

Moisés Ferreira Costa

**MODELAGEM DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA PARA TRANSFORMAÇÃO DE
REFERENCIAIS GEODÉSICOS POR COLOCAÇÃO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geomática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Ciências Geodésicas.

Orientadores:
Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira
Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos

Curitiba
2003

“As pessoas felizes não conseguem tudo o que esperam, mas querem a maior parte do que conseguem. Em outras palavras, viram o jogo a seu favor escolhendo dar valor às coisas que estão ao seu alcance. Mantenha um pé na realidade e lute para melhorar as coisas, e não para torná-las perfeitas. Não existe perfeição. As coisas serão o que puderem ser a partir de nossos esforços”.
(Diener, 1995).

Dedico este trabalho às duas mulheres mais importantes de minha vida: minha mãe, Dona Lindaura Ferreira dos Santos e minha namorada, Edimar Cristina Cardoso.

Agradecimentos

Uma tese de Doutorado não é a coisa mais importante da vida de uma pessoa, mas é uma das muitas etapas que deve ser vencida pelos candidatos ao título de Doutor. Muito esforço e dedicação são exigidos ao candidato que disponibiliza ao público apenas uma parte do árduo trabalho que teve.

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade que me foi concedida de realizar este trabalho. Ele me tem dado coragem para enfrentar tarefas difíceis e guiado pelo caminho mais suave.

Este trabalho também não teria sido viabilizado sem a valiosa contribuição das pessoas / instituições, as quais agradeço e gostaria de registrar o apoio recebido:

- à minha família que, mesmo distante, soube compreender a minha ausência;
- à minha namorada Edimar Cristina pela disposição, carinho e ajuda em todos os momentos;
- aos meus orientadores na UFPR (Brasil) e na UNB (*Canada*), respectivamente:
 1. Prof. Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira pelas discussões relativas ao trabalho, pelas valiosas e sempre oportunas sugestões que vieram a enriquecer o trabalho;
 2. Prof. Dr. Marcelo Carvalho dos Santos pelas discussões relativas ao trabalho, pelas valiosas e sempre oportunas sugestões que vieram a enriquecer o trabalho. Também o agradeço por ter me recebido na *University of New Brunswick* (UNB) para realização de Doutorado Sanduíche;
- ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná pela oportunidade de realizar este curso de Doutorado;
- ao *Department of Geodesy and Geomatics Engineering of the University of New Brunswick* por me aceitar para realização de Doutorado Sanduíche;
- aos amigos e colegas do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;
- à Mônica, secretária do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, pela disposição em nos atender sempre;

- à todos os professores do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas;
- ao IBGE pelo apoio na disponibilização dos dados para a realização dos ensaios contidos neste trabalho;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro por meio de bolsa durante a realização de Doutorado Sanduíche no *Canada*;
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro por meio de bolsa de Doutorado;
- e, finalmente, a todos que, de forma direta ou indireta, deram sua contribuição para que este trabalho fosse menos árduo.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Apêndices	xiii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xiv
Lista de Símbolos	xv
Resumo	xix
Abstract	xx
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA TESE	4
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	5
2. CONCEITUAÇÃO FUNDAMENTAL	6
2.1 TIPOS DE ERROS DAS OBSERVAÇÕES	6
2.2 COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO	8
2.3 PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS.....	10
2.4 MODELO MATEMÁTICO PARA TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	14
2.5 ESTIMATIVAS DE PARÂMETROS PELO MÉTODO PARAMÉTRICO	17
3. COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS	26
3.1 FUNDAMENTO TEÓRICO E MODELO MATEMÁTICO	26
3.2 MATRIZ VARIÂNCIA COVARIÂNCIA	32
3.3 MINIMIZAÇÃO E SOLUÇÃO	34
3.4 PRECISÃO DAS ESTIMATIVAS	39
3.5 COMPARAÇÃO COM O AJUSTAMENTO CLÁSSICO	40

4. ESTUDO ANALÍTICO E MODELAGEM DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA	43
4.1 PARÂMETROS ESSENCIAIS DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA	43
4.2 ESTUDO ANALÍTICO DA FUNÇÃO GAUSSIANA	46
4.3 ESTIMATIVAS DAS COVARIÂNCIAS AMOSTRAIS	52
4.4 MODELAGEM ANALÍTICA DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA	54
5. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DA METODOLOGIA	57
5.1 ÁREA DE ESTUDO E PONTOS DE CONTROLE	57
5.2 NATUREZA DAS OBSERVAÇÕES	59
5.3 PROCESSAMENTO DOS DADOS DO EXPERIMENTO	61
5.4 RESULTADO DAS COVARIÂNCIAS ESTIMADAS	63
5.5 MODELAGEM NUMÉRICA DA FUNÇÃO GAUSSIANA	64
6. ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	67
6.1 PARÂMETROS DA TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	67
6.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO E VETOR Z	68
6.3 ANÁLISE ESTATÍSTICA	72
6.4 ESTIMATIVA DO SINAL s' E DO RUÍDO OBSERVACIONAL n	73
6.5 ESTIMATIVA DO SINAL s NOS PONTOS DE PREDIÇÃO	77
6.6 DIFERENÇAS EM COORDENADAS CARTESIANAS	79
6.7 DIFERENÇAS EM COORDENADAS GEODÉSICAS	81
6.8 ANÁLISE DO VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS	83
7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	85
APÊNDICES	87
1 – MATRIZ DE ROTAÇÃO	88
2 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	90
3 – COORDENADAS CARTESIANAS SAD69 E SAD69/96	93
4 – OBSERVAÇÕES UTILIZADAS NO EXPERIMENTO	96
5 – SINAL ESTIMADO POR COLOCAÇÃO	99
6 – VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS ENTRE AS COORDENADAS	

ESTIMADAS E CONHECIDAS102

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS105

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Transformação no espaço tridimensional	14
Figura 3.1 – Representação geométrica da Colocação	28
Figura 4.1 – Função covariância Gaussiana	44
Figura 4.2 – Função covariância Gaussiana e suas derivadas	46
Figura 4.3 – Relação entre ξ e a constante “a”	48
Figura 4.4 – Diferentes funções covariância para diferentes valores de “a”	49
Figura 4.5 – Parâmetros essenciais da função covariância	50
Figura 4.6 – Função Covariância a partir dos dados	53
Figura 4.7 – Função exponencial e logaritmo natural	54
Figura 4.8 – Representação geométrica para os valores de “a” e “b”	55
Figura 5.1 – Área de estudo com as estações do SGB	57
Figura 5.2 – Diferenças de coordenadas para a componente X	59
Figura 5.3 – Diferenças de coordenadas para a componente Y	60
Figura 5.4 – Diferenças de coordenadas para a componente Z	60
Figura 5.5 – Função Covariância para a componente X	65
Figura 5.6 – Função Covariância para a componente Y	66
Figura 5.7 – Função Covariância para a componente Z	66
Figura 6.1 – Componente X do vetor V	68
Figura 6.2 – Componente Y do vetor V	69
Figura 6.3 – Componente Z do vetor V	69
Figura 6.4 – Componente X do vetor z	70
Figura 6.5 – Componente Y do vetor z	70
Figura 6.6 – Componente Z do vetor z	71
Figura 6.7 – Componente X do sinal s'	73
Figura 6.8 – Componente Y do sinal s'	74
Figura 6.9 – Componente Z do sinal s'	74
Figura 6.10 – Componente X do ruído n	75
Figura 6.11 – Componente Y do ruído n	75
Figura 6.12 – Componente Z do ruído n	76
Figura 6.13 – Componente X do sinal s	77

Figura 6.14 – Componente Y do sinal s	78
Figura 6.15 – Componente Z do sinal s	78
Figura 6.16 – Diferença ΔX para Ajustamento e Colocação	79
Figura 6.17 – Diferença ΔY para Ajustamento e Colocação	80
Figura 6.18 – Diferença ΔZ para Ajustamento e Colocação	80
Figura 6.19 – Diferença $\Delta\phi$ para Ajustamento e Colocação	81
Figura 6.20 – Diferença $\Delta\lambda$ para Ajustamento e Colocação	82
Figura 6.21 – Diferença Δh para Ajustamento e Colocação	82
Figura 6.22 – Diferença posicional para Ajustamento e Colocação	83

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Covariâncias estimadas	63
Tabela 5.2 – Parâmetros da Função Covariância Gaussiana	64
Tabela 5.3 – Parâmetro “a” e comprimento de correlação ξ	64
Tabela 5.4 – Variâncias estimadas	65
Tabela 6.1 – Parâmetros do Ajustamento e da Colocação	67
Tabela 6.2 – Análise estatística pelo teste global unilateral	72
Tabela A2.1 – Parâmetros do SGB	91
Tabela A2.2 – Sinal da tangente para a longitude λ	92
Tabela A3.1 – Pontos de observação utilizados no experimento	93
Tabela A4.1 – Diferenças de coordenadas dos pontos de observação	96
Tabela A5.1 – Sinal s para os pontos de predição	99
Tabela A6.1 – Vetor resultante das diferenças	102

Lista de Apêndices

APÊNDICE 1 – MATRIZ DE ROTAÇÃO	88
APÊNDICE 2 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	90
APÊNDICE 3 – COORDENADAS CARTESIANAS SAD69 E SAD69/96	93
APÊNDICE 4 – OBSERVAÇÕES UTILIZADAS NO EXPERIMENTO	96
APÊNDICE 5 – SINAL ESTIMADO POR COLOCAÇÃO	99
APÊNDICE 6 – VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS ENTRE AS COORDENADAS ESTIMADAS E CONHECIDAS	102

Lista de Abreviaturas e Siglas

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

GPS – Global Positioning System

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

MAPGEO – MAPa GEOidal do Brasil de 1992

MATLAB – MATrix LABoratory

MMQ – Método dos Mínimos Quadrados

MVC – Matriz Variância Covariância

NAD-27 – North American Datum of 1927

NAD-83 – North American Datum of 1983

RGB – Rede Geodésica Brasileira

SAD-69 – South American Datum of 1969

SGB – Sistema Geodésico Brasileiro

UFPR – Universidade Federal do Paraná

UNB – *University of New Brunswick*

WGS – World Geodetic System

Lista de Símbolos

- A – Matriz das derivadas parciais das funções com relação aos parâmetros;
- A_i – Sub-matriz A_i das derivadas parciais para um ponto genérico P_i ;
- a – Semi-eixo maior do elipsóide; constante para a função covariância
- B – Matriz das derivadas parciais das funções com relação às observações;
- B_i – Sub-matriz B_i das derivadas parciais para um ponto genérico P_i ;
- b – Semi-eixo menor do elipsóide;
- C – Função covariância;
- C_0 – Variância do sinal;
- $E\{\cdot\}$ – Operador esperança matemática;
- e – Primeira excentricidade do elipsóide;
- e' – Segunda excentricidade do elipsóide;
- f – Achatamento do elipsóide;
- G – Matriz de transformação;
- H – Altitude ortométrica;
- h – Altura elipsóidica;
- H_0 – Hipótese básica;
- H_1 – Hipótese alternativa;
- J – Matriz Jacobiana;
- K – Vetor de multiplicadores de Lagrange;
- L – Vetor resultante da diferença entre L_0 e L_b ;
- L_a – Vetor das observações ajustadas;
- L_b – Vetor das observações brutas;
- L_0 – Vetor calculado à partir dos de X_0 e L_b ;
- M – Matriz auxiliar do método combinado; raio da seção meridiana;
- m – Número de observações;
- N – Matriz dos coeficientes das equações normais; ondulação geoidal;
- \bar{N} – Raio de curvatura da seção primeiro vertical (grande normal);
- n – Número de pontos; vetor dos ruídos das observações;
- o_1 – Origem do referencial cartesiano (x, y, z);
- o_2 – Origem do referencial cartesiano (X, Y, Z);

P – Matriz peso das observações;
p – Raio do paralelo de latitude φ ; número de pontos de cálculo;
 P_i – Ponto qualquer no terreno;
 p_i – Peso da i-ésima observação;
ppm – Partes por milhão (significa uma parte em um milhão de partes);
Q – Matriz cofatora;
q – Número de pontos de observação;
R – Matriz de Rodrigues;
r – Número de equações no método combinado; distância espacial entre dois pontos;
 r_i – Vetor posição do ponto P_i no referencial cartesiano (x, y, z);
 R_i – Vetor posição do ponto P_i no referencial cartesiano (X, Y, Z);
 $R_1(\varepsilon_x)$ – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo primário X;
 $R_2(\varepsilon_y)$ – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo secundário Y;
 $R_3(\varepsilon_z)$ – Matriz de rotação ortogonal, aplicada ao eixo terciário Z;
 R_ε – Matriz de rotação ortogonal resultante do produto de $R_1(\varepsilon_z)$, $R_2(\varepsilon_y)$ e $R_3(\varepsilon_x)$;
 r_0 – Vetor translação;
S – Graus de liberdade;
s – Vetor dos sinais nos p pontos de cálculo;
 s' – Vetor dos sinais nos q pontos de observação;
U – Vetor dos termos independentes das equações normais;
u – Número de parâmetros a serem estimados; ângulo auxiliar;
V – Vetor dos resíduos;
W – Vetor erro de fechamento;
 W_i – Sub-vetor erro de fechamento;
X – Vetor das correções aos parâmetros aproximados;
 X_a – Vetor dos parâmetros ajustados;
 X_0 – Vetor dos parâmetros aproximados;
 X_i – Componente cartesiana ao longo do eixo X;
 x_0 – Translação primária ao longo do eixo X;
 x_i – Componente cartesiana ao longo do eixo x;
 Y_i – Componente cartesiana ao longo do eixo Y;

y_i – Componente cartesiana ao longo do eixo y ;
 y_0 – Translação secundária ao longo do eixo Y ;
 z – Vetor aleatório em colocação;
 Z_i – Componente cartesiana ao longo do eixo Z ;
 z_i – Componente cartesiana ao longo do eixo z ;
 z_0 – Translação terciária ao longo do eixo Z ;
 α - Nível de significância;
 ΔX – Variação na coordenada X ;
 ΔY – Variação na coordenada Y ;
 ΔZ – Variação na coordenada Z ;
 $\Delta\varphi$ – Variação na latitude;
 $\Delta\lambda$ – Variação na longitude;
 Δh – Variação na altura geométrica;
 δ – Diferença de escala;
 ε_x – Ângulo de rotação em torno do eixo X ;
 ε_y – Ângulo de rotação em torno do eixo Y ;
 ε_z – Ângulo de rotação em torno do eixo Z ;
 ε – Excentricidade linear;
 Φ – Forma Quadrática Fundamental;
 φ – Latitude geodésica;
 κ – Fator de escala;
 λ – Longitude geodésica;
 μ_x – Média do vetor X ;
 μ_y – Média do vetor Y ;
 ξ – Comprimento de correlação;
 χ – Parâmetro de curvatura;
 χ^2 – Distribuição Qui-Quadrado;
 χ_c^2 – Qui-quadrado calculado, baseado na forma quadrática dos resíduos;
 χ_t^2 – Qui-quadrado teórico, baseado na distribuição χ^2 ;
 ρ – Matriz correlação;
 ρ_{ij} – Coeficiente de correlação linear entre i e j ;

R_i – Vetor posição do ponto P_i no referencial cartesiano (X, Y, Z);

σ_i – Desvio padrão de X_i ;

σ_j – Desvio padrão de X_j ;

σ_{xy} – Covariância entre x e y;

σ_{ij} – Covariância entre i e j;

σ_i^2 – Variância da i-ésima observação;

σ_0^2 – Variância da observação de peso unitário a priori;

$\hat{\sigma}_0^2$ – Variância da observação de peso unitário a posteriori;

σ_n^2 – Variância do ruído n;

\sum_{Δ} – MVC da diferença de coordenadas;

\sum_{L_b} – Matriz covariância das observações;

\sum_s – MVC do sinal s nos p pontos de cálculo;

$\sum_{s'}$ – MVC do sinal s' nos q pontos de observação;

\sum_{sL_b} – Matriz covariância cruzada entre o sinal s e as observações L_b ;

$\sum_{ss'}$ – Matriz covariância cruzada entre os sinais s e s' ;

\sum_n – MVC do ruído n;

\sum_x – Matriz covariância do vetor aleatório X;

\sum_{x_a} – Matriz covariância dos parâmetros ajustados;

\sum_z – MVC do vetor aleatório z;

Resumo

A Colocação por Mínimos Quadrados tem sido utilizada em Geodésia principalmente para modelagem do campo da gravidade terrestre. Este trabalho mostra uma aplicação da Colocação na transformação de coordenadas envolvendo duas realizações do SAD69 no Brasil. A transformação de similaridade no espaço tridimensional considerando translação, rotação e diferença de escala é o modelo utilizado para estimativa dos parâmetros. Ao contrário do Ajustamento por Mínimos Quadrados classicamente empregado que considera somente o efeito aleatório, a Colocação permite extrair do ruído das observações, além de modelar o efeito sistemático, o sinal. O uso da Colocação requer a escolha da função covariância e sua modelagem. A Função Covariância deve representar a correlação entre as observações tratando os dados de uma maneira consistente. Na metodologia apresentada e testada com 200 pontos da Rede Geodésica Brasileira, o efeito da correlação foi estabelecido por meio de uma função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados. A avaliação dos resultados pôde ser feita pela comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas tanto pelo Ajustamento quanto pela Colocação e os valores de referência, isto é, os valores conhecidos. Para isto foram utilizados todos os 200 pontos como teste retirando um ponto a cada etapa e testado individualmente. Esta aplicação prática mostrou como os resultados do Ajustamento podem ser melhorados pelo uso de uma função covariância apropriada para observações correlacionadas.

Abstract

Least Squares Collocation has been used in Geodesy mostly for the modelling of the Earth's gravity field. This investigation makes use of Least Squares Collocation dealing with coordinate transformation between two realizations of the South American Datum (SAD-69) in Brazil. The similarity transformation in the tri-dimensional space, involving translations, rotations and scale, is the model adopted for the parameter estimation. Contrary to Least Squares approach classically used in the same situation, which takes into account only the random effects, Least Squares Collocation allows the extraction of the observation noise as well as the modelling of the systematic effect, the signal. The use of Least Squares Collocation requires the choice of a covariance function and its modelling. The covariance function must represent the correlation among the observations treating the data in a consistent fashion. In the present methodology, 200 points of the Brazilian Geodetic System have been tested. The effect of correlation was established by means of a Gaussian covariance function modelled from the data. The assessment of the results is carried out by comparison of differences between coordinates estimated using Least Squares Adjustment and Least Squares Collocation and reference values, i.e., known values. This involved all 200 points, used individually in each test. At each test, one of the 200 points is removed and used as a test point. The tests show how much results traditionally supplied by Least Squares Adjustment can be improved by using a covariance function appropriate to correlated observations.

1. INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Um referencial pode ser definido ou arbitrado, porém ambos devem ser realizados para uso prático (ANDRADE, 1984, p. 21). Esta realização consiste da determinação das coordenadas de um conjunto de pontos sobre a superfície física da Terra, caracterizando a solução do problema básico da Geodésia. Também para propósitos práticos é necessário que os diversos referenciais realizados possam se relacionar mediante alguma equação de transformação. É desejável, no entanto, que esta equação de transformação represente, o mais próximo possível, a diferença que existe entre os dois referenciais que se quer relacionar. Todavia, nem sempre isto é possível devido aos erros¹ inerentes ao próprio processo de medida, os quais são propagados para as coordenadas atreladas a um referencial materializado causando distorções na rede.

Diversos modelos tem sido desenvolvidos com a finalidade de descrever o relacionamento entre dois referenciais. THOMSON (1976, cap. 7) apresenta alguns modelos usados na combinação de redes geodésicas, destacando como principais os modelos de Bursa, Molodensky e Veis, que contém um máximo de sete parâmetros de transformação. Estes modelos são matematicamente equivalentes (GEMAEL, 1991, p. 12.16) e fornecem resultados idênticos para as rotações e escala (VANÍCEK e KRAKIWSKY, 1986, p. 394). No entanto, todos os três modelos são inadequados, porque eles não contém parâmetros suficientes para descrever o relacionamento entre dois referenciais (THOMSON, 1976, p. 103a).

Pesquisas foram feitas e experimentos foram conduzidos ao longo do tempo com o objetivo de determinar parâmetros de transformação entre dois referenciais tanto na Rede Geodésica Brasileira (RGB) quanto na rede geodésica em outros países. O modelo utilizado envolveu três parâmetros (3 translações) ou sete parâmetros (3 translações, 3 rotações e 1 escala), no qual os trabalhos pertinentes

¹ Os tipos de erros das observações serão discutidos no capítulo 2.

são: LAMBECK (1971); ABIB (1978); KADLEC e GOMES (1978); CASTAÑEDA (1986); FORTES et al. (1989); RENS e MERRY (1990); PAGGI et al. (1994); VANÍCEK e STEEVES (1996); VERONEZ (1998). Ainda um outro modelo para a determinação simultânea de parâmetros de transformação e de ondulações geoidais foi utilizado por ANDRADE (1984).

A modelagem das distorções para redes geodésicas têm sido apresentada na literatura, onde o assunto é tratado das mais diversas formas. VANÍCEK e KRAKIWSKY (1986, p. 415) sugere um modelo analítico baseado em uma regressão linear por mínimos quadrados. Outros trabalhos (JUNKINS, 1990; ABOUSALEM *et al.*, 1993; JUNKINS e ERICKSON, 1996) apresentam o relacionamento entre o NAD-27 e o NAD-83 por uma transformação de similaridade (isogonal) a sete parâmetros, mas alertam que esta abordagem não produz um relacionamento definitivo, devido às distorções do NAD-27 que devem ser modeladas.

No caso da RGB, estudos foram feitos para determinação de parâmetros e propostas para modelagem das distorções foram apresentadas. É o caso dos trabalhos de OLIVEIRA et al. (1997) e OLIVEIRA (1998), onde os parâmetros de transformação foram determinados usando a transformação afim geral a doze parâmetros combinada com a Triangulação de Delaunay para a modelagem das distorções. Outra metodologia foi apresentada por COSTA (1999A) para a integração da RGB ao SIRGAS no qual a rede é dividida em regiões combinando modelo polinomial com estimativa de parâmetros regionais. Também, COSTA (1999) apresenta uma metodologia para modelagem das distorções usando um modelo polinomial e estimativa dos sete parâmetros pela transformação isogonal.

Outras técnicas alternativas têm sido propostas. Este é o caso de expressar diretamente a variação de coordenadas usando um modelo polinomial (ABD-ELMOTAAL, 1994) ou a divisão da rede em regiões com a finalidade de minimizar as distorções (MERRY e WHITTAL, 1998).

No Ajustamento por Mínimos Quadrados, admite-se as diferenças existentes entre as realizações de dois referenciais como sendo modeladas pela transformação geométrica. Mas como foi dito, somente os parâmetros da transformação geométrica não são capazes de absorver todas as diferenças entre as referidas realizações devido à presença de distorções sistemáticas na rede.

Segundo SCHWARZ (1974, p. 171), devido à natureza dos dados originais, a heterogeneidade das técnicas observacionais e ao modelo matemático que relaciona estas quantidades, é improvável que as coordenadas estimadas sejam obtidas de uma maneira simples.

Neste trabalho, a metodologia utilizada para a integração de referenciais geodésicos está baseada na Colocação por Mínimos Quadrados, onde as distorções sistemáticas são modeladas e os erros das observações são filtrados. A estimativa dos parâmetros, bem como a modelagem das distorções sistemáticas são obtidas simultaneamente no mesmo modelo matemático.

O método de Colocação têm sido aplicado para resolver problemas relacionados com diversas áreas do conhecimento, dentre as quais a Geodésia, Fotogrametria, Ciências Aplicadas e Engenharia (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1016; MIKHAIL, 1976, p. 394; RAMPAL, 1976, p. 559).

Em Geodésia, a Colocação tem sido utilizada principalmente para modelagem do campo da gravidade terrestre (MORITZ, 1973; MORITZ, 1978; MORITZ e SÜNKEL, 1978; MORITZ, 1980; ANDERSON et al. , 2000) e em Fotogrametria têm sido aplicada na correção da deformação do filme e distorção das lentes (CAMARGO e DALMOLIN, 1995; KRAUS e MIKHAIL, 1972; RAMPAL, 1976).

A equação da Colocação é formada por uma parte determinística e duas partes aleatórias constituindo o sinal e o ruído. No presente trabalho, a parte determinística é constituída pela transformação geométrica, o sinal representa as distorções sistemáticas e o ruído constitui os erros das observações. O efeito da correlação entre as observações é estabelecido por meio de uma função covariância apropriada permitindo tratar os dados de uma maneira consistente.

1.2 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Por meio desta tese, tem-se o objetivo de proceder ao estudo sistemático de uma metodologia sobre a modelagem da função covariância para aplicações na integração de referenciais geodésicos por Colocação.

A Colocação permite tratar as distorções sistemáticas residuais pela estimativa do sinal assim como filtrar o ruído das observações, os quais ficam deficientes na teoria do Ajustamento clássico.

Para o desenvolvimento desta metodologia houve a necessidade da modelagem da função covariância o que constitui a principal contribuição desta tese de doutorado. Também como contribuições pode-se citar a estimativa dos parâmetros da função covariância, a aplicação da Colocação na modelagem das distorções sistemáticas e a verificação do desempenho da função covariância modelada numa área de estudo. Este trabalho também pode ser considerado como subsídio à literatura dedicada ao assunto, principalmente de origem nacional que é bastante escassa.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta tese está estruturada em sete capítulos, os quais estão divididos em seções e disserta sobre a modelagem da função covariância para aplicações na integração de referenciais geodésicos por colocação. O tema foi desenvolvido dentro desta estrutura de uma maneira que se julgou satisfatória para a organização do assunto tratado.

O capítulo 2 apresenta o modelo matemático de transformação focalizando aplicação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) no processo de estimativa dos parâmetros de transformação.

O capítulo 3 descreve o método de Colocação por Mínimos Quadrados, cuja solução para os parâmetros é similar ao método combinado de ajustamento. Ao final do capítulo, uma comparação com o Ajustamento clássico é apresentada.

A aplicação da Colocação requer a modelagem da função covariância, onde um estudo dos parâmetros essenciais, bem como o modelo analítico para a função covariância Gaussiana é apresentado no capítulo 4. Este capítulo também mostra uma metodologia para a estimativa das covariâncias amostrais e dos parâmetros da função covariância, os quais são fundamentais para atender aos objetivos do presente estudo.

Nos capítulos 5 e 6, a metodologia desenvolvida é implementada e testada em uma área previamente selecionada. O capítulo 5 mostra a área de estudo e descreve uma estratégia utilizada para o processamento dos dados do experimento. Também é mostrado o resultado das covariâncias amostrais estimadas e a modelagem numérica da função covariância Gaussiana. No capítulo 6 apresenta-se os parâmetros da transformação geométrica estimados tanto para o Ajustamento quanto para a Colocação. Neste capítulo também é apresentada uma análise estatística bem como uma comparação da Colocação com o Ajustamento clássico tanto em termos de coordenadas cartesianas quanto em termos de coordenadas geodésicas.

O capítulo 7 é um fechamento do trabalho, onde são apresentadas as principais conclusões e as recomendações para futuros trabalhos.

2. CONCEITUAÇÃO FUNDAMENTAL

2.1 TIPOS DE ERROS DAS OBSERVAÇÕES

O estudo dos erros observacionais e seus comportamentos são essencialmente equivalentes ao estudo das próprias observações. Em outras palavras, o que tem sido classicamente referido como teoria dos erros é equivalente ao que é hoje conhecido como teoria das observações (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 3). Os erros nas observações podem ocorrer devido a várias causas como o descuido do observador, a falha instrumental, a influência das condições ambientais, ou ainda devido à técnica de observação empregada.

Tradicionalmente, os erros têm sido classificados em três tipos, a saber: erros grosseiros, erros sistemáticos e erros randômicos.

Erros grosseiros também conhecidos como “outliers” ou “blunders” são, usualmente, desvios de grande magnitude, o que às vezes o torna de fácil detecção. Segundo GEMAEL (1994, p. 59), muitas vezes somente um teste estatístico pode justificar ou não a rejeição de uma observação suspeita de abrigar um erro grosseiro. No entanto, erros grosseiros de moderada magnitude são difíceis de detectar mesmo com técnicas estatísticas modernas.

Uma importante parte do ajustamento se preocupa como detectar e remover “outliers” nas observações. O leitor interessado em maiores detalhes sobre a detecção e eliminação de “outliers” nos dados deve consultar (KAVOURAS, 1982; MARQUES, 1994; LEICK, 1995, p. 161 a 174; KUANG, 1996; MORAES, 2001, p. 179 a 203).

Erros sistemáticos ou modernamente chamados de efeitos sistemáticos são erros que variam sistematicamente em sinal ou mesmo em magnitude. GEMAEL (1994, p. 63) adverte que o predomínio de resíduos com um sinal deve servir de alerta quanto à existência de alguma influência de natureza sistemática. Segundo LEICK (1995, p. 97) erros sistemáticos são, particularmente, perigosos porque eles tendem a acumular.

Erros sistemáticos são assim chamados porque eles ocorrem de acordo com algum sistema determinístico os quais, quando conhecidos, podem ser expressos por algum relacionamento funcional (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 4) e, de acordo com GEMAEL (1994, p. 60) eles podem ser evitados por meio de técnicas especiais de observação ou eliminados a *posteriori* mediante fórmulas fornecidas pela teoria.

Se os erros são conhecidos então as observações podem ser corrigidas antes do ajustamento ou o modelo matemático pode ser estendido de tal maneira a incluir algum parâmetro adicional para absorver o efeito dos erros sistemáticos remanescentes.

Mesmo após todos os “outliers” serem detectados e removidos e as medidas corrigidas de todos os erros sistemáticos conhecidos, ainda persistirá alguma variação nas medidas (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 5). Esta variação resulta a partir de erros randômicos também conhecidos como erros aleatórios ou acidentais, os quais não apresentam nenhum relacionamento funcional baseado em um sistema determinístico.

Estes erros são usualmente pequenos de modo que a probabilidade de ocorrer um erro positivo ou negativo de uma dada magnitude é a mesma. Erros randômicos são inerentes ao próprio processo de medida e nunca podem ser eliminados. Eles são tratados estatisticamente no ajustamento.

2.2 COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO

A medida do grau de correlação entre duas variáveis X e Y pode ser descrita por um parâmetro chamado de covariância. Ela expressa a dependência entre as variáveis e é definida como (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 135; GEMAEL, 1994, p. 41):

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{xy} = E\{(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\}, \quad (2.1)$$

onde $E\{\cdot\}$ denota o operador esperança matemática e μ_x e μ_y são, respectivamente, as médias dos vetores X e Y .

O valor de σ_{xy} é um número real. Se σ_{xy} é positivo então as variáveis X e Y são ditas serem positivamente correlacionadas e quando σ_{xy} é negativo, as variáveis são ditas serem negativamente correlacionadas. Quando σ_{xy} é nulo, as variáveis são ditas serem não correlacionadas ou livre de correlação.

O grau de dependência entre as variáveis pode ser estendido para o caso multidimensional. Assim sendo, pode-se definir a chamada matriz variância-covariância da seguinte maneira (GEMAEL, 1994, p. 44):

$$\Sigma_x = E\{(X - U_x)(X - U_x)^T\}. \quad (2.2)$$

Segundo VANÍCEK e KRAKIWSKY (1986, p. 43), a matriz variância-covariância (MVC) ou simplesmente matriz covariância é, provavelmente, a quantidade mais importante da estatística multivariada usada em geodésia. Sua estrutura é obtida pela equação (2.2), a qual assume a forma:

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A MVC é uma matriz simétrica, isto é, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Os elementos na diagonal principal representam as variâncias σ_i^2 , enquanto que os elementos dispostos fora da diagonal são as covariâncias σ_{ij} entre as variáveis.

O coeficiente de correlação que descreve a dependência linear entre duas variáveis pode ser definido como (HAMILTON, 1964, p. 31):

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}, \quad (2.4)$$

onde σ_i e σ_j denotam, respectivamente, o desvio padrão de X_i e X_j . Uma propriedade importante dos coeficientes de correlação é (LEICK, 1995, p. 105):

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1. \quad (2.5)$$

As correlações calculadas pela equação (2.4) também podem ser dispostos numa matriz denominada de matriz correlação, a qual possui mesma ordem da matriz covariância. A matriz correlação tem a forma:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Assim como a matriz covariância, a matriz correlação também é simétrica, isto é, $\rho_{ij} = \rho_{ji}$. Se $i=j$, então os elementos calculados pela equação (2.4) assumem valores iguais a $\rho_{ij} = 1$ compondo a diagonal principal da matriz. Os elementos fora da diagonal assumem valores que variam segundo a equação (2.5).

2.3 PROPAGAÇÃO DE COVARIÂNCIAS

O processo de estimativa dos parâmetros de transformação pelo MMQ requer o conhecimento da MVC das observações. Estes parâmetros podem ser estimados desde que se conheçam as coordenadas de pontos comuns em ambos os referenciais. Normalmente, a MVC das coordenadas é conhecida por meio dos resultados do ajustamento quando a rede foi processada. Para o caso em questão, as observações são dadas pela diferença de coordenadas e sua respectiva MVC é geralmente obtida pela lei de propagação de covariâncias.

A lei de propagação de covariâncias permite estimar a MVC de um vetor aleatório multidimensional Y a partir do conhecimento da MVC de um outro vetor aleatório multidimensional X , sendo ambos ligados por um modelo geral dado por:

$$Y = F(X). \quad (2.7)$$

A função $F(X)$ pode ser linear ou não linear. Se $F(X)$ for não linear, o procedimento geralmente adotado é a sua expansão em série de Taylor permitindo reescrever a equação (2.7) de forma linear como (GEMAEL, 1994, p. 44 e 45; DALMOLIN, 2002, p. 56 a 63):

$$Y = G \cdot X + C, \quad (2.8)$$

onde:

$$G = \left. \frac{\partial Y}{\partial X} \right|_{(X_0)} \quad (2.9)$$

e C é um vetor constante.

A MVC do vetor aleatório Y é obtida pela lei de propagação de covariâncias a qual assume a forma (WELLS e KRAKIWSKY, 1971, p. 20 e 21; MIKHAIL, 1976, p. 76 a 84; MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 148 a 160; GEMAEL, 1994, p. 44 e 45):

$$\sum_Y = G \cdot \sum_X \cdot G^T. \quad (2.10)$$

A matriz de transformação G da equação (2.8) tem sido substituída pela assim chamada matriz Jacobiana J (MIKHAIL, 1976, p. 79) e a equação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\sum_\Delta = J \cdot \sum_X \cdot J^T, \quad (2.11)$$

sendo \sum_Δ a MVC das observações e a matriz Jacobiana J dada como na equação (2.9) por (MIKHAIL e GRACIE, 1981, p. 152):

$$J = \frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

As observações são dadas pela diferença de coordenadas que para um ponto genérico P_i se apresenta como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A matriz Jacobiana J dada pela equação (2.12) assume a forma genérica:

$$J = \frac{\partial \Delta}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_i} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial Y_i} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial Z_i} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_i} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial y_i} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_i} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial Y_i} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial Z_i} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_i} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial y_i} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \Delta_3}{\partial X_i} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial Y_i} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial Z_i} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial x_i} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial y_i} & \frac{\partial \Delta_3}{\partial z_i} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

a qual derivando a equação (2.13) e substituindo os valores na equação (2.14) apresenta-se numericamente como:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Para propósitos de estimativa da MVC das observações pode se considerar a MVC das coordenadas sob diferentes aspectos, sendo que no primeiro caso nenhuma correlação é considerada e no segundo caso considera-se a correlação entre as componentes da mesma realização. O terceiro caso onde é assumida correlação total² pode ser descartado, visto que, segundo THOMSON (1976, p. 61) as coordenadas são assumidas ser o resultado de ajustamentos de redes independentes de maneira que cada realização tenha a sua MVC associada.

² Todos os elementos de Σ_x são diferentes de zero.

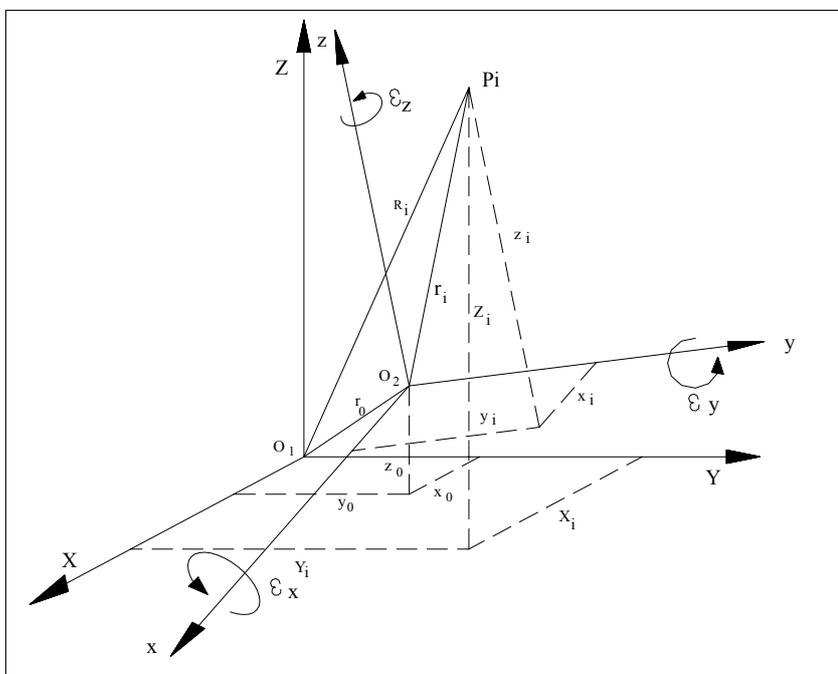
matriz diagonal. Por sua vez, o segundo caso expresso pela equação (2.19) mostra que além de somar as respectivas variâncias, o efeito da correlação deve ser considerado somando as respectivas covariâncias das componentes em cada realização para obter a MVC das observações. Neste caso, a MVC das observações é uma matriz bloco diagonal.

2.4 MODELO MATEMÁTICO PARA TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

O modelo matemático de transformação usado para esta aplicação é a transformação de similaridade no espaço tridimensional. Ela é também chamada de transformação isogonal, conforme ou de Helmert (LUGNANI, 1987, p.102). O modelo matemático desta transformação contém sete parâmetros e expressa o relacionamento entre dois referenciais por meio de três translações, três rotações e um fator de escala.

A Figura 2.1 mostra o relacionamento entre dois referenciais cartesianos tridimensionais, no qual o vetor posição de um ponto genérico P_i no referencial cartesiano (X, Y, Z) é dado por R_i e o vetor posição do mesmo ponto no referencial cartesiano (x, y, z) é dado por r_i . As translações representadas por (x_0, y_0, z_0) entram para compor o vetor r_0 e as rotações representadas por $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ podem ser expressas convenientemente por matrizes de rotação como mostra o Apêndice 1; o parâmetro (κ) é utilizado para expressar o fator de escala da transformação.

Figura 2.1 – Transformação no espaço tridimensional



Fonte: adaptado de PAGGI *et al.* (1994)

O modelo matemático da transformação de similaridade no espaço é dado, para qualquer ponto genérico P_i , por:

$$R_i = r_0 + \kappa \cdot R_\varepsilon \cdot r_i, \quad (2.20)$$

na qual a matriz R_ε , dada pela equação (A1.10) do Apêndice 1, é expressa convenientemente na forma:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

onde as rotações ε_x , ε_y e ε_z são dadas em radianos.

Para aplicação da transformação de similaridade no espaço é necessário que as coordenadas geodésicas (φ , λ , h) sejam transformadas em suas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais (X , Y , Z) pela equação (A2.1).

As três translações são justificadas pela não coincidência da origem dos dois referenciais; as três rotações são necessárias para expressar o não paralelismo, e um fator de escala é requerido para uniformizar (homogeneizar) a sua métrica. Assim, é necessário que existam pontos comuns, cujas coordenadas cartesianas sejam conhecidas em ambos os referenciais e os parâmetros da equação (2.20) são estimados pelo MMQ.

O fator de escala κ pode ser escrito como:

$$\kappa = 1 + \delta, \quad (2.22)$$

onde δ representa uma diferença de escala (LAMBECK, 1971, p. 38; THOMSON, 1976, p. 62; GEMAEL, 1981, p. 4.17). A equação (2.22) mostra que se os dois referenciais possuem o mesmo padrão linear, isto é, uma métrica homogênea, então a diferença de escala δ deve ser nula e o fator de escala κ igual à unidade.

Agora convém substituir a equação (2.22) na equação (2.20) para obter o modelo de forma compacta como:

$$R_i = r_0 + (1 + \delta) \cdot R_\varepsilon \cdot r_i \quad (2.23)$$

ou recorrendo à equação (2.21) para expressar o modelo geral na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1 + \delta) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

No atendimento ao objetivo proposto, o modelo matemático expresso pela equação (2.24) será utilizado tanto na sua forma direta quanto na sua forma inversa. Antes da utilização do modelo na sua forma direta, primeiro é necessário formular sistemas de equações tendo em vista a estimativa dos sete parâmetros de transformação, o que constitui a sua forma inversa. Para isto, as equações são formuladas com base nas coordenadas de pontos comuns (pontos de observação) conhecidas em ambas as realizações. A forma direta do modelo consiste na estimativa das coordenadas (X_i, Y_i, Z_i) a partir das coordenadas (x_i, y_i, z_i) e dos parâmetros estimados na sua forma inversa.

A forma inversa da equação (2.24) que consiste na estimativa dos sete parâmetros de transformação será abordada na próxima seção deste capítulo. Nela, o assunto é tratado de maneira suficiente para introduzir o leitor no contexto deste trabalho. Detalhes com relação ao assunto devem ser consultados em: WELLS e KRAKIWSKY (1971); KRAKIWSKY (1975); THOMSON (1976); MIKHAIL (1976); VANÍCEK (1980); GEMAEL (1994); LEICK (1995); ANDERSON e MIKHAIL (1998) e COSTA (1999).

2.5 ESTIMATIVAS DE PARÂMETROS PELO MÉTODO PARAMÉTRICO

Esta seção apresenta o método paramétrico cuja descrição é feita no sentido de atender a uma etapa do trabalho que consiste na estimativa dos parâmetros de transformação entre dois referenciais. Detalhes fogem ao objetivo deste trabalho e, ao leitor interessado, alguns trabalhos pertinentes são: WELLS e KRAKIWSKY (1971, p. 86 a 100); VANÍCEK (1980, p. 133 a 232); GEMAEL (1994, p. 115 a 134); LEICK (1995, p. 93 a 214); DALMOLIN (2002, p. 89 a 120).

O método paramétrico é também denominado de método das equações de observação, já que cada observação contribui com uma equação. No caso em evidência, as observações são dadas pela diferença das coordenadas entre estações comuns em ambos os referenciais, isto é, a diferença entre os vetores R_i e r_i que figuram na equação (2.20). Cada estação comum gera três observações e, conseqüentemente, três equações, onde as incógnitas são estimadas utilizando o critério do MMQ.

O MMQ é o método utilizado para estimar as incógnitas envolvidas no processo de ajustamento que consiste na minimização da função $V^T P V$, as quais estão, de algum modo, ligadas a um conjunto de observações redundantes por meio de um modelo matemático adequado.

Neste caso, as observações e parâmetros são relacionados por uma função matemática explícita F da forma:

$$L_a = F(X_a), \quad (2.25)$$

onde:

L_a – Vetor das observações ajustadas;

X_a – Vetor dos parâmetros ajustados.

As observações ajustadas L_a são obtidas adicionando um vetor V de resíduos ao vetor das observações L_b de maneira que:

$$L_a = L_b + V \quad (2.26)$$

e o vetor dos parâmetros ajustados X_a pode ser estimado por:

$$X_a = X_0 + X, \quad (2.27)$$

com:

X_0 – Vetor dos parâmetros aproximados;

X – Vetor das correções.

O vetor de resíduos V é interpretado como “erros”, os quais entram como correções para as observações L_b como mostrado na equação (2.26) e o vetor X que compõe a equação (2.27) é estimado no processo de ajustamento.

É oportuno ressaltar que, para matrizes e vetores aqui apresentados, o índice \underline{a} denota quantidades ajustadas, o índice $\underline{0}$ representa quantidades aproximadas e o índice \underline{b} é usado para quantidades observadas. O número total de estações comuns com coordenadas conhecidas em ambos os referenciais é denotado por \underline{n} e o número de parâmetros por \underline{u} .

No caso mais geral, o modelo matemático representado pela equação (2.25) é não linear e deve ser linearizado para o processo de estimativa das incógnitas pelo MMQ. Para isto, usualmente têm se recorrido ao desenvolvimento do modelo em série de Taylor, após o que substituindo as equações (2.26) e (2.27) na equação (2.25) e negligenciando parcelas de ordem dois e superiores, obtém-se:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{(X_0)} \cdot X, \quad (2.28)$$

o qual pode melhor ser escrito como (KRAKIWSKY, 1975, p. 8):

$$L_b + V = L_0 + A \cdot X = A \cdot X_a. \quad (2.29)$$

Após alguma manipulação algébrica, convém reescrever a equação (2.29) dimensionando matrizes e vetores para aplicação de interesse da seguinte forma:

$${}_{3n}V_1 = {}_{3n}A_7 \cdot X_1 + {}_{3n}L_1, \quad (2.30)$$

onde:

$${}_{3n}A_7 = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{(X_0)}; \quad (2.31)$$

$${}_{3n}L_{0_1} = F(X_0); \quad (2.32)$$

$${}_{3n}L_1 = {}_{3n}L_{0_1} - {}_{3n}L_{b_1}. \quad (2.33)$$

A equação (2.30) constitui o modelo linearizado para o método paramétrico de ajustamento. A matriz A das derivadas parciais deve ser avaliada para um valor particular de X_0 . Da mesma forma, o vetor L_0 também é avaliado para os parâmetros aproximados X_0 .

A solução da equação (2.30) para os parâmetros X utilizando o critério do MMQ é obtida minimizando-se a forma quadrática fundamental:

$$\phi = V^T \cdot P \cdot V = \text{mínimo} , \quad (2.34)$$

o que equivale minimizar a soma dos quadrados dos resíduos ponderados.

Antes de definir a matriz dos pesos P, primeiro é necessário definir a matriz dos coeficientes de peso ou matriz cofatora Q dada por (KRAKIWSKY, 1975, p. 14; GEMAEL, 1994, p. 72; LEICK, 1995, p. 99):

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_{L_b} \quad (2.35)$$

e a matriz dos pesos P fica definida como:

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \cdot \sum_{L_b}^{-1}, \quad (2.36)$$

com:

\sum_{L_b} – MVC das observações;

σ_0^2 – Variância da observação de peso unitário a priori.

Para minimizar a equação (2.34) e obter a solução para os parâmetros, a sua primeira derivada parcial, com relação a X, deve ser nula. Da equação (2.34), tem-se:

$$\phi = F(V) \quad (2.37)$$

e da equação (2.30):

$$V = G(X). \quad (2.38)$$

Após aplicação da regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \phi}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial X}. \quad (2.39)$$

As componentes da equação (2.39) são obtidas por derivação matricial e dadas como (WELLS e KRAKIWSKY, 1971, p. 87; LEICK, 1995, p. 510 e 511):

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2 \cdot V^T \cdot P; \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = A. \quad (2.41)$$

Deste modo, substituindo as equações (2.40) e (2.41) na equação (2.39) e anulando a sua primeira derivada parcial, tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2 \cdot V^T \cdot P \cdot A = 0, \quad (2.42)$$

a qual pode ser reescrita, após transpor ambos os membros, como:

$$A^T \cdot P \cdot V = 0. \quad (2.43)$$

Substituindo-se a equação (2.30) na equação (2.43), obtém-se:

$$A^T \cdot P \cdot (A \cdot X + L) = 0, \quad (2.44)$$

de maneira que a equação (2.44) pode ser reescrita como:

$$A^T \cdot P \cdot A \cdot X + A^T \cdot P \cdot L = 0 \quad (2.45)$$

ou de forma compacta, após dimensionar matrizes e vetores para esta aplicação, como:

$${}_7N_{7 \cdot 7} \cdot X_1 + {}_7U_1 = {}_7O_1, \quad (2.46)$$

com:

$${}_7N_{7 \cdot 7} = {}_7A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot A_{7 \cdot 7}; \quad (2.47)$$

$${}_7U_1 = {}_7A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot L_1. \quad (2.48)$$

A solução da equação (2.46) para os parâmetros X pode ser obtida, após inverter a matriz das equações normais, por:

$${}_7X_1 = -{}_7N_{7 \cdot 7}^{-1} \cdot {}_7U_1. \quad (2.49)$$

A equação (2.49) mostra que, no caso desta aplicação, a matriz a ser invertida possui ordem igual a sete, o que não oferece dificuldade do ponto de vista computacional. Para outras aplicações onde se tem elevado número de incógnitas a serem estimadas então a inversão da matriz N pode não ser tão simples, exigindo formas alternativas para a solução do problema. A literatura pertinente mostra outras formas para resolver sistemas de equações, como é o caso da equação (2.49), sem a necessidade de utilizar a inversão da matriz dos coeficientes N. Neste caso, a decomposição de Cholesky tem sido recomendada como uma maneira muito eficiente (VANÍCEK E KRAKIWSKY, 1986, p. 209; LEICK, 1995, p. 507; DRACUP, 1996, p. 14). Um estudo comparativo de algoritmos usando a decomposição de Cholesky é apresentado por DE JONGE (1992).

Após a estimativa dos parâmetros X pela equação (2.49), o vetor de resíduos V é obtido recorrendo-se à equação (2.30). As observações ajustadas L_a são obtidas da equação (2.26) e o vetor dos parâmetros ajustados X_a é estimado pela equação (2.27).

Com esta abordagem objetiva, tem-se o interesse em estimar os parâmetros vinculados às observações por meio de um modelo matemático. Estes parâmetros

encontram-se implícitos no modelo matemático da transformação de similaridade apresentado na equação (2.24).

No objetivo de explicitar as observações ajustadas L_a como uma função dos parâmetros ajustados X_a na forma da equação (2.25), é necessário manipular a equação (2.24), no sentido de expressá-la numa forma mais conveniente à constituição de equações de observação. Desta maneira, tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_0 + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_0 + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} x_i + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_i + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_i + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

A diferença de escala δ e as rotações diferenciais ε_x , ε_y e ε_z são de pequena magnitude (GEMAEL, 1991, p. 12.16; LEICK, 1995, p. 478; MORAES, 2001, p. 164), de maneira que as parcelas de segunda ordem $\delta \cdot \varepsilon_x$, $\delta \cdot \varepsilon_y$ e $\delta \cdot \varepsilon_z$ são ainda menores. Como exemplo, tomando $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 5$ segundos e $\delta = 10$ ppm, então este produto equivale a $2,42e^{-10}$. Assim sendo, estas parcelas de segunda ordem podem ser negligenciadas, pois não contribuem de forma significativa para estimativa das coordenadas finais de modo que a equação (2.50) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \varepsilon_z \cdot y_i - \varepsilon_y \cdot z_i \\ y_0 + \varepsilon_x \cdot z_i - \varepsilon_z \cdot x_i \\ z_0 + \varepsilon_y \cdot x_i - \varepsilon_x \cdot y_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Reagrupando os termos da equação (2.51) pode-se reescrevê-la na forma:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 0 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

ou de maneira mais elegante como:

$$\begin{bmatrix} X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \delta & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

O sistema formado pela equação (2.53) representa um conjunto de $3n$ equações, cujas incógnitas são os sete parâmetros de transformação, a saber:

3 translações : (x_0, y_0, z_0) ;

3 rotações : $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$;

1 diferença de escala : (δ)

ou de forma vetorial como:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Antes de iniciar o ajustamento, o vetor dos parâmetros aproximados X_0 deve ser conhecido. A equação (2.53) é linear com relação aos parâmetros e, por isto, pode ser arbitrado um valor nulo para o vetor dos parâmetros aproximados X_0 de maneira que:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

O vetor L_0 dado pela equação (2.32) pode ser obtido pela equação (2.53) quando seu segundo membro é avaliado para os parâmetros aproximados X_0 e o primeiro membro da equação (2.53) constitui o vetor L_b das observações. Desta maneira, o vetor L fica determinado recorrendo-se à equação (2.33).

A matriz A das derivadas parciais dada pela equação (2.31) é obtida derivando a equação (2.53) com relação aos parâmetros. Cada estação P_i pode gerar uma sub-matriz A_i e um sub-vetor L_i os quais são dados, respectivamente, como:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{bmatrix}; \quad (2.56)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

A matriz A é obtida pela concatenação de todas as sub-matrizes A_i e, da mesma maneira, o vetor L é formado pela concatenação de todos os sub-vetores L_i , de modo que se pode apresentá-los como estruturas do tipo:

$${}_{3n}A_7 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}; \quad (2.58)$$

$${}_{3n}L_1 = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

A composição da matriz A na equação (2.58) é feita para todas as estações comuns, a qual pode-se apresentar de forma mais geral como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_1 & y_1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_1 & 0 & -x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -y_1 & x_1 & 0 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_2 & y_2 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 & 0 & -x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2 & x_2 & 0 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_n & y_n & x_n \\ 0 & 1 & 0 & z_n & 0 & -x_n & y_n \\ 0 & 0 & 1 & -y_n & x_n & 0 & z_n \end{bmatrix}; \quad (2.60)$$

e a composição do vetor L na equação (2.59) fica obtida por:

$$L = \begin{bmatrix} x_1 - X_1 \\ y_1 - Y_1 \\ z_1 - Z_1 \\ x_2 - X_2 \\ y_2 - Y_2 \\ z_2 - Z_2 \\ \vdots \\ x_n - X_n \\ y_n - Y_n \\ z_n - Z_n \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Na solução da equação (2.49) para os parâmetros X é necessário compor a matriz N pela equação (2.47) e o vetor U pela equação (2.48), os quais utilizam a matriz dos pesos P estimada pela equação (2.36). Nesta equação, o valor de σ_0^2 é arbitrado antes do ajustamento, isto é, na composição da matriz dos pesos P e a sua escolha não interfere nas estimativas dos vetores incógnitos X e V .

Após o ajustamento pode-se obter uma estimativa da variância da observação de peso unitário a *posteriori*, a qual é formulada em função do vetor de resíduos e da matriz dos pesos e dada em (GEMAEL, 1994, p. 100; LEICK, 1995, p. 112) como:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{S}, \quad (2.62)$$

onde S é a redundância do modelo representado pela equação (2.30) ou também conhecido como graus de liberdade, o qual pode ser obtido por:

$$S = 3 \cdot n - 7. \quad (2.63)$$

A MVC dos parâmetros ajustados, cuja estrutura é a mesma da equação (2.3), pode ser estimada pela inversa da matriz N dada na equação (2.47) escalada pela variância a *posteriori* dada na equação (2.62) do seguinte modo:

$$\sum x_a = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1}. \quad (2.64)$$

A comparação entre a variância a *priori* σ_0^2 e a variância a *posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$ pode ser um indicador da qualidade global do ajustamento. Para constatar se a discrepância entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$, quando houver, é significativa a um certo nível de significância³, então é usual aplicar um teste de hipótese baseado na distribuição χ^2 .

Na análise dos resultados do ajustamento, tem sido utilizado o teste global baseado na distribuição χ^2 . A estatística deste teste é dada por (GEMAEL, 1994, p. 123; LEICK, 1995, p. 143):

$$\chi_c^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \cdot S = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{\sigma_0^2}. \quad (2.65)$$

O teste unilateral é frequentemente empregado na prática e, para aplicação do teste, duas hipóteses são formuladas (MIKHAIL, 1976, p. 294 e 295; KAVOURAS, 1982, p. 31 e 32; HAMILTON, 1964, p. 82 e 83):

³ O nível de significância geralmente é fixado em 5%.

H_0 – hipótese básica : $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

H_1 – hipótese alternativa : $\sigma_0^2 < \hat{\sigma}_0^2$.

A hipótese básica H_0 é aceita se :

$$\chi_c^2 < \chi_{t(s;1-\alpha)}^2, \quad (2.66)$$

onde:

χ_c^2 – Qui-Quadrado calculado, baseado na forma quadrática dos resíduos;

χ_t^2 – Qui-Quadrado teórico, baseado na distribuição χ^2 ;

α – Nível de significância (relacionado ao teste);

$(1-\alpha)$ – Nível de confiança (relacionado ao intervalo de confiança).

3. COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

3.1 FUNDAMENTO TEÓRICO E MODELO MATEMÁTICO

Em 1795, C. F. Gauss e A. M. Legendre simultaneamente, mas de forma independente, foram os primeiros a usar o MMQ para o processamento de observações astronômicas e, desde então, matemáticos e outros cientistas têm tentado generalizar o método original (MORITZ e SÜNKEL, 1978, p. 48).

O método de estimação conhecido como Colocação⁴ por Mínimos Quadrados é uma generalização ou extensão do Ajustamento por Mínimos Quadrados (MORITZ, 1973, p. 2). Ele combina, sob o critério do MMQ, o Ajustamento, a Filtragem e a Interpolação (GEMAEL, 1994, p. 267). O leitor interessado em maiores detalhes sobre a teoria da estimação e filtragem deve consultar: JAZWINSKI (1970); GELB *et al.* (1974); KRAKIWSKY (1975) e MIKHAIL (1976).

O modelo matemático para o Ajustamento pelo método paramétrico foi visto na seção 2.5 do capítulo 2. Como mostra a equação (2.29), a sua forma linearizada é dada por:

$$L_b = A \cdot X_a - V. \quad (3.1)$$

O modelo básico da Colocação é uma generalização da equação (3.1) e dada por (MORITZ, 1972, p. 7; KRAKIWSKY, 1975, p. 60), a qual dimensionada para a aplicação de interesse assume a forma:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}A_u \cdot {}_{3q}X_{a1} + {}_{3q}s'_1 + {}_{3q}n_1, \quad (3.2)$$

no qual o vetor dos resíduos é substituído pelo vetor do ruído n (sinal oposto), além do acréscimo de uma nova grandeza, o sinal s' , onde:

L_b – representa o vetor das observações;

A – matriz das derivadas parciais como na equação (2.31);

X_a – vetor de parâmetros ajustados como na equação (2.27);

n – vetor dos ruídos (erros das observações);

s' – vetor dos sinais nos q pontos de observação;

⁴ Palavra traduzida do inglês Collocation.

q – número de pontos de observação;

u – número de parâmetros a serem estimados.

Pela equação (3.2), tem-se que uma observação é formada por três componentes, isto é, uma componente sistemática $A.X_a$ e duas componentes aleatórias n e s' (MORITZ, 1973, p. 5). A matriz A expressa o efeito dos parâmetros X_a nas observações L_b . A componente sistemática $A.X_a$ é aquela que pode ser representada por algum modelo matemático, sendo denominada de parte modelada da observação. As componentes aleatórias n e s' representam a parte não modelada.

Segundo GEMAEL (1994, p. 268), a novidade da Colocação está no sinal, que pode ser considerado como a parte não modelada de uma “observação sem erro”. O sinal s' também pode ser interpretado como uma “falha” no modelo matemático, que é a inabilidade do modelo para descrever completamente o atual relacionamento entre as medidas L_b e os parâmetros X_a .

O geodesta realiza as suas observações, obviamente, em um número limitado de pontos nos quais estão presentes as duas grandezas aleatórias n e s' ; mas o sinal também existe em pontos onde não são realizadas as observações e tem caráter contínuo, o que permite a sua utilização em interpolação (GEMAEL, 1994, p. 268).

Este método é usado em interpolação (KRAUS e MIKHAIL, 1972), em problemas de transformação de coordenadas em Geodésia e Fotogrametria (MORITZ, 1973; SCHWARZ, 1974; RAMPAL, 1976; CAMARGO e DALMOLIN, 1995), permite a determinação simultânea de posições geodésicas e do campo da gravidade terrestre (MORITZ, 1972); a grande vantagem é que ele permite a combinação de diferentes tipos de dados no mesmo modelo matemático.

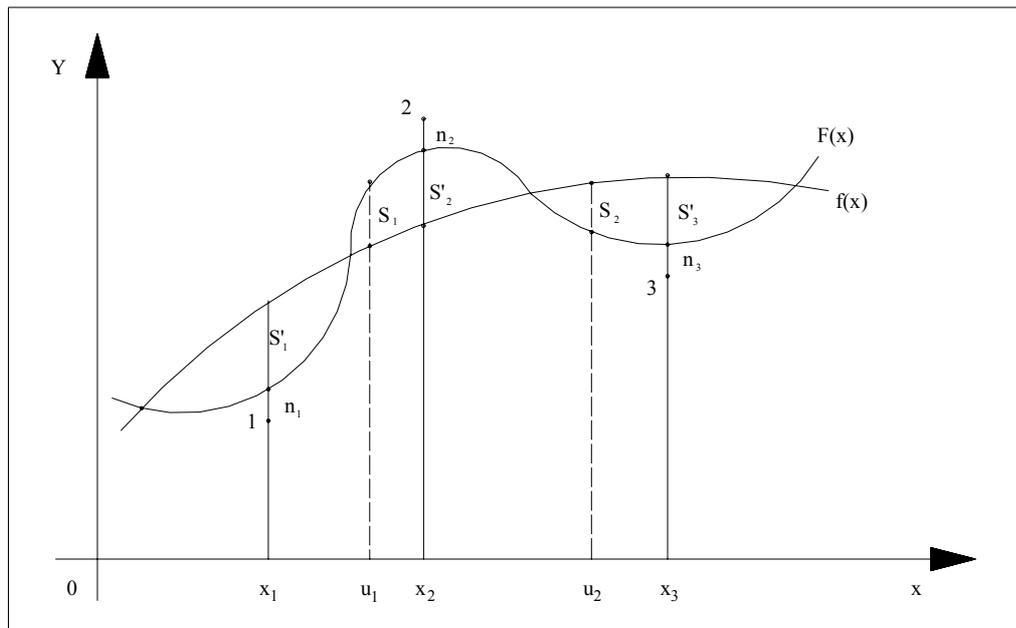
A Colocação é um processo que combina o ajustamento, a filtragem e a interpolação. A estimativa dos parâmetros X_a pode ser considerada como o ajustamento, a remoção do ruído n das observações como uma filtragem e a estimativa do sinal s em outros pontos onde não foram realizadas observações constitui a interpolação. Estes pontos são chamados de pontos de cálculo e é neles que o sinal s é dito ser “predito”.

A Figura 3.1 mostra uma representação geométrica para a Colocação. Os q pontos de observação são representados pelos pontos (x_1, x_2, x_3) , enquanto que os

p pontos de cálculo pelos pontos (u_1, u_2). A função $F(x)$ a ser interpolada consiste de uma parte sistemática $f(x)$ e uma parte aleatória $s(x)$, então:

$$F(x) = f(x) + s(x). \quad (3.3)$$

Figura 3.1 – Representação geométrica da Colocação



Os valores de $F(x)$ nos pontos de observação foram medidos, porém as medidas estão afetadas pelos erros de medida n . Desta maneira, as observações L_b podem ser dadas como:

$$L_b = F(x) + n. \quad (3.4)$$

Após remover o ruído n das observações L_b , o que constitui a filtragem, fica conveniente reescrever a equação (3.4) como:

$$L_b - n = F(x), \quad (3.5)$$

na qual substituindo a equação (3.3) pode ser reescrita na forma:

$$L_b - n = f(x) + s(x), \quad (3.6)$$

o que mostra que na interpolação, os valores obtidos já estão filtrados do ruído n .

O primeiro membro da equação (3.6) pode ser interpretado como uma “observação sem erro”, isto é, uma observação na qual seu erro (ruído n) foi removido. Esta “observação sem erro” é formada por uma parte sistemática $f(x)$ e por outra parte aleatória $s(x)$.

Nos problemas de transformações de coordenadas, como é o caso do presente estudo, a parte sistemática $A.X_a$ representa o modelo matemático de transformação expresso pela equação (2.24), a parte aleatória n constitui os erros das observações e s' são as distorções sistemáticas residuais.

Segundo SCHWARZ (1974, p. 173), o sinal s' representa o efeito integrado de diferentes influências, tais como a inadequabilidade do modelo matemático, distorções locais das redes, etc.

Na interpolação, o interesse é estimar o sinal s para os p pontos diferentes daqueles de observação, isto é, estimar o sinal s nos p pontos de cálculo, então (MORITZ, 1972, p. 8):

$${}_{3p}S_1 = \begin{bmatrix} S_{x_1} \\ S_{y_1} \\ S_{z_1} \\ \vdots \\ S_{x_p} \\ S_{y_p} \\ S_{z_p} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

O vetor dos sinais s' e o vetor dos ruídos n , para os q pontos de observação, assumem as seguintes estruturas:

$${}_{3q}S'_1 = \begin{bmatrix} S'_{x_1} \\ S'_{y_1} \\ S'_{z_1} \\ \vdots \\ S'_{x_q} \\ S'_{y_q} \\ S'_{z_q} \end{bmatrix}; \quad (3.8)$$

$${}_{3q}n_1 = \begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \\ \vdots \\ n_{x_q} \\ n_{y_q} \\ n_{z_q} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Por conveniência, é comum introduzir um novo vetor aleatório z representando o efeito integrado do sinal s' e do ruído n , de maneira que:

$${}_{3q}Z_1 = {}_{3q}S'_1 + {}_{3q}n_1, \quad (3.10)$$

ou matricialmente, após considerar as equações (3.8) e (3.9) como:

$${}_{3q}Z_1 = \begin{bmatrix} s'_{x_1} \\ s'_{y_1} \\ s'_{z_1} \\ \vdots \\ s'_{x_q} \\ s'_{y_q} \\ s'_{z_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \\ \vdots \\ n_{x_q} \\ n_{y_q} \\ n_{z_q} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Agora, recorrendo à equação (3.10), pode-se reescrever a equação (3.2) como:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}A_{u \cdot u} X_{a1} + {}_{3q}Z_1. \quad (3.12)$$

O vetor dos sinais s nos p pontos de cálculo combinado com o vetor aleatório z , resulta em um novo vetor v na forma:

$${}_{3p+3q}V_1 = \begin{bmatrix} {}_{3p}S_1 \\ {}_{3q}Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

o qual permite reescrever a equação (3.12) como:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}A_{u \cdot u} X_{a1} + {}_{3q}B_{3p+3q} \cdot {}_{3p+3q}V_1. \quad (3.14)$$

A matriz B da equação (3.14) assume a forma:

$${}_{3q}B_{3p+3q} = \begin{bmatrix} {}_{3q}0_{3p} & {}_{3q}I_{3q} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde a matriz ${}_{3q}0_{3p}$ é uma matriz nula e a matriz ${}_{3q}I_{3q}$ representa uma matriz identidade, de maneira que a estrutura geral da matriz B fica dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

O propósito de introduzir a matriz nula na equação (3.15) foi para envolver o sinal s (a ser predito) na equação (3.14) sem, contudo, modificar o modelo

matemático original dado pela equação (3.12). Para mostrar isto, convém substituir as equações (3.13) e (3.15) na equação (3.14), da qual obtém-se:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}A_{u \cdot u} X_{a1} + \begin{bmatrix} {}_{3q}0_{3p} & {}_{3q}I_{3q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_{3p}S_1 \\ {}_{3q}Z_1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) pode ainda ser manipulada de forma que:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}A_{u \cdot u} X_{a1} + {}_{3q}Z_1, \quad (3.18)$$

a qual é idêntica ao modelo matemático original dado pela equação (3.12).

Na equação (3.14), o termo $A.X_a$ pode ser substituído pelo seu equivalente dado na equação (2.29), de modo que:

$${}_{3q}L_{b1} = {}_{3q}L_{01} + {}_{3q}A_{u \cdot u} X_{1+3q} + {}_{3q}B_{3p+3q} \cdot {}_{3p+3q}v_1 \quad (3.19)$$

ou reescrita como:

$${}_{3q}A_{u \cdot u} X_{1+3q} + {}_{3q}B_{3p+3q} \cdot {}_{3p+3q}v_1 + {}_{3q}W_1 = 0, \quad (3.20)$$

onde o vetor W faz o papel do vetor L dado na equação (2.33), a matriz A é dada como na equação (2.31), a matriz B pela equação (3.16), o vetor v pela equação (3.13) e o vetor X representa os parâmetros incógnitos a serem estimados.

3.2 MATRIZ VARIÂNCIA COVARIÂNCIA

As incógnitas envolvidas na equação (3.20) podem ser estimadas utilizando o critério do MMQ como dado na equação (2.34) e minimizando a soma dos quadrados dos “resíduos” ponderados por:

$$\phi = v^T \cdot P \cdot v = \text{mínimo}, \quad (3.21)$$

onde o vetor v é dado pela equação (3.13) e P é interpretada como matriz peso para a Colocação.

A matriz dos coeficientes de peso, também denominada de matriz cofatora Q é dada por (MORITZ e SÜNKEL, 1978, p. 55):

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum v, \quad (3.22)$$

e a matriz dos pesos P fica obtida como:

$${}_{3p+3q} P_{3p+3q} = Q^{-1} = \sigma_0^2 \cdot \sum v^{-1}. \quad (3.23)$$

Por definição, os vetores s' , n e z são vetores aleatórios com média nula e respectivas MVC's definidas como:

$$\sum_{s'} = \text{cov}(s', s') = E\{s' s'^T\}; \quad (3.24)$$

$$\sum_n = \text{cov}(n, n) = E\{nn^T\}; \quad (3.25)$$

$$\sum_z = \text{cov}(z, z) = E\{zz^T\}. \quad (3.26)$$

A MVC do vetor aleatório z , dada pela equação (3.26), é obtida pela soma da MVC do sinal s' com a MVC do ruído n , a qual é igual a MVC das observações L_b e dada por (CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 7):

$$\sum_z = \sum_{L_b} = \sum_{s'} + \sum_n, \quad (3.27)$$

desde que o ruído n não tenha correlação com o sinal s' (MORITZ, 1972, p. 11; KRAKIWSKY, 1975, p. 64 e GEMAEL, 1994, p. 270).

A informação sobre a correlação entre as observações L_b é expressa pela MVC do sinal s' , uma vez que os ruídos não são correlacionados entre si. Este relacionamento é expresso na equação (3.27). Por simplicidade, admite-se também que a variância do ruído n assuma o mesmo valor em todos os pontos, de maneira que a sua MVC fica obtida por:

$$\sum_n = \text{cov}(n, n) = \sigma_n^2 \cdot I \quad (3.28)$$

ou de forma matricial como:

$$\Sigma_n = \sigma_n^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde σ_n^2 é a variância do ruído n e I é a matriz identidade de ordem igual ao número de observações.

A MVC do vetor aleatório v definido na equação (3.13) é dada por (MORITZ, 1972, p. 9; CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 8):

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{sz} \\ \Sigma_{zs} & \Sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{sL_b} \\ \Sigma_{L_b s} & \Sigma_{L_b} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

onde:

Σ_s – MVC do sinal s nos p pontos de cálculo;

Σ_{L_b} – MVC das observações L_b ;

Σ_{sL_b} – Matriz covariância cruzada entre o sinal s e as observações L_b .

Vale ainda a seguinte relação (GEMAEL, 1994, p. 271; CAMARGO e DALMOLIN, 1995, p. 8):

$$\Sigma_{sL_b} = \Sigma_{ss'} \quad (3.31)$$

e

$$\Sigma_{L_b s} = \Sigma_{sL_b}^T. \quad (3.32)$$

Das equações (3.23) e (3.30) pode-se obter a matriz dos pesos para a Colocação como:

$$P = \sigma_0^2 \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_s & \Sigma_{sL_b} \\ \Sigma_{L_b s} & \Sigma_{L_b} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.33)$$

As matrizes Σ_s , $\Sigma_{s'}$ e $\Sigma_{ss'}$ podem ser estimadas a partir da função covariância, a qual pode ser teoricamente conhecida ou pode ser modelada a partir dos dados. No capítulo 4 será apresentado um estudo sobre a função covariância Gaussiana e suas aplicações no contexto deste trabalho.

3.3 MINIMIZAÇÃO E SOLUÇÃO

O modelo original da Colocação, dado pela equação (3.12), foi modificado por um artifício matemático o qual permitiu escrever a equação (3.20) convenientemente na forma do método combinado, cuja solução é bem conhecida na literatura. O método padrão para resolver este problema é o método de Lagrange. O leitor interessado em maiores detalhes a respeito do método combinado deve consultar: WELLS e KRAKIWSKY (1971, p. 101 a 120); KRAKIWSKY (1975, p. 7 a 26); MIKHAIL (1976, p. 110 a 135); GEMAEL (1994, p. 165 a 177); LEICK (1995, p. 93 a 214); DALMOLIN (2002, p. 121 a 144).

Além de minimizar a função $v^T \cdot P \cdot v$ dada pela equação (3.21), as equações normais relacionando as quantidades desconhecidas v , K e X para as quantidades conhecidas P , A , B e W são obtidas a partir da seguinte função de variação:

$$\phi(v, K, X) = v^T \cdot P \cdot v - 2 \cdot K^T \cdot (A \cdot X + B \cdot v + W), \quad (3.34)$$

onde K é um vetor dos chamados multiplicadores de Lagrange.

A equação (3.34) é uma função de três variáveis, isto é, os vetores v , K e X . Para obter a solução das equações normais é necessário anular as primeiras derivadas parciais desta função com relação às incógnitas, obtendo-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = 2 \cdot P \cdot v - 2 \cdot B^T \cdot K = 0; \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -2 \cdot (A \cdot X + B \cdot v + W) = 0; \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -2 \cdot A^T \cdot K = 0. \quad (3.37)$$

As equações (3.35), (3.36) e (3.37) podem melhor ser reescritas como:

$$P \cdot v - B^T \cdot K = 0; \quad (3.38)$$

$$A \cdot X + B \cdot v + W = 0; \quad (3.39)$$

$$A^T \cdot K = 0, \quad (3.40)$$

as quais devem ser manipuladas no sentido de obter a solução para as incógnitas, nominalmente os vetores v , K e X .

Primeiro, o vetor v da equação (3.38) deve ser escrito em função do vetor K e substituído na equação (3.39) resultando:

$$A \cdot X + B \cdot P^{-1} \cdot B^T \cdot K + W = 0, \quad (3.41)$$

onde o vetor K deve ser escrito em função do vetor X e substituído na equação (3.40) de maneira que:

$$-A^T \cdot (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot (A \cdot X + W) = 0. \quad (3.42)$$

Na equação (3.42), o termo $B \cdot P^{-1} \cdot B^T$ pode ser obtido⁵ pela substituição das equações (3.15) e (3.33) por:

$$B \cdot P^{-1} \cdot B^T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum S & \sum_{SL_b} \\ \sum_{L_b S} & \sum_{L_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \sum_{L_b}. \quad (3.43)$$

As expressões de cálculo são dadas dimensionadas para a aplicação atual. A estimativa para o vetor X é obtida pela substituição da equação (3.43) na equação (3.42), da qual tem-se:

$${}_u X_1 = - \left[{}_u A_{3q}^T \cdot {}_{3q} (\sum_{L_b})_{3q}^{-1} \cdot {}_{3q} A_u \right]^{-1} \cdot \left[{}_u A_{3q}^T \cdot {}_{3q} (\sum_{L_b})_{3q}^{-1} \cdot W_1 \right] \quad (3.44)$$

e o vetor K é derivado da equação (3.41) também pela substituição da equação (3.43) resultando-se:

$${}_{3q} K_1 = - {}_{3q} (\sum_{L_b})_{3q}^{-1} \cdot ({}_{3q} A_u \cdot {}_u X_1 + {}_{3q} W_1). \quad (3.45)$$

A estimativa do vetor v é obtida pela equação (3.38) e se apresenta como:

$${}_{3p+3q} V_1 = {}_{3p+3q} P^{-1} \cdot {}_{3p+3q} B_{3q}^T \cdot {}_{3q} K_1. \quad (3.46)$$

O vetor X das correções é estimado pela equação (3.44) possibilitando a estimativa do vetor K dos multiplicadores de Lagrange pela equação (3.45) e, finalmente, a estimativa do vetor v é obtida pela equação (3.46).

O vetor X_a dos parâmetros ajustados pode ser estimado por:

$$X_a = X_0 + X, \quad (3.47)$$

onde X_0 é o vetor dos parâmetros aproximados dado pela equação (2.55).

Na estimativa do vetor v pela equação (3.46), convém obter uma expressão equivalente para o termo $P^{-1} \cdot B^T$ recorrendo as equações (3.15) e (3.33) e fazendo $\sigma_0^2 = 1$ como na equação (3.43), de forma que:

$$P^{-1} \cdot B^T = \begin{bmatrix} \sum S & \sum_{SL_b} \\ \sum_{L_b S} & \sum_{L_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{SL_b} \\ \sum_{L_b} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

⁵ Por conveniência, a variância *a priori* σ_0^2 foi arbitrada igual a unidade, isto é, $\sigma_0^2 = 1$.

A estimativa para o sinal s nos p pontos de cálculo e para o vetor z os quais compõem a equação (3.13), é obtida substituindo a equação (3.48) na equação (3.46) obtendo-se:

$${}_{3p+3q}V_1 = \begin{bmatrix} {}_{3p}S_1 \\ {}_{3q}Z_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{L_b}^{S_{L_b}} \\ \sum_{L_b} \end{bmatrix} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot (A \cdot X + W), \quad (3.49)$$

ou de forma a explicitar os vetores s e z por:

$${}_{3p}S_1 = - \sum_{S_{L_b}} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot (A \cdot X + W); \quad (3.50)$$

$${}_{3q}Z_1 = -(A \cdot X + W). \quad (3.51)$$

O vetor z estimado pela equação (3.51) representa o efeito integrado do sinal s' e do ruído n nos q pontos de observação como mostra a equação (3.11). Assim, além do vetor dos parâmetros X_a e do vetor dos sinais s , pode-se obter uma estimativa para o sinal s' e para o ruído n , respectivamente, por (KRAKIWSKY, 1975, p. 80):

$${}_{3q}S'_1 = - \sum_{S'} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot (A \cdot X + W); \quad (3.52)$$

$${}_{3q}n_1 = - \sum_n \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot (A \cdot X + W). \quad (3.53)$$

A formulação usual da Colocação por Mínimos Quadrados requer a inversão de matrizes com dimensões igual ao número de observações como pode ser visto nas equações (3.44), (3.45), (3.50), (3.52) e (3.53). Em tais procedimentos podem surgir dificuldades numéricas principalmente quando grandes sistemas são envolvidos (SCHWARZ, 1976, p. 1) e um procedimento chamado Colocação seqüencial tem sido introduzido por MORITZ (1972), MORITZ (1973) e SCHWARZ (1976). Primeiro, uma solução inicial é obtida a partir de um número mínimo (suficiente) de observações e então a solução é melhorada pela adição de novas observações. Dentre as vantagens de aplicações imediatas da Colocação seqüencial pode se destacar a redução do tamanho das matrizes a serem invertidas e também o uso de observações adicionais para melhorar a estimativa inicial.

Na Colocação por Mínimos Quadrados, os valores a serem interpolados são formados por uma parte sistemática e por uma parte aleatória como mostra a equação (3.3). Nesta equação, a função $F(x)$ a ser interpolada é substituída por um vetor T , a parte sistemática $f(x)$ substituída pelo termo $D \cdot X_a$ e a parte aleatória $s(x)$ substituída pelo vetor s , de maneira que (MORITZ, 1972, p. 38):

$${}_{3p}T_1 = {}_{3p}D_u \cdot X_{a1} + {}_{3p}s_1, \quad (3.54)$$

onde D é a matriz de coeficientes que expressa o efeito dos parâmetros X_a nos valores de T. Esta matriz é similar à matriz A, com a diferença de que a matriz D é formada com base nas coordenadas dos p pontos de cálculo.

Agora convém reescrever a equação (2.53) no sentido de expressá-la numa forma mais conveniente para constituição de equações como no método combinado, de forma que:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \delta & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

A matriz B é dada pela equação (3.16) e o vetor erro de fechamento W introduzido na equação (3.20) é obtido pela equação:

$$W = F(X_0, L_b), \quad (3.56)$$

onde X_0 é dado pela equação (2.55).

A matriz A das derivadas parciais da equação (3.20) é obtida derivando a equação (3.55) com relação aos parâmetros a serem estimados e o vetor W dado pela equação (3.56) necessita ser aplicado na equação (3.55) para ser estimado. Cada estação P_i pode gerar uma sub-matriz A_i similar àquela dada pela equação (2.56) e um sub-vetor W_i os quais são dados, respectivamente, por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_i & y_i & x_i \\ 0 & 1 & 0 & z_i & 0 & -x_i & y_i \\ 0 & 0 & 1 & -y_i & x_i & 0 & z_i \end{bmatrix}; \quad (3.57)$$

$$W_i = \begin{bmatrix} x_i - X_i \\ y_i - Y_i \\ z_i - Z_i \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

A composição final da matriz A e do vetor W é feita para todas as estações comuns. Eles podem ser obtidos, respectivamente, pela concatenação de todas as sub-matrizes A_i e de todos os sub-vetores W_i de modo que se apresentam como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_1 & y_1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_1 & 0 & -x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -y_1 & x_1 & 0 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_2 & y_2 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 & 0 & -x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2 & x_2 & 0 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_n & y_n & x_n \\ 0 & 1 & 0 & z_n & 0 & -x_n & y_n \\ 0 & 0 & 1 & -y_n & x_n & 0 & z_n \end{bmatrix}; \quad (3.59)$$

$$W = \begin{bmatrix} x_1 - X_1 \\ y_1 - Y_1 \\ z_1 - Z_1 \\ x_2 - X_2 \\ y_2 - Y_2 \\ z_2 - Z_2 \\ \vdots \\ x_n - X_n \\ y_n - Y_n \\ z_n - Z_n \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Assim como no caso do Ajustamento, também é possível obter uma estimativa da variância à *posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$ para a Colocação. A sua estimativa é similar àquela feita pela equação (2.62) assumindo a forma:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T \cdot P \cdot v}{S}, \quad (3.61)$$

onde o vetor v é estimado pela equação (3.49), o peso P dado pela equação (3.33) e a redundância S do modelo dada pela equação (2.63).

Testes estatísticos também podem ser aplicados para avaliar a qualidade das estimativas obtidas pela Colocação. Na seção 6.3 do capítulo 6 deste trabalho será aplicado o teste global, o qual foi discutido na seção 2.5 do capítulo 2. O leitor interessado em maiores detalhes sobre a aplicação de testes estatísticos em Colocação deve consultar (KRAKIWSKY e BIACS, 1990).

3.4 PRECISÃO DAS ESTIMATIVAS

Além de estimar um valor único para cada uma das incógnitas envolvidas no modelo matemático da Colocação, pode-se também obter a precisão com que tais incógnitas foram estimadas. A precisão destas quantidades estimadas é dada pela sua matriz variância-covariância e pode ser obtida pela lei de propagação das covariâncias, a qual foi apresentada na seção 2.3. O leitor interessado em detalhes deve consultar (MORITZ, 1972, p. 28 a 40; KRAKIWSKY, 1975, p. 81 a 85; MORITZ, 1980, p. 122 a 132).

As MVC's das estimativas são apresentadas sem demonstrações e dadas por:

$$\sum_{\hat{x}_a} = (A^T \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot A)^{-1}; \quad (3.62)$$

$$\sum_{\hat{z}} = \sum_{L_b} + A \cdot \sum_{\hat{x}_a} \cdot A^T; \quad (3.63)$$

$$\sum_{\hat{s}} = \sum_s + \sum_{sL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot A \cdot \sum_{\hat{x}_a} \cdot A^T \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{L_bS} - \sum_{sL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{L_bS}; \quad (3.64)$$

$$\sum_{\hat{s}'} = \sum_{s'} + \sum_{s'L_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot A \cdot \sum_{\hat{x}_a} \cdot A^T \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{s'S} - \sum_{s'L_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{s'S}; \quad (3.65)$$

$$\sum_{\hat{n}} = \sum_n + \sum_{nL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot A \cdot \sum_{\hat{x}_a} \cdot A^T \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{nN} - \sum_{nL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_n; \quad (3.66)$$

$$\sum_{\hat{t}} = \sum_s + (\sum_{sL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot A - D) \cdot \sum_{\hat{x}_a} \cdot (A^T \cdot \sum_{L_b}^{-1} \cdot \sum_{L_bS} - D^T) - \sum_{sL_b} \cdot (\sum_{L_b})^{-1} \cdot \sum_{L_bS}. \quad (3.67)$$

3.5 COMPARAÇÃO COM O AJUSTAMENTO CLÁSSICO

Nesta seção, uma análise comparativa entre a Colocação e o Ajustamento é apresentada. Esta análise compara as duas formulações do ponto de vista da matriz dos pesos, da forma quadrática, da solução para os parâmetros e das diferenças entre as coordenadas finais estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência. Para facilitar a análise, assume-se em todos os casos $\sigma_0^2 = 1$ como na equação (3.43).

A matriz peso das observações desempenha um papel muito importante nos dois métodos. No caso do Ajustamento, a matriz P é usualmente definida como a inversa da MVC das observações como mostra a equação (2.36). Na maioria das aplicações, a MVC das observações tem a forma diagonal, mas pode haver situações onde ela é bandada ou mesmo uma matriz totalmente populada (completa). Na Colocação, a matriz P é definida como a inversa da MVC do vetor v como mostra a equação (3.23) e a MVC das observações é obtida pela combinação da MVC do sinal s' com a MVC do ruído n como dada pela equação (3.27). Devido à correlação do sinal, uma matriz totalmente populada (completa) de ordem igual ao número de observações precisa ser invertida.

A forma quadrática é a quantidade da qual por meio de sua minimização é obtida a estimativa dos parâmetros pelo MMQ. Tanto para o Ajustamento quanto para a Colocação, a forma quadrática consiste de duas partes, um vetor e uma matriz. A forma quadrática para o caso do Ajustamento é dada pela equação (2.34) sendo definida em termos da matriz peso P das observações e do vetor de resíduos V. No caso da Colocação, a forma quadrática é fundamentalmente diferente. Ela é definida pela equação (3.21), onde a matriz P é dada pela equação (3.33) e o vetor v, dado pela equação (3.13), é composto pelo sinal s nos p pontos de predição e do vetor aleatório z definido pela equação (3.10).

As equações envolvidas no processo de estimativa dos parâmetros mostram que a Colocação é de fato diferente do Ajustamento (KRAKIWSKY, 1975, p. 100). No Ajustamento, a solução para os parâmetros é dada pela equação (2.49), a qual recorrendo às equações (2.47) e (2.48) se reescreve como:

$${}_u X_1 = -\left({}_u A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot A_u\right)^{-1} \cdot \left({}_u A_{3n \cdot 3n}^T \cdot P_{3n \cdot 3n} \cdot L_1\right), \quad (3.68)$$

enquanto que na Colocação a solução é obtida, após substituir a equação (3.27) na equação (3.44), por:

$${}_u X_1 = - \left[{}_u A_{3q \cdot 3q}^T (\sum_{s'} + \sum_n)_{3q \cdot 3q}^{-1} A_u \right]^{-1} \cdot \left[{}_u A_{3q \cdot 3q}^T (\sum_{s'} + \sum_n)_{3q \cdot 3q}^{-1} W_1 \right]. \quad (3.69)$$

Em uma primeira análise, nota-se que a contribuição da matriz A é a mesma para as duas soluções porque ela participa identicamente como atestam as equações (2.60) e (3.59), assim como os vetores L e W como mostram as equações (2.61) e (3.60). Numa segunda análise é observado que a matriz P participa sozinha no Ajustamento, enquanto a MVC do ruído n e a MVC do sinal s' participam juntas na Colocação. Segundo KRAKIWSKY (1975, p. 101), este último fato é que dá origem às duas diferentes soluções para os parâmetros.

Após as estimativas das coordenadas em pontos de predição é feita uma avaliação tanto do Ajustamento quanto da Colocação comparando-se as diferenças obtidas entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos. Para esta análise, as coordenadas podem ser tanto cartesianas quanto geodésicas.

Se as coordenadas cartesianas são utilizadas, então as diferenças podem ser obtidas para ΔX , ΔY e ΔZ por:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{(m)} \\ \Delta Y_{(m)} \\ \Delta Z_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |X_{(estratégia)} - X_{(referência)}| \\ |Y_{(estratégia)} - Y_{(referência)}| \\ |Z_{(estratégia)} - Z_{(referência)}| \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

onde o índice “estratégia” se refere às coordenadas estimadas pelo Ajustamento ou pela Colocação e o índice “referência” está ligado às coordenadas dos pontos de predição. As diferenças estão representadas pelo módulo, pois não importa o sinal, mas sim a sua magnitude.

Quando a análise é feita em termos de coordenadas geodésicas, então as diferenças são dadas para $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ e Δh por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{(grau)} \\ \Delta\lambda_{(grau)} \\ \Delta h_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\varphi_{(estratégia)} - \varphi_{(referência)}| \\ |\lambda_{(estratégia)} - \lambda_{(referência)}| \\ |h_{(estratégia)} - h_{(referência)}| \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Os comprimentos dos arcos das linhas do sistema (φ, λ) , dados em termos lineares, são computados por (TORGE, 2001, p. 97):

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{(m)} \\ \Delta\lambda_{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \cdot \Delta\varphi_{(rad)} \\ \bar{N} \cdot \cos(\varphi) \cdot \Delta\lambda_{(rad)} \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_{(rad)} \\ \Delta\lambda_{(rad)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{(grau)} \cdot \frac{\pi}{180} \\ \Delta\lambda_{(grau)} \cdot \frac{\pi}{180} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

O raio de curvatura \bar{N} da seção primeiro vertical usado na equação (3.72) é dado pela equação (A2.2) e o raio M da seção meridiana é calculado pela equação (TORGE, 2001, p. 95):

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.74)$$

onde a primeira excentricidade é obtida pela equação (A2.7).

4. ESTUDO ANALÍTICO E MODELAGEM DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA

4.1 PARÂMETROS ESSENCIAIS DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA

As matrizes \sum_s , $\sum_{s'}$ e $\sum_{ss'}$ podem ser obtidas a partir da, assim chamada, função covariância. De acordo com MIKHAIL (1976, p. 399), a função covariância pode ser teoricamente conhecida ou pode ser derivada experimentalmente a partir dos dados. Para estimativa da função covariância a partir dos dados é de fundamental importância que se tenha uma “boa” densidade de pontos e, se isto não é possível, o melhor é usar uma função covariância empírica (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1023). Esta função empírica pode ser obtida a partir da experiência com problemas anteriores ou mesmo por meio do conhecimento sobre o comportamento do problema.

O resultado da Colocação por Mínimos Quadrados depende essencialmente da função covariância usada (MORITZ, 1976, p. 1). Esta função deve refletir as características do problema a ser resolvido, isto é, deve ser capaz de representar o grau de dependência entre as variáveis envolvidas por meio de sua matriz variância-covariância.

A aplicação da Colocação por Mínimos Quadrados requer a escolha da função covariância e sua modelagem. Alguns trabalhos pertinentes têm relatado seu uso para diversos propósitos. É o caso da aplicação em correção da deformação do filme (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1027; CAMARGO e DALMOLIN, 1995), em ajustamento de blocos fotogramétricos (KRAUS e MIKHAIL, 1972, p. 1027), em filtragem de dados (THÉRIAULT, 1995) e predição de anomalias da gravidade (ARGESEANU, 1986; BIAN e MENZ, 1999; ANDERSON et al., 2000).

Segundo MORITZ (1972, p. 57 e 58), a função covariância:

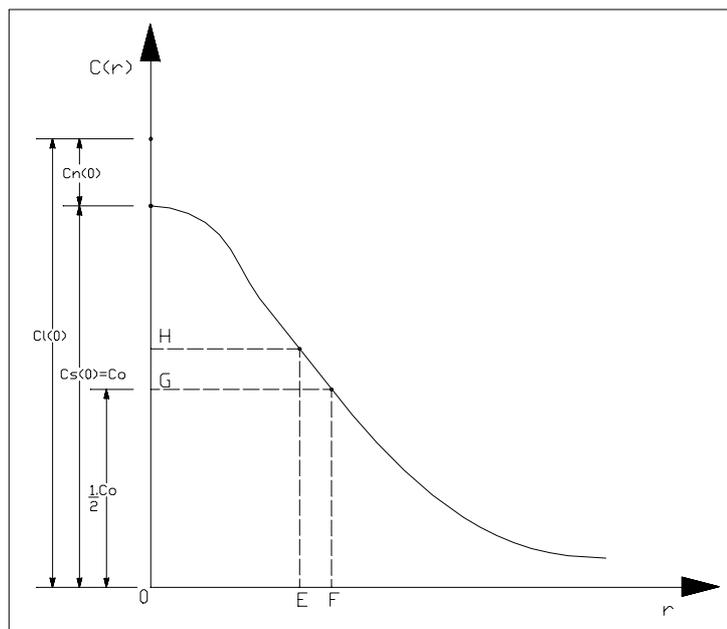
$$C(r) = C_0 \cdot e^{-a^2 \cdot r^2}, \quad (4.1)$$

com valores adequados de C_0 e “a”, fornece uma simples expressão analítica que pode ser apropriada em muitos casos, sendo necessário que a função escolhida seja positiva definida.

A função covariância Gaussiana foi escolhida devido a sua capacidade de representar dados com distribuição normal. Na equação (4.1), r denota a distância entre dois pontos considerados e $C(r)$ é a covariância entre eles, a qual é estimada pela função covariância.

A Figura 4.1 mostra a representação geométrica da função covariância dada pela equação (4.1). A utilização prática desta função requer que sejam estimados os valores de C_0 e “a” caracterizando a modelagem da função covariância. Ainda como mostra a Figura 4.1, o valor máximo da função é o próprio C_0 que pode ser obtido fazendo a distância r tender a zero, enquanto que o seu valor mínimo é obtido para distâncias r tendendo a infinito.

Figura 4.1 – Função covariância Gaussiana



Uma função covariância pode ser caracterizada por meio de três parâmetros essenciais, a saber (MORITZ, 1976, p. 22; MORITZ, 1978, p. 424; MORITZ, 1980, p. 174):

- a variância C_0 ;
- o comprimento de correlação ξ (“correlation length”) e
- o parâmetro de curvatura χ (“curvature parameter”).

A variância C_0 é o valor da função covariância $C(r)$ para o argumento $r = 0$ na equação (4.1), de modo que:

$$C(0) = C_0. \quad (4.2)$$

O comprimento de correlação ξ que corresponde ao ponto “F” da Figura 4.1 é o valor do argumento para $C(r)$ que decresce seu valor para metade de C_0 , isto é:

$$C(\xi) = \frac{C_0}{2}. \quad (4.3)$$

O parâmetro de curvatura χ é uma quantidade relacionada com a curvatura κ da curva de covariância, o qual é definido como:

$$\chi = \frac{\kappa \cdot \xi^2}{C_0}. \quad (4.4)$$

Na próxima seção deste trabalho será apresentado um estudo analítico da função covariância Gaussiana, no qual os três parâmetros essenciais que caracterizam a função serão tratados com mais detalhes.

4.2 ESTUDO ANALÍTICO DA FUNÇÃO GAUSSIANA

O comportamento da função covariância pode ser conhecido pelos seus parâmetros essenciais e ela fica completamente determinada a partir da estimativa dos valores de C_0 e “a”. Para isto, torna-se necessário um estudo analítico da função Gaussiana mostrando o relacionamento entre os valores de C_0 e “a” e os parâmetros essenciais.

O valor crítico para a função dada pela equação (4.1) é obtido pela sua primeira derivada com relação à r , a qual resulta:

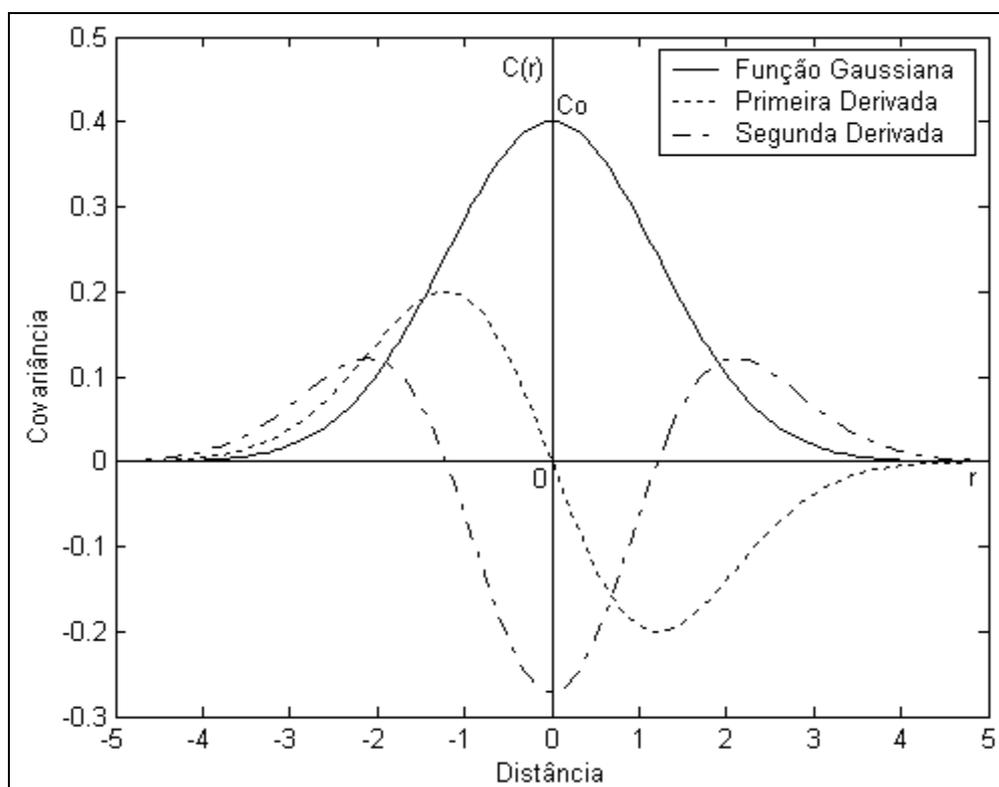
$$C'(r) = -2 \cdot C_0 \cdot a^2 \cdot r \cdot e^{-a^2 \cdot r^2}, \quad (4.5)$$

que anulando fornece $r = 0$ para valor crítico de forma que:

$$C'(0) = 0 \quad (4.6)$$

é o valor da equação (4.5) avaliada para $r = 0$, como mostra a Figura 4.2.

Figura 4.2 – Função covariância Gaussiana e suas derivadas



Na seção anterior já foi dito que o valor máximo da função é obtido para distâncias r tendendo a zero e isto pode ser comprovado pela segunda derivada da função, da qual se escreve:

$$C''(r) = (2 \cdot a^2 \cdot r^2 - 1) \cdot 2 \cdot C_0 \cdot a^2 \cdot e^{-a^2 \cdot r^2} . \quad (4.7)$$

O sinal da segunda derivada avaliada para o valor crítico $r=0$ permite concluir se $r=0$ constitui um valor máximo ou mínimo da função. Substituindo o valor $r=0$ na equação (4.7), têm-se:

$$C''(0) = -2 \cdot C_0 \cdot a^2 , \quad (4.8)$$

onde conclui-se que $r=0$ constitui um valor máximo da função dada pela equação (4.1), pois a segunda derivada avaliada para $r=0$ forneceu um valor menor que zero como se vê pela equação (4.8), uma vez que C_0 é sempre positivo. A equação (4.2) mostra o valor máximo C_0 da função dada pela equação (4.1) avaliada para $r=0$, o qual pode ser visto também pela Figura 4.2.

A função covariância dada pela equação (4.1), a sua primeira derivada dada pela equação (4.5) e a sua segunda derivada dada pela equação (4.7) podem ser vistas na Figura 4.2, onde as constantes C_0 e “a” foram arbitradas para efeito ilustrativo assumindo os valores $C_0 = 0.40$ e $a = 0.58$.

O comprimento de correlação ξ foi definido na equação (4.3) e pode ser relacionado como o valor de “a” substituindo o seu valor na equação (4.1), obtendo-se:

$$\xi = \frac{\sqrt{\text{Ln}(2)}}{a} \quad (4.9)$$

ou escrevendo o valor de “a” em função do comprimento de correlação ξ por:

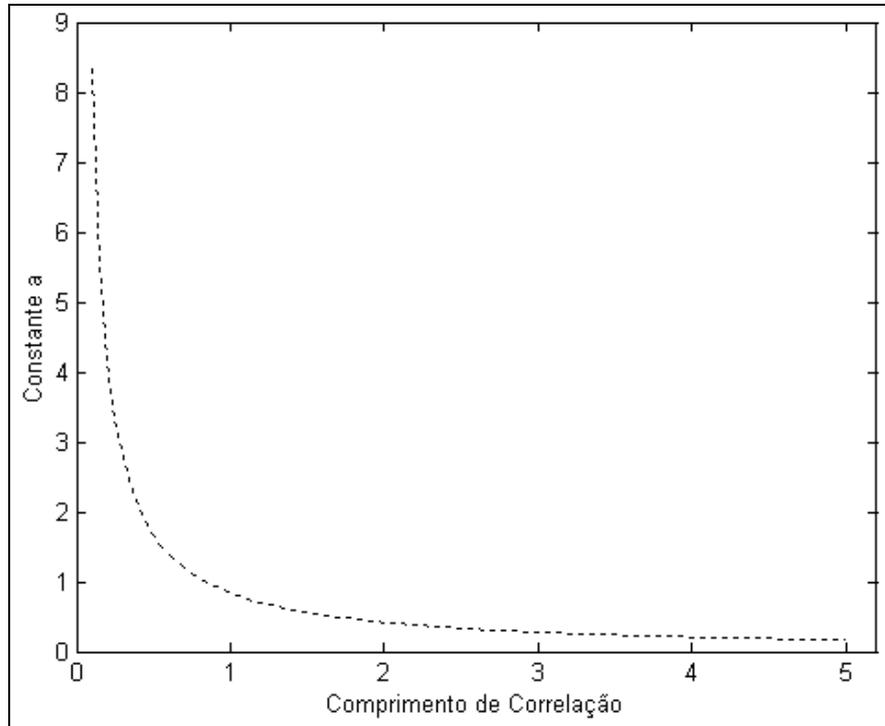
$$a = \frac{\sqrt{\text{Ln}(2)}}{\xi} , \quad (4.10)$$

onde Ln expressa o logaritmo Neperiano.

A Figura 4.3 mostra a relação estabelecida na equação (4.10) entre o comprimento de correlação ξ e o valor de “a”. Como se vê pela equação (4.10), o valor de “a” é inversamente proporcional ao comprimento de correlação ξ escalada pelo fator $\sqrt{\text{Ln}(2)}$. Pode ser observado que para comprimentos de correlação ξ

maiores que $\sqrt{\ln(2)}$, o valor de “a” assume valores maiores do que zero e menores do que 1.

Figura 4.3 – Relação entre ξ e a constante “a”



O ponto de inflexão ψ da curva dada pela Figura 4.1 está representado pelo ponto E, o qual pode ser obtido anulando a segunda derivada da equação (4.1), isto é, fazendo $C''(r = \psi) = 0$ na equação (4.7) obtendo-se:

$$2 \cdot a^2 \cdot \psi^2 - 1 = 0 \quad (4.11)$$

que escrevendo ψ em função de “a” resulta:

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{2a}, \quad (4.12)$$

ou obtendo o valor de “a” em função de ψ por:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2\psi}. \quad (4.13)$$

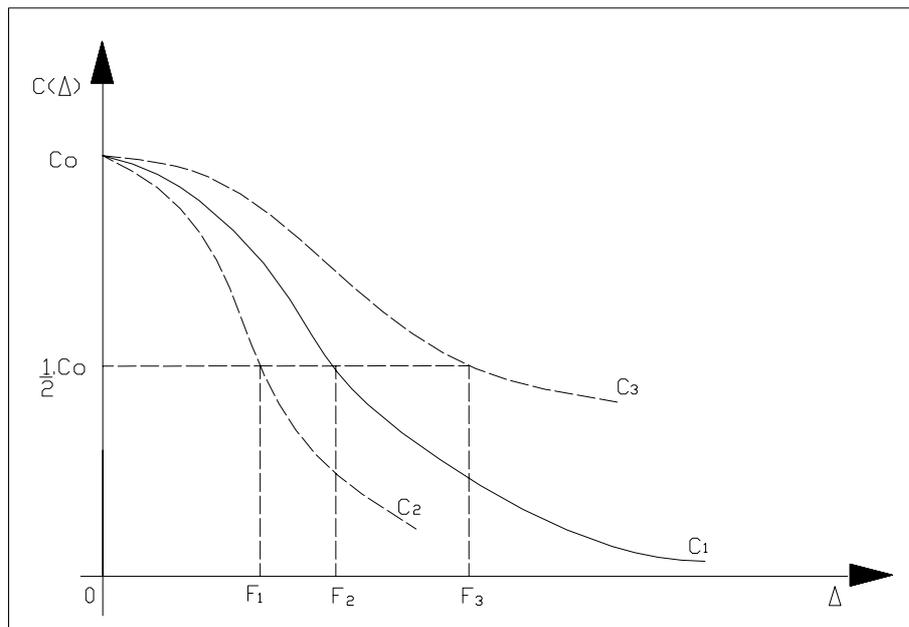
A relação entre o valor de ξ e o valor de ψ pode ser obtida igualando as equações (4.10) e (4.13), da qual resulta:

$$\xi = \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \cdot \psi, \quad (4.14)$$

mostrando que o valor de ξ é aproximadamente 18% maior do que o valor de ψ . Para o exemplo da Figura 4.2, o valor de $\xi = 1.43$ e o valor de $\psi = 1.21$.

O valor de “a” é constante para uma mesma função covariância de maneira que para cada valor de “a” uma curva diferente é gerada como mostra a Figura 4.4. Como mostraram a equação (4.10) e a Figura 4.3 que o valor de “a” é inversamente proporcional ao comprimento de correlação ξ , então o valor de “a” da curva C_3 é menor que o valor de “a” da curva C_1 , pois o valor de ξ da curva C_3 representado pelo ponto F_3 é maior que o valor de ξ da curva C_1 representado pelo ponto F_2 . Uma análise semelhante pode ser feita para a curva C_2 , onde o valor de ξ é representado pelo ponto F_1 e cujo valor de “a” é maior que o valor de “a” da curva C_1 .

Figura 4.4 – Diferentes funções covariância para diferentes valores de “a”



As equações (4.1), (4.5) e (4.7) estão representadas na Figura 4.2, as quais avaliadas para $r = 0$ são, respectivamente, as equações (4.2), (4.6) e (4.8). Elas também podem ser avaliadas para $r = \xi$, de maneira que:

$$C(\xi) = \frac{C_0}{2}; \quad (4.15)$$

$$C'(\xi) = -C_0 \cdot a \cdot \sqrt{\ln(2)}; \quad (4.16)$$

$$C''(\xi) = C_0 \cdot a^2 \cdot (2 \cdot \ln(2) - 1), \quad (4.17)$$

e para $r = \psi$ obtendo-se:

$$C(\psi) = C_0 \cdot \frac{\sqrt{e}}{e}; \quad (4.18)$$

$$C'(\psi) = -C_0 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot e}}{e}; \quad (4.19)$$

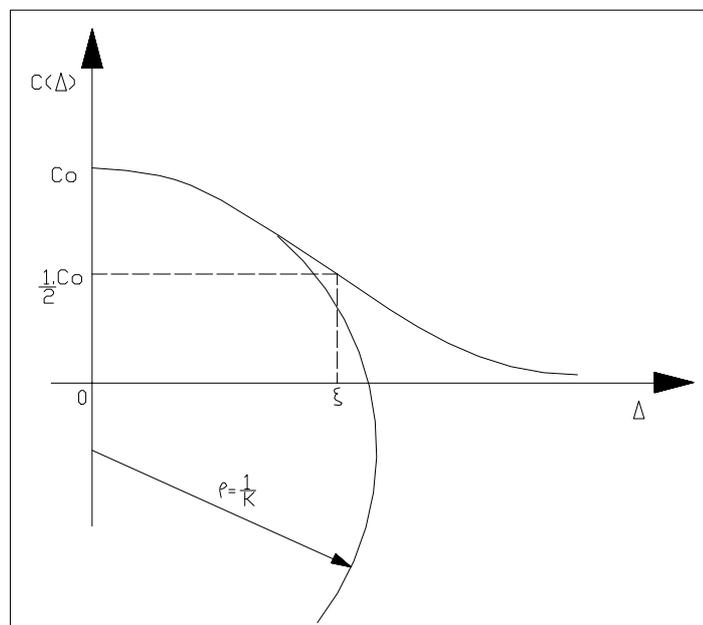
$$C''(\psi) = 0. \quad (4.20)$$

As equações (4.15), (4.16) e (4.17) são obtidas substituindo a equação (4.9) nas equações (4.1), (4.5) e (4.7) enquanto que as equações (4.18), (4.19) e (4.20) são obtidas substituindo a equação (4.12) nas equações (4.1), (4.5) e (4.7).

A Figura 4.5 mostra o significado geométrico dos parâmetros essenciais da função covariância, onde a curvatura κ pode ser relacionada com o raio de curvatura ρ por:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}. \quad (4.21)$$

Figura 4.5 – Parâmetros essenciais da função covariância



Fonte: MORITZ (1976, p. 22)

A curvatura κ da curva de covariância para $r = 0$ é dada por (MORITZ, 1976, p. 23):

$$k = \frac{C''(r)}{[1 + (C'(r))^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.22)$$

Agora convém substituir as equações (4.6) e (4.8) na equação (4.22) resultando para a curvatura k o valor:

$$k = 2 \cdot C_0 \cdot a^2. \quad (4.23)$$

Segundo MORITZ (1976, p. 23), a mudança no sinal do valor de k da equação (4.23) é irrelevante, desde que o sinal na equação (4.22) é convencional.

Para a função covariância Gaussiana dada pela equação (4.1), o parâmetro de curvatura χ definido na equação (4.4) assume o valor:

$$\chi = 2 \cdot \ln(2), \quad (4.24)$$

após substituir as equações (4.9) e (4.23) na equação (4.4).

A função covariância pode ser conhecida a partir da estimativa dos valores de C_0 e “a” como pode ser visto pela equação (4.1). Estes valores podem ser obtidos por um ajuste dos dados para as covariâncias amostrais, as quais precisam ser estimadas em função das observações disponíveis. A estimativa das covariâncias amostrais será tratada na seção 4.3 deste trabalho.

4.3 ESTIMATIVA DAS COVARIÂNCIAS AMOSTRAIS

A MVC das observações dada pela equação (3.27) é composta pela soma da MVC do sinal com a MVC do ruído, a qual é estimada pela função covariância representada na equação (4.1), e para uma distância $r = \Delta$ podem ser relacionados por (MIKHAIL, 1976, p. 399):

$$C_i(\Delta) = C_s(\Delta) + C_n(\Delta). \quad (4.25)$$

Na prática, no entanto, o ruído é mais realisticamente assumido ser não correlacionado entre si como mostra a equação (3.29) e, por esta razão, $C_n(\Delta)$ pode ser um simples ponto representando a variância do ruído como é mostrado na Figura 4.1. Conseqüentemente, as três funções covariância da equação (4.25) podem ser como mostradas na Figura 4.1 e, para $\Delta \rightarrow 0$, a relação entre as variâncias é:

$$C_i(0) = C_s(0) + C_n(0). \quad (4.26)$$

A função covariância C pode ser teoricamente conhecida ou pode ser derivada a partir das observações pela estimativa das variâncias e covariâncias amostrais. As variâncias e covariâncias amostrais, estimadas a partir das observações, são dadas por (MIKHAIL, 1976, p. 42 e 43):

$$C_i(0) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n \left(I_k - \bar{I} \right)^2; \quad (4.27)$$

$$C_i(\Delta) = \frac{1}{n_k-1} \cdot \sum_{i < j} \left(I_i - \bar{I} \right) \cdot \left(I_j - \bar{I} \right), \quad (4.28)$$

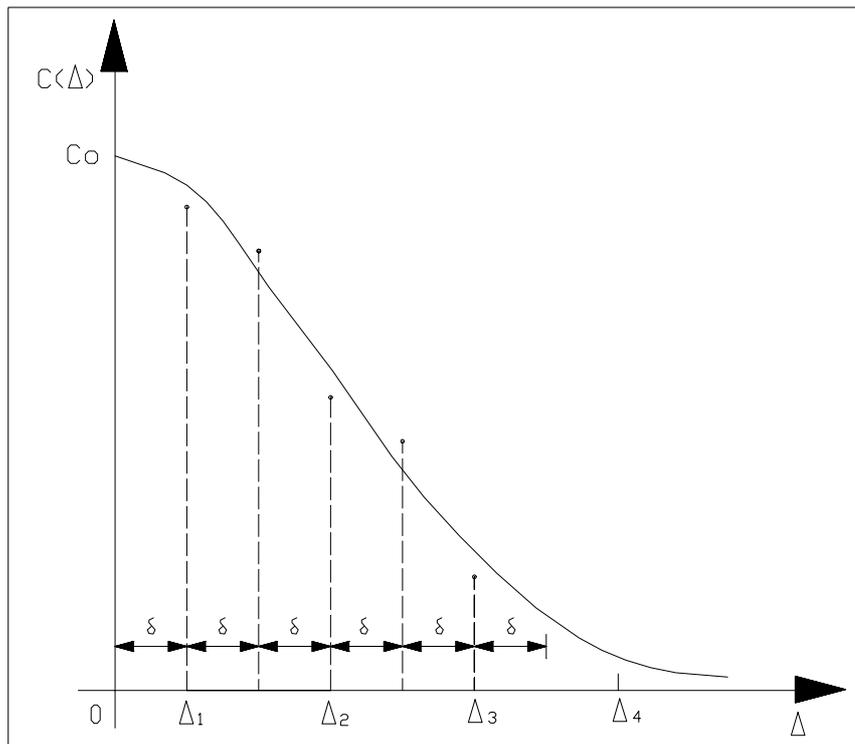
onde n é o número total de observações, n_k são as observações contidas em um intervalo no qual as covariâncias serão estimadas, I_i , I_j e I_k são as observações propriamente ditas e \bar{I} é a sua média.

A equação (4.27) mostra que a variância $C_i(0)$ é estimada simplesmente somando os quadrados dos valores conhecidos $(I_k - \bar{I})$ e dividindo pelo valor $n-1$. Se não existe ruído ou erros de medida nas observações, então o valor estimado $C_i(0)$ será numericamente igual a $C_s(0)$, a variância do sinal a ser interpolado como mostra a equação (4.26).

A covariância $C_i(\Delta)$ estimada a partir dos dados é composta pela soma de duas covariâncias $C_s(\Delta)$ e $C_n(\Delta)$ quando s e n são não correlacionados, o que é

mostrado pela equação (4.25). O ruído é assumido ser não correlacionado, assim $C_n(\Delta) = 0$ para todo $\Delta \neq 0$ e $C_1(\Delta) = C_s(\Delta)$ para todos os $r = \Delta > 0$, como mostra a Figura 4.1, onde $r = \Delta$ é a distância entre dois pontos cuja correlação é considerada.

Figura 4.6 – Função Covariância a partir dos dados

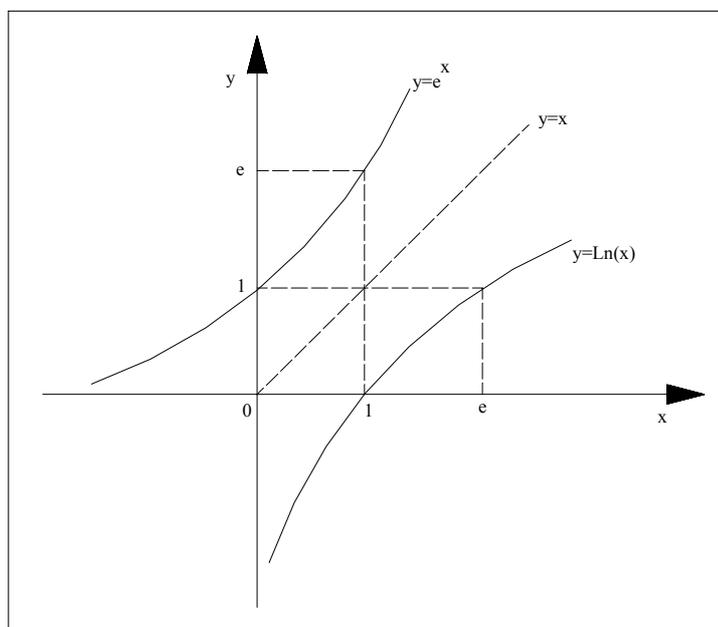


Para estimar os valores $C_1(\Delta)$ da função covariância a partir dos dados, Δ é dividido em intervalos iguais como mostra a Figura 4.6. O primeiro $\Delta_1 = \delta$, o segundo $\Delta_2 = 3 \cdot \delta$ até um intervalo genérico $\Delta_k = (2 \cdot k - 1) \cdot \delta$ e, deste modo, com um intervalo de $2 \cdot \delta$. Portanto, a soma de todos os n_k possíveis produtos $(I_i - \bar{I}) \cdot (I_j - \bar{I})$ dividido pelo valor $(n_k - 1)$ é estimada como a covariância $C_1(\Delta)$ para cada Δ sobre os pontos cuja separação Δ_{ij} está no intervalo $\Delta_k + \delta$ de acordo com a equação (4.28). As covariâncias são estimadas para o ponto médio do intervalo e o valor de δ é arbitrado pelo calculista.

4.4 MODELAGEM ANALÍTICA DA FUNÇÃO COVARIÂNCIA

O conhecimento do comportamento da função covariância requer a estimativa dos valores de C_0 e “a” por meio de um ajuste dos dados, isto é, uma regressão dos dados para as covariâncias amostrais estimadas como mostra a Figura 4.6. Para isto é necessário a linearização da equação (4.1) recorrendo à função logaritmo e a estimativa dos parâmetros por um ajustamento pelo método paramétrico, cujo princípio foi dado na seção 2.5 do capítulo 2. A Figura 4.7 mostra a função exponencial e logaritmo natural.

Figura 4.7 – Função exponencial e logaritmo natural



Agora, convém aplicar o logaritmo natural em ambos os membros da equação (4.1) o que resulta:

$$\text{Ln}[C(r)] = \text{Ln}(C_0) + \text{Ln}(e^{-a^2 \cdot r^2}). \quad (4.29)$$

Pela propriedade dos logaritmos pode se reescrever a equação (4.29) da seguinte forma:

$$\text{Ln}[C(r)] = \text{Ln}(C_0) - a^2 \cdot r^2 \cdot \text{Ln}(e). \quad (4.30)$$

Mas, $\text{Ln}(e) = 1$, então a equação (4.30) fica reescrita como:

$$\text{Ln}[C(r)] = \text{Ln}(C_0) - a^2 \cdot r^2, \quad (4.31)$$

a qual pode ser transformada em uma equação do tipo:

$$Y = b - a^2 \cdot r^2, \quad (4.32)$$

onde:

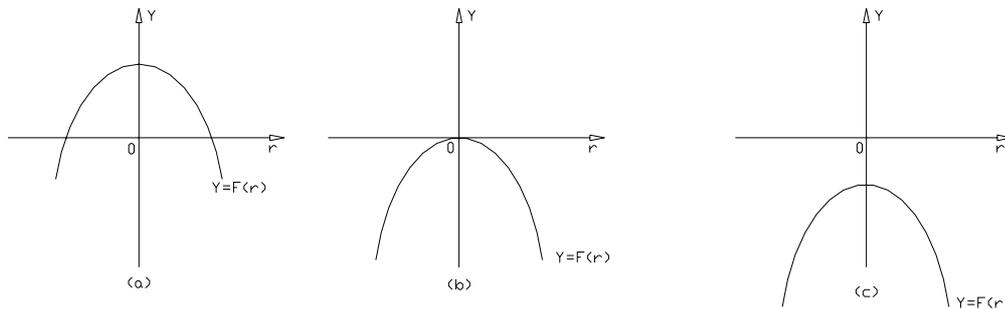
$$Y = \text{Ln}[C(r)] \quad (4.33)$$

e

$$b = \text{Ln}(C_0). \quad (4.34)$$

A interpretação geométrica para a equação (4.32) é uma parábola que intercepta o eixo “Y” em “b” e tem concavidade voltada para baixo como mostra a Figura 4.8. O parâmetro “b” pode assumir um valor positivo, nulo ou negativo. As Figuras 4.8a, 4.8b e 4.8c mostram, respectivamente, a geometria para $b > 0$, $b = 0$ e $b < 0$, os quais pela equação (4.34) fornecem, respectivamente, $C_0 > 1$, $C_0 = 1$ e $0 < C_0 < 1$.

Figura 4.8 – Representação geométrica para os valores de “a” e “b”



A estimativa dos valores de “a²” e “b” é obtida escrevendo equações de observação como no método paramétrico. Como usual, a matriz A é dada pelas derivadas parciais das observações com relação aos parâmetros, similar a equação (2.31) e as componentes do vetor L dadas como na equação (2.33). Para um número genérico de m pontos com covariâncias amostrais estimadas como na Figura 4.6, então a matriz A e o vetor L ficam dadas por:

$${}_m A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -r_1^2 \\ 1 & -r_2^2 \\ 1 & -r_3^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -r_m^2 \end{bmatrix}; \quad (4.35)$$

$${}_m L_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

A composição do sistema de equações normais é dada por:

$${}_2 N_2 = {}_2 A_m^T \cdot {}_m P_m \cdot {}_m A_2; \quad (4.37)$$

$${}_2 U_1 = {}_2 A_m^T \cdot {}_m P_m \cdot {}_m L_1, \quad (4.38)$$

onde P é uma matriz identidade.

A solução para os parâmetros X_a pode ser obtida, após inverter a matriz das equações normais, por:

$${}_2 X_{a1} = \begin{bmatrix} b \\ a^2 \end{bmatrix} = -N^{-1} \cdot U. \quad (4.39)$$

Uma vez que o valor de “b” é estimado pela equação (4.39), então o valor de C_0 pode ser obtido da equação (4.34) por:

$$C_0 = e^b \quad (4.40)$$

e a função covariância dada pela equação (4.1) fica escrita somente em função da distância r entre dois pontos cuja correlação precisa ser estimada.

A distância r entre dois pontos P_i e P_j no espaço tridimensional pode ser calculada em função das coordenadas cartesianas por:

$$r = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

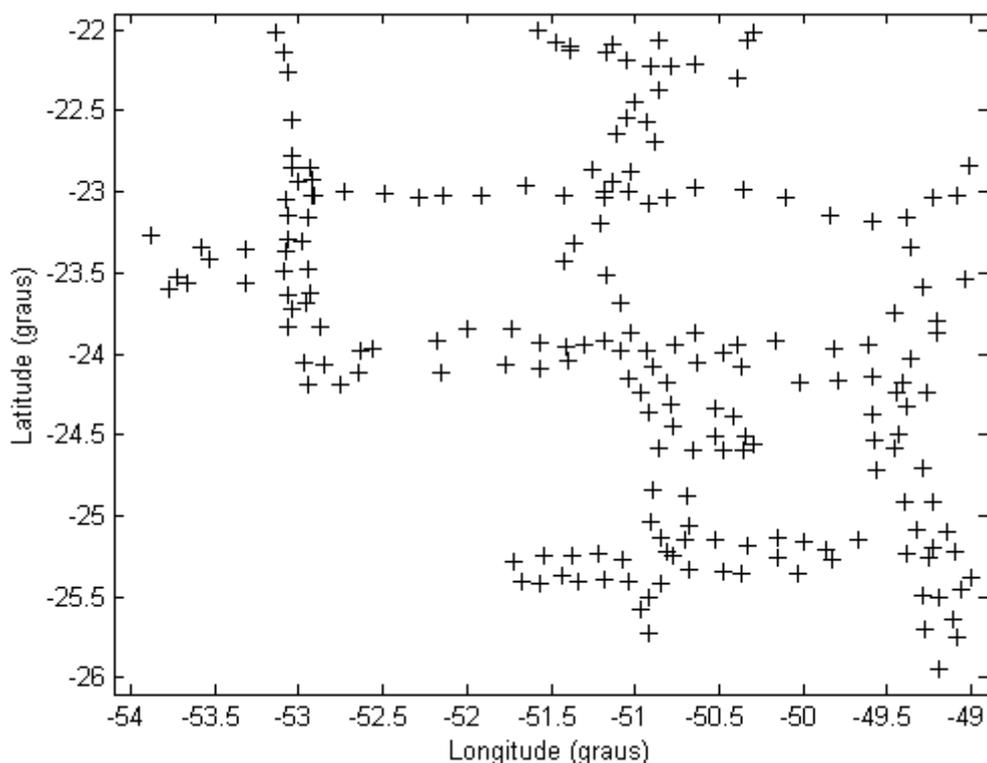
5. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DA METODOLOGIA

5.1 ÁREA DE ESTUDO E PONTOS DE CONTROLE

A área de estudo selecionada para a realização dos ensaios contidos neste trabalho serviu para testar e avaliar a metodologia proposta. Neste ensaio, foram utilizadas as coordenadas de vértices pertencentes à Rede Planimétrica do SGB contidas nas duas últimas realizações deste sistema, denominadas de SAD69 e SAD69/96.

Esta área selecionada possui um total de 200 pontos originalmente dados em coordenadas geodésicas, as quais foram transformadas em coordenadas cartesianas pela equação (A2.1), onde os parâmetros do elipsóide são dados na Tabela A2.1. A Tabela A3.1 mostra uma listagem das coordenadas cartesianas dos 200 pontos utilizados no experimento.

Figura 5.1 – Área de estudo com as estações do SGB



A Figura 5.1 mostra a área de estudo com as estações do SGB, cujos limites são os paralelos 22° e 26° de latitude sul e meridianos 49° e 54° de longitude oeste. Esta área foi escolhida limitando-se uma região de interesse, compreendendo parte dos estados do Paraná, Mato Grosso do Sul e São Paulo. Os dados foram fornecidos pelo Departamento de Geodésia do IBGE.

Com o objetivo de avaliar a metodologia, foram utilizados pontos de controle também denominados de pontos de predição, cujas coordenadas conhecidas serviram de comparação com as coordenadas estimadas pelas duas estratégias, o Ajustamento e a Colocação. Para isto, todos os n pontos foram utilizados como teste, sendo retirado um ponto a cada etapa e testado individualmente possibilitando a utilização de um total de $(n - 1)$ pontos de observação e 1 ponto de predição em cada estimativa.

5.2 NATUREZA DAS OBSERVAÇÕES

O processo de estimativa dos parâmetros de transformação pelo MMQ requer que existam pontos com coordenadas cartesianas conhecidas em dois referenciais, cujas observações são dadas pela diferença das coordenadas entre estações comuns como mostram as equações (2.53) e (3.55).

No caso desta aplicação, as coordenadas dos 200 pontos que entraram para compor o experimento estão atreladas tanto ao SAD69 quanto ao SAD69/96, as quais são mostradas na Tabela A3.1. As observações utilizadas no processo de estimativa dos parâmetros foram calculadas pela equação (2.13) e são mostradas na Tabela A4.1.

As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram o comportamento das observações em termos de variação espacial, respectivamente, para as componentes X, Y e Z. Estas diferenças refletem a composição de vários efeitos, onde a transformação geométrica juntamente com o sinal absorvem a parte sistemática e os ruídos das observações são filtrados no processo de estimativa.

Figura 5.2 – Diferenças de coordenadas para a componente X

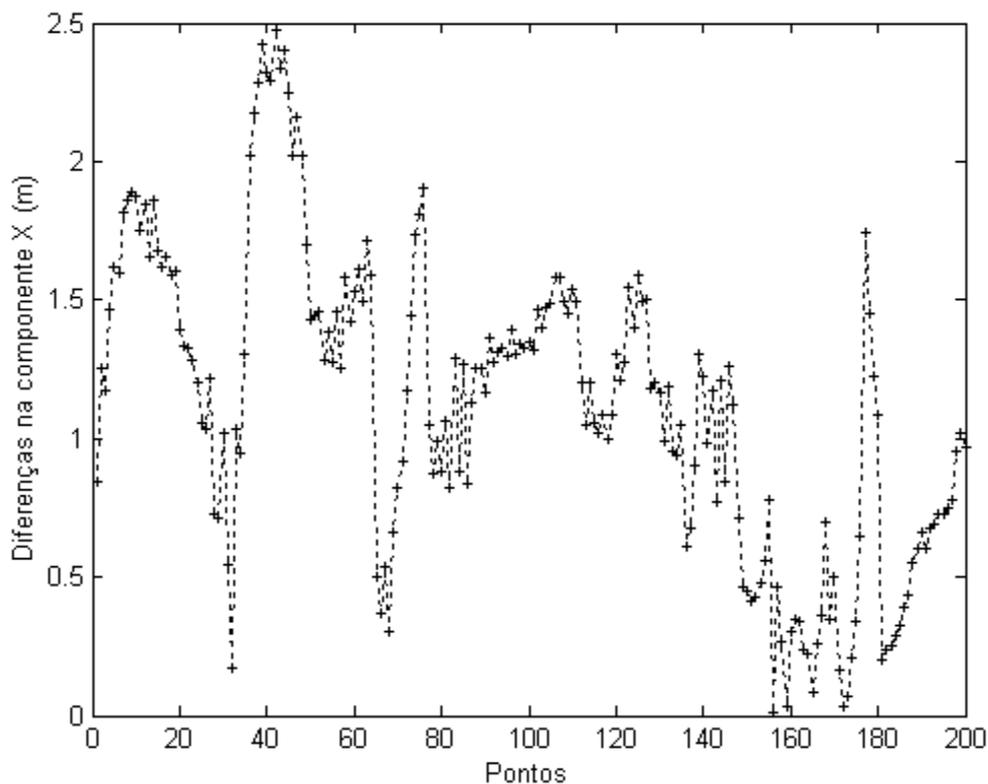


Figura 5.3 – Diferenças de coordenadas para a componente Y

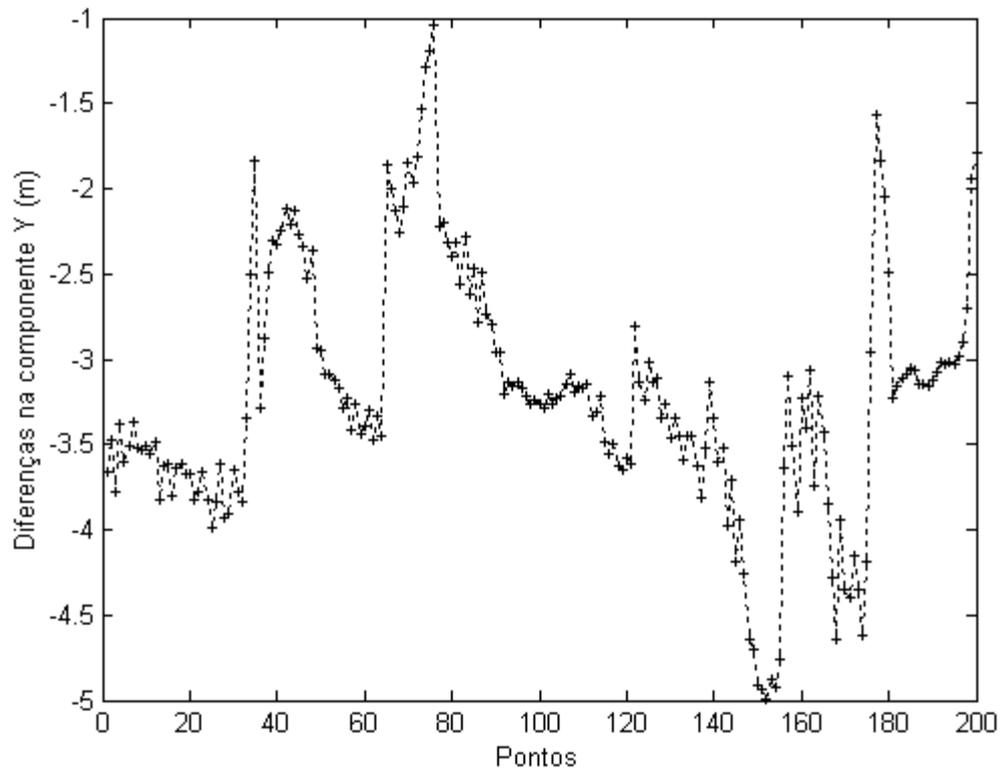
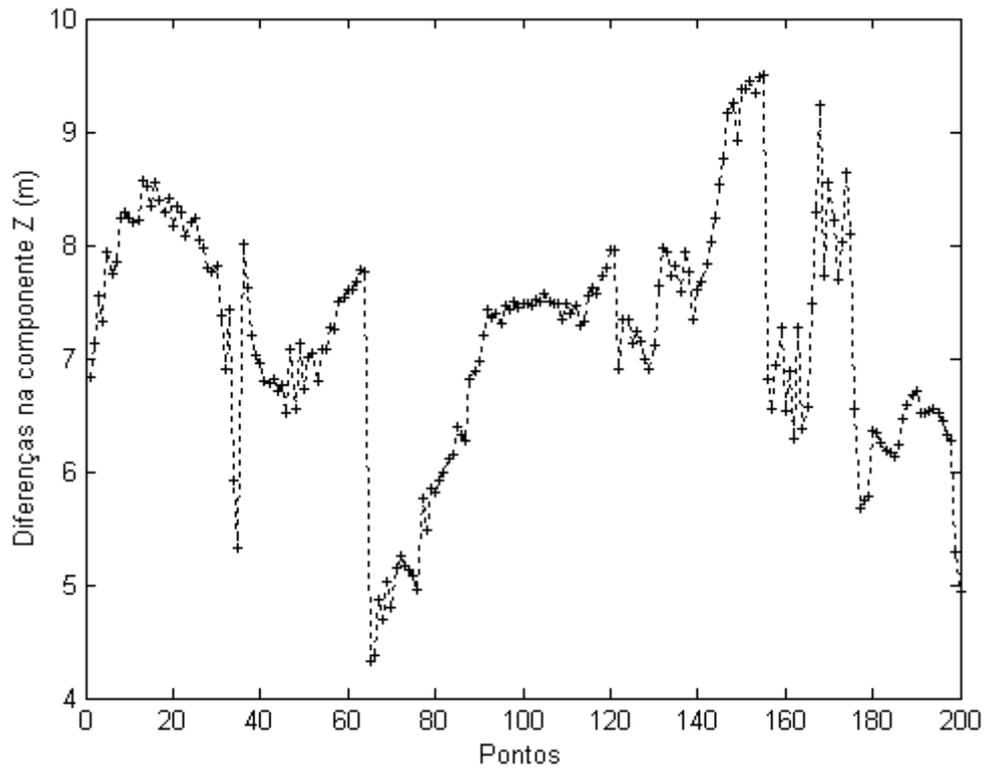


Figura 5.4 – Diferenças de coordenadas para a componente Z



5.3 PROCESSAMENTO DOS DADOS DO EXPERIMENTO

O processamento dos dados para a geração dos resultados mostrados neste trabalho foi realizado utilizando-se rotinas desenvolvidas em ambiente MATLAB. Os arquivos de entrada e de saída, assim como os arquivos contendo os códigos são em formato texto com a extensão “m”, compatíveis com o MATLAB.

Duas estratégias de processamento foram utilizadas para compor o experimento. Em uma primeira estratégia, utilizou-se o Ajustamento com aplicação do método paramétrico cuja descrição foi feita na seção 2.5 e, para a segunda estratégia, os resultados foram obtidos pela aplicação da Colocação, a qual foi descrita no capítulo 3.

Nas duas estratégias utilizadas, arbitrou-se um valor unitário para a variância a priori σ_0^2 , de forma que $\sigma_0^2 = 1$. No caso do Ajustamento, nenhuma informação necessária à valorização da matriz peso P foi disponibilizada. Assim, considerou-se todas as observações como não correlacionadas e oferecendo o mesmo grau de confiança com uma variância unitária. Desta forma, a matriz P da equação (2.36) além de ser diagonal, se degenera na matriz identidade.

A MVC das observações para a Colocação foi estimada pela equação (3.27) e a MVC do sinal s' foi estimada pela função covariância Gaussiana dada pela equação (4.1). Também a MVC do sinal s e a matriz covariância cruzada entre s e s' foram estimadas pela função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados.

As covariâncias amostrais foram estimadas utilizando a metodologia descrita na seção 4.3, as quais foram utilizadas no processo de ajustamento para estimativa dos parâmetros da função covariância discutido na seção 4.4. Os dados utilizados para a estimativa das covariâncias amostrais foram as observações dadas na Tabela A4.1 do Apêndice 4.

Os resultados do experimento são apresentados para o Ajustamento e para a Colocação. Para estas duas estratégias, a transformação de similaridade a sete parâmetros foi aplicada para estimativa dos parâmetros entre o SAD69 e o SAD69/96. Os resíduos do Ajustamento também são estimados e apresentados.

No caso da Colocação são dadas, além de uma comparação com o Ajustamento, outras estimativas como o sinal nos pontos de observação e de

cálculo, o ruído observacional e o vetor z contendo o efeito integrado do sinal e do ruído.

A avaliação dos resultados obtidos pôde ser feita pela comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos. Em cada estimativa um ponto foi retirado e serviu como ponto de predição, de forma que todos os n pontos participaram como pontos de predição sendo um a cada estimativa. Cada ponto de predição retirado não participou do processo de parametrização e foi testado individualmente, tornando possível a utilização de um total de $n - 1$ pontos e um ponto para teste em cada estimativa. As diferenças são analisadas tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenadas geodésicas.

Com o objetivo de avaliar a qualidade global das estimativas, foi feita uma análise estatística tanto dos resultados do Ajustamento quanto dos resultados da Colocação. O teste estatístico utilizado foi o teste global baseado na distribuição χ^2 , cuja descrição foi feita na seção 2.5.

5.4 RESULTADO DAS COVARIÂNCIAS ESTIMADAS

As covariâncias foram estimadas pela equação (4.28) onde as observações utilizadas são constituídas pela diferença das coordenadas e são mostradas na Tabela A4.1. As distâncias espaciais foram calculadas pela equação (4.41) compondo um perfil que é dividido em intervalos δ iguais. Em cada intervalo, as covariâncias foram estimadas para as três componentes X, Y e Z, as quais são utilizadas na modelagem da função covariância.

Tabela 5.1 – Covariâncias estimadas

Distância (km)	$C_1(\Delta)_X$ (m ²)	$C_1(\Delta)_Y$ (m ²)	$C_1(\Delta)_Z$ (m ²)
10	0.328335	0.445298	0.878719
20	0.285087	0.400877	0.805361
30	0.248568	0.362141	0.751892
40	0.231438	0.308304	0.651341
50	0.216959	0.264283	0.566883
60	0.195031	0.215143	0.476791
70	0.175158	0.173077	0.391477
80	0.153084	0.137358	0.323319
90	0.128690	0.109490	0.273256
100	0.109046	0.086909	0.233912
110	0.092819	0.061705	0.186561
120	0.078502	0.037662	0.142886
130	0.064806	0.018574	0.101429
140	0.052765	0.003244	0.062533
150	0.042979	-0.004361	0.038851
160	0.033993	-0.010062	0.020263
170	0.026133	-0.011190	0.010887
180	0.018412	-0.008284	0.007527
190	0.012211	-0.003646	0.007167
200	0.008098	-0.002128	0.002662
210	0.005065	-0.002573	-0.000331
220	0.002266	-0.002558	-0.001836
230	-0.000094	-0.002677	-0.003074
240	-0.001366	-0.002188	-0.003583
250	-0.001807	-0.001924	-0.003966
260	-0.001805	-0.002096	-0.004434
270	-0.001663	-0.002217	-0.005009
280	-0.001581	-0.002442	-0.005348
290	-0.001516	-0.002609	-0.005447
300	-0.001521	-0.002667	-0.005413

A Tabela 5.1 mostra o resultado das covariâncias $C_1(\Delta)$ estimadas a partir das observações. Para cada intervalo a covariância foi estimada para o ponto médio, onde o valor de δ foi arbitrado igual a 10 km.

5.5 MODELAGEM NUMÉRICA DA FUNÇÃO GAUSSIANA

A função covariância foi modelada por meio de uma regressão dos dados para as covariâncias estimadas, o que possibilitou a estimativa dos parâmetros da função. Para cada distância, existe uma covariância associada e dada nas três componentes X, Y e Z como mostra a Tabela 5.1.

As covariâncias $C(r)$ dadas na Tabela 5.1 entram para compor o vetor L da equação (4.36), onde os valores de y são calculados pela equação (4.33). A matriz A é computada pela equação (4.35), cujas distâncias r são dadas na primeira coluna da Tabela 5.1. As equações (4.37) e (4.38) formam o sistema de equações normais cuja solução é dada pela equação (4.39).

A Tabela 5.2 mostra os parâmetros da função covariância Gaussiana estimados pelo MMQ e dado nas três componentes X, Y e Z. O valor de “a” foi estimado pela equação (4.39) e o valor de C_0 pela equação (4.40).

Tabela 5.2 – Parâmetros da Função Covariância Gaussiana

Parâmetros	Componente X	Componente Y	Componente Z
C_0 (m^2)	0.290618	0.490893	0.872883
a (km^{-1})	0.009528	0.014383	0.011890

A partir do parâmetro “a” mostrado na Tabela 5.2 foi calculado o comprimento de correlação ξ pela equação (4.9). A Tabela 5.3 mostra os valores de ξ calculados também nas três componentes X, Y e Z. Para estes valores, a covariância tem o seu valor igual a metade de C_0 como mostra a equação (4.3).

Tabela 5.3 – Parâmetro “a” e comprimento de correlação ξ

Parâmetros	Componente X	Componente Y	Componente Z
a^2 (km^{-2})	0.000091	0.000207	0.000141
ξ (km)	87.382170	57.885548	70.020830

A Tabela 5.4 mostra a variância das observações $C_i(0)$, a variância do sinal $C_s(0)$ e a variância do ruído $C_n(0)$ estimadas nas três componentes X, Y e Z. O valor de $C_i(0)$ foi estimado pela equação (4.27) e o valor de $C_s(0)$ é o próprio C_0

como mostra a Figura 4.1, o qual já foi estimado pela equação (4.40). A equação (4.26) foi utilizada para estimativa do valor de $C_n(0)$.

Tabela 5.4 – Variâncias estimadas

Parâmetros	Componente X	Componente Y	Componente Z
$C_l(0)$ (m^2)	0.304176	0.533419	1.082605
$C_s(0)$ (m^2)	0.290618	0.490893	0.872883
$C_n(0)$ (m^2)	0.013558	0.042526	0.209722

As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 mostram a função covariância Gaussiana modelada a partir das covariâncias amostrais $C_l(\Delta)$ dadas na Tabela 5.1. As distâncias Δ no eixo das abscissas X são dadas em km e as covariâncias amostrais correspondentes são dadas em m^2 e estão representadas pelo símbolo “+”. A curva representada pela linha cheia é a função covariância da equação (4.1), cujos parâmetros são mostrados na Tabela 5.2. O valor da ordenada onde a curva intercepta o eixo Y é o próprio valor de C_0 correspondente a variância do sinal $C_s(0)$ e a constante “a” fornece a forma da curva interpolada, isto é, fornece o decaimento da função.

Figura 5.5 – Função Covariância para a componente X

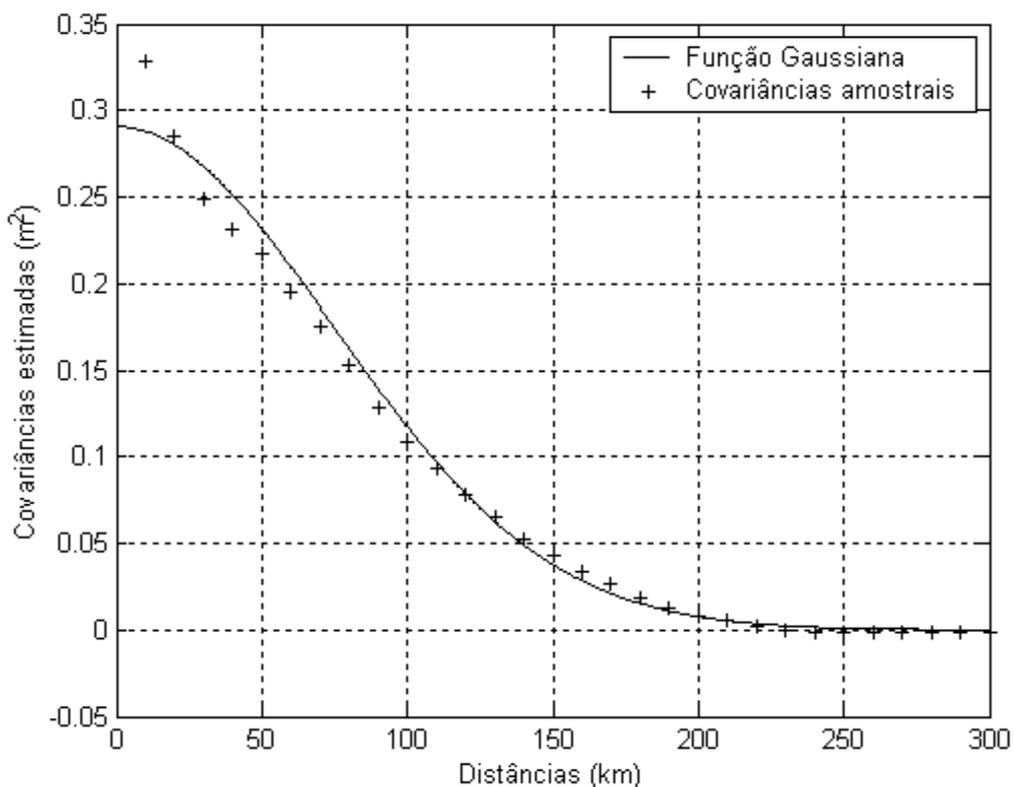


Figura 5.6 – Função Covariância para a componente Y

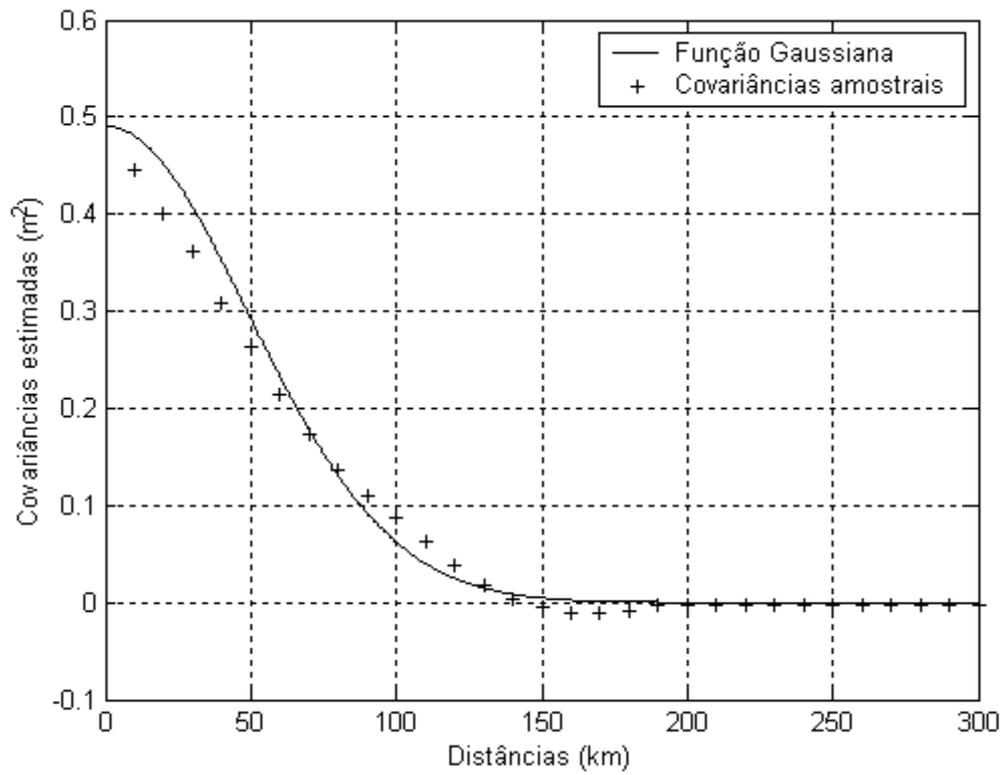
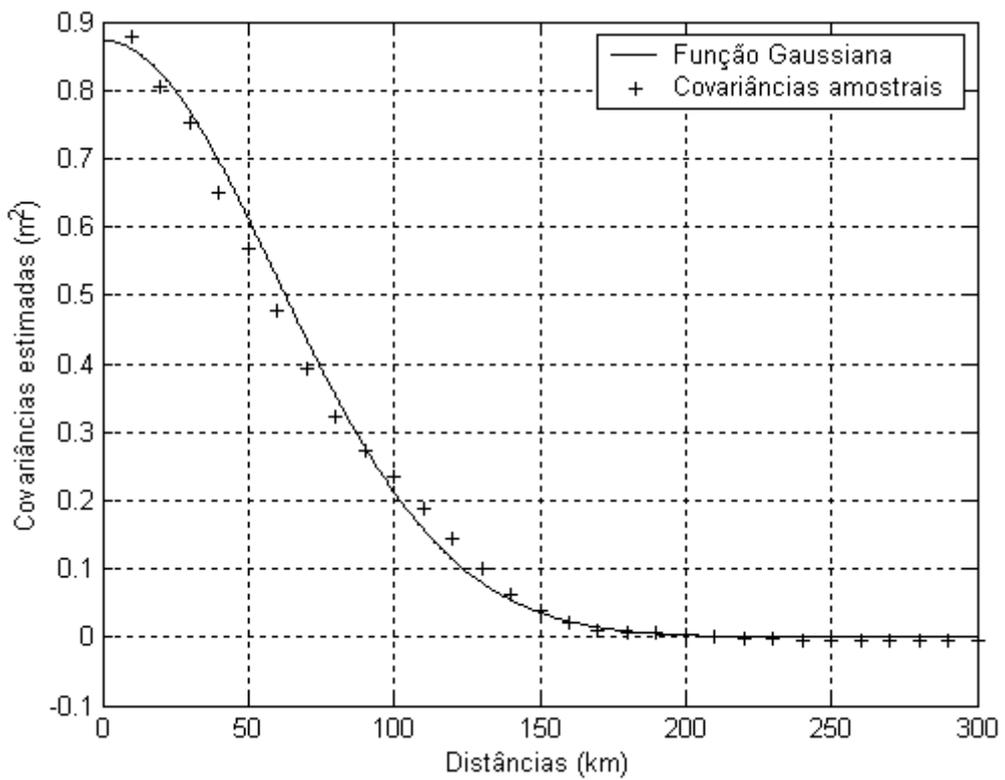


Figura 5.7 – Função Covariância para a componente Z



6. ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

6.1 PARÂMETROS DA TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

O modelo matemático de transformação foi dado na seção 2.4 e consiste da transformação de similaridade a sete parâmetros, a qual foi utilizada para estimativa dos parâmetros entre o SAD69 e o SAD69/96. Os dados que entraram para compor o experimento são as coordenadas de 200 pontos da RGB mostrados na Tabela A3.1 do Apêndice 3. Duas estratégias de processamento foram utilizadas onde os resultados foram obtidos tanto por Ajustamento quanto por Colocação para efeitos de comparação.

A relação entre as duas referidas realizações do SGB foi estabelecida por três translações, três rotações e uma diferença de escala. No processo de estimativa, a matriz P do Ajustamento foi assumida igual a matriz identidade e a MVC das observações para a Colocação foi estimada pela função covariância modelada a partir dos dados como mostra a Tabela 5.2. A Tabela 6.1 mostra os sete parâmetros estimados entre o SAD69 e o SAD69/96 para a área de estudo.

Tabela 6.1 – Parâmetros do Ajustamento e da Colocação

	Ajustamento		Colocação	
	Parâmetros	Precisão	Parâmetros	Precisão
x_0 (m)	5.686083	\pm 3.784043	3.438085	\pm 8.184232
y_0 (m)	-5.924692	\pm 2.866645	-4.930011	\pm 6.609342
z_0 (m)	-2.581202	\pm 4.098376	-7.907040	\pm 7.890297
ϵ_x (arcseg)	0.149701	\pm 0.111976	0.563985	\pm 0.259283
ϵ_y (arcseg)	0.172066	\pm 0.123893	-0.059135	\pm 0.250550
ϵ_z (arcseg)	0.082678	\pm 0.115320	-0.154738	\pm 0.231943
δ (ppm)	-1.334058	\pm 0.406863	-1.348811	\pm 0.937157

Os parâmetros do Ajustamento foram estimados pela equação (2.49) e os da Colocação pela equação (3.44). Como discutido na seção 3.5 e mostrado pelas equações (3.68) e (3.69), a solução para os parâmetros é de fato diferente como mostra a Tabela 6.1. Esta diferença nas duas soluções é atribuída à correlação do sinal, que por sua vez se propaga na MVC das observações como mostra a equação (3.27).

6.2 RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO E VETOR Z

Os parâmetros de transformação entre o SAD69 e o SAD69/96 foi apresentado na Tabela 6.1 para todos os pontos da área de estudo. O vetor de resíduos V do ajustamento para a transformação geométrica utilizada foi estimado pela equação (2.30) e o vetor aleatório z para a colocação foi estimado pela equação (3.51).

Os resíduos representam a parte aleatória do ajustamento sendo interpretado como erro das observações, caracterizando assim a parcela das observações que não foram absorvidas pelos parâmetros da transformação geométrica. Por sua vez, também o vetor z compõe a parte aleatória para a colocação representando o efeito integrado do sinal s' e do ruído n nos q pontos de observação.

As Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 mostram os resíduos estimados no Ajustamento e as Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 mostram o vetor aleatório z estimado pela Colocação. Tanto o vetor V quanto o vetor z são dados nas três componentes X, Y e Z.

Figura 6.1 – Componente X do vetor V

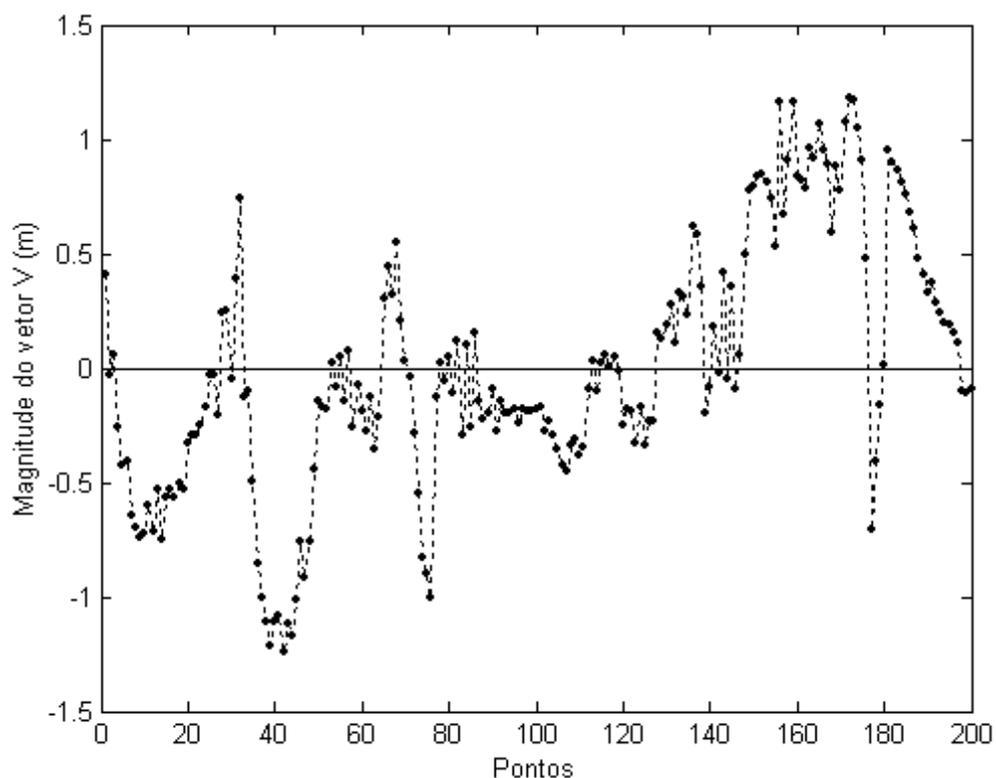


Figura 6.2 – Componente Y do vetor V

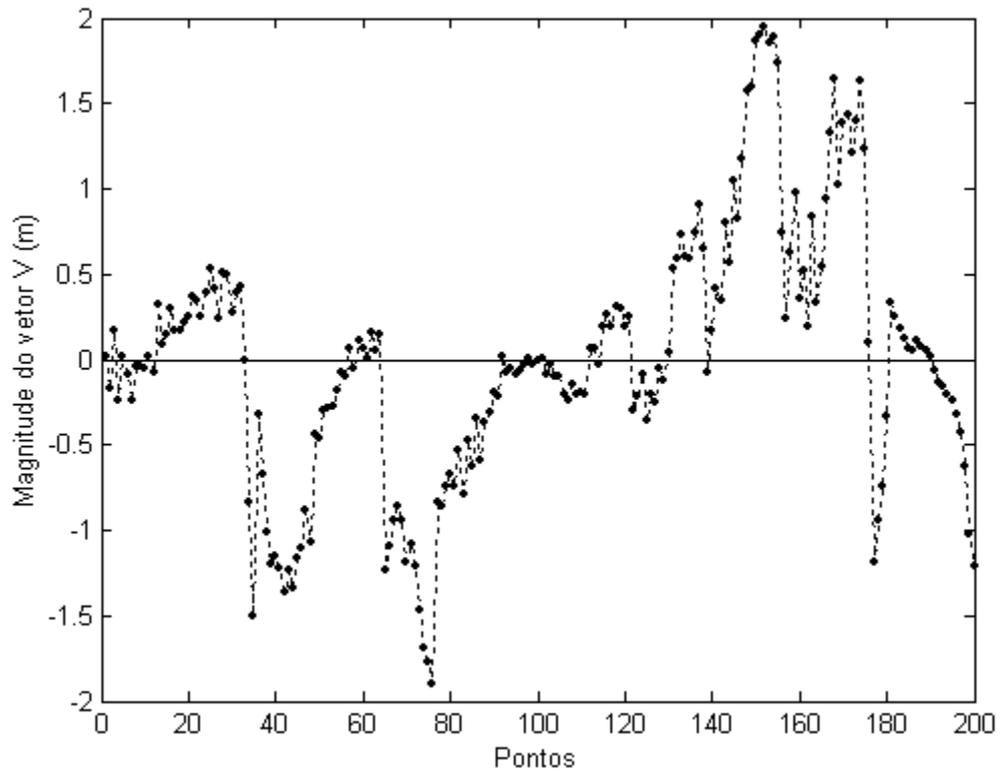


Figura 6.3 – Componente Z do vetor V

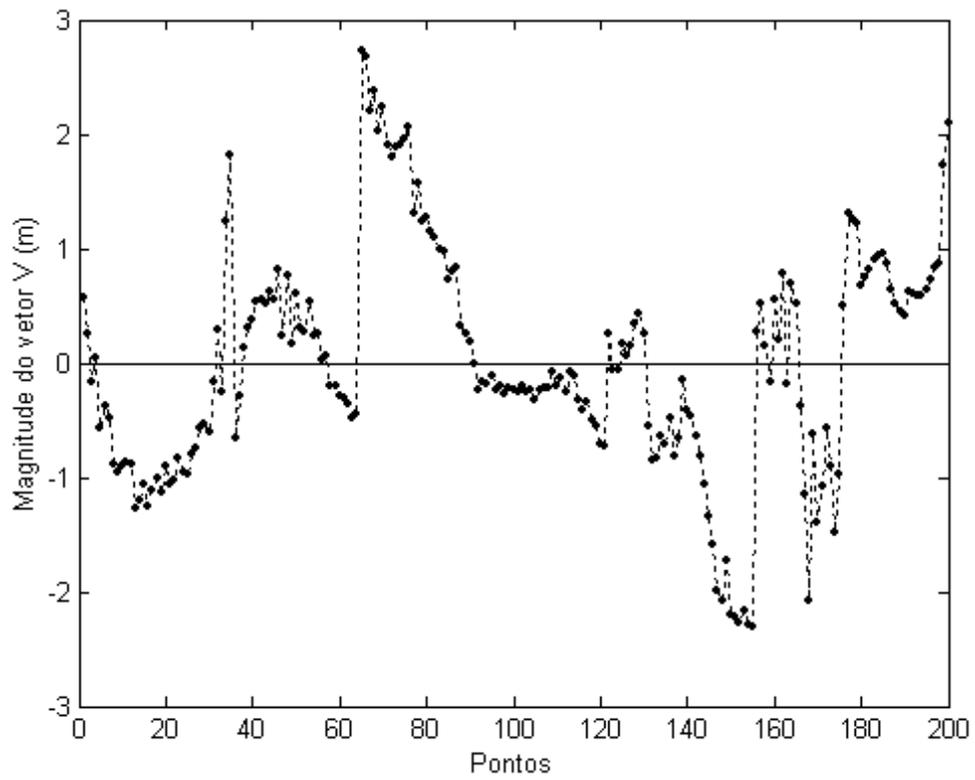


Figura 6.4 – Componente X do vetor z

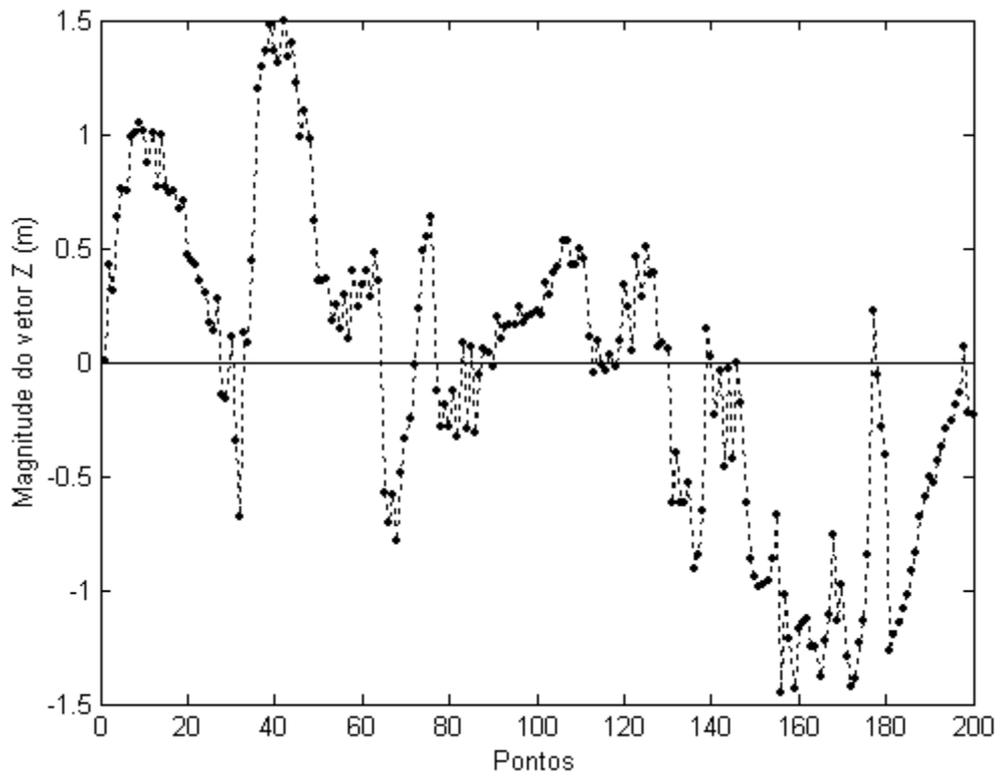


Figura 6.5 – Componente Y do vetor z

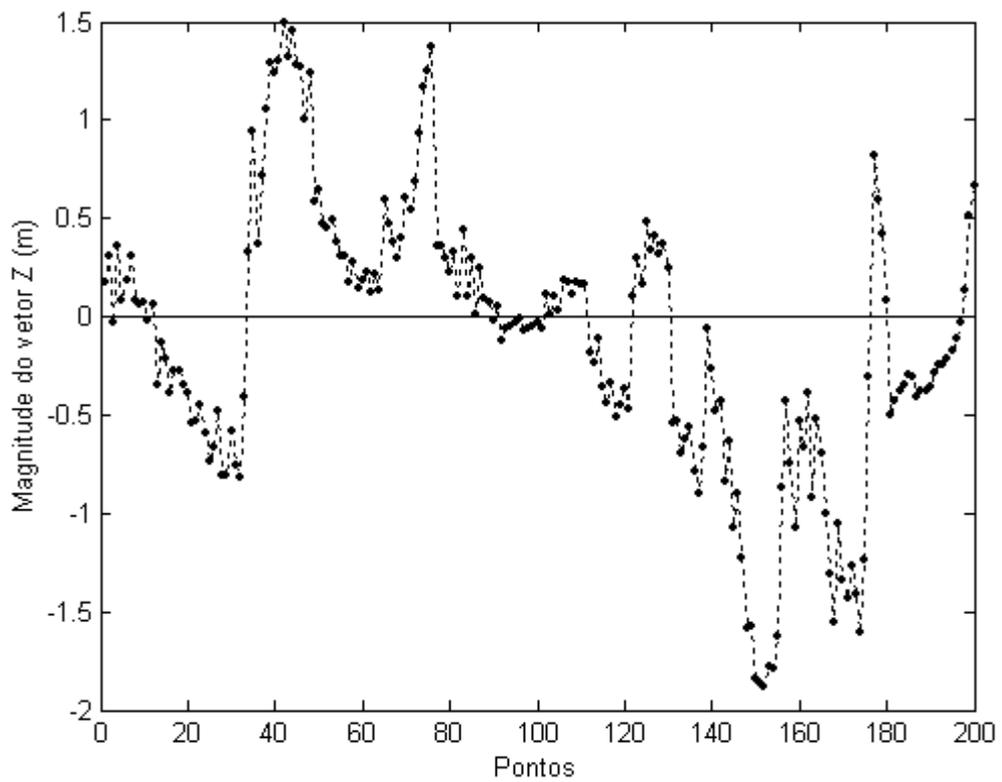
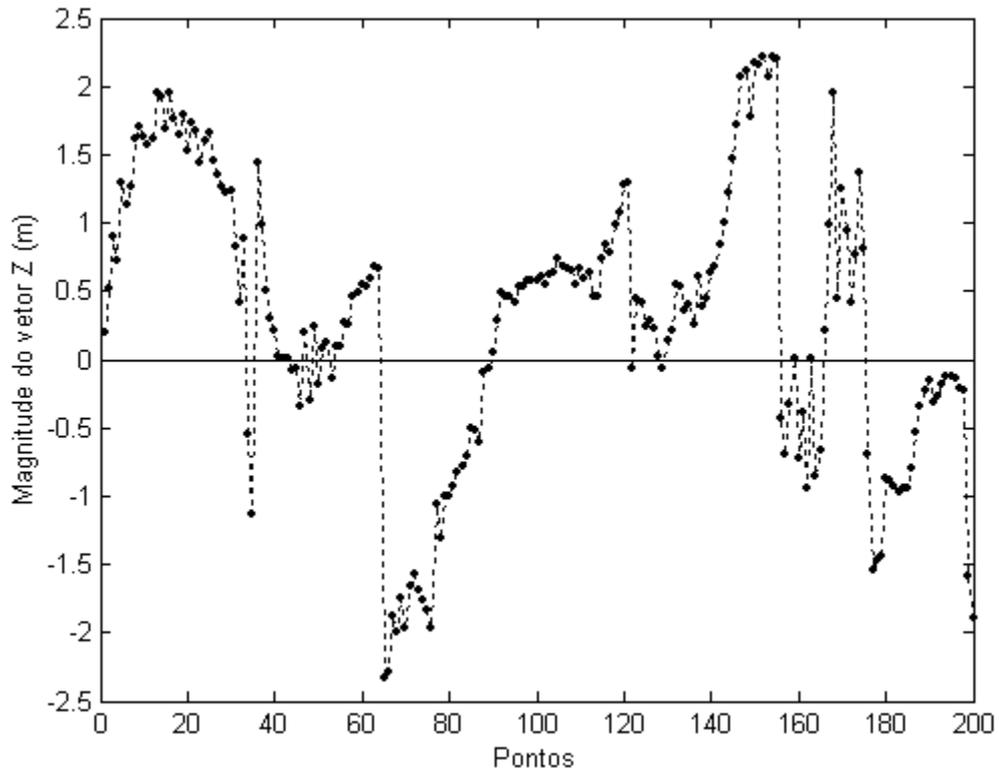


Figura 6.6 – Componente Z do vetor z



Pela comparação das Figuras 6.1, 6.2 e 6.3, respectivamente, com as Figuras 6.4, 6.5 e 6.6, nota-se uma semelhança na magnitude entre as componentes X, Y e Z dos vetores V e z , além de possuírem sinais opostos. Esta semelhança é justificada comparando-se as equações (2.30) e (3.51) utilizadas, respectivamente, para estimativa dos vetores V e z . Pelas razões já discutidas na seção 3.5, tem-se que a matriz A é a mesma para as duas equações porque ela participa identicamente, assim como os vetores L e W . Desta maneira, o que faz a diferença na magnitude dos vetores V e z é o vetor dos parâmetros X .

Em uma particular situação onde a solução para os parâmetros das equações (2.49) e (3.44) é numericamente igual, então o vetor V é igual ao vetor z com o sinal oposto, isto é, $V = -z$.

6.3 ANÁLISE ESTATÍSTICA

A análise estatística utilizada para avaliar a qualidade das estimativas obtidas pelo ajustamento e pela colocação foi feita pelo teste global baseado na distribuição χ^2 , o qual foi apresentado na seção 2.5. O nível de significância utilizado foi $\alpha = 5\%$ e o valor dos graus de liberdade foi calculado pela equação (2.63) fornecendo $S = 593$.

A Tabela 6.2 mostra a análise estatística para as estimativas dadas na Tabela 6.1, onde a forma quadrática foi estimada para o ajustamento pela equação (2.34) e para a colocação pela equação (3.21). Também foram estimados os valores da variância *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$, respectivamente, pelas equações (2.62) e (3.61).

Tabela 6.2 – Análise estatística pelo teste global unilateral

Elementos	Ajustamento	Colocação
$V^T.P.V$	366.597	364.570
S	593	593
$\hat{\sigma}_0^2$	0.618	0.615
χ_c^2	366.597	364.570
$\chi_t^2 (593 ; 0.95)$	650.760	650.760

O valor de Qui-Quadrado χ_c^2 baseado na forma quadrática foi estimado pela equação (2.65), cujo valor foi comparado com o Qui-Quadrado χ_t^2 teórico obtido a partir dos valores de α e S. Esta comparação foi feita pela equação (2.66) da qual conclui-se que a hipótese básica H_0 é aceita para $\alpha = 5\%$.

6.4 ESTIMATIVA DO SINAL s' E DO RUÍDO OBSERVACIONAL n

O vetor aleatório z contendo a informação integrada do sinal s' e do ruído n foi estimado pela equação (3.51) e pode ser decomposto nestas duas componentes. O sinal s' representando as distorções sistemáticas residuais foi estimado pela equação (3.52) e o ruído n constituindo os erros das observações foi estimado pela equação (3.53).

Na equação (3.52) utilizada para estimativa do vetor s' , a sua MVC foi estimada pela função covariância da equação (4.1), cuja modelagem foi dada na seção 5.5 e a MVC do ruído n da equação (3.53) foi estimada pela equação (3.29).

Figura 6.7 – Componente X do sinal s'

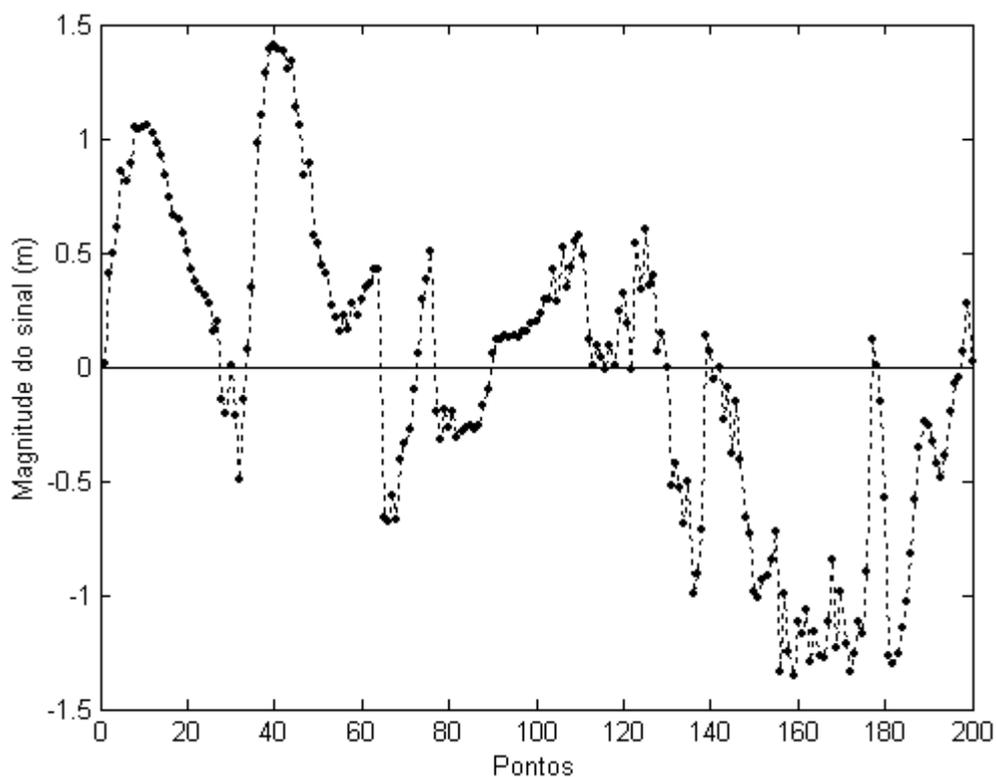


Figura 6.8 – Componente Y do sinal s'

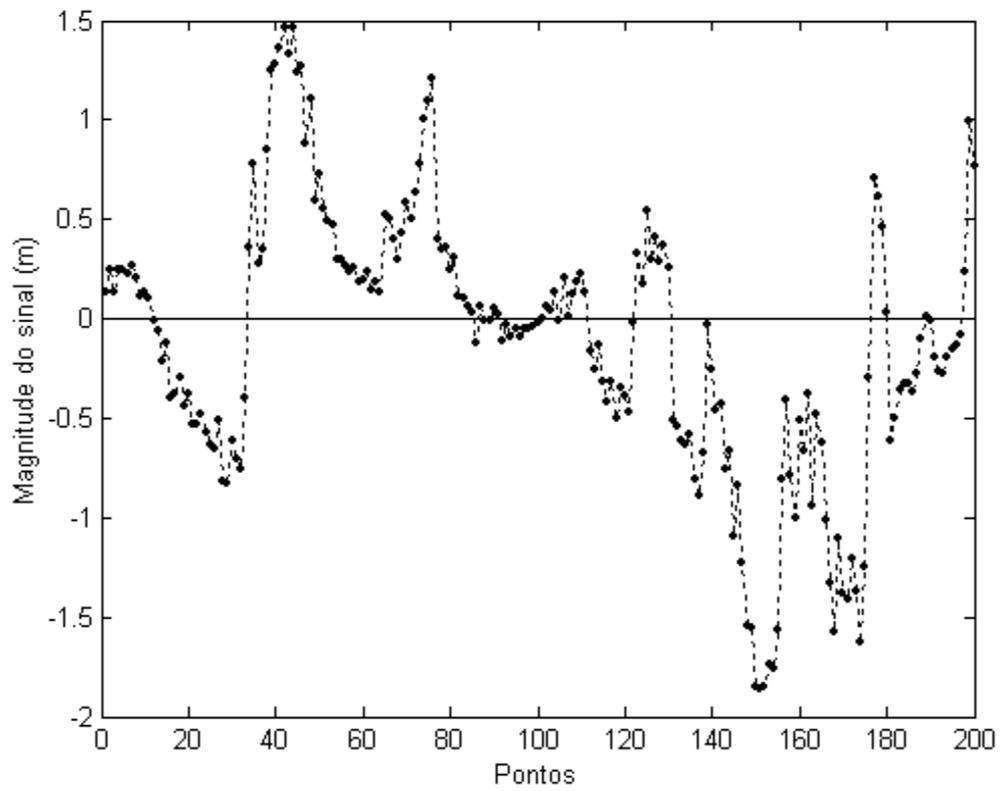


Figura 6.9 – Componente Z do sinal s'

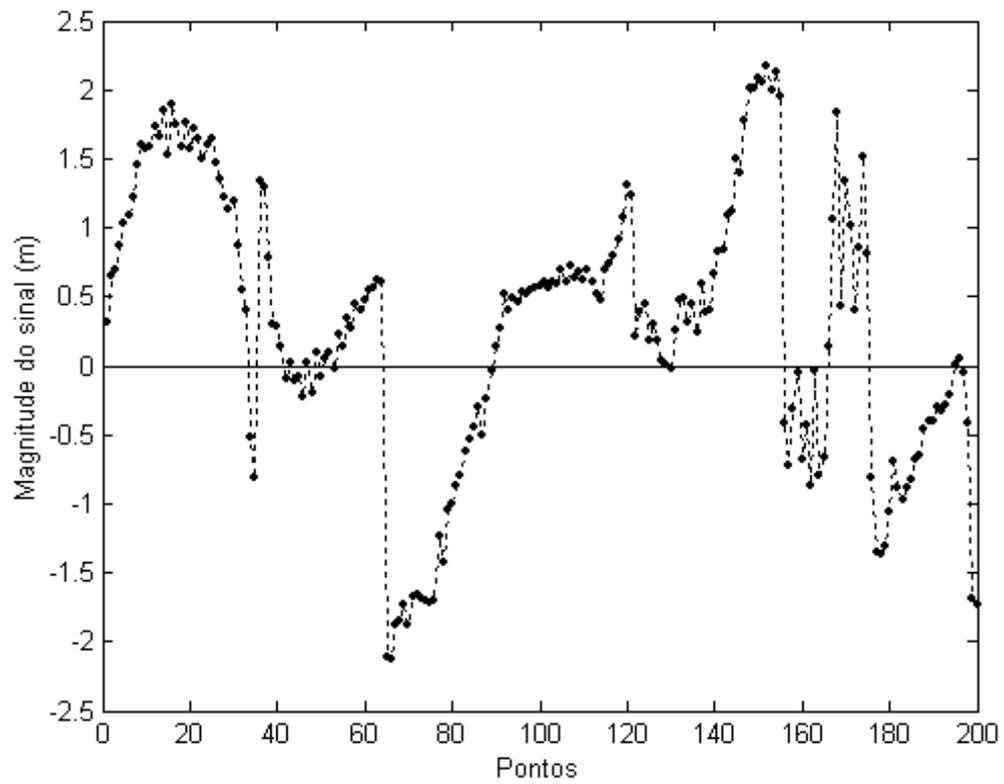


Figura 6.10 – Componente X do ruído n

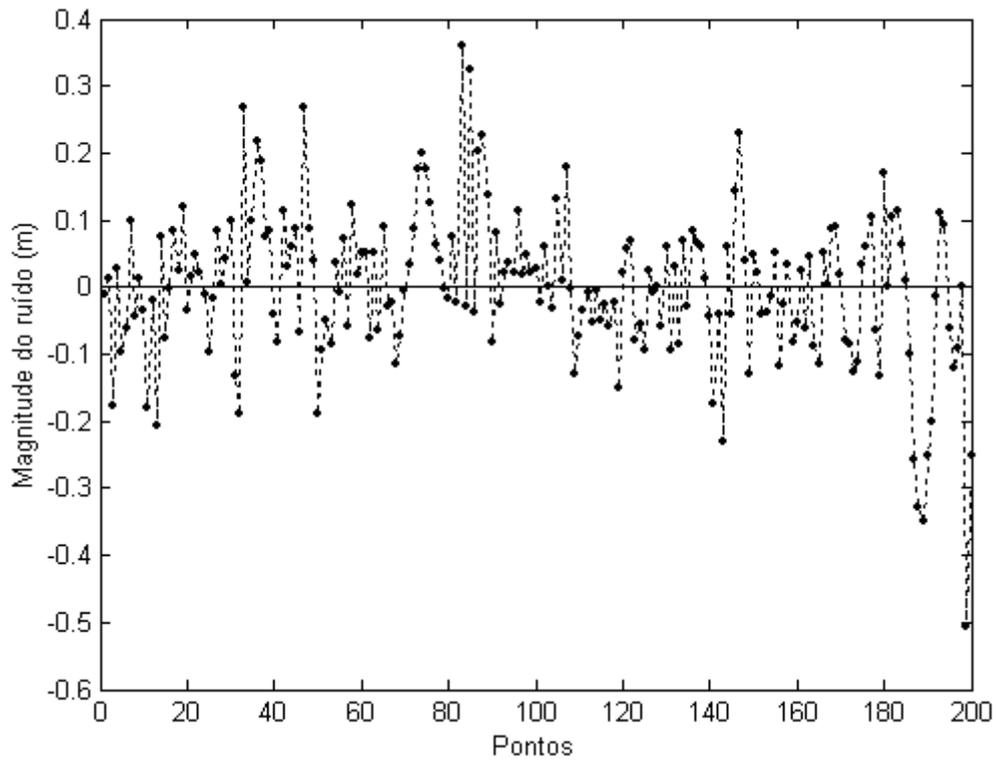


Figura 6.11 – Componente Y do ruído n

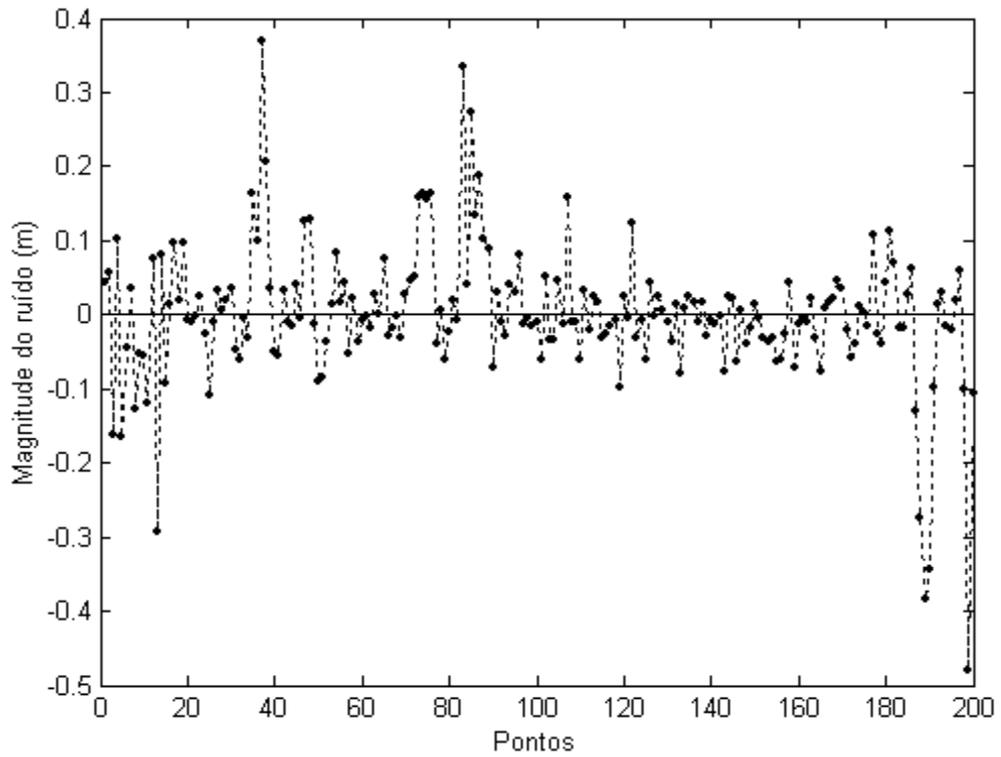
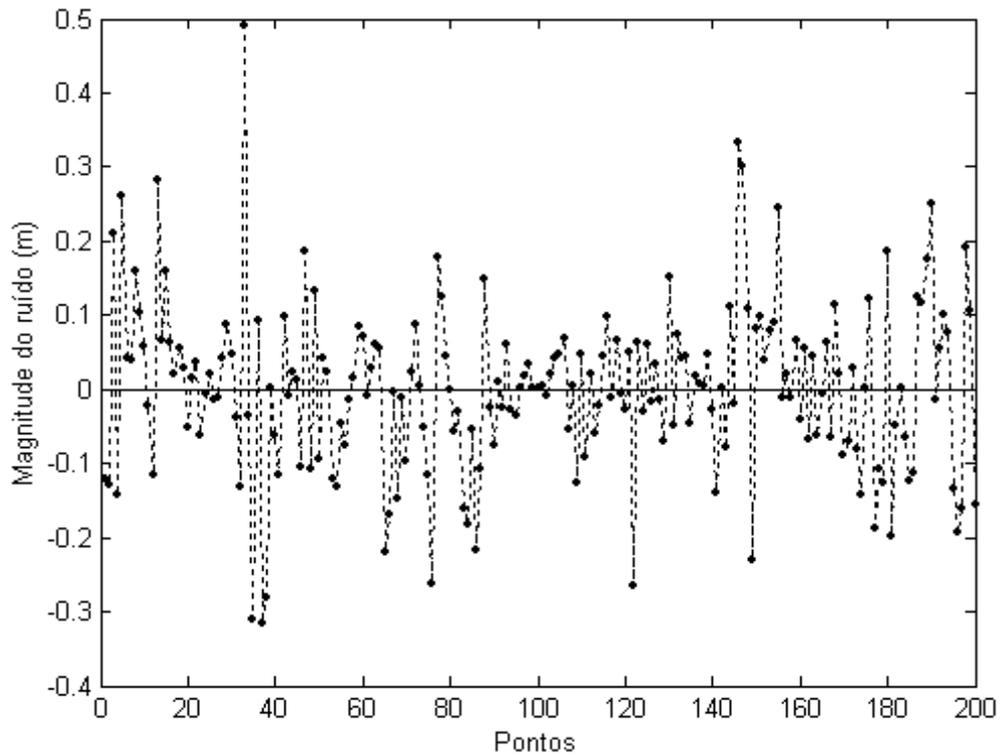


Figura 6.12 – Componente Z do ruído n



As Figuras 6.7, 6.8 e 6.9 mostram o vetor dos sinais s' e as Figuras 6.10, 6.11 e 6.12 mostram o vetor dos ruídos n dados nas três componentes X, Y e Z. O vetor dos sinais s' dado nas Figuras 6.7, 6.8 e 6.9 apresentam, respectivamente, um comportamento similar ao vetor z dado pelas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6. Isto é devido ao comportamento completamente aleatório mostrado pelo ruído n dado nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.12.

A recuperação da informação (sinal) foi prejudicada na parte final para as componentes X e Y e na parte inicial da componente Z devido ao aumento no ruído como mostram as Figuras 6.10, 6.11 e 6.12.

6.5 ESTIMATIVA DO SINAL s NOS PONTOS DE PREDIÇÃO

O vetor dos sinais s para os pontos de predição representando as correções feitas para a parte sistemática do modelo foi estimado pela equação (3.50), no qual a matriz covariância cruzada entre s e s' pôde ser estimada pela função covariância da equação (4.1), cuja modelagem foi dada na seção 5.5.

A Tabela A5.1 do Apêndice 5 mostra o vetor dos sinais s dados nas três componentes X, Y e Z para todos os 200 pontos que participaram do experimento. As componentes do vetor s também são mostradas graficamente pelas Figuras 6.13, 6.14 e 6.15, as quais apresentam uma forte semelhança, respectivamente, com as Figuras 6.7, 6.8 e 6.9 que mostram o vetor dos sinais s' .

Figura 6.13 – Componente X do sinal s

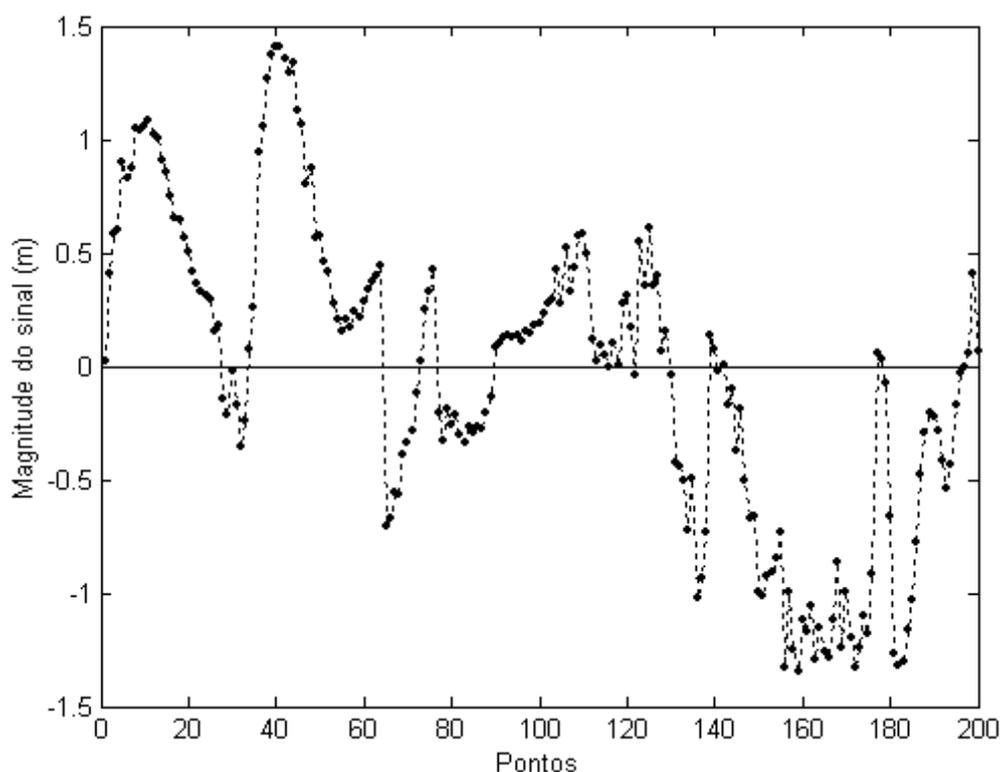


Figura 6.14 – Componente Y do sinal s

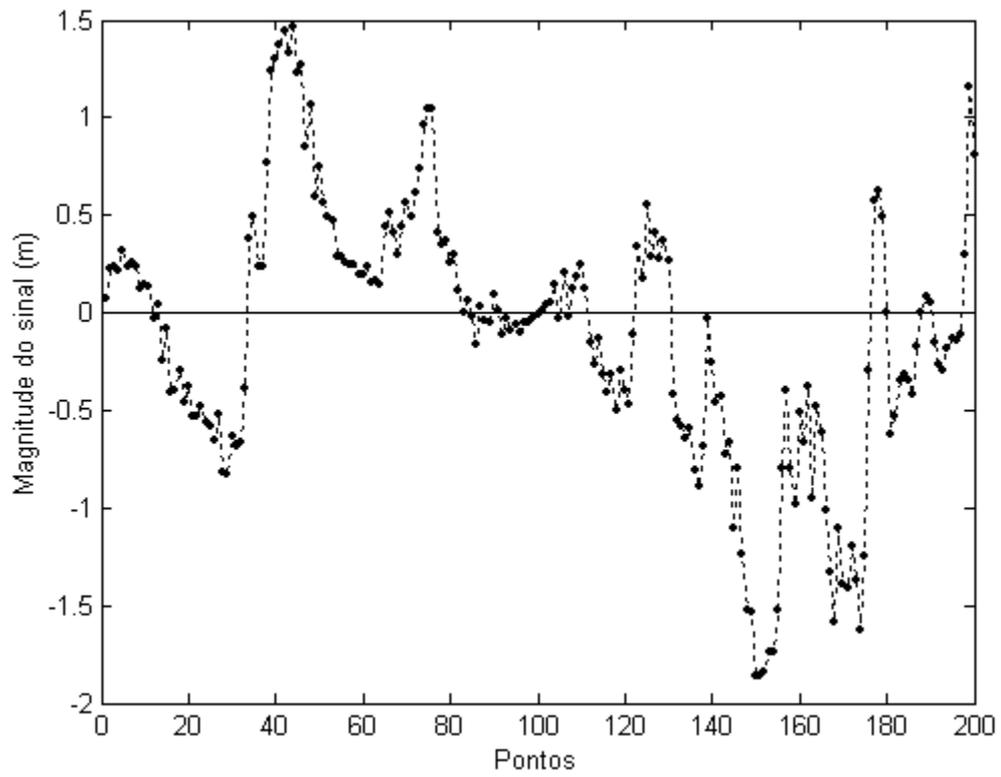
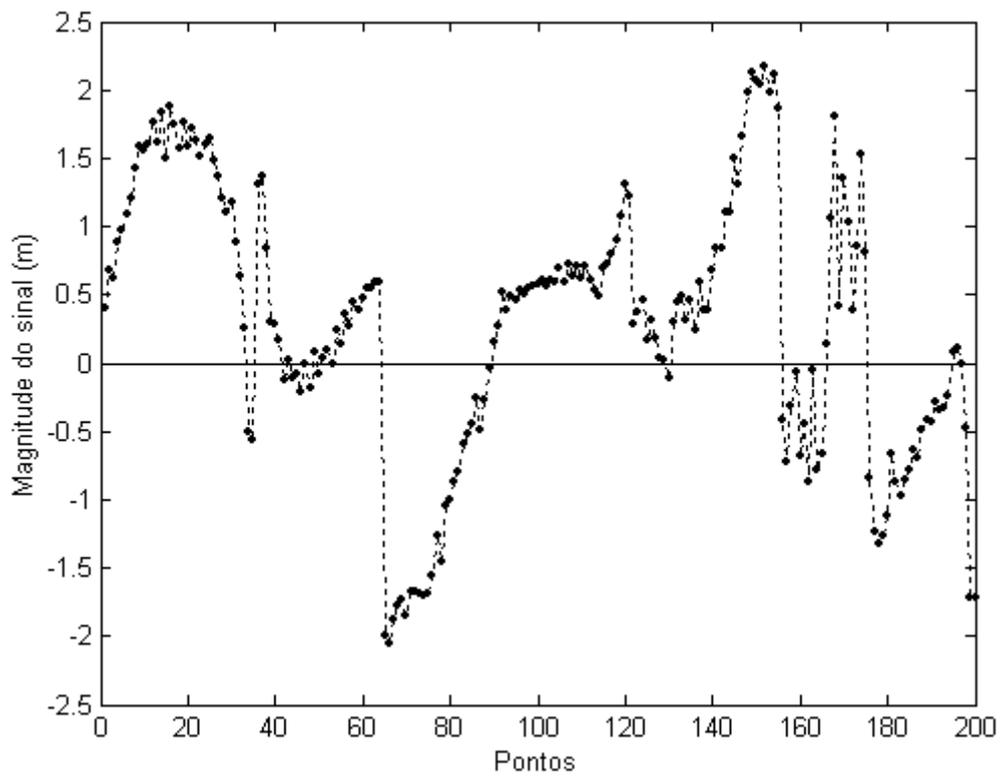


Figura 6.15 – Componente Z do sinal s



6.6 DIFERENÇAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Os resultados obtidos após a estimativa das coordenadas nos pontos de predição puderam ser avaliados mediante a comparação das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência conhecidos. No caso da análise para as coordenadas cartesianas, as diferenças ΔX , ΔY e ΔZ foram obtidas pela equação (3.70), onde as duas estratégias utilizadas puderam ser comparadas.

As Figuras 6.16, 6.17 e 6.18 mostram o resultado obtido para as diferenças entre as coordenadas estimadas pelo Ajustamento e pela Colocação e os valores de referência conhecidos. Observa-se que para o caso da Colocação, as diferenças obtidas são menores em comparação com o Ajustamento, isto é, as coordenadas estimadas pela Colocação se aproximam mais dos valores de referência. Ainda pelas Figuras 6.16, 6.17 e 6.18, as diferenças obtidas pelo Ajustamento mostraram valores de até 2,7m enquanto que pela Colocação, as diferenças ficaram ao nível do ruído como mostram as Figuras 6.10, 6.11 e 6.12.

Figura 6.16 – Diferença ΔX para Ajustamento e Colocação

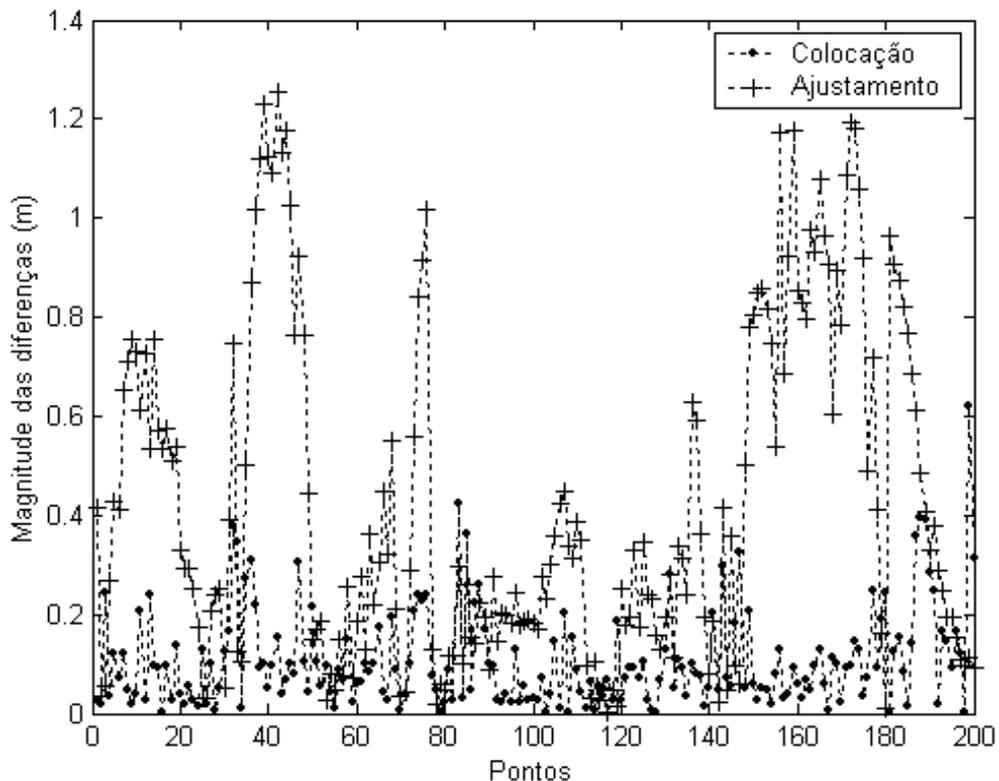


Figura 6.17 – Diferença ΔY para Ajustamento e Colocação

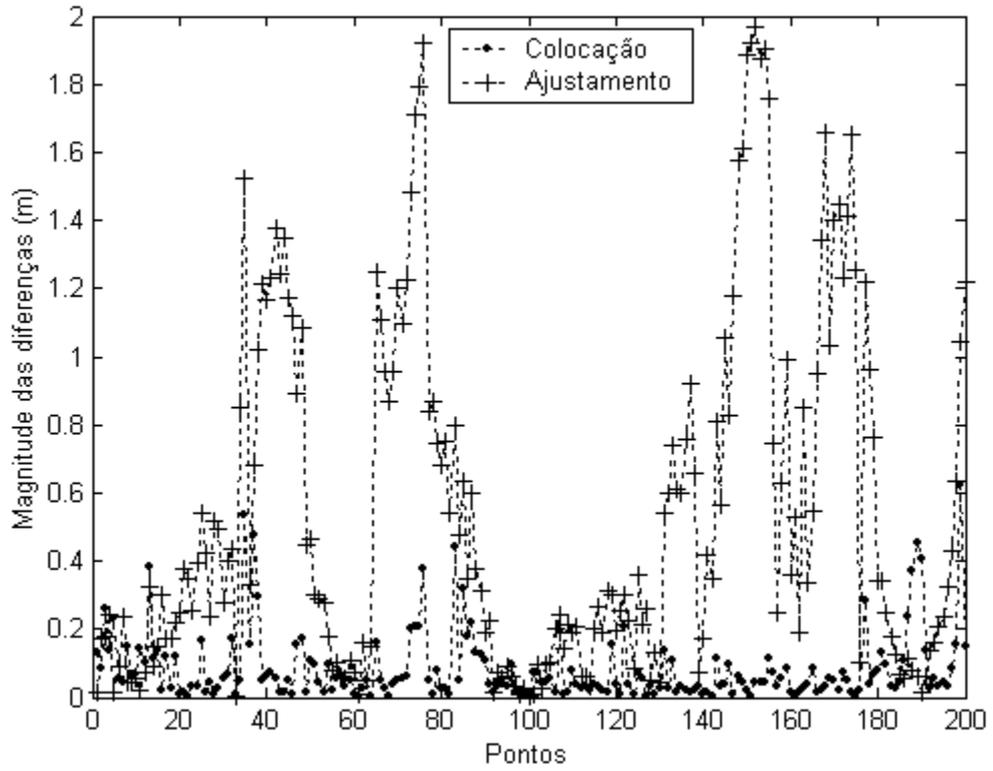
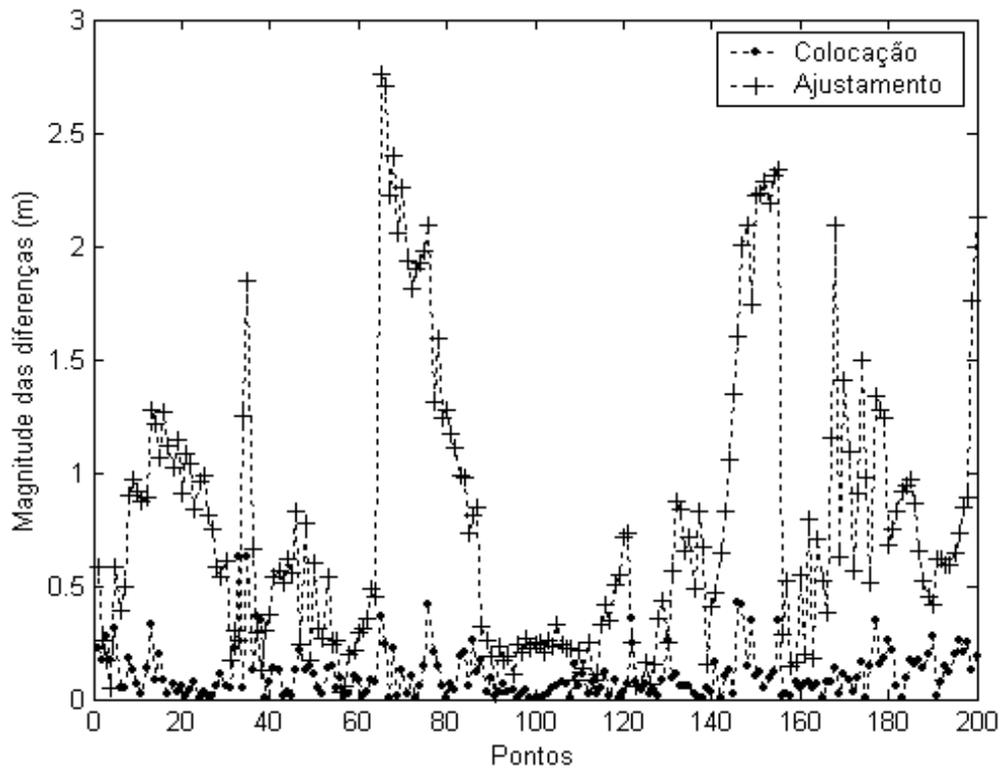


Figura 6.18 – Diferença ΔZ para Ajustamento e Colocação



6.7 DIFERENÇAS EM COORDENADAS GEODÉSICAS

Com o objetivo de detectar alguma tendência nas componentes, uma outra comparação similar àquela discutida na seção 6.6 foi feita analisando as diferenças em termos de coordenadas geodésicas. Neste caso, as diferenças $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ e Δh foram calculadas pelas equações (3.71), (3.72) e (3.73) permitindo uma comparação das duas estratégias em termos lineares.

As análises são dadas para as diferenças $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ e Δh , respectivamente, pelas Figuras 6.19, 6.20 e 6.21. Observou-se que as diferenças para o caso da Colocação são menores para $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ em comparação com o Ajustamento como mostram as Figuras 6.19, 6.20. Estas diferenças para a Colocação também ficaram ao nível do ruído enquanto que no Ajustamento obteve-se valores de até 3m.

A componente Δh mostrou uma maior diferença no caso da Colocação em comparação com o Ajustamento como indica a Figura 6.21. Esta diferença máxima de 13cm, porém, além de estar também ao nível do ruído, está dentro da precisão do mapa geoidal do Brasil que é de 3m no modo absoluto e de 1cm/km no modo relativo, segundo IBGE (1996).

Figura 6.19 – Diferença $\Delta\varphi$ para Ajustamento e Colocação

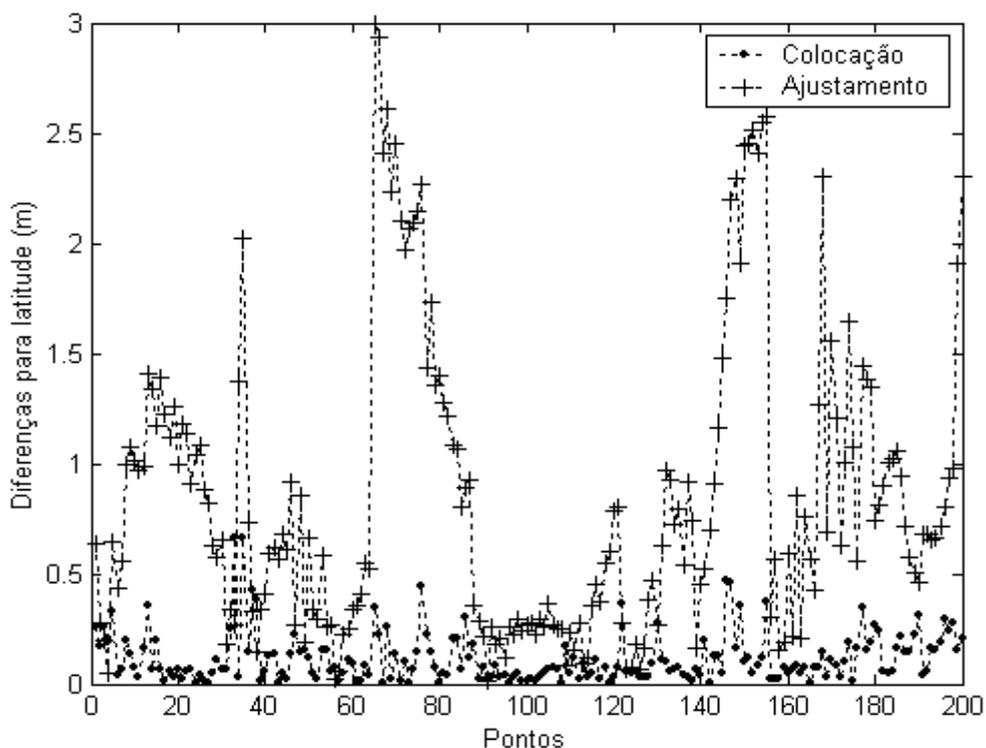


Figura 6.20 – Diferença $\Delta\lambda$ para Ajustamento e Colocação

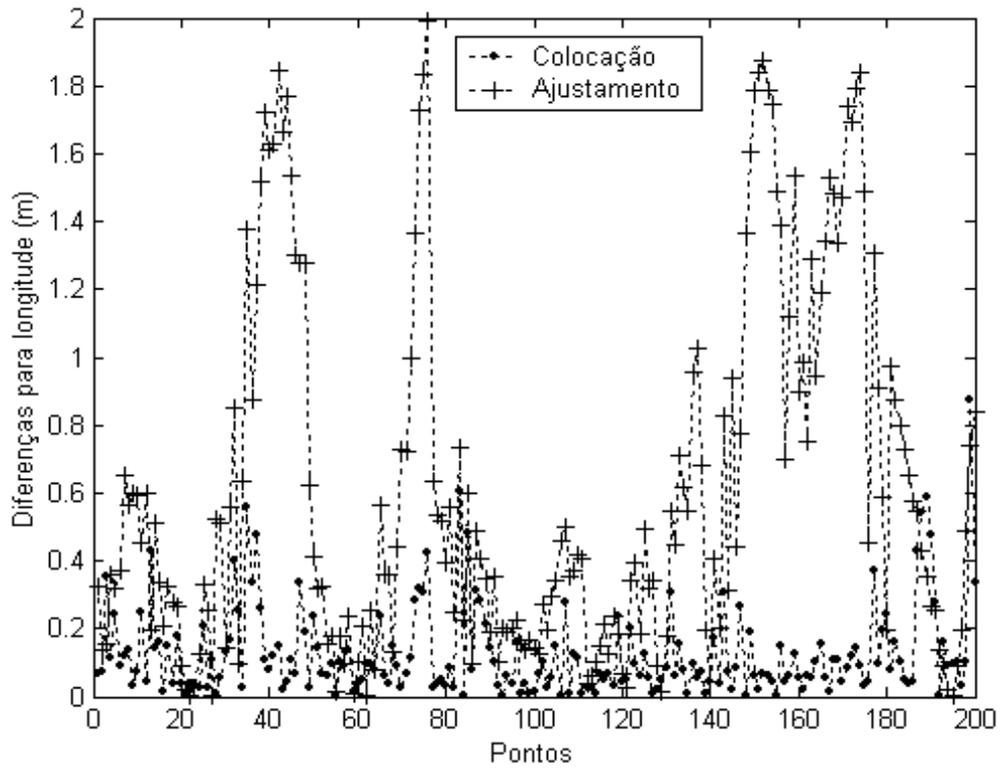
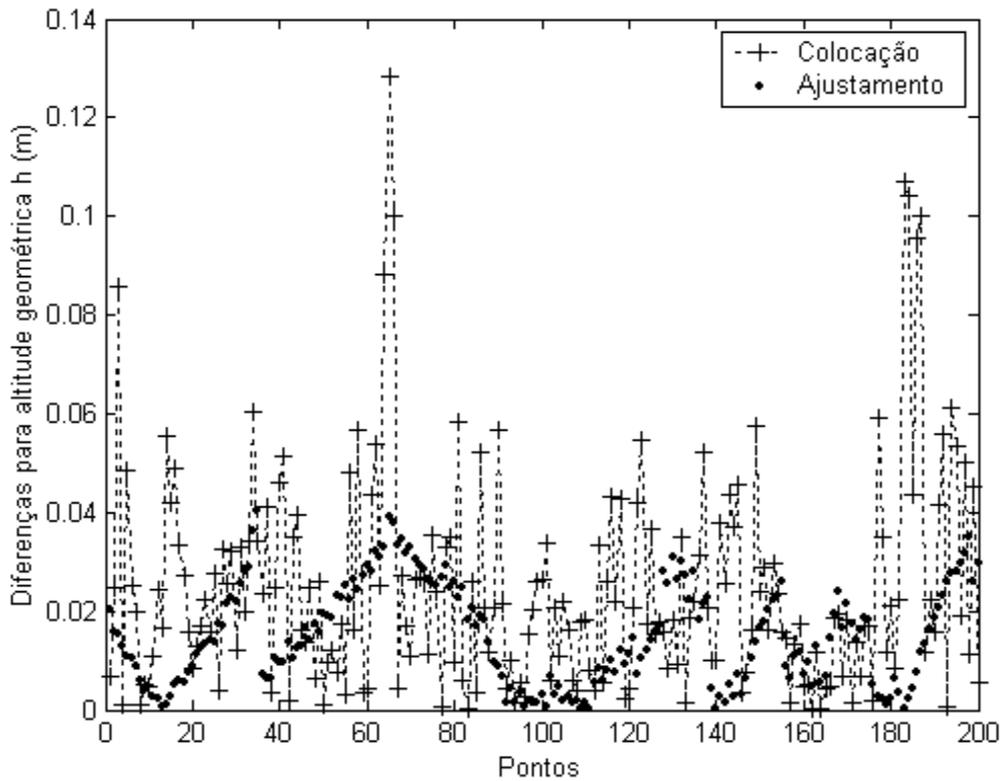


Figura 6.21 – Diferença Δh para Ajustamento e Colocação

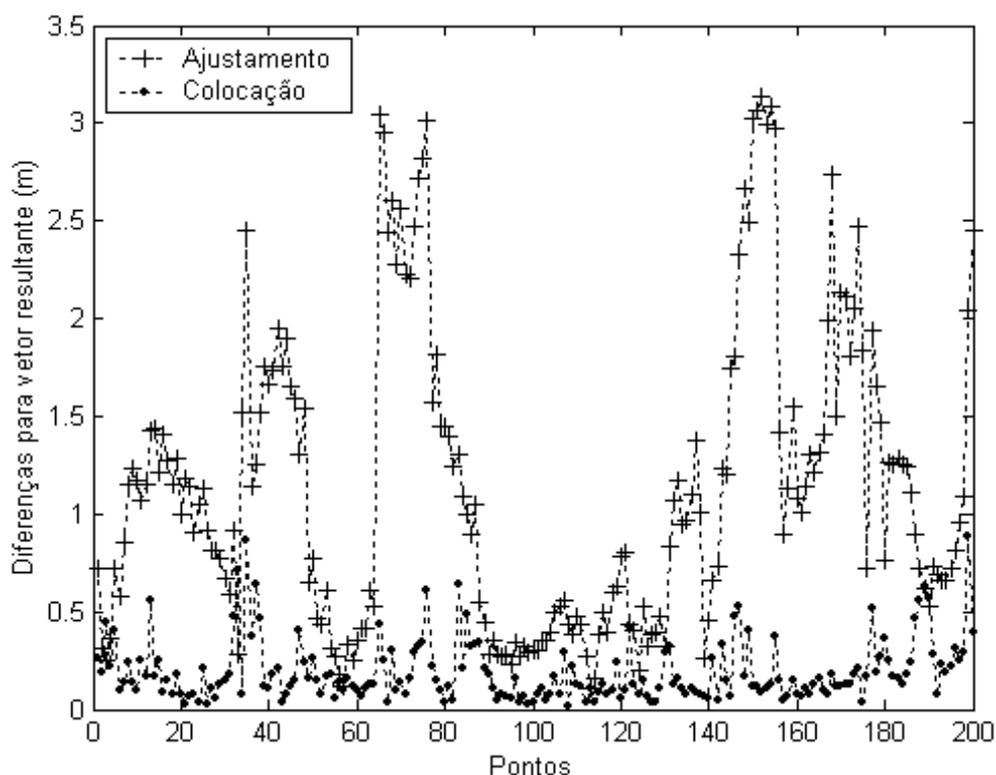


6.8 ANÁLISE DO VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS

As análises dadas tanto para as diferenças ΔX , ΔY e ΔZ quanto para as diferenças $\Delta\phi$, $\Delta\lambda$ e Δh mostraram a contribuição de cada componente na posição tridimensional dos pontos analisados. Uma outra comparação foi feita para o vetor resultante das diferenças entre as coordenadas estimadas pelas duas estratégias e os valores de referência.

Para confirmação dos resultados, o vetor resultante foi calculado tanto para as diferenças em coordenadas cartesianas quanto para as diferenças em coordenadas geodésicas, o que forneceu os mesmos resultados como já esperado.

Figura 6.22 – Diferença posicional para Ajustamento e Colocação



A Figura 6.22 mostra os vetores resultantes das diferenças para o Ajustamento e para a Colocação. Observa-se que para o caso do Ajustamento, existem valores que ultrapassam a 3m enquanto que pela Colocação as diferenças máximas são submétricas.

Os valores calculados são mostrados na Tabela A6.1 do Apêndice 6, onde a segunda coluna mostra o vetor resultante para o caso do Ajustamento e a terceira coluna mostra o vetor resultante para o caso da Colocação. A quarta coluna apresenta a diferença entre os vetores da segunda e terceira colunas mostrando que nos pontos 3, 33, 189 e 190, o vetor diferença é maior para a Colocação. Este resultado mostra que na maioria dos casos, as coordenadas estimadas pela Colocação se aproximam mais dos valores de referência em comparação com o Ajustamento.

7. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões obtidas no desenvolvimento deste trabalho. Também são apresentadas algumas recomendações para trabalhos futuros.

As principais conclusões deste trabalho são:

1) Para a área em estudo, os pontos cujas distâncias ao ponto de predição são maiores do que 250 km não possuem correlação com o ponto de predição;

2) Os parâmetros da transformação geométrica estimados para a Colocação e para o Ajustamento são numericamente diferentes conforme mostra a Tabela 6.1. As diferentes soluções para os parâmetros são obtidas devido às diferentes composições para a MVC das observações nas duas estratégias utilizadas;

3) Os valores dos sete parâmetros estimados apresentaram, para a área em estudo, diferenças significativas entre as duas realizações do SGB consideradas;

4) As diferenças obtidas entre as coordenadas estimadas pela Colocação e os valores de referência conhecidos nos pontos de predição ficaram ao nível do ruído e são menores quando comparadas com aquelas obtidas pelo Ajustamento. Esta menor diferença para a Colocação é atribuída à modelagem da função covariância;

5) Na maioria dos casos para a área de estudo, as coordenadas estimadas pela Colocação nos pontos de predição se aproximaram mais dos valores de referência em comparação com o Ajustamento.

6) A função covariância Gaussiana modelada a partir dos dados apresentou um bom desempenho considerando os resultados obtidos com a Colocação;

7) As variâncias *a priori* e *a posteriori* tanto para o Ajustamento quanto para a Colocação são estatisticamente iguais ao nível de significância de 5%;

8) O tempo de processamento dos dados é maior para a Colocação. Este aumento no tempo de processamento é atribuído principalmente à modelagem da função covariância.

9) O método de Colocação pode ser aplicado em problemas de transformação de coordenadas, visto que tanto os parâmetros quanto as componentes do sinal s são estimados de forma simultânea no mesmo modelo matemático.

Fundamentado nas análises deste trabalho, recomenda-se:

- 1) Proceder a estudos de outros modelos para a função covariância e analisar o seu desempenho quando aplicada na modelagem de distorções sistemáticas;
- 2) Aplicar o método de Colocação em outras regiões do SGB, considerando as características de extensão continental da RGB;
- 3) Considerar a matriz variância-covariância das coordenadas na valorização da matriz dos pesos das observações para o caso do Ajustamento;
- 4) Aplicar o método de Colocação seqüencial com a finalidade de reduzir o tamanho das matrizes a serem invertidas;
- 5) Comparar a metodologia desenvolvida neste trabalho com outras metodologias, a exemplo da modelagem polinomial.

APÊNDICE 1 – MATRIZ DE ROTAÇÃO

APÊNDICE 2 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

APÊNDICE 3 – COORDENADAS CARTESIANAS SAD69 E SAD69/96

APÊNDICE 4 – OBSERVAÇÕES UTILIZADAS NO EXPERIMENTO

APÊNDICE 5 – SINAL ESTIMADO POR COLOCAÇÃO

APÊNDICE 6 – VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS ENTRE AS
COORDENADAS ESTIMADAS E CONHECIDAS

APÊNDICE 1 – MATRIZ DE ROTAÇÃO

As relações entre referenciais necessárias para expressar o não paralelismo podem ser convenientemente expressas em termos de matrizes de rotação. Estas matrizes de rotação são ortogonais e definidas como (THOMSON, 1976, p. 24 e 26; GEMAEL, 1981, p. 1.6; VANÍCEK e KRAKIWSKY, 1986, p. 38):

$$R_1(\varepsilon_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x) & \text{sen}(\varepsilon_x) \\ 0 & -\text{sen}(\varepsilon_x) & \cos(\varepsilon_x) \end{bmatrix}; \quad (\text{A1.1})$$

$$R_2(\varepsilon_y) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_y) & 0 & -\text{sen}(\varepsilon_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\varepsilon_y) & 0 & \cos(\varepsilon_y) \end{bmatrix}; \quad (\text{A1.2})$$

$$R_3(\varepsilon_z) = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon_z) & \text{sen}(\varepsilon_z) & 0 \\ -\text{sen}(\varepsilon_z) & \cos(\varepsilon_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.3})$$

as quais denotam rotações, respectivamente, em torno dos eixos primário, secundário e terciário.

A aplicação seqüencial das rotações parciais $R_1(\varepsilon_x)$, $R_2(\varepsilon_y)$ e $R_3(\varepsilon_z)$ é equivalente a aplicação do produto $R_3(\varepsilon_z) \cdot R_2(\varepsilon_y) \cdot R_1(\varepsilon_x)$ aos mesmos eixos (LUGNANI, 1987, p.100). A matriz de rotação ortogonal R_ε resultante do produto é dada por:

$$R_\varepsilon = R_3(\varepsilon_z) \cdot R_2(\varepsilon_y) \cdot R_1(\varepsilon_x), \quad (\text{A1.4})$$

a qual considerando a estrutura das equações (A1.1), (A1.2) e (A1.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_z + \text{sen} \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z & \text{sen} \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_y \cdot \cos \varepsilon_z \\ -\cos \varepsilon_y \cdot \text{sen} \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_z - \text{sen} \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_y \cdot \text{sen} \varepsilon_z & \text{sen} \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \cdot \text{sen} \varepsilon_y \cdot \text{sen} \varepsilon_z \\ \text{sen} \varepsilon_y & -\text{sen} \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_y & \cos \varepsilon_x \cdot \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.5})$$

A equação (A1.5) não é linear em relação às rotações diferenciais ε_x , ε_y e ε_z e o procedimento geralmente adotado é o desenvolvimento em série de Taylor, negligenciando parcelas de ordem dois e superiores. Contudo, este procedimento não é atrativo do ponto de vista computacional e o problema têm sido contornado

pela utilização da matriz R de Rodrigues (LUGNANI, 1987, p. 45). Esta matriz é ortogonal, de forma que:

$$R^T \cdot R = R \cdot R^T = I. \quad (A1.6)$$

A matriz R de Rodrigues é assim definida:

$$R = (I + S) \cdot (I - S)^{-1}, \quad (A1.7)$$

onde I é a matriz identidade de ordem 3 e S é uma matriz anti-simétrica da forma:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}. \quad (A1.8)$$

A matriz R é obtida pela substituição da matriz identidade e da matriz S na equação (A1.7), a qual se apresenta como (LUGNANI, 1987, p. 48):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}, \quad (A1.9)$$

válida para a, b e c pequenos.

Em Geodésia, as rotações diferenciais ε_x , ε_y e ε_z são pequenas (GEMAEL, 1991, p. 12.16; LEICK, 1995, p. 478; MORAES, 2001, p. 164), o que permite o uso da matriz de Rodrigues. Dada à pequena magnitude prevista para as rotações, a matriz da equação (A1.4) pode ser aproximada pela matriz de Rodrigues e a equação (A1.5) fica obtida por:

$$R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}, \quad (A1.10)$$

onde as rotações ε_x , ε_y e ε_z são dadas em radianos.

APÊNDICE 2 – TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As coordenadas de um ponto atreladas a um referencial podem ser dadas tanto no sistema cartesiano (X, Y, Z) quanto no sistema elipsoidal (φ , λ , h). O modelo matemático que expressa as coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) em função das coordenadas geodésicas (φ , λ , h) é obtido mediante a seguinte equação de transformação (VINCENY, 1965, p. 129; TORGE, 2001, p. 100):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{N}+h)\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ (\bar{N}+h)\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ (\bar{N}(1-e^2)+h)\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (\text{A2.1})$$

onde:

φ – latitude geodésica;

λ – longitude geodésica;

h – altitude geométrica.

Na equação (A2.1), o raio de curvatura da seção primeiro vertical ou grande normal \bar{N} é dado por (PAUL, 1973, p. 135; TORGE, 2001, p. 96):

$$\bar{N} = \frac{a}{(1-e^2 \cdot \sin^2(\varphi))^{3/2}}. \quad (\text{A2.2})$$

Usualmente, um elipsóide biaxial é definido pelo semi-eixo maior “a” e pelo achatamento “f” (MUELLER, 1974, p. 514). O achatamento “f” e a excentricidade linear ε são dados, respectivamente, por (MORITZ, 1980, p. 189; TORGE, 2001, p. 92):

$$f = \frac{a-b}{a}; \quad (\text{A2.3})$$

$$\varepsilon = \sqrt{(a^2 - b^2)}. \quad (\text{A2.4})$$

As chamadas primeira e segunda excentricidades são dadas, respectivamente, por (MORITZ, 1980, p. 188):

$$e = \frac{\varepsilon}{a} \therefore e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad (\text{A2.5})$$

$$e' = \frac{\varepsilon}{b} \therefore e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (\text{A2.6})$$

com:

a – semi-eixo maior do elipsóide de revolução;

b – semi-eixo menor do elipsóide de revolução.

Após convenientes manipulações nas equações (A2.3) e (A2.5) é possível obter a primeira excentricidade “e” em função do achatamento “f” por:

$$e^2 = 2.f - f^2. \quad (\text{A2.7})$$

Para o caso do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) os parâmetros definidores do sistema são (GEMAEL, 1991, p. 12.4):

Tabela A2.1 – Parâmetros do SGB

Parâmetros	Valores
a (m)	6378160
1/f	298.25

A altitude geométrica h, a altitude ortométrica H e a ondulação geoidal N podem ser relacionadas aproximadamente por (SIDERIS, 1993, p. 94 e RAPP, 1994, p. 27):

$$h \cong H + N. \quad (\text{A2.8})$$

A transformação inversa à indicada na equação (A2.1) pode se apresentar tanto na forma direta quanto na iterativa. O leitor interessado em maiores detalhes a respeito desta transformação inversa deve consultar: PAUL (1973); VANÍCEK e KRAKIWSKY (1986, p. 326); TORGE (2001, p. 100); BOWRING (1976).

A solução mostrada neste trabalho é baseada em fórmula direta (BOWRING, 1976; VINCENTY e BOWRING, 1978). Ela é dada por:

$$p = \sqrt{(X^2 + Y^2)}; \quad (\text{A2.9})$$

$$\varphi = \arctan \left[\frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot \text{sen}^3(u)}{p - e^2 \cdot a \cdot \text{cos}^3(u)} \right]; \quad (\text{A2.10})$$

$$\lambda_1 = \arctan \left(\frac{Y}{X} \right); \quad (\text{A2.11})$$

$$h = \frac{p}{\text{cos}(\varphi)} - \bar{N}, \quad (\text{A2.12})$$

onde:

$$\text{sen}(u) = \frac{\tan(u)}{(1 + \tan^2(u))^{\frac{1}{2}}}; \quad (\text{A2.13})$$

$$\cos(u) = \frac{1}{(1 + \tan^2(u))^{\frac{1}{2}}}; \quad (\text{A2.14})$$

$$\tan(u) = \left(\frac{Z}{p}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right). \quad (\text{A2.15})$$

Para aplicação das fórmulas (A2.9) a (A2.15), a seguinte seqüência é sugerida:

- 1) Calcular o valor de p (raio do paralelo de latitude φ) pela equação (A2.9);
- 2) Calcular o valor de $\tan(u)$ pela equação (A2.15);
- 3) Calcular os valores de $\sin(u)$ e $\cos(u)$, respectivamente, pelas equações (A2.13) e (A2.14);
- 4) Calcular o valor da latitude φ pela equação (A2.10);
- 5) Calcular o ângulo auxiliar λ_1 pela equação (A2.11);
- 6) Calcular o valor da altitude geométrica (h) pela equação (A2.12);

O valor de \bar{N} da equação (A2.12) é calculado pela equação (A2.2) e, para obter a longitude λ , basta apenas uma análise do quadrante para a equação (A2.11), a qual é mostrada na Tabela A2.2.

Tabela A2.2 – Sinal da tangente para a longitude λ

Quadrante	X	Y	λ_1	λ
1 ^o	+	+	+	λ_1
2 ^o	-	+	-	$\lambda_1 + 180^0$
3 ^o	-	-	+	$\lambda_1 - 180^0$
4 ^o	+	-	-	λ_1

Para o caso do Brasil, onde as longitudes variam de aproximadamente 35^o W a 75^o W, então os valores de X e Y da equação (A2.1) assumem sinais, respectivamente, positivo e negativo. A longitude λ situa-se no 4^o quadrante, a qual é numericamente igual ao valor calculado pela equação (A2.11) como mostra a Tabela A2.2.

APÊNDICE 3 – COORDENADAS CARTESIANAS SAD69 E SAD69/96

Tabela A3.1 – Pontos de observação utilizados no experimento

Código	SAD69			SAD69/96		
	x (m)	y (m)	z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	3751518.751352	-4344496.072948	-2773573.002081	3751519.596281	-4344499.732684	-2773566.172673
2	3765210.007850	-4345168.219748	-2754845.669945	3765211.260268	-4345171.689173	-2754838.534003
3	3752728.225924	-4358930.564440	-2749326.872617	3752729.398915	-4358934.346219	-2749319.326530
4	3767323.669868	-4349792.506426	-2743860.293437	3767325.137114	-4349795.891338	-2743852.962254
5	3757826.976417	-4367709.646764	-2728478.486442	3757828.596874	-4367713.243561	-2728470.550411
6	3764995.786702	-4360288.882888	-2730356.027867	3764997.384212	-4360292.389860	-2730348.276697
7	3775944.575166	-4353897.169360	-2725577.072760	3775946.394150	-4353900.541563	-2725569.218866
8	3767832.540511	-4374119.583988	-2705084.429729	3767834.404052	-4374123.105282	-2705076.195595
9	3781045.827900	-4364769.907187	-2701396.748841	3781047.718158	-4364773.439722	-2701388.451336
10	3771854.719116	-4374563.261023	-2698861.716743	3771856.592553	-4374566.764421	-2698853.475368
11	3767983.066380	-4383922.601372	-2688598.402245	3767984.816350	-4383926.157953	-2688590.205714
12	3781343.033477	-4372123.025807	-2689795.609042	3781344.882554	-4372126.512704	-2689787.397140
13	3767187.642790	-4395081.044179	-2670800.347311	3767189.299429	-4395084.872466	-2670791.768556
14	3780724.595845	-4383811.664975	-2671429.796570	3780726.456796	-4383815.286053	-2671421.278071
15	3760634.167729	-4412886.315937	-2651572.544164	3760635.847355	-4412889.934859	-2651564.195449
16	3781416.372341	-4395491.728249	-2650334.846231	3781417.992024	-4395495.526213	-2650326.294135
17	3772950.799352	-4411069.255964	-2637373.598514	3772952.451663	-4411072.895296	-2637365.204445
18	3764949.589719	-4420844.773828	-2632949.068185	3764951.182541	-4420848.389132	-2632940.776143
19	3777563.625272	-4411924.636469	-2629497.089374	3777565.228607	-4411928.314049	-2629488.672248
20	3769175.270541	-4427244.385615	-2616219.527441	3769176.662310	-4427248.060292	-2616211.358953
21	3786006.440238	-4415086.316412	-2612172.010491	3786007.774767	-4415090.136934	-2612163.674977
22	3784262.324916	-4421719.721604	-2603422.058546	3784263.653761	-4421723.497539	-2603413.769664
23	3776109.721894	-4434391.991714	-2593313.065413	3776111.006074	-4434395.651129	-2593304.992554
24	3788509.281619	-4421738.614371	-2596903.608512	3788510.481555	-4421742.435245	-2596895.407435
25	3797623.499293	-4410581.781921	-2602663.414970	3797624.553084	-4410585.769731	-2602655.174953
26	3796497.973599	-4423906.511388	-2581147.957997	3796499.005553	-4423910.350319	-2581139.914669
27	3779712.336276	-4443070.432274	-2572781.118354	3779713.551373	-4443074.048017	-2572773.142751
28	3813663.191022	-4418349.185913	-2565213.338575	3813663.920045	-4418353.119052	-2565205.532857
29	3815830.953812	-4420826.346400	-2557820.048170	3815831.664049	-4420830.250787	-2557812.292689
30	3797469.818042	-4439271.991767	-2552858.030295	3797470.837815	-4439275.645526	-2552850.212340
31	3815369.155464	-4433359.828948	-2536886.289235	3815369.702554	-4433363.607184	-2536878.913433
32	3836219.377190	-4418382.336826	-2531654.158259	3836219.549076	-4418386.172131	-2531647.250750
33	3816076.696808	-4446817.172664	-2512532.523032	3816077.728898	-4446820.515925	-2512525.088477
34	3846910.862302	-4438924.081866	-2479322.313906	3846911.810507	-4438926.589139	-2479316.393594
35	3857645.388082	-4439937.940571	-2460641.129063	3857646.694012	-4439939.774136	-2460635.809096
36	3783409.507100	-4352544.816482	-2718562.651101	3783411.526577	-4352548.098154	-2718554.640460
37	3758817.432686	-4383492.323853	-2702605.931411	3758819.605461	-4383495.196399	-2702598.301761
38	3739109.636217	-4404982.269194	-2694268.245679	3739111.923486	-4404984.761335	-2694261.045395
39	3723617.798226	-4410839.357442	-2706476.953333	3723620.222833	-4410841.655736	-2706469.919495
40	3722160.381931	-4415455.669665	-2701015.699010	3722162.699238	-4415458.002576	-2701008.738813
41	3714020.935532	-4425261.425005	-2696079.112563	3714023.224064	-4425263.670010	-2696072.320839
42	3705307.277707	-4420296.368118	-2715711.082073	3705309.755014	-4420298.487996	-2715704.297279
43	3702161.851163	-4436715.189638	-2693202.489047	3702164.186736	-4436717.401985	-2693195.679802
44	3698853.112934	-4432274.279160	-2704984.887045	3698855.511274	-4432276.403343	-2704978.172146
45	3687555.082548	-4446049.046125	-2697818.094697	3687557.333845	-4446051.313360	-2697811.326633
46	3679180.406334	-4442671.820365	-2714689.749695	3679182.424352	-4442674.153942	-2714683.239593
47	3673158.962826	-4460023.227367	-2694512.889253	3673161.127909	-4460025.748417	-2694505.817268
48	3671580.174138	-4449428.249113	-2713923.400644	3671582.198618	-4449430.606700	-2713916.840764
49	3659664.546110	-4471194.067457	-2694432.560196	3659666.244329	-4471197.007722	-2694425.422574
50	3655690.361267	-4463037.337555	-2713037.337555	3655691.792427	-4463121.546944	-2713030.610174
51	3650815.783958	-4472367.987782	-2704555.659956	3650817.230165	-4472371.075242	-2704548.649430
52	3648733.707821	-4475913.533672	-2701580.909569	3648735.169690	-4475916.623739	-2701573.863105
53	3639830.774390	-4470577.960855	-2721894.509306	3639832.058529	-4470581.082656	-2721887.710502
54	3626854.508247	-4490233.546787	-2707134.933532	3626855.895411	-4490236.720996	-2707127.857809
55	3625561.007934	-4483174.454650	-2720396.858363	3625562.282212	-4483177.744976	-2720389.785333
56	3615560.910707	-4500481.618993	-2702829.650294	3615562.370235	-4500484.846544	-2702822.372733
57	3615186.226603	-4493001.637091	-2718599.223392	3615187.481094	-4493005.050919	-2718591.961376
58	3603267.481534	-4509651.301567	-2703953.493983	3603269.063623	-4509654.564182	-2703945.994845
59	3601215.375639	-4501899.777706	-2719455.607367	3601216.793980	-4501903.221426	-2719448.078989
60	3595656.273596	-4509951.509492	-2716192.082552	3595657.807051	-4509954.900274	-2716184.473805
61	3590507.921176	-4520908.492602	-2704825.953700	3590509.533866	-4520911.796011	-2704818.342821
62	3583403.318730	-4515964.004989	-2722075.681558	3583404.813645	-4515967.473456	-2722068.011053
63	3575639.582139	-4530435.103474	-2708359.595926	3575641.299366	-4530438.431891	-2708351.813588
64	3575176.768710	-4523428.975418	-2720434.854790	3575178.356669	-4523432.421788	-2720427.089731
65	3779188.354340	-4552035.874398	-2376352.142773	3779188.854577	-4552037.731328	-2376347.819308
66	3774908.666868	-4552804.017519	-2381677.361849	3774909.036330	-4552806.018466	-2381672.980778
67	3746875.163516	-4568163.452317	-2396262.788572	3746875.702057	-4568165.578272	-2396257.926395
68	3746266.955246	-4548933.982972	-2405566.571399	3746267.257228	-4548936.234765	-2405561.872366
69	3734431.666302	-4577477.598681	-2397946.826194	3734432.329089	-4577479.707421	-2397941.802446
70	3732896.794986	-4587416.281583	-2381225.524408	3732897.614738	-4587418.125886	-2381220.718676
71	3725730.314184	-4584817.759491	-2397400.255784	3725731.233048	-4584819.719252	-2397395.114573
72	3714893.211255	-4595201.521974	-2394389.433544	3714894.383865	-4595203.330527	-2394384.178755
73	3706249.845661	-4604787.933220	-2389240.280406	3706251.286798	-4604789.469075	-2389235.119594
74	3689859.231565	-4619820.444206	-2385573.341931	3689860.964554	-4619821.725374	-2385568.214929
75	3683389.089605	-4626302.613151	-2383055.184476	3683390.898789	-4626303.802796	-2383050.112770
76	3676837.597334	-4635485.557021	-2375344.296115	3676839.505039	-4635486.599325	-2375339.342465
77	3711983.123787	-4583755.460365	-2420313.770958	3711984.169243	-4583757.680466	-2420308.001856
78	3725085.560944	-4577175.643721	-2412764.887390	3725086.435369	-4577177.845118	-2412759.398147
79	3705507.096852	-4583510.118673	-2430641.998431	3705508.088655	-4583512.438590	-2430636.151114

80	3713727.162684	-4575524.949102	-2433113.020077	3713728.044666	-4575527.346438	-2433107.204820
81	3697434.651653	-4584543.145135	-2440902.230032	3697435.717413	-4584545.463899	-2440896.300449
82	3714713.430974	-4568292.706949	-2444910.575435	3714714.253704	-4568295.265384	-2444904.585355
83	3680668.630798	-4586026.812932	-2463260.214089	3680669.918301	-4586029.089177	-2463254.093658
84	3697898.293402	-4571297.657515	-2464615.845335	3697899.172133	-4571300.280433	-2464609.703363
85	3682197.185266	-4577722.557007	-2476583.009990	3682198.450294	-4577725.019692	-2476576.620157
86	3701773.380229	-4557601.961067	-2483977.537464	3701774.220615	-4557604.748329	-2483971.213611
87	3688237.597655	-4576193.555962	-2470360.006467	3688238.730452	-4576196.051332	-2470353.734936
88	3675316.608883	-4572514.498305	-2496337.926642	3675317.862190	-4572517.235192	-2496331.114190
89	3659589.665941	-4578281.579799	-2508944.091840	3659590.921333	-4578284.375435	-2508937.205664
90	3669576.692819	-4558630.479460	-2529840.365015	3669577.855499	-4558633.440206	-2529833.390418
91	3670907.894863	-4547854.632983	-2547360.225651	3670909.260875	-4547857.589071	-2547353.028067
92	3657777.554464	-4545538.989868	-2571069.399082	3657778.829302	-4545542.197377	-2571061.964757
93	3671452.175628	-4537773.090700	-2565213.816093	3671453.486343	-4537776.221387	-2565206.451672
94	3662832.886602	-4538013.621231	-2577193.513479	3662834.214639	-4538016.775102	-2577186.122350
95	3676006.556858	-4527661.891814	-2576322.584056	3676007.855944	-4527665.027004	-2576315.269916
96	3662500.911803	-4528489.892245	-2593703.201587	3662502.302159	-4528493.067345	-2593695.744952
97	3675387.195130	-4522053.692386	-2587200.133405	3675388.501785	-4522056.905771	-2587192.710635
98	3665097.171013	-4520969.617936	-2602818.204727	3665098.511844	-4520972.876499	-2602810.707211
99	3679029.616785	-4512992.649783	-2597049.764449	3679030.942853	-4512995.885486	-2597042.313309
100	3665746.917916	-4513468.299428	-2615091.981833	3665748.268598	-4513471.567301	-2615084.498783
101	3677351.237677	-4506963.421662	-2609966.122218	3677352.558340	-4506966.710663	-2609958.632367
102	3663387.587824	-4502036.996237	-2638040.012803	3663389.055508	-4502040.204884	-2638032.549117
103	3674244.664733	-4501311.375266	-2624022.241218	3674246.062034	-4501314.643445	-2624014.728964
104	3679513.440709	-4488613.183643	-2638300.610861	3679514.917134	-4488616.411759	-2638293.110209
105	3697311.114571	-4489061.324112	-2612318.953407	3697312.603724	-4489064.535142	-2612311.378884
106	3694038.469349	-4476707.436246	-2638286.496090	3694040.055431	-4476710.582236	-2638278.987702
107	3703722.831889	-4480344.908037	-2618245.576622	3703724.412809	-4480348.001278	-2618238.097510
108	3692371.000250	-4482631.875567	-2630549.487816	3692372.494708	-4482635.067402	-2630542.001453
109	3709205.650030	-4466363.570676	-2634561.724357	3709207.104497	-4466366.726385	-2634554.376250
110	3702563.430564	-4469315.285180	-2638527.564782	3702564.969580	-4469318.456413	-2638520.083878
111	3706393.377647	-4470973.191230	-2630315.150208	3706394.869730	-4470976.337456	-2630307.749653
112	3696371.398260	-4505958.331016	-2584364.813498	3696372.597425	-4505961.660344	-2584357.343840
113	3701528.081803	-4513031.092600	-2565425.929978	3701529.130010	-4513034.403595	-2565418.642051
114	3689540.681293	-4518769.000996	-2572717.929606	3689541.884999	-4518772.214171	-2572710.609006
115	3711065.076842	-4497850.873548	-2578037.476721	3711066.134284	-4497854.355091	-2578029.931195
116	3719384.116208	-4493830.446346	-2572658.589174	3719385.132579	-4493834.000466	-2572650.962936
117	3716964.576220	-4487677.234124	-2587133.818879	3716965.660496	-4487680.728599	-2587126.250512
118	3737006.373543	-4480405.595438	-2570888.980832	3737007.374808	-4480409.220233	-2570881.260169
119	3741588.242203	-4461883.820136	-2596195.921271	3741589.327467	-4461887.473334	-2596187.131215
120	3758872.564158	-4447748.526012	-2595454.039401	3758873.866450	-4447752.100907	-2595446.080783
121	3763479.148630	-4455189.826618	-2575849.352572	3763480.354977	-4455193.439791	-2575841.394292
122	3651741.886133	-4578196.781274	-2520595.325370	3651743.161035	-4578199.590472	-2520588.422457
123	3668101.549350	-4480902.215028	-2667135.234949	3668103.098463	-4480905.346803	-2667127.892407
124	3653324.948973	-4495344.807359	-2663228.689582	3653326.352245	-4495348.049067	-2663221.342343
125	3663294.344110	-4473089.585672	-2686280.934952	3663295.932417	-4473092.601581	-2686273.795100
126	3646662.104547	-4488847.934181	-2682728.579161	3646663.600319	-4488851.068885	-2682721.349537
127	3648672.105460	-4480974.551932	-2693005.280463	3648673.605672	-4480977.658837	-2692998.126393
128	3625871.281246	-4472454.146969	-2737839.975599	3625872.465019	-4472457.496375	-2737832.983479
129	3631573.670124	-4472554.118662	-2729758.796016	3631574.870121	-4472557.385129	-2729751.894161
130	3625642.090020	-4463759.312290	-2725358.327227	3625643.255249	-4463762.777468	-2725351.130358
131	3456329.129389	-4735207.920314	-2504845.568527	3456330.121627	-4735211.264078	-2504837.929729
132	3456286.810906	-4717297.295083	-2538527.069808	3456287.801015	-4717300.741088	-2538519.098768
133	3466728.932803	-4712159.040647	-2533896.098780	3466729.888171	-4712162.634865	-2533888.161192
134	3478957.547640	-4715161.919089	-2511476.472654	3478958.487977	-4715165.373955	-2511468.735876
135	3462322.733310	-4717399.510068	-2530146.304367	3462323.784314	-4717402.955972	-2530138.493956
136	3500118.355118	-4698892.816559	-2512638.227468	3500118.966209	-4698896.444102	-2512630.643431
137	3494491.693759	-4691119.812735	-2534878.766653	3494492.368371	-4691123.628499	-2534870.828573
138	3480464.940918	-4709725.209217	-2519655.491879	3480465.843265	-4709728.726441	-2519647.726750
139	3671448.409516	-4537771.315324	-2565219.694652	3671449.711819	-4537774.444612	-2565212.344672
140	3646988.068867	-4552874.076126	-2572893.196678	3646989.290706	-4552877.425636	-2572885.588876
141	3636524.806766	-4555202.807741	-2583058.647398	3636525.787018	-4555206.405848	-2583050.973828
142	3637736.876007	-4559374.212552	-2574031.013657	3637738.050197	-4559377.728156	-2574023.179834
143	3621768.178847	-4563597.899111	-2588363.321723	3621768.949731	-4563601.870642	-2588355.294851
144	3626117.110908	-4569595.354490	-2571954.804899	3626118.319597	-4569599.066678	-2571946.560898
145	3605839.263392	-4578069.262497	-2585033.391513	3605840.104073	-4578073.453023	-2585024.854984
146	3615079.561668	-4583441.626823	-2562728.371436	3615080.820299	-4583445.570936	-2562719.600999
147	3594055.405197	-4599868.649798	-2562334.439125	3594056.530756	-4599872.911208	-2562325.272092
148	3577220.809697	-4608692.708394	-2570451.276051	3577221.522512	-4608697.351532	-2570442.021476
149	3573845.768523	-4600135.550878	-2590577.659304	3573846.229320	-4600140.250975	-2590568.737663
150	3545569.586793	-4630131.836397	-2575855.613585	3545570.038618	-4630136.743349	-2575846.234541
151	3538681.312127	-4634748.651885	-2576990.108150	3538681.728549	-4634753.587390	-2576980.722983
152	3535119.371330	-4630227.014441	-2589923.502011	3535119.797931	-4630232.010522	-2589914.051466
153	3519820.458972	-4644570.264666	-2584892.072384	3519820.936071	-4644575.136944	-2584882.731077
154	3523781.196706	-4634767.730682	-2597214.659628	3523781.752875	-4634772.653855	-2597205.183407
155	3508280.603856	-4646293.267013	-2597379.790750	3508281.380560	-4646298.023821	-2597370.296455
156	3536039.032976	-4682717.028939	-2492475.990661	3536039.044584	-4682720.671703	-2492469.176295
157	3535461.576837	-4699476.211416	-2462029.067716	3535462.041194	-4699479.315932	-2462022.531979
158	3526780.730765	-4690073.291277	-2491744.488351	3526780.998784	-4690076.804147	-2491737.543888
159	3529157.232204	-4679464.134839	-2508260.833853	3529157.264247	-4679468.032749	-2508253.565714
160	3536669.398685	-4694221.443010	-2470284.832072	3536669.705569	-4694224.669847	-2470278.304810
161	3527626.480389	-4694973.476542	-2481514.594898	3527626.829477	-4694976.877509	-2481507.710563
162	3545205.714163	-4692295.461201	-2461740.157612	3545206.056558	-4692298.522114	-2461733.872497
163	3522798.690908	-4685186.389307	-2506455.427952	3522798.926603	-4685190.133164	-2506448.147539
164	3543490.538236	-4689583.616927	-2469328.592656	3543490.757870	-4689586.831590	-2469322.215375
165	3541401.128701	-4685806.705926	-2479346.502487	3541401.215714	-4685810.136449	-2479339.938953
166	3519609.337120	-4683332.434390	-2514522.642064	3519609.597136	-4683336.286154	-2514515.154599
167	3512902.833388	-4669007.066707	-2550147.599865	3512903.194806	-4669011.348956	-2550139.317528
168	3509887.156756	-4652655.639407	-2583780.665914	3509887.854409	-4652660.279541	-2583771.424892

169	3515349.489717	-4680097.836898	-2526437.314556	3515349.833779	-4680101.781292	-2526429.581129
170	3508495.831325	-4665750.372840	-2562024.167389	3508496.329028	-4665754.722169	-2562015.622744
171	3521424.115270	-4664641.233936	-2546487.422149	3521424.281980	-4664645.626618	-2546479.200513
172	3527416.482535	-4671477.333586	-2525678.909581	3527416.518329	-4671481.489265	-2525671.225049
173	3524410.683984	-4665606.151891	-2540497.305827	3524410.750329	-4665610.506278	-2540489.271115
174	3523728.457578	-4654755.164045	-2561363.487677	3523728.668415	-4654759.786707	-2561354.855036
175	3513959.483808	-4673094.422022	-2541153.462016	3513959.820090	-4673098.603550	-2541145.361881
176	3538074.297992	-4701636.005355	-2454141.881466	3538074.944327	-4701638.960780	-2454135.331797
177	3548914.985131	-4733681.224017	-2376104.967007	3548916.726607	-4733682.787872	-2376099.288709
178	3550137.923109	-4726366.988059	-2388588.928606	3550139.376378	-4726368.819658	-2388583.183102
179	3548788.207774	-4720424.619174	-2402072.395333	3548789.430559	-4720426.664852	-2402066.607747
180	3543766.339227	-4708946.708337	-2431588.256255	3543767.428076	-4708949.197617	-2431581.891592
181	3542787.350909	-4685023.287347	-2478829.006095	3542787.548860	-4685026.516250	-2478822.663242
182	3557723.172375	-4674555.170482	-2477297.018847	3557723.409409	-4674558.331295	-2477290.756306
183	3576905.293174	-4659577.680282	-2477948.604875	3576905.543018	-4659580.796616	-2477942.425851
184	3593110.401204	-4645712.541585	-2480455.815997	3593110.686906	-4645715.634893	-2480449.650141
185	3604639.665737	-4637181.585936	-2479753.031820	3604639.990177	-4637184.638262	-2479746.893659
186	3623117.795788	-4622999.217083	-2479336.323312	3623118.184202	-4623002.283359	-2479330.080362
187	3645696.702259	-4608434.669768	-2473539.764564	3645697.135423	-4608437.816879	-2473533.306285
188	3662096.874682	-4591970.225612	-2479967.033582	3662097.423685	-4591973.372419	-2479960.440595
189	3681499.254690	-4575776.616397	-2481176.728184	3681499.858554	-4575779.771497	-2481170.058500
190	3694049.952980	-4567895.602315	-2476710.238581	3694050.617971	-4567898.725128	-2476703.532390
191	3711069.101059	-4551693.868219	-2481066.614569	3711069.706784	-4551696.948292	-2481060.101817
192	3726302.038976	-4542750.346647	-2474592.597465	3726302.712430	-4542753.365485	-2474586.085385
193	3747995.400494	-4524353.359819	-2475601.082288	3747996.093056	-4524356.390740	-2475594.538611
194	3767321.981716	-4505643.276709	-2480444.985759	3767322.711489	-4505646.296801	-2480438.435611
195	3784512.794460	-4485017.328403	-2492073.191079	3784513.520852	-4485020.359256	-2492066.677184
196	3803538.181989	-4467334.700099	-2495139.981075	3803538.933056	-4467337.681505	-2495133.541595
197	3819485.020578	-4454234.562448	-2493566.936958	3819485.797448	-4454237.462409	-2493560.609457
198	3834943.762499	-4448267.823750	-2481005.385255	3834944.716486	-4448270.527465	-2480999.105396
199	3689354.041458	-4619394.047495	-2387350.275561	3689355.057723	-4619395.991960	-2387344.978305
200	3710846.956931	-4603723.118717	-2384168.430742	3710847.926309	-4603724.911897	-2384163.492672

APÊNDICE 4 – OBSERVAÇÕES UTILIZADAS NO EXPERIMENTO

Tabela A4.1 – Diferenças de coordenadas dos pontos de observação

Código	Δx (m)	Δy (m)	Δz (m)
1	0.844930	-3.659735	6.829408
2	1.252418	-3.469425	7.135942
3	1.172991	-3.781779	7.546087
4	1.467246	-3.384913	7.331182
5	1.620457	-3.596797	7.936030
6	1.597511	-3.506972	7.751171
7	1.818984	-3.372202	7.853894
8	1.863541	-3.521295	8.234133
9	1.890258	-3.532535	8.297505
10	1.873437	-3.503397	8.241375
11	1.749971	-3.556582	8.196531
12	1.849077	-3.486897	8.211903
13	1.656639	-3.828286	8.578755
14	1.860951	-3.621079	8.518499
15	1.679626	-3.618922	8.348714
16	1.619683	-3.797964	8.552096
17	1.652310	-3.639332	8.394069
18	1.592822	-3.615304	8.292042
19	1.603335	-3.677580	8.417126
20	1.391769	-3.674677	8.168488
21	1.334529	-3.820523	8.335513
22	1.328845	-3.775936	8.288882
23	1.284180	-3.659415	8.072858
24	1.199937	-3.820874	8.201077
25	1.053791	-3.987810	8.240017
26	1.031954	-3.838930	8.043328
27	1.215097	-3.615743	7.975603
28	0.729023	-3.933139	7.805718
29	0.710238	-3.904388	7.755481
30	1.019774	-3.653758	7.817955
31	0.547090	-3.778236	7.375802
32	0.171886	-3.835305	6.907508
33	1.032090	-3.343260	7.434555
34	0.948205	-2.507273	5.920312
35	1.305929	-1.833565	5.319967
36	2.019477	-3.281671	8.010641
37	2.172775	-2.872546	7.629650
38	2.287270	-2.492141	7.200284
39	2.424607	-2.298294	7.034039
40	2.317306	-2.332911	6.960197
41	2.288532	-2.245004	6.791724
42	2.477307	-2.119879	6.784794
43	2.335573	-2.212348	6.809245
44	2.398340	-2.124184	6.714899
45	2.251297	-2.267235	6.768064
46	2.018018	-2.333578	6.510102
47	2.161623	-2.521051	7.071985
48	2.024480	-2.357586	6.559880
49	1.698219	-2.940265	7.137622
50	1.431160	-2.944739	6.727381
51	1.446207	-3.087460	7.010526
52	1.461869	-3.090067	7.046465
53	1.284139	-3.121800	6.798804
54	1.387164	-3.174210	7.075724
55	1.274278	-3.290325	7.073030
56	1.459527	-3.227551	7.277561
57	1.255031	-3.413829	7.262016
58	1.582089	-3.262615	7.499137
59	1.418341	-3.443720	7.528378
60	1.533456	-3.390782	7.608747
61	1.612689	-3.303409	7.610879
62	1.494914	-3.468467	7.670504
63	1.717228	-3.328417	7.782338
64	1.587959	-3.446371	7.765059
65	0.500237	-1.856930	4.323464
66	0.369463	-2.000946	4.381072
67	0.538540	-2.125956	4.862177
68	0.301982	-2.251793	4.699033
69	0.662788	-2.108741	5.023748
70	0.819752	-1.844303	4.805732
71	0.918864	-1.959762	5.141211
72	1.172611	-1.808552	5.254789
73	1.441138	-1.535855	5.160812
74	1.732988	-1.281168	5.127002
75	1.809185	-1.189645	5.071706
76	1.907705	-1.042304	4.953650
77	1.045456	-2.220101	5.769102
78	0.874425	-2.201397	5.489243
79	0.991803	-2.319917	5.847317

80	0.881982	-2.397336	5.815257
81	1.065760	-2.318764	5.929583
82	0.822730	-2.558435	5.990080
83	1.287503	-2.276245	6.120431
84	0.878730	-2.622918	6.141973
85	1.265028	-2.462685	6.389833
86	0.840386	-2.787261	6.323854
87	1.132797	-2.495371	6.271531
88	1.253307	-2.736887	6.812452
89	1.255392	-2.795636	6.886177
90	1.162680	-2.960746	6.974597
91	1.366012	-2.956088	7.197585
92	1.274838	-3.207509	7.434325
93	1.310716	-3.130687	7.364420
94	1.328037	-3.153872	7.391129
95	1.299086	-3.135190	7.314139
96	1.390356	-3.175101	7.456635
97	1.306655	-3.213385	7.422769
98	1.340831	-3.258563	7.497516
99	1.326068	-3.235703	7.451140
100	1.350681	-3.267873	7.483051
101	1.320663	-3.289002	7.489851
102	1.467685	-3.208647	7.463686
103	1.397301	-3.268180	7.512254
104	1.476425	-3.228116	7.500652
105	1.489153	-3.211030	7.574522
106	1.586083	-3.145990	7.508387
107	1.580920	-3.093241	7.479112
108	1.494459	-3.191835	7.486362
109	1.454467	-3.155709	7.348107
110	1.539017	-3.171233	7.480904
111	1.492082	-3.146225	7.400555
112	1.199165	-3.329329	7.469658
113	1.048207	-3.310995	7.287928
114	1.203706	-3.213175	7.320600
115	1.057442	-3.481543	7.545526
116	1.016371	-3.554119	7.626238
117	1.084276	-3.494474	7.568367
118	1.001264	-3.624885	7.720664
119	1.085265	-3.653198	7.790056
120	1.302292	-3.574895	7.958617
121	1.206347	-3.613172	7.958280
122	1.274902	-2.809198	6.902913
123	1.549113	-3.131775	7.342542
124	1.403271	-3.241708	7.347239
125	1.588306	-3.015909	7.139852
126	1.495772	-3.134704	7.229624
127	1.500212	-3.106905	7.154070
128	1.183772	-3.349406	6.992120
129	1.199997	-3.266467	6.901855
130	1.165229	-3.465178	7.106870
131	0.992238	-3.343765	7.638798
132	1.190110	-3.446004	7.970319
133	0.955368	-3.594218	7.937588
134	0.940338	-3.454866	7.736779
135	1.051004	-3.445904	7.810411
136	0.611092	-3.627543	7.584037
137	0.674612	-3.815764	7.938079
138	0.902347	-3.515424	7.765129
139	1.302303	-3.129288	7.349980
140	1.221839	-3.349510	7.607802
141	0.980252	-3.598107	7.673571
142	1.174190	-3.515604	7.833823
143	0.770884	-3.971531	8.026872
144	1.208689	-3.712187	8.244001
145	0.840681	-4.190526	8.536529
146	1.258632	-3.944113	8.770436
147	1.125559	-4.261411	9.167033
148	0.712815	-4.643138	9.254575
149	0.460797	-4.700097	8.921640
150	0.451825	-4.906952	9.379044
151	0.416422	-4.935505	9.385166
152	0.426601	-4.996081	9.450545
153	0.477099	-4.872277	9.341308
154	0.556169	-4.923173	9.476221
155	0.776704	-4.756808	9.494295
156	0.011607	-3.642764	6.814366
157	0.464357	-3.104516	6.548537
158	0.268019	-3.512870	6.944642
159	0.032044	-3.897909	7.268140
160	0.306884	-3.226837	6.527263
161	0.349088	-3.400967	6.884426
162	0.342395	-3.060912	6.285116
163	0.235696	-3.743857	7.280414
164	0.219634	-3.214663	6.377281
165	0.087013	-3.430523	6.563534
166	0.260016	-3.851764	7.487465
167	0.361419	-4.282248	8.282336
168	0.697654	-4.640134	9.241023

169	0.344063	-3.944394	7.733428
170	0.497703	-4.349329	8.544645
171	0.166710	-4.392682	8.221637
172	0.035794	-4.155679	7.684532
173	0.066346	-4.354387	8.034712
174	0.210838	-4.622662	8.632641
175	0.336283	-4.181528	8.100135
176	0.646335	-2.955425	6.549669
177	1.741476	-1.563855	5.678298
178	1.453269	-1.831599	5.745504
179	1.222785	-2.045678	5.787586
180	1.088850	-2.489280	6.364663
181	0.197951	-3.228903	6.342853
182	0.237034	-3.160813	6.262540
183	0.249844	-3.116334	6.179024
184	0.285701	-3.093308	6.165856
185	0.324440	-3.052326	6.138161
186	0.388414	-3.066276	6.242950
187	0.433164	-3.147110	6.458279
188	0.549004	-3.146807	6.592987
189	0.603864	-3.155100	6.669684
190	0.664991	-3.122813	6.706191
191	0.605725	-3.080074	6.512752
192	0.673454	-3.018838	6.512080
193	0.692562	-3.030921	6.543677
194	0.729774	-3.020092	6.550148
195	0.726392	-3.030853	6.513895
196	0.751067	-2.981407	6.439480
197	0.776870	-2.899961	6.327502
198	0.953987	-2.703715	6.279859
199	1.016265	-1.944466	5.297257
200	0.969378	-1.793180	4.938070

APÊNDICE 5 – SINAL ESTIMADO POR COLOCAÇÃO

Tabela A5.1 – Sinal s para os pontos de predição

Código	S_X (m)	S_Y (m)	S_Z (m)
1	0.019920	0.075042	0.399937
2	0.405976	0.222087	0.685978
3	0.582413	0.232878	0.622695
4	0.599518	0.215312	0.890400
5	0.896155	0.319760	0.972891
6	0.830175	0.240327	1.084331
7	0.871101	0.260109	1.212955
8	1.052536	0.233069	1.429730
9	1.036600	0.126618	1.589540
10	1.053129	0.142951	1.561847
11	1.085632	0.132277	1.593759
12	1.025224	-0.032056	1.755802
13	1.008079	0.040344	1.615003
14	0.911095	-0.244504	1.838921
15	0.856588	-0.076393	1.494979
16	0.745639	-0.407153	1.872499
17	0.653405	-0.395043	1.742340
18	0.642364	-0.297862	1.574743
19	0.568786	-0.461116	1.764353
20	0.507286	-0.380029	1.582450
21	0.420280	-0.531204	1.715451
22	0.367691	-0.528002	1.636749
23	0.330673	-0.483494	1.510625
24	0.311731	-0.566189	1.606986
25	0.298019	-0.581353	1.639793
26	0.156258	-0.653385	1.478339
27	0.178264	-0.525696	1.360185
28	-0.148327	-0.817766	1.211902
29	-0.214223	-0.832625	1.109362
30	-0.020812	-0.635018	1.171913
31	-0.173599	-0.685566	0.879386
32	-0.351163	-0.659455	0.632238
33	-0.243194	-0.391246	0.259351
34	0.071500	0.380131	-0.501728
35	0.258465	0.494314	-0.564234
36	0.941274	0.232823	1.306450
37	1.054187	0.233817	1.363667
38	1.267356	0.767380	0.845516
39	1.375950	1.241934	0.294901
40	1.410182	1.296537	0.291551
41	1.406802	1.373735	0.161900
42	1.354592	1.444318	-0.118291
43	1.297589	1.333185	0.023525
44	1.333494	1.466079	-0.112565
45	1.125313	1.224793	-0.077072
46	1.068312	1.274572	-0.210906
47	0.798318	0.846726	-0.007265
48	0.873624	1.065593	-0.181049
49	0.570129	0.596296	0.086857
50	0.572976	0.750880	-0.074627
51	0.457681	0.565454	0.039825
52	0.416993	0.494675	0.091715
53	0.280598	0.472243	-0.008683
54	0.204048	0.282308	0.242688
55	0.153611	0.291413	0.144831
56	0.205461	0.256020	0.360435
57	0.171229	0.243824	0.270750
58	0.237202	0.248178	0.444308
59	0.218289	0.198561	0.390806
60	0.280766	0.196121	0.468514
61	0.334563	0.235143	0.546606
62	0.376451	0.151560	0.552576
63	0.403168	0.165817	0.591699
64	0.440324	0.142199	0.589131
65	-0.707578	0.445018	-1.995650
66	-0.669318	0.512779	-2.056577
67	-0.557394	0.409464	-1.873217
68	-0.568231	0.295014	-1.775588
69	-0.394210	0.442917	-1.736802
70	-0.336348	0.563951	-1.843607
71	-0.286753	0.491217	-1.679661
72	-0.116307	0.619216	-1.667525
73	0.024494	0.733363	-1.687021
74	0.248372	0.959928	-1.697214
75	0.329079	1.045011	-1.684861
76	0.429029	1.040099	-1.564171
77	-0.206927	0.409414	-1.261968
78	-0.329189	0.350714	-1.451155
79	-0.189032	0.371387	-1.047505

80	-0.261413	0.256644	-1.003630
81	-0.214886	0.301035	-0.864567
82	-0.306395	0.117889	-0.791380
83	-0.341343	0.003599	-0.591117
84	-0.263460	0.058150	-0.513030
85	-0.290060	-0.017960	-0.444165
86	-0.266618	-0.167953	-0.261937
87	-0.277492	0.031625	-0.488180
88	-0.202219	-0.037221	-0.266891
89	-0.133008	-0.050346	-0.030192
90	0.080147	0.091680	0.149808
91	0.100901	0.010544	0.273268
92	0.125327	-0.110014	0.521492
93	0.133023	-0.026997	0.387823
94	0.125537	-0.093024	0.494199
95	0.136667	-0.059804	0.459494
96	0.111018	-0.106583	0.531141
97	0.154171	-0.050384	0.510008
98	0.146039	-0.052897	0.544433
99	0.183857	-0.034962	0.568656
100	0.189420	-0.012988	0.571658
101	0.235155	0.011739	0.601108
102	0.280489	0.041143	0.564580
103	0.290281	0.051055	0.603569
104	0.427143	0.143796	0.585156
105	0.272012	-0.025360	0.690558
106	0.518419	0.203431	0.597489
107	0.326026	-0.020624	0.728011
108	0.431323	0.125680	0.642211
109	0.577845	0.183154	0.703943
110	0.585543	0.244598	0.616037
111	0.494612	0.124964	0.703820
112	0.117525	-0.156933	0.607621
113	0.018183	-0.265085	0.528177
114	0.093980	-0.130638	0.485156
115	0.046198	-0.313805	0.689281
116	-0.005674	-0.407243	0.724952
117	0.103519	-0.313673	0.794919
118	0.007041	-0.499213	0.894154
119	0.272281	-0.297960	1.076252
120	0.314693	-0.402547	1.313334
121	0.171500	-0.466595	1.225685
122	-0.039542	-0.109487	0.291383
123	0.551075	0.336175	0.379399
124	0.351258	0.177017	0.454140
125	0.609932	0.552508	0.174772
126	0.350924	0.286260	0.308297
127	0.401311	0.408732	0.185234
128	0.064429	0.280039	0.034168
129	0.157121	0.364158	0.019148
130	-0.036277	0.270957	-0.105569
131	-0.426006	-0.422930	0.300101
132	-0.439626	-0.553967	0.440249
133	-0.504210	-0.584774	0.485913
134	-0.722769	-0.640345	0.309478
135	-0.496143	-0.592420	0.454366
136	-1.019945	-0.812764	0.239003
137	-0.929896	-0.888791	0.594464
138	-0.734798	-0.683470	0.390202
139	0.134043	-0.027273	0.389642
140	0.074293	-0.253965	0.673339
141	-0.026238	-0.460881	0.846535
142	0.005322	-0.424035	0.841667
143	-0.170481	-0.722499	1.102893
144	-0.098613	-0.666990	1.097445
145	-0.374214	-1.107096	1.496422
146	-0.189257	-0.802266	1.301775
147	-0.503494	-1.236003	1.655235
148	-0.671684	-1.522151	1.975468
149	-0.661060	-1.532525	2.123608
150	-0.999285	-1.860014	2.067136
151	-1.015162	-1.860281	2.040520
152	-0.921905	-1.837179	2.169050
153	-0.911947	-1.734375	1.981793
154	-0.844812	-1.742557	2.105999
155	-0.736394	-1.521482	1.861758
156	-1.328766	-0.794153	-0.416066
157	-0.995541	-0.401477	-0.725100
158	-1.253876	-0.793817	-0.310129
159	-1.348540	-0.984732	-0.062667
160	-1.117209	-0.513134	-0.675041
161	-1.169816	-0.660058	-0.445003
162	-1.057950	-0.376294	-0.865040
163	-1.295177	-0.948331	-0.044007
164	-1.151470	-0.478307	-0.785357
165	-1.254506	-0.610022	-0.663895
166	-1.281408	-1.015236	0.134283
167	-1.115430	-1.331861	1.064768
168	-0.860836	-1.585552	1.809774

169	-1.239025	-1.108747	0.421930
170	-0.994543	-1.388959	1.351550
171	-1.198982	-1.410043	1.028091
172	-1.329898	-1.196131	0.392684
173	-1.245027	-1.365540	0.860486
174	-1.099880	-1.627223	1.530685
175	-1.175892	-1.245216	0.807477
176	-0.915912	-0.291839	-0.840830
177	0.056815	0.576310	-1.228115
178	0.033359	0.629516	-1.327607
179	-0.072767	0.490595	-1.257614
180	-0.664452	0.005275	-1.123539
181	-1.266602	-0.628598	-0.670617
182	-1.323371	-0.528989	-0.873513
183	-1.299877	-0.349387	-0.972747
184	-1.164319	-0.314279	-0.856924
185	-1.034007	-0.342825	-0.778365
186	-0.780179	-0.415969	-0.640629
187	-0.475501	-0.170811	-0.697539
188	-0.290343	-0.003874	-0.490080
189	-0.203201	0.077518	-0.421610
190	-0.227838	0.051247	-0.436994
191	-0.282828	-0.154655	-0.291661
192	-0.420379	-0.269095	-0.344943
193	-0.537305	-0.300895	-0.331796
194	-0.433916	-0.181091	-0.244903
195	-0.171542	-0.134173	0.075101
196	-0.027348	-0.140660	0.115560
197	-0.007144	-0.112930	-0.008083
198	0.061300	0.296120	-0.472834
199	0.405807	1.153309	-1.715208
200	0.067220	0.808328	-1.710721

APÊNDICE 6 – VETOR RESULTANTE DAS DIFERENÇAS ENTRE AS
COORDENADAS ESTIMADAS E CONHECIDAS

Tabela A6.1 – Vetor resultante das diferenças

Código	Ajustamento	Colocação	Diferenças
1	0.716831	0.263894	0.452938
2	0.310235	0.190296	0.119938
3	0.248989	0.447984	-0.198995
4	0.363398	0.220615	0.142784
5	0.722358	0.408552	0.313806
6	0.574514	0.102307	0.472207
7	0.854635	0.138293	0.716342
8	1.148581	0.239842	0.908739
9	1.228146	0.142675	1.085471
10	1.171438	0.100521	1.070917
11	1.070205	0.251876	0.818330
12	1.150762	0.172493	0.978269
13	1.424031	0.559617	0.864414
14	1.434871	0.168437	1.266434
15	1.217312	0.255538	0.961774
16	1.408516	0.082135	1.326381
17	1.269750	0.153233	1.116517
18	1.153838	0.074857	1.078981
19	1.286749	0.183539	1.103210
20	0.999417	0.073371	0.926046
21	1.180635	0.028850	1.151786
22	1.136160	0.070211	1.065950
23	0.907729	0.080876	0.826853
24	1.050878	0.032956	1.017922
25	1.129399	0.213355	0.916044
26	0.916495	0.029577	0.886917
27	0.816932	0.111638	0.705294
28	0.816276	0.055269	0.761007
29	0.774158	0.125595	0.648563
30	0.672191	0.148113	0.524078
31	0.587923	0.184169	0.403754
32	0.914483	0.472139	0.442343
33	0.284669	0.714375	-0.429706
34	1.517362	0.072375	1.444987
35	2.446759	0.865779	1.580980
36	1.143033	0.368487	0.774547
37	1.258498	0.642427	0.616070
38	1.521525	0.461779	1.059746
39	1.753957	0.113294	1.640663
40	1.663486	0.108851	1.554635
41	1.734058	0.180242	1.553816
42	1.947025	0.204937	1.742088
43	1.757983	0.040891	1.717092
44	1.894189	0.074927	1.819263
45	1.654745	0.112628	1.542117
46	1.590799	0.151798	1.439001
47	1.305065	0.401682	0.903382
48	1.537011	0.238935	1.298076
49	0.651965	0.154462	0.497503
50	0.777257	0.263044	0.514213
51	0.463180	0.150478	0.312702
52	0.437502	0.073337	0.364165
53	0.604476	0.168229	0.436247
54	0.311922	0.182773	0.129150
55	0.272590	0.056872	0.215718
56	0.183317	0.136637	0.046679
57	0.115020	0.094707	0.020313
58	0.327706	0.154332	0.173374
59	0.249414	0.112943	0.136471
60	0.358074	0.101454	0.256620
61	0.414426	0.066179	0.348247
62	0.411522	0.110132	0.301390
63	0.606144	0.131225	0.474919
64	0.527268	0.124474	0.402794
65	3.045067	0.437027	2.608040
66	2.955217	0.252601	2.702617
67	2.438135	0.037185	2.400950
68	2.609041	0.298479	2.310562
69	2.275964	0.096986	2.178978
70	2.559572	0.138878	2.420694
71	2.221233	0.072656	2.148577
72	2.207702	0.154604	2.053098
73	2.474799	0.287835	2.186964
74	2.712156	0.325000	2.387156
75	2.823109	0.344390	2.478719
76	3.017469	0.612826	2.404643
77	1.566480	0.222383	1.344098

78	1.815950	0.152335	1.663615
79	1.450910	0.094231	1.356679
80	1.451533	0.035672	1.415862
81	1.391884	0.115000	1.276883
82	1.243310	0.044462	1.198848
83	1.307242	0.639335	0.667908
84	1.089702	0.210135	0.879568
85	1.002375	0.486953	0.515422
86	0.894018	0.318074	0.575944
87	1.047431	0.335800	0.711631
88	0.542605	0.338125	0.204480
89	0.447913	0.214045	0.233868
90	0.283384	0.174233	0.109152
91	0.355549	0.105735	0.249814
92	0.278475	0.041506	0.236969
93	0.273541	0.080333	0.193208
94	0.277695	0.068508	0.209188
95	0.231699	0.057682	0.174017
96	0.344541	0.161236	0.183305
97	0.274194	0.032505	0.241689
98	0.327309	0.067500	0.259810
99	0.296394	0.030390	0.266004
100	0.304681	0.033947	0.270733
101	0.304361	0.076529	0.227833
102	0.354066	0.102715	0.251351
103	0.349763	0.047548	0.302215
104	0.393947	0.072678	0.321268
105	0.497803	0.166322	0.331482
106	0.528600	0.080122	0.448477
107	0.558953	0.286815	0.272138
108	0.431542	0.012499	0.419043
109	0.384284	0.216054	0.168230
110	0.479315	0.128848	0.350467
111	0.431074	0.121052	0.310022
112	0.274492	0.036250	0.238243
113	0.108681	0.103893	0.004788
114	0.157141	0.032208	0.124934
115	0.385879	0.086272	0.299607
116	0.495625	0.127414	0.368211
117	0.391734	0.072889	0.318846
118	0.598448	0.093009	0.505439
119	0.627982	0.239544	0.388437
120	0.786107	0.055080	0.731027
121	0.799429	0.094574	0.704856
122	0.437351	0.420475	0.016876
123	0.401734	0.123706	0.278028
124	0.202564	0.080185	0.122379
125	0.526501	0.145669	0.380833
126	0.325719	0.064677	0.261042
127	0.381160	0.038161	0.342999
128	0.390395	0.038617	0.351778
129	0.474575	0.106144	0.368430
130	0.319700	0.287751	0.031948
131	0.835600	0.325974	0.509626
132	1.064625	0.123148	0.941478
133	1.169484	0.163026	1.006458
134	0.950626	0.107096	0.843529
135	0.965847	0.074938	0.890909
136	1.097904	0.106091	0.991812
137	1.374350	0.083175	1.291175
138	1.010575	0.077606	0.932969
139	0.258852	0.063407	0.195445
140	0.453021	0.059378	0.393643
141	0.658042	0.262143	0.395899
142	0.729974	0.045341	0.684633
143	1.228896	0.333974	0.894922
144	1.201474	0.151256	1.050218
145	1.749621	0.068401	1.681220
146	1.804853	0.472645	1.332208
147	2.328903	0.529955	1.798948
148	2.669003	0.165128	2.503875
149	2.496043	0.406407	2.089636
150	3.025655	0.118562	2.907093
151	3.067244	0.120504	2.946740
152	3.138908	0.083730	3.055179
153	2.997560	0.110127	2.887433
154	3.086556	0.124423	2.962132
155	2.975265	0.375992	2.599273
156	1.420307	0.149861	1.270445
157	0.896689	0.050406	0.846283
158	1.128642	0.066010	1.062632
159	1.548804	0.144532	1.404272
160	1.076568	0.074267	1.002301
161	1.005958	0.070219	0.935739
162	1.139826	0.104834	1.034992
163	1.306530	0.074451	1.232078
164	1.216066	0.125430	1.090635
165	1.317303	0.154177	1.163126
166	1.407302	0.093280	1.314023

167	1.990105	0.076863	1.913242
168	2.739206	0.181194	2.558012
169	1.502573	0.114391	1.388182
170	2.137379	0.120068	2.017311
171	2.116571	0.123198	1.993373
172	1.805963	0.124982	1.680981
173	2.054465	0.178948	1.875516
174	2.467402	0.209167	2.258235
175	1.837998	0.036254	1.801744
176	0.717881	0.165029	0.552852
177	1.943648	0.512190	1.431458
178	1.650592	0.184316	1.466277
179	1.467447	0.269582	1.197865
180	0.764480	0.359676	0.404804
181	1.266509	0.253590	1.012919
182	1.255178	0.169805	1.085373
183	1.281032	0.155517	1.125515
184	1.254811	0.127094	1.127717
185	1.239946	0.175451	1.064495
186	1.107206	0.236074	0.871132
187	0.899737	0.463932	0.435804
188	0.718433	0.560809	0.157624
189	0.614258	0.627509	-0.013251
190	0.531669	0.567111	-0.035442
191	0.727830	0.283907	0.443923
192	0.694749	0.079675	0.615075
193	0.661124	0.228764	0.432360
194	0.659499	0.189387	0.470112
195	0.716461	0.221240	0.495222
196	0.812848	0.309628	0.503220
197	0.954522	0.251791	0.702731
198	1.093949	0.296640	0.797309
199	2.046209	0.889718	1.156491
200	2.451897	0.394357	2.057539

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABD-ELMOTAAL, H. Comparison of polynomial and similarity transformation based datum-shifts for Egypt. *Bulletin Geodesique*, vol. 68, No 3, p. 168-172, 1994.

ABIB, O. A. Parâmetros de transformação de Datum WGS-72/SAD-69. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 20, p. 32-39, 1978.

ABOUSALEM, M. ; KRAKIWSKY, E. J. ; BLAIS, J. A. R. e CHAPMAN, M. A. NAD-27 to NAD-83: The Alberta Experience. *Geomatica*, vol. 47, No 1, p. 9-17, 1993.

ANDERSON, R. C. ; DAVENPORT, J. A. e JEKELI, C. Determination of Gravity Data Spacing Required For Inercial Navigation. *Navigation*, vol. 47, Nº 1, pp. 1 a 6, 2000.

ANDERSON, J. M. e MIKHAIL, E. M. **Surveying: Theory and Practice**. WCB/McGraw-Hill. Seventh edition, 1998.

ANDRADE, J. B. Determinação simultânea de parâmetros de transformação entre referenciais geodésicos e de desníveis geoidais. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 37, p. 21-26, 1984.

ANDRADE, J. B. Transformação NSWG 9Z-2 – SAD-69 e mapa geoidal SAD-69. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 44, p. 20-39, 1991.

ARGESEANU, V. Three Dimensional Adjustment of a Terrestrial Geodetic Network – A Collocation Solution. Department of Civil Engineering and Surveying, the University of Newcastle. *Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying*, Nº 44, pp. 1-37, june, 1986.

BIAN, S. e MENZ, J. Determining the parameter of a covariance function by analytical rules. *Zeitschrift Für Vermessungswesen* 124. Jahrgang – Heft 7 – jahrgang, 1999.

BOWRING, B. R. Transformation from spatial to geographical coordinates. *Survey Review*, vol. 23, No 181, p. 323-327, 1976.

CAMARGO, P. O. e DALMOLIN, Q. **Correção da Deformação do Filme por Colocação**. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1995.

CASTAÑEDA, R. M. **Ensaio para definição de parâmetros de transformação entre o SAD-69 e o NSWC-9Z2**. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Dissertação de Mestrado. Curitiba, 1986.

COSTA, M. F. **Uma Proposta para Compatibilização entre Realizações de Referenciais Geodésicos**. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Dissertação de Mestrado. Curitiba, 1999.

COSTA, S. M. A. **Integração da Rede Geodésica Brasileira aos Sistemas de Referência Terrestres**. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Tese de doutorado. Curitiba, 1999A.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Editora da UFPR, Curitiba, 2002.

DE JONGE, P. J. A comparative study of algorithms for reducing the fill-in during Cholesky factorization. *Bulletin Geodesique*, vol. 66, No 3, p. 296-305, 1992.

DRACUP, J. F. Some notes on adjustments, weights, and accuracies directed to managers. *Surveying and Land Information Systems*, vol. 56, No 1, p. 13-26, 1996.

FORTES, L. P. S. ; CAGNIN, I. F. ; GODOY, R. A. Z. e BLITZKOW, D. Determinação dos parâmetros de transformação entre os sistemas NWL-10D, NSWC 9Z2, WGS-84 e o SAD-69. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Cartografia*, p. 157-165. Gramado, 1989.

GELB, A. ; KASPER JR., J. F. ; NAS JR., R. A. ; PRICE, G. F. e SUTHERLAND JR., A. A. **Applied optimal estimation**. Cambridge, MA, MIT, 1974.

GEMAEL, C. **Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia**. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1981.

GEMAEL, C. **Geodésia Celeste: Introdução**. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1991.

GEMAEL, C. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**. Editora da UFPR, Curitiba, 1994.

HAMILTON, W. C. **Statistics in Physical Science**. Ronald Press, New York, 1964.

IBGE. **Ajustamento da rede planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1996.

JAZWINSKI, A. U. **Stochastic processes and filtering theory**. New York, Academic, 1970.

JUNKINS, D. R. The National transformation for converting between NAD-27 and NAD-83 in Canada. *The Canadian Institute of Surveying and Mapping*, p. 16-40. Ottawa, 1990.

JUNKINS, D. R. e ERICKSON, C. **Version 2 of the National Transformation Between NAD-27 and NAD-83 and Its Importance for GPS Positioning in Canadá**. Geodetic Survey Division Geomatics. Canadá, 1996.

KADLEC, F. A. e GOMES, J. P. Cálculo de parâmetros de transferências de Sistemas geodésicos. *Revista Brasileira de Cartografia*, No 22, p. 27-34, 1978.

KAVOURAS, M. **On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks.** Technical Report N° 87, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1982.

KRAKIWSKY, E. J. **A synthesis of advances in the Method of Least Squares.** Lecture note N° 42, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1975.

KRAKIWSKY, E. J. e BIACS, Z. F. Least Squares Collocation and Statistical Testing. *Bulletin Geodesique*, 64, pp.73-87, 1990.

KRAUS, K. e MIKHAIL, E. M. Linear Least Squares Interpolation. *Photogrammetric Engineering*, october, 1972.

KUANG, S. **Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications.** Chelsea: Ann Arbor Press, 1996.

LAMBECK, K. The relation of some geodetic datums to a global geocentric reference system. *Bulletin Geodesique*, No 99, 1971.

LEICK, A. **GPS Satellite Surveying.** 2 ed. Department of Surveying Engineering. University of Maine. John Wiley & Sons, 1995.

LUGNANI, J. B. **Introdução à Fototriangulação.** Editora UFPR. Curitiba, 1987.

MARQUES, J. M. **O método da Análise de Componentes Principais para Detecção de Outliers Múltiplos em Fototriangulação.** Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Tese de doutorado. Curitiba, 1994.

MERRY, C. L. e WHITTAL, J. F. Transformation of Coordinate data for the new South African Datum – A Pilot Study. *Survey Review*, vol. 34, No 268, p. 379-388, 1998.

MIKHAIL, E. M. **Observations and Least Squares**. University Press of America, New York, 1976.

MIKHAIL, E. M. e GRACIE, G. **Analysis and Adjustment of Survey measurement**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1981.

MORAES, C. V. **Aprimoramento da concepção do modelo geodésico para a caracterização de extremas no espaço geométrico**. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Tese de Doutorado. Curitiba, 2001.

MORITZ, H. **Advanced Least Squares Methods**. Report N° 175, The Ohio University, Research Foundation. Columbus, 1972.

MORITZ, H. Determination of the gravity field by Collocation. *Bollettino di Geodesia e Scienze affini*, Anno XXXII, N° 1, 1973.

MORITZ, H. **Covariance Functions in Least Squares Collocation**. Report N° 240, The Ohio University, Department of Geodetic Science. Columbus, 1976.

MORITZ, H. Least Squares Collocation. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol. 16, N° 3, 1978.

MORITZ, H. e SÜNKEL, H. **Approximation Methods in Geodesy**. Herbert Wichmann Verlag. Karlsruhe, 1978.

MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique*, vol. 54, No 3, 1980.

MORITZ, H. **Advanced Physical Geodesy**. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe. Karlsruhe, 1980.

MUELLER, I. I. Review of Problems Associated with Conventional Geodetic Datums. *The Canadian Surveyor*, vol. 28, No 5, p. 514-523, 1974.

OLIVEIRA, L. C. ; MÔNICO, J. F. G. ; SANTOS, M. C. e BLITZKOW, D. Some considerations related to the new realization of SAD-69 in Brazil. **International Association of Geodesy Symposia**, vol. 118. Rio de Janeiro, 1997.

OLIVEIRA, L. C. **Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD-69 – Uma proposta metodológica de transformação**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Tese de Doutorado. São Paulo, 1998.

PAGGI, G. ; STOPPINI, A. e SURACE, L. Trasformazioni di coordinate nei rilievi GPS. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*. Firenze, Anno LIII, No 3, p. 285-312, 1994.

PAUL, M. K. A note on computation of geodetic coordinates from geocentric (cartesian) coordinates. *Bulletin Geodesique*, No 108, p. 135-139, 1973.

RAMPAL, K. K. Least Squares Collocation in Photogrammetry. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 1976

RAPP, R. H. Separation between reference surfaces of selected vertical datums. *Bulletin Geodesique*, vol. 69, p. 26-31, 1994.

RENS, J. e MERRY, C. L. Datum transformation parameters in southern Africa. *Survey Review*, vol. 30, No 236, 1990.

SCHWARZ, K. P. Combination of Spatial Networks Using an Estimated Covariance Matrix. *Bulletin Geodesique*, vol. 68, No 3, p. 168-172, 1974.

SCHWARZ, K. P. Least Squares Collocation for Large Systems. *Bollettino di Geodesia e Scienze affini*, Anno XXXV, N° 3, 1976.

SIDERIS, M. G. Tests of a Gravimetric Geoid in GPS Networks. *Surveying and Land Information Systems*, vol. 53, No 2, p. 94-102, 1993.

THÉRIAULT, Y. Filtrage par Collocation: Application au Changement de Système de Référence Géodésique. Service des technologies à référence spatiale Secteur des terres, ministère des Ressources naturelles, Québec. *Geomatica*, vol 49, N° 2, pp. 213 a 221, 1995.

THOMSON, D. B. **Combination of Geodetic Networks**. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1976.

TORGE, W. **Geodesy**. 3 rd Edition. Walter de Gruyter. Berlin, 2001.

VANÍČEK, P. e KRAKIWSKY, E. J. **Geodesy: The Concepts**. 2 ed. North Holland Publishing, 1986.

VANÍČEK, P. **Introduction to Adjustment Calculus**. Lecture note N° 35, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1980.

VANÍČEK, P. e STEEVES, R. R. Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. *Journal of Geodesy*, vol. 70, No 11, p. 740-745, 1996.

VERONEZ, M. R. **Proposta de parâmetros de transformação entre os sistemas WGS-84 e o SAD-69 para a região de São Carlos – SP**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 1998.

VINCENY, T. Transformation of coordinates between geodetic systems. *Survey Review*, vol. 18, No 137, p. 128-133, 1965.

VINCENY, T. e BOWRING, B. R. **Application of Three-Dimensional Geodesy to Adjustments of Horizontal Networks.** National Geodetic Survey. NGS-13, 1978.

WELLS, D. E. e KRAKIWSKY, E. J. **The Method of Least Squares.** Lecture notes N° 18, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, NB, Canada, 1971.