

LÉLIA LONGEN FONTANA

**POSSIBILIDADES PARA “VER O INVISÍVEL” NAS REPRESENTAÇÕES
TRIDIMENSIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

CURITIBA
2010

LÉLIA LONGEN FONTANA

**POSSIBILIDADES PARA “VER O INVISÍVEL” NAS REPRESENTAÇÕES
TRIDIMENSIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação, Área de Concentração em Educação Matemática, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna

CURITIBA
2010

Catálogo na publicação
Sirlei do Rocio Gdulla – CRB 9ª/985
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

Fontana, Lélia Longen
Possibilidades para “ver o invisível” nas representações
tridimensionais nos livros didáticos de matemática / Lélia Longen
Fontana. – Curitiba, 2010.
122 f.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação,
Universidade Federal do Paraná.

1. Matemática – Espaço - Livros didáticos. 2. Matemática –
Estudo e ensino – Ensino fundamental. I. Título.

CDD 372.7



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO



PARECER

Defesa de Dissertação de **LÉLIA LONGEN FONTANA** para obtenção do Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados, DR. CARLOS ROBERTO VIANNA, DR^a NILZA EIGENHEER BERTONI, DR^a ETTIÈNE CORDEIRO GUÉRIOS e DR. MARCOS AURÉLIO ZANLORENZI arguíram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Dissertação: **“POSSIBILIDADES PARA ‘VER O INVISÍVEL’ NAS REPRESENTAÇÕES TRIDIMENSIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA”**.

Procedida a arguição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de MESTRE EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIÇÃO
DR. CARLOS ROBERTO VIANNA		Aprovada
DR ^a NILZA EIGENHEER BERTONI		Aprovada
DR ^a ETTIÈNE CORDEIRO GUÉRIOS		Aprovada
DR. MARCOS AURÉLIO ZANLORENZI		Aprovada.

Curitiba, 15 de dezembro de 2010.

Prof. Dr. Ângelo Ricardo de Souza
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação

Dedico este trabalho aos amores de minha vida: meu marido Wilson e meus filhos Wilson Neto e Gustavo. Sem o olhar de vocês não poderia ter entendido tantos outros olhares aos quais me dediquei. Vocês representam minha fonte primária de carinho.

Não posso deixar de expressar meu amor aos meus pais, Orlando e Alzira, a partir dos quais aprendi também a amar o conhecimento. Experimentei a finitude da vida no início desta pesquisa, ao perder duas pessoas a quem amava, meu pai e meu sogro (Wilson), mas sei que eles nunca deixaram de estar presentes...

"Não vês que o olho abraça a beleza do mundo inteiro? (...) É a janela do corpo humano, por onde a alma especula e frui a beleza do mundo, aceitando a prisão do corpo que, sem esse poder, seria um tormento. Quem acreditaria que um espaço tão reduzido seria capaz de absorver as imagens do universo? "

Leonardo da Vinci

A handwritten signature in black ink, reading "Leonardo". The letter "L" is large and stylized, with a long vertical stroke that curves at the bottom. The rest of the name is written in a cursive, flowing script.

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo verificar como o espaço tem sido representado nos livros didáticos. Isto foi feito através da análise das representações tridimensionais exibidas em seu desenvolvimento, investigando se tais representações abrem possibilidades para a visualização espacial. Foram selecionadas três das dez coleções de Matemática aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (2011) para as séries finais do Ensino Fundamental. O critério de escolha adotado na seleção das coleções é a indicação, na avaliação feita pelo Guia de Livros Didáticos, de um "bom trabalho" com esta forma de representação ou com a visualização. Através de um estudo sobre o que é um livro didático, foram discutidas as políticas nacionais de sua difusão e como se dá o processo de escolha nas escolas. Ao tecer considerações sobre algumas das possibilidades de visualização, esboça-se um ensaio sobre a relação entre a arte e o invisível e são descritas algumas pesquisas sobre o tema, a partir das quais é construída a concepção de visualização assumida neste trabalho. Um olhar sobre a perspectiva é apresentado com o objetivo de entender esta forma de representação, apontada por alguns autores como a predominante nos livros didáticos. Na sequência são discutidas as escolhas feitas para a definição dos objetos de investigação e descritas as coleções analisadas, bem como o levantamento feito sobre a presença das imagens que, de alguma forma, estão relacionadas à representação do espaço e de objetos tridimensionais. As imagens foram organizadas em duas categorias: representações do ideal e representações do real. Por fim, são tecidas algumas considerações sobre a análise deste levantamento e discutidos os encontros e desencontros obtidos durante o estudo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Visualização. Representação Espacial. Livros Didáticos.

ABSTRACT

This work had as an objective verifying how the space has been represented in textbooks. This has been done through the analysis of the tridimensional representations shown in its development, researching if those representations open possibilities for spatial visualization. Three of the ten collections of Mathematics approved at National Program Textbook (2011) for the final grades of elementary school have been chosen. The criterion of choice adopted in the selection of collections is the indication in the evaluation by the Guide to Textbooks, a "good job" with this form of representation or visualization. Through a study of what is a textbook, it has been discussed the national policies of its dissemination of and how is the procedure of choice in schools. Assembling some considerations about the possibilities of visualization, is presented an essay on the relationship between art and the invisible and described some research on the subject, from which has been built the conception of preview assumed in this work. A look over the perspective is presented in order to understand this form of representation, as suggested by some authors as prevalent in textbooks. After that, it has been discussed the choices made for defining the objects of investigation and described the collections analyzed, and the survey on the presence of images that somehow relate to the representation of space and three-dimensional objects. The images were organized into two categories: representations of the ideal and representations of the real. Finally, some considerations have been gathered about the analysis of this survey and discussed the similarities and differences obtained during the study.

Keywords: Mathematics Education. Visualization. Spatial representation. Textbooks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - TIPOS DE PROCESSOS COGNITIVOS.....	23
FIGURA 2 – ESQUEMA CIRCULAR.....	31
FIGURA 3 - O LIVRO DIDÁTICO NUM CONTEXTO DE INTERAÇÕES.....	32
FIGURA 4 - QUANTOS CUBOS PODEM SER VISTOS?.....	45
FIGURA 5 – CUBO SOMBREADO ROSA.....	45
FIGURA 6 – CUBO SOMBREADO AZUL.....	45
FIGURA 7 - ISTO NÃO É UM CACHIMBO, RENÉ MAGRITTE.....	48
FIGURA 8 - MÃOS DESENHANDO, M. C. ESCHER.	50
FIGURA 9 – AS MENINAS, DIEGO VELÁZQUEZ.....	52
FIGURA 10 - RETRATO DE LUCA PACIOLI, BARBARI, J.	57
FIGURA 11 – PENSAMENTO GEOMÉTRICO AVANÇADO.....	62
FIGURA 12 - DIAGRAMA APRESENTADO POR GOLDENBERG.....	67
FIGURA 13 – REPRESENTAÇÃO DE CUBOS.....	73
FIGURA 14 - EFEITOS DA INFORMAÇÃO TONAL.....	84
FIGURA 15 - EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO DO IDEAL.....	87
FIGURA 16 - EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO DO REAL.....	88
FIGURA 17 - COLEÇÃO MATEMÁTICA.....	89
FIGURA 18 - PROFESSORA DANDO AULA.....	91
FIGURA 19 - COLEÇÃO MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS.....	92
FIGURA 20 - REPRESENTAÇÃO DE UM AMBIENTE.....	97
FIGURA 21 - USO DE LINHAS TRACEJADAS.....	98

FIGURA 23 - DUPLA CATEGORIA.....	99
FIGURA 24 - PERSPECTIVA COM 1 PONTO DE FUGA.....	99
FIGURA 25 - PERSPECTIVA COM 2 PONTOS DE FUGA.....	100
FIGURA 26 - PERSPECTIVA COM USO DE MALHA QUADRICULADA.....	100
FIGURA 27 - COLEÇÃO TUDO É MATEMÁTICA.....	101
FIGURA 28 - REPRESENTAÇÕES DO IDEAL COM TRACEJADO.....	105
FIGURA 29 - BASES DE PIRÂMIDES.....	106
FIGURA 31 - MODELO DE ESFERA.....	108
FIGURA 32 - MODELOS DE ESFERA.....	108
FIGURA 34 - MODELO DE CUBO.....	109
FIGURA 35 - REPRESENTAÇÃO DE ARESTAS E CONTORNOS.....	109
FIGURA 37 - IMAGENS COM PRESENÇA DE SOMBRA.....	110
FIGURA 38 - MODELOS DE SÓLIDOS EM DIFERENTES POSIÇÕES.....	111
FIGURA 39 - PRISMA HEXAGONAL COM BASES DESTACADAS.....	111
FIGURA 40 - REPRESENTAÇÕES DE CORTES.....	111
FIGURA 42 - PRISMAS COM E SEM LINHAS TRACEJADAS.....	113
FIGURA 43 – REPRESENTAÇÃO DE CUBOS COM ARESTAS NÃO VISÍVEIS.....	114

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – QUADRO AVALIATIVO DAS PRODUÇÕES SOBRE O ABANDONO DA GEOMETRIA.....	21
QUADRO 2 – ALGUMAS DEFINIÇÕES SOBRE VISUALIZAÇÃO.....	61
QUADRO 3 – ALGUMAS DEFINIÇÕES SOBRE VISUALIZAÇÃO.....	69
QUADRO 4 – ALGUMAS DEFINIÇÕES SOBRE VISUALIZAÇÃO.....	71
QUADRO 5 – NÍVEIS DO VALOR PEDAGÓGICO DAS ILUSTRAÇÕES.....	82
QUADRO 6 - CONTEÚDOS DE GEOMETRIA.....	93

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - LEVANTAMENTO DAS ILUSTRAÇÕES DA COLEÇÃO MATEMÁTICA (ED. MODERNA)	90
TABELA 2 - DISTRIBUIÇÃO DAS ILUSTRAÇÕES RELACIONADAS À REPRESENTAÇÃO DO IDEAL.	91
TABELA 3 - LEVANTAMENTO DAS ILUSTRAÇÕES DA COLEÇÃO MATEMÁTICA-IMENES E LELLIS (ED. MODERNA).....	97
TABELA 4 - DISTRIBUIÇÃO DAS ILUSTRAÇÕES RELACIONADAS À REPRESENTAÇÃO DO IDEAL.	97
TABELA 5 - LEVANTAMENTO DAS ILUSTRAÇÕES DA COLEÇÃO TUDO É MATEMÁTICA (ED. ÁTICA).....	104
TABELA 6 - DISTRIBUIÇÃO DAS ILUSTRAÇÕES RELACIONADAS À REPRESENTAÇÃO DO IDEAL	105

LISTA DE SIGLAS

- GLD – Guia de Livros Didáticos
- PNLD – Programa Nacional do Livro Didático
- PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
- MEC – Ministério da Educação e Cultura
- MMM – Movimento da Matemática Moderna
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics
- NCSM – National Council of Supervisors of Mathematics
- UFPR – Universidade Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 CIRCUNSTÂNCIAS	13
2 “CONVERSA” COM ALGUNS AUTORES	19
3 O QUE É UM LIVRO DIDÁTICO?	28
3.1 AS POLÍTICAS NACIONAIS DE DIFUSÃO DO LIVRO DIDÁTICO	34
3.2 O PROCESSO DE ESCOLHA NAS ESCOLAS	37
4 É POSSÍVEL “VER O INVISÍVEL”?	44
4.1 A ARTE E O INVISÍVEL – APENAS UM ENSAIO.....	49
4.2 ALGUNS TRABALHOS SOBRE VISUALIZAÇÃO	56
4.2.1 Imaginação, intuição e visualização	60
4.2.2 Olhar, Saber, Representar	63
4.2.3 Representações, interpretações e prática pedagógica	66
4.2.4 Visualização, veículo para a educação em geometria	70
4.3 CONCEPÇÃO ASSUMIDA.....	72
4.4 UM OLHAR SOBRE A PERSPECTIVA.....	74
5 OS OBJETOS DA INVESTIGAÇÃO – ALGUMAS ESCOLHAS	79
6 ENCONTROS E DESENCONTROS	86
6.1 MATEMÁTICA.....	89
6.2 MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS	92
6.3 TUDO É MATEMÁTICA	101
7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	107
REFERÊNCIAS	117
ANEXOS	122

1 CIRCUNSTÂNCIAS

A escolha do objeto de investigação deste estudo foi fruto de inquietações surgidas durante minha graduação em Matemática. Muitas vezes não conseguia entender todo aquele formalismo que estava à minha frente, mas ao olhar uma representação geométrica, podia compreender determinados resultados e estabelecer algumas relações. Esse modo de percepção era o caminho que eu conseguia percorrer, mas não bastava... Notei também que alguns alunos da turma não tinham a mesma “visão espacial”, o que é reforçado pelo fato que eles também apresentavam dificuldade em determinadas disciplinas que fazem parte do curso de Licenciatura em Matemática, só que essa dificuldade se invertia, enquanto se saíam bem em Cálculo e Álgebra, tinham problemas em Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

Comecei a me perguntar sobre os motivos que geravam essa situação, pois não compreendia de que forma não “enxergavam” aquilo que para mim era tão claro.¹ Através de conversas e questionamentos, percebi que muitos alunos haviam tido pouco contato, antes de chegarem à universidade, com atividades relacionadas à visualização, no sentido de representação do espaço para o plano, seja por meio da manipulação ou construção de objetos tridimensionais, da representação de figuras espaciais ou então das construções geométricas. Será que o fato de ter estudado Desenho Artístico na adolescência não influenciou este meu olhar? Relembrei também as minhas aulas de Desenho Geométrico quando estudava o equivalente ao Ensino Médio de hoje. Imaginei que talvez pudesse haver alguma relação entre a visão espacial e o trabalho com construções geométricas.

Neste período, durante a graduação, fui monitora de Desenho Geométrico do Departamento de Expressão Gráfica da UFPR, que na época chamava-se

¹ Já no mestrado, durante o desenvolvimento da pesquisa, me identifiquei com as preocupações de Flores (2003, p. 48), “em torno da visualização de figuras no ensino de geometria, tanto no que diz respeito ao ver, ao ler ou ao representar as figuras geométricas no papel, ou seja, em torno das dificuldades e complexidades que acarretam tais atividades”. A diferença é que minhas indagações caminharam em torno das dificuldades encontradas pelos alunos, sentido ao qual ela estava acostumada, mas optou por ir em outra direção, do como se formou um modo de olhar que, se por um lado tornou-se natural, por outro já não podia mais satisfazer esse olhar. O referido texto faz parte da tese de doutorado da autora, transformado em livro em 2007, ambos são utilizados ao longo deste estudo.

Departamento de Desenho e, em algumas reuniões com os professores discutimos sobre a presença, ou ausência, das construções nos livros didáticos. Concluída a licenciatura, fiz especialização em Expressão Gráfica no Ensino, também na UFPR, durante a qual desenvolvi uma pesquisa que procurava situar o ensino de Desenho Geométrico, através do estudo de livros didáticos de Matemática. Selecionei uma coleção que tinha recebido uma boa avaliação do MEC em relação ao trabalho com construções geométricas, mas percebi que somente uma pequena parcela das atividades propostas poderia ser considerada como construção.

Um dos primeiros livros com que tive contato durante esta caminhada foi o de Fainguelernt (1999) que destaca a existência de um consenso entre matemáticos e educadores matemáticos quanto ao ensino da Geometria dever começar desde cedo² e continuar, de forma apropriada, através de todo o currículo de Matemática. Entretanto, existe uma divergência de opiniões em relação aos conteúdos e métodos de ensino envolvidos³. Uma das razões é que a Geometria possui muitos aspectos e, conseqüentemente, talvez não exista um caminho simples, linear, claro, hierárquico, desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora os conceitos devam ser considerados em diferentes estágios e pontos de vista. Aqui cabe uma observação de que tal argumento também se aplica a outras áreas do conhecimento.

É sobre um desses aspectos que se concentra esta pesquisa: a visualização. Embora possa parecer, não foi um percurso tão simples e direto. Depois de algumas conversas com meu orientador e muitas “aparas” no projeto inicial é que ficou claro que o foco principal não estava nas construções geométricas, mas na possibilidade ou impossibilidade que as imagens de objetos tridimensionais representam para a visualização espacial.

Com base nessas inquietações, surgiram vários questionamentos que me impulsionaram a procurar informações sobre o assunto. Que tipo de visão espacial é considerada nos livros didáticos de Matemática? As formas como o espaço é

² Conforme aponta Costa (2000, p. 164) , autores como “Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), bem como NCTM (1991) sugerem-nos que o ensino de geometria deveria começar nos primeiros anos”.

³ Também encontramos em Leivas (2009, p. 139) a indicação feita pelo *International commission on Mathematics* (ICMI, 1995) de que a Geometria pode ser ensinada desde que o indivíduo nasce, mas que ainda não há um acordo sobre conteúdos e métodos a serem utilizados em todos os níveis, inclusive o universitário. O citado documento destaca ainda que a geometria tridimensional quase desapareceu ou tem sido confinada a um papel marginal no currículo da maioria dos países.

representado podem ser marcantes neste aspecto? Ou elas podem servir como uma forma de manutenção da dificuldade de visualização para alguns?

Como professora de Matemática e Desenho Geométrico, acredito que a habilidade de visualização possa contribuir na compreensão das relações estabelecidas dentro da Geometria, sobretudo a espacial, através das representações de seus modelos, que podem ser úteis em dois sentidos: favorecer a visualização ou o entendimento das demonstrações⁴. Este trabalho será desenvolvido no primeiro sentido, porém com interesse em olhar a forma como os objetos tridimensionais têm sido representados no plano.

A Geometria vem sendo deixada de lado, é pouco estudada e muitas vezes relegada a segundo plano nas escolas, conforme aponta a pesquisa/inventário feita por Pereira (2001), cuja análise sobre teses e dissertações produzidas sobre o tema “abandono da Geometria”, permite distinguir momentos diversos que colaboraram para o esvaziamento de seu ensino. Contudo, é voz corrente entre os educadores matemáticos de todo o mundo⁵ que ela deve ser encarada com prioridade nos programas escolares.

O Guia de Livros Didáticos (PNLD 2008)⁶, indica que os desenhos formam “uma classe significativa de modelos concretos de entes matemáticos e cumprem papel importante nas atividades em que intervêm as habilidades de visualização” (p. 14). Considera ainda que o pensamento geométrico surge da interação espacial com os objetos e os movimentos no mundo físico e desenvolve-se por meio das competências de localização, de visualização, de representação e de construções de figuras geométricas. A organização e a síntese desse conhecimento também são importantes para a construção do pensamento geométrico. Por outro lado, Passos (2000) afirma que “a percepção espacial desempenha um papel fundamental no

⁴ Leivas (2009, p. 150) cita o trabalho de Biza, Nardi e Zachariades (2008), que relata que debates sobre as contribuições de representações visuais para demonstração em Matemática estão sendo intensificados nos últimos vinte anos, principalmente porque podem ser usadas não apenas como evidência ou inspiração para afirmações matemáticas, mas também como formas de justificativas, devendo ser tratadas como coadjuvantes e parte integrante de provas e demonstrações. Estes autores afirmam ainda que parece não haver consenso sobre as funções que a visualização pode desempenhar no ensino e na aprendizagem da Matemática.

⁵ Prefácio feito por Ubiratan D’Ambrósio para o livro Educação Matemática: representação e construção em geometria, de Estela Kaufman Fainguelernt, 1999.

⁶ Documento elaborado pelo MEC que orienta os professores na escolha do livro a ser adotado pelas escolas. Doravante será indicado por GLD. Informações sobre o PNLD e outros programas do Governo Federal estão disponíveis em <www.fnde.gov.br>.

estudo da Geometria, reconhecendo formas, propriedades geométricas, transformações e relações espaciais” (PASSOS, 2000, p. 88).

A dificuldade da passagem da Geometria plana para a espacial é discutida por Cavalca (1997), ao explicar que muitos alunos não conseguem relacionar adequadamente objetos tridimensionais, cujo significado está no espaço, às suas representações gráficas feitas no plano.

A importância de se incentivar o desenvolvimento da habilidade de visualização nos meios educacionais é apontada por diversas pesquisas em educação matemática, conforme indica Flores (2007), ao discutir sobre a Geometria e a visualização. De acordo com a autora, isto se dá em função do reconhecimento da necessidade “de se compreender a percepção das informações visuais, tanto para a formação matemática do educando, quanto para sua educação de maneira geral” (FLORES, 2007, p.17).

A relação entre a Geometria e a compreensão do espaço pode ser útil para a Matemática. “A Geometria é considerada como uma ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos; é, talvez, a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e real” (FAINGUELERNT, 1999, p. 15).

O estudo do livro didático, enquanto objeto de pesquisa, mostra que por trás de cada um há muito mais que seu conteúdo e metodologia. Será que as propostas dos autores de livros didáticos de Matemática, destinados à Educação Básica, de uma forma geral, se preocupam em apresentar e desenvolver os conteúdos geométricos, de acordo com as orientações dadas pelos documentos oficiais⁷ em relação ao tratamento da Geometria? Existe alguma proposta de ensino da Matemática, associada à Geometria, que possa desenvolver/facilitar a visualização espacial? Estas são apenas algumas questões que também surgiram a partir das leituras feitas sobre a forma como o ensino da Geometria tem sido tratado. Evidentemente que não tenho a presunção de responder a tantas perguntas nesta pesquisa. Pode até ser que apareçam alguns indícios, porém, devo me concentrar no objetivo principal.

Dentre os possíveis encaminhamentos para ampliar a compreensão do tema apresentado, optei por fazer uma análise de alguns livros aprovados pelo MEC na disciplina de Matemática para a segunda etapa do Ensino Fundamental (6º ao 9º

⁷ Entre os quais podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997).

ano), mais especificamente as coleções⁸ cuja avaliação do Guia de Livros Didáticos (PNLD 2011) dê indicativos de que apresentam um bom trabalho no que se refere às representações tridimensionais feitas no plano ou com a visualização.

Ao olhar como o espaço tem sido representado, apresento como objetivo específico da pesquisa verificar a presença das representações tridimensionais nos livros didáticos e analisar se elas abrem uma possibilidade para a visualização espacial.

Quando me refiro à representação do espaço, não estou tentando “descobrir” a intenção dos autores, estou investigando se tais representações podem ou não favorecer a visualização. Neste estudo serão consideradas todas as imagens que, de alguma forma, estejam associadas à representação espacial e provoquem o olhar tridimensional, como por exemplo, as planificações, desenhos de sólidos geométricos e objetos, representações de vistas, entre outros.

Embora algumas pesquisas questionem o processo de avaliação dos livros didáticos feita pelo MEC⁹, a opção em olhar os livros aprovados, e não outros, se deve em virtude de que são estes que chegam às mãos de um grande número de alunos e professores. É notória sua participação no cenário da educação brasileira, considerando que, para muitos professores, o livro didático é sua única referência, tanto teórica quanto metodológica. É possível entender que, ao olharmos para este instrumento, estamos abrindo um caminho para melhor conhecer o que se passa em sala de aula, ou as chances do que poderia acontecer.

O GLD (2008) destaca que são pouco frequentes nos livros didáticos as atividades que contribuem para desenvolver competências importantes como situar-se, reconhecer a posição dos objetos no espaço e saber orientar-se. De forma contraditória, este mesmo documento indica que:

A capacidade de visualizar é fundamental na geometria, tanto no sentido de captar e interpretar informações visuais, como no de expressar as imagens mentais por meio de representações, gráficas ou não.

[...] Atividades de desenho apoiadas em instrumentos ou de construção de modelos concretos de objetos geométricos – planificações, maquetes, recortes, dobraduras, etc – estão muito presentes na maioria das coleções.

⁸ Neste trabalho entende-se por coleção os 4 volumes destinados às séries finais do Ensino Fundamental.

⁹ Entre os quais podemos citar “Movimentos Sociais e Avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)” apresentado no III Colóquio Luso-brasileiro sobre Questões Curriculares (Silva, P. V.B; 2006) e “O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD: Impactos na qualidade do ensino público”, Dissertação de Mestrado - USP (Mantovani, K. P.; 2009).

Por meio delas, espera-se que o aluno seja levado a observá-los no mundo físico e, de forma progressiva e adequada, possa evoluir de noções mais intuitivas para compreender os modelos matemáticos – as figuras geométricas – com suas propriedades e classificações (PNLD 2008 – Guia de Livros Didáticos, p. 46).

Corroborando nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio afirmam que:

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização do mundo que o cerca (PCNEM, p.44).

Complementando as ideias aqui apresentadas, Fainguelernt (1999, p. 39) explica que o mundo da Matemática é um mundo de construções mentais que é internamente regido por leis que foram formalmente estabelecidas; além disso, difere fundamentalmente do mundo real, que é constituído de objetos e acontecimentos reais. No entanto, é possível que o mundo das construções matemáticas possa refletir as características do mundo real.

No capítulo a seguir, apresento o resultado do levantamento teórico sobre o tema em questão. A opção em apresentá-lo como uma “conversa” feita com alguns autores se deve ao fato de tentar mostrar o que diferentes estudos nos revelam sobre o ensino da Geometria e o papel da visualização neste processo.

2 “CONVERSA” COM ALGUNS AUTORES

O título deste capítulo foi escolhido no sentido de mostrar algumas pesquisas sobre o tema em questão. Meu papel talvez não seja o de dialogar com os autores, mas tentar mostrar um diálogo entre eles.

Na busca por uma fundamentação teórica que permitisse conhecer melhor o que se tem pesquisado em termos de visualização e sua relação com a Geometria, não pude deixar de olhar também as pesquisas quanto ao ensino da Geometria. Com isso, percebi que diferentes autores apontam para a necessidade de retomada do seu ensino. Para tanto, não basta apenas seu “retorno” aos livros didáticos e documentos oficiais, se é que se pode afirmar que ela deixou de estar presente. Compreendi que a Geometria sempre esteve “ali”, porém talvez tenha ficado de lado por diferentes motivos. Muitos dos autores que participarão desta “conversa” falam do abandono da Geometria. Entendo que o que houve foi uma mudança causada pelo próprio desenvolvimento da Matemática. Mesmo assim, algumas pesquisas mostram uma preocupação em sua retomada e indicam que, para que isto aconteça, há a necessidade de capacitarmos nossos professores, já que sua formação deixou lacunas nesta área, conforme apontam diferentes trabalhos estudados por Pereira (2001). Nesta “conversa”, preoquei-me também em levantar o que se tem discutido sobre a relação entre a Geometria e a visualização dos objetos tridimensionais.

A Educação Matemática tem mostrado interesse nas questões relativas ao visual e à representação por figuras de ideias e conceitos matemáticos por mais de uma centena de anos, segundo Bishop (1989), recorrendo ao auxílio visual, com base no conhecimento do que pode isso representar para a construção de conceitos matemáticos complexos que, juntamente com manipulações e personificações concretas dos objetos, são elementos poderosos para o ensino de Geometria e devem fazer parte do currículo de formação dos professores (LEIVAS, 2009, p. 208).

Fainguelernt (1999) aponta que o estudo da Geometria é de fundamental importância no desenvolvimento do pensamento espacial e que o raciocínio ativado pela visualização necessita recorrer também à intuição, à percepção e à representação, habilidades estas essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Nos diz ainda que estas são razões suficientes para que o ensino da Geometria não seja desenvolvido de forma automatizada, através da memorização e de técnicas operatórias, tampouco

baseada em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização. É preciso mais que isso.

Nesse sentido, Maia (2000) conclui:

É preciso que o ensino da geometria salvasse a prática de uma geometria que garanta um movimento constante, entre o desenho e a figura, entre o desenho e um texto, pelo menos no ensino fundamental. Isto facilitaria a passagem da geometria da realidade à geometria da abstração (MAIA, 2000, p. 32).

Que a Geometria é pouco ensinada no Brasil, algumas pesquisas já apontam para este quadro há algum tempo. Entre elas, podemos citar Pavanello (1989), cujo trabalho indicou que seu ensino vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. A autora ressalta que discutir por que, como e quando o ensino de Geometria foi relegado a segundo plano e quais prejuízos isto pode acarretar à formação do aluno, são questões intimamente ligadas, de tal modo que responder a uma delas implica em fornecer subsídios para responder à outra.

Em pesquisa mais recente, Brigo (2010) investigou a forma como as figuras geométricas apareceram nos livros didáticos de Matemática, bem como o propósito deste surgimento. O período por ela analisado é a década de 70 do século XX, escolhido pelo fato de ter sido esta a época de maior mudança no ensino da Geometria, a qual, de acordo com a autora, sofreu alterações em relação ao conteúdo a ser ensinado e ao método, devido ao Movimento da Matemática Moderna (MMM). Ela questiona este abandono nas considerações finais de sua pesquisa, ao identificar que “a geometria marcou grande presença nas obras analisadas; inclusive a maioria delas faz apelo ao ensino da geometria” (BRIGO, 2010, p. 153).

Pereira (2001) nos dá pistas de que o MMM demonstrou-se insuficiente para substituir a Geometria Euclidiana pela axiomatização que se pretendia, com isso, este movimento “não conseguiu superar a crise em que se encontrava o ensino da Geometria, mas contribuiu para o seu abandono” (PEREIRA, 2001, p. 64). Ela pesquisou o que os estudos sobre ensino/aprendizagem indicam como justificativa para o abandono da Geometria, montando um inventário da literatura existente. O estudo sobre as produções feitas no período de 1981 a 1999 foi sintetizada por ela em um quadro avaliativo (Quadro 1), através de categorias que pudessem detectar os pontos comuns e não comuns em relação ao tema em questão.

	Metodologia do pesquisador	Fundamentação teórica do pesquisador	Problemas com a formação do professor	Omissão da Geometria nos livros didáticos	Lacunas deixadas pelo MMM
Vianna 1988	Estudo Histórico	Semelhança de Triângulos e Lógica	X	X	X
Bertonha 1989	Método Descritivo	Klausmeyer, Van-Hiele, Piaget e outros	X	X	X
Pavanello 1989	Estudo Histórico	Investigação na Legislação			X
Perez 1991	Quantitativa	Educação Popular	X	X	
Sangiacomo 1996	Engenharia Didática	Colette Laborde, Brousseau, Balacheff, Chevallard e Duval		X	
Gouvêa 1998	Sequência Didática	Brousseau, Chevallard, Arsac, Douady, Barbin, Balacheff, Duval e Piaget	X	X	X
Mello 1999	Sequência Didática	Balacheff e Duval		X	
Passos 2000	Estudo de Caso	Gutiérrez, Bishop e outros	X		X

QUADRO 1 – Quadro avaliativo das produções sobre o abandono da geometria.
 FONTE: Pereira (2001, p. 56)

Em sua conclusão, Pereira (2001) destaca que pode-se verificar que a presença das categorias por ela selecionadas compõem um círculo vicioso: problemas com a formação do professor, omissão da Geometria em livros didáticos e lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna. Estes três aspectos que correspondem às categorias destacadas pela autora é que formam o círculo vicioso ao qual se refere.

Lorenzato (1995) comenta os efeitos provocados pela falta da Geometria:

[...] sem estudar geometria, os alunos não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, têm comprometidas as suas capacidades de resolverem as situações de vida que forem geometrizadas; abrangendo inclusive, assuntos pertinentes a muitas outras áreas, científicas ou não (LORENZATO, 1995, p. 4).

Ampliando essa discussão, encontramos o trabalho feito por Silva (2007), o qual acompanhou os resultados de outros pesquisadores, que apontam que os professores reproduzem em sala o mesmo perfil didático das aulas que tiveram durante sua formação¹⁰. Investigando as discussões promovidas durante o momento

¹⁰ Alimentando, assim, o círculo vicioso apontado por Pereira (2001).

de reformulação curricular na UFPR¹¹, iniciada em 2004, procurou observar, explicitar e compreender as concepções de Geometria de professores de Licenciatura em Matemática. A autora indica que durante esse processo professores de diferentes departamentos e setores da instituição reuniram-se para discutir o currículo do curso de Matemática. As preocupações apontavam por um lado para professores defendendo que a disciplina Elementos de Geometria deveria ser trabalhada de forma que o aluno perceba que as demonstrações feitas independem dos desenhos utilizados, que ele não crie um modelo, afirmando que seria perigoso cursar a disciplina de maneira axiomática e concluir o curso achando que as idéias estão amarradas a desenhos. Em contrapartida, outros professores defendiam que o apelo visual é muito importante. Um dos participantes afirmou que, em uma perspectiva construtivista, a análise dos elementos que constituem as figuras e as alterações que sofrem quando submetidas à movimentos, ou seja, ao aspecto visual da Matemática, do ponto de vista histórico, foi parte essencial do método axiomático com que foi desenvolvida a geometria euclidiana, tendo como modelo intuitivo a “realidade espacial”. Apontam ainda que, do ponto de vista pedagógico, sugerir e implementar técnicas ou métodos de visualização como um caminho para o aprimoramento da maturidade no raciocínio matemático, seja visual ou formal, se constitui um desafio para a didática da Matemática.

Critica-se o tratamento da geometria com base em aspectos visuais, não só por induzir a se tomarem como óbvias certas asserções sobre os entes geométricos não derivados dos axiomas [...] mas também aponta-se que tal tratamento pode limitar a geometria a duas ou três dimensões. Esta limitação torna-se mais evidente a partir da descoberta das geometrias não-euclidianas e se acentua à medida que se consegue maior generalidade pela algebrização e abstração da geometria (PAVANELLO, 1989, p. 14).

A autora acima citada explica que o fato da visualização estar restrita a duas ou três dimensões não é uma limitação tão importante quando se leva em conta a compreensão. Para ela, uma vez compreendido e abstraído o que acontece numa dimensão, torna-se possível estender esse resultado para outra(s) dimensão(ões). Não concordo com tais afirmações, pois acredito que a compreensão exigida em

¹¹ A autora estudou as atas das reuniões de reformulação curricular com o intuito de verificar, em quais reuniões haviam sido tratados assuntos relacionados à Geometria. As atas estão disponíveis em <www.mat.ufpr.br>.

determinada dimensão tenha uma natureza diferente da exigida para outras dimensões.

Pesquisas nesse sentido também ocorreram, recentemente, em outros estados. No levantamento realizado por Leivas (2009) junto a oito universidades gaúchas que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, ele buscou nos currículos ou projetos pedagógicos, quais disciplinas e conteúdos são ofertados na área da Geometria em suas diversas vertentes. Destacou, por exemplo, que em disciplinas como Geometria Descritiva e Desenho Geométrico algumas vezes são oferecidos tópicos que, ao fazerem uso de instrumentos de desenho, parecem ser possibilidades intrínsecas de desenvolver habilidades de visualização. “O mundo matemático oscila entre períodos em que ajudas visuais são vistas como importante pedagogia e outros períodos em que são vistas como desvantagens” (Klotz apud Leivas, 2009, p. 59).

Fainguelernt (1999, p. 54) nos explica que, de acordo com a teoria de Duval, o aprendizado de Geometria envolve três tipos de processos cognitivos intimamente conectados: visualização com respeito à representação espacial; construção através de ferramentas (régua, compasso, esquadros e *software*); raciocínio, o que é básico para ser demonstrado e comprovado (teoremas, axiomas e definições). Esses processos cognitivos podem ser realizados independentemente uns dos outros e estão esquematizados na figura 1.

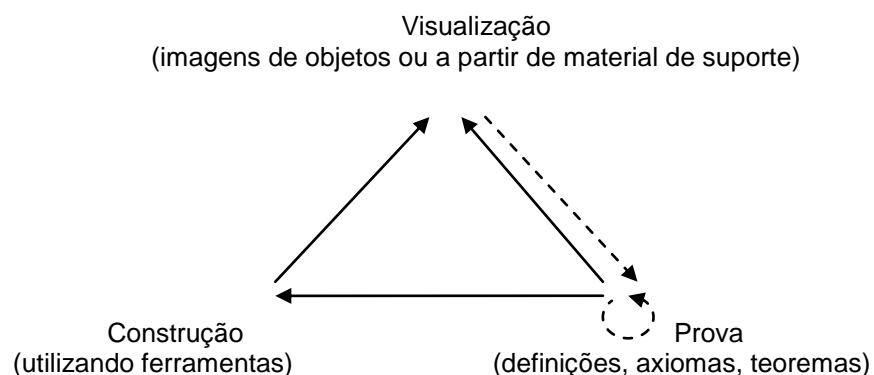


FIGURA 1 - Tipos de processos cognitivos
FONTE: Fainguelernt, 1999, p. 54

A autora prossegue afirmando que toda atividade em Geometria envolve, pelo menos implicitamente, uma comunicação entre esses três tipos de processos: a visualização, a construção e a prova.

Desse modo, a visualização não depende da construção; ela é uma passagem às figuras em qualquer caminho que se esteja construindo. O processo de construção depende da conexão entre as propriedades matemáticas do conceito que se quer construir e de algumas ferramentas que precisam ser utilizadas (FAINGUELERNT, 1999, p.54).

Pode-se relacionar suas idéias com o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) sobre as principais funções do desenho: visualizar (fazer ver, resumir), ajudar a provar e ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer). Nesse sentido, Brigo (2010) afirma que a Proposta Curricular de Santa Catarina reforça o que dizem os parâmetros quanto ao uso de figuras, destacando a importância da visualização, a qual pode estar apoiada no emprego delas. Anterior aos PCNs, Pavanello (1989) já indicava três possíveis explicações dos matemáticos sobre os motivos que teriam levado à desenfaturação do ensino da Geometria – basicamente a euclidiana – nos diferentes níveis de ensino, através de questões relacionadas com o rigor, a visualização e o que se poderia chamar de subordinação da Geometria à Álgebra. “A questão da visualização é, das três, a mais delicada, pois envolve o problema dos processos mentais através dos quais se dá o conhecimento” (PAVANELLO, 1989, p. 17).

Lorenzato (1995, p.3), referindo-se à Geometria como “a mais bela página do livro dos saberes matemáticos” aponta que, no Brasil, ela está praticamente ausente da sala de aula. Entre as possíveis causas, ele destaca duas, ambas relacionadas com as práticas pedagógicas: a maioria dos professores não apresenta os conhecimentos geométricos indispensáveis à sua própria prática; a importância excessiva dada ao livro didático; além disso, na maioria das edições, a Geometria ocupa a parte final e é apresentada isoladamente, não integrada a outras disciplinas ou até mesmo outras partes da Matemática. Estas palavras encontram eco em alguns aspectos do quadro apontado por Pereira (2001).

Estas considerações tornam-se ainda mais graves tendo em vista que, a partir do “abandono” gradativo desta disciplina muitos dos profissionais que estão atuando em sala de aula, e que poderiam fazer seu resgate, talvez não o façam porque nem sempre possuem conhecimentos suficientes. Tal situação é reforçada pelas palavras de Kallef (1993), ao descrever a importância do ensino da Geometria na formação do educador matemático ela indica que, pelo fato de não entenderem a natureza da Geometria, muitos não a reconhecem como um ramo da Matemática.

Os PCNs evidenciam que a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular de como compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O tratamento dessas questões é fundamental na busca de um equilíbrio entre teoria e prática no ensino da Matemática. Um dos aspectos mais importantes deste vínculo é a forma de apresentação do conhecimento num contexto que proporcione ao aluno um sentido aos conceitos matemáticos, de modo que lhe seja possível interpretá-los, por meio da linguagem geométrica.

É preciso considerar, porém, que o fato da Geometria estar presente nos livros didáticos não significa necessariamente que as atividades relacionadas a ela sejam desenvolvidas em sala de aula, o que, por si só, representa uma possibilidade para outras pesquisas. Muitas abordagens que são apresentadas nestes materiais como atividades de desenho, por exemplo, na realidade não passam de mera utilização dos instrumentais técnicos (basicamente régua e compasso), sem que se faça conexão com conceitos geométricos envolvidos na construção, onde os passos para esta atividade são expostos tecnicamente. Desse modo, ao estudante é oportunizada a aquisição de um método que o capacita a construir figuras geométricas, entretanto, ele não faz o vínculo com os conceitos geométricos, o que poderia ser importante para a apropriação e significação desses conhecimentos.

Como nos explica Jorge (1999), se o Desenho Geométrico embasa suas construções nas propriedades e nas relações das figuras geométricas, a Geometria também se vale do Desenho Geométrico para concretizar e permitir a visualização dessas propriedades e relações. Seguindo este raciocínio, Putnoki (apud Zuin, 2001) considera que o desenho é um capítulo da Geometria que, com o auxílio de régua e compasso, se propõe a resolver graficamente problemas de natureza teórica e prática. Para ele o aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de “concretização”.

Neste sentido, a Geometria, explorada por meio do desenho, caracteriza-se como uma forma de auxiliar na construção de significados matemáticos, favorecendo o desenvolvimento da percepção, que contribui para que o estudante possa, através de esboços, formular hipóteses a respeito do significado de um

conceito matemático que se apresenta em linguagem geométrica, possibilitando a exploração plana e espacial. Devo deixar claro que estou me referindo às possibilidades existentes, as quais dependem de outros fatores que devam ser considerados também, como por exemplo, aquilo que se entende por desenho e a forma como ele é desenvolvido. A pesquisa realizada por Kalter (1986) verificou que a presença do Desenho Geométrico no currículo, oferece ao aluno uma visão mais clara dos objetivos da área geométrica, facilitando a compreensão e o desenvolvimento dos conteúdos de Geometria.

Relacionando o que dizem os autores citados, percebe-se uma estreita ligação entre a Geometria e o Desenho Geométrico, uma interdependência entre os dois campos. O fato de conseguir transitar entre eles e suas diferentes linguagens pode favorecer a aprendizagem, uma vez que um conceito geométrico expresso em linguagem algébrica, quando analisado através de sua representação visual, possa ser mais bem compreendido pelo aluno.

Referindo-se aos estudos de Duval, Damm (1999) nos indica que a Matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, eles não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação, que pode ser feita através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos ou desenhos. Tais representações são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas de pensamento, permitindo diferentes registros de um mesmo objeto matemático.

Fainguelernt (1999) destaca a importância da visualização não só pelo seu valor, mas também pelos processos mentais envolvidos que são necessários e podem ser transferidos para outras partes da Matemática e outras áreas do conhecimento. Para a autora, a visualização se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais. Se a visualização é um apoio intuitivo, o desenvolvimento do raciocínio depende também de um corpo qualquer de proposições (definições, teoremas, axiomas) que esteja disponível. Já o processo de construção depende da conexão entre as propriedades matemáticas do conceito que se quer construir e de algumas ferramentas que precisam ser utilizadas. Como a Geometria inclui muitos elementos visuais, têm sido publicados textos, pesquisas e teorias sobre a inter-relação entre a visualização e os processos de desenvolvimento do pensamento geométrico, entre os quais são destacados por ela:

- A teoria de van Hiele¹², na qual o primeiro nível é o da visualização (WIRSZUP,1976).
- Pesquisas que demonstram as inter-relações existentes entre a visualização, habilidade espacial e o pensamento geométrico (BISHOP, 1983; FISCHBEIN,1994, e outros).
- Educadores matemáticos envolvidos no desenvolvimento curricular recomendam um curso intuitivo visual em Geometria, antes ou paralelamente ao curso dedutivo (FREUDENTHAL, 1973; SCHOENFELD, 1986, e outros).

Os estudos aqui apresentados não apenas trouxeram indícios, mas reforçam a importância do ensino da Geometria e das diferentes formas de representação no sentido de desenvolver a visualização.

Se meu olhar se voltará para a forma como o espaço vem sendo representado nos livros didáticos, mais especificamente para aqueles que fazem parte do PNLD, é necessário compreender o que é um livro didático, quais são as políticas nacionais em relação à sua difusão e como se dá o processo de escolha nas escolas, assuntos abordados no próximo capítulo.

¹² De acordo com Passos (2000, p. 82) esta teoria a respeito das habilidades geométricas vem sendo muito discutida e tem contribuído para diversas reflexões a respeito do processo ensino-aprendizagem da Geometria.

3 O QUE É UM LIVRO DIDÁTICO?

Por mais que possa parecer uma tarefa simples, responder à questão que orienta este capítulo envolve muitos aspectos. “Estabelecer o que é um Livro Didático não é tarefa fácil. Embora todos acreditem saber o que seja um livro didático e qual é sua função, quando se trata de defini-lo e explicar suas funções, as dificuldades aparecem” (COSTA, 2008).

É preciso, inicialmente, entender o que ele representa, além do que pode significar para quem o usa. Conforme indica Choppin (2004), após ter sido negligenciado, não apenas pelos historiadores, mas também pelos bibliógrafos, o livro didático vem suscitando, nos últimos 30 anos, interesse entre os pesquisadores. “Desde então, a história dos livros e das edições didáticas passou a constituir um domínio de pesquisa em pleno desenvolvimento, em um número cada vez maior de países” (CHOPPIN, 2004, p. 549).

Uma caracterização sobre o livro didático feita por Brito (1999)¹³ entende que os manuais escolares se constituem um importante auxiliar entre os instrumentos de suporte destinados ao processo ensino/aprendizagem, favorecendo o processo educativo.

Eles desempenham um papel determinante no contexto escolar, fornecem elementos de leitura e decodificação do real, esclarecem objetivos de aprendizagem e transmitem valores, configurando significativamente as práticas pedagógicas. Por outro lado, ultrapassando as delimitações do território escolar, no concerto ideológico do aparelho do Estado, o manual escolar tende a veicular a ideologia dominante e, embora nem sempre se preste muita atenção à sua “música”, porque é demasiado silenciosa, a verdade é que ela é “ouvida” e “divulgada”, sensitivamente, na Escola, instituição que, neste processo, desempenha um papel predominante (BRITO, 1999, p. 139).

Embora tal caracterização acerca do livro didático tenha sido feita em Portugal, a realidade apontada pela autora não é muito diferente da brasileira.

De acordo com Schubring (2003) todas as culturas baseadas na escrita, mais cedo ou mais tarde, desenvolveram uma tecnologia de preservação de materiais de ensino em suportes mais ou menos duráveis, com isso, começaram a

¹³ Artigo “A Problemática da Adopção dos Manuais Escolares: critérios e reflexões” – publicado em MANUAIS ESCOLARES: Estatuto, Funções, História (Actas do I Encontro Internacional Sobre Manuais Escolares, Universidade do Minho, 1999).

padronizar e a institucionalizar seu ensino. No entanto esse tipo padronizado de conhecimento era transmitido principalmente pela oralidade. As versões escritas eram usadas para ajudar na memorização. O primado da oralidade dominou todas as culturas até os tempos modernos e a memorização caiu em descrédito. Não somente essas razões históricas, mas também razões de ordem mais geral fazem com que os livros-texto sejam indissociáveis do ensino. A aprendizagem, mesmo sob o aspecto do uso dos livros-texto, sempre acarreta uma relação bipolar, seja entre professor e texto, seja entre a interação oral e a escrita.

Compreendo que um livro didático, em qualquer disciplina escolar, muito além de ser um suporte material utilizado para o ensino, pode também ser considerado como um objeto cultural. Da mesma forma, ele também representa uma fonte privilegiada de pesquisas que pretendem buscar a compreensão de componentes de currículos escolares (LONGEN, 2007, p. 10).

Ao longo dos séculos, o livro-texto¹⁴ tem história, o papel que desempenha e sua influência estão sempre ligados à sociedade de sua época, talvez até para tentar modificar alguns de seus aspectos, à maneira como essa sociedade, e não somente o autor do livro, vê a ciência, a cultura e o ensino [...]. Uma característica comum dos livros de Matemática é a função de transmitir o conhecimento matemático, impresso, para as novas gerações [...]. O estudo do livro-texto, objeto frequentemente olhado com pouco caso pelos que se dedicam à pesquisa em educação, está sendo revalorizado no Brasil. As avaliações de qualidade realizadas há alguns anos pelo Ministério da Educação chamaram a atenção para ele¹⁵.

Vorpágel (2008) descreve que o processo de escolarização envolve um complexo sistema de práticas e saberes, com normas de acesso e permanência, além da regulamentação de planos de estudos e programas, provas e exames, e, entre outros, a formação de um corpo de profissionais.

Nesse universo, diversos materiais didáticos foram necessários para a aprendizagem da leitura e da escrita e se tornaram referências obrigatórias no mundo escolar, como o papel, a lousa e o livro. Mas não qualquer livro. Um livro que servisse tanto ao aluno como ao professor: que contivesse o que deveria ser ensinado e aprendido; que sua leitura fosse inteligível aos estudantes; que facilitasse o trabalho do professor e suprisse a carência de outros materiais pedagógicos. Dessa necessidade nasceu o livro didático. (VORPAGEL, 2008, p. 23)

¹⁴ Aqui também entendido como livro didático.

¹⁵ Apresentação feita por João Bosco Pitombeira de Carvalho para o livro *Análise Histórica de Livros de Matemática*, de Gert Schubring, 2003.

Encontramos diferentes denominações utilizadas para o livro didático: “Conhecido como manual escolar, manual de texto, material didático ou livro escolar, o livro didático (LD) se caracteriza como um instrumento de uso educacional, para fins didáticos” (SANTOS, 2007, p. 18).

Na maioria das línguas, o LD é designado de diversas maneiras, conforme aponta Choppin (2004, p. 549), ao explicar “que nem sempre é possível explicitar as características específicas que podem estar relacionadas a cada uma das denominações”, mesmo porque as palavras quase sempre sobrevivem mais do que aquilo que designam por determinado tempo.

Gérard e Roegiers (1998) definem um manual escolar¹⁶ como um instrumento impresso, que foi intencionalmente estruturado para se inscrever num processo de aprendizagem, com o propósito de melhorar sua eficácia. Entre suas características associadas à aprendizagem, os autores destacam que um manual escolar pode preencher diferentes funções, incidir sobre diferentes objetos e propor tipos de atividades suscetíveis ao seu favorecimento. Em seu processo de elaboração há o envolvimento de um grande número de atores¹⁷, que desempenham funções mais complexas que aquelas associadas a um simples processo de emissão-recepção. As funções envolvidas na elaboração de um manual escolar – concepção, edição, avaliação e utilização – interagem num processo circular, conforme esquema representado a seguir (Figura 2):

¹⁶ No contexto da edição escolar, os termos *livro* e *manual* são equivalentes. Designam um mesmo tipo de obra mas situam-se em registros diferentes: o termo *manual* tem, sobretudo, uma conotação institucional; o de *livro*, uma conotação mais afetiva. A escola encomendará *manuais*, mas o aluno dirá, preferencialmente, que trouxe o seu livro (GÉRARD; ROEGIERS, 1998, p. 30).

¹⁷ Autores, redatores, leitores, ilustradores, paginadores, editores, tipógrafos, avaliadores, utilizadores, entre outros.



FIGURA 2 – Esquema circular
 FONTE: Gérard; Roegiers, 1998, p. 22

A concepção envolve a realização do manuscrito, já a avaliação visa garantir a qualidade do material, enquanto que a utilização finaliza o processo. Não se pode pensar que tais funções sejam independentes. O esquema indica que a edição desempenha um papel central e articulador neste processo.

Santos (2007, p. 18) destaca que o livro didático é um “produto voltado para o mercado escolar, vem ganhando valor social e, como constatam as recentes pesquisas nesta área, ele permanece sendo a principal fonte de informação impressa utilizada por grande parte dos professores e alunos”. Embora valorizado, precisa ser entendido na perspectiva da provisoriedade, pois necessita ser revisado e atualizado constantemente. Além disso,

nenhum material didático, independente de sua proposta pedagógica, ultrapassa as barreiras e o “engessamento” do suporte em que é produzido. Em outras palavras, sempre deve atender a um número preestabelecido de páginas, a um recorte e uma seleção de conteúdos, a uma determinada quantidade de textos e de atividades propostas, entre outros itens que são incluídos nas solicitações feitas pelas editoras aos autores. Essa estrutura do livro pode se constituir em dificuldade para o trabalho do professor em sala de aula, e este aspecto pode ser relacionado aos critérios de seleção do livro que o professor estabelece (SANTOS, 2007, p. 21).

Ao comentar sobre a presença dos paradidáticos no universo escolar, Dalcin (2002) se refere a ele como coadjuvante, cabendo ao livro didático o papel principal. Destaca ainda que uma das características que talvez mais diferencie esses dois gêneros esteja relacionada à participação no processo ensino-aprendizagem.

É inegável a existência de uma forte relação entre esses dois gêneros de livros. Entretanto, é necessário avaliar que cada um deles ocupa um espaço diferente e possui características próprias, não apenas com relação à

“forma”, mas principalmente quanto às possibilidades de utilização e às opções de abordagem do conteúdo.

Os livros didáticos procuram atender a um projeto pedagógico mais amplo e estão fortemente relacionados às políticas governamentais. Eles são constantemente avaliados e buscam se adequar às exigências das comissões avaliadoras e das orientações educacionais propostas pela legislação oficial (DALCIN, 2002, p. 48).

Para Guimarães *et al.* (2007) o livro didático se constitui um importante recurso e a principal fonte de informação impressa utilizada por boa parte da população, em especial a de baixa renda. Em função dessa importância, é preciso analisar as abordagens didáticas, “[...] considerando a escola como instituição social dotada de especificidades na qual os usos escolares do conhecimento devem ser articulados com os saberes derivados da experiência cotidiana” (GUIMARÃES *et al.*, 2007, p. 2). Para estas autoras, não basta uma maneira segura de ensinar, é preciso que o professor cultive atitudes de reflexão sobre sua prática.

O aluno não aprende sempre da mesma forma, independentemente do conhecimento com o qual ele seja confrontado. A aprendizagem sofre influências importantes em função do conceito que se tenta aprender. Dessa forma, o professor precisa considerar diferentes possibilidades de ensino em função do conhecimento sobre o qual está trabalhando (GUIMARÃES *et al.*, 2007, p. 3).

Com relação ao papel do livro didático, encontramos no GLD (PNLD 2010, Séries/Anos Iniciais) a indicação de que ele entra no processo de ensino e aprendizagem como um recurso auxiliar na condução do trabalho didático, atuando num contexto de interações (Figura 3) como um interlocutor que passa a dialogar com o professor e com o aluno e que, nesse diálogo, é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e o modo de se conseguir aprendê-lo eficazmente.

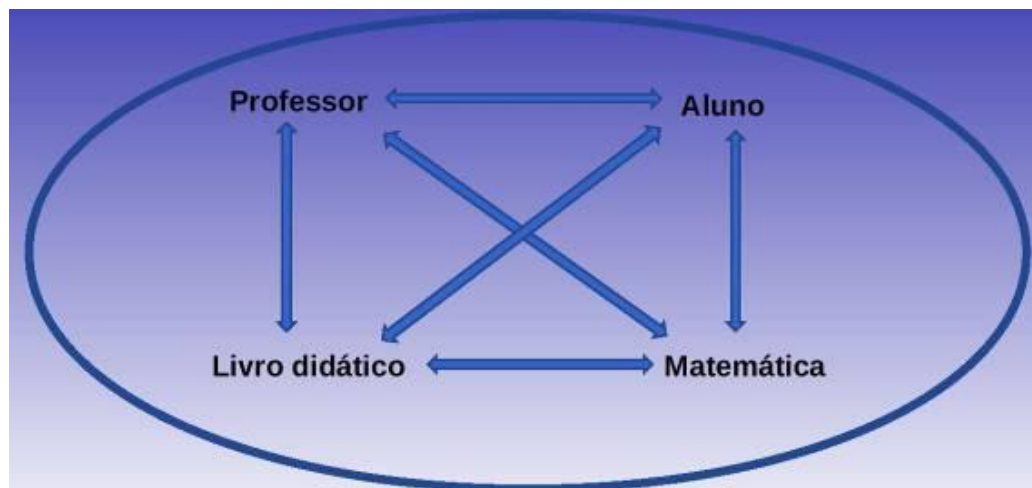


FIGURA 3 - O livro didático num contexto de interações
 FONTE: GLD – PNLD 2010 (séries/anos iniciais)

Este mesmo documento enfatiza que cabe à escola, em particular ao professor, a condução desse processo bem como o acompanhamento do desenvolvimento dos alunos. Orienta ainda que um dos cuidados que devem ser considerados na escolha do livro didático é sua articulação com o Projeto Político-Pedagógico da escola, ou com os princípios didáticos-pedagógicos adotados por ela¹⁸.

Nesse sentido podemos pensar que a escola deva proporcionar em seu planejamento momentos em que se possam discutir essas escolhas. Através de um Projeto Político-Pedagógico integrador, feito com a participação e o envolvimento de toda a comunidade escolar isso pode ser possível e trará reflexos na qualidade do ensino.

Biehl (2009) afirma que um bom projeto educacional exige um professor atuante, que seja capaz de apropriar-se da realidade como instrumento pedagógico e que utilize os materiais didáticos disponíveis, entre eles o livro didático, de forma apropriada e devidamente contextualizada com o processo ensino-aprendizagem. Afirma ainda que só podemos considerar um livro didático completo se ele estiver bem inserido nesse contexto.

Dentro do objetivo desta pesquisa, é preciso olhar para as ilustrações presentes no livro didático, embora essa presença, muitas vezes, possa ser questionada.

Qual a finalidade das ilustrações nos livros atuais? Não poderia deixar de levantar uma hipótese perturbadora: deixar o livro didático com uma bela aparência. Bem, quanto a isso, nada a criticar. Mas, também sou obrigado a levantar outras questões: essas ilustrações são utilizadas como recurso didático ou servem como fator importante na escolha dos livros? Há prejuízo em relação aos conteúdos? Sou favorável a aceitar que a escolha de um livro didático leva em conta diversos aspectos, entre eles a “aparência”, e isso acaba, comercialmente, tornando-se um importante fator de decisão (LONGEN, 2007, p. 377).

Na sequência apresentarei alguns aspectos acerca das políticas nacionais de difusão do livro didático por entender que existem muitas forças que influenciam

¹⁸ Santos (2007) indica que um aspecto a ser considerado é que “o professor, ao realizar suas escolhas, está imerso em um espaço social conservador e repleto de desigualdades, diferente do sistema escolar democrático e que valoriza a mobilidade social descrita nos textos dos documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC) ao se referir ao espaço escolar” (p. 21).

este processo. Além disso, nem sempre o livro escolhido pela escola é aquele que chega ao aluno.

3.1 AS POLÍTICAS NACIONAIS DE DIFUSÃO DO LIVRO DIDÁTICO

Ao discutir o contexto do surgimento dos livros paradidáticos, Dalcin (2002) aponta que medidas governamentais destinadas a subsidiar os livros didáticos começam a ser implantadas já no início da década de 60 do século XX. Nesta mesma época, após o golpe militar de 64, “várias ações seriam tomadas tendo em vista subsidiar e controlar a produção e circulação de livros didáticos destinados às escolas brasileiras” (DALCIN, 2002, p.19).

O documento *Recomendações para uma Política Pública de Livros Didáticos* descreve o PNLD como o resultado de diferentes e sucessivas propostas e ações para definir as relações do Estado com o livro didático e afirma que essas relações sofreram alterações desde a criação do Ministério da Educação¹⁹.

Ao estudar as políticas públicas e os programas do Estado em relação aos livros-texto, mais especificamente aqueles destinados à escola fundamental, Carvalho (2008, p. 1) destaca que “percebe-se uma mudança gradual de ações que visavam basicamente ao controle²⁰, para ações mais preocupadas com a qualidade pedagógica dos livros-texto”.

O crescimento do mercado editorial provocado por tais ações governamentais transformou o livro didático brasileiro em uma importante mercadoria, atraindo o interesse das editoras. Como efeito, o aumento da oferta de livros fez com que sua escolha, por parte dos professores, se tornasse mais criteriosa, pois nem todos eram adequados.

¹⁹ Para uma visão global dessas alterações, consultar anexos 1 e 4 das *Recomendações para uma Política Pública de Livros Didáticos* (BRASIL, 2001, p.11)

²⁰ O controle da conformidade dos manuais com o programa é muito variável de um país para outro, ainda que exista, quase sempre, uma comissão oficial expressamente encarregada de apreciar essa conformidade e/ou de os aprovar (GÉRARD; ROEGIERS, 1998, p. 38).

De acordo com o Guia de Livros Didáticos de 2008, o Programa Nacional do Livro Didático sofreu modificações até chegar à sua quarta edição, porém, a escolha do livro pelo professor, no contexto de sua escola, sempre foi mantida, porque é ele quem vive a experiência da sala de aula, com sua riqueza e desafios.

Os objetivos básicos do PNLD são a aquisição e a distribuição gratuita de livros didáticos e dicionários de Língua Portuguesa de qualidade para alunos e professores das escolas públicas do Ensino Fundamental brasileiro.

Para entender melhor como é visto o PNLD por quem conduz este processo, apresento algumas informações extraídas do documento Recomendações para uma Política Pública de Livros Didáticos²¹ (BRASIL, 2001).

- Assim como o processo de escolha e aquisição dos livros didáticos sofreu alterações, também os critérios eliminatórios das coleções foram sendo adaptados.²²
- Em relação às condições políticas e operacionais, a abrangência do Programa tendeu, desde sua criação, a apresentar limitações, pois atendeu apenas determinadas disciplinas, séries e redes do sistema público de ensino. Isso se deu em diferentes momentos e de acordo com os recursos disponíveis. A própria distribuição dos livros apresentou dificuldades com certa frequência, algumas relacionadas à entrega dos manuais no início do ano letivo e outras ao fornecimento aos professores dos livros por eles escolhidos.
- É preciso destacar também os impactos positivos do Programa. As seguidas modificações pelas quais passou, evidenciam um esforço de auto-avaliação e uma busca permanente na tentativa de responder de modo mais adequado à complexa realidade do livro didático nos contextos editorial e educacional brasileiro.

²¹ De acordo com Carvalho (2008), a Comissão Técnica do Livro Didático, responsável pela produção do referido documento, foi criada em 1999, por meio de portaria ministerial, “com a missão de supervisionar as avaliações, e assessorar o ministério em assuntos ligados ao livro didático” (CARVALHO, 2008, p.5).

²² Atualmente, são eliminadas as coleções que apresentarem: incorreções de conceitos e informações básicas, falta de coerência e adequação metodológica, não observância aos preceitos legais e jurídicos.

- No campo da produção editorial, o PNLD demarcou padrões de melhor qualidade para os livros didáticos brasileiros. O percentual de coleções recomendadas tem aumentado, enquanto que o de excluídas vem sendo reduzido. O impacto mais importante é que a avaliação pedagógica dos livros produziu uma ampla renovação da produção didática brasileira, o que pode ser evidenciado com o aumento da participação de novas editoras a cada Programa, o crescimento de títulos inscritos e o surgimento de uma nova geração de autores, o que pode estar associado a uma preocupação crescente das editoras com a adequação dos livros²³.
- Os impactos positivos também podem ser observados no campo escolar. Inicialmente as escolhas dos professores recaíam, predominantemente, sobre os livros menos qualificados pela avaliação. Progressivamente, a situação se inverteu, sendo que os mais bem qualificados passaram a ser os mais solicitados.
- Ao lado desses indicadores de impacto positivo observa-se também uma melhora na abrangência da cobertura do PNLD com a regularização do fluxo de atendimento, o aumento da eficácia dos processos de compra e distribuição, além de um aumento no número de disciplinas e séries atendidas.

O PNLD, enfim, por meio de debates que se seguiram à implementação do processo de avaliação de livros didáticos, envolveu um número crescente de segmentos sociais no debate educacional, construindo, ao fim de seus primeiros cinco anos, um *consenso* em torno de seu papel fundamental para construir, com a comunidade escolar e universitária e com as editoras envolvidas no esforço de melhoria dos materiais didáticos, um novo padrão de qualidade para o livro escolar (BRASIL, 2001, p. 23).

- Com livros de melhor qualidade nas escolas, o PNLD vem possibilitando a reformulação dos padrões de produção do manual escolar brasileiro e criando condições para a renovação das práticas de ensino. Mesmo apresentando impactos positivos, o Programa ainda precisa sofrer reformulações, seja em relação à dinâmica do processo de avaliação, aquisição e distribuição de

²³ Evidentemente esta preocupação está relacionada também com a questão dos lucros. Em 2009, o governo federal investiu R\$ 577,6 milhões na compra de livros didáticos para a educação básica e R\$ 112,8 milhões na distribuição dessas obras para todo o país (Dado disponível em <<http://www.fnnde.gov.br/index.php/programas-livro-didatico>>. Acesso em 20/04/10).

livros, ou em razão das mudanças ocorridas no contexto educacional brasileiro.

Com erros e acertos, o PNLD vem procurando evoluir. De qualquer forma, não se pode ignorar os avanços que ele representa para o ensino de uma maneira geral. Uma participação mais efetiva de todas as classes envolvidas, direta ou indiretamente, com o livro didático e seus usos, poderia trazer importantes contribuições para todo o processo.

3.2 O PROCESSO DE ESCOLHA NAS ESCOLAS

No contexto desta pesquisa, também se faz necessário entender como se dá o processo de escolha dos livros didáticos no ambiente escolar. Os livros que chegam às escolas públicas percorrem um longo caminho. Depois de aprovados pelo MEC, é preciso que eles sejam escolhidos pelas escolas, para que então possam ser distribuídos. Falhas são apontadas neste processo, conforme discutem autores como Santos (2007) e Longen (2007).

Todo o movimento gerado durante a escolha do livro didático a ser adotado depende também da organização escola, porém vários outros fatores podem interferir neste processo.

Santos (2007) procurou analisar os elementos relacionados aos processos de escolha do livro didático. Sua pesquisa foi desenvolvida a partir de três questões orientadoras que visava responder: quais são as escolhas do professor a respeito do livro didático, como essas escolhas se relacionam com os processos que compõem o PNLD e quais os critérios de escolhas definidos pelo professor.

Os professores, durante o processo de escolha do PNLD, devem seguir regras estabelecidas pelo programa do MEC, tais como atender ao cronograma do período de escolha, analisar o Guia do Livro Didático, organizar-se para analisar e definir as obras, preencher o formulário de escolha. Mas como e em que medida essas regras são cumpridas pelos professores e que efeitos produzem no cotidiano escolar? (SANTOS, 2007, p. 22)

Esta mesma autora chama a atenção para a necessidade de abordar os diferentes tipos de pressão mencionados pelos professores e que podem ocorrer

entre “o MEC e as editoras, editores e autores, MEC e autores, MEC e escolas, editoras e escolas” (SANTOS, 2007, p. 22). Explica ainda que para compreender essas relações de conflito, força e contraposição, é necessário explicitar as relações que se constroem entre as condições objetivas nas escolas e as demandas governamentais relacionadas ao PNLD. Do ponto de vista do discurso oficial, o papel do professor é importante nesse processo de decisão, mas na prática é questionável o seu grau de participação nas decisões relativas ao que e como ensinar e quais livros usar.

O Guia de Livros Didáticos é pensado para um processo de escolha da escola, no qual toda a equipe deveria estar envolvida, mas nem sempre ele é utilizado.

“O programa do governo federal realizado nas escolas públicas a partir da avaliação e seleção das obras pelo MEC define os critérios, as formas de realizar a avaliação dos livros e produz o Guia de Livros Didáticos que é enviado às escolas” (SANTOS, 2007, p. 25). Explicando a função do GLD, esta autora aponta que seu objetivo é servir de subsídio para as escolhas realizadas pelos professores, que se orientam através das resenhas das obras aprovadas, contidas neste documento, indicando também elementos que devem ser considerados quanto à organização escolar para que essas escolhas ocorram de forma adequada e consciente. Com isso, a intenção do MEC é “fornecer ao professor, no momento de escolha, referenciais dos avaliadores sobre as obras que podem ser escolhidas, tendo em vista que as obras excluídas não estão relacionadas nesse Guia” (SANTOS, 2007, p. 93). Em seu levantamento, os professores entrevistados apresentaram as diferentes razões que justificam o fato de não utilizarem o Guia em suas escolhas, entre elas “a falta de tempo para analisá-lo, não considerarem o instrumento importante, não serem estimulados pela coordenação para essa análise, e sobretudo pelo fato de as resenhas trazerem o olhar dos especialistas e não de professores” (SANTOS, 2007, p. 95). Além disso, outras questões implicam nessa posição adotada pelos professores em relação ao uso do Guia, como o fato de não chegar em suas mãos, ficando apenas com a equipe pedagógica em função do curto tempo de análise e também pelo pequeno número de exemplares enviados às escolas.

A avaliação do livro didático feita pelo MEC através do Guia causou um efeito danoso apontado por Carvalho (2008, p. 10), que é “a cristalização de um modelo de livro didático”.

Isso pode ser observado particularmente na área de Matemática, em que os autores procuram seguir o modelo de livros bem recomendados pelo MEC. Com o desaparecimento, nos guias do livro didático, a partir do PNLD-2007, essa cristalização de um modelo bem avaliado tende a diminuir (CARVALHO, 2008, p. 10).

Nesse sentido, encontramos críticas em relação ao processo de avaliação das coleções feitas pelo MEC:

Hoje, passadas algumas décadas, há no Brasil a avaliação do livro didático. São “especialistas” que, por meio de critérios previamente estabelecidos, “aprovam” ou “reprovam” os livros. Preciso acreditar, como autor, que há lisura nesse processo. Porém, falta algo: ouvir o autor na outra ponta. Não precisa ser criada uma tribuna para autores e avaliadores, mas, simplesmente, oportunizar o direito de ser escutado sem melindres de nenhuma das partes. É necessário discutir, por exemplo, a razão de uma determinada obra ser aprovada numa avaliação e reprovada na outra. Será que os critérios de avaliação são tão subjetivos assim? Respostas precisam ser dadas (LONGEN, 2007, p. 377).

Por outro lado, Santos (2007, p. 24) aponta que, “de acordo com alguns pesquisadores houve uma crítica das editoras ao MEC, repudiando a forma como ocorreram as análises e exclusões dos livros inscritos por elas”. A autora explica que uma das formas de controle exercido pelo MEC é verificar, nessas avaliações, se os livros foram produzidos de acordo com os PCN.

Como efeito de críticas recebidas, o MEC publicou o decreto nº 7 084, de 27 de janeiro de 2010, que dispõe sobre os programas de material didático. De acordo com a ABRELIVROS²⁴, este decreto atende a diversas solicitações feitas por esta instituição, entre as quais destaca-se o terceiro parágrafo do artigo 20, que indica, no caso de uma obra ter sido reprovada pela equipe técnica, a possibilidade de recurso no prazo de até 10 dias após a divulgação do resultado da avaliação. Outra conquista importante é a oportunidade de serem feitas pequenas correções em falhas pontuais, em até cinco dias úteis, por parte do responsável pela obra, desde que os erros não ultrapassem a 5% do total de páginas.

Considerado um interlocutor que passa a dialogar com o professor e com o aluno, contribuindo para o processo de ensino-aprendizagem, assim é visto o livro didático no Guia de Livros Didáticos (PNLD 2008). Nesse diálogo, o texto é portador

²⁴ Associação Brasileira de Editores de Livros. Estas informações estão disponíveis em <<http://www.abrelivros.org.br>>. Acesso em 18/02/10.

de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente – que devem ser explicitados no manual do professor. Ainda de acordo com o Guia, entre as funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno, destacam-se, entre outras, o favorecimento à aquisição de conhecimentos socialmente relevantes e uma forma de propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas, que contribuam para aumentar sua autonomia. “Conceber um manual escolar está longe de ser um mero processo de tradução fiel de qualquer programa de ensino; é, antes, a concretização de um projeto pessoal que é posto ao serviço do processo de ensino-aprendizagem” (GÉRARD; ROEGIERS, 1998, p. 36).

Em relação ao professor, o livro didático auxilia no planejamento e gestão das aulas, seja pela explanação dos conteúdos curriculares ou pelas atividades e exercícios propostos, além de assumir o papel de texto de referência, favorecendo a formação didático-pedagógica e auxiliando no acompanhamento da aprendizagem do aluno. “O uso do livro didático pelo professor como material didático, ao lado do currículo, dos programas e outros materiais, instituem-se historicamente como um dos instrumentos para o ensino” (BIEHL, 2009, p. 2).

Tamanha é a responsabilidade, tanto na escolha quanto no uso do livro, por parte do professor, que ele se faz indispensável na observação desse instrumento didático quanto à sua adequação ao processo pedagógico. “Sua escolha deve ser pautada, entre outros fatores, no projeto político-pedagógico da escola, na realidade sociocultural em que a escola está inserida e nas experiências prévias dos professores com títulos anteriores” (MEC)²⁵.

Ao optar pelo uso de um determinado LD em sala de aula, os professores são seguramente guiados por critérios que norteiam o momento de escolha desses materiais e que organizam o processo de seleção vivido no PNLD. Esse processo se concretiza no âmbito escolar em práticas escolares e representações sociais distintas (SANTOS, 2007, p. 21).

Nessa direção, Santos (2007) indica que o professor, ao optar pelo uso de um LD exerce importante papel, pois é através de sua ação que se consolida a implementação das políticas públicas do livro, ponto crucial quando se entende que parte dos saberes que devem ser ensinados pelos professores e aprendidos pelos alunos se apresenta no material didático escolhido. Além disso, uma formação sólida

²⁵ Escolha do Livro Didático, disponível em <<http://portal.mec.gov.br>> (acesso em 18/02/10).

dos profissionais da educação pode interferir na definição dos critérios envolvidos na escolha de um livro de qualidade. Esta autora levantou a dificuldade que alguns professores sentem em entender os manuais didáticos e suas propostas metodológicas, que deveriam ser mais simples e apresentar os conteúdos de forma estruturada, forma esta que seja de domínio do professor, para que “mesmo antes do aluno, o professor possa compreendê-los” (SANTOS, 2007, p. 103).

Evidentemente que o livro didático não deve ser o único suporte pedagógico para o professor, se bem que, infelizmente, é o que acontece em muitas situações.

Em Cadernos de Práticas de Ensino²⁶ – Série Matemática, um estudo sobre o livro didático de Matemática, analisou sua finalidade, aplicação e a forma como é utilizado, através de duas questões:

A primeira era sobre o que é um bom livro didático.

A segunda questionava as condições que devem ser proporcionadas aos professores para que escolham “bons” livros.

A escolha de um bom livro é tão importante quanto sua utilização. Participando diretamente do processo de escolha, os professores estarão cada vez mais envolvidos com sua plena exploração em sala de aula, o que irá certamente contribuir para a melhoria do ensino” (FRANCO, *et al*, p. 33).

No decorrer da referida pesquisa, foram levantados alguns fatores contra o livro didático, entre os quais podemos citar que ele não leva em consideração que cada pessoa aprende em um ritmo próprio, que sua aplicação é disseminar conhecimento num grupo supostamente homogêneo e que, muitas vezes, ele pode ser extremamente anti-didático, em função de seu conteúdo, estruturação ou uso. Depois de discutir o texto didático (estrutura, conteúdo e inteligibilidade), fatores na escolha (autor, aprendizagem, mercado, custo), os autores concluem:

Não podemos confundir apoio com substituição, pois, quanto melhor o livro didático, mais ele exige do professor, no sentido de que este é levado a modificar sua rotina de trabalho, a experimentar novas tecnologias, a lidar com a iniciativa e a criatividade de seus alunos, estimulada pelo livro inteligente e desafiador.

Mas para que os professores escolham o ótimo, é necessário que este ótimo exista e seja colocado em suas mãos para permitir a comparação antes da escolha (FRANCO, *et al*, p. 36).

Como já discutido anteriormente, no processo de escolha do livro didático deve ser observada sua articulação com os princípios didático-pedagógicos

²⁶ Caderno número 3 (1º semestre de 1991), produzido pela USP - Faculdade de Educação, Departamento de Metodologia do Ensino e Educação Comparada. Autores: Franco, S. R.; Gimenez, J. A.; Chow, D.; Matsuura, C. H.; Hanazono, M. e Souza, M. F.

adotados na escola. Além disso, a Matemática que se quer ensinar deve ser refletida nessa escolha. Tal colocação abre espaço para alguns questionamentos. Em quais momentos o professor vivencia o planejamento? Sob quais circunstâncias? Como operacionalizar a escolha de um livro didático que responda às concepções de ensino da escola e que ajude a formar o aluno que se quer formar?

De acordo com Santos (2007, p. 79), para entender melhor os saberes escolares é preciso considerar a cultura da escola, o que permite entender os processos que se passam em seu interior e como estes são construídos. Mesmo existindo um currículo de referência, cada escola estabelece sua própria proposta curricular, definindo os conteúdos mais significativos para o trabalho em sua comunidade.

Sobre o processo de escolha, Biehl (2009) relata sua experiência em três diferentes momentos. No primeiro, a escola proporcionou vários encontros com professores de Matemática para analisar qual livro seria mais adequado à realidade da instituição. Durante os três anos em que foi utilizado, influenciou muito na aprendizagem. Os alunos percebiam o envolvimento do professor com o livro, pois demonstrava conhecimento do conteúdo nele contido. No processo de escolha seguinte, a escola não proporcionou tais encontros. A análise foi feita nos intervalos das aulas, em um curto espaço de tempo. Quando começaram a utilizar o livro escolhido, perceberam que não era o mais adequado, pois abordava o conteúdo de uma forma diferente, apresentando uma metodologia que não era a adotada pela escola. Isso fez com que o livro fosse pouco explorado. Até mesmo os alunos perceberam que ele não se inseria no contexto da escola. Como efeito dessa experiência, os professores foram mais criteriosos na seleção seguinte, argumentando sobre as angústias geradas por uma escolha mal feita. Desta vez, selecionaram um bom livro, porém, problemas fizeram com que o material que chegou à escola não fosse aquele escolhido. Novamente o livro não foi muito utilizado.

Da mesma forma que há instituições que não fazem da construção do projeto-pedagógico ou escolha do livro didático um momento de discussão e envolvimento dos membros da comunidade escolar, por outro lado existem aquelas que tornam esse processo um momento reflexivo e participativo, entendendo que a tarefa educativa precisa ser construída na coletividade.

O professor deve entender o LD como um complemento do seu trabalho, uma ferramenta auxiliar e analisar de forma crítica os livros em circulação no país, mais especificamente aqueles disponibilizados para aquisição através do PNLD.

Por entender que é preciso conhecer o objeto onde esta pesquisa está focada, ao longo deste capítulo foram discutidos alguns aspectos relacionados especificamente ao livro didático. Uma vez conhecido o objeto de estudo, é necessário descrever de que forma ele será estudado. Portanto, peço licença ao leitor para repetir meu objetivo: verificar a presença das representações tridimensionais nos livros didáticos de Matemática e analisar se elas abrem uma possibilidade para a visualização espacial. No capítulo a seguir, trato esta visualização à qual me refiro como uma possibilidade para “ver o invisível”.

4 É POSSÍVEL “VER O INVISÍVEL”?

*O que é representado numa pintura, é aquilo que os olhos vêem; é a coisa ou as coisas de que já se tem de ter uma ideia.*²⁷

Tomo por invisível não o que costumeiramente julgamos ser “transparente” e que, portanto, não nos é visível. O sentido assumido por mim ao longo deste texto é que invisível é aquilo que pode estar presente em uma determinada representação (e, para algum observador realmente ESTÁ presente), apesar de não o estarmos vendo, é saber perceber detalhes que, mesmo não estando ao alcance de nosso olhar, fazem parte da representação. Refiro-me, mais especificamente à visualização dos chamados “objetos matemáticos tridimensionais”, suas características e elementos.

Uma atividade desenvolvida ao longo deste trabalho é um exemplo do que me refiro, ao apresentar o resumo da pesquisa, que ainda estava em estágio inicial, durante um evento organizado pela UFPR. Uma imagem formada apenas por segmentos de reta foi apresentada aos participantes (Figura 4), que eram questionados sobre quantos cubos eles conseguiam “enxergar”, mesmo sendo uma representação no plano. Apesar de muito esforço e da indicação de que bastariam três faces para determinar cada cubo, eles não foram encontrados.

²⁷ Magritte escreveu sobre seu quadro O Império das Luzes, que ganhou na Bélgica o prêmio Guggenheim (ERNST, 2007, p. 69). Esta tela, de 1954, representa a junção inesperada do dia com a noite. Imagem nos anexos.

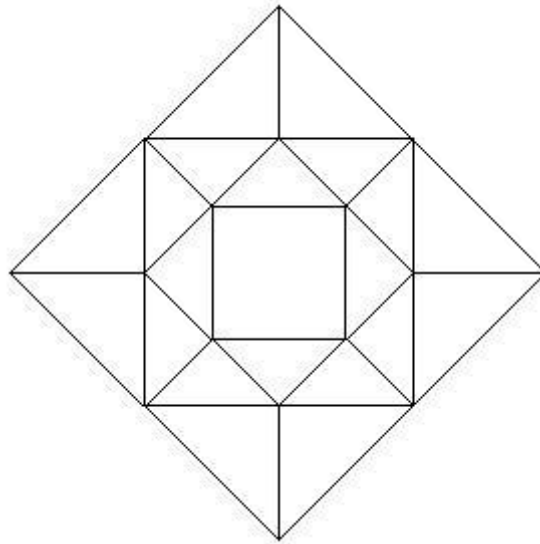


FIGURA 4 - Quantos cubos podem ser vistos?
FONTE: a autora

Somente depois de apresentar recortes sobrepostos à figura inicial (Figuras 5 e 6) pintadas com lápis de cor, num jogo de luz e sombra, é que os cubos puderam ser percebidos pela maioria dos participantes. Um simples detalhe ampliou a possibilidade de torná-los visíveis.

Ao rotacionarmos a figura em rosa (Figura 5), temos 4 cubos menores, o mesmo acontece com a figura em azul (Figura 6), formando 4 cubos maiores, totalizando neste caso 8 cubos.

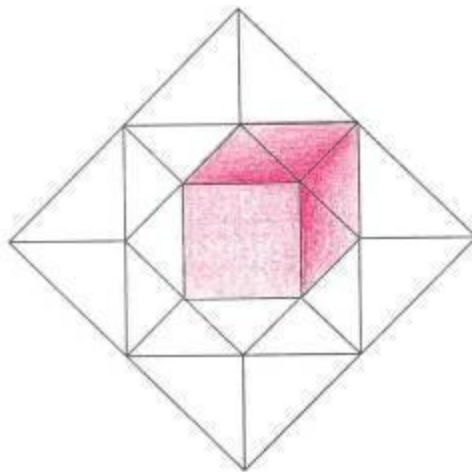


FIGURA 5 – Cubo sombreado rosa
FONTE: a autora

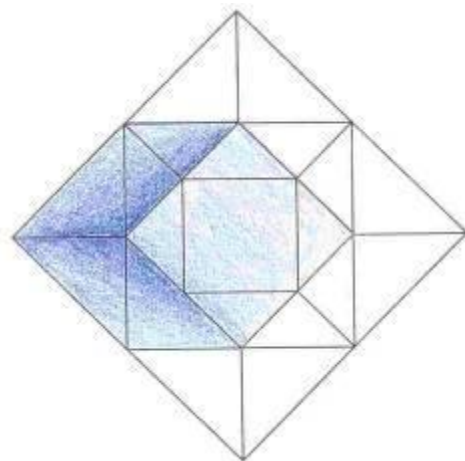


FIGURA 6 – Cubo sombreado azul
FONTE: a autora

É importante observar que, mesmo com os recortes apresentando a ideia de 3 faces de um cubo, ainda havia quem não os enxergava, ou então quem não

conseguia identificar todos os 8 cubos indicados, o que talvez possa ser um indício de que existam diferentes níveis de visualização.

Será que é possível aprender a ver este invisível? “Na educação, nos preocupamos de tal forma com o ‘como o aluno pode aprender a ver’, ou ‘como ele aprende a ver’ que, geralmente, não damos importância à própria dinâmica do saber que envolve a questão do ver” (FLORES, 2003, p. 36).

Reconhecer um objeto tridimensional representado em apenas duas dimensões é como ver o invisível, pois é possível perceber aspectos/detalhes que fazem parte do objeto, apesar de não estarem visíveis. É a esse invisível presente nas imagens que me refiro.

A natureza invisível das imagens é um velho tema, conforme aponta Novaes (2005). Mas o que entendemos por imagem?

“As imagens sempre exigiram de nós tempo para ver, o tempo lento da vidência e da evidência, isto é, o tempo necessário para o desvelamento das ideias contidas em cada uma delas” (NOVAES, 2005, p. 11). Como observa este autor, o olhar consiste mais na capacidade de estabelecer relações do que em recolher imagens. Para ele, há uma construção do pensamento, não apenas nas imagens, mas também através delas. Somos hoje dominados pelas imagens e é por esse excesso que ainda não aprendemos a ver.

Se não sabemos ver, é certamente porque a visibilidade não depende do objeto apenas, nem do sujeito que vê, mas também do trabalho da reflexão: cada visível guarda uma dobra invisível que é preciso desvendar a cada instante e a cada movimento (NOVAES, 2005, p. 11).

Ao escrever que as imagens permitem um duplo movimento, o sair de si e trazer o mundo para dentro de nós, Novaes (2005) quer dizer que é nesse movimento entre olhar e imagem, que reside o princípio do pensamento, pois, sem ele, a imagem do mundo seria apenas um decalque. Por meio do pensamento, cria-se um mundo imaginário, um mundo não da ficção, mas da invenção do novo. Usando as palavras de Leonardo da Vinci, o autor afirma que as linhas visíveis de uma figura obrigam o olho a pensar, ao levá-lo em direção a um centro virtual. “O olhar é feito de luz e sombra, do visível e do invisível” (NOVAES, 2005, p. 14). Por não cessar de consumir imagens, o olhar do homem contemporâneo acolhe além da sua capacidade de refletir sobre elas.

“E, no entanto, essa tênue linha de visibilidade envolve, em troca, toda uma rede complexa de incertezas, trocas e evasivas” (FOUCAULT, 1999, p.5).

Entendo que nosso olhar não é instantâneo, ou seja, aquilo que olhamos pode não ser o que vemos, é preciso processar as informações colhidas pelo olhar. Perceber este invisível ao qual me refiro faz parte deste processo, do duplo movimento descrito por Novaes (2005).

É preciso conhecer o objeto representado, suas características e propriedades, para então poder identificá-lo.

Particularmente importantes no domínio da Geometria, a visualização e o processo visual têm de ser considerados cuidadosamente nas aulas de Geometria, principalmente no Ensino Fundamental, quando os objetos geométricos são apresentados aos estudantes através de um desenho, um modelo ou através de tarefas geométricas que levam ao uso de desenhos e modelos.

O fato dos conceitos geométricos serem quase sempre associados com objetos físicos pode tornar a relação entre a Geometria e a visualização muito mais complicada do que aparenta (PASSOS, 2000, p. 113).

Entender os objetos geométricos representados no plano exige conhecimento, mas também requer certa dose de imaginação.

É Novaes (2005) quem afirma que o esforço do pensamento consiste em decifrar imagens e, a partir delas, entender o mundo. Imaginar é julgar e pensar.

Será, portanto, que uma imagem só será imagem se for reconhecida? Imagem é representação para Novaes (2005), ela começa no momento em que paramos de ver seu suporte material para poder ver, então, uma figura conhecida. De uma forma bem simples, uma imagem torna presente algo que está ausente. Passa a ser então o representante, o substituto de algo que ela não é e que não está presente. O autor explica que algo representado quer dizer presente na imagem e tornado presente através dela. É a representação de algo ausente, que produz alguns aspectos da aparência visível. “Toda imagem é imagem *de* alguma coisa” (NOVAES, 2005, p. 21). Prossegue ao afirmar que, em comparação com linguagem, a imagem apresenta defeitos, a partir dos quais tira seu próprio poder. O primeiro diz respeito ao fato de que a imagem é irracional, como por exemplo, pode representar um animal, mas não a animalidade. Em contrapartida, isso a torna superior, porque o que ela pode mostrar nada pode dizê-lo. Há casos em que nada vale tanto como a imagem: um artigo sobre a fome na África é uma informação, mas uma foto de uma criança morrendo de fome pode provocar piedade, indignação e revolta.

O segundo defeito da imagem é que ela mostra de forma afirmativa, ignorando a negação. Tudo é verdadeiro ou falso. Um exemplo que ilustra a descrição feita pelo autor é “Isto não é um cachimbo”, de Magritte (Fig. 7). “Uma

imagem de um cachimbo é um cachimbo. Daí o caráter particularmente estranho, atordoante, humorístico, do ‘isto não é um cachimbo’ de Magritte” (NOVAES, 2005, p. 27).



FIGURA 7 - Isto não é um cachimbo, René Magritte, 1929.

A negação do texto confunde nosso olhar. Para Foucault (1988), nesta obra é impossível definir o que é verdadeiro, falso ou então contraditório. É inevitável relacionar o que está escrito com o desenho e isso nos desconcerta.

Novaes (2005) prossegue afirmando que outro defeito da imagem está relacionado ao fato de que ela só conhece um modo gramatical, o indicativo. Apenas “é”, não um “se” ou “talvez”. Essa incapacidade de distinguir o tempo torna a imagem mágica, pois pode reviver os mortos e mostrar sempre presente aquilo que já é passado. “No mais alto grau, aquele da representação divina, a imagem visível tem o poder de *representar o invisível* – é a maior ambição da imagem (ou sua maior ilusão, conforme o ponto de vista)” (NOVAES, 2005, p. 31). Sobre a ilusão imaginária criada por certas imagens, o autor afirma que, quanto mais a imagem se esforça para tornar presente aquilo que está ausente, quanto mais tenta representar o irrepresentável ou então tornar visível aquilo que é invisível, mais gera a ilusão de não ser imagem. É preciso, portanto, distinguir entre o poder real das imagens e a ilusão imaginária que este poder pode gerar. Fazer crer que não é uma imagem é seu mais perigoso poder.

Procurei discutir aqui a possibilidade de ver o invisível relacionando-a com alguns aspectos subjetivos das imagens. Apresento a seguir um ensaio sobre a

relação entre a arte e a representação do invisível, discutindo o exercício de diferentes olhares.

4.1 A ARTE E O INVISÍVEL – APENAS UM ENSAIO

Quais são os elementos que tornam possível a criatividade? Será uma capacidade analítica profunda, proveniente de facilidade de visualização combinatória e geométrica – uma mente tão inquieta como um enxame de abelhas em um jardim, saltando de fato em fato, percepção em percepção, e fazendo ligações, ajudada por uma memória prodigiosa – uma intuição mística de como o universo fala matemática – uma mente que opera logicamente como um computador, criando implicações aos milhares, até que surja uma configuração apropriada? (DAVIS e HERSH, 1986, p. 336).

Procuro nesta minha pesquisa observar se as propostas dos livros didáticos oportunizam nossos alunos vivenciar a experiência de exercitar diferentes olhares. Mas de que forma? Analisando como o olhar tridimensional é provocado pelas imagens que representam o espaço. “Podemos partir de outras formas de saber e de práticas, no caso das artes, pois afinal a representação do espaço e dos objetos no espaço não se limita à Matemática” (FLORES, 2003, p. 46). Da mesma forma que isso é possível ao contemplarmos uma obra de arte, também o deveria ser ao estudarmos, por exemplo, os objetos tridimensionais e suas representações. Refiro-me aos objetos espaciais representados no plano.

Desenho é ilusão, assim intitula-se o capítulo escrito por Ernst (2007), no qual descreve a litografia *Desenhar*²⁸, de M. C. Escher (Figura 8).

²⁸ Encontramos diferentes traduções para os nomes das obras citadas neste capítulo.

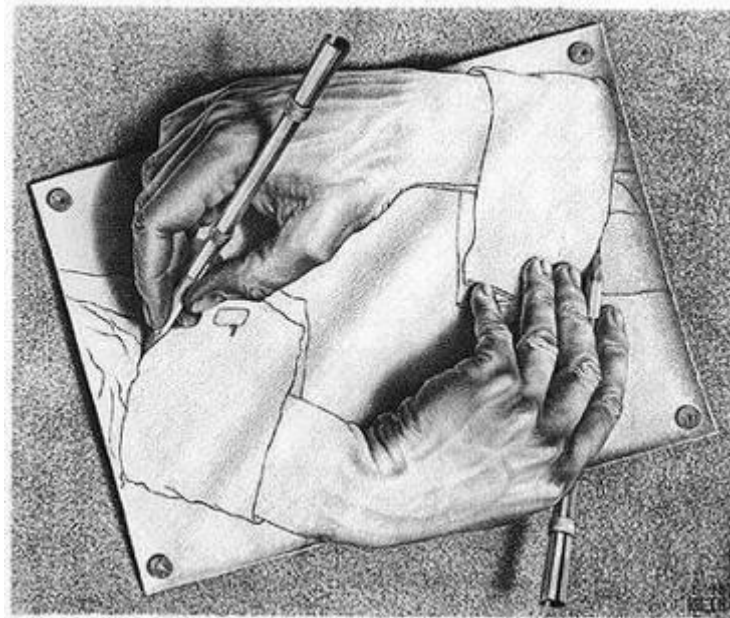


FIGURA 8 - Mãos desenhando, M. C. Escher, 1948, litografia.

Quando uma mão desenha outra mão e quando esta segunda mão se ocupa, ao mesmo tempo, a desenhando zelosamente a primeira mão e quando tudo isto é representado num bocado de papel preso com tachas a uma prancha ... e então quando tudo isto, ainda por cima é desenhado, podemos com certeza falar de uma espécie de super-ilusão. O desenho é, na verdade, ilusão: Estávamos convencidos de que olhávamos um mundo de três dimensões, enquanto o papel de desenho só é bidimensional (ERNST, 2007, p. 30).

Discutindo a gênese da obra de Escher quanto à representação da relação entre espaço e superfície plana, Ernst (2007, p. 24) descreve que o artista se viu confrontado com a situação de conflito característica de qualquer representação espacial: três dimensões têm de ser representadas num plano bidimensional. O espanto do artista sobre este fato ficou expresso nas chamadas “gravuras de conflito”, entre as quais está a obra representada acima. De forma crítica, investigou as leis da perspectiva para a representação do espaço, aceitas desde a Renascença²⁹, e encontrou novas leis que ele ilustra nas suas “gravuras de perspectiva”. Sua sugestão espacial sobre a superfície foi tão longe que conseguiu criar mundos que não podem existir em três dimensões, representados em suas “figuras impossíveis”. Suas figuras de ilusão são tão instigantes que frequentemente aparecem em livros didáticos de Matemática.

²⁹ Flores (2003) pesquisou o desenvolvimento histórico da perspectiva, apresentando reflexões sobre a relação entre ver, conceber e relacionar-se com o espaço e os modos de representá-lo.

Mas como pode ser possível vermos o tridimensional representado no plano? Acredito que uma possibilidade seja ensinando nosso próprio olhar a ver com outros olhos.

Novaes (2005, p 82) afirma que “os historiadores da arte costumam dizer que é preciso treinar o olho. Isto significa incorporar um saber, sempre silencioso, sempre intuitivo, capaz de captar o que há de comum entre as formas”.

Exemplifico isso convidando o leitor a realizar um exercício simples de leitura e observação de uma obra de arte³⁰. Evidentemente que não se trata de uma fórmula mágica, apenas uma maneira de mostrar que existem caminhos que podem ajudar a modificar nosso próprio olhar. São olhares que se cruzam e se combinam, mas também são olhares que se distanciam.

Conforme aponta Novaes (2005, p 78), “qualquer visível causa uma forma de insatisfação, que toma a forma de um desejo de exploração da dimensão invisível do visível”. As artes visuais procuram mostrar a essência da visibilidade, que é sua própria invisibilidade.

Uso como exemplo o quadro intitulado *As Damas de Honor* ou *As Meninas* (Figura 9)³¹, mas poderia ser outro, ou vários outros.

³⁰ Outro exercício do olhar é proposto por Dalcin (2002, p. 211 a 215), ao convidar o leitor a analisar a imagem que abre o capítulo final de sua dissertação, que mostra a dualidade entre o fascínio do livro e o poder do mercado: *The Moneylender and his Wife*, de Quentin Massys.

³¹ Flores (2007) apresenta uma análise da construção da obra, do ponto de vista da perspectiva utilizada, mostrando como o artista organizou o espaço pictural de maneira a enfeitiçar nossos olhos (p. 134 a 139).



FIGURA 9 – As Meninas, Diego Velázquez, 1656
(óleo sobre tela 318 x 276 cm), Museu do Prado – Madrid

Esta pintura descreve mais que uma cena, ela constitui-se num convite a possíveis interpretações. Trata-se de um retrato ambientado, quase alegórico e representa uma indiscutível obra-prima de espontaneidade³², cujo autor, Velázquez, está presente, mas a principal personagem é a luz.

Foucault (1999) nos mostra um olhar profundo, jamais pensado (pelo menos por mim), uma análise tão detalhadamente feita que modificou meu próprio olhar. Essa mudança trouxe-me à lembrança parte do prefácio de Flores (2003, p. 19): “Engraçado como às vezes, ou quase nunca, não nos damos conta daquilo que

³² De acordo com a coleção Gênios da Pintura, formada por fascículos e publicada pela Abril Cultural no período de 1968 a 1982.

temos e acontece à nossa volta. Nossos olhos, viciados a olhar aquilo que os pensamentos olham, só vêem mesmo o que sabem, ou estão perspectivados a ver”.

Penso que o que falta a muitas pessoas e que poderia ajudá-las a desenvolver a visualização seja talvez esta liberdade do olhar. Se é possível na arte, por que não será na Matemática?

A arte, considerada como forma de conhecimento, recupera assim sua condição de mimesis, não só de uma realidade natural, mas também de toda uma realidade imaginada que a matemática, em especial, possa oferecer à nossa “percepção” (CIFUENTES, 2007).

Apresento a seguir alguns recortes da análise de Foucault (1999, p. 4 a 20), que podem servir como uma forma de exercitar diferentes olhares, de perceber detalhes que antes, talvez, não fossem captados. Sugiro uma observação minuciosa na obra (Figura 6) antes e outra depois da leitura desses recortes.

Quanto à presença do pintor na tela, descreve:

Seu talhe escuro, seu rosto claro são meios-termos entre o visível e o invisível: saindo dessa tela que nos escapa, ele emerge aos nossos olhos; mas quando dentro em pouco, der um passo para a direita, furtando-se aos nossos olhares, achar-se-á colocado bem em face da tela que está pintando; entrará nessa região onde seu quadro, negligenciado por um instante, se lhe vai tornar de novo visível, sem sombra nem reticência. Como se o pintor não pudesse ser ao mesmo tempo visto no quadro em que está representado e ver aquele em que se aplica a representar alguma coisa. Ele reina no limiar dessas duas visibilidades incompatíveis.

O pintor adota uma atitude em relação a quem observa o quadro:

O pintor olha, o rosto ligeiramente virado e a cabeça inclinada para o ombro. Fixa um ponto invisível, mas que nós, espectadores, podemos facilmente determinar, pois que esse ponto somos nós mesmos: nosso corpo, nosso rosto, nossos olhos. O espetáculo que ele observa é, portanto, duas vezes invisível: uma vez que não é representado no espaço do quadro e uma vez que se situa precisamente nesse ponto cego, nesse esconderijo essencial onde nosso olhar se furta a nós mesmos no momento em que olhamos. E, no entanto, como poderíamos deixar de ver essa invisibilidade, que está aí sob nossos olhos, já que ela tem no próprio quadro seu sensível equivalente, sua figura selada?

A relação que se estabelece pode causar surpresas:

Aparentemente, esse lugar é simples; constitui-se de pura reciprocidade: olhamos um quadro de onde um pintor, por sua vez, nos contempla. Nada mais que um face-a-face, olhos que se surpreendem, olhares retos que, em se cruzando, se superpõem. [...] Somos vistos ou vemos? [...] No momento em que colocam o espectador no campo de seu olhar, os olhos do pintor captam-no, constroem-no a entrar no quadro, designam-lhe um lugar ao mesmo tempo privilegiado e obrigatório, apropriam-se de sua luminosa e visível espécie e a projetam sobre a superfície inacessível da tela virada. Ele vê sua invisibilidade tornada visível ao pintor e transposta em uma imagem definitivamente invisível a ele próprio.

Sobre a presença do espelho, o único dos elementos destinados a oferecer representações que funciona com toda a honestidade e nos mostra o que deve mostrar:

De todas as representações que o quadro representa, ele é a única visível; mas ninguém o olha. [...] Seu olhar imóvel vai captar à frente do quadro, nessa região necessariamente invisível que forma sua face exterior, as personagens que ali estão dispostas. Em vez de girar em torno de objetos visíveis, esse espelho atravessa todo o campo de representação, negligenciando o que aí poderia captar, e restitui a visibilidade ao que permanece fora de todo olhar. [...] O espelho assegura uma metátese da visibilidade que incide ao mesmo tempo sobre o espaço representado no quadro e sua natureza de representação; faz ver, no centro da tela, aquilo que, do quadro, é duas vezes necessariamente invisível.

Mas o que o espelho nos mostra?

[...] o espelho, por um movimento violento, instantâneo e de pura surpresa, vai buscar, à frente do quadro, aquilo que é olhado mas não visível, a fim de, no extremo da profundidade fictícia, torná-lo visível mas indiferente a todos os olhares.

[...] O primeiro olhar ao quadro nos ensinou de que é constituído esse espetáculo-de-olhares. São os soberanos.

[...] Pois a função desse reflexo é atrair para o interior do quadro o que lhe é intimamente estranho: o olhar que o organizou e aquele para o qual ele se desdobra.

Quanto ao artifício usado pelo pintor, ao representar seu próprio olhar e o do espectador que, juntos, olham ou compõem o quadro:

É que, nesse quadro talvez, como em toda representação de que ele é, por assim dizer, a essência manifestada, a invisibilidade profunda do que se vê é solidária com a invisibilidade daquele que vê – malgrado os espelhos, os reflexos, as imitações, os retratos.

No livro em que escreve sobre a obra “Isto não é um cachimbo” de Magritte, Foucault (1988) colocou uma carta recebida do pintor em 1966, na qual ele explica que o pensamento é tão invisível quanto sentimentos como o prazer e a pena.

Mas a pintura faz intervir uma dificuldade: há o pensamento que vê e que pode ser descrito visivelmente. As Damas de honra são a imagem visível do pensamento invisível de Velázquez. O invisível seria então, por vezes, visível? Só com a condição de que o pensamento seja constituído exclusivamente de figuras visíveis. [...]

Existe, há algum tempo, uma curiosa primazia conferida ao “invisível” através de uma literatura confusa, cujo interesse desaparece se se observa que o visível pode ser escondido, mas que o invisível não esconde nada: pode ser conhecido ou ignorado, sem mais. Não cabe conferir ao invisível mais importância do que ao visível, ou inversamente.

O que não “falta” importância é ao mistério evocado de fato pelo visível e pelo invisível, e que pode ser evocado de direito pelo pensamento que une as “coisas” na ordem que o mistério evoca (FOUCAULT, 1988, p. 82-83).

Este quadro de Velázquez não é apenas um quadro. “Eis o retrato transformado em princípio da pintura: ele retrata o homem, retrata os objetos, retrata

a forma, retrata a atitude, retrata o acontecimento, ou seja, o instante. Enfim, em *Las Meninas* retrata o retratar”³³.

Por mais subjetivo que possa parecer, será que existe uma única maneira de “ler” um quadro? Evidentemente que este olhar depende muito dos olhos que o vêem. Neste jogo entre imagens e palavras somos enganados ou nos deixamos enganar? Diferentes interpretações são produzidas por diferentes olhares.

Certamente que, as interpretações de um quadro são múltiplas e mesmo contraditórias. Não será jamais a partir dele que poderemos simplificar todos os saberes, as concepções, as crenças, as bases filosóficas de um povo que, por sua vez, interage com a representação do real. No entanto, a maneira como o espaço é construído, ou melhor, a escolha de uma certa técnica de representação em detrimento de outra constitui-se num dado tangível. É desta escolha que o artista nos revela sua visão de mundo, as relações dele com o que tem a sua volta e a maneira pela qual ele pensa ser a ideal para representá-lo, ou seja, de tornar inteligível o mundo visível (FLORES, 2007, p. 86 e 87).

Traçando um paralelo com este exercício do olhar, questiono se a forma como os livros didáticos representam o espaço não perspectivam o olhar para uma única forma de ver, limitando-o talvez a uma visão distorcida e incompleta...

De acordo com Flores (2007), a representação do espaço³⁴ está intimamente ligada à experiência dos homens em relação a este espaço e ao saber envolvido. Além disso, a forma de o conceber e representar mantém uma relação ao modo específico de ver e olhar este espaço.

Apresento a seguir o resultado de minhas leituras acerca do tema visualização, embora alguns trabalhos apontem para um sentido diferente daquele que busco, outros ajudaram a guiar meu olhar.

³³ Vida e Circunstâncias na Educação Matemática, tese de doutorado de Carlos Roberto Vianna, USP, 2000, p. 187.

³⁴ Podemos encontrar maiores detalhes sobre a história da representação do espaço no ensaio *Cidades habitáveis: espaços experimentados, espaços representados*, desenvolvido no Capítulo 2 (Flores, 2007).

4.2 ALGUNS TRABALHOS SOBRE VISUALIZAÇÃO

A construção de um olhar se faz no exercício de reflexão e análise, não existem receitas (DALCIN, 2002, p. 45).

Considerando que a proposta desta pesquisa está relacionada ao desenvolvimento da capacidade de visualizar, faz-se necessário conceituar o termo visualização com base em um aporte teórico que o sustente.

Optei por iniciar esta construção através de uma imagem que ajudou-me a compreender, em parte, o que estava buscando. Fiquei fascinada, pelo que representava, para mim, o retrato do matemático renascentista Luca Pacioli usado por Flores (2007) no livro publicado a partir de sua tese de doutorado (Figura 10). Para ela, a relação entre o “escrito” e o “visual” pode ser notada na referida obra, que o representa apontando para uma passagem de um texto de Geometria e também para uma figura geométrica usada para explicar uma demonstração, sublinhando a importância da linguagem visual na demonstração geométrica. “A Geometria requer, por natureza, ser visualizada” (FLORES, 2007, p. 18)³⁵.

³⁵ De acordo com a autora, esta frase se refere a Luca Pacioli e encontra-se na revista *Lés Génies de la Science, Leonard de Vinci et scientifique* (2000, p. 64).



FIGURA 10 - Retrato de Luca Pacioli, Barbari, J.(1495). Museu Capodimonte, Nápoles

Esta imagem simboliza a ideia essencial que conduz o presente trabalho, mas em um sentido diferente daquele usado por Flores (2003). Penso que a construção, entre outras atividades, possa favorecer o desenvolvimento da visualização e não apenas explicar uma demonstração.

Discutindo sobre a possibilidade de ver no espaço, na introdução de sua pesquisa, Flores (2003), cita Parzysz ao escrever que muitos estudos interessados na Geometria, pensando em seu ensino e conseqüentemente em sua aprendizagem, buscaram demonstrar que é possível desenvolver nos alunos a capacidade de imaginar uma situação espacial a partir de um desenho. Tais pesquisas depositaram seus esforços na investigação das dificuldades apresentadas em fazer corresponder um objeto do espaço à sua representação plana, através de experiências em sala de aula.

A visualização, conseguida pela representação por desenhos das situações que se quer analisar, aumenta o grau de compreensão que delas se tem. Se as representações podem induzir a ilusões, podem também proporcionar uma visão mais clara do problema a resolver. E isso não é só na geometria. A falta de um bom sistema de representação numérica dificultou bastante o avanço da aritmética desde os gregos. O desenvolvimento só foi possível a partir da utilização dos algarismos indu-arábicos e do sistema posicional,

nos quais está presente, incontestavelmente, o aspecto visual (PAVANELLO, 1989, p. 18).

Como pode ser observado em alguns dos textos descritos a seguir a visualização mantém uma estreita relação com a intuição.

A PALAVRA INTUIÇÃO, da forma como é usada pelos matemáticos, transporta um grande peso de mistério e ambiguidade. Por vezes, parece um substituto perigoso e ilegítimo de uma demonstração rigorosa. Em outros contextos, parece designar o relâmpago inexplicável de percepção pelo qual uns poucos eleitos obtêm conhecimento matemático que outros só podem atingir por longos esforços (DAVIS; HERSH, 1986, p. 434, grifo dos autores).

Davis e Hersh (1986) consideram o conceito de intuição escorregadio e o relacionam a diferentes significados, sendo que em um deles intuitivo significa visual. Para estes autores, a topologia ou geometria intuitiva difere da topologia ou geometria rigorosa em dois aspectos. A versão intuitiva possui uma qualidade que falta à rigorosa, pois tem um significado, um correspondente no domínio das curvas e superfícies visualizadas, o que a torna superior nesse sentido. “Por outro lado, a visualização pode conduzir-nos a considerar como óbvias ou evidentes por si próprias afirmativas que são dúbias ou mesmo falsas” (DAVIS; HERSH, 1986, p. 435).

Para Dalcin (2002), as imagens, de um modo geral, exercem um certo poder e fascínio sobre as pessoas e que esse poder vem de sua capacidade de convencimento e de provocar comoção. “Num primeiro momento, as imagens têm a capacidade de convencer, de mostrar evidências da existência de algo. Elas satisfazem, mesmo que provisoriamente, os sentidos e auxiliam no processo de elaboração do pensamento” (DALCIN, 2002, p. 61).

Cunningham e Zimmermann (1991) exploram o papel da visualização na Educação Matemática e em domínios da Matemática, como é o caso da Geometria. Estes autores apontam para o renascimento do interesse na visualização³⁶ e que esse renascimento está sendo impulsionado pela evolução tecnológica. Em seu

³⁶ Também indicado por Costa (2000, p. 177 e 178) ao citar o trabalho de Hershkowitz, Parzysz e Dormolen, que descrevem duas razões para isso: “na vida moderna a apresentação de fenômenos mudou de tabelas e fórmulas carregadas de números e símbolos para uma apresentação visual dinâmica no monitor do computador, - hoje em dia há mudanças na visão da matemática, pelo que a matemática é vista como uma continuada procura de modelos e esta metáfora é seguramente visual”.

texto discutem um relatório da National Science Foundation³⁷, o qual afirma que a visualização representa um método de ver o invisível e que transforma o simbólico para o geométrico. Descrevem a visualização matemática como um processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio da tecnologia) e a utilização eficaz dessas imagens para a compreensão e a descoberta matemática. “Em Matemática, a visualização não é um fim em si mesma, mas um meio para um fim, que é o entendimento” (CUNNINGHAM; ZIMMERMANN, 1991, p.3, tradução nossa). Para atingir este tipo de entendimento, evidenciam que a visualização não pode ser isolada do resto da Matemática. As representações gráficas e o pensamento visual devem estar ligados a outras formas de representação e modos de pensar. Para caminhar entre estes diferentes modos, é preciso saber como as ideias podem ser representadas através de símbolos e/ ou códigos. Afirmam que a visualização não opera como um tema isolado, mas em um contexto matemático. É preciso desenvolver a habilidade de escolher a forma mais adequada para um problema particular, para então poder entender as limitações dessas formas de expressão da linguagem matemática.

Em seu artigo Cunningham (1991) discute o potencial da visualização para a educação científica³⁸ e matemática, procurando delinear seus aspectos técnicos e culturais. O técnico está relacionado aos sistemas de computação visual disponíveis. O aspecto cultural da visualização incide sobre o ensino e a aprendizagem de impacto visual na Educação Matemática, porque a visualização não apenas promove a intuição e a compreensão, ela é capaz de levar o aluno a aprender novas maneiras de pensar e fazer sua própria Matemática. Aponta para a necessidade de investigação quanto às lacunas existentes em relação ao conhecimento do ensino e da aprendizagem. O autor destaca alguns obstáculos à visualização em Educação Matemática relacionados às estruturas institucionais, sendo o mais crítico a inércia das próprias instituições. Para ele, o ensino baseado na visualização nos obriga a reaprender muitas das nossas competências pedagógicas. Não só devemos compreender a Matemática, mas também temos de compreender a forma de comunicar nossa Matemática visualmente. Destaca ainda a dificuldade em avaliar este tipo de aprendizagem e que o tema mais importante relacionado à visualização,

³⁷ Visualization in Scientific Computing (ViSC), Computer Graphics 21 (Novembro 1987)

³⁸ Para o autor, é uma forma de discutir a utilização de métodos visuais para a compreensão do trabalho científico.

provavelmente, seja como a aprendizagem visual e simbólica se complementam mutuamente.

Com as mudanças ocorridas nas concepções de ensino, a Geometria e, conseqüentemente as construções geométricas, perderam seu posto de destaque. Antes mesmo de Euclides, a técnica de demonstração era a simples visualização, sendo a Geometria considerada pelos antigos pitagóricos como uma ciência inseparável da visão.

O historiador seria, portanto, aquele que testemunhou o acontecimento com seus próprios olhos e, nesse sentido, tanto a geometria quanto a história compartilhariam a concepção da visão como fonte essencial do conhecimento (Le Goff apud Miguel, 1995).

Alguns trabalhos em especial me ajudaram a entender e ampliar aspectos relacionados à visualização. Vou me ater apenas às discussões feitas pelos autores nesse sentido, contudo, vale destacar que muitas das definições acerca do termo “visualização” levantadas pelos autores não se relacionam diretamente ao sentido procurado nesta pesquisa, conforme a concepção que assumo depois de discutir os textos a seguir.

4.2.1 Imaginação, intuição e visualização

Em sua tese de doutorado, Leivas (2009) identificou na literatura, em especial na oriunda do campo da Psicologia da Educação Matemática, como se caracterizam as pesquisas sobre o ensino de conceitos geométricos que mobilizam a imaginação, a intuição e a visualização.

Ele destaca (p. 209) que o tema *visualização* é tratado há muito tempo, sob diferentes enfoques, associado a conteúdos diversos e em vários níveis de escolaridade, por diferentes autores. A seguir são destacadas algumas definições sobre visualização que foram levantadas por ele³⁹ (Quadro 2):

³⁹ São indicados: o autor, ano e página onde se encontra no trabalho de Leivas (2009), bem como a definição do termo visualização dada pelo(s) referido(s) autor(es).

Autor	Ano	O que é visualização?	Pág.
Arcavi ⁴⁰	1999	É a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão.	209
Borba e Villarreal	2005	É um tema considerado em Educação Matemática como sendo uma forma de raciocínio matemático.	96
Guzmán ⁴¹	1997	Visualização em matemática como essa forma de atuar com atenção explícita às possíveis representações concretas enquanto desvelam relações abstratas que ao matemático interessam.	138
Jones	1998	Faz referência à visualização como componente no desenvolvimento do raciocínio geométrico, incluindo relação entre imaginação e percepção, imaginação e memorização, natureza de imagens dinâmicas e o desenvolvimento conceitual.	138
Cifuentes	2005	Entende como um mecanismo de expressão de uma linguagem visual. Visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração.	21
Zimmermann e Cunningham	1995	O processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática.	21
Fischbein	1987	Identifica a visualização com o conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente são auto evidentes. Entretanto, visualização, envolvida em uma atividade cognitiva adequada continua a ser um fator fundamental contribuindo para uma compreensão intuitiva.	22
Bishop ⁴²	1989	Afirma que o conceito de visualização aparece na literatura com as ideias de imaginação, habilidade espacial, diagramas e intuição, com ideias úteis para a Educação Matemática e que, embora seja considerada um conceito complexo, é necessário ser compreendido.	209
Presmeg	1986	Uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais.	209
Mariotti (apud Costa, 2000)	1995	Visualização consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis.	209
Senechal (apud Costa, 2000)	--	Visualização significa em linguagem popular “percepção espacial” e assim é uma reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões.	209

QUADRO 2 – Algumas definições sobre visualização
FONTE: a autora

A partir dos autores que estudou, Leivas (2009) assumiu visualização como sendo “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de

⁴⁰ Ele afirma ainda que parece haver concordância de que a visualização é um ponto central na aprendizagem e no fazer matemático.

⁴¹ De acordo com Leivas (2009), para este autor visualização tem dois significados distintos, um para a Psicologia e outro para a Matemática. Apresento aqui apenas o segundo sentido.

⁴² Conforme aponta Leivas (2009), o referido autor não descarta a existência de alunos que têm a visualização desenvolvida e dos que não a têm.

problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2009, p. 111). Ele amplia o sentido ao afirmar que entende

[...] visualização não como uma forma de representação em termos de uma figura ou representação de um objeto e sim como um processo capaz de auxiliar na construção do fazer matemático, bem como na comunicação dos conceitos nas diversas áreas desse conhecimento matemático (LEIVAS, 2009, p.136).

Afirma ainda que, em seu entendimento, o auxílio visual geométrico pode ser o elemento a percorrer, de forma interdisciplinar, a Geometria como componente curricular.

Com base no suporte teórico que construiu, Leivas (2009) apresentou sua definição para pensamento geométrico avançado e um mapa conceitual sobre o assunto (Figura 11), o qual considera a visualização como parte integrante desse processo, conforme pode ser observado no quadro a seguir.

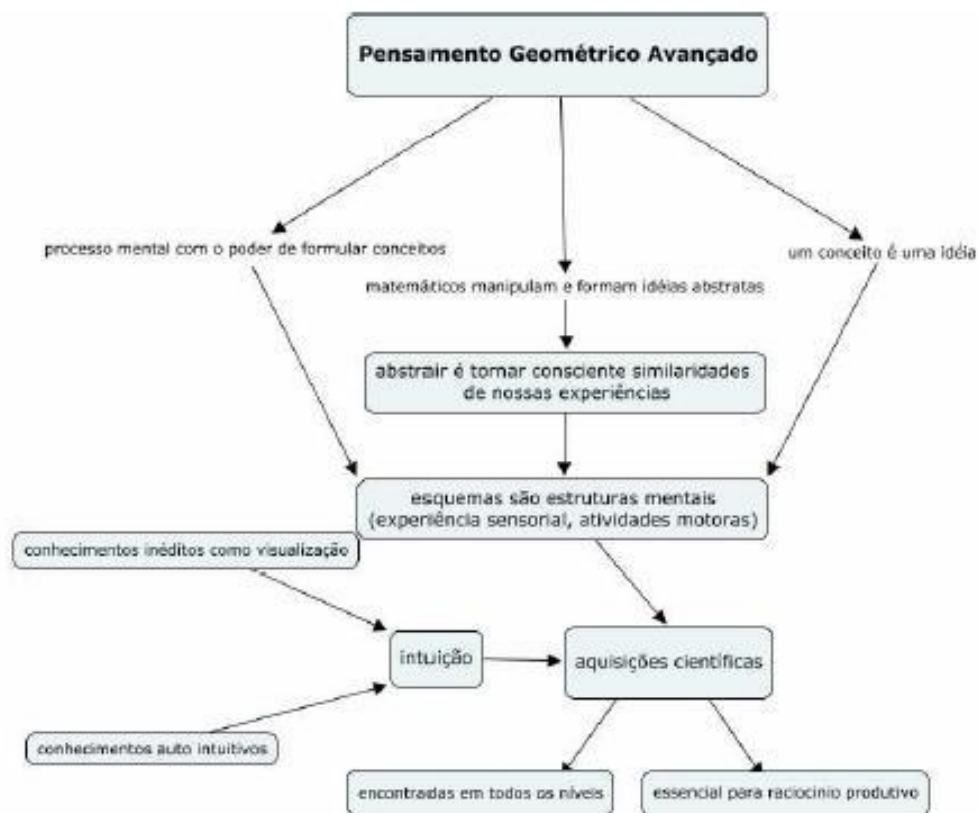


FIGURA 11 – Pensamento Geométrico Avançado
Fonte: Leivas, 2009

O sentido apontado por Leivas para o emprego dos termos imaginação, intuição e visualização, com o objetivo de desenvolver um pensamento geométrico

nos currículos brasileiros para a Licenciatura em Matemática, está baseado nas palavras de Eisemberg e Dreyfus:

[...] as experiências curriculares realizadas podem representar um passo na direção correta de que novos currículos que contemplem a visualização como processo de construção do pensar matematicamente possibilitem aos alunos desenvolverem uma melhor e mais profunda compreensão de conceitos matemáticos (LEIVAS, 2009, p. 138).

É possível perceber neste trabalho diferentes significados para a visualização, conforme nos mostra quadro sobre os autores pesquisados por Leivas ao longo de sua tese (Quadro 2). Ele assume visualização como sendo um processo, que é parte integrante na construção de um pensamento geométrico avançado, podendo auxiliar não apenas a Geometria, mas também na resolução de problemas analíticos. Além disso, propõe a criação de uma componente curricular em Geometria para os cursos de Licenciatura em Matemática, formada por disciplinas específicas de Geometria e por disciplinas que a utilizariam como um método pedagógico, chamado por ele de geometrização, utilizando-se do saber geométrico.

Concordo com este autor ao afirmar que, ao trabalharmos com abordagens que envolvam imaginação, intuição e visualização, propiciamos aos alunos aprenderem novas formas de pensar e fazer sua própria Matemática.

4.2.2 Olhar, Saber, Representar

Tese de doutorado defendida por Flores (2003), posteriormente transformada em livro (2007), no qual aponta que a atividade do olhar tem recebido destaque em pesquisas, no que se refere ao ensino de Geometria, seja ela do plano ou do espaço. Além disso, a ligação entre a aprendizagem da Geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca por procedimentos que possam ser colocados em prática, no intuito de aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens.

A autora ressalta que “esta intimidade entre a visualização e a Geometria não se restringe ao espaço da sala de aula, tão pouco às questões atuais”

(FLORES, 2007, p. 17). Nos diz ainda que o próprio Leonardo da Vinci, inspirado e ajudado por Pacioli, lançou mão de desenhos ao buscar sintetizar e visualizar proposições euclidianas, mostrando a importância das imagens na compreensão dos conhecimentos.

Exemplificando a articulação da figura no espaço e sua representação, Flores pede que imaginemos um cubo e seu desenho no papel. Não importa o modo como seja feito esse desenho, certamente haverá uma vista privilegiada, enquanto que as demais estarão escondidas. “É preciso, portanto, perceber esta representação plana como contendo todos os aspectos do cubo como se ele estivesse no espaço” (FLORES, 2007, p. 21).

Ela aponta diferentes estudos feitos sobre a associação entre a leitura do desenho em perspectiva com o objeto real, que constitui-se num dos principais enfoques para pesquisas interessadas no aspecto visual em relação ao ensino da Geometria. Explica ainda que, em razão das questões que propõe discutir, seu trabalho se inscreve em um espaço transdisciplinar, solicitando ajuda a diferentes campos do conhecimento. Por isso, a autora não teceu um quadro de referência teórica, optou por acenar no corpo do trabalho os pressupostos sob os quais estava se fundamentando. Uma definição para visualização encontrada é dada por Cavalca⁴³: “A recomposição mental da imagem de um objeto, evocada tanto pelo nome dele, quanto por suas características, representação gráfica, etc.”.

Flores questiona por que os alunos apresentam tantas dificuldades para olhar representações de figuras tridimensionais. Ao discutir seus estudos a respeito da teoria de Duval indica que:

[...] para aprender a ver é preciso primeiro saber que para um mesmo objeto matemático existem muitas formas de representá-lo, depois, é necessário uma aprendizagem específica dos tratamentos inerentes a cada tipo de representação, bem como das passagens de um registro de representação à outro. Para o caso particular das figuras tridimensionais significa, então, reduzir a problemática do ver estas figuras representadas no plano às questões puramente de conversões de registros – a passagem da figura em 3D para a representação em 2D, por exemplo, a seus tratamentos e às operações suscetíveis, bem como ao funcionamento cognitivo do aluno (FLORES, 2003, p.31).

Concordo com as palavras de Flores e as reitero, ao perguntar o que tem a ver “como olhamos” com o “aprender a ver”, apontando a existência de uma

⁴³ Localiza-se na p. 22 do trabalho de Flores (2007).

preocupação em amenizar as dificuldades de visualização de figuras geométricas e encontrar meios didáticos que possibilitem a aquisição da desenvoltura do visual, levando o aluno a “aprender a ver”. Além disso, se o objetivo é levá-lo a “aprender a ver”, então é necessário verificar se de fato, aprendeu a ver. “E, será isso verdadeiramente possível, a menos que seja num ato ilusório? Ora, os alunos não são transparentes, e nem mesmo podemos ter um olho dentro do olho do aluno para confirmar que ele realmente aprendeu a ver” (FLORES, 2007, p.27). Ela indica que para responder minimamente tais questões é necessário centrar-se no como olhamos e no como se criaram os modos de representar aquilo que olhamos. Dessa forma, em sua pesquisa procurou entender como a técnica de perspectiva se tornou regra para representar as imagens tridimensionais, investigando como a perspectiva capturou, normatizou ou esquadrinhou nosso olhar, pois refletir sobre o modo de representar as figuras no espaço possibilita pensar sobre os problemas de visualização relacionados ao ensino da Geometria. Compreender como a técnica da perspectiva linear emergiu, desmembrou-se para o campo da Matemática e constituiu-se no modo de olhar e de representar as figuras tridimensionais, pode auxiliar no entendimento das dificuldades encontradas pelos alunos em relação à visualização das figuras.

Vale lembrar que, ainda hoje, o modo de desenhar sob o qual são feitas as representações de figuras geométricas no ensino de matemática se dá mediante as técnicas de perspectiva, principalmente a cavaleira e a linear, exigindo do olhar o domínio do saber que envolve a representação (FLORES, 2007, p. 166).

Entre os resultados apontados em sua pesquisa, há a indicação de que o fato de a forma de representação do espaço (que está presente nos livros didáticos) ter se tornado tão hegemônica, perspectivada e objetivada a tal ponto de se tornar um obstáculo. Além disso, as técnicas gráficas que surgiram a partir da Renascença, levaram à matematização e à abertura de um pensamento mais geométrico, o que fez com se estabelecesse a necessidade de um ir e vir entre a atividade de passagem do plano ao espaço.

Afirma ainda que “ver, olhar uma imagem não se constitui um ato simples” (FLORES, 2007, p. 170) e questiona como é o nosso modo de representar as figuras tridimensionais no ensino da Geometria.

Esta autora foi de grande importância para minha pesquisa, tanto no sentido de compreender aspectos relativos à visualização, quanto em perceber o cuidado

que deveria ter ao olhar o que buscava nos livros didáticos. É difícil descrever a forma como seu trabalho serviu de subsídio para minha pesquisa. Deparei-me com ele no momento em que ainda não sentia terra firme sob meus pés. Muitas ideias borbulhavam em minha cabeça, mas faltava algo que ajudasse a validá-las ou que orientasse o rumo a tomar. Minhas inquietações iniciais encontraram eco nas inquietações dela. Suas colocações sobre olhar, saber e representar serviram de suporte conceitual por diversos momentos e guiaram todo o meu trabalho.

4.2.3 Representações, interpretações e prática pedagógica

Através de um estudo de caso, Passos (2000) investigou como o aluno representa e interpreta representações geométricas e a forma como o professor percebe e explora essas representações. Abordando questões a respeito da problemática do ensino da Geometria, foram considerados os aspectos psicopedagógicos e epistemológicos das representações e interpretações geométricas, enfatizando a complexidade presente no processo ensino-aprendizagem da Geometria. A autora considera que a visualização constitui-se um importante componente em sua pesquisa, servindo de elemento de apoio nas investigações matemáticas necessárias para a construção de conexões lógicas e de demonstrações e que, por isso, o desenvolvimento da visualização deve ser considerado com cuidado na sala de aula.

O conceito de visualização por ela assumido ao longo do seu estudo é:

A habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. Em outras palavras, seria a percepção visual do sujeito enquanto a construção de um processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia, associada a outras imagens armazenadas em sua memória. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis (PASSOS, 2000, p. 80).

A autora argumenta que os alunos não conseguem representar para eles mesmos determinadas propriedades dos objetos porque sua dificuldade está em “ler” o que as representações bidimensionais de objetos tridimensionais traduzem.

Isso pode acontecer por não conseguirem identificar os diferentes elementos que compõem tais objetos.

Os diferentes tipos de visualização que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis (PASSOS, 2000, p. 81).

Ela cita o quadro teórico elaborado por Hoffer sobre as habilidades básicas em Geometria e que a habilidade visual compreenderia cinco níveis específicos: reconhecimento, análise, ordenamento, dedução e rigor.

Assim como Passos, concordo com Goldenberg, que enfatiza que a visualização em Matemática deve respeitar seu poder, conhecer suas formas e aplicações, bem como reconhecer suas limitações. Descrevendo um exemplo de um diagrama acompanhado de sua relação algébrica (Figura 12), o referido autor afirma que não se constitui uma demonstração, pois não se sabe quais aspectos do desenho são específicos demais e quais são suficientemente específicos e devem ser assumidos. Além disso, muitas propostas de ensino e até mesmo livros didáticos usam diagramas conforme este em questão, “sem fornecerem suficientes oportunidades aos alunos para aprender de forma mais eficiente como produzir ou transformar estes diagramas, ou para compreender seu conteúdo e limitações” (PASSOS, 2000, p. 84).

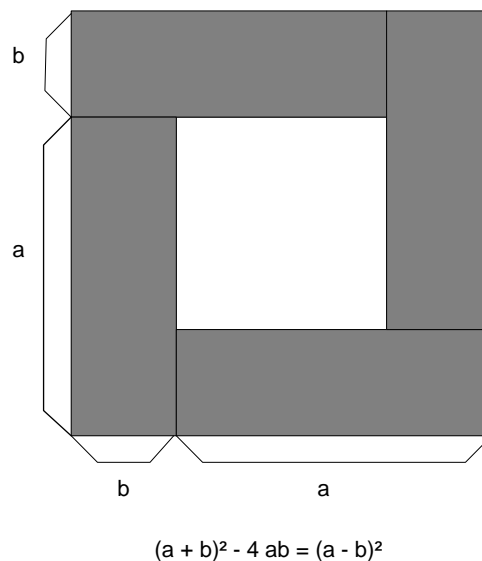


FIGURA 12 - Diagrama apresentado por Goldenberg (1999).
 FONTE: Passos (2000, p.83)

Em sua pesquisa, Passos verificou que “construções do processo de visualização aparecem em muitos estudos referentes a habilidades espaciais, independente da conceitualização de habilidade espacial que fundamenta o estudo” (PASSOS, 2000, p. 84). Observou também que vários termos associados à visualização aparecem na literatura: *raciocínio visual, imaginação, pensamento espacial, figuras, imagens mentais, imagens visuais, imagens espaciais*, entre outros. Além disso, nos traz um levantamento sobre o que diferentes autores discutem em relação à visualização e à percepção espacial. Pela propriedade da análise feita por ela e para não descaracterizá-la, apresento a seguir um recorte tal como foi escrito:

Gutiérrez (1996a) ressalta que McGee (1979), resumindo resultados de várias pesquisas sobre habilidades espaciais, descreveu dez diferentes habilidades distribuídas em duas classes, quais sejam:

Habilidades de visualização espacial: 1) habilidade de imaginar a rotação de um objeto descrito, o deslocamento em um sólido, e as mudanças relativas de posição de objetos no espaço; 2) habilidade de visualizar uma configuração na qual há movimento entre partes; 3) habilidade em compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação; 4) habilidade de manipular ou transformar a imagem de um modelo espacial em outro arranjo.

Habilidade de orientação espacial: 1) habilidade de determinar relacionamentos entre diferentes objetos espaciais; 2) habilidade de reconhecer a identidade de um objeto quando é visto de diferentes ângulos ou quando um objeto é movido; 3) habilidade de considerar relações espaciais onde a orientação do corpo do observador é essencial; 4) habilidade de perceber modelos espaciais e compará-los entre si; 5) habilidade de permanecer orientado (não se confundir) por variadas orientações nas quais um objeto espacial pode ser representado; 6) habilidade de perceber modelos espaciais ou manter orientação relativa a objetos no espaço” (PASSOS, 2000, p. 91).

Ao discutir o trabalho de Gutiérrez, que examinou publicações de pesquisas da Educação Matemática sobre a visualização, Passos (2000) indica que elas ainda são insuficientes. Além disso, aponta que muitos educadores, entre os quais Gutiérrez, Hershkowitz, Gorgorigó, Parzysz, Clementes e Battista, entre outros, têm sentido a necessidade de incluir o raciocínio espacial no currículo de Geometria, pelo fato de estarem intimamente ligados, contudo, não há concordância sobre como esta inclusão deva ser feita.

A seguir são destacadas algumas definições sobre visualização que foram levantadas por ela (Quadro 3)⁴⁴:

⁴⁴ São indicados: o autor, ano e página onde se encontra no trabalho de Passos (2000), bem como a definição do termo visualização dada pelo(s) referido(s) autor(es).

Autor	Ano	O que é visualização?	Pág.
Catalá et al	1995	Visualização como sendo a construção de um processo visual, que sofre interferências de nossa experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em nossa memória. Saber ver o espaço no qual a intuição é o motor que dá a partida e faz avançar a compreensão das diferentes relações espaciais.	85 85
Gutiérrez	1996a	[...] uma imagem mental é uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática, contendo informação baseada em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos. “Visualização” ou pensamento visual é a espécie de raciocínio baseado no uso de imagens mentais. A visualização em Matemática é “um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades”. A Geometria pode ser considerada como a origem da visualização em Matemática.	87 91 92
Yakimanskaya ⁴⁵	1991	Uma forma de atividade de atividade mental que torna possível criar imagens espaciais e manipulá-las no decorrer da resolução de vários problemas teóricos e práticos, incluindo operações verbais e conceituais.	89
Tartre	1990	A visualização espacial envolve a capacidade de imaginar como se apresentará um objeto representado em uma gravura se ele for rotacionado, refletido, dobrado, ou desdobrado.	101

QUADRO 3 – Algumas definições sobre visualização
FONTE: a autora

Ao longo deste trabalho, é possível perceber que há uma linha tênue que distingue os termos visualização e imagens mentais. São conceitos intimamente ligados, que por vezes se misturam. Não há como falar em visualização sem pensar em imagens mentais. Visualizar é poder “construir” uma imagem mental. Alguns autores usam um termo para explicar o outro.

Outro dado importante no trabalho de Passos é sobre a negligência da visualização e do desenho no estudo da Geometria apontado por Usiskin.

Assim como a autora indicou, acredito também que o desenvolvimento da visualização deva ser tratado com cuidado em sala de aula, bem como pelos autores de livros didáticos, justamente por envolver diferentes conceitos descritos por ela. Esta “leitura” dos objetos tridimensionais representados no plano bidimensional que é exigida de nossos alunos, não é uma tarefa tão simples.

⁴⁵ O autor se refere a *pensamento espacial*, que anteriormente havia sido associado ao termo visualização.

4.2.4 Visualização, veículo para a educação em geometria

Através de um conjunto de notas de reflexão, Costa (2000) discute neste artigo o poder da visualização no ensino e na aprendizagem da Geometria, seus diferentes significados e os mecanismos relacionados ao termo “visualização”.

As várias perspectivas existentes em relação a uma educação em Geometria apresentadas em seu texto valorizam a componente visual dos aspectos matemáticos e geométricos, tanto para uma compreensão cognitiva quanto para uma compreensão didática e pedagógica. Mostra ainda a importância da visualização no processo de ensino/aprendizagem da Geometria e também a importância dos mecanismos essenciais à construção de significado matemático.

Com base nos indicativos do National Council of Supervisors of Mathematics⁴⁶ (NCSM, 1990) Costa aponta que os alunos devem compreender os conceitos geométricos necessários para trabalharem de forma eficaz no espaço tridimensional. Para que isso seja possível, devem ter conhecimento de conceitos como perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, além de conhecer as propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos, bem como visualizar e verbalizar como os objetos se movem no mundo.

Experiências do dia a dia das crianças tais como olhar, andar, desenhar, construir e manipular objetos, são como uma fonte rica de intuições sobre a estrutura espacial e o conhecimento informal desenvolvido durante a participação nelas, e constituem um trampolim para a geometria (COSTA, 2000, p. 166).

Um dos autores citados neste artigo é Owens, que constrói uma estrutura teórica para um programa de ensino destinado aos primeiros desenvolvimentos matemáticos espaciais, no qual a orientação e o movimento, o reconhecimento de parte-todo, a classificação e a linguagem são aspectos do pensamento visual. Sustenta a importância da relação entre a compreensão espacial e a visualização.

Costa destaca diferentes conotações para o termo visualização, que algumas vezes está restrito à mente do aluno, enquanto que em outras está restrito a algum meio ou ainda, é definido como um processo para viajar entre esses dois

⁴⁶ De acordo com Costa (2000) o NCSM é uma organização dos EUA que agrupa educadores com funções de supervisão, apoio pedagógico, inspeção e especialistas curriculares, ligados a autoridades locais e estaduais.

domínios. Algumas definições de visualização apresentam diferentes significados ligados à matemática, à investigação científica, à educação matemática ou à psicologia. As definições explicitadas no quadro a seguir (Quadro 4)⁴⁷ concordam que a visualização se foca na percepção e manipulação de imagens visuais:

Autor	Ano	O que é visualização?	Pág.
Guzmán	1996	Visualização em matemática constitui um aspecto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático.	16
Cunningham	1991	O termo visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica por computador.	67
Dreyfus	1990	Do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica.	119
Solano e Presmeg	1995	Visualização é a relação entre imagens.	67

QUADRO 4 – Algumas definições sobre visualização
FONTE: a autora

Costa aponta que o termo “pensamento visual” normalmente aparece como sinônimo do termo “visualização”, referindo-se a autores como Hershkowitz, Parzys e Dormolen, Mariotti e Senechal. Por outro lado, indica autores que fazem distinção entre esses termos, como é o caso de Mariotti.

Entre os mecanismos essenciais à construção de significados matemáticos, Costa indica que muitos matemáticos e educadores matemáticos, entre eles Battista, destacam a capacidade espacial e a imagética, embora as definições para estes termos não estejam completamente esclarecidas, pois há momentos em que se aproximam e em outros, distanciam-se.

É importante observar em seu estudo o que apontam autores como Latner e Hadar: embora não exista um consenso sobre quais são as componentes das capacidades espaciais envolvidas nas atividades com geometria tridimensional, é possível identificar como fundamentais as capacidades de criar uma imagem mental de um sólido no espaço tridimensional, reter essa imagem mental, manipular uma imagem mental e “ver” as relações entre as várias partes de um sólido.

⁴⁷ São indicados: o autor, ano e página da publicação de onde foram extraídos, bem como a definição do termo visualização dada pelo(s) referido(s) autor(es).

Quanto ao poder da visualização no ensino e na aprendizagem, Costa caracteriza a eficácia das representações visuais externas utilizando-se do provérbio “uma figura vale mais que mil palavras”. Afirma ainda que a visualização geralmente é considerada útil, no sentido de apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da Matemática e toma por base Dreyfus ao resumir as muitas dificuldades com a visualização sentidas pelos estudantes: ver um diagrama de diferentes maneiras; reconhecer as transformações implicadas nos diagramas; interpretações incorretas ou não-convencionais de variações em gráficos; falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que a representa; falha em unir suas visualizações com o pensamento analítico.

A autora conclui seu artigo indicando que, embora o pensamento visual seja difícil de ser desenvolvido, é imprescindível que os processos cognitivos que o acompanham sejam clarificados e tornados explícitos, para que se possa diminuir os problemas de aprendizagem e identificar os modos de pensamento visual com que os alunos lidam.

O que se pode destacar neste texto, entre outras coisas, é que sem compreender conceitos geométricos básicos não é possível trabalhar no espaço tridimensional. Ser capaz de “ver” é também ser capaz de estabelecer relações entre propriedades geométricas e os objetos representados, utilizando-se de intuições desenvolvidas em atividades que trabalhem a estrutura espacial, como construções e manipulações. Além disso, a autora indica a visualização como componente importante no processo de ensino/aprendizagem da Geometria.

4. 3 CONCEPÇÃO ASSUMIDA

Com base nos estudos aqui apresentados, é possível construir o termo visualização que contemple o sentido buscado na presente pesquisa. Evidentemente que o assunto não se esgota aqui, mesmo porque, a cada novo trabalho, surgiam outras referências, que iam ampliando o campo de análise. Achei então necessário definir minha própria concepção acerca do termo visualização, agora construída a partir do aporte teórico levantado.

Não se trata de negar esta ou aquela concepção, ou então de definir qual é a “melhor”, se é que isso é possível, mas de construir uma noção subsidiada pelas demais, que melhor se relacione com aquilo que busco.

A partir, principalmente, de autores como Cunningham e Zimmermann, o conceito de visualização usado neste trabalho é estabelecido como o processo de formação de imagens, sejam elas com lápis e papel, através do uso da tecnologia ou então mentalmente. Em outras palavras, entendo visualização como uma forma de ver o invisível, a capacidade de perceber detalhes de objetos tridimensionais que não nos são visíveis, representados no plano, dentro de um contexto matemático. É como se fosse possível ver o espaço no plano, ou seja, poder ver objetos tridimensionais representados em duas dimensões.

Exemplificando, é poder perceber, entre outras coisas, que na figura abaixo (Figura 13) existem 4 cubos, que algumas arestas paralelas às arestas da frente estão atrás da figura e que, além disso, existem faces escondidas, ou então que não distinguimos se estão na parte da frente ou atrás. É perceber que estes cubos podem estar encostados de tal forma que algumas arestas frontais estejam lado a lado, ou então, que são as arestas da parte de trás dos cubos é que podem estar juntas. É poder perceber cubos em diferentes posições.

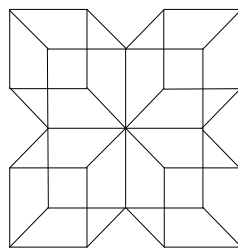


FIGURA 13 – Representação de cubos
FONTE: a autora

A partir da concepção aqui assumida é que voltarei meu olhar para as formas de representação do espaço utilizadas nos livros didáticos de Matemática, com o objetivo de analisar se a presença destas representações pode ser considerada uma possibilidade para a visualização espacial. Devo destacar que é o meu olhar de pesquisadora que estará analisando as imagens. Outros olhares poderão perceber diferentes aspectos. Além disso, o confronto de todos estes olhares poderá produzir outras análises.

Apresento a seguir um breve olhar sobre a perspectiva como técnica de representação das imagens tridimensionais, através do qual destaco alguns aspectos em relação ao seu desenvolvimento. Embora possa parecer irrelevante neste momento, entendo que, pelo fato de a perspectiva ser uma forma de representação muito utilizada nos livros didáticos, seja importante ampliar meu olhar.

4.4 UM OLHAR SOBRE A PERSPECTIVA

Não pretendo neste momento explorar a história da perspectiva a partir de um ponto, “uma origem primeira”⁴⁸, nem tão pouco encontrar um ponto de chegada. Isso não será necessário porque outros autores já o fizeram, embora com objetivos diferentes em seus trabalhos, entre os quais destaco Cavalca (1997) e Flores (2003). Busco apenas mostrar alguns aspectos acerca da perspectiva, por esta ser a forma de representação do espaço predominante nos livros didáticos, por se assemelhar à forma como vemos as coisas e representar de maneira mais natural este espaço. “Hoje a representação em perspectiva nos parece algo natural e simples”.⁴⁹

A perspectiva é uma verdadeira invenção, na opinião de Parramon (1986), ao explicar que ela permite desenhar as três dimensões com a simplicidade de uma operação aritmética.

Para Dalcin (2002) as representações matemáticas são formas de expressão produzidas pelos homens e pautadas principalmente em sua capacidade “criativa” e “imaginativa”, assumindo formas variadas, como representações orais e escritas, por meio de palavras, imagens ou símbolos. “Na verdade, Matemática e imagens são velhas amigas e interagem muito antes do surgimento da escrita e continuariam a interagir muito depois de seu surgimento” (DALCIN, 2002, p. 57).

Ao longo da História o espaço tem sido representado através de diferentes técnicas. “As figuras tridimensionais desenhadas no papel demandam uma técnica para desenhar: a perspectiva” (FLORES, 2003, p. 20). Esta autora pesquisou como

⁴⁸ Flores (2003, p. 43).

⁴⁹ Prefácio feito por Dario Fiorentini para o livro de Flores (2007).

se constituiu nossa maneira de olhar e representar as figuras em sua tese de doutorado, através de quatro ensaios sobre a representação em perspectiva. Ela nos explica que a “técnica da perspectiva funciona como a técnica para representar e para olhar as imagens” (FLORES, 2004, p.2), referindo-se a uma forma de olhar tornada *habitus*, no sentido de algo praticado como já sendo característico de uma cultura. Questionando como a técnica da perspectiva linear foi inventada, definida, modificada, reelaborada e diversificada, ela nos mostra que esta perspectiva, também conhecida como central desmembrou-se em outras técnicas, como a paralela e a cavaleira. A teoria da perspectiva foi utilizada pela autora como uma hipótese de trabalho que pudesse “ajudar a pensar sobre o saber, o olhar e o representar imagens tridimensionais” (FLORES, 2004, p. 5). O primeiro ensaio, intitulado *Uma janela para o mundo*, trata da problemática da infinitude do mundo e descreve a função do ponto de fuga como organizador, harmonizador e controlador de todo o espaço. “Um olhar que se põe ao infinito é um olhar em perspectiva que representa o espaço em perspectiva” (FLORES, 2004, p. 6).

No segundo ensaio, *Cidades habitáveis: espaços experimentados, espaços representados*, a autora trata da problemática do domínio da natureza a partir da emergência do homem ativo, refletindo sobre o Renascimento, com suas novas formas de ser e de pensar. A técnica da perspectiva central garante a representação dos espaços de viver do homem que se tornou subordinado à própria razão. É neste período que surge a técnica da perspectiva moderna.

O mundo como teatro é o título do terceiro ensaio, que trata da problemática do homem em representar-se num espaço próprio, em virtude da subjetividade, do humanismo e do surgimento do indivíduo. A técnica da perspectiva central é um sistema de representação que dá a ideia de dualidade entre o real e o aparente de um mundo que passa a ser encenado.

No quarto e último ensaio, *A visão do todo: o ponto de vista da perspectiva paralela*, a autora trata da instauração da sociedade disciplinar, que controla, vigia, organiza. Surgem as perspectivas paralelas, em especial a cavaleira. “A técnica da perspectiva central desmembrando-se em outras formas de representação que possibilite o domínio da imagem, os cálculos exatos de dimensões e volumes” (FLORES, 2004, p. 8).

Mas o que é exatamente a perspectiva?

Para Lellis (2009, p. 1), “trata-se de uma das formas de representar objetos tridimensionais nas duas dimensões do papel ou da tela do pintor”. Ele explica que existem diferentes métodos para desenhar em perspectiva, que por sua vez produzem diferentes resultados. Entre elas destacam-se as perspectivas isométrica, cavaleira e a cônica. “As duas primeiras são típicas do desenho técnico; os livros de matemática quase sempre apresentam desenhos em perspectiva cavaleira” (LELLIS, 2009, p.1).

Por outro lado, Flores (2007) descreve a perspectiva como a possibilidade técnica para realizar “uma representação que privilegia o espaço racional, integrado e com total visibilidade, e ainda com a possibilidade de medição” (FLORES, 2007, p. 150). Em contrapartida, Dondis (1997) considera a perspectiva como um método utilizado “para a criação de muitos dos efeitos visuais especiais de nosso ambiente natural, e para a representação do modo tridimensional que vemos em uma forma gráfica bidimensional” (DONDIS, 1997, p. 62), mas que mesmo assim necessita recorrer ao tom para poder criar uma ilusão convincente da realidade. Nesta mesma linha de raciocínio, Passos (2000) afirma que o desenho em perspectiva é apresentado no plano, mas seu sentido, que está associado ao que ele representa, requer que se considere o espaço no qual se situa, portanto a representação gráfica é bidimensional e o objeto, tridimensional.

Outro trabalho que estudou o desenvolvimento da perspectiva foi feito por Cavalca (1997). Sobre as bases para o tratamento da problemática envolvendo as dificuldades de representar o espaço tridimensional num plano bidimensional, ele escreveu que elas surgiram na Antiguidade grega, sob a forma de Ótica geométrica. Era o início da racionalização da visão, cerca de 3 séculos a.C. Este autor descreve a chamada perspectiva “espinha de peixe”, encontrada em pinturas da época dos romanos antigos e até mesmo da Idade Média, como sendo uma passagem entre a perspectiva natural e a artificial, esta última baseada puramente na Geometria. Ele nos fornece detalhes acerca do surgimento do ponto de fuga, já no século XIV e de como Brunelleschi iniciou, efetivamente, a geometrização da perspectiva, que mais tarde foi transformada em teoria por Alberti. Com a contribuição de Piero della Francesca, surgiu uma regra para a determinação geométrica e numérica utilizada nas construções em perspectiva. Já no século XVI, Dürer foi o responsável por

difundir os métodos italianos na Alemanha e pela criação de uma tela quadriculada⁵⁰, formada por uma rede de coordenadas e que funcionava como uma “janela aberta sobre o mundo” (CAVALCA, 1997, p. 11). De modo geral, as regras da perspectiva foram testadas de forma experimental, antes de serem justificadas com o rigor matemático. Os métodos já estabelecidos foram sendo adaptados por artistas, arquitetos e geômetras e com isso alguns procedimentos práticos apresentavam erros. Esta situação resultou em uma reflexão sobre a perspectiva e fez com que surgisse uma teoria geométrica mais rigorosa em relação à perspectiva cônica. A partir do desenvolvimento desta última, surgiram “outros modos de apreensão e representação racional do real, entre os quais a perspectiva cavaleira” (CAVALCA, 1997, p. 13). Este autor apresenta duas justificativas para o termo cavaleira: a primeira refere-se ao fato de que os militares europeus que se utilizavam desta forma de perspectiva para representar fortificações eram oficiais cavaleiros, enquanto que a segunda está associada ao ponto de vista utilizado para fazer os desenhos é que deu origem ao nome. Por não seguir as regras da perspectiva cônica, também conhecida como verdadeira perspectiva, a cavaleira era considerada como sendo de segunda classe.

A preocupação com o aspecto visual apareceu nos livros didáticos a partir do século XIX, e poderia ter levado à utilização da perspectiva cônica, já desenvolvida e dominada nessa época. Porém, a preferência foi dada à perspectiva cavaleira, por ser de execução mais fácil e proporcionar um equilíbrio razoável entre o que vemos e o que sabemos dos objetos (CAVALCA, 1997, p. 14).

Este autor prossegue afirmando que a perspectiva cavaleira foi a solução mais usada para ensinar e representar no plano os objetos espaciais. A partir do desenvolvimento da perspectiva, mais especificamente do conceito de involução, foi possível edificar a Geometria Projetiva e as várias geometrias que passaram a existir. Entre as questões que levanta, Cavalca questiona se este longo processo de racionalização da visão descrito por ele não deveria ser, de alguma forma, feito pelos alunos.

Nas palavras de Ernst (2007) desenho é ilusão. Da mesma forma, a representação em perspectiva também o é. Conforme aponta Dondis (1997), a

⁵⁰ Maiores detalhes sobre os perspectógrafos criados por Dürer, também conhecidos como máquinas para ver, podem ser encontrados no artigo “Visualização Espacial e os Perspectógrafos de Dürer”, escrito por Meneguzzi e Flores. (IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007)

evolução da representação bidimensional dos objetos tridimensionais nos condicionou a aceitar esta ilusão, que na verdade é apenas sugerida.

Se para Flores (2004) a perspectiva é a técnica que se instaurou e se constituiu como o modo verdadeiro de representação de imagens tridimensionais, é preciso olhar então de que modo elas estão sendo tratadas nos livros didáticos. Portanto, “pensar na visualização no ensino de matemática significa pensar no nosso modo de olhar e de representar as imagens tridimensionais” (FLORES, 2004, p. 9). É o que farei no capítulo a seguir.

Inicialmente apresento as escolhas feitas em relação à maneira como olhar as imagens nos livros didáticos para, em seguida, descrever o que olhar.

5 OS OBJETOS DA INVESTIGAÇÃO – ALGUMAS ESCOLHAS

Então, imagem e olhar fundem-se, e só o pensamento disciplinado, geométrico, racional terá o poder de decompor, de medir e de ver nas formas planificadas a exatidão dos desenhos como sendo formas tridimensionais (FLORES, 2007, p. 146).

Desde o início da pesquisa, preocupei-me não somente em *o que olhar*, mas principalmente, em *como e onde olhar*. Fazer apenas um levantamento das formas de representação dos objetos tridimensionais não seria o bastante. Era preciso ir além e perceber o que este levantamento poderia nos mostrar. Mas isso não me parecia uma tarefa fácil. Procurei, então, trabalhos que pudessem sugerir formas de olhar tais representações.

A importância das figuras geométricas foi ressaltada por Brigo (2010), que indica seu destaque “tanto no âmbito do ensino como no da aprendizagem, sendo tema de várias pesquisas em Educação Matemática” (BRIGO, 2010, p. 21). Sobre o uso prático-didático das figuras geométricas, esta mesma autora evidencia que, em outros tempos, mais precisamente na década de 70, elas “funcionaram como suporte para o ver e o saber, para o representar e o conhecer [...]” (BRIGO, 2010, p. 39). Mas será que elas continuam exercendo tal função?

A possibilidade do favorecimento da visualização é um dos itens observados nos aspectos teórico-metodológicos na avaliação feita pelo MEC no Guia de Livros Didáticos (2008) em relação ao desenvolvimento de competências complexas.

Uma vez compreendido o que olhar, era preciso definir onde e como. Tomando por base as descrições/pareceres presentes no GLD (2011), foram selecionadas para análise algumas coleções de Matemática aprovadas para a segunda etapa do Ensino Fundamental (anos finais). O critério de escolha adotado foi uma boa avaliação, por parte do Guia, no que diz respeito às representações tridimensionais e com a visualização.

Como olhar? Inicialmente fazer um apanhado geral de todas as ilustrações que, de alguma forma se relacionam com a representação do espaço e de objetos tridimensionais.

A análise aqui proposta não pretende julgar o mérito das coleções com o intuito de afirmar se uma é melhor que a outra, mas sim discutir a forma como os objetos tridimensionais estão representados.

O estudo dessas obras será realizado considerando-se também as orientações metodológicas presentes no Manual do Professor, no sentido de verificar o que dizem os autores em relação à representação do espaço e dos objetos tridimensionais.

[...] parece-me que quanto maior for a articulação entre a simbologia matemática, o texto escrito e as ilustrações melhor resulta a compreensão do que se está lendo. As ilustrações poderão facilitar o processo de compreensão do conteúdo matemático sob vários aspectos, principalmente como meio pelo qual se incentiva a visualização e o processo imaginativo. Porém, é necessário coerência entre o que está sendo dito e o que está sendo representado nas imagens (DALCIN, 2002, p. 65).

A autora acima citada analisou em sua dissertação os livros paradidáticos. Uma das categorias por ela descrita relacionava-se a “Ilustrações de visualização”, as quais seriam aquelas que, de alguma forma, estariam articuladas à simbologia e representações matemáticas.

A falta de articulação entre a imagem e aquilo que ela representa tem suscitado críticas e questionamentos.

Como autor de livros didáticos, afirmo que as ilustrações que atualmente adornam as páginas das “lições escolares de matemática” são produzidos por profissionais, preocupados com os belíssimos efeitos visuais em meio aos números, fórmulas e textos. O resultado torna a “leitura” menos árida, mais agradável. Não resta dúvida também que esse é um procedimento orquestrado pelas editoras em “chamar a atenção” dos professores quando da escolha desses didáticos. Melhor visual e diagramação feitos a partir de projetos previamente elaborados evidenciam uma evolução das editoras na confecção de um livro didático. Mas será que as ilustrações “falam” com o texto onde são inseridas ou “adornam” as páginas como “apelos atrativos” para os alunos e professores? Novas pesquisas poderão dar respostas? (LONGEN, 2007, p. 375)

Embora esta pesquisa caminhe em uma direção diferente do sentido apontado pelo referido autor, olhar a forma como os livros didáticos tratam a representação tridimensional, considerando-a como uma possibilidade para o favorecimento da visualização é também olhar as ilustrações⁵¹, mas somente aquelas que, de alguma forma, envolvam a representação espacial, através de desenhos ou esquemas.

⁵¹ De acordo com Gérard e Roegiers (1998), por ilustração designam-se desenhos, esquemas, fotografias, documentos históricos.

Dalcin (2002) aponta que o uso da imagem na Geometria como suporte visual surgido com o modelo euclidiano permanece até os nossos dias nos livros didáticos de Matemática.

Sobre os problemas referentes à legibilidade das ilustrações presentes em um manual, Gérard e Roegiers (1998) questionam seu papel pedagógico a partir de dois aspectos:

- Em termos quantitativos, qual importância deve ser dada às ilustrações em função da matéria e do nível escolar?
- Em termos qualitativos, qual contribuição elas podem dar em relação aos objetivos da aprendizagem?

Com base em tais questionamentos, estes autores elaboraram um quadro através do qual podemos ordenar/classificar as ilustrações, verificando se elas correspondem aos objetivos de aprendizagem ou então se contribuem com a informação original (Quadro 5).

	A ilustração corresponde aos objetivos principais da aprendizagem	A ilustração não corresponde aos objetivos principais da aprendizagem
A ilustração contribui com informação original (que não se encontra no texto)	<p>Nível 1 Características:</p> <ul style="list-style-type: none"> • A sua supressão inviabiliza totalmente a compreensão do conteúdo. • Deve necessariamente ser explorada durante a aprendizagem. <p>Exemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • fotografia que serve de base ao desenvolvimento de um conteúdo; • problema matemático representado no todo ou em parte por um desenho; • utilização, em Ciências Naturais, de um desenho ou fotografia como única explicação de uma palavra nova. 	<p>Nível 3 Características:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Contribui com uma informação paralela à informação principal da aprendizagem. • Pode ser explorada durante a aprendizagem “se houver tempo” ou individualmente pelo aluno. <p>Exemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • fotografia em que estão representados os diversos tipos de pilhas que se podem encontrar no mercado; • desenho que ilustra o nome de um objeto, num livro de leitura; • símbolo que substitui uma instrução.
A ilustração não contribui grandemente com informação original em relação ao texto	<p>Nível 2 Características:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Contribui com determinadas informações que não estão contidas no texto. • A sua supressão limita a compreensão do conteúdo. Há vantagens que seja explorada durante a aprendizagem. <p>Exemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • esquema de resolução que acompanha um problema de matemática. 	<p>Nível 4 Características:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tem um papel meramente ilustrativo. • Geralmente não é explorada durante a aprendizagem ou apenas o é a título de ilustração. <p>Exemplos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • vinheta que ilustra um texto de leitura; • símbolo que acompanha uma instrução.

QUADRO 5 – Níveis do valor pedagógico das ilustrações
 FONTE: Gérard e Roegiers, 1998, p.196

Mesmo tendo claro onde olhar, sentia ainda a necessidade de especificar melhor o que procurava nas representações analisadas, foi então que deparei-me com o conceito de “alfabetismo visual” utilizado por Dondis (1997), autora que também defende que “visualizar é ser capaz de formar imagens mentais” (DONDIS, 1997, p. 14).

Se a invenção do tipo móvel criou o imperativo de um alfabetismo verbal universal, sem dúvida a invenção da câmara e de todas as suas formas

paralelas, que não cessam de se desenvolver, criou, por sua vez, o imperativo do alfabetismo visual universal, uma necessidade que há muito tempo se faz sentir (DONDIS, 1997, p. 1).

Entendo que visualizar uma imagem esteja relacionado à capacidade de “ler” esta imagem.

Dondis (1997, p. 3) explica que os objetivos do alfabetismo visual são os mesmos que deram origem ao desenvolvimento da linguagem escrita: “construir um sistema básico para a aprendizagem, a identificação, a criação e a compreensão de mensagens visuais que sejam acessíveis a todas as pessoas”. Ela deixa claro que este tipo de alfabetismo jamais poderá ser um sistema tão lógico e preciso quanto é a linguagem. Se a visão é algo natural para as pessoas, criar e compreender mensagens visuais não é tão natural assim, e sua eficácia só é possível através do estudo. Mediante tais aspectos, há a necessidade de os sistemas educacionais se preocuparem com o visual. A autora critica o bombardeio de recursos visuais sofrido pelos alunos, feitos de modo a reforçar “sua experiência passiva de consumidores de televisão” (DONDIS, 1997, p. 17) e afirma que o alfabetismo visual poderá vir a ser um dos paradigmas fundamentais da educação nos próximos anos. “*O que vemos é uma parte fundamental do que sabemos*, e o alfabetismo visual pode nos ajudar a ver o que vemos e a saber o que sabemos” (DONDIS, 1997, p. 27). É possível fazer uma analogia entre uma pessoa letrada que, além de obviamente ser capaz de ler e escrever, pode ser vista como uma pessoa instruída, e o alfabetismo visual que, “além de oferecer um corpo de informações e experiências compartilhadas, [...] traz em si a promessa de uma compreensão culta dessas informações e experiências” (DONDIS, 1997, p. 227).

Como comenta Novaes (2005), da mesma forma que dizemos que o homem se caracteriza pela linguagem, também podemos dizer que ele se caracteriza pelas imagens. As potências da linguagem são defeitos da imagem, mas são esses defeitos que fazem toda a potência da imagem, porque frequentemente ela é suficiente por si mesma, enquanto que uma palavra jamais o é.

Ainda de acordo com Dondis (1997), cada uma das unidades mais simples que compõem a informação visual (elementos) “deve ser explorada e aprendida sob todos os pontos de vista de suas qualidades e de seu caráter e potencial expressivo” (DONDIS, 1997, p. 228). É preciso ainda que exista uma grande familiaridade com estes elementos.

Precisamos conhecê-los “de cor”. Em outras palavras, seu reconhecimento ou sua utilização deve alçar-se a um nível mais alto de conhecimento que os incorpore tanto à mente consciente quanto à inconsciente, para que o acesso até eles seja praticamente automático. Devem estar ali, mas não de modo forçado; devem ser percebidos, mas não soletrados, como acontece com os leitores principiantes (DONDIS, 1997, p. 228).

Ela considera 10 os elementos básicos da comunicação visual: o ponto, a linha, a forma, a direção, o tom, a cor, a textura, a dimensão, a escala e o movimento. Estes elementos estão presentes nas representações tridimensionais que serão analisadas, com especial destaque para alguns itens descritos pela autora:

- A linha: por sua própria natureza, ela tem muita energia. Não é estática e representa o instrumento fundamental da pré-visualização, pois “[...] é o meio indispensável para tornar visível o que ainda não pode ser visto, por existir apenas na imaginação” (DONDIS, 1997, p. 56).
- A forma: em termos da linguagem das artes visuais, a complexidade da forma é articulada através da linha.
- O tom: vivemos em um mundo dimensional e um dos melhores instrumentos que dispomos para expressar essa dimensão é o tom. O uso de um fundo tonal nos dá a sensação de luz refletida e de sombras projetadas (Figura 14). “Esse efeito é ainda mais extraordinário nas formas simples e básicas como o círculo, que, sem informação tonal, não pareceria ter dimensão” (DONDIS, 1997, p. 63).

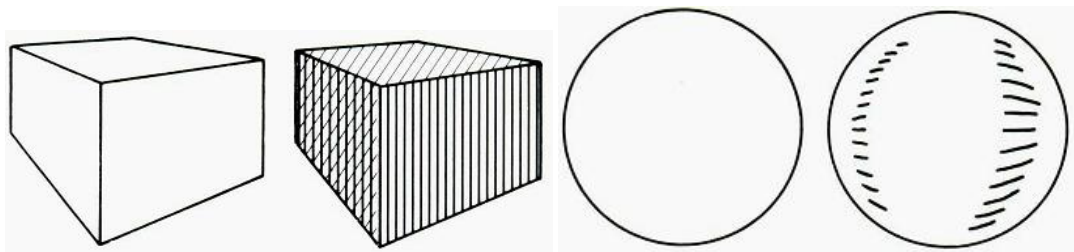


FIGURA 14 - Efeitos da informação tonal.
 FONTE: Dondis, 1997, p. 63

- A cor: é um elemento impregnado de informação. Por ser o mais emocional dos elementos específicos do processo visual, a percepção da cor tem grande força e pode ser usada tanto para expressar, quanto para intensificar a informação visual.
- A dimensão: existe no mundo real e sua representação através do bidimensional é feita de forma implícita e depende da ilusão. O principal

artifício usado para simular a dimensão é a técnica da perspectiva. Mesmo que toda nossa experiência humana seja estabelecida em um mundo dimensional, temos uma tendência em “conceber a visualização em termos de uma criação de marcas, ignorando os problemas especiais da questão visual que nos são colocados pela dimensão” (DONDIS, 1997, p. 80).

A opção feita por olhar apenas cinco dos elementos descritos por ela se deve ao fato de serem estes os que sobressaem mais fortemente em uma representação. Considero que os demais possam estar presentes de forma implícita, não sendo necessário aprofundar o olhar sobre eles.

Conforme destaca a autora, ver significa classificar os padrões, com o objetivo de reconhecê-los ou então de compreendê-los. Questiono então se um aluno não consegue reconhecer um padrão nas representações de um objeto tridimensional, como será possível compreender?

Este estudo se dará no entrelaçamento dos cinco elementos descritos acima com as categorias nas quais serão classificadas as imagens procuradas. Tomo por empréstimo as palavras de Dondis para justificar a importância da análise destas representações: “Precisamos examinar nossos métodos com o mesmo rigor que aplicamos à linguagem ou à matemática, ou a qualquer outro sistema universalmente compartilhado e portador de significado” (DONDIS, 1997, p. 229).

Se as ilustrações são portadoras de significado, é preciso que este significado possa ser compreendido por quem as vê.

6 ENCONTROS E DESENCONTROS

Ao longo deste capítulo serão descritas as coleções analisadas (livro do professor), bem como o levantamento feito acerca das representações de objetos tridimensionais, assim como as relacionadas ao espaço, presentes nos quatro volumes que compõem cada uma das coleções selecionadas. A terminologia usada é “ano” no lugar de “série”, de acordo com recentes reformulações feitas no Ensino Fundamental⁵².

Como já explicado anteriormente, o critério de escolha, que bem poderia ser outro, foi adotado em razão da possibilidade de abrangência que se dá ao estudo, uma vez que são os livros aprovados no programa do MEC que chegam, de forma gratuita, aos alunos e professores das escolas públicas, estes mesmos livros também podem ser utilizados na rede particular de ensino. Este critério foi baseado na avaliação do Guia de Livros Didáticos (PNLD 2011) e considerou as críticas positivas que expressam aspectos importantes neste estudo. De maneira mais específica, a delimitação foi feita a partir da análise da obra no que se refere à abordagem da Geometria, que consta na seção onde é descrita a forma como se dá o desenvolvimento dos diferentes campos da Matemática. Assim, foram escolhidas aquelas com indicativos de que apresentam um bom trabalho no que se refere às representações tridimensionais ou com a visualização. Das dez coleções aprovadas pelo programa do MEC, apenas três se enquadravam no critério de escolha estabelecido.

A análise de cada coleção apresenta inicialmente um extrato da descrição constante no Guia que subsidiou sua escolha para este estudo. As informações sobre os volumes e a forma de abordagem da Geometria foram retiradas das orientações contidas no Manual do Professor, refletindo o que pensam os autores sobre o trabalho a ser desenvolvido.

Para esta análise não foram consideradas fotos, apenas as ilustrações que representam o espaço ou então objetos tridimensionais, mesmo aquelas que

⁵² De acordo com a Lei nº 11 274, o Ensino Fundamental passou a ser de 9 anos. Desta maneira, o 6º ano equivale à 5ª série, o 7º ano à 6ª série, o 8º ano à 7ª série e o 9º ano à 8ª série.

desempenham o papel de simples ilustração⁵³, não dialogando com o texto. Também foram consideradas as imagens não tratadas como objetos tridimensionais, embora mantenham uma relação com a representação do espaço. Neste levantamento não foram consideradas as ilustrações que apresentavam somente pessoas, apenas aquelas com ideia de espaço (Figura 16).

As imagens analisadas foram classificadas em 2 categorias que não estavam previamente estabelecidas. Senti uma dificuldade muito grande em explicar essas categorias de modo que fossem excludentes. Ambas foram baseadas na categorização feita por Longen (2007) e adaptadas para este estudo. São elas:

Representação do ideal (Figura 15): todas as formas geométricas que representam idealizações, isto é, não podem ser encontradas no mundo real. Nesta categoria temos como exemplos: cubo, cilindro, esfera, prisma hexagonal, entre outros.



FIGURA 15 - Exemplo de representação do ideal.
FONTE: Dante, 6º ano, p. 357

Em cada coleção analisada, as representações do ideal foram subdivididas em duas outras categorias: imagens que indicam arestas ou curvas invisíveis por meio de linhas tracejadas e aquelas que apresentam somente o que nos é visível, sem o uso de linha tracejada. Esta subdivisão é apresentada em uma tabela específica.

Representação do real (Figura 16): todas as ilustrações que representam objetos reais. Nesta categoria temos como exemplos: lata de refrigerante, bola de futebol, caixas, mesas, vistas, ambientes, entre outros.

⁵³ Consideradas no sentido de Ilustrações Ornamentais, apontado por Dalcin (2002). São as “ilustrações que não exerceriam uma função específica no sentido de auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos ou no processo de compreensão do que está sendo dito no texto, podendo apenas, talvez, contribuir para com o processo de leitura no sentido de quebrar o ‘ritmo da leitura’ ou ocupar algum espaço ocioso ao término de um capítulo, por exemplo” (p. 63-64).

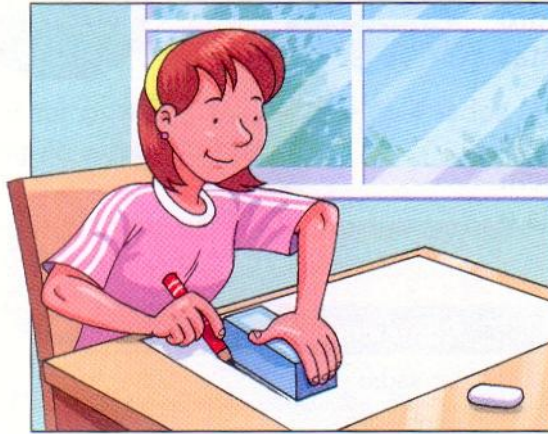


FIGURA 16 - Exemplo de representação do real.
FONTE: Bianchini, 6º ano, p. 272a

Conforme descreve Novaes (2005), à primeira vista, uma imagem são apenas formas e cores. Mas isso é somente seu suporte material. Uma imagem começa a partir do momento em que paramos de ver o que é materialmente dado, para então reconhecer uma figura conhecida, ou seja, uma representação. As categorias acima descritas tratam as imagens analisadas como representações.

A discussão sobre a linha, a forma, o tom, a cor e a dimensão, alguns dos elementos básicos descritos por Dondis (1997), será feita de forma geral no capítulo final desta pesquisa.

A partir destas considerações feitas, convido o leitor a acompanhar a descrição e os resultados da análise sobre as coleções selecionadas.

6.1 MATEMÁTICA



FIGURA 17 - Coleção Matemática.
FONTE: GLD, 2011, p. 35

Sobre a abordagem da Geometria, o Guia destaca:

Em todos os volumes, a geometria é bem articulada com os demais campos da Matemática. Destacam-se diversas atividades de manuseio de material concreto, que propiciam a experimentação e a visualização. O trabalho com as construções geométricas também possibilita ao aluno construir um corpo bastante completo de conhecimentos geométricos. Observa-se a apresentação adequada de provas de diversas propriedades sobre triângulos, congruência e semelhança de figuras. Há um trabalho particularmente cuidadoso e pertinente na dedução do teorema de Tales. Constata-se, porém, excesso na apresentação de nomenclatura e propriedades, como no estudo das relações métricas em uma circunferência, no 9º ano (GLD, 2011, p. 38).

Nesta coleção o Manual do Professor é chamado de Suplemento com Orientações para o Professor⁵⁴ e é composto por duas partes, uma Geral e a outra Específica. A Parte Geral é comum a todos os volumes da coleção e apresenta as seguintes seções: apresentação; a coleção; a importância de aprender Matemática; a Matemática como disciplina do currículo escolar do Ensino Fundamental; o papel do livro didático; temas transversais; propostas didáticas; a avaliação e as práticas avaliativas; formação continuada e desenvolvimento profissional docente; algumas associações e centros de Educação Matemática; sugestões de leituras para o professor; bibliografia consultada. A Parte Específica do MP apresenta as orientações gerais para o desenvolvimento dos capítulos.

⁵⁴ Neste estudo será tratado como Manual do Professor (MP).

O volume destinado ao 6º ano é composto por 360 p. distribuídas ao longo de 11 capítulos, além do MP com 80 p. das quais 3 são folhas especiais para desenho. O autor indica no capítulo 3 (Estudando figuras geométricas) a necessidade de manipulação de objetos, para que os entes geométricos possam ser percebidos. Além disso, ressalta a importância em promover discussões sobre os modelos de figuras geométricas utilizados. Algumas possibilidades podem surgir no trabalho em duplas: fazer desenhos (no plano); buscar figuras espaciais para poder manipulá-las e testar hipóteses tentando desenhar a partir dos números encontrados.

A continuidade do estudo geométrico é feita no capítulo 9 (Polígonos e poliedros). Surge a oportunidade para explorar a ligação entre a Matemática e as artes plásticas, pela forte presença da Geometria nas manifestações modernistas do último século. Uma das sugestões de atividades propõe a construção de uma caixa a partir de uma folha de papel, para que se possa discutir quais segmentos são congruentes, consecutivos ou perpendiculares.

Os demais volumes da coleção abordam apenas tópicos da Geometria plana. O volume destinado ao 7º ano apresenta 264 p. em 10 capítulos, além do MP com 63 p. complementares.

O livro do 8º ano tem 256 p. distribuídas em 9 capítulos e o MP com 56 p.. O capítulo 1 (Construindo retas e ângulos) deste volume indica que um de seus objetivos é fazer com que a ampliação e fixação de conceitos da Geometria plana sejam favorecidas através de sua aplicação, em construções geométricas com régua, compasso e esquadro.

O último volume, destinado ao 9º ano, apresenta 9 capítulos em 248 p., além de outras 56 p. que formam o MP.

A seguir são descritas todas as imagens que, de alguma forma, estão relacionadas à representação do espaço e de objetos tridimensionais, organizadas em duas categorias, distribuídas de acordo com o volume analisado (Tabela 1):

Descrição	Quantidade de imagens			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Representações do ideal	119	1	15	10
Representações do real	302	153	100	85

TABELA 1 - Levantamento das ilustrações da coleção Matemática (Ed. Moderna)
Fonte: a autora

Ao longo dos quatro volumes que compõem a coleção, observa-se um desequilíbrio na distribuição das imagens relacionadas à representação do espaço. O grande número encontrado no livro do 6º ano deve-se ao fato de que os poliedros são estudados em dois capítulos (3 e 9), além disso, também há o capítulo 11, que trata de unidades de medida de volume, massa e capacidade. A quase ausência de representações do ideal nos demais volumes está relacionada à não retomada dos assuntos abordados no 6º ano e na distribuição dos conteúdos, basicamente algébrico. A Geometria trabalhada é a plana, com cálculo de áreas e estudo de polígonos.

Nas imagens de representação do real, a maior parte delas mostra pessoas com objetos na mão ou então executando alguma tarefa (Figura 18).

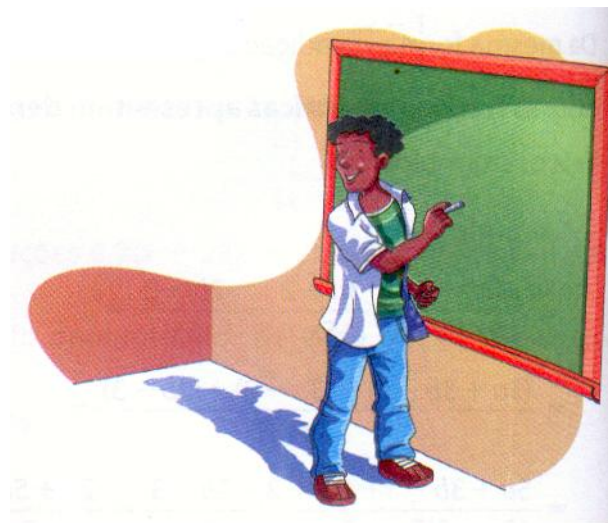


FIGURA 18 - Professora dando aula.
FONTE: Bianchini, 8º ano, p. 192

As representações do ideal foram subdivididas em duas outras categorias (Tabela 2): imagens que indicam arestas ou curvas invisíveis por meio de linhas tracejadas e aquelas que apresentam somente o que nos é visível, sem o uso de linha tracejada.

REPRESENTAÇÕES DO IDEAL				
Descrição	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Com tracejado	86	--	7	--
Sem tracejado	33	1	8	10
Total	119	1	15	10

TABELA 2 - Distribuição das ilustrações relacionadas à representação do ideal.
Coleção Matemática (Ed. Moderna)
Fonte: a autora

Um dado a ser destacado é o número reduzido de imagens relacionadas à representação do espaço nos volumes destinados ao 7º, 8º e 9º anos. Será que a necessidade de visualização só está presente no 6º ano? Como ficam os alunos dos anos subseqüentes?

6.2 MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS

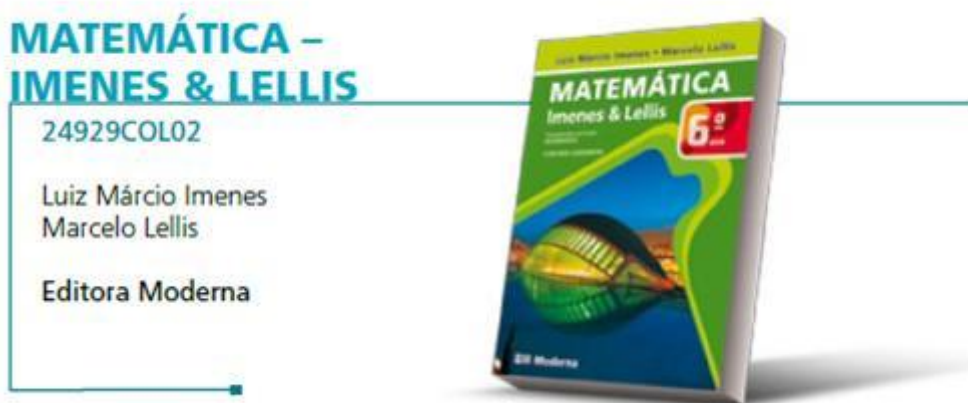


FIGURA 19 - Coleção Matemática – Imenes & Lellis.
FONTE: GLD, 2011, p. 59

Sobre a abordagem da Geometria, o Guia destaca:

Em todos os livros, a geometria é abordada por meio de atividades de observação, medição, recortes, dobraduras, montagens e desenhos. Uma característica importante da obra são as construções geométricas com o uso de instrumentos de desenho, apresentados na obra e propostas em atividades para os alunos. A capacidade de visualização é favorecida pelo trabalho com representações planas de figuras espaciais, tais como vistas, cortes e perspectivas. Outro destaque é a atenção dada a vários tipos de simetrias. A abordagem dedutiva é feita de forma apropriada, pela apresentação de demonstrações simples ou pela solicitação para que o aluno realize tais deduções lógicas. São também realçadas as aplicações práticas da geometria e suas conexões com obras de arte (GLD, 2001, p. 62).

Nesta coleção o Manual do Professor recebe o nome de Guia e Recursos Didáticos⁵⁵ e é dividido em capítulos. Os 8 primeiros capítulos são comuns a todos os volumes da coleção. São eles: apresentação; um novo ensino de matemática;

⁵⁵ Neste estudo será tratado como Manual do Professor (MP).

distribuição dos tópicos de cada conteúdo do 6º ao 9º anos; trabalhando com esta coleção; avaliação; recursos didáticos; conexões e interdisciplinaridade; fontes para atualização e aperfeiçoamento. Os demais capítulos variam de acordo com o volume e tratam do desenvolvimento dos conteúdos, do plano de curso, comentários e respostas das questões e apresentam bloco de folhas especiais.

Os autores indicam que valorizam a Geometria, destacando suas conexões com o mundo e explorando as oportunidades oferecidas por ela na construção do raciocínio dedutivo. Os conteúdos de Geometria relacionados à representação tridimensional estão organizados nos tópicos representados no quadro a seguir (Quadro 6). Este quadro é um recorte de outro maior, presente na parte comum do MP e detalha a forma como a Geometria está distribuída nos quatro volumes da coleção

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Formas tridimensionais	Características de várias formas: bloco retangular e cubo; prismas e pirâmides; cilindro, cone, esfera; superfície plana e não plana	Classificação: formas planas e formas espaciais; poliedros e não poliedros	Prisma, pirâmide, cilindro e cone: construção com base na planificação	
Representação de formas espaciais sobre o plano	Planta, mapa e corte; vistas: frontal, lateral e superior	Localização no plano; plano cartesiano	Representação de pilha de cubos em malhas quadriculada e triangular; perspectiva: linha do horizonte e ponto de fuga	Perspectiva com dois pontos de fuga

QUADRO 6 - Conteúdos de geometria
FONTE: Imenes e Lellis, MP

O livro do 6º ano apresenta 336 p. distribuídas em quinze capítulos, divididos em 48 itens, além do MP com 96 p.. Sobre a relação entre Educação Artística e Desenho Geométrico, os autores deixam claro no MP que a coleção explora a relação arte-geometria através de uma abordagem predominantemente matemática, portanto, pode ser inadequada para o professor de Educação Artística. Além disso, as construções geométricas propostas não foram feitas no sentido de desenvolver um curso de Desenho Geométrico.

No capítulo 2 (Formas Tridimensionais), a apresentação da Geometria está baseada em figuras do cotidiano, sem separar muito as figuras planas e espaciais.

Aqui, abordam-se prismas, pirâmides, formas redondas e um modo de representar as figuras tridimensionais, as vistas [...]. Geralmente, os alunos necessitam visualizar e manipular modelos reais dos sólidos para perceberem suas propriedades. Por isso, as construções solicitadas nas Ações são muito importantes (IMENES; LELLIS, p. 37 do MP).

Entre as sugestões contidas no plano de aula, os autores indicam a necessidade de o professor começar a ensinar os alunos a “ler” as representações das figuras espaciais, porque nesta faixa etária eles têm dificuldade em perceber as características tridimensionais em um desenho. Na sequência, descrevem como deve ser feito o trabalho com vistas simplificadas, pelo fato deste tema ser muito adequado à atual “civilização da imagem”.

Nas orientações sobre o capítulo 7 (Construções Geométricas) há a argumentação em relação ao trabalho com construções no sentido de que o aluno amplie seus conhecimentos sobre medidas e geometria de maneira agradável, além de poder aprimorar habilidades visuais e motoras. Na seção Um Toque a Mais, as várias maneiras de representar o espaço no plano aparecem através de atividades com cortes, o que, segundo os autores, desenvolve a imaginação visual e a percepção geométrica, depois descrita no plano de curso como um trabalho relacionado ao desenvolvimento da visualização geométrica.

O livro do 7º ano contém treze capítulos, divididos em 43 itens ao longo de 352 p., além de outras 104 p. que formam o MP, das quais 5 trazem planificações de poliedros. Mantém as mesmas orientações do volume anterior sobre a forma como a relação arte-geometria é explorada e as construções são propostas. Além disso, “propiciam-se descobertas por meio da observação, das construções, da experimentação e da dedução” (IMENES; LELLIS, p. 36 do MP).

O capítulo 8 (Geometria: do espaço para o plano) trabalha com a classificação de figuras geométricas, o estudo dos poliedros e as representações geométricas no plano, temas que, de acordo com os autores, só recentemente vêm sendo incluídos no Ensino Fundamental, em parte por influência dos PCN. Eles explicam que as atividades de observação de poliedros desenvolvem a percepção geométrica, e que o trabalho com vistas, mapas, plantas e cortes tem importância também para outras áreas do conhecimento, como Arquitetura, Engenharia e Geografia.

O volume destinado ao 8º ano é formado por 335 p., além de 96 que compõem o MP, das quais 3 apresentam malhas especiais para o trabalho com

perspectiva proposto na p. 169. Apresenta treze capítulos, divididos em 42 itens. Os autores enfatizam que em algumas escolas parte do conteúdo de Geometria é tratado nas aulas de Desenho Geométrico ou de Educação Artística. Neste caso, é necessário um planejamento entre as áreas envolvidas.

As orientações referentes ao capítulo 3 (Construções geométricas), iniciam com a frase “Ao se construírem figuras, também se constroem ideias” (IMENES; LELLIS, p. 38 do MP). Nele são desenvolvidas atividades de construção sob o ponto de vista matemático, sem deixar de explorar suas aplicações, lançando ideias que podem, de certa forma, auxiliar mais tarde nas escolhas profissionais dos alunos. Há a menção do uso obrigatório de instrumentos de desenho nas atividades do capítulo, sendo que algumas delas podem ser desenvolvidas no computador, por ser este um instrumento que também favorece o aprendizado geométrico.

Sobre a construção de formas tridimensionais, elas são feitas a partir de suas planificações. Para os autores, tais atividades desenvolvem a percepção geométrica espacial e a imaginação dos alunos.

O capítulo 9 (Desenhando figuras espaciais) tem como objetivo o trabalho com técnicas de desenho em perspectiva. Nas orientações encontramos a indicação de que o avanço no estudo das figuras espaciais depende, em parte, de certa habilidade do aluno em compreender as representações de figuras tridimensionais feitas na superfície da folha de papel, que tem duas dimensões. Para que esta habilidade se desenvolva, é preciso trabalhar técnicas da perspectiva. “O desenho em perspectiva desenvolve a percepção geométrica, é fonte de prazer e meio de expressão” (IMENES; LELLIS, p. 58 do MP). Este capítulo pode ser desenvolvido em conjunto com professores de Desenho Geométrico e de Educação Artística. Nele são apresentadas as regras básicas, de natureza geométrica, que fazem parte do desenho em perspectiva. Além disso, o texto que aborda o aspecto histórico da perspectiva é composto por muitas imagens, a compreensão das ideias ali presentes depende dessas imagens. Ao final do texto que compõe o capítulo 9, a profundidade do cubo feito em perspectiva é obtida intuitivamente, pelo aspecto visual do desenho. Há também a sugestão do uso do computador para o desenho em perspectiva, através de programas de geometria dinâmica. A seção *Um toque a mais*, apresenta um texto sobre latitudes e longitudes. Os autores explicam que, apesar deste tema ser abordado nas aulas de Geografia, em geral não são mostrados os ângulos que determinam as coordenadas geográficas, pela existência

da dificuldade de visualização das figuras geométricas espaciais. No entanto, ele é adequado neste capítulo, por tratar da geometria espacial.

Ao final do capítulo 11, o texto *Geometria das edificações* tem como justificativa sobre sua presença o fato da proposta desta coleção tratar geometria plana e espacial concomitantemente.

Nesse momento, aproveitamos para fazer uma incursão mais teórica na geometria espacial, apresentando planos paralelos, retas perpendiculares a planos e etc. Isso não traz dificuldades, porque o tratamento é intuitivo, partindo de construções que nos cercam [...] e podendo ser visualizado facilmente em figuras e em caixas com forma de bloco retangular (IMENES; LELLIS, p. 67 do MP).

O último volume da coleção, destinado ao 9º ano, é composto por 14 capítulos que são divididos em 41 itens, ao longo de 360 p. O MP apresenta outras 96 p., das quais uma é destinada ao trabalho com perspectiva proposto na p. 220. São mantidas as orientações dos volumes anteriores sobre a relação com Educação Artística e Desenho Geométrico. Quase todo o capítulo 11 (Construções geométricas) trata de técnicas de desenho com esquadro, régua, compasso e transferidor. “Assim, os alunos ganham habilidades motoras, percepção artística, técnicas para desenhar e aprendem geometria” (IMENES; LELLIS, p. 61 do MP).

Na seção *Desenhando em 3D*, a perspectiva é apresentada apenas como uma técnica para desenhar, sem que certos procedimentos sejam justificados. “O desenho em perspectiva [...] desenvolve a visão geométrica espacial, necessária no estudo da geometria no espaço” (IMENES; LELLIS, p. 62 do MP). Para os autores, um breve contato com o desenho em perspectiva ajuda a superar dificuldades em “enxergar” certas características de um objeto tridimensional representado em duas dimensões. Orientam que a escolha do plano de aula depende dos conhecimentos da turma. Em *Um toque a mais*, que trata da Geometria e a arte de Franz Weissmann, a escolha por apresentar o trabalho deste artista é justificada pelo fato de sua obra complementar de maneira adequada um capítulo que tratou do desenho em perspectiva. Os autores procuram explicar que este tipo de experiência ajuda a perceber as limitações de representar bidimensionalmente uma forma espacial.

A seguir são descritas todas as imagens que, de alguma forma, estão relacionadas à representação do espaço e de objetos tridimensionais, organizadas em duas categorias, indicadas de acordo com o volume analisado (Tabela 3):

Descrição	Quantidade de imagens			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Representações do ideal	50	110	37	40
Representações do real	277	307	264	190

TABELA 3 - Levantamento das ilustrações da coleção Matemática- Imenes e Lellis (Ed. Moderna)
Fonte: a autora

Nesta coleção há um certo equilíbrio na distribuição das imagens nos quatro volumes. O maior número apresentado no livro do 7º ano é devido ao fato do capítulo 8 tratar da Geometria do espaço para o plano, com representação de vistas, plantas e cortes. Há também o capítulo 12, que aborda o cálculo de volumes.

Muitas imagens desta coleção apresentam um professor com quadro-negro ao fundo. Neste levantamento só foram consideradas aquelas que apresentavam outros elementos que dessem a noção do espaço.



FIGURA 20 - Representação de um ambiente.
FONTE: Imenes e Lellis, 6º ano, p. 212

As representações do ideal foram subdivididas em duas outras categorias (Tabela 4): imagens que indicam arestas ou curvas invisíveis por meio de linhas tracejadas e aquelas que apresentam somente o que nos é visível, sem o uso de linha tracejada.

REPRESENTAÇÕES DO IDEAL				
Descrição	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Com tracejado	15	64	13	21
Sem tracejado	35	46	24	19
Total	50	110	37	40

TABELA 4 - Distribuição das ilustrações relacionadas à representação do ideal.
Coleção Matemática – Imenes e Lellis (Ed. Moderna)
Fonte: a autora

Observa-se a presença das duas subcategorias ao longo dos quatro volumes que compõem a coleção. No livro do 6º ano a maior parte das imagens com tracejado está no dicionário do aluno.

Nesta coleção foram observadas imagens em perspectiva que mostram ponto de fuga. Através do uso de diferentes tipos de malhas, surge o trabalho com perspectiva feito no capítulo 9 do volume destinado ao 8º ano, no qual há uma explicação para o uso de linhas tracejadas nas representações tridimensionais (Figura 21) e uma mesma imagem aparece com e sem o uso destas linhas (Figura 22). Neste volume também há uma imagem que poderia se enquadrar nas duas categorias de representação (Figura 23), pois se refere ao ideal e ao real, ao tratar o tronco de um cone como a forma de um copo plástico, porém foi considerada como pertencente apenas às representações do ideal..

Como você sabe, as linhas tracejadas representam as arestas “escondidas” do cubo.

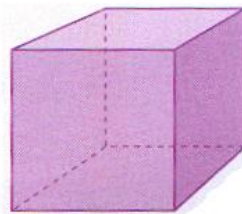


FIGURA 21 - Uso de linhas tracejadas.
FONTE: Imenes e Lellis, 8º ano, p. 175

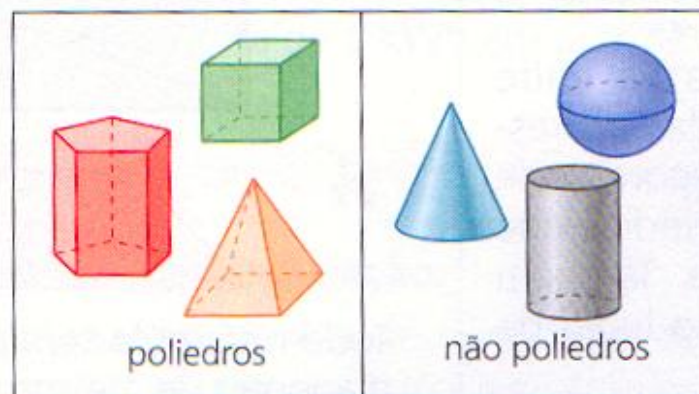


FIGURA 22 - Uso e ausência de linhas tracejadas.
FONTE: Imenes e Lellis, 8º ano, p. 313

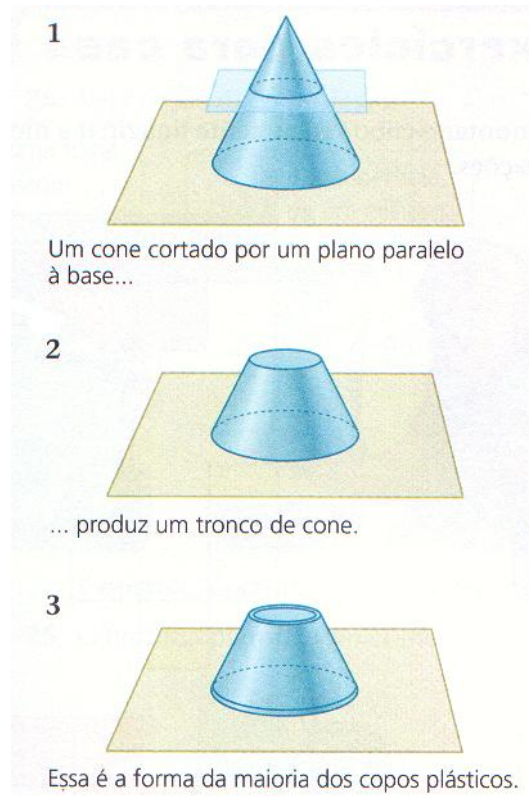


FIGURA 23 - Dupla categoria.
 FONTE: Imenes e Lellis, 8º ano, p.53

O estudo da perspectiva é feito nos volumes destinados ao 8º e 9ºanos, nos quais ela é trabalhada com o auxílio de malhas e também através do uso de pontos de fuga. (Figuras 24, 25 e 26).

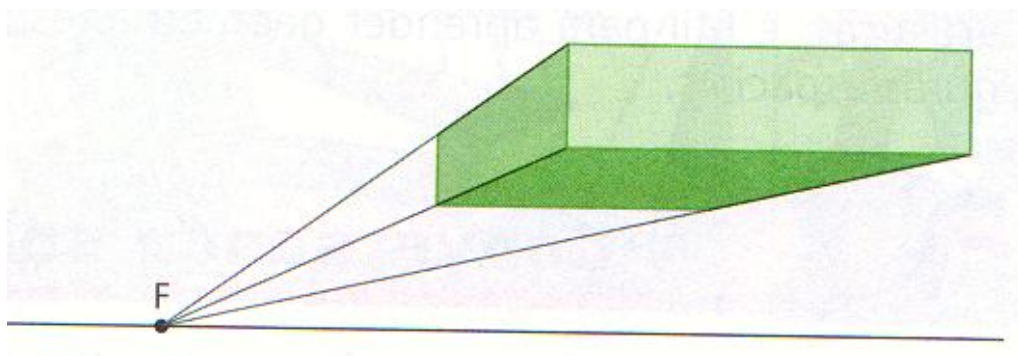


FIGURA 24 - Perspectiva com 1 ponto de fuga.
 FONTE: Imenes e Lellis, 9º ano, p. 215

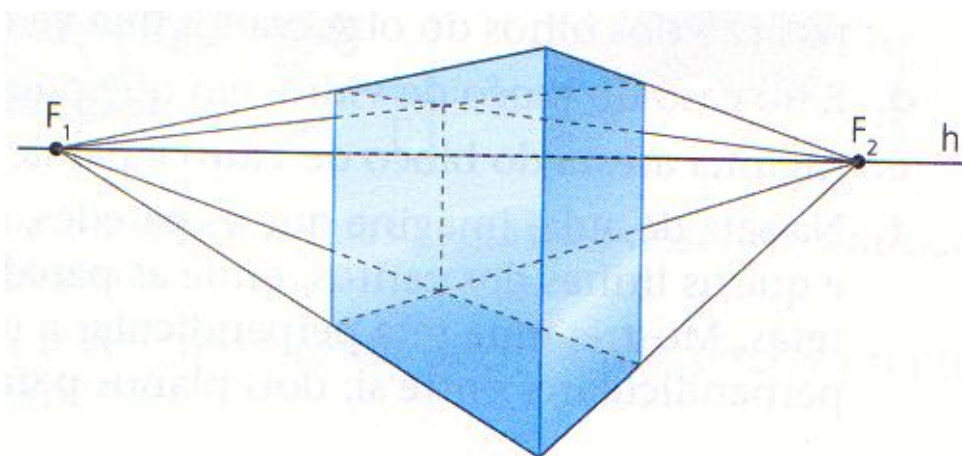


FIGURA 25 - Perspectiva com 2 pontos de fuga.
 FONTE: Imenes e Lellis, 9º ano, p. 215

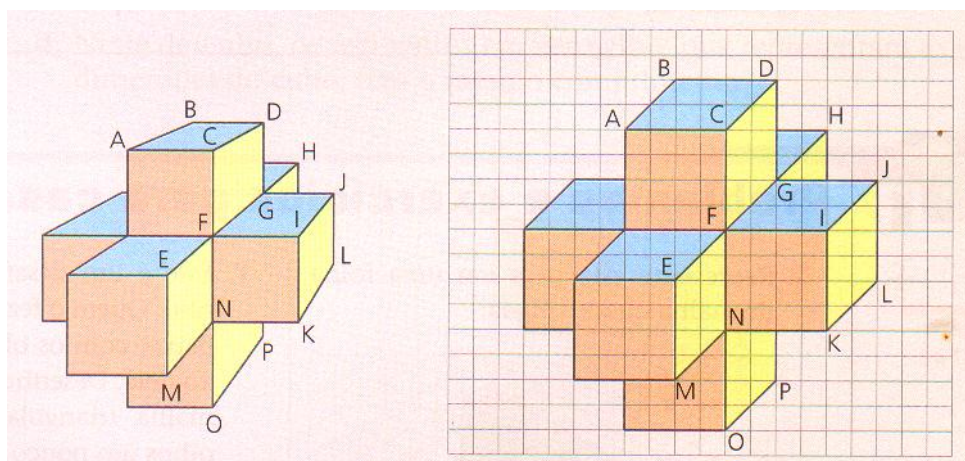


FIGURA 26 - Perspectiva com uso de malha quadriculada.
 FONTE: Imenes e Lellis, 8º ano, p. 170

É importante destacar a preocupação dos autores sobre a necessidade de o aluno aprender a “ler” figuras espaciais. Esta preocupação está evidenciada no MP, através do qual eles enfatizam que, um breve contato com o desenho em perspectiva ajuda a superar essas dificuldades em “enxergar” certas características de um objeto tridimensional representado no plano.

6.3 TUDO É MATEMÁTICA

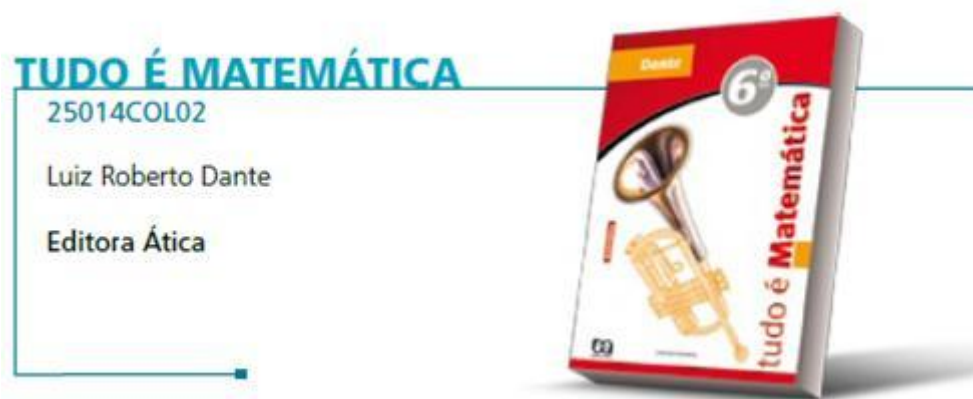


FIGURA 27 - Coleção Tudo é Matemática.
FONTE: GLD, 2011, p. 83

Sobre a abordagem da Geometria, o Guia destaca:

Os sólidos são abordados de maneira apropriada: as figuras planas, por exemplo, são estudadas com base em planificações de figuras tridimensionais. Busca-se, sempre, levar o aluno a observar a geometria em imagens ou desenhos presentes no texto, para, em seguida, incentivar a construção de figuras com o uso de instrumentos de desenho. No entanto, há poucas propostas de atividades de manuseio e montagem de modelos geométricos. No livro do 7º ano, o estudo da circunferência origina a discussão dos gráficos de setores. Ao longo da obra, a abordagem intuitiva da geometria dá lugar à construção do raciocínio dedutivo. Em alguns casos, são fornecidos os elementos necessários para que o aluno compreenda os conceitos e as propriedades, a exemplo do estudo da reflexão, translação e rotação. Também se observa que a abordagem da trigonometria é feita de forma exaustiva. É o que ocorre ao se contemplarem as relações trigonométricas num triângulo qualquer (GLD, 2001, p. 86).

Nesta coleção, o Manual Pedagógico do Professor⁵⁶ é dividido em duas partes, uma Geral e outra Específica. A Parte Geral, que é comum a todos os volumes da coleção, é composta por várias seções: conversa com o professor; apresentação; características da coleção; pressupostos teóricos que embasam uma nova maneira de ensinar Matemática; algumas ideias para a utilização desta coleção; recursos didáticos auxiliares; temas transversais; formulação e resolução de problemas; a avaliação; a importância da atualização. A Parte Específica do MP

⁵⁶ Doravante será tratado como Manual do Professor (MP)

apresenta a descrição do livro do aluno, bem como observações e sugestões para cada capítulo.

O que diz o autor em relação à Geometria? As atividades da coleção oportunizam ao aluno desenvolver, entre outros, o pensamento geométrico.

Trabalhando primeiro as figuras tridimensionais, depois as figuras planas (ou bidimensionais) e, em seguida, os contornos de figuras planas (ou figuras unidimensionais), classificando essas figuras, observando semelhanças e diferenças entre elas; construindo representações planas das figuras tridimensionais sob diferentes pontos de vista; compondo, decompondo, ampliando e reduzindo figuras geométricas planas; localizando pontos no plano cartesiano; verificando o que varia e o que não varia em uma transformação geométrica levando aos conceitos de congruência e semelhança; trabalhando inicialmente de modo experimental (geometria experimental) para, pouco a pouco, apresentar pequenas demonstrações (geometria dedutiva) (DANTE, p. 13 do MP).

O autor explica que, ao relacionar os sólidos geométricos com embalagens, está trabalhando o conteúdo com significado e auxiliando o aluno a entender o mundo em que vive. Além disso, nos diz que procura enfatizar igualmente os grandes eixos temáticos da Matemática – números e operações (Álgebra), espaço e forma (Geometria), grandezas e medidas e tratamento da informação (Estatística e Probabilidade).

Tão importante quanto os números é a *geometria*, que permite compreender: o espaço, sua ocupação e medida, trabalhando com os sólidos geométricos, as superfícies, suas formas, regularidades e medidas; as linhas, suas propriedades e medidas; e as relações entre todas essas figuras geométricas (DANTE, p. 16 do MP).

Com relação aos instrumentos e materiais utilizados, ele afirma que se constituem em recursos didáticos auxiliares e que, nesta coleção, instrumentos como régua, esquadro, transferidor, compasso, entre outros, serão utilizados em diversas atividades, em especial naquelas que envolvem construções geométricas. Ao discutir sobre o uso do computador, o autor indica programas específicos relacionados à Geometria para aprofundar e melhorar a aprendizagem, como é o caso do Logo, do Cabri-géomètre II e o Geometricricks.

O volume destinado ao 6º ano é composto pelo livro do aluno, com 396 p. distribuídas ao longo de 10 capítulos, mais o encarte de jogos, com 40 p., além do MP, com 72 p.

Sobre o eixo temático da Geometria (espaço e forma), já na Parte Específica do MP, ele explica que sua exploração é feita informalmente.

Inicia-se esse conteúdo com os sólidos geométricos, em seguida passa-se às regiões planas e chega-se aos contornos (linhas fechadas), com atividades que favorecem a manipulação de embalagens, a visualização e a

identificação de seus elementos, bem como as diferenças e semelhanças entre essas formas. As regiões planas, sua composição e decomposição são trabalhadas relacionando-as com sinais de trânsito, geografia, arte e mosaicos. As atividades são feitas por meio de dobraduras, recortes e pintura, estimulando a criatividade do aluno. O trabalho com contorno de figuras planas leva o aluno a conhecer os mais importantes: quadrado, retângulo, triângulo e circunferência.

Pela grande importância matemática, destaca-se neste volume o trabalho informal com simetria, realizado por meio de dobraduras e recortes. Exploram-se intuitivamente a simetria de uma figura em relação a um eixo, a simetria em alguns contornos, o simétrico de uma figura e a composição de simetrias.

As noções de ângulo (como giro), segmento de reta, retas paralelas e concorrentes, polígono (em particular, os triângulos e os quadriláteros) e circunferência também são trabalhadas de modo informal.

Inicia-se neste ano o estudo com construções geométricas. Com o uso de papel quadriculado, estimula-se o aluno a fazer arte no quadriculado: ornamentos, mosaicos e faixas decorativas (Arte e Geometria). Usando régua e esquadro, traçam-se retas perpendiculares e paralelas (DANTE, p. 49 do Manual do Professor).

O volume destinado ao 7º ano apresenta 10 capítulos e é composto pelo livro do aluno, com 356 p. além do encarte de jogos, com 36 p., e o MP, com 64 p.

Quanto o ensino da Geometria, o autor indica que mantém sua exploração de maneira informal e inicia o conteúdo retomando o que foi visto no ano anterior. Explica ainda que o trabalho com os sólidos geométricos é feito a partir de seus elementos, diferenças e semelhanças, e que as atividades são desenvolvidas no sentido de favorecer a descoberta de outras características dos sólidos.

Nas orientações do capítulo 4, que trata dos sólidos geométricos, regiões planas e contornos, o autor afirma que “basta olharmos à nossa volta para verificarmos que estamos mergulhados em um mundo de formas geométricas” (DANTE, p. 54, Manual do Professor) e sugere ao professor que peça aos alunos que construam e manipulem modelos de sólidos geométricos, sempre que possível, a fim de poder descobrir semelhanças e diferenças entre corpos redondos e poliedros.

O volume destinado ao 8º ano é composto pelo livro do aluno, com 364 p. distribuídas ao longo de 10 capítulos, mais o encarte de jogos, com 32 p., além do MP, com 64 p.

Sobre o eixo da Geometria (espaço e forma), o autor indica que dará continuidade ao trabalho experimental e manipulativo feito nos volumes anteriores:

[...] exploramos a representação plana das superfícies dos sólidos geométricos e a perspectiva com o objetivo de desenvolver no aluno a habilidade de percepção espacial e de codificação e de decodificação de desenhos (DANTE, p. 50 do MP).

O capítulo 4 aborda a representação de figuras tridimensionais no plano. O autor indica que ele pode ser totalmente desenvolvido de forma interdisciplinar, fazendo conexão com Arte, de modo a examinar e apreciar desenhos e pinturas.

Com a finalidade de desenvolver no aluno as habilidades de percepção espacial, desenhar figuras tridimensionais, codificar e decodificar desenhos, apresentamos neste capítulo várias maneiras de representar sólidos geométricos no plano: fazendo planificações, usando malha pontilhada, malha quadriculada e malha triangular.

Para cumprir essa finalidade, trabalhamos com desenhos de diversas vistas possíveis de um sólido geométrico, bem como com desenhos em perspectiva. Estimule os alunos a desenharem em perspectiva (DANTE, p. 54 do MP).

Ao final do MP, é dado um exemplo de atividade de construção dos pontos notáveis de um triângulo através do uso do *software* educacional Cabri-géomètre II.

O último volume da coleção, destinado ao 9º ano, é composto pelo livro do aluno, com 388 p. distribuídas em 10 capítulos, mais o encarte de jogos, com 32 p., além do MP, com 64 p. Na Parte Específica que compõe o manual, o autor descreve o trabalho com Geometria desenvolvido nos volumes anteriores e explica que neste volume será abordada a ideia de proporcionalidade aplicada à Geometria, desenvolvendo um capítulo sobre semelhança, conceito que será usado no estudo das relações métricas em um triângulo retângulo e na introdução à Trigonometria.

Retomamos a noção de escala, já estudada nos anos anteriores, agora enfatizando que nos mapas, nas plantas de construções e nas maquetes as dimensões no desenho e na realidade mantêm uma proporcionalidade que é definida por uma escala (DANTE, p. 53 do MP).

O autor finaliza as orientações do capítulo de proporcionalidade sugerindo ao professor que peça aos alunos a construção de maquetes utilizando escala. Orienta, ainda, o uso do *software* educacional Cabri-géomètre II na verificação empírica do Teorema de Tales.

A seguir são descritas todas as imagens que, de alguma forma, estão relacionadas à representação do espaço e de objetos tridimensionais, organizadas em duas categorias, distribuídas de acordo com o volume analisado (Tabela 5):

Descrição	Quantidade de imagens			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Representações do ideal	145	128	127	57
Representações do real	258	114	112	103

TABELA 5 - Levantamento das ilustrações da coleção Tudo é Matemática (Ed. Ática)
Fonte: a autora

Há um grande número de imagens nas duas categorias, observa-se certo equilíbrio na distribuição destas imagens nos três primeiros volumes da coleção. A maior quantidade observada no 6º ano está relacionada ao fato de apresentar o capítulo 4, que aborda o estudo dos sólidos geométricos e o capítulo 10, que trata do cálculo de volumes. No livro do 7º ano são retomados os sólidos geométricos e no 8º ano há o capítulo 4, que aborda a representação de figuras tridimensionais no plano através de diferentes tipos de malhas e do desenho em perspectiva com 1 ou 2 pontos de fuga.

Com a ampliação do cálculo de volumes feita no capítulo 9 do 9º ano, há uma acentuada diminuição do número de imagens apenas na categoria de representações do ideal. Estas representações foram subdivididas em duas outras categorias (Tabela 6): imagens que indicam arestas ou curvas invisíveis por meio de linhas tracejadas e aquelas que apresentam somente o que nos é visível, sem o uso de linhas tracejadas.

REPRESENTAÇÕES DO IDEAL				
Descrição	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Com tracejado	118	108	40	29
Sem tracejado	27	20	87	28
Total	145	128	127	57

TABELA 6 – Distribuição das ilustrações relacionadas à representação do ideal.
Coleção Tudo é Matemática (Ed. Ática)
Fonte: a autora

Observa-se a predominância das representações com tracejado em três dos quatro volumes da coleção.

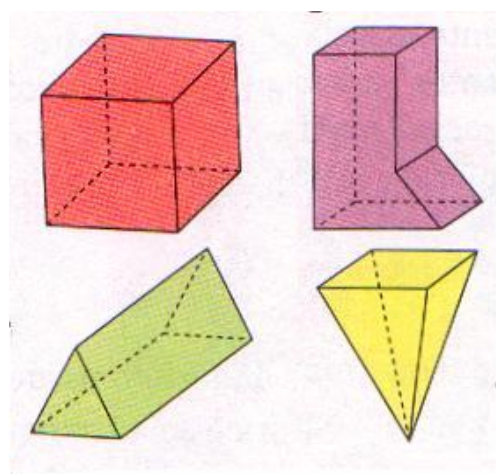


FIGURA 28 – Representações do ideal com tracejado.
FONTE: Dante, 7º ano, p. 105

Um dado que chamou a atenção é o cuidado em representar pirâmides com a base voltada para cima, diferentemente da forma “calcificada” dos livros atuais, que quase sempre mostram a base no “chão” (Figuras 28 e 29). Além disso, vale destacar a preocupação do autor em desenvolver um trabalho com o desenho em perspectiva, feito no capítulo 4 do volume do 8º ano, através do uso de diferentes tipos de malha.

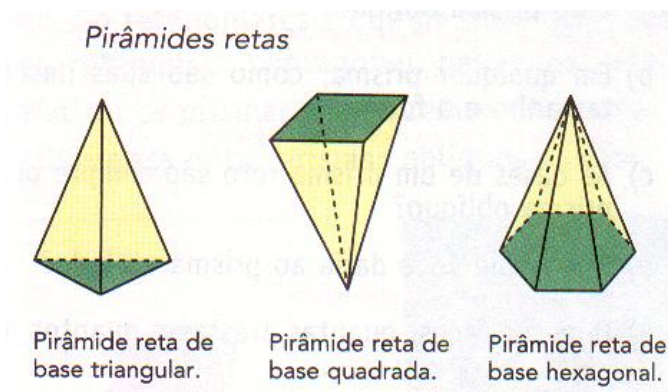


FIGURA 29 – Bases de pirâmides.
 FONTE: Dante, 7º ano, p. 90

Em comparação com as demais coleções analisadas, esta foi a que apresentou maior número de imagens relacionadas à categoria de representações do ideal nos quatro volumes que formam a coleção. Além disso, dentre as imagens relacionadas a esta categoria, nota-se uma predominância no uso de representações feitas com linhas tracejadas, o que pode evidenciar uma preocupação com a visualização espacial por parte do autor.

Ao longo deste capítulo foram descritas as coleções que se enquadravam no critério adotado, detalhando as ideias dos autores sobre o ensino da Geometria, extraídas do Manual do Professor. O levantamento feito sobre as representações de objetos tridimensionais foi organizado em tabelas, nas quais é possível comparar a presença das imagens nos quatro volumes que compõem cada uma das coleções.

A presença ou ausência das imagens relacionadas à representação do espaço está ligada à distribuição dos conteúdos ao longo dos volumes. Apresento a seguir a análise sobre os encontros e desencontros que tive durante este estudo.

7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

É possível que nem sempre o que olhamos seja exatamente aquilo que vemos...

A geometria, é certo, exige fortemente a atividade do olhar. Não há dúvida de que o papel da visualização na aquisição dos conhecimentos geométricos é importante. Mas tal atividade é complexa; tão complexa que talvez seja ingênuo de nossa parte o desejo de se melhorar o modo de ver de nossos alunos, a partir de um conjunto de atividades desenvolvidas em sala de aula, ou ainda, procurar explicar como a atividade do olhar se processa em cada um de nós. Talvez esta complexidade envolva muitos outros elementos que não estejam, unicamente, ligados às figuras em si, nem à capacidade visual de cada um de nós. Talvez fosse o caso de, antes de tudo, analisarmos o fato de que uma imagem é a representação de um modo de olhar (FLORES, 2007, p. 20).

Ao procurar entender o significado de visualização, deparei-me com diferentes sentidos dados ao termo, alguns dos quais poderiam me levar a um rumo completamente diferente daquele que optei seguir ao assumir um sentido. Acredito que uma reflexão sobre esta quantidade e diversidade possa gerar novas pesquisas, não apenas no campo da Educação Matemática.

As representações encontradas nas coleções analisadas mostraram que a perspectiva é a forma dominante, conforme Flores e outros autores já haviam indicado. Não me preocupei em verificar qual perspectiva era a mais utilizada, mesmo porque meu olhar estava voltado para a análise das imagens relacionadas à representação do espaço em outro sentido. Mesmo assim, é necessário destacar que duas das três coleções mostraram uma preocupação no trabalho com o desenho em perspectiva, no sentido de auxiliar no desenvolvimento da visualização de objetos tridimensionais.

Conforme já apontado, a presença das imagens estudadas está diretamente associada ao conteúdo abordado. Como a distribuição destes conteúdos depende de cada autor, há coleções em que são trabalhados no 6º ou no 7º ano, ou então retomados em anos posteriores. As tabelas mostram que os livros destinados ao estudo dos sólidos geométricos e ao cálculo de volume são aqueles que apresentam maior número de imagens observadas, o que não chega a ser surpresa. Mas será que a visualização é importante apenas nestes momentos?

Embora o objetivo deste estudo seja mostrar como o espaço tem sido representado nos livros didáticos, algumas falhas de representação foram levantadas. Elas podem ter aparecido por falha em alguma das muitas etapas que envolvem a produção de um livro didático. A existência destas falhas pode ser um obstáculo em relação à visualização. Não identificarei a localização destas imagens porque busco apenas discutir as dificuldades que elas podem implicar.

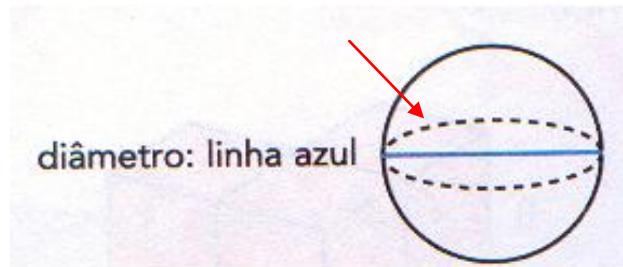


FIGURA 30 - Modelo de esfera.

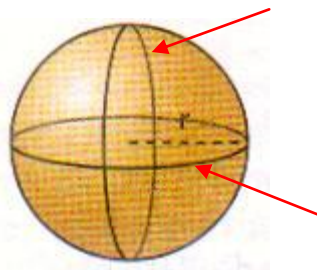


FIGURA 31 - Modelo de esfera.

Nas figuras 30 e 31, a ideia de esfera é dada pelas curvas assinaladas. Mas qual parte delas está visível e qual não está? As duas imagens contrariam as normas do Desenho Técnico⁵⁷, pois é preciso diferenciar o que está visível daquilo que não pode ser visto, conforme está representado de maneira adequada nos exemplos da figura 32.

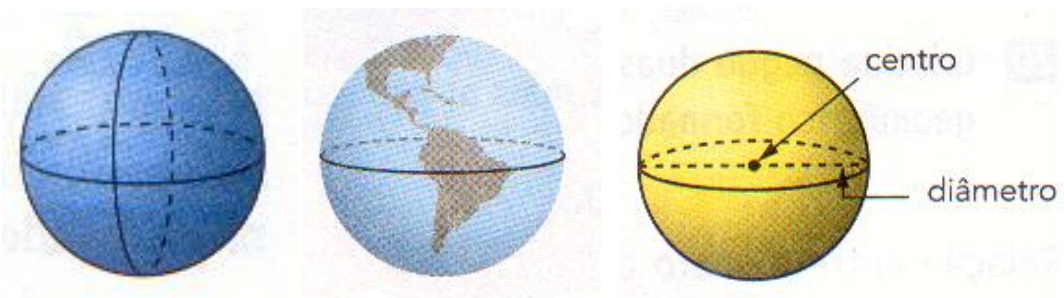


FIGURA 32 - Modelos de esfera.

⁵⁷ NBR 8403, que regulamenta a aplicação de linhas em desenhos. Esta norma orienta que as arestas não visíveis devem ser representadas com linhas tracejadas. Fonte: Coletânea de Normas do Desenho Técnico. São Paulo, SENAI – DTE – DMD, 1990, p. 3.

O mesmo tipo de dificuldade acontece com imagens de outros sólidos geométricos presentes nas coleções analisadas (Figuras 33 e 34), nas quais algumas arestas são representadas com linhas tracejadas enquanto que outras, que também não são visíveis, apresentam linhas contínuas.

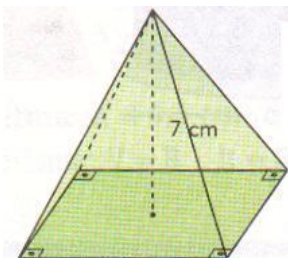


FIGURA 33 - Modelo de pirâmide.

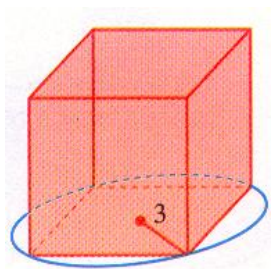


FIGURA 34 - Modelo de cubo.

Uma alternativa ao uso de linha tracejada para a identificação de partes não visíveis foi observada em uma das coleções, na qual uma imagem apresentava estes contornos feitos com uma tonalidade diferente, conforme pode ser visto na figura 35. Contudo, não há no texto indicação ou explicação alguma neste sentido.

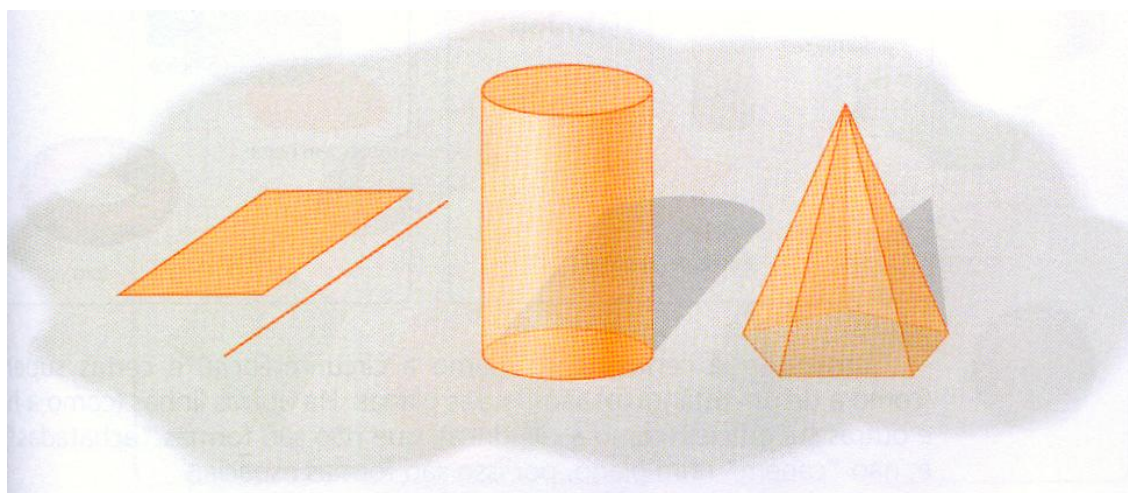


FIGURA 35 - Representação de arestas e contornos.

Deve-se destacar também algumas iniciativas positivas encontradas nos livros, que podem ser vistas talvez como facilitadoras no processo de visualização.

- O cuidado com a linha que representa o contorno e alguns elementos das figuras, a variedade de cores e o uso de diferentes tons para destacar a tridimensionalidade do objeto representado (Figura 36).

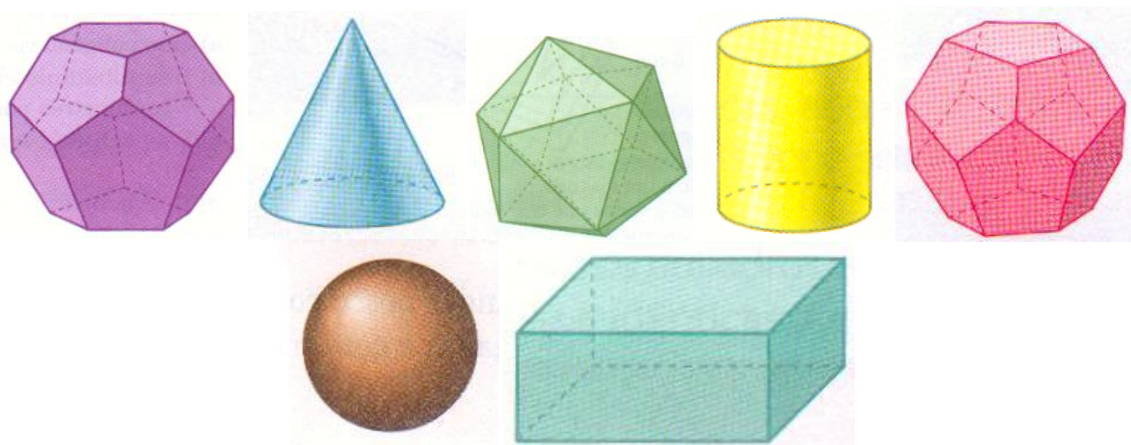


FIGURA 36 - Exemplos de uso de diferentes tons.

- A presença de sombras (Figura 37), embora sua posição possa parecer contraditória, realça a noção de dimensão, também favorecida pela representação em perspectiva.

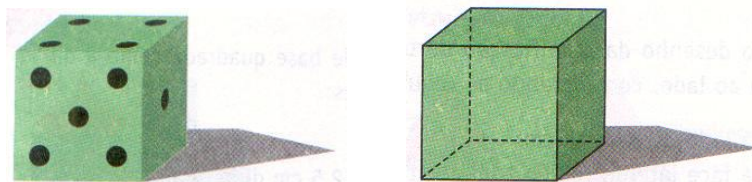


FIGURA 37 - Imagens com presença de sombra.

- Apresentação de imagens em posições diferentes das habituais (Figura 38). Este recurso, em minha opinião, é extremamente positivo, desde que seja discutido em sala para que algumas relações possam ser estabelecidas.

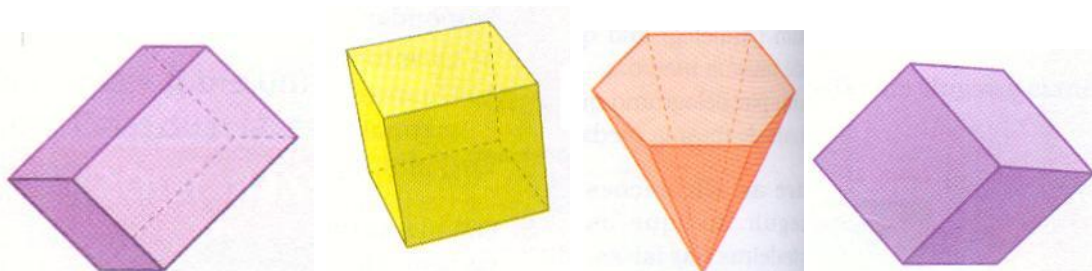


FIGURA 38 - Modelos de sólidos em diferentes posições.

- Destaque das bases de prismas e pirâmides através do uso de cores ou tonalidades diferentes (Figura 39).

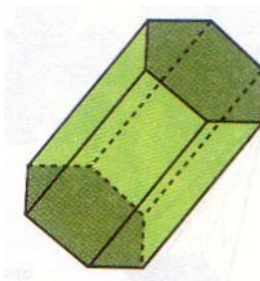


FIGURA 39 - Prisma hexagonal com bases destacadas.

- O cuidado com que é feita a representação do corte de sólidos geométricos (Figura 40).

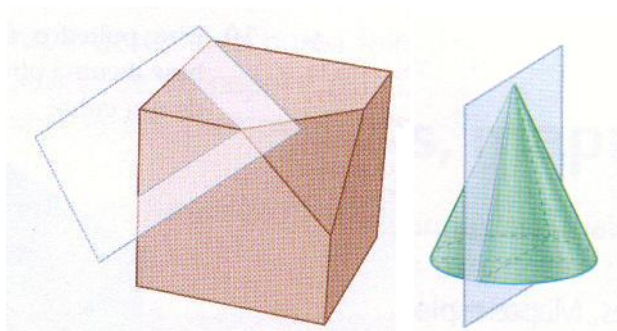


FIGURA 40 - Representações de cortes.

- A associação da ideia de espaço em representações de vistas (Figura 41) pode despertar o sentido de dimensão em uma representação plana.

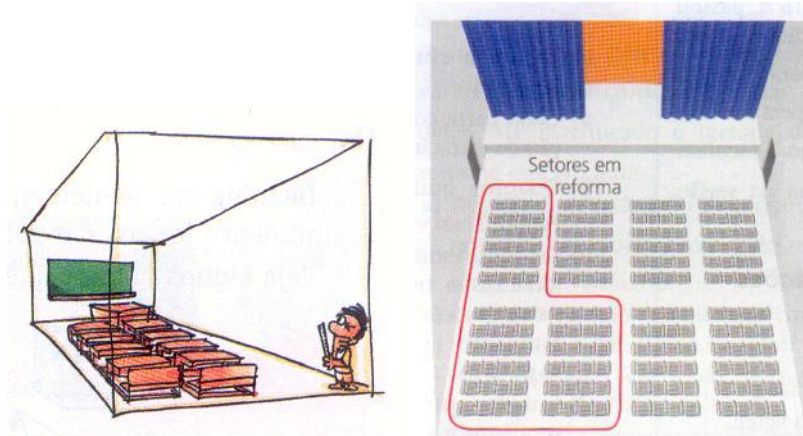


FIGURA 41 - Representações de vistas.

Sobre a relação entre a visualização e as imagens, percebe-se que não basta apenas sua presença nos livros didáticos. É preciso muito mais que isso. É necessário também perceber o que elas representam. Para que sejam acessíveis a todas as pessoas, é preciso, conforme aponta Dondis (1997), construir um sistema básico não apenas para a aprendizagem, mas também para a identificação, criação e compreensão das mensagens que as imagens representam, o que não me parece uma tarefa tão simples assim. Se cada visível tem sua dobra de invisível, olhar apenas pode não ser suficiente, é preciso refletir. Concordo com Flores (2004) ao afirmar que olhar uma imagem é um exercício de abstração, para o qual precisamos poder transitar entre o plano e o espaço, mas que para isso é necessário dominar os saberes geométricos e conhecer os códigos de convenção.

Se uma mensagem só tem sentido se puder ser compreendida, o que dizer quando, em um mesmo livro, encontramos representações de um sólido geométrico feito de forma contraditória? Como tornar familiar as representações se, em determinados momentos, são feitas de um jeito e em outros, são modificadas (sem aviso prévio)? Refiro-me especificamente às representações dos sólidos geométricos. Em um mesmo volume é possível encontrar, por exemplo, um paralelepípedo no qual as arestas que não são visíveis estão representadas por linhas tracejadas e, em outro momento, estas mesmas arestas são representadas por linhas contínuas. Ou então em uma única página, encontramos as duas formas, lado a lado (Figura 42)?

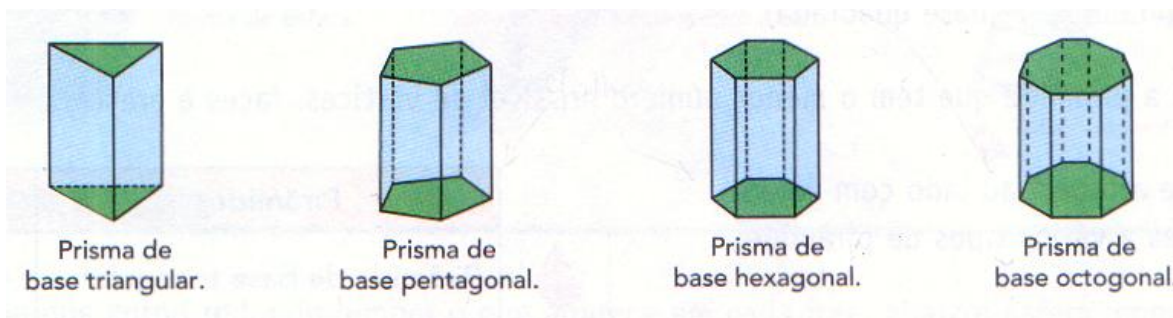


FIGURA 42 - Prismas com e sem linhas tracejadas.

Uma diversidade de formas de representação de um mesmo objeto é muito importante, desde que uma complemente a outra e não que uma confunda a outra.

Ao longo da pesquisa, assumi visualização como sendo um processo de formação de imagens, sejam elas com lápis e papel, através do uso da tecnologia ou então mentalmente. Para que este processo se complete, talvez seja necessário que o contato com as representações dos objetos tridimensionais não ocorra apenas no plano, ao olhar uma figura, pois muitas vezes olhamos e não vemos. A presença dessas representações deve ser refletida, pensada e analisada. “Como são realizadas as leituras de imagens nos livros didáticos?” (BITTENCOURT⁵⁸, 2005, *apud* LONGEN, 2007, p. 310). Esta também é uma preocupação minha.

Embora esta pesquisa não tenha sido desenvolvida no sentido de analisar se as imagens dialogam com o texto, contribuindo ou não com as informações contidas nele, ou então se seu papel é meramente ilustrativo, são questões a serem levantadas.

Ao exemplificar o que compreendia por visualização, mostrei uma figura na qual seria possível perceber a presença de alguns cubos (Figura 13).

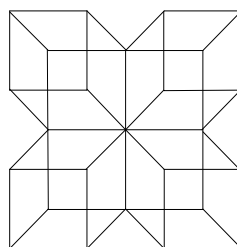


FIGURA 13 – Representação de cubos.
FONTE: a autora

⁵⁸ BITTENCOURT, Circe. Livros didáticos entre textos e imagens. In: BITTENCOURT, Circe (Org.). O saber histórico na sala de aula. São Paulo: Contexto, 2005.

Mas será que esta percepção é acessível a todas as pessoas? Não acredito que seja possível obter uma resposta, porém, a imagem pode ser “melhorada” neste sentido, ao identificar as arestas invisíveis com linhas tracejadas (Figura 43), conforme as orientações contidas nas normas do Desenho Técnico. Pode ser que isso ainda não seja o suficiente para despertar um olhar, sendo necessário então destacar as faces que estão mais à frente. De qualquer forma, é preciso aprender a “ler” e interpretar estas imagens.

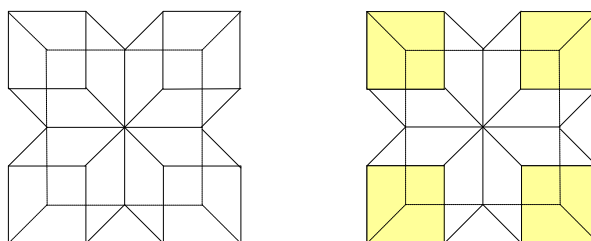


FIGURA 43 – Representação de cubos com arestas não visíveis.
FONTE: a autora

Considerando que, das dez coleções aprovadas pelo programa do MEC, apenas três se enquadravam no critério de escolha estabelecido, surge uma questão: como ficam as possibilidades para “ver o invisível” nas demais coleções? Será que apenas os que usarem os livros analisados poderão despertar sua visualização, considerando que, a partir da própria análise do Guia são estes que fazem um bom trabalho nesse aspecto? Como se dará o tratamento a esta questão nas demais coleções? A procura por algumas respostas poderia ser o fio condutor de outros trabalhos.

Se, de acordo com Flores (2007), a Geometria requer, por natureza, ser visualizada, as imagens presentes nos livros didáticos devem ser facilitadoras desta visualização, e não o contrário.

É possível que as representações analisadas contribuam para sustentar um modelo de visualização? Creio que esta pergunta não esteja completamente respondida. A quantidade e a qualidade observadas nos dão indícios de uma resposta positiva. A partir das imagens encontradas no levantamento feito, percebe-se uma preocupação em tornar a leitura agradável e um cuidado com a parte gráfica. Se compararmos com os livros que eram usados há 10 anos, os atuais estão visualmente muito mais bonitos. Será que isso é suficiente?

No ensaio feito sobre visualização, sugeri a possibilidade dos livros perspectivarem o olhar para uma única forma de ver. É possível que isso aconteça com alguns, da mesma forma que outros nos sugerem diferentes formas de olhar ao mostrar, por exemplo, o cuidado com a representação de vistas, o trabalho desenvolvido com planificações, a aplicação de tonalidades para nos dar a ideia de profundidade.

Apreendi que a visibilidade não depende apenas do objeto ou então do sujeito que vê, é preciso refletir para desvendar a dobra invisível que está em cada dobra visível.

Embora tenha buscado algumas respostas aos meus questionamentos iniciais, acredito que possa ter encontrado mais perguntas do que respostas...

Quanto mais eu lia, mais caminhos se abriam. Existiram momentos em que me perdi em meus próprios pensamentos ou nos pensamentos dos autores que busquei.

O desejo do conhecimento é infundável. De onde se conclui que, sem o trabalho do pensamento, sem a teoria (palavra grega [...] que também pode ser traduzida por *ser espectador*, isto é, um ver que sabe ver, que inventa meios para ver cada vez melhor), sem enfim, essa segunda vista, corremos o risco de jamais aprender a ver (NOVAES, 2005, p. 14).

As escolhas feitas apontaram para um caminho, outras escolhas me levariam a outros caminhos e outras interpretações. Talvez aquele que escolhi tenha sido mais longo que o necessário. Como saber?

Durante muito tempo deixei a imagem da tela de Velásquez como pano de fundo da área de trabalho do meu computador. Toda vez que o ligava, era como se o próprio pintor estivesse me olhando...

Resolvi, então, colocá-la novamente na última página desta pesquisa.

Ao encerrar a escrita do texto fica a certeza que meu olhar jamais será o mesmo.

*(...) o tom, a cor
me fez voltar a ver a luz
estrela no deserto a me guiar
farol do mar, da incerteza...*

(Um dia, um adeus - Guilherme Arantes)



FIGURA 9 – As Meninas, Diego Velázquez, 1656
(óleo sobre tela 318 x 276 cm), Museu do Prado – Madrid

REFERÊNCIAS

BIEHL, Juliana V.; BAYER, Arno. **A escolha do livro didático de matemática**. X EGEM (Encontro Gaúcho de Educação Matemática). Comunicação científica. 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS.

BRASIL – Ministério da Educação e do Desporto – **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1997.

_____. Secretaria de Educação Fundamental - **Recomendações para uma Política Pública de Livros Didáticos**. Brasília, 2001

BRASIL – Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos** – PNLD 2008: Matemática. Brasília, 2008.

BRASIL – Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos** – PNLD 2010 Séries/Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Brasília, 2008.

BRASIL – Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos** – PNLD 2011: Matemática. Brasília, 2010.

BRIGO, Jussara. **As figuras geométricas no ensino de matemática**: uma análise histórica nos livros didáticos, 162 p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

CARVALHO, João B. Pitombeira. **Políticas públicas e o livro didático de matemática**. Rio Claro, SP: Bolema, ano 21, nº 29, pp. 1 a 11.

CAVALCA, Antonio de Pádua V. **Espaço e representação gráfica**: visualização e interpretação, 169 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CHOPPIN, Alain. **História dos livros e das edições didáticas**: sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 30, p. 549-566, set/dez 2004.

CIFUENTES, José Carlos. **O lado romântico da matemática**. Introdução ao catálogo da exposição “Espaço, tempo, estrutura, abstração: diálogos entre arte e matemática”, de 26 de junho a 09 de setembro de 2007. MusA – Museu de Arte da UFPR.

COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. Escola Superior de Coimbra, 2000. Disponível em <www.epce.org.pt/sem/CC.pdf> (acesso em Nov/2009)

COSTA, José Roberto. **A importância do manual do professor na transposição didática da matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2008.

DALCIN, Andréia. **Um olhar sobre o paradidático de matemática.** 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

DAMM, R. F. **Educação matemática – uma introdução.** Registros de Representação. São Paulo: EDUC, 1999. p.135-153.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática.** Tradução de João Bosco Pitombeira. – Rio de Janeiro: F. Alves, 1986.

DONDIS, Donis A. **Sintaxe da linguagem visual.** Tradução Jefferson Luiz Camargo. 2ª edição – São Paulo: Martins Fontes, 1997 – (Coleção a)

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher.** Tradução Maria Odete Gonçalves Koller. Köhn: Taschen, 2007.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática.** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FIORENTINI, Dario ; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. – Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. – São Paulo: Musa Editora, 2007. – (Biblioteca aula Musa educação matemática; v. 4)

_____ **Olhar, saber, representar:** ensaios sobre a representação em perspectiva. – Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

_____ **A História da perspectiva e a visualização no ensino de matemática:** laços entre técnica, arte e olhar. VII ENEM, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

FONTANA, Lélia Longen. **Por onde anda o ensino de desenho geométrico?** Monografia apresentada no curso de Especialização em Expressão Gráfica no Ensino. Departamento de Expressão Gráfica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

FOUCAULT, Michel. **As palavras e as coisas:** uma arqueologia das ciências humanas. Tradução Salma Tannus Muchail. – 8ª ed. – São Paulo: Martins Fontes, 1999. – Coleção tópicos (p. 1-21).

_____ **Isto não é um cachimbo.** Tradução: Jorge Coli. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1988.

GÉRARD, François-Marie; ROEGIERS, Xavier. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Tradutoras: Júlia Ferreira e Helena Peralta. Porto: Ed. Porto Ltda., 1998. Coleção Ciências da Educação.

GUIMARÃES, Gilda; GITIRANA, Verônica; MARQUES, Mabel; CAVALCANTI, Milka. **Abordagens didáticas no ensino de representações gráficas**. IX ENEM ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Belo Horizonte - MG, 18 a 21 Julho de 2007.

JORGE, Sonia. **Desenho geométrico – Idéias & Imagens – Volume 1**. São Paulo: Saraiva, 1999.

KALLEF, Ana Maria R. **A importância do ensino da geometria na formação do educador matemático**. Artigo publicado no Boletim GEPEM nº 31, 1993.

KALTER, Regina S. **A geometria e o desenho geométrico no ensino de 1º grau em Curitiba**: contribuições para uma proposta de integração de conteúdos curriculares. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1986.

LABORDE, Colette; CAPPONI, Bernard. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traço no Cabri-Géomètre**. Em Aberto, Brasília, ano 14, n.62, abr./jun. 1994.

LELLIS, Marcelo. **Desenho em perspectiva no ensino fundamental**: considerações sobre uma experiência. USP, Faculdade de Educação, Seminário de Ensino de Matemática, 1º semestre de 2009. Disponível em <www.nilsonmachado.net/sema20090602.pdf> (acesso em 12/08/10).

LEIVAS, José Carlos P. **Imaginação, intuição e visualização**: possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIBLIK, Ana Maria P. **Sobre a contribuição do ensino do desenho geométrico nas artes e na matemática**: a importância da integração curricular. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1996.

LONGEN, Adilson. **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática**. 405 f. Tese (Doutorado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista – Geometria. Blumenau: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, p. 3-13, 1º sem. 1995.

MAIA, Licia de Souza L. **O ensino da geometria**: analisando diferentes representações. Educação Matemática em Revista. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano 7, p. 24-33, nº 8, junho/2000.

MIGUEL, Antonio. **A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática**. Revista Zetetiké, ano 3, nº 3/ 1995. Campinas, SP: UNICAMP.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides**: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Tradução Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

NETZ, Reviel; NOEL, William. **Códex Arquimedes**. Tradução Rachel Schwartz. Rio de Janeiro: Record, 2009.

NOVAES, Aduino (Org.) **Muito além do espetáculo**. São Paulo: Editora Senac São Paulo, 2005 (p. 1-81).

PARRAMÓN, José Maria. **Como desenhar em perspectiva**. Rio de Janeiro: Parramon Ediciones S.A., 1986.

PASSOS, Cármen Lúcia B. Passos. **Representações, interpretações e prática pedagógica**: a geometria na sala de aula. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP, 2000.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação, Campinas, 1989.

PEREIRA, Maria Regina O. **A geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino. 75 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP, 2001.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de geometria & desenho geométrico** – Volume 1. São Paulo: Scipione, 1993.

SCHUBRING, Gert. **Análise histórica de livros de matemática**: notas de aula. Tradução Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP, Autores Associados, 2003.

SANTOS, Cibele Mendes C. **O livro didático do ensino fundamental**: as escolhas do professor. 236 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVA, Kátia Gonçalves. **Concepções sobre geometria**: apreensões em um momento de reformulação curricular. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

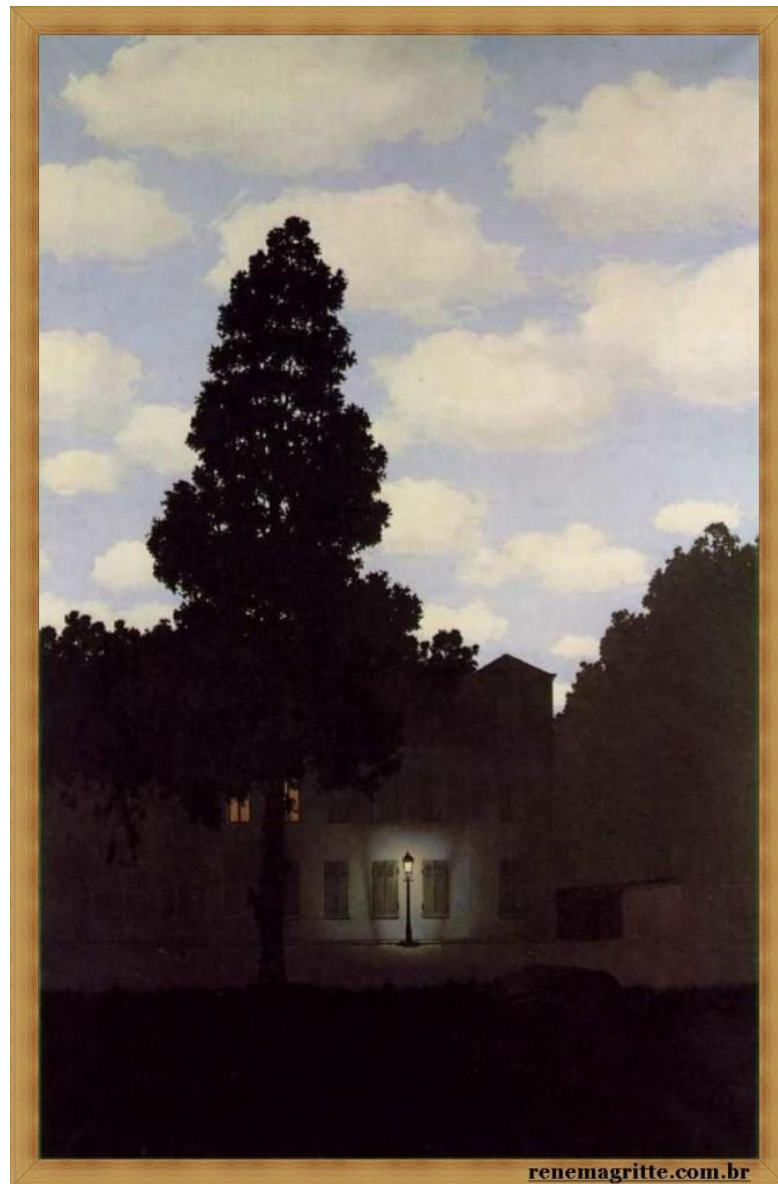
VORPAGEL, Kari Simone. **Livro lidático de matemática**: perspectivas de sua criação pelos autores. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. **Visualization in teaching and learning mathematics**. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991 (p. 1-7 e p. 67-76).

ZUIN, Elenice de Souza. L. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 206 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações**, 2001.

ANEXOS



O Império das Luzes, René Magritte

Fonte: <http://magritte.com.br/obras-de-magritte/> (Acesso em 10/10/10)