

CÉSAR MANCHEIN

***Estudo das Propriedades de Caos Fraco em Sistemas
Conservativos e Intermitentes***

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Werner Beims.

CURITIBA

2010

*Dedico esta Tese de Doutorado
a meus pais,
cujo exemplo de honestidade e trabalho tem sido
um norteador para à minha vida,
e a minha esposa,
que tem me dado apoio nos momentos mais difíceis
e mostrado a simplicidade de ter esperança.*

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma ajudaram-me a alcançar o objetivo de obter o grau de Doutor em Física. Chego ao final deste Curso de Pós-graduação convicto de que sem o **apoio**, **incentivo**, e **força** que recebi de quem menciono abaixo, talvez não tivesse atingido esta meta.

Agradeço,

- ❖ à minha esposa: Denise Sevegnani Manchein, que esteve ao meu lado em todos os momentos, apoiando-me e dando-me forças para continuar;
- ❖ aos meus pais e à minha irmã: Valdino, Ana e Vanessa Manchein, pelo incentivo e força que sempre me deram;
- ❖ ao meu orientador e amigo: Prof. Marcus Werner Beims, pelo tempo e esforço que me dedicou durante estes sessenta e quatro meses (compostos por 47 meses de Doutorado + 17 meses de Mestrado) em que trabalhamos juntos;
- ❖ aos pesquisadores do Centro de Dinâmica Não-Linear e Sistemas Complexos da Università degli Studi dell’Insubria de Como, Itália, dentre os quais gostaria de destacar: os Profs. Roberto Artuso, Giulio Casati, Giuliano Benenti e Giorgio Mantica, e meus estimados amigos Laura Rebuzzini, Matteo Sala, Silvia Soriare e Luca Paredi;
- ❖ aos Profs. Sergio Roberto Lopes e Ricardo Luiz Viana, por todas as discussões científicas e ao Prof. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional;
- ❖ a todos os Profs. das disciplinas de Pós-Graduação que cursei ao longo do período de doutoramento: Miguel Abbate, Marcio Henrique Franco Bettega, Marcus Werner Beims, Ricardo Luiz Viana e Edilson Sérgio Silveira;
- ❖ aos colegas de Pós-Graduação, que de alguma forma colaboraram no desenvolvimento deste trabalho. Em especial, ao meu estimado amigo Cristiano Francisco Woellner;
- ❖ ao CNPq, pelo suporte financeiro: tanto no período de doutoramento no Brasil quanto no exterior (seis meses de Doutorado Sanduíche em Como, Itália);
- ❖ a Deus, por tudo.

*“A vida é uma pedra de amolar: desgasta-nos ou afia-nos,
conforme o metal de que somos feitos.”*

George Bernard Shaw

Resumo

O tema desta Tese consiste na caracterização do efeito de aprisionamento de trajetórias caóticas por estruturas de regularidade, chamadas quase-armadilhas dinâmicas. Geralmente, o espaço de fases de sistemas conservativos é composto por domínios onde a dinâmica pode ser regular, caótica ou uma mistura de ambos. A proposta deste trabalho visa investigar, principalmente, o que acontece na interface entre estes domínios. Sabe-se que quando trajetórias caóticas se aproximam de regiões de regularidade, elas são *aprisionadas* por um intervalo de tempo finito fazendo com que seu movimento se torne localmente quase-regular. Este processo é de essencial importância pois influencia diretamente as propriedades de transporte e decaimento das correlações temporais. Com o intuito de detectar estas estruturas de regularidade e estimar o decaimento das correlações temporais através dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, investigamos numericamente diferentes classes de sistemas dinâmicos ao longo deste trabalho. Inicialmente utilizamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito para analisarmos a dinâmica de duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional, como função da razão entre as suas massas. Mostramos que o número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, extraído da distribuição destes, é sensível à existência de trajetórias aprisionadas no espaço de fases. Em seguida, também baseados na teoria dos grandes desvios das distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, determinamos o decaimento algébrico das correlações e recorrências de Poincaré para o mapa de Pikovsky, para uma família de mapas intermitentes e para um *ensemble* de mapas padrão modificados. Todos os resultados numéricos obtidos reproduziram de forma satisfatória o decaimento das quantidades citadas. E finalmente, através da investigação sistemática de uma rede de mapas simpléticos, caracterizamos a existência de trajetórias aprisionadas no espaço de fases de altas dimensões. Nesta investigação utilizamos quatro quantidades associadas à caracterização das distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito: o número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável, a variância, a assimetria e a curtose. Através destas quantidades mostramos que conforme o parâmetro de não-linearidade aumenta podemos identificar a transição da dinâmica quase-regular para a caótica, que ocorre simultaneamente em todas as direções instáveis. Deste modo, os resultados discutidos ao longo desta Tese contribuem para um melhor entendimento da dinâmica de sistemas que apresentam propriedades de caos fraco.

Palavras-Chave: Caos fraco, quase-armadilhas dinâmicas, expoentes de Lyapunov a tempo finito, decaimento das correlações, sistemas intermitentes, sistemas conservativos.

Abstract

The main idea of this Thesis is to characterize the presence of trapped trajectories close to structures of regularity, called quasi-traps. Generally, the phase space of conservative systems is composed of regions where the dynamics can be regular, chaotic or a coexistence of both. The purpose of this work aims to investigate, mainly, what happens at the interface between these regions. It is known that when the chaotic trajectories come close to regions of regularity, they are trapped by a finite time interval and its motion becomes locally quasi-regular. This process is of relevance since it directly influences the transport properties and correlations decay. With the aim of detecting these quasi-traps and estimating the decay of correlations via the distributions of finite time Lyapunov exponents, we investigate numerically different classes of dynamical systems throughout this work. Initially we used the distributions of finite time Lyapunov exponents to analyze the dynamics of interacting particles trapped in a two-dimensional billiards as a function of their masses ratio. We showed that the number of occurrences of the most probable finite time Lyapunov exponent, obtained from their distribution, is very sensitive to the existence of trapped trajectories in phase space. Then, based on the theory of large deviations of the distributions of finite time Lyapunov exponents, we determine the algebraic decay of correlations and Poincaré recurrences for the Pikovsky map, for a family of intermittent maps and an ensemble of modified standard maps. All numerical results reproduce satisfactorily the decay of correlations and Poincaré recurrences. Finally, through the systematic investigation of coupled symplectic maps, we characterize the existence of trapped trajectories in phase space of higher dimensions. In this investigation we use four quantities associated with the characterization of the distributions of finite time Lyapunov exponents: the number of occurrences of the most probable finite time Lyapunov exponent, variance, skewness and kurtosis. Through these quantities we showed that as the parameter of non-linearity increases, it is possible to identify the transition from quasi-regular dynamics to the chaotic one which occurs simultaneously in all unstable directions. Thus, the results discussed throughout this Thesis give an important contribution to better understand the dynamics of systems that exhibit properties of weak chaos.

Key-words: *Weak chaos, quasi-traps, finite time Lyapunov exponent, decay of correlations, intermittent systems, low and high dimensional conservative systems, symplectic maps.*

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 Breve Revisão Histórica	1
1.2 Sistemas Hamiltonianos e Caos Intermitente	3
1.3 Instabilidade Local e Expoentes de Lyapunov	9
1.3.1 O que é Dinâmica Caótica?	9
1.3.2 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito	10
1.4 Informações e Estrutura da Tese	12
2 Breve Revisão Conceitual	14
2.1 Propriedades Gerais dos Sistemas Hamiltonianos	14
2.1.1 Sistemas Hamiltonianos Integráveis	16
2.1.2 Toros Invariantes (toros KAM)	19
2.1.3 Toros Instáveis	20
2.2 Conceitos Básicos de Caos Clássico	21
2.2.1 Seção de Poincaré	22
2.2.2 Medida, Ergodicidade, Mistura e Decaimento das Correlações	22
2.2.3 Aprisionamento de Trajetórias por Estruturas de Regularidade	27
2.2.4 Expoentes de Lyapunov	28
2.2.5 Distribuição dos Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito	32

3	Dinâmica de Partículas Interagentes num Bilhar Unidimensional (1D)	34
3.1	Mapa de Gauss e Duas Partículas Interagentes num Bilhar 1D	39
3.2	Conclusões	44
4	Teoria dos Grandes Desvios e Taxas de Mistura	45
4.1	Regime de Grandes Desvios e Decaimento das Correlações Temporais	45
4.1.1	Sistema Unidimensional: Mapa de Pikovsky	49
4.1.2	Sistemas Bidimensionais: Família de Mapas Conservativos Intermitentes	54
4.1.3	Sistemas Hamiltonianos: Ensemble de Mapas Padrão Modificados	57
4.2	Conclusões	59
5	Quase-armadilhas Dinâmicas em uma Rede de Mapas Simpléticos Acoplados	61
5.1	Existem Trajetórias Aprisionadas em Espaços de Fases de Alta Dimensionalidade?	62
5.1.1	Mapa Padrão ($N = 1$ e $d = 2$) e Espectro de Lyapunov a Tempo Finito	65
5.1.2	Caracterização Quantitativa das Distribuições dos ELTFs	66
5.1.3	Análise Quantitativa da Distribuição dos ELTFs do Mapa Padrão	68
5.2	Rede de Mapas Simpléticos Acoplados	70
5.2.1	$N = 2$ ($d = 4$): Caso Separável	71
5.2.2	$N = 3$ ($d = 6$): Sensibilidade a Existência de Trajetórias Aprisionadas	72
5.2.3	$N = 5$ ($d = 10$): Definição do Parâmetro Crítico de Não-Linearidade K_d	74
5.2.4	$N = 10$ ($d = 20$): Espaço de Fases Mais Ergódico	78
5.3	Conclusões	81
6	Considerações Finais	83
6.1	Resultados Específicos	86
6.2	Problemas em Aberto	89
	Referências	91
	Apêndice A - Artigos Científicos	96

1 Introdução

Esta Tese de Doutorado é um trabalho essencialmente teórico/numérico, em que foram estudados vários aspectos relacionados ao fenômeno de aprisionamento de trajetórias caóticas por estruturas de regularidade (stickiness effect). Para o desenvolvimento deste trabalho utilizamos sistemas intermitentes e sistemas conservativos cujo comportamento assemelha-se a um processo intermitente. Deste modo, na Seção 1.1, apresentaremos uma pequena revisão histórica que serve de motivação inicial para nossa investigação. Em seguida na Seção 1.2, além de apresentarmos a classe de sistemas dinâmicos caóticos que serão estudados nos próximos Capítulos, discutiremos algumas de suas principais propriedades. A Seção 1.3 tem por objetivo introduzir a definição de dinâmica caótica e também uma discussão resumida a respeito dos expoentes de Lyapunov (a tempo finito). Finalmente, na Seção 1.4, relataremos alguns detalhes a respeito do período de Doutorado e apresentaremos a estrutura deste trabalho.

1.1 Breve Revisão Histórica

Uma observação feita no início do Século XIX, pelo o matemático francês Pierre S. de Laplace (1749-1827) no livro *Essai Philosophique sur les Probabilités* (“Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades”), publicado originalmente em 1812, reflete a visão científica daquela época. De acordo com Laplace, se alguma “inteligência” pudesse conhecer a **posição** e a **velocidade** de cada partícula do Universo num dado instante, assim como a massa e a força que age sobre cada uma dessas partículas, então essa “inteligência” poderia prever o futuro do Universo para o resto do tempo [1]. Esta afirmação é “apoiada” por exemplo, pelas conclusões obtidas por Galileu Galilei (1564-1642) a partir da análise de dados experimentais com pêndulos, planos inclinados e projéteis, que foram confirmadas pela teoria de Isaac Newton (1642-1727) sobre a Mecânica Clássica. Geralmente, fenômenos que ocorrem em escalas macroscópicas e descritos pela Mecânica Clássica, são previsíveis teoricamente devido ao seu caráter **determinístico**, onde a partir de uma condição inicial e de posse das suas respectivas equações de movimento pode-se construir uma trajetória. Por outro lado, existem fenômenos difíceis de serem previstos

devido à incapacidade de se construir modelos físicos para estudá-los, como por exemplo: antecipar variações de temperatura e a ocorrência de chuvas para a próxima semana. Perante este cenário surge a seguinte pergunta: a imprevisibilidade (dificuldade em prever o futuro) advém da grande quantidade e complexidade inerente as equações diferenciais não-lineares que governam a evolução temporal, ou ela tem outra origem? Este tipo de questão motivou e ainda serve de inspiração para se investigar a origem desta imprevisibilidade, característica de determinados sistemas não-lineares, e tentar entender o que realmente acontece.

A teoria dos fenômenos não-lineares recebeu um grande impulso em 1886 quando o rei Oscar II da Suécia, em seu aniversário de 60 anos, ofereceu um prêmio para quem desse uma prova matemática rigorosa a respeito da estabilidade do Sistema Solar. O ganhador do prêmio foi o matemático francês Jules H. Poincaré (1854-1912) em 1889, apesar de sua solução ter sido apenas parcial. Poincaré revitalizou o modo de abordagem das equações diferenciais não-lineares. Até então, buscava-se fórmulas que permitissem previsões precisas através da integração analítica das equações. Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções podiam ser investigadas, sem que tais soluções fossem conhecidas explicitamente. Deste modo, em vez de procurar por fórmulas, ele partiu para uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas e topológicas. Seu trabalho é considerado o primeiro sobre a abordagem qualitativa dos sistemas dinâmicos. Maiores detalhes e informações a respeito do trabalho de Poincaré podem ser encontrados na Ref. [2] ou então, na sua obra original [3]. Provavelmente Poincaré foi o primeiro a detectar a existência de **caos determinístico** no problema da interação entre três corpos¹ [3]. Ele mostrou, entre o final do século XIX e início do século XX, que a evolução de tal sistema é frequentemente “caótica” no sentido que pequenas perturbações em seu estado inicial, como por exemplo uma pequena variação na posição inicial de um corpo, poderiam levar a uma mudança radical em seu estado final, ou seja, existe uma considerável **sensibilidade às condições iniciais**.

A dinâmica não-linear tem sido por muito tempo investigada em diferentes contextos físicos, embora o seu real sucesso e entendimento de determinados processos não-lineares tenha ocorrido nos últimos 40 anos devido ao advento dos computadores. Basicamente, este processo de entendimento foi inspirado na descoberta de um novo fenômeno conhecido como **caos dinâmico** ou simplesmente **caos**. Na literatura científica relacionada à investigação da dinâmica caótica, existem relativamente poucos resultados rigorosos ou analíticos: dentre eles podemos destacar resultados referentes a sistemas hiperbólicos, como por exemplo, para os mapas do padeiro, do gato e determinados mapas lineares por partes [4]. A aplicação (ou tentativa) do ferramental matemático utilizado em sistemas hiperbólicos a problemas realísticos, com o objetivo de caracterizar a existência de um comportamento caótico, tem sido feita por muito tempo, porém

¹O problema da interação entre três corpos massivos representa uma forma simplificada do estudo da estabilidade do Sistema Solar.

com pouco sucesso². Todavia, atualmente existem intensos esforços sendo aplicados no estudo numérico destes tipos de sistemas. Dependendo das características do problema estudado, os resultados numéricos obtidos são totalmente confiáveis devido ao considerável nível de robustez apresentada pelas técnicas de investigação existentes. Podemos citar como exemplo típico desta confiabilidade a caracterização de caos em sistemas Hamiltonianos, ou num problema muito mais sofisticado onde supercomputadores, compostos por clusteres de processadores, integram centenas de equações diferenciais acopladas simulando determinadas condições meteorológicas. A busca contínua pela comparação de resultados analíticos com as simulações numéricas, constitui a essência das técnicas teóricas de investigação de sistemas dinâmicos não-lineares.

O estudo numérico de fenômenos não-lineares possui um considerável campo de aplicabilidade em áreas da Ciência e Engenharia, como por exemplo: previsão do tempo, previsões relacionadas ao mercado financeiro, circuitos elétricos, sistemas térmicos, evolução de epidemias, dinâmica de populações (em geral) etc.. Com isso na próxima Seção, introduziremos e definiremos uma classe amplamente investigada, segundo os preceitos da dinâmica não-linear, e que será utilizada nos próximos Capítulos desta Tese: os sistemas Hamiltonianos.

1.2 *Sistemas Hamiltonianos e Caos Intermitente*

Os sistemas Hamiltonianos constituem uma classe bastante importante no cenário científico. Dentre suas propriedades mais marcantes destacamos a conservação do volume do **espaço de fases** (conforme propõe o teorema de Liouville) [5, 6], ao contrário do que ocorre com os sistemas dissipativos. Quando um sistema dinâmico é classificado como Hamiltoniano autônomo, isso implica que a energia desse sistema manter-se constante. O estudo de sistemas Hamiltonianos é realizado através do **formalismo Hamiltoniano** [1, 6], por exemplo: sua dinâmica pode ser completamente descrita por uma função escalar simples, chamada Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, sendo t a variável temporal do sistema. Esta caracterização pode ser executada através dos vetores momento \mathbf{p} e coordenada \mathbf{q} , sendo que ambos possuem a mesma dimensão: N coordenadas espaciais generalizadas $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$ e N momentos conjugados generalizados $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$, sendo N o número de graus de liberdade do sistema. A partir da função $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ obtém-se as equações de movimento, também chamadas de equações de Hamilton, que integradas determinam a trajetória $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ do sistema em uma região chamada de **espaço de fases**, cuja dimensão é $2N$ [5].

Na maioria dos casos, sistemas com pelo menos dois graus de liberdade não são separáveis, ou seja, existe algum tipo de acoplamento entre as suas coordenadas que impossibilita a inte-

²Por exemplo, na determinação analítica dos expoentes de Lyapunov em sistemas Hamiltonianos bidimensionais.

gração analítica simultânea das respectivas equações de movimento. Por outro lado, um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade é dito integrável quando existirem N funções independentes $f_i(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$, com $i = 1, 2, \dots, N$, que representam constantes de movimento, ou seja, as funções f_i são constantes para todos os instantes de tempo. O fato de um sistema conservativo ser não-integrável implica na incapacidade de determinarmos as soluções analíticas das equações de Hamilton em termos das condições iniciais e do tempo [6]. Neste contexto, a investigação numérica é a forma mais apropriada de investigação de sistemas Hamiltonianos não-integráveis.

Uma das características mais notáveis dos sistemas Hamiltonianos não-integráveis consiste na existência de diferentes tipos de órbitas no seu espaço de fases geradas por diferentes condições iniciais (CIs): regulares (periódicas ou quase-periódicas, formando regiões chamadas **ilhas de regularidade**) e irregulares (compondo o **mar caótico**) [5]. Dependendo da intensidade da não-linearidade, o espaço de fases de sistemas Hamiltonianos pode ser composto pela coexistência de domínios que apresentam comportamentos caóticos e outros não-caóticos. Conseqüentemente, tais espaços de fases não apresentam uma estrutura simples e a compreensão da interação entre estes domínios constitui um campo de pesquisa ainda em desenvolvimento. A coexistência destes domínios com diferentes comportamentos é o motivo pelo qual ocorre a “**quebra de ergodicidade**” nos sistemas Hamiltonianos. Um sistema dinâmico é classificado como ergódico quando para “quase todas” as CIs e para qualquer observável contínuo do sistema em questão, médias temporais equivalem a médias espaciais no espaço de fases, conforme proposto pelo **teorema ergódico** [5]. Em outras palavras, para um dado sistema ser ergódico, uma trajetória típica poderá visitar o espaço de fases para tempos infinitamente longos. Isso exclui, por exemplo, sistemas Hamiltonianos bidimensionais que apresentam curvas invariantes também chamadas de curvas KAM³ [5] que restringem as áreas que podem ser visitadas pelas trajetórias. Por outro lado, no espaço de fases de sistemas dinâmicos Hamiltonianos podem existir domínios, que compõem o mar caótico, em que a dinâmica observada assemelha-se a dinâmica característica de um sistema ergódico.

Outro ponto importante associado à ergodicidade que merece ser discutido, está relacionado à obtenção quantitativa da **taxa de decaimento das correlações temporais** ou **propriedade de mistura** (*mixing*)⁴ [7, 8]. Em outras palavras, **sempre** que ocorrer o decaimento das correlações temporais (tendendo a zero para o tempo tendendo a infinito), o sistema apresenta a propri-

³O teorema KAM estabelece que, se um sistema dinâmico integrável (em que as órbitas encontram-se sempre localizados sobre superfícies lisas, isto é, toros invariantes determinados pelas constantes de movimento) for submetido a uma pequena perturbação não-linear, determinados toros serão deformados e outros destruídos. Os toros que sobrevivem são aqueles que possuem um quociente de frequências suficientemente irracionais, ou seja, são destruídos aqueles cujo quociente de frequências mais se aproxima de um número racional. Sendo assim, o último toro a ser destruído é o que apresentar o quociente de frequências mais irracional de todos: aquele que mais se assemelha com a razão áurea [4, 5].

⁴A propriedade de mistura corresponde à velocidade com que ocorre a perda de memória entre estados (presente em relação ao passado), conforme o sistema evolui temporalmente. Esta velocidade é determinada obtendo-se o decaimento das correlações temporais.

idade de **mistura**, que será discutida qualitativamente no Capítulo 2 [7, 8, 9]. De acordo com o matemático Vladimir I. Arnold (1937-2010), todo sistema que apresenta a propriedade de mistura é também ergódico embora o contrário nem sempre seja obedecido [5, 10]. Mesmo sistemas ergódicos e misturados podem apresentar propriedades estatísticas bastante particulares, dependendo das suas taxas de mistura ou das taxas de decaimento das correlações temporais. Geralmente as correlações temporais decaem rapidamente (exponencialmente) se a dinâmica do sistema estudado for **fortemente caótica** [7]; ou se os observáveis utilizados no cálculo das correlações forem suficientemente regulares⁵. Um sistema é classificado como **fortemente caótico**⁶ quando este não possuir nenhum tipo de estrutura que acarrete no aparecimento de domínios onde a dinâmica seja regular. Os mapas da tenda e do gato de Arnold podem ser considerados exemplos típicos de sistemas ergódicos, hiperbólicos ou fortemente caóticos [4]. Neste contexto, o decaimento das correlações temporais em sistemas conservativos (e também sistemas intermitentes que serão definidos nos próximos parágrafos) será governado por leis algébricas, que caracterizam a existência de propriedades de **caos fraco** [8], devido à presença de domínios imersos no mar caótico que apresentam comportamento regular. Contudo, conforme discutido na Ref. [12], existem também sistemas hiperbólicos e ergódicos que apresentam um lento (polinomial) decaimento das correlações, e por isso chamados de sistemas com propriedades estatísticas fracas.

Na literatura científica existem diversas simulações numéricas que comprovam a existência de um “**comportamento anômalo**” de determinadas trajetórias caóticas quando estas se aproximam das bordas de ilhas de regularidade, onde eventualmente longos intervalos de tempo são gastos. Em outras palavras, trajetórias típicas inicializadas no mar caótico podem ser **aprimionadas** por diferentes estruturas de regularidade, que em determinado momento, escapam e continuam visitando diferentes domínios imersos no mar caótico. Neste processo, tais trajetórias são aprisionadas ou ainda “coladas” nas bordas (*sticky motion*⁷ [8]) de verdadeiras *quase-armadilhas dinâmicas* (*quasi-dynamical traps*⁸ [8]) por um intervalo de tempo finito.

As primeiras observações numéricas da existência do aprisionamento de trajetórias caóticas nas vizinhanças de ilhas de regularidade, em espaços de fases de sistemas Hamiltonianos, foram realizadas nas décadas de 70 por George Contopoulos [13] e de 80 por outros pesquisadores

⁵Em determinados tipos de sistemas, como por exemplo no mapa da tenda [4], o decaimento das correlações temporais depende sensivelmente das funções utilizadas em sua estimativa. Uma escolha equivocada destas funções poderá resultar num decaimento algébrico, exponencial ou mais rápido do que exponencial [11].

⁶Os sistemas hiperbólicos, e sistemas conservativos de alta dimensionalidade cujo parâmetro de não-linearidade seja grande suficiente para não existirem estruturas de regularidade, podem ser considerados exemplos típicos de sistemas fortemente caóticos.

⁷Na língua inglesa o aprisionamento de trajetórias caóticas nas bordas de determinadas ilhas de regularidade é conhecido como *stickiness effect*.

⁸De acordo com físico George M. Zaslavsky, como o aprisionamento das trajetórias caóticas ocorre por um intervalo de tempo finito, não é correto falar em aprisionamento de trajetórias em armadilhas dinâmicas absolutas, mas em *quase-armadilhas dinâmicas*.

[14, 15, 16]. Contudo, George M. Zaslavsky (1935-2008) pode ser considerado um dos pesquisadores mais bem sucedidos na investigação deste fenômeno. De forma simplificada, o aprisionamento de trajetórias caóticas pode ser definido como longos e sucessivos intervalos de tempo em que a dinâmica do sistema em questão torna-se ‘menos caótica’. Em outras palavras, durante o aprisionamento das trajetórias estas tendem a apresentar um movimento ‘quase regular’ ou em determinados casos até regular, contrastando com sua dinâmica caótica quando elas estão longe das ilhas de regularidade. Tal comportamento assemelha-se ao que conhecemos por processo **intermitente** [4, 17], em que há uma alternância entre períodos de movimento regular e verdadeiros ‘estouros’ (*bursts*) em que o sistema torna-se caótico. Este tipo de ‘mecanismo’⁹ em que ocorre o aparecimento de caos a partir do comportamento regular foi proposto pela primeira vez por Yves Pomeau e Paul Manneville [17], como possível explicação do aparecimento de turbulência no experimento de Rayleigh-Bénard. Neste contexto, o comportamento intermitente pode ocorrer em sistemas Hamiltonianos [8, 18] devido ao aprisionamento de trajetórias caóticas nas bordas de ilhas de regularidade de forma semelhante ao que ocorre nas vizinhanças de regiões onde exista algum ponto fixo estável em sistemas intermitentes [17, 19, 20]. A investigação de determinados efeitos da presença de trajetórias aprisionadas no espaço de fases de sistemas Hamiltonianos, do ponto de vista de um processo intermitente, foi realizado por Eduardo G. Altmann [21] através do estudo do decaimento das recorrências de Poincaré.

O aprisionamento de trajetórias caóticas em quase-armadilhas dinâmicas tem uma grande influência em diversas propriedades dos sistemas dinâmicos não-lineares: demonstrada através de simulações numéricas num mapa bidimensional conservativo realizados por Charles F. F. Karney [14] e também por Boris V. Chirikov (1928-2008) e Dima Shepelyansky [15]. Os autores destes trabalhos mostraram que para longos intervalos de tempo, a probabilidade de sobrevivência de uma trajetória num “domínio fechado” em torno de uma cadeia de ilhas de diferentes tamanhos apresenta um lento decaimento, regido por uma lei de potência. Em contrapartida, em sistemas hiperbólicos ocorre um decaimento exponencial. Deste modo, quantidades como difusão e transporte são afetadas diretamente pela existência de trajetórias aprisionadas e por essa razão são chamados de difusão e transporte anômalos [22]. Grandezas utilizadas na quantificação de caos em sistemas dinâmicos são extremamente sensíveis a existência de trajetórias aprisionadas: é o caso dos **expoentes de Lyapunov** e entropia de Kolmogorov-Sinai. Além destes exemplos, a influência do fenômeno de aprisionamento pode ser observado diretamente no decaimento das correlações temporais [23] e nas recorrências de Poincaré [21], que neste caso também apresentam um comportamento anômalo. Algumas das principais aplicações resultantes da

⁹O comportamento característico das intermitências é o de um sinal regular - periódico ou quase-periódico - durante um certo intervalo de tempo e que evolui de forma aleatória para produzir um ‘estouro’ (*burst*) caótico por um breve período. O sistema retoma seu comportamento regular e o processo é reiniciado.

investigação do fenômeno de aprisionamento de trajetórias por estruturas de regularidade estão relacionadas a determinadas propriedades de sistemas macroscópicos: em particular na astronomia [24] e no estudo de fluidos [25].

Um dos sistemas Hamiltonianos mais conhecidos e utilizados da literatura científica no estudo da transição e coexistência dos comportamentos regular para caótico, conforme o parâmetro de não-linearidade é variado, é conhecido como mapa de Chirikov-Taylor [26] ou simplesmente mapa padrão (M) e definido como

$$M : \begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(q_n) & \text{mod } 2\pi, \\ q_{n+1} = q_n + p_{n+1} & \text{mod } 2\pi, \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo n a variável temporal discreta. Classicamente, o mapa padrão descreve uma partícula movendo-se livremente sobre um círculo sujeita a uma perturbação periódica de intensidade K (também considerado um sistema mecânico simples, chamado de rotor quicado). Quando $K > 0$, o sistema é não-integrável e ocorre a coexistência de regiões caóticas e regulares. Quanto maior for o valor de K ‘mais caótico’ será o sistema. As variáveis p e q representam velocidade angular e posição da partícula, respectivamente. O mapa padrão ainda tem sido amplamente utilizado na investigação de processos de difusão e transporte anômalos e também no decaimento anômalo das correlações temporais e recorrências de Poincaré, dentre os quais destacamos as seguintes Refs. [14, 15, 27, 28, 29, 30, 31].

A Fig. 1a apresenta o espaço de fases do mapa padrão construído para $K = 6,476939$ ¹⁰, com 200 CIs escolhidas aleatoriamente no domínio (p, q) cor-

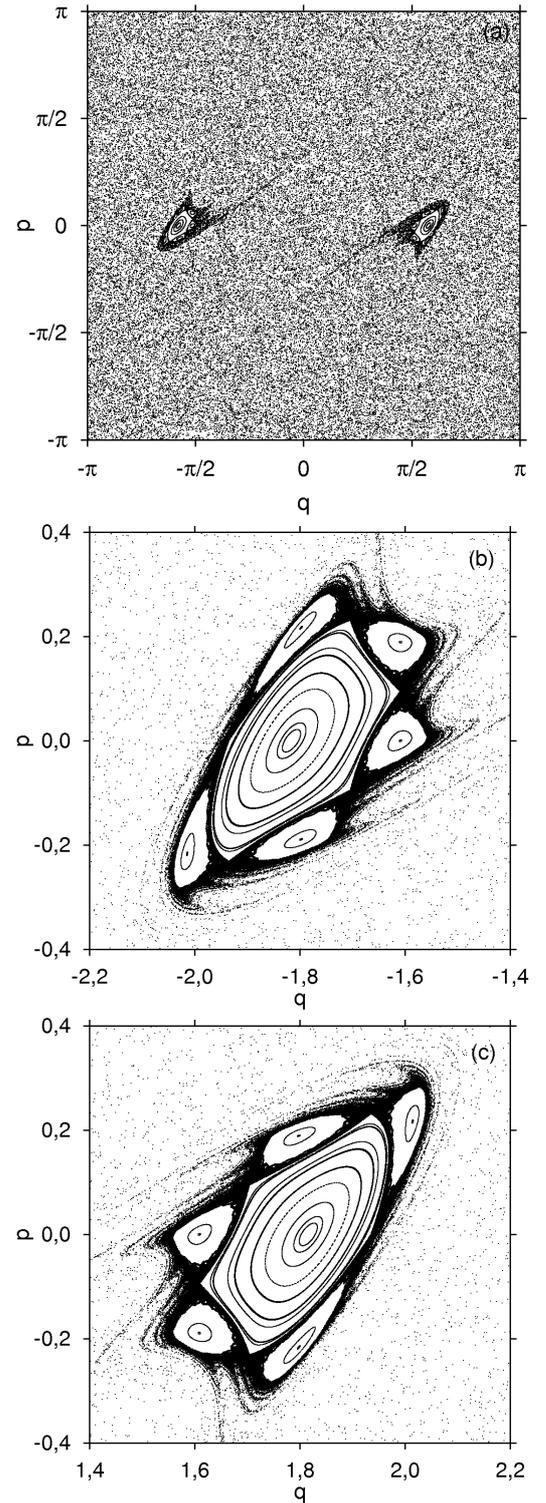


Figura 1: (a) Espaço de fases do mapa padrão com $K = 6,476939$, construído com 200 CIs iteradas até $n = 10^3$. As figuras (b) e (c) são ampliações dos dois domínios onde estão localizadas as ilhas de regularidade na figura (a).

¹⁰Utilizamos este valor de K devido as propriedades de transporte e decaimento das recorrências de Poincaré terem sido amplamente investigadas na Ref. [29].

respondente a $[-0, 25\pi; 0, 25\pi] \times [-0, 8\pi; 0, 8\pi]$ e iteradas até $n = 10^3$. As duas regiões onde há uma maior densidade de pontos, são duas ilhas de regularidade: devido ao efeito de aprisionamento de algumas das trajetórias que compõem o *ensemble* utilizado nas bordas destas ilhas ocorre o fenômeno de *stickiness*, definido anteriormente. Em outras palavras, existe uma maior densidade de pontos na fronteira do mar caótico com a borda das ilhas, sendo justamente nesta interface onde ocorre o aprisionamento. No interior de cada ilha, (veja Fig. 1a) existem órbitas quase-regulares, que são uma consequência da escolha de determinadas condições iniciais neste domínio. Este comportamento pode ser visualizado de forma mais clara nas ampliações (Figs. 1b e 1c) onde aparecem as duas ilhas de regularidade na Fig. 1a.

O efeito de aprisionamento de trajetórias caóticas causado por quase-armadilhas dinâmicas não ocorre exclusivamente em sistemas conservativos (especialmente sistemas Hamiltonianos). Isso também pode acontecer, por exemplo, em sistemas intermitentes, onde existam pontos fixos marginais estáveis. Estes tipos de pontos fixos são responsáveis pelo comportamento intermitente, que exerce uma forte influência na estatística das correlações temporais e recorrências de Poincaré que neste caso, geralmente decaem de acordo com uma lei algébrica. Um sistema amplamente utilizado no estudo de transporte anômalo e decaimento das correlações é o mapa de Pikovsky $T_z(x)$ [19], onde o tempo é uma variável discreta, definido implicitamente como

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2z}[1 + T_z(x)]^z, & 0 < x < 1/(2z), \\ T_z(x) + \frac{1}{2z}[1 - T_z(x)]^z, & 1/(2z) < x < 1, \end{cases} \quad (1.2)$$

enquanto que para valores negativos de x , o mapa é definido como $T_z(-x) = -T_z(x)$. O termo “implicitamente” utilizado na definição deste mapa é devido ao fato de que conhecemos o valor de $T_z(x)$, sem saber para qual valor de x ele foi gerado. O mapa deve então ser invertido através de procedimentos numéricos, como por exemplo, o método de Newton. O único caso em que o mapa (1.2) pode ser invertido analiticamente ocorre quando $z = 2$. Este sistema possui duas estruturas interessantes em $x = \pm 1$, onde existem dois pontos fixos marginais que são exatamente do mesmo tipo que aqueles encontrados no diagrama de fases do mapa de Pomeau-Manneville [17], sendo z também o correspondente parâmetro de intermitência como no mapa de Pikovsky (veja Capítulo 4). No momento em que as trajetórias se aproximam de um dos pontos fixos marginais estáveis, ocorre o seu aprisionamento por um intervalo de tempo finito. Este processo, como no caso das ilhas de regularidade em sistemas conservativos, caracteriza o fenômeno de aprisionamento de trajetórias caóticas em sistemas intermitentes.

1.3 Instabilidade Local e Expoentes de Lyapunov

1.3.1 O que é Dinâmica Caótica?

Existem diferentes definições para **dinâmica caótica**, ou seja, não existe um completo consenso na definição de **caos**. Contudo, pode-se até definir rigorosamente (analiticamente) **dinâmica caótica**, ou mais precisamente obter definições que não sejam equivalentes mas que, todavia, apresentam um ponto em comum: nenhuma destas definições pode ser aplicada a sistemas Hamiltonianos (caóticos), devido ao fato de que esta classe **não** apresenta um comportamento totalmente caótico para qualquer condição inicial escolhida, pelas razões discutidas anteriormente. Deste modo, a coexistência de domínios que apresentem comportamentos caóticos e regulares no espaço de fases (veja Fig. 1a-c) não tem uma estrutura simples, e a compreensão da interação entre estes domínios constitui um campo de pesquisa ainda em franco desenvolvimento.

Devido à escassez de resultados obtidos a partir de provas analíticas envolvendo sistemas Hamiltonianos, pode-se dizer que existem poucas maneiras de definir **dinâmica caótica** na literatura contemporânea [5]. Segundo Zaslavsky [8, 9], as ‘definições mais usuais’ instituem que determinado sistema é caótico se existe algum domínio no espaço de fases

- ❶ com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;
- ❷ ou com entropia de Kolmogorov-Sinai positiva;
- ❸ ou se o sistema for hiperbólico ou tipo-Anosov.

Neste contexto, torna-se essencial ressaltar que o vínculo entre estas definições é a existência de uma **instabilidade local** e conseqüentemente do **afastamento exponencial de trajetórias** geradas a partir de CIs escolhidas infinitesimalmente próximas, porém não exatamente iguais. Tanto para sistemas de tempo discreto quanto para os de tempo contínuo, a sensibilidade às CIs pode ser avaliada através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Essa provavelmente possa ser considerada uma das características fundamentais associada aos sistemas caóticos mais conhecida de todas.

Outra forma de definir **caos**, considerada especialmente em contextos matemáticos, foi proposta por Robert L. Devaney [32] e pode ser apresentada resumidamente como: um sistema dinâmico $f : x \rightarrow x$ é considerado caótico se (i) F apresenta transitividade topológica; (ii) as órbitas de f são densas em x ; (iii) f exibe dependência sensível às condições iniciais. Estas três condições podem ser entendidas, respectivamente, da seguinte maneira:

- (i) significa que escolhendo dois pontos quaisquer pertencentes a qualquer domínio de f , existe uma órbita que passa tão próxima quanto se queira desses dois pontos;

- (ii) seja A um conjunto e B um subconjunto de A . Diz-se que B é denso em A se para qualquer ponto $a \in A$ e para qualquer $\epsilon > 0$, há um ponto $b \in B$ tal que $\|a - b\| < \epsilon$. Os números racionais são densos nos números reais; os irracionais também são; mas os inteiros, não. No caso da definição de Devaney, exige-se que para qualquer ponto que pertença a x , exista uma órbita periódica tão próxima desse ponto quanto se queira;
- (iii) o sistema f depende sensivelmente das condições iniciais se existe um número ϵ , tal que para qualquer condição inicial x_0 e para “qualquer” número $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto x'_0 com $\|x'_0 - x_0\| < \delta$, tal que $\|f^{(n)}(x'_0) - f^{(n)}(x_0)\| \geq \epsilon$. Assim não importa o valor de x_0 e nem o raio δ , pode sempre se encontrar um ponto x'_0 no interior da bola de raio δ cuja órbita afasta-se da órbita de x_0 de pelo menos ϵ . Note que esta definição de sensibilidade às condições iniciais não exige que a órbita de x'_0 afaste-se da órbita de x_0 em todas as iterações.

A presente Tese de Doutorado tem como missão utilizar a primeira definição exposta no início desta Seção (segundo Zaslavsky [8, 9]) na caracterização de sistemas caóticos que apresentem comportamentos anômalos. Em outras palavras, através dos expoentes de Lyapunov calculados para intervalos de tempo finitos, cuja definição detalhada será exposta no Capítulo 2 (embora que algumas de suas principais propriedades serão discutidas a seguir) apresentaremos diversos resultados que comprovam a potencialidade destes expoentes na caracterização da dinâmica caótica de sistemas clássicos. Contudo, é importante enfatizar que o foco destas análises será mantido sobre o efeito de aprisionamento de trajetórias nas bordas de ilhas de regularidade e pontos fixos marginais (quase-armadilhas dinâmicas).

1.3.2 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Devido à existência de domínios que apresentam diferentes comportamentos no espaço de fases de sistemas conservativos e pontos fixos marginais no diagrama de fases de sistemas intermitentes, o resultado de observações feitas em simulações numéricas dependem do ensemble de CIs utilizado. Provavelmente a forma mais eficiente de estimar a sensibilidade às CIs apresentada por determinado sistema, é através dos expoentes de Lyapunov, λ_∞ [4, 33]. Através de λ_∞ pode-se quantificar a taxa de separação exponencial entre trajetórias originadas por CIs escolhidas infinitesimalmente próximas, porém que resultam em trajetórias totalmente distintas (veja Capítulo 2). Por outro lado, existem outras maneiras de determinar a sensibilidade às CIs, como por exemplo, a entropia de Kolmogorov-Sinai, que determina a entropia por unidade de tempo de dado sistema [34]. Contudo, contrastando com os sistemas que apresentam certa sensibilidade na escolha das CIs, existem os sistemas ergódicos em que médias espaciais são equivalentes a médias temporais, fazendo com que o valor dos expoentes de Lyapunov sejam

independentes das CIs escolhidas [35].

Os expoentes de Lyapunov representam um dos meios mais utilizados e eficientes na obtenção de informações a respeito da instabilidade local¹¹ no espaço de fases de sistemas dinâmicos, mais exatamente, com relação às direções de contração e de dilatação. Em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, como por exemplo o mapa padrão dado pela Eq. (1.1), teremos dois expoentes de Lyapunov: um positivo associado a direção que dilata e outro negativo referente a direção que contrai. O conjunto de todos os expoentes de Lyapunov de determinado sistema compõem o **espectro de Lyapunov**. Para sistemas conservativos a soma de todos os elementos do espectro de Lyapunov deve ser igual a zero, como uma consequência da conservação do volume do espaço de fases [5]. Além disso, da mesma forma que os autovalores da matriz Jacobiana, utilizados para determinar λ_∞ , são invariantes sob uma mudança de coordenadas, os expoentes de Lyapunov também o serão, garantindo assim um considerável grau de robustez.

Na definição rigorosa dos expoentes de Lyapunov existem dois limites que **devem** ser obedecidos: (i) a distância entre as condições iniciais deve tender a zero e (ii) os valores analíticos dos expoentes são obtidos no limite do tempo (representado pela variável discreta n) tendendo para infinito ($n \rightarrow \infty$). Como expressões analíticas para λ_∞ são raras, obtém-se o espectro de Lyapunov através de técnicas numéricas. Todavia, numericamente é impossível respeitar o limite de $n \rightarrow \infty$: o que se faz então, é truncar o cálculo dos expoentes de Lyapunov em determinado instante de tempo¹² n , obtendo deste modo, o que conhecemos por **expoentes de Lyapunov a tempo finito** (ELTF) [4, 36, 37, 38, 39, 40], que nesta Tese serão denotados pela letra grega λ_n .

Os valores dos expoentes de Lyapunov a tempo finito calculados para sistemas conservativos ou intermitentes podem variar consideravelmente, ou seja, eles podem ser influenciados pelas propriedades apresentadas por diferentes domínios do espaço de fases visitados pelas trajetórias [40]. Considerando este comportamento, pode-se escolher um **ensemble** de CIs e então construirmos distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito¹³, que chamaremos de $P_n(\lambda_n)$, para investigarmos tais propriedades. As flutuações no valor de λ_n são responsáveis pelo aumento da largura de $P_n(\lambda_n)$, e em certas situações, ocasionar o aparecimento de distribuições multimodais [43]. Em sistemas, cuja dinâmica seja regular, caótica ou haja a coexistência de ambos dependendo do domínio considerado, $P_n(\lambda_n)$ assemelha-se a uma Gaussiana apesar de que algumas vezes apresente uma “cauda gorda”: consequência da diminuição do valor dos expoentes de

¹¹A análise da instabilidade local constitui uma das ferramentas mais antigas e bem sucedidas no estudo dos sistemas dinâmicos, conforme discutido brevemente na Seção 1.1.

¹²Utilizamos o subíndice “ n ” baseados no mapa padrão dado pela Eq. (1.1): considerando que o tempo seja uma variável discreta.

¹³Os principais resultados desta Tese foram obtidos da análise destas distribuições. Dentre eles estão a detecção e caracterização de trajetórias aprisionadas em sistemas conservativos de baixa e de alta dimensionalidade [41, 42], e a determinação das taxas de decaimento das correlações temporais e recorrências de Poincaré [23].

Lyapunov locais, devido à influência de trajetórias caóticas aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas. Além disso é importante ressaltar que a largura de $P_n(\lambda_n)$ depende do intervalo de tempo em que os expoentes de Lyapunov a tempo finito são calculados. Em outras palavras, quando $n \rightarrow \infty$ a distribuição dos expoentes de Lyapunov, torna-se independente da dinâmica do sistema, pois ela tende assintoticamente para uma função delta de Dirac centrada em λ_∞ [44].

Desde a década de 80 até nossos dias, o estudo das informações contidas nas distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, tem servido para explicar diferentes comportamentos (propriedades de transporte, difusão e recorrências de Poincaré, por exemplo) relacionados a dinâmica de determinadas classes de sistemas dinâmicos, conforme pode ser encontrado nas Refs. [23, 41, 44, 43, 45, 46, 47, 48, 49].

1.4 Informações e Estrutura da Tese

O desenvolvimento desta Tese de Doutorado é resultado de estudos iniciados em Agosto – 2006 e concluídos em Julho – 2010. O período de Doutorado, inclusive com um estágio internacional com duração de 6 meses na *Università degli Studi Dell’Insubria–Dipartimento di Fisica Matematica*, foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Todas as pesquisas desenvolvidas durante os 3 anos e 11 meses de Doutorado resultaram em 8 publicações científicas, 1 artigo submetido para apreciação e mais 1 artigo em fase de preparação (veja Apêndice A).

As simulações numéricas que viabilizaram a obtenção dos resultados que possibilitaram a realização dos trabalhos citados e apresentados nesta Tese de Doutorado, foram executados com a utilização integral do sistema operacional Linux, no Laboratório Computacional do Departamento de Física (LFTC) e também no Laboratório Central de Processamento de Alto Desempenho (LCPAD), ambos da Universidade Federal do Paraná. A linguagem de programação utilizada versou entre Fortran 77 e Fortran 90, dependendo do algoritmo numérico utilizado. Os integradores utilizados na resolução de equações de movimento dos respectivos sistemas de interesse, via método de quadraturas, foram o Runge-Kutta de quarta ordem ou LSODE (*Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*), dependendo do problema. A determinação das equações de movimento usadas no cálculo do espectro de Lyapunov foram obtidas com o auxílio do programa algébrico Maple, versões 10-13. Na visualização e eventual tratamento dos dados numéricos utilizamos exclusivamente o programa Gnuplot, versão 4.2.

A seguir faremos uma breve exposição do plano de cada Capítulo: no Capítulo 2 apresentamos uma breve revisão teórica. Os resultados numéricos deste trabalho são discutidos nos Capítulos 3, 4 e 5 enquanto que no sexto Capítulo relatamos as considerações finais e propostas

de trabalhos futuros. No primeiro parágrafo de cada Capítulo apresentamos uma breve descrição do tema estudado ao longo do mesmo.

No Capítulo 2, determinados conceitos e quantidades fundamentais serão definidos e aplicados na discussão dos resultados obtidos das simulações apresentadas nos Capítulos posteriores.

No Capítulo 3, analisaremos alguns resultados relacionados ao estudo da estabilidade de um sistema clássico composto por duas partículas massivas interagentes (via potencial Coulombiano), aprisionadas num bilhar unidimensional com paredes rígidas. A questão intrigante neste resultado refere-se à conexão encontrada entre a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito com a Teoria de Números.

Ao Capítulo 4, cabe a aplicação de uma técnica numérica na obtenção do decaimento das correlações temporais e recorrências de Poincaré, baseados nas propriedades de grandes desvios das distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito e no teorema de Melbourne. Este “novo” método de análise foi aplicado a diferentes sistemas dinâmicos: dois sistemas intermitentes (mapa de Pikovsky e uma família de mapas conservativos (intermitentes) bidimensionais) e a um sistema Hamiltoniano (uma versão modificada do mapa padrão) em que a determinação numérica do decaimento das correlações é bem mais delicada devido ao efeito *stickiness*.

No Capítulo 5, será apresentado um estudo sistemático (investigação de baixas para altas dimensões) da influência do efeito de aprisionamento de trajetórias por ilhas de regularidade em sistemas conservativos: a análise começa com mapa padrão (sistema bidimensional) cuja dimensão do espaço de fases é $d = 2$. Então, construímos uma rede de mapas simpléticos acoplados e aumentamos a dimensão do seu espaço de fases d , sistematicamente. Uma das motivações deste trabalho está na escassez de resultados relacionados ao estudo do aprisionamento de trajetórias em sistemas de dimensões $d = 4 \rightarrow 20$ [21, 24, 50, 51]. Obtivemos o espectro de Lyapunov para $d = 2, 4, 6, 10$ e 20 e então, as suas respectivas distribuições. Na análise destes dados foram utilizados: o expoente de Lyapunov de maior probabilidade de ocorrência e os quatro primeiros cumulantes (média, variância, assimetria e curtose). Através deste estudo fica claro que o efeito de aprisionamento das trajetórias caóticas por ilhas de regularidade continuam existindo com o aumento da dimensionalidade do espaço de fases, porém para valores cada vez menores do parâmetro de não-linearidade.

No Capítulo 6, apresentaremos as considerações finais, e a discussão de alguns problemas em que ainda permanecem em aberto.

Finalmente, serão listadas as principais referências bibliográficas utilizadas ao longo do período de Doutorado. No Apêndice A constará a relação dos trabalhos publicados e em fase de publicação referentes a este período.

2 Breve Revisão Conceitual

Neste Capítulo temos como objetivos definir e discutir: (i) as principais propriedades dos sistemas Hamiltonianos autônomos e (ii) alguns conceitos básicos utilizados na caracterização de dinâmica caótica em sistemas conservativos, de forma geral, e também em sistemas intermitentes.

2.1 Propriedades Gerais dos Sistemas Hamiltonianos

Os sistemas Hamiltonianos constituem uma classe especial de sistemas dinâmicos. Suas propriedades peculiares influenciam diretamente as rotas que os sistemas seguem da ordem (integrabilidade) para o caos (não-integrabilidade). De forma mais técnica um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade pode ser completamente descrito por uma única função, a Hamiltoniana, $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. O estado de um sistema Hamiltoniano é representado pelos vetores coordenadas generalizadas, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$, e vetores momentos generalizados $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$. As equações de Hamilton que determinam a trajetória $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ seguida pelo sistema num espaço $2N$ -dimensional, chamado de espaço de fases, são dadas por

$$\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.1)$$

Um caso especial de sistema Hamiltoniano (considerado nesta Tese) ocorre quando a função Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo (sistema autônomo), $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Em outras palavras, a energia ou valor da função Hamiltoniana de determinado ponto no espaço de estados $x = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, é constante ao longo de toda a trajetória $x(t)$ sendo que

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i(t) + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad (2.2)$$

Deste modo, “comparando” o valor da função Hamiltoniana com a energia total do sistema E , concluímos que a energia é uma quantidade conservada em sistemas independentes do tempo. Em outras palavras, as trajetórias estão sobre uma superfície de energia constante $[(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E]$ [4].

Uma das características mais interessantes apresentadas por sistemas Hamiltonianos diz

respeito a estes serem considerados sistemas dinâmicos simpléticos, em que o volume espaço de fases é conservado [6], obedecendo ao teorema de Liouville¹ [1]. Uma importante propriedade apresentada pelos sistemas Hamiltonianos refere-se a sua natureza simplética. Em outras palavras, considere um mapa simplético da forma $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_N(\mathbf{x}_n)$, onde a condição simplética possa ser escrita, de acordo com a Ref. [4], como

$$\mathbf{S}_N = \mathbf{J}^T \mathbf{S}_N \mathbf{J}, \quad \text{sendo que} \quad \mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{M}_N}{\partial \mathbf{x}} \right)_{i,j} = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

é a matriz Jacobiana, \mathbf{J}^T a sua transposta, $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$ e

$$\mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

é a matriz simplética. Esta por sua vez, composta por matrizes identidade \mathbf{I}_N e matrizes nulas $\mathbf{0}_N$ de ordem N . Podemos enunciar como características apresentadas por sistemas simpléticos: a ausência de atratores (devido a conservação do volume do espaço de fases); para cada expoente de Lyapunov positivo existe outro expoente de mesmo valor, porém com sinal oposto [5]; e se η for um autovalor da matriz Jacobiana, $1/\eta$, η^* e $1/\eta^*$, também serão [5]. A respeito desta última característica podemos ainda ressaltar que para mapas bidimensionais conservativos teremos que: os autovalores determinados nas órbitas periódicas que estejam sobre o círculo imaginário terão $|\eta_{1,2}| = 1$, sendo deste modo um ponto fixo estável (elíptico), ou se eles estiverem sobre o eixo real onde $\eta_1 < 1 < \eta_2$, sendo um ponto fixo instável (hiperbólico). No caso limite em que $\eta_1 = \eta_2 = 1$, teremos um ponto fixo marginalmente estável (parabólico). Os pontos fixos parabólicos são de particular interesse nesta Tese de Doutorado pois eles constituem a forma mais simplificada de quase-armadilha dinâmica, responsáveis pelo aprisionamento de trajetórias caóticas em suas vizinhanças. Eventualmente as trajetórias aprisionadas escapam das regiões próximas da órbita periódica (ponto fixo), o que nos motiva a chamá-las de órbitas marginalmente instáveis. No Capítulo 4 discutimos diversos resultados a respeito do comportamento das trajetórias caóticas que visitam as vizinhanças destes pontos fixos, e conseqüentemente, são aprisionadas por intervalos de tempo finitos.

¹Quando um sistema se move, os pontos de fase q_1, \dots, q_N ; p_1, \dots, p_N determinam uma trajetória no espaço de fases. A velocidade de um ponto de fase é determinada pelas equações de Hamilton (2.1). Imagine que cada ponto no espaço de fases seja ocupado por uma “partícula” que se move de acordo com as equações de movimento (2.1). Estas partículas descrevem trajetórias que representam todas as histórias possíveis do sistema. Para cada ponto existirá apenas uma trajetória possível, pois se as posições e os momentos, são conhecidos, a solução das equações de movimento será determinada univocamente. Então, o teorema de Liouville estabelece que as “partículas” movem-se como um fluido incompressível, cujo volume permanece constante.

2.1.1 Sistemas Hamiltonianos Integráveis

Considere uma função $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ que seja dita **constante de movimento** de um dado sistema representado por uma função Hamiltoniana, H (independente do tempo). Neste caso, como $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ evoluem com o tempo de acordo com as equações de Hamilton (2.1), o valor da função f não muda: $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{constante}$. Com isso, H também é uma constante de movimento. De forma geral, diferenciando $f(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ em relação ao tempo, e admitindo que a função Hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo, temos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.5)$$

O lado direito da Eq. (2.5), é chamado de **colchetes de Poisson** [4] de f e H , e pode ser abreviado como $[f, H]$. Deste modo, a condição de que f seja uma constante de movimento para um sistema Hamiltoniano autônomo, implica os colchetes de Poisson com H , serem iguais a zero: $[f, H] = 0$.

Um sistema Hamiltoniano autônomo com N graus de liberdade é considerado integrável, se este possuir N constantes de movimento independentes $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $i = 1, 2, \dots, N$, ou seja, se

$$[f_i, f_j] = 0, \quad (2.6)$$

para qualquer i e j . Se a condição (2.6) for válida para todo i e j , então dizemos que as N constantes de movimento f_i estão em **involução**. As constantes de movimento f_i são “independentes” se elas não puderem ser expressas como função das outras $(N - 1)$ constantes de movimento [4].

A existência de constantes de movimento reduz a dimensão efetiva do sistema em questão. Por exemplo, se houverem M constantes de movimento a dinâmica do sistema ocorrerá num “espaço efetivo” $2N - M$ -dimensional. A redução da dimensão efetiva do sistema poderá ser feita perante a existência de uma transformação canônica de variáveis da forma $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})$, tal que a nova Hamiltoniana do sistema \tilde{H} dependa somente de $\tilde{\mathbf{p}}$. Então, escolhendo as novas variáveis $\tilde{\mathbf{p}}$ como sendo as N constantes de movimento, teremos

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}; \quad \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad (2.7)$$

sendo que,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = 0, \quad (2.8)$$

e a nova Hamiltoniana pode ser escrita como $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{\mathbf{p}})$, onde não há uma dependência explícita de $\tilde{\mathbf{q}}$ [4, 5]. A relação entre as coordenadas originais e as novas coordenadas é dada pela função geradora $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$ de segunda espécie, que é função da “antiga” coordenada da posição e da “nova” coordenada de momento. Podemos então, reescrever as equações de movimento em

termos da função geradora da seguinte maneira

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}; \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.9)$$

A escolha de uma transformação em que os novos momentos tornam-se constantes de movimento é arbitrária. Dentre as várias opções escolhemos a transformação ação-ângulo [4], onde as variáveis transformadas são $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$, sendo \mathbf{I} definido como

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint dq_i p_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

As variáveis transformadas podem ser escritas em termos da função geradora que será solução da correspondente equação de Hamilton-Jacobi, de acordo com as Eqs. (2.9), da seguinte forma

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{I}}; \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{I}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.11)$$

Com isso, realizando algumas manipulações algébricas (veja [4, 52]), pode-se construir a função Hamiltoniana em termos das coordenadas ação-ângulo, porém independente do ângulo. Neste caso, as equações de Hamilton podem ser escritas em termos destas variáveis como

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0; \quad \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \equiv \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}), \quad (2.12)$$

sendo que as soluções das Eqs. (2.12), são respectivamente

$$\begin{cases} \mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0), \\ \boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}(0) + \boldsymbol{\omega}[\mathbf{I}(0)]t, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $\boldsymbol{\omega}[\mathbf{I}(0)]$ é um vetor N -dimensional das componentes de velocidade angular. Maiores detalhes e informações a respeito dos cálculos realizados para se chegar as Eqs. (2.13) podem ser encontrados nas Refs. [4, 52].

O Sistema Solar fornece um exemplo típico de sistema Hamiltoniano. Quando as interações planetárias forem desprezadas, o sistema reduz-se ao problema de dois corpos: Sol-Planeta, cuja integrabilidade pode ser demonstrada. Em outras palavras, se no Sistema Solar considerarmos apenas a interação entre Sol e Terra, o movimento da Terra seria completamente regular e totalmente previsível. Todavia, a Terra é influenciada pela atração gravitacional de outros corpos astronômicos, sobretudo pela Lua, fazendo com que tenhamos pelo menos a interação mútua entre três corpos e assim a integrabilidade não seja mais garantida.

Uma forma geométrica de representar as soluções das Eqs. (2.13) dá-se através de um toro N -dimensional (veja a Fig. 2, que apresenta um toro bidimensional): a variável ação representa os raios constantes e a variável ângulo é uma variável cíclica que evolui temporalmente. O conceito de movimento sobre um toro é particularmente útil devido ao fato de que este pode ser

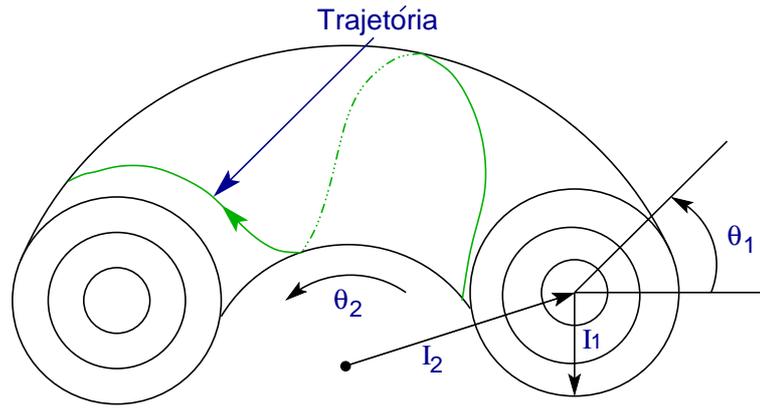


Figura 2: Movimento de um ponto no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade. O movimento ocorre sobre um toro com $I_1 = \text{constante}$ e $I_2 = \text{constante}$. Figura construída de acordo com a ilustração da pág. 165 da Ref. [5].

generalizado para sistemas com mais do que dois graus de liberdade [5]. As trajetórias sobre o toro podem ser analisadas quanto à sua periodicidade ou quase-periodicidade através do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ (veja Fig. 2) [5]. Quando uma trajetória periódica for considerada, esta obedece a seguinte condição de ressonância

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.14)$$

sendo \mathbf{m} um vetor de valores inteiros. Pode-se exemplificar este procedimento considerando o caso bidimensional, ($N = 2$), em que a condição de ressonância (2.14) toma a seguinte forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \quad (2.15)$$

A razão entre as velocidades angulares é um número racional, e por este motivo, os toros que satisfazem a condição de ressonância são chamados de **toros racionais**. Com isso, quando uma órbita completar m_1 ciclos em θ_1 e m_2 ciclos em θ_2 , a órbita se fecha sobre ela mesma, sendo então chamada de órbita periódica. Por outro lado, quando a condição de ressonância (2.14) não for satisfeita (exceto se todas as componentes de \mathbf{m} forem nulas), estaremos tratando do caso quase-periódico. Isso porque a razão entre as velocidades angulares é um número irracional e a órbita gerada preenche todo o toro nunca voltando ao seu ponto inicial. Neste caso, os toros são chamados de **toros irracionais** [4].

Admitindo uma pequena variação em \tilde{H} com \mathbf{I} , a condição de ressonância (2.14), com $m \neq 0$, é somente satisfeita para um conjunto finito de valores de \mathbf{I} . Conclui-se então, que a probabilidade de escolher aleatoriamente um toro irracional é muito maior que escolher um toro racional. Consequentemente, o espaço de fases de sistemas integráveis é quase totalmente ocupado por toros irracionais [4].

2.1.2 Toros Invariantes (toros KAM)

Uma questão relacionada aos sistemas integráveis é determinar o quão robusta é a sua integrabilidade quando aplicada uma certa perturbação. Neste caso, surge a seguinte questão: como se comporta um toro irracional quando este for submetido a uma pequena perturbação? Um sistema bidimensional ao qual é introduzida uma perturbação pode ser representado por uma Hamiltoniana como função das variáveis ação-ângulo, assim

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}), \quad (2.16)$$

em que separamos a função Hamiltoniana principal em um Hamiltoniano, integrável, denotado por H_0 , mais um Hamiltoniano relacionado a pequena perturbação H_1 . A resposta da pergunta do início deste parágrafo foi respondida e solucionada em etapas por Andrey N. Kolmogorov (1903-1987) em 1954, que enunciou a solução ou o teorema propriamente dito [53], Juergen K. Moser (1928-1999) em 1962 que determinou a solução para mapas [54], e Vladimir I. Arnold (1937-2010) em 1963 para fluxos [55]. Devido ao trabalho destes três pesquisadores, tal teorema leva o nome de **teorema KAM**. A dedução deste teorema é muito complexa e foge ao escopo deste trabalho, porém maiores detalhes a respeito desta dedução podem ser encontrados na Ref. [10]. Nesta Tese de Doutorado, em particular, estamos interessados apenas nas condições necessárias para que este teorema seja válido.

Quando as condições, enunciadas a seguir, forem obedecidas, elas serão suficientes para garantir que os toros sobrevivam a uma pequena perturbação ou alteração da sua forma. Estes então, serão denominados toros KAM [4]. Se a intensidade da perturbação na Eq. (2.16), for relativamente grande, todos os toros serão destruídos. Tais condições podem ser enunciadas da seguinte forma

- (i) independência linear das frequências [5]: $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) \neq 0$ em uma certa região de \mathbf{I} (suficientemente não-linear), sendo que $\boldsymbol{\omega} = \partial H_0 / \partial \mathbf{I}$;
- (ii) perturbação tem que ser suave [5] (um número suficiente de derivadas contínuas de H_1);
- (iii) condições iniciais suficientemente afastadas das ressonâncias [5]. Se forem escolhidas condições iniciais próximas ao valor de ressonância, o teorema KAM perderá a validade.

A terceira condição assegura que o último toro KAM que será destruído é aquele cuja frequência é o “número mais irracional” [5]. A explicação para isso está no fato que nos toros irracionais a condição de ressonância (2.14), não é satisfeita. Podemos entender o significado de “número mais irracional” através de algumas ferramentas matemáticas da teoria de números. Um número irracional R pode ser representado através de frações continuadas infinitas [4] na

forma

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}, \quad (2.17)$$

em que os termos a_i possuem valores inteiros. Truncando a fração em um certo valor de a_n , pode-se obter um valor racional relativamente próximo do número irracional. Desta forma, o número “mais irracional” é definido como sendo o que se aproxima mais lentamente do valor inteiro da fração (2.17) [4]. O número mais irracional que existe é denominado razão áurea, e pode ser representado da seguinte maneira

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}. \quad (2.18)$$

2.1.3 Toros Instáveis

A ideia crucial da teoria KAM é investigar os toros invariantes e estudar o que acontece com eles quando submetidos a uma perturbação relativamente pequena.

Para determinados sistemas quase-integráveis a teoria KAM estabelece que quase todos os toros sobrevivem a pequenas perturbações. Entretanto, todos os toros construídos pela união de órbitas periódicas de mesmo período são destruídas por uma perturbação arbitrariamente pequena. Em outras palavras, para um sistema integrável, diferentes condições iniciais levam a diferentes órbitas periódicas. A união de todas as órbitas periódicas cobrem o toro (para estas órbitas, os autovalores da matriz estabilidade são degenerados). Muitas destas órbitas desaparecem quando uma pequena perturbação é considerada, e somente um número par (geralmente duas) delas sobrevive: metade delas são pontos de sela (pontos hiperbólicos) e a outra metade são pontos elípticos, conforme proposto pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [4, 5]. Podemos descrever qualitativamente estes pontos da seguinte forma:

- **PONTOS ELÍPTICOS:** são “estruturas estáveis” e por este motivo condições iniciais escolhidas nas suas proximidades geram órbitas que circulam estes pontos num movimento quase-periódico. Nas vizinhanças de um ponto elíptico o cenário assemelha-se ao comportamento apresentado por sistemas quase-integráveis, Eq. (2.16). Este comportamento se repete para escalas cada vez mais finas, caracterizando a sua estrutura hierárquica [5].
- **PONTOS HIPERBÓLICOS:** são caracterizados por apresentarem direções estáveis e instáveis. Ao conjunto de pontos que tendem (escapam) iterativamente para o ponto de sela é conhecido como variedade (*manifold*) estável (instável) [4]. Neste cenário, aparecem os pontos fixos conhecidos como homoclínicos e heteroclínicos. Uma órbita é chamada de

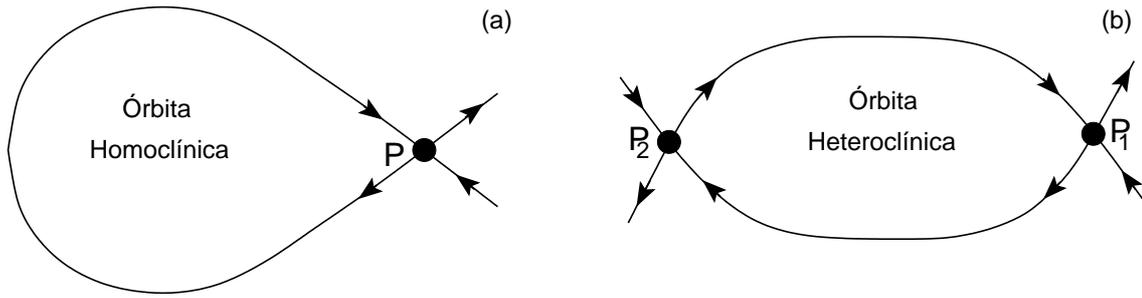


Figura 3: Exemplos de (a) órbita homoclínica e (b) órbita heteroclínica.

homoclínica quando ela liga um ponto homoclínico a ele mesmo (veja P , na Fig. 3a). Por outro lado, uma órbita é classificada como heteroclínica quando se ligam dois pontos distintos, ou seja, tal órbita conecta dois pontos hiperbólicos diferentes (P_1 e P_2), conforme apresentado na Fig. 3b [2].

Em suma, nos sistemas Hamiltonianos o mecanismo de origem da dinâmica caótica pode ser entendido observando o comportamento das órbitas nas vizinhanças dos pontos fixos, que sejam do tipo hiperbólico e elíptico. Como acabamos de apresentar, o teorema de Poincaré-Birkhoff prevê que no momento que o toro ressonante “explode” (devido à perturbação a que o sistema está submetido) aparecerá uma sequência de pontos que se alternam entre elípticos (estáveis) e hiperbólicos (instáveis). Os pontos elípticos tornam-se o centro de regiões estáveis, chamadas de ilhas de ressonância que encontram-se imersas no mar caótico. Por outro lado, os pontos fixos hiperbólicos são essenciais para o aparecimento do comportamento caótico. Em relação à estabilidade dos toros, conclui-se que através do teorema KAM é possível garantir a sobrevivência de toros irracionais sob a ação de uma pequena perturbação, o que não acontece com os toros racionais, que neste caso, serão destruídos.

2.2 Conceitos Básicos de Caos Clássico

Com o passar dos anos o estudo e caracterização de dinâmica caótica tem sido cada vez mais útil para o entendimento de determinados comportamentos, como por exemplo, aqueles associados à difusão e transporte anômalos em sistemas Hamiltonianos. Devido a este fato, nesta Seção, temos como objetivo definir e discutir algumas das principais formas de entender o que é dinâmica caótica e como caracterizá-la. Apesar das discussões a seguir serem apresentadas num contexto geral, tentaremos sempre manter a atenção nos sistemas Hamiltonianos e também sistemas intermitentes, definidos previamente no Capítulo 1 e, no caso dos sistemas Hamiltonianos discutidos em detalhes no Capítulo 2.

2.2.1 Seção de Poincaré

Uma forma usual de simplificar o estudo de sistemas dinâmicos dá-se através das chamadas seções de Poincaré, cujo nome é uma homenagem ao cientista francês Jules H. Poincaré (1854-1912) que em 1899 foi o primeiro a utilizar estas seções no estudo do problema de três corpos.

Uma das maneiras pela qual um fluxo contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de seções de Poincaré. A seção de Poincaré é uma maneira de simplificar o estudo de um fluxo num espaço de fases N -dimensional a uma aplicação, denominada mapa de Poincaré ou mapa do retorno, num espaço de fases com $(N - 1)$ -dimensões [5]. As principais vantagens na utilização das seções de Poincaré são as seguintes [5]:

- ✓ REDUÇÃO DIMENSIONAL: através das seções de Poincaré reduzimos um espaço de fase N -dimensional a um espaço de $(N - 1)$ dimensão, ou seja, eliminamos uma variável do problema original;
- ✓ DINÂMICA GLOBAL: em sistemas com baixa dimensionalidade, a integração numérica das equações diferenciais do problema original apresentam a dinâmica global do sistema;
- ✓ CLARIDADE CONCEITUAL: conceitos físicos, difíceis de serem visualizados no sistema original, tornam-se claros quando analisamos as seções de Poincaré.

A construção de uma seção de Poincaré pode ser realizada seguindo o procedimento apresentado a seguir: seja um fluxo (o tempo é uma variável contínua) N -dimensional ϕ_t descrito por equações diferenciais da forma $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Sobre o espaço gerado pelas equações diferenciais é construída uma hiper-superfície Ω . Marcamos então, os sucessivos “furos” que uma determinada trajetória, sempre no mesmo sentido, produz na superfície Ω , conforme apresentado na Fig. 4. Os pontos x_n, x_{n+1} e x_{n+2} representam respectivamente a primeira, segunda e terceira vez que a trajetória transpassa a hiper-superfície Ω . Neste caso, o mapa de Poincaré é obtido simplesmente considerando-se a intersecção da trajetória com o plano Ω [5].

2.2.2 Medida, Ergodicidade, Mistura e Decaimento das Correlações

MEDIDA INVARIANTE. A descrição de determinados domínios no espaço de fases pode ser feita matematicamente, de forma rigorosa, através da medida de probabilidades μ que representa uma função não-negativa definida num domínio finito R [56]. Para um mapa da forma $x \mapsto M(x)$, a medida μ para qualquer sub-domínio $A \in R$, é chamada de invariante se $\mu(A) = \mu[M^{-1}(A)]$, ou seja, se o mapa for inversível, que é o mesmo que considerarmos $\mu(A) = \mu[M(A)]$ [4]. Em outras palavras, todos os pontos de A permanecem em A após várias aplicações do mapa (após o sistema evoluir temporalmente). O mesmo ocorre para um dado fluxo Φ^t quando $\mu(\Phi^t) =$

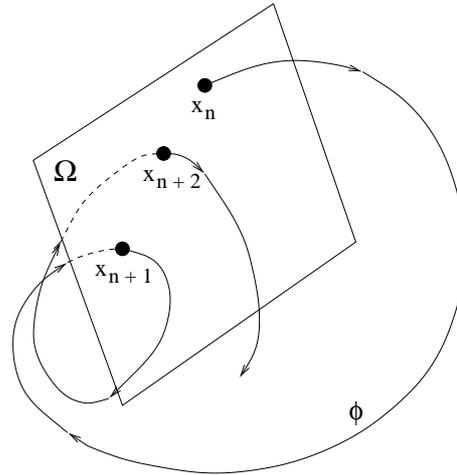


Figura 4: Figura esquemática que apresenta a geometria de uma seção de Poincaré.

$\mu(A)$, para todo instante de tempo t [56]. A medida $\mu(R)$ é chamada de **ergódica** (apresentaremos a definição de **ergodicidade** a seguir) se ela não pode ser escrita como a composição de diferentes medidas invariantes [56].

MEDIDA DE LEBESGUE NULA. De forma bastante simplificada a medida de um conjunto pode ser entendida como uma forma de atribuir a cada subconjunto um número, intuitivamente interpretado como o tamanho do conjunto. Neste caso, uma medida é a generalização dos conceitos de comprimento, área e volume. Um exemplo particularmente importante é a medida de Lebesgue sobre o espaço Euclidiano, que atribui as definições usuais de comprimento, área e volume da geometria Euclidiana a subconjuntos de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3, \dots$. Em particular, conforme descrito na Ref. [4], um conjunto tem medida zero de Lebesgue se para qualquer $\varepsilon > 0$ o conjunto pode ser coberto pela união contável de intervalos tal que a soma dos comprimentos dos intervalos é menor do que ε . Para conjuntos num espaço cartesiano N -dimensional, a definição de conjunto de medida zero de Lebesgue é análoga àquela que acabamos de apresentar: para qualquer $\varepsilon > 0$ um conjunto pode ser coberto por contáveis uniões de cubos com um volume N -dimensional que é menor do que ε . Um exemplo típico de conjunto de medida de Lebesgue nula são os **conjuntos de Cantor**, que podem ser definidos como conjuntos fechados que consistem inteiramente de pontos de fronteira, sendo cada um dos quais um ponto-limite do conjunto.

ERGODICIDADE. Uma forma de caracterizar os sistemas dinâmicos, dá-se através do estudo de suas propriedades estatísticas. A teoria estatística sempre refere-se a algum tipo de média tendo como base a validade da **teoria ergódica**. Neste contexto, considere um sistema dinâmico $T : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$ com medida de probabilidade μ . Então, um observável qualquer deste sistema é escolhido tal que $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, cuja sua média espacial seja dada por

$$\bar{\phi} = \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) d\mu, \quad (2.19)$$

sendo que $d\mu = P(\mathbf{x})d^D\mathbf{x}$, onde D é a dimensão do espaço de fases e $P(\mathbf{x})$ é uma distribuição

invariante. Para sistemas Hamiltonianos com \mathbf{x} representando as variáveis canônicas, teremos $P = 1$ [5]. Por outro lado, a média temporal do observável escolhido pode ser escrita como

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi[T^{(k)}(\mathbf{x})], \quad (2.20)$$

onde para ‘quase todos’² os valores de x teremos: (i) $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$ existe; (ii) $\langle \phi \rangle$ é obtido a partir de trajetórias que não dependem das condições iniciais, tal que $\phi[T^{(k)}(\mathbf{x})] = \phi(\mathbf{x})$; (iii) os valores espaciais médios de $\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle$ e $\phi(\mathbf{x})$ são iguais.

Neste contexto, o teorema ergódico de Birkhoff, que leva o sobrenome de George D. Birkhoff (1884-1944), garante que um sistema dinâmico é definido como ergódico se

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \bar{\phi} \quad (2.21)$$

para quase todos os valores de \mathbf{x} [5, 57]. Em outras palavras, ergodicidade é uma propriedade de sistemas dinâmicos em que a média temporal de determinado observável no espaço de fases é igual à média espacial deste mesmo observável. Um sistema somente pode ser ergódico se uma dada trajetória visitar de forma uniforme todo o espaço de fases deste sistema. Esta regra exclui, por exemplo, um sistema bidimensional em que toros KAM estejam presentes, que é então chamado de *dividido* (não-ergódico). Por esse motivo, diz-se usualmente que o espaço de fases destes tipos de sistemas não é ergódico porque, no sistema completo existem toros KAM e portanto, este é dividido. Neste caso, um sistema é considerado ergódico, dependendo do subespaço em que a ergodicidade é definida. Um sistema Hamiltoniano autônomo não puder apresentar uma dinâmica ergódica em todo o espaço de fases, devido à energia ser uma constante de movimento. Contudo, um fluxo pode ser ergódico sobre uma superfície constante de energia. Se existirem outras constantes além da energia, então o sistema pode ser ergódico somente num subespaço do espaço de fases que conserve todas estas constantes. Em suma, um dos principais pontos a serem considerados no estudo de sistemas Hamiltonianos autônomos é conhecer o sub-domínio em que a ergodicidade existe.

É importante ressaltar ainda que o grau de ergodicidade de determinado sistema dinâmico pode ser estimado diretamente através dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. Se tal sistema for ergódico, quase toda trajetória obedece a mesma taxa de afastamento ou aproximação entre duas trajetórias inicializadas infinitesimalmente próximas. Por outro lado, existem sistemas que apresentam regiões de regularidade ou pontos fixos em seu espaço de fases que quebram a ergodicidade do sistema.

MISTURA OU “MIXING”. Na análise de problemas referentes à Mecânica Estatística fora

²‘Quase todos’ significa que as trajetórias que não satisfazem estas propriedades tem medida de Lebesgue zero [56].

do equilíbrio, pode-se encontrar sistemas cujo espaço de fases apresente a chamada propriedade de *mixing* ou de mistura [58]. Esta propriedade pode ser definida resumidamente de acordo com o que foi apresentado na Ref. [10] e reproduzido por Allan J. Lichtemberg e Michael A. Liebermann na Ref. [5]: considere um recipiente contendo uma mistura composta por 20% de rum e 80% de Coca-Cola, representando a distribuição inicial de um “fluido incompressível” no espaço de fases. Se então, sacudirmos o recipiente repetidamente, espera-se que após o fluido estar suficientemente misturado todas as partes do recipiente, embora pequenas, estejam em contato com ‘aproximadamente’ 20% de rum. Uma forma de ilustrar o início do processo de mistura pode ser descrito da seguinte forma: imagine uma pequena porção do espaço de fases (por exemplo uma “gota”). Quando o respectivo sistema inicia sua evolução temporal a “gota” é totalmente deformada, conforme pode-se observar na Fig. 5. Com a evolução temporal do sistema (com o tempo tendendo para infinito), essa deformação aumenta até atingir uma homogeneidade perfeita entre as “diferentes substâncias” (da mesma forma como no exemplo da mistura perfeita de rum com Coca-Cola). Quando especificada rigorosamente, esta breve descrição define um sistema como misturado [5]. Segundo a Ref. [10], uma diferença importante desta propriedade com relação a ergodicidade do sistema, refere-se ao fato que a propriedade de mistura representa uma característica mais “forte” do que ergodicidade. Basicamente, devido à existência de mistura implicar em ergodicidade, porém, nem todo sistema ergódico será também misturado [5, 10].

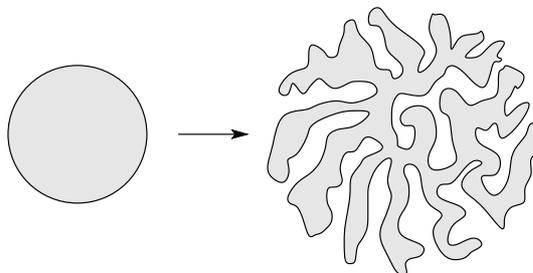


Figura 5: Pequeno domínio do espaço de fases (“gota”) no caso da dinâmica ser misturada seguido (após uma breve evolução temporal) por uma deformação acentuada na estrutura de seu contorno.

Considerando as discussões de ergodicidade e mistura apresentadas anteriormente, fica evidente que as suas respectivas definições rigorosas são tomadas para tempo infinito. Por outro lado, como é impossível obter resultados rigorosos para maioria dos sistemas (obedecendo ao limite de tempo infinito), existem matemáticos que definem temas relacionados à teoria dos sistemas dinâmicos, como o estudo do comportamento de sistemas no limite de ‘tempo assintótico’ ou para ‘longos tempos’. Obviamente, na maioria dos casos é impossível resolver problemas considerando o limite em que o tempo tende para o infinito: por este motivo, deseja-se atingir o comportamento (limite) assintótico destes sistemas. Neste cenário, o estudo das taxas de aproximação do limite que define o sistema como misturado constitui um problema bastante

complexo e representa uma corrente de investigação da comunidade científica que estuda a teoria ergódica [20, 23, 59]. Uma forma de se obter uma estimativa das taxas de mistura no limite assintótico é determinada através da obtenção do **decaimento das correlações temporais** [8, 9], definido no próximo parágrafo. Existem na literatura matemática provas que mostram explicitamente a relação entre a definição rigorosa de sistema misturado e o decaimento das correlações temporais [56]. Todavia, estas provas não serão apresentadas pois são extensas e bastante complicadas, além de fugirem do escopo desta Tese. Por este motivo, maiores detalhes a respeito destas provas podem ser encontrados na Ref. [56]

DECAIMENTO DAS CORRELAÇÕES TEMPORAIS. Em diversas áreas de pesquisa o decaimento das correlações de um **campo escalar** ou **observável** é usado como uma forma de diagnosticar ou quantificar as taxas de mistura (*mixing*) [18, 60]. Deste modo, o decaimento das correlações pode ser determinado da seguinte forma: considere duas funções arbitrárias $f(x)$ e $g(x)$ de quadrado integrável, cuja dinâmica seja finita e ergódica. A função correlação ou correlator para um fluxo é dada por [56]

$$\mathcal{C}_t(f, g) = \left| \int (f \circ T^t) g d\mu - \int g d\mu \int f d\mu \right|, \quad (2.22)$$

sendo μ a medida invariante do sistema, T^t denota a evolução dinâmica no espaço de fases investigado e t representando a variável temporal contínua do sistema. Quando o sistema de interesse for um mapa, teremos

$$\mathcal{C}_n(f, g) = \langle f(T^n x_0) g(x_0) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(x) \rangle, \quad (2.23)$$

onde n é o tempo considerado em intervalos discretos. Devido à ergodicidade $\langle f(x_0) \rangle$ e $\langle g(x_0) \rangle$ não dependem do tempo. Então, a propriedade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n(f, g) = 0 \quad (2.24)$$

é conhecida como o **decaimento das correlações** [8, 56]. O valor de \mathcal{C}_n depende tanto do tempo quanto da escolha das funções $f(x)$ e $g(x)$ [11]. Deste modo, o sistema estudado possui a propriedade de **mistura**, quando Eq. (2.24) for válida [8, 60].

Na linguagem da teoria ergódica, f e g são denominados **observáveis**. Para problemas específicos o decaimento das correlações é obtido a partir de um observável de interesse³. Geralmente, em aplicações escolhe-se $f = g =$ ‘campo escalar’ e então se considera o **decaimento das correlações de um campo escalar** [56]. Com a discussão apresentada até aqui fica evidente que se o sistema investigado não apresentar a propriedade de mistura (*mixing*) não se pode esperar que as correlações decaiam para zero. Por outro lado, se o sistema apresentar esta propriedade (*mi-*

³No estudo apresentado no Capítulo 4, utilizamos o maior expoente de Lyapunov a tempo finito como observável de interesse.

ing), a taxa de decaimento das correlações é um **quantificador da velocidade** com que o sistema se torna misturado.

O estudo do decaimento das correlações de diferentes classes de sistemas representa um tema amplamente investigado na teoria dos sistemas dinâmicos, como por exemplo, nas Refs. [11, 20, 23, 59, 60]. Vários resultados têm sido obtidos para o decaimento das correlações em que o comportamento destas mostrou-se ser exponencial ou polinomial. Resultados numéricos bastante precisos foram obtidos para sistemas uniformemente hiperbólicos, onde ocorre o decaimento exponencial das correlações, como por exemplo, no mapa do gato de Arnold e no mapa do padeiro [4]. O mesmo ocorre para sistemas que não sejam uniformemente hiperbólicos, ou seja, sistemas que apresentem algum tipo de estrutura que degrade as correlações temporais e deste modo, ocorra um decaimento polinomial das correlações. Estudos sobre este tópico de pesquisa podem ser encontrados nas seguintes Refs. [20, 23, 59, 61].

2.2.3 Aprisionamento de Trajetórias por Estruturas de Regularidade

Existem sistemas caóticos que quando analisados através de métodos probabilísticos, apresentam comportamentos diferentes (chamados de anômalos) dos que esperamos observar, segundo a Física Estatística. Com isso o principal objetivo desta Subseção é discutir qualitativamente a existência de um tipo específico de ‘singularidade’, presente no espaço de fases de sistemas simpléticos, que geralmente são chamadas de **quase-armadilhas dinâmicas** [8], e responsáveis por estes comportamentos anômalos. Tais estruturas encontram-se imersas no mar caótico, onde cobrem áreas com ‘diferentes tamanhos’ e posições no espaço de fases, basicamente, dependendo da intensidade do parâmetro de não-linearidade. Em sistemas com dois graus de liberdade, por exemplo, as quase-armadilhas dinâmicas são também chamadas de **ilhas de regularidade**. Uma forma qualitativa de entender qual a influência destas estruturas na dinâmica de determinado sistema é a seguinte: as quase-armadilhas dinâmicas são regiões onde partículas (ou trajetórias) podem gastar intervalos de tempo relativamente longos [16] (de forma anômala), nos quais a dinâmica torna-se quase-regular, e deste modo elas afetam as correlações temporais ainda que as condições iniciais sejam escolhidas no mar caótico. A este comportamento dá-se o nome de **efeito de aprisionamento** (*stickiness effect*). Existem trabalhos relacionados a sistemas que apresentam este efeito e onde ocorre um decaimento algébrico (lei de potências) das correlações temporais, em vez de exponencial, e com isso afetam as propriedades de transporte de todo o sistema, ainda que o “tamanho” da quase-armadilha dinâmica seja relativamente pequena [9]. Uma das principais características estruturais das quase-armadilhas dinâmicas são as suas propriedades fractais ou de auto-similaridade [8].

Uma ferramenta bastante eficiente utilizada na caracterização do efeito causado pela existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas num sistema dinâmico está relacio-

nada à diminuição do valor do expoente de Lyapunov local (em módulo) [8], ou seja, a existência das quase-armadilhas aparece no cálculo do expoente de Lyapunov durante o intervalo de tempo que as trajetórias permanecem aprisionadas. Outra consequência da existência deste tipo de singularidade no espaço de fases está relacionada à alteração da dinâmica no transporte de partículas [16]. Neste caso, o transporte de partículas em uma certa região do espaço de fases, onde a dinâmica regular e caótica coexistem, é afetado pelas estruturas conhecidas como *cantori*. Os *cantori* são conjuntos de Cantor que podem ser vistos como remanescentes de curvas KAM que foram destruídas devido ao incremento do parâmetro de não-linearidade [16]. Além disso, os *cantori* podem ser responsáveis pela diminuição das taxas médias de transporte, basicamente, porque o fluxo que atravessa estas estruturas é muito pequeno. Numericamente, o que se observa é que as partículas, inicialmente confinadas num domínio caótico que esteja cercado por um *cantori*, permanecerão ‘aprisionadas’ nesta região por longos intervalos de tempo antes que elas possam “atravessá-lo”.

Baseados nesta discussão, utilizamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov calculados num intervalo de tempo finito para caracterizarmos o efeito de aprisionamento de trajetórias, determinarmos as taxas de mistura através do decaimento das correlações temporais. Além disso detectamos sinais do efeito *stickiness* em sistemas de alta dimensão compostos por uma rede de mapas simpléticos acoplados. Deste modo, na próxima Subseção, definiremos o que são os expoentes de Lyapunov e como calculá-los.

2.2.4 Expoentes de Lyapunov

De acordo com as três definições de dinâmica caótica apresentadas por Zaslavsky na Ref. [8], e discutidas no Capítulo 1, o vínculo entre elas é a **sensibilidade às condições iniciais**. Uma das formas mais utilizadas e poderosas na determinação de quão sensível é a dependência entre às condições iniciais que um sistema caótico apresenta dá-se via os expoentes de Lyapunov (ELs). Em outras palavras, os ELs podem ser vistos como quantidades invariantes associadas a cada trajetória que fornecem uma medida do seu grau de instabilidade. Ou ainda, eles são responsáveis pela quantificação da taxa de afastamento exponencial entre trajetórias inicializadas infinitesimalmente próximas uma da outra.

A seguir os expoentes de Lyapunov serão definidos matematicamente para um mapa, ou seja, um sistema cuja variável temporal é discreta, embora todos os resultados apresentados possam facilmente ser generalizados para sistemas onde o tempo seja uma variável contínua. Inicialmente, considere um mapa genérico d -dimensional da forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n). \quad (2.25)$$

EXPOENTE DE LYAPUNOV MÁXIMO. A estabilidade de uma trajetória típica, que chamaremos de principal \mathbf{x}_n , pode ser determinada através da evolução de uma trajetória próxima ou satélite \mathbf{x}'_n , obtida a partir de condições iniciais $\mathbf{x}'(0)$, deslocadas de $\mathbf{x}(0)$ por um vetor infinitesimal: $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(0) + \delta\mathbf{x}(0)$, ou $\delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'(0) - \mathbf{x}(0)$ com $|\delta\mathbf{x}(0)| \ll 1$. Para sistemas que não sejam caóticos, a distância $\delta\mathbf{x}_n$ entre a trajetória referência e a trajetória perturbada é limitada ou então cresce algebricamente. Por outro lado em sistemas caóticos ela cresce exponencialmente com o tempo, de acordo com

$$\delta\mathbf{x}_n \sim \delta\mathbf{x}(0)e^{\Lambda n}, \quad (2.26)$$

onde Λ é a taxa de expansão exponencial local. Deste modo, podemos definir um parâmetro capaz de determinar o grau de instabilidade de uma dada trajetória através de um duplo limite (que deve ser mantido nesta ordem), da seguinte forma

$$\Lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta\mathbf{x}(0) \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|\delta\mathbf{x}_n|}{|\delta\mathbf{x}(0)|} \right), \quad (2.27)$$

representando a quantidade responsável pela estimativa da taxa exponencial média de afastamento entre as trajetórias principal e satélite, conhecida como **expoente de Lyapunov máximo**. Quando o limite positivo existir, a trajetória mostra sensibilidade às condições iniciais e deste modo o sistema é caracterizado como sendo **caótico**.

EXPOENTE DE LYAPUNOV MÁXIMO A TEMPO FINITO. Do ponto de vista numérico é impossível obedecer o limite temporal de iteração tendendo para infinito ($n \rightarrow \infty$). Por este motivo, o que se faz na prática é truncar o cálculo dos expoentes de Lyapunov em determinado instante de tempo. A esta nova quantidade dá-se o nome de **expoente de Lyapunov máximo a tempo finito**. Neste cenário, tal procedimento numérico pode ser descrito como segue: considere uma pequena separação inicial $\delta\mathbf{x}(0)$ que monitora a distância entre as trajetórias principal e satélite até que $|\delta\mathbf{x}_1|$ torne-se suficientemente grande (num intervalo de tempo τ), para então determinarmos a quantidade $\ln(|\delta\mathbf{x}_1|/|\delta\mathbf{x}(0)|)$. Deve-se então, re-escalonar $|\delta\mathbf{x}_1|$ por um fator $|\delta\mathbf{x}(0)|/|\delta\mathbf{x}_1|$, e assim por diante até o instante de tempo desejado, conforme mostrado no esquema da Fig. 6. Através deste procedimento Giancarlo Benettin *et al.* [36] mostraram que o expoente de Lyapunov máximo a tempo finito pode ser calculado através da seguinte equação

$$\Lambda_n = \frac{1}{n\tau} \sum_i^{n\tau} \ln \left(\frac{|\delta\mathbf{x}_i|}{|\delta\mathbf{x}(0)|} \right), \quad (2.28)$$

com $i = 1, 2, \dots, n\tau$. Apesar de omitirmos o limite referente a distância inicial entre as trajetórias principal e satélite na Eq.(2.28), ele sempre deve ser obedecido.

ESPECTRO DE LYAPUNOV. É bem sabido que o expoente de Lyapunov máximo sozinho não caracteriza totalmente a instabilidade de um sistema dinâmico d -dimensional. Na realidade existem d expoentes de Lyapunov que compõem o que conhecemos por **espectro de Lyapunov**, que

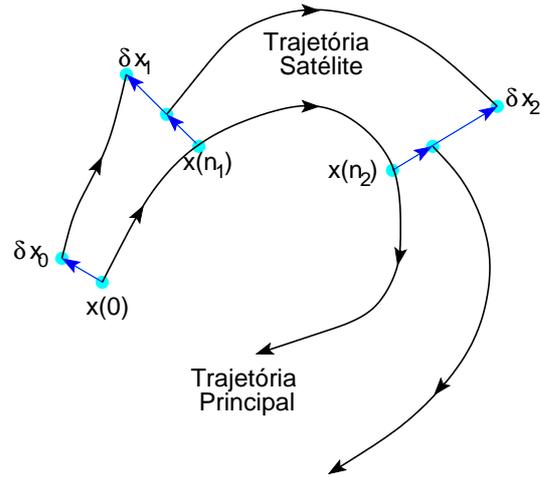


Figura 6: Representação esquemática do cálculo do expoente de Lyapunov máximo a tempo finito.

pode ser determinado através do estudo da expansão temporal de d perturbações infinitesimais independentes $\{\mathbf{w}^{(i)}\}_{i=1}^d$ com relação a trajetória principal. Na linguagem matemática, os vetores $\mathbf{w}^{(i)}$ constituem um espaço linear: o **espaço tangente**⁴. A evolução de um vetor tangente genérico é obtido através da linearização da Eq. (2.25) assim

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbb{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{w}_n, \quad (2.29)$$

onde $\mathbb{J}_{ij}(\mathbf{x}_n) = \partial F_i(\mathbf{x})/\partial x_j|_{\mathbf{x}_n}$ com $i, j = 1, \dots, d$, é chamada de matriz Jacobiana. A Eq. (2.30) mostra que o problema relacionado a estabilidade reduz-se ao estudo das propriedades assintóticas do produto de matrizes, que através da iteração desta equação, partindo das condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ e \mathbf{w}_0 , pode ser escrito como

$$\mathbf{w}_n = \mathbb{P}_n[\mathbf{x}(0)]\mathbf{w}_0, \quad \text{com} \quad \mathbb{P}_n[\mathbf{x}(0)] = \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{J}(\mathbf{x}_k). \quad (2.30)$$

Neste contexto, um resultado de particular relevância é dado pelo **teorema multiplicativo de Oseledec** [35] que enunciamos neste trabalho, conforme feito na Ref. [33], porém sem demonstrá-lo.

Teorema 2.2.1 (Oseledec) *Considere que $\mathbb{J}(1), \mathbb{J}(2), \dots, \mathbb{J}(k), \dots$ seja uma sequência de $d \times d$ matrizes de estabilidade obtidas a partir da regra de evolução dada pela Eq. (2.25), admitindo que esta seja a aplicação de uma variedade compacta A sobre ela mesma, com derivadas contínuas. Além disso, seja μ uma medida invariante sobre A com a evolução de (2.25). A matriz produto $\mathbb{P}_n[\mathbf{x}(0)]$ é tal que, o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \mathbb{P}_n^T[\mathbf{x}(0)] \mathbb{P}_n[\mathbf{x}(0)] \right\}^{\frac{1}{2n}} = \mathbb{V}[\mathbf{x}(0)], \quad (2.31)$$

⁴O uso dos vetores tangentes implica na validade do limite da distância infinitesimal, como na Eq. (2.27).

existe, com exceção de um subconjunto de condições iniciais de medida zero. Onde \mathbb{P}^T é a transposta de \mathbb{P} .

A matriz simétrica $\mathbb{V}[\mathbf{x}(0)]$ tem d autovalores reais e positivos $\eta_i[\mathbf{x}(0)]$, cujos respectivos logaritmos definem os expoentes de Lyapunov

$$\lambda_\infty^i[\mathbf{x}(0)] = \ln(\eta_i[\mathbf{x}(0)]), \quad (2.32)$$

onde o subíndice i relaciona o expoente de Lyapunov com o respectivo autovalor. Geralmente, o espectro de Lyapunov é listado em ordem decrescente, assim: $\lambda_\infty^{max} = \lambda_\infty^1 \geq \lambda_\infty^2 \geq \dots \geq \lambda_\infty^d$, onde o sinal de igual refere-se a multiplicidade dos expoentes, que pode ocorrer no caso da existência de autovalores degenerados [5].

O espectro de Lyapunov calculado para apenas uma trajetória não fornecerá uma medida “absoluta” do grau de caoticidade deste sistema, a menos que sua dinâmica seja ergódica. Especificamente neste caso (dinâmica ergódica), o espectro de Lyapunov é independente das condições iniciais, tornando-se então uma medida global do sistema. Por outro lado, sistemas conservativos bidimensionais, geralmente, apresentam um espaço de fases dividido em domínios ergódicos independentes que apresentem diferentes espectros de Lyapunov. Isso ocorre, por exemplo, num bilhar planar estudado na Ref. [37].

No caso de fluxos Hamiltonianos ou mapas simpléticos, o espectro de Lyapunov apresenta uma interessante simetria conhecida na literatura científica como ‘regra dos pares’ (*pairing rule*) [38]. Esta simetria é uma consequência direta da estrutura simplética e, para um sistema com N graus de liberdade (neste caso com $2N$ expoentes de Lyapunov), o espectro de Lyapunov apresenta a seguinte forma

$$\lambda_\infty^i = -\lambda_\infty^{2N-i+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.33)$$

o que implica em

$$\sum_{i=1}^{2N} \lambda_\infty^i = 0. \quad (2.34)$$

Deste modo, fica evidente que toda a informação que pode ser obtida através do espectro de Lyapunov está contida na metade dele. Em sistemas contínuos e autônomos sem pontos fixos, pelo menos um expoente de Lyapunov é nulo. Por outro lado, em fluxos Hamiltonianos contínuos e autônomos a Eq. (2.33) implica na existência de um par de expoentes nulos [5].

ESPECTRO DE LYAPUNOV A TEMPO FINITO. Da mesma forma como discutido no caso do expoente de Lyapunov máximo, é impossível obedecer o limite de tempo tendendo para infinito para a maioria dos sistemas dinâmicos estudados. É justamente por este motivo que conforme apresentado na Ref. [4], definiu-se uma quantidade conhecida na literatura como **expoentes de**

Lyapunov a tempo finito ou espectro de Lyapunov a tempo finito [43], estimados num intervalo de tempo finito. Estas quantidades são determinadas numericamente a partir da Eq. (2.30) através da seguinte expressão

$$\lambda_n^i[\mathbf{x}(0)] = \frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}_n[\mathbf{x}(0)]\mathbf{w}_0^i). \quad (2.35)$$

O vetor \mathbf{w}_0^i representa o vetor unitário da i -ésima direção instável. Devido ao fato que os computadores trabalham com precisão finita e estes vetores crescem rapidamente (exponencialmente) em sistemas caóticos, geralmente ocorre uma indistinguibilidade entre eles e assim o cálculo pretendido fica inviabilizado. Este problema pode ser contornado se forem realizados sucessivos processos de ortonormalização ao longo da trajetória através do método de Gram-Schmidt [4, 39], que será descrito a seguir. É importante citar ainda que ambas as relações apresentadas pelas Eqs. (2.33) e (2.34), também são válidas para o espectro de Lyapunov a tempo finito.

MÉTODO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT. O procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt é amplamente utilizado no cálculo numérico do espectro de Lyapunov a tempo finito em sistemas caóticos. Considere um conjunto de k vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ que compõem um espaço vetorial de dimensão $N \geq k$. Ou seja, o objetivo é determinar uma base de k vetores ortonormais $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ que descrevam o subespaço projetado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Em outras palavras, desejamos determinar os vetores \mathbf{w}_i tal que $\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{w}_j = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é uma função delta de Kronecker, e cada \mathbf{w}_i é uma combinação linear de \mathbf{v} 's para $i = 1, \dots, k$. A solução para este problema é a seguinte [4]

$$\mathbf{w}_i = \left[\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j \right] / \beta_i, \quad (2.36)$$

onde

$$\beta_i = \left\| \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_j \right\|, \quad (2.37)$$

com $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$ sendo que $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}^\dagger \mathbf{v})^{1/2}$. Deste modo, obtendo \mathbf{w}_i , poderemos determinar a base de k vetores ortonormais, começando em $i = 1$ e seguindo sucessivamente até o maior valor de i [4].

2.2.5 Distribuição dos Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Conforme discutimos na Subseção anterior, os expoentes de Lyapunov podem ser definidos de forma qualitativa como quantificadores da taxa média exponencial de expansão ou contração de um elemento infinitesimal de volume em cada direção do espaço de fases. Expoentes negativos implicam na aproximação de trajetórias distintas, enquanto que os expoentes positivos comprovam o afastamento exponencial entre elas, e deste modo, indicam a existência de uma dinâmica caótica.

Para sistemas ergódicos, os expoentes de Lyapunov calculados a tempo infinito, λ_∞ , não dependem das condições iniciais [35]. Por outro lado, existe a dinâmica apresentada por sistemas Hamiltonianos, que geralmente, é composta por movimentos regular e caótico semelhante ao que ocorre num sistema intermitente. Devido à coexistência de ilhas de regularidade com domínios caóticos, a dinâmica dos sistemas Hamiltonianos depende crucialmente das condições iniciais. Entretanto para mensurarmos tal dependência não é possível calcularmos numericamente λ_∞ . Nestes casos o que se faz é truncar o tempo em determinado valor (garantidas as propriedades de convergência) para então obter os expoentes de Lyapunov a tempo finito, λ_n , sendo n a variável temporal discreta, considerando que o sistema estudado seja um mapa.

Devido aos diferentes comportamentos existentes em sistemas que apresentem propriedades de caos fraco, o valor de λ_n e conseqüentemente a distribuição destes expoentes, $P_n(\lambda_n)$, passam a depender das condições iniciais utilizadas [40, 46]. Nestes sistemas as $P_n(\lambda_n)$ deixam de ser Gaussianas pois apresentam longas caudas (cuja evolução temporal é investigada pela teoria dos grandes desvios no Capítulo 4) e diferentes larguras. Apesar disso no limite de tempo tendendo para infinito ($n \rightarrow \infty$) a função distribuição de probabilidades, $P_n(\lambda_n)$, tende para uma função delta de Dirac: $P_n(\lambda_n) = \delta(\lambda_n - \lambda_\infty)$. Em outras palavras, para determinado intervalo de tempo, a distribuição de probabilidades assemelha-se a uma distribuição Gaussiana centrada aproximadamente em λ_∞ , cuja a largura tende para zero quando $n \rightarrow \infty$ [45, 46].

Certamente as seções de Poincaré constituem uma das ferramentas mais úteis na investigação de sistemas de baixas dimensões, como por exemplo, o fluxo Hamiltoniano discutido no Capítulo 3. Eventualmente nestas seções, podem ser observadas trajetórias quase-periódicas sobre toros na forma de ilhas de regularidade. Infelizmente em sistemas de dimensões maiores do que quatro, não há como se obter uma seção de Poincaré. Neste caso, é impossível estudar o espaço de fases utilizando esta ferramenta. Questões relacionadas à detecção de pequenas estruturas de regularidade e existência de trajetórias aprisionadas necessitam ser respondidas de outra maneira. Estas questões são respondidas no Capítulo 5 desta Tese, onde construímos diversas distribuições do espectro de Lyapunov a tempo finito e calculamos os seus cumulantes de ordem 2, 3 e 4: variância, assimetria e curtose, respectivamente. Com isso detectamos exatamente para que valores de não-linearidade no espaço de fases de uma rede de mapas simpléticos acoplados existem quase-armadilhas dinâmicas. Estudamos sistematicamente redes com $N = 2; 3; 5$ e 10 mapas acoplados. Além disso, através da assimetria e da curtose detectamos a existência de um tipo de “movimento comum” onde todos os expoentes de Lyapunov locais (espectro) como função do tempo, decaem para zero devido a influência do efeito de aprisionamento das trajetórias caóticas por quase-armadilhas dinâmicas.

3 *Dinâmica de Partículas Interagentes num Bilhar Unidimensional (1D)*

Neste Capítulo caracterizamos a dinâmica caótica e a existência de trajetórias aprisionadas num sistema composto por duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional. Além disso, utilizamos o mapa de Gauss para estudar a estabilidade deste sistema para razões de massas específicas onde observamos um comportamento, em princípio inesperado, na distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito.

O principal objetivo deste Capítulo é investigar a influência das trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas no comportamento de um sistema composto por duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional com paredes rígidas. Com este propósito, além de obtermos as distribuições dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito como função da razão entre as massas¹ das partículas ($\gamma = m_2/m_1$), $P_t(\Lambda_t, \gamma)$, calculamos também o número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, \mathcal{P}_{Λ_t} , ou seja, o ponto de máximo (dentro de uma certa precisão) de $P_t(\Lambda_t, \gamma)$ que, conforme as Refs. [41, 49, 52], é definido como

$$\left. \frac{\partial P_t(\Lambda_t, \gamma)}{\partial \Lambda_t} \right|_{\Lambda_t = \Lambda_t^p} \cong 0. \quad (3.1)$$

Através desta quantidade é possível obter informações a respeito da quantidade de trajetórias caóticas aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas imersas no mar caótico.

O modelo físico investigado é composto por duas partículas rígidas que interagem via força repulsiva de Yukawa e que estão aprisionadas num bilhar unidimensional cujas paredes também são rígidas. A representação esquemática deste sistema pode ser visualizada na Fig. 7a, onde fixamos a parede da esquerda na posição $q = -1$ e da direita em $q = +1$, respectivamente. A função Hamiltoniana deste modelo, sem considerar o potencial confinante, pode ser escrita em termos das coordenadas do centro de massa do sistema e coordenadas relativas, da seguinte forma

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu_{12}} + V_0 \frac{e^{-\alpha r_{12}}}{r_{12}}, \quad (3.2)$$

¹Neste estudo, as partículas são consideradas pontuais.

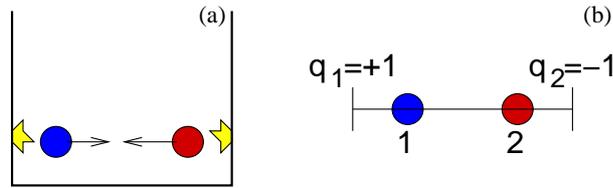


Figura 7: (a) Representação esquemática do problema físico composto por duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional; e (b) configuração do movimento unidimensional das partículas que colidem frontalmente.

sendo P e p os momentos do centro de massa e relativo, respectivamente, V_0 a intensidade e $r_0 = 1/\alpha$ o alcance de interação, M a massa do centro de massa, μ_{12} a massa reduzida e $r_{12} = q_1 - q_2$ a distância relativa entre as partículas. O potencial confinante, representado pelas paredes do bilhar, é determinado numericamente: por exemplo, quando a partícula 1 aproxima-se da parede da esquerda (na ordem de 10^{-8})² localizada em $q = -1$, invertemos o sentido de seu movimento trocando o sinal do momento da mesma. O mesmo procedimento é aplicado para a partícula 2 quando ela se aproxima da parede em $q = +1$. As equações de movimento das partículas, sem a presença das paredes, são obtidas a partir da Eq. (3.2) e escritas assim

$$\dot{q}_{1(2)} = \frac{p_{1(2)}}{m_{1(2)}}; \quad \dot{p}_{1(2)} = +(-)V_0 \frac{e^{-\alpha r_{12}}}{r_{12}} \left(\alpha + \frac{1}{r_{12}} \right). \quad (3.3)$$

Como o movimento das partículas é unidimensional (veja Fig. 7b), a partícula 1(2) nunca colidirá com a parede da direita(esquerda). Nas Refs. [41, 52], além de analisarmos a dinâmica deste sistema, investigamos também dois casos particulares para o alcance de interação entre as partículas

- para $\alpha = 0$ ou $r_0 \rightarrow \infty$, teremos o limite de longo alcance de interação (via potencial de Coulomb – caso particular do potencial de Yukawa);
- para $\alpha = 10$ ou $r_0 = 0, 1$, teremos um caso de interação de curto alcance (por exemplo).

Mostramos também, rigorosamente, que a origem da dinâmica caótica deste sistema está na força de interação entre as partículas e nas duplas colisões que ocorrem entre partícula-partícula-parede, não necessariamente nesta ordem.

Na literatura existem dois trabalhos relacionados a bilhares unidimensionais, aprisionando duas partículas rígidas, que motivaram nosso estudo. No primeiro deles [62] os autores mostraram que a dinâmica deste sistema (sem a existência de um potencial) como função de γ , não é ergódico se θ/π [veja Eq. (3.4)] for racional, sendo permitido apenas um número finito de velocidades no espaço de fases. Por outro lado, eles conjecturaram que se θ/π for irracional a dinâmica será ergódica e conseqüentemente o espaço de fases será totalmente preenchido, apesar

²Assim, a energia do sistema manteve-se constante, na mesma ordem de precisão.

de serem necessários longos tempos [63]. É importante ressaltar ainda que a relação entre θ e γ é dada pela equação

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad \gamma = m_2/m_1. \quad (3.4)$$

Especificamente no caso de $\theta = \frac{p}{q}\pi$, com p e q inteiros, apenas $4q$ velocidades distintas são permitidas (órbitas periódicas do problema) [62]. Embora existam infinitas razões de massas que resultam de valores racionais de θ/π , existem alguns valores especiais, como por exemplo os casos integráveis [64] de $\gamma = 1, 0; 3, 0$ (ou $1/3$), com $\theta = \frac{1}{2}\pi$ e $\theta = \frac{2}{3}\pi$ (ou $\pi/3$), respectivamente. No segundo trabalho [65] os autores estudaram a dinâmica de duas partículas com massas iguais ($\gamma = 1, 0$) confinadas num bilhar unidimensional e interagindo via potencial de Coulomb, responsável pela dinâmica caótica.

De posse das equações de movimento, Eqs. (3.3), e do procedimento apresentado no Capítulo 2, calculamos os expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito. Porém, antes de discutirmos os resultados obtidos é interessante relatar alguns detalhes do procedimento numérico. A trajetória satélite foi reinicializada 10^5 vezes e foram utilizadas 400 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $\{p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0\} \in [0, 0; 1, 0]$. Integramos as equações de movimento para $t = 10^4$, com a energia do sistema fixada em $E = 10, 0$. A intensidade do potencial de Yukawa foi mantida igual a $V_0 = 1, 0$. Integramos as equações de movimento através do método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração variável. Investigamos o comportamento da dinâmica do sistema como função do parâmetro $\gamma = m_2/m_1$, sendo este incrementado num passo de $\Delta\gamma = 0, 01$, no intervalo de $\gamma = [0, 01; 4, 0]$. Após calcularmos Λ_t , obtivemos a distribuição destes expoentes $P_t(\Lambda_t, \gamma)$, obtivemos seu valor médio $\langle \Lambda_t \rangle$ e o número de ocorrências dos expoente de Lyapunov mais provável \mathcal{P}_{Λ_t} , em função de γ .

Uma descrição detalhada sobre este estudo pode ser encontrada na Ref. [52], onde as distribuições dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito foram determinados para o intervalo de $\gamma = [1, 0; 4, 0]$. Contudo, quando calculamos $P_t(\Lambda_t, \gamma)$ no intervalo de $\gamma = [0, 01; 1, 0]$ para o caso de $\alpha = 0$, constatamos que aparecem alguns picos em certos valores de γ , conforme pode-se observar nas Figs. 8 e 9a, cujas investigações foram realizadas através da Teoria de Números, que será apresentada na Seção 3.1. A interpretação da Fig. 8 é bastante simples: o eixo das abscissas, representa a razão entre as massas das partículas; o eixo das ordenadas, o valor do expoente de Lyapunov; e o eixo das cotas, a probabilidade de encontrar um determinado valor de Λ_t para um valor específico de γ . Os pontos escuros que aparecem abaixo da curva principal (“cordilheira”) que aparecem na Fig. 8 são uma consequência direta do aprisionamento das trajetórias utilizadas, que se reflete no valor final dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito. Outra forma de analisar $P_t(\Lambda_t, \gamma)$, dá-se segundo uma representação bidimensional da Fig. 8 apresentada pela Fig. 9a, onde a visualização destes pontos torna-se ainda mais evidente.

Observando as Figs. 8 e 9a percebe-se que conforme γ é incrementado, o sistema torna-se mais regular. Este comportamento pode ser visualizado também na Fig. 9b que apresenta o valor médio dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito, que decresce monotonicamente de $\langle \Lambda_t \rangle \sim 1,1$ para $\langle \Lambda_t \rangle \sim 0,54$, no intervalo de γ investigado. Neste cenário, conjectura-se que no limite da razão entre as massas das partículas tendendo para infinito ($\gamma \rightarrow \infty$), o sistema será integrável se a partícula com maior massa estiver em repouso.

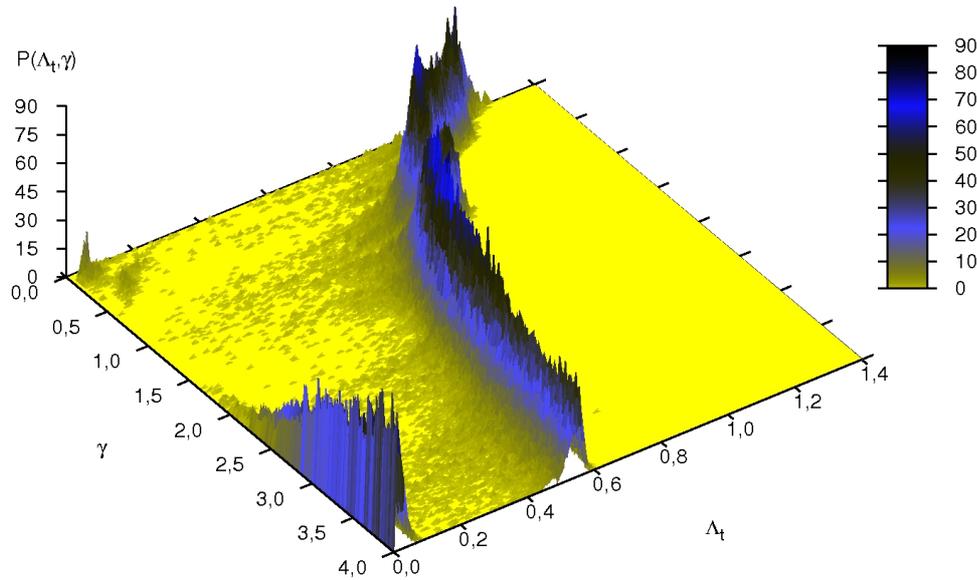


Figura 8: Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito para o sistema (3.2), como função da razão entre as massas das partículas. Os pontos escuros abaixo da curva principal (“cordilheira”) são expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito referentes a trajetórias que foram aprisionadas por intervalos finitos de tempo.

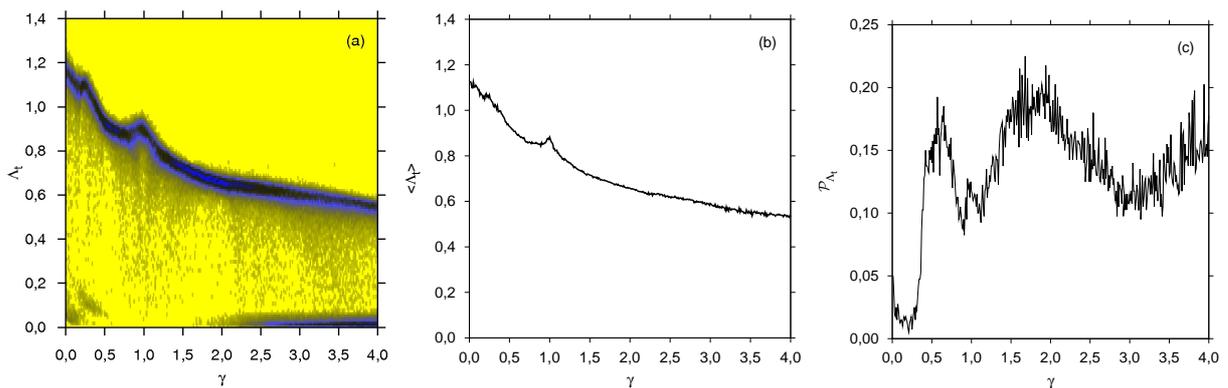


Figura 9: (a) Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito (visão da superfície ou bidimensional da Fig. 8). (b) Expoente de Lyapunov médio, $\langle \Lambda_t \rangle$, obtido de $P_t(\Lambda_t, \gamma)$. (c) Distribuição do número de ocorrências do expoente de Lyapunov máximo a tempo finito mais provável \mathcal{P}_{Λ_t} .

Analisando a Fig. 9a percebemos que no intervalo de $\gamma \sim [1,5; 2,2]$ existem relativamente muitos pontos escuros concentrados na região onde existe o maior pico na Fig. 8, ou seja, existem poucos pontos escuros abaixo da superfície principal. Em outras palavras, a maior parte das condições iniciais utilizadas convergem para o mesmo valor de Λ_t . Para estes valores de

γ o espaço de fases quadridimensional do sistema pode ser considerado quase-ergódico ou por outro lado, para este intervalo de γ existem poucas ou pequenas quase-armadilhas dinâmicas que aprisionam as trajetórias. Para $\gamma \sim [2, 2; 4, 0]$ na Fig. 8, aparece um segundo pico formado por pontos em torno a zero, basicamente, devido à influência do aprisionamento de parte das trajetórias que compõem o *ensemble* utilizado. Uma técnica bastante eficiente de estimar a quantidade de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas foi inicialmente aplicada a este mesmo problema na Ref. [41]. Nesta técnica utilizamos o número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável (\mathcal{P}_{Λ_t}), definido pela Eq. (3.1), para obter algumas informações da existência de trajetórias aprisionadas, conforme podemos observar na Fig. 9c: em cada região de mínimo apresentada por \mathcal{P}_{Λ_t} existem trajetórias aprisionadas; especificamente para $\gamma \sim 1,0$ e $\gamma \sim 3,0$ existem dois mínimos, sendo que exatamente para tais valores de γ este mesmo sistema, exceto pelo potencial de interação entre as duas partículas, é integrável [64]. Em outras palavras, se γ estiver num valor de limite integrável para o caso de partículas rígidas colidindo frontalmente, a dispersão na distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito aumenta, enquanto que \mathcal{P}_{Λ_t} diminui. Na Fig. 10 apresentamos duas ampliações das seções de

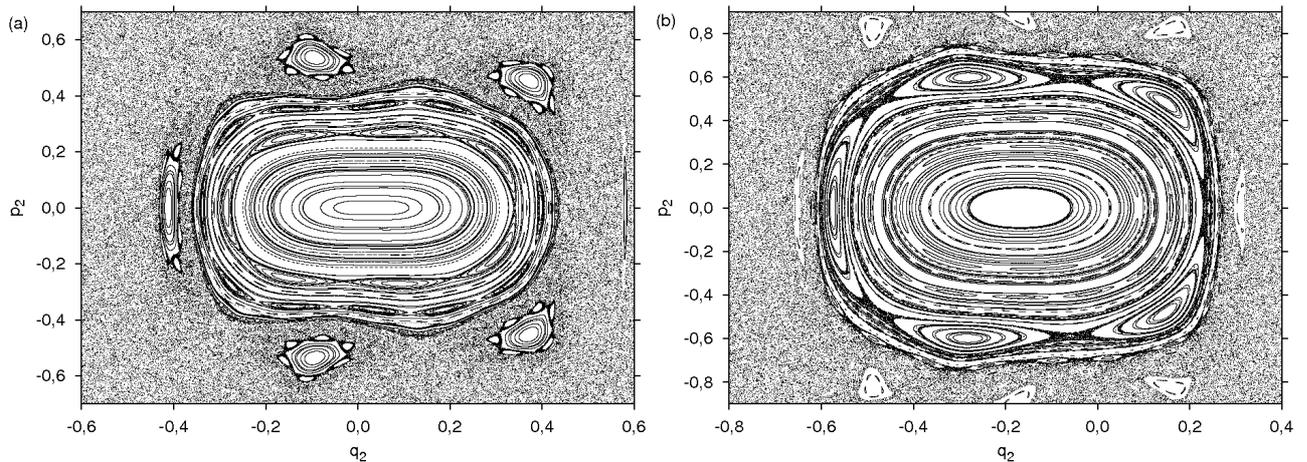


Figura 10: Ampliações das seções de Poincaré para (a) $\gamma = 3,0$ e (b) $\gamma = 4,0$. Em (a) há uma quantidade maior de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas, conforme pode ser observado na Fig. 9c.

Poincaré do problema proposto acima. Em ambas as figuras integramos as equações de movimento até tempos de $t = 15000$ para 200 condições iniciais em cada caso: (a) $\gamma = 3,0$ e (b) $\gamma = 4,0$. As seções de Poincaré foram construídas da seguinte maneira: quando a partícula 1 colidir com a parede da esquerda e o momento da partícula 2 for positivo, guardávamos a posição e o momento da partícula 2. A razão de massas $\gamma = 3,0$ corresponde justamente a região onde \mathcal{P}_{Λ_t} apresenta um mínimo (veja a Fig. 9c), sinalizando o fato de que uma certa quantidade das trajetórias utilizadas foram afetadas pelo efeito de aprisionamento em torno de quase-armadilhas dinâmicas. Na Fig. 10a ($\gamma = 3,0$) aparece uma cadeia de ilhas e em suas bordas há uma grande quantidade de pontos. Por outro lado, observando a Fig. 10b ($\gamma = 4,0$),

percebemos que a área ocupada pela mesma ilha no caso de $\gamma = 3,0$ aumenta e as trajetórias aprisionadas pela cadeia de ilhas em torno da ilha principal presentes na Fig. 10a praticamente desaparecem.

3.1 Mapa de Gauss e Duas Partículas Interagentes num Biliar 1D

Nesta Seção temos por objetivo relacionar o expoente de Lyapunov de algumas órbitas periódicas com medida de Lebesgue zero do mapa de Gauss, com a distribuição dos expoentes de Lyapunov do sistema composto por duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional. Especificamente, a ideia é obter maiores informações a respeito da origem dos picos que aparecem na $P_t(\Lambda_t, \gamma)$, em determinados valores de γ . Entretanto, inicialmente é necessário introduzirmos e discutirmos alguns pontos relacionados ao mapa de Gauss e também às frações contínuas.

Qualquer número real pode ser representado em termos de uma sequência de números inteiros constituindo o que conhecemos por fração continuada (FC) [66]. Nos últimos anos as FCs têm-se mostrado uma ferramenta amplamente utilizada no estudo de sistemas físicos em diferentes contextos científicos, porém, especialmente no estudo numérico da transição do movimento quase-periódico para caótico [5, 4]. De acordo com a Teoria de Números qualquer número real, x , pode ser representado por uma fração continuada, que pode ser escrita como

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \dots], \quad (3.5)$$

sendo a_i números inteiros positivos, exceto a_0 que pode ser igual a zero ou negativo.

O método clássico utilizado na determinação da FC que representa x , dá-se via mapa de Gauss [67, 68], definido como

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} \bmod 1, & \text{em todos os outros casos.} \end{cases} \quad (3.6)$$

O módulo presente na Eq. (3.6) acarreta em não considerarmos a parte inteira do número que será representado por uma FC, ou seja, o intervalo de interesse está entre $[0, 1)$. Em outras palavras, o algoritmo que gera as frações continuadas em termos do mapa de Gauss é o seguinte

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{parte fracional de } 1/x_n = G(x_n), \\ a_{n+1} = \text{parte inteira de } 1/x_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

A quantificação da taxa de divergência exponencial entre duas trajetórias próximas do mapa de Gauss poder ser feita através do expoente de Lyapunov definido como [69]

$$\lambda_{\infty}^G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} |G'(x_i)| \right) \quad \text{com} \quad G'(x_i) = \frac{\partial G(x_i)}{\partial x_i}. \quad (3.8)$$

Uma das principais características do mapa de Gauss refere-se a sua dinâmica ser ergódica e para quase todas as condições iniciais temos $\lambda_{\infty}^G(x) = 2,3731\dots$. Existem algumas interessantes relações entre as propriedades do número x e a sua representação em FCs. Se x for um número racional a sequência a_i é finita e então $\lambda_{\infty}^G(x)$ não pode ser calculado pois a condição $n \rightarrow \infty$, na Eq. (3.8), não é obedecida. Por outro lado, se x for irracional a FC é infinita e $\lambda_{\infty}^G(x)$ pode ser determinado. Para valores irracionais quadráticos de x , a FC é periódica: para o caso de período 2 a FC é representada da forma $x = [a_1, a_2, a_1, a_2, \dots]$, que pode ser escrita simplificada como $x = \overline{[a_1, a_2]}$. Se houver uma repetição dos números inteiros na FC teremos uma órbita periódica do mapa de Gauss. Para órbitas de período 1 o expoente de Lyapunov do mapa de Gauss pode ser calculado como $\lambda_n^G(x_{a_1}) = 2 \ln(1/x_{a_1})$. Neste caso, se $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, a FC será $x = [1, 1, 1, \dots]$ e por sua vez $\lambda_n^G(x_{a_1}) = 2 \ln(1/x_{a_1}) = 0,96\dots$ que corresponde ao menor valor do expoente de Lyapunov das órbitas do mapa de Gauss [67]. Todas as condições iniciais que apresentarem a propriedade $x = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, 1, 1, 1, \dots]$ tem o respectivo EL $\lambda_n^G(x_{a_1}) \sim 0,96$. Já órbitas de período 2 tem a forma, $x = [a_1, a_2, a_1, a_2, \dots] = \overline{[a_1, a_2]}$, de período 3, $x = \overline{[a_1, a_2, a_3]}$ e assim por diante.

A seguir serão apresentados alguns resultados numéricos relacionados às órbitas de período 1 e 2 do mapa de Gauss [41]. Se iterarmos numericamente o mapa de Gauss várias vezes ($n \rightarrow \infty$) utilizando condições iniciais arbitrárias entre $[0, 1)$, todas as órbitas apresentam $\lambda_n^G(x) \sim 2,3731$, representando o resultado ergódico do mapa de Gauss apresentado na forma de uma linha contínua na Fig. 11. Para órbitas de baixo período, p , os expoentes de Lyapunov calculados diferem do resultado ergódico, pois os erros numéricos nos cálculos não se propagam devido ao intervalo de tempo considerado ter sido insuficiente (poucas iteradas). Neste caso, escolhemos algumas órbitas periódicas do mapa de Gauss de período p , determinamos o correspondente valor inicial de x e então calculamos numericamente $\lambda_n^G(x)$ usando $n = p$. Para órbitas de período 1 com $a_1 = 1, 2, 3, 4$, teremos

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,618034\dots = [1, 1, \dots] = \overline{[1]}, & \lambda_n^G(x_1) &\sim 0,96; \\ x_2 &= 0,414214\dots = [2, 2, \dots] = \overline{[2]}, & \lambda_n^G(x_2) &\sim 1,76; \\ x_3 &= 0,302776\dots = [3, 3, \dots] = \overline{[3]}, & \lambda_n^G(x_3) &\sim 2,38; \\ x_4 &= 0,236068\dots = [4, 4, \dots] = \overline{[4]}, & \lambda_n^G(x_4) &\sim 2,88. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podemos observar claramente que usando os valores de a_k ($k = 1, 2, 3, 4$), após uma iteração do mapa de Gauss os expoentes de Lyapunov resultantes são representados por círculos preenchidos na Fig. 11 e são totalmente diferentes do resultado ergódico. Estes pontos estão sobrepostos a curva pontilhada que é a FC para a primeira iteração do mapa de Gauss.

Alguns expoentes de Lyapunov para órbitas de período 2 também podem ser calculados e resultam em

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= 0,366025\dots = [2, 1, \dots] = \overline{[2, 1]}, & \lambda_n^G(x_{2,1}) &\sim 1,32; \\ x_{3,1} &= 0,263772\dots = [3, 1, \dots] = \overline{[3, 1]}, & \lambda_n^G(x_{3,1}) &\sim 1,56; \\ x_{4,1} &= 0,207106\dots = [4, 1, \dots] = \overline{[4, 1]}, & \lambda_n^G(x_{4,1}) &\sim 1,76. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para chegarmos a várias igualdades conforme os exemplos (3.11) geramos os valores de $x = \overline{[a_1, a_2]}$ para órbitas de período 2 usando todas as combinações necessárias de a_1, a_2 . Os resultados deste processo referentes as 15 sequências representadas por pontos em forma de cruz podem ser visualizados na Fig. 11. O primeiro ponto das sequências começa por $\overline{[1]}$, $\overline{[2, 1]}$, $\overline{[3, 1]}$, \dots , $\overline{[k, 1]}$, \dots , $\overline{[800, 1]}$. Poderíamos aumentar o valor de k , entretanto isso não é necessário segundo o objetivo de nosso trabalho. Portanto, o último valor de k considerado é 800. Podemos perceber ainda na Fig. 11 que as sequências tornam-se cada vez mais próximas entre si com o aumento de k . Em cada sequência mantivemos o primeiro número na FC constante e variamos o segundo. Por exemplo a primeira sequência da direita, começa com a razão áurea, expressa pela fração continuada $\overline{[1]}$, com o menor expoente de Lyapunov a tempo finito para esta sequência e o expoente de Lyapunov a tempo finito aumenta com órbitas de período 2 $\overline{[1, 2]}$, $\overline{[1, 3]}$ até $\overline{[1, 800]}$ que apresenta $\lambda_n^G(x_{1,800}) \sim 6,69$. A próxima sequência de órbitas de período 2 é $\overline{[2, 1]}$, $\overline{[2, 2]}$, $\overline{[2, 3]}$, \dots , $\overline{[2, 800]}$. No caso de $x_{2,\infty} = \overline{[2, \infty]}$ que é exatamente igual a $1/2$, o limite da Eq. (3.8) não existe e consequentemente o expoente de Lyapunov não pode ser calculado. Com isso utilizando a órbita periódica $x_{2,800} = \overline{[2, 800]} \sim 1/2$ podemos calcular o expoente de Lyapunov $\lambda_n^G(x_{2,800}) \sim 7,37$ muito próximo a órbita não-periódica em $x = 1/2$. A próxima sequência começa em $\overline{[3, 1]}$ e termina com $x = \overline{[3, 800]} \sim 1/3$ com expoente de Lyapunov a tempo finito $\lambda_n^G(x_{3,800}) \sim 7,78$. As próximas sequências convergem para $\overline{[4, 800]} \sim 1/4$ com $\lambda_n^G(x_{4,800}) \sim 8,07$, $\overline{[5, 800]} \sim 1/5$ com $\lambda_n^G(x_{5,800}) \sim 8,30$ até $\overline{[800, 800]} \sim 0.0012$ com $\lambda_n^G(x_{800,800}) \sim 13,4$.

Deste modo torna-se interessante ressaltarmos três pontos fundamentais em nossa análise: (i) ocorre um aumento no valor dos expoentes de Lyapunov com o aumento de k ; (ii) para todos os pontos os expoentes de Lyapunov calculados para as órbitas periódicas do mapa de Gauss diferem do resultado ergódico $\lambda^G(x) \sim 2,3731\dots$; (iii) mostraremos que as órbitas periódicas do mapa de Gauss, com medida de Lebesgue nula, são relevantes para o estudo da dinâmica

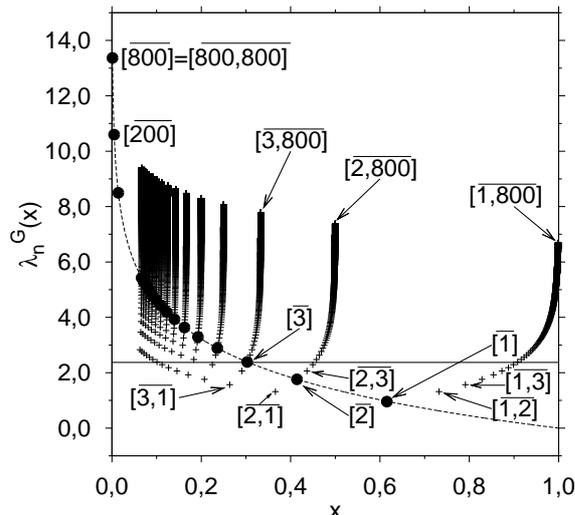


Figura 11: Expoentes de Lyapunov para órbitas de período 1 (círculos cheios) e período 2 (cruzes) do mapa de Gauss no intervalo $[0, 1)$. A linha tracejada é a primeira iteração do mapa de Gauss e a linha contínua representa o valor do expoente de Lyapunov para o caso ergódico.

do mapa de Gauss. Em outras palavras, tais órbitas são importantes no entendimento de determinadas estruturas observadas na $P_t(\Lambda_t, \gamma)$ [41], para o problema que envolve as duas partículas interagentes no bilhar unidimensional com paredes rígidas.

Conforme discutido anteriormente, calculamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito como função da razão entre as massas das partículas $P_t(\Lambda_t, \gamma)$ no intervalo de $\gamma = [0, 01; 4, 0]$ [41]. Agora, podemos relacionar as informações obtidas a partir do mapa de Gauss com os picos que aparecem na $P_t(\Lambda_t, \gamma)$ (conforme Fig. 8 ou Fig. 12a), em $\gamma \sim 1, 0$ (maior pico) e $\gamma \sim 0, 17$. Com este objetivo construímos a Fig. 12a conectada à Fig. 12b como uma forma de visualizar se há alguma conexão com os resultados do mapa de Gauss previamente estudados.

Na Fig 12b podemos observar o comportamento do valor médio dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito $\langle \Lambda_t \rangle$ (linha cheia). O valor de $\langle \Lambda_t \rangle$ decai aproximadamente de 1, 18 a 0, 57 para intervalo de $\gamma = [0, 01; 4, 0]$. Como podemos perceber em $\gamma \sim 1, 0$ há o aparecimento de um acentuado e inesperado pico. A medida que o valor de γ diminui, a média do EL apresenta um mínimo em $\gamma \sim 0, 85$ e então volta a crescer novamente até o aparecimento de outro pico inesperado em $\gamma \sim 0, 11$, como fica ainda mais claro na Fig 12a. Na Fig 12b apresentamos o comportamento dos expoentes de Lyapunov a tempo finito do mapa de Gauss em relação a γ . Para caracterizarmos esta dependência substituímos a relação $\theta = \pi x$ na Eq.(3.4), e isolamos γ nesta equação, que agora passa a ser uma função de x , obtendo então

$$\gamma(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)}, \quad (3.11)$$

representando o vínculo entre γ e x do mapa de Gauss.

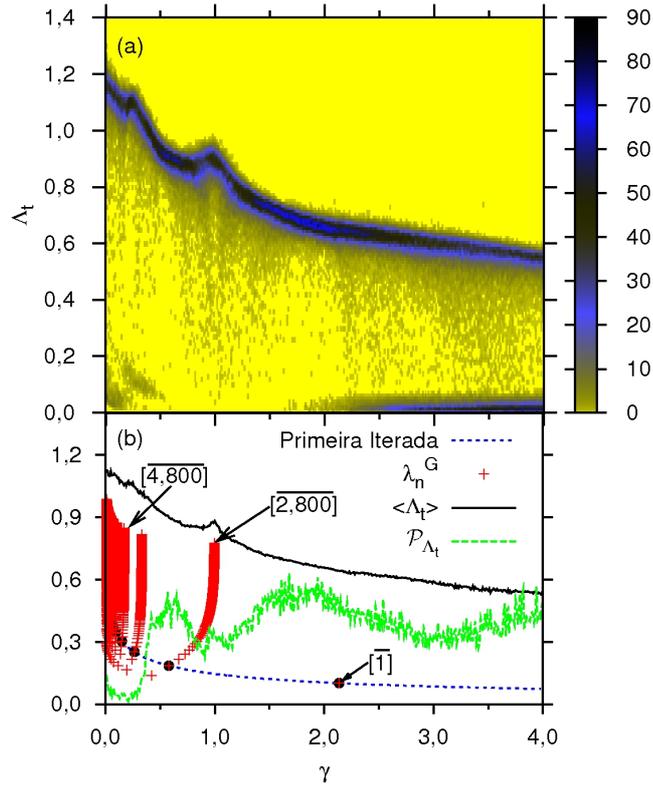


Figura 12: (a) Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito, $P_t(\Lambda_t, \gamma)$, para o sistema composto por duas partículas interagentes num bilhar unidimensional como função entre as razões das massas destas partículas. (b) Valor médio dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito, $\langle \Lambda_t \rangle$, (linha cheia) obtido a partir de, $P_t(\Lambda_t, \gamma)$; distribuição do número de ocorrências do expoente de Lyapunov máximo a tempo finito mais provável, \mathcal{P}_{Λ_t} , (linha tracejada); e resultados referentes ao expoente de Lyapunov a tempo finito do mapa de Gauss, conforme apresentado na Fig. 11.

Inicialmente, observamos que o valor médio dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito do modelo físico concorda qualitativamente com a primeira iterada do mapa de Gauss (linha azul pontilhada). O pico observado em $\gamma \sim 1,0$ está muito próximo do ponto $\gamma(x = \overline{[2,800]} \sim 1/2)$ que é uma órbita de período 2 do mapa de Gauss. Lembrando que este ponto está muito próximo da órbita aperiódica, $x = 1/2$, do mapa de Gauss em que o expoente de Lyapunov não pode ser calculado devido ao limite $n \rightarrow \infty$ na Eq. (3.8) não ser satisfeito. O outro pico (menor) em $\gamma \sim 0,17$ está próximo a outra órbita de período 2 do mapa de Gauss, dada por $\gamma(x = \overline{[4,800]} \sim 1/4)$. Com a diminuição do valor de γ o comportamento qualitativo dos expoentes de Lyapunov referente as regiões onde aparecem picos seguem as órbitas periódicas do mapa de Gauss com medida de Lebesgue zero $x(\gamma) = \overline{[k,800]}$ com $(k = 2, 3, \dots, 800)$.

Outra forma de obter informações a respeito da origem dos picos observados na distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finitos podem ser obtidas calculando a mudança na altura da distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito em torno do número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável \mathcal{P}_{Λ_t} . Este método proposto na Ref. [41], tem-se mostrado uma ferramenta muito sensível na detecção de trajetórias aprisiona-

das em torno de ilhas de regularidade no espaço de fases de sistemas conservativos e sistemas intermitentes. Em outras palavras, cada vez que esta quantidade apresentar um mínimo, a ocorrência de aprisionamentos das trajetórias caóticas será maior. O número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, \mathcal{P}_{Λ_t} , é apresentada na Fig. 12b (linha verde pontilhada) onde grandes variações podem ser visualizadas claramente para três regiões de mínimos: $\gamma \sim 0,25; 1,0; 3,0$ (veja Fig. 10a), que são exatamente valores de γ em que o espaço de fases do sistema apresenta várias quase-armadilhas dinâmicas. Os valores de $\gamma \sim 1,0; 3,0$ são de particular interesse, pois estão relacionados a dois casos integráveis do problema de colisões de partículas rígidas, previamente estudados por Casati e Ford na Ref. [62]. Através do número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável constatamos que no intervalo de $\gamma \sim [0,01; 1,0]$ e para $\gamma \sim 3,0$ existem regiões de mínimo para praticamente todos os pontos $\gamma(x = \overline{[k, 800]})$ com $k = 2, 3, \dots, 800$, do mapa de Gauss. Ou seja, existe uma região de mínimo que se estende no intervalo de $\gamma \sim [0,01; 1,0]$, exatamente onde os pontos tornam-se cada vez mais próximos conforme as sequências se aproximam de zero.

3.2 Conclusões

Com base nos resultados numéricos apresentados na Seção anterior concluímos que os pontos $\gamma(x = \overline{[k, 800]})$ com $k = 2, 3, \dots, 800$ estão localizados consideravelmente próximos das órbitas aperiódicas do mapa de Gauss (associados às órbitas periódicas do modelo físico). Este comportamento sugere que os mínimos apresentados por \mathcal{P}_{Λ_t} ocorrem devido a existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas remanescentes das órbitas periódicas do modelo físico sem o potencial interagente.

4 Teoria dos Grandes Desvios e Taxas de Mistura

Através da distribuição de probabilidades do maior expoente de Lyapunov a tempo finito, e mais precisamente do estudo de suas propriedades de grande desvio, utilizamos uma técnica numérica extremamente poderosa para estimar as taxas de decaimento algébrico das correlações temporais e recorrências de Poincaré em sistemas dinâmicos que apresentam propriedades de caos fraco. Com o objetivo de testar a eficiência desta técnica numérica foram utilizados três sistemas dinâmicos que apresentam diferentes propriedades, relacionadas as trajetórias aprisionadas por estruturas de regularidade: (i) um sistema unidimensional intermitente (o mapa de Pikovsky) em que o decaimento das correlações temporais é conhecido exatamente; (ii) sistemas bidimensionais (uma família de mapas conservativos intermitentes) que representam um exemplo de sistemas intermitentes em altas dimensões e finalmente (iii) investigamos o decaimento das correlações num ensemble de mapas padrão modificados, cujo espaço de fases é composto por ilhas de regularidade e domínios caóticos (espaço de fases dividido [5]). Os resultados obtidos das simulações numéricas sugerem que o estudo das propriedades de grandes desvios das distribuições de probabilidades dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, contém as informações necessárias para a determinação do decaimento das correlações temporais e recorrências de Poincaré. E por fim, serão apresentadas as principais conclusões obtidas neste estudo.

4.1 Regime de Grandes Desvios e Decaimento das Correlações Temporais

Um dos mais interessantes problemas da teoria dos sistemas dinâmicos refere-se a evolução temporal ou médias espaciais, para entender como estimativas de ordem finita destas médias convergem para seu limite assintótico. Outro ponto que merece ser citado, está ligado a obtenção quantitativa da velocidade (ou taxa) de decaimento das correlações temporais ou das taxas de mistura (*mixing rates*) [7, 8]. Em outras palavras, sempre que ocorrer o decaimento das cor-

relações (tendendo a zero enquanto o tempo tende para infinito), o sistema pode ser classificado como *misturado*¹ [8]. Geralmente, as correlações temporais decaem rapidamente (exponencialmente), se (i) a dinâmica do sistema estudado for fortemente caótica² (*strongly chaotic*); e (ii) os observáveis utilizados no cálculo das correlações forem suficientemente regulares³. Os mapas da tenda e do gato de Arnold podem ser considerados exemplos típicos de sistemas (hiperbólicos) fortemente caóticos [4].

Neste cenário, pode-se afirmar que em modelos menos complexos como por exemplo, cadeias de Markov⁴, a conexão entre a convergência de estimativas de ordem finita e as taxas de mistura podem ser estabelecidas facilmente, devido aos estados anteriores serem irrelevantes na predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Contudo, conforme discutido anteriormente, espera-se que a coexistência de **ilhas de regularidade** ou **pontos fixos marginais estáveis**⁵ com domínios que apresentam comportamentos caóticos destruam severamente as propriedades de dinâmica misturada (*mixing*) e com isso, seja possível observar o decaimento (“anômalo”) polinomial das correlações temporais. Sistemas que apresentem algum destes tipos de estrutura (ilhas ou pontos fixos estáveis) possuem propriedades semelhantes, que podem ser consideradas genéricas [71], no sentido que o lento decaimento das correlações possa influenciar profundamente as suas propriedades determinísticas de difusão e transporte [72].

Motivados por esta discussão, propomos que o estudo das propriedades de grandes desvios⁶ de estimativas a tempo finito caracteriza uma eficiente ferramenta na obtenção de informações **quantitativas** das taxas de mistura (ou decaimento das correlações) do sistema dinâmico estudado. Em outras palavras, se medirmos algum observável de determinado sistema, e a distribuição deste observável apresentar uma cauda relativamente grande, poderemos obter informações a respeito de sua dinâmica analisando apenas a área desta cauda. O observável calculado para diferentes intervalos de tempo finitos neste estudo é o expoente de Lyapunov

¹Detalhes a respeito da definição de *mistura* (*mixing*) foram discutidos na Subseção 2.2.2, do Capítulo 2.

²Comportamento típico de sistemas hiperbólicos e sistemas de alta dimensionalidade cujo parâmetro de não-linearidade presente um alto valor.

³Em determinados tipos de sistemas (como por exemplo, no mapa da tenda [4]) o decaimento das correlações temporais depende sensivelmente das funções utilizadas em sua estimativa. Com isto, o decaimento das correlações pode ser algébrico, exponencial ou mais rápido do que exponencial [11].

⁴A cadeia de Markov é um caso particular de processo estocástico (uma família de variáveis aleatórias) com estados discretos (o parâmetro, geralmente, o tempo pode ser discreto ou contínuo) e apresenta a propriedade Markoviana. A definição desta propriedade, também chamada de memória Markoviana, é que os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido [16, 70].

⁵Estes pontos fixos são chamados de marginalmente estáveis, pois os autovalores da matriz Jacobiana de um sistema bidimensional conservativo, por exemplo, são iguais a 1 (ponto fixo parabólico). A existência destes pontos no espaço de fases de sistemas conservativos implica no aprisionamento de determinadas trajetórias caóticas na vizinhança destas estruturas de regularidade por um intervalo de tempo finito (veja a definição destas estruturas na Seção 2.1 do Capítulo 2).

⁶A teoria dos grandes desvios tem como base o estudo sequencial (ou evolução) do comportamento das caudas das distribuições de probabilidade. A sua definição formal apresentada em 1966 por Sathyamangalam R. I. S. Varadhan [73]. Em outras palavras, através da teoria de grandes desvios pode-se estudar o decaimento exponencial das medidas de probabilidade de determinados eventos extremos, ou seja, pode-se obter informações da cauda da distribuição em questão, conforme o número de observações aumenta arbitrariamente.

a tempo finito (ELTF). É importante enfatizar que a ideia de que exista uma relação entre a cauda das distribuições a tempo finito e os efeitos de memória não é nova: o estudo da cauda ou da influência de uma grande variância na distribuição de expoentes de Lyapunov a tempo finito foi utilizado para obter informações sobre mudanças qualitativas na dinâmica de mapas acoplados [74], na detecção de pequenas ilhas de regularidade [41, 48, 75], ou movimento de uma partícula em um potencial aleatoriamente dependente do tempo [46] (veja também [40] para sistemas dinâmicos hiperbólicos).

Uma das motivações deste trabalho nasceu da análise teórica rigorosa aplicada a uma classe de mapas unidimensionais f realizada por José S. Alves *et. al* [57, 60], e mais tarde estendida a sistemas de alta dimensionalidade [76]. Neste trabalho, chamamos o expoente de Lyapunov a tempo finito de λ_n , enquanto que $P_n(\lambda_n)$ representa a distribuição de estimativas a tempo finito, sendo que λ_n pode ser determinado para mapas unidimensionais de acordo com a seguinte equação

$$\lambda_n(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx} \Big|_{x_0} \right|. \quad (4.1)$$

Após o cálculo numérico dos ELTFs considerando um *ensemble* de condições iniciais, as distribuições dos mesmos foram construídas. Com isto, fez-se necessário fixar um determinado valor $\tilde{\lambda}$ tal que $0 < \tilde{\lambda} < \lambda$ possibilite estimar a fração de ELTFs que sofreram a influência do aprisionamento das respectivas trajetórias (*stickiness effect*): devido ao aprisionamento das trajetórias caóticas por estruturas de regularidade presentes no espaço (ou diagrama) de fases, também chamadas de quase-armadilhas dinâmicas [8], conforme discutido anteriormente. Em outras palavras, o objetivo é estimar a área da cauda da distribuição abaixo de $\tilde{\lambda}$ através da seguinte equação

$$\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n) = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} d\lambda_n P_n(\lambda_n), \quad (4.2)$$

sendo n a variável temporal do sistema (considerando que seja um mapa, em que n é variável discreta). A Fig. 13 é uma representação esquemática que torna mais claro o procedimento de cálculo de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$: o decaimento assintótico desta quantidade é obtido através da diminuição da área das caudas das distribuições localizadas a esquerda da linha tracejada ($\tilde{\lambda}$), conforme o tempo passa.

Em sistemas ergódicos a quantidade $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ tende assintoticamente a zero rapidamente [44]. Por outro lado, em sistemas dinâmicos fracamente caóticos (em que ocorre o decaimento anômalo das correlações) ela decai polinomialmente segundo a equação

$$\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n) \sim \frac{1}{n^\xi}. \quad (4.3)$$

A partir desta classe de sistemas Alves *et al.* [60] propuseram uma prova rigorosa da existência

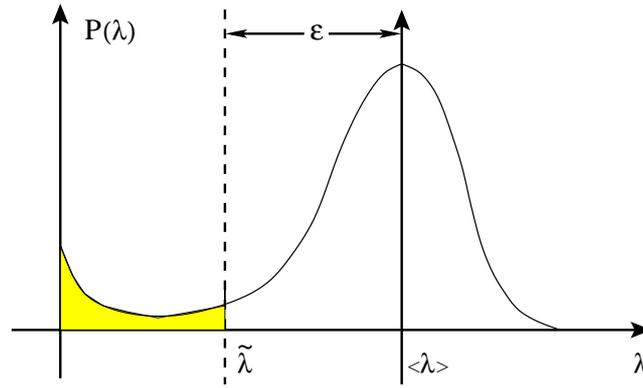


Figura 13: Representação esquemática do procedimento de obtenção de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$: conforme o tempo é incrementado a área das caudas das distribuições tende para zero.

de um valor limite para o decaimento das correlações de acordo com

$$\mathcal{C}(n) \leq \frac{1}{n^{\xi-1}}. \quad (4.4)$$

Usualmente, as correlações temporais são calculadas através da seguinte equação

$$\mathcal{C}(n) = \int d\mu(x) \phi(x) \psi[f^{(n)}(x)],$$

sendo ϕ e ψ escolhidos conforme uma determinada classe de observáveis contínuos [11], e μ representando a medida invariante do sistema. Na Ref. [60] os autores definem uma quantidade semelhante a $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, que foi aplicada ao estudo de mapas unidimensionais. Entretanto, a forma como $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ foi definido neste trabalho, acopla as duas bases de nossa proposta: além de permitir uma comparação com as estimativas de grandes desvios, ela pode ser facilmente calculada.

Com base na relação existente entre $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ na Eq. (4.2) e as propriedades dos grandes desvios [77], o matemático Ian Melbourne [57] estabeleceu uma interessante conexão entre as propriedades de grandes desvios e o decaimento das correlações (veja também [78]): considere um sistema dinâmico $f : x \rightarrow x$ com medida de probabilidade ergódica μ . Então pode-se escolher um observável qualquer deste sistema tal que $\phi : x \rightarrow \mathbb{R}$, cuja média espacial seja dada por

$$\bar{\phi} = \int_x \phi d\mu, \quad (4.5)$$

e sua média temporal

$$\langle \phi_n \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi[f^{(k)}(x)]. \quad (4.6)$$

Neste contexto, o teorema ergódico de Birkhoff que leva o nome de George D. Birkhoff (1884-1944), garante que no $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|\langle \phi_n \rangle - \bar{\phi}| > \epsilon) = 0$, para todo $\epsilon > 0$. Contudo, se considerarmos médias temporais finitas de ϕ (que obedecem a soma de Cesàro⁷) pode-se obter uma função

⁷A soma de Cesàro é um meio alternativo de descrever a soma de uma série infinita. Se a série converge,

suave [11, 79], cujas correlações temporais decaem polinomialmente de acordo com $\mathcal{C}(n) \sim n^{-\xi}$. Deste modo, é possível associar o decaimento algébrico das correlações com as propriedades de grandes desvios através da seguinte equação [57]

$$\mu \left(x \left| \left| n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \phi[f^{(k)}(x)] - \bar{\phi} \right| > \epsilon \right) \leq C_{\phi, \epsilon} \frac{1}{n^{\xi}}, \quad (4.7)$$

sendo $C_{\phi, \epsilon}$ uma constante e ϵ a diferença entre $\bar{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ (lembrando que neste trabalho o observável ϕ é representado pelo maior expoente de Lyapunov a tempo finito λ_n). Deste modo, é importante enfatizarmos dois pontos: o primeiro deles refere-se ao fato que o expoente ξ , que aparece no lado direito da Eq. (4.7), é exatamente o expoente de decaimento das correlações temporais; o segundo é a desigualdade que aparece nesta mesma equação.

Neste contexto, pode-se afirmar que a análise da forma como $\mathcal{M}_{\tilde{\chi}}(n)$ decai, resulta numa ferramenta extremamente eficiente no estudo quantitativo do decaimento das correlações, um dos pontos chave do estudo de sistemas dinâmicos fracamente caóticos. Outro ponto importante que deve ser mencionado, refere-se a obtenção de uma estimativa das taxas de mistura ou decaimento das correlações, serem bastante delicadas do ponto de vista computacional [59]. Por este motivo, esforços tem sido aplicados no desenvolvimento de técnicas alternativas, como por exemplo, a estatística dos tempos de recorrência [14, 15, 59, 80], que conforme foi rigorosamente mostrado, reproduz o resultado exato para sistemas intermitentes unidimensionais [81]. Antes de aplicar o método proposto a diferentes sistemas dinâmicos intermitentes e a um sistema Hamiltoniano, destacamos que o expoente ξ tem o menor valor possível em uma classe de funções suaves (com média zero). Nestes casos, sabe-se que escolhas específicas dos parâmetros podem ocasionar um decaimento mais rápido das correlações. Um exemplo descrito rigorosamente envolvendo a dinâmica de uma mapa unidimensional intermitente é apresentado na Ref. [82].

4.1.1 Sistema Unidimensional: Mapa de Pikovsky

Inicialmente é importante enfatizar que um dos objetivos deste trabalho é testar a eficiência e robustez do cálculo numérico de $\mathcal{M}_{\tilde{\chi}}(n)$. Conseqüentemente, almejamos consolidar esta metodologia de investigação numérica e assim propor sua utilização, paralelamente às técnicas “tradicionais”, na obtenção das taxas de decaimento das correlações temporais. Deste modo, iniciamos as análises das simulações numéricas, investigando um sistema intermitente (com um parâmetro de intermitência z) conhecido como mapa de Pikovsky [19] e representado pela função

no senso usual, para uma soma β , então a série é também somável por Cesàro e possui valor β . A importância da soma de Cesàro está no fato que até uma série divergente pode ter uma soma de Cesàro bem definida. Tal método recebe este nome em homenagem ao matemático italiano Ernesto Cesàro (1859-1906). A soma de Cesàro consiste basicamente em: seja a_n uma sequência, e $s_k = a_1 + \dots + a_k$ onde a é a k -ésima soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. A sequência a_n é dita somável no sentido de Cesàro, com soma de Cesàro β , se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_n}{n} = \beta$.

$T_z(x)$. Este mapa é definido implicitamente⁸ e representado pela seguinte equação

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2z}[1 + T_z(x)]^z, & 0 < x < 1/(2z), \\ T_z(x) + \frac{1}{2z}[1 - T_z(x)]^z, & 1/(2z) < x < 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

enquanto que para valores negativos de x , o mapa é definido como $T_z(-x) = -T_z(x)$ [19]. O mapa de Pikovsky possui estruturas interessantes, como por exemplo, em $x = \pm 1$ onde existem dois pontos fixos marginais, conforme assinalado pelos círculos nas extremidades dos diagramas de fases, apresentados nas Figs. 14a-c, para diferentes valores do parâmetro de intermitência: $z = 1, 5; 2, 0$ e $4, 0$, respectivamente. Para estes mesmos valores de z obtivemos as suas respectivas séries temporais, conforme apresentado pelas Figs. 14d-f. O principal objetivo neste caso, é evidenciar as mudanças que ocorrem na dinâmica do sistema intermitente quando z for incrementado. Quanto maior o valor de z , mais regular ou menos caótico será o sistema intermitente. Isso porque, há um aumento nos intervalos de tempo dos aprisionamentos das trajetórias nas vizinhanças dos pontos fixos marginais em $x = \pm 1$, como pode-se observar nas séries temporais, conforme z é incrementado. Estes pontos fixos são do mesmo tipo que os encontrados no diagrama de fases do mapa de Pomeau-Manneville [17], definido sobre o intervalo unitário como

$$x_{n+1} = x_n + x_n^z \quad \text{mod } 1, \quad z > 1, \quad (4.9)$$

onde z é o correspondente parâmetro de intermitência que tem a mesma função do parâmetro z no mapa de Pikovsky dado pela Eq. (4.8). Esta classe de sistemas dinâmicos representa um dos poucos exemplos de sistemas que não são hiperbólicos em que é possível obter resultados analíticos, conforme apresentado nas Refs. [81, 83, 84].

Para qualquer valor do parâmetro de intermitência escolhido (z), a medida invariante do mapa de Pikovsky é a própria medida de Lebesgue [19]. O decaimento das correlações temporais (taxas de mistura) deste sistema segue uma lei de potências, cujo expoente é determinado de forma exata a partir do parâmetro de intermitência, z , [85] através da seguinte equação

$$\mathcal{C}(n) \sim n^{-1/(z-1)}. \quad (4.10)$$

Deste modo, fixando o parâmetro z pode-se obter a taxa de decaimento das correlações temporais de forma exata: para o mapa de Pikovsky esta taxa sempre seguirá uma lei de potências. Com isso, a partir de agora o objetivo é obter $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}(n)$, e posteriormente confrontar os dois expoentes de decaimento ou taxas de mistura.

Nas simulações numéricas executadas para obtermos $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}(n)$ ⁹ utilizamos um conjunto de

⁸Isto é, sabe-se o valor da função (mapa) $T_z(x)$, apesar de não conhecer o valor de x associado.

⁹Lembrando que o observável utilizado nas simulações numéricas é o expoente de Lyapunov a tempo finito, representado pela letra grega λ_n .

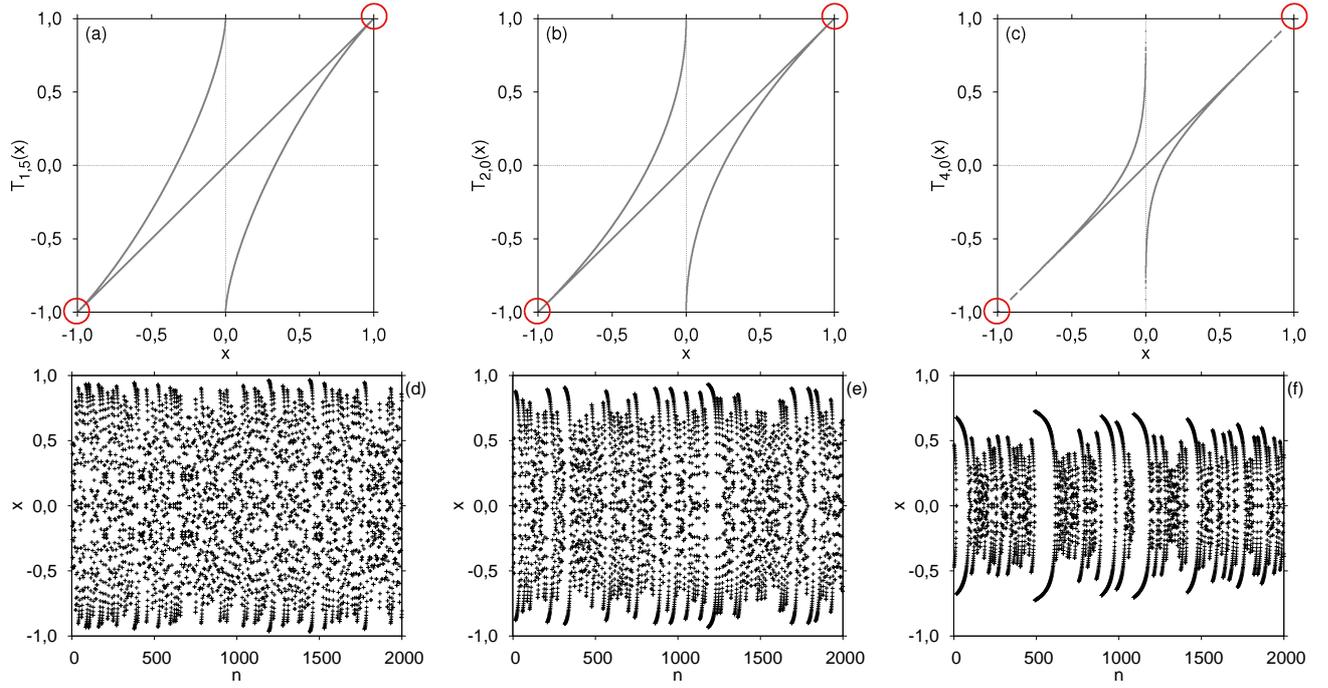


Figura 14: (a)-(c) Diagrama de fases do mapa de Pikovsky para três diferentes parâmetros de intermitência: $z = 1,5; 2,0$ e $z = 4,0$. Em (d)-(f) apresentamos suas respectivas séries temporais, construídas com apenas uma condição inicial. Os círculos nas extremidades dos diagramas de fases em (a)-(c) indicam as posições dos pontos fixos marginais, do tipo Pomeau-Manneville [17], localizados em $x = \pm 1$ e responsáveis pelo decaimento anômalo (algébrico) das correlações temporais deste sistema.

10^6 condições iniciais escolhidas uniformemente no diagrama de fases, $x_0 \in [-1; 1]$, (quantidade que de acordo com os resultados obtidos mostrou-se suficiente). Na Fig. 15, apresentamos os resultados referentes a três valores do parâmetro de intermitência: $z = 1,5; 2,0$ e $4,0$. Os respectivos valores teóricos de ξ , obtidos substituindo z na Eq. (4.10), são: $\xi = 2; 1; 1/3$. Se compararmos ξ com o ajuste (*fit*) feito a partir dos símbolos (pontos) da Fig. 15 pode-se concluir que a taxa de decaimento das correlações é reproduzida de forma **exata** pelo decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$. Por esta razão, constatamos que em princípio, a quantidade $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ mostra-se bastante útil como quantidade alternativa na obtenção de ξ .

Como a principal ideia é checar com que precisão o decaimento das correlações é refletido pelos grandes desvios das distribuições de probabilidades dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, expresso pelo decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, deve-se escolher cuidadosamente o que chamamos de parâmetro de grandes desvios $\tilde{\lambda}$ (veja Fig. 13): espera-se que o decaimento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ não dependa do valor de $\tilde{\lambda}$. Entretanto, faz-se necessário que este parâmetro seja escolhido **longe suficiente** do centro da distribuição (valor médio do observável) para que reproduza os resultados corretos, da mesma forma que as estimativas de tempo finito necessitam que $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ seja obtido apenas das contribuições da cauda da distribuição. Portanto, o fato de escolher o valor de $\tilde{\lambda}$ determinará a escala de tempo $\tau_{\tilde{\lambda}}$ em que o decaimento assintótico será alcançado, o que acontecerá após um tempo transiente. Ou seja, a principal influência da escolha de $\tilde{\lambda}$ será

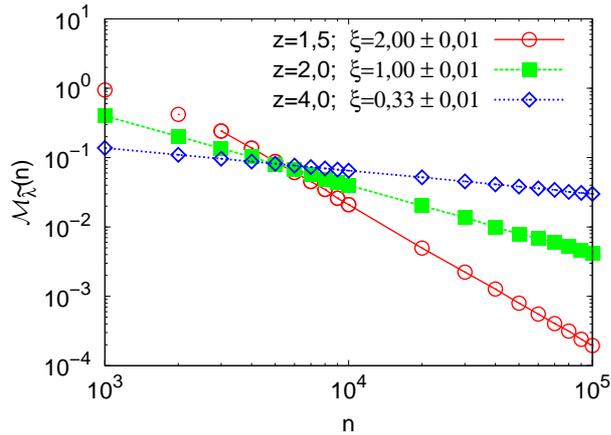


Figura 15: Dados numéricos (símbolos), e ajuste (fit) (linhas) do decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ segundo uma lei de potências para o mapa de Pikovsky, considerando-se três diferentes valores do parâmetro de intermitência: $z = 1,5; 2,0$ e $4,0$. Os respectivos decaimentos, estimados a partir deste ajuste, com seus erros associados são: $\xi \simeq 2,00 \pm 0,01$; $\xi \simeq 1,00 \pm 0,01$ e $\xi \simeq 0,33 \pm 0,01$. Em contrapartida, os respectivos valores teóricos de ξ obtidos da Eq. (4.10) são os seguintes: $\xi = 2; 1$ e $1/3$. O ajuste para o caso de $z = 1,5$ começa em $n = 3000$, enquanto que para $z = 2,0$ e $z = 4,0$ em $n = 10^3$.

refletida em quão longo será o transiente necessário para atingir o comportamento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, conforme ilustrado pela Fig. 16. Esta figura foi construída através do cálculo dos expoentes de Lyapunov a tempo finito para o mapa de Pikovsky, com $z = 2$ (aqui também utilizamos 10^6 condições iniciais). As curvas preta contínua, pontilhada e tracejada estão relacionadas a três diferentes valores de $\tilde{\lambda}$, escolhidos em ordem crescente em relação ao valor do expoente de Lyapunov a tempo finito, respectivamente. A curva clara contínua representa o real decaimento para este caso em que a inclinação segue uma lei de potências, cujo expoente é exatamente $\xi = 2$. Comparativamente, podemos concluir que os três valores de $\tilde{\lambda}$ reproduzem o real decaimento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, ou seja, o cálculo desta quantidade não depende da escolha de $\tilde{\lambda}$. Entretanto, escolhendo-o adequadamente o tempo transiente para chegar ao comportamento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$, diminui consideravelmente.

Devido ao fato que a função distribuição de probabilidades de quantidades obtidas a tempo finito (especificamente neste trabalho, o expoente de Lyapunov) estão sendo utilizadas e discutidas, a pergunta que surge é a seguinte: considerando-se que a quantidade $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ que decai polinomialmente, é possível observar tal comportamento diretamente da distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito? A resposta para esta questão pode ser obtida diretamente da Fig. 17, em que foram construídas quatro distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, $P_n(\lambda_n)$, a partir de diferentes intervalos de tempo com 10^7 condições iniciais para o mapa (4.8), com $z = 2$. Pode-se observar também que conforme o teorema ergódico prevê, a distribuição tende a uma função delta de Dirac centrada em $\bar{\lambda}$ no limite de $n \rightarrow \infty$ [44]. Por outro lado, para intervalos de tempo finitos as caudas destas distribuições são polinomialmente “gordas”, e contém muitas informações a respeito da dinâmica do sistema. Analisando atentamente

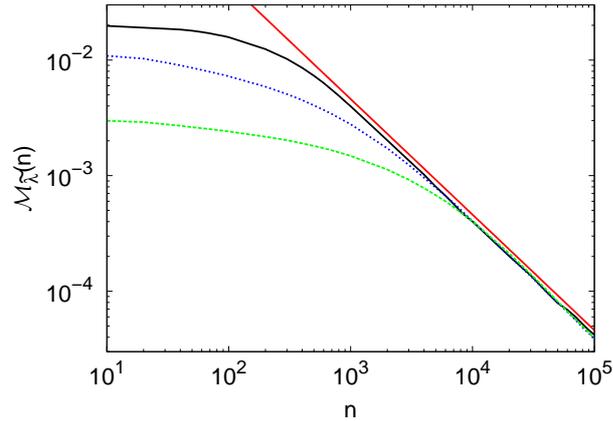


Figura 16: A quantidade $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ decai para zero conforme o tempo $n \rightarrow \infty$ para o mapa de Pikovsky (Eq. (4.8)) com $z = 2,0$ para diferentes valores de $\tilde{\lambda}$. Tais valores foram escolhidos de forma aleatória, porém em ordem crescente para as curvas preta contínua, pontilhada e tracejada, respectivamente. A curva clara contínua representa um ajuste referente ao decaimento segundo uma lei de potência cujo expoente é $\xi = 1$.

a Fig. 17, pode-se observar claramente que existem dois picos nas distribuições (bimodal) [43]: o maior deles próximo ao valor médio do expoente de Lyapunov e o menor pico próximo a zero. O segundo deles é uma consequência direta das trajetórias terem sido aprisionadas pelos pontos fixos marginais estáveis em suas vizinhanças por um determinado intervalo de tempo, fazendo com que o valor de λ_n diminua significativamente. A Fig. 17-interna (*inset*) foi construída em

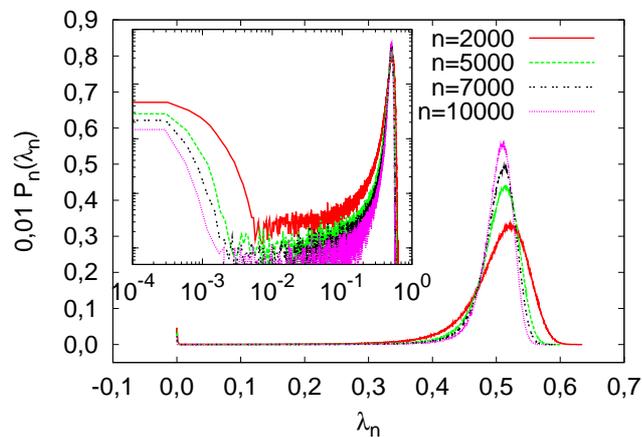


Figura 17: Histogramas dos expoentes de Lyapunov a tempo finito $P_n(\lambda_n)$ para o mapa (4.8), com $z = 2,0$. Figura interna (*inset*): as distribuições de $P_n(\lambda_n)$ são apresentadas em escala logarítmica. A área do pequeno pico próximo a zero diminui polinomialmente com o aumento do tempo n .

escala logarítmica com o intuito de responder a pergunta feita no início deste parágrafo: pode-se constatar que a área do pico próximo a zero vai diminuindo com o aumento do tempo n , utilizado na obtenção dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, ou seja, esta diminuição (nesta região as linhas tem um decaimento linear em escala logarítmica) segue uma lei de potências. Este resultado sugere que através da inspeção direta da distribuição de probabilidades de estimativas a tempo finito já é possível ter uma ideia de qual será a lei que rege o decaimento da área das

caudas destas distribuições que tende a zero conforme o tempo tende para infinito ($n \rightarrow \infty$).

4.1.2 Sistemas Bidimensionais: Família de Mapas Conservativos Intermitentes

O segundo sistema dinâmico investigado neste Capítulo consiste numa família de mapas conservativos intermitentes $B_{(\varepsilon, \nu)} : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^2$, com $\mathcal{B}^2 = [-\pi, \pi]^2$ (sobre o toros bidimensional). A dinâmica deste sistema depende basicamente de dois parâmetros: ε (não-linearidade) e ν (intermitente). Tal mapa é definido como

$$B_{(\varepsilon, \nu)} : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} & \text{mod } 2\pi, \\ y_{n+1} = y_n + f_{\varepsilon, \nu}(x_n) & \text{mod } 2\pi, \end{cases} \quad (4.11)$$

sendo que

$$f_{\varepsilon, \nu}(x_n) = [x_n - (1 - \varepsilon) \sin(x_n)]^\nu. \quad (4.12)$$

A área do espaço de fases do mapa $B_{(\varepsilon, \nu)}$ é preservada independentemente da escolha da força impulsiva $f(x)$: a matriz Jacobiana deste sistema pode ser escrita como

$$\mathbb{J}_{\varepsilon, \nu}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + f'_{\varepsilon, \nu}(x) & 1 \\ f'_{\varepsilon, \nu}(x) & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde o $\det \mathbb{J}_{\varepsilon, \nu}(x, y) = 1$ e o traço $\text{tr } \mathbb{J}_{\varepsilon, \nu}(x, y) = 2 + f'_{(\varepsilon, \nu)}(x)$.

Um mapa da família (4.11) foi inicialmente proposto em [86], e diferentes estruturas foram estudadas nas Refs. [20, 61, 87, 88]. Especificamente neste estudo, apresentamos e discutimos resultados obtidos a partir do sistema (4.11), para as seguintes situações

H : quando $\varepsilon > 0$, o mapa é hiperbólico;

P : quando $\varepsilon = 0$, o ponto fixo em $(0, 0)$ torna-se parabólico.

No caso **H**, o sistema é hiperbólico independente do valor de ν (porém com $\nu > 0$). Por outro lado, no caso **P** o sistema é quase uniformemente hiperbólico exceto em $x = 0$, onde existe um ponto fixo marginal parabólico, independente do valor de ν [61]. A existência deste ponto fica ainda mais clara quando $\nu = 1$ e $\varepsilon = 0$, em que o traço da matriz Jacobiana é dado por $\text{tr } \mathbb{J}_{\varepsilon, \nu}(x, y) = 3 - \cos(x)$: quando $x = 0$ o $\text{tr } \mathbb{J}_{\varepsilon, \nu}(x, y) = 2$, ou seja, somente ao longo de $x = 0$ o mapa não é hiperbólico [20]. O parâmetro ν tem como função alterar a intensidade do efeito *stickiness* do ponto fixo parabólico que pode ser visto como um tipo de quase-armadilha, de forma semelhante ao que ocorre com o parâmetro de intermitência no mapa de Pikovsky, estudado na Subseção anterior. Em outras palavras, aumentando o valor de ν determinadas trajetórias serão aprisionadas nas vizinhanças do ponto fixo marginal por um determinado intervalo de tempo. Este comportamento é típico de sistemas intermitentes, como por exemplo,

no mapa de Pomeau-Manneville dado pela Eq. (4.9). Especificamente neste trabalho, optamos por fixar $\nu = 1$, para todas simulações numéricas executadas com o sistema dado pela Eq. (4.11).

Na Fig. 18, apresentamos o espaço de fases do sistema dado pela Eq. (4.11), com suas respectivas ampliações, cujo objetivo é ilustrar a discussão do parágrafo anterior. As Figs. 18a e 18c foram construídas com dez condições iniciais escolhidas nas vizinhanças do ponto fixo hiperbólico ($\varepsilon = 0,5$) e parabólico ($\varepsilon = 0$), respectivamente. As Figs. 18b e 18d são respectivas ampliações das Figs. 18a e 18c que foram construídas com o intuito de evidenciar tal estrutura em torno do ponto fixo. A linha contínua que cruza o espaço de fases, passando pela origem em cada figura (espaço de fases), representa o gráfico de $(x, y(x))$ cuja estrutura e forma dependem do tipo de ponto fixo em questão. Estrutura semelhante foi observada no estudo de um modelo

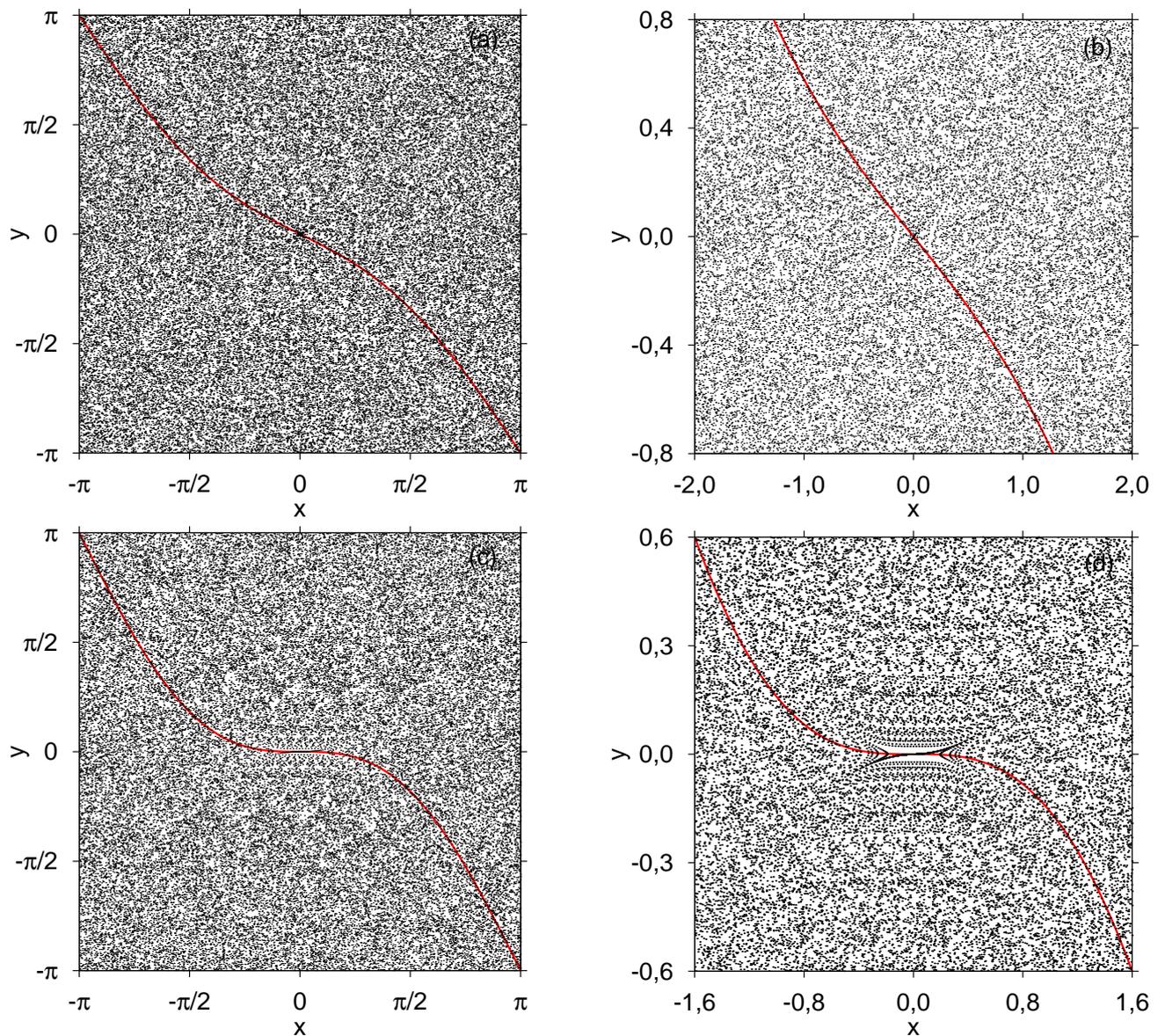


Figura 18: Espaço de fases do mapa (4.11), para (a) $\varepsilon = 0,5$ (sistema hiperbólico) e (c) $\varepsilon = 0$ (sistema quase-uniformemente hiperbólico, exceto em $x = 0$), com suas respectivas ampliações (b) e (d). Em ambos os casos $\nu = 1$. A linha clara contínua que cruza cada espaço de fases representa a função $(x, y(x))$: evidenciando as características (tipo) do ponto fixo localizado na origem.

físico, composto por duas partículas interagindo via força repulsiva de Yukawa e aprisionadas num bilhar unidimensional, no limite de curto alcance de interação, conforme discutido na Ref. [52]. Quando variamos a razão entre as massas das partículas detectamos o nascimento de uma ilha de regularidade, que inicialmente, apresentava as mesmas características do ponto fixo marginal parabólico das Figs. 18c e 18d.

Até aqui foram apresentadas algumas das principais características e propriedades do sistema dinâmico bidimensional utilizado no estudo do decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$. Entretanto, antes de apresentar o decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ para então compará-lo às taxas de mistura (decaimento das correlações) para o mapa (4.11), é interessante que haja uma discussão resumida a respeito do decaimento das correlações temporais deste mapa baseada principalmente, nos trabalhos de Roberto Artuso e Andrea Prampolini [20, 59]. Quando o sistema for hiperbólico (caso **H** com $\varepsilon = 0,5$) o decaimento das correlações ocorre exponencialmente, enquanto que para o sistema quase-uniformemente hiperbólico (caso **P** com $\varepsilon = 0$) espera-se que o decaimento das correlações seja regido por uma lei de potências, cujo expoente dependa apenas do valor de ν . Para a segunda situação (**P**), Artuso *et al.* [61] propuseram a seguinte lei de decaimento das correlações ou estimativa das taxas de mistura

$$\mathcal{C}(n) \sim n^{-3(\nu+1)/(3\nu-1)}. \quad (4.14)$$

Para $\nu = 1$, Carlangelo Liverani e Marco Martens [88] provaram rigorosamente a existência de um valor limite $|\mathcal{C}(n)| \leq n^{-2}$ para o decaimento das correlações, enquanto que a Eq. (4.14), prevê um expoente de decaimento igual a $\xi \simeq -3$. Nas simulações numéricas realizadas neste trabalho ambos os casos (**H** e **P**) foram analisados: na Fig. 19a fixamos $\varepsilon = 0,5$, e então obtivemos o decaimento exponencial de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ utilizando 10^6 condições iniciais em cada distribuição; para o caso intermitente, quando $\varepsilon = 0$, o decaimento assintótico de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ segue uma lei de potências, cujo expoente coincide com a previsão proposta por Artuso *et al.* na Ref. [20] com a Eq. (4.14), conforme pode-se constatar no ajuste apresentado na Fig. 19b. Para obtermos o decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ para o caso **P** foram necessárias 10^8 condições iniciais.

Como forma de concluir esta Subseção, podemos afirmar que as Figs. 19a e especialmente 19b constituem mais uma indicação consistente da robustez deste procedimento de obtenção da lei de decaimento das correlações temporais, que pode ser visto como alternativo ao que foi utilizado na Ref. [61], na obtenção do expoente das leis de potências. A técnica numérica utilizada nesta Tese fornece estimativas tão precisas quanto a análise estatística dos tempos de recorrência, com a vantagem que é necessária uma quantidade menor de condições iniciais, ao mesmo tempo que supera a computação direta das correlações temporais.

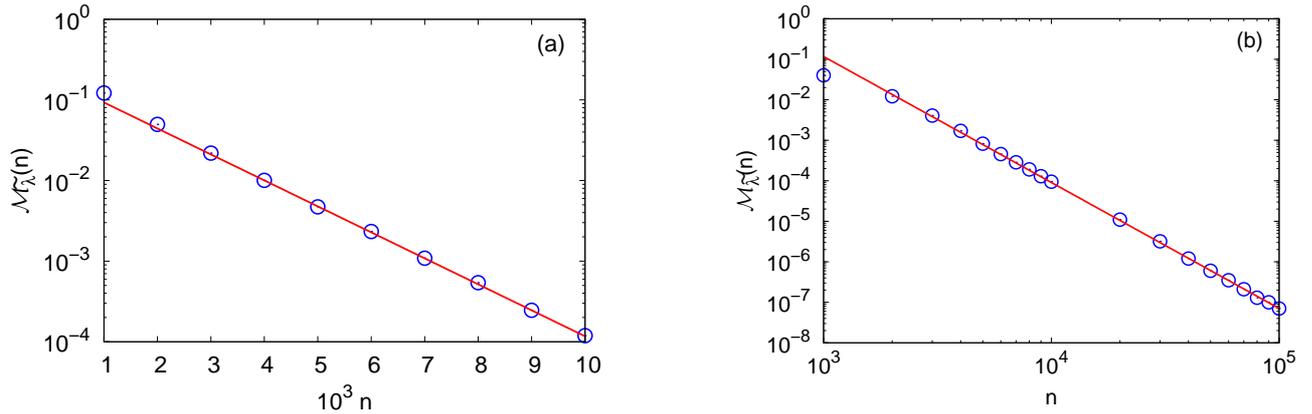


Figura 19: Decaimento de $\mathcal{M}_{\bar{\chi}}(n)$ (símbolos) juntamente com seu respectivo ajuste (linhas) para o mapa (4.11) com (a) $\varepsilon = 0,5$ e $\nu = 1$ (taxa de decaimento exponencial $0,87 \pm 0,01$) e (b) $\varepsilon = 0$ e $\nu = 1$ (taxa de decaimento polinomial $\xi \simeq 3,07 \pm 0,05$). Ambos os ajustes foram feitos a partir de $n = 3000$.

4.1.3 Sistemas Hamiltonianos: Ensemble de Mapas Padrão Modificados

O último sistema dinâmico estudado neste Capítulo representa de uma questão bastante geral: em quais condições determinadas propriedades de **universalidade** são exibidas por sistemas Hamiltonianos bidimensionais, cujo espaço de fases seja **dividido** e composto por estruturas de regularidade com propriedades hierárquicas. Este ponto foi muito estudado e discutido pelos autores das Refs. [15, 21, 70] e também em outras referências relevantes por mais de vinte anos [50, 89]: em particular, Giampaolo Cristadoro e Roland Ketzmerick [70], sugeriram sobre as bases de um modelo de árvore de Markov [16] com fatores de escala aleatórios para transição de probabilidade, a existência de um decaimento algébrico assintótico para as recorrências de Poincaré. Eles também discutem em detalhes as dificuldades numéricas encontradas na obtenção deste resultado. Em relação as simulações numéricas, segundo os autores das Refs. [70, 89, 90], uma média feita sobre diferentes parâmetros de um dado sistema Hamiltoniano bidimensional reduz significativamente os tempos extremamente longos que são necessários para uma simples trajetória (um único parâmetro) obter detalhes a respeito das estruturas presentes no espaço de fases. Este procedimento permitiu a Cristadoro e Ketzmerick confirmar sua proposta através de um *ensemble* de parâmetros de um mapa Hamiltoniano bidimensional, sendo então possível estimar o expoente de decaimento algébrico das recorrências de Poincaré em $\chi \simeq 1,57 \pm 0,03$. Neste contexto, os autores das Refs. [14, 15, 59, 80] sugerem que a lei de decaimento das correlações temporais, estimado em termos das recorrências de Poincaré, em sistemas Hamiltonianos obedeça a seguinte equação

$$\mathcal{C}(n) \sim \frac{1}{n^{\chi-1}}. \quad (4.15)$$

O decaimento algébrico das recorrências de Poincaré também foi investigado numericamente para um conjunto de mapas padrão modificados na Ref. [21], cujo expoente da lei de potências foi estimado em $\chi \simeq 1,60 \pm 0,05$. Este mesmo sistema também foi utilizado nesta Tese.

Com o objetivo de investigar a taxa de decaimento algébrico das correlações temporais ou taxas de mistura e recorrências de Poincaré, através do método numérico aplicado e testado nos sistemas intermitentes ao longo deste Capítulo, utilizamos um *ensemble* de mapas de Chirikov-Taylor ou mapas padrão modificados, que a exemplo do mapa padrão continuam sendo definidos sobre o toros bidimensional $[-\pi; \pi)^2$ e são escritos como

$$P_{K, K^\dagger} : \begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(q_n) + K^\dagger, \\ q_{n+1} = q_n + p_{n+1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

O parâmetro K é responsável pela não-linearidade do mapa e K^\dagger representa um campo magnético a que o sistema está submetido. Na Fig. 20 apresentamos o espaço de fases do mapa dado pela

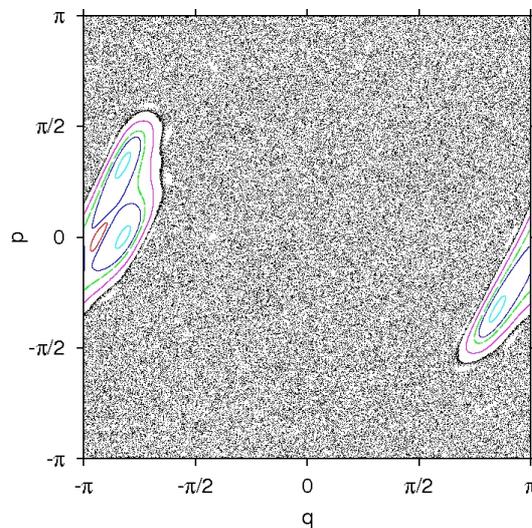


Figura 20: Espaço de fases do mapa padrão modificado dado pela Eq. (4.16), para $K = \pi$ e $K^\dagger = 0, 2 \cdot \pi$.

Eq. (4.16), gerado com vinte condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço de fases. Os principais objetivos desta figura são: evidenciar a estrutura do espaço de fases, onde domínios ergódicos e ilhas de regularidade coexistem e mostrar a influência da constante K^\dagger , que além de aumentar a quantidade de trajetórias aprisionadas ou o tempo de aprisionamento nas bordas das ilhas de regularidade (caracterizando o efeito *stickiness*), quebra a semelhança geométrica entre elas.

Seguindo a proposta dos autores das Refs. [70, 89, 90] obtivemos o decaimento de $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}(n)$, conforme apresentado na Fig. 21, para um *ensemble* composto por 40 parâmetros: em cada curva tracejada apresentada na Fig. 21, variamos um dos parâmetros (K ou K^\dagger) do sistema (4.16). No cálculo numérico dos expoentes de Lyapunov a tempo finito ambos os parâmetros foram escolhidos uniformemente nos intervalos de $K \in [\pi; 1, 2 \cdot \pi]$ e de $K^\dagger \in [0, 0; 0, 4 \cdot \pi]$. Geramos os histogramas dos ELTFs com 10^6 condições iniciais para cada tempo (em escala logarítmica). Por outro lado, escolhemos as condições iniciais uniformemente na caixa $\{q_0, p_0\} \in [-0, 1; 0, 1]$, localizada exatamente no centro do mar caótico. Obtidas as curvas referentes ao decaimento

de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ (curvas tracejadas), calculamos o valor médio sobre os 40 parâmetros utilizados, conforme apresentado pela linha contínua na Fig. 21. Um ponto interessante a ser mencionado diz respeito ao fato que o comportamento obtido na Fig. 21 foi inicialmente observado com apenas ~ 10 parâmetros, corroborando com a afirmação de que $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ é bastante eficiente e robusto em sua proposta.

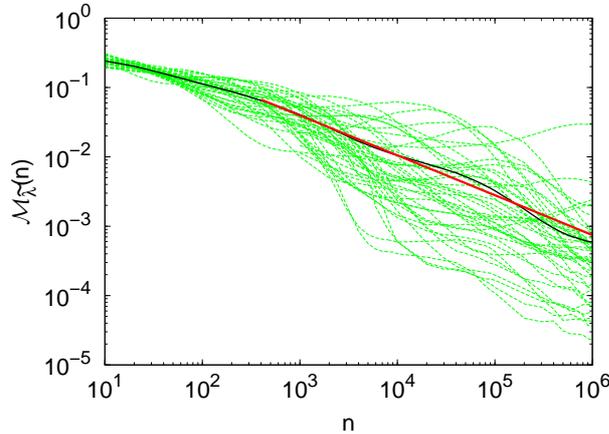


Figura 21: Distribuições do maior expoente de Lyapunov a tempo finito para um ensemble de 40 parâmetros diferentes do mapa padrão modificado (4.16). Os parâmetros do sistema foram escolhidos nos intervalos de $K \in [\pi; 1,2 \cdot \pi]$ e $K^\dagger \in [0,0; 0,4 \cdot \pi]$. A curva preta contínua representa a média sobre todas as curvas tracejadas e a curva clara contínua corresponde ao ajuste da média que decai de acordo com o seguinte expoente: $\xi \simeq 0,57 \pm 0,05$.

Terminada a etapa de obtenção dos dados e construção dos histogramas obtivemos o ajuste da curva preta contínua. Então, calculamos o expoente de decaimento (que obedece uma lei de potências) através do ajuste dos pontos (*fit*) que compõem esta curva: resultando num valor igual a $\xi \simeq 0,57 \pm 0,05$ expresso pela inclinação da curva clara contínua. Os autores das Refs. [14, 15, 59, 80] sugerem que a lei de decaimento das correlações segue a Eq. (4.15), sendo que $\chi \simeq 1,57 \pm 0,03$ é o expoente de decaimento das recorrências de Poincaré. Deste modo, substituindo χ em (4.15) obtém-se um expoente de decaimento das correlações exatamente igual ao que foi determinado numericamente através do ajuste de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$.

Finalmente, podemos concluir através das discussões apresentadas nesta Subseção, que a taxa de decaimento de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ fornece maiores evidências que suportam a afirmação proposta por Cristadoro e Ketzmerick na Ref. [70], a respeito da “universalidade” que pode haver no valor do expoente da lei de potências que rege o decaimento assintótico das correlações temporais ou taxas de mistura em sistemas Hamiltonianos bidimensionais.

4.2 Conclusões

Neste capítulo mostramos como a análise da conexão entre as propriedades de grandes desvios com a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, fornece uma ferramenta

alternativa na investigação do decaimento das correlações temporais ou taxas de mistura, e das recorrências de Poincaré em sistemas intermitentes e Hamiltonianos. Em especial, no caso de sistemas que apresentam propriedades de caos fraco, em que ocorra o decaimento algébrico das correlações, o expoente da lei de potências pode ser determinado a partir da função distribuição de probabilidade dos expoentes de Lyapunov a tempo finito com notável acurácia. Além disso, mostramos que para determinadas classes de sistemas dinâmicos a desigualdade (4.7), reduz-se ao seu valor exato. Outro ponto importante a ser mencionado refere-se ao fato de que a obtenção numérica de $\mathcal{M}_{\tilde{\lambda}}(n)$ mostrou-se bastante fácil e eficiente: em particular no último exemplo a estimativa do expoente de decaimento foi obtida a partir de um “tempo computacional” consideravelmente reduzido com relação às simulações numéricas dos autores das Refs. [21, 70].

5 Quase-armadilhas Dinâmicas em uma Rede de Mapas Simpléticos Acoplados

A abordagem proposta neste Capítulo tem como base a detecção e caracterização do efeito causado por quase-armadilhas dinâmicas (*stickiness effect*), presentes em espaços de fases de uma rede de mapas simpléticos acoplados de alta dimensão. Com este objetivo, iniciamos esta investigação a partir do mapa bidimensional conservativo (Hamiltoniano) de Chirikov-Taylor ou mapa padrão, definido no Capítulo 1. Concluída a primeira etapa deste estudo, utilizamos um acoplamento unidirecional para então construir uma rede de mapas acoplados. Embora o mapa padrão seja um sistema Hamiltoniano, a nova rede de mapas acoplados é apenas simplética pois obedece a condição simplética. Deste modo, aumentamos gradativamente a dimensão do espaço de fases acoplando vários mapas entre si. Deste modo observamos, para espaços de fases com dimensões $d = 10$ e 20 , que as trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas são responsáveis pelo aparecimento de um tipo de “movimento comum” onde os expoentes que compõem o espectro de Lyapunov apresentam valores próximos a zero. Em outras palavras, as trajetórias caóticas concentram-se em determinada região por um intervalo de tempo finito. Conseqüentemente, estas trajetórias influenciam o comportamento da distribuição de probabilidades do espectro de Lyapunov a tempo finito. Mostramos ainda que esta influência pode ser quantificada através de quatro quantidades estatísticas: o número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável, a variância, a assimetria e a curtose. Investigando as distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito para $d = 10$ e 20 através destas quatro quantidades, mostramos que acima de um valor crítico do parâmetro de não-linearidade as diferentes direções instáveis são igualmente afetadas.

5.1 **Existem Trajetórias Aprisionadas em Espaços de Fases de Alta Dimensionalidade?**

O espaço de fases de mapas simpléticos¹ com dois graus de liberdade ($N = 1$ e $d = 2N = 2$), em geral, não é ergódico [5, 4]. Basicamente, devido ao espaço de fases ser composto por domínios onde o comportamento dinâmico pode ser caótico, regular (torus KAM) ou em determinadas situações, ambos os regimes. Ainda que as trajetórias caóticas sejam densas, ou seja, a maioria das trajetórias sejam caóticas, nenhuma delas transpõe as regiões regulares, e conseqüentemente, estas trajetórias permanecem restritas em determinadas regiões do espaço de fases. Em outras palavras, existem diferentes tipos de trajetórias no espaço de fases, que podem ser classificadas como: regulares, quase-regulares e caóticas, dependendo basicamente do parâmetro de não-linearidade do problema em questão. A origem da coexistência de diferentes tipos de trajetórias no espaço de fases está na quebra das estruturas de regularidade imersas no mar caótico denominadas **ilhas de regularidade** ou simplesmente **torus KAM** (Kolmogorov-Arnold-Moser), devido a perturbação a que o sistema esteja submetido [5]. Justamente na borda destas ilhas, onde determinadas órbitas quase-periódicas foram quebradas, ocorre o processo de aprisionamento de determinadas trajetórias caóticas por intervalos de tempo finitos. A este fenômeno de aprisionamento, dá-se o nome de efeito *stickiness*, conforme amplamente discutido nos Capítulos anteriores desta Tese.

Através das simulações numéricas constatamos que quanto maior a dimensão do espaço de fases menor será o intervalo do parâmetro de não-linearidade onde existem quase-armadilhas dinâmicas. Conforme o número de graus de liberdade é incrementado “mais ergódica” será a dinâmica do sistema estudado [5]. Por outro lado, isso não garante que o decaimento das correlações temporais deste sistema obedeça a uma lei exponencial, como acontece em determinados sistemas hiperbólicos unidimensionais [11, 79]. Isto porque ainda assim, podem existir trajetórias aprisionadas em torno de estruturas que apresentam medida de Lebesgue nula ou estruturas de regularidade cujo volume seja bastante pequeno, que são responsáveis pelo decaimento anômalo das correlações temporais. No Capítulo 4, investigamos dois sistemas dinâmicos que apresentam este tipo de estrutura: o mapa de Pikovsky [19] e uma família de mapas conservativos bidimensionais [59]. Em ambos os casos, a origem do efeito *stickiness* é causado por dois pontos fixos marginais estáveis e um ponto fixo marginal parabólico, respectivamente.

Na literatura científica existem relativamente poucos trabalhos tratando da investigação do efeito *stickiness* em sistemas dinâmicos com $N > 1$ ou $d = 2$. Mais importante do que isso, existe uma grande escassez de ferramentas que possam ser utilizadas na detecção e caracterização das armadilhas dinâmicas. Uma das razões para isto, está na impossibilidade encontrada na

¹Um mapa é classificado com simplético, quando ele for obtido a partir de um fluxo Hamiltoniano, ou também quando obedecer a condição simplética, conforme definido no Capítulo 2 [91].

visualização de espaços de fases com $d \geq 4$ [5]. Por outro lado, não existem mais curvas invariantes (KAM) que dividem o espaço de fases (domínios regulares e caóticos) em regiões fechadas, fazendo com que não existam barreiras para as trajetórias caóticas, como ocorre em sistemas dinâmicos com as mesmas propriedades, porém bidimensionais. Este comportamento pode ser explicado de forma qualitativa, considerando que a dimensão destas curvas é igual a metade da dimensão do espaço de fases. Por exemplo, se tivermos um sistema composto por três partículas interagentes entre si, $N = 3$, o espaço de fases deste sistema apresentará uma dimensão igual a $d = 2N = 6$, fazendo com que os torus tenham uma dimensão $d/2 = 3$ [5, 92, 93]. Quando $N = 1$, ou seja $d = 2$, as trajetórias aprisionadas entre duas curvas KAM apenas poderão escapar desta região se a dimensão do sistema e conseqüentemente do espaço de fases, for aumentada. Todavia, nestes sistemas o escape de determinadas trajetórias é extremamente lento, conforme prevê o teorema de Nekhoroshev [94, 95], que afirma que tais trajetórias necessitam de tempos exponencialmente longos para escapar quando aprisionadas entre curvas KAM.

Resultados analíticos relacionados a sistemas Hamiltonianos, no regime quase-regular, são raros. Por este motivo torna-se necessária a proposição de novos ferramentais numéricos que quantifiquem o grau de ergodicidade ou dinâmica misturada e hiperbolicidade em sistemas dinâmicos. Por exemplo, a determinação dos ângulos entre as variedades (*manifolds*) estáveis e instáveis obtidos através dos vetores covariantes de Lyapunov [96, 97, 98], e utilizados na quantificação do grau de hiperbolicidade de diferentes classes de sistemas dinâmicos. Neste contexto, eventualmente, o espaço de fases de determinado sistema bidimensional possa aparentemente parecer ergódico ou completamente caótico, entretanto, em meio ao mar caótico podem existir ilhas de regularidade cuja área seja relativamente pequena. Certamente, tais ilhas **podem** ser consideradas quase-armadilhas dinâmicas e conseqüentemente levem ao aparecimento do efeito de aprisionamento de trajetórias². Esta situação é ilustrada, por exemplo, observando o espaço de fases do mapa padrão [veja Eq. (1.1)], na Fig. 22a. Neste caso, o espaço de fases é bidimensional ($d = 2$) e parâmetro de não-linearidade fixado em $K = 5,79$. Se não existissem as duas regiões destacadas por dois quadrados na Fig. 22a, o espaço de fases poderia ser “totalmente” caótico. Entretanto, existem duas pequenas ilhas próximas aos pontos $(q, p) \sim (\pm 1, 70; \pm 2, 90)$, conforme destacado pelos dois quadrados: a visualização deste tipo de estrutura depende muito da quantidade de condições iniciais utilizadas e da forma com que elas são escolhidas. Amplificando as duas regiões referentes às ilhas pode-se observar claramente a sua estrutura, conforme apresentado pelas Figs. 22b e 22c.

Neste cenário, surge a seguinte pergunta: o que acontece com o efeito *stickiness* (aprisionamento de trajetórias caóticas por quase-armadilhas dinâmicas), observado em sistemas com

²É evidente que esta situação depende da escolha das condições iniciais e do tempo de evolução do sistema.

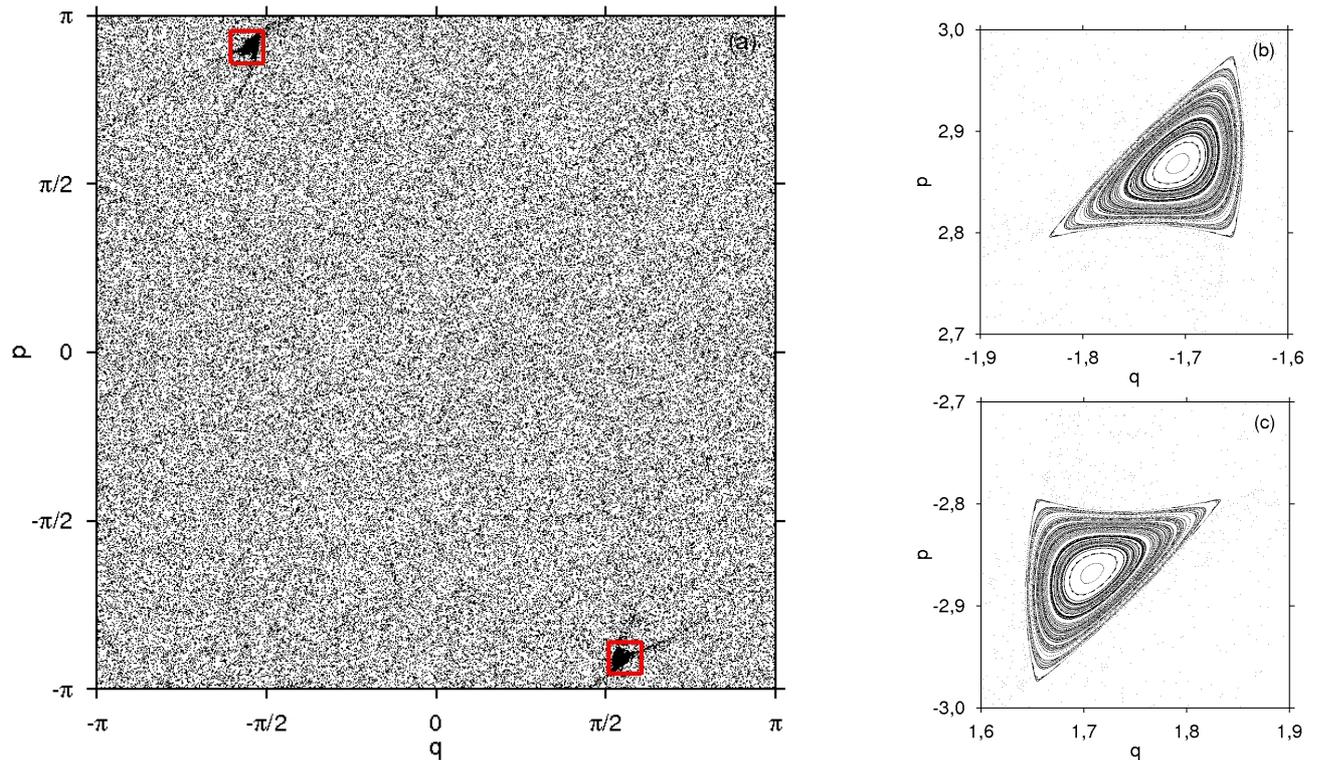


Figura 22: (a) Espaço de fases do mapa padrão [Eqs. (1.1)] com o parâmetro de não-linearidade fixado em $K = 5,79$. As figuras (b) e (c) são ampliações referentes aos quadrados feitos em torno das duas pequenas ilhas de regularidade superior e inferior, respectivamente, que aparecem em (a).

$N = 1$ ou $d = 2$, quando aumentamos sistematicamente a dimensão do espaço de fases, considerando $d \geq 4$? E mais importante do que isso, como quantificar as trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas, semelhantes às ilhas no caso de $d = 2$, apresentadas por sistemas conservativos de alta dimensão³? Deste modo, o objetivo deste Capítulo resume-se a propor respostas e argumentos que clarifiquem o que acontece com o efeito *stickiness* em sistemas de alta dimensão. Tais questões foram respondidas parcialmente através de investigações relacionadas a pequenas mudanças ou flutuações na distribuição de probabilidades do espectro de Lyapunov a tempo finito (ELTF). Estas flutuações estatísticas foram caracterizadas via quatro quantidades estatísticas: **a.)** o número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável P_{λ_n} ; **b.)** a variância σ ; **c.)** a assimetria κ_3 e **d.)** a curtose κ_4 . As três últimas quantidades foram aplicadas na investigação da dinâmica do mapa de Chirikov-Taylor, através das distribuições dos expoentes de estabilidade a tempo finito utilizadas para detecção de ilhas de regularidade, conforme apresentado pela Ref. [75], e estudar flutuações na média dos ELTFs para trajetórias específicas e para a correspondente entropia de Kolmogorov-Sinai na Ref. [99].

³Lembrando que para sistemas de dimensão $d \geq 4$ (exceto para alguns bilhares), as informações apresentadas pela Fig. 22, não poderão ser obtidas através de seções de Poincaré, pois não há como construí-las. Tais sistemas podem apresentar difusão de Arnold, devido as curvas KAM não dividirem o espaço de fases em conjuntos de volumes fechados [5], como acontece quando $d = 2$.

5.1.1 **Mapa Padrão ($N = 1$ e $d = 2$) e Espectro de Lyapunov a Tempo Finito**

Inicialmente, investigamos a existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas no espaço de fases do mapa padrão, dado pela Eq. (1.1), para diferentes valores do parâmetro de não-linearidade (K), através do espectro de Lyapunov a tempo finito. O mapa padrão é um mapa simplético cujo espaço de fases é bidimensional ($d = 2$). Neste caso o espectro de Lyapunov a tempo finito é composto por dois expoentes: um positivo e um negativo, relacionados a uma direção dilatante e a outra direção contraente, respectivamente, cuja soma destes sempre deve ser nula. Visto que existe esta propriedade de simetria entre os ELTFs podemos utilizar apenas o positivo. Lembrando que a discussão do procedimento utilizado para calcular o espectro de Lyapunov a tempo finito é apresentado e discutido no Capítulo 2 desta Tese. Entretanto, resumidamente, o espectro de Lyapunov a tempo finito pode ser determinado através da equação

$$\lambda_n^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \ln \|\mathbb{J}(\mathbf{x}, n) \mathbf{w}_i(\mathbf{x})\|, \quad (5.1)$$

onde n é uma variável temporal discreta, $\mathbb{J}(\mathbf{x}, n) = J(\mathbf{x}_{n-1}) \cdots J(\mathbf{x}_1) J(\mathbf{x}_0)$ com $J(\mathbf{x}_j)$ ($j = 0, \dots, n-1$) são as matrizes Jacobianas calculadas em cada iteração e $\mathbf{w}_i(\mathbf{x})$ representando um vetor unitário apontando para i -ésima direção instável. Lembrando ainda que estes vetores devem ser ortonormalizados sucessivamente ao longo da trajetória para que seus valores não tendam para o infinito após relativamente poucas iterações.

A Fig. 23a apresenta a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos, $P_n(\lambda_n, K)$, como função do parâmetro K que é incrementado por um fator $\Delta K = 10^{-2}$. Para construir $P_n(\lambda_n, K)$ utilizamos 400 condições iniciais para cada K , escolhidas aleatoriamente no espaço de fases do sistema e iteradas até tempos de $n = 10^7$. Em outras palavras, para cada condição inicial obtivemos λ_n , resultante da média temporal dos expoentes de Lyapunov locais calculados ao longo de cada trajetória. Todas as simulações numéricas executadas mostram que embora os ELTFs sejam determinados para tempos bastante longos, eles ainda dependem das condições iniciais escolhidas quando houverem trajetórias aprisionadas. Observando a Fig. 23a nota-se que as cores mudam de claras para escuras com o aumento de $P_n(\lambda_n, K)$. Os pontos cinzas abaixo da superfície principal estão relacionados aos expoentes de Lyapunov a tempo finito resultantes de trajetórias caóticas que foram aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas. Para estas trajetórias aprisionadas os expoentes de Lyapunov a tempo finito locais decrescem e conseqüentemente ao final das iterações λ_n também decresce. Este comportamento fornece informações qualitativas a respeito dos valores de K onde existem trajetórias aprisionadas, que serão quantificadas nas próximas Seções. Se, entretanto, observarmos o valor médio dos ELTFs apresentado na Fig. 23b, notaremos que para baixos valores de K existem pequenas oscilações em seu valor, porém sem nenhuma riqueza quantitativa. Baseados nesta discussão, definiremos a seguir, as quatro quantidades estatísticas utilizadas na caracterização quantitativa

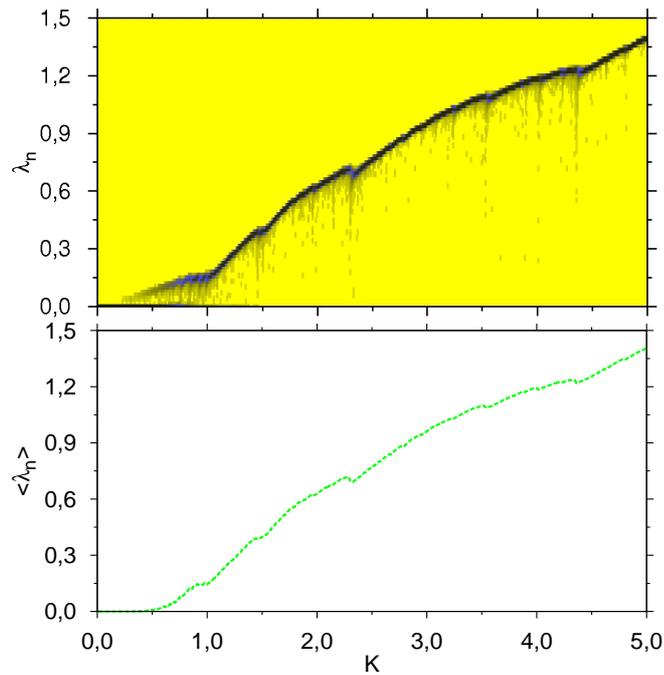


Figura 23: (a) Distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito $P_n(\lambda_n, K)$ calculada para 400 trajetórias iteradas até $n = 10^7$. Com o aumento de $P_n(\lambda_n, K)$ as cores mudam de claras para escuras (cinza sobre amarelo e azul para preto). (b) O correspondente valor médio $\langle \lambda_n \rangle$.

do aprisionamento de trajetórias caóticas.

5.1.2 Caracterização Quantitativa das Distribuições dos ELTFs

Na Fig. 23 pode-se observar claramente que existem certas “anomalias” na distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, para determinados valores de K : pontos escuros abaixo da curva principal na Fig. 23a, consequência da diminuição no valor dos ELTFs e pequenas oscilações no valor médio dos ELTFs, conforme apresentado na Fig. 23b. Por outro lado, a utilização das distribuições dos ELTFs não é a forma mais conveniente de quantificar o efeito de aprisionamento de trajetórias caóticas por quase-armadilhas dinâmicas. Por este motivo, analisamos estas distribuições através de quatro quantidades estatísticas, que apresentam resultados fundamentalmente mais satisfatórios:

- a.) o número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, \mathcal{P}_{λ_n} , é definido nas Refs. [41, 49, 48, 52], da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial P_n(\lambda_n, K)}{\partial \lambda_n} \right|_{\lambda_n = \lambda_n^p} = 0, \quad (5.2)$$

ou seja, ele é o valor de máximo de $P_n(\lambda_n, K)$, para cada valor de K da Fig. 23. Se $\mathcal{P}_{\lambda_n}(K) \rightarrow 1$, normalizado pelo número de condições iniciais, todos os ELTFs obtidos a partir do *ensemble* de condições iniciais utilizadas são “iguais”, dentro de uma precisão

igual a 10^{-3} . Especificamente neste caso os ELTFs tendem para o que chamamos de expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, denotado por λ_n^p . Neste contexto, na presença de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas teremos $\mathcal{P}_{\lambda_n}(K) < 1$ (veja Fig. 24a). Por outro lado, esperamos que para sistemas totalmente caóticos e considerados longos intervalos de tempo $\mathcal{P}_{\lambda_n}(K) \sim 1$, conforme apresentado na Fig. 24b.

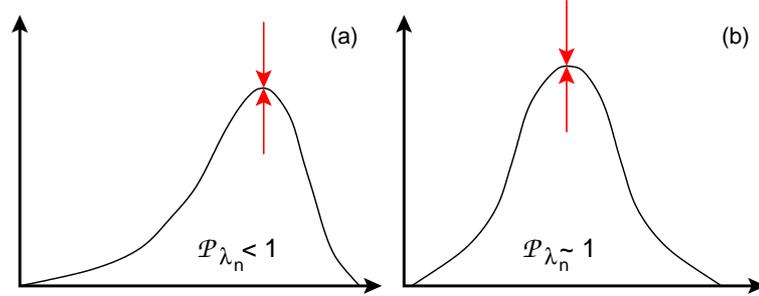


Figura 24: Representação esquemática para os casos quanto (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}(K) < 1$ e (b) $\mathcal{P}_{\lambda_n}(K) \simeq 1$.

b.) A variância é definida como

$$\tilde{\sigma} = \langle (\lambda_n - \langle \lambda_n \rangle)^2 \rangle, \quad (5.3)$$

representando o segundo cumulante da distribuição dos ELTFs definida em termos do valor médio do expoente de Lyapunov a tempo finito (veja Fig. 25a e b). Ela é uma ferramenta amplamente utilizada para caracterizar transporte em sistemas dinâmicos. A existência de trajetórias aprisionadas acarreta no aumento do valor da variância, pois ocorre o aparecimento de caudas relativamente “gordas” nas distribuições. Seguindo o método proposto por Holger Kantz e Peter Grassberger na Ref. [51], analisamos o comportamento da variância relativa determinada através de $\sigma = \tilde{\sigma} / \langle \lambda_n \rangle^2$: mais apropriada no estudo de pequenas flutuações na magnitude dos ELTFs. Consequentemente, assim pode-se detectar pequenas diferenças relativas em cada dimensão, relacionadas a respectiva distribuição dos ELTFs.

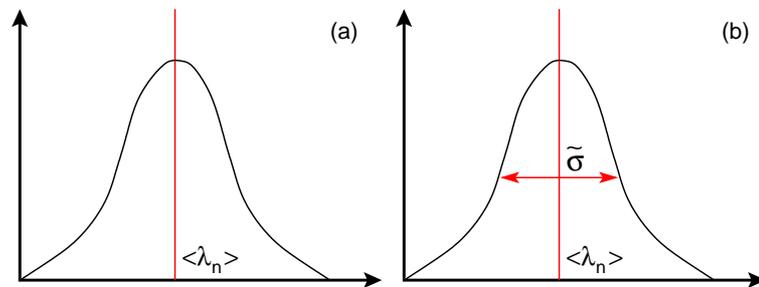


Figura 25: Representação esquemática da (a) localização do valor médio dos ELTFs e (b) da variância na distribuição dos ELTFs.

c.) A assimetria é definida como

$$\kappa_3 = \frac{\langle (\lambda_n - \langle \lambda_n \rangle)^3 \rangle}{\tilde{\sigma}^{3/2}}, \quad (5.4)$$

sendo o terceiro cumulante da distribuição dos ELTFs e responsável pela quantificação da assimetria da distribuição em torno seu valor médio. Quando $\kappa_3 = 0$ a distribuição pode ser considerada normal. Em contrapartida, na presença de trajetórias aprisionadas o valor do ELTF diminui, e com isso, a distribuição dos ELTFs apresenta uma cauda para o lado esquerdo (veja Fig. 26a): deste modo, a assimetria da distribuição resulta num $\kappa_3 < 0$. Por outro lado, se as distribuições apresentarem caudas para direita a assimetria será positiva, $\kappa_3 > 0$, conforme apresentado pela Fig. 26b.

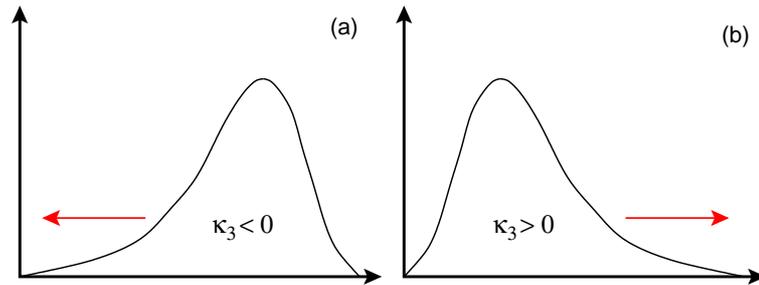


Figura 26: Representação esquemática da assimetria (a) negativa e (b) positiva.

d.) A curtose ou quarto cumulante é definida como

$$\kappa_4 = \frac{\langle (\lambda_n - \langle \lambda_n \rangle)^4 \rangle}{\tilde{\sigma}^2} - 3. \quad (5.5)$$

Ela é a responsável pela quantificação do formato da distribuição: quando $\kappa_4 > 0$ a distribuição é mais achatada do que a distribuição normal ($\kappa_4 = 0$), conforme Fig. 27a, enquanto que $\kappa_4 < 0$ sugere que a distribuição seja mais pontiaguda do que no caso normal (veja Fig. 27b).

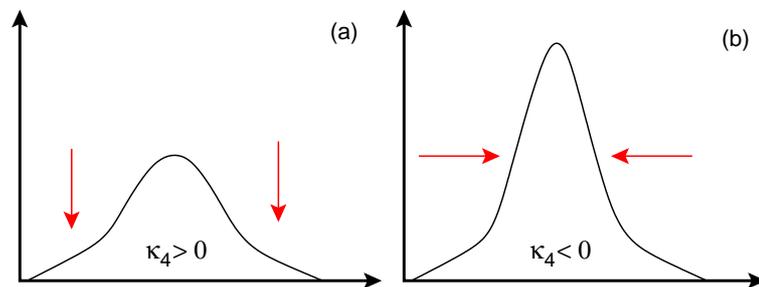


Figura 27: Representação esquemática da curtose (a) positiva e (b) negativa.

5.1.3 *Análise Quantitativa da Distribuição dos ELTFs do Mapa Padrão*

Antes de investigar a dinâmica de uma rede de mapas simpléticos, iniciamos analisando quantitativamente as trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas no espaço de fases ($d = 2$), do mapa padrão como uma função de K . Investigamos numericamente 201 valores de K

no intervalo de $K = [7, 0; 9, 0]$, incrementado pelo fator $\Delta K = 10^{-2}$. Para cada valor de K , foram utilizadas 10^4 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $[-\pi; \pi]$ com as quais obtivemos 10^4 expoentes de Lyapunov a tempo finito e construímos as suas respectivas distribuições. Como

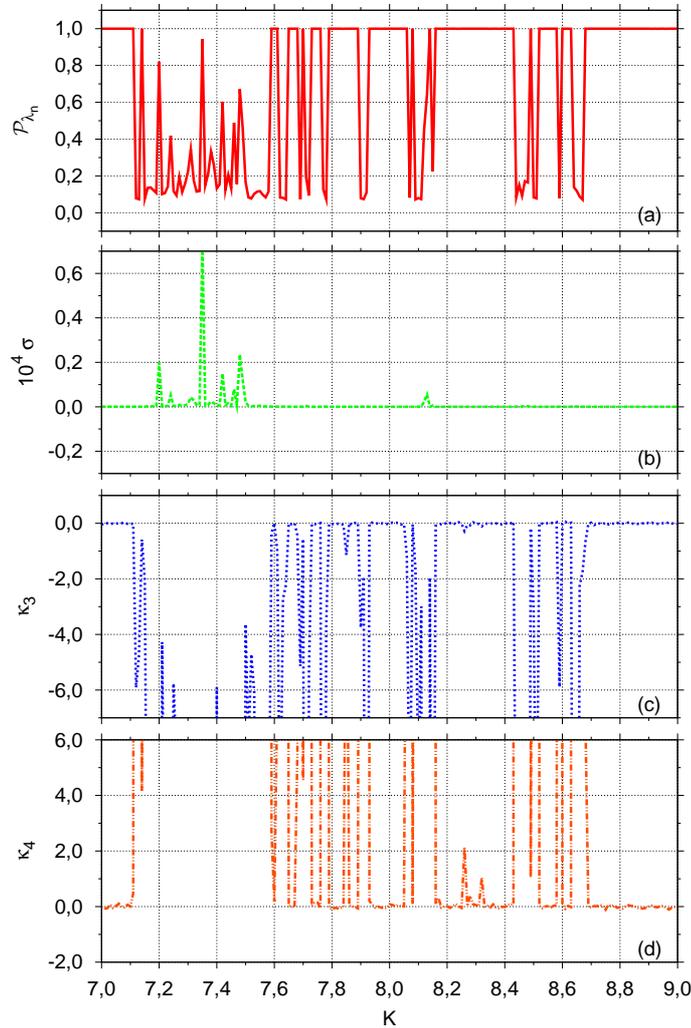


Figura 28: *Análise estatística da distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito calculados para o mapa padrão (1.1), considerando o parâmetro de não-linearidade no intervalo $K = [7, 0; 9, 0]$. Estas análises foram feitas através das quatro quantidades estatísticas definidas anteriormente: (a) \mathcal{P}_{λ_n} , (b) σ , (c) κ_3 e (d) κ_4 , todas calculadas em função de K .*

é possível observar na Fig. 28a, a quantidade \mathcal{P}_{λ_n} apresenta vários mínimos, onde existem diferentes quantidades de trajetórias aprisionadas. Comparando \mathcal{P}_{λ_n} com a Fig. 28b, percebemos que a variância, σ , tem uma sequência de máximos apenas para valores de K no intervalo $K = [7, 15; 7, 55]$ e em torno de $K \sim 8, 12$, ou seja, a variância não é um quantificador suficientemente sensível de trajetórias aprisionadas. Por outro lado, a assimetria (Fig. 28c) e a curtose (Fig. 28d) detectam a existência de trajetórias aprisionadas para grande parte dos valores de K em que este comportamento é observado na quantidade \mathcal{P}_{λ_n} . Para quase todos os mínimos de \mathcal{P}_{λ_n} , percebemos que a assimetria (Fig. 28c) é negativa. Isso implica que as trajetórias aprisionadas induzem o aparecimento de uma cauda para esquerda da distribuição dos ELTFs. Em outras palavras, a cauda para o lado esquerdo da distribuição é maior que a cauda do lado direito.

Também para quase todos os mínimos de \mathcal{P}_{λ_n} a curtose κ_4 (Fig. 28d) tem um máximo. Este comportamento é esperado, pois quando $\mathcal{P}_{\lambda_n} < 1$, teremos uma larga distribuição dos ELTFs e consequentemente, uma distribuição relativamente achatada (grandes valores de κ_4).

De acordo com os resultados deste caso ($d = 2$), \mathcal{P}_{λ_n} , e os cumulantes κ_3 e κ_4 parecem ser ferramentas bastante eficientes quando utilizadas na detecção de trajetórias caóticas aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas. De forma mais específica κ_3 e κ_4 são mais sensíveis a existência deste tipo de estrutura, enquanto \mathcal{P}_{λ_n} é menos sensível, porém em sistemas de alta dimensão esta quantidade determinará para quais valores críticos K ocorrem mudanças na dinâmica do sistema em questão. A provável razão que faz com que κ_3 e κ_4 sejam mais eficientes na caracterização de trajetórias aprisionadas do que σ e \mathcal{P}_{λ_n} pode estar no fato que eles estejam diretamente relacionados as caudas das distribuições que contém as informações sobre o efeito *stickiness*.

5.2 Rede de Mapas Simpléticos Acoplados

Redes de mapas acoplados representam sistemas bastante convenientes para realização de simulações numéricas utilizadas no estudo do efeito de trajetórias aprisionadas por estruturas de regularidade em altas dimensões. Baseados nesta afirmação, consideramos uma rede unidimensional composta por N partículas cuja dinâmica de cada partícula seja descrita por duas variáveis de estado, similarmente ao mapa padrão, Eq. (1.1), onde o tempo n é uma variável discreta: $p_n^{(i)}$ e $q_n^{(i)}$, sendo que $i = 1, \dots, N$, refere-se a cada sítio da rede que pode ser escrita como

$$\begin{cases} p_{n+1}^{(i)} = p_n^{(i)} + K \sin(q_n^{(i+1)} - q_n^{(i)}) & \text{mod } 2\pi, \\ q_{n+1}^{(i)} = q_n^{(i)} + p_{n+1}^{(i)} & \text{mod } 2\pi, \end{cases} \quad (5.6)$$

A intensidade do acoplamento e não-linearidade da rede são determinados pela constante K . O acoplamento entre os mapas é do tipo próximo (futuro) vizinho. Na composição desta rede consideramos condições periódicas de contorno: $p_{N+1} = p_1$ e $q_{N+1} = q_1$ (veja Fig. 29). Este modelo é invariante perante uma translação na coordenada q .

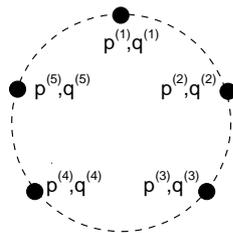


Figura 29: Representação esquemática de uma rede composta por 5 mapas acoplados.

Para $N = 2$ esta rede de mapas é simplética e Hamiltoniana, onde o momento total é

uma quantidade conservada, enquanto que para $N > 2$ o sistema é apenas simplético (pois obedece a condição simplética) e o momento total não é mais uma quantidade conservada, devido a forma do acoplamento. Independente do número de sítios da rede, o espectro de Lyapunov a tempo finito sempre apresenta dois expoentes nulos. Os expoentes diferentes de zero serão antissimétricos, sendo suficiente então, estudar apenas aqueles que sejam positivos. Em outras palavras, serão apenas discutidos os resultados das análises estatísticas destes expoentes ($\lambda_n > 0$). Os principais resultados da investigação sistemática deste sistema será apresentada a seguir.

5.2.1 $N = 2$ ($d = 4$): Caso Separável

Neste caso, consideramos uma rede composta por dois mapas (ou partículas) acoplados ($N = 2$), cuja dimensão do espaço de fases é $d = 4$. O espectro de Lyapunov é formado por quatro expoentes, sendo dois nulos, e dois antissimétricos. Na investigação numérica desta rede calculamos o espectro de Lyapunov utilizando 10^4 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $[-\pi; \pi]$ para cada valor de K . Os mapas que compõem a rede foram iterados para tempos iguais a $n = 10^7$. Para este caso as Eqs. (5.6) se desacoplam nas coordenadas do centro de massas e coordenadas relativas. O mapa em coordenadas relativas é exatamente igual ao mapa padrão, porém com parâmetro de não-linearidade igual a $2K$. Deste modo, na Fig. 30 pode-se observar o crescimento linear dos valores médios dos expoente de Lyapunov a tempo finito positivos, $\langle \lambda_n \rangle$ sobrepostos, para $N = 1$ (linha pontilhada) referente ao mapa padrão no intervalo $2K = [14, 0; 18, 0]$ e $N = 2$ (linha tracejada) conforme o parâmetro de não-linearidade K é incrementado. Ambas as curvas são idênticas.

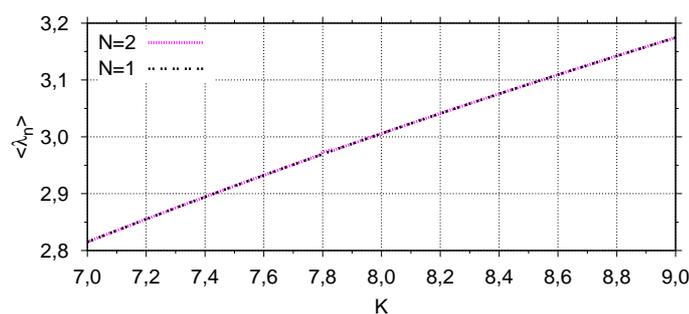


Figura 30: Valores médios dos expoentes de Lyapunov a tempo finito $\langle \lambda_n \rangle$ sobrepostos, para $N = 1$ (linha clara) e $N = 2$ (linha escura) mapas acoplados.

A Fig. 31, apresenta uma comparação entre as quatro quantidades estatísticas utilizadas na caracterização do efeito *stickiness* na rede de mapas simpléticos com $d = 4$. A presença de mínimos no número de ocorrências do ELTF mais provável \mathcal{P}_{λ_n} (Fig. 31a), na assimetria κ_3 (Fig. 31c), e de máximos na variância σ (Fig. 31b) e na curtose κ_4 (Fig. 31d) sugerem fortemente a existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas. Deste modo, espera-se

que para os correspondentes valores de K do mapa padrão também existam várias trajetórias aprisionadas.

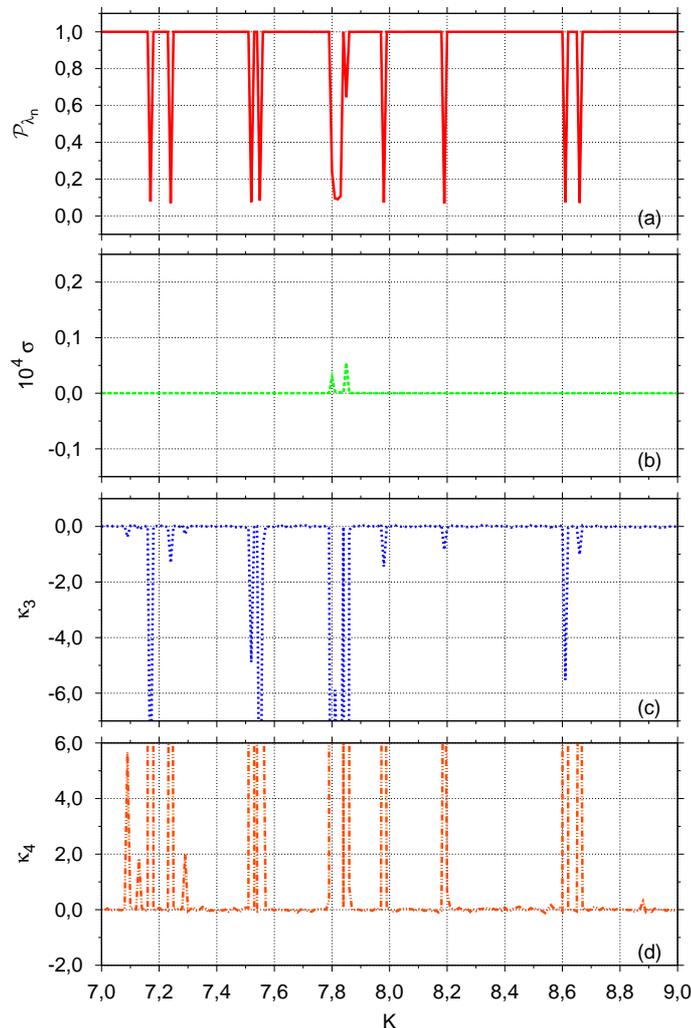


Figura 31: Comparação entre (a) \mathcal{P}_{λ_n} , (b) σ , (c) κ_3 e (d) κ_4 : todas as quantidades calculadas em função de K , para $N = 2$ ($d = 4$).

5.2.2 $N = 3$ ($d = 6$): Sensibilidade a Existência de Trajetórias Aprisionadas

Para a rede composta por três mapas acoplados, ou seja, $N = 3$ ($d = 6$) o espectro de Lyapunov a tempo finito apresenta seis expoentes: dois positivos, dois iguais a zero e dois negativos. As análises estatísticas foram aplicadas às distribuições dos dois expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos que obedecem a ordem $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)}$. Para $N = 3$ o intervalo $K = [7, 0; 9, 0]$ não apresenta nenhum comportamento relativo a presença de trajetórias aprisionadas, e consequentemente, a existência de quase-armadilhas dinâmicas, que seja detectado pela distribuição dos ELTFs. Por este motivo, optamos por estudar o intervalo $K = [0, 01; 2, 0]$, que inicialmente é bastante próximo a $K = 0$, onde o sistema é integrável. Todas as simulações numéricas realizadas na construção das distribuições dos ELTFs, para os diferentes valores de K , foram

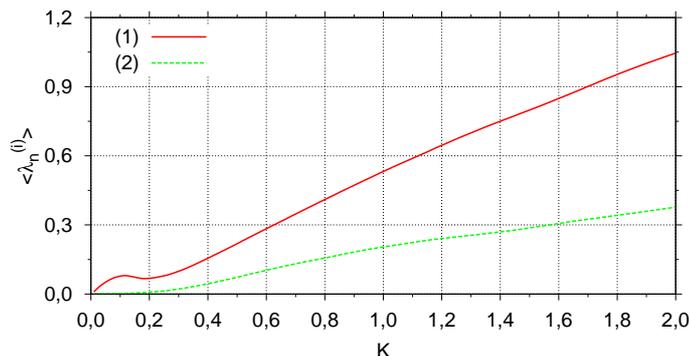


Figura 32: Valor médio dos dois expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos: $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)}$ para $N = 3$.

executadas utilizando-se 10^4 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $[-\pi; \pi]$ e iteradas até tempos de $n = 10^7$. A Fig. 32 apresenta o valor médio do primeiro (linha pontilhada) e do segundo (linha tracejada) ELTF como função do parâmetro de não-linearidade K . Ambos os valores médios, $\langle \lambda_n \rangle$, dos ELTFs aumentam com K , embora que $\lambda_n^{(1)}$ cresça mais rapidamente do que $\lambda_n^{(2)}$ e ainda apresenta um mínimo próximo a $K \sim 0,20$: justamente em torno deste valor $\lambda_n^{(2)}$ torna-se maior do que zero.

Na Fig. 33 pode-se observar o resultado da análise das distribuições referentes aos dois expoentes de Lyapunov positivos através das quantidades estatísticas (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(i)}$, (b) $\sigma^{(i)}$, (c) $\kappa_3^{(i)}$ e (d) $\kappa_4^{(i)}$: $\lambda_n^{(i=1)}$ (linha contínua) e $\lambda_n^{(i=2)}$ (linha tracejada). Comparando as estruturas apresentadas pelas distribuições constatamos que ambas detectam a existência de trajetórias aprisionadas para $0,10 \lesssim K \lesssim 0,70$. Nesta região o valor da assimetria é $\kappa_3^{(i)} \sim -50$ para $i = 1$ e $\kappa_3^{(i)} \sim -30$ para $i = 2$. Por outro lado, o valor máximo da curtose é $\kappa_4^{(i)} \sim 4000$ para $i = 1$ e $\kappa_4^{(i)} \sim 2000$ para $i = 2$. A quantidade $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(2)}$ (linha tracejada na Fig. 33a) na região $K \lesssim 0,10$ é igual a 1 devido a todas as condições iniciais resultarem no mesmo expoente de Lyapunov a tempo finito $\lambda_n^{(2)} \sim 0,0$. Apesar disso $\kappa_3^{(2)}$ e $\kappa_4^{(2)}$ mostram que a distribuição em torno a $\lambda_n^{(2)} \sim 0,0$ não apresenta uma forma Gaussiana. No intervalo de $K = 0,01 \rightarrow 0,10$ a distribuição é ligeiramente alterada: assimétrica para direita $\kappa_3^{(2)}(0,01) \sim 1$ e então para esquerda $\kappa_3^{(2)}(0,10) \sim -3$.

A curtose mostra que a distribuição em torno de $K \sim 0,01$ é achatada ($\kappa_4^{(2)} > -3$), mas se aproxima de uma distribuição normal ($\kappa_4^{(2)} = 0$) em $K \sim 0,05$. Um comportamento semelhante ocorre quando analisamos $\kappa_3^{(1)}$ e $\kappa_4^{(1)}$ relacionados ao maior ELTF, $\lambda_n^{(1)}$. Nos resultados referentes a ambos os expoentes de Lyapunov (linha contínua e tracejada) a variância relativa $\sigma^{(i)}$ ($i = 1, 2$) apresenta um comportamento relevante apenas para pequenos valores de K , onde, apesar disso, ambas curvas estão sobrepostas indicando que existe uma certa semelhança entre a largura das distribuições.

Para $K \gtrsim 0,70$ a distribuição relacionada a $\lambda_n^{(1)}$ (linha contínua) detecta a presença de trajetórias aprisionadas em $K \sim 0,83; 1,32$ e $\sim 1,40$ enquanto que $\lambda_n^{(2)}$ detecta este tipo de

dinâmica apenas para $K \sim 0,83$ e $\sim 1,40$ (detecção feita somente por $\kappa_4^{(2)}$). Intuitivamente, o principal resultado esperado refere-se ao fato que quando o parâmetro de não-linearidade é aumentado, a direção mais instável (relacionada ao maior ELTF $\lambda_n^{(1)}$) seja mais eficaz na detecção de trajetórias aprisionadas. Se compararmos atentamente $\lambda_n^{(1)}$ e $\lambda_n^{(2)}$ na Fig. 33a-d veremos que a afirmação da frase anterior condiz com os comportamentos observados em $K \sim 0,85$ e até mesmo em $K \sim 1,40$, onde $\lambda_n^{(1)}$ apresenta indícios da existência de trajetórias aprisionadas.

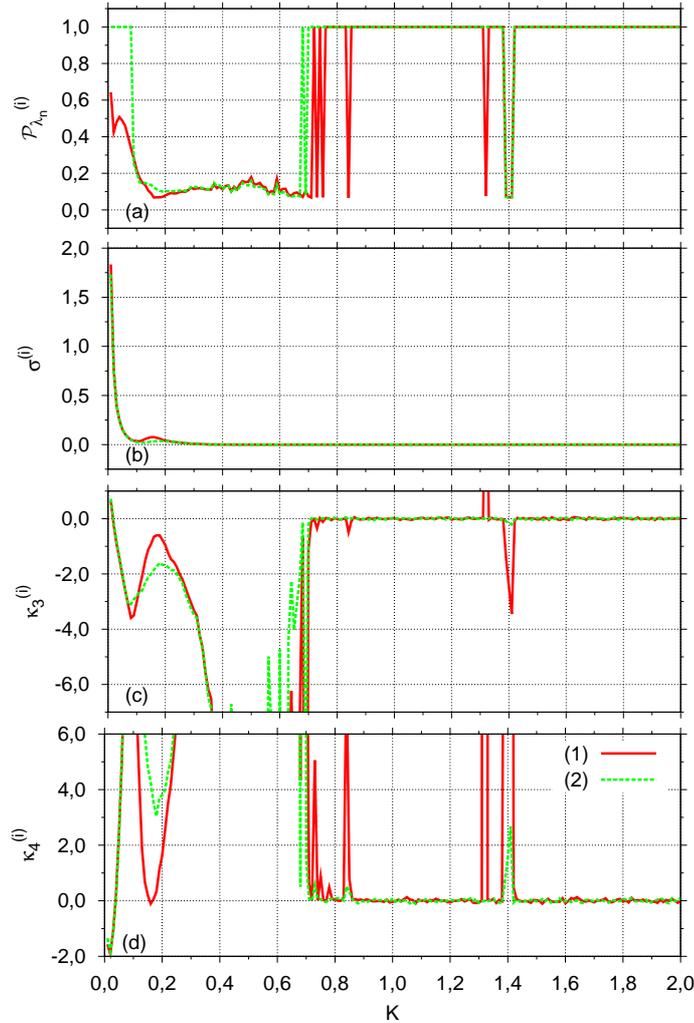


Figura 33: Comparação entre (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(i)}$, (b) $\sigma^{(i)}$, (c) $\kappa_3^{(i)}$ e (d) $\kappa_4^{(i)}$, todas como função de K no intervalo $K = [0,01; 2,0]$ para $N = 3$. O índice i pode ser igual a: $i = 1$ (linha contínua) ou $i = 2$ (linha tracejada) referindo-se a $\lambda_n^{(1)}$ e $\lambda_n^{(2)}$, respectivamente.

5.2.3 $N = 5$ ($d = 10$): Definição do Parâmetro Crítico de Não-Linearidade K_d

Neste caso estudamos a dinâmica de cinco mapas acoplados $N = 5$ ($d = 10$). O espectro de Lyapunov para esta configuração de rede é composto por quatro expoentes positivos, dois iguais a zero e quatro negativos. Em todas as simulações numéricas realizadas foram utilizadas 10^4 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $[-\pi; \pi]$, para cada K investigado, e iteradas até tempos de $n = 10^7$. A Fig. 34 apresenta o valor médio dos quatro expoentes de Lyapunov

a tempo finito positivos que obedecem a seguinte ordem: $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)} > \lambda_n^{(3)} > \lambda_n^{(4)}$, como função do parâmetro de não-linearidade compreendido no intervalo $K = [0, 01; 1, 0]$. Para $K \lesssim 0,15$ os expoentes médios $\langle \lambda_n^{(3)} \rangle$ e $\langle \lambda_n^{(4)} \rangle$ são “quase” nulos, enquanto que $\langle \lambda_n^{(1)} \rangle$ cresce rapidamente no intervalo de $K = 0,01 \rightarrow 0,05$ e então continua crescendo, porém lentamente de $K = 0,05 \rightarrow 0,15$. Para $K \gtrsim 0,20$ todos os expoentes de Lyapunov a tempo finito crescem linearmente, cada qual com uma determinada inclinação.

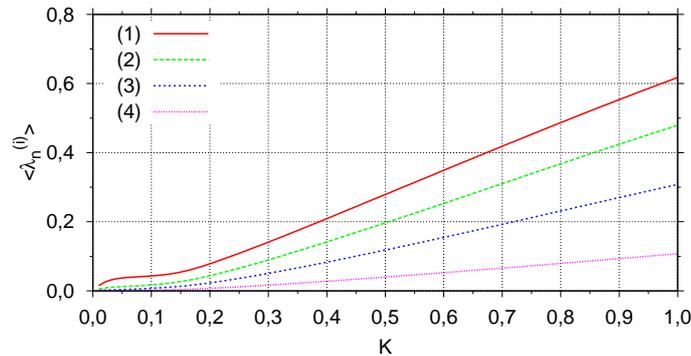


Figura 34: Valor médio dos quatro expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos: $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)} > \lambda_n^{(3)} > \lambda_n^{(4)}$ para $N = 5$.

A Fig. 35, apresenta as análises estatísticas executadas a partir dos quatro expoentes de Lyapunov positivos deste caso. Para $K \gtrsim 0,30$ as distribuições de todos os expoentes de Lyapunov assemelham-se a distribuições normais (Gaussianas): resultados esperados para sistemas caóticos (totalmente ergódicos) contrastando com os casos de $N = 1, 2, 3$ discutidos anteriormente, em que existem trajetórias aprisionadas também para valores relativamente grandes do parâmetro de não-linearidade. Deste modo, existe uma transição evidente da dinâmica, onde regiões regulares e caóticas coexistem, para a dinâmica totalmente caótica em $K_c \sim 0,30$ **simultaneamente** em todas as direções instáveis. Por outro lado, todas as quantidades estatísticas utilizadas na análise das distribuições dos ELTFs detectaram a existência de trajetórias aprisionadas para $K \lesssim 0,25$. Acima do valor crítico $K \sim 0,13$ os quatro indicadores da existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas apresentam um comportamento similar para todos os ELTFs, ou seja, independentemente das direções instáveis. Por exemplo, as distribuições de todos os expoentes de Lyapunov a tempo finito apresentam uma pequena cauda (assimetria para a esquerda, $\kappa_3 \sim -0,75$) mas sem nenhum achatamento ($\kappa_4 \sim 0$) para $K = 0,13$; e uma cauda maior ($\kappa_3 \sim -1,50$) com um pequeno achatamento ($\kappa_4 \sim 3,0$) para $K = 0,20$. O valor crítico $K_d \sim 0,13$ é o ponto onde \mathcal{P}_{λ_n} detecta um tipo de “movimento comum”, que será descrito nos próximos parágrafos, através da distribuição do último (menor) ELTF positivo, conforme pode ser visto na Fig. 35a. Este valor também pode ser determinado, de forma menos precisa, através do valor médio dos ELTFs como função de K : aproximadamente em K_d , o $\langle \lambda_n^{(i)} \rangle$ começa a crescer linearmente com K (veja Fig. 34).

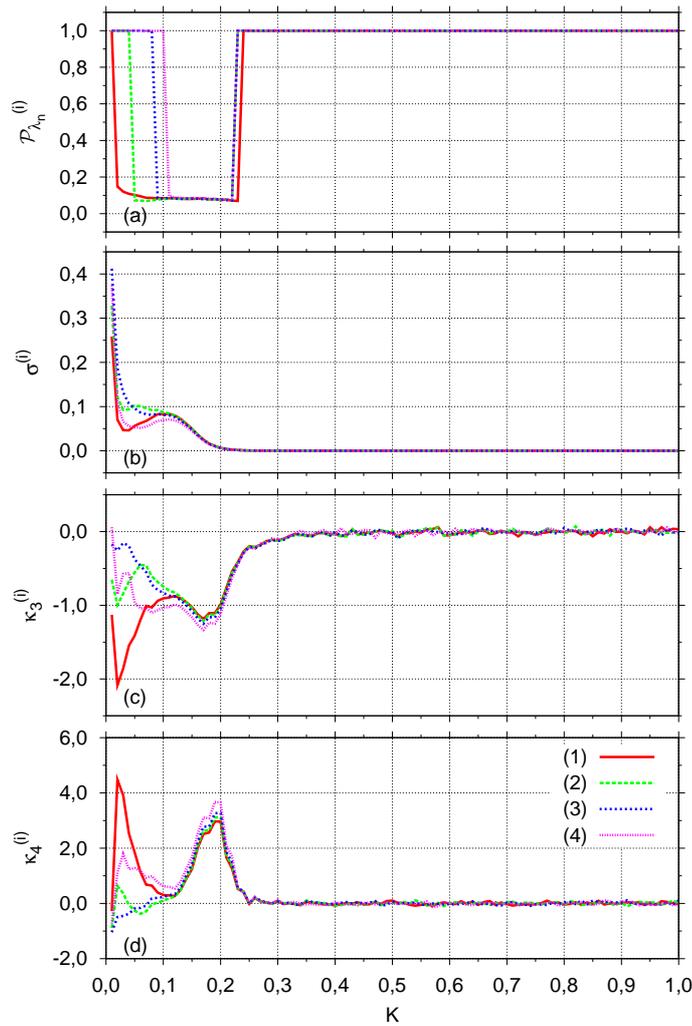


Figura 35: Quantidades (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(i)}$, (b) $\sigma^{(i)}$, (c) $\kappa_3^{(i)}$ e (d) $\kappa_4^{(i)}$ como função do parâmetro de não-linearidade no intervalo $K = [0, 01; 1, 0]$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com cinco mapas acoplados $N = 5$ ($d = 10$).

Observando as análises apresentadas na Fig. 35, constatamos que existem diferenças nas distribuições dos ELTFs apenas para $K < K_d \sim 0,13$, ou seja, para valores de K menores do que aqueles em que o “movimento comum” começa a ser detectado. Inicialmente ou de forma intuitiva, podemos afirmar que o “movimento comum” é uma consequência direta da existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas semelhantes às ilhas de regularidade presentes no espaço de fases do mapa padrão, sugerindo que possam existir regiões invariantes no espaço de fases que neste caso é composto por $d = 10$ dimensões. Por outro lado no intervalo $K_d < K < K_c$, o “movimento comum” afeta da mesma forma todas as direções instáveis fazendo com que haja uma semelhança quase que idêntica entre as distribuições dos ELTFs. Finalmente, quando o regime totalmente caótico for alcançado ($K > K_c$), todas as direções instáveis são afetadas proporcionalmente entre si. Para ilustrar esta afirmação pode-se observar a Fig. 36, que apresenta a evolução temporal de $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) para uma trajetória típica, cuja condição inicial foi escolhida no centro do espaço de fases, para três diferentes regiões, determinadas por K . A Fig. 36a construída para $K = 0,60 > K_c$ mostra

o comportamento dos ELTFs onde não foi constatado a existência de “movimento comum”, pois nenhum expoente de Lyapunov tende a zero para pequenos intervalos de tempo. No caso intermediário em que $K_d < K = 0,15 < K_c$, conforme Fig. 36b, é possível observar que para $n = 0,5 \times 10^6$ (veja flecha) todos os quatro expoentes de Lyapunov a tempo finito são iguais a zero, e conseqüentemente, o “movimento comum” ocorre em todas as direções instáveis. Em outras palavras, nos intervalos do parâmetro de não-linearidade onde aparecer o “movimento comum”, os expoentes de Lyapunov locais serão todos aproximadamente iguais a zero. Do ponto de vista físico, o que acontece nas regiões apontadas pelas flechas, é que o momento linear de cada sítio torna-se constante durante o intervalo de tempo em que houver o aprisionamento das trajetórias caóticas pelas quase-armadilhas dinâmicas. Este comportamento é claramente observado na Fig. 37a, onde $p_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) é apresentado como função do tempo, n . Na região onde ocorre o aprisionamento, para $n \sim 0,6 \times 10^6$ (destacadas pelos retângulos), $p_n^{(k)}$ é constante para todos os sítios da rede de mapas simpléticos acoplados.

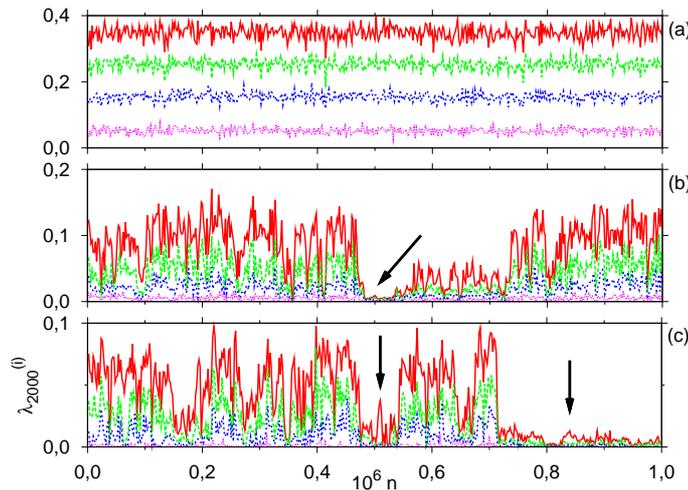


Figura 36: Evolução temporal de $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) para uma condição inicial calculada para a rede de mapas acoplados (5.6) com $N = 5$, e (a) $K = 0,60 > K_c$, (b) $K_d < K = 0,15 < K_c$, (c) $K = 0,05 < K_d$.

O comportamento apresentado e discutido no parágrafo anterior concorda ou suporta a conjectura feita por Claude Froeschlé na Ref. [100] e observada mais tarde numa rede de mapas Hamiltonianos acoplados por Kantz e Grassberger [51], que diz o seguinte: sistemas simpléticos com $N \geq 3$ possuem uma (a energia) ou N constantes de movimento durante o intervalo de tempo em que ocorrer o “movimento comum”. Em outras palavras, considerando esta conjectura quando ocorrer o “movimento comum”, todos os expoentes de Lyapunov a tempo finito devem ser temporariamente muito próximos a zero, conforme observado. Comportamento semelhante também foi observado na Ref. [101], para uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados localmente (primeiros vizinhos). Por outro lado, o “movimento comum” não ocorre na região $K < K_d$, como pode ser observado na Fig. 36c para tempos em torno de $n = 0,5 \times 10^6$ e $n = 0,85 \times 10^6$ (ambos indicados pelas flechas). Todos os expoentes de Lyapunov a tempo finito

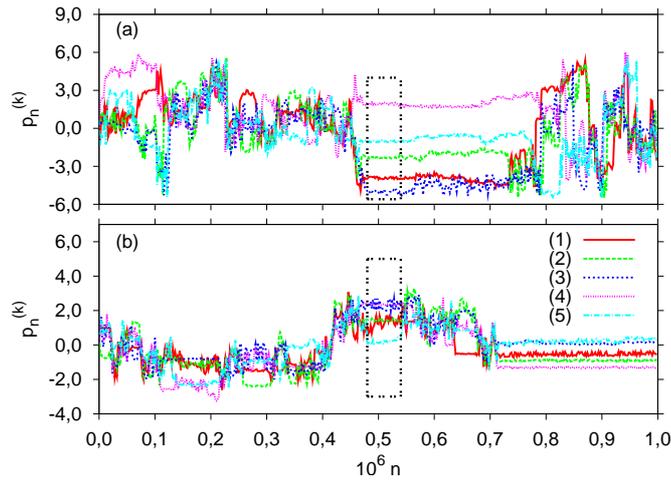


Figura 37: Evolução temporal de $p_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) para a condição inicial utilizada na Fig. 36 para a rede de mapas simpléticos acoplados (5.6), com $N = 5$, e (a) $K_d < K = 0,15 < K_c$ e (b) $K = 0,05 < K_d$. O retângulos desenhados nas figuras (a) e (b) indicam as regiões onde ocorre o “movimento comum”.

são próximos a zero, exceto o maior deles, $\lambda_n^{(1)}$. Neste caso, conforme indicado pelo retângulo localizado em torno de $n \sim 0,5 \times 10^6$, os momentos $p_n^{(1)}$, $p_n^{(3)}$ e $p_n^{(5)}$ não são mais conservados, conforme pode ser observado na Fig. 37b.

5.2.4 $N = 10$ ($d = 20$): Espaço de Fases Mais Ergódico

O último caso estudado trata da rede composta por dez mapas acoplados $N = 10$ ($d = 20$) em que o espectro de Lyapunov é constituído por nove expoentes positivos, dois iguais a zero e nove negativos. Nesta Subsecção novamente analisamos o intervalo de $K = [0,01; 1,0]$ em que obtivemos as distribuições dos ELTFs considerando 10^3 condições iniciais escolhidas aleatoriamente entre $[-\pi; \pi]$ e iteradas até tempos de $n = 10^7$. Na Fig. 38 apresentamos os valores médios dos nove expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos como função de K . Para $K \gtrsim 0,20$ todos eles crescem linearmente sendo que o maior ELTF cresce mais rapidamente do que os outros. Em contrapartida para $K \lesssim 0,20$, a dependência de K é diferente para cada ELTF. Em $K \lesssim 0,10$ quase todos os ELTFs (exceto para $i = 1, 2$) são bastante próximos a zero: basicamente devido a não-linearidade considerada ser muito pequena, e por este motivo, os domínios cuja dinâmica regular ou quase-regular “cubram” quase que totalmente o espaço de fases.

Na Fig. 39, pode-se comparar (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(1)}$, (b) $\sigma^{(i)}$, (c) $\kappa_3^{(i)}$ e (d) $\kappa_4^{(i)}$ para o intervalo $K = [0,01; 1,0]$. Para $K > K_c \sim 0,28$ todas as quantidades indicam que as distribuições dos expoentes de Lyapunov aproximam-se de distribuições normais ou Gaussianas, conforme é esperado para sistemas dinâmicos no regime totalmente caótico. Novamente observamos claramente a transição da dinâmica quase-regular para totalmente caótica em K_c que ocorre simultaneamente

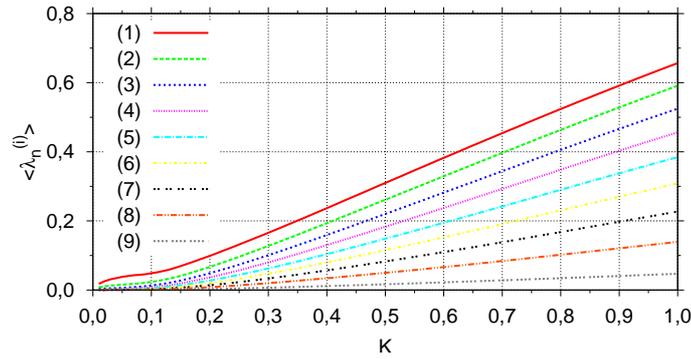


Figura 38: Valor médio dos nove expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos: $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)} > \dots > \lambda_n^{(9)}$ para $N = 10$.

em todas as direções instáveis. Quando $K < K_c$ todas as quantidades estatísticas detectam o “movimento comum”. Neste caso também constatamos que acima do valor crítico $K_d \sim 0,09$ as quatro quantidades tornam-se independentes dos ELTFs. As distribuições dos ELTFs apresentam pequenas caudas para esquerda ou assimetrias ($\kappa_3 \sim 0,75$), porém sem nenhum achatamento ($\kappa_4 \sim 0$) para $K = 0,13$, e uma assimetria ($\kappa_3 \sim -1,50$) e achatamento ($\kappa_4 \sim 3,0$) mais acentuados para $K = 0,20$. O valor crítico $K_d \sim 0,09$ é novamente o ponto exato onde $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(9)}$ detecta o “movimento comum” na distribuição do último (menor) expoente de Lyapunov a tempo finito positivo (veja Fig. 39a). Observamos também que a distribuição dos maiores ELTFs, considerando a direção crescente de $K = 0,01$, é a última a “se juntar ao comportamento coletivo” para $K_d \gtrsim 0,09$, conforme é possível constatar analisando as Figs. 39b-d. Da mesma forma como no caso anterior, estimamos o valor K_d , porém com menor acurácia, a partir do valor médio dos ELTFs como função de K , que nesta região não apresentam um crescimento linear conforme pode ser visualizado na Fig. 38.

Na Fig. 40 novamente apresentamos a evolução temporal de $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1 \rightarrow 9$) para uma trajetória típica em três diferentes regiões de K onde os resultados (Figs. 39) sugerem que ocorram diferentes tipos de movimentos. Quando $K = 0,60 > K_c$ (veja Fig. 40a) não observamos a existência de “movimento comum” e conseqüentemente nenhum ELTF tende a zero, nem mesmo para curtos intervalos de tempo. No caso intermediário $K_d < K = 0,15 < K_c$, conforme a Fig. 40b, existem dois diferentes cenários: em torno de $n = 0,22 \times 10^6$ (veja flechas) o valor de todos os ELTFs é quase zero indicando a existência do “movimento comum” para este caso; para $n = 0,80 \times 10^6$ (veja flecha) por outro lado, oito expoentes de Lyapunov a tempo finito são praticamente iguais a zero, e apenas o maior deles permanece positivo. Este comportamento é observado de forma ainda mais clara na região onde $K < K_d$, conforme apresentado na Fig. 40c. Para intervalos de tempo entre $n = 0,12 \times 10^6$ e $n = 0,18 \times 10^6$ somente $\lambda_n^{(1)}$ pode ser considerado positivo, e os outros oito expoentes de Lyapunov a tempo finito possuem valores muito próximos a zero. Baseados nos resultados das redes compostas por cinco e dez mapas acoplados, podemos afirmar que as principais conclusões obtidas em cada situação podem ser

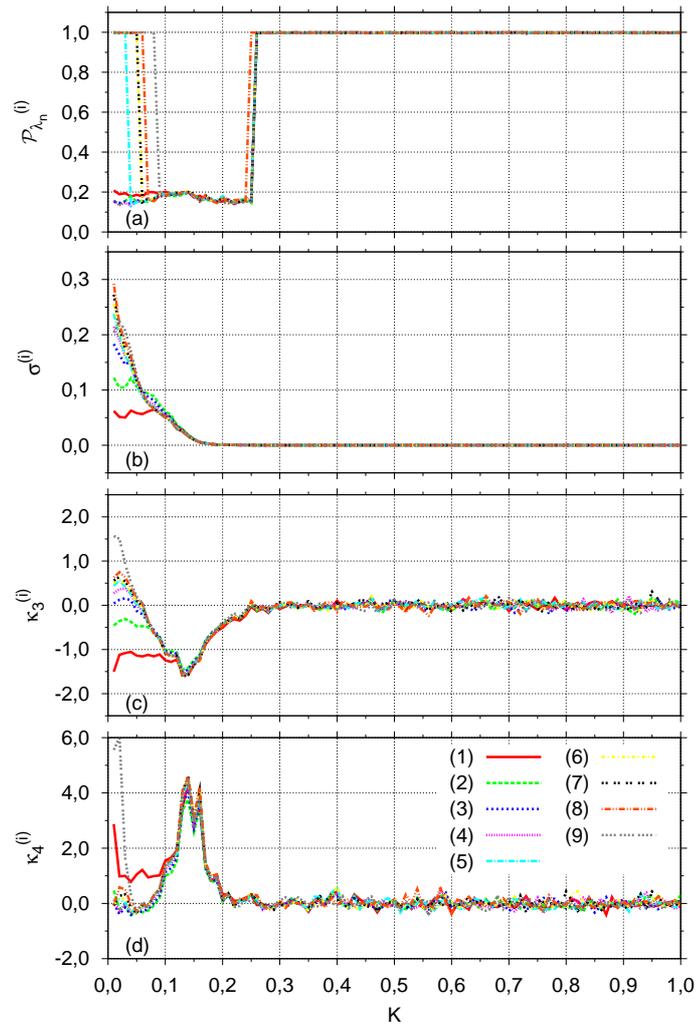


Figura 39: Quantidades (a) $\mathcal{P}_{\lambda_n}^{(i)}$, (b) $\sigma^{(i)}$, (c) $\kappa_3^{(i)}$ e (d) $\kappa_4^{(i)}$ como função do parâmetro de não-linearidade no intervalo $K = [0, 01; 1, 0]$ para $i = 1 \rightarrow 9$ com dez mapas acoplados ($N = 10$).

generalizadas para a mesma rede com diferentes números de sítios.

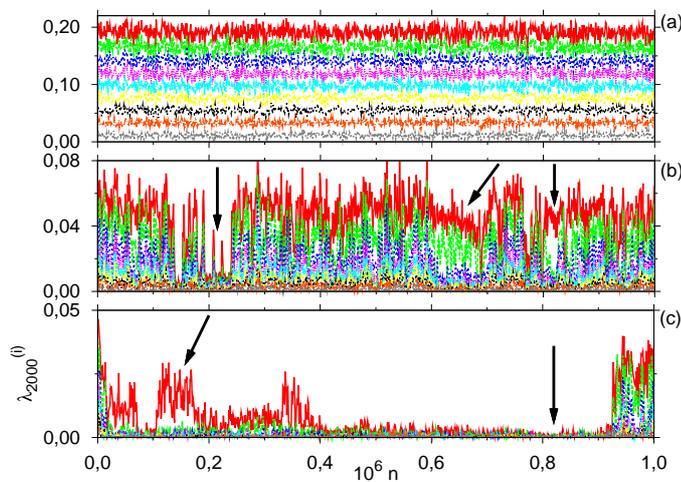


Figura 40: Evolução temporal de $\lambda_n^{(i)}$ ($i = 1 \rightarrow 9$) para uma condição inicial calculada para a rede de mapas (5.6) com $N = 10$, e (a) $K = 0,60 > K_c$, (b) $K_d < K = 0,15 < K_c$, (c) $K = 0,05 < K_d$.

5.3 Conclusões

Sabe-se com certeza que a dinâmica de sistemas conservativos é composta por diferentes tipos de trajetórias: regular, quase-regular e caóticas, dependendo basicamente da não-linearidade a que o sistema esteja submetido. Existem sérias dificuldades na caracterização destes tipos de movimento em sistemas de alta dimensão, especialmente no regime quase-regular onde o efeito *stickiness* pode suprimir a difusão de Arnold e então diferentes domínios com propriedades variadas podem aparecer [102]. Todavia, é extremamente desejável que haja o desenvolvimento de novos ferramentais que quantifiquem a taxa e o tempo de aprisionamento de trajetórias caóticas por quase-armadilhas dinâmicas, o grau de hiperbolicidade, ergodicidade e mistura. Baseados em parte na ideia da Ref. [75], propomos neste trabalho uma forma de quantificar a taxa de aprisionamento de trajetórias caóticas por estruturas de regularidade, em sistemas de alta dimensão. Para demonstrar a robustez deste método, analisamos sistematicamente a existência de pequenas mudanças na distribuição da parte positiva do espectro de Lyapunov a tempo finito através do número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável \mathcal{P}_{λ_n} que indica a quantidade de condições iniciais que levam ao mesmo expoente de Lyapunov a tempo finito, da variância σ , da assimetria κ_3 que detecta a assimetria da distribuição e da curtose κ_4 que mede o grau de “achatamento” da distribuição.

A maior parte das simulações numéricas apresentadas neste Capítulo, foram executadas numa rede de mapas simpléticos acoplados, como função do parâmetro de não-linearidade K . Mostramos que quantidades como \mathcal{P}_{λ_n} , κ_3 e κ_4 são extremamente úteis na detecção de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas e capazes de caracterizar a dinâmica quando ocorre um aumento na dimensão d do espaço de fases ($d = 2, 4, 6, 10, 20$). Além de detectar com certo grau de acurácia em todos os casos estudados o efeito *stickiness*, encontramos outros resultados interessantes: (i) o maior expoente do espectro de Lyapunov a tempo finito é mais eficiente na detecção de trajetórias aprisionadas; (ii) para $d = 10$ e 20 , o menor expoente de Lyapunov a tempo finito determina o parâmetro de não-linearidade crítico K_d , onde para valores menores do que este espera-se que existam regiões invariantes no espaço de fases. Quando $K > K_c$ ocorre uma transição onde a dinâmica quase-regular torna-se caótica **simultaneamente** em todas as direções instáveis.

No intervalo $K_d < K < K_c$ todas as quantidades detectam a existência de trajetórias aprisionadas e as distribuições referentes a cada elemento do espectro de Lyapunov a tempo finito tornam-se **semelhantes**. Em outras palavras, o efeito *stickiness* afeta todas as direções instáveis proporcionalmente e através das distribuições observa-se a existência de um tipo de “movimento comum”. Justamente nesta região (onde ocorre o efeito *stickiness*) constatamos que o momento linear de **todos** os sítios da rede são constantes. Este cenário é de particular interesse devido as

observações mencionadas corroborarem com a conjectura de Froeschlé que sugere que para sistemas simpléticos com $N \geq 3$ existem uma (energia) ou N constantes de movimento durante o intervalo de tempo em que ocorrer o “movimento comum”. Os expoentes de Lyapunov a tempo finito próximos a zero são importantes em outros sistemas de alta dimensão, como por exemplo: na existência dos modos hidrodinâmicos [103] e na análise da hiperbolicidade [75, 104]. Os resultados apresentados neste Capítulo servem para caracterizar até certo ponto a rica e complicada dinâmica quase-regular de sistemas simpléticos de alta dimensão. Especialmente ainda, entender parcialmente como a não-linearidade é distribuída ao longo das diferentes direções instáveis [105, 106]. Atualmente, outras redes de mapas simpléticos (obtidas a partir de fluxos Hamiltonianos) com diferentes tipos de acoplamentos estão sendo investigadas numericamente, e em princípio, os resultados apresentados neste Capítulo parecem ser bastante gerais.

6 Considerações Finais

Os principais objetivos deste Capítulo resumem-se em: (i) relacionar qualitativamente os principais resultados obtidos a partir dos estudos apresentados e discutidos e, (ii) propor possíveis trabalhos que possam ser desenvolvidos futuramente, tendo como base os resultados obtidos ao longo deste trabalho.

Nesta Tese de Doutorado investigamos a dinâmica de diferentes sistemas não-lineares através de diversas simulações numéricas. De forma geral, estes sistemas possuem diferentes propriedades, entretanto, apresentam um ponto em comum: sob determinadas circunstâncias a sua dinâmica assemelha-se a um comportamento intermitente. Lembrando que, conforme discutido no Capítulos 1 e 4, um processo intermitente consiste numa sequência de períodos em que determinada trajetória apresenta um comportamento regular que aleatoriamente torna-se caótico por um intervalo de tempo finito. Neste contexto podemos citar como exemplos típicos, os fluxos Hamiltonianos ou também os mapas simpléticos que podem apresentar um comportamento semelhante a um processo intermitente devido ao seu espaço de fases ser composto por domínios formados pela coexistência de trajetórias caóticas, quase-regulares e regulares. Em particular para sistemas conservativos bidimensionais, tais domínios ocupam diferentes áreas (ilhas de regularidade [5, 8]) em meio ao mar caótico, basicamente, dependendo da energia e da intensidade da não-linearidade a que o sistema esteja submetido. Na interface destas ilhas com o mar caótico pode ocorrer o aprisionamento das trajetórias caóticas por intervalos finitos de tempo, que conhecemos como efeito de aprisionamento por quase-armadilhas dinâmicas (*stickiness effect*) [9]. A alternância entre o aprisionamento e a visitação do mar caótico caracteriza este processo como “tipo-intermitente”.

O efeito *stickiness* influencia diretamente algumas das propriedades fundamentais da dinâmica de sistemas caóticos, como por exemplo, as taxas de mistura ou decaimento das correlações temporais e as propriedades de transporte [8, 56]. Comportamento semelhante pode ocorrer também em sistemas intermitentes como no mapa de Pomeu-Manneville [17] ou no mapa de Pikovsky [19]. A origem do comportamento intermitente apresentado por estes mapas está nos dois pontos fixos marginais em seu diagrama de fases que fazem o papel das ilhas de regularidade presentes no espaço de fases de sistemas Hamiltonianos. De forma similar, quando a

trajetória aproxima-se destes pontos fixos ela é aprisionada e a dinâmica antes caótica torna-se regular pelo intervalo de tempo que ocorre o aprisionamento. Em outras palavras, o mecanismo responsável pelo comportamento intermitente está no efeito *stickiness*.

Ao longo deste trabalho apresentamos diversos resultados que sugerem que uma das formas mais eficientes na análise quantitativa e qualitativa do efeito *stickiness* dá-se através dos expoentes de Lyapunov a tempo finito (ELTFs). Em particular, para o caso de mapas simpléticos e mapas intermitentes, quando a trajetória se aproxima das ilhas de regularidade e dos pontos fixos marginais (quase-armadilhas dinâmicas), respectivamente, os expoentes de Lyapunov locais tendem a zero pois a lei que rege o afastamento das trajetórias antes exponencial, torna-se algébrica. Com o intuito de observarmos tal comportamento, escolhemos um *ensemble* de condições iniciais e então, obtivemos as distribuições dos ELTFs que apresentaram caudas relativamente “gordas” devido ao efeito de aprisionamento das trajetórias caóticas. Além de estudarmos o comportamento (área) da cauda das distribuições dos ELTFs para diferentes intervalos de tempo através da teoria dos grandes desvios [23], caracterizamos também o efeito *stickiness* através da investigação do “corpo” destas distribuições em torno de seu valor médio dos ELTFs [41, 48].

A motivação inicial na utilização das distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, $P_n(\lambda_n, K)$ ¹, manteve-se concentrada na possibilidade de detectar as trajetórias caóticas aprisionadas em quase-armadilhas dinâmicas em fluxos Hamiltonianos bidimensionais. Apesar de através da inspeção direta destas distribuições obtermos uma ideia da existência de quase-armadilhas, esta não é a forma mais adequada de quantificar o efeito *stickiness*. Por este motivo definimos nas Refs. [41, 49], a quantidade que chamamos de número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável, \mathcal{P}_{λ_n} , que nada mais é que o ponto de máximo de $P_n(\lambda_n, K)$. Com isso, cada vez que $\mathcal{P}_{\lambda_n} < 1$, existirão trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas para dado parâmetro de não-linearidade.

O primeiro sistema investigado através da distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito e do número de ocorrências do expoente mais provável é composto por duas partículas que interagem via força repulsiva de Yukawa, colidem unidimensionalmente e estão aprisionadas num bilhar unidimensional com paredes rígidas. O parâmetro que variamos neste sistema é a razão entre as massas das partículas, $\gamma = m_2/m_1$. Quando construímos as distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, $P_n(\lambda_n, \gamma)$, observamos a existência de alguns picos para específicas razões de massas. Se não houver a ação da força de Yukawa entre as partículas (elas apenas colidem frontalmente), existem valores de γ em que esse problema é integrável, como por exemplo para $\gamma = 1, 0$ e $3, 0$. Curiosamente o pico mais acentuado apresentado em

¹Nesta notação, n representa a variável temporal considerada em intervalos discretos e K o parâmetro de não-linearidade para o sistema estudado.

$P_n(\lambda_n, \gamma)$, aparece justamente em $\gamma \sim 1, 0$. Deste modo, através do mapa de Gauss, utilizado especialmente na construção das frações continuadas aplicadas ao estudo da estabilidade de determinados sistemas dinâmicos quando submetidos a uma pequena perturbação, mostramos na Ref. [49] que os expoentes de Lyapunov a tempo finito de específicas órbitas do mapa de Gauss geradas a partir de números racionais² estão muito próximas (quase exatamente) dos valores de γ em que aparecem os maiores picos. Por outro lado, exatamente nestes pontos, o número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável apresenta mínimos devido a existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas. Em outras palavras, concluímos que os resultados obtidos sugerem que os mínimos apresentados por \mathcal{P}_{λ_n} ocorrem devido às trajetórias aprisionadas remanescentes de órbitas periódicas do modelo físico do caso integrável.

Vários esforços ainda têm sido direcionados para a investigação de sistemas Hamiltonianos bidimensionais cujo espaço de fases apresente uma dinâmica bastante variada e rica em comportamentos, como por exemplo, as estruturas auto-similares apresentadas pelas ilhas de regularidade [8] e a existência dos *cantori* [16]. Neste contexto, ainda hoje ocorre a busca de uma prova rigorosa e investigação numérica da existência do “expoente universal” de decaimento das correlações temporais e recorrências de Poincaré. Recentemente, os resultados apresentados nas Refs. [21, 31, 70] mostraram que as recorrências de Poincaré decaem segundo uma lei algébrica com expoente $\chi \simeq 1,60 \pm 0,05$. Em busca deste expoente e baseados nas propriedades de grande desvio das distribuições do maior expoente de Lyapunov a tempo finito, mostramos no Capítulo 4 e na Ref. [23], que nossos resultados numéricos também corroboram para existência deste expoente de decaimento das correlações, que estima-se ser igual ao expoente de decaimento das recorrências de Poincaré -1 , cujo valor obtido é $\xi \sim 0,57 \pm 0,05$. É importante dizer ao final desta discussão que χ é geralmente chamado de “expoente universal” de decaimento das recorrências de Poincaré, devido ao fato de ele ter sido obtido para diferentes sistemas Hamiltonianos bidimensionais ao longo de quase trinta anos [14, 15, 21, 23, 70].

Conforme vimos, os resultados apresentados nos Capítulos 3 e 4 referem-se a um fluxo Hamiltoniano (tempo contínuo) e a mapas (tempo discreto) uni e bidimensionais, respectivamente. Geralmente, sistemas com altas dimensões são investigados quanto a difusão de Arnold e seu estado de equilíbrio, fazendo com que, existam relativamente poucos estudos relacionados a investigação do efeito de aprisionamento de trajetórias caóticas por quase-armadilhas dinâmicas [8]. É também por este motivo que estudamos sistematicamente a existência de trajetórias caóticas aprisionadas numa rede de mapas simpléticos acoplados, conforme a dimensão do espaço de fases era incrementada. Os principais resultados deste estudo [42, 107] mostram que existe um tipo de “movimento comum” quando a rede é submetida a perturbações relativa-

²Estes números estão diretamente relacionados às órbitas periódicas das partículas que interagem apenas via colisões frontais, ou seja, sem haver uma força Coulombiana repelindo-as entre si.

mente pequenas. A existência deste “movimento comum” implica que todos os expoentes que compõem o espectro de Lyapunov a tempo finito sejam iguais a zero, e o momento linear de cada sítio permaneça constante pelo intervalo de tempo em que tal movimento for observado. Outra conclusão importante refere-se ao fato que podemos claramente identificar a transição de regime de movimento quase-regular para movimento caótico, que ocorre simultaneamente em todas as dimensões instáveis.

Diversos trabalhos a respeito do efeito *stickiness* associam este fenômeno explicitamente ou implicitamente com a presença de barreiras e/ou estruturas hierárquicas no espaço de fases [9]. Por outro lado, existem estudos que relacionam este efeito às propriedades (multi)-fractais de cadeias de ilhas ou cantori [16], ou ainda, supondo que o efeito *stickiness* seja visto como um processo intermitente das trajetórias caóticas [21]. Independente da descrição considerada, os expoentes de Lyapunov a tempo finito constituem ferramentas extremamente úteis na detecção e caracterização deste fenômeno. Isso porque, intuitivamente, espera-se que o expoente de Lyapunov local decaia continuamente para zero nas regiões de movimento regular, ou seja, na interface das quase-armadilhas dinâmicas com o mar caótico.

Em suma, através de um ferramental estatístico e experimentos numéricos obtivemos resultados bastante interessantes que contribuem para o melhor entendimento do efeito *stickiness*. Nesta investigação foram estudados os seguintes problemas: (i) utilização do mapa de Gauss na análise da estabilidade de um modelo físico composto por duas partículas interagentes aprisionadas num bilhar unidimensional (Capítulo 3); (ii) proposição de uma relação da teoria de grandes desvios com o teorema de Melbourne, considerando o expoente de Lyapunov a tempo finito como observável investigado no mapa de Pikovsky, numa família de mapas conservativos intermitentes e num sistema Hamiltoniano bidimensional (Capítulo 4); (iii) e finalmente apresentamos um estudo sistemático de uma rede de mapas simpléticos acoplados, onde investigamos o efeito *stickiness* conforme aumentávamos gradativamente a dimensionalidade do espaço de fases da rede (Capítulo 5). Deste modo, a caracterização do efeito *stickiness* em determinados sistemas intermitentes e sistemas simpléticos pode ser realizada com certo grau de profundidade através da técnica discutida e testada ao longo desta Tese de Doutorado. Na próxima Seção listaremos alguns dos resultados específicos mais importantes.

6.1 Resultados Específicos

Esta Seção tem como função apresentar uma relação dos resultados discutidos nesta Tese. A seguir relacionaremos os resultados de determinado Capítulo em blocos. Em cada bloco serão apresentados Subitens com uma descrição mais detalhada dos resultados referentes a cada item.

- ❶ Expoentes de Lyapunov a tempo finito do mapa de Gauss e estudo da dinâmica de partículas interagentes confinadas num bilhar unidimensional (Capítulo 3 e Refs. [41, 48, 49]).
- A distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito como função da razão entre as massas de duas partículas interagentes via força repulsiva de Coulomb e confinadas num bilhar unidimensional apresenta indícios da existência de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas;
 - Confirmamos a existência destas trajetórias caóticas aprisionadas através do número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável e de seções de Poincaré;
 - Para as razões de massas $\gamma \sim 1,0$ e $\gamma \sim 3,0$, quando a única forma de interação entre as partículas rígidas ocorre via colisão frontal, o sistema é integrável. Justamente para $\gamma \sim 1,0$ aparece um mínimo no número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável indicando a existência de trajetórias aprisionadas e um pico no valor médio dos expoentes de Lyapunov a tempo finito;
 - Com a determinação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito do mapa de Gauss, obtidos através de números racionais que originam as órbitas periódicas no caso integrável do modelo físico, sugerem que existe uma relação entre estas quantidades com os mínimos apresentados pelo número de ocorrências do expoente de Lyapunov a tempo finito mais provável (consequência da existência de trajetórias aprisionadas).
- ❷ Estimativa do decaimento das correlações temporais através da teoria dos grandes desvios (Capítulo 4 e Ref. [23]).
- Verificamos a relação entre a teoria dos grandes desvios de um observável com o teorema de Melbourne [57];
 - O estudo das propriedades de grande desvios das distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito mostrou-se bastante adequada para neste estudo;
 - A diminuição das áreas das caudas das distribuições abaixo de um valor de corte do observável utilizado reproduziram de forma exata o decaimento das correlações temporais para o mapa de Pikovsky, uma família de mapas conservativos intermitentes;
 - Mostramos que o decaimento das correlações temporais, de um *ensemble* de mapas padrão modificados mostramos é regido por uma lei algébrica cujo expoente remete ao “expoente universal” de decaimento das recorrências de Poincaré encontrado por diversos autores em quase trinta anos de investigações [14, 15, 21, 70];

6.2 Problemas em Aberto

Existem alguns pontos relacionados as investigações apresentadas nesta Tese de Doutorado que ainda merecem ser investigados. A seguir serão listados os principais problemas que ainda estão em aberto, e podem ser vistos como uma continuação dos resultados obtidos ao longo deste trabalho:

- ☛ A utilização do expoente de Lyapunov a tempo finito do mapa de Gauss no estudo da estabilidade de diferentes sistemas dinâmicos.
- ☛ A determinação de uma relação entre as somas de Cesàro (utilizadas para descrever séries infinitas) com os expoentes de Lyapunov a tempo finito. Segundo testes preliminares realizados pelo Prof. Roberto Artuso e com base no teorema de Melbourne [57]³, através das propriedades de grandes desvios apresentadas pelas distribuições destas somas pode-se obter informações a respeito do decaimento das correlações temporais ou das taxas de mistura. Na Ref. [23], mostramos que quando as grandezas utilizadas nestas distribuições forem os expoentes de Lyapunov a tempo finito, também conseguimos obter de forma exata as taxas de mistura, para diferentes tipos de sistemas dinâmicos que apresentem propriedades de caos fraco. Neste contexto, não existe na literatura um estudo aprofundado sobre qual quantidade é mais eficiente na determinação da taxa de mistura para sistemas Hamiltonianos e sistemas intermitentes em que existam trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas.
- ☛ São necessárias maiores investigações a respeito da existência do “expoente universal” da lei algébrica que rege o decaimento das recorrências de Poincaré para sistemas Hamiltonianos bidimensionais. Nos últimos trinta anos diversos autores [14, 15, 23, 31, 70] obtiveram numericamente este expoente mostrando que existe coerência em seu valor, porém novas interpretações do por que desse valor e novas técnicas para sua determinação sempre serão úteis. Especialmente se tais técnicas determinarem o valor do “expoente universal” de forma rigorosa ou exata.
- ☛ O método caracterização de trajetórias aprisionadas por quase-armadilhas dinâmicas em sistemas de alta dimensão apresentado no Capítulo 5 precisa ser generalizado para sistemas Hamiltonianos com diferentes tipos de acoplamentos. A investigação deste problema poderá ser iniciada através do número de ocorrências do expoente de Lyapunov mais provável e dos seguintes cumulantes: variância, assimetria e curtose. Especialmente tendo como base de estudo a conjectura de Froeschlé [100], observada também para um sistema

³Este teorema serviu de base no desenvolvimento do trabalho publicado na Ref. [23], referente ao Capítulo 4 desta Tese.

conservativo composto por uma rede de mapas acoplados [51], o “movimento comum” e as quantidades que tornam-se localmente constantes na região onde ocorre o efeito *stickiness* conforme apresentado originalmente na Ref. [42] (trabalho em andamento).

- ☛ A investigação do efeito *stickiness* em sistemas de alta dimensionalidade ainda precisa ser melhor explorada, pelo fato que não há uma teoria que descreva o que realmente acontece de forma detalhada e também por existirem poucos resultados numéricos referente a este efeito.

Referências

- [1] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics*. Estados Unidos da América: Thomson-Brooks/Cole, 2004.
- [2] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [3] POINCARÉ, J. H. *Les Methodes Nouvelles de la Méccanique Celeste*. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
- [4] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. New Yorke: Cambrige University Press, 2002.
- [5] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [6] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. Estados Unidos da América: Addison-Wesley, 1969.
- [7] CHERNOV, N.; ZHANG, H.-K. *Nonlinearity*, v. 18, p. 1527, 2005.
- [8] ZASLAVSKY, G. M. *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics*. New York: Oxford University Press, 2008.
- [9] ZASLAVSKY, G. M. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. New York: Imperial College Press, 2007.
- [10] ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. [S.l.]: Benjamin, 1968.
- [11] CRAWFORD, J. D.; CARY, J. R. *Physica D*, v. 6, p. 223, 1983.
- [12] YOUNG, L.-S. *Ann. Math.*, v. 147, p. 585, 1998.
- [13] CONTOPOULOS, G. *The Astronomical Journal*, v. 17, p. 147, 1971.
- [14] KARNEY, C. F. F. *Physica D*, v. 8, p. 360, 1983.
- [15] CHIRIKOV, B. V.; SHEPELYANSKY, D. L. *Physica D*, v. 13, p. 395, 1984.
- [16] MEISS, J. D.; OTT, E. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, n. 25, p. 2741, 1985.
- [17] POMEAU, Y.; MANNEVILLE, P. *Commun. Math. Phys.*, v. 74, p. 189, 1980.
- [18] ZASLAVSKY, G. M. *Physica D*, v. 168-169, p. 292, 2002.
- [19] PIKOVSKY, A. *Phys. Rev. A*, v. 43, p. 3146, 1991.
- [20] ARTUSO, R.; PRAMPOLINI, A. *Phys. Lett. A*, v. 246, p. 407, 1998.
- [21] ALTMANN, E. G. *Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems*. Tese (Doutorado) — Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme, 2007.

- [22] KLAGES, R. *Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Cingapura: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- [23] ARTUSO, R.; MANCHEIN, C. *Phys. Rev. E*, v. 80, p. 036210, 2009.
- [24] KANDRUP, H. E.; POGORELOV, I. V.; SIDERIS, I. V. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 311, p. 719, 2000.
- [25] SOLOMON, T. H.; WEEKS, E. R.; SWINNEY, H. L. *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, p. 3975, 1993.
- [26] CHIRIKOV, B. V. *Phys. Rep.*, v. 52, p. 263, 1979.
- [27] ZUMOFEN, G.; KLAFTER, J. *Europhys. Lett.*, v. 25, p. 565, 1994.
- [28] BENKADDA, S. et al. *Phys. Rev. E*, v. 55, p. 4909, 1997.
- [29] ZUMOFEN, G.; KLAFTER, J. *Phys. Rev. E*, v. 59, p. 3756, 1999.
- [30] VENEGEROLES, R. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, p. 054102, 2008.
- [31] VENEGEROLES, R. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 064101, 2009.
- [32] DEVANEY, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Paris: Perseus Press, 1992.
- [33] GASPARD, P. *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [34] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. *Rev. of Mod. Phys.*, v. 57, n. 3, p. 617, 1985.
- [35] OSELEDEC, V. I. *Trans. Moscow Math.*, v. 19, p. 197, 1968.
- [36] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J.-M. *Phys. Rev. A*, v. 14, n. 6, p. 2338, 1976.
- [37] BENETTIN, G.; STRELCYN, J.-M. *Phys. Rev. A*, v. 17, n. 2, p. 773, 1978.
- [38] BENETTIN, G. et al. *Meccanica*, v. 15, n. 9, p. 09, 1980.
- [39] WOLF, A. et al. *Physica D*, v. 16, p. 285, 1985.
- [40] ANTENEODO, C. *Phys. Rev. E*, v. 69, p. 016207, 2004.
- [41] BEIMS, M. W.; MANCHEIN, C.; ROST, J.-M. *Phys. Rev. E*, v. 76, p. 056203, 2007.
- [42] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W.; ROST, J. M. *arxiv:0907.4181*, 2010. Artigo Submetido.
- [43] SZEZECH, J. D.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. *Phys. Lett. A*, v. 335, p. 394, 2005.
- [44] GRASSBERGER, P.; BADI, R.; POLITI, A. *J. Stat. Phys.*, v. 51, p. 135, 1988.
- [45] PRASAD, A.; RAMASWAMY, R. *Phys. Rev. E*, v. 60, p. 2761, 1999.
- [46] SCHOMERUS, H.; TITOV, M. *Phys. Rev. E*, v. 66, p. 066207, 2002.
- [47] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. *Physica D*, v. 109, p. 81, 1997.
- [48] OLIVEIRA, H. A.; MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. *Phys. Rev. E*, v. 78, p. 046208, 2008.

- [49] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 39, p. 2041, 2009.
- [50] DING, M.; BOUNTIS, T.; OTT, E. *Phys. Lett. A*, v. 151, p. 395, 1990.
- [51] KANTZ, H.; GRASSBERGER, P. *Phys. Lett. A*, v. 123, p. 437, 1987.
- [52] MANCHEIN, C. *Duas Partículas Clássicas Aprisionadas num Bilhar Unidimensional e Interagindo via Potencial de Yukawa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2006.
- [53] KOLMOGOROV, A. N. *Dokl. Akad. Nauk.*, v. 98, p. 527, 1954.
- [54] MOSER, J. *Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys.*, v. 1, p. 1, 1962.
- [55] ARNOLD, V. I. *Uspekhi Math. Nauk.*, v. 18, p. 13, 1963.
- [56] WIGGINS, S.; OTTINO, J. M. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, v. 362, p. 937, 2004.
- [57] MELBOURNE, I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 1735, p. 1735, 2009.
- [58] DONNAY, V. J. *J. of Stat. Phys.*, v. 96, p. 1021, 1999.
- [59] ARTUSO, R. *Physica D*, v. 131, p. 68, 1999.
- [60] ALVES, J. F.; LUZZATTO, S.; PINHEIRO, V. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, v. 24, p. 637, 2004.
- [61] ARTUSO, R.; CAVALLASCA, L.; CRISTADORO, G. *Phys. Rev. E*, v. 77, p. 046206, 2008.
- [62] CASATI, G.; FORD, J. *J. of Comp. Phys.*, v. 20, p. 97, 1976.
- [63] AZEVEDO, A.; BEIMS, M. W.; LUZ, M. G. E. da. Artigo em preparação.
- [64] VESSEN, M. van et al. *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 026201, 2001.
- [65] MEZA-MONTES, L.; ULLOA, S. E. *Phys. Rev. E*, v. 55, n. 6, p. 6319, 1997.
- [66] MANE, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [67] CORLESS, R. M.; FRANK, G. M.; MONROE, J. G. *Physica D*, v. 46, p. 241, 1990.
- [68] CORLESS, R. M. *Am. Math. Mont.*, v. 99, p. 203, 1992.
- [69] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1985.
- [70] CRISTADORO, G.; KETZMERICK, R. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 184101, 2008.
- [71] MARKUS, L.; MEYER, K. R. *Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 144, p. 1, 1974.
- [72] ARTUSO, R.; CRISTADORO, G. Deterministic (anomalous) transport. In: KLAGES, R.; RADONS, G.; SOKOLOV, I. M. (Ed.). *Anomalous Transport - Foundations and Applications*. Berlin: Wiley-VCH, 2008.
- [73] VARADHAN, S. R. S. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 19, p. 261, 1966.
- [74] FALCIONI, M.; MARINI BETOLLO MARCONI, U.; VULPIANI, A. *Phys. Rev. A*, v. 44, p. 2263, 1991.

- [75] TOMSOVIC, S.; LAKSHMINARAYAN, A. *Phys. Rev. E*, v. 76, p. 036207, 2007.
- [76] ALVES, J. F.; LUZZATTO, S.; PINHEIRO, V. *Ann. I. H. Poincaré*, v. 22, p. 817, 2005.
- [77] HOLLANDER, F. den. *Large Deviations*. Brooklyn, New York: AMS, 2000.
- [78] POLLICOTT, M.; SHARP, R. *Nonlinearity*, v. 22, p. 2079, 2009.
- [79] COLLET, P.; ISOLA, S. *Commun. Math. Phys.*, v. 139, p. 551, 1991.
- [80] CHANNON, S. R.; LEBOWITZ, J. L. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, v. 357, p. 108, 1980.
- [81] YOUNG, L.-S. *Isr. J. Math.*, v. 110, p. 153, 1999.
- [82] GOUËZEL, S. *Isr. J. Math.*, v. 139, p. 29, 2004.
- [83] GASPARD, P.; WANG, X.-J. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, v. 85, p. 4591, 1988.
- [84] WANG, X.-J. *Phys. Rev. A*, v. 40, p. 6647, 1989.
- [85] CRISTADORO, G. et al. E-print arXiv:0812.0555.
- [86] LEBOWITZ, J. *J. Differ. Equations*, v. 38, p. 192, 1980.
- [87] LIVERANI, C. *Math. Phys. Electron. J.*, v. 10, p. 1, 2004.
- [88] LIVERANI, C.; MARTENS, M. *Commun. Math. Phys.*, v. 260, p. 527, 2005.
- [89] CHRISTIANSEN, F.; GRASSBERGER, P. *Phys. Lett. A*, v. 181, p. 47, 1993.
- [90] CHIRIKOV, B. V.; SHEPELYANSKY, D. L. In: *Proceedings of the IXth International Conference on Nonlinear Oscillations (Naukova Dumka, Kiev, Ukraine, 1981), Vol. 2, p. 420; [Princeton University Report No. PPPL-TRANS-133, 1983 (unpublished)]*. [S.l.: s.n.], 1981. [Naukova Dumka 2, 420]; (English translation: Princeton University Report No. PPPL-TRANS-133, 1983).
- [91] RANGARAJAN, G.; SACHIDANAND, M. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 33, p. 141, 2000.
- [92] ARNOLD, V. I. *Sov. Math.-Dokl.*, v. 5, p. 581, 1964.
- [93] KANTZ, H.; GRASSBERGER, P. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 21, p. L127, 1988.
- [94] NEKHOROSHEV, N. N. *Anal. Appl.*, v. 5, p. 338, 1971.
- [95] GUZZO, M. *Lec. Notes Phys.*, v. 729, p. 1, 2008.
- [96] LAPEYRE, G. *Chaos*, v. 12, p. 688, 2002.
- [97] GINELLI, F. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 99, p. 130601, 2007.
- [98] MANCHEIN, C.; SALA, M.; ARTUSO, R. Estimating hyperbolicity of chaotic bidimensional maps. In: *Dynamics Day 2010*. São Paulo: xxx, 2010.
- [99] FROESCHLÉ, C.; FROESCHLÉ, C. *Celest. Mec. and Dyn. Astron.*, v. 56, p. 307, 1993.
- [100] FROESCHLÉ, C. *Astron. Astrophys.*, v. 16, p. 172, 1972.
- [101] WOELLNER, C. F. *Aspectos Dinâmicos de uma Rede de Mapas Hamiltonianos Acooplados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2006.

-
- [102] PETTINE, M.; VULPIANI, A. *Phys. Lett. A*, v. 106A, p. 207, 1984.
- [103] YANG, H. L.; RADONS, G. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, p. 024101, 2008.
- [104] VALLEJO, J. C.; VIANA, R. L.; SANJUAN, M. A. F. *Phys. Rev. E*, v. 78, p. 066204, 2008.
- [105] GRASSBERGER, P.; KANTZ, H. *Phys. Lett. A*, v. 113, p. 167, 1985.
- [106] MANCHEIN, C.; ROSA, J.; BEIMS, M. W. *Physica D*, v. 238, p. 1688, 2009.
- [107] MANCHEIN, C.; BEIMS, M. W. Characterizing the common behavior close to stickiness in hamiltonian systems. Em preparação.

Apêndice A - Artigos Científicos

Neste apêndice, listamos os artigos publicados e submetidos no período de doutoramento. Iniciamos com os artigos diretamente relacionados a Tese:

- Beims, M. W.; Manchein, C. e Rost, J. M. *Origin of chaos in soft interactions and signatures of non-ergodicity*, Physical Review E **76**, 056203 (2007).
- Oliveira, H. A.; Manchein, C. e Beims, M. W. *Soft wall effects on interacting particles in billiards*, Physical Review E **78**, 046208 (2008).
- Manchein, C. e Beims, M. W. *Gauss map and Lyapunov exponents of interacting particles in a billiard*, Chaos, Solitons & Fractals **39**, 2041 (2009).
- Manchein, C.; Rosa, J. e Beims, M. W. *Chaotic motion at the emergence of the time averaged energy decay*, Physica D **238**, 1688 (2009).
- Artuso, R. e Manchein, C. *Instability statistics and mixing rates*, Physical Review E **80**, 036210 (2009).
- Manchein, C.; Beims M. W. e Rost, J. M. *Footprints of sticky motion in nonintegrable symplectic systems*, (submetido).
- Manchein, C. e Beims, M. W. *Characterizing the common behavior close to stickiness in Hamiltonian systems*, (em preparação).

Trabalhos desenvolvidos paralelamente a Tese de Doutorado:

- Manchein, C. e Beims, M. W. *Instability of powers of the golden mean*, Chaos, Solitons & Fractals **35**, 246 (2008).
- Manchein, C. e Beims, M. W. *Ratchet-like pulse controlling the Fermi deceleration and hyperacceleration*, Journal of Computational Interdisciplinary Sciences **1**, 99 (2009).
- Manchein, C. e Beims M. W. *Dissipation effects in the ratchetlike Fermi acceleration*, Mathematical Problems in Engineering **2009**, 513023 (2009).