UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Maikel Antônio Samuays

O Problema de Brezis-Nirenberg

Curitiba, 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Maikel Antônio Samuays

O PROBLEMA DE BREZIS-NIRENBERG

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Jurandir Ceccon.

Curitiba, 2011.

Aos meus pais,
Vera e Marcos,
pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Como eu já esperava, escrever esta parte da dissertação foi um grande desafio. Foram muitas as pessoas que participaram desta importante etapa acadêmica. No entanto, não poderia começar senão agradecendo ao meu amigo e orientador, Profº Dr. Jurandir Ceccon, por toda a ajuda e paciência durante esta orientação. Dada sua exigência, permitiu que eu me preparasse para seguir na carreira, ingressando no Doutorado. Além disso, nunca hesitou em me ajudar para solucionar os problemas que insistiam em aparecer.

Ao meu grande amigo, Profº Dr. Alexandre Kirilov, pessoa que considero fundamental para minha vida acadêmica. Com o seu entusiasmo e rigor característico, sempre esteve disposto a ajudar, sugerir e criticar quando necessário, desde o momento que o conheci. Foi acatando uma sugestão dele que escolhi o meu orientador de mestrado Jurandir Ceccon. Sou grato, principalmente, por despertar em mim o sonho de trabalhar com Matemática, um privilégio que requer muito estudo, disciplina e dedicação.

Agradeço aos meus pais, Marcos e Vera, e também à Mariza, Isabelle e Juliano, minha família, pelo incentivo que sempre deram aos meus estudos, permitindo que eu chegasse até aqui. Sempre estiveram dispostos a aconselhar quando necessário, ao mesmo tempo que escutaram minhas frequentes dúvidas e preocupações, sem falar, é claro, das histórias de Matemática que eu, entusiasmado, insistia em relatar para eles.

Aos meus amigos da Graduação e da Pós-Graduação. Dada a quantidade de pessoas que eu poderia listar neste parágrafo, omitirei os nomes para evitar prováveis esquecimentos. No entanto, posso dizer que eles não só participaram de momentos de descontração, mas também tiveram presença em momentos complicados e decisivos.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná e aos demais professores que participaram da minha vida universitária, os quais considero fundamentais para minha formação.

Finalizando, agradeço o apoio financeiro da Fundação Araucária. A todos, um sincero obrigado por fazerem parte da minha vida!

“Nenhuma investigação feita pelo homem pode ser chamada realmente de ciência se não puder ser demonstrada matematicamente.”

Leonardo da Vinci

Resumo

Neste trabalho, analisamos a existência de solução para problemas da forma

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sendo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $1 < p < n$. Este problema é conhecido na literatura como o **Problema de Brezis-Nirenberg**. Inicialmente, estudamos o trabalho de Brezis-Nirenberg [BN83] que trata o caso $p = 2$ e que deu origem aos problemas da forma (1). A vantagem de se estudar o caso $p = 2$ é que o problema (1) fica modelado no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, a equação de (1) é elíptica e a solução é de classe C^2. No caso geral, o problema fica modelado no espaço de Banach $W_0^{1,p}(\Omega)$, a equação em (1) pode não ser elíptica e a solução é de classe $C^{1,\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$. O que tornou o trabalho de Brezis-Nirenberg original e bastante divulgado foi o fato de usarem funções extremais da desigualdade de Sobolev para minimizar o funcional associado a (1). O caso $1 < p < n$ foi estudado por Guedda-Veron [GV89] e as idéias usadas foram as mesmas de [BN83], porém foi necessário o uso de técnicas de aproximação e o desenvolvimento de princípios de comparação.

Palavras-chave: *Problema de Brezis-Nirenberg, método variacional, desigualdade ótima de Sobolev, concentração de compacidade, regularidade Hölderiana.*

Abstract

In this work, we've analysed the existence of solution to problems of form

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f \text{ in } \Omega \\ u > 0 \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is a function defined for $f = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open and bounded, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $1 < p < n$. This problem is known in the literature as **Brezis - Nirenberg's Problem**. Initially, we have studied the paper of Brezis-Nirenberg [BN83] that is the case $p = 2$ and gave rise to problems of form (2). The advantage of studying the case $p = 2$ is that the problem (2) is modeled in the Hilbert space $H_0^1(\Omega)$, the equation of the (2) is elliptic and the solution is C^2 class. In the general case, the problem is modeled in the Banach space $W_0^{1,p}(\Omega)$, the equation in (2) can not be elliptic and the solution is $C^{1,\alpha}$ class, with $0 < \alpha < 1$.
What made the work of Brezis-Nirenberg original and highly publicized was the fact that they use extremal functions of Sobolev inequality to minimize the functional associated to (2). The case $1 < p < n$ was studied by Guedda-Veron [GV89] and the ideas used were the same as [BN83], but it was necessary to use approximation techniques and the development of principles of comparison.

Keywords: *Brezis-Nirenberg's problem, variational method, inequality optimal Sobolev, concentration of compactness, regularity Hölderian.*

Sumário

Introdução

Nesta dissertação investigamos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\,\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1} \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado, $1 < p < n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Para resolver este problema, o qual é conhecido como o "**Problema de Brezis-Nirenberg**", iremos utilizar o *método variacional*. Tal método consiste em procurar pontos críticos do funcional associado à EDP do problema em estudo, que no nosso caso é dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx - \frac{1}{p}\int_\Omega \lambda |u|^p dx, \tag{4}$$

o qual é definido sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$. Veremos no capítulo 3 que os pontos críticos deste funcional são soluções do problema (3). Logo, o trabalho será analisar a existência de tais pontos críticos. No entanto, este estudo fica dificultado pelo fato do funcional Φ envolver o expoente crítico de Sobolev, e assim, não temos a comodidade de usar resultados de compacidade imediatos, dado que a imersão de $W_0^{1,p}$ em L^{p^*} não é compacta.

É justamente esse fato que nos motiva a estudar o problema (3), pois ele assemelha-se com alguns problemas variacionais da Geometria e da Física, nos quais a falta de compacidade também se faz presente. Um exemplo notório é o *Problema de Yamabe*, proposto em 1960 por H. Yamabe no trabalho [Yam60]. Este problema consiste no seguinte: *"Dada uma variedade Riemanniana compacta de dimensão maior ou igual a três, existe uma métrica Riemanniana, que seja conforme à métrica original e com curvatura escalar constante?"*. A demonstração desse resultado, dada como verdadeira por Yamabe em seu trabalho [Yam60], na verdade apresentou algumas falhas que foram detectadas por Trudinger, aproximadamente oito anos depois. O problema foi resolvido em alguns casos particulares, por Trudinger [Tru63] e T. Aubin [Aub76a]. Esses resultados, mesmo em casos particulares, deram uma clara indicação do caminho para a solução completa do problema de Yamabe. Entretanto, o problema permaneceu em aberto até o ano de 1984, quando R. Schoen [Sch84] finalmente resolveu o problema, após vinte e quatro anos do início da investigação.

Tal fato levou a um significativo desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais não-lineares e chamou a atenção para os problemas de Análise Geométrica. A idéia de Yamabe foi considerar uma variedade Riemanniana compacta e suave (M,g), de dimensão $n \geq 3$, e $[g]$ a classe conforme da métrica g, que é definida como

$$[g] = \left\{ u^{4/(n-2)} g = \widetilde{g}\ ,\ u \in C^{\infty}(M),\ u > 0 \right\}.$$

Se g e $\widetilde{g}$ são métricas conformes com curvaturas escalares S_g e $S_{\widetilde{g}}$ respectivamente, então S_g e $S_{\widetilde{g}}$ satisfazem a relação

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\widetilde{g}} u^{2^*-1}, \tag{5}$$

sendo $\Delta_g u = -\mathrm{div}_g(\nabla u)$ o Laplaciano de u com respeito a métrica g. Com essa constatação, o problema de Yamabe torna-se um problema de existência de solução para a equação diferencial (5). De fato, dada qualquer variedade Riemanniana compacta e suave (M,g), de dimensão $n \geq 3$, queremos saber se existe $u \in C^{\infty}(M)$, com $u > 0$, tal que $S_{\widetilde{g}}$ seja constante, ou seja, queremos u satisfazendo

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{2^*-1}, \quad \text{com} \quad \lambda = S_{\widetilde{g}}\, \frac{n-2}{4(n-1)}. \tag{6}$$

Outras informações acerca do problema de Yamabe e da equação (6), conhecida como *Equação de Yamabe*, bem como seu contexto histórico, podem ser encontradas nas referências [DH02] e [BdSM].

Voltando ao problema de Brezis-Nirenberg, como estamos considerando λ uma constante real qualquer, precisamos separar a análise em alguns casos, os quais dependem do primeiro autovalor do p-Laplaciano λ_1, dado por

$$\lambda_1 = \max\left\{ \rho > 0\ ;\ \int_{\Omega} |u|^p dx \leq \rho^{-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx,\ \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Essa análise é baseada no artigo [BN83], no qual os autores Brezis e Nirenberg estudaram a existência de solução do problema (3) para o caso $p = 2$, considerado como caso clássico, justamente por terem introduzido algumas idéias para a análise de equações desta natureza. Tal caso será tratado no capítulo 2 desta dissertação, uma vez que este servirá como modelo para a análise do caso geral. Veremos que no caso $0 < \lambda < \lambda_1$ o problema (3) possui pelo menos uma solução e nos casos $\lambda \leq 0$ e $\lambda \geq \lambda_1$ tal problema não possui solução.

O fato de $W_0^{1,p}(\Omega)$ não imergir compactamente em $L^{p^*}(\Omega)$, faz com que o estudo de existência de pontos críticos do funcional (4) se torne bastante delicado. Uma das formas de se contornar esta situação é utilizar o chamado *Teorema da Concentração de Compacidade*, resultado que levou Pierre Louis Lions à receber a *medalha Fields* no ano de 1994. O mesmo encontra-se nos trabalhos *The concentration compacteness principle in the calculus of variations: the limit case I* e *The concentration compacteness principle in the calculus of variations: the limit case II*, publicados na Revista Matemática Iberoamericana, em 1982.

Em se tratando de não existência de solução, no caso $\lambda \leq 0$ usamos a *Identidade de Pohozaev*. Esta identidade é facilmente obtida no caso $p = 2$, pois podemos trabalhar diretamente com a EDP do problema (3), uma vez que qualquer solução desta EDP é de classe $C^2(\overline{\Omega})$. No caso geral sabemos apenas que a solução da EDP em (3) é de classe $C^{1,\alpha}(\Omega)$, com $0 < \alpha < 1$. A forma tradicional para resolver essa falta de regularidade é aproximar (3) pela seguinte equação não-degenerada

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon\right) = f \text{ em } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

para $\varepsilon > 0$. Como as soluções u_ε de (7) são de classe $C^2(\overline{\Omega})$, podemos obter a identidade de Pohozaev para u_ε. A identidade de Pohozaev para soluções de (3) segue tomando-se o limite na igualdade integral encontrada para o caso não-degenerado. Para isso, faz-se necessário a verificação de que u_ε converge uniformemente para u em $C^1(\overline{\Omega})$, quando $\varepsilon \to 0$.

A prova da não-existência de solução para o caso em que $\lambda \geq \lambda_1$ é facilmente resolvida no caso em que $p = 2$, pois o problema (3) se modela no espaço de Hilbert, ou seja, a norma de H_0^1 provém de um produto interno. No caso geral, a estratégia usada em [GV89] foi obter resultados de comparação para o operador p-Laplaciano.

De forma a proporcionar um bom entendimento acerca desta dissertação e da problemática por ela tratada, dividimos o conteúdo do trabalho em três capítulos. No capítulo 1, além de resultados clássicos e necessários para o desenvolvimento do assunto, como desigualdade ótima de Sobolev e tópicos sobre o método variacional, enunciamos e provamos o já referido Teorema da concentração de compacidade. No capítulo 2, estudamos o caso clássico do problema (3), analisando a não existência de solução para $n \geq 3$ e a existência de solução foi separada em dois casos, $n \geq 4$ e $n = 3$. Aqui, surgem peculiaridades acerca da dimensão e da região em estudo. Usando as idéias retiradas do caso clássico, estudamos o caso geral no capítulo 3. Neste capítulo, a primeira seção considera o problema perturbado (7), donde obtemos a Identidade de Pohozaev para a solução do problema (3). Na segunda seção, apresentamos princípios de comparação e de máximo, os quais serão fundamentais para a prova da não-existência de solução quando $\lambda \geq \lambda_1$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar alguns resultados que aparecem com menos frequência na teoria clássica de EDP's elípticas. Estes resultados serão utilizados ao longo deste trabalho, os quais, somados a uma formação geral em Análise Funcional, Teoria da Medida e Equações Diferenciais Elípticas, permitem um bom entendimento desta dissertação. Omitiremos algumas demonstrações ora para deixar a leitura mais fluente, ora por se tratar de resultados bem conhecidos na literatura.

1.1 Definições e alguns resultados clássicos

Os *Espaços de Sobolev*, por desempenharem um papel central no estudo das equações diferenciais parciais, serão definidos a seguir.

Definição 1.1 (Espaços de Sobolev)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não-negativo. O espaço de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é o conjunto formado por todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem as derivadas fracas $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para qualquer multi-índice α com $|\alpha| \leq k$.

A seguir, vamos munir os espaços de Sobolev com normas que forneçam uma boa estrutura a estes espaços.

Definição 1.2. *Dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, sua norma é definida como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}} & se \ 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty & se \ p = \infty. \end{cases}$$

Definição 1.3. *Denotaremos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *o fecho do conjunto* $C_c^\infty(\Omega)$ *no espaço* $W^{k,p}(\Omega)$ *com respeito à norma* $\|\,.\,\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Definição 1.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e limitado. Dizemos que* $\partial\Omega$ *é de classe* C^k *se, para cada* $x_0 \in \partial\Omega$, $\exists\ r > 0$ *e uma função* $\gamma : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^k*, com* $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *aberto, tal que*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \left\{x \in B_r(x_0)\,;\ x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right\}.$$

Além disso, $\partial\Omega \in C^\infty$ *se* $\partial\Omega \in C^k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.5 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e limitado,* $\partial\Omega \in C^1, 1 \leq p < n$ *e* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Então, existe uma constante* $C = C(n,p,q,\Omega)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $q \in [1, p^*]$.

Demonstração. Ver capítulo 5 de [Eva09]. □

Teorema 1.6 (Normas equivalentes)**.** *Em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto limitado com fronteira de classe* C^1*, temos que*

$$\|\,.\,\|_{W^{1,p}(\Omega)} \sim \|\nabla\,.\,\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(C\|\nabla u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \overline{C}\|\nabla u\|_{L^p}.$$

Por outro lado, temos

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}},$$

o que finaliza a demonstração.

□

Teorema 1.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *não-vazio,* $1 < p < \infty$ *e* $\{u_n\}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

(i) $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} < M$*, para algum* $M > 0$*;*

(ii) $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω.

Então,

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)}^p \longrightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Demonstração. Ver [BL83]. □

Definição 1.8 (Imersão compacta)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso compactamente em Y, e escrevemos $X \subset\subset Y$, se $I_d : X \to Y$ for um operador contínuo e compacto, isto é, se satisfaz*

(i) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$ *e para alguma constante C;*

(ii) *Qualquer sequência limitada em X é pré-compacta em Y.*

Seja L o operador diferencial de segunda ordem dado por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

sendo $u,\ a^{ij},\ b^i,\ c\ : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \forall\ i,j = 1,\cdots,n.$

Definição 1.9. *O operador L é chamado de Elíptico se existir uma constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,\ \ q.t.p.\ em\ \Omega,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos acima um operador de segunda ordem na sua forma completa, justamente para enfatizar que a elipticidade de um operador diferencial depende apenas dos coeficientes das derivadas de maior grau.

Definição 1.10 (Solução fraca)**.** *Seja $f \in L^\infty(\Omega)$ uma função dada. Diremos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca do problema*

$$\begin{cases} Lu = f & em\ \Omega \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

conhecido como Problema de Dirichlet, se satisfaz

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + cuv\right]dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

A seguir, vamos considerar uma solução fraca de um problema de particular interesse.

Uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\text{div }(a(\nabla u)) = f \quad \text{em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

é uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega a(\nabla u)\nabla\phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx, \quad \forall\, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.2}$$

sendo $f \in L^\infty(\Omega)$ e $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a(\eta) = \big(a_1(\eta), \cdots, a_n(\eta)\big)$. Suponha que a função a satisfaz

(i) $a \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$;

(ii) $a(0) = 0$;

(iii) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \gamma\left(\kappa + |\eta|\right)^{p-2}|\xi|^2$;

(iv) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta)\right| \leq \Gamma\left(\kappa + |\eta|\right)^{p-2}$;

(v) $\big|a(\eta)\big| \leq \Gamma\left(\kappa + |\eta|\right)^{p-1}$;

(vi) $a(\eta)\cdot\eta \geq C_1|\eta|^p - C_2$,

para todos $\eta \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, para algum $\kappa \in [0,1]$ e para constantes positivas γ, Γ, C_1 e C_2.

Com estas condições de crescimento e elipticidade temos o seguinte resultado de regularidade, devido a Tolksdorff [Tol84] e DiBenedetto [DiB82].

Teorema 1.11 (Regularidade $C^{1,\alpha}$)**.** *Seja u solução fraca de (1.1) e $u \in L^\infty(\Omega)$. Nas condições acima, existem constantes $\alpha \in (0,1)$ e $C > 0$, tais que $|\nabla u(x)| \leq C$ e*

$$\Big|\nabla u(x) - \nabla u(x')\Big| \leq C\Big|x - x'\Big|^\alpha, \quad \textit{para todos} \;\; x, x' \in \Omega',$$

sendo $C = C(n, p, \gamma, \Gamma)$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$.

A demonstração deste resultado será omitida neste trabalho, justamente por se tratar do principal objeto de estudo do artigo [Tol84]. Como foi dito anteriormente, o problema (3) e sua perturbação se encaixam nas hipóteses do Teorema acima. Faremos a verificação das condições de crescimento e elipticidade quando estivermos trabalhando com tais problemas. Com respeito à limitação da suposta solução, esta será considerada abaixo. Fizemos

esta demonstração baseados num resultado semelhante ao tratado neste trabalho, o qual pode ser encontrado no apêndice E de [Per97].
Assim, supondo que o problema tenha solução fraca, podemos obter informação sobre a limitação da solução, a qual é uma condição necessária para a utilização do resultado anterior. Antes, porém, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.12. *Sejam $\alpha > 0, \beta > 1$ e $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função decrescente. Se*

$$\phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^{\alpha}} \left[\phi(k)\right]^{\beta}, \quad \forall\, h,k \;\; tal\ que\;\; h > k > k_0 > 0,$$

então $\phi(k_0+d) = 0$, onde $d^{\alpha} = C2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} \left[\phi(k_0)\right]^{\beta-1}$.

Demonstração. Defina

$$d_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n}, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Assim, podemos notar que $d_n < k_0 + d$ e $d_{n+1} - d_n = \frac{d}{2^{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Portanto,

$$(d_{n+1} - d_n)^{\alpha} = \left(\frac{d}{2^{n+1}}\right)^{\alpha} = C\, 2^{\alpha\left(\frac{\beta}{\beta-1} - (n+1)\right)} \left[\phi(d_0)\right]^{\beta-1}.$$

Daí,

$$\phi(d_1) \leq \frac{C}{(d_1 - d_0)^{\alpha}} \left[\phi(d_0)\right]^{\beta} = \frac{\phi(d_0)}{2^{\alpha/(\beta-1)}}.$$

Indutivamente, obtemos

$$\phi(d_n) \leq \frac{\phi(d_0)}{2^{n\alpha/(\beta-1)}} = \frac{\phi(d_0)}{2^{n\mu}},$$

sendo $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta-1} > 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \phi(d_n) = 0.$$

Como ϕ é decrescente e $d_n < k_0 + d$, temos que

$$0 \leq \phi(k_0 + d) \leq \lim_{n\to\infty} \phi(d_n) = 0.$$

□

Proposição 1.13. *Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \geq 0$, seja solução fraca do problema (1.1), sendo f uma função tal que $|f(x,u)| \leq C\ \left(1 + |u|^{p^*-1}\right)$. Então, $u \in L^{\infty}(\Omega)$.*

Demonstração. A demonstração desse resultado será dividida em dois passos.

Passo 1: $u \in L^s(\Omega)$, $\forall\ s > 1$.
Defina, para cada $l > 0$ e $\beta > 1$, as funções

$$F(u) = \begin{cases} u^{\beta} & \text{se} \quad u \leq l \\ \beta l^{\beta-1}(u-l) + l^{\beta} & \text{se} \ \ u > l \end{cases}$$

e

$$G(u) = \begin{cases} u^{(\beta-1)p+1} & \text{se} \ \ u \leq l \\ \beta\left[(\beta-1)p+1\right] l^{(\beta-1)p}(u-l) + l^{(\beta-1)p+1} & \text{se} \ \ u > l. \end{cases}$$

Logo,

$$F'(u) = \begin{cases} \beta u^{\beta-1} \ \text{se} \ \ u \leq l \\ \beta l^{\beta-1} \ \text{se} \ \ u > l \end{cases} \quad \text{e} \ \ G'(u) = \begin{cases} \left[(\beta-1)p+1\right] u^{(\beta-1)p} \ \text{se} \ \ u \leq l \\ \beta\left[(\beta-1)p+1\right] l^{(\beta-1)p} \ \text{se} \ \ u > l. \end{cases}$$

E assim, podemos obter as seguintes propriedades:

(1) $G(u) \leq uG'(u)$;

(2) $C[F'(u)]^p \leq G'(u)$, com C independente de l;

(3) $u^{p-1}G(u) \leq C[F(u)]^p$, com C independente de l;

(4) $F(u), G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, como $p < p^*$, podemos escolher $\beta > 1$ tal que $\beta p < p^*$. Considere a função $\eta^p G(u)$, com $\eta \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Uma vez que $\eta^p G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e u satisfaz (1.2), temos em particular, que

$$\int_{\Omega} a(\nabla u)\nabla\big(\eta^p G(u)\big)\,dx = \int_{\Omega} f\eta^p G(u)dx.$$

Como $\nabla\big(\eta^p G(u)\big) = p\eta^{p-1}G(u)\nabla\eta + \eta^p G'(u)\nabla u$, aplicando a propriedade **(1)**, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young com ε, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(\nabla u)\cdot\left[\eta^p G'(u)\nabla u\right]dx \;-\; \int_\Omega f\eta^p G(u)dx &= -p\int_\Omega a(\nabla u)\cdot\left[\eta^{p-1}G(u)\nabla\eta\right]dx\\
&\leq p\int_\Omega \left|a(\nabla u)\cdot\nabla\eta\right|\eta^{p-1}G(u)^{\frac{p-1}{p}}G(u)^{\frac{1}{p}}dx\\
&\leq p\int_\Omega \left|a(\nabla u)\cdot\nabla\eta\right|\eta^{p-1}G'(u)^{\frac{p-1}{p}}u^{\frac{p-1}{p}}G(u)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq p\left(\int_\Omega |a(\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}}\eta^p G'(u)\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \left|\nabla\eta\right|^p u^{p-1}G(u)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \varepsilon C_1\int_\Omega |a(\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}}\eta^p G'(u)+C_2\int_\Omega u^{p-1}G(u)|\nabla\eta|^p.\end{aligned}$$

Além disso, pela hipótese, podemos colocar $G(u)f\leq C_3\left(1+|u|^{p^*-1}G(u)\right)$. E, usando a propriedade **(3)**, obtemos, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(\nabla u)\cdot\left[\eta^p G'(u)\nabla u\right]dx &\leq C_2\int_\Omega C|\nabla\eta|^p[F(u)]^p dx+C_3\int_\Omega\left[1+|u|^{p^*-1}G(u)\right]\eta^p dx\\
&\leq C_1\int_\Omega |\nabla\eta|^p[F(u)]^p+C_2\int_\Omega |u|^{p^*-p}[F(u)]^p\eta^p+C_3. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Por outro lado, pela condição **(vi)**, obtemos

$$\int_\Omega a(\nabla u)\cdot\left[\eta^p G'(u)\nabla u\right]dx\geq C_1\int_\Omega |\nabla u|^p\eta^p G'(u)dx-C_2\int_\Omega \eta^p G'(u)dx.$$

Assim, substituindo a desigualdade (1.3) na anterior, encontramos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\eta^p G'(u)\leq\overline{C}_1\int_\Omega|\nabla\eta|^p[F(u)]^p+\overline{C}_2\int_\Omega[F(u)]^p|u|^{p^*-p}\eta^p+\overline{C}_3+\overline{C}_4\int_\Omega\eta^p G'(u). \qquad (1.4)$$

No entanto, note que o lado esquerdo da desigualdade (1.4) pode ser estimado usando-se a propriedade **(2)**, obtendo-se assim

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\eta^p G'(u)dx\geq C\int_\Omega\left|F'(u)\eta\nabla u\right|^p dx. \qquad (1.5)$$

Daí, usando as desigualdades (1.4) e (1.5),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\nabla(\eta F(u))\right|^p dx &\leq \int_\Omega \left(\left|F(u)\nabla\eta\right| + \left|\eta F'(u)\nabla u\right|\right)^p dx \\
&\leq C\int_\Omega \left[\left|F(u)\nabla\eta\right|^p + \left|\eta F'(u)\nabla u\right|^p\right] dx \\
&\leq C\int_\Omega \left|F(u)\nabla\eta\right|^p dx + \overline{C}\int_\Omega |\nabla u|^p \eta^p G'(u) dx \\
&\leq C_4\int_\Omega |\nabla\eta|^p |F(u)|^p + C_5\int_\Omega |u|^{p^*-p}\eta^p [F(u)]^p + C_6 + C_7\int_\Omega \eta^p G'(u).
\end{aligned}$$

Porém, da desigualdade de Sobolev, retiramos

$$\left(\int_\Omega [F(u)]^{p^*}\eta^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \overline{C}_4\int_\Omega |\nabla\eta|^p|F(u)|^p + \overline{C}_5\int_\Omega |u|^{p^*-p}\eta^p[F(u)]^p + \overline{C}_6 + \overline{C}_7\int_\Omega \eta^p G'(u). \quad (1.6)$$

Agora, dado $x_0 \in \Omega$, escolhemos $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que, se supp $(\eta) = B_R(x_0)$, então

$$\|u\|^{p^*-p}_{L^{p^*}(B_R(x_0))} \leq \frac{1}{2\overline{C}_5}.$$

Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\overline{C}_5\int_\Omega \eta^p\,[F(u)]^p\,|u|^{p^*-p} dx &\leq \overline{C}_5\left(\int_{B_R(x_0)} \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\left(\int_{B_R(x_0)} u^{p^*} dx\right)^{\frac{p^*-p}{p^*}} \\
&= \overline{C}_5\left(\int_\Omega \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \|u\|^{p^*-p}_{L^{p^*}(B_R(x_0))} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (1.6) fica

$$\left(\int_\Omega [F(u)]^{p^*}\eta^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \overline{C}_4\int_\Omega |\nabla\eta|^p|F(u)|^p + \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \eta^{p^*}[F(u)]^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} + \overline{C}_6 + \overline{C}_7\int_\Omega \eta^p G'(u).$$

Juntando, obtemos

$$\left(\int_\Omega [F(u)]^{p^*}\eta^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_7\int_\Omega |\nabla\eta|^p[F(u)]^p dx + C_8 + C_9\int_\Omega G'(u)dx.$$

Assim, pela definição das funções F e G', fazendo $l\to\infty$, concluímos que

$$\left(\int_\Omega u^{\beta p^*}\eta^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_{10}\int_\Omega u^{\beta p}dx + C_{11}\int_\Omega u^{\beta p-p}dx + C_{12}.$$

Como $\beta p - p < \beta p$, $u\in L^{p^*}(\Omega)$ e tomamos $\beta>1$ tal que $\beta p < p^*$, segue da desigualdade acima que $u\in L^{\beta p^*}(\Omega)$ (note que $\beta p^* > p^*$). Aplicando este argumento sucessivas vezes, obtemos que $u\in L^s(\Omega)$, $\forall\, s>1$.

Passo 2: $u\in L^\infty(\Omega)$.
Por hipótese, u satisfaz

$$\int_\Omega a(\nabla u)\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \quad \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.7}$$

Para $k>0$, considere a função v dada por

$$v = \begin{cases} u-k & \text{se} \quad u>k \\ 0 & \text{se} \quad u\leq k, \end{cases}$$

e defina o conjunto $A(k)=\{x\in\Omega\,;\ u(x)>k\}$. Então, $u_{x_i}=v_{x_i}$ em $A(k)$ e

$$u = v + k\ \mathrm{sign}(u) \quad \text{em} \ A(k).$$

Além disso, como $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, substituindo em (1.7) obtemos

$$\int_{A(k)} a(\nabla v)\cdot\nabla v\,dx = \int_{A(k)} f v\,dx.$$

Como a função $a(\,\cdot\,)$ satisfaz a condição **(vi)**, temos que

$$\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx \leq C\int_{A(k)} f v\,dx + \overline{C}\int_{A(k)} dx.$$

Mas, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré,

$$\overline{C}\int_{A(k)} dx \leq C_1\int_{A(k)} u\,dx \leq \overline{C}\left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} |A(k)|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx \leq C \int_{A(k)} f v dx + \overline{C} \left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |A(k)|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Agora, aplicando a desigualdade generalizada de Hölder e a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \int_{A(k)} f v dx &\leq \left(\int_{A(k)} |f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{A(k)} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{p}\right)} \\ &\leq C \left(\int_{A(k)} |f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{p}\right)}. \end{aligned}$$

Substituindo esta desigualdade em (1.8), encontramos

$$\left(\int_{A(k)} |\nabla v|^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \left[C \left(\int_{A(k)} |f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} + \overline{C} |A(k)|^{\frac{1}{s}} \right] |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{p}\right)}.$$

Pela desigualdade de Sobolev, ficamos com

$$S \left(\int_{A(k)} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}} \leq \left[C \left(\int_{A(k)} |f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} + \overline{C} |A(k)|^{\frac{1}{s}} \right] |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{s}\right)}. \tag{1.9}$$

Agora, note que, para $0 < k < h$, temos que $A(h) \subset A(k)$. Além disso, em $A(h)$, temos que $h - k < |v|$. Logo, dessas duas informações, obtemos

$$|A(h)|^{\frac{1}{p^*}} (h-k) = \left(\int_{A(h)} (h-k)^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{A(h)} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{A(k)} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Portanto,

$$|A(h)|^{\frac{p-1}{p^*}} (h-k)^{p-1} \leq \left(\int_{A(k)} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}}. \tag{1.10}$$

Daí, de (1.9) e (1.10), obtemos

$$S |A(h)|^{\frac{p-1}{p^*}} (h-k)^{p-1} \leq \left[C \left(\int_{A(k)} |f|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} + \overline{C} |A(k)|^{\frac{1}{s}} \right] |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{s}\right)}.$$

Elevando a equação acima a $\dfrac{p^*}{p-1}$, temos

$$|A(h)| \leq \left[C\|f\|_{L^s(A(k))} + \overline{C}|A(k)|^{\frac{1}{s}}\right]^{\frac{p^*}{p-1}} \frac{1}{(h-k)^{p^*} S^{\frac{p^*}{p-1}}} |A(k)|^{p^*\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-1)s}\right)}.$$

Chamando $\beta = p^*\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{(p-1)s}\right)$, obtemos

$$|A(h)| \leq \frac{\left[C\|f\|_{L^s(A(k))} + \overline{C}|A(k)|^{\frac{1}{s}}\right]^{\frac{p^*}{p-1}}}{S^{\frac{p^*}{p-1}}} \frac{1}{(h-k)^{p^*}} |A(k)|^{\beta}.$$

Agora, pelo passo anterior, podemos tomar $s > \dfrac{n}{p-1}$, donde podemos concluir que $\beta > 1$. Por outro lado, tomando $\alpha = p^*$, $k_0 = 0$ e a função decrescente $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, dada por $\phi(h) = |A(h)|$, como

$$\phi(h) \leq \frac{\widetilde{C}}{(h-k)^{\alpha}} \phi(k)^{\beta},$$

em que $\widetilde{C} = S^{\frac{p^*}{1-p}} \left[C\|f\|_{L^s(A(k))} + \overline{C}|A(k)|^{\frac{1}{s}}\right]^{\frac{p^*}{p-1}}$, segue do lema (1.12) que $|A(d)| = 0$, onde

$$d^{p^*} = \widetilde{C} 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}} |\Omega|^{\beta-1}.$$

Isto é,

$$d = \frac{\left[C\|f\|_{L^s(A(k))} + \overline{C}|A(k)|^{\frac{1}{s}}\right]^{\frac{1}{p-1}}}{S^{\frac{1}{p-1}}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} |\Omega|^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-1)s}\right)-\frac{1}{p^*}}.$$

Portanto, $\|u\|_\infty < \infty$.

□

Proposição 1.14. *Para todos $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, existe $C > 0$ tal que*

$$|\xi + \eta|^p \leq |\xi|^p + C|\xi|^{p-1}|\eta| + C|\eta|^p.$$

Demonstração. Considere a função $f(x) = x^p$, para $x > 0$. Pelo Teorema do valor médio,

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\lambda), \quad \text{para algum } 0 < \lambda < 1. \tag{1.11}$$

Porém, $f'(x+\lambda) = p(x+\lambda)^{p-1}$ e $(x+\lambda)^{p-1} \leq C(x^{p-1}+1)$, para todo $x > 0$. Logo, de (1.11), segue que

$$(x+1)^p \leq x^p + Cx^{p-1} + C, \quad \forall\, x > 0.$$

Tomando $x = \dfrac{|\xi|}{|\eta|}$, obtemos

$$\big(|\xi| + |\eta|\big)^p \leq |\xi|^p + C|\xi|^{p-1}|\eta| + C|\eta|^p.$$

Assim, da desigualdade triangular, segue o resultado almejado. □

Proposição 1.15. *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe uma constante $C > 0$, independente de x e y, tal que*

$$\Big\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \ , \ x - y \Big\rangle \geq \begin{cases} C|x-y|^p & se \quad p \geq 2 \\ C\dfrac{|x-y|^2}{\big(|x|+|y|\big)^{2-p}} & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Demonstração. Ver o apêndice A de [Per97]. □

Para finalizar esta seção, daremos mais uma definição e enunciaremos alguns fatos de Análise real. Para mais informações, consultar o livro [Eva09].

Definição 1.16. *Dizemos que um conjunto aberto Ω é estrelado em relação à origem se, para cada $x \in \overline{\Omega}$, o segmento de reta $\{\lambda x \ ; \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contido em $\overline{\Omega}$.*

Proposição 1.17. *Suponha que a fronteira $\partial\Omega$ seja de classe C^1 e que Ω seja estrelado em relação à origem. Então,*

$$x.\nu(x) \geq 0, \quad \forall \ x \in \partial\Omega,$$

sendo ν o vetor unitário normal exterior à fronteira de Ω.

Proposição 1.18. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então f é convexa se, e somente se, $D^2 f \geq 0$. A função $f \in C^2$ é uniformemente convexa se $D^2 f \geq \theta I$, para alguma constante $\theta > 0$. Isso significa que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Exemplo 1.19. *A função $g(\eta) = \dfrac{1}{p}\left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p}{2}}$, definida sobre $\mathbb{R}^n$ e com $p > 1$, é convexa.*

Como

$$\frac{\partial g}{\partial \eta_j}(\eta) = \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \eta_j$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta) = (p-2)\left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-4}{2}} \eta_i\eta_j + \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \delta_{ij},$$

além disso,

$$C\left(\varepsilon+|\eta|\right)^{p-2} \leq \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \leq \overline{C}\left(\varepsilon+|\eta|\right)^{p-2}, \tag{1.12}$$

sendo $C, \overline{C}$ constantes positivas, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \gamma\left(\kappa+|\eta|\right)^{p-2}|\xi|^2, \quad \text{para todos } \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[(p-2)\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\eta_i\eta_j+\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\delta_{ij}\right]\xi_i\xi_j \\
&= \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left[(p-2)\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i\eta_j\xi_i\xi_j+\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij}\xi_i\xi_j\right] \\
&= \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left[(p-2)\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{-1}\xi^{\intercal}A\xi+|\xi|^2\right] \\
&= \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left[(p-2)\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{-1}<\xi,\eta>^2+|\xi|^2\right],
\end{aligned} \tag{1.13}$$

sendo $A=\eta\eta^{\intercal}$. Assim, para $p\geq 2$, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}|\xi|^2.$$

Por outro lado, no caso em que $1<p<2$, basta aplicarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j &\geq \left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}|\xi|^2\left[(p-2)\frac{|\eta|^2}{\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)}+1\right] \\
&\geq (p-1)\left(\varepsilon+|\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}|\xi|^2.
\end{aligned}$$

Em vista de (1.12), obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \widetilde{C}\left(\varepsilon+|\eta|\right)^{p-2}|\xi|^2, \quad \forall\ p>1.$$

O próximo Teorema será recursivamente utilizado nos capítulos 2 e 3 para obtermos estimativas que nos ajudarão na prova da existência de solução do problema (3).

Teorema 1.20 (Fórmula da Coárea)**.** *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja contínua e integrável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f\,ds \right) dr,$$

sendo S_r a esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio r.

1.2 Método Variacional

Introduziremos agora, algumas definições e resultados acerca do chamado *Método Variacional.* Este importante método é usado na investigação da existência de solução de determinadas equações diferenciais, permitindo tratar o problema usando técnicas da Análise Funcional não-linear. A idéia central deste método é associar um funcional à equação diferencial em estudo. Desta maneira, a solução do problema passa a ser o estudo de pontos críticos de tais funcionais. Se tivermos a garantia de que o funcional admite ponto crítico, esse ponto conduzirá a solução da EDP original. Assim, como precisaremos dar sentido para derivadas de funcionais (não necessariamente lineares) definidos sobre espaços de Banach, a próxima definição se faz necessária.

Definição 1.21. *Seja $F : X \to \mathbb{R}$ um funcional definido sobre um espaço de Banach X. Dado $x \in X$, dizemos que um funcional $F'(x) \in X'$ é a Derivada de Gateaux de F em x se existir o limite*

$$F'(x)y = \lim_{t \to 0} \frac{F(x+ty) - F(x)}{t},$$

para todo $y \in X$.

Se existir um funcional linear limitado $h : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x+y) = F(x) + F'(x)y + h(y), \quad \text{com} \lim_{\|y\|_X \to 0} \frac{h(y)}{\|y\|_X} = 0,$$

então chamaremos $F'(x)$ de *Derivada de Fréchet*. Dizemos que o funcional $F \in C^1(X)$ se a derivada de Fréchet de F existir e for contínua sobre X. Além disso, se ocorrer de $F'(x) = 0$, ou seja, $F'(x)y = 0$, $\forall\, y \in X$, chamaremos x de ponto crítico de F.
Usando o Teorema do valor médio, podemos provar o próximo resultado.

Proposição 1.22. *Suponha que $F : X \to \mathbb{R}$ tenha derivada de Gateaux contínua em X. Então F é diferenciável segundo Fréchet e $F \in C^1(X)$.*

O exemplo a seguir, além de dar uma aplicação do resultado anterior, será bastante utilizado no decorrer do trabalho.

Exemplo 1.23. *Considere o funcional* $J : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$*, dado por*

$$J(u) = \int_\Omega |u|^p \, dx,$$

sendo Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$*. Vejamos que* J *é de classe* $C^1(\Omega)$*.*

(i) *Existência da Derivada de Gateaux.*

Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$. Queremos garantir a existência do seguinte limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \int_\Omega f_t(x) dx, \quad \text{sendo } f_t(x) = \frac{1}{t}\left[|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p\right].$$

Dado $x \in \Omega$, para $0 < |t| < 1$ temos, pelo Teorema do valor médio, que existe $\lambda \in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\left||u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p\right|}{|t|} &= p|u(x) + \lambda t v(x)|^{p-1}|v(x)| \\ &\leq p\,(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}\,|v(x)|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega f_t \, dx \leq p \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}\,|v(x)| \leq p \left(\int_\Omega [|u(x)| + |v(x)|]^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_p < \infty.$$

Assim, (f_t) é uma sequência de funções integráveis. Juntando a isso o fato de que $f_t = p\,|u + \lambda t v|^{p-1}\, v \to p|u|^{p-1} v$ e que

$$\left| f_t \right| \leq p\,(|u| + |v|)^{p-1}\,|v| \in L^1(\Omega),$$

segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega f_t \, dx = \int_\Omega p|u|^{p-2} u v \, dx := J'(u)v.$$

(ii) *Continuidade da Derivada de Gateaux.*

Suponha que $u_n \to u \in L^p(\Omega)$. Então, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω (a menos de subsequência). Além disso, sabemos que existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|u(x)|,\ |u_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \ \text{(a menos de subsequência).}$$

Queremos mostrar que $J'(u_n) \to J'(u)$. Para isso, defina $f(u) := p|u|^{p-2}u$. Então,

$$|f(u)|^{\frac{p}{p-1}} = p^{\frac{p}{p-1}}|u|^p \in L^1(\Omega).$$

Logo, $f(u) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, e então,

$$\begin{aligned}
\left|f(u_n) - f(u)\right|^{\frac{p}{p-1}} &= p^{\frac{p}{p-1}}\left||u_n|^{p-1} - |u|^{p-1}\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq p^{\frac{p}{p-1}}\left(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}} p^{\frac{p}{p-1}}\left(|u_n|^p + |u|^p\right) \\
&\leq 2^{\frac{p}{p-1}+1} p^{\frac{p}{p-1}}|g|^p \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos que

$$f(u_n) \to f(u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Daí, dada $v \in L^p(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder, encontramos

$$\left|J'(u_n)v - J'(u)v\right| \leq \int_\Omega \left|f(u_n) - f(u)\right||v|dx \leq \|f(u_n) - f(u)\|_r \|v\|_p.$$

E então,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| = \sup_{\|v\|_p = 1}\left|J'(u_n)v - J'(u)v\right| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

O próximo Lema permitirá uma extensão do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para espaços de dimensão infinita, o qual será utilizado em larga escala nos casos em que já tivermos a confirmação de que o ínfimo do funcional em estudo é atingido.

Lema 1.24. *Sejam F, $G : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe C^1, sendo X Banach. Se, para $x_0 \in X$, existirem $v, w \in X$ tais que*

$$F'(x_0)v\ G'(x_0)w \neq F'(x_0)w\ G'(x_0)v,$$

então F não tem extremo local em x_0, quando restrita a $C = \{x \in X\ ;\ G(x) = G(x_0)\}$.

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(s,t) = (f_1(s,t), f_2(s,t))$, sendo f_1 e f_2 definidas por

$$\begin{cases} f_1(s,t) = F(x_0 + sw + tv) \\ f_2(s,t) = G(x_0 + sw + tv). \end{cases}$$

Então, pela definição de derivada parcial e derivada de Gateaux, obtemos

$$\left|Df(0,0)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial t}(0,0) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial s}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial t}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'(x_0)w & F'(x_0)v \\ G'(x_0)w & G'(x_0)v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Como f é de classe C^1 e o Jacobiano de f no ponto $(0,0)$ é diferente de zero, segue do Teorema da aplicação inversa que f é localmente injetora e, portanto, x_0 não pode ser extremo local de F.

□

Teorema 1.25 (Multiplicador de Lagrange)**.** *Suponha F, $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e X um espaço de Banach. Se para $x_0 \in X$ tivermos $G(x_0) = 0$ e x_0 extremo local da F quando restrita a $C = \{x \in X \ ; \ G(x) = 0\}$, então*

(i) $G'(x_0) = 0$ *ou*

(ii) $\exists\ \mu \in \mathbb{R}$ *tal que* $F'(x_0)v = \mu\, G'(x_0)v,\ \forall\ v \in X.$

Demonstração. Suponha que $G'(x_0) \neq 0$. Então, $\exists\ w \in X$ tal que $G'(x_0)w \neq 0$. Como x_0 é extremo para F, pelo lema anterior, temos

$$G'(x_0)w\,F'(x_0)v = G'(x_0)v\,F'(x_0)w,\ \forall\ v \in X.$$

Logo, basta tomar $\mu = \dfrac{F'(x_0)w}{G'(x_0)w}$. □

Definição 1.26. *Sejam $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional e X um espaço de Banach. Dizemos que J é fracamente semicontínuo inferiormente se para toda sequência $(u_n) \subset X$, com $u_n \rightharpoonup u$, tivermos $J(u) \leq \liminf J(u_n)$.*

Teorema 1.27. *Seja $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e limitada inferiormente. Suponha, ainda, que L satisfaça*

$$\left|L(y,z,x)\right| \leq C\left(1 + |y|^p + |z|^p\right), \quad \forall\ (y,z,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$$

e que a função $y \mapsto L(y,z,x)$ seja convexa, $\forall\ (z,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$. Então,

$$J(w) = \int_\Omega L(\nabla w, w, x)\,dx$$

é fracamente semicontínuo inferiormente em $W^{1,p}(\Omega)$, sendo $1 < p < \infty$.

Demonstração. Ver página 446 de [Eva09]. □

Como veremos, quando aplicarmos o método variacional para alguns problemas, o fato dos espaços envolvidos estarem imersos compactamente facilitará a busca por um minimizante do funcional em estudo. No entanto, em outros problemas, pode ser que não tenhamos tal informação, como, por exemplo, no Teorema (2.10). Nesses casos, uma das formas de contornar a situação é aplicar o *Teorema da concentração de compacidade*. Antes de enunciarmos tal resultado, precisamos definir a *Constante Ótima de Sobolev* e entender um pouco sobre limitação e convergência de sequências de medidas.

Primeiramente, definiremos a *Desigualdade Ótima de Sobolev*. Tal desigualdade, aplicada junto ao método variacional, nos auxiliará na prova da existência de solução do problema (3). Essa desigualdade foi estudada de modo independente por Aubin [Aub76b] e Talenti [Tal76], em 1976. No entanto, ela também pode ser obtida, como um caso particular, da *Desigualdade Ótima de Gagliardo-Nirenberg*, estabelecida por Del Pino e Dolbeault [DPD03] no ano de 2003.

Definição 1.28. *Seja $\mathscr{A}(p,n)$ a menor constante tal que a desigualdade*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.14}$$

seja satisfeita para toda função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Tal constante é chamada de Constante Ótima de Sobolev e a desigualdade (1.14) é denominada de Desigualdade Ótima de Sobolev.

A igualdade na definição anterior ocorre se considerarmos funções da forma

$$u_0(x) = \alpha\omega\left(\beta(x - x_0)\right),$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sendo

$$\omega(x) = \left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-n}{p}}.$$

As funções u_0 são chamadas de *Funções extremais* para a desigualdade ótima de Sobolev. A originalidade na prova da existência de solução do problema (3), caso $p = 2$, do trabalho [BN83] de Brezis-Nirenberg, foi a utilização da função extremal para mostrar que o funcional energia associado à equação em (3), fica abaixo de um certo nível crítico. Este passo foi crucial para a prova da existência de solução.

Agora, considere o espaço

$$B(\Omega;\mathbb{R}) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ u \text{ é contínua e limitada em } \Omega\},$$

e o subespaço

$$K(\Omega) := \left\{ u \in B(\Omega;\mathbb{R})\,;\ \operatorname{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacto} \right\}.$$

Defina $\mathscr{C}_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$. Assim, dada uma medida finita μ em Ω, defina o funcional linear contínuo $T : \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$T(u) := \langle \mu, u \rangle = \int_\Omega u(x)\,d\mu.$$

Finalmente, definamos a norma de uma medida. Para isso, seja $\mathscr{M}(\Omega)$ o espaço vetorial das medidas finitas definidas sobre Ω. Assim, defina

$$\|\mu\| = \sup_{u \in \mathscr{C}_0(\Omega)} \frac{\left|\langle \mu, u \rangle\right|}{\|u\|_\infty},$$

sendo $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x)|$.

Definição 1.29 (Convergência fraca de medidas)**.** *Dizemos que uma sequência de medidas* $(\mu_n) \subset \mathscr{M}(\Omega)$ *converge fracamente para a medida* $\mu \in \mathscr{M}(\Omega)$*, e denotaremos por* $\mu_n \rightharpoonup \mu$*, quando*

$$\langle \mu_n, u \rangle \to \langle \mu, u \rangle,$$

para toda $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$*.*

Exemplo 1.30 (Convergência de medida com presença de átomo)**.**

Considere $h \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ e a função teste definida sobre $\mathbb{R}$

$$\delta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 \quad \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Defina a sequência de medidas $\mu_n = \delta_n dx$, sendo

$$\delta_n(x) = \frac{n\delta(nx)}{K}, \quad \text{com} \quad K = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx.$$

Note que $\operatorname{supp}(\delta_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}\,;\ |x| \leq \dfrac{1}{n} \right\}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} h\delta_n\,dx = \frac{n}{K} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(x)\delta(nx)\,dx = \frac{1}{K} \int_{-1}^{1} h\left(\frac{y}{n}\right)\delta(y)\,dy.$$

Então, tomando o limite na igualdade acima e aplicando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h\delta_n dx = \frac{1}{K}\int_{-1}^{1} h(0)\delta(y)dy = h(0).$$

Seja

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \in E \\ 0 \text{ se } 0 \notin E, \end{cases}$$

sendo E mensurável a Lebesgue. Então,

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} h(x)d\delta_0.$$

Chamando $\delta_0 := \mu$, segue que $\mu_n \rightharpoonup \mu$. A medida δ_0 é chamada de *medida atômica*.

Teorema 1.31. *Toda sequência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$ possui subsequência fracamente convergente em $\mathcal{M}(\Omega)$. Além disso, se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{M}(\Omega)$, então (μ_n) é limitada e*

$$\|\mu\| \le \liminf \|\mu_n\|.$$

Observação 1.32. Considere uma sequência (u_n) limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e defina a medida $\nu_n = |u_n|^{p^*}dx$, isto é,

$$\nu_n(E) = \int_E |u_n|^{p^*}dx.$$

Afirmamos que tal sequência de medidas é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. De fato, basta notarmos que

$$\|\nu_n\| = \sup_{u\in\mathscr{C}_0(\Omega)} \frac{|\langle \nu_n, u\rangle|}{\|u\|_\infty} \le \int_\Omega |u_n|^{p^*}dx = \|u_n\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} < C,$$

para alguma constante C. De forma completamente análoga, se definirmos $\mu_n = |\nabla u_n|^p dx$, concluiremos que (μ_n) é limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$.

Com as definições e resultados anteriores, estamos em condições de provar o seguinte resultado, conhecido como o Teorema da Concentração de Compacidade.

Teorema 1.33 (Concentração de Compacidade)**.** *Seja* $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ *uma sequência tal que* $u_n \rightharpoonup u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *e defina as seguintes sequências de medidas*

$$\nu_n = |u_n|^{p^*} dx \quad e \quad \mu_n = |\nabla u_n|^p dx.$$

Suponha que $\nu_n \rightharpoonup \nu$ *e* $\mu_n \rightharpoonup \mu$*, sendo* ν *e* μ *medidas limitadas em* Ω*. Então, existe um conjunto no máximo enumerável* $\mathfrak{J}$*, uma família de pontos* $\{x_j\ ;\ j \in \mathfrak{J}\} \subset \overline{\Omega}$*, uma família de números positivos* $\{\nu_j\ ;\ j \in \mathfrak{J}\}$ *e uma família de números positivos* $\{\mu_j\ ;\ j \in \mathfrak{J}\}$ *tais que*

(i) $\nu = |u|^{p^*} dx + \sum_{j \in \mathfrak{J}} \nu_j \delta_{x_j}$*;*

(ii) $\mu \geq |\nabla u|^p dx + \sum_{j \in \mathfrak{J}} \mu_j \delta_{x_j}$*;*

(iii) $\mathscr{A}(p,n)^{-p} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_j$*,*

sendo $\mathscr{A}(p,n)$ *a constante ótima de Sobolev e* δ_{x_j} *a medida de Dirac, definida por*

$$\delta_{x_j}(E) = \begin{cases} 1 & se\ x_j \in E \\ 0 & se\ x_j \notin E, \end{cases}$$

a qual também é conhecida como medida atômica, sendo x_j *seus átomos.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos **(iii)**. Como $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$, segue que $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq C$. Usando o fato de que $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, temos que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega \quad \text{(a menos de subsequência).}$$

Agora, defina as sequências de medida

$$\omega_n := \nu_n - |u|^{p^*} dx \quad \text{e} \quad \lambda_n := |\nabla(u_n - u)|^p dx.$$

Note que podemos escrever

$$\omega_n = |u_n - u|^{p^*} dx + f_n,$$

sendo $f_n = |u_n|^{p^*} dx - |u|^{p^*} dx - |u_n - u|^{p^*} dx$. Então, pelo Teorema (1.7), temos que

$$\int_E f_n dx \longrightarrow 0,$$

para qualquer subconjunto $E \subset \Omega$ mensurável. Em relação à medida λ_n, se considerarmos $v_n := u_n - u$, como (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que (v_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, a sequência de medidas (λ_n) é limitada. E assim, do Teorema (1.31), segue que $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$, para alguma medida λ. Além disso, como v_n também é limitada em $L^{p^*}(\Omega)$, pela desigualdade de Sobolev, podemos garantir que $\omega_n \rightharpoonup \omega$, para alguma medida ω.

Afirmação: A medida ω pode ter, no máximo, um número enumerável de átomos. De fato, seja $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ o tal conjunto de átomos, sendo λ um conjunto indexador. Seja

$$\sum_\alpha \nu_\alpha = \omega\left(\bigcup_{\alpha\in\lambda}\{x_\alpha\}\right),$$

ou seja, o valor da medida ω sobre o conjunto dos átomos. Defina, para $k\in\mathbb{N}$, o conjunto

$$M_k = \left\{x_\alpha\ ;\ \nu_\alpha > \frac{1}{k}\right\}.$$

Uma vez que ω é finita, podemos afirmar que $\sum \nu_\alpha < \infty$, donde segue que M_k é finito. E assim, o conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ é enumerável, ou seja, o conjunto dos átomos é enumerável. Dessa forma, $\left\{x_j\ ;\ j\in\mathscr{J}\right\}$ denotará o conjunto de átomos da medida ω.

Agora, usando o Teorema da Decomposição de Lebesgue, podemos decompor ω da seguinte forma

$$\omega = \omega_0 + \sum_{j\in\mathscr{J}} \nu_j \delta_{x_j}, \quad \text{com} \quad \omega_0(E) = \begin{cases} \omega(E) \text{ se } E\subset\Omega\setminus\left\{x_j\ ;\ j\in\mathscr{J}\right\} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O próximo passo será comparar as medidas ω e λ. Assim, dada $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, temos que $\varphi v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. E então, da desigualdade ótima de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\varphi v_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq \mathscr{A}(p,n)^p\left(\int_\Omega \left|\nabla(\varphi v_n)\right|^p dx\right)\\
&= \mathscr{A}(p,n)^p\left(\int_\Omega \left|(\nabla\varphi)v_n + \varphi(\nabla v_n)\right|^p dx\right)\\
&\leq \mathscr{A}(p,n)^p\int_\Omega \left(\left|\varphi(\nabla v_n)\right|^p + C\left|\nabla v_n\varphi\right|^{p-1}\left|\nabla\varphi v_n\right| + C\left|\nabla\varphi v_n\right|^p\right)dx\\
&\leq \mathscr{A}(p,n)^p\int_\Omega \left|\varphi\nabla v_n\right|^p + C\left(\int_\Omega\left|\nabla v_n\varphi\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega\left|\nabla\varphi v_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad + C\int_\Omega |v_n|^p dx. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Acima, usamos a Proposição (1.14) e a desigualdade de Hölder, respectivamente. Como $|v_n|^{p^*}dx \rightharpoonup \omega$ e $|\nabla v_n|^p dx \rightharpoonup \lambda$, em particular, temos que

$$\int_\Omega |\varphi|^{p^*}|v_n|^{p^*}dx \to \int_\Omega |\varphi|^{p^*}dw \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\varphi|^p|\nabla v_n|^p dx \to \int_\Omega |\varphi|^p d\lambda.$$

Além disso, como $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, tomando o limite em n na desigualdade (1.15), obtemos

$$\left(\int_\Omega \varphi^{p^*}d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n)^p \int_\Omega |\varphi|^p d\lambda, \tag{1.16}$$

qualquer que seja $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. A idéia, a seguir, é particularizar a função φ. Para isso, considere um átomo x_j da medida ω. Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, com $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$, $\varphi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $\left[B_\varepsilon(x_j)\right]^c$. Logo, a desigualdade obtida acima fica

$$\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left[\varphi_\varepsilon\right]^{p^*}d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n)^p \int_{B_\varepsilon(x_j)} |\varphi_\varepsilon|^p d\lambda.$$

E, portanto,

$$\left(\int_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x_j)}\left[\varphi_\varepsilon\right]^{p^*}d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n)^p \int_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x_j)}|\varphi_\varepsilon|^p d\lambda.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\mathscr{A}(p,n)^{-p}\left[\nu_j\right]^{\frac{p}{p^*}} \leq \lambda\left(\left\{x_j\right\}\right). \tag{1.17}$$

Por outro lado, para toda $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi|\nabla v_n|^p dx &= \int_\Omega \phi|\nabla u_n - \nabla u|^p dx \leq \int_\Omega \phi\left(|\nabla u_n|^p + C|\nabla u_n|^{p-1}|\nabla u| + C|\nabla u|^p\right)dx \\
&\leq \int_\Omega \phi|\nabla u_n|^p + C\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \left|\phi\nabla u\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + C\int_\Omega \phi|\nabla u|^p \\
&\leq \int_\Omega \phi|\nabla u_n|^p dx + C\left(\int_\Omega |\phi|^p|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + C\int_\Omega \phi|\nabla u|^p dx.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Assim como fizemos anteriormente, fixe um átomo x_j de ω e considere $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ em $\left[B_\varepsilon(x_j)\right]^c$. Daí, como $|\nabla v_n|^p dx \rightharpoonup \lambda$ e $|\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \mu$, fazendo $\phi = \phi_\varepsilon$ na equação (1.18) e tomando o limite em n na desigualdade (1.18), obtemos

$$\int_\Omega \phi_\varepsilon d\lambda \leq \int_\Omega \phi_\varepsilon d\mu + C\left(\int_\Omega \left|\phi_\varepsilon\right|^p|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + C\int_\Omega \phi_\varepsilon|\nabla u|^p dx.$$

Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$, segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\lambda\left(\left\{x_j\right\}\right) \le \mu\left(\left\{x_j\right\}\right).$$

Assim, denotando $\mu\left(\left\{x_j\right\}\right) := \mu_j$, da desigualdade (1.17) obtemos

$$\mathscr{A}(p,n)^{-p}\left[\nu_j\right]^{\frac{p}{p^*}} \le \mu_j,$$

o que demonstra **(iii)**.

Provemos agora, a afirmação **(ii)**. Primeiramente, notemos que $\mu \ge |\nabla u|^p dx$. De fato, dada $0 \le \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, considere o funcional $f_\phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$f_\phi(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \phi\, dx.$$

Como $|\nabla u|^p$ é estritamente convexa e ϕ é positiva, segue que $|\nabla u|^p \phi$ é convexa. Além disso, f_ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente, uma vez que f_ϕ é contínuo. Logo, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\, d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi|\nabla u_n|^p dx = \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \phi\, dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} f_\phi(u_n) \ge f_\phi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \phi\, dx.\end{aligned}$$

Seja $E \subset \Omega$ um conjunto mensurável qualquer. Logo, $\chi_E \in L^p(\Omega)$, uma vez que Ω tem medida finita. Assim, como χ_E é uma função não-negativa e limitada, da teoria da medida sabemos da existência de uma sequência uniformemente limitada $0 \le \phi_n \le M$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \chi_E$ q.t.p. em Ω. Então, como vale

$$\int_\Omega \phi_n d\mu \ge \int_\Omega |\nabla u|^p \phi_n dx, \quad \text{para todo } n,$$

segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_\Omega \chi_E d\mu = \lim_n \int_\Omega \phi_n d\mu \ge \lim_n \int_\Omega |\nabla u|^p \phi_n dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^p \chi_E\, dx = \int_E |\nabla u|^p dx.\end{aligned}$$

Provamos assim que $\mu \geq |\nabla u|^p dx$. Juntando a isso, o fato de que as medidas $|\nabla u|^p dx$ e $\sum_j \mu_j \delta_{x_j}$ são mutuamente singulares, segue do Teorema da decomposição de Lebesgue que

$$\mu \geq |\nabla u|^p dx + \sum_j \mu_j \delta_{x_j},$$

o que demonstra **(ii)**.

Finalmente, vamos provar a afirmação **(i)**. Comecemos mostrando que $\omega_0 << \lambda$, ou seja, dado $E \subset \Omega$ tal que $\lambda(E) = 0$, então $\omega_0(E) = 0$. Antes, porém, notemos que é suficiente considerarmos $E \subset \Omega \setminus \left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\}$, uma vez que ω_0 é uma parte de ω que não apresenta átomos. Assim, tome $E \subset \Omega \setminus \left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\}$ tal que $\displaystyle\int_E d\lambda < \mathscr{A}(p,n)^{-p}$. Considerando, novamente, uma sequência uniformemente limitada $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \chi_E$ q.t.p. em Ω, de (1.16) obtemos

$$\left(\int_\Omega |\phi_n|^{p^*} d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n) \int_\Omega |\phi_n|^p d\lambda, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \to \infty$, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue garante que

$$\left(\int_E d\omega\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n) \int_E d\lambda < 1.$$

Portanto,

$$1 \geq \mathscr{A}(p,n) \int_E d\lambda \geq \int_E d\omega. \tag{1.19}$$

Seja $E \subset \Omega \setminus \left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\}$ tal que $\lambda(E) = \displaystyle\int_E d\lambda = 0$. Como a desigualdade (1.19) vale nesse caso também, segue que $\omega_0(E) = 0$, donde obtemos que $\omega_0 << \lambda$.

O próximo passo é provar que $\omega_0 = 0$. Antes, porém, note que isso já ocorre no conjunto $\left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\}$. Como $\omega_0 << \lambda$, pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe uma função f não-negativa e λ-integrável tal que

$$\omega_0(E) = \int_E f\, d\lambda, \quad \forall\ E \subset \Omega \setminus \left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\} \text{ mensurável.}$$

Em particular, para $E = \{y\}$, em que $y \in \Omega \setminus \left\{x_j\ ;\ j \in \mathscr{J}\right\}$, obtemos

$$0 = \omega_0\left(\{y\}\right) = \int_{\{y\}} f\, d\lambda = f(y)\lambda\left(\{y\}\right).$$

Como λ tem, eventualmente, mais átomos que ω, pode ocorrer de $\lambda\left(\{y\}\right)\neq 0$ e, nesse caso, $f(y)=0$. No entanto, se ocorrer de $\lambda\left(\{y\}\right)=0$, fazemos o seguinte: Pelo Teorema de Radon-Nikodym, sabemos que

$$f(y)=\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\omega_0}{\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\lambda}\right].$$

Daí, usando (1.16), obtemos

$$\mathscr{A}(p,n)\,f(y)^{\frac{p}{p^*}}=\mathscr{A}(p,n)\left(\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\omega_0}{\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\lambda}\right]\right)^{\frac{p}{p^*}}\leq\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\lambda}{\left(\displaystyle\int_{B_\rho(y)} d\lambda\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right].$$

Assim,

$$\mathscr{A}(p,n)\,f(y)^{\frac{p}{p^*}}\leq\lim_{\rho\to 0}\left(\int_{B_\rho(y)} d\lambda\right)^{\frac{p^*-p}{p^*}}=0.$$

Portanto, $f(y)=0$ para quase todo $y\in\Omega\setminus\left\{x_j\,;\,j\in\mathscr{J}\right\}$, com respeito à medida λ. Logo, como $\omega_0(E)=\int_E f\,d\lambda$, segue que $\omega_0=0$. E assim, temos que ω contém apenas átomos. Por outro lado, como sabemos que $\omega_n:=\nu_n-|u|^{p^*}dx\rightharpoonup\omega$ e $\nu_n\rightharpoonup\nu$, então $\omega=\nu-|u|^{p^*}dx$. E, como decompusemos a medida ω em $\omega=\omega_0+\displaystyle\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j\delta_{x_j}$, temos que

$$\nu=|u|^{p^*}dx+\sum_{j\in\mathscr{J}}\nu_j\delta_{x_j}.$$

Concluímos assim, a demonstração do Teorema da concentração de compacidade.

□

Capítulo 2

O Operador Laplaciano - Caso Clássico

Ao longo deste capítulo, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado, com $0 \in \Omega$ e com fronteira $\partial\Omega \in C^\infty$. Além disso, $n \geq 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Iremos estudar a existência de solução do problema (3) no caso em que $p = 2$. A saber,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1} \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nosso interesse é investigar para quais valores de λ o problema acima possui solução. Esta análise dependerá do primeiro autovalor do Laplaciano, cuja existência é garantida pelo lema seguinte.

Lema 2.1. *Seja $n \geq 3$. Então, existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 \, ; \, \|u\|_2 = 1 \right\} = \|\nabla u_1\|_2^2. \tag{2.2}$$

Além disso, $u_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e satisfaz

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1. \tag{2.3}$$

Demonstração. Defina os funcionais $J, G : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad G(u) := \int_\Omega u^2 dx,$$

e o conjunto $\mathscr{H} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \, ; \, \|u\|_2 = 1 \right\}$. Note que os funcionais J e G estão bem definidos e além disso, J e G são de classe $C^1(\Omega)$.

A idéia para provarmos (2.2) é usar o Teorema da imersão compacta aplicado em uma sequência minimizante. Em seguida, usaremos (2.2) e o Teorema do multiplicador de Lagrange para provar (2.3). Assim, considere

$$\mu := \inf_{u\in\mathscr{H}} \{J(u)\}.$$

Note que faz sentido tal definição, uma vez que $J(u) \geq 0$. Pela definição de ínfimo, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathscr{H}$ tal que $J(u_n) \to \mu$. Como as normas $\|\,.\,\|_{H_0^1}$ e $\|\nabla\,.\,\|_2$ são equivalentes, segundo o Teorema (1.6), temos que

$$J(u_n) = \|\nabla u_n\|_2^2 = \|u_n\|_{H_0^1}^2,$$

e assim, segue que $(u_n) \subset H_0^1$ é limitada. Por sua vez, sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, então existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_1$ (a menos de subsequência). Mas, como $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, segue da definição de imersão compacta que $u_n \to u_2$ em $L^2(\Omega)$ (a menos de subsequência), para alguma função $u_2 \in L^2(\Omega)$. Mostremos que $u_1 = u_2$ q.t.p. em Ω. De fato, tomemos $\varphi \in L^2(\Omega)^*$. Pela desigualdade de Poincaré, temos, para toda $u \in L^2(\Omega)$,

$$\Big|\varphi(u)\Big| \leq C\|u\|_2 \leq \overline{C}\|\nabla u\|_2 \leq \overline{C}\|u\|_{H_0^1}.$$

Logo, $\varphi \in H_0^1(\Omega)^*$. Assim, temos que

$$u_n \rightharpoonup u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u_n) \to \varphi(u_1),$$

pela definição de convergência fraca. Além disso,

$$u_n \to u_2 \text{ em } L^2(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u_n) \to \varphi(u_2).$$

E assim, temos que $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$, $\forall\ \varphi \in L^2(\Omega)^*$. Usando o Teorema de Banach obtemos

$$\|u_1 - u_2\|_2 = \sup_{\substack{\varphi\in L^2(\Omega)^* \\ \|\varphi\|=1}} \Big|\varphi(u_1 - u_2)\Big| = 0.$$

Portanto, $u_1 = u_2$ q.t.p. em Ω.

Agora, como $u_n \to u_1$ em $L^2(\Omega)$, então $\|u_n\|_2 \to \|u_1\|_2$. No entanto, como $\|u_n\|_2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $u_1 \in \mathscr{H}$. Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u_1$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que $\|u_1\|_{H_0^1} \leq \liminf \|u_n\|_{H_0^1}$. Assim,

$$\mu \leq J(u_1) \leq \|u_1\|_{H_0^1}^2 \leq \Big(\liminf \|u_n\|_{H_0^1}\Big)^2 = \Big(\liminf J(u_n)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 = \mu. \tag{2.4}$$

Logo $J(u_1) = \mu$ e isto prova (2.2). Para provarmos (2.3) iremos usar o Teorema do multiplicador de Lagrange, uma vez que u_1 é um ponto crítico restrito a $\mathscr{H}$. Assim, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_1)v = k\, G'(u_1)v,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v\, dx = k \int_\Omega u_1 v\, dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Fazendo $v = u_1$ na equação acima, encontramos $k = \|\nabla u_1\|_2^2 = \lambda_1$. Assim, resolvemos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 & \text{em} \quad \Omega \\ u_1 = 0 \quad \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. Agora, chamando $f = \lambda_1 u_1$, temos que $f \in H_0^1(\Omega)$, uma vez que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Como $\partial\Omega \in C^\infty$, dos resultados clássicos de regularidade (ver Teorema 5, página 323, de [Eva09]), temos que $u_1 \in H^3(\Omega)$. Por sua vez, $f \in H^3(\Omega)$ o que implica, pelo mesmo Teorema, que $u_1 \in H^5(\Omega)$. Aplicando o Teorema recursivamente, concluímos que $u_1 \in H^l(\Omega)\ \forall\ l$. Segue da desigualdade geral de Sobolev que $u_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Agora, como

$$\operatorname{div}(\nabla u_1 v) = \Delta u_1 v + \nabla u_1 \nabla v,$$

integrando tal igualdade sobre Ω, substituindo na equação (2.5) e fazendo uso do Teorema do divergente, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u_1 v\, dx = -\int_\Omega \Delta u_1 v\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u_1 v) = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v\, dx,$$

uma vez que $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\int_\Omega (-\Delta u_1 - \lambda_1 u_1) v\, dx = 0,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$ em Ω.

□

Observação 2.2. A autofunção u_1 pode ser tomada positiva. De fato, como $\nabla|u_1| = \pm\nabla u_1$, segue de (2.4) que $J(|u_1|) = \mu$. Deste modo podemos substituir u_1 por $|u_1|$ e assim podemos supor $u_1 \geq 0$. Usando o princípio do máximo clássico, vemos que $u_1 > 0$ em Ω.

Lema 2.3 (Identidade de Pohozaev)**.** *Sejam $n \geq 3$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ solução de (2.1). Então, a função u satisfaz a igualdade*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x)\, ds = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx,$$

sendo $\nu(x)$ o vetor normal à $\partial\Omega$ em x.

Demonstração. Como u satisfaz $-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}$, multiplicando tal igualdade por $\nabla u \cdot x$ e integrando, obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \nabla u \cdot x dx = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x dx + \lambda \int_{\Omega} u \nabla u \cdot x dx. \tag{2.6}$$

Sabemos que $\operatorname{div}(\nabla u \cdot x \nabla u) = \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u + (\nabla u \cdot x)\Delta u$. Assim, do Teorema do divergente, segue que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot x)\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)\nabla u \cdot \nu(x) ds - \int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u dx. \tag{2.7}$$

Igualando as expressões (2.6) e (2.7), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u \cdot x)\nabla u dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)\nabla u \cdot \nu(x) ds = \int_{\Omega} u^{2^*-1} \nabla u \cdot x dx + \lambda \int_{\Omega} u \nabla u \cdot x dx \tag{2.8}$$

Considere a função $\gamma : [-1,1] \to \partial\Omega$ de classe C^1, com $\gamma(0) = x$. Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $u\left(\gamma(t)\right) = 0 \ \forall\ t$. Assim, $u\left(\gamma(t)\right)' = \nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ e então $\nabla u(x) \cdot \gamma'(0) = 0$. Portanto, $\nabla u(x)$ é perpendicular ao espaço tangente $T_x \partial\Omega$. Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla u(x) = \alpha \nu(x)$. Entretanto, sendo ν unitário, segue que $\nabla u(x) = \pm |\nabla u(x)|\, \nu(x)$ e assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot x)\nabla u \cdot \nu(x) ds &= \int_{\partial\Omega} (\pm|\nabla u(x)|)\, (\nu(x) \cdot x)(\pm|\nabla u(x)|\, \nu(x) \cdot \nu(x))\, ds \\ &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \nu(x) ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\nabla(\nabla u\cdot x)\nabla u &= \nabla\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\nabla u\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_{1,i}\frac{\partial u}{\partial x_i}+x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_i}\right],\cdots,\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_{n,i}\frac{\partial u}{\partial x_i}+x_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_i}\right]\right)\cdot\nabla u\\
&= |\nabla u|^2+x_1\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_1}\right)+\cdots+x_n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_n}\right)\\
&= |\nabla u|^2+x_1\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)_{x_1}+\cdots+x_n\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)_{x_n}\\
&= |\nabla u|^2+\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)_{x_j}\\
&= |\nabla u|^2+\frac{1}{2}\nabla(|\nabla u|^2)x.
\end{aligned}
$$

Integrando tal igualdade e usando o fato de que div $\left(|\nabla u|^2x\right)=\nabla(|\nabla u|^2)\cdot x+|\nabla u|^2n$, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\nabla u\cdot x)\nabla u\,dx &= \int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2x\cdot\nu(x)ds-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2n\,dx\\
&= \left(1-\frac{n}{2}\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2x\cdot\nu(x)ds. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.10) e (2.9) em (2.8), encontramos

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2x\cdot\nu\,ds &= \int_\Omega u^{2^*-1}\nabla u\cdot x\,dx+\lambda\int_\Omega u\nabla u\cdot x\,dx\\
&= \frac{1}{2^*}\int_\Omega\nabla\left(u^{2^*}\right)\cdot x+\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\nabla\left(u^2\right)\cdot x. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Porém, div $\left(u^{2^*}x\right)=\nabla\left(u^{2^*}\right)\cdot x+u^{2^*}n$. Logo, pelo Teorema do divergente, obtemos

$$\int_\Omega\nabla(u^{2^*})\cdot x\,dx=-n\int_\Omega u^{2^*}dx, \qquad (2.12)$$

já que u se anula na fronteira. Analogamente, como div $(u^2\cdot x)=\nabla(u^2)\cdot x+u^2n$, segue que

$$\int_\Omega\nabla(u^2)\cdot x\,dx=-n\int_\Omega u^2dx. \qquad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.12) e (2.13) na equação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\cdot \nu(x) ds &= \frac{1}{2^*}\int_\Omega \nabla(u^{2^*})\cdot x dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \nabla(u^2)\cdot x dx \\ &= -\frac{n}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{n\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Como u satisfaz $-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1}$, multiplicando tal igualdade por u, obtemos

$$-\Delta u u = u^{2^*} + \lambda u^2.$$

Porém, $\operatorname{div}(\nabla u u) = \Delta u u + \nabla u \nabla u$, portanto

$$-\int_\Omega \Delta u u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega u^{2^*} dx + \lambda\int_\Omega u^2 dx.$$

Daí, substituindo tal igualdade em (2.14), obtemos

$$\left(1-\frac{n}{2}\right)\left[\int_\Omega u^{2^*} dx + \lambda\int_\Omega u^2 dx\right] - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\cdot\nu(x) ds = -\frac{n}{2^*}\int_\Omega u^{2^*} dx - \frac{n\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx.$$

Como $1-\frac{n}{2} = -\frac{n}{2^*}$, segue a igualdade almejada, isto é,

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\cdot\nu(x)\, ds = \lambda\int_\Omega u^2 dx.$$

□

A partir de agora passaremos a estudar o problema (2.1). Usando a identidade de Pohozaev e o primeiro autovalor λ_1 iremos mostrar que não existe solução para (2.1) quando $\lambda \le 0$ ou $\lambda \ge \lambda_1$.

Teorema 2.4. *Suponha $n \ge 3$. Então:*

(1) *Se $\lambda \le 0$ e Ω é estrelado com respeito à origem de $\mathbb{R}^n$, o problema (2.1) não possui solução;*

(2) *Se $\lambda \ge \lambda_1$, o problema (2.1) não possui solução.*

Demonstração. Prova de (1). Suponha por contradição que exista u solução de (2.1). Segue da teoria clássica que qualquer solução de (2.1) é de classe $C^2(\overline{\Omega})$.

Sabemos que u satisfaz a Identidade de Pohozaev

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x\cdot\nu(x)\, ds = \lambda\int_\Omega u^2 dx.$$

Note que o lado direito desta igualdade é não-positiva. Por outro lado, como Ω é estrelado e $0\in \operatorname{int}\Omega$, segue que existe $\Omega'\subset\partial\Omega$ tal que $|\Omega'|>0$ e

$$x\cdot\nu(x)>0,\ \forall\ x\in\Omega'.$$

Segue do *Lema de Hopf* que $\nabla u(x)\neq 0,\ \forall\ x\in\partial\Omega$. Logo,

$$0\geq\lambda\int_\Omega u^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2 x\cdot\nu(x) ds>0,$$

o que claramente é um absurdo.

Prova de (2). Suponha que $\lambda>0$ e seja u solução de (2.1). Então,

$$\int_\Omega u^{2^*-1} v\, dx + \lambda\int_\Omega u v\, dx = -\int_\Omega v\Delta u\, dx, \quad \forall\ v\in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $v=u_1$ (sendo u_1 a autofunção associada ao autovalor λ_1), temos

$$\int_\Omega u^{2^*-1}u_1 dx+\lambda\int_\Omega u u_1 dx = -\int_\Omega u_1\Delta u\, dx.$$

Como $\operatorname{div}(\nabla u\, u_1) = \Delta u\, u_1 + \nabla u\nabla u_1$, segue que

$$\int_\Omega \nabla u\nabla u_1 dx = -\int_\Omega \Delta u\, u_1 dx.$$

Usando esta igualdade na anterior, obtemos

$$\int_\Omega u^{2^*-1}u_1 dx+\lambda\int_\Omega u u_1 dx = \int_\Omega \nabla u\nabla u_1 dx. \tag{2.15}$$

Por outro lado, u_1 satisfaz $-\Delta u_1=\lambda_1 u_1$, então

$$\lambda_1\int_\Omega u u_1 dx = -\int_\Omega \Delta u_1 u\, dx.$$

Usando o mesmo raciocínio anterior, obtemos

$$\lambda_1\int_\Omega u u_1 dx = \int_\Omega \nabla u\nabla u_1 dx.$$

Substituindo esta igualdade em (2.15) ficamos com

$$\lambda_1 \int_\Omega u u_1 dx = \int_\Omega u^{2^*-1} u_1 dx + \lambda \int_\Omega u u_1 dx.$$

Como $u, u_1 > 0$ em Ω, obtemos

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega u u_1 dx > 0,$$

de onde segue que $\lambda_1 > \lambda$.

$\square$

Observação 2.5. Considere $n = 3$, $\Omega = B_1(0)$ e o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{em} \quad B_1(0) \\ u = 0 \quad \text{sobre} \ \partial B_1(0). \end{cases} \tag{2.16}$$

Pelo Teorema 2 da página 521 de [Eva09], temos que soluções deste tipo de problema são radiais. Logo, podemos considerar $u(x) = v(r)$, com $r = |x|$. Então, podemos reescrever o problema (2.16) da seguinte forma

$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{2}{r} v' = \lambda v, \quad r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases}$$

Neste caso, $\lambda_1 = \pi^2$ é o primeiro autovalor.

Podemos observar a influência da dimensão na não existência de solução para o problema (2.1) no seguinte Teorema.

Teorema 2.6. *Sejam $n = 3$, $\Omega = B_1(0)$ e $\lambda \le \dfrac{\lambda_1}{4}$. Então, o problema (2.1) não tem solução.*

Demonstração. Como para $\lambda \le 0$ já sabemos que o problema em questão não tem solução, vamos considerar $0 < \lambda \le \dfrac{\lambda_1}{4}$. Suponha por contradição que u seja solução de (2.1). Aplicando o mesmo resultado que foi utilizado na observação (2.5), temos que u é radial, isto é, $u(x) = v(r)$, com $r = |x|$. Como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v'(r)}{r} x_i \right) = \frac{v'(r)}{r} + x_i \left[v''(r) \frac{x_i}{r^2} - \frac{v'(r)}{r^2} \frac{x_i}{r} \right],$$

podemos reescrever o problema (2.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} -v'' - \dfrac{2}{r}v' = v^5 + \lambda v, \quad r \in (0,1) \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Seja $\psi \in C^\infty(0,1)$, com $\psi(0) = 0$. Como

$$\left(r^2\psi(v')^2\right)' = 2r\psi(v')^2 + r^2\psi'(v')^2 + 2r^2\psi v'v'',$$

segue que

$$2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr + 2\int_0^1 r^2\psi v'v'' dr = \psi(1)(v'(1))^2. \tag{2.18}$$

Agora, multiplicando a equação em (2.17) por $-2r^2\psi v'$ e integrando, obtemos

$$2\int_0^1 r^2\psi v'v'' dr = -2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr - 2\lambda\int_0^1 r^2\psi v'v\,dr - 4\int_0^1 r(v')^2\psi\,dr.$$

Substituindo o resultado na equação (2.18), ficamos com

$$\begin{aligned} \psi(1)(v'(1))^2 &= 2\int_0^1 r\psi(v')^2 dr + \int_0^1 r^2\psi'(v')^2 dr - 2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr \\ &- 2\lambda\int_0^1 r^2\psi v'v\,dr - 4\int_0^1 r(v')^2\psi\,dr. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Iremos manipular um pouco mais as integrais acima. Por um lado, usando a definição da função ψ,

$$0 = -\frac{1}{3}\int_0^1 \left(r^2\psi v^6\right)' = -\frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6 - \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6 - 2\int_0^1 r^2\psi v^5 v',$$

e assim,

$$-2\int_0^1 r^2\psi v'v^5 dr = \frac{2}{3}\int_0^1 r\psi v^6 dr + \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\psi' v^6 dr. \tag{2.20}$$

Por outro lado,

$$0 = -\lambda\int_0^1 \left(r^2\psi v^2\right)' = -\lambda\left[2\int_0^1 r\psi v^2 + \int_0^1 r^2\psi' v^2 + 2\int_0^1 r^2\psi v v'\right],$$

e então,

$$-2\lambda\int_0^1 r^2\psi v v' dr = 2\lambda\int_0^1 r\psi v^2 dr + \lambda\int_0^1 r^2\psi' v^2 dr. \tag{2.21}$$

Assim, substituindo as igualdades (2.20) e (2.21) em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 (v')^2\left[\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right] dr - \frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2} &= -\frac{1}{6}\int_0^1 v^6\left(2r\psi + r^2\psi'\right) dr \\ &- \frac{1}{2}\lambda\int_0^1 v^2\left(2r\psi + r^2\psi'\right) dr. \end{aligned}\tag{2.22}$$

Por outro lado, vejamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) v v'\right]' dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^2\psi'' v v' - \int_0^1 \psi v v' \\ &+ \int_0^1 (v')^2\left(\frac{r^2\psi'}{2} - r\psi\right) + \int_0^1 v v''\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right). \end{aligned}\tag{2.23}$$

Porém,

$$\int_0^1 r^2 v v'\psi'' dr = -\int_0^1 r v^2\psi'' - \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 v^2\psi''' dr. \tag{2.24}$$

Além disso, pelo Teorema fundamental do cálculo, obtemos ainda os seguintes resultados

$$\int_0^1 r v^2\psi'' dr = -\int_0^1 v^2\psi' dr - 2\int_0^1 r v v'\psi' dr, \tag{2.25}$$

e

$$\int_0^1 v^2\psi' dr = -2\int_0^1 v v'\psi dr. \tag{2.26}$$

Agora, multiplicando a equação em (2.17) por $\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) v$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 v v''\left(r\psi - \frac{1}{2}r^2\psi'\right) + \int_0^1 v v'(-r\psi' + 2\psi) &= \int_0^1 v^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right) \\ &+ \int_0^1 v^2\left(\frac{\lambda}{2}r^2\psi' - \lambda r\psi\right). \end{aligned}\tag{2.27}$$

Assim, substituindo as igualdades (2.24), (2.25) e (2.27) em (2.23), e considerando a igualdade (2.26), obtemos

$$\int_0^1 (v')^2\left(\frac{r^2\psi'}{2}-r\psi\right)-\frac{1}{4}\int_0^1 r^2v^2\psi''' = \int_0^1 v^6\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right)+\lambda\int_0^1 v^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi'-r\psi\right). \tag{2.28}$$

Finalmente, combinando as igualdades (2.22) e (2.28), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2} &= \int_0^1 (v')^2\left[\frac{r^2\psi'}{2}-r\psi\right]+\frac{1}{6}\int_0^1 v^6(2r\psi+r^2\psi')+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 v^2(2r\psi+r^2\psi')\\ &= \int_0^1 \frac{v^2r^2\psi'''}{4}dr+\int_0^1 \lambda v^2r^2\psi' dr+\frac{2}{3}\int_0^1 v^6(r^2\psi'-r\psi).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\psi(1)(v'(1))^2}{2}+\frac{2}{3}\int_0^1 v^6(r\psi-r^2\psi')dr = \int_0^1\left(\frac{1}{4}\psi'''+\lambda\psi'\right)v^2r^2dr. \tag{2.29}$$

Note que a igualdade acima é válida para toda função $\psi\in C^\infty(0,1)$ tal que $\psi(0)=0$. Em particular, é válida para a função $\psi(r)=\operatorname{sen}\left((4\lambda)^{1/2}\right)$. Além disso, da observação (2.5), sabemos que $\lambda_1=\pi^2$. Assim, como $0<\lambda\le\dfrac{\pi^2}{4}$, temos que $0<(4\lambda)^{1/2}\le\pi$, donde segue que $\psi(1)=\operatorname{sen}\left((4\lambda)^{1/2}\right)\ge 0$. Deste modo

$$\frac{\psi'''}{4}+\lambda\psi'=0 \quad \text{e} \quad \psi(1)\ge 0.$$

Com esta análise, concluímos de (2.29) que

$$\int_0^1 v^6(r\psi-r^2\psi')dr\le 0. \tag{2.30}$$

No entanto, como

$$r\psi-r^2\psi' = r\left[\operatorname{sen}\left((4\lambda)^{1/2}r\right)-r(4\lambda)^{1/2}\cos\left((4\lambda)^{1/2}r\right)\right]>0,$$

para $0<r<1$, temos que

$$\int_0^1 v^6(r\psi-r^2\psi')dr>0,$$

o que é um absurdo com (2.30). Portanto, o problema (2.1) não tem solução nesse caso.

□

Os próximos resultados serão cruciais para a prova da existência de solução do problema

(2.1). Para analisarmos o caso em que $0 < \lambda < \lambda_1$, precisamos fazer a seguinte definição:

$$S_\lambda := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \, ; \, \|u\|_{2^*} = 1 \right\}.$$

Observação 2.7. Note que S_λ está bem definida. De fato, como $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \dfrac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}$, segue que

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq \lambda_1 \|u\|_2^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Daí, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \geq (\lambda_1 - \lambda)\|u\|_2^2 \geq 0.$$

Também iremos considerar a *Desigualdade Ótima de Sobolev*:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \mathscr{A}(2,n) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 2.8. *Sejam $n \geq 4$ e $\lambda > 0$. Então $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$.*

Demonstração. Defina

$$Q_\lambda(u) := \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \tag{2.31}$$

Sejam $\delta > 0$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| > 2\delta \\ 1 \text{ se } |x| < \delta, \end{cases}$$

e considere a função

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\varphi(x)}{\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

A idéia da demonstração é avaliar o quociente $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno.

(i) *Análise de* $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$.

Primeiramente, como

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\varepsilon + |x|^2\right)^{-\frac{n-2}{2}} - (n-2)\varphi x_i \left(\varepsilon + |x|^2\right)^{-\frac{n}{2}},$$

segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 = (n-2)^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} + 2(2-n)\int_\Omega \varphi\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{1-n} x\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \left|\nabla\varphi\right|^2\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{2-n}. \tag{2.32}$$

Passaremos a estimar cada uma das integrais do lado direito dessa igualdade. Do Teorema de mudança de variáveis obtemos

$$\int_\Omega \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n}dx \le \int_\Omega \frac{|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n}dx = \varepsilon^{1-n}\int_\Omega \frac{\left|x\varepsilon^{-1/2}\right|^2}{\left(1+\left|x\varepsilon^{-1/2}\right|^2\right)^n}dx \le \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx.$$

Note que a função $x \mapsto \dfrac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}$ é integrável sobre todo o $\mathbb{R}^n$. De fato, como $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, existe $r_0 > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon \subset B_{r_0}(0)$. Daí,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx \le \int_{B_{r_0}(0)} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx.$$

Logo, pela fórmula da coárea, tem-se que

$$\int_{B_{r_0}(0)} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx = \int_0^{r_0}\left[\int_{S_r}\frac{r^2}{(1+r^2)^n}ds\right]dr,$$

sendo S_r a esfera em $\mathbb{R}^n$ de raio r. Considerando o volume $|S_1| = C$ e aplicando o Teorema de mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0}\left[\int_{S_r}\frac{r^2}{(1+r^2)^n}ds\right]dr &= C\int_0^{r_0}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr \le C\left[\int_0^{r_1}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n} + \int_{r_1}^{r_0}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}\right]\\ &= C\overline{C} + C\int_{r_1}^{r_0}\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^n}dr \le \widetilde{C} + C\int_{r_1}^{r_0} r^{1-n}dr.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{B_{r_0}(0)} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx \le \overline{C} + \frac{C}{(2-n)}\frac{1}{{r_0}^{n-2}}.$$

Assim, como $n \ge 4$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx = \lim_{r_0\to\infty}\int_{B_{r_0}(0)} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx < \infty.$$

Daí,

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} dx \leq \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx \leq \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx.$$

E assim, segue nossa primeira estimativa:

$$(n-2)^2 \int_{\Omega} \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} dx \leq (n-2)^2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx. \tag{2.33}$$

A segunda integral da equação (2.32) é limitada, pois $\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{1-n} \leq \left(|x|^2\right)^{1-n}$ em $B_\delta^c(0)\cap\Omega$. Portanto, chamando $B_\delta(0)=B_\delta$, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Omega} \varphi(x)\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{1-n} \nabla\varphi(x)\cdot x dx\right| &\leq C \int_{B_\delta^c\cap\Omega} \left(\varepsilon+|x|^2\right)^{1-n} |x| dx \\ &\leq C \int_{B_\delta^c\cap\Omega} \frac{1}{|x|^{2n-3}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.34}$$

De forma completamente análoga, prova-se que

$$\int_{\Omega} \left|\nabla\varphi(x)\right|^2 \left(\varepsilon+|x|^2\right)^{2-n} dx < \infty.$$

Das limitações (2.33) e (2.34), juntamente com a estimativa acima, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq (n-2)^2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx + C_1, \tag{2.35}$$

para alguma constante $C_1>0$ que não depende de ε.

(ii) *Análise de* $\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2$.

Pela definição da função u_ε, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} dx &= \int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} dx + \int_{B_\delta^c\cap\Omega} \frac{\left|\varphi(x)\right|^{2^*}}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} dx \\ &\geq \int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} dx. \end{aligned}$$

No entanto, pelo Teorema de mudança de variável,

$$\int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^n} = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{B_{\delta\varepsilon^{-1/2}}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} - \int_{B^c_{\delta\varepsilon^{-1/2}}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right].$$

Tal quebra é possível, visto que ambas as integrais são finitas. Para a demonstração dessa afirmação, basta usar a fórmula da coárea e mudança de variável. De fato,

$$\int_{B^c_{\delta\varepsilon^{-1/2}}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx = \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \int_{S_r} \frac{1}{(1+r^2)^n} ds dr \le C \int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{-n-1} dr \le C\varepsilon^{\frac{n}{2}}.$$

Assim, juntando esta desigualdade nas duas anteriores, encontramos

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx \ge \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right]. \tag{2.36}$$

Aplicando o Teorema do valor médio à função $x \mapsto x^{\frac{2}{2^*}}$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \ge \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{2}{2^*}} - \overline{C}\varepsilon^{\frac{n}{2}}.$$

Usando esta desigualdade, (2.36) e o fato que $x \mapsto x^{\frac{2}{2^*}}$ $(x \ge 0)$ é crescente, encontramos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\ge \left[\varepsilon^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx - C\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\ge \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_2\varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

(iii) *Análise de* $\|u_\varepsilon\|_2^2$.

Primeiramente observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 dx &= \int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{n-2}} dx + \int_{B^c_\delta \cap \Omega} \frac{\left|\varphi(x)\right|^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{n-2}} dx \\ &\ge \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{n-2}} dx - \int_{B^c_{\delta\varepsilon^{-1/2}}} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{n-2}} dx\right]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Agora iremos separar a análise em dois casos.
Suponha, primeiro, que $n > 4$. Daí, como

$$\int_{B^c_{\delta\varepsilon^{-1/2}}} \frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{n-2}}dx \leq \overline{C}\int_{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{3-n} = C_3\varepsilon^{\frac{n}{2}-2},$$

segue que

$$\int_{\Omega}|u_\varepsilon|^2dx \geq \varepsilon^{2-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{n-2}}dx - C_3.$$

Por outro lado, para $n=4$, temos de (2.38) que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}|u_\varepsilon|^2dx &\geq \left[\int_{\mathbb{R}^4}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^2}dx - \int_{B^c_{\delta\varepsilon^{-1/2}}}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^2}dx\right]\\
&= \int_{B_{\delta\varepsilon^{-1/2}}}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^2}dx = \overline{C}\int_0^{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{r^2}{(1+r^2)^2}rdr\\
&= \overline{C}\left[\int_0^1\frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr + \int_1^{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{r^3}{(1+r^2)^2}dr\right]\\
&\geq C_1 + \overline{C}\int_1^{\delta\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{r^3}{4r^4}dr\\
&= C_4 - C_5\ln(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Substituindo as desigualdades (2.35) e (2.37) em (2.31), encontramos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{(n-2)^2\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx + C_1 - \lambda\|u_\varepsilon\|_2^2}{\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} - C_2\varepsilon}.$$

Por outro lado, sabemos que $h(x) = \dfrac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$ é uma função extremal para a desigualdade de Sobolev, isto é, h satisfaz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|h|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} = \mathscr{A}(2,n)^2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla h|^2dx.$$

Como

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = (2-n)x_i\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{n}{2}},$$

temos

$$\mathscr{A}(2,n)^{-2} = \frac{(n-2)^2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^n}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} := \frac{a}{b}.$$

Para facilitar nossas contas, considere

$$d := \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{n-2}}dx.$$

Assim, para $n>4$ e como $\lambda>0$, temos

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(2,n)^{-2} &\leq \frac{\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}a + C_1 + \lambda C_3 - \lambda\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}d}{\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{bC_1 + \lambda bC_3 + a\varepsilon C_2 - \lambda bd\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}}{\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}b^2 - C_2 b\varepsilon} \\
&= \varepsilon\frac{\left(bC_1\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} + \lambda bC_3\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} + aC_2\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} - \lambda bd\right)}{b^2 - bC_2\varepsilon^{\frac{n}{2}}} < 0,
\end{aligned}$$

para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno.
Da mesma forma, para $n=4$ e $\lambda>0$, temos

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(2,n)^{-2} &\leq \frac{bC_1 - \lambda bC_4 + \lambda bC_5\ln(\varepsilon) + a\varepsilon C_2}{b(b\varepsilon^{-1} - C_2\varepsilon)} \\
&= \varepsilon\frac{(C_1 - \lambda C_4)b + \lambda C_5 b\ln(\varepsilon) + C_2 a\varepsilon}{b^2 - C_2 b\varepsilon^2} < 0,
\end{aligned}$$

para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Portanto, em ambos os casos, temos que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < \mathscr{A}(2,n)^{-2},$$

para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Assim, da definição de S_λ, obtemos $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$.

$\square$

O próximo resultado segue em linhas gerais as mesmas idéias anteriores. No entanto, a região Ω deve ser a bola de $\mathbb{R}^3$ e a função corte não pode ser qualquer.

Proposição 2.9. *Sejam* $n=3$, $\frac{\lambda_1}{4}<\lambda$ *e* $\Omega=B_1(0):=B_1$. *Então* $S_\lambda<\mathscr{A}(2,3)^{-2}$.

Demonstração. Considere a função $\varphi(r)=\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right)$, sendo $r=|x|$. Defina, para $\varepsilon>0$,

$$u_\varepsilon(x)=\frac{\varphi(r)}{\left(\varepsilon+r^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|\nabla u_\varepsilon|^2dx &= \int_{B_1}\frac{\varphi'(r)^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)}dx-2\int_{B_1}\frac{\varphi'(r)\varphi(r)r}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^2}dx+\int_{B_1}\frac{\varphi(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^3}dx\\
&= \int_0^1\int_{S_r}\frac{\varphi'(r)^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}dsdr-2\int_0^1\int_{S_r}\frac{\varphi'(r)\varphi(r)r}{\left(\varepsilon+r^2\right)^2}dsdr+\int_0^1\int_{S_r}\frac{\varphi(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dsdr\\
&= \omega\left[\int_0^1\frac{\varphi'(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}dr-2\int_0^1\frac{\varphi'(r)\varphi(r)r^3}{\left(\varepsilon+r^2\right)^2}dr+\int_0^1\frac{\varphi(r)^2r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr\right],
\end{aligned}$$

sendo $\int_{S_r}ds=r^2\int_{S_1}ds:=r^2\omega$. Agora, note que, por integração por partes, obtemos

$$2\int_0^1\frac{\varphi(r)\varphi'(r)r^3}{\left(\varepsilon+r^2\right)^2}dr=-\left[\int_0^1\varphi(r)^2\left(\frac{3r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^2}-\frac{4r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\right)dr\right].$$

Dessa forma, substituindo tal igualdade na igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|\nabla u_\varepsilon|^2dx &= \omega\int_0^1\frac{\varphi'(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}dr+\omega\left[\int_0^1\varphi(r)^2\left(\frac{3r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^2}-\frac{3r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}\right)dr\right]\\
&= \omega\int_0^1\frac{\varphi'(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)}dr+3\omega\varepsilon\int_0^1\frac{\varphi(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr\\
&\leq \omega\int_0^1\varphi'(r)^2dr+3\omega\varepsilon\int_0^1\frac{\varphi(r)^2r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3}dr. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Porém, temos ainda que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\varphi(r)^2 r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} dr &\leq \int_0^1 \frac{r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} dr = \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx \\ &\leq \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Logo, substituindo (2.40) na desigualdade (2.39), obtemos

$$\int_{B_1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq \omega \int_0^1 \varphi'(r)^2 dr + 3\omega\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx. \tag{2.41}$$

Por outro lado, como $2^* = 6$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |u_\varepsilon|^{2^*} dx &= \int_{B_1} \frac{\varphi(r)^6}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^3} dx = \int_0^1 \int_{S_r} \frac{\varphi(r)^6}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} ds\, dr \\ &= \omega \int_0^1 \frac{\left(\varphi(r)^6-1\right) r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} dr + \omega \int_0^1 \frac{r^2}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} dr \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Mas, pela definição de φ, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{\varphi(r)^6-1}{r^2}\right| < C, \quad \text{para todo } 0 < r \leq 1.$$

Daí,

$$|I_1| \leq C \int_0^1 \frac{r^4}{\left(\varepsilon+r^2\right)^3} dr = C\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{x^4}{\left(1+x^2\right)^3} dx \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Em relação ao termo I_2, note que

$$I_2 = \frac{\omega}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx \geq \omega\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx - C.$$

Encontramos, assim,

$$\int_{B_1} |u_\varepsilon|^{2^*} dx \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \left[\omega \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx - C\varepsilon\right], \quad \text{com } C > 0.$$

Elevando esta desigualdade a $\dfrac{1}{3}$ e aplicando o Teorema do valor médio, obtemos

$$\left(\int_{B_1}|u_\varepsilon|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{3}} \geq \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[\omega\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\right]^{\frac{1}{3}} - C\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Finalmente, vejamos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|u_\varepsilon|^2dx &= \int_{B_1}\frac{\varphi(r)^2}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)}dx = \omega\int_0^1\frac{\varphi(r)^2r^2}{\varepsilon+r^2}dr\\
&= \omega\int_0^1\varphi(r)^2dr+\omega\int_0^1\varphi(r)^2\left(\frac{r^2}{\varepsilon+r^2}-1\right)dr\\
&= \omega\int_0^1\varphi(r)^2dr-\omega\varepsilon^{\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{\varphi\left(y\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)^2}{1+y^2}dy\\
&\geq \omega\int_0^1\varphi(r)^2dr-C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Assim, substituindo os valores encontrados em (2.41), (2.42) e (2.43) na definição de Q_λ, aplicado à função u_ε, chegamos ao seguinte

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{\omega\displaystyle\int_0^1\varphi'(r)^2dr+3\omega\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy-\omega\lambda\int_0^1\varphi(r)^2dr+C\lambda\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[\omega\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx\right]^{\frac{1}{3}}-C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Defina

$$K := \int_0^1\varphi'(r)^2dr-\lambda\int_0^1\varphi(r)^2dr.$$

Uma vez que $\varphi(r)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}r\right)$, segue que

$$K=\int_0^1\varphi'(r)^2dr-\lambda\int_0^1\varphi(r)^2dr=\left(\frac{\pi^2}{4}-\lambda\right)\int_0^1\varphi(r)^2dr<0.$$

Dessa forma, obtemos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{\omega K+3\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\omega\displaystyle\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy+C\lambda\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[\omega\displaystyle\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy\right]^{\frac{1}{3}}-C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.44}$$

Agora, como $h(x)=\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ é uma função extremal para a desigualdade ótima de Sobolev, segue que

$$\mathscr{A}(2,3)^{-2}=\frac{\|\nabla h\|_2^2}{\|h\|_6^2}.$$

No entanto, como vale a igualdade

$$\int_0^\infty \frac{s^4}{\left(1+s^2\right)^3}ds = 3\,\frac{\pi}{16} = 3\int_0^\infty \frac{s^2}{\left(1+s^2\right)^3}ds,$$

segue

$$\|\nabla h\|_2^2=\int_0^\infty\int_{S_r}\frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^3}ds\,dr=\omega\int_0^\infty\frac{y^4}{\left(1+y^2\right)^3}dy=3\omega\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy$$

e

$$\|h\|_6^2=\left(\omega\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Assim,

$$\mathscr{A}(2,3)^{-2}=\frac{3\omega\displaystyle\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy}{\left(\omega\displaystyle\int_0^\infty\frac{y^2}{\left(1+y^2\right)^3}dy\right)^{\frac{1}{3}}}:=\frac{a}{b}. \tag{2.45}$$

Com essa notação, podemos reescrever (2.44) como

$$Q_\lambda(u_\varepsilon)\leq\frac{\omega K+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}a+C\lambda\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}b-C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.46}$$

Assim, de (2.45) e (2.46), obtemos

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon)-\mathscr{A}(2,3)^{-2} &\leq \frac{\omega K+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}a+C\lambda\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}b-C\varepsilon^{\frac{1}{2}}}-\frac{a}{b}\\ &= \frac{\omega bK+\lambda Cb\varepsilon^{\frac{1}{2}}+aC\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{b^2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-bC\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Como $K<0$, então, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, temos que $Q_\lambda(u_\varepsilon)<\mathscr{A}(2,3)^{-2}$. Então, segue que $S_\lambda<\mathscr{A}(2,3)^{-2}$.

□

Teorema 2.10. *O problema (2.1) possui uma solução quando:*

(1) $n \geq 4$ *e* $0 < \lambda < \lambda_1$;

(2) $n = 3$, $\Omega = B_1(0)$ *e* $\dfrac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$.

Demonstração. Prova de **(1)**. Defina o conjunto $\mathscr{H} := \left\{u \in H_0^1(\Omega)\,;\, \|u\|_{2^*} = 1\right\}$ e o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

Como $\lambda < \lambda_1$, segue que

$$J(u) \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|\nabla u\|_2^2 \geq C \|\nabla u\|_2^2.$$

Logo, fica bem definido $S_\lambda = \inf_{u \in \mathscr{H}} J(u)$. Seja $(u_n) \subset \mathscr{H}$ tal que $J(u_n) \to S_\lambda$. Portanto, da desigualdade acima, segue que

$$C \geq J(u_n) = \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|\nabla u_n\|_2^2,$$

ou seja, (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como o espaço $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, temos que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ (a menos de subsequência).}$$

Agora, considere as medidas $\nu_n = |u_n|^{2^*} dx$ e $\mu_n = |\nabla u_n|^2 dx$, as quais são limitadas, pela observação (1.32). Logo, pelo Teorema (1.31), temos que $\nu_n \rightharpoonup \nu$ e $\mu_n \rightharpoonup \mu$, sendo ν e μ medidas limitadas em Ω. Assim, pelo *Teorema da concentração de compacidade*, existem um conjunto no máximo enumerável $\mathscr{J}$, uma família de pontos $\left\{x_j\,;\, j \in \mathscr{J}\right\} \subset \overline{\Omega}$ e famílias de números positivos $\left\{\nu_j\,;\, j \in \mathscr{J}\right\}$ e $\left\{\mu_j\,;\, j \in \mathscr{J}\right\}$ tais que

(i) $\nu = |u_0|^{2^*} dx + \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j \delta_{x_j}$;

(ii) $\mu \geq |\nabla u_0|^2 dx + \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \delta_{x_j}$;

(iii) $\mathscr{A}(2,n)^2 \mu_j \geq (\nu_j)^{\frac{2}{2^*}}$.

Aqui, δ_{x_j} representa a medida atômica. Portanto,

$$J(u_0) \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_0|^2 dx - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j.$$

Por outro lado, como $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, segue que $u_n \to u_0 \in L^2(\Omega)$ (a menos de subsequência). Logo, $\|u_n\|_2^2 \to \|u_0\|_2^2$.

Daí, usando **(iii)**,

$$\begin{aligned}
J(u_0) &\leq \liminf \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_0\|_2^2 - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf \|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \ \limsup \|u_n\|_2^2 - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf \|\nabla u_n\|_2^2 + \lambda \ \liminf \left(-\|u_n\|_2^2\right) - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&\leq \liminf \left(\|\nabla u_n\|_2^2 - \lambda \|u_n\|_2^2\right) - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&= \liminf J(u_n) - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&= S_\lambda - \sum_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \\
&\leq S_\lambda - \mathscr{A}(2,n)^{-2} \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Por outro lado, integrando **(i)**, obtemos

$$\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j = 1. \qquad (2.48)$$

Donde extraímos que $\sum \nu_j \leq 1$. A equação acima também fornece-nos indícios do caminho que devemos seguir, a saber, provar que $\mathscr{J} = \emptyset$. Para isso, procedamos por contradição. Pela Proposição (2.8) sabemos que $S_\lambda < \mathscr{A}(2,n)^{-2}$. Logo, da desigualdade (2.47) temos

$$J(u_0) < S_\lambda \left(1 - \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}\right).$$

Daí, como $\nu_j \leq \sum \nu_j \leq 1$ para todo $j \in \mathscr{J}$ e $\dfrac{2}{2^*} < 1$, segue que $\nu_j \leq \nu_j^{\frac{2}{2^*}}$, $\forall\ j \in \mathscr{J}$. Com tais observações e usando a igualdade (2.48), obtemos

$$J(u_0) < S_\lambda \left(1 - \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j^{\frac{2}{2^*}}\right) \leq S_\lambda \left(1 - \sum_{j \in \mathscr{J}} \nu_j\right) = S_\lambda \int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \leq S_\lambda \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim,

$$0 \leq J(u_0) < S_\lambda \|u_0\|_{2^*}^2 \leq S_\lambda \|u_0\|_{2^*}.$$

Desta forma, se $\|u_0\|_{2^*} = 0$, chegamos a uma contradição. Por outro lado, se $\|u_0\|_{2^*} \neq 0$, segue que

$$J\left(\frac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}}\right) < S_\lambda = \inf_{u\in\mathscr{H}} J(u),$$

o que também caracteriza um absurdo, uma vez que $\dfrac{u_0}{\|u_0\|_{2^*}} \in \mathscr{H}$. Portanto, $J = \emptyset$. Segue de (2.48) que $\|u_0\|_{2^*} = 1$, e portanto, $u_0 \in \mathscr{H}$. Além disso, da desigualdade (2.47), temos que

$$J(u_0) \leq \inf_{u\in\mathscr{H}} J(u).$$

Portanto, $J(u_0) = S_\lambda$ e pelo Teorema do multiplicador de Lagrange (1.25), existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_0)v = k\ G'(u_0)v,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$, onde

$$G(u) := \int_\Omega |u|^{2^*} dx.$$

Isto é,

$$2\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v\, dx - 2\lambda \int_\Omega u_0 v\, dx = 2^* k \int_\Omega {u_0}^{2^*-1} v\, dx, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Definindo $u_1 = m u_0$, sendo m escolhida de tal forma que satisfaça $\dfrac{m^{2-2^*}2^*k}{2} = 1$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v\, dx - \lambda \int_\Omega u_1 v\, dx = \int_\Omega {u_1}^{2^*-1} v\, dx, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.49}$$

Concluímos assim que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (2.1). Além disso, $u_1 \geq 0$, uma vez que podemos considerar $u_0 \geq 0$. Agora, usando resultado de regularidade clássico, segue que $u_1 \in C^2(\overline{\Omega})$. Deste modo, usando (2.49) encontramos

$$\int_\Omega -\Delta u_1 v\, dx = \int_\Omega \left(\lambda u_1 + {u_1}^{2^*-1}\right) v\, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto $-\Delta u_1 = \lambda u_1 + {u_1}^{2^*-1}$, $u_1 \geq 0$ e $u_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, do princípio de máximo clássico seque que $u_1 > 0$ em Ω. Isto mostra que (2.1) possui uma solução clássica.

Para provarmos **(2)** devemos seguir exatamente a mesma argumentação dada na demonstração de **(1)**. Apenas usaremos a Proposição (2.9) no lugar da Proposição (2.8) para obtermos $S_\lambda < \mathscr{A}(2,3)^{-2}$.

□

Capítulo 3

O Operador p-Laplaciano

Neste capítulo, estaremos interessados em estudar a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1} \quad \text{em } \Omega \\ u > 0 \quad \text{em } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Como tal equação é uma generalização do problema tratado no capítulo anterior, precisaremos estender alguns resultados de regularidade e princípios de comparação, os quais serão estudados nas duas primeiras seções deste capítulo. No que segue, Ω denotará um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega \in C^\infty$ e $1 < p < n$.

3.1 Identidade de Pohozaev

Como almejamos fazer uma análise quanto a resolubilidade do problema (3.1), podemos proceder como no capítulo anterior, obtendo uma Identidade de Pohozaev para soluções do problema em estudo. No entanto, para obtermos tal identidade, é necessário que a solução seja de classe C^1 até a fronteira, além de regularidade C^2 no interior de Ω. Porém, em geral, as soluções de (3.1) são no máximo $C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $0 < \alpha < 1$. Para contornar esta dificuldade iremos considerar uma perturbação deste problema. Seja

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon\right) = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

para $\varepsilon > 0$, sendo $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando o Teorema 8.3, página 301, do livro de Ladyzhenskaya [LU68], vemos que o problema (3.2) possui uma solução $u_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$, para todo $\varepsilon > 0$. Assim, com tal regularidade garantida, estamos em condições de obter a Identidade de Pohozaev para soluções do problema degenerado (3.1).

Teorema 3.1. *Seja $p>1$ e $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ solução de (3.1). Então, u satisfaz*

$$\lambda\int_\Omega u^p\,dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(x\cdot\nu)d\sigma.$$

Demonstração. Defina o seguinte campo vetorial

$$P:=g_\varepsilon(x)(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x)\nabla u_\varepsilon(x),\quad \text{sendo}\quad g_\varepsilon=\left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Então, do Teorema do divergente, temos que

$$\operatorname{div}P=\operatorname{div}\left(g_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\right)(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x)+g_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x). \tag{3.3}$$

Assim, como

$$(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x)_{x_i}=\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}x_j+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right],$$

temos que

$$\nabla(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x)=\left(\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_1\partial x_j}x_j+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_1}\right],\cdots,\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_n\partial x_j}x_j+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_n}\right]\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla(\nabla u_\varepsilon\,\cdot\,x) &= \sum_{k=1}^n\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_k\partial x_j}x_j+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right]\\ &= \sum_{k,j=1}^n\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_k\partial x_j}x_j+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right]\\ &= \sum_{k,j=1}^n\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}\frac{\partial^2u_\varepsilon}{\partial x_k\partial x_j}x_j\right)+|\nabla u_\varepsilon|^2. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x \cdot \nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right)^2\right)\right] \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_k \partial x_j} x_k. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.4) e (3.5), segue que

$$
\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla(\nabla u_\varepsilon \cdot x) = \frac{1}{2}\left(x \cdot \nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right) + |\nabla u_\varepsilon|^2. \qquad (3.6)
$$

Agora, multiplicando $-\operatorname{div}(g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f$ por u_ε, obtemos, por integração por partes,

$$
\int_\Omega g_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega f u_\varepsilon dx. \qquad (3.7)
$$

Além disso, note que

$$
\frac{1}{p}\left[x \cdot \nabla\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(x \cdot \nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right). \qquad (3.8)
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega}\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}(x \cdot \nu)\, d\sigma &= \frac{1}{p}\int_\Omega \operatorname{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}} x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(x \cdot \nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right) + \frac{n}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega}\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}(x \cdot \nu)\, d\sigma - \frac{n}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{p}\int_\Omega \left[x \cdot \nabla\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)\right]. \qquad (3.9)
$$

Por outro lado, note que

$$
\int_{\partial\Omega} P \cdot \mu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot x)(\nabla u_\varepsilon \cdot \nu)\, d\sigma.
$$

Porém, como $u_\varepsilon \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ e ν é o vetor normal unitário, temos que $\nabla u_\varepsilon = \pm|\nabla u_\varepsilon|\nu$.

Segue do Teorema do divergente que

$$\int_\Omega \operatorname{div} P dx = \int_{\partial\Omega} g_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon \cdot x)(\nabla u_\varepsilon \cdot \nu)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} g_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 (x\cdot\nu) d\sigma. \tag{3.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} P dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon \cdot x) dx + \int_\Omega g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla(\nabla u_\varepsilon \cdot x) dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon \cdot x) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g_\varepsilon \left(x\cdot\nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right) dx + \int_\Omega g_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)(\nabla u_\varepsilon \cdot x) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g_\varepsilon \left(x\cdot\nabla\left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)\right) dx + \int_\Omega f u_\varepsilon dx \\
&= -\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \cdot x) f dx + \frac{1}{p}\int_\Omega \left[x\cdot\nabla\left(\left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)\right] dx + \int_\Omega f u_\varepsilon dx \\
&= -\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \cdot x) f + \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} \left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}} (x\cdot\nu) d\sigma - \frac{n}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}} + \int_\Omega f u_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Acima, usamos as equações (3.3), (3.6)-(3.9), nessa ordem. Daí, igualando (3.10) com a equação acima, obtemos

$$-\int_\Omega (\nabla u_\varepsilon \cdot x) f - \frac{n}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p}{2}} + \int_\Omega f u_\varepsilon = \int_{\partial\Omega} (x\cdot\nu)\left[|\nabla u_\varepsilon|^2\left(1-\frac{1}{p}\right) - \frac{\varepsilon}{p}\right]\left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ na igualdade acima, pelo Teorema A.4, presente no apêndice desta dissertação, temos que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Daí, segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$-\int_\Omega (\nabla u \cdot x) f - \frac{n}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega f u = \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p (x\cdot\nu) d\sigma. \tag{3.11}$$

Por sua vez,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_\Omega f u dx.$$

Substituindo em (3.11), obtemos

$$-\int_\Omega (\nabla u \cdot x) f dx + \left(1-\frac{n}{p}\right)\int_\Omega f u dx = \left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p (x\cdot\nu) d\sigma. \tag{3.12}$$

Considere a função $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$H(r)=\lambda\frac{r^p}{p}+\frac{r^{p^*}}{p^*} \quad \therefore \quad H'(u)=f.$$

Daí, temos que

$$\nabla H(u(x))=H'(u)\nabla u(x)=f\,\nabla u(x).$$

Integrando por partes, obtemos

$$-\int_\Omega(\nabla u\cdot x)f\,dx=-\int_\Omega(x\cdot\nabla H(u))\,dx=n\int_\Omega H(u)dx.$$

Substituindo esta última igualdade em (3.12), temos

$$n\int_\Omega H(u)dx+\left(1-\frac{n}{p}\right)\int_\Omega fu\,dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(x\cdot\nu)d\sigma.$$

Finalmente, da definição de H, obtemos

$$\lambda\int_\Omega u^p\,dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^p(x\cdot\nu)d\sigma.$$

□

3.2 O princípio de comparação forte

Nesta seção apresentaremos alguns resultados, os quais, além de serem considerados generalizações de princípios de máximo e comparação conhecidos, serão indispensáveis para a continuação do estudo da existência de solução.

Proposição 3.2. *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aberto e conexo, $f,g\in L^\infty_{loc}(\Omega)$ e $u,v\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ funções que satisfazem*

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)=f \quad e \quad -\mathrm{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)=g$$

em Ω. Assuma $u\geq v$ e $f\geq g$, ambas q.t.p. em Ω. Se $K=\{x\in\Omega\,;\ u(x)=v(x)\}$ é compacto, então K é vazio.

Demonstração. Suponha, por redução ao absurdo, que o conjunto $K=\{x\in\Omega\,;\ u(x)=v(x)\}$ seja compacto e não-vazio. Como dist $(K,\partial\Omega)>0$, existe um subconjunto aberto Ω_1 tal que

$$K\subset\Omega_1\subset\overline{\Omega_1}\subset\Omega.$$

Assim, podemos afirmar que $u(x) > v(x)$, $\forall\, x \in \Omega_1 \setminus K$. Para $\varepsilon > 0$, considere os problemas não-degenerados

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon\right) = f \ \text{ em } \Omega_1 \\ u_\varepsilon = u \ \text{ sobre } \partial\Omega_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\text{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla v_\varepsilon\right) = g \ \text{ em } \Omega_1 \\ v_\varepsilon = v \ \text{ sobre } \partial\Omega_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

os quais possuem solução fraca em $W^{1,p}(\Omega_1)$. De fato, note que a única diferença entre estas equações e o problema perturbado (3.2) é a condição sobre a fronteira. Logo, o espaço onde procuramos um minimizante do funcional associado ao problema contém informação sobre o valor da solução na fronteira, diferente da solução nula. No entanto, a existência de tal minimizante é garantida pelo Teorema 5 da página 453 do [Eva09]. Além disso, já sabemos que $u_\varepsilon,\ v_\varepsilon \in C^{1,\alpha'}(\Omega_1)$ e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = v \quad \text{em} \quad C^1(\Omega_1).$$

Considere, agora, um outro subconjunto aberto de Ω, digamos Ω_2, tal que

$$K \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2} \subset \Omega_1,$$

e defina

$$\eta = \min_{\partial\Omega_2} (u - v) > 0.$$

Como temos, em particular, que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{C^1(\Omega_2)},\ \|v_\varepsilon - v\|_{C^1(\Omega_2)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0,$$

podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_2)},\ \|v - v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_2)} < \frac{\eta}{4}.$$

Logo, podemos deduzir que

$$u_\varepsilon - v_\varepsilon < \frac{\eta}{2} \ \text{ em } K \quad \text{e} \quad u_\varepsilon - v_\varepsilon > \frac{\eta}{2} \ \text{ sobre } \partial\Omega_2. \tag{3.14}$$

Agora, note que, em Ω_2

$$
\begin{aligned}
f-g &= -\text{div}\left(\left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\varepsilon\right)+\text{div}\left(\left(\varepsilon+|\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\nabla v_\varepsilon\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}-\left(\varepsilon+|\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right]\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[F(y)-F(x)\right], \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

sendo $F(z)=\left(\varepsilon+|z|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}z_i$, $x=\nabla v_\varepsilon$ e $y=\nabla u_\varepsilon$. Como

$$
\frac{\partial F}{\partial x_j}(z)=\delta_{ij}\left(\varepsilon+|z|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}+(p-2)\left(\varepsilon+|z|^2\right)^{\frac{p-4}{2}}z_iz_j,
$$

do Teorema do valor médio e da equação (3.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
f-g &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(z)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\right]\\
&= -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[\delta_{ij}\left(\varepsilon+|t_i\nabla u_\varepsilon+(1-t_i)\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}+(p-2)\left(\varepsilon+|t_i\nabla u_\varepsilon+(1-t_i)\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left(t_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+(1-t_i)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\left(t_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}+(1-t_i)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)\right]\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

para $t_i\in(0,1)$ e $w_\varepsilon=u_\varepsilon-v_\varepsilon$. Daí, denotando

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{\varepsilon} &= \left(\varepsilon+|t_i\nabla u_\varepsilon+(1-t_i)\nabla v_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-4}{2}}\left\{\delta_{ij}\left(\varepsilon+|t_i\nabla u_\varepsilon+(1-t_i)\nabla v_\varepsilon|^2\right)+\right.\\
&\quad \left.(p-2)\left(t_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+(1-t_i)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\left(t_i\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}+(1-t_i)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\right]=f-g\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2 \qquad (3.16)
$$

no sentido fraco, ou seja,

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega_2}a_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega_2}(f-g)\phi\,dx\geq 0, \quad \forall\,\phi\in C_c^{\infty}(\Omega_2) \text{ não-negativa.}
$$

Considere $\rho = \min\limits_{\Omega_2} w_\varepsilon$ e o conjunto onde o mínimo é atingido, isto é,

$$K_\rho = \{x \in \Omega_2 \; ; \; w_\varepsilon(x) = \rho\},$$

o qual é um compacto não-vazio, por (3.14). Nesse conjunto, temos que $\nabla u_\varepsilon = \nabla v_\varepsilon$, e então,

$$a^\varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-4}{2}} \left\{\delta_{ij}\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right) + (p-2)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right\}.$$

Note que os coeficientes a^ε_{ij} acima são as componentes da matriz Hessiana da função convexa $G(x) = \dfrac{1}{p}\left(\varepsilon + |x|^2\right)^{\frac{p}{2}}$, no ponto ∇u_ε. Pela Proposição (1.18), podemos afirmar que

$$\sum_{i,j=1}^n a^\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j \;\geq\; \theta|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.17}$$

para algum $\theta > 0$. Considere, ainda, uma vizinhança aberta Ω_ρ de K_ρ tal que

$$K_\rho \subset \Omega_\rho \subset \overline{\Omega_\rho} \subset \Omega_2.$$

Então, $w_\varepsilon > \rho$ sobre $\partial\Omega_\rho$ e (3.17) ainda continua válida em Ω_ρ (o que pode mudar é a constante θ). Então, pelo princípio de máximo forte (Teorema 8.19, pág. 198, [GT01]) aplicado à função w_ε, obtemos que w_ε deve ser constante em Ω_ρ. Como em K_ρ temos $w_\varepsilon = \rho$, segue que $w_\varepsilon = \rho$ em $\overline{\Omega_\rho}$, contradizendo o fato que $w_\varepsilon > \rho$ sobre $\partial\Omega_\rho$.

□

A seguir, provaremos um resultado de comparação que será útil nas próximas demonstrações.

Proposição 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado, $f, g \in L^\infty(\Omega)$ e $u, v \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ funções tais que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) = g \text{ em } \Omega \\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

no sentido fraco, com $f \geq g$ q.t.p. em Ω. Então, $u \geq v$ em Ω.

Demonstração. Como u e v são soluções fracas para tais problemas, temos, em particular

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx \geq \int_\Omega g\phi\, dx = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\phi\, dx,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geq 0$. Logo,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla\phi\, dx \geq 0, \quad \forall\ \phi \geq 0. \tag{3.19}$$

Agora, considere o conjunto $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\,;\ v(x) > u(x) + \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$. Suponha por contradição que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\Omega_{\varepsilon_0} \neq \emptyset$. Assim, podemos definir a seguinte função

$$\phi_{\varepsilon_0}(x) = \begin{cases} v(x) - u(x) - \varepsilon_0 & \text{em} \quad \Omega_{\varepsilon_0} \\ 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_0}. \end{cases}$$

Nota-se que $v - u = \varepsilon_0$ sobre $\partial\Omega_{\varepsilon_0}$ e que $0 \leq \phi_{\varepsilon_0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, substituindo tal função em (3.19), obtemos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v) dx \leq 0.$$

Em vista da Proposição (1.15), concluímos que

$$|\nabla u - \nabla v| = 0 \ \text{ em } \ \Omega_{\varepsilon_0}.$$

No entanto, sendo Ω_{ε_0} um subconjunto aberto e conexo, e $v - u = \varepsilon_0$ sobre $\partial\Omega_{\varepsilon_0}$, segue que

$$v - u = \varepsilon_0 \quad \text{em} \quad \Omega_{\varepsilon_0}. \tag{3.20}$$

Como $\Omega_{\varepsilon_0} \neq \emptyset$, então $\Omega_{\varepsilon_1} \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Assim, pelo mesmo raciocínio acima, obtemos que

$$v - u = \varepsilon_1 \quad \text{em} \quad \Omega_{\varepsilon_1}. \tag{3.21}$$

Das igualdades (3.20) e (3.21), segue que $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ em Ω_{ε_0}, o que é um absurdo. Logo, $\Omega_\varepsilon = \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $v \leq u$ em Ω. $\square$

O resultado seguinte estende o Lema de Hopf clássico.

Proposição 3.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto conexo e limitado, $f, g \in L^\infty(\Omega)$ e $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f \ \ em \ \Omega \\ u = 0 \ \ sobre \ \partial\Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) = g \ \ em \ \Omega \\ v = 0 \ \ sobre \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Se assumirmos que $f \geq g \geq 0$ q.t.p. em Ω e que o conjunto $C = \{x \in \Omega\,;\, f(x) = g(x)\}$ tem interior vazio, então temos que

$$u(x) > v(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega \quad e$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Demonstração. Primeiro devemos observar que existe um conjunto de medida positiva onde $f > 0$. De fato, caso contrário $C = \Omega$, pois $f \geq g \geq 0$, porém C tem interior vazio. Portanto, $u \not\equiv 0$. Além disto, segue da Proposição 3.3 que $v \geq 0$ e também $u \geq v$. Logo, $u \geq 0$ e $u \not\equiv 0$ e então, por [Vaz84], segue que

$$u(x) > 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0, \ \forall\, x \in \ \partial\Omega.$$

Considere $K = \{x \in \Omega\,;\, u(x) = v(x)\}$ e suponha por contradição que $K \neq \emptyset$. Da Proposição 3.2, sabemos que o conjunto K não pode ser compacto. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset K$ tal que $x_n \to x_0$, com $x_0 \in \partial\Omega$. Daí, como $(x_n) \subset K$, temos que $\nabla u(x_n) = \nabla v(x_n)$. Mas, sendo ∇u e ∇v contínuas em $\overline{\Omega}$, segue que $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$. E assim,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0. \tag{3.22}$$

Agora, considere $w = u - v$. Usando a mesma argumentação da demonstração da Proposição 3.2 vemos que w satisfaz

$$Lw = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = f - g \geq 0,$$

sendo $a_{ij} = a_{ij}^0$ ($\varepsilon = 0$). Em particular, como $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$, temos que

$$a_{ij}(x_0) = |\nabla u(x_0)|^{p-4}\left\{\delta_{ij}|\nabla u(x_0)|^2 + (p-2)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right\}.$$

E então, para tal x_0, obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \;\geq\; \theta|\xi|^2, \;\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } \theta > 0.$$

Pela continuidade de ∇u, podemos construir uma bola $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$, sobre a qual o operador elíptico definido pelos a_{ij} seja estritamente elíptico. Assim,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\geq\; \gamma|\xi|^2, \;\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, x \in B \text{ e } \gamma > 0.$$

Por sua vez, como $w \geq 0$ em B, temos duas possibilidades: $w \equiv 0$ ou $w \not\equiv 0$ em B. Se $w \equiv 0$, então $f = g$ em B, o que entra em contradição com o fato de que int $C = \emptyset$. Caso contrário, isto é, se w não é identicamente nula em B, então decorre de [Vaz84] que $w > 0$ em B e $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \;<\; \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0),$$

contradizendo a igualdade (3.22). Assim, como em ambas as possibilidades chegamos a um absurdo, temos que $K = \emptyset$. Logo, segue que

$$u(x) > v(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Assim, resta-nos provar que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \;<\; \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{3.23}$$

Como $u = 0 = v$ sobre $\partial\Omega$ temos que $\nabla u(x_0) = \pm|\nabla u(x_0)|\nu$ e $\nabla v(x_0) = \pm|\nabla v(x_0)|\nu$, sendo ν o vetor normal em x_0. Suponha por contradição que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0),$$

para algum $x_0 \in \partial\Omega$. Então $|\nabla u(x_0)| = |\nabla v(x_0)|$ e portanto $\nabla v(x_0) = \pm|\nabla u(x_0)|\nu$. Com isto podemos repetir o argumento anterior e iremos obter $-\displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right] \geq 0$ e

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \;\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, x \in B \subset \Omega \text{ e } \gamma > 0,$$

com $x_0 \in \partial B$. Como $w = u - v > 0$ em Ω, temos que $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0$, por [Vaz84], o que contradiz o fato de $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)$. Portanto, segue (3.23).

□

3.3 Existência e não-existência de solução

Nesta seção analisaremos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = u^{p^*-1} + \lambda u^{p-1} \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

A demonstração do próximo resultado depende da *Identidade de Pohozaev*, cuja verificação independe do sinal da solução, como já foi constatado. Além disso, λ_1 denotará o primeiro autovalor do p-Laplaciano.

Teorema 3.5. *Seja* $1 < p < n$. *Então:*

(i) *Se* Ω *for estrelado com respeito à origem e* $\lambda \leq 0$, *então (3.24) não tem solução em* $W_0^{1,p}(\Omega)$*;*

(ii) *Se* $\lambda \geq \lambda_1$, *então o problema (3.24) não admite solução em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Prova de **(i)**. Suponha, por redução ao absurdo, que exista $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de (3.24). Primeiramente, consideremos o caso em que $\lambda < 0$. Assim, do Teorema 3.1, temos que

$$0 > \lambda \int_\Omega u^p dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p (x \cdot \nu) d\sigma \geq 0,$$

donde segue o absurdo.

Para o caso em que $\lambda = 0$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p (x \cdot \nu) d\sigma = 0,$$

pelo Teorema 3.1. Além disso, como $u \in C^1(\overline{\Omega})$, segue de [Vaz84] que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$. Por outro lado, como Ω é estrelado, obtemos que $x \cdot \nu(x) > 0$, $\forall\ x \in \Omega'$, com $\Omega' \subset \partial\Omega$ sendo um subconjunto com medida positiva em $\partial\Omega$. Portanto, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p (x \cdot \nu) d\sigma > 0$, contradizendo a igualdade anterior.

Prova de **(ii)**. Sabemos que o primeiro autovalor do p-Laplaciano é dado por

$$\lambda_1 = \max\left\{\rho > 0\, ;\ \|u\|_p^p \leq \rho^{-1} \|\nabla u\|_p^p\,,\ \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

Considere o problema de autovalor do p- Laplaciano:

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\right) = \lambda_1\phi^{p-1} & \text{em } \Omega \\ \phi > 0 \ \text{ em } \Omega \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Usando idéias análogas ao Lema 2.1 podemos provar que existe $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\phi \geq 0$, solução fraca de (3.25). Da Proposição 1.13 segue que $\phi \in L^\infty(\Omega)$ e por [Tol84] $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$. Além disto, por [Vaz84], $\phi > 0$ em Ω e portanto $\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$.
Agora, suponha por redução ao absurdo, que exista $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de (3.24). Logo, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Considere o conjunto

$$\Lambda = \left\{\varepsilon > 0\,;\ u(x) > \varepsilon\phi(x),\ \forall\, x \in \Omega\right\},$$

o qual é não-vazio (ver argumentação do Teorema A.5 do Apêndice desta dissertação). Logo, podemos considerar

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0\,;\ \varepsilon \in \Lambda\}$$

e definir $\phi_0 = \varepsilon_0\phi$. Assim, $u(x) \geq \phi_0(x)$, $\forall\, x \in \Omega$. Defina

$$f = \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1} \quad \text{e} \quad g = \lambda_1{\phi_0}^{p-1}.$$

Como $\lambda \geq \lambda_1$ e $u \geq \phi_0$ em Ω, segue que $f > g$ em Ω. Logo, int $\left\{x \in \Omega\,;\ f(x) = g(x)\right\} = \emptyset$ e então, da Proposição 3.4, temos que

$$\begin{cases} u(x) > \phi_0(x) > 0 & \forall\, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x) < \dfrac{\partial\phi_0}{\partial\nu}(x) < 0 & \forall\, x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Logo,

$$Q(x) := \frac{\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)}{\dfrac{\partial\phi_0}{\partial\nu}(x)} > 1 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Seja $\rho = \min\,\{Q(x)\,;\ x \in \partial\Omega\} > 1$. Afirmamos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\forall\, x \in \Omega_\alpha := \{x \in \Omega\,;\ \text{dist}\,(x, \partial\Omega) < \alpha\}, \quad u(x) > \left(\frac{\rho+1}{2}\right)\phi_0(x).$$

Suponha por contradição que não exista tal faixa. Logo, para todo $\alpha > 0$, existe $x_\alpha \in \Omega_\alpha$ tal que $u(x_\alpha) \leq \left(\dfrac{\rho+1}{2}\right)\phi_0(x_\alpha)$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \Omega_{\frac{1}{n}}$ tal que

$$u(x_n) \leq \left(\frac{\rho+1}{2}\right)\phi_0(x_n). \tag{3.27}$$

Além disso, existe subsequência de (x_n), a qual vamos continuar denotando pela sequência original, tal que $x_n \to \bar{x} \in \partial\Omega$. Porém, da definição de ρ temos

$$\frac{u(x_n)}{\phi_0(x_n)} \longrightarrow \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(\bar{x})}{\dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu}(\bar{x})} \geq \rho.$$

Portanto $\rho \leq \dfrac{\rho+1}{2}$. Assim $\rho \leq 1$, o que contradiz a definição de ρ. Considere, ainda, o conjunto

$$\sigma = \inf\left\{\frac{u(x)}{\phi_0(x)}\ ;\ x \in \Omega \setminus \Omega_\alpha\right\}.$$

Então, $\sigma > 1$ e

$$u(x) > \min\left\{\sigma, \frac{\rho+1}{2}\right\}\phi_0(x), \ \ \forall\, x \in \Omega.$$

Como $\min\left\{\sigma, \dfrac{\rho+1}{2}\right\} > 1$, segue que

$$u(x) > \min\left\{\sigma, \frac{\rho+1}{2}\right\}\varepsilon_0\phi(x), \ \ \forall\, x \in \Omega,$$

o que contradiz a escolha de ε_0.

$\square$

Doravante, analisaremos a existência de solução para o problema (3.24). E assim como no caso clássico $p = 2$, a existência de solução está relacionada com o valor de λ. Daí, para $0 < \lambda < \lambda_1$, defina

$$S_\lambda := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)}\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \lambda|u|^p\right)dx\ ;\ \int_\Omega |u|^{p^*}dx = 1\right\}.$$

Além disso, vamos considerar a constante ótima de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \mathscr{A}(p,n)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 3.6. Se $0 < \lambda < \lambda_1$, então S_λ está bem definida. De fato, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $\|u\|_p < \infty$. E, como estamos considerando $0 < \lambda < \lambda_1$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega |u|^p dx \ \geq\ (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega |u|^p dx \ \geq\ 0.$$

Lema 3.7. *Para qualquer* $0 < \lambda < \lambda_1$, *temos que* $S_\lambda < \mathscr{A}(p,n)^{-p}$.

Demonstração. Definamos as seguintes funções

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|_p^p - \lambda \|u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega),\ u \neq 0$$

e

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x)}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n-p}{p}}}, \quad \text{para } \varepsilon \in (0,1],$$

sendo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ numa vizinhança de 0, digamos B_δ. A idéia da demonstração é estimar o valor de $Q_\lambda(u_\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Passo 1: Como

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{\phi_{x_i}(x)\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n-p}{p}} - \phi(x)\left(\dfrac{n-p}{p-1}\right)\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n-2p}{p}}\left(|x|^2\right)^{\frac{2-p}{p-1}} x_i}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{2\frac{n-p}{p}}},$$

obtemos

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n-p}{p}}} + \left(\frac{p-n}{p-1}\right)\frac{\phi(x) x}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{n}{p}} |x|^{\frac{p-2}{p-1}}}.$$

Logo, pela Proposição 1.14,

$$|\nabla u_\varepsilon|^p \leq \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \frac{\phi^p |x|^p}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n |x|^{p\left(\frac{p-2}{p-1}\right)}} + C\frac{|\nabla \phi|^p}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} + C\frac{|x||\nabla \phi|}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-1}}.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \frac{\phi^p |x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + C_1.$$

Fazendo $\phi^p = 1 + (\phi^p - 1)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p dx &\leq \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \frac{(\phi^p - 1)|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + C_1 \\
&\leq \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + C_1 \\
&\leq \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + C_1. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Passo 2: Pela definição de u_ε,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*} dx = \int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + \int_{\Omega \setminus B_\delta} \frac{\phi^{p^*}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx. \qquad (3.29)$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{B_\delta} \frac{1}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx &= \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \int_{B_{\delta\varepsilon^{(1-p)/p}}} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \\
&= \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx - \int_{B_\varepsilon^c} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right),
\end{aligned}$$

sendo $B_\varepsilon := B_{\delta\varepsilon^{(1-p)/p}}$, segue de (3.29) e do Teorema do valor médio, que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} &\geq \varepsilon^{-\frac{n}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx - \int_{B_\varepsilon^c} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&\geq \varepsilon^{\frac{p-n}{p}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} - C_1 \int_{B_\varepsilon^c} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right].
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon^c} \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx &= \int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^\infty \int_{S_r} \frac{1}{\left(1 + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} ds\, dr = \overline{C} \int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^\infty \frac{r^{n-1}}{\left(1 + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dr \\
&\leq \overline{C} \int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^\infty r^{\frac{1-n-p}{p-1}} dr = (1-p)\frac{\overline{C}}{n} \left[\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{n}{p-1}} - \frac{1}{\left(\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}\right)^{\frac{n}{p-1}}} \right] \\
&= C\varepsilon^{\frac{n}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &\geq \varepsilon^{\frac{p-n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} - C_1C\varepsilon^{\frac{p-n}{p}}\varepsilon^{\frac{n}{p}}\\ &= \varepsilon^{\frac{p-n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} - C_2\varepsilon. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

Passo 3: Notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\varepsilon|^p dx &= \int_{B_\delta}\frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx+\int_{B_\delta^c\cap\Omega}\frac{\phi^p}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx\\ &\geq \int_{B_\delta}\frac{1}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx = \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}\int_{B_\varepsilon}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx\\ &= \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx-\int_{B_\varepsilon^c}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx\right].\end{aligned}$$

Para $p^2<n$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon^c}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx &= \int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^{\infty}\int_{S_r}\frac{1}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}ds\,dr=\overline{C}\int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^{\infty}\frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dr\\ &\leq \overline{C}\int_{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}}^{\infty} r^{\frac{p^2-p-n+1}{p-1}}dr\\ &= C_3\varepsilon^{\frac{n-p^2}{p}}.\end{aligned}$$

E assim,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^p dx \geq \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx - C_3\varepsilon^{\frac{n-p^2}{p}}\right].$$

Portanto,

$$\|u_\varepsilon\|_p^p \geq \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}}dx - C_3. \qquad (3.31)$$

Agora, se $p^2 = n$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^p dx &\geq \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dx - \int_{B_\varepsilon^c} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dx \right] \\
&= \int_0^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \int_{S_r} \frac{1}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} ds\, dr = \overline{C} \int_0^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dr \\
&\stackrel{*}{=} \overline{C} \left[\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dr + \int_1^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dr \right] \\
&= C + \overline{C} \int_1^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dr \geq C + \overline{C} \int_1^{\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}} \frac{r^{n-1}}{\left(2r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dr \\
&= C_4 - C_5 \ln(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Como queremos fazer a análise para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos tomá-lo de tal forma que $\delta\varepsilon^{\frac{1-p}{p}} > 1$, o que justifica a igualdade demarcada por "$*$" acima.

Passo 4: Substituindo (3.30) e (3.28) na definição de Q_λ, aplicada à função u_ε, concluímos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{p-n}{p}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx + C_1 - \lambda \|u_\varepsilon\|_p^p}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} - C_2 \varepsilon}.$$

Definindo

$$a := \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \quad \text{e} \quad b := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx \right)^{\frac{p}{p^*}},$$

obtemos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) \leq \frac{a\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} + C_1 - \lambda \|u_\varepsilon\|_p^p}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} b - C_2 \varepsilon}.$$

Por outro lado, como a função

$$z(x) = \left[n \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} \right]^{\frac{n-p}{p^2}} \left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-n}{p}} := \alpha \left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-n}{p}}$$

é extremal para a desigualdade ótima de Sobolev, temos que

$$\mathscr{A}(p,n)^{-p} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla z|^p dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |z|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} = \frac{\left(\dfrac{n-p}{p-1}\right)^p \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^n} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}} = \frac{a}{b}.$$

Para facilitar a notação e o compreendimento do que segue, denotemos

$$d := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{n-p}} dx.$$

Daí, para $p^2 < n$, usando (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(p,n)^{-p} &\leq \frac{a\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} + C_1 - \lambda \|u_\varepsilon\|_p^p}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
&\leq \frac{a\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} + C_1 - \lambda\varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}} d + C_3\lambda}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{bC_1 + \lambda bC_3 + aC_2\varepsilon - \lambda bd\varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}}{b^2\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} - bC_2\varepsilon} \\
&= \varepsilon^{p-1} \frac{\left[bC_1\varepsilon^{\frac{n-p^2}{p}} + \lambda bC_3\varepsilon^{\frac{n-p^2}{p}} + aC_2\varepsilon^{\frac{p-p^2+n}{p}} - \lambda bd\right]}{b^2 - bC_2\varepsilon^{\frac{n}{p}}},
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(p,n)^{-p} < 0$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, para $p^2 = n$, temos

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) - \mathscr{A}(p,n)^{-p} &\leq \frac{a\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} + C_1 - \lambda \|u_\varepsilon\|_p^p}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
&\leq \frac{a\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} + C_1 - C_4\lambda + C_5\lambda\ln(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} b - C_2\varepsilon} - \frac{a}{b} \\
&= \frac{bC_1 + bC_5\lambda\ln(\varepsilon) + aC_2\varepsilon - bC_4\lambda}{b^2\varepsilon^{\frac{p-n}{p}} - bC_2\varepsilon} \\
&= \frac{b(C_1 - C_4\lambda) + \lambda bC_5\ln(\varepsilon) + aC_2\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{p-n}{p}}(b^2 - bC_2\varepsilon^{\frac{n}{p}})} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Em qualquer um dos casos, tem-se que $Q_\lambda(u_\varepsilon) < \mathscr{A}(p,n)^{-p}$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, da definição de S_λ, segue que $S_\lambda < \mathscr{A}(p,n)^{-p}$.

□

Teorema 3.8. *Assuma* $1 < p^2 \leq n$. *Então, para todo* $\lambda \in (0, \lambda_1)$, *o problema (3.24) admite solução em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Defina o conjunto $\mathscr{H} := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\, \|u\|_{p^*} = 1 \right\}$ e o funcional

$$J(u) := \|\nabla u\|_p^p - \lambda \|u\|_p^p.$$

Como $S_\lambda = \inf\limits_{u \in \mathscr{H}} J(u)$, existe $(u_n) \subset \mathscr{H}$ tal que $J(u_n) \to S_\lambda$. Portanto, $J(u_n) \leq C$, donde segue que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, uma vez que

$$C \geq \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda \|u_n\|_p^p \geq \overline{C} \|u_n\|_{W^{1,p}}^p.$$

E assim, temos que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{(a menos de subsequência)}.$$

Agora, como a imersão $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ não é compacta, precisamos considerar as medidas

$$\nu_n = |u_n|^{p^*} dx \quad \text{e} \quad \mu_n = |\nabla u_n|^p dx,$$

as quais são limitadas, pela observação (1.32). Logo, pelo Teorema (1.31), temos que $\nu_n \rightharpoonup \nu$ e $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Além disso, temos que $\|\nu\| \leq \liminf \|\nu_n\|$ e $\|\mu\| \leq \liminf \|\mu_n\|$. Desta forma, pelo *Teorema da concentração de compacidade*, existem um conjunto no máximo enumerável $\mathscr{J}$, uma família de pontos $\left\{ x_j\,;\, j \in \mathscr{J} \right\} \subset \overline{\Omega}$ e famílias de números positivos $\left\{ \nu_j\,;\, j \in \mathscr{J} \right\}$ e $\left\{ \mu_j\,;\, j \in \mathscr{J} \right\}$ tais que

(i) $\nu = |u_0|^{p^*} dx + \sum\limits_{j \in \mathscr{J}} \nu_j \delta_{x_j}$;

(ii) $\mu \geq |\nabla u_0|^p dx + \sum\limits_{j \in \mathscr{J}} \mu_j \delta_{x_j}$;

(iii) $\mathscr{A}(p,n)^{-p} (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mu_j$.

Daí, usando a propriedade **(ii)** e a imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
J(u_0) &\leq \mu(\Omega) - \sum_{j\in\mathscr{J}} \mu_j \delta_{x_j}(\Omega) - \lambda \|u_0\|_p^p \\
&\leq \|\mu\| - \lambda\|u_0\|_p^p - \sum_j \mu_j \\
&\leq \liminf \|\mu_n\| - \lambda\|u_0\|_p^p - \sum_j \mu_j \\
&\leq \liminf \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda\|u_0\|_p^p - \sum_j \mu_j \\
&= \liminf \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda \limsup \|u_n\|_p^p - \sum_j \mu_j \\
&\leq \liminf \left(\|\nabla u_n\|_p^p - \lambda\|u_n\|_p^p \right) - \sum_j \mu_j \\
&= S_\lambda - \sum_j \mu_j.
\end{aligned}$$

Mais ainda, utilizando a propriedade **(iii)**, obtemos

$$J(u_0) \leq S_\lambda - \mathscr{A}(p,n)^{-p} \sum_j (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{3.32}$$

Por outro lado, da propriedade **(i)**, concluímos que

$$\int_\Omega |u_0|^{p^*} dx + \sum_j \nu_j = 1. \tag{3.33}$$

Esta igualdade, além de fornecer a informação de que $\sum_j \nu_j \leq 1$, também nos dá indícios do caminho a ser seguido: provar que $\mathscr{J} = \emptyset$. Assim, suponha, por redução ao absurdo, que tal conjunto seja não-vazio. Como $S_\lambda < \mathscr{A}(p,n)^{-p}$, segue de (3.32) que

$$J(u_0) \leq S_\lambda - \mathscr{A}(p,n)^{-p} \sum_j (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} < S_\lambda \left(1 - \sum_j (\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \right).$$

Daí, como $\nu_j \leq \sum_j \nu_j \leq 1,\ j \in \mathscr{J}$ e $\dfrac{p}{p^*} < 1$, segue que $\nu_j \leq \nu_j^{\frac{p}{p^*}}$, donde obtemos

$$0 \leq J(u_0) < S_\lambda \left(1 - \sum_j \nu_j \right) = S_\lambda \|u_0\|_{p^*}^{p^*}.$$

Assim, se $\|u_0\|_{p^*}^{p^*}=0$, chegamos a um absurdo com a desigualdade acima. Por outro lado, se $\|u_0\|_{p^*}^{p^*}\neq 0$, como $\|u_0\|_{p^*}^{p^*}\leq \|u_0\|_{p^*}$, obtemos

$$J\left(\frac{u_0}{\|u_0\|_{p^*}}\right)<S_\lambda,$$

o que resulta numa contradição. Como em qualquer uma das possibilidades chegamos a uma contradição, devemos ter $\mathcal{J}=\emptyset$. Assim, da equação (3.33), segue que $\|u_0\|_{p^*}=1$ e, portanto, $u_0\in\mathcal{H}$. Logo, da equação (3.32), temos que

$$J(u_0)\leq S_\lambda=\inf_{u\in\mathcal{H}} J(u),$$

isto é, $J(u_0)=S_\lambda$. Logo, pelo Teorema do multiplicador de Lagrange, existe $k\in\mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla v\,dx-\lambda\int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 v\,dx=\frac{kp^*}{p}\int_\Omega |u_0|^{p^*-2}u_0 v\,dx,\quad \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tomando α de tal forma que $u_1=\alpha u_0$ e $\dfrac{kp^*\alpha^{p-p^*}}{p}=1$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla v\,dx-\lambda\int_\Omega |u_1|^{p-2}u_1 v\,dx=\int_\Omega |u_1|^{p^*-2}u_1 v\,dx,\quad \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde segue o resultado.

□

Observação 3.9. A demonstração desse último resultado pode ser feita de forma diferente, sem utilizar o Teorema da concentração de compacidade. Tal demonstração pode ser encontrada na nossa principal referência [GV89]. Nesse artigo, a estratégia dos autores Guedda e Veron foi utilizar um problema sub-crítico associado ao problema (3.24) e obter o resultado almejado através de um processo limite. As idéias principais são as seguintes:

Dado $p\leq t\leq p^*$, considere o funcional definido sobre $W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$

$$Q_\lambda^t(u)=\frac{\|\nabla u\|_p^p-\lambda\|u\|_p^p}{\|u\|_t^p}$$

e o conjunto $S^t=\inf_{u\neq 0}Q_\lambda^t(u)$. Além disso, para $t\in[p,p^*)$, considere o problema sub-crítico

$$\begin{cases}-\text{div}\left(|\nabla u_t|^{p-2}\nabla u_t\right)=\lambda u_t^{p-1}+S^t u_t^{t-1}\ \text{ em }\ \Omega\\ u_t>0\ \text{ em }\ \Omega\\ Q_\lambda^t(u_t)=S^t,\quad \|u_t\|_t=1.\end{cases}\tag{3.34}$$

Após provar a existência de solução fraca para o problema (3.34), faz-se necessário a verificação de que a função $t \longmapsto S^t$ é contínua à esquerda sobre $[p, p^*]$. Desta forma, podemos encontrar uma sequência não-decrescente (t_n) tal que $t_n \to p^*$ e $\lim\limits_{t_n \to p^*} S^{t_n} = S_\lambda$. No entanto, para obtermos o resultado almejado, devemos ter a garantia de que (u_{t_n}) convirja para uma função u em $C^{1,\alpha}(\Omega)$. Uma das formas de obter tal garantia é utilizar o Teorema (1.11).

Apêndice A

Regularidade $C^{1,\alpha}$ até a Fronteira e Unicidade de Solução

Na primeira seção do Capítulo 3 obtemos a Identidade de Pohozaev para soluções do problema degenerado (3.1). Para isso, consideramos uma perturbação do problema, donde retiramos a almejada identidade através de um processo limite. Neste apêndice, além de garantirmos tal convergência, provaremos um resultado de unicidade de solução, como aplicação dos resultados obtidos na seção 3.2 desta dissertação. Inicialmente, preocupemo-nos em garantir a existência de solução fraca para o problema (3.2).

Proposição A.1. *Existe $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema (3.2).*

Demonstração. Seja $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx - \int_\Omega f u\, dx.$$

Nota-se, facilmente, que o funcional J está bem definido. Vejamos que J é limitado inferiormente. Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx - \int_\Omega f u\, dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u\, dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \overline{C}\|u\|_p \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{W^{1,p}}^p - C\|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Nas passagens acima usamos as desigualdades de Hölder e Poincaré e a equivalência das normas $\|\nabla\,.\,\|_p$ e $\|\,.\,\|_{W^{1,p}}$. Se J fosse ilimitado inferiormente, existiria $(u_n) \subset W_0^{1,p}$ tal que $J(u_n) \to -\infty$. Da equação (A.1), como $C > 0$, temos necessariamente que $\|u_n\|_{W^{1,p}} \to \infty$. Porém, como $p > 1$, o crescimento de (A.1) é determinado pelo crescimento do fator $\|u_n\|^p_{W^{1,p}}$. Logo, $\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W^{1,p}} - C\|u_n\|_{W^{1,p}} \to \infty$, o que é uma contradição. Assim, faz sentido calcularmos

$$\eta := \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u).$$

Pela definição de ínfimo, existe $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $J(u_n) \to \eta$. Portanto, $J(u_n) \leq C$. Logo,

$$\begin{aligned}
C \;\geq\;& J(u_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx - \int_\Omega f u_n dx \\
\geq\;& \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega f u_n dx \\
\geq\;& \frac{1}{p}\|\nabla u_n\|_p^p - \overline{C}\|u_n\|_p \\
\geq\;& \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W^{1,p}} - C\|u_n\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, temos que $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq C$. Sendo $W_0^{1,p}$ reflexivo, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{(a menos de subsequência).}$$

Defina a aplicação $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$L(y) := \frac{1}{p}\left(\varepsilon + |y|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Pelo Teorema (1.27), segue que o funcional

$$F(w) = \int_\Omega L(\nabla w) dx = \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla w|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx$$

é fracamente semicontínuo inferiormente em $W^{1,p}(\Omega)$, uma vez que a aplicação L é convexa, pelo exemplo (1.19). Assim, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$F(u_0) \leq \liminf F(u_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \int_\Omega L(\nabla u_0)dx - \int_\Omega f u_0 dx = F(u_0) - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f u_n dx \\ &\leq \liminf F(u_n) - \limsup \int_\Omega f u_n dx \\ &\leq \liminf J(u_n) = \eta. \end{aligned}$$

Logo,

$$J(u_0) = \eta = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u).$$

Portanto, $J'(u_0)v = 0$, $\forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Isto é,

$$\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_0 \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

□

Proposição A.2. *Se $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca de (3.2), então $u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Demonstração. Basta tomar $a(\eta) = \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \eta$ na equação (1.2), utilizar a Proposição (1.13) e aplicar o Teorema (1.11). □

Observação A.3. Para a correta utilização dos resultados citados acima é necessário verificar que a função a satisfaz todas aquelas seis condições de crescimento e elipticidade. Em relação às condições **(iii)** e **(iv)**, a primeira se verifica com os mesmos cálculos presentes no exemplo (1.19) e a quarta condição será verificada abaixo. Quanto às demais, suas análises serão omitidas, por não demonstrarem dificuldades. Para isso, basta utilizar o lado direito da desigualdade (1.12). De fato, como

$$\frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(\eta) = (p-2)\left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-4}{2}} \eta_i \eta_j + \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \delta_{ij},$$

temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta)\right| &\leq \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \left[\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} + \frac{|p-2|}{\left(\varepsilon + |\eta|^2\right)} \sum_{i,j=1}^n |\eta_i \eta_j|\right] \\ &\leq \left(\varepsilon + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \left[n + C\frac{\eta^2}{\left(\varepsilon + |\eta|^2\right)}\right] \leq C\left(\varepsilon + |\eta|\right)^{p-2}. \end{aligned}$$

A seguir, provaremos que a regularidade $C^{1,\alpha}$ da solução do problema perturbado pode ser estendida até a fronteira. Esse resultado também pode ser encontrado no artigo [GV89] (nossa principal referência). No entanto, como a demonstração é feita utilizando-se o *Método da Reflexão Local*, que é um procedimento conhecido, as contas envolvidas são geralmente omitidas. Desta forma, faremos a tal extensão no que segue, com todos os detalhes, os quais achamos pertinentes.

Teorema A.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, com $\partial\Omega \in C^\infty$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e u_ε solução do problema perturbado*

$$\begin{cases} -div\left(\left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon\right) = f \quad em \quad \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.2}$$

Então,

$$u_\varepsilon \to u \;\; em \;\; C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \;\; com \;\; \alpha \in (0,1),$$

sendo u solução fraca do problema degenerado (3).

Demonstração. Sabemos que u_ε pertence ao espaço $C^2(\overline{\Omega})$ por [LU68]. Em particular, u_ε é solução fraca do problema (A.2). Para facilitar a notação, denotemos $u = u_\varepsilon$. Como estamos considerando Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^∞, da definição (1.4), temos que $\exists\ r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$B_r(x_0) \cap \Omega = \left\{x \in B_r(x_0)\,;\ x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right\}.$$

Seja $U = \Omega \cap B_r(x_0)$ e considere as cartas

$$\begin{array}{rccl} \phi: & U & \longrightarrow & B^+ \\ & x & \longmapsto & \phi(x) = \left(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \psi: & B^+ & \longrightarrow & U \\ & y & \longmapsto & \psi(y) = \left(y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n + \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right), \end{array}$$

sendo $B^+ = \phi(U)$.

Além disso, defina a função $g(y) = (y_1, \cdots, y_{n-1}, -y_n)$ e a composição $F : g(B^+) := B^- \to \Omega$, dada por

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \psi(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n).$$

Considere, também, a função

$$v(x) = \begin{cases} (u \circ \psi)(x) & \text{se} \quad x \in B^+ \\ -(u \circ F)(x) & \text{se} \quad x \in B^-. \end{cases}$$

Primeiramente, sendo u solução fraca de (A.2), temos, em particular,

$$\int_U \left(\varepsilon + |\nabla_x u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_x u \; \nabla_x \eta \, dx = \int_U f \eta \, dx, \;\; \forall \; \eta \in C_c^\infty(U).$$

Pelo Teorema de mudança de variáveis, tal igualdade torna-se

$$\int_{B^+} \left(\varepsilon + \left|\nabla_x u(\psi(y))\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_x u \left(\psi(y)\right) \nabla_x \eta \left(\psi(y)\right) dy = \int_{B^+} f\left(\psi(y)\right) \eta \left(\psi(y)\right) dy. \tag{A.3}$$

No entanto, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y_i} u(\psi(y)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\psi(y)) \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}(y),$$

donde segue que $\nabla_y u(\psi(y)) = \nabla_x u(x)\psi'$.

$$\therefore \;\; \nabla_x u(x) = \nabla_y u(\psi(y))\phi'.$$

Analogamente, obtemos

$$\nabla_x \eta(x) = \nabla_y \eta(\psi(y))\phi'.$$

Substituindo as igualdades obtidas acima em (A.3), obtemos

$$\int_{B^+} \left(\varepsilon + \left|\nabla_y u(\psi(y))\phi'\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_y u \left(\psi(y)\right) \phi' \cdot \nabla_y \eta \left(\psi(y)\right) \phi' dy = \int_{B^+} f\left(\psi(y)\right) \eta \left(\psi(y)\right) dy. \tag{A.4}$$

Logo, pela definição de v em B^+, podemos escrever

$$\int_{B^+} \left(\varepsilon + \left|\nabla_y v(y)\phi'\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_y v(y)\phi' \cdot \nabla_y \zeta(y)\phi' dy = \int_{B^+} f\left(\psi(y)\right) \zeta(y) dy, \tag{A.5}$$

sendo $\zeta = \eta \circ \psi \in C_c^\infty(B^+)$.

Agora, inspirados no procedimento acima, considere a matriz

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ \gamma_{x_1} & \cdots & -1 \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} \nabla\theta_1 \\ \vdots \\ \nabla\theta_n \end{pmatrix}.$$

Tal matriz é a derivada da composta $g \circ \phi$, uma vez que consideraremos, agora, a carta F. Daí, vamos analisar a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \int_{B^-} \left(\varepsilon + \left|\nabla_{\bar{y}} v(\bar{y})\,\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_{\bar{y}} v\,(\bar{y})\,\theta \cdot \nabla_{\bar{y}}\xi(\bar{y})\theta\, d\bar{y} \\ = & \int_{B^+} \left(\varepsilon + \left|\nabla_{\bar{y}}(v\circ g)(y)\,\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla_{\bar{y}}(v\circ g)(y)\theta \cdot \nabla_{\bar{y}}(\xi\circ g)(y)\theta\, dy, \end{aligned} \tag{A.6}$$

sendo $\xi \in C_c^\infty(B^-)$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i} v\left(g(y)\right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}_i}\left[-u\circ F\circ g(y)\right] = -\frac{\partial}{\partial \bar{y}_i}(u\circ\psi)(y) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{y}_i}(u\circ\psi)\left(g^{-1}(\bar{y})\right), \end{aligned}$$

pela regra da cadeia, obtemos que

$$\nabla_{\bar{y}} v\left(g(y)\right) = -\nabla_y(u\circ\psi)(y)\,\bar{I}, \tag{A.7}$$

sendo $\bar{I}$ a derivada da aplicação g, isto é,

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, levando em consideração que

$$\xi\circ g = \eta\circ F\circ g = \eta\circ\psi,$$

obtemos

$$\nabla_{\bar{y}}(\xi\circ g)(y) = \nabla_y(\eta\circ\psi)(y)\,\bar{I}. \tag{A.8}$$

Substituindo (A.7) e (A.8) em (A.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^-}\left(\varepsilon+\left|\nabla_{\bar y}v(\bar y)\,\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\nabla_{\bar y}v(\bar y)\theta\;\cdot\;\nabla_{\bar y}\xi(\bar y)\theta\,d\bar y\\
=\;&\int_{B^+}\left(\varepsilon+\left|-\nabla_y(u\circ\psi)(y)\,\bar I\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(-\nabla_y(u\circ\psi)(y)\bar I\theta\right)\cdot\left(\nabla_y(\eta\circ\psi)(y)\bar I\theta\right)dy\\
=\;&-\int_{B^+}\left(\varepsilon+\left|\nabla_y u(\psi(y))\,\phi'\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\nabla_y u\left(\psi(y)\right)\phi'\cdot\nabla_y\eta\left(\psi(y)\right)\phi' dy\\
=\;&-\int_{B^+}f\left(\psi(y)\right)\eta\left(\psi(y)\right)dy\\
=\;&-\int_{B^-}(f\circ F)(\bar y)\xi(\bar y)d\bar y.
\end{aligned}
$$

Acima, utilizamos (A.4) e o Teorema de mudança de variáveis, nessa ordem. Portanto, obtemos

$$\int_{B^-}\left(\varepsilon+\left|\nabla_{\bar y}v(\bar y)\,\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\nabla_{\bar y}v(\bar y)\theta\;\cdot\;\nabla_{\bar y}\xi(\bar y)\theta\,d\bar y=-\int_{B^-}f\left(F(\bar y)\right)\xi(\bar y)d\bar y. \tag{A.9}$$

A seguir, colocaremos as equações satisfeitas pela função v, em ambas as regiões B^+ e B^-, na notação de Tolksdorff [Tol84]. Comecemos com a equação (A.5). Como

$$\nabla_y v(y)\phi'=\sum_{i=1}^n v_{y_i}(y)\nabla\phi_i \quad \text{e} \quad \nabla_y\zeta(y)\phi'=\sum_{j=1}^n\zeta_{y_j}(y)\nabla\phi_j,$$

então

$$\left\langle\nabla_y v(y)\phi',\nabla_y\zeta(y)\phi'\right\rangle=\sum_{j=1}^n\zeta_{y_j}\left[\sum_{i=1}^n v_{y_i}\left\langle\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\right\rangle\right].$$

Substituindo em (A.5), obtemos

$$\sum_{j=1}^n\int_{B^+}\zeta_{y_j}\left[\sum_{i=1}^n\left(\varepsilon+\left|\nabla_y v(y)\phi'\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left\langle\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\right\rangle\frac{\partial v}{\partial y_i}(y)\right]dy=\int_{B^+}f\left(\psi(y)\right)\zeta(y)dy,$$

donde podemos escrever

$$a_j=\sum_{i=1}^n\left(\varepsilon+\left|\nabla_y v(y)\phi'\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left\langle\nabla\phi_i,\nabla\phi_j\right\rangle\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) \quad \text{em} \quad B^+.$$

Analogamente, podemos reescrever (A.9) na forma

$$\sum_{j=1}^n\int_{B^-}\xi_{\bar y_j}\left[\sum_{i=1}^n\left(\varepsilon+\left|\nabla_{\bar y}v(\bar y)\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left\langle\nabla\theta_i,\nabla\theta_j\right\rangle\frac{\partial v}{\partial\bar y_i}(\bar y)\right]d\bar y=\int_{B^-}\left[-f\left(F(\bar y)\right)\right]\xi(\bar y)d\bar y.$$

E, assim,

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon + \left|\nabla_{\bar{y}} v(\bar{y})\theta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \left\langle \nabla\theta_i, \nabla\theta_j \right\rangle \frac{\partial v}{\partial \bar{y}_i}(\bar{y}) \quad \text{em} \quad B^-.$$

Finalmente, definindo

$$a_j = a_j(x,\mu,\eta) = \begin{cases} \left(\varepsilon + |\eta\phi'|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_i \left\langle \nabla\phi_i, \nabla\phi_j \right\rangle \eta_i & \text{se } x \in B^+ \\ \left(\varepsilon + |\eta\theta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_i \left\langle \nabla\theta_i, \nabla\theta_j \right\rangle \eta_i & \text{se } x \in B^-, \end{cases}$$

temos que a função v satisfaz

$$\int_B \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_j(x,\mu,\eta)\vartheta_{x_j} \right\} dx = \int_B h(x)\vartheta(x)dx, \tag{A.10}$$

para toda $\vartheta \in C^\infty(B)$ com suporte compacto estritamente contido em B^+ ou em B^-, onde

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ \psi)(x) & \text{se} \quad x \in B^+ \\ -(f \circ F)(x) & \text{se} \quad x \in B^-. \end{cases}$$

Note que estamos diante de um problema, uma vez que precisamos que a equação (A.10) seja válida $\forall\, \vartheta \in C_c^\infty(B)$. A forma como encontramos para resolver essa situação, foi transferir o problema para o domínio original, uma vez que nessa região temos mais informações à respeito da solução u. Assim, dada $\varphi \in C_c^\infty(B)$, considere as funções

$$\varphi_1(x) = \varphi\left(\phi(x)\right) = \varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right), \quad \text{para} \quad x \in B^+ \quad \text{e}$$
$$\varphi_2(x) = \varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n + \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\right), \quad \text{para} \quad x \in B^-.$$

Logo, $\varphi_1 = \varphi_2$ sobre Γ, sendo $\Gamma = \psi\left(\operatorname{supp} \varphi \cap (\partial B^+ \cap \partial B^-)\right)$. Agora, usando o fato de que a equação

$$-\operatorname{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\right) = f \tag{A.11}$$

é válida em Ω, com $u \in C^2(\Omega)$, multiplicando (A.11) pelas funções φ_1 e φ_2 e integrando sobre $U \subset \Omega$, obtemos

$$-\int_U \operatorname{div}\left(\left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \varphi_i\right) = \int_U f\varphi_i - \int_U \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \nabla\varphi_i,$$

para $i = \overline{1,2}$. Aplicando o Teorema do divergente e usando o fato de que $\varphi_i(x) = 0$, para todo

$x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$, obtemos as seguintes funções

$$-\int_{\Gamma} \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \varphi_1 \nu \, ds = \int_U f\varphi_1 dx - \int_U \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \nabla\varphi_1 dx \quad \text{e} \tag{A.12}$$

$$\int_{\Gamma} \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \varphi_2 \nu \, ds = -\int_U f\varphi_2 dx - \int_U \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \nabla\varphi_2 dx. \tag{A.13}$$

Somando (A.12) e (A.13), temos

$$\int_U f\varphi_1 dx - \int_U f\varphi_2 dx - \int_U \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \nabla\varphi_1 dx + \int_U \left(\varepsilon + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \nabla\varphi_2 dx = 0.$$

Aplicando o Teorema de mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_{B^+} (f\circ\psi)(\varphi_1\circ\psi)dx \quad &- \quad \int_{B^-} (f\circ F)(\varphi_2\circ F)dx - \int_{B^+} \left(\varepsilon + |\nabla(u\circ\psi)|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla(u\circ\psi)\nabla(\varphi_1\circ\psi) \\ &+ \quad \int_{B^-} \left(\varepsilon + |\nabla(u\circ F)|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla(u\circ F)\nabla(\varphi_2\circ F)dx \;=\; 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_B h(x)\varphi(x)dx \quad &= \quad \int_{B^+} \left(\varepsilon + |\nabla v|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla v \nabla(\varphi_1\circ\psi) - \int_{B^-} \left(\varepsilon + |\nabla v|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla v \nabla(\varphi_2\circ F) \\ &= \quad \int_B \sum_{j=1}^n a_j \varphi_{x_j} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_B \sum_{j=1}^n a_j \varphi_{x_j} dx = \int_B h(x)\varphi(x)dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(B).$$

Além disso, precisamos provar que $v \in W_0^{1,p}(B)$, para que possamos utilizar o principal resultado de Tolksdorff [Tol84]. Como a limitação de v é evidente, preocupemo-nos com a existência de derivada fraca de v.

Para isso, seja $\varphi \in C_c^\infty(B)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_B v\varphi_{x_i}dx &= \int_{B^+} v\varphi_{x_i}dx + \int_{B^-} v\varphi_{x_i}dx \\
&= -\int_{B^+} v_{x_i}\varphi dx + \int_{\partial B^+} v\varphi \nu^i ds - \int_{B^-} v_{x_i}\varphi dx + \int_{\partial B^-} v\varphi \bar{\nu}^i ds \\
&= -\int_B v_{x_i}\varphi dx.
\end{aligned}$$

Acima, ν e $\bar{\nu}$ representam os vetores normais às fronteiras de B^+ e B^-, respectivamente. Desta forma, estamos nas condições do Teorema 1.11, o qual, juntamente com o Teorema de Arzelá-Áscoli, permite-nos afirmar que $u_\varepsilon \to w$ em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, sendo $w \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Mostremos que $w = u$, sendo u solução fraca do problema degenerado (3). De fato, sendo u_ε solução fraca de (3.2), sabemos que

$$\int_\Omega \left(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ na igualdade acima, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right)\nabla v dx = 0, \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, tomando $v = u - w$ na igualdade acima, segue da Proposição 1.15 que

$$|\nabla u - \nabla w| = 0 \ \text{ q.t.p. em } \Omega \quad \Longrightarrow \quad u = w.$$

$\square$

Para finalizar, provaremos um resultado de unicidade para soluções do problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = g(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.14}$$

Este resultado servirá como uma aplicação da teoria desenvolvida na seção 3.2 desta dissertação.

Teorema A.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, conexo e limitado, e g uma função contínua em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^+$ e que satisfaz*

$$\frac{g(x,\rho r)}{\rho^{p-1}} \leq g(x,r'), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad \rho \geq 1 \quad e \quad 0 \leq r \leq r'.$$

Se u_1 e u_2 são duas soluções de (A.14) em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que

$$\max_{\overline{\Omega}} u_1(x) = \max_{\overline{\Omega}} u_2(x),$$

então $u_1 \equiv u_2$.

Demonstração. Como g é não-negativa, segue da Proposição 3.3 que $u_1, u_2 \geq 0$ em Ω. E assim, de [Vaz84], somos deixados com duas possibilidades:

(i) $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$;

(ii) $u_1, u_2 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu}, \dfrac{\partial u_2}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$.

Como se ocorrer **(i)** o resultado é imediato, vamos assumir **(ii)** e considerar o conjunto

$$\Lambda_1 := \{\varepsilon > 0\,;\; \varepsilon u_1 < u_2 \text{ em } \Omega\}.$$

Afirmação 1: $\Lambda_1 \neq \emptyset$.
Para verificarmos tal afirmação, procedamos pelo absurdo. Então, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_\varepsilon \in \Omega$ tal que $\varepsilon u_1(x_\varepsilon) \geq u_2(x_\varepsilon)$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in \Omega$ tal que

$$0 < \frac{u_2(x_n)}{u_1(x_n)} \leq \frac{1}{n}.$$

Construímos, assim, uma sequência $\{x_n\} \subset \Omega$ tal que $x_n \to x_0 \in \partial\Omega$. Logo,

$$\frac{u_2(x_n)}{u_1(x_n)} \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, para cada $x_n \in \Omega$, considere $y_n \in \partial\Omega$ tal que $\dfrac{(x_n - y_n)}{|x_n - y_n|} := \nu_n$, isto é, o vetor normal à fronteira $\partial\Omega$ em y_n. Daí,

$$\frac{u_2(x_n)}{u_1(x_n)} = \frac{\dfrac{u_2(x_n) - u_2(y_n)}{|x_n - y_n|}}{\dfrac{u_1(x_n) - u_1(y_n)}{|x_n - y_n|}} = \frac{\nabla u_2(\phi_n)\nu_n}{\nabla u_1(\xi_n)\nu_n} \quad \longrightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu}(x_0)}{\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu}(x_0)} > 0,$$

donde segue o absurdo.

Afirmação 2: $\Lambda_1 \leq 1$.
A verificação desta afirmação é imediata da hipótese $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_1 = \max\limits_{\overline{\Omega}} u_2$.

Assim, podemos considerar $\varepsilon_1 = \sup \Lambda_1$ e definir $\phi = \varepsilon_1 u_1$. Logo, $\varepsilon_1 u_1 \leq u_2$ em Ω e

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\right) &= -\varepsilon_1^{p-1}\text{div}\left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right) = \varepsilon_1^{p-1} g(x, u_1) \\ &= \frac{g\left(x, \dfrac{1}{\varepsilon_1}\phi\right)}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)^{p-1}} \leq g(x, u_2). \end{aligned}$$

Acima, usamos a hipótese, com $0 \leq r = \phi \leq u_2 = r'$ e $\rho = \dfrac{1}{\varepsilon_1}$. Assim,

$$-\text{div}\left(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi\right) \leq -\text{div}\left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\right), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Como $\phi \leq u_2$ segue da Proposição 3.2 que o conjunto $K = \{x \in \Omega\,;\, \phi(x) = u_2(x)\}$ não pode ser compacto, a menos que seja vazio. Analisemos as possibilidades:
Primeiramente, suponha $K = \emptyset$. Nesse caso, temos que $\phi < u_2$ em Ω. Usando a mesma argumentação para provar (3.23) da Proposição 3.4, definindo $w = u_2 - \phi > 0$, obtemos que

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial \phi}{\partial \nu} < 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

Como $\phi < u_2$ em Ω, tome $x_n \to x_0 \in \partial\Omega$. Então

$$\frac{\phi(x_n)}{u_2(x_n)} \longrightarrow \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0)}{\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu}(x_0)},$$

conforme as contas presentes na Afirmação 1, página 68. Logo,

$$\frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0)}{\dfrac{\partial u_2}{\partial \nu}(x_0)} \leq 1,$$

o que é um absurdo. Suponha, agora, que $K \neq \emptyset$. Como K não é compacto, existe uma sequência $(x_n) \subset K$ tal que $x_n \to x_0 \in \partial\Omega$. Para $\eta > 0$, defina

$$\Omega_\eta = \left\{x \in \Omega\,;\ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) < \eta \text{ e } |\nabla u_2| > 0\right\}.$$

Note que $\Omega_\eta \neq \emptyset$ pois $u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Considere o conjunto

$$K_\eta := \left\{x \in \Omega_\eta\,;\ u_2(x) = \phi(x)\right\},$$

o qual é um conjunto aberto e não-vazio (pela definição de K). Logo, $\nabla u_2 = \nabla\phi$ em K_η. Agora, defina $w = u_2 - \phi$. Daí, temos que $w \geq 0$ em Ω e pelas mesmas contas que já fizemos anteriormente, obtemos

$$0 \leq g(x, u_2) - g(x, \phi) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) := Lw$$

em Ω. Em particular, $Lw \geq 0$ em Ω_η. Além disso, em K_η, temos que

$$a_{ij} = |\nabla u_2|^{p-4}\left(\delta_{ij}|\nabla u_2|^2 + (p-2)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right).$$

Novamente, a_{ij} representa os coeficientes da Hessiana de uma função convexa no ponto ∇u_2. Logo, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ \geq\ \sigma|\xi|^2 \quad \text{em } K_\eta.$$

Pela continuidade de ∇u_2 e $\nabla\phi$ em $\overline{\Omega}$, segue que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ \geq\ \gamma|\xi|^2 \quad \text{em } \Omega_\eta.$$

Pelo Teorema 8.19 de [GT01], segue que w é constante em Ω_η, isto é, $u_2 - \phi = C$. No entanto, $\partial\Omega_\eta \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, o que implica em $C = 0$. Portanto,

$$u_2 \equiv \varepsilon_1 u_1 \quad \text{em} \quad \Omega_\eta. \tag{A.15}$$

Analogamente, podemos considerar $\varepsilon_2 > 0$ como sendo o supremo do conjunto

$$\Lambda_2 := \{\varepsilon > 0\,;\ \varepsilon u_2 < u_1 \text{ em } \Omega\}.$$

Assim, teremos $0 < \varepsilon_2 \leq 1$, $\varepsilon_2 u_2 \leq u_1$ em Ω e

$$u_1 \equiv \varepsilon_2 u_2 \quad \text{em} \quad \Omega_{\eta'}, \text{ para algum } \eta' > 0. \tag{A.16}$$

Multiplicando (A.15) por ε_2 e (A.16) por ε_1, obtemos

$$\varepsilon_2 u_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_1 \text{ em } \Omega_\eta \quad \text{e} \quad \varepsilon_1 u_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 u_2 \text{ em } \Omega_{\eta'}.$$

Assim,

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2) u_2 = u_2 \quad \text{em} \quad \Omega_\eta \cap \Omega_{\eta'}.$$

Portanto, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Mas, como $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$, segue que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Logo, $u_1 \equiv u_2$ em Ω.

□

Referências Bibliográficas

[Aub76a] T. Aubin, *Equation differentielles non lineaires et problemes de yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[Aub76b] ______, *Problèmes isopérimétriques et espaces de sobolev*, J. Differential Geometry **11** (1976), no. 4, 573–598.

[BdSM] E. R. Barbosa and M. da Silva Montenegro, *Teoria de melhores constantes em análise geométrica: da escalar à vetorial.*

[BL83] H. Brezis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 88, 1983, pp. 486–490.

[BN83] H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents*, Communications on Pure and Applied Mathematics **36** (1983), no. 4, 437–477.

[DH02] O. Druet and E. Hebey, *The ab program in geometric analysis: sharp sobolev inequalities and related problems*, no. 761, Amer Mathematical Society, 2002.

[DiB82] E. DiBenedetto, *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Tech. report, Wisconsin Univ. Madison Mathematics research center, 1982.

[DPD03] M. Del Pino and J. Dolbeault, *The optimal euclidean L^p-sobolev logarithmic inequality*, Journal of Functional Analysis **197** (2003), no. 1, 151–161.

[Eva09] L. C. Evans, *Partial differential equations (graduate studies in mathematics, vol. 19)*, Instructor (2009).

[GT01] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. 224, Springer Verlag, 2001.

[GV89] M. Guedda and L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical sobolev exponents*, Nonlinear analysis **13** (1989), no. 8, 879–902.

[LU68] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, 1968.

[Per97] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations (1997).

[Sch84] R. Schoen, *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 479–495.

[Tal76] G. Talenti, *Best constant in sobolev inequality*, Annali di Matematica pura ed Applicata **110** (1976), no. 1, 353–372.

[Tol84] P. Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. of Diff. Equations **51** (1984), 126–150.

[Tru63] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3 **22** (1963), 265–274.

[Vaz84] J. L. Vazquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Applied Mathematics and Optimization **12** (1984), no. 1, 191–202.

[Yam60] H. Yamabe, *On a deformation of riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Journal of Mathematics **12** (1960), no. 1, 21–37.