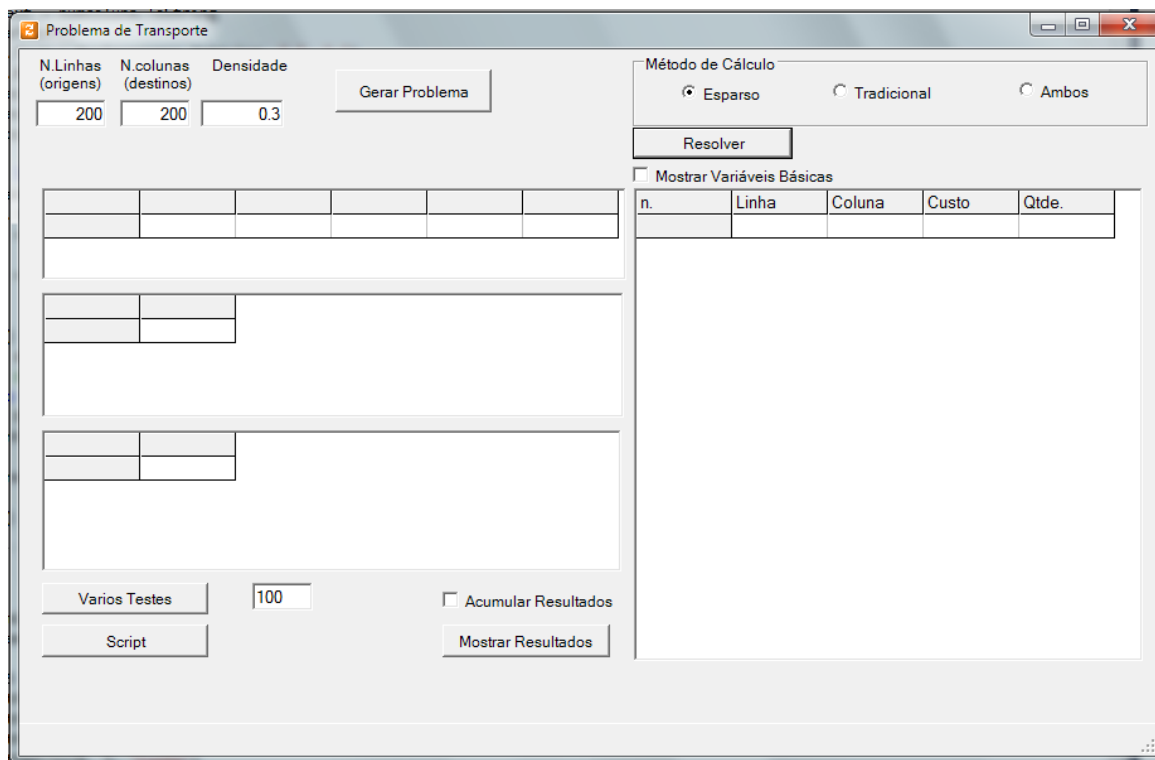


FIGURA 5.1 – INTERFACE DO APLICATIVO

5.2.1 Criação Aleatória dos modelos

Informa-se a quantidade de origens (linhas), a quantidade de destinos (colunas) e o percentual de densidade esperado. Ofertas e demandas aleatórias serão criadas para cada origem e destino. Para gerar o exemplo pressiona-se a botão “Gerar Problema” e um Problema de Transporte com as características indicadas é gerado e alocado na memória para que possa ser resolvido. Este problema poderá, posteriormente, ser resolvido pelo método tradicional e pelo método que usa a esparsidade ou mesmo por ambos os métodos em sequência. A criação de um exemplo de 200 origens e 200 destinos de Problema de Transporte com densidade igual a 0,3 é apresentada na figura 5.2.

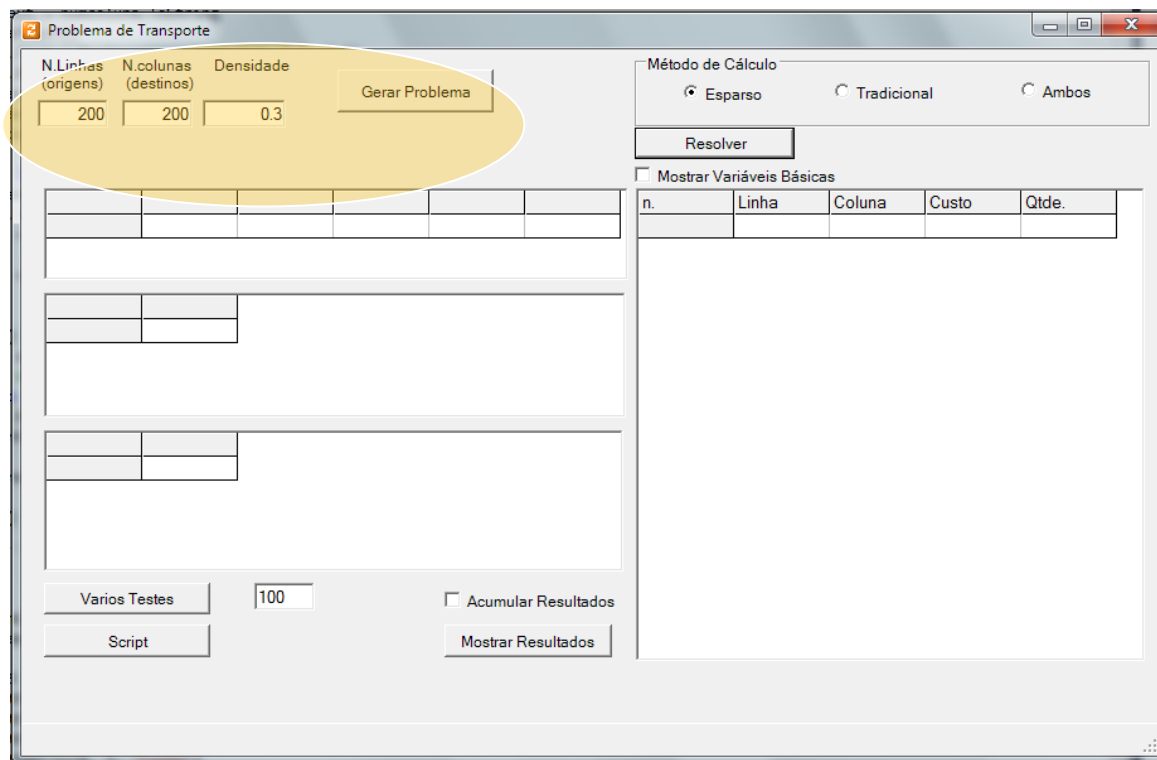


FIGURA 5.2 – BOTÃO GERAR PROBLEMA ATIVADO – EXEMPLO DE GERAÇÃO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE

5.2.2 Resolução

Nesta seção apresenta-se como proceder para resolver um ou vários problemas.

A caixa de opção “Esparsa”, se marcada, indica que o método para modelos esparsos a ser utilizado para resolução é o desenvolvido por este trabalho.

Seja um exemplo de Problema de Transporte conforme a figura 5.3, com 120 origens, 100 destinos e com densidade de 0,3.

No *grid* da esquerda são mostradas as informações referentes a esta resolução. A primeira coluna tem informações das características do problema resolvido (número de origens, destinos e densidade). Na segunda coluna (Dens.) mostra-se a densidade real obtida pela geração aleatória (neste exemplo 0.297). Dois valores de função objetivo aparecem nas duas colunas seguintes (F1 e F2). Estes valores serão iguais se o problema original for viável e diferentes caso contrário. O primeiro valor corresponde à multiplicação das quantidades possíveis de serem transportadas pelos custos correspondentes; já na outra coluna, além das

quantidades transportadas, também serão consideradas aquelas que utilizam ligações inviáveis e seu valor é multiplicado por M . A coluna Tempo apresenta o tempo necessário para resolução do problema (em milissegundos). A coluna “Ciclos” mostra o número de iterações.

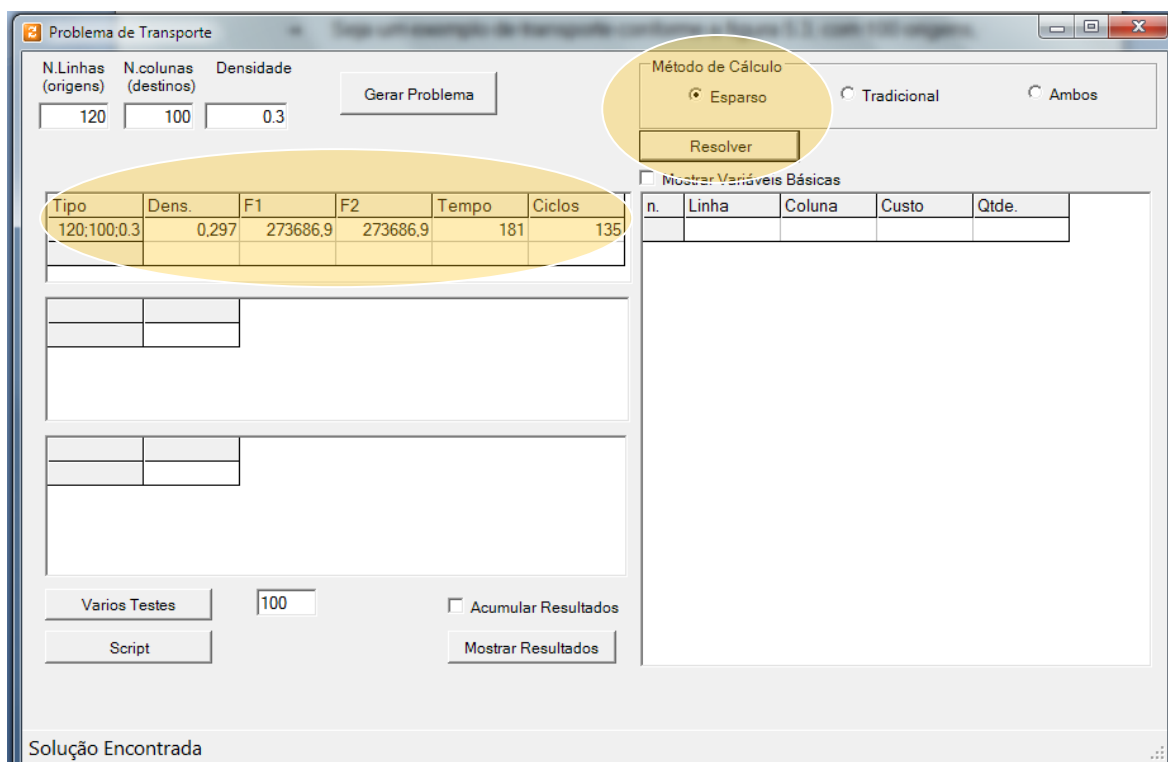


FIGURA 5.3 – OPÇÃO ESPARSO ATIVADA – RESPOSTA UTILIZANDO MÉTODO ESPARSO

Marcando-se a opção “Tradicional”, o mesmo problema pode ser novamente resolvido, agora utilizando o método tradicional, onde todas as células são utilizadas para a resolução do problema.

A tela correspondente é apresentada na figura 5.4. Observa-se que o resultado é colocado na segunda linha do *grid*.

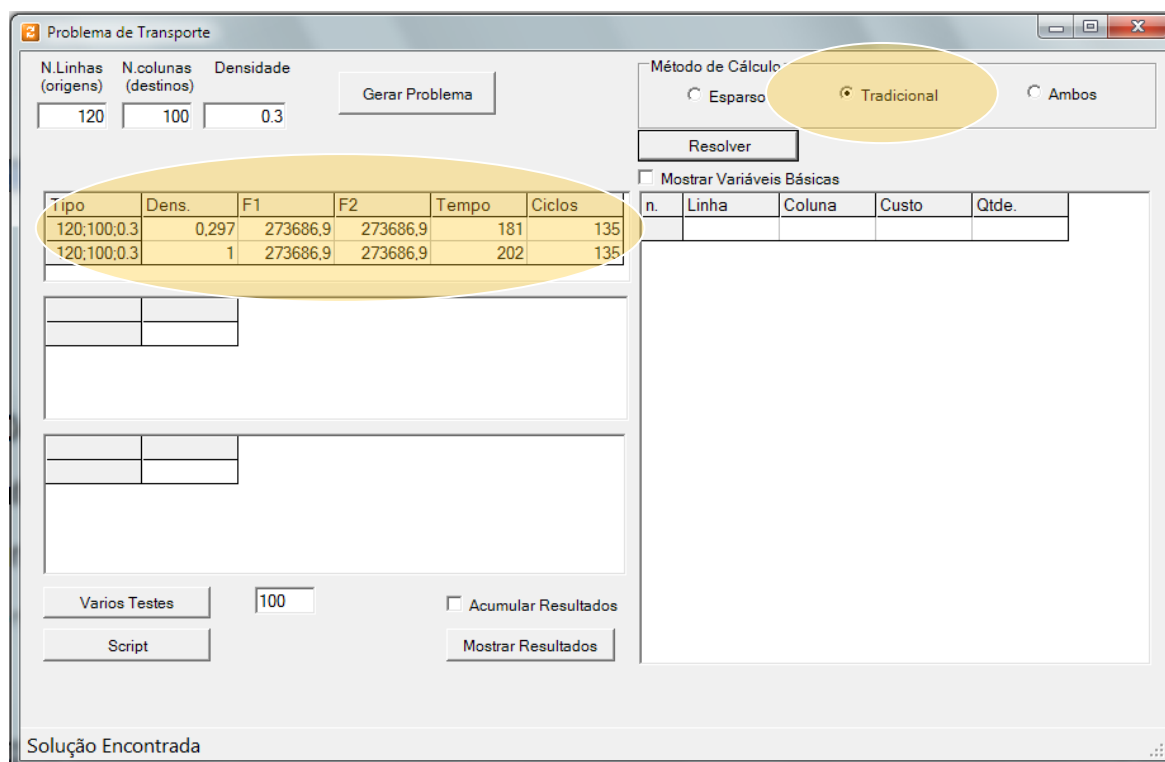


FIGURA 5.4 – OPÇÃO TRADICIONAL ATIVADA – RESPOSTA UTILIZANDO O MÉTODO TRADICIONAL.

O número 1 da figura 5.4 que aparece na coluna “Dens.” representa a densidade utilizada. Neste caso, como o método utilizado não é o de esparsidade, o valor 1 indica uma matriz densa, onde todas as ligações não existentes são preenchidas com o valor M . Nas colunas “F1” e “F2”, aparecem os valores da função objetivo, considerando somente os arcos com custo diferente de M e com todos os arcos respectivamente. Similarmente ao caso esparso, se estes valores forem diferentes significa que o problema é inviável. As colunas Tempo e Ciclos mostram o tempo de resolução em milissegundos e a quantidade de iterações.

Na figura 5.5, tem-se um caso onde o problema gerado é infactível. Isto é observado pela diferença nos valores das duas funções objetivo, localizados em “F1” e “F2”. Para a resolução deste exemplo, marcou-se a opção “Ambos” e os dois métodos foram aplicados em sequência, resolvendo o mesmo exemplo.

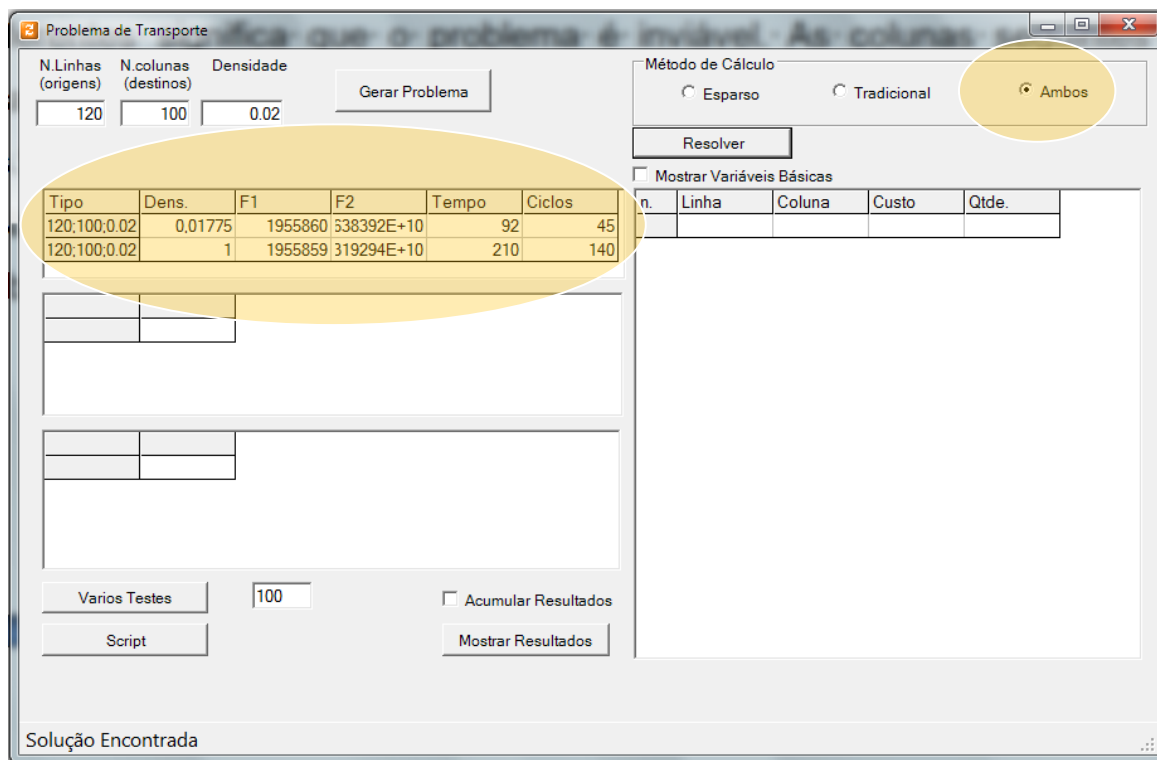


FIGURA 5.5 – OPÇÃO AMBOS ATIVADA – EXEMPLO DE PROBLEMA INFATÍVEL RESOLVIDO PELOS MÉTODOS TRADICIONAL E ESPARSO

Com a opção de “Mostrar Variáveis Básicas” ativada, é possível visualizar as variáveis básicas, as ofertas e as demandas. A figura 5.6 mostra uma parte das variáveis utilizadas, suas quantidades e custos. Observa-se que $x_{19,17} = 103$ e tem como custo 99999 (valor de M utilizado para resolução). Isto significa que para se obter uma solução para o problema é necessário mandar 103 unidades do produto da origem 19 para o destino 17. Porém, não existe ligação entre estes locais.

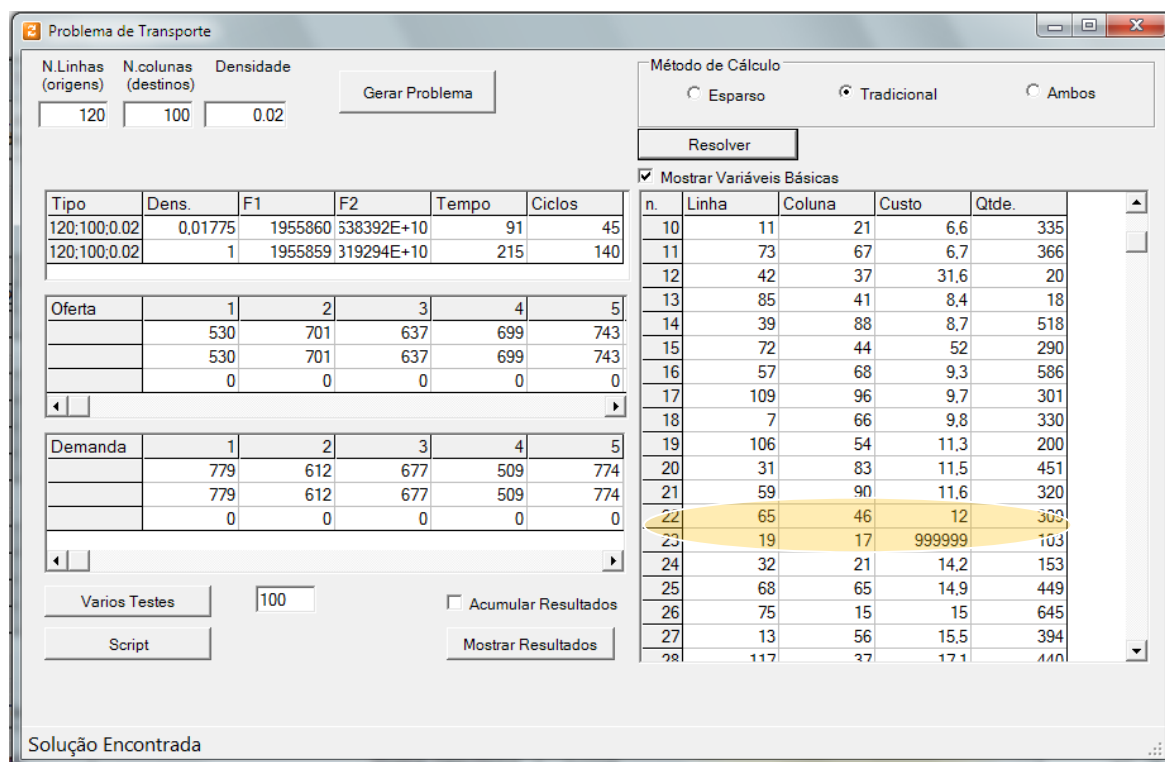


FIGURA 5.6 – OPÇÃO MOSTRAR VARIÁVEIS BÁSICAS ATIVADA – RESPOSTA OBTIDA PELO MÉTODO TRADICIONAL

Um exemplo de pequeno porte é mostrado na figura 5.7. Observa-se que o problema é infactível. Devido ao desequilíbrio entre oferta e demanda (oferta menor que demanda) foi criada uma origem fictícia. A sexta origem e o sexto destino foram criados pelo método que utiliza a esparsidade. Assim sendo, 10 unidades que existem na origem 1 não serão utilizadas e não serão atendidas 10 unidades do destino 5. A figura 5.8 mostra que o mesmo problema, resolvido pelo método tradicional, tem outra solução, porém com mesmo valor da função objetivo.

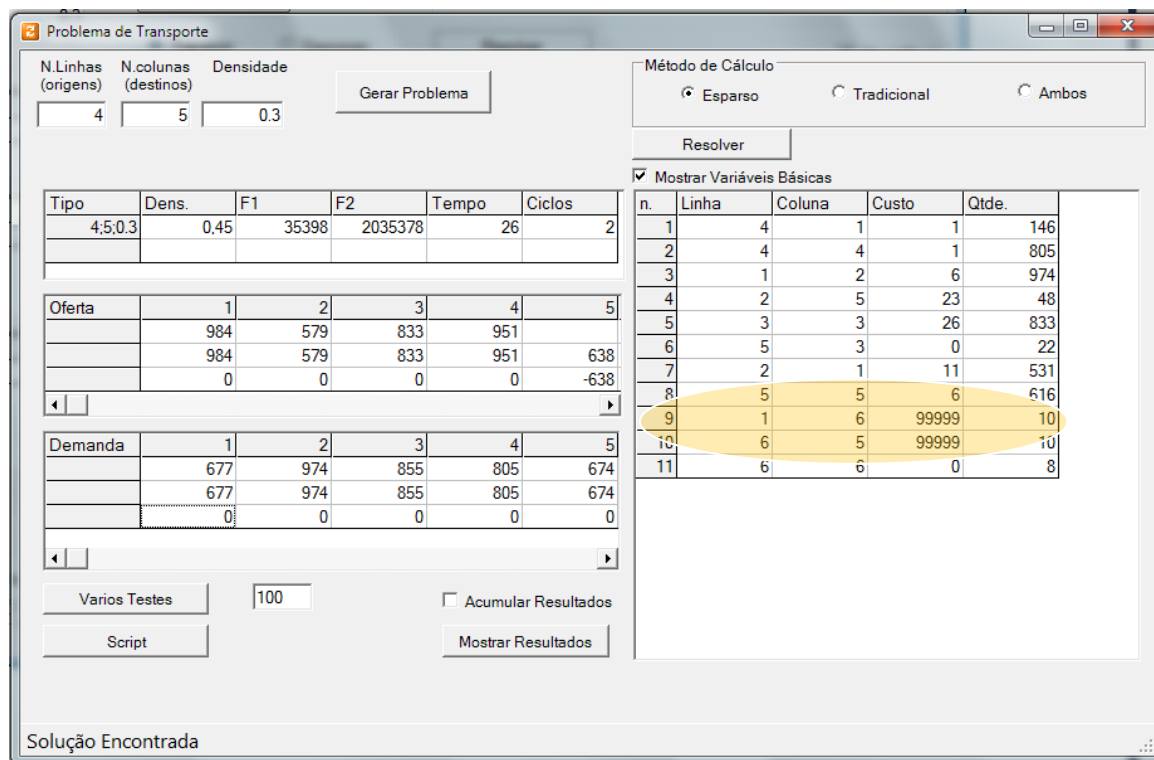


FIGURA 5.7 – OPÇÃO MOSTRAR VARIÁVEIS BÁSICAS ATIVADA – RESPOSTA OBTIDA PELO MÉTODO ESPARSO

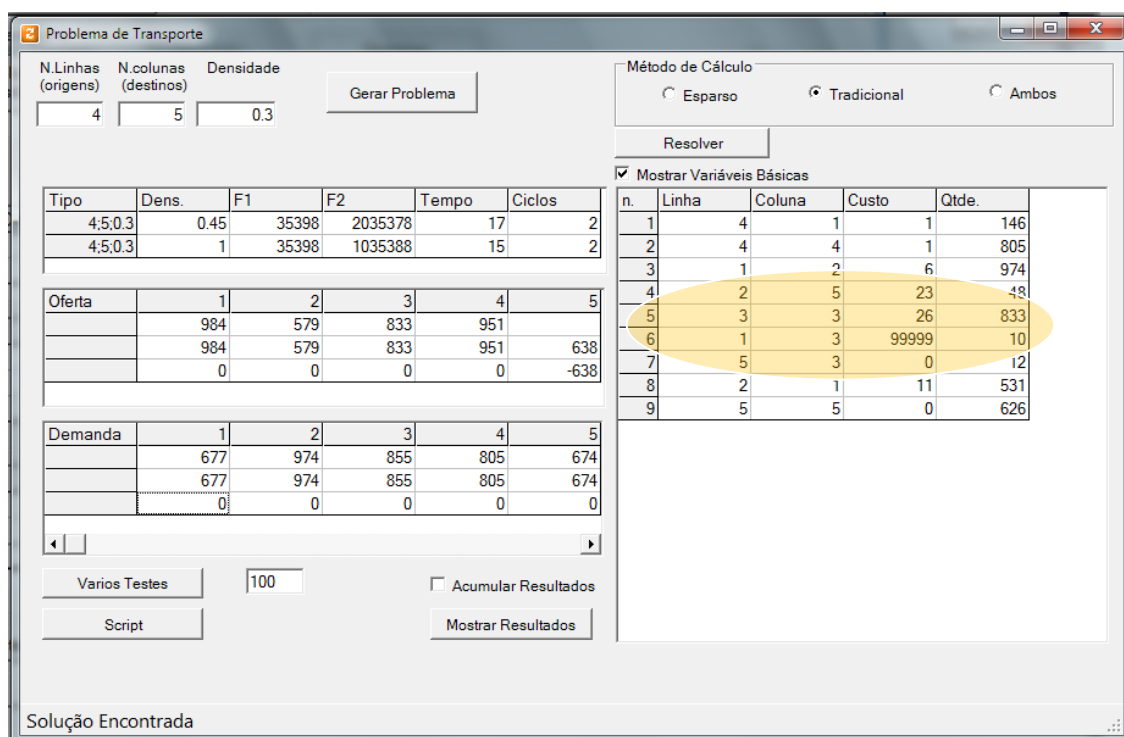


FIGURA 5.8 – EXEMPLO MOSTRANDO VARIÁVEIS BÁSICAS OBTIDAS PELO MÉTODO TRADICIONAL

As variáveis básicas podem ser observadas na área realçada, por exemplo, a variável $x_{33} = 833$ unidades e o custo associado igual a 26. Também pode ser observada a quantidade de oferta e demanda nos quadros. A oferta 638 que aparece no *grid* "Ofertas" na posição 5, representa a origem artificial utilizada.

Para melhor compreensão do resultado obtido, apresenta-se este exemplo em forma de diagrama na figura 5.9. Os quadros 5.8, 5.9 e 5.10 mostram as soluções que foram obtidas pelos dois métodos.

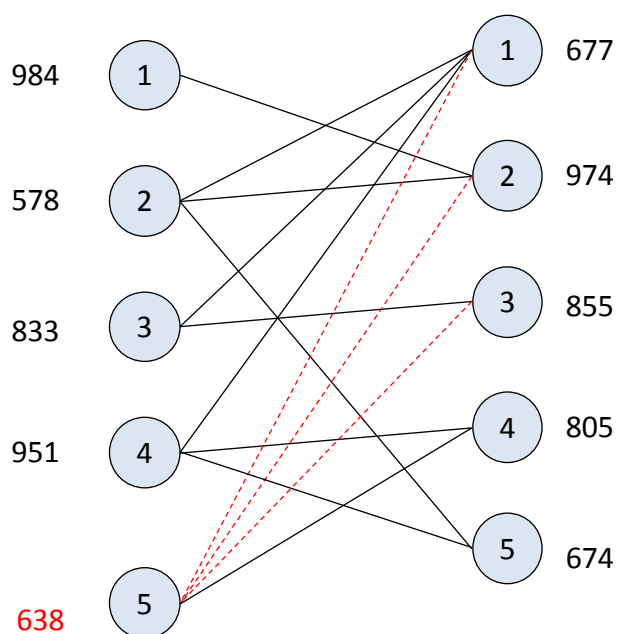


FIGURA 5.9 – DIAGRAMA DO PROBLEMA EXEMPLO

Fonte: a autora (2011)

Observa-se que aparentemente é possível atender todas as demandas usando os destinos, mas tal fato não ocorre.

No quadro 5.8, as células sombreadas representam locais onde a ligação não existe e a linha 5 tem todos os custos iguais a zero. Observa-se que 10 unidades, célula (1,3), estão sendo utilizadas em uma ligação impossível.

	1	2	3	4	5	Oferta
1		974	10			984
2	531				48	578
3			833			833
4	146			805		951
5			12		626	638
Demanda	677	974	855	805	674	

QUADRO 5.8 – SOLUÇÃO PELO MÉTODO TRADICIONAL

Fonte: a autora (2011)

A solução obtida através do método que utiliza a esparsidade é dada no quadro 5.9. Da mesma forma que a tabela do método normal, a região sombreada representa as ligações não existentes.

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1		974				10	984
2	531				48		578
3			833				833
4	146			805			951
5			22		616		638
6					10	0	10
Demanda	677	974	855	805	674	10	

QUADRO 5.9 – SOLUÇÃO PELO MÉTODO QUE UTILIZA A ESPARSIDADE

Fonte: a autora (2011)

Se na solução obtida pelo método tradicional fosse analisada uma entrada da variável (1,5), ter-se-ia o ciclo indicado no quadro 5.10. A quantidade para entrar na base é igual a 10 (método *Stepping-Stone*). Assim, o novo valor da função não se altera, pois:

$$-c_{13} \theta + c_{15} \theta - c_{55} \theta + c_{53} \theta = -M\theta + M\theta - 0\theta + 0\theta = 0,$$

	1	2	3	4	5	Oferta
1		974	$10 - \theta$		θ	984
2	531				48	578
3			833			833
4	146			805		951
5			$12 + \theta$		$626 - \theta$	638
Demanda	677	974	855	805	674	

QUADRO 5.10 – CICLO NO QUADRO ÓTIMO DA RESOLUÇÃO TRADICIONAL

Fonte: a autora (2011)

Uma opção de testes múltiplos, figura 5.10, foi inserida para possibilitar a análise de mais de um exemplo com os mesmos parâmetros (origens, destino e densidade). O botão “Vários Testes” é utilizado para este fim, onde a quantidade de testes pode ser informada ao lado do mesmo. Para visualizar os resultados obtidos, deve-se marcar a opção “Acumular Resultados”. Depois de processado, tem-se acesso a interface que mostra todas as respostas pressionando-se o botão “Mostrar Resultados”. A interface obtida está na figura 5.11.

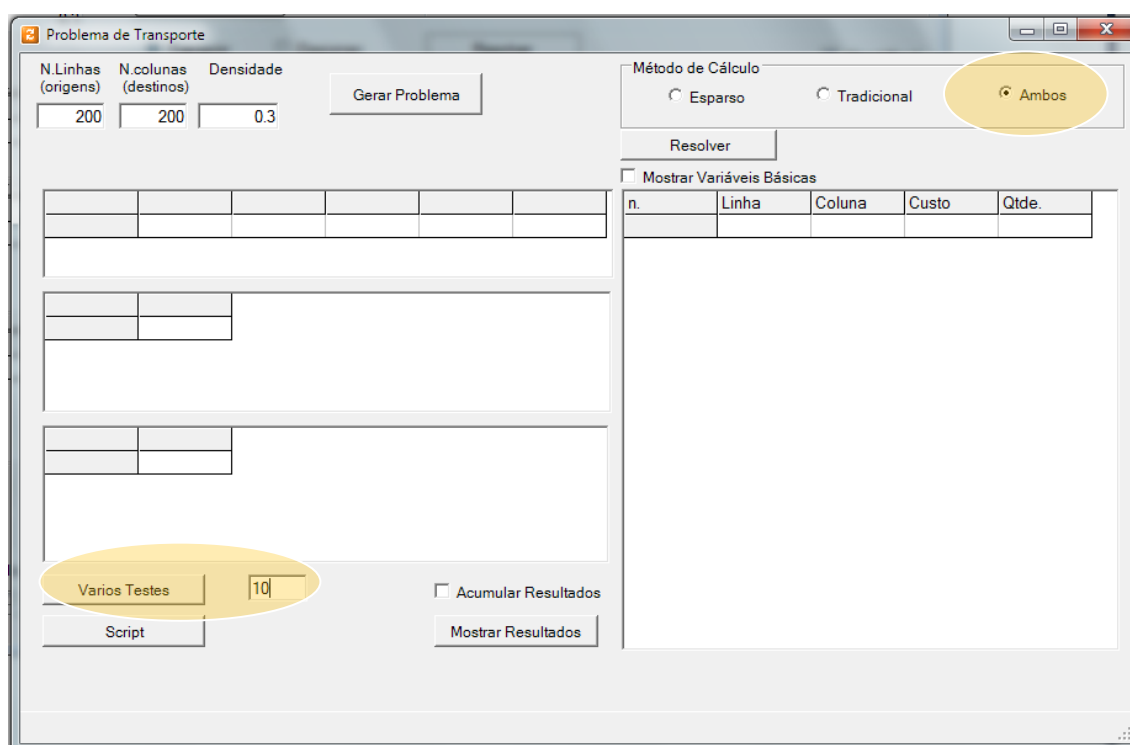


FIGURA 5.10 – BOTÃO VÁRIOS TESTES ATIVADOS

Carac. Problema	Esparsidade Real	F1 Esparso	F2 Esparso	Tempo Esparso	Ciclos Esparso	Denso	F1 Denso	F2 Denso	Tempo Denso	Ciclos Denso
200,200,0.3	0,3004	455633,7	455633,7	678	475	1	455633,7	455633,7	1183	472
200,200,0.3	0,3003	400086,3	400086,3	665	472	1	400086,3	400086,3	1171	472
200,200,0.3	0,304125	443128,7	443128,7	717	500	1	443128,7	443128,7	1205	489
200,200,0.3	0,30045	436361,4	436361,4	639	451	1	436361,4	436361,4	1171	477
200,200,0.3	0,29715	414217,6	414217,6	642	458	1	414217,6	414217,6	1098	445
200,200,0.3	0,300175	421762,6	421762,6	670	483	1	421762,6	421762,6	1169	481
200,200,0.3	0,300075	450895,8	450895,8	707	518	1	450895,8	450895,8	1175	480
200,200,0.3	0,30245	384278,4	384278,4	685	502	1	384278,4	384278,4	1224	502
200,200,0.3	0,2981	409366,3	409366,3	618	438	1	409366,3	409366,3	1069	429
200,200,0.3	0,3013	423260,7	423260,7	640	458	1	423260,7	423260,7	1255	517

FIGURA 5.11 – RESPOSTAS DOS TESTES MÚLTIPLOS – BOTÃO MOSTRAR RESULTADOS PRESSIONADO

Ao pressionar o botão “Calcular Média”, uma linha abaixo do último teste aparecerá, com as médias de cada coluna, como mostra a figura 5.12. Na primeira coluna aparecerá a relação $\frac{T_e}{T_n}$, onde T_e é o tempo médio gasto pelo método esparsos e T_n é o tempo médio do método tradicional. Neste exemplo a relação é de 0,5683447, ou seja, o método esparsos utilizou aproximadamente 57% do tempo demandado pelo método tradicional.

	Carac. Problema	Esparsidade Real	F1 Esparso	F2 Esparso	Tempo Esparso	Ciclos Esparso	Denso	F1 Denso	F2 Denso	Tempo Denso	Ciclos Denso
▶	200,200,0.3	0,3004	455633,7	455633,7	678	475	1	455633,7	455633,7	1183	472
	200,200,0.3	0,3003	400086,3	400086,3	665	472	1	400086,3	400086,3	1171	472
	200,200,0.3	0,304125	443128,7	443128,7	717	500	1	443128,7	443128,7	1205	489
	200,200,0.3	0,30045	436361,4	436361,4	639	451	1	436361,4	436361,4	1171	477
	200,200,0.3	0,29715	414217,6	414217,6	642	458	1	414217,6	414217,6	1098	445
	200,200,0.3	0,300175	421762,6	421762,6	670	483	1	421762,6	421762,6	1169	481
	200,200,0.3	0,300075	450895,8	450895,8	707	518	1	450895,8	450895,8	1175	480
	200,200,0.3	0,30245	384278,4	384278,4	685	502	1	384278,4	384278,4	1224	502
	200,200,0.3	0,2981	409366,3	409366,3	618	438	1	409366,3	409366,3	1069	429
	200,200,0.3	0,3013	423260,7	423260,7	640	458	1	423260,7	423260,7	1255	517
	0,5683447...	0,3004525			666,1	475,5	1			1172	476,4

FIGURA 5.12 – MÉDIAS OBTIDAS – BOTÃO CALCULAR MÉDIA ATIVADO

A função “Script” é utilizada para processamento múltiplo, isto é, um arquivo com uma sequência de testes é executado. Neste arquivo cada linha informa o número de origens, o número de destinos, a densidade e o número de testes. Um exemplo é mostrado na figura 5.13.

```

Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda
300,300,0.01,50
300,300,0.02,50
300,300,0.05,50
300,300,0.10,50
300,300,0.20,50
300,300,0.30,50
300,300,0.40,50
300,300,0.50,50
300,300,0.60,50
300,300,0.70,50
300,300,0.80,50
300,300,0.90,50
300,300,1.00,50
400,400,0.01,50
400,400,0.02,50
400,400,0.05,50
400,400,0.10,50
400,400,0.20,50
400,400,0.30,50
400,400,0.40,50
400,400,0.50,50
400,400,0.60,50
400,400,0.70,50
400,400,0.80,50
400,400,0.90,50
400,400,1.00,50
500,500,0.01,50
500,500,0.02,50
500,500,0.05,50
500,500,0.10,50
500,500,0.20,50
500,500,0.30,50
500,500,0.40,50
500,500,0.50,50
500,500,0.60,50
500,500,0.70,50
500,500,0.80,50
500,500,0.90,50
500,500,1.00,50

```

FIGURA 5.13 – EXEMPLO DE SCRIPT – BOTÃO SCRIPT ATIVADO

Os resultados correspondentes são então gravados em um arquivo a ser especificado. Este arquivo é utilizado para fazer as análises das respostas. A linha marcada na figura 5.13, indica que serão efetuados 50 exemplos de problemas com 300 origens e 300 destinos com densidade 0,01.

6 RESULTADOS

Neste capítulo são avaliados alguns resultados obtidos com a implementação da metodologia proposta. Como já mencionado anteriormente, foi desenvolvido um aplicativo em Visual Basic.Net. Os testes foram processados em um computador com processador Intel I5 de 3.2 GHz com 4 Gb de Memória RAM. Todos os tempos obtidos consideram somente o processamento para a resolução do problema, não levando em conta carregamento de dados e apresentação de resultados.

6.1 PADRÃO DE RESULTADOS ANALISADOS

Todos os tempos mostrados neste capítulo consideram valores médios dos resultados de vários testes aleatórios, tanto para o caso denso quanto para o caso esparso. A quantidade destes testes pode variar dependendo da finalidade da análise.

A tabela 6.1 mostra os resultados, considerando os dois métodos, de 25 exemplos de problemas gerados com 100 origens e 300 destinos,

No método esparso, a densidade teórica é uma expectativa de densidade. Quando a geração aleatória do modelo é executada, um valor um pouco diferente é encontrado. Na tabela 6.1, este valor encontra-se na coluna “Densidade Teórica”.

O valor mínimo de transporte aparece em duas colunas da tabela, nomeadas de F1 e F2. Estes dois valores são gerados com o intuito de verificar se o problema em análise é ou não factível. O valor em F1 é obtido multiplicando-se todas as quantidades ótimas pelos valores correspondentes, desde que exista a conexão entre a origem e o destino. Caso a conexão não exista, o produto “quantidade x custo” não entra no somatório. No valor de F2 todas as variáveis são consideradas. Assim, se uma quantidade utiliza uma conexão inexistente, este valor de quantidade será multiplicado por M (no programa o valor utilizado é 99999). Concluindo, se o modelo criado admitir solução factível ótima os valores de F1 e F2 serão iguais, caso contrário, F2 será maior que F1.

Em seguida é mostrado o tempo utilizado no processamento, em milissegundos.

O número de iterações (ciclos) que foram necessários até a obtenção do ótimo do problema aparece na próxima coluna.

As respostas para o método utilizado para resolver o problema denso encontram-se na mesma linha e as informações são as mesmas da metodologia esparsa. Na coluna densidade, o número 1 indica esta característica.

Na última linha da tabela 6.1 têm-se os valores médios considerados.

TABELA 6.1 – EXEMPLO DE RESPOSTA PARA RETIRADA DAS MÉDIAS

Número de Linhas	Número de Colunas	Densidade Teórica	Densidade Real	Caso Esperso				Caso Denso				
				F1	F2	Tempo (ms)	Iterações	Densidade	F1	F2	Tempo (ms)	Iterações
100	300	0,3	0,30233	96678	96678	24	8	1	96678	96678	33	8
100	300	0,3	0,29913	93509	93509	25	17	1	93509	93509	48	17
100	300	0,3	0,30357	100820	100820	14	9	1	100820	100820	35	9
100	300	0,3	0,29953	99087	99087	17	12	1	99087	99087	40	12
100	300	0,3	0,29813	93958	93958	9	4	1	93958	93958	24	4
100	300	0,3	0,30453	99892	99892	21	15	1	99892	99892	45	15
100	300	0,3	0,29620	97112	97112	21	16	1	97112	97112	45	16
100	300	0,3	0,29880	100753	100753	25	20	1	100753	100753	52	20
100	300	0,3	0,29883	97159	97159	11	6	1	97159	97159	29	6
100	300	0,3	0,29777	105299	105299	28	23	1	105299	105299	57	23
100	300	0,3	0,30330	94648	94648	22	14	1	94648	94648	41	14
100	300	0,3	0,29607	102573	102573	18	13	1	102573	102573	42	13
100	300	0,3	0,29917	102359	102359	14	9	1	102359	102359	33	9
100	300	0,3	0,30313	94434	94434	29	21	1	94434	94434	54	21
100	300	0,3	0,29873	106177	106177	22	17	1	106177	106177	48	17
100	300	0,3	0,29803	100005	100005	20	15	1	100005	100005	43	15
100	300	0,3	0,30313	106794	106794	24	16	1	106794	106794	45	16
100	300	0,3	0,30140	100781	100781	23	15	1	100781	100781	45	15
100	300	0,3	0,30437	98305	98305	24	19	1	98305	98305	50	19
100	300	0,3	0,30300	102535	102535	36	28	1	102535	102535	65	28
100	300	0,3	0,30280	94337	94337	24	19	1	94337	94337	52	19
100	300	0,3	0,30037	101355	101355	16	11	1	101355	101355	36	11
100	300	0,3	0,29930	99163	99163	24	19	1	99163	99163	50	19
100	300	0,3	0,29867	93854	93854	21	16	1	93854	93854	47	16
100	300	0,3	0,29727	98574	98574	20	15	1	98574	98574	43	15
Média			0,30030			21,28	15,1	1			44,1	15,1

Fonte: a autora (2011)

6.2 FORMATO COM MAIOR TEMPO DE RESOLUÇÃO

O primeiro item a ser considerado é o formato (relação entre linhas e colunas) ideal para ser utilizado nas análises.

Tomando como base problemas onde $m.n = 40.000$ (100 origens e 400 destinos, por exemplo) são resolvidos, pelo processo tradicional de transporte, 200 problemas de cada formato. Na tabela 6.2, cada linha apresenta a média obtida pela resolução destes 200 problemas.

TABELA 6.2 – COMPARATIVO DE TEMPO E CICLOS COM PRODUTO $m.n = 40.000$ CASO DENSO

Número	Número Origens	Número Destinos	tempo (ms)	Ciclos	Tempo por ciclo (ms)
1	350	115	61,84	15,28	4,05
2	325	124	69,16	19,24	3,59
3	300	134	97,4	32,48	3,00
4	275	146	131,92	49,48	2,67
5	250	160	197,52	79,96	2,47
6	225	178	373,36	164,48	2,27
7	200	200	1.019,08	475,56	2,14
8	178	225	385,88	169,96	2,27
9	160	250	207,28	85,04	2,44
10	146	275	135,52	49,52	2,74
11	134	300	88,76	27,72	3,20
12	124	325	76,92	21,8	3,53
13	115	350	68,32	17,8	3,84

Fonte: a autora (2011)

No gráfico 6.1, o número que aparece no eixo das abscissas é o que identifica a linha na tabela 6.2, ou seja, o formato dos problemas gerados. Observa-se neste gráfico o acentuado aumento do tempo de resolução para problemas quadrados.

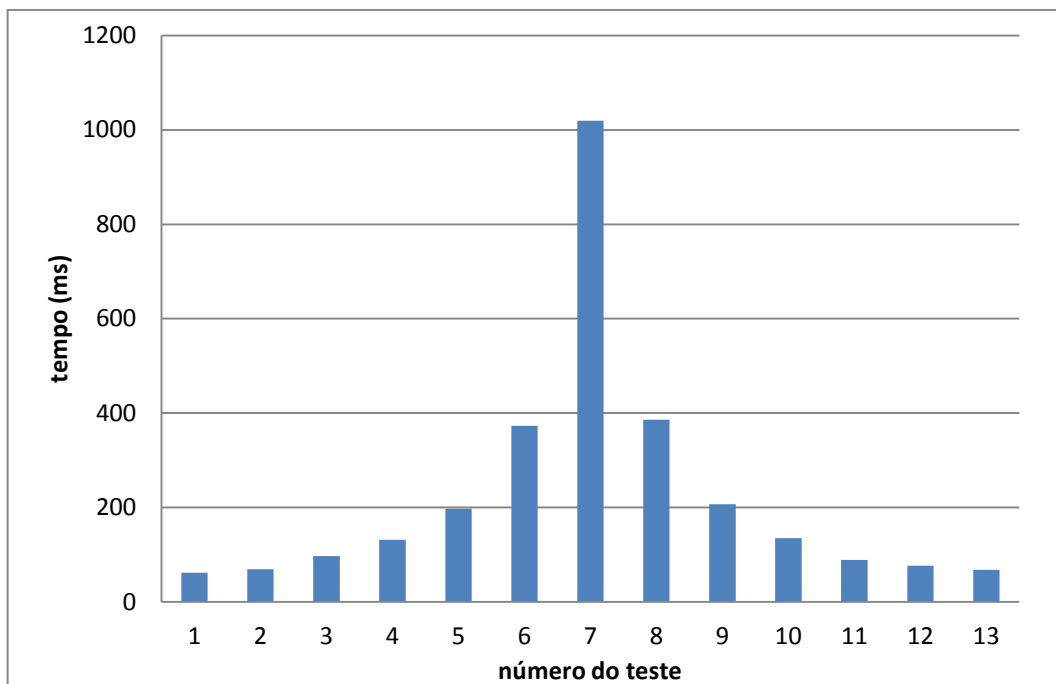


GRÁFICO 6.1 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X TEMPO DE RESOLUÇÃO (MS) – CASO DENSO

O comportamento do número de ciclos necessários para a resolução do problema tem características semelhantes, conforme pode ser observado no gráfico 6.2.

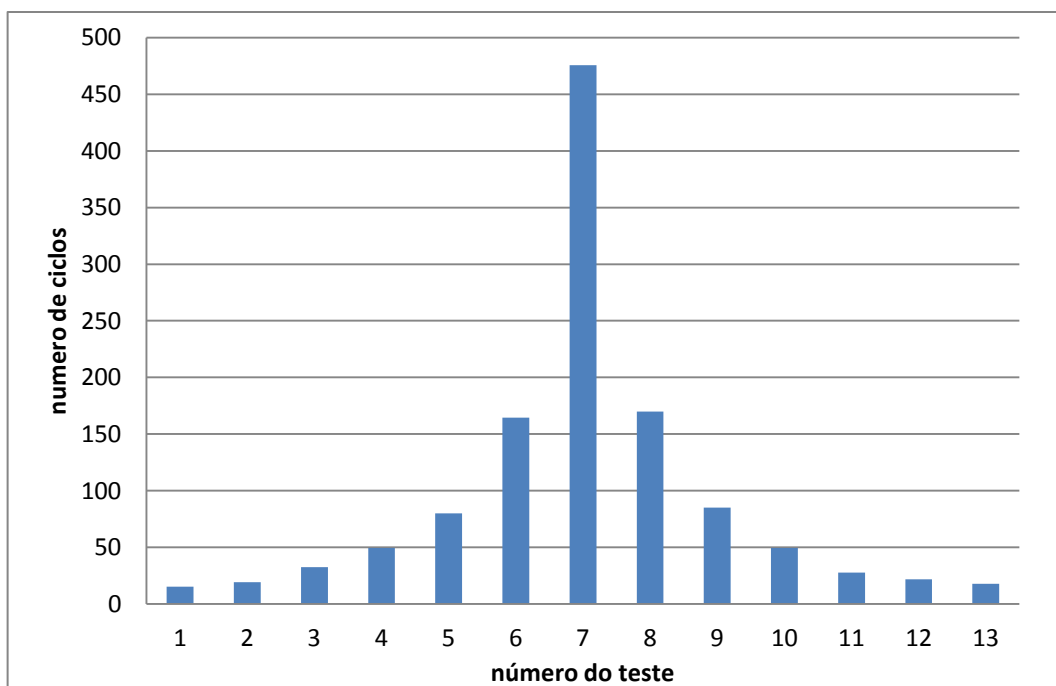


GRÁFICO 6.2 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X NÚMERO DE CICLOS – CASO DENSO

Nota-se que para problemas de mesmo tamanho (em relação ao número de variáveis do modelo de Programação Linear) o formato 7 é o que necessita de mais tempo. Este aumento é grande, em relação aos demais problemas.

Cada ciclo seria equivalente a um pivoteamento no método Simplex, um menor número de pivoteamentos implicaria em um menor tempo para resolução.

Para se analisar o comportamento do processo, pode-se observar o tempo de processamento por ciclo. No gráfico 6.3, nota-se que este tempo é menor para problemas com forma quadrada ou próximos dela, porém, mesmo com este menor tempo por ciclo, os problemas retangulares apresentam menor tempo total de processamento.

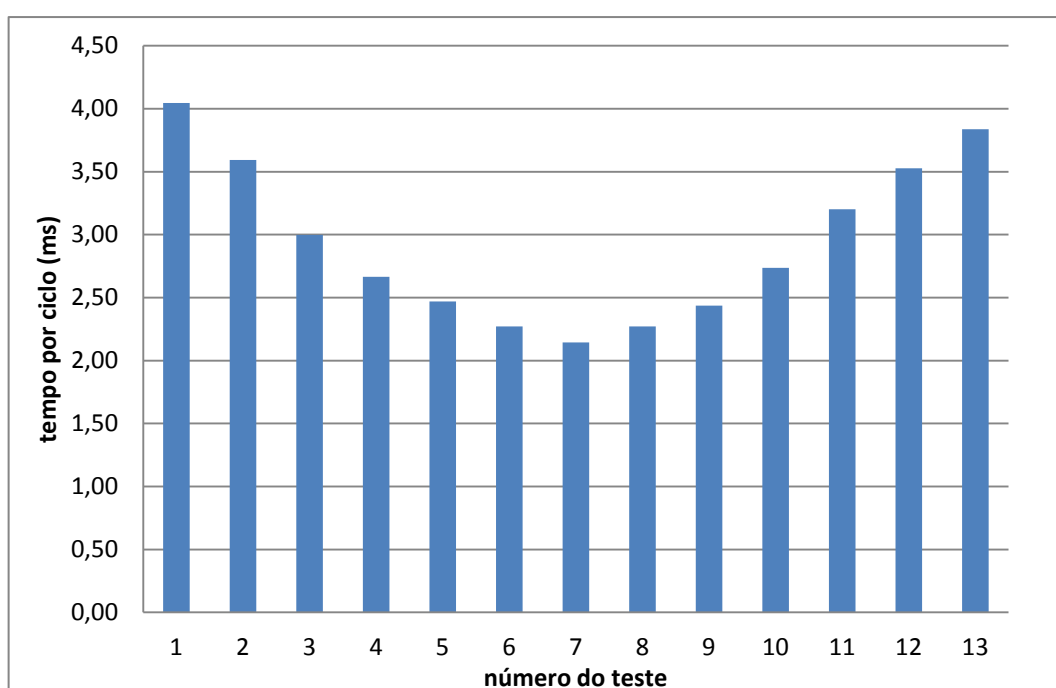


GRÁFICO 6.3 – TEMPO MÉDIO POR CICLO NO CASO DENSO (ms)

Observa-se que a resolução de problemas próximos à forma quadrada apresenta tempo de resolução muito mais elevada comparada a problemas retangulares ($m \neq n$). Além disto, existe uma simetria no tempo para resolução de cada exemplo retangular em relação a problemas quadrados. Isto pode ser observado na tabela 6.3 que é composta por duas linhas retiradas da tabela 6.1. As linhas consideradas são a 4 e a 10.

TABELA 6.3 – SIMETRIA NO TEMPO

num	Número Origens	Número Destinos	tempo (ms)	Ciclos	Tempo por ciclo (ms)
4	275	146	131,92	49,48	2,67
10	146	275	135,52	49,52	2,74

Fonte: a autora (2011)

São problemas que alternam valores para o número de linhas e colunas e mostram tempos de processamento e número de ciclos semelhantes.

Também é feita uma simulação usando esparsidade 0,3, com os mesmos 200 exemplos de cada formato. Os resultados estão representados na tabela 6.4.

TABELA 6.4 – SIMULAÇÃO COM 200 EXEMPLOS CASO ESPARSO – DENSIDADE 0,3

num	Número Origens	Número Destinos	tempo (ms)	Ciclos	Tempo por ciclo
1	350	115	29,64	15,44	1,92
2	325	124	32,72	19,32	1,69
3	300	134	49,2	33,4	1,47
4	275	146	67,52	50,68	1,33
5	250	160	102,6	83,36	1,23
6	225	178	203,44	176,36	1,15
7	200	200	532,04	469,12	1,13
8	178	225	196,76	169,96	1,16
9	160	250	104,28	85,04	1,23
10	146	275	67,04	49,52	1,35
11	134	300	41,92	27,72	1,51
12	124	325	36,32	21,8	1,67
13	115	350	31,88	17,8	1,79

Fonte: a autora (2011)

Considerando o tempo de processamento, o gráfico 6.4 representa esta situação.

Da mesma maneira que nos exemplos densos, observa-se que problemas na forma quadrada têm tempo de resolução maior que problemas retangulares, o mesmo ocorrendo em relação ao número de ciclos necessários para a resolução.

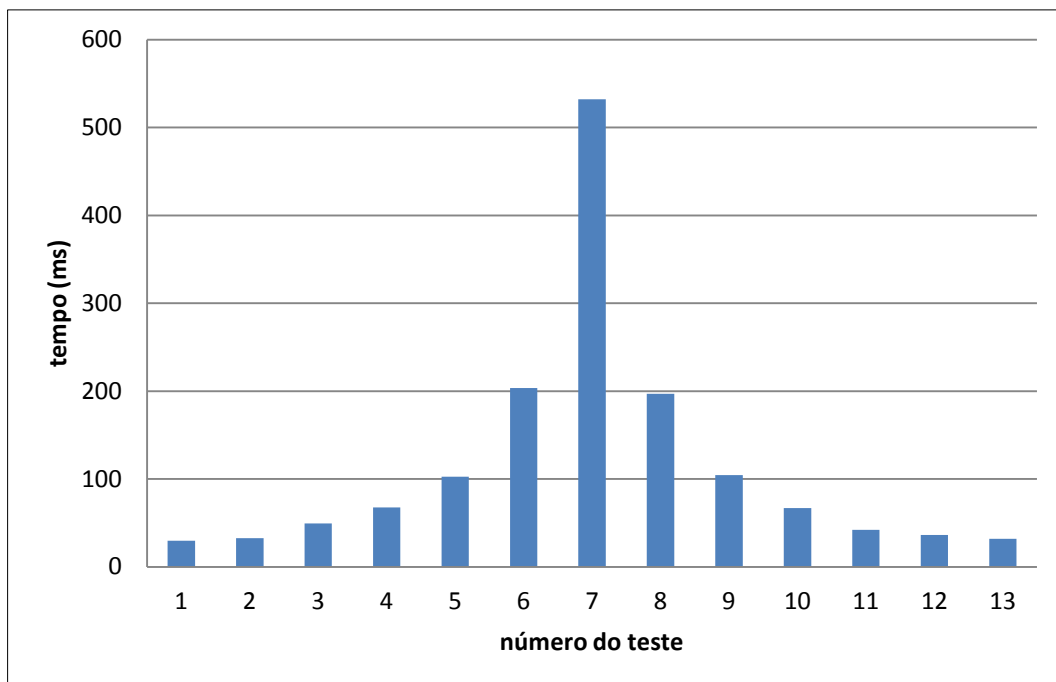


GRÁFICO 6.4– PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X TEMPO DE RESOLUÇÃO (ms) – CASO ESPARSO COM DENSIDADE 0,3

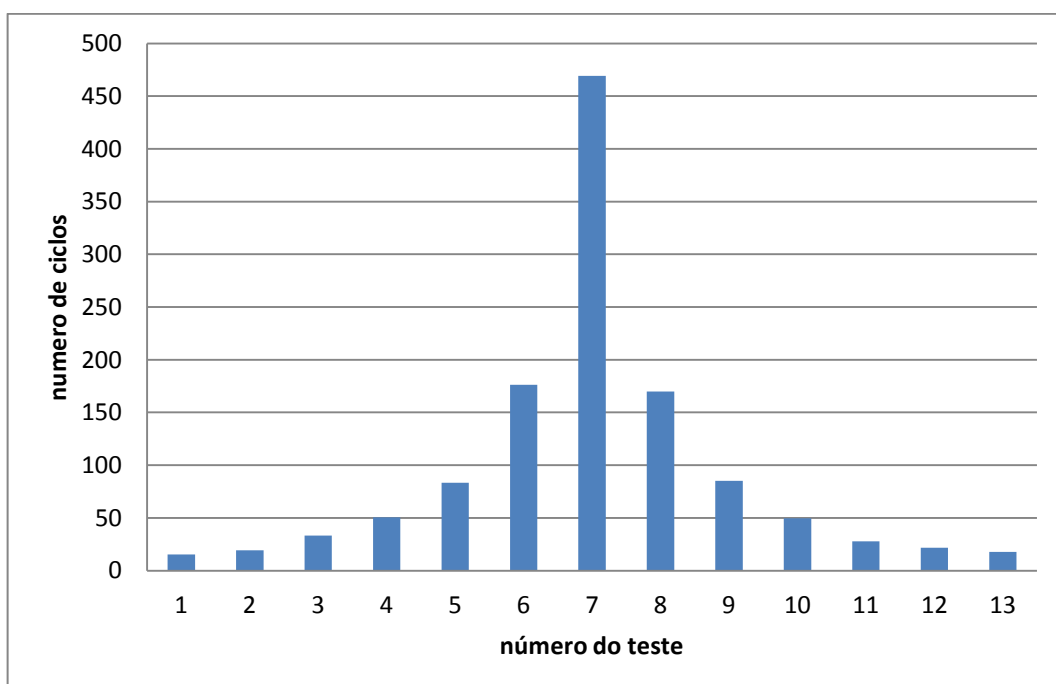


GRÁFICO 6.5 – PROBLEMAS COM $m.n = 40.000$ X NÚMERO DE CICLOS – CASO ESPARSO COM DENSIDADE 0,3

Uma primeira comparação pode ser feita com relação à melhoria obtida pela utilização do método esparsos. A tabela 6.5 mostra o tempo por ciclo nos dois métodos e os dois comportamentos estão representados no gráfico 6.6.

TABELA 6.5 – TEMPO POR CICLO

Num	Número Origens	Número Destinos	Tempo por ciclo (Esperso) (ms)	Tempo por ciclo (Denso) (ms)
1	350	115	1,92	4,05
2	325	124	1,69	3,59
3	300	134	1,47	3,00
4	275	146	1,33	2,67
5	250	160	1,23	2,47
6	225	178	1,15	2,27
7	200	200	1,13	2,14
8	178	225	1,16	2,27
9	160	250	1,23	2,44
10	146	275	1,35	2,74
11	134	300	1,51	3,20
12	124	325	1,67	3,53
13	115	350	1,79	3,84

Fonte: a autora (2011)

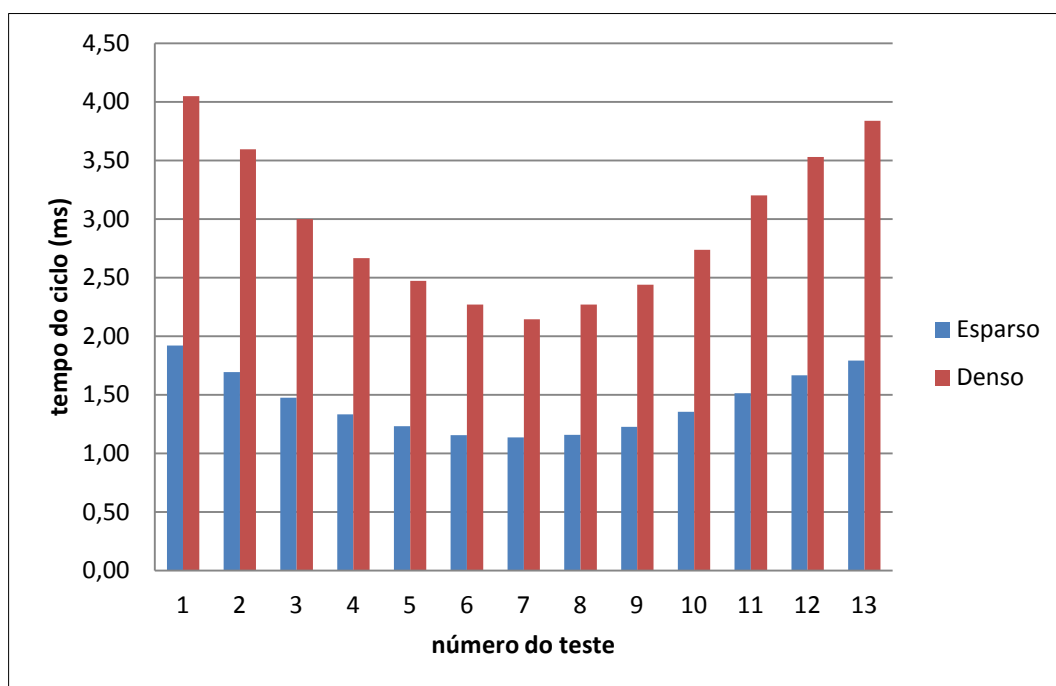


GRÁFICO 6.6 – COMPORTAMENTO DOS DOIS MÉTODOS

Observa-se uma clara vantagem do método esperso em relação ao denso, considerando-se principalmente que o número de iterações não sofre grandes alterações.

A tabela 6.6 apresenta a comparação entre o número de ciclos utilizados nos dois métodos.

TABELA 6.6 – COMPARAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE CICLOS

número	Número Origens	Número Destinos	Ciclos (Esparsos)	Ciclos (Denso)
1	350	115	15,44	15,28
2	325	124	19,32	19,24
3	300	134	33,4	32,48
4	275	146	50,68	49,48
5	250	160	83,36	79,96
6	225	178	176,36	164,48
7	200	200	469,12	475,56
8	178	225	169,96	169,96
9	160	250	85,04	85,04
10	146	275	49,52	49,52
11	134	300	27,72	27,72
12	124	325	21,8	21,8
13	115	350	17,8	17,8

Fonte: a autora (2011)

Observa-se a semelhança de comportamento nos dois casos.

Devido ao fato dos casos de formato aproximadamente quadrado serem mais demorados na resolução, a maioria de problemas analisados terá este formato.

6.3 ANÁLISE DE TEMPO DE RESOLUÇÃO ENTRE OS DOIS MÉTODOS

A próxima análise a ser feita é avaliar quanto o método esparsos é melhor em relação ao método tradicional para diferentes graus de esparsidade. Cada linha utilizada na tabela 6.7 representa a média de 100 testes realizados.

O primeiro teste é de um problema 200x200 com densidades diferentes. O objetivo desta análise é saber quanto o novo método economiza de tempo computacional para resolver diferentes problemas mantendo-se o mesmo número de origens e destinos e variando-se a densidade. Os resultados estão na tabela 6.7.

TABELA 6.7 – DADOS COMPARATIVOS DE EXEMPLO 200X200 COM DIFERENTES DENSIDADES

Densidade Teórica	Densidade Média	Método Esparso		Método Denso		
		Tempo (ms)	Número médio de Ciclos	Tempo (ms)	Número médio de Ciclos	Tempo Esparso / Tempo Denso
0,05	0,04998	289,95	362,0	1072,4	500,85	0,270375
0,1	0,10004	381,15	439,0	1033,9	473,55	0,368653
0,2	0,20057	475,00	470,4	1022,2	469,2	0,464684
0,3	0,30071	513,55	447,9	985,95	451,05	0,520868
0,4	0,40037	587,05	456,3	972,45	445,65	0,603681
0,5	0,50046	619,35	434,6	945,05	431,8	0,655362
0,6	0,60095	664,55	428,1	925,8	423,7	0,717812
0,7	0,69976	752,15	445,1	983,4	450,8	0,764846
0,8	0,80010	805,65	440,1	958,3	438,2	0,840708
0,9	0,90032	901,20	457,7	977	447,95	0,922416
1,0	1,00000	1023,00	459,7	1022,55	468	1,00044

Fonte: a autora (2011)

O gráfico 6.7 mostra esta comparação. Problemas com densidade 0,05 são processados em 27% do tempo gasto para o processamento tradicional.

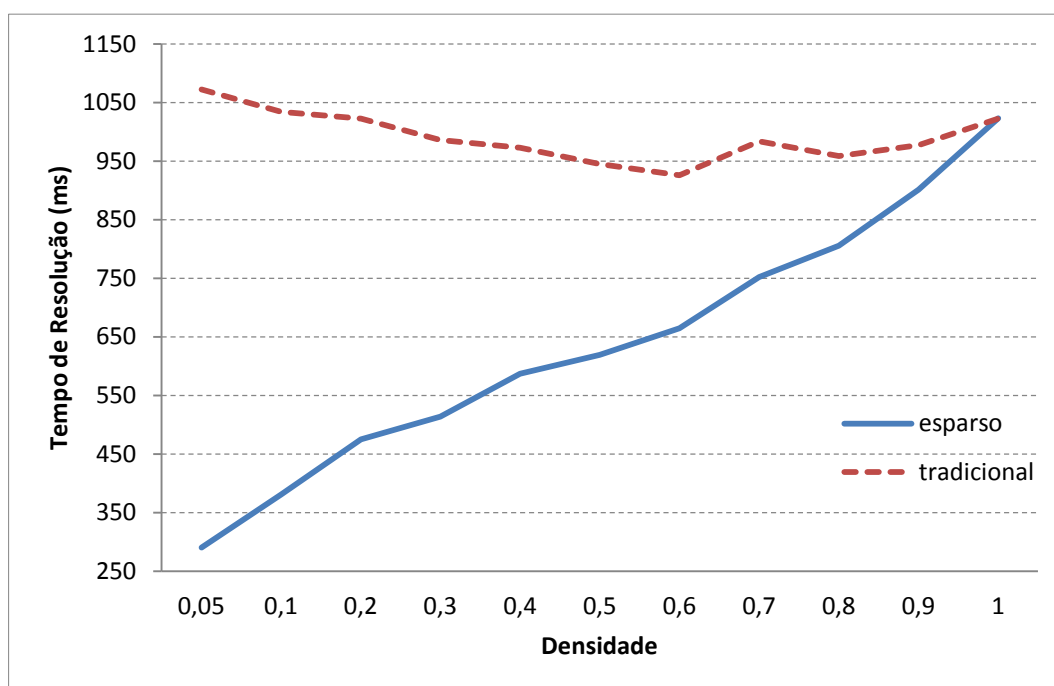


GRÁFICO 6.7 – COMPARATIVO TEMPO DE EXECUÇÃO (ms) X DENSIDADE – CASO 200X200

O gráfico 6.8 mostra o comportamento médio do número de ciclos utilizados para a resolução dos problemas. Para problemas com densidade 0,2 ou mais a quantidade é aproximadamente equivalente. Já em densidades menores, o método esparso utiliza um menor número de iterações.

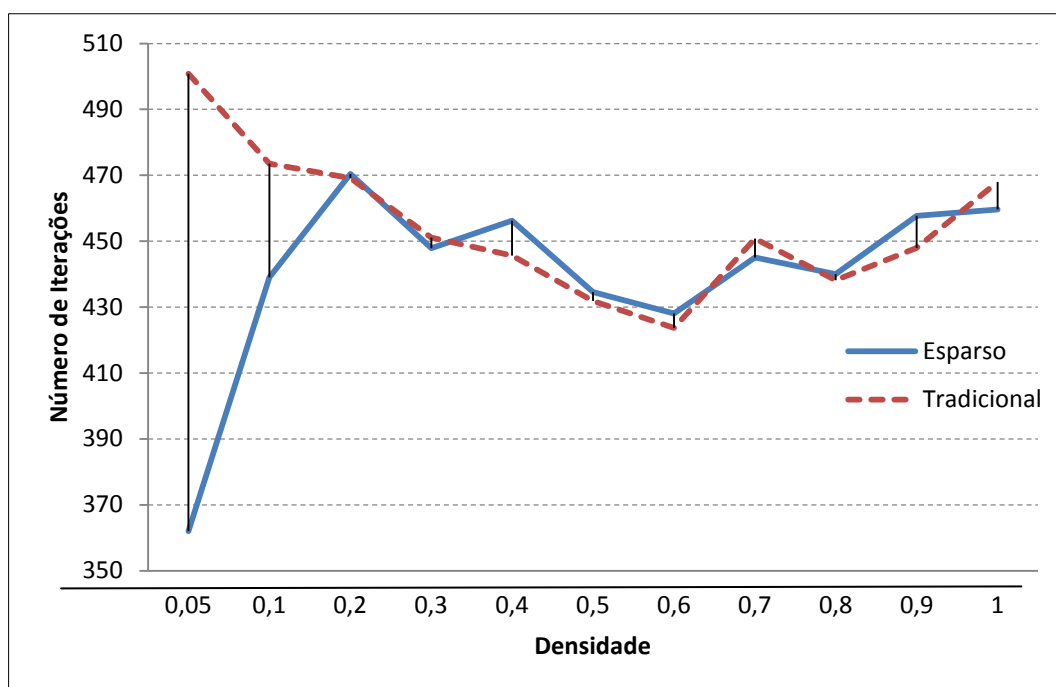


GRÁFICO 6.8 – COMPARATIVO NÚMERO DE CICLOS DE EXECUÇÃO X DENSIDADE – CASO 200X200

O gráfico 6.9 representa a economia que o método esparso apresenta sobre o método tradicional e pode-se observar que quanto mais esparso o problema mais o novo método apresenta vantagens sem, no entanto, apresentar tempo de resolução pior para problemas totalmente densos.

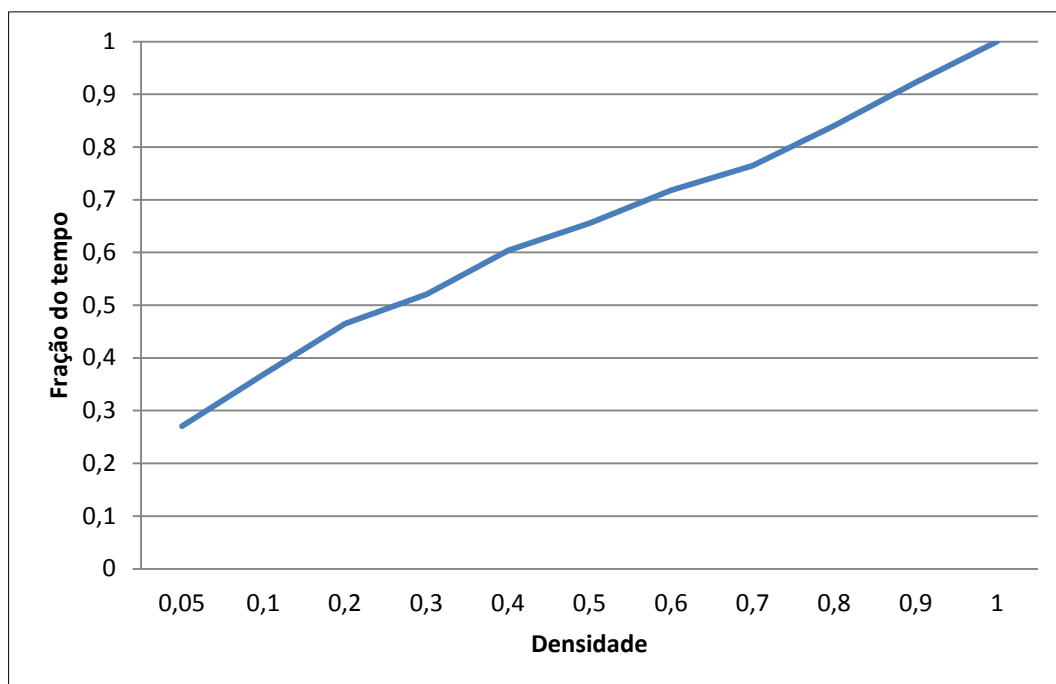


GRÁFICO 6.9 – FRAÇÃO DE TEMPO (MÉTODOS ESPARSO/MÉTODOS TRADICIONAIS) VARIANDO DENSIDADE

Observa-se que o método proposto utiliza até 27% do tempo gasto pelo método tradicional quando a densidade é de 0,05; com densidade de 0,3 o método tem aproximadamente a metade do tempo.

Para uma melhor análise do comportamento da metodologia faz-se simulações variando-se tanto o tamanho do problema, número de linhas e colunas, quanto a densidade. Os resultados obtidos encontram-se na tabela 6.8 e no gráfico 6.10.

TABELA 6.8 – DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE

Densidade	50x50	200x200	300x300	400x400	500x500	Média
1	0,972	1,000	0,955	1,000	0,938	0,973
0,9	0,949	0,922	0,968	0,933	0,861	0,927
0,8	0,974	0,841	0,853	0,878	0,794	0,868
0,7	0,941	0,765	0,803	0,747	0,822	0,816
0,6	0,865	0,718	0,713	0,723	0,694	0,743
0,5	0,882	0,655	0,673	0,625	0,697	0,707
0,4	0,824	0,604	0,598	0,605	0,584	0,643
0,3	0,730	0,521	0,556	0,519	0,533	0,572
0,2	0,714	0,465	0,475	0,467	0,445	0,513
0,1	0,657	0,369	0,402	0,413	0,358	0,440
0,05	0,542	0,270	0,338	0,310	0,310	0,354

Fonte: a autora (2011)

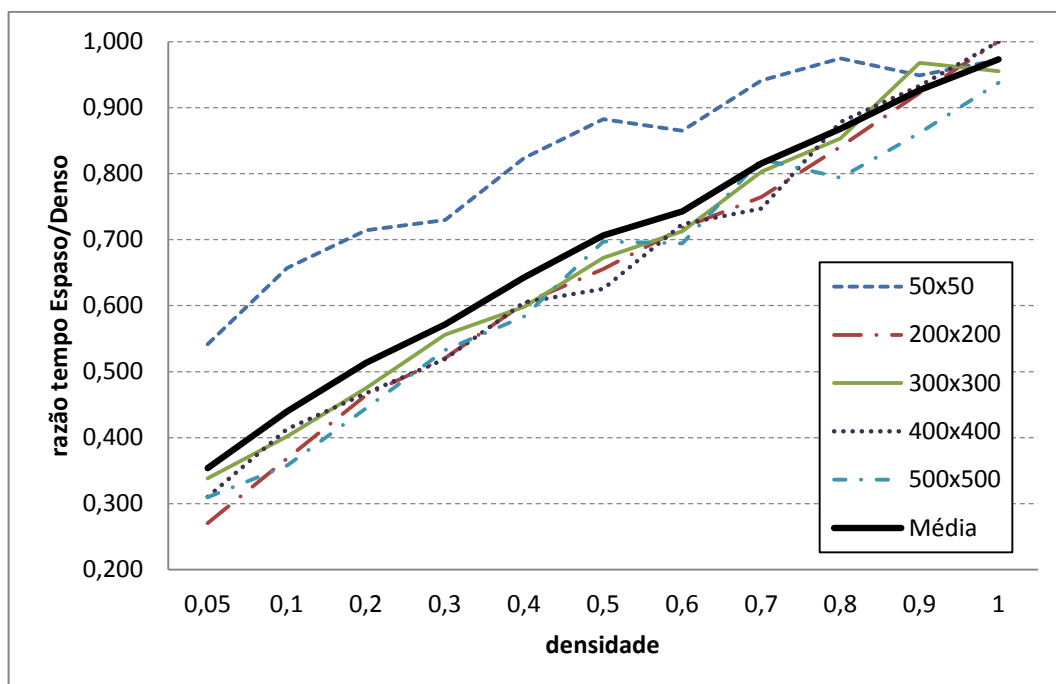


GRÁFICO 6.10 – DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE

O comportamento obtido é o mesmo observado no gráfico 6.9.

Com o objetivo de analisar o comportamento do tempo de resolução quando se varia o tamanho do problema e se mantém a esparsidade, é feita uma simulação com densidade 0,3. O resultado é apresentado na tabela 6.9 e no gráfico 6.11.

TABELA 6.9 – DADOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E MANTENDO DENSIDADE

Número	Densidade = 0,3		Esparsos		Denso	
	Origens	Destinos	Tempo (ms)	Ciclos	Tempo (ms)	Ciclos
1	100	100	145,67	196,33	160,00	202,33
2	200	200	647,67	459,00	1.221,67	468,00
3	300	300	2.338,67	782,67	4.515,00	794,67
4	400	400	6.327,00	1.180,67	12.285,00	1.207,00
5	500	500	13.231,00	1.569,00	24.887,00	1.529,00
6	600	600	23.905,00	2.086,00	44.043,33	1.977,33
7	700	700	34.852,67	2.241,00	70.248,67	2.327,33
8	800	800	50.218,67	2.505,67	98.289,33	2.537,33
9	900	900	72.614,33	2.927,33	140.236,33	2.892,33
10	1000	1000	90.027,33	3.130,00	168.822,33	3.107,80

Fonte: a autora (2011)

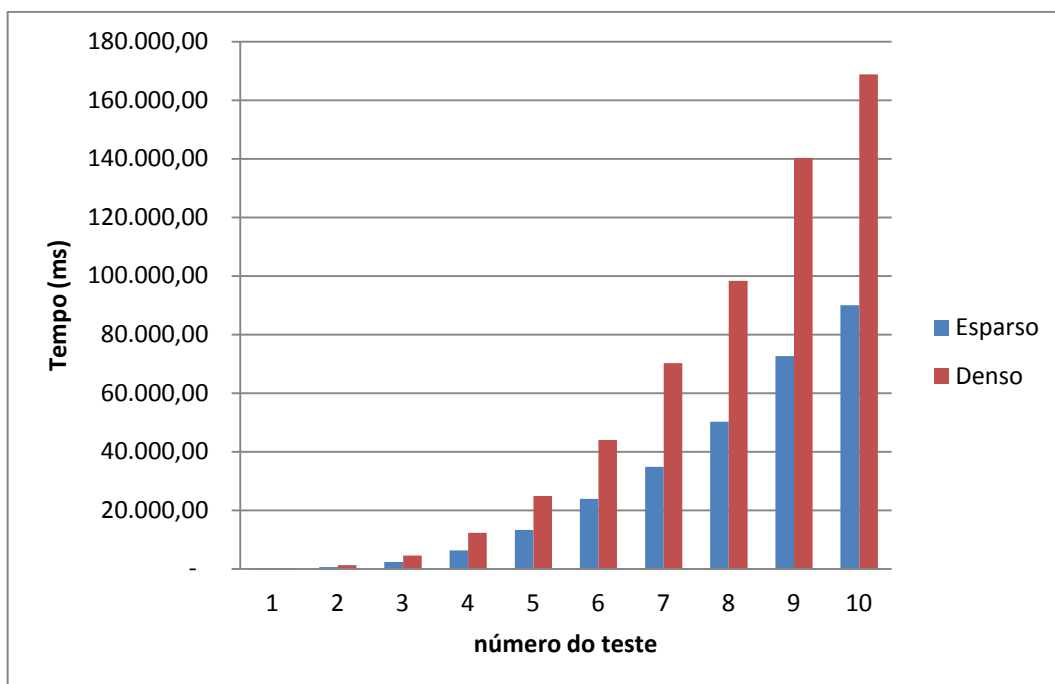


GRÁFICO 6.11 – TEMPOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE

No gráfico 6.12, observa-se que o número de ciclos é praticamente o mesmo para os dois métodos.

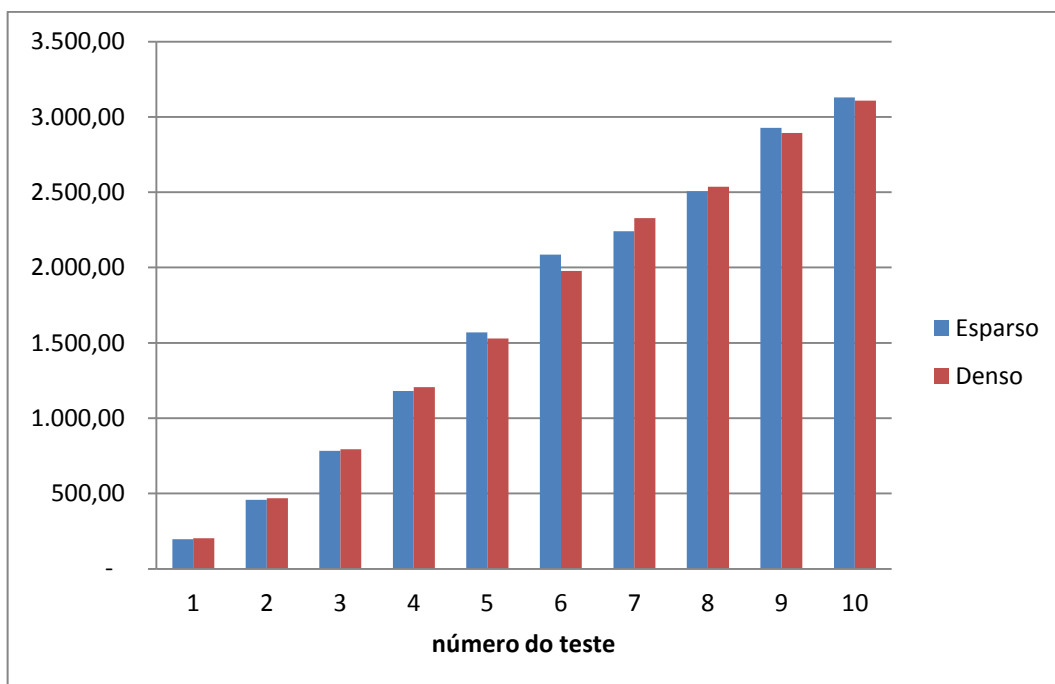


GRÁFICO 6.12 – CICLOS COMPARATIVOS VARIANDO-SE O TAMANHO DO PROBLEMA E A DENSIDADE

Para confirmação do comportamento, o mesmo teste é feito para problemas retangulares, onde o número de origens é metade do número de destinos. São considerados problemas com densidade 0,05. Os resultados obtidos estão na tabela 6.10 e nos gráficos 6.13 (tempo de processamento) e 6.14 (número de ciclos).

TABELA 6.10 – DADOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05

Densidade = 0,05		Esparso		Denso	
Origens	Destinos	Tempo (ms)	Ciclos	Tempo (ms)	Ciclos
50	100	23,5	21,6	33,5	25,2
100	200	53,7	46,5	98,2	45,6
200	400	165	80,2	465,2	80,2
400	800	1118,4	145,3	3105	145,4
800	1600	6294,8	206,2	17245,7	206,2

Fonte: a autora (2011)

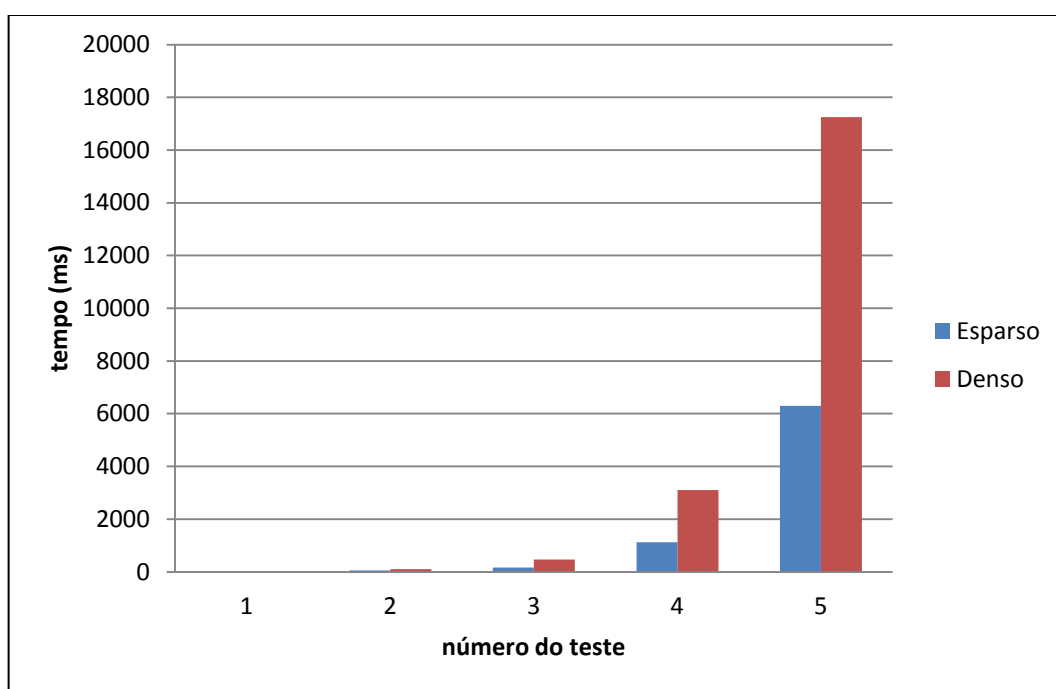


GRÁFICO 6.13 – TEMPOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05

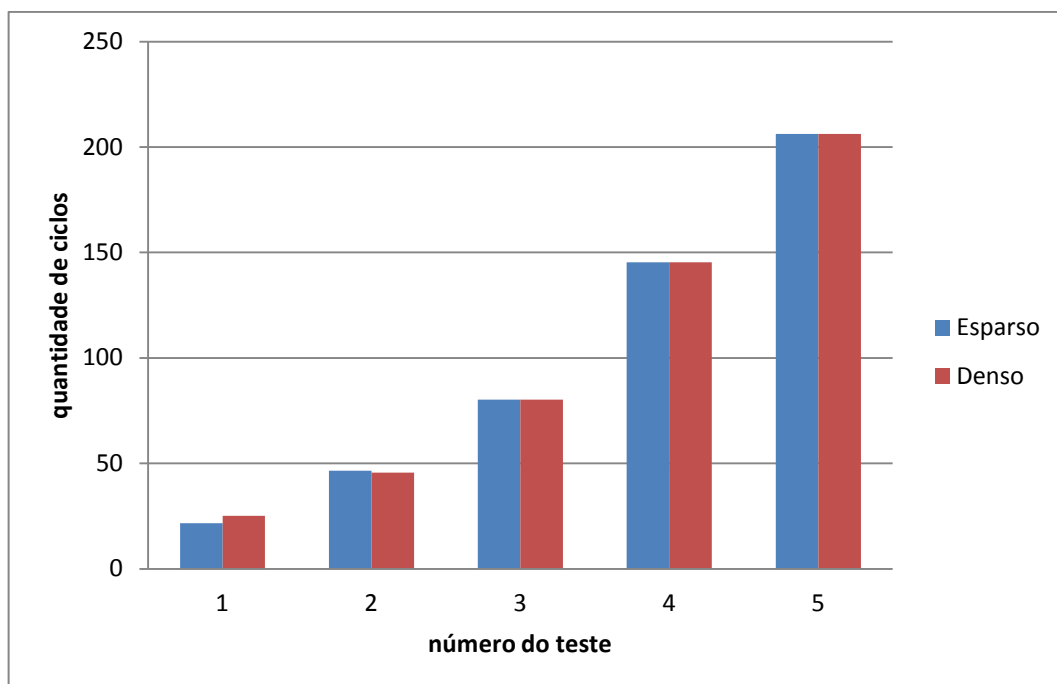


GRÁFICO 6.14 – CICLOS COMPARATIVOS PARA PROBLEMAS RETANGULARES COM DENSIDADE 0,05

Para comparação de problemas inactíveis são feitas simulações com problemas de dimensão 200x200 e com densidade de 0,03, o resumo das informações obtidas estão na tabela 6.11.

TABELA 6.11 – ANÁLISE DE INFACIBILIDADE EM PROBLEMAS 200X200 COM DENSIDADE 0,03

		Percentual em relação à totalidade	Percentual em relação aos inactíveis
Número de testes	400	100%	
Inactíveis	352	88%	100%
Factíveis	48	12%	
Esparso = Denso	344		97,73%
Diferentes	8		2,27%

Fonte: a autora (2011)

Outra simulação é feita para problemas 500x500 com densidade de 0,02. Os resultados estão na tabela 6.12.

TABELA 6.12 – ANÁLISE DE INFACIBILIDADE EM PROBLEMAS 500x500 COM DENSIDADE 0,02

		Percentual em relação à totalidade	Percentual em relação aos infactíveis
Número de testes	400	100%	
Infactíveis	56	14%	100%
Factíveis	344	86%	
Esparcos=Densos	54		96,43%
Diferentes	2		3,57%

Fonte: a autora (2011)

Os resultados mostram que apesar de existirem alguns valores distintos de resolução para a infactibilidade nos dois métodos, os casos em que isto acontece representam um percentual bastante baixo.

Mesmo com baixa densidade problemas maiores apresentam menor probabilidade de infactibilidade.

7 CONCLUSÕES

O objetivo geral deste trabalho foi desenvolver um método que aproveitasse as características de Problemas de Transportes Esparsos, resolvendo-os com tempo melhor que o método tradicional conhecido.

Através da revisão bibliográfica, observou-se uma carência no desenvolvimento da resolução de problemas de transporte no que tange ao aproveitamento de esparsidade.

É importante aproveitar as características de cada tipo de problema para o desenvolvimento de métodos que o solucione. A esparsidade, que é encontrada em diversos Problemas de Transporte, foi utilizada neste trabalho para desenvolver o método que melhorou o tempo computacional.

Para a resolução dos problemas, tanto densos quanto esparsos, o uso de representação em forma de grafos, mais especificadamente em árvores, para soluções factíveis básicas, facilitou a determinação de variáveis degeneradas e a localização de ciclos quando da inserção de uma nova variável na base.

Através de demonstrações matemáticas, provou-se que o método resolve Problemas de Transporte esparsos ou não, transformando-o em um novo problema sempre factível. Este, quando solucionado, resolve o problema original. Verificou-se que, mesmo nos casos onde o problema original é infactível, a resolução do problema modificado leva à conclusão correta.

A implementação computacional foi bem sucedida ao possibilitar comparação entre os dois métodos. O bom desempenho computacional também está ligado à utilização da estrutura de árvores, tanto para determinação de variáveis degeneradas quanto para a localização de ciclos.

Em avaliações computacionais verificou-se que, devido à diminuição do número de cálculos referentes aos custos reduzidos, correspondentes às ligações não existentes, a alteração implicou num menor tempo computacional para problemas esparsos. Os resultados comparativos mostraram que, para problemas com densidade 0,05, o tempo computacional para resolução chega a ser $\frac{1}{4}$ do tempo necessário para a resolução pelo método tradicional. Em problemas com densidade 0,3, o método proposto resolve com aproximadamente metade do tempo.

Outra vantagem do método é que, para problemas densos, o tempo de resolução é o mesmo do método tradicional, viabilizando sua utilização para resolver qualquer tipo de problema.

Um comportamento inesperado em relação à dimensão dos Problemas de Transporte foi observado. Para Problemas Lineares com o mesmo número de variáveis ($m \cdot m$), quando se tem o menor número de restrições, o tempo computacional para resolução é mais elevado.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Um dos motivos que levou ao desenvolvimento do método era que se pretendia resolver o Problema de Planejamento Florestal de Curto Prazo através de Algoritmo Genético que, pelas suas características, tinha para cálculo do *fitness*, a resolução de um Problema de Transporte Esperso em cada iteração. Devido ao tempo necessário para resolução de cada um destes problemas, a utilização desta metodologia ficava comprometida. Foi então que a pesquisa tomou outro rumo. Um método para diminuir o tempo de processamento dos Problemas de Transporte Esparsos.

Sugere-se então, para trabalhos futuros:

- aplicar o método para problemas reais, como o de planejamento florestal, por exemplo;
- testar o desempenho do método em comparação com métodos específicos para resolver problemas de designação;
- verificar heurísticas de resolução onde problemas densos são simplificados para esparsos por algum critério de eliminação de ligações entre origens e destinos.

REFERÊNCIAS

ALTIPARMAK F., KARAOGLAN I. An adaptive tabu-simulated annealing for concave cost transportation problems. *Journal of the Operational Research Society*, advance online publication, p. 1-11, 18 de outubro 2006.

ARENALES, M. N. *et al. Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007, p 524.

BARR, R.S., R.S. GLOVER F., KLINGMAN, D. A new optimization method for large scale fixed charge transportation problems. *Operations Research*, v. 29, n. 3, p. 448–463, maio – junho, 1981.

BERTSEKAS D. P., CASTANON D.A. The auction algorithm for the transportation problem. In: *Annal of Operations research*, v. 20, n. 1 p. 67-96, fevereiro, 1989.

CARNIERI, Celso. *Planejamento florestal otimizado via rede de manejo*. 148 f. Tese (Doutorado Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica, Campinas. 1989.

CORMEN, T. H., LEISERSON, C. H., RIVEST R.L. *Algoritmos: Teoria e Prática*, 2. ed. Campus, 2002.

DANTZIG G.B. Programming in a linear structure. *Econometrica* v.17, p.73–74, 1949.

DANTZIG G.B. Application of the simplex method to a transportation problem, in *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York: Editora T.C. Koopmans , p. 359-373, 1951

EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii. Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. n. 8, 128-140, 1736.

FORD L. R., FULKERSON D. R. Solving the transportation problem. *Management Science*, v 3, n. 1, outubro, 1956.

GERSTING, JL. *Fundamentos Matemáticos para a ciência da Computação*, 5ª edição 616 p, Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004.

GOMIDE, L.R. *Planejamento Florestal Espacial*. 235 f. Tese. (Doutorado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2009.

HO H.W., WONG S. C. Two-dimensional Continuum Modeling Approach to Transportation Problems *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, Online English Edition of the Chinese language*. v. 6, dezembro, 2006.

HOCHBAUM D. S., HONG S.-P. On the Complexity of the Production-Transportation Problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, p. 250-264, fevereiro, 1996.

HITCHCOCK, F.L. (1941). The distribution of a product from several sources to numerous facilities. *Journal of Mathematical Physics*, n.20,p. 224-230

JI P., CHU K. F. A dual-matrix approach to the transportation problem. *Asia - Pacific Journal of Operational Research*, v 19, p. 35-45, 2002.

JOHNSON, K. N., SCHEURMAN, H. L. Techniques for prescribing optimal timber harvest and investment under different objectives - discussion and synthesis. *Forest Science*, v. 18, n. 1, p. 1-31, 1977.

KOOPMANS, T.C. Optimum utilization of the transportation system. *Econometrica*, v.17, p. 3-4. 1947.

KUMAR V., GRAMA A., GUPTA A., KARYPIS G. Introduction to Parallel Computing: Design and Analysis of Algorithms. *The Benjamin Cummings Publishing Company*, California, 1994.

LEE T.S. A Complete Russel's Method for the Transportation Problem. *SIAM Review*, v. 28, n. 4, dezembro, 1986.

MARQUES, FP; ARENALES, M.N. O Problema da mochila compartimentada e aplicações, *Pesquisa Operacional*, v. 22 n. 3. Rio de Janeiro: julho – dezembro, 2002.

MILIDIÚ R.L., PESSOA A.A., BRACONI, V. *et al.* Um algoritmo GRASP para o Problema de Transporte de derivados de petróleo em oleodutos, In: *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, SP, p. 237-246, novembro, 2011.

MONGE, G. Sur la théorie des déblais et des remblais, publicado em *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, 1781.

MURTY K. G. *Linear Programming*. Wiley, New York: John Wiley e Sons, 1983.

O'CONNOR, D. R. *Algorithms and data structures*. Capítulo 4. © 2002 Disponível em. <<http://www.derekconnor.net/home/MMS406/Trees.pdf>>. Acesso em: 19/07/2011.

PANDIAN P., ANURADHA D. Floating Point Method for Solving Transportation Problems with Additional Constraints. *International Mathematical Forum*, v. 6, n. 40, p. 1983 – 1992, 2011.

PAPAMANTHOU, C., PAPARRIZOS, K., SAMARAS, N. Computational experience with exterior point algorithms for the transportation problem. *Applied Mathematics and Computation*, v. 158, p. 459–475, 2004.

PUCCINI A. L.; PIZZOLATO N.D. *Programação Linear*. Rio de Janeiro, 1987.

RUIZ, F.L. ; LANDÍN, G.A. Nuevos Algoritmos em el Problema de Transporte. V *Congreso de Ingeniería de Organización*. Valladolid-Burgos, p. 4-5, setembro, 2003.

SANTOS, A. L. B. A. *Uma nova metodologia para a recuperação do campo de vento*. 74f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

SAUER J., APPELRATH J.H. Integrating Transportation in a Multi-Site Scheduling Environment. In: *Proceedings of the Hawai'i International Conference on System Sciences*, p. 4-7, Maui, Havaí, janeiro, 2000.

SHARMA R.R.K., SHARMA K.D. A new dual based procedure for the transportation problem. *European Journal of Operational Research*, v. 122, p. 611-624, 2000.

SHARMA R.R.K., SHARMA K.D. Obtaining a good primal solution to the uncapacitated transportation problem *European Journal of Operational Research*, v. 144, 3. ed., p. 560-564, 2003.

SILVA C.T.L., ARENALES M.N., SOUZA R.S. Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados e esparsos. *Pesquisa Operacional*, v. 27, n. 3, p. 457 – 486, Rio de Janeiro, 2007.

SILVA, P. M. *Modelo de Transporte em Rede com Restrições de Capacidade: Estudo de Alternativas na Área de Influência do Gasoduto Bolívia Brasil*. 125f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Planejamento Energético) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

SOUZA, D. O. *Algoritmos Genéticos Aplicados ao Planejamento do Transporte Principal de Madeira*. 169f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

SU SHENG, ZHAN DECHEN, XU XIAOFEI. Genetic Algorithm for the Transportation Problem with Discontinuous Piecewise Linear Cost Function. *International Journal of Computer Science and Network Security*, v.6, n. 7A, julho, 2006.

SZWARCFITER J.L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1984.

TAHA H.A. *Pesquisa Operacional*. 8. ed. São Paulo: Pearson Education Inc., 2008.

TOLSTOI, A. N. Metody ustraneniya neratsional'nykh perevozok pri planirovanii [Russian; Methods of removing irrational transportation in planning], *Sotsialisticheskii Transport*, v. 9, p 28-51, 1939.

TREFETHEN, F.N. A History of Operations Research, in *Operations Research for Management*. Editores J.F. McCloskey e F.N. Trefethen. Baltimore: Johns Hopkins Press, v. 1, p 3-35, 1954.

WILLIAMSON, G.; NIEUWENHUIS, M. Integrated Timber Allocation and Transportation Planning in Ireland. *Journal of Forest Engineering*, v. 5, n^o 1, p. 7-15, julho, 1993.

WISTON W. L. *Operations Research – Applications and Algorithms*. 2004, 4. ed. Thomson Brooks.

ZIONTS, S. *Linear and integer programming*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1974.

APÊNDICE 1

MÉTODO DO CUSTO MÍNIMO PARA ENCONTRAR A SBFI

Seja o problema de transporte representado no quadro A1.1:

	1	2	3	4	Oferta
1	2	3	5	6	5
2	2	1	3	5	10
3	3	8	4	6	15
Demanda	12	8	4	6	

QUADRO A1.1 – EXEMPLO DE PROBLEMA DE TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

1ª. Iteração O menor custo no quadro A1.1 corresponde à variável x_{22} à qual será designado o $\min\{A_2, D_2\}$ que é de 8 unidades. Reajustar a oferta para $10 - 8 = 2$ e a demanda para o valor $8 - 8 = 0$. Anular a coluna 2. A 1ª iteração está no quadro A1.2.

	1	2	3	4	Oferta
1	2	3	5	6	5
2	2	1	3	5	2
		8			
3	3	8	4	6	15
Demanda	12	0	4	6	

QUADRO A1.2 – 1ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

2ª. Iteração Escolher agora x_{12} . ou x_{21} , pois ambos têm mesmo custo. Pode-se escolher arbitrariamente, mas considerando a que mais transportará, definir $x_{12} = 5$. Reajustar a oferta para $5 - 5 = 0$ e a demanda para o valor $7 - 5 = 0$. Anular a linha 1. A 2ª. Iteração está no quadro A1.3.

	1	2	3	4	Oferta
1	2	3	5	6	0
	5				
2	2	1	3	5	2
		8			
3	3	8	4	6	15
Demanda	7	0	4	6	

QUADRO A1.3 – 2ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

3ª. Iteração O menor custo corresponde à variável x_{22} . Definir $x_{22} = 2$. Reajustar a oferta para $2 - 2 = 0$ e a demanda para $7 - 2 = 5$. Anular a linha 2. A 3ª. Iteração está no quadro A1.4.

	1	2	3	4	Oferta
1	2 5	3	5	6	0
2	2 2	1 8	3	5	0
3	3	8	4	6	15
Demanda	5	0	4	6	

QUADRO A1.4 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

4ª. Iteração O menor custo corresponde à variável x_{31} . Definir $x_{31} = 5$. Reajustar a oferta para $15 - 5 = 10$ e a demanda para $5 - 5 = 0$. Anular a coluna 1. A 4ª. Iteração está no quadro A1.5.

	1	2	3	4	Oferta
1	2 5	3	5	6	0
2	2 2	1 8	3	5	0
3	3 5	8	4	6	10
Demanda	0	0	4	6	

QUADRO A1.5 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

5ª. Iteração O menor custo corresponde à variável x_{33} . Definir $x_{33} = 4$. Reajustar a oferta para $10 - 4 = 6$ e a demanda para $4 - 4 = 0$. Anular linha 3. A 5ª. Iteração está no quadro A1.6.

	1	2	3	4	Oferta
1	2 5	3	5	6	0
2	2 2	1 8	3	5	0
3	3 5	8	4 4	6	6
Demanda	0	0	0	6	

QUADRO A1.6 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

6ª. Iteração A única escolha é x_{34} . Definir $x_{36} = 6$. Reajustar a oferta para $6 - 6 = 0$ e a demanda para $6 - 6 = 0$. Anular linha 3. A 6ª. Iteração está no quadro A1.7.

	1	2	3	4	Oferta
1	2 5	3	5	6	0
2	2 2	1 8	3	5	0
3	3 5	8	4 4	6 6	0
Demanda	0	0	0	0	

QUADRO A1.7 – 3ª. ITERAÇÃO CUSTO MÍNIMO

Fonte: a autora (2011)

Como todas as ofertas e todos os destinos estão satisfeitos, a SBFI foi encontrada, com variáveis $x_{11} = 5$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 8$, $x_{31} = 5$, $x_{33} = 4$ e $x_{34} = 6$.

APÊNDICE 2

TESTE DE OTIMALIDADE – STEPPING STONE

Seja uma SBF1 representada pelo quadro A2.1:

	1	2	3	4	Oferta
1	11	6	7	2	120
	100	20			
2	4	5	3	10	130
		80	50		
3	12	13	9	8	150
			50	100	
Demanda	100	100	100	100	

QUADRO A2.1 – EXEMPLO DE SBF1

Fonte: a autora (2011)

Passo 1

Para se construir a solução dual, são considerados somente os custos. O cálculo das variáveis duais começa atribuindo-se, por exemplo, o valor 0 a u_1 . A partir daí, calculam-se os demais valores, considerando-se somente as variáveis básicas e lembrando que $c_{ij} - u_i - v_j = 0$. Assim, tem-se:

$$c_{11} - u_1 - v_1 = 11 - 0 - v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 11$$

$$c_{12} - u_1 - v_2 = 6 - 0 - v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 6$$

$$c_{22} - u_2 - v_2 = 5 - u_2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -1$$

$$c_{23} - u_2 - v_3 = 3 + 1 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 4$$

$$c_{33} - u_3 - v_3 = 9 - u_3 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 5$$

$$c_{34} - u_3 - v_4 = 8 - 5 - v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_4 = 3$$

Passo 2

Para saber se a solução é ou não ótima, deve-se calcular os custos atualizados $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Se \bar{c}_{ij} for negativo, a restrição dual correspondente é violada e haverá melhora na solução do primal se o elemento x_{ij} correspondente entrar na base.

No exemplo acima, tem-se:

- $\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 7 - 0 - 4 = 3 > 0$ não viola a factibilidade dual
- $\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 2 - 0 - 3 = -1 < 0$ viola a factibilidade dual
- $\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 + 1 - 11 = -6 < 0$ viola a factibilidade dual
- $\bar{c}_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 + 1 - 3 = 8 > 0$ não viola a factibilidade dual
- $\bar{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 12 - 5 - 11 = -4 < 0$ viola a factibilidade dual
- $\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 13 - 5 - 6 = 2 > 0$ não viola a factibilidade dual

Como existem \bar{c}_{ij} que violam a factibilidade dual, significa que esta não é uma solução ótima, então se deve escolher uma variável para entrar na base, que está entre as variáveis que violaram o critério de otimalidade. A variável escolhida deve corresponder ao $\min\{\bar{c}_{ij}\}$. Para o exemplo, o $\min\{\bar{c}_{14}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{31}\} = \bar{c}_{21}$, portanto a variável de entrada é x_{21} .

Passo 3

Depois de escolhida a variável de entrada, deve-se escolher a variável de saída. Isto dependerá da existência de um ciclo, no quadro da última solução encontrada. Coloca-se $+\theta$ na célula da variável que vai entrar e depois, alternando $-\theta, +\theta$, forma-se um ciclo no quadro de transporte, com início e fim na variável que entrou. O quadro A2.2 apresenta a última solução e o ciclo que se forma com a variável de entrada:

	1	2	3	4	Oferta
1	11 $100 - \theta$	6 $20 + \theta$	7	2	120
2	4 θ	5 $80 - \theta$	3 50	10	130
3	12	13	9 50	8 100	150
Demanda	100	100	100	100	

QUADRO A2.2 – CICLO NO QUADRO DE TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

O valor de θ é obtido pelo $\min\{x_{22}, x_{12}, x_{11}, \} = 80$. Caso haja empate, uma única variável sai da base, as demais ficam na base com valor nulo. O quadro A2.3 apresenta a solução atualizada.

	1	2	3	4	Oferta
1	11 20	6 100	7	2	120
2	4 80	5 0	3 50	10	130
3	12	13	9 50	8 100	150
Demanda	100	100	100	100	

QUADRO A2.3 – CICLO NO QUADRO DE TRANSPORTE

Fonte: a autora (2011)

A variável x_{22} sai da base. A partir deste ponto, retorna-se ao passo 1.