

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Valério Gonçalves de Matos

**SOLUÇÕES MUITO FRACAS PARA O PROBLEMA
DE STOKES**

Curitiba, 2011.

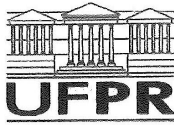
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Valério Gonçalves de Matos

**SOLUÇÕES MUITO FRACAS PARA O PROBLEMA
DE STOKES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio.

Curitiba, 2011.



Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMA

ATA DA 37ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ao treze dias do mês de setembro de 2011, na Sala de Reunião do Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Pedro Danizete Damazio, a Banca Examinadora para a Trigésima Sétima Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Sandro Marcos Guzzo, da Universidade Estadual de Cascavel-UNIOESTE; Dr. Yuan Jin Yun, do Departamento de Matemática-UFPR, e o Dr. Pedro Danizete Damazio, Orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às treze horas e trinta minutos, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato Valério Gonçalves de Matos a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Soluções Muito Fracas para o Problema de Stokes". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 13 de setembro de 2011.

Prof. Dr. Pedro Danizete Damazio
Presidente

Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo
Titular

Prof. Dr. Yuan Jin Yun
Membro

*Aos meus pais Arioaldo (in memóriam) e Luiza,
pelo amor, carinho e apoio incondicional.*

Agradecimentos

Um pouco antes de iniciar a digitação desta dissertação, eu já tinha em mente alguns nomes de pessoas/instituição que contribuíram de uma forma ou outra para a minha formação intelectual durante o curso na pós-graduação.

O primeiro agradecimento é para o meu Senhor Deus, o Criador, o Todo Poderoso Jeová por me proporcionar o privilégio de estudar Matemática no mestrado, uma possibilidade inconcebível para mim há pouco tempo atrás. Agradeço-Lhe pela sua presença contínua em minha vida me fazendo prosseguir; pelo seu poder sem limite não me livrando do vale, porém me ajudando a atravessá-lo; pela sua misericórdia e proteção que convergiam quase sempre para mim e pelo seu amor integral que tende para o infinito, transformando-me num ponto de acumulação das suas bênçãos.

O segundo agradecimento, ou quem sabe uma dívida -que nunca poderei pagar-, vai para o meu orientador, o competentíssimo Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio pela paciência com que conduziu meus estudos, mostrando não somente os conceitos matemáticos, mas também a beleza da Matemática através deles.

Não poderia deixar de agradecer aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR, pelo apoio recebido e conhecimentos divididos.

Agradeço a todos os meus (ex-) colegas de mestrado, em especial ao Ricardo Paleari da Silva, pelas explicações nos conteúdos estudados nas disciplinas e ao Diego Dutra Zontini pelos momentos de estudo na sala do mestrado, bem como o compartilhamento de exercícios e ideias nas disciplinas feitas em comum.

Por fim, agradeço ao Governo Federal, pelo REUNI - Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais -, pelo suporte financeiro sem o qual seria quase impossível realizar este projeto.

“O temor do Senhor é o princípio da sabedoria.”

Salomão
“Livro de Provérbios 9:10”

*“Os investimentos em conhecimento
geram os melhores dividendos.”*

Benjamin Franklin

*”A matemática, vista corretamente,
possui não apenas verdade, mas também suprema beleza -
uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*

Bertrand Russell

Resumo

O Problema de Stokes será estudado neste trabalho sob o prisma das soluções muito fracas. Tal problema é caracterizado da seguinte maneira: encontrar um par de funções (\mathbf{u}, q) , solução das equações:

$$(S) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = h & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde Ω é um conjunto aberto, limitado, conexo e Lipschitz de \mathbb{R}^3 com fronteira Γ ; \mathbf{f}, h funções definidas em Ω e \mathbf{g} função definida sobre Γ ; h e \mathbf{g} satisfazendo condições de compatibilidades adequadas.

O artigo “*Stationary Stokes, Oseen and Navier-Stokes equations with singular data*”, dos autores Chérif Amrouche e M. Ángeles Rodríguez-Bellido, apresenta resultados do Problema de Stokes com o conceito de solução muito fraca. Esta definição diz que: para quaisquer $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ e $\pi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, o par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ é solução de muito fraca de (S) se as seguintes igualdades valerem:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$$

e

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} .$$

Com $1 < r, p < \infty$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Palavras-chave: *Problema estacionário de Stokes, soluções muito fraca.*

Abstract

The Stokes Problem will be studied in this work in the light of very weak solutions. Such problem is characterized as follows: find a pair of functions (\mathbf{u}, q) , to be solution of the equations:

$$(S) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = h & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

where Ω is an open, bounded, connected and Lipschitz subset of \mathbb{R}^3 with boundary Γ ; \mathbf{f}, h functions defined in Ω and \mathbf{g} a function defined on Γ ; h and \mathbf{g} satisfying appropriate compatibility conditions.

The Article “*Stationary Stokes, Oseen and Navier-Stokes equations with singular data*”, of the authors and M. Cherif Amrouche Ángeles Rodríguez-Bellido, presents results of Stokes Problem with the concept of very weak solution. This definition says that: for any $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ and $\pi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, a pair $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ is a very weak solution of (S) if the following equalities hold:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$$

e

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} .$$

With $1 < r, p < \infty$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

Keywords: *Stationary Stokes problem, very weak solution.*

Índice

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Definições importantes	4
1.1 Espaços $L^p(\Omega)$	4
1.2 Conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ (Funções testes)	5
1.2.1 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$	5
1.3 Distribuições	6
1.3.1 Derivada de distribuição	6
1.4 Espaços de Sobolev	7
1.4.1 Espaços de Sobolev de ordem inteira não negativa	7
1.4.2 Espaços de Sobolev de ordem fracionária	8
2 Espaços Funcionais	9
3 Resultados clássicos sobre Soluções fracas e Soluções fortes do Problema de Stokes	12
3.1 Resultados clássicos de Soluções fracas	13
3.1.1 Formulação variacional clássica do Problema de Stokes	13
3.2 Resultados clássicos de Soluções fortes	18
4 Imersões, Operadores de traços e versões da fórmula de Green	19
4.1 Imersões	19
4.2 Operadores de traços e versões da fórmula de Green	21
5 Soluções muito fracas para o problema de Stokes	31
5.1 Definição de Soluções muito fracas	31

5.2	Diferença fundamental entre Soluções fracas clássicas e Soluções muito fracas	33
5.3	Proposições e teoremas de Soluções muito fracas	34
6	Apêndice	65
6.1	Definições usuais	65
6.2	Lema	69
6.3	Proposições	69
6.4	Teoremas	70
	Referências Bibliográficas	73

Introdução

O Problema de Stokes é formulado da seguinte forma: Dadas as funções vetoriais \mathbf{f}, \mathbf{g} definidas em Ω e em sua fronteira Γ , respectivamente e a função escalar h definida em Ω , encontrar as funções vetorial e escalar (\mathbf{u}, q) , solução das equações:

$$(S) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = h & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

sendo Ω um conjunto aberto, limitado, conexo e Lipschitz de \mathbb{R}^3 com fronteira Γ . A função \mathbf{u} denota a velocidade e a função q a pressão do fluido. Note que a primeira e última são equações vetoriais.

Esta dissertação de Mestrado é um detalhamento do artigo “*Stationary Stokes, Oseen and Navier-Stokes equations with singular data*” dos autores Chérif Amrouche e M. Ángeles Rodríguez-Bellido no tópico referente a Problema de Stokes Estacionário. Este Problema será chamado simplesmente de Problema de Stokes com o domínio das funções estudadas num subconjunto aberto, limitado, conexo, Lipschitz e de classe $C^{1,1}$ do espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

O conceito de solução muito fraca para as equações de Stokes, introduzido por Giga [14], tem sido fortemente estudado nos últimos anos; dentre os autores que trabalham nesta área estão Amrouche [3], Girault[3], Galdi[16], Farwig[12], Schumacher[25] e Kim[19].

A definição de solução muito fraca do Problema de Stokes diz que para quaisquer $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ e $\pi \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$, o par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ é solução de muito fraca de (S) se as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} dx - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$$

e

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi dx = - \int_{\Omega} h \pi dx + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} .$$

Os conjuntos mostrados no parágrafo anterior e nas duas igualdades acima serão apresentados devidamente em capítulos apropriados.

Um ponto importante no desenvolvimento do conceito de solução muito fraca é definir precisamente os traços das funções vetoriais os quais pertencem a subespaços de $L^p(\Omega)$. Pelo Teorema de Green (veja em [17] e teorema (6.24)), dadas $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e $v \in C^1(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$,

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dx dy = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (1)$$

Pondo $h = v \frac{\partial u}{\partial n}$ vem que h é contínua em quase todo ponto (q.t.p.) de Γ . Neste estudo, nem sempre as "integrais de fronteira" são integrais no sentido de Lebesgue. Caso isto ocorra, a integral em (1) será dada por

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \begin{cases} v \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) = \langle v, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{A^*, A} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(v) = \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \rangle_{B^*, B} \end{cases}$$

Isto é, v é um funcional linear e contínuo em A aplicado em $\frac{\partial u}{\partial n}$ ou vice-versa. Aqui, A^* simboliza o espaço dual topológico de A . A função, no argumento, será escolhida como aquela de melhor qualidade em termos de regularidade ou aquela que mais convém.

Um tópico relevante a salientar é a densidade de $\mathcal{D}^3(\Omega)$ e $\mathcal{D}^3(\bar{\Omega})$ em alguns espaços como $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ e $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ (lemas (4.6) e (4.8), respectivamente) essenciais ao desenvolvimento dos resultados.

Prova-se a existência e regularidade de soluções muito fracas $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ para quaisquer $1 < p < \infty$ com dado arbitrário em algum espaço de Sobolev de ordem negativa. Além disto, é mostrada soluções (\mathbf{u}, q) em espaços fracionários de Sobolev do tipo $\mathbf{W}^{\sigma,p} \times W^{\sigma-1,p}$ com $0 < \sigma < 2$.

Este trabalho de dissertação foi organizado para atender as necessidades daqueles que já trabalham com equações diferenciais parciais bem como aqueles que estão dando os primeiros passos neste assunto.

No capítulo 1 são apresentados os espaços usuais de funções escalares e vetoriais, com suas respectivas normas e também o conjunto das funções testes que servem de auxílio para os resultados posteriores.

O capítulo 2 é destinado aos espaços de funções apropriados que desempenham um papel importante na construção dos lemas, teoremas e corolários que montarão uma base para os resultados do título deste trabalho.

Soluções fortes são mencionadas no capítulo 3 e as soluções fracas são tratadas, de forma sintetizada, com lemas, proposições e teoremas.

Os assuntos expostos no capítulo 4 são os resultados de imersões, teorema relativo a traços de funções em espaços de Sobolev de ordem fracionária e derivada normal na fronteira, lemas contendo propriedades de densidade do conjunto das funções testes em alguns espaços adequados ao estudo feito no decorrer deste capítulo, extensões de transformações lineares e contínuas com conjuntos imagem sendo espaços de Sobolev definidos na fronteira e as versões da fórmula de Green.

Finalmente, no capítulo 5 apresentam-se a definição de solução muito fraca do Problema de Stokes, as proposições, os teoremas e os corolários das soluções muito fracas do problema de Stokes.

Capítulo 1

Definições importantes

O estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDP) exige, pela natureza dos elementos que o compõem, a presença de espaços de funções bem específicas. As distribuições, os espaços de Sobolev e $L^p(\Omega)$ são conjuntos de funções com presença garantida nesta área da Matemática. Estes espaços são definidos de modo preciso para serem usados nos resultados que virão em seguida.

Alguns termos citados ao longo do texto são definidos no apêndice; lemas, teoremas e corolários da Análise Funcional e Medida e Integração são mencionados também neste ambiente. Este procedimento tem por objetivo permitir que o leitor mais familiarizado com este assunto possa ser direcionado para as partes essenciais do trabalho. Os encaminhamentos naturais para os iniciantes são as referências bibliográficas e o apêndice. Definições tais como suporte de função e conjunto Lipschitz estão depositadas no apêndice.

1.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Seja um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. O espaço (de classes de equivalência) de funções mensuráveis u definidas em Ω , cuja potência p , $|u|^p$, é Lebesgue integrável em Ω , é representado por $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Caso $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço (de classes de equivalência) das funções u , mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω , equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess}|u(\mathbf{x})|.$$

Dizer que u é essencialmente limitada significa que u é limitada quase sempre, isto é, u é limitada exceto sobre um conjunto de medida nula. Mostra-se que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach (veja em [1]).

Para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Em Ω , a medida definida $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ é a medida de Lebesgue. Veja em [6] a definição de função mensurável.

1.2 Conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ (Funções testes)

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . Denote $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto (veja no apêndice a definição de suporte). Uma função deste tipo será chamada de função teste. Por simplicidade de notação é usual colocar-se $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Quando necessário $\mathcal{D}^n(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{D}(\Omega)$, isto é, o produto cartesiano de $\mathcal{D}(\Omega)$, n vezes. Dado $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (multi-índice), usa-se o símbolo $D^{\boldsymbol{\alpha}}u(x)$ para representar

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} u(x) \right) \right) \right).$$

com $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$, o produto cartesiano de \mathbb{N} , n vezes, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Denote $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

1.2.1 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1. Os suportes de todas as funções testes $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ estão contidos num conjunto compacto fixo $K \subset \mathbb{R}^n$.
2. Para cada $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, a sequência $(D^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em K .

A sequência $(D^\alpha \varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é a notação de

$$(D^\alpha \varphi_1, D^\alpha \varphi_2, D^\alpha \varphi_3, \dots).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Diremos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge para φ , quando a sequência $(\varphi_\nu - \varphi)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero no sentido dado acima.

Dizer que a sequência $(D^\alpha \varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero significa que dado um número real positivo ε , existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D^\alpha \varphi_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \nu \geq \nu_0, \quad \forall x \in \Omega.$$

1.3 Distribuições

Define-se como distribuição sobre um conjunto aberto Ω em \mathbb{R}^n a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual é representado por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Desta forma, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, a transformação

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

é linear e contínua, com \mathbb{K} sendo \mathbb{C} ou \mathbb{R} .

Define-se $L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ função mensurável; } \int_K |f| dx < \infty \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}$. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Mostra-se que a forma linear T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ dada por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω . Veja em [13].

1.3.1 Derivada de distribuição

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ com α um multi-índice. Dada uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ define-se a derivada α -ésima de T como sendo a distribuição $D^\alpha T$

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi),$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um conjunto aberto, limitado e Lipschitz de \mathbb{R}^3 .

1.4.1 Espaços de Sobolev de ordem inteira não negativa

Sejam $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, p na reta estendida tal que $1 \leq p \leq \infty$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$, espaço de Sobolev, o espaço (de classes de) das funções u em $L^p(\Omega)$ tais que a sua derivada $D^\alpha u$, no sentido das distribuições, pertença a $L^p(\Omega)$ para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ com $|\alpha| \leq m$. Em $W^{m,p}(\Omega)$ define-se uma norma colocando-se:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(\mathbf{x})|.$$

De forma natural, definem-se os espaços de Sobolev de funções a valores vetoriais. Com estas normas $W^{m,p}(\Omega)$ (veja em [1]). Como $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço dual de $W^{m,p}(\Omega)$ não pode ser identificado com o espaço de distribuições em Ω . Por esta razão, define-se $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}$, isto é, $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma de $W^{m,p}(\Omega)$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ então $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, se $\partial\Omega = \emptyset$ então não há diferença entre $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$. Representa-se também $W^{-m,p'}(\Omega)$ o espaço dual topológico de $W^{m,p}(\Omega)$, com p e p' expoentes conjugados, isto é, $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Para $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, é denotado $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, ou seja,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, |\alpha| \leq m\}.$$

Pode-se provar, (veja [10]), que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Denota-se por $H_0^m(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma de $W^{m,2}(\Omega)$.

1.4.2 Espaços de Sobolev de ordem fracionária

Sejam s um número real qualquer não inteiro e não negativo, e p número real com $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Denote por m a parte inteira de s e por σ sua parte fracionária : $s = m + \sigma$ com $0 < \sigma < 1$. O conjunto $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de todas as distribuições v definidas em \mathbb{R}^3 tais que:

- $D^\alpha v \in L^p(\mathbb{R}^3)$, para todo $|\alpha| = m$.

- $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{3+\sigma p}} d\mathbf{x}d\mathbf{y} < \infty.$$

O espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Banach reflexivo com a norma:

$$\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^3)} = \left(\|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^3)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{3+\sigma p}} d\mathbf{x}d\mathbf{y} \right)^{1/p}.$$

Se $s < 0$ denota-se $W^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ o espaço dual topológico de $W^{-s,p}(\mathbb{R}^3)$. No caso especial de $p = 2$, a notação usada é $H^s(\mathbb{R}^3)$ ao invés de $W^{s,2}(\mathbb{R}^3)$. A definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é exatamente a mesma como no caso do espaço todo. Para todo $m > 0$, denota-se por $W^{m,p}(\bar{\Omega})$ o espaço de todas distribuições em Ω as quais são restrições de elementos de $W^{m,p}(\mathbb{R}^3)$.

Comentário 1.1. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $W^{s,p}(\Omega)$ para todo $0 < s \leq 1/p$, isto significa que $W^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega)$.

Veja em [1],[15].

Capítulo 2

Espaços Funcionais

No capítulo anterior foram apresentados espaços tradicionais de funções escalares e vetoriais usados em Equações Diferenciais Parciais. Este capítulo exibirá espaços de funções não conhecidos na área de EDP; eles serão peças decisivas neste trabalho.

Para facilitar a leitura, um conjunto representado por uma letra em negrito deve ser entendido como um produto cartesiano de três conjuntos iguais. Por exemplo, \mathbf{A} é o mesmo que $A \times A \times A$, sendo A um conjunto de funções escalares com alguma propriedade. Em outras palavras, se $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{A}$ então $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, com $\varphi_j \in A$, para $j = 1, 2, 3$.

Os espaços duais topológicos serão indicados por asterisco(*). Assim, por exemplo, B^* representa o espaço dual topológico de B . Isto é, B^* é o conjunto dos funcionais lineares e contínuos em B .

Neste trabalho frequentemente serão usados os expoentes conjugados, isto é, dado um número real p , tal que $1 < p < \infty$, o número p' é o expoente conjugado de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e vice-versa.

Sejam Ω um conjunto aberto e limitado em \mathbb{R}^n e Γ a sua fronteira. Denote por $\mathbf{L}^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o espaço de funções vetoriais $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ em Ω tais que

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |f_i(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} < \infty.$$

Representa-se por $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem m (m um inteiro não negativo) o espaço de funções vetoriais $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ em $\mathbf{L}^p(\Omega)$ tais que

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Neste estudo alguns espaços serão de importância fundamental para atingir o alvo desejado, ou seja, provar resultados concernentes à existência e unicidade de soluções muito fracas do Problema de Stokes. A seguir são definidos tais espaços e uma breve descrição de suas propriedades e onde aparecem ao longo do texto.

Sejam $r, p \in \mathbb{R}$ tais que $1 < r, p < \infty, r \leq p$ com $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. É claro que $p' \leq r'$.

$$1. \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,p'}(\Omega) \right\}.$$

Este espaço será usado nas demonstrações de alguns resultados principalmente valendo-se do seu dual. Estas funções vetoriais se anulam na fronteira bem como seu divergente. A função $\boldsymbol{\varphi}$ pertence a $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ e $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in L^{p'}(\Omega)$ já que $L^{r'}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ pois de $p' \leq r'$ e da limitação de Ω .

Este espaço tem a seguinte propriedade: o conjunto $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, veja lema (4.6). Por simplicidade de notação coloca-se $\mathbf{X}_{p'}(\Omega) = \mathbf{X}_{p',p'}(\Omega)$. A norma deste espaço é

$$\|\cdot\|_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \|\cdot\|_{\mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega)} + \|\operatorname{div}(\cdot)\|_{W_0^{1,p'}(\Omega)}.$$

$$2. \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega); \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Além das propriedades de derivadas distribucionais e do anulamento da função e do divergente na fronteira, este espaço é utilizado para trabalhar com uma versão da fórmula de Green, veja lema (4.9).

Este espaço é imerso continuamente em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ como é mostrado no lema (4.3), uma ferramenta empregada na proposição (5.2). A norma deste espaço é

$$\|\cdot\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha(\cdot)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{r'} \right)^{1/r'}.$$

$$3. \mathbf{T}_{p,r}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega); \Delta \mathbf{v} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^* \}.$$

Assim, como $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$, este espaço aparece numa versão da fórmula de Green conforme lema (4.9). O espaço $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ é munido com a topologia dada pela norma:

$$\|\cdot\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)} = \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\Delta(\cdot)\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*}.$$

Este espaço possui a propriedade: $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)}}$ (lema 4.8). Por simplicidade de notação coloca-se $\mathbf{T}_p(\Omega) = \mathbf{T}_{p,p}(\Omega)$. O espaço $\mathbf{T}_{p,0}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{T}_p(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \}$ é usado na proposição (5.7).

Observe que $\mathbf{T}_{p,0}(\Omega)$ não é $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ para $r = 0$, pois $1 < r < \infty$. O índice 0(zero) da notação refere-se ao fato do divergente da função ser nulo. A norma em $\mathbf{T}_{p,0}(\Omega)$ é a mesma norma em $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$.

4. $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega); \text{div} \mathbf{v} \in L^r(\Omega)\}$.

Conforme o lema (4.7) este espaço é o fecho de $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ na norma $\mathbf{L}^p(\Omega)$ e também útil numa versão da fórmula de Green, de acordo com a proposição (5.2). Observe que, como em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, elementos em $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$ também estão em $\mathbf{L}^r(\Omega)$. Em $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$ a norma é do gráfico, isto é,

$$\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)} = \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\text{div}(\cdot)\|_{L^r(\Omega)}.$$

Define-se também $\mathbf{H}_p(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^p(\Omega); \text{div} \mathbf{v} = 0\}$. Um espaço usado na proposição (5.7) é o seguinte:

$$L_0^{p'}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^{p'}(\Omega); \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Capítulo 3

Resultados clássicos sobre Soluções fracas e Soluções fortes do Problema de Stokes

Antes de iniciar o estudo de Soluções muito fracas do Problema de Stokes vale a pena comentar sobre os tipos de soluções existentes em termos de soluções fracas e soluções fortes e alguns resultados presentes na literatura. Agora, relembre o Problema de Stokes mencionado na Introdução.

Seja Ω um conjunto aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^3 com fronteira Γ . Sejam \mathbf{f}, h funções definidas em Ω e \mathbf{g} função definida sobre Γ com h e \mathbf{g} satisfazendo condições de compatibilidades adequadas. O Problema de Stokes consiste em encontrar um par de funções (\mathbf{u}, q) solução do sistema:

$$(S) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = h & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde \mathbf{u} representa a velocidade do fluido, q denota a pressão hidrostática do fluido, \mathbf{f} é a força externa por unidade de massa, ν o coeficiente de viscosidade (constante).

3.1 Resultados clássicos de Soluções fracas

3.1.1 Formulação variacional clássica do Problema de Stokes

Para obter-se a formulação variacional clássica (em $\mathbf{L}^2(\Omega)$) consideram-se os seguintes espaços:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}^3(\Omega); \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\},$$

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}}, \text{ isto é, } V \text{ é o fecho de } \mathcal{V} \text{ na norma de } \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Relembre que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{com } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega),$$

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) := ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x},$$

com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Por simplicidade de notação, $\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} d\mathbf{x}$.

Mais especificamente, pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja Ω um conjunto aberto, limitado e Lipschitz em \mathbb{R}^3 . Então*

$$V = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}.$$

Demonstração: Veja em [27].

Conforme se verá mais abaixo, a formulação variacional permite determinar apenas a velocidade-solução do problema de Stokes. Para recuperar a pressão faz-se uso dos seguintes resultados:

Proposição 3.2 (De Rham). *Sejam Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ tal que $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = 1, \dots, n$. Uma condição necessária e suficiente que $\mathbf{f} = \nabla p$ para algum $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é que*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Proposição 3.3. *Seja Ω um conjunto aberto, limitado e Lipschitz em \mathbb{R}^n :*

(i) *Se uma distribuição q tem todas as suas derivadas de primeira ordem $\frac{\partial q}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$, em $L^2(\Omega)$, então $q \in L^2(\Omega)$ e*

$$\|q\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_1(\Omega) \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Se uma distribuição q tem todas as suas derivadas de primeira ordem $\frac{\partial q}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$, em $H^{-1}(\Omega)$, então $q \in L^2(\Omega)$ e

$$\|q\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_2(\Omega) \|\nabla q\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Em ambos os casos, se Ω é qualquer conjunto aberto em \mathbb{R}^n então $q \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Considere o sistema de equações de Stokes,

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \quad (\nu > 0), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.3)$$

A equação $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ significa que o fluido é incompressível e a condição $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ em Γ significa que o fluido adere à fronteira de Ω .

Lema 3.4. *Sejam Ω um conjunto aberto e limitado de classe C^2 e $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\mathbf{u} \in V$ e $\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,

(ii) \mathbf{u} pertence a $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e satisfaz (3.1)-(3.3) no seguinte sentido fraco:

$$\text{existe } q \in L^2(\Omega) \text{ tal que } -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.5)$$

$$\gamma_0 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \quad (3.6)$$

Sendo γ_0 o operador traço que será apresentado no capítulo (4).

Demonstração:

(i) \implies (ii)

Seja $\mathbf{u} \in V$. Então $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em $L^2(\Omega)$, donde $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $V \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ vem que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $\gamma_0 \mathbf{u} = \mathbf{0}$ em $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Considere a distribuição $\mathbf{F} = -\nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{f}$, então para toda $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}$ tem-se que

$$\langle -\nu \Delta \mathbf{u} - \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle -\nu \Delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

Agora,

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} \text{ e}$$

$$-\nu \langle \Delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \nu \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} = \nu ((\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}))$$

Assim, $\langle -\nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \nu((\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi})) - (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{V}$.

Pela proposição (3.2), existe $q \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $-\nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{f} = \nabla(-q)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou seja,

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Como $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ então $\Delta\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ e já que $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ segue que $\nabla(-q) = -\nu\Delta\mathbf{u} - \mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ e pela proposição (3.3), item (ii) conclui-se que $q \in L^2(\Omega)$.

(ii) \implies (i)

Se \mathbf{u} e q são funções suaves que satisfazem (3.1)-(3.3) então, tomando o produto interno de (3.1) com uma função $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ obtém-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= (-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla q, \mathbf{v}) \\ &= -\nu(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla q, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned} (\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \Delta\mathbf{u}\mathbf{v}d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)(v_1, v_2, v_3)d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \Delta u_i v_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \Delta u_i v_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^3 \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j v_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \right) \\ &= - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i d\mathbf{x} \\ &= -((\mathbf{u}, \mathbf{v})). \end{aligned}$$

Aqui, $ds = ds_1 ds_2 ds_3$ representa a medida de Lebesgue na fronteira Γ .

Agora

$$\begin{aligned}
 (\nabla q, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla q \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_3} \right) (v_1, v_2, v_3) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q}{\partial x_i} v_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} v_i d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Gamma} q n_i v_i ds - \int_{\Omega} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \right) = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} q \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\Omega} q \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0,
 \end{aligned}$$

e donde $\nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Observe que sendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ um elemento em $\mathcal{D}^3(\Omega)$ tem-se que $\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$, donde cada $v_j = 0$ na fronteira de Ω , $j = 1, 2, 3$. Além disto, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Seja $\mathbf{w} \in V$. Por $V = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}}$, existe uma seqüência $(\mathbf{w}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{w}_m = \mathbf{w}$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Assim, $\mathbf{w}_m \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\frac{\partial \mathbf{w}_m}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{w}_m)) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_m).$$

Agora, considere

$$\begin{aligned}
 \nu((\mathbf{u}, \mathbf{w})) &= \nu \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \nu \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{w}_m}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \nu \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{w}_m}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \nu((\mathbf{u}, \mathbf{w}_m)) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{f}, \mathbf{w}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w}_m d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f} \mathbf{w}_m d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\mathbf{x} \\
 &= (\mathbf{f}, \mathbf{w}).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\nu((\mathbf{u}, \mathbf{w})) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}). \quad (3.7)$$

Observe que a passagem ao limite sob o sinal da integral é possível pois como $(\mathbf{w}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^3(\Omega)$ então cada \mathbf{w}_m é mensurável e existe $C > 0$ tal que $|\mathbf{w}_m| \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$. Desta forma, é possível usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Logo, a equação (3.7) é válida para toda $\mathbf{v} \in V$. A linearidade de (3.7) vem dos produtos internos $((\cdot, \cdot))$ e (\cdot, \cdot) .

Se o conjunto Ω é de classe C^2 então devido a (3.3) a função \mathbf{u} pertence a $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e por causa de (3.2) e pelo teorema (3.1), $\mathbf{u} \in V$. Desta forma, chega-se à seguinte conclusão:

$$\mathbf{u} \text{ pertence a } V \text{ e satisfaz } \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.8)$$

■

Definição 3.5. O problema “encontrar $\mathbf{u} \in V$ satisfazendo (3.8)” é chamado de *formulação variacional do problema (3.1)-(3.3)*.

Teorema 3.6. Para qualquer conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o qual é limitado em alguma direção e para toda $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ o problema (3.8) tem única solução \mathbf{u} (o resultado é válido para se $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$). Além disto, existe uma função $q \in L_{loc}^2(\Omega)$ tal que (3.4)-(3.5) são satisfeitas. Se Ω for um conjunto aberto e limitado de classe C^2 , então $q \in L^2(\Omega)$ e (3.4)-(3.6) são satisfeitas para \mathbf{u} e q .

No artigo [4] os autores lançam mão dos artigos [3] e [9] para apresentar o próximo teorema. Este resultado mostra que existe uma outra definição de solução fraca, não sendo a solução fraca clássica.

Teorema 3.7. Para todas $\mathbf{f}, h, \mathbf{g}$ com

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega), \quad h \in L^p(\Omega), \quad \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma),$$

e satisfazendo a condição de compatibilidade $\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{1} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}$, o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)/\mathbb{R}$. Além disto, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de p e Ω tal que:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} + \|q\|_{L^p(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

3.2 Resultados clássicos de Soluções fortes

Como visto na seção anterior, considerando-se a força externa $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ (ou mesmo $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$) e assumindo certa regularidade sobre Ω , é possível obter existência e unicidade de soluções fracas para o Problema de Stokes. A rigor a solução (\mathbf{u}, q) é única na classe $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, ou seja, a única solução do referido problema encontra-se no espaço $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: se com os dados mais gerais sobre a força externa, a divergência e a condição de fronteira, pode-se obter resultados nos mesmos níveis que aqueles da seção anterior, ou seja, soluções únicas em espaços mais gerais como do tipo $\mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$? Os resultados abaixo, respondem positivamente a esta questão.

Teorema 3.8 (Cattabriga). *Sejam $m \geq 2$ um inteiro, p qualquer número real com $1 < p < \infty$ e Ω um conjunto conexo limitado de \mathbb{R}^n , de classe $C^{m-1,1}$. Dados*

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m-2,p}(\Omega), \quad \varphi \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{m-1/p,p}(\Gamma), \quad 1 < p < \infty,$$

com \mathbf{g} e φ satisfazendo a condição de compatibilidade $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \varphi dx$. Então o Problema não homogêneo (S1) tem uma única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \times W^{m-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$. Além disto, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de m, p e Ω tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} + \|q\|_{W^{m-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{m-2,p}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{m-1/p,p}(\Gamma)} \right). \quad (3.9)$$

$$(S1) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \varphi & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Demonstração: Veja em [9].

Capítulo 4

Imersões, Operadores de traços e versões da fórmula de Green

4.1 Imersões

As imersões entre espaços vetoriais é um poderoso instrumento no estudo das Equações Diferenciais Parciais. Elas são úteis nas demonstrações que exigem a limitação de uma transformação linear e deste fato seguindo a continuidade da mesma. O objetivo deste procedimento é garantir que tal transformação esteja em algum espaço dual. Veja no apêndice as definições de imersão contínua e compacta, bem como as suas notações.

Teorema 4.1 (Rellich-Kondrachov). *Sejam Ω um aberto e limitado em \mathbb{R}^n , Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. As seguintes imersões são compactas:*

$$i) W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \frac{np}{n-p} = p^*, \quad \text{se } p < n,$$

$$ii) W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty, \quad \text{se } p = n,$$

$$iii) W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}), \quad \text{se } p > n.$$

Com $C^0(\bar{\Omega})$ representando o conjunto das funções contínuas definidas em $\bar{\Omega}$.

Veja em [24],[10].

Lema 4.2. *Se $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, $r \leq p$ então*

$$(i) W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

$$(ii) W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Demonstração:

(i) De fato, considere

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{p} \\ \frac{3-r}{3r} &\leq \frac{1}{p},\end{aligned}$$

ou ainda $1 < p \leq \frac{3r}{3-r}$.

Se Ω conjunto aberto, limitado e Lipschitz em \mathbb{R}^3 e $n = 3$ então pelo teorema de Rellich-Kondrachov,

Se $r < 3$ e $1 < p \leq \frac{3r}{3-r}$ então $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$,

Se $r = 3$ então $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < \infty$, em particular para $q = p$,

Caso $r > 3$ então $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$. Em qualquer caso, $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

(ii) Lembrando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, considere

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{r'} &\leq 1 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{r'} &\leq -\frac{1}{p'} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{p'} - \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{r'} \\ \frac{3-p'}{3p'} &\leq \frac{1}{r'},\end{aligned}$$

donde, $1 < r' \leq \frac{3p'}{3-p'}$.

Fazendo o mesmo estudo como no item (i), pelo Teorema de Rellich-Kondrachov segue o resultado. ■

Lema 4.3. $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, isto é, $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ está imerso continuamente em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, $1 < r', p' < \infty$.

Demonstração:

Recorde que

$$\mathbf{Y}_{p'}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega); \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}|_{\Gamma} = 0 \right\},$$

$$\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega); \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,p'}(\Omega) \right\}.$$

Em $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ a norma é de $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$; em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ a norma é

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\|_{W^{1,p'}(\Omega)}.$$

Se $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ então $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$, $\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma} = 0$. De $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$ vem que $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$ pois $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega) \subset \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$ e pela imersão $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$, segue que $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$ e $D_i \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^{r'}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$ donde $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}_0^{1,r'}(\Omega)$. Agora, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \in L^{p'}(\Omega)$, já que $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \in L^{p'}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$ e $L^{p'}(\Omega)$ é espaço vetorial. Além disto, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) \in L^{p'}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$. Logo, $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ pois $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma} = 0$. Logo, $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \subset \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$. Considere

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} &= \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)} + \sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \right\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \\ &\leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)}, \end{aligned}$$

com $C > 0$.

Isto mostra a continuidade da imersão de $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$. Portanto, segue o resultado. ■

4.2 Operadores de traços e versões da fórmula de Green

Uma dificuldade para trabalhar com a definição muito fraca do Problema de Stokes é a necessidade de definir com precisão os produtos de dualidades envolvendo funções definidas na fronteira do conjunto Ω considerado. Além disto, tanto os traços das componentes normal e tangencial quanto a derivada normal das funções envolvidas devem estar bem definidos na fronteira; o procedimento usual é definir inicialmente tais operadores de traços sobre $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ para, em seguida, estendê-los para os seus respectivos fechos, preservando linearidade e continuidade.

A densidade de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $H^1(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Omega)$ permite obter o resultado no comentário e no teorema a seguir, respectivamente.

Vale lembrar que um conjunto Ω é de classe $C^{k,1}$ (inteiro $k \geq 1$) significa que localmente a fronteira de Ω é o gráfico de uma função em $C^{k,1}$ (veja no apêndice a definição (6.14)).

Comentário 4.4. *Considerando Ω um conjunto aberto, limitado e de classe C^2 sabe-se que existe um operador linear e contínuo (operador traço),*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma_0(u) = u|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

tal que $u|_{\Gamma} =$ a restrição de u a Γ para toda função $u \in H^1(\Omega)$ a qual é duas vezes continuamente diferenciável em $\overline{\Omega}$. Pode-se provar que: $\text{Im}(\gamma_0) = H^{1/2}(\Gamma)$.

Além disto, existe um operador linear e contínuo (lifting)

$$L_{\Omega} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega),$$

tal que $\gamma_0 \circ L_{\Omega} =$ operador identidade em $H^{1/2}(\Gamma)$.

Consulte [10] para ver o operador γ_0 e [23] para o operador L_{Ω} .

Teorema 4.5. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em \mathbb{R}^3 de classe $C^{k,1}$, para algum inteiro $k \geq 0$. Seja s um número real tal que $s \leq k + 1$, $s - 1/p = m + \sigma$, onde $m \geq 0$ é um número inteiro e $0 < \sigma < 1$.*

(i) *A seguinte transformação*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : W^{s,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{s-1/p,p}(\Gamma) \\ u &\longmapsto u|_{\Gamma} \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetiva. Quando $1/p < s < 1 + 1/p$, tem-se $\text{Ker}(\gamma_0) = W_0^{s,p}(\Omega)$.

(ii) *Para $m \geq 1$, a seguinte transformação*

$$\begin{aligned} (\gamma_0, \gamma_1) : W^{s,p}(\Omega) &\longrightarrow (W^{s-1/p,p}(\Gamma) \times W^{s-1-1/p,p}(\Gamma)) \\ u &\longmapsto (u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma}) \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetiva. Quando $1 + 1/p < s < 2 + 1/p$, tem-se $\text{Ker}(\gamma_0, \gamma_1) = W_0^{s,p}(\Omega)$.

Veja em [28].

Conforme será visto mais adiante neste capítulo, uma solução muito fraca do Problema de Stokes deverá satisfazer a equação de momento do sistema (S) em $[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Por esta razão, torna-se necessário definir os operadores de traços como produtos de dualidade sobre a fronteira de Ω e caracterizar, de forma adequada, os funcionais de tal espaço dual. É nesta direção que se apresentam os seguintes resultados.

Lema 4.6. *O espaço $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ e para toda $q \in W^{-1,p}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ tem-se*

$$\langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}.$$

Demonstração:

Seguindo o roteiro de [2] deseja-se estender as funções em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ para todo espaço \mathbb{R}^3 . O primeiro passo é considerar o conjunto Ω estritamente estrelado com respeito a um dos seus pontos, o qual pode ser tomado, sem perda de generalidade, como a origem de \mathbb{R}^3 . Defina $\tilde{\mathbf{v}}$ a extensão por zero em \mathbb{R}^3 da função $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$. Desta forma, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)$ e definindo $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = \widetilde{\operatorname{div} \mathbf{v}} \in W_0^{1,r}(\mathbb{R}^3)$. Tome $\nu < 1$ e defina as funções $\tilde{\mathbf{v}}_\nu = \tilde{\mathbf{v}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\nu} \right)$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Observe que $\tilde{\mathbf{v}}_\nu$ tem suporte compacto em Ω , já que $\operatorname{supp} \tilde{\mathbf{v}}_\nu \subset \nu\Omega \subset \Omega$, $\tilde{\mathbf{v}}_\nu \in \mathbf{X}_{r,p}(\mathbb{R}^3)$ e

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \tilde{\mathbf{v}}_\nu = \tilde{\mathbf{v}} \text{ em } \mathbf{X}_{r,p}(\mathbb{R}^3).$$

Portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e a sequência regularizante ρ_ϵ tem-se que $\rho_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\nu \in \mathcal{D}^3(\Omega)$ e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 1} \rho_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\nu = \tilde{\mathbf{v}}$. Consequentemente, $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$. Caso Ω seja apenas Lipschitz, cobre-se Ω por um número finito de conjunto abertos estrelados e partições da unidade. Veja em [24] sequência regularizante.

Seja $\varphi \in \mathcal{D}^3(\Omega)$. Considere,

$$\langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla q \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \varphi d\mathbf{x} = - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}$$

pois $\varphi|_{\Gamma} = \mathbf{0}$.

Dada $\varphi \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, então pela densidade de $\mathcal{D}^3(\Omega)$ em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ existe $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^3(\Omega)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = \varphi$ em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\langle \nabla q, \varphi_m \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = - \langle q, \operatorname{div} \varphi_m \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}.$$

Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$ e observando a linearidade dos produtos de dualidades vem que

$$\langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega).$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^3(\Omega) \subset \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega) &\Rightarrow [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^* \subset \mathcal{D}'^3(\Omega), \\ \mathcal{D}^3(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) &\Rightarrow \mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega) \subset \mathcal{D}'^3(\Omega). \end{aligned}$$

■

Uma função vetorial \mathbf{v} , definida sobre um subconjunto aberto Ω de \mathbb{R}^3 pode ser escrita como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_n$ na fronteira de Ω , sendo \mathbf{v}_τ a componente tangencial e \mathbf{v}_n sua componente normal.

Lema 4.7. (i) O espaço $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$.

(ii) Seja $1 < p < \infty$ e $r > 1$ tais que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$. A transformação $\gamma_n : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$ sobre o espaço $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ pode ser estendida por continuidade a uma transformação linear e contínua, denotada por $\tilde{\gamma}_n$ de $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$ em $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$, e tem-se a fórmula de Green: para quaisquer $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$ e $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varphi \, \text{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Demonstração:

(i) Este item será mostrado usando a contrapositiva da proposição (6.21) apresentada no apêndice. Seja $\mathbf{f} \in [\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]^*$ tal que $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para toda $\mathbf{v} \in \mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$. Quer-se provar que $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ em $[\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]^*$. Usando o Teorema da Representação de Riesz existe $(\mathbf{u}_f, z_f) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times L^{r'}(\Omega)$ tais que para toda $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \langle \text{div} \mathbf{v}, z_f \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)}.$$

Estendendo-se por zero no complementar de Ω as funções \mathbf{u}_f e z_f tais que suas extensões $(\tilde{\mathbf{u}}_f, \tilde{z}_f) \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3) \times L^{r'}(\mathbb{R}^3)$ com

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} \mathbf{u}_f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \end{cases} \\ \tilde{z}_f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} z_f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega. \end{cases} \end{aligned}$$

Tome $\varphi \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R}^3)$. É claro que $\text{div} \varphi \in L^r(\mathbb{R}^3)$. Agora,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{z}_f \text{div} \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} z_f \text{div} \varphi \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^3(\Omega), \mathcal{D}^3(\Omega)} = 0,$$

pois,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} = 0 + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \varphi d\mathbf{x}.$$

Análogo para $\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{z}_f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{x}$.

Como

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{z}_f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \tilde{z}_f \varphi d\mathbf{x},$$

já que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^3$ então

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{z}_f \operatorname{div} \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{u}}_f - \nabla \tilde{z}_f) \varphi d\mathbf{x} = \langle \tilde{\mathbf{u}}_f - \nabla \tilde{z}_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^3(\Omega), \mathcal{D}^3(\Omega)}.$$

Isto é, $\tilde{\mathbf{u}}_f = \nabla \tilde{z}_f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $\nabla \tilde{z}_f = \tilde{\mathbf{u}}_f \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)$ então $\tilde{z}_f \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$, donde $z_f \in W^{1,p'}(\Omega)$.

Pela densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^{p'}(\Omega)$ existe uma sequência $(z_f^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $z_f^k \rightarrow z_f$ em $L^{p'}(\Omega)$, em particular, $z_f^k \rightarrow z_f$ em $L^{r'}(\Omega)$, já que $z_f \in L^{r'}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$.

Sejam as sequências de funções $a_k = \nabla z_f^k \mathbf{v}$ e $b_k = \operatorname{div} \mathbf{v} z_f^k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, pela desigualdade de Hölder, as funções a_k e b_k são integráveis

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a_k| d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{v} z_f^k| d\mathbf{x} \leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \|z_f^k\|_{L^{r'}(\Omega)} < \infty, \\ \int_{\Omega} |b_k| d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} |\nabla z_f^k \mathbf{v}| d\mathbf{x} \leq \|\nabla z_f^k\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Por definição de espaços $L^p(\Omega)$, as funções $\nabla z_f^k, \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v}$ são mensuráveis. Já que, para cada $k \in \mathbb{N}$, z_f^k é função teste então z_f^k é mensurável. Como o produto de funções mensuráveis é mensurável então $\nabla z_f^k \mathbf{v}$ e $\operatorname{div} \mathbf{v} z_f^k$ são mensuráveis. Claramente, as funções $\nabla z_f \mathbf{v}$ e $\operatorname{div} \mathbf{v} z_f$ são mensuráveis. Como a sequência $(z_f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente em $L^{r'}(\Omega)$ então é limitada em quase todo ponto, isto é, existe $\bar{C} > 0$ tal que $|z_f^k| \leq \bar{C}$ q.t.p. Sendo div um operador contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ vem que

$$|\operatorname{div} \mathbf{v} z_f^k| = |\operatorname{div} \mathbf{v}| |z_f^k| \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} \bar{C} < \infty, \quad C > 0.$$

Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$. É necessário provar que se $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$ então $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ em $[\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]^*$. Agora,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_{\mathbf{f}} \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \text{div} \mathbf{v}, z_{\mathbf{f}} \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \nabla z_{\mathbf{f}} \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v} z_{\mathbf{f}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla z_{\mathbf{f}}^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{div} \mathbf{v} z_{\mathbf{f}}^k d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla z_{\mathbf{f}}^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v} z_{\mathbf{f}}^k d\mathbf{x} \quad (4.2) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \nabla z_{\mathbf{f}}^k \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla z_{\mathbf{f}}^k \mathbf{v} d\mathbf{x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Da equação (4.1) para a equação (4.2) usou-se o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja apêndice). Observe que integral de função constante em Ω é finita.

(ii) Considere a transformação

$$\begin{aligned} \gamma_n : \mathcal{D}^3(\bar{\Omega}) &\longrightarrow W^{-1/p,p}(\Gamma) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \gamma_n \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Sabe-se que existe um operador lifting tal que existe uma função $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$ de tal modo que $\|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq \bar{C} \|\varphi\|_{W^{1/p,p}(\Gamma)}$, $\bar{C} > 0$. Observe que pelo teorema (4.5), item (ii), $\varphi|_{\Gamma} \in W^{1/p,p'}(\Gamma)$.

Considere

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varphi \text{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} \varphi \text{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\varphi \text{div} \mathbf{v}| d\mathbf{x} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^{r'}(\Omega)} \|\text{div} \mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} + C_1 \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \|\text{div} \mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \\ &\leq \left(\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \right) C_2 \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Gamma)} \\ &\leq C \left(\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)} + \|\text{div} \mathbf{v}\|_{L^r(\Omega)} \right) \|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)} \|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Sendo $C_2 = \max\{C_1, 1\}$ e $C = C_2 \bar{C}$. Observe que $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$ pelo lema (4.2).

Assim,

$$\left| \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)} \|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Para $\varphi \neq 0$ vem que

$$\frac{\left| \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right|}{\|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)}.$$

Por definição

$$\|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} = \sup_{0 \neq \varphi \in W^{1/p,p'}(\Gamma)} \frac{\left| \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right|}{\|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)}}.$$

Logo, $\|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)}$.

Portanto, a transformação linear $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}$ definida sobre $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ é limitada na norma de $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$. Pelo Teorema da Continuidade e Limitação (6.25), γ_n é contínua em $\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$. Como $W^{1/p,p'}(\Gamma)$ é espaço normado então pelo Teorema do espaço dual (6.26) seu dual é um espaço de Banach. Pelo Teorema de extensão linear e limitada (6.27) segue que γ_n tem uma extensão

$$\tilde{\gamma}_n : \overline{\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)}} = \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega) \longrightarrow W^{1/p,p'}(\Gamma)$$

linear e contínua. ■

Lema 4.8. (i) O espaço $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$.

(ii) O espaço $\mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)$.

Demonstração:

(i) Este item será mostrado de modo semelhante ao realizado no lema (4.7).

Seja $\mathbf{f} \in [\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)]^*$ tal que $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para toda $\mathbf{v} \in \mathcal{D}^3(\overline{\Omega})$. Quer-se provar que $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ em $[\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)]^*$. Usando o Teorema da Representação de Riesz existe $(\mathbf{u}_f, \mathbf{z}_f) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ tal que para toda $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \mathbf{z}_f, \Delta \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega), [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*}.$$

Note que é possível estender por zero no complementar de Ω as funções \mathbf{u}_f e \mathbf{z}_f de modo que suas extensões $\tilde{\mathbf{u}}_f \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)$ e $\tilde{\mathbf{z}}_f \in \mathbf{X}_{r',p'}(\mathbb{R}^3)$, isto é, $\tilde{\mathbf{z}}_f \in \mathbf{W}^{1,r'}(\mathbb{R}^3)$ e $\text{div} \tilde{\mathbf{z}}_f \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^3)$.

Tome $\varphi \in \mathcal{D}^3(\mathbb{R}^3)$. É claro que $\Delta\varphi \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Agora,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{z}}_f \Delta\varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \varphi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{z}_f \Delta\varphi d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^3(\Omega), \mathcal{D}^3(\Omega)} = 0.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{z}}_f \Delta\varphi d\mathbf{x} = \langle \Delta\tilde{\mathbf{z}}_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^3(\Omega), \mathcal{D}^3(\Omega)}$ vem que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{u}}_f \varphi d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathbf{z}}_f \Delta\varphi d\mathbf{x} = \langle \tilde{\mathbf{u}}_f + \Delta\tilde{\mathbf{z}}_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'^3(\Omega), \mathcal{D}^3(\Omega)},$$

ou seja, $\tilde{\mathbf{u}}_f + \Delta\tilde{\mathbf{z}}_f = \mathbf{0}$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Como $\tilde{\mathbf{z}}_f \in \mathbf{W}^{1,r'}(\mathbb{R}^3)$ e $\Delta\tilde{\mathbf{z}}_f = -\tilde{\mathbf{u}}_f \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)$, donde $\tilde{\mathbf{z}}_f \in \mathbf{W}^{2,p'}(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{z}_f \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$ e $\frac{\partial \mathbf{z}_f}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}$ sobre Γ . Desta forma, $\mathbf{z}_f \in \mathbf{W}_0^{2,p'}(\Omega)$. Como $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{W}_0^{2,p'}(\Omega)$ então existe uma sequência $(\mathbf{z}_f^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^3(\Omega)$ tal que $\mathbf{z}_f^k \rightarrow \mathbf{z}_f$ em $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$, em particular, $\mathbf{z}_f^k \rightarrow \mathbf{z}_f$ em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$.

Seja $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$. É necessário provar $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para concluir que $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ em $[\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)]^*$. Agora,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_f \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \Delta\mathbf{v}, \mathbf{z}_f \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \Delta\mathbf{v}, \mathbf{z}_f \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \langle \Delta\mathbf{v}, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{z}_f^k \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \Delta\mathbf{v}, \mathbf{z}_f^k \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbf{z}_f^k \Delta\mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(- \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta\mathbf{z}_f^k \mathbf{v} d\mathbf{x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{D}^3(\bar{\Omega})$ é denso $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$.

(ii) Seja $\mathbf{f} \in [\mathbf{T}_{p,r}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]^*$ tal que para toda $\mathbf{v} \in \mathcal{D}^3(\Omega)$, $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Como no item anterior é preciso mostrar que $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ em $[\mathbf{T}_{p,r}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]^*$. Novamente pelo Teorema da Representação de Riesz existe $(\mathbf{u}_f, \pi_f, \mathbf{z}_f) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times L^{r'}(\Omega) \times \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ tal que para toda $\mathbf{v} \in [\mathbf{T}_{p,r}(\Omega) \cap \mathbf{H}_{p,r}(\text{div}, \Omega)]$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{v} + \pi_f \cdot \text{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \langle \mathbf{z}_f, \Delta\mathbf{v} \rangle_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega), [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*}.$$

Seguindo os mesmos passos de (i) tem-se que $-\Delta \tilde{\mathbf{z}}_f + \nabla \tilde{\pi}_f = \tilde{\mathbf{u}}_f \in \mathbf{L}^{p'}(\mathbb{R}^3)$ e donde $\mathbf{z}_f \in \mathbf{W}_0^{2,p'}(\Omega)$ e $\pi_f \in W_0^{1,p'}(\Omega)$. O restante da demonstração não se altera. ■

Lema 4.9. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado em \mathbb{R}^3 de classe $C^{1,1}$. Sejam $1 < p < \infty$ e $r > 1$ tais que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$. A transformação $\gamma_\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}|_\Gamma$ definida sobre o espaço $\mathcal{D}^3(\bar{\Omega})$ pode ser estendida por continuidade a uma transformação linear e contínua, denotada por $\tilde{\gamma}_\tau$, de $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ em $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$, e tem-se a fórmula de Green: para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$,*

$$\langle \Delta \mathbf{v}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta \varphi d\mathbf{x} - \langle \mathbf{v}_\tau, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Demonstração:

Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{D}^3(\Omega)$, então

$$\langle \mathbf{v}_\tau, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta \varphi d\mathbf{x} - \langle \Delta \mathbf{v}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}. \quad (4.3)$$

Como $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ e $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \subset \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ para $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, conclui-se que esta igualdade válida é para toda $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$. O traço da componente normal de funções de $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ pertence ao espaço

$$\mathbf{Z}_{p'}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma); \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\}.$$

De fato, pela definição de $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$, tem-se que $\varphi|_\Gamma = 0$, donde em particular, $\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$. No teorema (4.5) item (ii) para $s = 2$ vem que $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \in \mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma) = \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)$. Seja $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)$ então $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\vec{\mathbf{n}}$. Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ vem que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau$. Como Ω é de classe $C^{1,1}$ sabe-se que existe um operador lifting tal que existe uma função $\varphi \in \mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$ de tal forma que $\varphi = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}$ sobre Γ e satisfazendo

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}_\tau\|_{\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \quad (4.4)$$

Sendo assim, para $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$, tem-se que:

$$\left| \langle \mathbf{v}_\tau, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| = \left| \langle \mathbf{v}_\tau, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right|.$$

Ponha $I = \left| \langle \mathbf{v}_\tau, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right|$. Considere

$$\begin{aligned}
 I &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta \varphi d\mathbf{x} - \langle \Delta \mathbf{v}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \right| \\
 &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \Delta \varphi d\mathbf{x} \right| + \left| \langle \Delta \mathbf{v}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{v} \cdot \Delta \varphi| d\mathbf{x} + \left| \langle \Delta \mathbf{v}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \right| \\
 &\leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\Delta \varphi\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + \|\Delta \mathbf{v}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} \|\varphi\|_{\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\
 &\leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\varphi\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + C_2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} \|\varphi\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_3 \left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\Delta \mathbf{v}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} \right) \|\varphi\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} \\
 &\leq CC_3 \left(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\Delta \mathbf{v}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} \right) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\
 &\leq \bar{C} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$C_3 = \max \{C_1, C_2\}$ e $\bar{C} = CC_3$.

Nas expressões (4.5) e (4.6) foram usados os seguintes fatos: o operador laplaciano Δ é contínuo de $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$ em $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ e a desigualdade (4.4), respectivamente. Como

$$\|\mathbf{v}_\tau\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}} = \sup_{\mathbf{0} \neq \varphi \in \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \frac{\left| \langle \mathbf{v}_\tau, \varphi \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}, \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right|}{\|\varphi\|_{\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}},$$

vem que $\|\mathbf{v}_\tau\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)}$.

Portanto, a transformação linear $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_\tau|_\Gamma$ definida sobre $\mathcal{D}^3(\bar{\Omega})$ é limitada na norma de $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$. Pelo Teorema da Continuidade e Limitação (6.25), γ_τ é contínua em $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$. Como $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ é espaço normado então pelo Teorema do espaço dual (6.26) seu dual é um espaço de Banach. Pelo Teorema de extensão linear e limitada (6.27) segue que γ_τ tem uma extensão

$$\tilde{\gamma}_\tau : \overline{\mathcal{D}^3(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)}} = \mathbf{T}_{p,r}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$$

linear e contínua. ■

Capítulo 5

Soluções muito fracas para o problema de Stokes

5.1 Definição de Soluções muito fracas

Relembre o Problema de Stokes citado na Introdução. Seja Ω um conjunto aberto, limitado e Lipschitz de \mathbb{R}^3 com fronteira Γ . Sejam \mathbf{f} , h funções definidas em Ω e \mathbf{g} função definida sobre Γ com h e \mathbf{g} satisfazendo condições de compatibilidades adequadas. O Problema de Stokes consiste em encontrar um par de funções (\mathbf{u}, q) solução do sistema:

$$(S) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = h & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Neste trabalho é de interesse estudar as soluções no caso em que

$$\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \quad h \in L^r(\Omega), \quad \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}, \quad r \leq p, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Sendo que h e \mathbf{g} satisfazem a condição de compatibilidade

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \quad (5.2)$$

O coeficiente de viscosidade do fluido assumirá o valor unitário, isto é, $\nu = 1$.

Procura-se então, trabalhar na maior classe possível de funções mantendo a unicidade de solução. Neste contexto, introduz-se o conceito de solução muito fraca.

Definição 5.1 (Solução muito fraca do Problema de Stokes). Diz-se que $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ é uma solução muito fraca do Problema de Stokes (S) se as seguintes igualdades valerem: para quaisquer $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ e $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$,

$$-\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \quad (5.3)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \quad (5.4)$$

Para que as igualdades (5.3) e (5.4) façam sentido, as integrais devem ser finitas e os produtos de dualidades estar bem definidos. A seguir serão analisados tais integrais e produtos.

a) $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x}$:

Como $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ então $\Delta \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$. Já que a função \mathbf{u} está em $\mathbf{L}^p(\Omega)$ e pela Desigualdade de Hölder (veja apêndice) tal integral é finita.

b) $\langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}$:

Como $q \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ (lema (4.3)) donde $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in W_0^{1,p'}(\Omega)$, então o produto de dualidades faz sentido já que $W^{-1,p}(\Omega) = [W_0^{1,p'}(\Omega)]^*$.

c) $\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}$:

Claramente faz sentido este produto pois $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ e $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ pelo lema (4.3).

d) $\langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}$:

Como $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ então sua componente tangencial \mathbf{g}_{τ} também está no mesmo espaço. Pondo $s = 2$ no teorema (4.5) parte (ii), vem que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma} \in \mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma) = \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma). \text{ Observe que } \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma) = [\mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)]^*.$$

e) $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x}$:

Sendo π um elemento de $W^{1,p'}(\Omega)$ então o gradiente de π está em $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$. Novamente \mathbf{u} está em $\mathbf{L}^p(\Omega)$ donde pela Desigualdade de Hölder segue que a integral é finita.

f) $\int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x}$:

Se $h \in L^p(\Omega)$, de $\pi \in W^{1,p'}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ vem que tal integral é finita. Caso $h \in L^r(\Omega)$ pela imersão $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$, do lema (4.2), segue o mesmo resultado.

$$g) \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} :$$

Este produto de dualidade está bem definido com $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$. Pelo teorema (4.5), com $s = 1$ vem que

$$\gamma_0 : W^{1,p'} \longrightarrow W^{1-1/p',p'}(\Gamma) = W^{1/p,p'}(\Gamma)$$

ou seja, $\pi|_{\Gamma} = \gamma_0 \pi \in W^{1/p,p'}(\Gamma)$.

5.2 Diferença fundamental entre Soluções fracas clássicas e Soluções muito fracas

No contexto de Soluções do Problema de Stokes é relevante, neste momento, fazer uma distinção entre Soluções fracas clássicas e Soluções muito fracas.

Em Soluções fracas clássicas deseja-se encontrar soluções utilizando produtos internos em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Observe a igualdade a seguir:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \text{com } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (5.5)$$

A força externa em (5.5) pertence ao espaço $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (ou $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$) e a solução encontrada (\mathbf{u}, q) está no espaço cartesiano $(\mathbf{H}_0^1(\Omega), L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ e observando que $\gamma_0 \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Consulte o capítulo (3) para ver os resultados deste tipo de solução.

No que tange a Soluções muito fracas, duas parcelas apresentadas na primeira igualdade da definição (5.1) têm a configuração:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \Delta \varphi \, d\mathbf{x} - \langle q, \text{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}, \quad \text{sendo } \varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega).$$

A força \mathbf{f} , neste estudo, está num espaço mais geral $[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Agora, a solução (\mathbf{u}, q) mora em $\mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$. Note que os operadores laplaciano e divergente são aplicados sobre uma “função teste” $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$. Isto significa que a “responsabilidade” de ter propriedades que possibilitem o uso de tais operadores é de outra função, podendo a solução (\mathbf{u}, q) pertencer a espaços cartesianos bem mais “amplos” comparados aos das Soluções fracas clássicas.

5.3 Proposições e teoremas de Soluções muito fracas

O primeiro resultado apresenta uma forma equivalente de trabalhar com a definição de solução muito fraca. Ela mostra que se um par de funções satisfaz o sistema de equações do Problema de Stokes no sentido de distribuição, a ser especificado na proposição, então ela é uma solução muito fraca.

Proposição 5.2 (proposição 1). *Suponha que $\mathbf{f}, h, \mathbf{g}$ satisfaçam (5.1). Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ é uma solução muito fraca de (S),
- (ii) $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ satisfaz o sistema (S) no sentido das distribuições em $[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ na primeira equação, em $L^r(\Omega)$ na segunda e em $\mathbf{W}^{-1/p,p'}(\Gamma)$ na última.

Demonstração:

(i) Seja (\mathbf{u}, q) solução muito fraca de (S). Para toda $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}^3(\Omega)$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \\ & \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \quad \Rightarrow \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \\ & \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \nabla \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Como $\nabla \boldsymbol{\psi} \equiv 0$ numa vizinhança de Γ e pelo lema (4.6) vem que

$$\begin{aligned} & \langle -\Delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} + \langle \nabla q, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ \Rightarrow & \langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}^3(\Omega). \end{aligned}$$

Dada $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, pela densidade $\mathcal{D}^3(\Omega)$ em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ (lema (4.6)) existe uma sequência $(\boldsymbol{\varphi}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^3(\Omega)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\varphi}$ em $\mathbf{W}^{1,r'}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_m \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = 0.$$

Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$ na igualdade anterior e lembrando da continuidade do produto de dualidades $\langle \cdot, \cdot \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}$ vem que

$$\langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega).$$

Além disto, para $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}^3(\Omega)$, $-\langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \nabla q, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}$. Por densidade, conclui-se que $-\langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \langle \nabla q, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}$ para toda $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$, donde $\nabla q \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Logo,

$$-\Delta \mathbf{u} = -\nabla q + \mathbf{f} \quad \text{em} \quad [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*.$$

Também sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $L^r(\Omega)$ e tomando $\pi \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (5.4), vem que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \quad \Rightarrow \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x}, \quad \text{pois } \pi|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Agora,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \pi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} - h) \pi d\mathbf{x},$$

isto é, $\operatorname{div} \mathbf{u} - h = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e já que $h \in L^r(\Omega)$ segue que $\operatorname{div} \mathbf{u} = h$ em $L^r(\Omega)$. Como $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^r(\Omega)$ vem que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{p,r}(\operatorname{div}, \Omega)$.

De $\int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \pi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$ vem, pelo lema (4.7), $(\pi \in W^{1,p'}(\Omega), \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{p,r}(\operatorname{div}, \Omega))$,

$$- \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} = \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$$

\Rightarrow

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} - h) \pi d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Mas $\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u} - h) \pi d\mathbf{x} = 0$ donde,

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)},$$

isto é, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$.

Da primeira igualdade da definição de solução muito fraca (5.3), para $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, dx - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = \\ & \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Usando os lemas (4.6) e (4.9) na igualdade anterior,

$$\begin{aligned} & - \left[\langle \Delta \mathbf{u}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right] \\ & + \langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = \\ & \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & \langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = \\ & - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Por (1), $\langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} = 0$, vem que

$$\langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)},$$

isto é, $\mathbf{u}_{\tau} = \mathbf{g}_{\tau}$ em $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$. Mas $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\tau} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\vec{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\tau} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\vec{\mathbf{n}}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$, já que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ neste mesmo espaço.

(ii) Suponha que $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$ satisfaça o sistema (S) no sentido de distribuição em $[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ na primeira equação, em $L^r(\Omega)$ na segunda e em $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ na terceira. Como $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sobre Γ , $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\tau} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\vec{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\tau} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\vec{\mathbf{n}}$ então $\mathbf{u}_{\tau} = \mathbf{g}_{\tau}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ ambos em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. Em particular,

$$\langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Seja $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$. Pelo lema (4.3), $\varphi \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$. Pelos lemas (4.6) e (4.9) e pela linearidade dos produtos de dualidades,

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \varphi \, dx - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} \\
 &= - \left[\langle \Delta \mathbf{u}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right] \\
 &+ \langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \quad \Rightarrow \\
 & \langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\
 &= \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}.
 \end{aligned}$$

Segue então a igualdade (5.3) na definição de solução muito fraca do Problema de Stokes. Observe que para usar o lema (4.9), \mathbf{u} deve estar em $\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$, isto é, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\Delta \mathbf{u} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Por hipótese $\mathbf{f} \in \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ e a primeira equação do sistema (S) é satisfeita no sentido de distribuição em $\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ e pelo lema (4.6) $\nabla q \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ tem-se $\Delta \mathbf{u} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. De modo análogo, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{p,r}(\operatorname{div}, \Omega)$, pois $\operatorname{div} \mathbf{u} = h \in L^r(\Omega)$.

Dada $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$, como

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \pi \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)} &= \langle h, \pi \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)}, \\
 \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \pi \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \pi \, dx, \\
 \langle h, \pi \rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)} &= \int_{\Omega} h \pi \, dx, \\
 \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} &= \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)},
 \end{aligned}$$

pois $\operatorname{div} \mathbf{u} = h \in L^r(\Omega)$ e $\pi \in W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$, vem, do lema (4.7),

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \pi \, dx &= - \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx + \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\
 &= - \int_{\Omega} h \pi \, dx + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}.
 \end{aligned}$$

Desta forma, a igualdade (5.4) é satisfeita. ■

A proposição seguinte revela que existe única solução muito fraca do Problema de Stokes quando se considera o caso da força externa sendo nula, a componente normal da função na fronteira também nula e o fluido incompressível ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$).

Proposição 5.3. *Sejam p qualquer número real com $1 \leq p \leq \infty$ e Ω um conjunto aberto, limitado e conexo de \mathbb{R}^3 de classe $C^{1,1}$. Seja a condição de fronteira \mathbf{g} satisfazendo*

$$\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Então o Problema de Stokes

$$(S2) \begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

tem exatamente uma solução muito fraca $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$. Além disto, existe uma constante C dependendo apenas de p e de Ω tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Omega)}. \quad (5.6)$$

Demonstração:

Provar-se-á que se o par de funções $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfaz $-\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{0}$ em $[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em $L^p(\Omega)$ então \mathbf{u} pertence a $\mathbf{T}_{p,0}(\Omega)$ e desta forma a condição de fronteira $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ faz sentido. Para isto, observe que pelo lema (4.6) se uma função $q \in W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ então ∇q está em $[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$. Por definição, $\mathbf{u} \in \mathbf{T}_{p,0}(\Omega)$ e seu traço pertence a $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$ pelo teorema (4.5).

Dada $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_{p'}(\Omega)$ pelo lema (4.6),

$$\langle \nabla q, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} = - \langle q, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)},$$

isto é, $\nabla q \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e

$$\|\nabla q\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} \leq C \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}}.$$

Como $-\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{0}$ em $[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$, $\nabla q \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e, portanto tem-se que $\Delta \mathbf{u} \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ ($\mathbf{u} \in \mathbf{T}_{p,0}(\Omega)$) então tal igualdade vale em $[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$, isto é,

$$\langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} = 0.$$

Agora prova-se que o sistema (S2) é equivalente ao problema variacional : encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $q \in W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi) d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} &= \\ - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}, & \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega), \forall \pi \in W^{1,p'}(\Omega).$$

Seja (\mathbf{u}, q) a solução de (S2) . Por hipótese $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$, de $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\tau} + \mathbf{g}_n = \mathbf{g}_{\tau} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_{\tau}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sobre Γ vem que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde $\mathbf{u}_{\tau} = \mathbf{g}_{\tau} = \mathbf{g}$ igualdades estas válidas no sentido de $\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$. Usando os lemas (4.9) e (4.6) para toda $\mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ &= - \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ &= - \left[\int_{\Omega} \mathbf{u} \Delta \mathbf{w} d\mathbf{x} - \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right] - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{u} \Delta \mathbf{w} d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Além disto, para toda $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$ e $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em $L^p(\Omega)$ tem-se

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \pi d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{1/p,p'}(\Gamma), W^{-1/p,p}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \pi d\mathbf{x} = 0.$$

Isto mostra que o par (\mathbf{u}, q) é a solução da formulação variacional (5.7). Reciprocamente, se (\mathbf{u}, q) satisfaz a formulação variacional (5.7), então para $\pi \equiv 0 \in W^{1,p'}(\Omega)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\Delta \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} &= - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\Delta \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} &= - \langle \mathbf{g}, \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \end{aligned}$$

Assim, se $\mathbf{w} \in \mathcal{D}^3(\Omega) \subset \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ então $\nabla \mathbf{w} \equiv 0$ numa vizinhança de Γ . Usando integração por partes na integral da igualdade anterior e usando o lema (4.6) vem que

$$\int_{\Omega} -\Delta \mathbf{u} \mathbf{w} d\mathbf{x} + \langle \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} = 0 \quad \text{ou ainda,}$$

$$\begin{aligned} \langle -\Delta \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \langle -\Delta \mathbf{u} + \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} &= 0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{p'}(\Omega)$, conclui-se que a última igualdade também vale também para $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{X}_{p'}(\Omega)$ e donde, segue que $-\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{0}$ em $[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$. Da igualdade (5.7) com os lemas (4.6) e (4.9) vem que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \pi dx &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \Delta \mathbf{w} dx + \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{u}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= \langle \Delta \mathbf{u} - \nabla q, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= 0 + \langle \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= \langle \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Em particular, para π função constante tem-se que

$$\langle \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} = \langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Para $\mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ vem que $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \in \mathbf{Z}_{p'}(\Gamma)$ e portanto, $\mathbf{0} = (\mathbf{u} - \mathbf{g}) \in [\mathbf{Z}_{p'}(\Gamma)]^*$; logo $(\mathbf{u} - \mathbf{g}) \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Omega)(\Gamma)$ e $(\mathbf{u} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Agora, por hipótese $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ donde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. Portanto, $\mathbf{u} - \mathbf{g} = \mathbf{0}$ em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$.

Também, para $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$ tem-se, pelo lema (4.7)

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi dx + \int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}.$$

Como $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \pi dx = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$ segue que

$$\int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0.$$

Em particular, se $\pi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $\int_{\Omega} \pi \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0$. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^{p'}(\Omega)$ segue que esta última igualdade é válida para qualquer $\pi \in L^{p'}(\Omega)$ donde conclui-se que $\operatorname{div} \mathbf{u} \in [L^{p'}(\Omega)]^*$, ou seja, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ em $L^p(\Omega)$.

Agora resolve-se o problema (5.7). De acordo com o teorema (3.8) aplicado com $m = 2$, para cada $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ e $\varphi \in W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)$, existe um único par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \times W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$ solução de:

$$(S3) \quad \begin{cases} -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi = \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = \varphi & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Além disto, pela continuidade da transformação $\gamma_1 : W^{2,p'}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p,p'}(\Gamma)$ (teorema (4.5)) e a estimativa (3.9), com $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, para qualquer par $(\mathbf{f}, \varphi) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times [W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)]$ e para toda $\mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| &\leq \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{\mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\leq C_6 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{w}^{2,p'}(\Omega)} \\ &\leq C_6 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)} \left(\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{w}^{2,p'}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \right) \quad (5.8) \\ &\leq C_7 C_6 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)} \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \right) \quad (5.9) \\ &= C_8 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)} \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \right). \quad (5.10) \end{aligned}$$

Com $C_8 = C_6 C_7$. Da expressão (5.8) para (5.9) usou-se a propriedade de regularidade elítica associada ao Problema de Stokes (S3).

A limitação (5.10) e a linearidade do produto de dualidades $\left\langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)}$ diz que a transformação

$$(\mathbf{f}, \varphi) \mapsto \left\langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)},$$

é um elemento no espaço dual de $\mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times [W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)]$ com norma limitada por $C_8 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma)}$.

Observando que $\mathbf{L}^p(\Omega) = [\mathbf{L}^{p'}(\Omega)]^*$ e o espaço dual de $W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)$ é $W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$, pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo o sistema (S3) e a limitação (5.6). ■

Denomina-se Problema de Laplace com condição de Neumann (L_N) o seguinte sistema de equações:

$$(L_N) \begin{cases} -\Delta\phi = \rho & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \sigma & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Define-se K_p o seguinte conjunto:

$$K_p = \{v \in L^p(\Omega); \Delta v \in L^p(\Omega)\}.$$

Sendo este um espaço de Banach reflexivo com norma:

$$\|v\|_{K_p} = \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}.$$

O próximo resultado será um auxílio no desenvolvimento do teorema (5.7).

Teorema 5.4. *Seja Ω um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^3 de classe $C^{1,1}$. Para toda $\rho \in L^p(\Omega)$ e $\sigma \in W^{-1-1/p,p}(\Gamma)$ satisfazendo a condição de compatibilidade*

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \langle \sigma, 1 \rangle_{W^{-1-1/p,p}(\Gamma), W^{1+1/p,p'}(\Gamma)},$$

o Problema de Laplace com condição de Neumann (L_N) tem uma única solução $\phi \in L^p(\Omega)$ com a estimativa

$$\|\phi\|_{K_p} \leq C \left(\|\rho\|_{L^p(\Omega)} + \|\sigma\|_{W^{-1-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

O próximo lema será utilizado no lema (5.6).

Lema 5.5. *Se $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ então $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 \in \mathbf{W}^{-1,r}(\Omega)$.*

Demonstração: Ponha

$$\mathbb{F}_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}.$$

Por definição $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 = \left(\sum_{j=1}^n \frac{f_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{2j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{3j}}{\partial x_j} \right)$. Mostrar-se-á que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_j} \in W^{-1,r}(\Omega)$, para $k = 1, 2, 3$. Seja $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{D}^3(\Omega)$.

Então

$$\sum_{i,j=1}^3 \left\langle \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_j}, \varphi_i \right\rangle_{W^{-1,r}(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega)} = - \sum_{i,j=1}^3 \left\langle f_{kj}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)}.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^{r'}(\Omega)$ então dada $\psi \in L^{r'}(\Omega)$ existe sequência $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}^3(\Omega)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m = \psi$ em $L^{r'}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i,j=1}^3 \left\langle \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_j}, \psi_{m,i} \right\rangle_{W^{-1,r}(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega)} = - \sum_{i,j=1}^3 \left\langle f_{kj}, \frac{\partial \psi_{m,i}}{\partial x_j} \right\rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)}. \quad (5.11)$$

Procedendo de forma análogo ao lema (5.10) vem que

$$\sum_{i,j=1}^3 \left\langle \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_j}, \psi_i \right\rangle_{W^{-1,r}(\Omega), W_0^{1,r'}(\Omega)} = - \sum_{i,j=1}^3 \left\langle f_{kj}, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right\rangle_{L^r(\Omega), L^{r'}(\Omega)}.$$

■

A definição do espaço $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ foi dada no capítulo 2; o próximo lema apresenta uma caracterização dos elementos no espaço dual $[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$.

Lema 5.6. *Seja $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$. Então, existem $\mathbb{F}_0 = (f_{ij})_{i,j=1,2,3}$ tal que $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^{r'}(\Omega)$, $f_1 \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e satisfazendo:*

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1. \quad (5.12)$$

Além disto,

$$\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*} = \max \left\{ \|f_{ij}\|_{L^{r'}(\Omega)}, 1 \leq i, j \leq 3, \|f_1\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \right\}.$$

Reciprocamente, se \mathbf{f} satisfaz (5.12), então $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$.

Demonstração:

Antes de iniciar a demonstração deste resultado, vale a pena introduzir os seguintes espaços para uma melhor compreensão:

$$\mathbb{L}^r(\Omega) = \{M = (f_{ij})_{i,j=1,2,3}; f_{i,j} \in L^r(\Omega)\},$$

$$\mathbb{W}^{s,r}(\Omega) = \{M = (f_{ij})_{i,j=1,2,3}; f_{i,j} \in W^{s,r}(\Omega)\}.$$

Observe que

$$M = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathbf{E} = \mathbb{L}^r(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ o espaço com topologia dada pela norma

$$\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{E}} = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \|h_{ij}\|_{L^r(\Omega)} + \|h_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{h} = (\mathbb{H}_0, h_1) \in \mathbf{E},$$

com $\mathbb{H}_0 = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Considere aplicação $T : \varphi \in \mathbf{X}_{r,p}(\Omega) \mapsto (\nabla\varphi, \operatorname{div}\varphi) \in \mathbf{E}$. Dada $\varphi \in \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \|T\varphi\|_{\mathbf{E}} &= \|(\nabla\varphi, \operatorname{div}\varphi)\|_{\mathbf{E}} = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \left\| \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \right\|_{L^r(\Omega)} + \|\operatorname{div}\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &= \|\nabla\varphi\|_{L^r(\Omega)} + \|\operatorname{div}\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\varphi\|_{\mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)} + \|\operatorname{div}\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\varphi\|_{\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde T é uma isometria de $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ em \mathbf{E} .

Ponha $\mathbf{G} = T(\mathbf{X}_{r,p}(\Omega))$ com a topologia de \mathbf{E} . e defina $P : \mathbf{X}_{r,p}(\Omega) \rightarrow \mathbf{G}$.

a) P é injetora:

Dada $\varphi \in \operatorname{Ker}(P)$, isto é, $P\varphi = 0$. Pela isometria $0 = \|P\varphi\|_{\mathbf{E}} = \|\varphi\|_{\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)}$, ou ainda,

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)} + \|\operatorname{div}\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \implies \|\varphi\|_{\mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)} = \|\operatorname{div}\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0, \text{ donde } \varphi \equiv \mathbf{0}.$$

Como P é linear, já que os operadores gradiente e divergente são lineares, então, pelo teorema (6.23), segue a injetividade. Aqui, $\operatorname{Ker}(L) = \{u \in A; Lu = 0\}$ (núcleo), onde $L : A \rightarrow B$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais A e B .

b) P é sobrejetora:

Dada $\psi \in \mathbf{G}$, como $\mathbf{G} = T(\mathbf{X}_{r,p}(\Omega))$ vem que existe $\varphi \in \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ tal que $T\varphi = \psi$. Pela definição de P vem que $P\varphi = \psi$. Logo, P é sobrejetora. Portanto, P é bijetora. Defina $S := P^{-1} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$.

Então para toda $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$ pode-se definir uma forma linear e contínua

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{G} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{h} &\mapsto \psi(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

com $\psi(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{f}, S\mathbf{h} \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)}$.

Devido ao Teorema de Hahn-Banach, tal aplicação pode ser estendida para uma forma linear e contínua em \mathbf{E} denotada por \mathbf{F} tal que $\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{E}^*} = \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*}$. Além disto, pela caracterização dos espaços duais de $\mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, e da caracterização $\mathbf{E}^* = \mathbb{L}^{r'}(\Omega) \times W^{-1,p'}(\Omega)$ existem $\mathbb{F}_0 = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathbb{L}^{r'}(\Omega)$ e $f_1 \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tais que: para toda $\mathbf{h} = (\mathbb{H}_0, h_1) \in \mathbf{E}$,

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = \sum_{i,j=1}^3 \langle f_{ij}, h_{ij} \rangle_{L^{r'}(\Omega), L^r(\Omega)} + \langle f_1, h_1 \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)},$$

com $\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{E}^*} = \max \left\{ \|f_{ij}\|_{L^{r'}(\Omega)}, 1 \leq i, j \leq 3; \|f_1\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \right\}$.

Para $\mathbf{h} = T(\varphi) = (\nabla \varphi, \operatorname{div} \varphi) \in \mathbf{G}$ com $\varphi \in \mathcal{D}^3(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} &= \langle \mathbf{F}, (\nabla \varphi, \operatorname{div} \varphi) \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle f_{ij}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \rangle_{L^{r'}(\Omega), L^r(\Omega)} + \langle f_1, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \langle f_{ij}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} + \langle f_1, \operatorname{div} \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= - \sum_{i,j=1}^3 \langle \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} - \langle \nabla f_1, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= - \sum_{i,j=1}^3 \langle \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}, \varphi_i \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} - \langle \nabla f_1, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= - \langle \nabla \cdot \mathbb{F}_0, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} - \langle \nabla f_1, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \\ &= \langle -\nabla \cdot \mathbb{F}_0 - \nabla f_1, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{F}|_{\mathbf{G}} = \psi$ então para toda $\mathbf{h} = T(\varphi)$ tem-se $\langle \mathbf{F}, \mathbf{h} \rangle = \psi(\mathbf{h})$, com $\varphi \in \mathcal{D}^3(\Omega)$. Para $\varphi \in \mathcal{D}^3(\Omega)$ considere,

$$\begin{aligned} \langle -\nabla \cdot \mathbb{F}_0 - \nabla f_1, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)} &= \langle \mathbf{F}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = \psi(\mathbf{h}) \\ &= \langle \mathbf{f}, S\mathbf{h} \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)} \\ &= \langle \mathbf{f}, P^{-1}\mathbf{h} \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)} \\ &= \langle \mathbf{f}, P^{-1}T(\varphi) \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)} \\ &= \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle -\nabla \cdot \mathbb{F}_0 - \nabla f_1, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)} = \langle \mathbf{f}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^3(\Omega).$$

Como $\mathcal{D}^3(\Omega)$ é denso em $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ segue que esta última igualdade é válida para toda $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$, isto é,

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbb{F}_0 - \nabla f_1 \quad \text{em } [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*.$$

Reciprocamente, sendo f_1 um elemento em $W^{-1,p'}(\Omega)$ pelo lema (4.6) vem que $\nabla f_1 \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$. Pela definição de $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)$ tem-se que $\mathbf{X}_{r,p}(\Omega) \subset \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)$. Por dualidade $\mathbf{W}^{-1,r'}(\Omega) \subset [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$. Dada $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^{r'}(\Omega)$, como feito anteriormente, $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 \in \mathbf{W}^{-1,r'}(\Omega)$. Desta forma, $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$. Como $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1$ então $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r,p}(\Omega)]^*$. ■

Proposição 5.7. *Sejam*

$$\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \quad h \in L^p(\Omega), \quad \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma),$$

satisfazendo a condição de compatibilidade (5.2). Então o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução muito fraca $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$. Além disto, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de p e Ω tal que:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Além disto, $\mathbf{u} \in \mathbf{T}_p(\Omega)$ e

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{T}_p(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Demonstração:

(i) Suponha que $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ e $\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$.

Considere o seguinte problema equivalente: Encontrar $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que: $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega), \forall \pi \in W^{1,p'}(\Omega)$

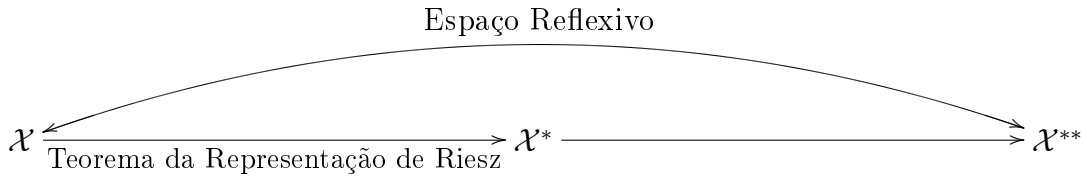
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi) d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Note que a equação (5.13) foi obtida somando-se as equações (5.3) e (5.4), considerando $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$.

O objetivo de se trabalhar no espaço dual é a possibilidade de encontrar solução. Denote $\mathcal{X} := \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times W_0^{1,p'}(\Omega)$. Assim, $\mathcal{X}^* = [\mathbf{L}^{p'}(\Omega)]^* \times [W_0^{1,p'}(\Omega)]^* \cong \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$. Note que as soluções são procuradas em \mathcal{X}^* . Como os espaços $\mathbf{L}^p(\Omega)$ e $W^{-1,p}(\Omega)$ são reflexivos, pela proposição (6.22) e teorema (6.30), respectivamente, $[\mathbf{L}^p(\Omega)]^*$ e $[W^{-1,p}(\Omega)]^*$ também são reflexivos pelo teorema (6.31). Como o produto cartesiano de dois espaços reflexivos é reflexivo então $[\mathbf{L}^p(\Omega)]^* \times [W^{-1,p}(\Omega)]^*$ é reflexivo. Desta forma, pelo lema (6.18), $[\mathbf{L}^p(\Omega)]^*$ e $[W^{-1,p}(\Omega)]^*$ podem ser identificados isomorfo e isometricamente com os seus biduais, isto é, $[\mathbf{L}^p(\Omega)]^* \cong [[\mathbf{L}^p(\Omega)]^*]^{**}$ e $[W^{-1,p}(\Omega)]^* \cong [[W^{-1,p}(\Omega)]^*]^{**}$ (veja lema (6.18)). Mas,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{**} &= [\mathcal{X}^*]^* \cong [\mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)]^* \cong [\mathbf{L}^p(\Omega)]^* \times [W^{-1,p}(\Omega)]^* \\ &\cong [[\mathbf{L}^{p'}(\Omega)]^*]^* \times [[W_0^{1,p'}(\Omega)]^*]^* \cong [\mathbf{L}^{p'}(\Omega)]^{**} \times [W_0^{1,p'}(\Omega)]^{**} \\ &\cong \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times W_0^{1,p'}(\Omega) = \mathcal{X}. \quad \text{Isto é, } \mathcal{X}^{**} \cong \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Além disto, dada uma solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathcal{X}^{**}$, pela isometria $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \|\Delta \mathbf{w}\|_{[\mathbf{L}^p(\Omega)]^*}$ e $\|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \|\nabla \pi\|_{[W_0^{1,p'}(\Omega)]^*}$, com (\mathbf{w}, π) solução do problema dual de Stokes. Via Teorema da Representação de Riesz, obtém-se uma dupla de funções, por meio de uma transformação linear e contínua, solução da equação (5.13) e por meio do Problema de Neumann, cuja solução é única, chega-se a solução do problema inicial. O seguinte diagrama relaciona a reflexividade dos espaços \mathcal{X} , \mathcal{X}^{**} e a relação entre \mathcal{X} , \mathcal{X}^* via teorema.



A solução do problema dual é o par (\mathbf{w}, π) . Pela definição de $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$, o laplaciano de \mathbf{w} está em $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ e como $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)$ tem-se que o gradiente de π está em $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$; portanto $-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi$ está em $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$, o qual é o dual de $\mathbf{L}^p(\Omega)$. Além disto, como $\mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ o divergente de \mathbf{w} está em $W_0^{1,p'}(\Omega)$ cujo dual é o $W^{-1,p}(\Omega)$, espaço no qual está q .

$$\text{Ponha } J_1 := \left| \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} \right|.$$

Considere

$$J_1 \leq \left| \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \right| + \left| \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{w}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| + \left| \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} \right| =: J_2.$$

Avaliando-se cada módulo na igualdade J_2 tem-se que

$$\bullet \left| \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \right| \leq \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)},$$

pelo imersão contínua de $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ em $\mathbf{X}_{p'}(\Omega)$ (lema (4.3)).

$$\bullet \left| \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| \leq \|\mathbf{g}_\tau\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{\mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma)}.$$

Observe que pelo teorema (4.5), item (ii), para $s = 2$, vem que a derivada normal de \mathbf{w} está em $\mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma)$.

Denote $\mathbf{g}_n = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{n}}$. Como $\mathbf{g} = \mathbf{g}_\tau + \mathbf{g}_n$ em Γ e $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ então

$$\|\mathbf{g}_\tau\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} = \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)}.$$

Usando a continuidade do operador traço da derivada normal definido de $\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)$ com valores em $\mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma)$, pelo teorema (4.5), item (i), para $s = 2$, vem que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{\mathbf{W}^{1-1/p',p'}(\Gamma)} \leq C_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)}.$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\bullet \left| \int_{\Omega} h \pi \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\Omega} |h \pi| \, d\mathbf{x} \leq \|h\|_{L^p(\Omega)} \|\pi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|h\|_{L^p(\Omega)} \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)},$$

pois $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$.

Assim,

$$J_2 \leq \tilde{C} \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} C_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Gamma)} + \|h\|_{L^p(\Omega)} \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} =: J_3.$$

Agora,

$$\tilde{C} \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} (\tilde{C} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}),$$

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} C_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Gamma)} \leq \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} C_1 (\tilde{C} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Gamma)} + \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}),$$

$$\bar{C} \|h\|_{L^p(\Omega)} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \leq \|h\|_{L^p(\Omega)} (\tilde{C} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Gamma)} + \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} J_3 &\leq (\tilde{C} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + \bar{C} \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}) (\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} + C_1 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq C_3 (\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)}) C_4 (\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}) =: J_4. \end{aligned}$$

com $C_3 = \max \{ \bar{C}; \tilde{C} \}$, $C_4 = \max \{ C_1; 1 \}$.

Em particular, sendo $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \times W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$ a única solução do Problema dual de Stokes,

$$(PD) \begin{cases} -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi = \mathbf{F} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = \varphi & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Vale a seguinte propriedade regularidade elítica :

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^{2,p'}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_2 \left(\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \right).$$

Assim,

$$J_4 \leq C(\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)})(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^p(\Omega)}) =: J_5,$$

com $C = C_3 C_2 C_4$.

Afirmação 5.8. *A transformação*

$$\begin{aligned} T : \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times (W^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{F}, \varphi) &\longmapsto T(\mathbf{F}, \varphi) \end{aligned}$$

com $T(\mathbf{F}, \varphi) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x}$, é um elemento do espaço dual de $\mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times (W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega))$.

Observe que dado $(\mathbf{F}, \varphi) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times (W^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega))$ obtém-se, pelo sistema (PD), o par de funções $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \times W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$. A transformação T leva o par (\mathbf{F}, φ) em $\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x}$.

Demonstração:

(b) T é linear:

Sejam $(\mathbf{F}_1, \varphi_1), (\mathbf{F}_2, \varphi_2) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times (W_0^{1,p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega))$.

Considere

$$T(\mathbf{F}_1, \varphi_1) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_1 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi_1 d\mathbf{x},$$

$$T(\mathbf{F}_2, \varphi_2) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_2 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \pi_2 d\mathbf{x},$$

com $(\mathbf{w}_1, \pi_1), (\mathbf{w}_2, \pi_2) \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \times W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$ soluções únicas dos Problemas de Stokes duais:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{w}_1 + \nabla \pi_1 &= \mathbf{F}_1 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_1 &= \varphi_1 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w}_1 &= \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{w}_2 + \nabla \pi_2 &= \mathbf{F}_2 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_2 &= \varphi_2 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Somando membro a membro as respectivas equações dos sistemas (5.14) e (5.15) e observando que os operadores laplaciano(Δ), gradiente (∇) e divergente(div) são lineares,

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + \nabla(\pi_1 + \pi_2) &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \varphi_1 + \varphi_2) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ &\quad - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h(\pi_1 + \pi_2) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_1 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_2 \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)}, \\ \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} &= \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\quad + \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), \mathbf{W}^{1/p,p'}(\Gamma)} \text{ e} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} h(\pi_1 + \pi_2) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} h\pi_1 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} h\pi_2 d\mathbf{x},$$

vem que $T(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \varphi_1 + \varphi_2) = T(\mathbf{F}_1, \varphi_1) + T(\mathbf{F}_2, \varphi_2)$.

Agora, para $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema

$$\begin{aligned}\alpha(-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi) &= \alpha \mathbf{F} & \text{em } \Omega, \\ \alpha(\operatorname{div} \mathbf{w}) &= \alpha \varphi & \text{em } \Omega, \text{ donde,} \\ \alpha \mathbf{w} &= \alpha \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\Delta(\alpha \mathbf{w}) + \nabla(\alpha \pi) &= \alpha \mathbf{F} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\alpha \mathbf{w}) &= \alpha \varphi & \text{em } \Omega, \\ \alpha \mathbf{w} &= \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}T(\alpha(\mathbf{F}, \varphi)) &= \langle \mathbf{f}, \alpha \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{x}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{x}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial(\alpha \mathbf{w})}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{w}^{-1/p, p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p, p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h(\alpha \pi) d\mathbf{x} \\ &= \alpha \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{x}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{x}_{p'}(\Omega)} - \alpha \langle \mathbf{g}_\tau, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\mathbf{w}^{-1/p, p}(\Gamma), \mathbf{w}^{1/p, p'}(\Gamma)} - \alpha \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} \\ &= \alpha T(\mathbf{F}, \varphi).\end{aligned}$$

(a) T é contínua:

Por J_5 , segue a limitação de T com norma majorada por

$C(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{x}_{p'}(\Omega)]^*} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{w}^{-1/p, p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^p(\Omega)})$. Pelo Teorema da continuidade e limitação (6.25), vem que T é contínua, já que é linear.

Pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p \times W^{-1, p}(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$T(\mathbf{F}, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{F} d\mathbf{x} + \langle q, \varphi \rangle_{W^{-1, p}(\Omega), W_0^{1, p'}(\Omega)},$$

para qualquer $(\mathbf{F}, \varphi) \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \times [W_0^{1, p'}(\Omega) \cap L_0^{p'}(\Omega)]$. Em particular vale

$$T(\mathbf{F}, -\varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{F} d\mathbf{x} + \langle q, -\varphi \rangle_{W^{-1, p}(\Omega), W_0^{1, p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{F} d\mathbf{x} - \langle q, \varphi \rangle_{W^{-1, p}(\Omega), W_0^{1, p'}(\Omega)}.$$

Mas, $-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi = \mathbf{F}$ e $\operatorname{div} \mathbf{w} = \varphi$ em Ω , donde

$$T(\mathbf{F}, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(-\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi) d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div} \mathbf{w} \rangle_{W^{-1, p}(\Omega), W_0^{1, p'}(\Omega)}$$

Desta forma, a igualdade (5.13) é satisfeita.

ii): Suponha agora que $\int_{\Omega} h(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$ e considere o Problema de Neumann: encontrar $\theta \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que:

$$(N) \begin{cases} \Delta\theta = h & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

o qual tem uma única solução $\theta \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$, pelo teorema (5.4), e verifica a estimativa:

$$\|\theta\|_{W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|h\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)}).$$

Colocando-se $\mathbf{u}_0 = \nabla\theta$, onde θ é a solução do problema de Neumann acima, tem-se, pelo passo (i), que existe uma única solução $(\mathbf{z}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1/p,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ do problema:

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{z} + \nabla q &= \mathbf{f} + \nabla h & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{z} &= 0 & \text{em } \Omega. \\ \mathbf{z} &= \mathbf{g} - \mathbf{u}_0|_{\Gamma} & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Pelo lema (5.6) implica que $\nabla h \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e $\mathbf{g} - \mathbf{u}_0|_{\Gamma}$ satisfaz a hipótese do passo (i). Finalmente, o par de funções $(\mathbf{u}, q) = (\mathbf{z} + \mathbf{u}_0, q)$ é a solução requerida.

Suponha θ a única solução do problema de Neumann. Assim, $\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$, mas $\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \nabla\theta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}$, assim

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \text{ em } W^{-1/p,p}(\Gamma). \tag{5.16}$$

Como $\mathbf{z} = \mathbf{g} - \mathbf{u}_0|_{\Gamma}$ sobre Γ e por (5.16), vem que $\mathbf{z}_{\tau} = \mathbf{g}_{\tau} - \mathbf{u}_{0\tau}$. Observe que $\operatorname{div}\mathbf{u}_0 = \operatorname{div}\nabla\theta = \Delta\theta = h$ em Ω .

Dada $\varphi \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$ considere

$$\begin{aligned} I_1 : &= - \int_{\Omega} (\mathbf{z} + \mathbf{u}_0)\Delta\varphi d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div}\varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{z}\Delta\varphi d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0\Delta\varphi d\mathbf{x} - \langle q, \operatorname{div}\varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pelo lema (4.6), $\langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} = - \langle q, \operatorname{div} \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}$. Deseja-se usar a fórmula de Green dada pelo lema (4.9). Para isto é necessário que as hipóteses de tal lema sejam satisfeitas. Como foi mostrado na proposição (5.2) $\Delta \mathbf{z} \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e sendo \mathbf{z} um elemento de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ então $\mathbf{z} \in \mathbf{T}_p(\Omega)$. Como $\Delta \mathbf{u}_0 = \nabla h$ e $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ vem que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{T}_p(\Omega)$. Então, com $\operatorname{div} \mathbf{z} = 0$ em Ω e $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ em $W^{1,p,p}(\Gamma)$, considere,

$$\begin{aligned} I_2 &:= - \int_{\Omega} \mathbf{z} \Delta \varphi d\mathbf{x} = - \left[\langle \Delta \mathbf{z}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{z}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right] \\ &= - \langle \Delta \mathbf{z}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{z}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \langle \Delta \mathbf{z}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau} - \mathbf{u}_{0\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \langle \Delta \mathbf{z}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\quad + \langle \mathbf{u}_{0\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &:= - \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \Delta \varphi d\mathbf{x} = - \left[\langle \Delta \mathbf{u}_0, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \mathbf{u}_{0\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right] \\ &= - \langle \Delta \mathbf{u}_0, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{u}_{0\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 + \langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ &= - \langle \Delta \mathbf{z}, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &\quad - \langle \Delta \mathbf{u}_0, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} + \langle \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} \\ &= \langle -\Delta \mathbf{z} - \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= \langle -\Delta \mathbf{z} - \nabla h + \nabla q, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= \langle f, \varphi \rangle_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{p'}(\Omega)} - \langle \mathbf{g}_{\tau}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Desta forma, a igualdade (5.3) é satisfeita. Seja $\pi \in W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$,

$$I_4 := \int_{\Omega} (\mathbf{z} + \mathbf{u}_0) \nabla \pi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{z} \nabla \pi + \mathbf{u}_0 \nabla \pi) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{z} \nabla \pi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \nabla \pi d\mathbf{x}.$$

Como feito anteriormente, usa-se a fórmula de Green (lema (4.7)). Como $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\operatorname{div} \mathbf{z} = 0 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ então $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_{p,p}(\Omega)$. Sendo $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ segue que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_p(\Omega)$. Desta forma,

$$\int_{\Omega} \mathbf{z} \nabla \pi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{z} \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} = \langle \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}$$

Considere,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \nabla \pi d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \theta \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} + \langle \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\ &= - \int_{\Omega} h \pi d\mathbf{x} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \pi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.9. *Sejam $\mathbf{f}, h, \mathbf{g}$ satisfazendo (5.1) e (5.2). Então, o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução muito fraca $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$. Além disto, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de p e Ω tal que:*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{x}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Além disto, $\mathbf{u} \in \mathbf{T}_{p,r}(\Omega)$ e

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{T}_{p,r}(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{x}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Em particular, se $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,r_0}(\Omega)$ e $h \in L^{r_0}(\Omega)$ com $r_0 = 3p/(3+p)$, então $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p \times W^{-1,p}(\Omega)$, com as estimativas correspondentes.

Demonstração:

Deseja-se usar as hipóteses $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ e $h \in L^r(\Omega)$ em vez de $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*$ e $h \in L^p(\Omega)$, aparecendo na definição de solução muito fraca do Problema (S), então as diferenças na prova são relacionadas a:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)} \quad \text{para } \mathbf{w} \in \mathbf{Y}_{p'}(\Omega)$$

Observe que $\mathbf{Y}_{p'}(\Omega) \subset \mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)$ se $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, o qual é o caso definido no lema (4.9). Portanto, o mesmo estudo pode ser feito, apenas substituindo a limitação $\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{p'}(\Omega)]^*}$ por $\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*}$.

Agora, resolve-se o Problema (N) com $h \in L^r(\Omega)$. O Problema (N) é equivalente ao problema: encontrar $\theta \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que:

$$\forall \varphi \in W^{1,p'}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x}. \quad (5.17)$$

o qual está bem definido para $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$, observe que, pelo lema (4.2), $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ se $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, e como $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$ então $\gamma_0 \varphi \in W^{1/p,p}(\Gamma)$.

Suponha, inicialmente, que θ seja a solução do Problema de Neumann (N). Como $\theta \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ vem que $\nabla \theta \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ e $\operatorname{div} \nabla \theta = \Delta \theta = h \in L^r(\Omega)$, donde $\nabla \theta \in \mathbf{H}_{p,r}(\operatorname{div}, \Omega)$. Pelo lema (4.7), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} &= \langle \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \nabla \theta d\mathbf{x} \\ &= \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}, \varphi \right\rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta d\mathbf{x} \\ &= \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \varphi h d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$, ou seja, θ é a solução do problema variacional (5.17).

Reciprocamente, suponha que a igualdade (5.17) seja verdadeira para toda $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$. Por um lado, usando novamente o lema (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} &= \langle \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \nabla \theta d\mathbf{x} \\ &= \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}, \varphi \right\rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \varphi d\mathbf{x} = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x},$$

para toda $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$.

Logo,

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}, \varphi \right\rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} = - \int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varphi \Delta \theta d\mathbf{x}.$$

Donde,

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \right\rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} = \int_{\Omega} (\Delta \theta - h) \varphi d\mathbf{x}.$$

Isto é, o funcional $\Delta \theta - h$ aplicado a toda $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$ é exatamente igual ao funcional $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ definido em elementos no conjunto $W^{1/p,p'}(\Gamma)$. Assim, tais funcionais são necessariamente nulos, ou seja, $\Delta \theta - h \equiv 0$ em Ω e $\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ em Γ . De fato, para que os funcionais possam ser comparados, eles devem ter o mesmo domínio. Assim, o funcional $T := \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ deve ser entendido como sendo a composição do funcional T com o operador traço, nesta ordem. O domínio do operador traço deve ser tomado como o $W^{1,p'}(\Omega)$ e o seu espaço de chegada como sendo $W^{1/p,p'}(\Gamma)$ (conforme seção 5.1) e este último, sendo o domínio do funcional T . Desta forma, o funcional T composto com o operador traço tem por domínio o mesmo domínio do operador $\Delta \theta - h$ e eles coincidem em todos os elementos φ de $W^{1,p'}(\Omega)$. Portanto eles são iguais e como, pelo menos um deles, é o funcional nulo, segue que o outro também deve ser.

A transformação $\ell : \varphi \mapsto \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x}$ define um elemento do espaço dual $[W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}]^*$. De fato, ℓ está bem definido, é linear e contínuo.

(a) Boa definição :

Observe que pela condição (5.2)

$$\langle \ell, 1 \rangle = \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h 1 d\mathbf{x} = 0.$$

Dados $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$ e $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \langle \ell, \varphi + k \rangle &= \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi + k \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h(\varphi + k) d\mathbf{x} \\
 &= \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} + \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, k \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \\
 &\quad - \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x} - \int_{\Omega} hk d\mathbf{x} \\
 &= \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x} \\
 &\quad + k \left[\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h d\mathbf{x} \right] \\
 &= \langle \ell, \varphi \rangle - k \langle \ell, 1 \rangle = \langle \ell, \varphi \rangle,
 \end{aligned}$$

donde $\langle \ell, \varphi + k \rangle = \langle \ell, \varphi \rangle$. Desta forma, $\langle \ell, \psi \rangle = \langle \ell, \varphi \rangle$, $\forall \psi \in \dot{\varphi}$. Aqui, ψ é um elemento na classe de equivalência de φ .

(b) Continuidade :

Como para toda $\dot{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$ e tal que $\psi \in \dot{\varphi}$ tem-se que $|\langle \ell, \psi \rangle| = |\langle \ell, \varphi \rangle|$.

Assim

$$\begin{aligned}
 \left| \langle \tilde{\ell}, \varphi \rangle \right| &= \left| \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \left| \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \right| + \left| \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} \|\varphi\|_{W^{1/p,p'}(\Gamma)} + \|h\|_{L^r(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{r'}(\Omega)} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

$$\leq \|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} C_1 \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(\Omega)} C_2 \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)} \quad (5.19)$$

$$\leq C \left(\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^r(\Omega)} \right) \|\varphi\|_{W^{1,p'}(\Omega)},$$

com $C = \max \{C_1, C_2\}$. Da desigualdade (5.18) para (5.19) foram usados o teorema (4.5), item (ii) e imersão $W^{1,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{r'}(\Omega)$. Logo, $\tilde{\ell}$ é contínua em $W^{1,p'}(\Omega)$, e portanto, ℓ é contínua em $W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$.

(c) Linearidade :

Das linearidades do funcional $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ e da integral $\int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x}$ segue que ℓ é linear. Além disto, a seguinte condição inf-sup é verificada:

$$\inf_{\substack{\dot{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R} \\ \dot{\varphi} \neq 0}} \sup_{\substack{\dot{\theta} \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R} \\ \dot{\theta} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} \nabla \dot{\theta} \cdot \nabla \dot{\varphi} d\mathbf{x}}{\|\nabla \dot{\theta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|\nabla \dot{\varphi}\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}} > 0.$$

De fato, suponha $\ell \neq 0$, ou seja, existe $\varphi \in W^{1,p'}(\Omega)$ tal que $\ell(\varphi) \neq 0$. Assim,

$$\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} \neq \int_{\Omega} h\varphi d\mathbf{x}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla \dot{\theta} \cdot \nabla \dot{\varphi} d\mathbf{x} \right| &= \left| \langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{W^{-1/p,p}(\Gamma), W^{1/p,p'}(\Gamma)} - \int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x} \right| > 0 \\ &\Rightarrow \\ \sup_{\dot{\theta} \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \left| \int_{\Omega} \nabla \dot{\theta} \cdot \nabla \dot{\varphi} d\mathbf{x} \right| > 0 &\Rightarrow \inf_{\substack{\dot{\varphi} \in W^{1,p'}(\Omega)/\mathbb{R} \\ \dot{\varphi} \neq 0}} \sup_{\substack{\dot{\theta} \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R} \\ \dot{\theta} \neq 0}} \left| \int_{\Omega} \nabla \dot{\theta} \cdot \nabla \dot{\varphi} d\mathbf{x} \right| > 0 \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Babuška-Brezzi, veja em [8] e [5], o problema (N) tem uma única solução $\theta \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ e que satisfaz a estimativa:

$$\|\theta\|_{W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C (\|\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} + \|h\|_{L^r(\Omega)}).$$

Se, ao contrário, $\ell \equiv 0$, então para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset W^{1,p'}(\Omega)$ tem-se que $\langle \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle = 0$ e portanto, $\int_{\Omega} h \varphi d\mathbf{x} = 0$. Logo, $h \equiv 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e como $h \in L^p(\Omega)$ segue que $h \equiv 0$ em $L^p(\Omega)$. Neste caso, o problema (N) se transforma em

$$(N) \begin{cases} -\Delta \theta = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

cujo resultado de existência e unicidade de solução é garantida no Corolário (4.12) em [3]. ■

Lema 5.10. *Se $f_1 \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ então $\nabla f_1 \in W^{-1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Por definição $\nabla f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right)$. Deseja-se mostrar que para cada $k = 1, 2, 3$

$$\left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}$$

é linear e contínuo.

Seja $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Assim,

$$\left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \psi \right\rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = - \left\langle f_1, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)}.$$

Dada $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$, pela densidade de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^{p'}(\Omega)$ existe uma sequência $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = \varphi$ em $L^{p'}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \varphi_m \right\rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} = - \left\langle f_1, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \right\rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)}. \quad (5.20)$$

Considere

$$\begin{aligned} \langle f_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)} &= \int_{\Omega} f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} f_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_1 \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} d\mathbf{x} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_1, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} \rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)} \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \varphi_m \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} &= - \langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)} \\ &= - \langle \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \varphi \rangle_{W^{-1,p}(\Omega), W_0^{1,p'}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Da igualdade (5.21) para a igualdade (5.22) foi usado o Teorema da convergência dominada de Lebesgue. A continuidade dos elementos de $W^{-1,p}(\Omega)$ possibilitaram a passagem do limite da igualdade (5.23) para (5.24). Como $\langle f_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)}$ é linear e contínuo então segue o resultado. ■

Corolário 5.11. *Sejam \mathbf{f}, h e \mathbf{g} satisfazendo (5.2) e $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1$ com $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^r(\Omega)$, $f_1 \in W^{-1,p}(\Omega)$, $h \in L^r(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{1-1/r,r}(\Gamma)$. Então a velocidade-solução \mathbf{u} dada pelo teorema (5.9) pertence a $\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)$. Se, além disto, $f_1 \in L^r(\Omega)$, então a pressão-solução q dada pelo teorema (5.9) pertence a $L^r(\Omega)$. Em ambos os casos, tem-se as estimativas correspondentes.*

Demonstração:

Seja $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ a solução dada pelo teorema (5.9).

De $-\Delta \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f}$ em $[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ vem que

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla q &= \nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1, \\ -\Delta \mathbf{u} + \nabla q - \nabla f_1 &= \nabla \cdot \mathbb{F}_0, \\ -\Delta \mathbf{u} + \nabla(q - f_1) &= \nabla \cdot \mathbb{F}_0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla(q - f_1) &= \nabla \cdot \mathbb{F}_0 && \text{em } [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= h && \text{em } L^r(\Omega), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \mathbf{W}^{1-1/r,r}(\Gamma). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^r(\Omega)$ então $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 \in \mathbf{W}^{-1,r}(\Omega)$, isto é, cada entrada do vetor $\nabla \cdot \mathbb{F}_0$ pertence a $\mathbf{W}^{-1,r}(\Omega) \subset [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$. Pela imersão $W^{1-1/r,r}(\Gamma) \hookrightarrow W^{-1/p,p}(\Gamma)$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$, vem que $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$. Pelo teorema (3.7), parte (i), tem-se que $(\mathbf{u}, q - f_1) \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)/\mathbb{R}$.

Estimativas:

- a velocidade-solução $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)} + \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C_1 \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right),$$

- a pressão-solução $q \in L^r(\Omega)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)} + \|q\|_{L^r(\Omega)} \leq C_2 \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/r,r}(\Gamma)} \right).$$

■

O próximo corolário dá soluções de Stokes (\mathbf{u}, q) em espaços fracionários de Sobolev do tipo $\mathbf{W}^{\sigma,p} \times W^{\sigma-1,p}$, com $0 < \sigma < 2$.

Corolário 5.12. *Seja s um número real tal que $0 \leq s \leq 1$.*

(i) *Sejam $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1$, h e \mathbf{g} satisfazendo a condição de compatibilidade (5.2) com $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{W}^{s,r}(\Omega)$, $f_1 \in W^{s-1,p}(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma)$, $h \in W^{s,r}(\Omega)$, com $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{3}$ e $r \leq p$. Então, o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo a estimativa*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)} + \|q\|_{W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbb{F}_0\|_{\mathbb{W}^{s,r}(\Omega)} + \|f_1\|_{W^{s-1,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

(ii) *Assuma que*

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{s-1,p}(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{s+1-1/p,p}(\Gamma), h \in W^{s,p}(\Omega),$$

com a condição de compatibilidade (5.2). Então o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{s+1,p}(\Omega) \times W^{s,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ com

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{s+1,p}(\Omega)} + \|q\|_{W^{s,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{s-1,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{s+1-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Demonstração(i):

Será usado um argumento de interpolação. Considere a notação de espaços interpolados

$$W^{s,p}(\Omega) = [W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)]_{1-s},$$

$$\text{Para } s = 0 \text{ tem-se } W^{0,p}(\Omega) = [W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)]_1 = L^p(\Omega),$$

$$\text{Para } s = 1 \text{ tem-se } W^{1,p}(\Omega) = [W^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)]_0 = W^{1,p}(\Omega).$$

Para $0 < s < 1$,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Para $s = 0$,

- $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma) = \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)$,
- $h \in W^{s,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$,
- $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{W}^{s,r}(\Omega) = \mathbb{W}^{0,r}(\Omega) = \mathbb{L}^r(\Omega)$,
- $f_1 \in W^{s-1,p}(\Omega) = W^{-1,p}(\Omega)$.

Pelo lema (5.6) tem-se que $\mathbf{f} \in [\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*$ e usando o teorema (5.9) parte (i) vem que existe uma única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade a seguir. Ponha $I := \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|q\|_{W^{-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}}$ e considere

$$\begin{aligned} I &\leq \bar{C} \left(\|\mathbf{f}\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right) \\ &\leq \bar{C} \left(\|\nabla \cdot \mathbb{F}_0 + \nabla f_1\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right) \\ &\leq \bar{C} \left(\|\nabla \cdot \mathbb{F}_0\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|\nabla f_1\|_{[\mathbf{X}_{r',p'}(\Omega)]^*} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right) \\ &\leq \bar{C} \left(C_1 \|\mathbb{F}_0\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} + C_2 \|f_1\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right) \\ &\leq C \left(\|\mathbb{F}_0\|_{\mathbb{L}^r(\Omega)} + \|f_1\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|h\|_{L^r(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma)} \right), \end{aligned}$$

com $C = \max \{\bar{C}, \bar{C}C_1, \bar{C}C_2\}$.

Para $s = 1$,

- $\mathbf{g} \in \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma) = \mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)$,
- $h \in W^{s,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$,
- $f_1 \in W^{s-1,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, donde, pelo lema (5.10), $\nabla f_1 \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$,
- $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{W}^{s,r}(\Omega) = \mathbb{W}^{1,r}(\Omega)$, mas, da imersão $W^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, vem que $\mathbb{F}_0 \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, donde, pelo lema (5.5), $\nabla \cdot \mathbb{F}_0 \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$.

Assim, $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$. Pelo teorema (3.7), existe uma única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo a estimativa

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} + \|q\|_{L^p(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \tilde{C} \left(\|\mathbb{F}_0\|_{\mathbb{W}^{1,r}(\Omega)} + \|f_1\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{W^{1,r}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{1-1/p,p}(\Gamma)} \right).$$

Soluções no espaço $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ com $0 < s < 1$:

- Existência:

Pela interpolação dos espaços com $0 < s < 1$,

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega) \subset \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R} \subset \mathbf{L}^p(\Omega) \times W^{-1,p}(\Omega)$$

então para cada s em $(1, 0)$ existe solução em $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$.

- Unicidade:

Como existe solução única em $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ e $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R} \subset \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ então para todo $s \in (1, 0)$ existe unicidade de solução em $\mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$.

Demonstração(ii):

Trabalhando de forma análogo ao item (i) tem-se

Para $s = 0$,

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Gamma), h \in L^p(\Omega).$$

Pelo teorema (3.7), existe única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)/\mathbb{R}$.

Para $s = 1$,

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{2-1/p,p}(\Gamma), h \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pelo teorema (3.8), para $m = 2$, existe única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$. ■

Comentário 5.13. *Pode-se reformular o ponto (ii) do corolário (5.12) da seguinte forma:*

Para quaisquer

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-s,p}(\Omega), h \in W^{-s+1,p}(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{2-s-1/p,p}(\Gamma).$$

com $0 \leq s \leq 1$, então o Problema (S) tem uma única solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{2-s,p}(\Omega) \times W^{1-s,p}(\Omega)/\mathbb{R}$.

De fato, para $s = 1$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega), h \in W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{-1/p,p}(\Omega).$$

Pelo teorema (3.7), existe o par de funções $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)/\mathbb{R}$, solução muito fraca do Problema de Stokes (S).

Para $s = 0$,

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{0,p}(\Omega) = \mathbf{L}^p(\Omega), h \in W^{1,p}(\Omega), \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{2-1/p,p}(\Omega).$$

Pelo teorema (3.8), $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$, solução muito fraca do Problema de Stokes (S).

■

Teorema 5.14. *Seja s um número real tal que $\frac{1}{p} < s \leq 2$. Sejam \mathbf{f}, h e \mathbf{g} satisfazendo a condição de compatibilidade (5.2) com*

$$\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{s-2,p}(\Omega), h \in W^{s-1,p}(\Omega) \text{ e } \mathbf{g} \in \mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma).$$

Então, o Problema de Stokes (S) tem exatamente uma solução $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ satisfazendo a estimativa

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)} + \|q\|_{W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{s-2,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{s-1,p}(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{W}^{s-1/p,p}(\Gamma)} \right). \quad (5.25)$$

Demonstração:

Para $1 \leq s \leq 2$, o teorema é provado pelo corolário (5.12), parte (ii). Usando o teorema (4.5), pode-se supor $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Seja s um número real tal que $\frac{1}{p} < s < 2$. Resta considerar o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } (\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}_0^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tal que } \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}_0^{-s+2,p'}(\Omega), \forall \pi \in W^{-s+1,p'}(\Omega) \\ < \mathbf{u}, -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi >_{\mathbf{W}_0^{s,p}(\Omega), \mathbf{W}^{-s,p'}(\Omega)} - < q, \operatorname{div} \mathbf{w} >_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} = \\ < \mathbf{f}, \mathbf{w} >_{\mathbf{W}^{s-2,p}(\Omega), \mathbf{W}_0^{-s+2,p'}(\Omega)} - < h, \pi >_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Note que $W_0^{-s+1,p'}(\Omega) = W^{-s+1,p'}(\Omega)$ pois $-s+1 < 1/p'$, veja comentário (1.1).

Como na prova da proposição (5.7), para toda $\mathbf{H} \in \mathbf{W}^{-s,p'}(\Omega)$ e $\varphi \in W^{-s+1,p'}(\Omega)$ tem-se:

$$\begin{aligned} & \left| - < \mathbf{f}, \mathbf{w} >_{\mathbf{W}^{s-2,p}(\Omega), \mathbf{W}_0^{-s+2,p'}(\Omega)} + < h, \pi >_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} \right| \\ & \leq C (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{s-2,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{s-1,p}(\Omega)}) (\|\mathbf{H}\|_{\mathbf{W}^{-s,p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{-s+1,p'}(\Omega)}), \end{aligned}$$

sendo $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{-s+2,p'}(\Omega) \times W_0^{-s+1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$ a única solução do Problema de Stokes dado pelo corolário (5.12), parte (ii), e comentário (5.13):

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{w} + \nabla \pi &= \mathbf{H} \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= \varphi \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Observe que o conjunto de funções

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}) = \text{constante} \end{array} \right\} \text{ é subespaço vetorial de } W^{1,p}(\Omega).$$

Ponha $J := \langle h, \pi \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)}$. Para toda $\pi \in W^{-s+1,p'}(\Omega)$ e $k \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \langle h, \pi + k \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} \right| \\ &\leq \left| \langle h, \pi \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} \right| + \left| \langle h, k \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} \right| \\ &\leq \left| \langle h, \pi \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)} \right| \leq C \|h\|_{W^{s-1,p}(\Omega)} \|\pi\|_{W^{-s+1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Isto significa que para qualquer elemento na classe de equivalência $\pi \in W^{-s+1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}$, o produto de dualidades $\langle h, \pi \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)}$ é limitado. Além disto,

$$\|\mathbf{w}\|_{W^{-s+2,p'}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{-s+1,p'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{H}\|_{W^{-s,p'}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{-s+1,p'}(\Omega)}).$$

Desta limitação e da linearidade dos produtos de dualidade, deduz que a transformação

$$(\mathbf{H}, \varphi) \longrightarrow - \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{W^{s-2,p}(\Omega), W_0^{-s+2,p'}(\Omega)} + \langle h, \pi \rangle_{W^{s-1,p}(\Omega), W_0^{-s+1,p'}(\Omega)},$$

define um elemento no espaço dual de $\mathbf{W}^{-s,p'}(\Omega) \times W^{-s+1,p'}(\Omega)$ com norma limitada por $C(\|\mathbf{f}\|_{W^{s-2,p}(\Omega)} + \|h\|_{W^{s-1,p}(\Omega)})$. Do Teorema da Representação de Riesz deduz-se que existe um único par $(\mathbf{u}, q) \in \mathbf{W}_0^{s,p}(\Omega) \times W^{s-1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ solução de (S) e satisfazendo (5.25). ■

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Definições usuais

Definição 6.1 (Reta estendida). *Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. A coleção $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ é denominada reta estendida de números reais.*

Definição 6.2 (Função de classe C^m). *Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, diz-se de classe C^1 quando existem, em cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e as n funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, assim definidas são contínuas. Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ um inteiro, é de classe C^m quando ela possuir derivadas parciais em todos dos pontos de Ω e as funções $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ forem de classe C^{m-1} .*

Definição 6.3 (Conjunto de classe C^m). *Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n com fronteira Γ . Dizemos que Ω é de classe C^m se a fronteira Γ é uma variedade de classe C^m ($m \geq 1$ o qual deve ser especificada) de dimensão $n - 1$, e Ω está localmente num lado de Γ .*

Para ver definição de variedade de classe C^m veja em [26].

Definição 6.4 (Conjunto conexo). *Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A, B são ambos abertos em X . Uma cisão do tipo $X = X \cup \emptyset$ é chamada cisão trivial. Um conjunto chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial. Isto é, quando X é conexo, $X = A \cup B$, com A, B disjuntos e abertos em X então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.*

Definição 6.5 (Suporte de função). *Sejam u uma função definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, u mensurável e $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos \mathcal{A}_i de Ω tais que $u \equiv 0$ quase sempre em \mathcal{A}_i , com I conjunto de índices. Então $u \equiv 0$ quase sempre em $\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Define-se o suporte de u e denotado por $\text{supp } u$, o seguinte subconjunto fechado de Ω ,*

$$\text{supp } u = \Omega \setminus \mathcal{A}.$$

Caso u seja contínua em Ω ,

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Isto é, o suporte de u é o fecho, em Ω , do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Diz-se que uma função u tem suporte compacto em Ω se existir um conjunto K , com $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp } u \subset K.$$

Com $\bar{A} = A \cup A'$, A' conjunto dos pontos de acumulação de A .

Definição 6.6 (Conjunto Lipschitz). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado com fronteira Γ . Diz-se que Ω é Lipschitz se numa vizinhança de qualquer ponto $x \in \Gamma$, Γ admite uma representação de um hipersuperfície $y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1})$ sendo f uma função Lipschitz e (y_1, \dots, y_n) são coordenadas retangulares em \mathbb{R}^n numa base que pode ser diferente da base canônica e_1, \dots, e_n . Diz-se que $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz se a seguinte condição for satisfeita: existe uma constante $K > 0$ tal que para todos $x, y \in \mathcal{A}$*

$$|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|.$$

Definição 6.7 (Convolução). *Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Define-se a convolução de u e v por*

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Notação: $w(x) = (u * v)(x)$.

Definição 6.8 (Operador divergente de campo vetorial). *Seja $u = (u_1, \dots, u_n)$ um campo vetorial definido no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo que as componentes u_1, \dots, u_n admitam derivadas parciais em Ω . O divergente de u é o campo escalar*

$$\operatorname{div} u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$\operatorname{div} u(x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x),$$

para todo $x \in \Omega$.

Definição 6.9 (Operador divergente de matriz). *Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ uma matriz admitindo derivadas parciais em cada uma das suas entradas. O divergente de A é dado por*

$$\nabla \cdot A = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_j} \right).$$

com $a_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Isto é, o divergente de uma matriz é um vetor linha cuja j -ésima componente é o divergente do vetor da i -ésima linha de A .

Definição 6.10 (Operador gradiente de função escalar). *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Define-se o gradiente de f no ponto $x \in \Omega$ como o vetor $\operatorname{grad} f(x)$ dado por*

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Notação: $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$.

Definição 6.11 (Operador gradiente de função vetorial). *Seja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ uma função vetorial com cada $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$ definida sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, tendo derivadas em todas as direções. O gradiente de \mathbf{u} , denotado por $\nabla \mathbf{u}$, é definido por*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Definição 6.12 (Operador laplaciano). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável e $x \in \Omega$, o laplaciano de f é a função $\Delta f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x).$$

Em se tratando de equação vetorial tem-se a seguinte notação:

$$\Delta \mathbf{f}(x) = (\Delta f_1(x), \cdots, \Delta f_n(x)),$$

com $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, \cdots, n\}$, duas vezes diferenciável.

Definição 6.13 (Espaços $C_b^k(\mathbb{R}^n)$). *Denota-se por $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, com k inteiro não negativo, o espaço de Banach das funções $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$, assim como todas as suas derivadas até a ordem k e equipado com a norma*

$$\|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

Definição 6.14 (Espaços $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$). *Denota-se por $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n), 0 < \lambda \leq 1$, o espaço de Banach das funções $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ tais que u e todas as suas derivadas até a ordem $k \geq 1$ são Hölderianas com expoente λ , tal que*

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda} < \infty,$$

com a norma

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda}.$$

Definição 6.15 (Dual topológico). *Seja V um espaço normado. O espaço de todas os funcionais lineares e contínuos em V é denominado dual topológico de V e denotado por V^* . Um funcional é uma função $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ onde V é um espaço vetorial e \mathbb{K} um corpo de escalares. A norma de $f \in V^*$ é*

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V}.$$

Notação: $f(x) = \langle f, x \rangle_{V^*, V}$.

Definição 6.16 (Espaço Reflexivo). *Seja X um espaço normado. Dizemos que \mathcal{X} é um espaço reflexivo se a imersão canônica*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X}^{**} \\ x &\longmapsto g_x : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto g_x(f) = f(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

*é sobrejetiva. Com $T(x) = g_x(f) = f(x), \mathcal{X}^{**} = [\mathcal{X}^*]^*$ e \mathbb{K} corpo de números (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).*

Definição 6.17 (Imersão). *Sejam X e Y espaços normados.*

Dizemos que X está imerso continuamente em Y se:

- a) X é subespaço vetorial de Y ,
 b) O operador identidade I definido de X em Y por $I(x) = x$ para todo $x \in X$ é contínuo.
 Sendo I um operador linear, pelo Teorema (6.25), a condição b) é equivalente a

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Dizemos que X está imerso compactamente em Y se a) e b) são satisfeitas e para cada sequência limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , é pré-compacta em Y , isto é, Y admite uma subsequência $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em Y .

Notações:

$X \hookrightarrow Y$: imersão contínua e $X \subset\subset Y$: imersão compacta.

6.2 Lema

Lema 6.18 (Transformação canônica). *A transformação canônica C dada por (6.1) é um isomorfismo do espaço normado \mathcal{X} sobrejetivamente ao espaço normado $R(C)$, o conjunto imagem de C . Desta forma, pode-se identificar um espaço reflexivo com o seu bidual, isto é, $\mathcal{X} \cong \mathcal{X}^{**}$.*

Veja em [20].

6.3 Proposições

Proposição 6.19 (Desigualdade de Hölder). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se p, q são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$. Então, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Veja em [24],[10].

Proposição 6.20 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Se f_1, f_2, \dots, f_m são funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, para $1 \leq i \leq m$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} \leq 1$, então o produto $f = f_1 f_2 \dots f_m$ pertence a $L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

Veja em [7].

Proposição 6.21. *Seja W um subespaço vetorial de um espaço normado real V , com $\overline{W} \neq V$. Então, existe $f \in V^*$, tal que $f \neq 0$ e $f(x) = 0, \forall x \in W$.*

Contrapositiva: *Seja W um subespaço vetorial de um espaço normado real V . Se para toda $f \in V^*$ tal que $f \neq 0$ e $f(x) = 0, \forall x \in W$ então $\overline{W} = V$.*

Veja em [18].

Proposição 6.22. *Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . $L^p(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, $1 < p < \infty$.*

Veja em [1].

6.4 Teoremas

Teorema 6.23. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre \mathbb{K} e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então*

a) *$\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de U e $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V .*

b) *T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.*

$\text{Im}(T) = \{v \in V; \exists u \in U \text{ tal que } T(u) = v\}$.

$\text{Ker}(T) = \{u \in U; T(u) = 0\}$.

Veja em [11].

Teorema 6.24 (de Green). *Sejam Ω um subconjunto aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^2 , onde vale o Teorema da divergência, e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \nabla v) dx dy = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx dy = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds,$$

com $\frac{\partial}{\partial n}$ é a derivada normal na fronteira unitária externa a \vec{n} .

Veja em [17].

Teorema 6.25 (continuidade e limitação). *Um funcional linear f com domínio $D(f)$ num espaço normado é contínuo se, e somente se, f é limitado.*

Dizer que um funcional f é linear e limitado significa que

a) *Limitação:*

$\exists C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(f)$, com $\|\cdot\|$ norma em $D(f)$.

b) *Linearidade:*

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in D(f)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (corpo de números).

Um forma equivalente de mostrar a linearidade de um funcional é a seguinte: Dados $x, y \in D(f)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Veja em [20].

Teorema 6.26 (espaço dual). *O espaço dual \mathcal{X}^* de um espaço normado \mathcal{X} é um espaço de Banach.*

Veja em [20].

Teorema 6.27 (extensão linear e limitada). *Seja $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear e limitado, onde $D(T)$ está contido num espaço normado X e Y é um espaço de Banach. Então T tem uma extensão*

$$\tilde{T} : \overline{D(T)} \rightarrow Y,$$

com \tilde{T} é um operador linear e limitado de norma

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

Veja em [20].

Teorema 6.28 (convergência dominada de Lebesgue). *Seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis a qual converge em quase todo ponto para uma função f mensurável a valores reais. Se existir uma função integrável g tal que $|f_k| \leq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu.$$

Veja em [6].

Teorema 6.29 (Hahn-Banach). *Seja f um funcional linear e contínuo sobre um subespaço W de um espaço normado V . Então existe um funcional linear e contínuo \tilde{f} em V o qual é uma extensão de f a V e tem a mesma norma,*

$$\|\tilde{f}\|_V = \|f\|_W,$$

$$\text{com} \quad \|\tilde{f}\|_V = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} |\tilde{f}(v)| \quad e \quad \|f\|_W = \sup_{\substack{w \in W \\ \|w\|_W = 1}} |f(w)|$$

Veja em [20].

Teorema 6.30 (O dual normado de $W_0^{m,p}(\Omega)$). *Se $1 \leq p < \infty$, p' é o expoente conjugado de p , um inteiro $m \geq 1$, então o espaço dual $[W_0^{m,p}(\Omega)]^*$ é isometricamente isomorfo ao espaço de Banach $W^{-m,p'}(\Omega)$ consistindo de todas as distribuições $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ que satisfazem (6.2) e tendo norma*

$$\|T\| = \min \left\{ \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}; v \text{ satisfaz (6.2)} \right\}$$

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha}, \quad T_{v_\alpha}(\phi) = \langle \phi, v_\alpha \rangle \quad 0 \leq |\alpha| \leq m \quad (6.2)$$

com $v_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ e T_{v_α} definidas em $\mathcal{D}(\Omega)$.

A completude deste espaço é consequência do isomorfismo isométrico. Evidentemente, $W^{-m,p'}(\Omega)$ é separável e reflexivo.

Veja em [1].

Teorema 6.31. *Seja \mathcal{X} um espaço normado. \mathcal{X} é reflexivo se e somente se \mathcal{X}^* é reflexivo. Se \mathcal{X}^* é separável então \mathcal{X} é separável. Donde se \mathcal{X} é separável e reflexivo, assim é \mathcal{X}^* .*

Veja em [1].

Teorema 6.32 (partição da unidade). *Seja $(\mathcal{X}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de um subconjunto aberto de \mathcal{X} de \mathbb{R}^n , com Λ um conjunto de índices. Então existe uma sequência de funções $(\psi_i)_{1 \leq i < \infty} \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ tal que:*

(i) cada ψ_i tem suporte em algum \mathcal{X}_λ ,

(ii) $\psi_i(x) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$, $x \in \mathcal{X}$,

(iii) qualquer conjunto compacto intercepta apenas um número finito de suportes de ψ_i .

Tal coleção de funções é chamada de uma partição localmente da unidade, subordinada a cobertura (\mathcal{X}_λ) . Uma cobertura de um conjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^n é uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos $F_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda$, sendo L um conjunto de índices.

Veja em [13].

Referências Bibliográficas

- [1] RA ADAMS. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] C. AMROUCHE and V. GIRAULT. *Propriétés fonctionnelles d'opérateurs Applications au problème de Stokes en dimension quelconque*.
- [3] C. AMROUCHE and V. GIRAULT. *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*, volume 44. Praha: Academia, 1969-, 1994.
- [4] C. AMROUCHE and M. RODRÍGUES-BELLIDO. *Stationary Stokes, Oseen and Navier–Stokes Equations with Singular Data*, volume 1. Springer, 2010.
- [5] I. BABUŠKA. *Error-bounds for finite element method*, volume 16. Springer, 1971.
- [6] R.G. BARTLE. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley, 1966.
- [7] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [8] F. BREZZI. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, volume 8. 1974.
- [9] L. CATTABRIGA. *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, volume 31. 1961.
- [10] M.M. CAVALCANTI and V.N.D. CAVALCANTI. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Eduem - Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2009.
- [11] F.U. COELHO and M.L. LOURENÇO. *Um curso de Álgebra linear*. Edusp, 2001.
- [12] R. FARWIG and GP GALDI. *Very weak solutions and large uniqueness classes of stationary Navier-Stokes equations in bounded domains of \mathbb{R}^2* , volume 227. 2006.
- [13] F.G. FRIEDLANDER and M.S. JOSHI. *Introduction to the Theory of Distributions*. Cambridge Univ Pr, 1998.

- [14] Y. GIGA. *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r spaces*, volume 178. Springer, 1981.
- [15] P. GRISVARD. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.
- [16] SIMADER C. G. GALDI G. P. H. SOHR, H. *A class of solutions to stationary Stokes and Navier-Stokes equations with boundary data $W^{-1/q,q}$* , volume 331. Math. Ann., 41-74, 2005.
- [17] V.M. IÓRIO. *EDP um curso de graduação*. IMPA, 1991.
- [18] S. KESAVAN. *Functional Analysis*. Hindustan Book Agency(India), 2009.
- [19] H. KIM. *Existence and regularity of very weak solutions of the stationary Navier-Stokes equations*, volume 193. Arch. Rational Mech. Anal., 2009.
- [20] E. KREYSZIG. *Introductory Functional Analysis with applications*.
- [21] E.L. LIMA. *Curso de Análise*, volume 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2008.
- [22] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Problemes aux limites non homogenes et applications*, volume 3. Dunod, 1970.
- [23] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*. Springer-Verlag,Berlin, New York, 1972.
- [24] L.A. MEDEIROS and M.M. MIRANDA. *Espaços de Sobolev: Introdução aos problemas elíticos não Homogêneos*. IM-UFRJ, 1999.
- [25] K. SCHUMACHER. *Very weak solutions to the stationary Stokes and Stokes resolvent problem in weighted function spaces*, volume 54. Springer, 2008.
- [26] M. SPIVAK. *Calculus on Manifolds*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1965.
- [27] R. TEMAM. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. Elsevier Science Publishers, 1979.
- [28] S.V. USPENSKII. *Theoremes d'immersion pour les classes W_p^r , généralisées de S. L. Sobolev*. Sibirskii Mat. J., 1962.

Índice Remissivo

- Condição de compatibilidade, 31
- Conjunto(s)
 - $\mathcal{D}(\Omega)$ (Funções testes), 5
 - Conexo, 65
 - de classe C^m , 65
 - Lipschitz, 66
- Convergência
 - em $\mathcal{D}(\Omega)$, 5
- Convolução, 66
- Derivada de distribuição, 6
- Desigualdade
 - de Hölder, 69
 - de Hölder Generalizada, 69
- Distinção entre Soluções fracas clássicas e Soluções muito fracas, 33
- Distribuições, 6
- Dual topológico, 68
- Espaço(s)
 - $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, 68
 - $C_b^k(\mathbb{R}^n)$, 68
 - $L^p(\Omega)$, 4
 - de Sobolev, 7
 - de Sobolev de ordem fracionária, 8
 - de Sobolev de ordem inteira não negativa, 7
 - Reflexivo, 68
- Expoentes conjugados, 9
- Função
 - L_{loc}^1 , 6
 - de classe C^m , 65
 - Lipschitz, 66
- Funcional, 68
- funcional linear limitado, 71
- Imersão
 - compacta, 69
 - contínua, 69
- Norma de dual topológico, 68
- O Problema de Stokes, 31
- Operador
 - divergente de campo vetorial, 67
 - divergente de matriz, 67
 - gradiente de função escalar, 67
 - gradiente de função vetorial, 67
 - laplaciano, 68
 - traço, 22
- Proposição
 - de De Rham, 13
- Reta estendida, 65
- Solução muito fraca do Problema de Stokes, 32
- Suporte de função, 66
- Teorema
 - da continuidade e limitação, 70
 - da convergência dominada de Lebesgue, 71
 - da extensão linear e limitada, 71
 - de Green, 70
 - de Hahn-Banach, 71

de Rellich-Kondrachov, 19
do espaço dual, 71
da partição da unidade, 72