

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
Jean Eduardo Sebold

**Métodos de Elementos Finitos de Nédélec para as  
Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo**

Curitiba, 2011.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
Jean Eduardo Sebold

**Métodos de Elementos Finitos de Nédélec para as  
Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná - UFPR, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira.

Curitiba, 2011.

*À minha família e amigos.*

# Agradecimentos

À Deus, à minha família pelo apoio, ao Professor Dr. Saulo Pomponet Oliveira pela orientação neste trabalho, à CAPES-REUNI e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná pelo apoio financeiro e pela oportunidade, respectivamente, aos Professores, aos Colegas de curso e a Banca Avaliadora.

# Resumo

Este trabalho trata dos métodos de elementos finitos de Nédélec para as equações de Maxwell harmônicas no tempo. Revisamos a obtenção das equações harmônicas a partir das equações de Maxwell completas, obtemos a formulação variacional e em seguida construímos o espaço de aproximação de Nédélec, cujas funções possuem a componente tangencial contínua nas interfaces entre elementos adjacentes. Tratamos do comportamento dispersivo da aproximação por elementos de Nédélec de primeira ordem em duas e três dimensões em termos da frequência temporal e do tamanho dos elementos da malha, obtendo uma forma explícita para a relação de dispersão discreta. Experimentos validam o desempenho Nédélec de ordem zero e de primeira ordem em um domínio bidimensional, onde pode-se verificar a dispersão da solução aproximada com respeito à solução exata.

**Palavras-chave:** *Elementos Finitos de Aresta; Dispersão Numérica; Equações de Maxwell; Elementos de Nédélec.*

# Abstract

This work concerns Nédélec finite element methods for time-harmonic Maxwell's equations. We review the derivation of the harmonic equations from full Maxwell's equations as well as their variational formulation, and build the Nédélec element space, whose functions have continuous tangential components along the interface of adjacent elements. We study the dispersive behavior of first-order Nédélec elements in two and three dimensions, in terms of the time frequency and the mesh element size, and present an explicit form for the discrete dispersion relation. Numerical experiments validate the performance of Nédélec elements of zeroth and first order in a two-dimensional domain, that also illustrates the dispersion of the approximate solution with respect to the exact solution.

**Keywords:** *Edge Finite Element; Numerical Dispersion; Discrete Dispersion Relation; Nédélec Elements.*

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Elementos Finitos Vetoriais . . . . .	2
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.3 Objetivos Principais . . . . .	4
1.4 Organização do Texto . . . . .	4
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>6</b>
2.1 Cálculo Vetorial . . . . .	6
2.1.1 Algumas Identidades Vetoriais e Diferenciais . . . . .	6
2.1.2 Funções Integráveis e Diferenciáveis . . . . .	7
2.1.3 Domínios Lipschitz . . . . .	8
2.1.4 Campo Gradiente . . . . .	9
2.1.5 O Divergente de um Campo Vetorial . . . . .	9
2.1.6 O Rotacional de Campo Vetorial . . . . .	10
2.1.7 Identidades Diferenciais sobre uma Superfície . . . . .	12
2.1.8 Identidades Integrais . . . . .	12
2.1.9 Transformação Covariante . . . . .	15
2.2 Espaços de Sobolev . . . . .	15
2.2.1 Notação Multi-índice . . . . .	16
2.2.2 Distribuições . . . . .	16
2.2.3 Derivada da Distribuição . . . . .	17
2.2.4 Derivada Fraca . . . . .	18
2.2.5 Espaços de Sobolev . . . . .	18
2.2.6 Espaços $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ e $H(\mathbf{div}, \Omega)$ . . . . .	19
2.2.7 Rotacional e Divergente em $(C(\Omega)')^3$ . . . . .	20
2.3 Método de Aproximação Racional . . . . .	21
2.3.1 Aproximação de Padé . . . . .	21

<b>3</b>	<b>Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo</b>	<b>23</b>
3.1	Dedução das Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo . . . . .	24
3.2	Equações Constitutivas para Meios Lineares . . . . .	26
3.3	Materiais Condutores . . . . .	26
3.4	Sistema de Primeira Ordem de Maxwell . . . . .	27
3.5	Condição de Divergência e Sistema de Segunda Ordem de Maxwell . . . . .	28
3.6	Formulação Variacional do Sistema de Maxwell de Segunda Ordem . . . . .	28
3.6.1	Formulação Variacional . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Elementos Finitos de Nédélec</b>	<b>32</b>
4.1	Descrição do Elemento de Nédélec . . . . .	33
4.1.1	Graus de Liberdade . . . . .	34
4.1.2	Definição dos Graus de Liberdade sobre um Elemento . . . . .	35
4.1.3	Funções de Base para Elementos de Whitney ( $p = 0$ ) . . . . .	36
4.1.4	Funções de Base para Elementos de Nédélec ( $p = 1$ ) . . . . .	38
4.2	Desempenho dos Elementos de Nédélec . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Propriedades Dispersivas dos Elementos de Nédélec</b>	<b>46</b>
5.1	Relação de Dispersão . . . . .	47
5.2	Dispersão Discreta para Elementos de Nédélec de Ordem Zero . . . . .	48
5.3	Análise de Dispersão de Elementos de Nédélec de Ordem Arbitrária . . . . .	55
5.4	Seleção do Parâmetro da Malha . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho faremos uso do Método dos Elementos Finitos com a ideia de aproximar soluções para equações que descrevem o fenômeno eletromagnético. Dentre as diversas aplicações do Método de Elementos Finitos ao eletromagnetismo, podemos destacar a telefonia celular [34], biomedicina [16] e nos métodos eletromagnéticos para geofísica de exploração [22]. Para tais aplicações convém utilizar uma classe diferenciada de Elementos Finitos como se segue.

Quando em alguma formulação numérica é necessário representar diretamente e de forma discretizada uma grandeza vetorial, a alternativa encontrada, quando utilizamos apenas funções de base do tipo nodal, é o tratamento em separado de cada componente do campo considerado, que individualmente reduzem-se a funções escalares.

Surge deste fato uma dificuldade, e que diz respeito à continuidade da grandeza vetorial discretizada entre elementos adjacentes da malha. Quando possuem uma face em comum, dois elementos adjacentes compartilham também os nós da malha, e pelo fato da aproximação ser realizada componente por componente, verifica-se que o uso desta abordagem implica a continuidade de todas as componentes da grandeza vetorial. O resultado final é que, se porventura cada um dos elementos pertencer a um meio material de composição diferente, a imposição de continuidade produz uma solução fisicamente incorreta. Tais soluções surgem por não se garantir, com o uso das funções de base nodais, a continuidade das derivadas das funções de interpolação entre os elementos da malha.

Felizmente, ao longo do tempo, alternativas para contornar estas dificuldades foram concebidas. Entre elas, destacam-se o desenvolvimento e o aprimoramento de técnicas caracterizadas pelo uso de uma outra variedade de elemento finito como alternativa às abordagens nodais originais. Tais alternativas surgiram nos trabalhos de Hassler Whitney [37] e Jean-Claude Nédélec [31].

Apesar de ter usado conjuntos de vetores de aresta em um contexto completamente diferente ao método dos elementos finitos desenvolvido neste trabalho, Whitney foi um dos primeiros a usar um espaço de polinômios vetoriais para gerar tais conjuntos [25]. Estes vetores de aresta ou elementos de ordem zero, já no contexto do método dos elementos finitos, constituem uma aproximação afim sobre elementos que possuem componentes tangenciais

constantes nas arestas. Na literatura é comum encontrarmos referências a estes elementos como Elementos de Whitney [25].

Um pouco mais tarde, Jean-Claude Nédélec apresentou algumas famílias de elementos finitos não-conformes em  $\mathbb{R}^3$ . Veremos posteriormente que uma destas famílias de elementos finitos, constitui elementos conformes no espaço  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ . A partir dessas observações algumas aplicações desses elementos na aproximação das equações de Maxwell e nas equações de elasticidade foram apresentadas em [31]. Esta inovadora variedade de elemento finito é conhecida por elementos finitos vetoriais, ou ainda, Elementos de Nédélec.

## 1.1 Elementos Finitos Vetoriais

O espaço de Sobolev  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  desempenha um papel central na teoria variacional das equações de Maxwell, pois de acordo com [25] este espaço corresponde ao espaço das soluções de energia finita, e deste modo podemos garantir a existência, unicidade e regularidade de soluções discretas fisicamente significativas [14]. Assim, é conveniente tomar elementos finitos neste espaço para obter uma classe de subespaços de elementos finitos adequados para o sistema de Equações de Maxwell. Outra característica deste espaço encontra-se na escolha da discretização de elementos finitos, que se faz necessária para que as componentes tangenciais do campo  $\mathbf{E}$  sejam contínuas através da interface do elemento, além disso, não há nenhuma obrigação imposta para que as componentes da normal sejam contínuas.

Elementos finitos vetoriais podem ser usados em geometrias consideradas complexas e também na presença de propriedades eletromagnéticas descontínuas. No caso das equações de Maxwell, se a permissividade elétrica  $\varepsilon$  é descontínua através da superfície de um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , é sabido da teoria eletromagnética que a componente tangencial do campo elétrico  $\mathbf{E}$  é contínua através dessa superfície, deste modo, é necessário que a componente tangencial do campo de aproximação  $\mathbf{E}_h$  também seja contínua. Escolhendo os elementos de Nédélec o que garante uma aproximação  $H(\mathbf{curl})$ -conforme, veremos que a componente tangencial do campo de aproximação  $\mathbf{E}_h$  será contínua sobre a superfície, no caso em que dois elementos da malha terem propriedades materiais distintas. Além disso, os elementos finitos de aresta possuem muitas propriedades matemáticas interessantes e desafiadoras. Tais propriedades são profundamente exploradas em [25, 2, 3, 18, 27], entre outros.

Iremos restringir nosso estudo aos elementos de Whitney e aos elementos de Nédélec de primeira ordem de uma maneira conveniente e aplicada, visando proporcionar uma compreensão inicial para os leitores interessados nos fundamentos desta teoria.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Vários autores têm considerado o comportamento dispersivo do método dos elementos finitos, entre os quais, os mais pertinentes para o presente trabalho são revisados a seguir.:

1. Christon, M. A. [9] considerou o comportamento dispersivo de uma variedade de

métodos de elementos finitos para a equação de onda de segunda ordem, e apresentou comparações numéricas entre a fase discreta, velocidades de grupo e os valores exatos.

2. Monk e Parrott [28] consideraram o comportamento dispersivo de elementos finitos de primeira ordem em elementos triangulares, para as equações de Maxwell, quando é feito um refinamento na malha.
3. Cohen e Monk [29] realizaram uma análise de dispersão de elementos do tipo Nédélec para as equações de Maxwell dependentes do tempo utilizando um conjunto com lumping da matriz de massa sobre o produto tensorial de malhas de duas e três dimensões.
4. Babuška e Ihlenburg [17] estudaram as propriedades dispersivas de elementos finitos de ordem superior para a equação de Helmholtz em uma dimensão, e obtiveram estimativas para a aproximação do método até quinta ordem em que  $\omega h < 1$ . Evidências numéricas foram apresentadas, as quais, levaram à conjectura de que os elementos de ordem  $p$  fornecem uma aproximação ordem- $2p$  da relação de dispersão quando o tamanho da malha  $h$  tende a zero.
5. Monk, P. [27] apresentou uma prova, baseada na dualidade, para a convergência do método dos elementos finitos de Nédélec aplicados em um problema de cavidade para as equações de Maxwell. Tal cavidade foi assumida como sendo um poliedro Lipschitz, e a malha foi considerada retangular, mas não uniforme.
6. Monk, P. [26] estudou o uso dos elementos finitos de Nédélec em  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  na aproximação das equações de Maxwell harmônicas no tempo sobre um domínio limitado. Esta análise mostrou-se um tanto complicada pelo fato de que a forma bilinear considerada não era coerciva. Esta dificuldade foi contornada pelo uso da Decomposição Discreta de Helmholtz do vetor erro.
7. Ainsworth, M. [2] demonstrou que a dispersão numérica exibe três diferentes tipos de comportamento, dependendo do tamanho da ordem do método em relação ao tamanho da malha e do número de onda. Estes comportamentos são descritos na seguinte sequência: Fase de Oscilação, Zona de Transição e Decaimento Super-Exponencial.
8. Ainsworth e Coyle [4] estudaram um conjunto de funções de base hierárquicas para a Descritização de Galerkin do espaço  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  para malhas híbridas contendo ambos quadriláteros e triângulos com uma ordem polinomial arbitrária não uniforme.
9. Ainsworth, M. [3] apresentou um argumento que mostra que a relação de dispersão discreta pode ser expressada em termos de uma aproximação da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão. Além disso, explicitou a relação de dispersão discreta em uma dimensão válida para ordens arbitrárias de aproximação.

## 1.3 Objetivos Principais

O objetivo deste trabalho é iniciar um estudo duradouro e aprofundado sobre o método de elementos finitos vetoriais para problemas de eletromagnetismo. O tema escolhido para iniciar este estudo foi a análise de dispersão dos elementos de Nédélec, em particular:

1. Revisar a dedução da equação de Maxwell harmônica de segunda ordem e discutir sua formulação variacional
2. Descrever os elementos Whitney e elementos Nédélec de primeira ordem, e mostrar seu desempenho em um domínio bidimensional.
3. Mostrar que a relação de dispersão discreta pode ser escrita em termos da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão, e estender este conceito para a relação de dispersão discreta para elementos Nédélec, com ênfase nos elementos de primeira ordem. Encontrar e analisar o erro na relação de dispersão discreta para elementos Nédélec, com ênfase nos elementos de primeira ordem.

## 1.4 Organização do Texto

O capítulo 2 do trabalho tratará de uma breve revisão sobre Cálculo Vetorial, onde serão abordados tópicos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos. Depois disso, faremos uma breve introdução com conceitos fundamentais para a definição de espaços de Sobolev. Apresentaremos também um método de aproximação usando uma função racional intitulada Aproximação de Padé, o qual será utilizada no capítulo 5 na apresentação dos resultados numéricos.

No capítulo 3, faremos a exposição das equações diferenciais que governam o fenômeno eletromagnético, as Equações de Maxwell. Com o intuito de examinar a propagação de uma onda eletromagnética em uma única frequência, e levando em conta que neste estudo as variações no tempo são harmônicas, faremos a apresentação das Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo.

O capítulo 4 tratará da descrição dos Elementos Finitos de Nédélec. As funções de base para elementos de Whitney e elementos de Nédélec, serão construídas por meio de bases hierárquicas. O método de elementos finitos com ambas as bases foram implementados no pacote Matlab e verificados com um exemplo numérico semelhante ao apresentado em [3].

O objetivo do capítulo 5 será analisar as propriedades de dispersão dos elementos Nédélec de ordem zero do método dos elementos finitos para as equações de Maxwell Harmônicas no Tempo. Daremos também uma forma explícita para a relação de dispersão discreta, juntamente com uma expressão explícita para o termo principal do erro quando  $h$ , o tamanho do elemento, tende a zero, o que confirma a conjectura de Thompson e Pinsky para o método de primeira ordem [36]. Uma conclusão interessante, como veremos, é que a relação de dispersão discreta em duas dimensões pode ser obtida em termos da relação de dispersão

discreta da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão [3]. Verificaremos isso para elementos Nédélec de ordem zero. Forneceremos informações sobre o nível de refinamento da malha e a ordem de aproximação mais adequada para controlar os efeitos dispersivos.

Um sumário do trabalho e das principais conclusões e perspectivas para trabalhos futuros é apresentado no capítulo 6. A teoria e os resultados preliminares apresentados servem como ponto de partida para estudos sobre elementos de Nédélec de alta ordem em duas e três dimensões. Outra proposta para trabalhos futuros é estender o trabalho para elementos de alta ordem ou tridimensionais. Neste sentido o apêndice faz uma releitura da análise de dispersão apresentada em [3] para Elementos de Nédélec em três dimensões e de ordem arbitrária.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Trataremos neste capítulo de uma breve revisão sobre Cálculo Vetorial [19], onde serão abordados tópicos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos. Depois disso, faremos uma breve introdução com conceitos fundamentais para a definição de espaços de Sobolev [1]. Apresentaremos também um método de aproximação usando uma função racional intitulada Aproximação de Padé [24]. Teremos como principal meta a apresentação das notações usadas no trabalho.

### 2.1 Cálculo Vetorial

As equações de Maxwell descrevem campos vetoriais, de modo que diversos conceitos e propriedades do cálculo vetorial são necessárias neste estudo. Iniciemos estabelecendo as notações para produto de vetores no espaço.

#### 2.1.1 Algumas Identidades Vetoriais e Diferenciais

##### Produto Escalar e Produto Vetorial

**Definição 2.1.1 (Produto Escalar)** *Sejam os vetores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Definimos o produto escalar entre os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  como*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

**Definição 2.1.2 (Produto Vetorial)** *Sejam os vetores  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Definimos o produto vetorial entre os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  como*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Para os vetores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  e para  $A \in M_{3 \times 3}$ , onde  $M_{3 \times 3}$  é o conjunto de matrizes  $3 \times 3$  invertíveis com entradas reais, são válidas as seguintes identidades:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}))\mathbf{d} - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))\mathbf{c} \quad (2.9)$$

$$(A\mathbf{a} \times A\mathbf{b}) = \det(A)A^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (2.11)$$

onde  $\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$ .

**Demonstração:** As propriedades acima seguem de maneira elementar das definições 2.1.1 e 2.1.2 (vide [19]). A propriedade (2.10), entretanto, é menos imediata e convém ser detalhada.

$$((A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) \cdot A\mathbf{u}) = (A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})),$$

onde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  são arbitrários. Agora pela identidade (2.4), tem-se que

$$\begin{aligned} (A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})) &= \det(A\mathbf{u} \ A\mathbf{v} \ A\mathbf{w}) \\ &= \det((A) \ (\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w})) \\ &= \det(A)\det(\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}) \\ &= \det(A)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Por outro lado,  $(A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})) = (\mathbf{u} \cdot A^T(A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}))$ . Logo,

$$\mathbf{u} \cdot A^T(A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det(A)(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \quad \text{para } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ arbitrário.}$$

o que implica que

$$(A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det(A)A^{-T}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

## 2.1.2 Funções Integráveis e Diferenciáveis

Vamos definir alguns espaços de funções. Para qualquer conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , com  $N = 1, 2, 3$ , definimos:

- $L^p(\Omega)$  é o conjunto das funções  $u$  aplicadas em  $\Omega$ , para as quais,  $|u|^p$  é integrável. Mais precisamente, são as funções tais que:

$$\int_{\Omega} |u|^p d\Omega < \infty$$

O mais importante caso é quando  $p = 2$ , cujo conjunto  $L^2(\Omega)$  é denominado conjunto das funções quadrado integráveis em  $\Omega$ .

- $C^k(\Omega)$  é o conjunto das funções que são  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis em  $\Omega$ ;
- $C^k(\bar{\Omega})$  é o conjunto das funções  $u \in C^k(\Omega)$ , cujas derivadas são uniformemente contínuas e limitadas até ordem  $k$ ;

Suponha que uma função  $\phi$  definida em  $\Omega$  é diferente de zero apenas em pontos pertencentes a  $K \subset \Omega$ . Logo, chamamos  $\bar{K}$ , o fecho de  $K$ , de suporte de  $\phi$ .

**Definição 2.1.3** Dizemos que uma função  $\phi$  definida sobre  $\Omega$  tem suporte compacto, se o seu suporte  $\bar{K}$  é um conjunto limitado em  $\Omega$ .

**Definição 2.1.4** Definimos  $C_0^K(\Omega)$  como sendo o espaço de todas as funções  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis, as quais juntamente com suas derivadas, tem suporte compacto em  $\Omega$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição 2.1.5** Definimos  $C_0^\infty(\Omega)$  como sendo o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis, as quais juntamente com suas derivadas, tem suporte compacto em  $\Omega$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ .

### 2.1.3 Domínios Lipschitz

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio com contorno  $\Gamma$ . Seja  $\mathbf{x}_0$  um ponto arbitrário de  $\Gamma$ , o qual podemos tomar, para algum  $\epsilon > 0$ , uma bola  $B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$ . Na sequência, estabelecemos um sistema de coordenadas  $(w_1, w_2, \dots, w_N)$  tal que  $\Gamma \cap B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$  possa ser expressada como

$$w_1 = f(w_2, w_3, \dots, w_N), \quad \text{onde } f \text{ é uma função definida sobre } \Omega.$$

Dizemos que  $\Gamma$  é Lipschitz contínuo se  $f$  é Lipschitz contínua, isto é, se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(\mathbf{w}) - f(\boldsymbol{\eta})| < C|\mathbf{w} - \boldsymbol{\eta}|,$$

onde  $\mathbf{w} = (w_2, w_3, \dots, w_N)$  e  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_N)$ . Ou ainda, se  $\Gamma \cap B(\mathbf{x}_0; \epsilon)$  for o gráfico de uma função Lipschitz contínua, então  $\Gamma$  é dito ser um contorno Lipschitz contínuo [25]. Além disso, devemos denominar  $\Omega$  de Domínio Lipschitz sempre que seu contorno for Lipschitz Contínuo.

## 2.1.4 Campo Gradiente

Seja um campo escalar  $f = f(x, y, z)$  diferenciável no domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . As derivadas parciais de primeira ordem de  $f$  existem neste domínio e estas formam as componentes do vetor gradiente do campo escalar  $f$ , ou seja

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

ou ainda,

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

onde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  são vetores unitários canônicos. Por conveniência representamos o operador  $\nabla$  na forma de um vetor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Um fato importante é que  $\nabla f$  aponta na direção do máximo crescimento de  $f$ .

### Propriedades do Gradiente

Se  $f$  e  $g$  são campos escalares, então

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Se  $f$  é um campo escalar e  $c$  é uma constante, então

- $\nabla(cf) = c\nabla f$

## 2.1.5 O Divergente de um Campo Vetorial

Seja  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  um campo vetorial em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , e  $v_x, v_y$  e  $v_z$  são funções escalares diferenciáveis em  $\Omega$ . Representamos o *divergente* deste campo vetorial pelo produto interno entre  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{v}$ , ou seja

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x, v_y, v_z) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

onde  $v_x, v_y$  e  $v_z$  são funções escalares diferenciáveis em  $\Omega$ .

### Propriedades do Divergente

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são campos vetoriais, então

- $\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}$

Se  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial e  $f$  é uma função escalar, então

- $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla f \cdot \mathbf{u})$

## 2.1.6 O Rotacional de Campo Vetorial

Dado um campo vetorial  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  em um domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  representamos o *rotacional* deste campo vetorial pelo produto vetorial entre  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  e  $\mathbf{v}$ , ou seja

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

### Propriedades do Rotacional

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são campos vetoriais, então

- $\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}$

Se  $\mathbf{u}$  é um campo vetorial e  $f$  é uma função escalar, então

- $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + \nabla f \times \mathbf{u}$

### Identidades Diferenciais

Sejam  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $f$  funções suaves, vetoriais e escalar, respectivamente. São válidas as seguintes identidades:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \tag{2.12}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \tag{2.13}$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{2.14}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \tag{2.15}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{2.16}$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \tag{2.17}$$

O Laplaciano em três dimensões é definido por

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.18}$$

## Gradiente de Superfície

**Definição 2.1.6** *Seja  $S$  uma superfície com contorno suave e vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . Para uma função escalar  $f \in H^1(S)$  definimos o gradiente de superfície  $\nabla_S f$  via uma representação paramétrica de  $S$ . Suponha que  $\mathbf{x} \in S$  possa ser escrito como*

$$\mathbf{x} = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))^T,$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são as coordenadas de alguma superfície que coincide com parte, senão com toda a superfície  $S$ . Deste modo, nesta superfície,  $\nabla_S f \in L_t^2(S)$  é definido por

$$\nabla_S f = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j},$$

onde  $g^{ij}$  é a  $(i, j)$ -ésima entrada da matriz inversa da matriz  $G$  dada por

$$G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \quad \text{com } i, j = 1, 2$$

e  $L_t^2(S) = \{\mathbf{u} \in (L^2(S))^3; \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sobre } S\}$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário.

Uma importante observação é que o gradiente de superfície e o gradiente estão relacionados por uma função escalar  $f$  que é diferenciável em uma vizinhança de  $S$  por

$$\nabla f|_S = \nabla_S f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n},$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ . Segue da identidade vetorial (2.23), que veremos adiante, que  $(\mathbf{n} \times \nabla f) \times \mathbf{n} = \nabla_S f$  sobre  $S$ .

## Divergente de Superfície

Tendo definido o gradiente de superfície, podemos definir o divergente de superfície como o operador  $\nabla_S \cdot : L_t^2(S) \rightarrow H^1(S)'$  que satisfaz

$$\int_S \nabla_S \cdot \mathbf{v} f \, d\Omega = - \int_S \mathbf{v} \cdot \nabla_S f \, d\Omega \quad \forall f \in H^1(S),$$

onde  $H^1(S)'$  é o dual de  $H^1(S)$ , ou seja, se  $g \in H^1(S)'$ , temos que  $g : H^1(S) \rightarrow \mathbb{R}$ .

## O Escalar Rotacional de Superfície

Podemos denotar o escalar Rotacional de superfície por  $\nabla_S \times : L_t^2(S) \rightarrow H^1(S)'$ . Assim, se  $\mathbf{v} \in L_t^2(S)$ , então a seguinte expressão é satisfeita

$$\int_S \nabla_S \times \mathbf{v} f \, d\Omega = \int_S \mathbf{v} \cdot (\nabla_S f \times \mathbf{n}) \, d\Omega \quad \forall f \in H^1(S)$$

**Observação 2.1.1** *Se  $S$  denota um domínio Lipschitz no plano  $(x, y)$ , então para a função vetorial  $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ , temos que o escalar rotacional de superfície fica definido por*

$$\nabla_S \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \tag{2.19}$$

## O Vetor Rotacional de Superfície

Podemos denotar o vetor Rotacional de superfície por  $\vec{\nabla}_S \times : H^1(S) \rightarrow L_t^2(S)$  e defini-lo por

$$\vec{\nabla}_S \times f = \nabla_S f \times \mathbf{n} \quad \forall f \in H^1(S).$$

**Observação 2.1.2** *Se  $S$  denota um domínio Lipschitz no plano  $(x, y)$ , então para dada função escalar  $\phi = \phi(x, y)$  definida sobre  $S$  temos o vetor rotacional de superfície definido por*

$$\vec{\nabla}_S \times \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

Esta definição é motivada pelo fato de que  $\vec{\nabla}_S \times \phi = -\mathbf{n} \times \nabla_S \phi = -\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} \times \nabla \phi) \times \mathbf{n}]$ .

## Produto Vetorial no Plano $(x, y)$

Sejam  $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$  e  $\mathbf{v} = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  vetores no plano  $\mathbb{R}^2$ . Vamos estender a definição do produto vetorial 2.1.2 para estes vetores da seguinte forma

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_2(x, y)v_1(x, y) - u_1(x, y)v_2(x, y) \quad (2.21)$$

Esta definição é consistente com (2.19) e (2.20), e é motivada pelo fato de que, dados os vetores  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$ , temos que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_1 - u_1v_2)\mathbf{k}, \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $z$ .

## 2.1.7 Identidades Diferenciais sobre uma Superfície

Seja  $S$  uma superfície com contorno suave e vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  e sejam  $\mathbf{v}$  e  $f$  funções suaves, vetorial e escalar, respectivamente, definidas numa vizinhança de  $S$ . Seguem as seguintes identidades:

$$\nabla_S f = (\mathbf{n} \times \nabla f|_S) \times \mathbf{n} \quad (2.23)$$

$$\vec{\nabla}_S \times f = -\mathbf{n} \times \nabla_S f \quad (2.24)$$

$$\nabla_S \times \mathbf{v} = -\nabla_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (2.25)$$

$$\nabla_S \cdot \mathbf{v} = \nabla_S \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \quad (2.26)$$

$$\nabla_S \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})|_S \quad (2.27)$$

## 2.1.8 Identidades Integrais

Agora vamos fazer uma breve revisão de algumas identidades integrais básicas para nosso estudo. Iniciemos com o Teorema da Divergência de Gauss para um domínio Lipschitz.

**Teorema 2.1.1 (Teorema da Divergência)** : Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , com contorno Lipschitz  $\Gamma$  e vetor unitário externo  $\mathbf{n}$ . Seja  $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$  um campo vetorial. Temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [35].

**Corolário 2.1.1 (Identidades de Green)** : Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio Lipschitz limitado com contorno  $\Gamma$  e vetor normal unitário externo  $\mathbf{n}$ .

(1) Se  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}w \, d\Gamma$$

(2) Se  $w \in C^1(\bar{\Omega})$  e  $p \in C^2(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} w \, d\Gamma$$

(3) Se  $w \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $p \in C^2(\bar{\Omega})$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p w - p \nabla^2 w \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} w - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} p \, d\Gamma$$

(4) Suponha  $\mathbf{u}, \phi \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ , então

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \times \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \cdot \phi \, d\Gamma$$

**Demonstração:** A ideia é utilizar o Teorema da Divergência e algumas identidades diferenciais.

(1) Do Teorema da Divergência, para um campo vetorial  $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$  podemos escrever

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \, d\Gamma$$

Tomando  $\mathbf{F} = \mathbf{u}w$  e usando a identidade  $\nabla \cdot (\mathbf{u}w) = \nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u}$ , temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{u}w) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}w) \, d\Gamma$$

e assim,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}w) \, d\Gamma$$

integrando a soma  $\nabla w \cdot \mathbf{u} + w \nabla \cdot \mathbf{u}$  separadamente, tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}w \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{u} + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}w) \, d\Gamma$$

(2) Na identidade (1) escolha  $\mathbf{u} = \nabla p$ .

(3) Tome a seguinte identidade, garantida por (2)

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w p \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla p \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} p \, d\Gamma$$

agora, basta subtrair esta identidade de (2).

(4) No Teorema da Divergência escolha  $\mathbf{F} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\phi}$  e use as identidades (2.16), e (2.11) para o contorno. ■

**Corolário 2.1.2 (Teorema de Stokes no Plano)** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$  um domínio Lipschitz limitado com vetor tangente unitário  $\mathbf{t}$  a  $\Gamma$ . Se  $\mathbf{v} \in (C^1(\bar{S}))^2$  e  $w \in C^1(\bar{S})$ , então*

$$\int_S (\nabla_S \times \mathbf{v}) w \, d\Omega = \int_S \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} w \, d\Gamma$$

**Demonstração:** Dados  $\mathbf{v} \in (C^1(\bar{S}))^2$ ,  $w = w(x_1, x_2) \in C^1(\bar{S})$  e  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , o vetor normal unitário externo. Seja  $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{S}))^2$  um campo vetorial tal que

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (wv_2, -wv_1)$$

Tem-se pelo Teorema da Divergência que

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (2.28)$$

Por outro lado, note que  $\mathbf{v}w = (-u_2, u_1)$ . Assim, se  $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)$  é o vetor tangente unitário correspondente a  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ , então

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t}$$

logo, podemos escrever (2.28) como

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma$$

Agora, usando as observações dadas na subseção 2.1.4, encontramos que

$$\nabla_S \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}_S \times w = \left( \frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)$$

logo,

$$(\nabla_S \times \mathbf{v})w = w \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - w \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (2.29)$$

além disso, observe que

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w = (v_1, v_2) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = v_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (2.30)$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ , usemos a definição dada à  $\mathbf{u}$  para obtermos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial(wv_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(wv_1)}{\partial x_2} \\ &= w \frac{\partial(v_2)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial(w)}{\partial x_1} - w \frac{\partial(v_1)}{\partial x_2} - v_1 \frac{\partial(w)}{\partial x_2}\end{aligned}$$

De (2.29) e (2.30), tem-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = (\nabla_S \times \mathbf{v})w - \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w$$

e portanto,

$$\int_S (\nabla_S \times \mathbf{v})w \, d\Omega = \int_S \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_S \times w \, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{v}w \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma$$

■

## 2.1.9 Transformação Covariante

Consideremos um vetor tangente  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^N$  e tomemos  $E_i$ , com  $i = 1, \dots, N$ , como suas componentes. Seja  $e_i$ , com  $i = 1, \dots, N$  uma base para  $\mathbb{R}^N$ . Agora sobre uma outra base  $e'_i$ , com  $i = 1, \dots, N$ , para  $\mathbb{R}^N$ , tomemos as componentes  $E'_i$ , com  $i = 1, \dots, N$  de algum vetor em  $\mathbb{R}^N$  de modo que

$$\mathbf{E} = \sum_i E_i e_i = \sum_i E'_i e'_i$$

suponha ainda que

$$E_i = \frac{dx_i}{d\lambda} \quad e \quad E'_i = \frac{dx'_i}{d\lambda},$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro. Se expressarmos as novas componetes  $E'_i$  em termos das componentes anteriores  $E_i$ , então, de acordo com [19], tem-se

$$E'_i = \frac{dx'_i}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} E_j \quad (2.31)$$

Esta é a forma explícita da transformação chamada transformação covariante.

## 2.2 Espaços de Sobolev

Faremos, agora, uma breve introdução sobre espaços de Sobolev. Tais conceitos são fundamentais para a compreensão do trabalho. A ideia desta seção é proporcionar uma rápida explanação sobre este assunto. Consideraremos ainda, nesta seção,  $N = 2, 3$ .

## 2.2.1 Notação Multi-índice

Seja  $\mathbb{Z}_+^N$  o conjunto de todas as  $n$ -uplas de inteiros não negativos. Um elemento de  $\mathbb{Z}_+^N$  é denotado por  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ , onde cada  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Denotemos  $|\boldsymbol{\alpha}|$  como a soma das componentes de  $\boldsymbol{\alpha}$  e a derivada de uma função  $\phi \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , por  $D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi$ , tal que

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Por exemplo, se  $N = 2$  e  $\boldsymbol{\alpha} = (2, 1)$ , então

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi = \frac{\partial^3\phi}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

Assim, se  $|\boldsymbol{\alpha}| = m$ , então  $D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi$  será chamada de  $m$ -ésima derivada parcial de  $\phi$ .

## 2.2.2 Distribuições

Definimos uma distribuição num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  como um funcional linear limitado aplicado em  $C_0^\infty(\Omega)$ . Ou seja, uma distribuição é um mapeamento de  $C_0^\infty(\Omega)$  para  $\mathbb{R}$ . Denotemos o espaço das distribuições por  $C_0^\infty(\Omega)'$ .

**Definição 2.2.1** : Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser localmente integrável se para todo conjunto limitado  $K \subset \Omega$  tem-se  $f \in L^1(K)$ , ou seja

$$\int_K |f(\mathbf{x})| d\Omega < \infty$$

Para essa função podemos definir uma distribuição  $F \in C_0^\infty(\Omega)'$  associada por

$$F : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$F(\phi) = \int_\Omega f\phi d\Omega \quad \text{onde, } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Considerando que o suporte de  $\phi$  é  $K \subset \Omega$ , logo

$$|F(\phi)| = \left| \int_\Omega f\phi d\Omega \right| = \left| \int_K f\phi d\Omega \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in K} |\phi(\mathbf{x})| \int_K |f(\mathbf{x})| d\Omega$$

isto mostra que  $F$  é limitado e dizemos que  $F$  é uma distribuição gerada por  $f$ . Uma distribuição que é gerada por uma função localmente integrável é dita distribuição regular.

Segue abaixo, duas propriedades de espaços vetoriais e uma de sobre convergência de operadores

### Espaços Vetoriais

Sejam  $S, F \in C_0^\infty(\Omega)'$  e  $c \in \mathbb{R}$ , logo

- $(S + T)(\phi) = S(\phi) + F(\phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega);$
- $(cF)(\phi) = cF(\phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega);$

## Convergência de Operadores

Sejam  $F_n \in C_0^\infty(\Omega)'$  e  $c \in \mathbb{R}$ , logo

- $F_n \rightarrow F$  em  $C_0^\infty(\Omega)'$  se e somente se  $F_n(\phi) \rightarrow F(\phi)$  em  $\mathbb{R}$ .

### 2.2.3 Derivada da Distribuição

Podemos definir a derivada de uma distribuição de tal forma que a distribuição deva ser gerada por uma função continuamente diferenciável, assim a derivada da distribuição coincide com a derivada usual. Para isso, utilizemos o Corolário 2.1.1, identidade 1, o qual expressa que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Gamma} u v n_i d\Gamma = \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.32)$$

é válida para todas as funções  $u, v \in C^1(\Omega)$ , onde  $n_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor normal  $\mathbf{n}$  externo à  $\Gamma$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Este teorema pode ser generalizado para resultados envolvendo derivadas parciais de ordem  $m$  de funções  $u, v \in C^m(\Omega)$ , com  $|\alpha| = m$ . Desta forma (2.32) fica

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) v d\Omega = (-1)^m \int_{\Omega} u (D^\alpha v) d\Omega + \int_{\Gamma} H(u, v) d\Gamma, \quad (2.33)$$

onde  $H(u, v)$  é uma expressão envolvendo uma soma dos produtos de  $u$  e  $v$  de ordem menor que  $m$ .

Agora, consideremos  $u \in C^m(\Omega)$  e  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Desde de que  $\phi$  seja identicamente nula fora de seu suporte  $\bar{K} \subset \Omega$ , obtemos pela integração por partes

$$\int_{\Omega} (D^\alpha u) \phi d\Omega = (-1)^m \int_{\Omega} u (D^\alpha \phi) d\Omega \quad (2.34)$$

Sabendo que toda função contínua é localmente integrável, logo para  $u \in C^m(\Omega)$  definimos a distribuição  $U$  gerada por  $u$  por

$$U(\phi) = \int_{\Omega} u \phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.35)$$

considerando que  $D^\alpha \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , temos

$$U(D^\alpha \phi) = \int_{\Omega} u D^\alpha \phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.36)$$

Além disso,  $D^\alpha u$ ,  $|\alpha| = m$  é contínua, logo esta também é capaz de gerar uma distribuição satisfazendo

$$D^\alpha U(\phi) = \int_{\Omega} (D^\alpha u) \phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.37)$$

substituindo (2.36) e (2.37) em (2.34), tem-se

$$D^\alpha U(\phi) = (-1)^m U(D^\alpha \phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.38)$$

A partir deste momento a notação “ $u$  está associada a uma distribuição  $U$ ” será dispensada, simplesmente escreveremos  $u$  para ambas quantidades. Ficará claro no contexto quando  $u$  é tratado como função e quando é tratado como distribuição, por exemplo: na expressão  $\int_{\Omega} u\phi dx$ ,  $u$  denota uma função, enquanto que em  $u(\phi)$ , com  $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ,  $u$  denota uma distribuição à qual  $u$  está associada. Assim, (2.38) fica

$$D^{\alpha}u(\phi) = (-1)^m u(D^{\alpha}\phi) \quad \text{com } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (2.39)$$

Logo, a derivada da distribuição  $u$  é definida como sendo a distribuição denotada por  $D^{\alpha}u$  que satisfaz (2.39).

## 2.2.4 Derivada Fraca

Suponha que a função  $u$  é localmente integrável e que a distribuição gerada por  $u$  possui derivadas de todas as ordens, em particular a derivada da distribuição  $D^{\alpha}u$  é definida como em (2.39). Se  $D^{\alpha}u$  é uma distribuição regular, então naturalmente, é caracterizada desta forma porque foi gerada por uma função  $D^{\alpha}u$  localmente integrável tal que

$$D^{\alpha}u(\phi) = \int_{\Omega} (D^{\alpha}u)\phi d\Omega \quad \text{com } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (2.40)$$

De (2.36) e (2.37), temos que as funções  $u$  e  $D^{\alpha}u$  estão relacionadas por

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\Omega = (-1)^m \int_{\Omega} u(\mathbf{x})(D^{\alpha}\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad \text{com } |\alpha| = m \quad (2.41)$$

**Definição 2.2.2** Dizemos que a função  $D^{\alpha}u$  obtida neste processo é a  $m$ -ésima derivada fraca da função  $u$ .

Podemos ver que, se  $u$  é suficientemente suave tal que  $u \in C^m(\Omega)$ , então a sua derivada fraca  $D^{\alpha}u$  coincide com a sua derivada no sentido usual para  $|\alpha| \leq m$ .

## 2.2.5 Espaços de Sobolev

Seja  $m > 0$  um inteiro e seja  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definição 2.2.3** O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , é definido como sendo a coleção de todas as funções em  $L^p(\Omega)$  tais que todas as derivadas fracas até ordem  $m$  estão também em  $L^p(\Omega)$ , ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \quad \text{onde } |\alpha| \leq m\}$$

Para o caso  $p = 2$ , temos a seguinte notação:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | D^{\alpha}u \in L^2(\Omega), \quad \text{onde } |\alpha| \leq m\}$$

Podemos definir o seguinte produto interno para  $H^m(\Omega)$

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u D^{\alpha} v d\Omega \quad \text{para } u, v \in H^m(\Omega)$$

Este produto interno induz a norma de Sobolev  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$  definida por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = (u, u)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u)^2 d\Omega$$

observe que se  $m = 0$ , então

$$\|u\|_{H^0(\Omega)}^2 = (u, u)_{H^0} = \int_{\Omega} (u)^2 d\Omega$$

e assim,  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Além disso, podemos escrever

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{L^2}$$

e portanto,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^2}^2 \quad (2.42)$$

A correspondente semi-norma, usada na análise de interpolação do método dos elementos finitos é dada por

$$|u|_{H^m(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} (D^{\alpha} u)^2 d\Omega$$

### 2.2.6 Espaços $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ e $H(\mathbf{div}, \Omega)$

Vamos definir agora alguns espaços de funções importantes em nosso estudo. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio Lipschitz e seja  $\Gamma$  seu contorno.

**Definição 2.2.4** *Definimos o espaço  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  por*

$$H(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3; \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\}$$

com norma definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2$$

**Definição 2.2.5** *Definimos o espaço  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  por*

$$H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}, \Omega); \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma\}$$

**Definição 2.2.6** *Definimos o espaço  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  por*

$$H(\mathbf{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3; \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$$

com norma definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

O produto interno  $L^2(\Omega)$  pode ser estendido para funções vetoriais. Suponha que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  estejam ambos em  $(L^2(\Omega))^3$ , logo podemos definir o produto interno em  $(L^2(\Omega))^3$  como

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 u_j v_j \, d\Omega. \quad (2.43)$$

A norma de uma função vetorial  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (L^2(\Omega))^3$  é definida por

$$\|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^3} = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.44)$$

Algumas inclusões, devido à atuação dos operadores, gradiente, divergente e rotacional, podem ser dadas de acordo com o diagrama de Rham [25].

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\mathbf{curl}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} H(\mathbf{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} H_0(\mathbf{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega)/\mathbb{R},$$

onde  $L^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_{\Gamma} u \, d\Gamma = 0 \right\}$ .

### 2.2.7 Rotacional e Divergente em $(C(\Omega)')^3$

Vamos definir o rotacional e o divergente para uma função vetorial  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in (C_0^\infty(\Omega)')^3$ , onde  $v_i = (x_1, x_2, x_3)$ , com  $i = 1, 2, 3$ , é uma função escalar em  $C_0^\infty(\Omega)'$ . Para o rotacional tem-se que

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \quad (2.45)$$

onde as derivadas que aparecem em (2.45) são entendidas no sentido distribucional. Em particular, aplicando a identidade integral (4) do Corolário 2.1.1, tem-se que

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \phi) = (\mathbf{v}, \nabla \times \phi) \quad \forall \phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \quad (2.46)$$

Na sequência definimos o divergente. Seja  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \in (C_0^\infty(\Omega)')^3$ , onde  $v_i(x_1, x_2, x_3)$ , com  $i = 1, 2, 3$ , é uma função escalar em  $C_0^\infty(\Omega)'$ , logo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

Aplicando a identidade integral (1) do Corolário 2.1.1, vemos que

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}, \phi) = -(\mathbf{v}, \nabla \phi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.48)$$

## 2.3 Método de Aproximação Racional

Nesta seção introduziremos um método de aproximação racional para funções.

### 2.3.1 Aproximação de Padé

A ideia central é explicitar uma função racional  $R$  que será a aproximação de uma função  $f$  numa pequena parte de um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , onde ambas estão definidas. Por exemplo, a aproximação racional para  $f$  sobre  $\Omega = [a, b]$  é o quociente de dois polinômios,  $P_M(x)$  e  $Q_N(x)$ , de graus  $M$  e  $N$ , respectivamente. Usaremos a notação  $R_{M,N}(x)$  para denotar tal quociente.

$$R_{M,N}(x) = \frac{P_M(x)}{Q_N(x)} \quad (2.49)$$

O objetivo é fazer com que o erro máximo na aproximação seja tão pequeno quanto possível. A aproximação, aqui desenvolvida, é conhecida como aproximação de Padé.

O método de Padé requer que  $f$  seja contínua no domínio, e que sua derivada, por conveniência, seja contínua no ponto  $x = 0$ .

Os polinômios usados em (2.49) são os seguintes:

$$P_M(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Mx^M \quad (2.50)$$

$$Q_N(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Nx^N \quad (2.51)$$

No caso em que  $N = 0$ , a aproximação fica sendo apenas o polinômio de Maclaurin para  $f(x)$ . Para um valor fixado de  $M + N$  o erro fica menor quando  $M$  e  $N$  são iguais, ou quando  $M > N$ , ou seja, quando o grau de (2.50) é maior do que o de (2.51).

Note que  $q_0 = 1$ , isso fará com que a função racional (2.49) tenha  $M + N + 1$  coeficientes a serem determinados.

Vamos assumir que nossa função  $f$  seja contínua e suave em torno do ponto  $x = 0$ . Podemos escrever a expansão de  $f$ , em torno do ponto zero, como

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots \quad (2.52)$$

em seguida formaremos a seguinte expressão de diferença:

$$f(x)Q_N(x) - P_M(x) = Z(x) \quad \text{com} \quad Z(x) = \sum_{j=M+N+1}^{\infty} z_jx^j \quad (2.53)$$

Substituindo as expressões (2.50),(2.51) e (2.52), obtemos

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_jx^j \right) \left( \sum_{j=0}^N q_jx^j \right) - \left( \sum_{j=0}^M p_jx^j \right) = \sum_{j=M+N+1}^{\infty} z_jx^j \quad (2.54)$$

usando a propriedade distributiva, podemos organizar a expressão acima como um sistema

de  $M + N + 1$  de equações lineares com  $k = 0, 1, \dots, M + N$ . Em  $k = M + N$ , será feito o truncamento de (2.52), assim, conclui-se que quanto maior for o valor de  $M + N$ , melhor será a aproximação. Vamos separar o sistema linear em dois conjuntos de equações: as  $M$  primeiras são

$$\begin{aligned}
a_0 - p_0 &= 0 \\
q_1 a_0 + a_1 - p_1 &= 0 \\
q_2 a_0 - p_1 a_1 + a_2 - p_2 &= 0 \\
q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 &= 0 \\
&\vdots \\
q_N a_{M-N-1} + q_{N-1} a_{M-N} + \dots + a_{M-1} - p_{M-1} &= 0 \\
q_N a_{M-N} + q_{N-1} a_{M-N+1} + \dots + a_M - p_M &= 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

enquanto que as  $N$  equações seguintes são

$$\begin{aligned}
q_N a_{M-N+1} + q_{N-1} a_{M-N+2} + \dots + q_1 a_M + a_{M+1} &= 0 \\
q_N a_{M-N+2} + q_{N-1} a_{M-N+3} + \dots + q_1 a_{M+1} + a_{M+2} &= 0 \\
&\vdots \\
q_N a_M + q_{N-1} a_{M+1} + \dots + q_1 a_{M+N-1} + a_{M+N} &= 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Note que em cada equação a soma dos subscritos nos fatores de cada produto são os mesmos, e esta soma cresce consecutivamente de 0 a  $M + N$ . As  $N$  equações em (2.56) envolvem apenas as incógnitas  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , que devem ser resolvidas primeiro, só assim, as equações (2.55) são usadas sucessivamente para encontrar  $p_0, p_1, \dots, p_M$ .

Na literatura podemos encontrar a seguinte notação para identificar a Aproximação de Padé

$$[M/N]_{f(x)},$$

onde  $M$  é o grau do polinômio do numerador da função racional,  $N$  é o grau do seu denominador e  $f(x)$  representa a imagem da função  $f$  a ser aproximada.

## Capítulo 3

# Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo

O campo eletromagnético se caracteriza por quatro funções vetoriais de posição e tempo: o campo elétrico  $\mathcal{E}$ , o vetor deslocamento  $\mathcal{D}$ , o campo magnético  $\mathcal{H}$  e a indução magnética  $\mathcal{B}$ . As leis básicas do campo eletromagnético são regidas pelas equações de Maxwell que envolvem as quatro funções vetoriais. As equações que constituem o sistema de equações de Maxwell são a lei Faraday da Indução Eletromagnética

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0 \quad (3.1)$$

a Lei de Gauss do magnetismo

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$

a pela Lei de Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathcal{H} + \mathcal{J} = 0 \quad (3.2)$$

e a Lei de Gauss da eletricidade

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho$$

com  $\rho$  assumindo ser a densidade de carga elétrica e  $\mathcal{J}$  a densidade de corrente elétrica.

Queremos fazer uma análise de propagação eletromagnética em uma frequência única, por exemplo, em muitos sistemas envolvendo ondas eletromagnéticas as variações no tempo são da forma cosenoidal e podem ser expressas por  $e^{-i\omega_0 t}$ , assim, o problema do tempo-dependente, equações acima, pode ser reduzido para o sistema de Maxwell harmônico no tempo, como veremos a seguir.

### 3.1 Dedução das Equações de Maxwell Harmônicas no Tempo

Se a radiação tem frequência temporal  $\omega_0$ , onde  $\omega_0 > 0$ , os campos, elétrico e magnético, harmônicos no tempo ficam relacionados com os campos, elétrico e magnético dependentes do tempo por

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z)) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z)) \quad (3.4)$$

podemos ainda estender esta relação para

$$\mathcal{D}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{D}}(x, y, z)) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{B}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z)) \quad (3.6)$$

$$\mathcal{J}(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{J}}(x, y, z)) \quad (3.7)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\rho}(x, y, z)), \quad (3.8)$$

onde  $\text{Re}(z)$  representa a parte real do número  $z \in \mathbb{C}$ . O símbolo  $\text{Re}(\cdot)$  possui as seguintes propriedades para funções complexas  $A_1$  e  $A_2$ .

$$(P1) \quad \text{Re}(A_1) + \text{Re}(A_2) = \text{Re}(A_1 + A_2)$$

$$(P2) \quad \text{Re}(aA_1) = a\text{Re}(A_1) \quad \text{com } a \in \mathbb{R}$$

$$(P3) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \text{Re}(A_1) = \text{Re} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_i} \right)$$

**Lema 3.1.1** : Se  $\text{Re}(A_1 e^{-i\omega_0 t}) = \text{Re}(A_2 e^{-i\omega_0 t})$  para todo  $t$ , então  $A_1 = A_2$ .

**Demonstração:** Assuma  $A_1 \neq A_2$ . Considere que  $A_1 = a + bi$  e que  $A_2 = c + di$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Como a igualdade  $\text{Re}(A_1 e^{-i\omega_0 t}) = \text{Re}(A_2 e^{-i\omega_0 t})$  é válida para todo  $t$ , logo para  $t = 0$ , temos que  $\text{Re}(A_1) = \text{Re}(A_2)$ . Tomando agora  $t = \pi/2\omega$ , tem-se que  $\text{Im}(A_1) = \text{Im}(A_2)$ , o que contradiz a escolha  $A_1 \neq A_2$ . Portanto,  $A_1 = A_2$ . ■

Tomando agora a equação (3.3) e aplicando o operador  $\nabla \times$  juntamente com a propriedade (P3), obtemos:

$$\nabla \times \mathcal{E} = \nabla \times \text{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}) = \text{Re}(\nabla \times e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}})$$

Por outro lado, se considerarmos a equação (3.1) e substituirmos  $\mathcal{B}$  usando a igualdade na equação (3.6) seguida da propriedade (P3), teremos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}) \\
&= -\operatorname{Re}\left(\frac{\partial e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}\right) \\
&= \operatorname{Re}(i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}})
\end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{Re}(\nabla \times e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{E}}) = \operatorname{Re}(i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} \tilde{\mathbf{B}})$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Segue do Lema 3.1.1 que

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega_0 \tilde{\mathbf{B}} \quad (3.9)$$

Procedendo desta maneira, podemos escrever (3.2) e as Leis de Gauss para a eletricidade e o magnetismo da forma

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\omega_0 \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{J}} \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho} \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.12)$$

Assim, (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) formam o sistema de Equações de Maxwell Harmônico no Tempo.

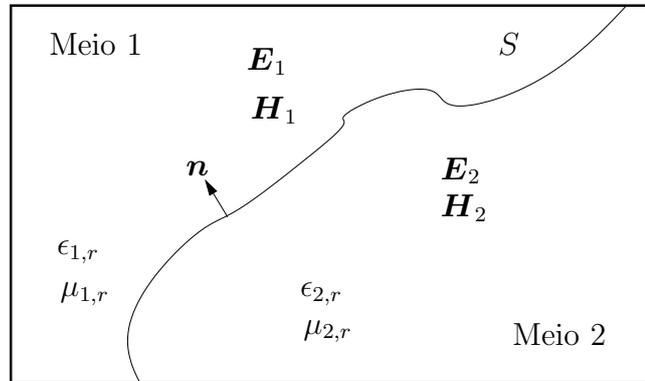


Figura 3.1: Dois meios separados por uma interface  $S$ .

Considerando dois meios, como na figura 3.1, segue abaixo as condições na interface  $S$  para os campos harmônicos no tempo:

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_1) = \tilde{\mathbf{J}}_S \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{D}}_2 - \tilde{\mathbf{D}}_1) = \tilde{\rho}_S \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \tilde{\mathbf{B}}_1) = 0 \quad (3.16)$$

## 3.2 Equações Constitutivas para Meios Lineares

As equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) serão estendidas por duas leis constitutivas que relacionam  $\tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{H}}$  à  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ , respectivamente. Estas leis dependem das propriedades do material no domínio ocupado pelo campo eletromagnético. No vácuo ou no ar os campos são relacionados pelas equações

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\mathbf{D}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}},$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são chamadas de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, respectivamente. Os valores de  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  dependem do sistema de unidades usado. No sistema padrão, SI, de unidades tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1} \\ \epsilon_0 &\approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1} \end{aligned}$$

Além disso, a velocidade da luz no vácuo, denotada por  $c$ , é dada por  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1}$ . Em materiais heterogêneo e isotrópicos, os quais são mais comum na prática, onde o domínio do campo eletromagnético é constituído de diferentes materiais, as leis constitutivas ficam

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}, \quad (3.17)$$

onde  $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$  e  $\mu = \mu(x, y, z)$  são funções escalares de posição.

## 3.3 Materiais Condutores

As duas equações constitutivas (3.17) são semelhantes entre si, pois relacionam dois a dois os vetores do campo,  $\tilde{\mathbf{E}}$  e  $\tilde{\mathbf{D}}$ , os "vetores elétricos", e  $\tilde{\mathbf{H}}$  e  $\tilde{\mathbf{B}}$ , os "vetores magnéticos". Existe ainda uma terceira equação constitutiva, esta relaciona um vetor do campo com a densidade de corrente. Conhecemos esta equação como Lei de Ohm e definimos sua expressão por

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a, \quad (3.18)$$

onde  $\sigma = \sigma(x, y, z)$  é uma função de posição não-negativa denotada como sendo a condutividade do material e  $\mathbf{J}_a$  descreve a densidade de corrente elétrica aplicada. Tomando as três equações constitutivas podemos reescrever as equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) da seguinte forma:

(i) Usando (3.9) e  $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}$  obtemos:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega_0 \mu \tilde{\mathbf{H}}$$

(ii) Aplicando  $\nabla \cdot$  em (3.10), temos pela identidade (2.13), que:

$$i\omega_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}$$

agora,  $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}$  e a Lei de Ohm, tem-se:

$$\nabla \cdot (\epsilon \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega_0} \nabla \cdot (\sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a)$$

(iii) Usando  $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}$  e a lei de Ohm em (3.10), temos:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - (\sigma \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_a) + i\omega_0 \epsilon \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$$

(iiii) Usando  $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{B}}$  em (3.12), temos

$$\nabla \cdot \mu \tilde{\mathbf{H}} = 0$$

### 3.4 Sistema de Primeira Ordem de Maxwell

De acordo com [11] podemos definir ainda os campos elétrico e magnético harmônicos no tempo, respectivamente, por

$$\mathbf{E} = \epsilon_0^{1/2} \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \mu_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}$$

Além disso, se definirmos a permeabilidade e a permissividade relativas por

$$\epsilon_r = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \quad \text{e} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3.19)$$

podemos escrever a equação (i) como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega_0 \mu \epsilon_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}} \\ &= i\omega_0 \mu \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{H}}{\mu_0^{1/2}} \\ &= i\omega_0 \mu_r \mu_0 \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{H}}{\mu_0^{1/2}} \\ &= i\omega_0 \mu_r \mu_0^{1/2} \epsilon_0^{1/2} \mathbf{H} \\ &= i\kappa \mu_r \mathbf{H} \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\kappa \mu_r \mathbf{H}, \quad (3.20)$$

onde  $\kappa = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , e a equação (iii) multiplicada por -1 como

$$\begin{aligned} -\mathbf{J}_a &= -i\omega_0 \mu \epsilon \tilde{\mathbf{E}} - i^2 \frac{\omega_0}{\omega_0} \sigma \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\ &= -i\omega_0 \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\ &= -i\omega_0 \epsilon_0 \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega_0} \right) \right] \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\ &= -i\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{E}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \\ &= -i\omega_0 \epsilon_0^{1/2} \epsilon_r \epsilon_0^{1/2} \frac{\mathbf{E}}{\epsilon_0^{1/2}} - \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \end{aligned}$$

Agora multiplicando  $\mu_0^{1/2}$ , tem-se

$$\begin{aligned} -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2} &= -i\omega_0 \epsilon_0^{1/2} \epsilon_r \mu_0^{1/2} \mathbf{E} - \nabla \times \mu_0^{1/2} \tilde{\mathbf{H}} \\ &= -i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

Logo,

$$-i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2}, \quad (3.21)$$

onde  $\kappa = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Assim, o sistema de primeira ordem de Maxwell é forma do por

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\kappa \mu_r \mathbf{H} = \mathbf{0} \\ -i\epsilon_r \kappa \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2} \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.5 Condição de Divergência e Sistema de Segunda Ordem de Maxwell

Aplicando o operador divergente em (3.20) e (3.21), temos o que definimos como condição de divergência

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{E} = -\frac{1}{\kappa^2} \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \mu_r \mathbf{H} = 0, \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{F} = i\kappa \mu_0^{1/2} \mathbf{J}_a$ . Agora, isolando  $\mathbf{H}$  em (3.20) e em seguida substituindo em (3.21), obtemos:

$$-i\kappa \epsilon_r \mathbf{E} - \nabla \times \left( \frac{1}{i\kappa \mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\mathbf{J}_a \mu_0^{1/2}$$

Multiplicando por  $-i\kappa$  temos o Sistema de Maxwell de Segunda Ordem

$$-\kappa^2 \epsilon_r \mathbf{E} + \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad (3.25)$$

### 3.6 Formulação Variacional do Sistema de Maxwell de Segunda Ordem

O Método dos Elementos Finitos está baseado na formulação variacional ou formulação fraca de problemas de valor de contorno. Antes de iniciar a discretização do sistema de Maxwell, precisamos, portanto, estabelecer uma formulação variacional adequada [25, 33, 20].

#### 3.6.1 Formulação Variacional

Vamos assumir que  $\Omega$  é um domínio Lipschitz limitado em  $\mathbb{R}^2$  com contorno  $\Gamma$ . A partir de agora, por questão de conveniência, estaremos assumindo que o campo elétrico em (3.25)

está no vácuo ou no ar. Logo, de acordo com (3.19),

$$-\omega^2 \epsilon_r \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{F} \quad \text{sobre } \Omega, \quad (3.26)$$

onde,  $\omega^2 = \omega_0 \epsilon_0 \mu_0$  e  $\epsilon_r = (1 + \frac{i\sigma}{\omega})$ . Consideremos o problema (3.26) sujeito à seguinte condição de contorno:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3.27)$$

onde,  $\mathbf{t}$  é um vetor tangente unitário a  $\Gamma$  no sentido anti-horário.

Como as equações de Maxwell envolvem funções complexas no regime harmônico, devemos adaptar para o campo complexo os espaços e produtos definidos. Por exemplo, o produto interno em  $(L_2(\Omega))^2$  passa a ser definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \quad (3.28)$$

Aqui adotaremos, tanto para o operador escalar rotacional de superfície  $\nabla_S \times$  quanto para o operador vetor rotacional de superfície  $\vec{\nabla}_S \times$ , o símbolo  $\nabla \times$  sem o sobrescrito  $S$  e sem a seta. Multipliquemos (3.26) por  $\bar{\phi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ , e em seguida integremos sobre  $\Omega$  para obter a seguinte equação

$$-\omega^2 (\epsilon_r \mathbf{E}, \phi) + (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}, \phi) = (\mathbf{F}, \phi) \quad \forall \phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega). \quad (3.29)$$

Na sequência, para o corolário 2.1.2 façamos as seguintes escolhas:

- $\xi = \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}$ ;
- $\mathbf{v} = \bar{\phi}$ ;

Seja  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  o vetor normal unitário exterior a  $\Gamma$ . Temos que o vetor tangente no sentido anti-horário é dado por  $\mathbf{t} = (n_2, -n_1)$ . Além disso, temos de (2.21) que

$$\begin{cases} \mathbf{t} \cdot \phi = n_2 \phi_1 - n_1 \phi_2 \\ \mathbf{n} \times \phi = n_2 \phi_1 - n_1 \phi_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

**Observação 3.6.1** *Devido à identidade (3.30) alguns autores [3, 6] definem o espaço  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  (vide definição 2.2.5) na forma*

$$H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}, \Omega); \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

Segue de (2.19), (2.20) e o corolário 2.1.2 que

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}, \phi) = (\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \phi) \quad \forall \phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega). \quad (3.31)$$

Portanto, de acordo com a identidade (3.31), (3.29) fica

$$-\omega^2(\epsilon_r \mathbf{E}, \phi) + (\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \phi) = (\mathbf{F}, \phi) \quad \forall \phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \quad (3.32)$$

Na sequência, vamos revisar resultados teóricos a respeito de formulações variacionais abstratas a fim de discutir a existência e unicidade do problema (3.32).

**Definição 3.6.1 (Forma Sesquilinear)** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Hilbert. Um mapeamento  $a(\cdot, \cdot) = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  é chamado uma forma sesquilinear se*

$$a(\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v}, \phi) = \alpha_1 a(\mathbf{u}, \phi) + \alpha_2 a(\mathbf{v}, \phi), \quad \text{onde } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \text{ com } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{X} \text{ e } \phi \in \mathcal{X}.$$

$$a(\mathbf{u}, \beta_1 \phi + \beta_2 \chi) = \overline{\beta_1} a(\mathbf{u}, \phi) + \overline{\beta_2} a(\mathbf{u}, \chi), \quad \text{onde } \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C} \text{ com } \mathbf{u} \in \mathcal{X} \text{ e } \phi, \chi \in \mathcal{X}.$$

Um exemplo de uma forma sesquilinear é o produto interno em  $(L^2(\Omega))^2$  definido em (3.28).

**Definição 3.6.2 (Forma Sesquilinear Coerciva)** *Uma forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot) = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\mathcal{X}$  é um espaço de Hilbert, é sesquilinear coerciva se existe uma constante  $\alpha > 0$  independente de  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$  tal que*

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}.$$

**Definição 3.6.3 (Forma Sesquilinear Limitada)** *Uma forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot)$  definida sobre  $\mathcal{X}$ , um espaço de Hilbert, é dita limitada se existe uma constante  $C > 0$  independente de  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$  tal que*

$$|a(\mathbf{u}, \phi)| \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \|\phi\|_{\mathcal{X}} \quad \forall \mathbf{u}, \phi \in \mathcal{X}. \quad (3.33)$$

**Teorema 3.6.1 (Lema de Lax-Milgram)** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Hilbert e seja  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma sesquilinear limitada e coerciva sobre  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Se  $g \in \mathcal{X}'$ , então existe um único  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$  tal que*

$$a(\mathbf{u}, \phi) = g(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{X} \quad (3.34)$$

onde  $\mathcal{X}'$  é o conjunto dos funcionais lineares sobre  $\mathcal{X}$ . Além disso, existe uma constante  $C > 0$  independente de  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$  tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}} \leq C \|g\|_{\mathcal{X}'}$$

Este teorema é demonstrado em [33].

Seguindo a notação dos resultados acima e tendo em vista a equação (3.32), definimos  $\mathcal{X} = H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ ,  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\epsilon_r \mathbf{u}, \mathbf{v})$  e  $g(\phi) = (\mathbf{F}, \phi)$ . Para o problema (3.32) podemos vamos distinguir dois casos:

### Caso 1

Se  $\sigma > 0$  em  $\Omega$ , então podemos escrever que (3.29) possui uma única solução para qualquer  $\omega$  e  $\mathbf{F} \in (L_2(\Omega))^2$ . Neste caso podemos escrever o lado esquerdo de (3.32) como uma forma sesquilinear que será coerciva em  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  [26]. Isto garante que (3.32) possui uma única solução para qualquer  $\omega$  e  $\mathbf{F} \in (L_2(\Omega))^2$ .

## Caso 2

Se  $\sigma = 0$  em  $\Omega$ , então (3.32) não terá solução para um conjunto infinito discreto de valores de  $\omega$ , os quais são chamados ressonâncias. Neste caso, a forma sesquilinear definida pelo lado esquerdo de (3.32) não será coerciva [26]. Para contornar este problema, podemos usar a teoria de Fredholm para fornecer condições sobre as quais garantiremos a existência e unicidade de uma solução [25, Seção 4.7].

# Capítulo 4

## Elementos Finitos de Nédélec

Neste capítulo vamos tratar da discretização das equações de Maxwell harmônicas pelo método de elementos finitos. Seja  $\mathcal{M}$  uma partição de  $\Omega$  em quadriláteros ou hexaedros, tais que a intersecção não-vazia entre elementos distintos é, ou uma face em comum, ou uma aresta, ou um vértice. Cada elemento  $K \in \mathcal{M}$  é imagem de um elemento de referencia  $\hat{K} = (-1, 1)^N (N = 2, 3)$  através de uma bijeção diferenciável  $\mathbf{F}_K : \hat{K} \rightarrow K$ . Um elemento finito no sentido de Ciarlet [10], é representado por uma tripla  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$ , como se segue abaixo.

- $K$  é a geometria do elemento, podendo ser um quadrilátero, hexaedro, etc.
- $\mathcal{P}$  espaço de funções definidas sobre  $K$ , geralmente um espaço de polinômios.
- $\Sigma$  é um conjunto de funcionais lineares sobre  $\mathcal{P}$ .

enquanto que o elemento finito de referência é dado pela tripla  $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$  descrita por

- $\hat{K}$  é a geometria do domínio de  $\mathbf{F}_K$ , podendo ser um quadrilátero, hexaedro, etc.
- $\hat{\mathcal{P}}$  é um espaço de funções definidas sobre  $\hat{K}$ , geralmente um espaço de polinômios.
- $\hat{\Sigma}$  é um conjunto de funcionais lineares sobre  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Um elemento  $\alpha$  do conjunto de funcionais lineares  $\Sigma$  (ou  $\hat{\Sigma}$ ) é denominado **grau de liberdade**. Um grau de liberdade geralmente é associado a algum ente geométrico do elemento  $K$  (ou  $\hat{K}$ ), como um vértice ou uma aresta (ver figuras 4.1 e 4.2).

Dizemos que o elemento finito  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  é unisolvente se

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \quad \alpha_i(\mathbf{p}) = 0, \quad \forall \alpha_i \in \Sigma$$

implicar que  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ . Além disso, um elemento finito é dito ser  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -conforme se para qualquer  $\alpha_i \in \Sigma$  definido apenas sobre a aresta  $\gamma$ ,  $\alpha_i(\mathbf{p}) = 0, \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$ , implicar que  $\mathbf{n} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$  sobre a aresta  $\gamma$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à aresta  $\gamma$ .

## 4.1 Descrição do Elemento de Nédélec

Daremos, a partir de agora, uma atenção especial para os elementos finitos bidimensionais. Definimos o espaço de polinômios  $\hat{\mathcal{P}}$  associado ao elemento de Nédélec de ordem  $p$  sobre elemento de referência  $\hat{K} = (-1, 1)^2$  como sendo

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathbb{E}_p = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); E_1 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{p,p+1}\} \text{ e } E_2 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{p+1,p}\} \right\},$$

sendo  $\mathbb{Q}_{p,q}$  o conjunto dos monômios de grau menor ou igual a  $p$  em  $\hat{x}$  e de grau menor ou igual a  $q$  em  $\hat{y}$ , isto é

$$\mathbb{Q}_{p,q} = \{\hat{x}^i \hat{y}^j : 0 \leq i \leq p; 0 \leq j \leq q\}$$

**Observação 4.1.1** *Temos que  $\hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{E}_p$  implica  $\nabla \times \hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{Q}_{p,p}$*

Seja  $\{L_k\}_{k=0}^p$  o conjunto dos polinômios de Legendre, os quais são dados pela fórmula de Rodrigues para  $0 \leq k \leq p$

$$L_k(\xi) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^{(k)}}{d\xi^k} [(\xi^2 - 1)^k]$$

além disso, definimos também o conjunto  $\{l_k\}_{k=0}^{p+1}$  como

- $l_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$
- $l_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$
- $l_2(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_1(t) dt = \frac{\xi^2 - 1}{2}$
- $l_k(\xi) = \int_{-1}^{\xi} L_{k-1}(t) dt \quad k = 3, \dots, p+1$

Note que  $l_k(-1) = l_k(1) = 0$  para  $k > 1$ . De fato, para  $\xi = -1$  a afirmação é clara. Para  $\xi = 1$ , tem-se que

$$l_k(1) = \int_{-1}^1 L_{k-1}(t) dt = \int_{-1}^1 L_{k-1}(t) L_0(t) dt, \quad (4.1)$$

que é zero pela ortogonalidade dos polinômios de Legendre.

Este conjunto será utilizado para definir funções de bases hierárquicas, que são úteis para métodos de elementos finitos adaptativos [5].

### 4.1.1 Graus de Liberdade

Iniciemos definindo os graus de liberdade sobre um elemento de referência  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^2$ , de acordo com [31]. Neste trabalho vamos adotar elementos quadrilaterais. Deste modo vamos considerar o  $\hat{K} = (-1, 1)^2$ .

Uma forma de garantir a continuidade entre dois elementos com a mesma interface, é selecionar os graus de liberdade sobre uma aresta  $\gamma$  para serem os momentos ponderados da componente tangencial de um campo  $\hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{E}_p$ .

Os graus de liberdade nas arestas do elemento de referência são definidos pelos funcionais lineares  $\alpha_\gamma \in \hat{\mathcal{P}}'$

$$\alpha_\gamma(\mathbf{u}) = \int_\gamma (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) \phi \, ds \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_{k-1}(\gamma) \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor tangente unitário à aresta  $\gamma$  e  $\hat{\mathcal{P}}'$  denota o espaço dual de  $\hat{\mathcal{P}}$ . Temos um total de  $4k$  graus de liberdade de aresta.

Os graus de liberdade no interior do elemento de referência são definidos pelos funcionais lineares  $\alpha_{int} \in \hat{\mathcal{P}}'$

$$\alpha_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\hat{K}} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\phi}) \, d\hat{K} \quad \forall \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{com } \phi_1 \in \mathbb{Q}_{k-2, k-1} \text{ e } \phi_2 \in \mathbb{Q}_{k-1, k-2} \quad (4.3)$$

Temos um total de  $2k(k-1)$  graus de liberdade no interior de  $\hat{K}$ .

Utilizando as funções  $L_k$  e  $l_k$  definidas anteriormente, definimos as funções de base associadas aos graus de liberdade nas arestas como sendo

$$\begin{cases} \phi_{i,j,1}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_j(\hat{y})\mathbf{e}_1 \\ \phi_{i,j,2}^\gamma(\hat{\mathbf{x}}) = l_j(\hat{x})L_i(\hat{y})\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad i = 0, \dots, p; \quad j = 0, 1 \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^T$  e  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T$  denotam a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são as coordenadas de  $\hat{\mathbf{x}}$ . As funções de base associadas aos graus de liberdade no interior complementam as funções em (4.4) ao utilizar  $l_k$  com  $k \geq 2$ :

$$\begin{cases} \phi_{i,j,1}^{int}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_j(\hat{y})\mathbf{e}_1 \\ \phi_{i,j,2}^{int}(\hat{\mathbf{x}}) = l_j(\hat{x})L_i(\hat{y})\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad i = 0, \dots, p; \quad j = 2, \dots, p+1, \quad (4.5)$$

Apesar da representação (4.4)-(4.5) ter a conveniência de ser compacta e geral, vamos utilizar uma notação diferente para as funções das arestas; esta notação leva em conta as arestas do elemento de referencia escolhido:

$$\phi_i^{\gamma^1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad \phi_i^{\gamma^2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \quad (4.6)$$

$$\phi_i^{\gamma^3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; \quad \phi_i^{\gamma^4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_i(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2,$$

Deste modo, as funções de base associadas às arestas satisfazem

$$\int_{\gamma_n} (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\phi}_i^{\gamma_j}) L_k ds = \delta_{lj} \delta_{ik} \|L_i\|^2 \quad \text{com } j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.7)$$

Analogamente, as funções de base associadas ao interior satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} L_m(\hat{x}) l_n(\hat{y}) \boldsymbol{\phi}_{i,j,1}^{int} \cdot \mathbf{e}_1 d\hat{x} d\hat{y} &= \delta_{mi} \delta_{nj} \|L_i\|^2 \|l_j\|^2 \\ \int_{\hat{K}} L_m(\hat{y}) l_n(\hat{x}) \boldsymbol{\phi}_{i,j,2}^{int} \cdot \mathbf{e}_2 d\hat{x} d\hat{y} &= \delta_{mi} \delta_{nj} \|L_i\|^2 \|l_j\|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.1.2 Definição dos Graus de Liberdade sobre um Elemento

Um elemento Nédélec  $(\mathcal{P}, K, \Sigma)$  sobre um domínio físico  $K$  é construído a partir do elemento de referência  $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{K}, \hat{\Sigma})$  da seguinte forma:

Seja  $\mathbf{E}$  um campo vetorial. O  $m$ -ésimo grau de liberdade sobre a aresta  $\varsigma$  é dado pelo mapeamento linear

$$\mathbf{E} \longrightarrow \int_{\varsigma} v_m \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x},$$

onde a função peso  $v_m$  é escolhida para coincidir com o  $m$ -ésimo polinômio de Legendre quando a aresta  $\varsigma$  é parametrizada por  $t \in (-1, 1)$ . Em particular, seja  $\varsigma$  uma aresta orientada de um elemento na malha com pontos extremos  $\mathbf{x}_{v_a}$  e  $\mathbf{x}_{v_b}$ , onde os índices  $v_a$  e  $v_b$  correspondem aos vértices adjacentes no elemento quadrilateral. Introduzimos agora, a parametrização sobre a aresta como sendo

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(1-t)\mathbf{x}_{v_a} + \frac{1}{2}(1+t)\mathbf{x}_{v_b} \quad \text{com } t \in (-1, 1) \quad (4.9)$$

Logo, usando (4.16), obtemos

$$\int_{\varsigma} v_m \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_{-1}^1 L_m(t) \left( E_1 \frac{dx}{dt} + E_2 \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{-1}^1 L_m(t) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\varsigma} dt, \quad (4.10)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{\varsigma} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  é o vetor tangente sobre a aresta  $\varsigma$ .

Seja  $F_K$  um mapeamento do elemento de referência ao elemento físico  $K$ ,  $F_K : \hat{K} \longrightarrow K$ , definido por

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = J_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad (4.11)$$

onde  $J_K$  é uma matriz quadrada invertível e  $\mathbf{b}$  é um vetor de translação. Note que  $F_K$  é uma bijeção diferenciável, e a matriz Jacobiana de transformação é dada por  $dF_K = J_K$ . Tem-se da transformação covariante (2.31) que os vetores tangentes  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  estão relacionados por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = J_K(\hat{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\tau}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$$

logo, podemos representar (4.10) como

$$\int_{-1}^1 L_m(t) \mathbf{E} \cdot (J_K \boldsymbol{\tau}) dt$$

e usando o mapeamento  $F_\gamma$ , restrito a aresta de referência  $\gamma$  e sendo  $m = k$ , obtemos

$$\int_{-1}^1 L_k(t) \mathbf{E} \cdot (J_K \boldsymbol{\tau}) dt = \int_{-1}^1 L_k(s) J_K^T \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

Observe que o campo elétrico  $\hat{\mathbf{E}}$  sobre um elemento de referência  $\hat{K}$  está relacionado com o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , definido sobre o elemento físico  $K$ , pela transformação covariante (2.31)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})|_K = J_K^{-T} \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.12)$$

Analogamente, a função de base global  $\phi_{i,j}^{(d)}$  ( $d = 1, 2$ ) correspondente à função de base local  $\hat{\phi}_{i,j}^{(d)}$  sobre o elemento de referência é definida por

$$\phi_{i,j}^{(d)}(\mathbf{x})|_K = J_K^{-T} \hat{\phi}_{i,j}^{(d)}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.13)$$

**Observação 4.1.2** *Os graus de liberdade nas arestas garantem que  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  seja  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -conforme; complementando-os com os graus de liberdade no interior, garantimos também que  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  é unisolvente (vide o Teorema 5 de [32]).*

### 4.1.3 Funções de Base para Elementos de Whitney ( $p = 0$ )

Vamos começar particularizando a definição de  $\mathbb{E}_p$  para o caso  $p = 0$ . Temos que  $\mathbb{Q}_{0,1} = \{1, \hat{y}\}$  e  $\mathbb{Q}_{1,0} = \{1, \hat{x}\}$ , logo

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); \hat{E}_1 = \text{span}\{1, \hat{y}\} \text{ e } \hat{E}_2 = \text{span}\{1, \hat{x}\} \right\} \quad (4.14)$$

#### Funções de Base

Nos elementos Whitney há apenas um único grau de liberdade em cada aresta, deste modo podemos definir as funções de base como

$$\begin{aligned} \phi_0^{\gamma_1}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_0(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; & \phi_0^{\gamma_2}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_0(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_0^{\gamma_3}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_0(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; & \phi_0^{\gamma_4}(\hat{\mathbf{x}}) &= L_0(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  denotam a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . As funções de ordem zero podem ser caracterizadas pelo fato de terem o divergente livre, isto é,  $\nabla \cdot \phi_0^{\gamma_i} = 0$ , e também por terem a componente tangencial constante em cada aresta  $\gamma_i$  [18]. A figura 4.1 mostra, no plano- $\hat{x}\hat{y}$ , os graus de liberdade distribuídos nas arestas do elemento de referência.

Em particular, se a aresta  $\gamma_1$  está parametrizada por  $s \in (-1, 1)$  e  $p = 0$ , então escolhemos  $v_0$  como sendo o polinômio de Legendre de grau zero  $L_0$ , e obtemos, de acordo com [19,

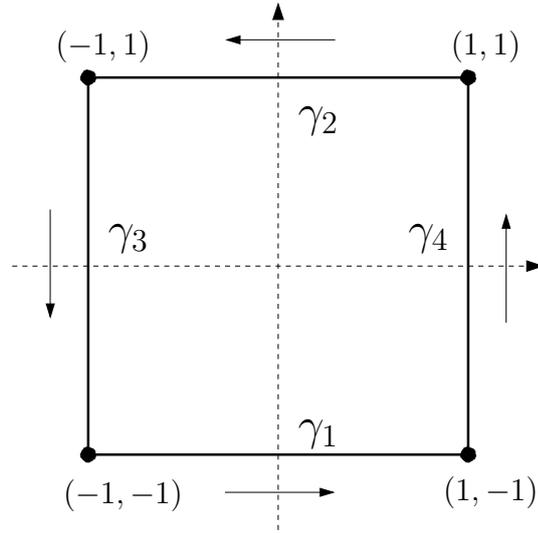


Figura 4.1: Graus de liberdade para elementos de Whitney. As setas indicam a ordem zero do momento tangencial do campo  $\hat{\mathbf{E}}$ . Note que a direção das tangentes se mantém no sentido anti-horário em torno do elemento.

equação 5.34],

$$\int_{\gamma_1} v_0 \hat{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 L_0(s) \left( \hat{\mathbf{E}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_{-1}^1 L_0(s) \left( \hat{E}_1 \frac{d\hat{x}}{ds} + \hat{E}_2 \frac{d\hat{y}}{ds} \right) ds \quad (4.16)$$

Para deduzir a função de base  $\phi_0^{\gamma_1}$ , consideremos a parametrização para a aresta  $\gamma_1$  sobre a reta  $\hat{y} = -1$ .

$$\begin{cases} \hat{x}(s) = \frac{1}{2}(1-s)x_1 + \frac{1}{2}(1+s)x_2 = s & \text{com } s \in [-1, 1], \\ \hat{y}(s) = \frac{1}{2}(1-s)y_1 + \frac{1}{2}(1+s)y_2 = -1 \end{cases} \quad (4.17)$$

onde  $(x_1, y_1) = (-1, -1)$  e  $(x_2, y_2) = (1, -1)$  são os pontos extremos da aresta  $\gamma_1$  de acordo com a figura 4.1, Se derivarmos (4.17) com respeito a  $s$ , obtemos  $\frac{d\hat{x}(s)}{ds} = 1$  e  $\frac{d\hat{y}(s)}{ds} = 0$ . Agora, por (4.14), podemos escolher  $\hat{E}_1 = l_0(\hat{y})$ . Por fim, pela fórmula de Rodrigues temos que, para  $k = 0$ ,  $L_0(\hat{x}) = 1$ . Substituindo estes argumentos em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1-\hat{y}(s)) \cdot 1 + \hat{E}_2 \cdot 0 \right) ds &= \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1-\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s)) \right) ds \\ &= \int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) l_0(\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{d\hat{x}(s)}{ds} + \frac{d\hat{y}(s)}{ds} \right) ds \\ &= \int_{\gamma_1} L_0(\hat{x}(s)) \underbrace{l_0(\hat{y}(s)) L_0(\hat{x}(s))}_{\phi_0^{\gamma_1}} \mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que  $\hat{y} = -1$ , logo

$$\int_{-1}^1 L_0(\hat{x}(s)) \left( \frac{1}{2}(1 - \hat{y})L_0(\hat{x}(s)) \right) ds = \int_{-1}^1 L_0^2(\hat{x}(s)) ds$$

e assim,

$$\int_{\gamma_1} L_0(\hat{x}(s)) \phi_0^{\gamma_1} \cdot d\mathbf{r}_1 = \|L_0\|^2,$$

ou seja, verificamos que a condição (4.7) é satisfeita com  $j = l = 1$  e  $i = k = 0$ .

#### 4.1.4 Funções de Base para Elementos de Nédélec ( $p = 1$ )

##### Definição do Espaço de Polinômios $\hat{\mathcal{P}}$

O espaço de polinômios associado no elemento de Nédélec de ordem  $p = 1$  sobre elemento de referência  $\hat{K} = (-1, 1)^2$  é definido por

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathbb{E}_1 = \left\{ \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2); \hat{E}_1 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{1,2}\} \text{ e } \hat{E}_2 = \text{span}\{\mathbb{Q}_{2,1}\} \right\},$$

onde

$$\mathbb{Q}_{1,2} = \{1, \hat{y}, \hat{y}^2, \hat{x}, \hat{x}\hat{y}, \hat{x}\hat{y}^2\} \text{ e } \mathbb{Q}_{2,1} = \{1, \hat{x}, \hat{x}^2, \hat{y}, \hat{y}\hat{x}, \hat{y}\hat{x}^2\}$$

**Observação 4.1.3** *O espaço  $\mathbb{E}_1$  é construído aumentando o espaço  $\mathbb{E}_0$ . Além disso, podemos notar que existem quatro novas funções de base nas arestas que serão geradas pelos elementos  $\hat{x}, \hat{x}\hat{y} \in \mathbb{Q}_{1,2}$  e  $\hat{y}, \hat{y}\hat{x} \in \mathbb{Q}_{2,1}$ , as quais serão adicionadas nas arestas juntamente com as funções de base para os elementos de Whitney.*

*Diferentemente das funções de base para elementos de Whitney, aqui teremos funções de base interiores geradas pelos elementos  $\hat{x}, \hat{y}^2, \hat{x}\hat{y}^2 \in \mathbb{Q}_{1,2}$  e  $\hat{y}, \hat{x}^2, \hat{y}\hat{x}^2 \in \mathbb{Q}_{2,1}$ . A figura 4.2 mostra a distribuição dos graus de liberdade sobre um elemento quadrilateral.*

#### Funções de Base

Como podemos observar, os elementos de ordem  $p = 1$  são munidos de graus de liberdade nas arestas e no interior do elemento. Deste modo, as funções de base para estes elementos são diferenciadas da seguinte forma:

- Funções de base para arestas

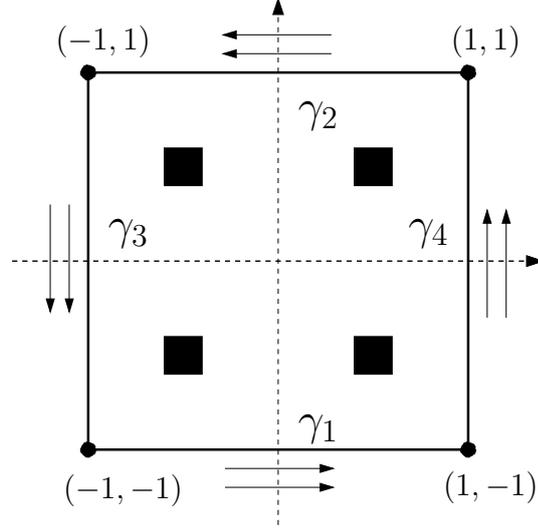


Figura 4.2: As setas indicam os graus de liberdade dos elementos de ordem  $p = 1$  distribuídos sobre as arestas. Os quadrados em preto, no interior do elemento, representam os graus de liberdade necessários para um quadrilátero.

Definimos as funções de base nas arestas como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_0^{\gamma_1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; & \phi_0^{\gamma_2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_0^{\gamma_3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; & \phi_0^{\gamma_4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2 \\ \phi_1^{\gamma_1}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_0(\hat{y})\mathbf{e}_1; & \phi_1^{\gamma_2}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_1(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_1^{\gamma_3}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_0(\hat{x})\mathbf{e}_2; & \phi_1^{\gamma_4}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_1(\hat{x})\mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Observe que as quatro primeiras funções de base de aresta, são as mesmas funções de base para os elementos de ordem  $p = 0$ . As funções de base em (4.18) são construídas usando o peso  $v_k = L_k$ , de modo que satisfaçam (4.7).

- Funções de base para o interior nas direções  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Definimos as funções de base no interior  $\phi_{1,j,2}^{int}$ , com  $j = 0, 1$ , como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{0,2,1}^{int_x}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{x})l_2(\hat{y})\mathbf{e}_1; & \phi_{1,2,1}^{int_x}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{x})l_2(\hat{y})\mathbf{e}_1; \\ \phi_{0,2,2}^{int_y}(\hat{\mathbf{x}}) = L_0(\hat{y})l_2(\hat{x})\mathbf{e}_2; & \phi_{1,2,2}^{int_y}(\hat{\mathbf{x}}) = L_1(\hat{y})l_2(\hat{x})\mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

As funções de base em (4.19) são construídas de modo que satisfaçam (4.8).

## 4.2 Desempenho dos Elementos de Nédélec

Agora, com o objetivo de ilustrar a performance dos elementos de Nédélec de primeira ordem, consideremos um exemplo numérico de uma propagação de uma onda plana através

de um domínio quadrado  $\Omega = (0, 1)^2$  com contorno  $\Gamma$ . Sejam a frequência  $\omega$  fixada e  $g$  uma função suficientemente suave. Queremos aproximar o campo elétrico  $\mathbf{E} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{E}, \mathbf{v}) = 0 \quad (4.20)$$

para todo  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ , sujeito à condição de contorno

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E} = g \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor tangente unitário sobre o contorno  $\Gamma$ .

Vamos escolher a função  $g$  de modo que tenhamos a solução exata conhecida. Seguindo [3], seja  $\tilde{\mathbf{E}} = i\nabla \times e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$  (vide equação (2.20)) a onda plana propagando-se na direção  $\xi = (4\pi, 4\pi)$ . Se escolhermos  $\omega^2 = 32\pi^2$  e  $g = \mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{E}}$ , então  $\tilde{\mathbf{E}}$  é a solução exata do problema (4.20) com condições de contorno (4.21). De fato, temos que

$$\tilde{\mathbf{E}} = (-4\pi e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, 4\pi e^{i\xi \cdot \mathbf{x}})$$

logo as seguinte equações ficam

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = (-128\pi^3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, 128\pi^3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}).$$

e

$$\omega^2 \tilde{\mathbf{E}} = 32\pi^2 \nabla \times i e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} = (-128\pi^3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}, 128\pi^3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}})$$

assim,

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

O problema (4.20)-(4.21) não pode ser tratado de acordo com a seção 3.6 porque  $g \neq 0$ . Vamos apresentar duas abordagens para contornar esta dificuldade. A primeira abordagem impõe fracamente a condição (4.21), enquanto a segunda utiliza um problema auxiliar que possui condições de contorno homogêneas.

### Condições de Contorno Impostas Fracamente

Consideremos que o domínio  $\Omega = (0, 1)^2$  está discretizado em uma malha uniforme de elementos quadrados de lado  $h$  (Figura 4.3), e os elementos de Nédélec de ordem uniforme  $p$  são usados para definir o espaço de elementos finitos  $\mathbf{V}_{hp}$ .

A aproximação por elementos finitos é buscar  $\mathbf{E}_{hp} \in \mathbf{V}_{hp}$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{hp}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{E}_{hp}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{hp} \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . As condições de contorno essenciais são aplicadas requerendo que, sobre todas as arestas  $\gamma \subset \Gamma$ , tenhamos

$$\int_{\gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{hp} - g) v \, ds = 0 \quad (4.24)$$

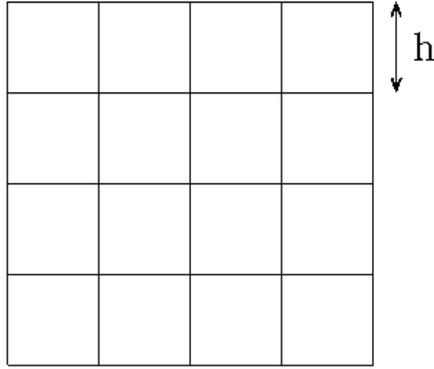


Figura 4.3: Malha utilizada nos experimentos numéricos.

para todo  $v \in \mathbb{P}_p(\gamma)$ , onde  $\mathbb{P}_p$  denota o espaço de polinômios unidimensionais de grau no máximo  $p$  no comprimento do arco.

### Problema Auxiliar com Condições Homogêneas

Como vimos, a função  $g$  em (4.21) pode ser escolhida de modo que o campo vetorial  $\tilde{\mathbf{E}} = i\nabla \times e^{i\xi \cdot \mathbf{x}}$  seja a solução do problema (4.20)-(4.21). Vamos definir a partir de  $\tilde{\mathbf{E}}$  um novo campo vetorial  $\mathbf{E}'$  que satisfaz condições de contorno homogêneas.

Seja  $\alpha(x, y) = 1 + \sin(\pi x)\sin(\pi y)$  e  $\mathbf{E}_0 = \alpha(x, y)\tilde{\mathbf{E}}$ . Temos que  $\mathbf{E}' = \tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_0$  se anula na fronteira  $\Gamma$ . Em particular,  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}' = 0$ , temos de (4.22) que

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E}', \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{E}', \mathbf{v}) &= (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{v}) \\
 &\quad - (\nabla \times \mathbf{E}_0, \nabla \times \mathbf{v}) + \omega^2(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) \\
 &= -(\nabla \times \mathbf{E}_0, \nabla \times \mathbf{v}) + \omega^2(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}),
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

$$\mathbf{F} = 4\pi^3 e^{i\xi \cdot \mathbf{x}} \begin{bmatrix} -\cos(\pi(x+y)) - 4i(2\sin(\pi x)\cos(\pi y) + \sin(\pi(x+y))) \\ \cos(\pi(x+y)) + 4i(2\sin(\pi y)\cos(\pi x) + \sin(\pi(x+y))) \end{bmatrix}$$

Portanto,  $\mathbf{E}'$  satisfaz o seguinte problema variacional: encontrar  $\mathbf{E} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \phi) - \omega^2(\mathbf{E}, \phi) = (\mathbf{F}, \phi) \quad \forall \phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega). \tag{4.26}$$

Novamente, o domínio  $\Omega = (0, 1)^2$  é discretizado como na Figura 4.3. Primeiro, devemos calcular a aproximação por elementos finitos  $\mathbf{E}'_{hp} \in \mathbf{V}_{hp} \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  tal que

$$(\nabla \times \mathbf{E}'_{hp}, \nabla \times \mathbf{v}) - \omega^2(\mathbf{E}'_{hp}, \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \tag{4.27}$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{hp} \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ , e em seguida recuperar a solução aproximada  $\mathbf{E}_{hp} = \mathbf{E}'_{hp} + \mathbf{E}_0$  do problema original (4.20)-(4.21).

## Experimentos Numéricos

Na sequência, optaremos por fazer aproximações para  $\tilde{\mathbf{E}}$  utilizando elementos de Nédélec de ordem zero (Elementos de Whitney) e por elementos de Nédélec de primeira ordem. Apresentaremos alguns experimentos numéricos referentes aos problemas vistos anteriormente nesta seção. Nas figuras destacaremos a parte real da segunda componente da solução exata  $\tilde{\mathbf{E}}$  para os problemas com condições de contorno fracamente e fortemente impostas.

Iremos observar nas figuras a diferença de fase na propagação da onda aproximada quando estivermos considerando o problema com condições de contorno fracamente impostas. Por outro lado, notaremos uma diferença de amplitude na solução aproximada do problema que impõe condições de contorno fortemente.

As figuras 4.4(a)-4.4(b), 4.5(a)-4.5(b) e 4.6(a)-4.6(b) mostram os resultados obtidos usando Elementos Nédélec de ordem zero na aproximação, onde os refinamentos das malhas uniformes são  $h = 1/8$ ,  $h = 1/16$  e  $h = 1/32$ , respectivamente. Os resultados apresentam uma diferença na amplitude 4.4(a)-4.5(a)-4.6(a) e uma diferença de fase 4.4(b)-4.5(b)-4.6(b) das soluções aproximadas quando comparadas com a amplitude e fase da onda na solução exata.

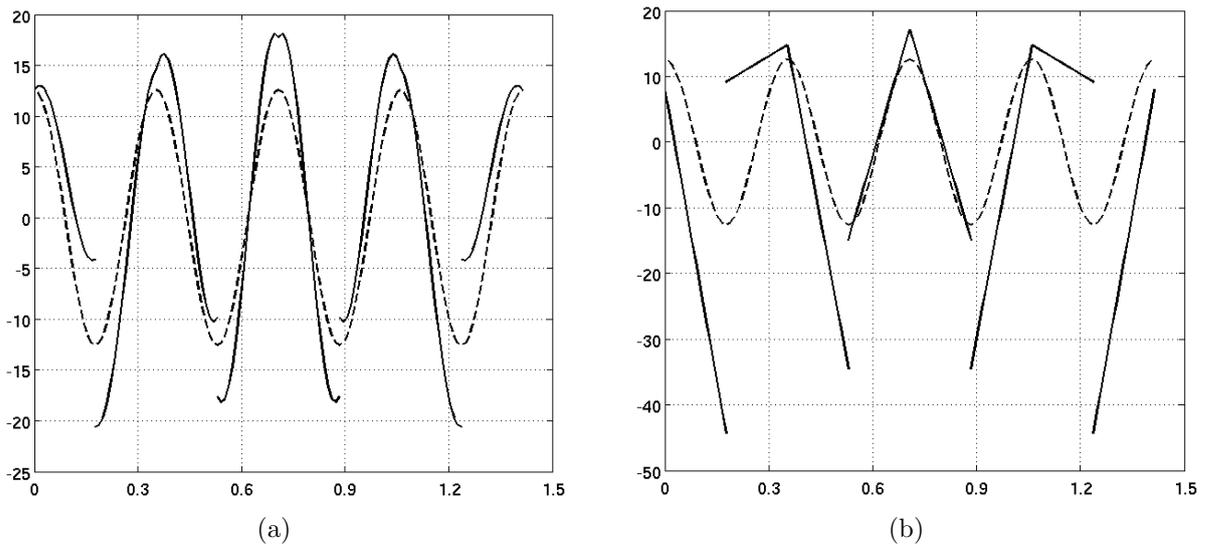


Figura 4.4: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/8$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de ordem zero (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

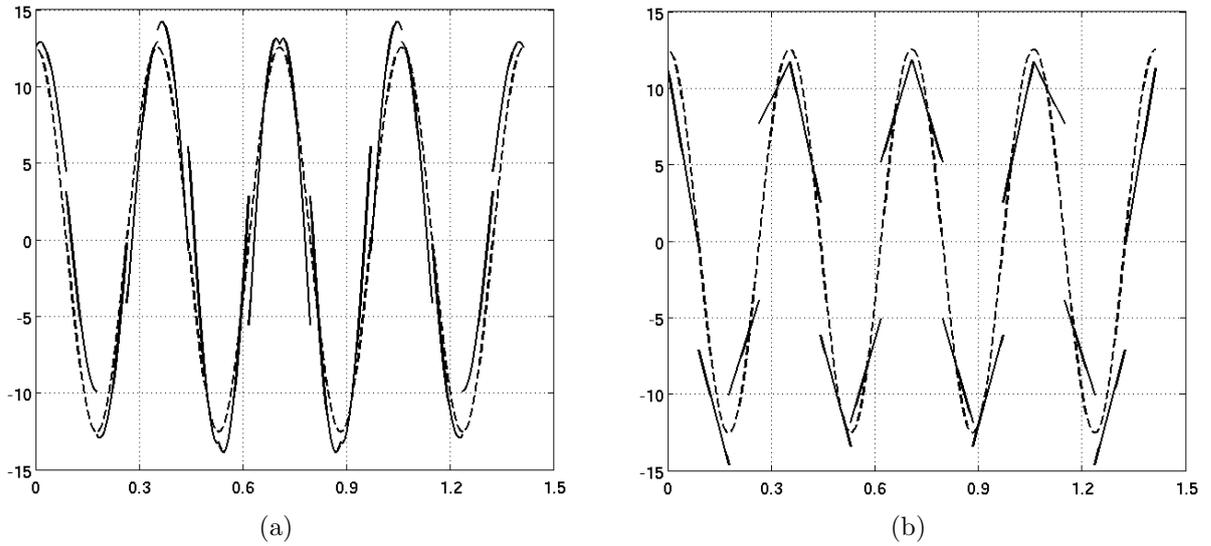


Figura 4.5: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/16$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de ordem zero (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

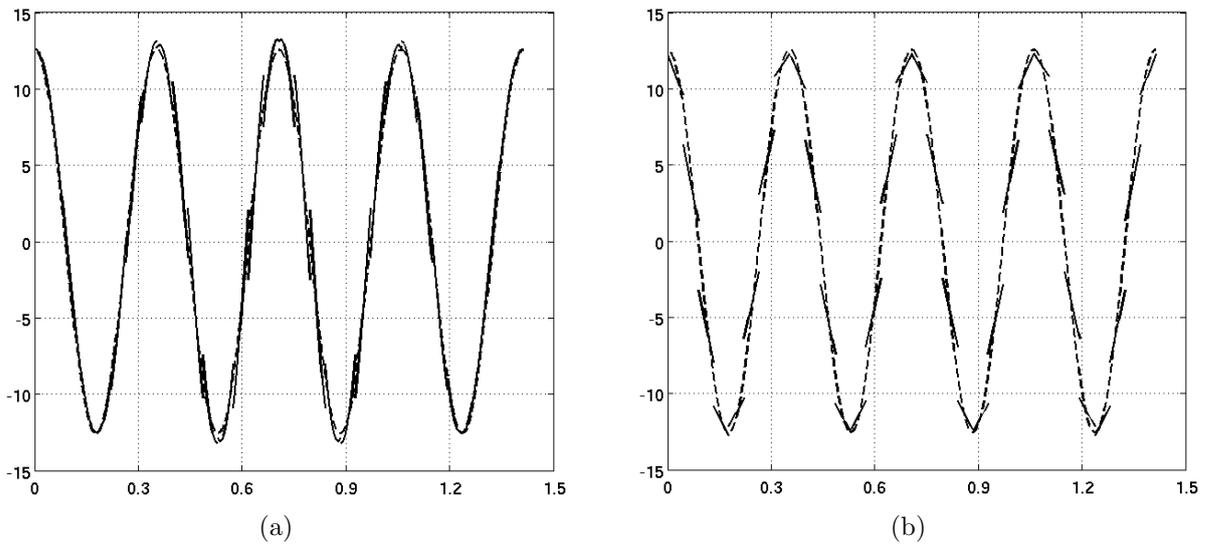


Figura 4.6: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/32$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de ordem zero (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

As figuras 4.7(a)-4.7(b), 4.8(a)-4.8(b) e 4.9(a)-4.9(b) mostram os resultados obtidos usando Elementos Nédélec de Primeira Ordem na aproximação, onde os refinamentos das malhas uniformes são  $h = 1/4$ ,  $h = 1/8$  e  $h = 1/16$ , respectivamente. Os resultados apresentam uma diferença na amplitude 4.7(a)-4.8(a)-4.9(a) e uma diferença de fase 4.7(b)-4.8(b)-4.9(b) das soluções aproximadas quando comparadas com a amplitude e fase da onda na solução exata.

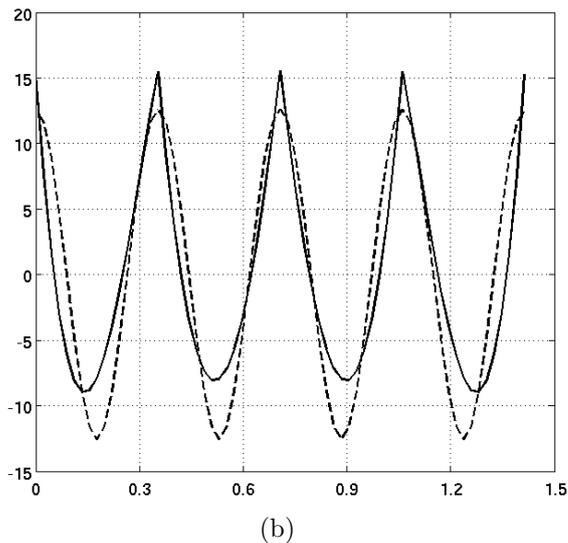
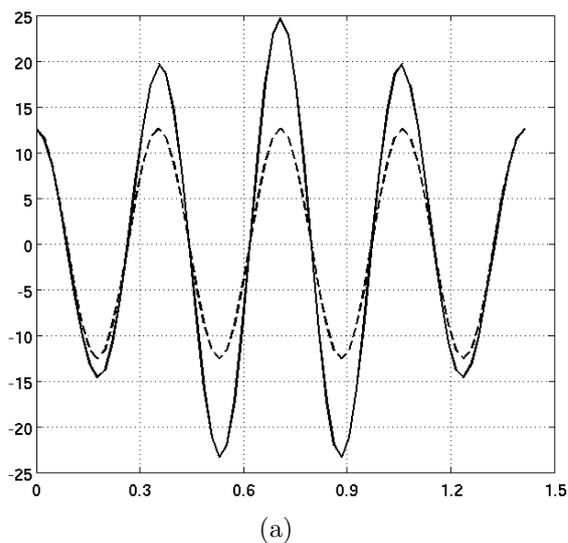


Figura 4.7: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/4$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de primeira ordem (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

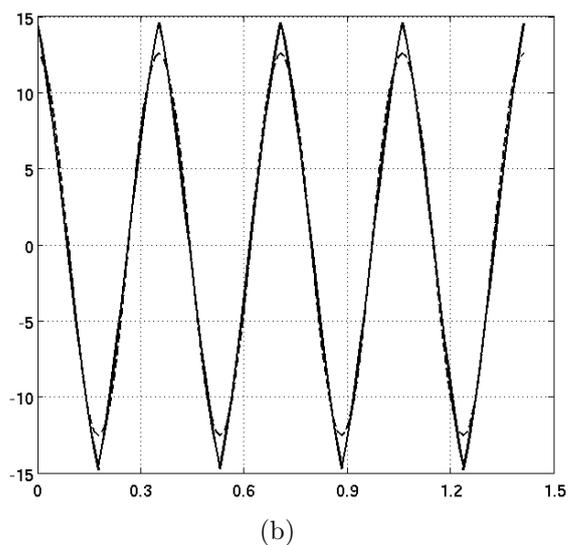
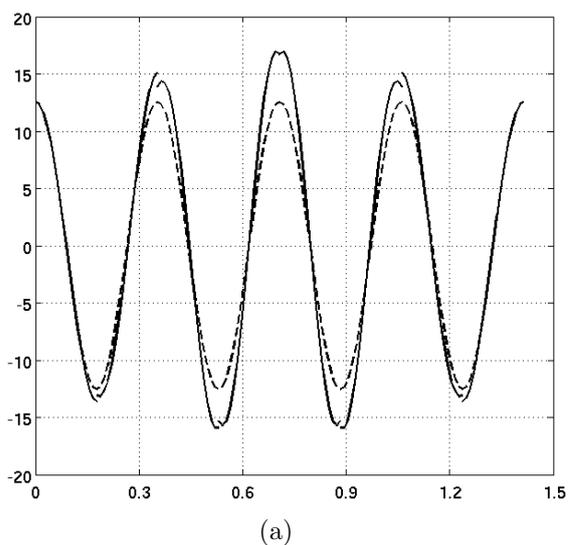


Figura 4.8: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/8$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de primeira ordem (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

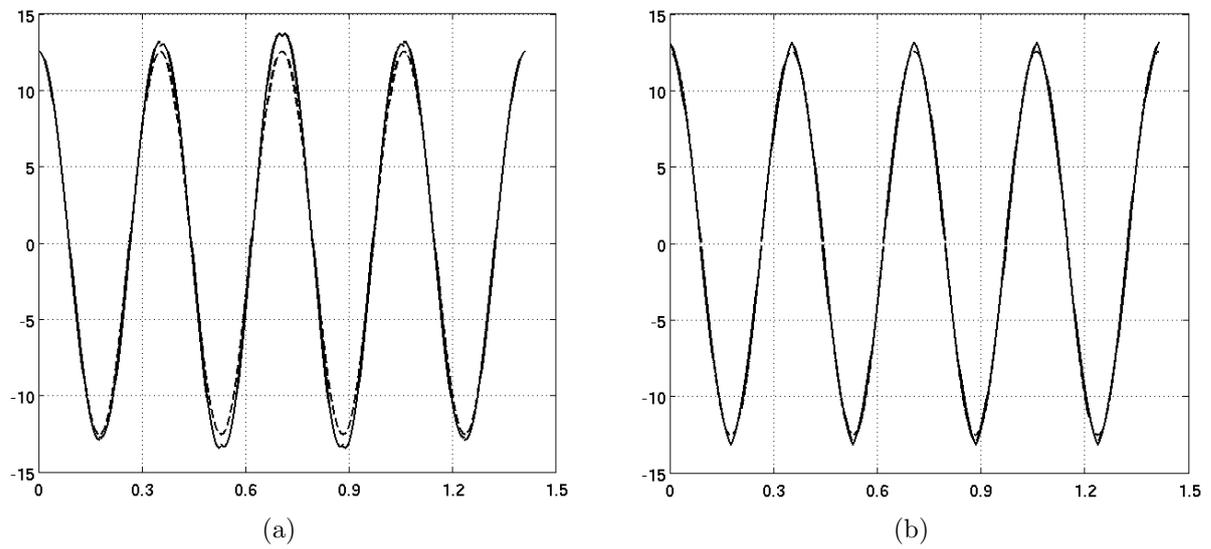


Figura 4.9: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/16$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de primeira ordem (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fortemente (a) e fracamente (b).

# Capítulo 5

## Propriedades Dispersivas dos Elementos de Nédélec

Vimos no capítulo anterior que o erro de aproximação por elementos finitos pode causar uma diferença de fase com respeito à solução exata. Este efeito depende não somente do parâmetro de malha  $h$  (compare as Figuras 4.7(b) e 4.8(b)), mas também da frequência temporal  $\omega$  (conforme ilustra a Figura 5.1), e pode ser analisado pelo estudo das propriedades dispersivas da solução numérica.

Neste capítulo vamos fazer um estudo teórico de tais propriedades dispersivas, analisando a dispersão numérica em uma malha ilimitada. Este estudo particulariza um trabalho de M. Ainsworth [3].

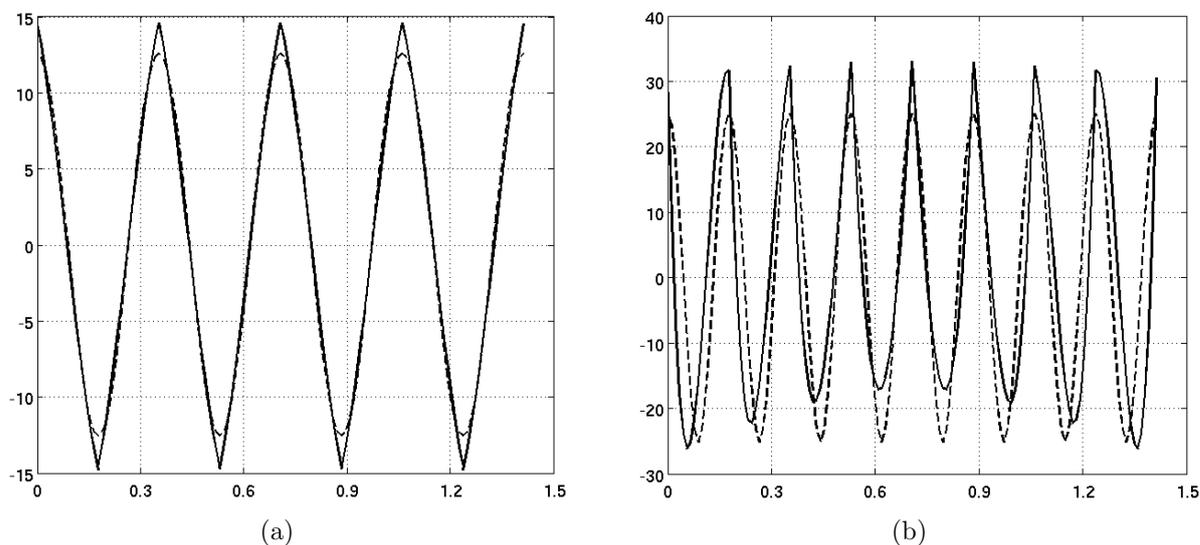


Figura 5.1: Variação ao longo da diagonal principal (malha com  $h = 1/8$ ) da solução exata (linha tracejada) e da aproximação por Elementos de Nédélec de primeira ordem (linha sólida) no problema com condições de contorno impostas fracamente com  $\omega^2 = 32\pi^2$  (a) e com  $\omega^2 = 128\pi^2$  (b).

## 5.1 Relação de Dispersão

Vimos que de acordo com a seção 3.4 com  $\mathbf{J}_a = \mathbf{0}$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}$  satisfaz a equação de Maxwell harmônica de segunda ordem:

$$-\omega^2 \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

A relação de dispersão para esta equação pode ser descrita ao procurar uma onda plana, como solução não-trivial, da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{x}$  é uma variável espacial e  $\boldsymbol{\xi}$  aponta para a direção de propagação da onda plana.

Considerando o campo  $\mathbf{E}$  definido num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , tem-se que  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ .

Substituindo (5.2) em (5.1) e usando as observações 2.1.1 e 2.1.2, obtemos

$$-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \\ -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Dividindo ambos os lados por  $-e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}$ , tem-se

$$\omega^2 \boldsymbol{\alpha} + M_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad \text{com} \quad M_{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \\ -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

De (5.3), temos que

$$(\omega^2 I + M_{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Considerando agora uma solução não-trivial para (5.4), tem-se que  $\det(\omega^2 I + M_{\boldsymbol{\xi}}) = 0$ , ou seja

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \\ -\xi_1 \xi_2 & -\omega^2 + \xi_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$\omega^2(\omega^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2) = 0 \quad (5.5)$$

Deste modo, se  $\omega$  é diferente de zero, segue o que definimos como a relação de dispersão

$$\omega = |\boldsymbol{\xi}| \quad (5.6)$$

## 5.2 Dispersão Discreta para Elementos de Nédélec de Ordem Zero

Iniciemos discutindo as propriedades dispersivas dos elementos Nédélec de ordem zero. Suponha que o espaço livre está particionado numa malha uniforme infinita consistindo de quadrados de lado  $h$ , com eixos de coordenadas cartesianas escolhidas de forma a coincidir com as direções das arestas dos quadrados, como na figura 5.2 abaixo.

**Observação 5.2.1** *No apêndice deixaremos indicações para o caso em três dimensões.*

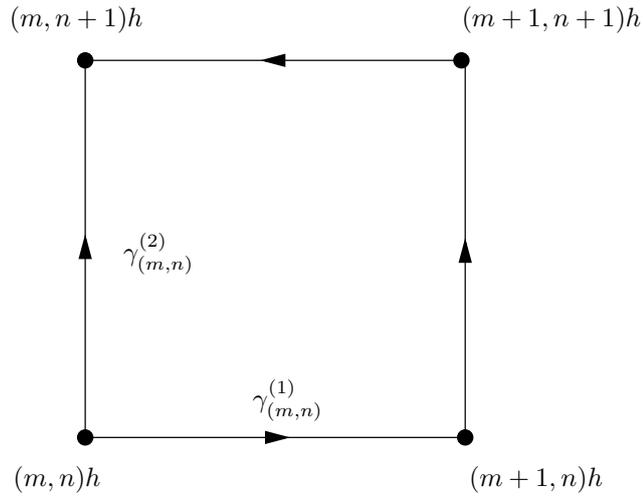


Figura 5.2: Notação usada para descrever as arestas relativas aos vértices de um típico elemento quadrilátero, de lado  $h$ , retirado de uma malha uniforme infinita.

Denotemos  $\mathbf{V}_h$  como o espaço dos elementos de Nédélec de ordem zero construído sobre esta malha. Qualquer função  $\mathbf{E}_h = (E_h^{(1)}, E_h^{(2)}) \in \mathbf{V}_h$  serão expandidos na forma

$$E_h^{(d)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)}, \quad (5.7)$$

onde  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos números inteiros e

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

com expressão análoga para a segunda componente, ou seja

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\chi_{n2}(x_2) \end{bmatrix}$$

Aqui,  $\chi_n$  é a função característica (descontínua) para o intervalo  $(nh, nh + h)$  dada por

$$\chi_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.9)$$

enquanto que  $\theta_n$  é a função de interpolação linear e contínua por partes dada por

$$\theta_n(s) = \begin{cases} 1 - \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh - h, nh] \\ 1 + \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.10)$$

**Observação 5.2.2** *Vale destacar que as funções de base usadas nesta seção são diferentes das funções de base utilizadas no capítulo 4. o motivo de tal mudança é que as funções em (5.10) são interpolantes e por isso facilitam a análise de dispersão. Entretanto, os espaços gerados por ambas as bases é o mesmo.*

A integral de linha de uma função de base,  $\phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \in \mathbf{V}_h$ , tomada ao longo das arestas do quadrado, tem a seguinte forma

$$\int_{\gamma_{\mathbf{m}}^{(a)}} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \cdot d\mathbf{x} = \begin{cases} h & \text{se } \mathbf{m} = \mathbf{n} \text{ e } d = a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.11)$$

onde  $\gamma_{\mathbf{m}}^{(a)}$  denota a aresta alinhada com o  $a$ -ésimo eixo coordenado iniciando no vértice indexado por  $\mathbf{m}$ , veja figura 5.2. A partir de (5.11), podemos calcular os coeficientes do campo  $\mathbf{E}_h$  em (5.7) procedendo da seguinte forma:

Multiplicando (5.11) por  $\alpha_{\mathbf{n}}^{(a)}$  e considerando  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$  juntamente com  $a = d$ , tem-se

$$\alpha_{\mathbf{n}}^{(a)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{\mathbf{n}}^{(a)}} \alpha_{\mathbf{n}}^{(a)} \phi_{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot d\mathbf{x}$$

e usando (5.7) para a  $d$ -ésima componente espacial, obtemos

$$\alpha_{\mathbf{n}}^{(a)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{\mathbf{n}}^{(a)}} \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{x} \quad (5.12)$$

Além disso, consideremos que uma solução discreta não-trivial  $\mathbf{E}_h$  satisfaz a condição

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) = e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}), \quad (5.13)$$

onde  $\xi_h$  é o vetor de onda discreto relacionado à uma prescrita frequência temporal  $\omega$  pela relação de dispersão discreta.

Aplicando uma mudança de variável em (5.12) e considerando a invariância de translação da malha, deduzimos que

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{\mathbf{n}}^{(d)}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{\mathbf{0}}^{(d)}} \mathbf{E}_h(\mathbf{y} + \mathbf{n}h) \cdot d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{h} \int_{\gamma_{\mathbf{0}}^{(d)}} e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}\end{aligned}$$

e portanto,

$$\alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} = e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{0}}^{(d)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \quad (5.14)$$

Substituindo (5.14) em (5.7), tem-se

$$E_h^{(d)} = \alpha_{\mathbf{0}}^{(d)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{ih\xi_h \cdot \mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \quad (5.15)$$

e assim, considerando o fato de que a somatória se desacopla em contribuições separadas de cada componente de  $\mathbf{n}$ , segue que

$$E_h^{(d)} = \alpha_{\mathbf{0}}^{(d)} \Upsilon_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \quad \text{com } d = 1, 2, \quad (5.16)$$

onde

$$\Upsilon_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \chi_n(s) \quad (5.17)$$

$$\Theta_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \quad (5.18)$$

A equação (5.16) é uma versão discreta das equações (5.2) e reflete o fato que ambos os campos, discreto e contínuo, tem apenas dois graus de liberdade,  $\alpha_{\mathbf{0}}^{(1)}$  e  $\alpha_{\mathbf{0}}^{(2)}$  correspondentes às escalas aplicadas individualmente às componentes da solução discreta.

Na sequência vamos analisar separadamente as funções  $\Theta_h$  e  $\Upsilon_h$ . Seja  $V_h$  o espaço das funções lineares contínuas por partes sobre a reta real com nós localizados em  $h\mathbb{Z}$ . Segue de (5.13) e de (5.16) que  $\Theta_h$  satisfaz

$$\Theta_h(\xi; s + nh) = e^{ih\xi n} \Theta_h(\xi; s) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (5.19)$$

Assim, a função  $\Theta_h(\xi; \cdot) \in V_h$  pode ser interpretada como a versão discreta da exponencial complexa  $u(s) = e^{i\xi s}$ . Motivado pelo fato que  $u(s)$  é a solução da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão [3],

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad \omega = |\xi|, \quad (5.20)$$

vamos considerar o seguinte problema auxiliar:

$$\int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi; s)' v_h'(s) ds = \omega_h(\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi; s) v_h(s) ds \quad \forall v_h \in V_h \quad (5.21)$$

O autovalor  $\omega_h(\xi)^2$  pode ser calculado da seguinte forma:

Primeiramente, defina  $v_h = \theta_m$ , com  $m \in \mathbb{Z}$ , onde  $\theta_m$  é definida da mesma forma que (5.10). Substituindo (5.18) em (5.21), temos

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \right)' \theta_m'(s) ds = \omega_h(\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \theta_m(s) ds$$

Note, pela definição de (5.10), que  $\theta_n(s) \theta_m(s) \neq 0$  somente quando  $s \in (mh - h; mh + h)$ . Portanto, com o mesmo valendo para as derivadas, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\xi n} \theta_n'(s) \theta_m'(s) ds = \omega_h(\xi)^2 \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \theta_m(s) ds$$

Observe que a exponencial não depende de  $s$ . Agora, tomando a integral em cada uma das três parcelas dadas pela somatória e considerando a exponencial como constante em cada uma destas parcelas, temos

$$\sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\xi n} \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \theta_n'(s) \theta_m'(s) ds = \quad (5.22)$$

$$\omega_h(\xi)^2 \sum_{n=(m-1)h}^{(m+1)h} e^{ih\xi n} \int_{(m-1)h}^{(m+1)h} \theta_n(s) \theta_m(s) ds$$

Nos três termos da soma no primeiro membro aparecerão, respectivamente, as derivadas das funções chapéu  $\theta'_{m-1}(s), \theta'_m(s), \theta'_{m+1}(s)$ , enquanto que, no segundo membro, respectivamente, teremos  $\theta_{m-1}(s), \theta_m(s), \theta_{m+1}(s)$ . Todas estas podem ser obtidas de (5.10), ou seja,

$$\theta_{m-1}(s) = \begin{cases} 2 - m + \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh - 2h, mh - h] \\ m - \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \theta'_{m-1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - 2h, mh - h] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\theta_m(s) = \begin{cases} 1 - \left(m - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (mh - h, mh] \\ 1 + \left(m - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (mh, mh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \theta'_m(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh - h, mh] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\theta_{m+1}(s) = \begin{cases} -m + \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h] \\ 2 + m - \frac{s}{h} & \text{se } s \in (mh + h, mh + 2h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \theta'_{m+1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh, mh + h] \\ -\frac{1}{h} & \text{se } s \in (mh + h, mh + 2h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Depois de explicitar as somas em (5.22), basta substituir o valor de cada uma das funções acima na integral correspondente, respeitando os limites de integração. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} & e^{ih\xi m} e^{-ih\xi} \int_{(m-1)h}^{mh} \left(\frac{-1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) ds + e^{ih\xi m} \left[ \int_{(m-1)h}^{mh} \left(\frac{1}{h^2}\right) ds + \int_{mh}^{mh+h} \left(\frac{1}{h^2}\right) ds \right] + \\ & e^{ih\xi m} e^{ih\xi} \int_{mh}^{mh+h} \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) ds = \omega_h(\xi)^2 e^{ih\xi m} e^{-ih\xi} \int_{(m-1)h}^{mh} \left(m - \frac{s}{h}\right) \left(1 - m + \frac{s}{h}\right) ds + \\ & e^{ih\xi m} \left( \int_{(m-1)h}^{mh} \left(1 - m + \frac{s}{h}\right)^2 ds + \int_{mh}^{mh+h} \left(1 + m - \frac{s}{h}\right)^2 ds \right) + \\ & e^{ih\xi m} e^{ih\xi} \int_{mh}^{mh+h} \left(-m + \frac{s}{h}\right) \left(1 + m - \frac{s}{h}\right) ds \end{aligned} \quad (5.23)$$

resolvendo as integrais, encontramos

$$\begin{aligned} & -e^{ih\xi m} e^{-ih\xi} \frac{1}{h} + e^{ih\xi m} \frac{2}{h} - e^{ih\xi m} e^{ih\xi} \frac{1}{h} = \\ & \omega_h(\xi)^2 \left( e^{ih\xi m} e^{-ih\xi} \frac{h}{6} + e^{ih\xi m} \frac{2h}{3} + e^{ih\xi m} e^{ih\xi} \frac{h}{6} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Usando a identidade  $2\cos(\xi h) = e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}$  e eliminando  $e^{ih\xi m}$ , podemos simplificar (5.24) e obter

$$\omega_h(\xi)^2 = \frac{6}{h^2} \frac{1 - \cos(h\xi)}{2 + \cos(h\xi)} \quad (5.25)$$

e se  $h\xi \ll 1$ , podemos expandir como série de Maclaurin, e assim

$$\omega_h(\xi)^2 = \xi^2 \left( 1 + \frac{(h\xi)^2}{12} + \dots \right) \quad (5.26)$$

logo, se  $h \rightarrow 0$ , tem-se no limite que

$$\omega_h(\xi) = \xi \quad (5.27)$$

Vamos agora considerar a função  $\Upsilon_h(\xi; \cdot)$ . Temos de (5.17) e (5.18) que as funções  $\Upsilon_h(\xi; \cdot)$  e  $\Theta_h(\xi; \cdot)$  são relacionadas pela seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial s} \Theta_h(\xi; s) = \Delta(\xi; h) \Upsilon_h(\xi; s), \quad \Delta(\xi; h) = \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}. \quad (5.28)$$

Note que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(\xi; h) = i\xi, \quad (5.29)$$

logo a função  $\Upsilon(\xi; \cdot)$  satisfaz uma propriedade análoga à relação  $u'(s) = i\xi u(s)$  satisfeita pela exponencial complexa  $u(s)$ . Esta propriedade indica que a função  $\mathbf{E}_h$  definida em (5.16) pode ser expressa de uma forma alternativa, ou seja

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2), \\ E_h^{(2)} = \alpha_2 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2), \end{cases} \quad (5.30)$$

onde  $\alpha_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\Delta(\xi_1; h)}$ , e  $\alpha_2 = \frac{\alpha_0^{(2)}}{\Delta(\xi_2; h)}$ .

Com o objetivo de determinar a relação de dispersão discreta, vamos buscar uma solução discreta não-trivial da forma (5.30) de modo a satisfazer a forma variacional apresentada em (5.1):

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (5.31)$$

À primeira vista, este problema parece ser insolúvel, já que existem apenas dois graus de liberdade associados com a função  $\mathbf{E}_h$  dada em (5.30), enquanto que a equação (5.31) parece incorporar infinitas condições. No entanto, a translação invariante da malha indica que a equação (5.1) realmente impõe somente duas condições independentes, como veremos a seguir.

Primeiramente, para qualquer  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ , escolhemos  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  da forma

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Um cálculo usando a propriedade (5.21) revela que

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E_h^{(1)} v_h^{(1)} dx_1 dx_2 \\ &= \omega_h(\xi_1)^2 \alpha_1 \prod_{l=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l \end{aligned} \quad (5.33)$$

e explicitando  $\nabla \times \mathbf{E}_h$  e  $\nabla \times \mathbf{v}_h = \mathbf{w}_2$ , onde

$$\nabla \times \mathbf{E}_h = (\alpha_2 - \alpha_1) \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{v}_h = -\theta'_{n1}(x_1) \theta'_{n2}(x_2)$$

logo,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\alpha_2 - \alpha_1) \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \theta'_{n_1}(x_1) \theta'_{n_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) \omega_h^2(\xi_1) \omega_h^2(\xi_2) \prod_{l=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{n_l}(x_l) dx_l \end{aligned}$$

Usando o problema auxiliar (5.21), a equação (5.31) simplifica-se para a equação algébrica

$$\alpha_1 (\omega_h(\xi_2)^2 - \omega^2) - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 = 0 \quad (5.34)$$

Observe que a mesma equação algébrica aparece independente da com a escolha do multi-índice  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ . O mesmo argumento aplica-se as demais componentes, ou seja, escolhendo

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n_1}(x_1) \theta'_{n_2}(x_2) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

obtemos a condição algébrica

$$\alpha_2 (\omega_h(\xi_1)^2 - \omega^2) - \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 = 0$$

Por isso, como descrito acima, a equação (5.31) se reduz a um sistema homogêneo de duas equações. Conseqüentemente, chegamos à seguinte condição equivalente para a existência de uma solução não-trivial  $\mathbf{E}_h$ .

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_h(\xi_2)^2 & -\omega_h(\xi_2)^2 \\ -\omega_h(\xi_1)^2 & -\omega^2 + \omega_h(\xi_1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante acima obtemos

$$\omega^2 (\omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_2)^2) = 0$$

e, deste modo, para  $\omega$  não-zero, tem-se que

$$\omega^2 = \omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_2)^2 \quad (5.36)$$

Agora, inserindo a expressão (5.25) para cada componente  $\xi_i$ , com  $i = 1, 2$ , chegaremos a uma expressão para a relação de dispersão discreta correspondente aos elementos de Nédélec de ordem zero, que é

$$\omega^2 = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{1 - \cos(h\xi_1)}{2 + \cos(h\xi_1)} + \frac{1 - \cos(h\xi_2)}{2 + \cos(h\xi_2)} \right] \quad (5.37)$$

se  $h|\boldsymbol{\xi}| \ll 1$ , pela expansão da série de Maclaurin de (31), obtemos

$$\omega^2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{1}{12} h^2 (\xi_1^4 + \xi_2^4) + \dots \quad (5.38)$$

o qual exhibe a precisão de segunda ordem da relação de dispersão discreta para o espaço de elementos de Nédélec de ordem zero.

### 5.3 Análise de Dispersão de Elementos de Nédélec de Ordem Arbitrária

Vamos encontrar uma expressão para a relação de dispersão discreta para um espaço  $\mathbf{V}_{hp}$  de elementos de Nédélec de ordem  $p - 1 \in \mathbb{N}$  arbitrária. Vamos buscar  $\mathbf{E}_{hp} \in \mathbf{V}_{hp}$  na forma

$$\mathbf{E}_{hp}(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) = e^{ih\xi_{hp}\cdot\mathbf{n}} \mathbf{E}_{hp}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \quad (5.39)$$

Em analogia com a equação (5.30), para dado  $\xi_{hp} \in \mathbb{R}^2$ , temos que

$$E_{hp}^{(d)} = \alpha_d \Theta'_{hp}(\xi_1; x_1) \Theta_{hp}(\xi_2; x_2), \quad d = 1, 2. \quad (5.40)$$

Analogamente a (5.21), consideramos o problema de autovalores auxiliar

$$\int_{\mathbb{R}} \Theta_{hp}(\xi; s)' v'_{hp}(s) ds = \omega_{hp}(\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} \Theta_{hp}(\xi; s) v_{hp}(s) ds \quad \forall v_{hp} \in V_{hp} \quad (5.41)$$

Similarmente para o caso de elementos de ordem zero, obtemos da forma variacional

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{hp}, \nabla \times \mathbf{v}_{hp}) - \omega^2(\mathbf{E}_{hp}, \mathbf{v}_{hp}) = 0 \quad (5.42)$$

simplicifica-se em

$$\alpha_1 (\omega_{hp}(\xi_2)^2 - \omega^2) - \alpha_2 \omega_{hp}(\xi_2)^2 = 0 \quad (5.43)$$

Na sequência podemos seguir fazendo escolhas para  $\mathbf{v}_{hp}$  de modo similar à (5.35), e obter a equação algébrica

$$\alpha_2 (\omega_{hp}(\xi_1)^2 - \omega^2) - \alpha_1 \omega_{hp}(\xi_1)^2 = 0 \quad (5.44)$$

Agora, escrevendo (5.43) e (5.44) na forma matricial, considerando a busca de uma solução não trivial para  $\mathbf{E}_{hp}$  e desde que  $\omega$  seja não-zero, tem-se

$$\omega^2 = \omega_{hp}(\xi_1)^2 + \omega_{hp}(\xi_2)^2. \quad (5.45)$$

que é a relação de dispersão discreta para elementos de Nédélec de ordem arbitrária.

Logo, para usar (5.45), gostaríamos que fosse possível expressar  $\omega_{hp}(\xi)$  em termos de  $\xi$ . Uma forma mais prática, para facilitar a exibição, seria encontrar uma definição implícita para  $\omega_{hp}(\xi)$  em termos de  $\cos(h\xi)$ . Por exemplo, no caso de elementos de ordem zero, a relação (5.25) pode ser reescrita na forma

$$\cos(h\xi) = R_1(h\omega_{h1}) = \frac{6 - 2(h\omega_{h1})^2}{6 + (h\omega_{h1})^2} \quad (5.46)$$

Esta expressão é generalizada para arbitrarias ordens de  $p$  no seguinte teorema, que é demonstrado em [2].

**Teorema 5.3.1** *Denote*

$$[2N_e + 2/2N_e]_{\xi \tan(\xi)}, \quad [2N_o/2N_o - 2]_{\xi \cot(\xi)}$$

como a aproximação de Padé para  $\xi \tan(\xi)$  e  $\xi \cot(\xi)$ , respectivamente, onde

$$N_e = \lfloor p/2 \rfloor, \quad N_o = \lfloor (p+1)/2 \rfloor$$

Logo,  $\omega_{hp}$  satisfaz

$$\cos(h\xi) = R_p(h\omega_{hp}), \quad (5.47)$$

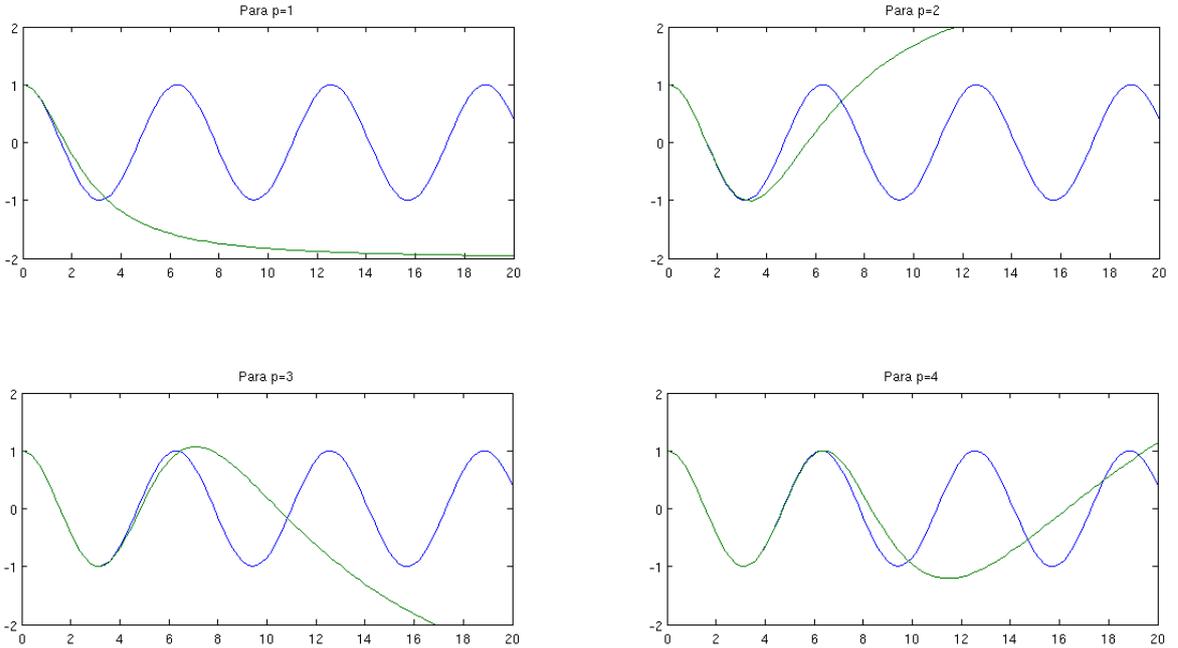
onde  $R_p$  é a função racional

$$R_p(2\xi) = \frac{[2N_o/2N_o - 2]_{\xi \cot(\xi)} - [2N_e + 2/2N_e]_{\xi \tan(\xi)}}{[2N_o/2N_o - 2]_{\xi \cot(\xi)} + [2N_e + 2/2N_e]_{\xi \tan(\xi)}} \quad (5.48)$$

Além disso, para  $h\xi \ll 1$ , é válido que

$$\omega_{hp}(\xi)^2 = \xi^2 + \left[ \frac{p!}{(2p)!} \right]^2 \frac{h^{2p} \xi^{2p+2}}{2p+1} + \dots \quad (5.49)$$

A figura 5.3, abaixo, mostra o comportamento do  $\cos(\omega h)$  e da função racional  $R_p(\omega_{hp}h)$  da equação (5.48) para aproximações de ordem  $p = 1, \dots, 10$  e  $\omega h \in [0, 20]$ .



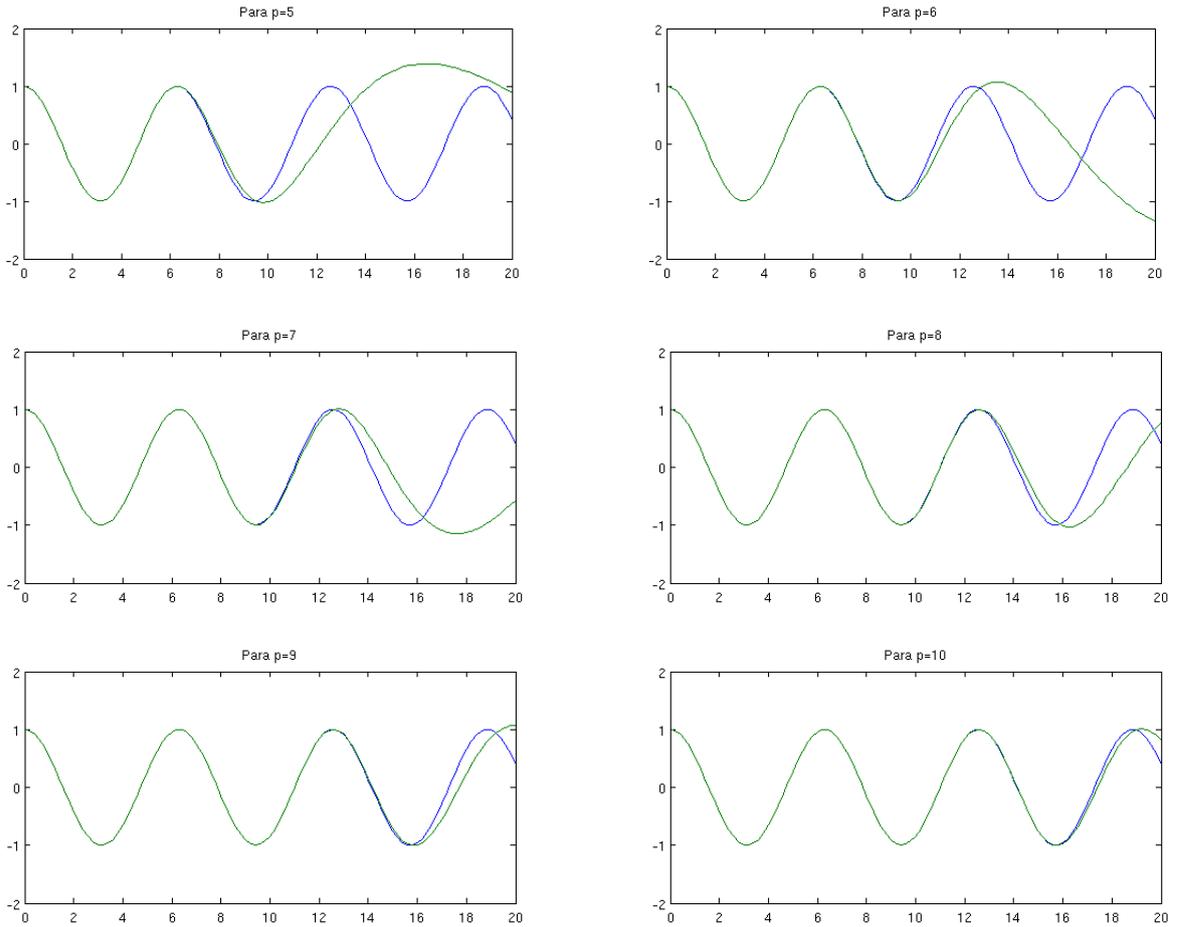


Figura 5.3: Curvas para  $\cos(\omega h)$  (azul) comparada com a função racional  $R_p(\omega h)$  (verde) dada em (5.48) para o método de ordem  $p = 1, \dots, 10$ .

A figura 5.3 confirma que o método de ordem superior determina uma aproximação até mesmo onde  $\omega h$  é relativamente grande. Seguindo nesta direção, uma questão foi estudada em [2], onde o seguinte resultado é mostrado. Se  $\omega h \ll 2p + 1$ , então

$$\cos(\omega_{hp}h) - \cos(\omega h) \approx \frac{1}{2} \sin(\omega h) \left[ \frac{e\omega h}{2(2p+1)} \right]^{2p+1} + \dots \quad (5.50)$$

A estimativa (5.50) determina uma qualificação precisa do comportamento observado na figura 5.3, e revela que, como a ordem do método está em crescimento para um valor fixado de  $\omega h$ , é obtido um forte decaimento no erro.

Casos especiais para os resultado de ordem  $p = 1, 2, 3$  são dados na Tabela 1 abaixo, reproduzida em [3], juntamente com o termo principal para o erro válido para  $h\xi \ll 1$ .

$p$	$R_p(h\omega_{hp})$	$\omega_{hp}(\xi)^2 - \xi^2$
1	$\frac{6 - 2(h\omega_{h1})^2}{6 + (h\omega_{h1})^2}$	$\frac{h^2\xi^4}{12}$
2	$\frac{3(h\omega_{h2})^4 - 104(h\omega_{h2})^2 + 240}{(h\omega_{h2})^4 + 16(h\omega_{h2})^2 + 240}$	$\frac{h^4\xi^6}{720}$
3	$\frac{-4(h\omega_{h3})^6 + 540(h\omega_{h3})^4 - 11520(h\omega_{h3})^2 + 25200}{(h\omega_{h3})^6 + 30(h\omega_{h3})^4 + 1080(h\omega_{h3})^2 + 25200}$	$\frac{h^6\xi^8}{100800}$
$p$	—	$\left[\frac{p!}{(2p)!}\right]^2 \frac{h^{2p}\xi^{2p+2}}{2p+1}$

Tabela 1. Casos especiais das relações entre  $\omega_{hp}(\xi)$  e  $\xi$  para a aproximação de ordem  $p$  dada no Teorema 5.3.1, juntamente com o termo principal para o erro válido para  $h\xi \ll 1$

Segue de (5.49) que o erro é dado por

$$\frac{\omega_{hp}(\xi)^2}{\xi^2} - 1 = \left[\frac{p!}{(2p)!}\right]^2 \frac{h^{2p}\xi^{2p}}{(2p+1)} + \dots = \mathcal{O}(h\xi)^{2p} \quad (5.51)$$

Ainsworth [3] estabelece uma conexão entre (5.51) e [36].

Os seguintes teoremas demonstrados em [2] tratam do comportamento do erro da relação de dispersão discreta, ou seja, do quão pequeno é o valor absoluto da diferença  $|\cos(\omega_{hp}h) - R_p(\omega_{hp}h)|$ .

**Teorema 5.3.2** *Seja  $p \in \mathbb{N}$ , e além disso consideremos  $h\omega \ll 1$ . O erro  $\mathcal{E}^p = |\cos(\omega_{hp}h) - R_p(\omega_{hp}h)|$  na relação de dispersão discreta é dado por*

$$\mathcal{E}^p \approx \frac{1}{2} \left[\frac{p!}{(2p)!}\right]^2 \frac{(h\omega)^{2p+2}}{2p+1}$$

**Teorema 5.3.3** *Suponha agora que  $h\omega \gg 1$ . Logo, o erro  $\mathcal{E}^p = |\cos(\omega_{hp}h) - R_p(\omega_{hp}h)|$  na relação de dispersão discreta quando  $h\omega \ll 2p+1$ , é dado pela aproximação*

$$\mathcal{E}^p \approx \frac{1}{2} \sin(\omega h) \left[\frac{e\omega h}{2(2p+1)}\right]^{2p+1}$$

## 5.4 Seleção do Parâmetro da Malha

Vamos utilizar a teoria desenvolvida neste capítulo para estabelecer um critério de seleção do parâmetro da malha  $h$ , começando com os elementos de Nédélec de ordem zero.

A equação (31) descreve a relação de dispersão discreta  $\omega = \omega(\boldsymbol{\xi})$ . Em analogia à seção 4.2, vamos considerar  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \xi)$  que resulta em

$$\omega^2 = \frac{12}{h^2} \left[ \frac{1 - \cos(h\xi)}{2 + \cos(h\xi)} \right] \quad (5.52)$$

Definimos a velocidade de fase numérica como sendo

$$C = \frac{\omega}{|\boldsymbol{\xi}|}$$

Como  $|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{2}\xi$ , temos que  $\omega = \sqrt{2}\xi C$ . Substituindo em (5.52), temos

$$C = \frac{\sqrt{6}}{h\xi} \left[ \frac{1 - \cos(h\xi)}{2 + \cos(h\xi)} \right]^{1/2} \quad (5.53)$$

Em geral temos de (5.45) que se  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \xi)$ , então  $\omega^2 = 2\omega_{hp}(\xi)^2$ . Por outro lado,  $\omega^2 = 2\xi^2 C^2$ , deste modo tem-se que

$$C = \frac{\omega_{hp}(\xi)}{\xi}$$

Podemos agora considerar o caso dos elementos de Nédélec de primeira ordem. Tomando  $p = 2$  na Tabela 1, obtemos

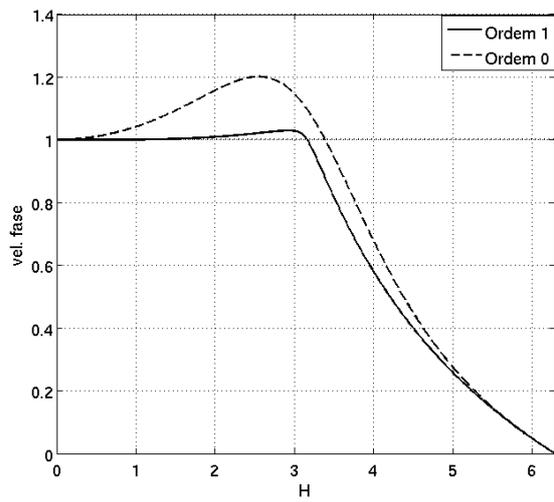
$$(h\omega_{h2}(h))^2 = \frac{16\cos(\xi h) + 104 + \sqrt{(16\cos(\xi h) + 104)^2 - 4(\cos(\xi h) - 3)(\cos(\xi h) - 1)}}{3 - 2(\cos(\xi h))}$$

Por outro lado, pela relação de dispersão  $\omega = |\boldsymbol{\xi}|$  do problema contínuo, temos que a velocidade de fase exata é dada por  $c = 1$ . A figura 5.4(a) mostra a velocidade de fase dos elementos de Nédélec de ordem zero e de ordem um. A figura 5.4(b) é uma ampliação da figura ao lado que permite estimar, por exemplo, o maior valor possível do parâmetro  $h$  de modo que o erro de fase estimado seja inferior a 1%, bastando observar os pontos em que as curvas de velocidade atingem o valor 1,01 (ou seja,  $\xi h \approx 0,5$  e  $\xi h \approx 2$  para elementos de ordem zero e ordem um, respectivamente).

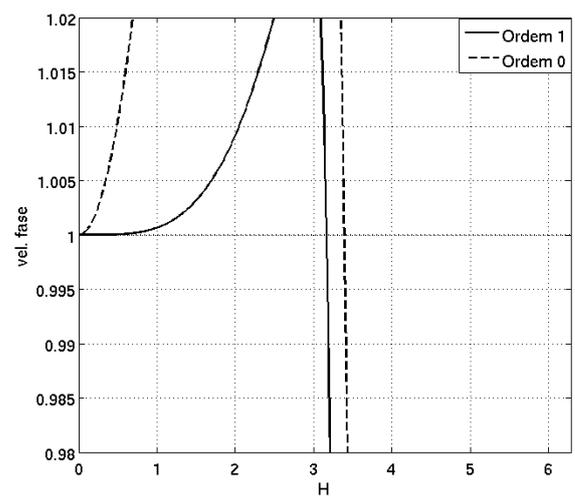
Vamos validar as estimativas obtidas para  $h$  por meio dos experimentos numéricos realizados na seção 4.2. Nessa seção utilizamos  $\boldsymbol{\xi} = (4\pi, 4\pi)$ , logo  $\xi = 4\pi$  e assim os valores recomendados para  $h$  são:

- $h \approx 0,04$  (ordem zero)
- $h \approx 0,16$  (ordem um)

De fato, a partir do valor  $h = 1/32 < 0,04$  a diferença de fase no experimento com elementos de ordem zero torna-se desprezível. O mesmo acontece para elementos de ordem um para  $h = 1/8 < 0,16$



(a)



(b)

Figura 5.4: Velocidade de fase dos elementos de Nédélec de ordem zero e de ordem um. No eixo  $x$ , temos  $H = h\xi$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho, descrevemos o espaço de elementos finitos de Nédélec de primeira ordem. A partir deste espaço realizamos alguns experimentos numéricos em problemas de eletromagnetismo, nos quais verificamos alguns interessantes resultados na aproximação. Tais resultados revelaram diferenças na fase da onda da solução aproximada, quando utilizamos uma condição de contorno imposta fracamente e diferenças na amplitude da onda da solução aproximada, quando consideramos uma condição de contorno homogênea.

Na sequência, vimos que a relação de dispersão discreta foi escrita em termos da relação de dispersão discreta para a aproximação da equação escalar de Helmholtz em uma dimensão. As expressões para o termo principal no erro em regimes onde: (a)  $\omega h \ll 1$ , mostrando que o erro na relação de dispersão é de ordem  $2p$  para um método de primeira ordem; (b)  $1 \ll \omega h \ll 2p+1$ , mostrando que neste caso o erro decai fortemente quando a ordem  $p$  do método está crescendo. Estes resultados descreveram o comportamento de elementos espectrais de primeira ordem e da versão- $p$  do método dos elementos finitos para a aproximação das equações de Maxwell harmônicas no tempo em números de onda moderadamente altos.

Trabalhamos também na busca do mais adequado parâmetro da malha, fornecendo informações quantitativas sobre o nível de refinamento da malha e da ordem de aproximação necessária para controlar os efeitos dispersivos. Por simplicidade, esta análise foi restrita a ondas planas se propagando com ângulo de 45 graus com a horizontal (assim como nos experimentos numéricos apresentados). A análise com ondas planas que se propagam em outras direções entretanto não apresenta dificuldades adicionais.

A teoria e os resultados preliminares apresentados servem como ponto de partida para estudos sobre elementos de Nédélec de alta ordem em duas e três dimensões. Outra proposta para trabalhos futuros seria investigar o comportamento da aproximação por Elementos de Nédélec para as Equações de Maxwell no sentido relativístico.

# Apêndice

Aqui apresentaremos uma versão em três dimensões para a relação dispersão para Elementos de Nédélec de ordem zero.

Vimos que de acordo com a seção 3.4 com  $\mathbf{J}_a = \mathbf{0}$ , o campo elétrico  $\mathbf{E}$  satisfaz a equação de Maxwell harmônica de segunda ordem:

$$-\omega^2 \mathbf{E} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1)$$

A relação de dispersão para esta equação pode ser descrita ao procurar uma onda plana, como solução não-trivial, da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

onde  $\mathbf{x}$  é uma variável espacial e  $\boldsymbol{\xi}$  aponta para a direção de propagação da onda plana.

Considerando o campo  $\mathbf{E}$  definido num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , tem-se que  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Agora, substituindo (2) em (1), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{i} (i\xi_2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_3 - i\xi_3 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_2) + \mathbf{j} (i\xi_3 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_1 - i\xi_1 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_2) \\ &+ \mathbf{k} (i\xi_1 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_2 - i\xi_2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \alpha_1) \end{aligned}$$

Aplicamos novamente o operador  $\nabla \times$ , assim

$$\nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} (-e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}})$$

Sendo assim, considerando (2), podemos escrever  $-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} + \nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$  como

$$-\omega^2 e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3 \xi_2 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Multiplicando ambos os lados por  $-e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ , tem-se

$$\omega^2\boldsymbol{\alpha} + M_\xi\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (3)$$

onde  $M_\xi = \begin{bmatrix} -\xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3\xi_2 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & -\xi_1^2 - \xi_2^2 \end{bmatrix}$ . Seguindo o mesmo procedimento realizado para escrever  $\nabla \times \nabla \times e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha}$  na forma matricial, podemos ver que

$$\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} (-\xi_2^2 - \xi_3^2)\alpha_1 + \xi_1\xi_2\alpha_2 + \xi_1\xi_3\alpha_3 \\ \xi_1\xi_2\alpha_1 + (-\xi_1^2 - \xi_3^2)\alpha_2 + \xi_3\xi_2\alpha_3 \\ \xi_3\xi_1\alpha_1 + \xi_3\xi_2\alpha_2 + (-\xi_1^2 - \xi_2^2)\alpha_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,  $M_\xi\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha})$ . Assim, (5.2) dá a condição

$$\omega^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

De (5.3), temos que

$$(\omega^2 I + M_\xi)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Considerando agora uma solução não-trivial para (5.4), tem-se que  $\det(\omega^2 I + M_\xi) = 0$ , ou seja

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & \omega^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2 & \xi_3\xi_2 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & \omega^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$\omega^2(\omega^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)^2 = 0 \quad (6)$$

Deste modo, se  $\omega$  é diferente de zero, segue o que definimos como a relação de dispersão

$$\omega = |\boldsymbol{\xi}| \quad (7)$$

Suponha que o domínio está particionado numa malha uniforme infinita consistindo de cubos de lado  $h$ , com eixos de coordenadas cartesianas escolhidas de forma a coincidir com as direções das arestas dos cubos, como na figura 1 abaixo.

Denotemos  $\mathbf{V}_h$  como o espaço dos elementos de Nédélec de ordem zero construído sobre esta malha. Os campos  $\mathbf{E}_h = (E_h^{(1)}, E_h^{(2)}, E_h^{(3)}) \in \mathbf{V}_h$  serão expandidos forma

$$E_h^{(d)} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \alpha_{\mathbf{n}}^{(d)} \phi_{\mathbf{n}}^{(d)} \quad (8)$$

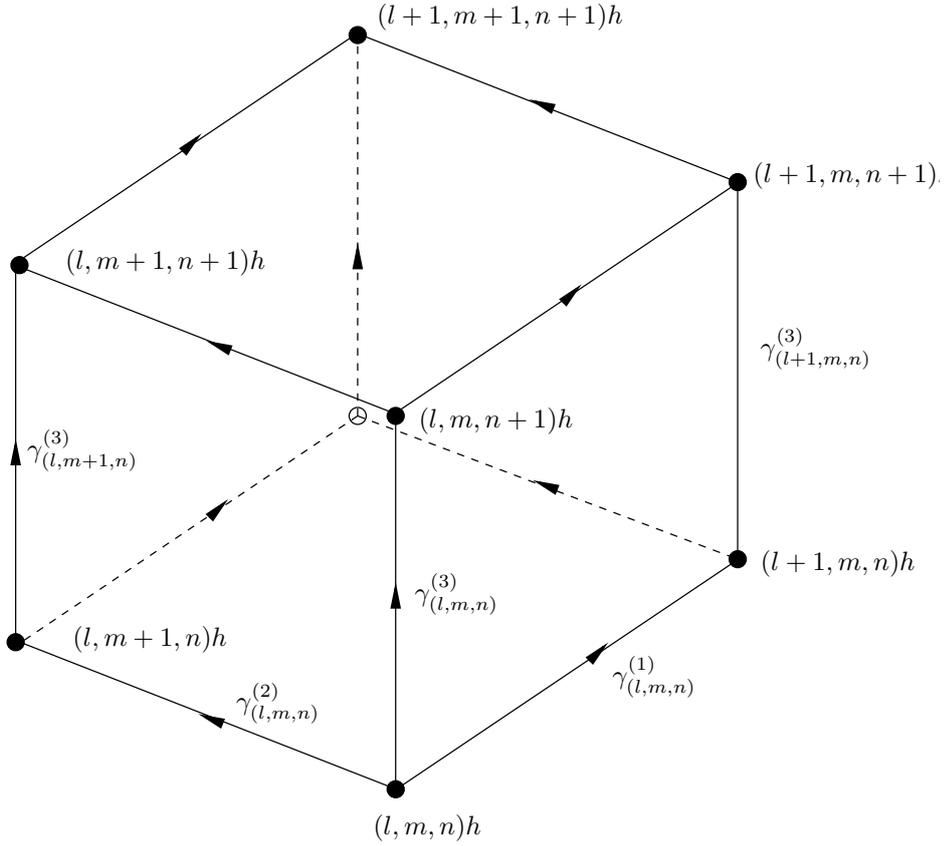


Figura 1: Notação usada para descrever as arestas relativas aos vértices de um típico elemento cúbico, de lado  $h$ , retirado de uma malha uniforme infinita.

onde

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \chi_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\theta_{n3}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

com expressões análogas para as demais componentes, ou seja

$$\phi_{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\chi_{n2}(x_2)\theta_{n3}(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi_{\mathbf{n}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\chi_{n3}(x_3) \end{bmatrix}$$

Aqui,  $\chi_n$  é a função característica (descontínua) para o intervalo  $(nh, nh + h)$  dada por

$$\chi_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

enquanto que  $\theta_n$  é a função de interpolação linear e contínua por partes dada por

$$\theta_n(s) = \begin{cases} 1 - \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh - h, nh] \\ 1 + \left(n - \frac{s}{h}\right) & \text{se } s \in (nh, nh + h) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

A integral de linha de uma função de base,  $\phi_n^{(d)} \in \mathbf{V}_h$ , tomada ao longo das arestas do cubo, tem a seguinte forma

$$\int_{\gamma_m^{(e)}} \phi_n^{(d)} \cdot d\mathbf{x} = \begin{cases} h & \text{se } \mathbf{m} = \mathbf{n} \text{ e } d = e \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (12)$$

onde  $\gamma_m^{(e)}$  denota a aresta alinhada com o  $a$ -ésimo eixo coordenado iniciando no vértice indexado por  $\mathbf{m}$ , veja figura 1. A partir de (12), podemos calcular os coeficientes do campo  $\mathbf{E}_h$  em (11) procedendo da seguinte forma:

Multiplicando (12) por  $\alpha_n^{(a)}$  e considerando  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$  juntamente com  $a = e$ , tem-se

$$\alpha_n^{(e)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(e)}} \alpha_n^{(e)} \phi_n^{(e)} \cdot d\mathbf{x}$$

e usando (8) para a  $d$ -ésima componente espacial, obtemos

$$\alpha_n^{(e)} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_n^{(e)}} \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{x} \quad (13)$$

Além disso, consideremos que uma solução discreta não-trivial  $\mathbf{E}_h$  satisfaz a condição

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x} + h\mathbf{n}) = e^{ih\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}} \mathbf{E}_h(\mathbf{x}) \quad (14)$$

onde  $\boldsymbol{\xi}_h$  é o vetor de onda discreto relacionado à uma prescrita frequência temporal  $\omega$  pela relação de dispersão discreta.

Aplicando uma mudança de variável em (13) e considerando a invariância de translação da malha, deduzimos que

$$\alpha_n^{(d)} = e^{ih\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}} \alpha_0^{(d)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (15)$$

Substituindo (15) em (8), tem-se

$$\mathbf{E}_h^{(d)} = \alpha_0^{(d)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} e^{ih\boldsymbol{\xi}_h \cdot \mathbf{n}} \phi_n^{(d)} \quad (16)$$

e então, considerando o fato de que a somatória se desacopla em contribuições separadas de

cada componente de  $\mathbf{n}$ , segue que

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_0^{(1)} \Upsilon_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(2)} = \alpha_0^{(2)} \Theta_h(\xi_1; x_1) \Upsilon_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(3)} = \alpha_0^{(3)} \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Upsilon_h(\xi_3; x_3), \end{cases} \quad (17)$$

onde

$$\Upsilon_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \chi_n(s) \quad (18)$$

$$\Theta_h(\xi; s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ih\xi n} \theta_n(s) \quad (19)$$

A equação (17) é uma versão discreta análoga à equação (2) e reflete o fato que ambos os campos, discreto e contínuo, tem apenas três graus de liberdade,  $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_0^{(3)}$  correspondentes às escalas aplicadas individualmente às componentes da solução discreta.

As funções  $\Theta_h$  e  $\Upsilon_h$  no caso de três dimensões, apresentam as mesmas propriedades que as suas equivalentes em duas dimensões vistas no capítulo 5. Portanto, a partir de  $\Theta_h$  também encontramos a relação de dispersão discreta para a equação escalar de Helmholtz em uma dimensão

$$\omega_h(\xi)^2 = \frac{6}{h^2} \frac{1 - \cos(h\xi)}{2 + \cos(h\xi)} \quad (20)$$

e

$$\Theta'_h(\xi; \cdot) = \Delta(\xi; h) \Upsilon_h(\xi; \cdot) \quad (21)$$

onde

$$\Delta(\xi; h) = \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} \rightarrow i\xi \quad \text{com } h \rightarrow 0 \quad (22)$$

Esta propriedade indica que a função  $\mathbf{E}_h$  definida em (17) pode ser expressa de uma forma alternativa, ou seja

$$\begin{cases} E_h^{(1)} = \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(2)} = \alpha_2 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3), \\ E_h^{(3)} = \alpha_3 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3), \end{cases} \quad (23)$$

onde  $\alpha_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\Delta(\xi_1; h)}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\alpha_0^{(2)}}{\Delta(\xi_2; h)}$  e  $\alpha_3 = \frac{\alpha_0^{(3)}}{\Delta(\xi_3; h)}$ .

Com o objetivo de determinar a relação de dispersão discreta, uma solução discreta não-trivial da forma (23) é buscada de modo a satisfazer a forma variacional apresentada em (1):

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) - \omega^2(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (24)$$

Primeiramente, para qualquer  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ , escolhemos  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  da forma

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta_{n3}(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Um cálculo usando a propriedade (5.21) revela que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E_h^{(1)} v_h^{(1)} dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \omega_h(\xi_1)^2 \alpha_1 \prod_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l
\end{aligned} \tag{26}$$

e explicitando  $\nabla \times \mathbf{E}_h = \mathbf{w}_1$  e  $\nabla \times \mathbf{v}_h = \mathbf{w}_2$ , onde

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) - \alpha_2 \Theta_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \\ \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) - \alpha_3 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \\ \alpha_2 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) - \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \end{bmatrix}^T$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta'_{n3}(x_3) \\ -\theta'_{n1}(x_1) \theta'_{n2}(x_2) \theta_{n3}(x_3) \end{bmatrix}^T$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}_h, \nabla \times \mathbf{v}_h) = (\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta'_{n3}(x_3) - \\
&\quad \alpha_3 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta_h(\xi_2; x_2) \Theta'_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n1}(x_1) \theta_{n2}(x_2) \theta'_{n3}(x_3) - \\
&\quad \alpha_2 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n1}(x_1) \theta'_{n2}(x_2) \theta_{n3}(x_3) + \\
&\quad \alpha_1 \Theta'_h(\xi_1; x_1) \Theta'_h(\xi_2; x_2) \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta'_{n1}(x_1) \theta'_{n2}(x_2) \theta_{n3}(x_3) dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_3)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad - \alpha_3 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_3)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad - \alpha_2 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_2)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n3}(x_3) dx_3 \right) \\
&\quad + \alpha_1 \omega_h(\xi_1)^2 \omega_h(\xi_2)^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_1; x_1) \theta_{n1}(x_1) dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_2; x_2) \theta_{n2}(x_2) dx_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_3; x_3) \theta_{n3}(x_3) dx_3 \right) \\
&= \left( \prod_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}} \Theta_h(\xi_l; x_l) \theta_{nl}(x_l) dx_l \right) (\omega_h(\xi_1)^2 [\alpha_1 (\omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2) - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 - \alpha_3 \omega_h(\xi_3)^2])
\end{aligned}$$

Deste modo, com esta escolha para  $\mathbf{v}_h$ , a equação (24) simplifica-se para a condição algébrica

$$\alpha_1 (\omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 - \omega^2) - \alpha_2 \omega_h(\xi_2)^2 - \alpha_3 \omega_h(\xi_3)^2 = 0 \tag{27}$$

Observe que a mesma condição algébrica aparece independente da com a escolha do multi-

índice  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$ . O mesmo argumento aplica-se as demais componentes, ou seja, escolhendo

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\theta'_{n2}(x_2)\theta_{n3}(x_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

obtemos a condição algébrica

$$\alpha_2(\omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 - \omega^2) - \alpha_1\omega_h(\xi_1)^2 - \alpha_3\omega_h(\xi_3)^2 = 0$$

e escolhendo

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{n1}(x_1)\theta_{n2}(x_2)\theta'_{n3}(x_3) \end{bmatrix} \quad (29)$$

obtemos a condição algébrica

$$\alpha_3(\omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_2)^2 - \omega^2) - \alpha_1\omega_h(\xi_1)^2 - \alpha_2\omega_h(\xi_2)^2 = 0$$

Por isso, como descrito acima, a equação (24) se reduz a apenas três condições independentes. Consequentemente, chegamos à seguinte condição equivalente para a existência de uma solução não-trivial  $\mathbf{E}_h$ .

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_h(\xi_2)^2 - \omega_h(\xi_3)^2 & \omega_h(\xi_2)^2 & \omega_h(\xi_3)^2 \\ \omega_h(\xi_1)^2 & \omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_3)^2 & \omega_h(\xi_3)^2 \\ \omega_h(\xi_1)^2 & \omega_h(\xi_2)^2 & \omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_2)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante acima obtemos

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h(\xi_1)^2 - \omega_h(\xi_2)^2 - \omega_h(\xi_3)^2)^2 = 0$$

e, deste modo, para  $\omega$  não-zero, tem-se que

$$\omega^2 = \omega_h(\xi_1)^2 + \omega_h(\xi_2)^2 + \omega_h(\xi_3)^2 \quad (30)$$

Agora, inserindo a expressão (20) para cada componente  $\xi_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , chegaremos a uma expressão para a relação de dispersão discreta correspondente aos elementos de Nédélec de ordem zero, que é

$$\omega^2 = \frac{6}{h^2} \left[ \frac{1 - \cos(h\xi_1)}{2 + \cos(h\xi_1)} + \frac{1 - \cos(h\xi_2)}{2 + \cos(h\xi_2)} + \frac{1 - \cos(h\xi_3)}{2 + \cos(h\xi_3)} \right] \quad (31)$$

se  $h|\boldsymbol{\xi}_h| \ll 1$ , pela expansão da série de Maclaurin de (31), obtemos

$$\omega^2 = |\boldsymbol{\xi}_h|^2 + \frac{1}{12}h^2(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4) + \dots \quad (32)$$

o qual exibe a precisão de segunda ordem da relação de dispersão discreta para o espaço de elementos de Nédélec de ordem zero.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Ainsworth, M. Discrete dispersion for hp-version finite element approximation at high wavenumber. *SIAM J. Numer. Analysis* vol. 42, pp. 553-575, 2003.
- [3] Ainsworth, M. Dispersive properties of high - order Nédélec/edge element approximation of the time - harmonic Maxwell equations. *Philosophical transactions of the The Royal Society of London*. vol. 362, pp. 471-491, 2004.
- [4] Ainsworth, M. and Coyle, J. Hierarchic hp-edge element families for Maxwell's equations on hybrid quadrilateral and triangular meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* vol. 190, pp. 6709-6733, 2001.
- [5] Adjerid, S. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* vol. 190, pp. 2925-2941, 2001.
- [6] Boffi, D. and Perugia, I. Computation model of electromagnetic resonator: analysis of edge element approximation. *SIAM J. Numer. Ana..* vol. 36, pp. 1264-1290, 1999.
- [7] Brenner, S. and Scott, L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag. New York, 1994.
- [8] Brezzi, F. and Fortin, M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag. New York, 1991.
- [9] Christon, M. The influence of the mass Matrix on the dispersive nature of the semi-discrete, second-order wave equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol.173, pp. 146-166, 1999.
- [10] Ciarlet, G. *The Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland Pub.. New York, 1978.
- [11] Colton, D. and Kress, R. *Integral Equations Methods in Scattering Theory*. John Wiley and Sons InC. New York, 1983.
- [12] Girault, V. and Raviart, P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations - Theory and Algorithms*. Springer-Verlag. Berlim, 1986.

- [13] Girault, V., Bernardi, C., Amrouche, C. and Dauge, M. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. vol. 21, pp. 823-864, 1998.
- [14] Greenleaf, A. Kurylev, Y. Lassas, M. and Uhlmann, G. Full-Wave Invisibility of Active Devices at All Frequencies. *Communications in Mathematical Physics*. vol. 275, pp. 749-789, 2007.
- [15] Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Publishing INC. Massachusetts, 1985.
- [16] Haueisen, J. *Influence of Tissue Resistivities on Neuromagnetic Fields and Electric Potentials Studied with a Finite Element Model of the Head*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 44, pp. 727-734, 1997.
- [17] Ihlenburg, F. and Babuška, I. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. vol. 34, pp. 315-358, 1997.
- [18] Jin, J. *The Finite Element Method in Electromagnetism Second Edition*. John Wiley and Sons InC. New York, 2002.
- [19] Kaplan, W. *Advanced Calculus, Fifth Edition*. House of Electronics Industry. New York, 1970.
- [20] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley and Sons. New York, 1978.
- [21] Lima, E. *Um Curso de Análise Vol. 2*. IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2006.
- [22] Li, Y and Dai, S. Finite element modelling of marine controlled-source electromagnetic responses in two-dimensional dipping anisotropic conductivity structures. *Geophysical Journal International*, vol. 185, pp. 622-636, 2011.
- [23] Macedo, A. *Eletromagnetismo*. Guanabara. Rio de Janeiro, 1988.
- [24] Mathews, J. *Numerical Methods Using Matlab*. Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2004.
- [25] Monk, P. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford Science Publications. New York, 2003.
- [26] Monk, P. A finite element method for approximating the time - harmonic Maxwell equation. *Numerische Mathematik*. vol. 63, pp. 243-261, 1991.
- [27] Monk, P. A simple Proof of Convergence for an Edge Element Discretization of Maxwell Equations. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. vol. 28, pp. 127-141, 2003

- [28] Monk, P. and Parrot, A. Dispersion analysis of finite element methods for Maxwell equations. *SIAM J. Sci. Comput.* vol. 15, pp. 916-937, 1994.
- [29] Monk, P. and Cohen, G. Gauss point mass lumping schemes for Maxwell equations. *Numerical Methods for PDEs.* vol. 14, pp 63-88, 1998.
- [30] Nečas, J. *The Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations.* John Wiley and Sons. New York, 1983.
- [31] Nédélec, J. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik* vol. 35, pp. 315-341, 1980.
- [32] Nédélec, J. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik* vol. 50, pp. 57-81, 1986.
- [33] Reddy, B. *Funcional Analysis and Boundary-Value Problems: an Introductory Treatment.* John Wiley and Sons. New York, 1986.
- [34] Smith, J. Human exposure assessment in the near field of GSM base-station antennas using a hybrid finite element/method of moments technique. *Biomedical Engineering IEEE T.* vol. 50 pp. 224-233, 2003.
- [35] Schwartz, M. Green, S. and Rutledge, W. *Vector Analysis with Applications to Geometry and Phisics.* Harper and Brothers. New York, 1960.
- [36] Thompson, L. and Pinsky, P. Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method. *Computat. Mech.* vol. 13, pp. 255-275, 1994.
- [37] Whitney, H. *Geometry Integration Theory.* Princeton University Press. New Jersey, 1957.