UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Ricardo Paleari da Silva

SIMETRIAS EM GEOMETRIA E FÍSICA

Curitiba, 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Ricardo Paleari da Silva

SIMETRIAS EM GEOMETRIA E FÍSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel.

Curitiba, 2011.

Aos meus pais,
pois sem eles eu não chegaria até aqui.

Agradecimentos

Confesso que é realmente muito difícil escrever sucintamente um agradecimento a todos aqueles cuja existência é, ou foi, essencial até o presente momento de minha vida. Se eu fosse listar aqui todos os nomes importantes, provavelmente eu gastaria muitas horas digitando (bem gastas certamente), porém, o espaço é curto para isto.

Quero agradecer aos meus amigos e colegas, desde os amigos de infância até os mais recentes da universidade. Certamente eles são os principais responsáveis por muitos de meus momentos mais felizes e das minhas peculiares risadas.

À Lilian, pelos ótimos momentos que somente com ela eu poderia ter vivido. Certamente ela é uma pessoa com a qual posso contar em qualquer momento da minha vida, além de ser provavelmente a única pessoa no mundo que consiga me aguentar.

Um obrigado também ao Prof. Dr. Eduardo Hoefel, por ter me orientado neste trabalho e também por ter me mostrado outras maneiras interessantes de pensar e ver matemática. Certamente tudo isso fez com que eu evoluísse muito em vários sentidos. Não poderia deixar de agradecer também pelos chocolates dos finais de semana.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro. Agradeço também ao PPGMA por ter oferecido uma estrutura razoável para que eu realizasse meus estudos nestes dois anos de mestrado. Agradeço a todos aqueles professores que me ajudaram tanto durante toda a minha estadia na UFPR, e também a aqueles que trabalham arduamente para que o departamento de matemática da UFPR, seus cursos de graduação e seus programas de pós-graduação melhorem cada vez mais, os quais espero que, num futuro próximo, sejam grandes referências em ensino e pesquisa de ótima de qualidade.

Finalmente, agradeço aos meus pais por serem responsáveis pela pessoa que sou hoje, e por todo o apoio que sempre tive para chegar onde estou. Tenho certeza de que minha mãe estaria muito feliz se pudesse ler isto agora.

“Algo só é impossível até que alguém duvide
e acabe provando o contrário.”

Albert Einstein

“Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra;
poderá ser apenas mais cômoda.”

Henri Poincaré

“Nenhuma grande descoberta foi feita jamais
sem um palpite ousado.”

Isaac Newton

“Rein!”

Resumo

O objetivo desta dissertação é fazer um estudo mostrando algumas ligações entre geometria e física utilizando conexões em fibrados principais. Mais especificamente, descreveremos as geometrias clássicas como exemplos de espaços simétricos e, além disso, mostraremos exemplos de field strenghts como expressões de conexões em certos fibrados principais. Começamos fazendo uma apresentação sucinta dos conceitos: fibrado principal, conexão e curvatura. Em seguida, dividimos o trabalho em duas direções. Na primeira, usamos a linguagem de fibrados principais e conexões para definir o conceito de espaço simétrico e escrevemos, nestes termos, as geometrias clássicas (simplesmente conexas) de curvatura constante: a geometria Esférica, a geometria Hiperbólica e a geometria Euclidiana. No segundo, apresentamos uma relação entre as fibrações de Hopf e alguns temas oriundos da física teórica: o eletromagnetismo e a teoria de Yang-Mills.

Palavras-chave: *conexão em fibrado principal, curvatura, espaço simétrico, fibrados de Hopf, eletromagnetismo, teoria de Yang-Mills.*

Abstract

The aim of this work is to make a study showing some relations between geometry and physics using connections on principal fiber bundles. More specifically, we will describe the classical geometries as examples of symmetric spaces and, besides, we will show examples of field strenghts as expressions of connections in some principal fiber bundles. We start doing a quick presentation of the concepts: principal fiber bundle, connection and curvature. In the following, we divide the work in two directions. First, we use the language of principal fiber bundles and connections to define the concept of symmetric space and we write, in these terms, the classical geometries (simple connected) of constant curvature: the Spherical geometry, the Hyperbolic geometry and the Euclidean geometry. Next, we present a relation between the Hopf's fibrations and some topics arising from theoretical physics: the eletromagnetism and the Yang-Mills' theory.

Keywords: *connection on principal fiber bundle, curvature, symmetric space, Hopf's bundles, electromagnetism, Yang-Mills' theory.*

Sumário

Introdução

Estruturas fibradas têm sido objetos de fundamental importância em grandes áreas da matemática e da física desde algumas décadas atrás. Na geometria diferencial, por exemplo, temos naturalmente os fibrados vetoriais, nos quais guardamos ao mesmo tempo informação da variedade base e, sobre cada ponto desta, guardamos também informação sobre o espaço vetorial típico daquele fibrado vetorial em questão (por exemplo, o espaço tangente naquele ponto, o espaço dual, espaço dos tensores, etc...). Outro exemplo é o fibrado de referenciais de uma variedade, em que colocamos sobre cada ponto desta o conjunto de todas as bases ordenadas do espaço tangente correspondente. A estrutura fibrada mais simples que podemos ter é um produto cartesiano $X \times Y$, o qual é pensado como uma estrutura fibrada sobre X e, em cada ponto $x \in X$, a fibra é uma cópia do espaço topológico Y, de modo que $X \times Y$ pode ser pensado como uma "colagem" de cópias da fibra Y sobre cada ponto x de X. Esta é a maneira mais simples de fazer tal colagem. Uma estrutura fibrada em geral segue a mesma ideia, porém nem todas são obtidas globalmente como um produto cartesiano, o que se exige é que isso aconteça pelo menos localmente. Isso se tornará mais preciso posteriormente. Um dos objetos mais importantes quando se considera um fibrado é o tipo de fibra que usamos. Nos casos de nosso interesse, os fibrados terão uma "fibra típica", sendo que nesta fibra age um grupo, chamado de grupo estrutural do fibrado. Dependendo da situação, a fibra típica pode ter tipos de estruturas diferentes, sendo, por exemplo, topológica, vetorial, de grupo de Lie, entre outras.

Nesta dissertação lidaremos com fibrados principais e seus fibrados associados (em particular, fibrados vetoriais). Sem muito rigor, podemos dizer que um fibrado principal é um fibrado cuja fibra típica é o grupo estrutural e, além disso, a ação nas fibras é dada por translações à esquerda. Um exemplo clássico que procura motivar uma tal estrutura é o seguinte: partículas se movendo em uma região e que interagem. Por motivos físicos, é importante entender como é a variação da fase destas partículas, porque sua fase relativa tem consequências observáveis. A fase de uma partícula é representada por um número complexo de módulo 1 (isto é, um elemento do grupo S^1). Se o movimento de uma partícula é modelado em uma variedade M, uma maneira para tentar manter o controle de variação da fase desta partícula é colocar em cada ponto da variedade M uma cópia de S^1 como fibra, e considerar assim um fibrado sobre M fazendo uma "colagem" destas fibras (este fibrado é chamado de **espaço de fases**). O movimento da partícula, pensado neste espaço de fases, é um exemplo de seção local deste fibrado. Neste caso a fibra típica é o próprio grupo, que age por translações (rotações). Posteriormente, estudaremos esse exemplo com mais detalhes. O objeto que de fato tem o papel de medir a variação da fase é uma conexão neste fibrado. Veremos que uma conexão em um fibrado principal induz uma conexão em cada fibrado vetorial associado, o que corresponde a uma noção de derivação de seções. No caso particular em que o fibrado vetorial é o fibrado tangente, recuperamos a noção de conexão da geometria Riemanniana, ilustrando que a partir do estudo de conexões em fibrados principais é possível, de certa maneira, estudar questões de geometria Riemanniana.

O exemplo de origem física do parágrafo anterior nos diz que a linguagem de fibrados principais e conexões pode modelar questões teóricas do eletromagnetismo. De fato, o eletromagnetismo foi a primeira teoria a ser considerada como um exemplo de Teoria de Calibre. Algumas destas teorias têm o papel de tentar unificar em uma única linguagem certas forças da natureza. Nesta linguagem, o eletromagnetismo é uma teoria de Calibre de grupo $U(1) = S^1$ (abeliano), que tem o papel de unificar as forças elétrica e magnética. Em 1954, C. N. Yang e R. Mills introduziram uma teoria de Calibre, de certa maneira análoga à teoria do eletromagnetismo, para tentar modelar a interação forte entre os nucleons de um átomo. Esta teoria, chamada de Teoria de Yang-Mills, é uma teoria de Calibre com grupo $SU(2)$ (não abeliano). Assim como no eletromagnetismo temos as Equações de Maxwell, existem também as equações de campo na teoria de Yang-Mills. Em 1970, Sir Michael Atiyah começou a estudar a matemática das soluções destas equações. Daí em diante muita matemática apareceu como consequência desses estudos, com trabalhos de S. Donaldson, M. Freedman (existência de $\mathbb{R}^4$ "exóticos"), entre outros.

Dada assim um preliminar do que é a teoria de fibrados e um pouco da sua importância, vamos comentar o que será feito nesta dissertação. No capítulo 1, apresentamos os conceitos mais importantes deste trabalho: fibrados principais, conexões e suas respectivas curvaturas. No capítulo 2, mostramos como estes objetos podem modelar diferentes tipos de geometrias, introduzindo para isso o conceito de espaço simétrico. As três geometrias clássicas de curvatura constante (e simplesmente conexas), a geometria Esférica, a geometria Hiperbólica e a geometria Euclidiana são escritas na linguagem de espaços simétricos. Finalmente, no capítulo 3 são estudados os fibrados de Hopf (complexos e quaterniônicos) e é apresentada uma ideia de como estes fibrados modelam situações oriundas da física teórica: o monopolo magnético (um conceito introduzido por P. Dirac) e a teoria de Yang-Mills. Por fim, veremos que o fato de que estas teorias são quantizadas é refletido em um fato puramente topológico dos fibrados em questão.

Neste trabalho é assumido como conhecida a teoria básica de variedades diferenciáveis, grupos de Lie, álgebras de Lie e o conhecimento dos elementos básicos da geometria Riemanniana. Para uma apresentação da teoria de variedades diferenciáveis e grupos de Lie podem ser consultados por exemplo [Lee03], [BG80], [Hel62], [KN69], [War83] e [Spi75]. Para elementos básicos de geometria Riemanniana podem ser consultados [Car92], [Lee97], [O'N83] e [Pet06]. Para elementos básicos de topologia algébrica recomendamos [Nab97], [Hat02] e [BT82]. Para elementos de álgebra recomendamos [Lan02]. Para uma apresentação em nível mais elementar do capítulo 2 recomendamos [Mil77]. Para possíveis continuações dos temas desta dissertação recomendamos, por exemplo, [Jar05] para uma primeira leitura e [DK90] para uma leitura mais avançada.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos e os resultados principais que serão usados, os quais tentamos expor de uma forma objetiva. Vamos esclarecer algumas convenções e notações. Em todo o texto quando dizemos "P é uma variedade", queremos dizer que P é uma variedade diferenciável de dimensão finita no sentido de [Lee03], além disso, diferenciável aqui vai ser sinônimo de "diferenciável de classe C^∞". Se $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre duas variedades, detonaremos por $f_* : TM \to TN$ a aplicação induzida entre os fibrados tangentes de M e N respectivamente, a qual chamamos simplesmente de derivada de f. O espaço vetorial dos campos vetores em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$. O elemento neutro de um grupo de Lie G será denotado por e, a menos que seja especificado outro símbolo. O produto de dois elementos $g, h \in G$ é denotado por $g \cdot h$ (a menos que seja um grupo aditivo).

Definição 1.1. *Uma ação (à direita) de um grupo de Lie G numa variedade P é uma aplicação diferenciável $f : P \times G \to P$, tal que $f(u,e) = u$ e $f(f(u,g),h) = f(u, g \cdot h)$ para todos $u \in P$ e $g, h \in G$.*

Para economia de notação, a ação de um elemento $g \in G$ em um certo $u \in P$ será denotada simplesmente por $u \cdot g$. Com esta notação, as propriedades da ação são escritas como abaixo:

1. $u \cdot e = u$, para todo $u \in P$.

2. $u \cdot (g \cdot h) = (u \cdot g) \cdot h$, para todos $u \in P$ e $g, h \in G$.

Outra notação frequente é a seguinte: quando fixamos $g \in G$, denotamos por R_g a aplicação induzida pela ação: $R_g(u) = u \cdot g$. Podemos fazer considerações análogas a respeito de ações à esquerda. A ação é dita **livre** se $u \cdot g = u$, para algum $u \in P$, implicar $g = e$. A ação é dita **efetiva** se $u \cdot g = u$, para todo $u \in P$, implicar $g = e$.

Para cada $g \in G$, temos o difeomorfismo $L_g : G \to G$ definido por $L_g(h) = g \cdot h$, chamado a **translação à esquerda por** g. Analogamente, o difeomorfismo $R_g : G \to G$, $R_g(h) = h \cdot g$, é a **translação à direita por** g. Temos também a aplicação **adjunta** $\mathrm{ad}(g) : G \to G$, definida por $\mathrm{ad}(g)(h) = ghg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}(h) = R_{g^{-1}} \circ L_g(h)$.

A álgebra de Lie de G, denotada pela letra gótica $\mathfrak{g}$, será pensada ora como o espaço tangente T_eG, ora como o conjunto de campos de vetores invariantes à esquerda em G. Se $X \in \mathfrak{g}$, então $\mathrm{ad}(g)_*(X) = (R_{g^{-1}})_*X$, pois $(L_g)_*X = X$.

Dado $X \in T_gG$, existe um único campo invariante à esquerda que vale X em g, bastar tomar o campo invariante à esquerda associado a $((L_g)^{-1})_*(X) \in \mathfrak{g}$, que por simplicidade de notação, também será denotado por X.

Definição 1.2. *A **forma de Maurer-Cartan** é a 1-forma em G com valores em $\mathfrak{g}$ definida por $\Theta_g(X) = X_e$, em que X_e é o valor na identidade do único campo invariante à esquerda que vale X em g.*

1.1 Fibrados Principais e exemplos

Definição 1.3. *Sejam M uma variedade e G um grupo de Lie. Um **fibrado principal** C^∞ sobre M com grupo de estrutura G consiste de uma variedade P e uma ação (à direita) de G em P, $(u, g) \mapsto u \cdot g$, tais que:*

1. *a ação é livre.*

2. *M é difeomorfo ao espaço quociente P/G e a projeção canônica $\pi : P \to M$ é diferenciável.*

3. *P é **localmente trivial**, isto é, para todo $x \in M$ existe um aberto $U \subset M$ contendo x e um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ da forma $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, em que φ satisfaz $\varphi(u \cdot g) = \varphi(u) \cdot g$ para todos $u \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$.*

Denotaremos um tal fibrado principal por $\mathscr{B} = P(M, G)$ ou apenas por P quando estiver claro quem é a variedade M e o grupo de Lie G. É usual dizer que P é o **espaço total**, M é o **espaço base**, e que para cada $x \in M$ a pré-imagem do conjunto unitário $\{x\}$ pela aplicação π, denotada por $\pi^{-1}(x)$, é a **fibra** sobre x. Como π é uma submersão, as fibras são subvariedades fechadas de P. As aplicações ψ da definição acima são chamadas de **trivializações locais**. Pela forma como se escreve uma tal trivialização local ψ, e também por esta ser um difeomorfismo, segue que a restrição da aplicação φ a uma fibra $\pi^{-1}(x)$, em que $x \in U$ é arbitrário, fornece um difeomorfismo entre esta fibra e o grupo G. Assim, em um fibrado principal, qualquer fibra é difeomorfa ao grupo estrutural G.

Note também que pela propriedade 2., a ação é transitiva quando restrita a uma fibra qualquer, isto é, fixado $u \in \pi^{-1}(x)$, para qualquer outro $v \in \pi^{-1}(x)$ existe $g \in G$ tal que $u = v \cdot g$. Além disso, como a ação é livre, tal elemento g é único.

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Pela condição 3. da definição, existe uma cobertura de M por abertos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ onde estão definidas trivializações locais $\psi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times G$, com $\psi_\lambda = (\pi, \varphi_\lambda)$. Suponha que $\alpha, \beta \in \Lambda$ sejam tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Note que para cada $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $g \in G$, temos que

$$\varphi_\alpha(u \cdot g) \cdot (\varphi_\beta(u \cdot g))^{-1} = \varphi_\alpha(u) \cdot g \cdot g^{-1} \cdot \varphi_\beta(u)^{-1} = \varphi_\alpha(u) \cdot \varphi_\beta(u)^{-1}.$$

Portanto, tem sentido definir a **função de transição** $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, colocando $g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(u) \cdot \varphi_\beta(u)^{-1}$, em que u é qualquer elemento da fibra $\pi^{-1}(x)$. A aplicação $g_{\alpha\beta}$ é diferenciável, pois pode ser escrita como composição de aplicações diferenciáveis. De fato, se $i : U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha \cap U_\beta \times G$ é a inclusão $i(x) = (x, e)$, como $\psi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha$ e φ_β são diferenciáveis e o produto e a inversão do grupo G são diferenciáveis, segue que $g_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1}) \circ \psi_\alpha^{-1} \circ i$ é diferenciável.

Se $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, então dado $x \in M$ nesta interseção e $u \in \pi^{-1}(x)$, temos:

$$g_{\gamma\beta}(x) \cdot g_{\beta\alpha}(x) = \varphi_\gamma(u)\varphi_\beta(u)^{-1}\varphi_\beta(u)\varphi_\alpha(u)^{-1} = \varphi_\gamma(u)\varphi_\alpha(u)^{-1} = g_{\gamma\alpha}(x).$$

Isto é, as funções de transição satisfazem (quando tem sentido) $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \cdot g_{\beta\alpha}$, que é a chamada **condição de cociclo**. Veremos posteriormente que o conjunto das funções de transição determina o fibrado principal.

Definição 1.4. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Uma aplicação diferenciável $s : U \to P$, $U \subset M$ aberto, tal que $\pi \circ s = Id_U$ é chamada uma **seção local do fibrado**. No contexto físico, é comum dizer que s é um **calibre**.*

Observação 1.1. Existe uma correspondência 1-1 entre seções locais de um fibrado principal e trivializações locais. De fato, dada uma trivialização local $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, com $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, podemos definir uma seção local $s : U \to P$ colocando $s(x) = \psi^{-1}(x, e)$. Ela é chamada de seção local canônica associada a ψ. Reciprocamente, dada $s : U \to P$ uma seção local, defina $f : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ colocando $f(x, g) = s(x) \cdot g$.

Temos que f é injetora, pois se $f(x_1,g_1)=f(x_2,g_2)$, então $x_1=\pi(s(x_1)\cdot g_1)=\pi(s(x_2)\cdot g_2)=x_2$ por definição de seção local, daí $g_1=g_2$ pois a ação é livre. Esta aplicação também é sobrejetora pois dado $u\in\pi^{-1}(U)$ temos que $s(\pi(u))$ está na mesma fibra de u por definição de seção local, logo existe um único $g\in G$ tal que $u=s(\pi(u))\cdot g$. Isto define uma função $u\mapsto\varphi(u):=g$. Segue que f é bijetiva, e sua inversa $\psi=f^{-1}$ é $\psi(u)=(\pi(u),\varphi(u))$. Finalmente, dados $u\in\pi^{-1}(U)$ e $g\in G$, como $s(\pi(u\cdot g))\cdot(\varphi(u)\cdot g)=s(\pi(u))(\varphi(u)\cdot g)=u\cdot g$, temos que $\varphi(u\cdot g)=\varphi(u)\cdot g$. Portanto ψ é uma trivialização local. Observe daí a seguinte consequência dessa correspondência. Suponha que um grupo de Lie G age livremente em uma variedade P e que $M:=P/G$ seja uma variedade com a projeção canônica $\pi:P\to M$ sendo uma submersão. Se esta projeção admitir uma família de seções locais definidas em abertos que cobrem M, então podemos construir uma estrutura de fibrado principal $P(M,G)$. Outra consequência dessa observação é que caso um fibrado principal possua uma seção global, então ele possui uma trivialização global, e portanto esse fibrado é um produto cartesiano.

Definição 1.5. *Um* ***morfismo*** *de um fibrado principal $\mathscr{B}_1=P_1(M_1,G_1)$ em um fibrado principal $\mathscr{B}_2=P_2(M_2,G_2)$ consiste de um par de aplicações (f,f'), em que $f:P_1\to P_2$ é uma aplicação diferenciável e $f':G_1\to G_2$ é um homomorfismo de grupos de Lie tais que $f(u\cdot g)=f(u)\cdot f'(g)$ para todos $u\in P_1$ e $g\in G_1$. Em geral, denotaremos um tal morfismo por $(f,f'):\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$.*

Assim, um morfismo de fibrados preserva fibras, portanto induz uma aplicação $F:M_1\to M_2$ determinada pela equação $\pi_2\circ f=F\circ\pi_1$. A aplicação induzida é diferenciável. De fato, dado $x\in M_1$ qualquer, considere um aberto $U_1\subset M_1$ contendo x e uma seção local (diferenciável) $s_1:U_1\to M_1$ do fibrado P_1. Por definição de seção local, temos que $\pi_1\circ s_1=\mathrm{Id}_{U_1}$, de modo que em U_1 vale $F=\pi_2\circ f\circ s_1$, e assim F é escrita como composição de aplicações diferenciáveis.

Definição 1.6. *Um morfismo $(f,f'):\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ é um* ***mergulho*** *se $f:P_1\to P_2$ é um mergulho e $f':G_1\to G_2$ é um monomorfismo.*

Note que, usando trivializações locais, a primeira função coordenada de f é a aplicação induzida F, portanto, se f é mergulho, então F é também um mergulho. No caso da definição acima dizemos que $P_1(M_1,G_1)$ é um **subfibrado** de $P_2(M_2,G_2)$.

Definição 1.7. *Se $(f,f'):\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2$ é um mergulho entre dois fibrados com mesma base M e a aplicação induzida F é a identidade de M, dizemos que (f,f') é uma* ***redução do grupo de estrutura*** *do fibrado $P_2(M,G_2)$ para G_1 e que $P_1(M,G_1)$ é um fibrado* ***reduzido****.*

Definição 1.8. *Se H é um subgrupo de Lie de G, dizemos que o grupo de estrutura do fibrado $P(M,G)$ é* ***redutível*** *a H se existe um fibrado reduzido $Q(M,H)$.*

O teorema a seguir caracteriza quando um grupo de estrutura admite redução. Este teorema não será usado posteriormente, porém, será enunciado e demonstrado pela sua importância na Teoria de Fibrados Principais em geral.

Teorema 1.1. *O grupo de estrutura G é redutível para um subgrupo de Lie H se, e somente se, existe uma cobertura de M por trivializações locais tal que as funções de transição tomam valores em H.*

Demonstração: Suponha primeiramente que o grupo de estrutura G é redutível a H e seja $Q(M,H)$ o fibrado reduzido. Considere Q como subvariedade de P. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M associada às trivializações locais $\tilde{\psi}_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$, $\tilde{\psi}_\alpha = (\tilde{\pi}, \tilde{\varphi}_\alpha)$, de $Q(M,H)$. As funções de transição correspondentes tomam valores em H. Vamos estender agora cada $\tilde{\psi}_\alpha$ para uma aplicação $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ que será de fato uma trivialização local do fibrado $P(M,G)$. Fazemos isso da seguinte maneira: dado $u \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, tome $\tilde{u} \in \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ e $g \in G$ tais que $u = \tilde{u} \cdot g$ e defina $\varphi_\alpha(u) = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}) \cdot g$ e $\psi_\alpha(u) = (\pi(u), \varphi_\alpha(u))$. Vejamos que φ_α está bem definida. Se $u = \tilde{u}_1 \cdot g_1 = \tilde{u}_2 \cdot g_2$, com $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ e $g_1, g_2 \in G$, então $g_1 g_2^{-1} \in H$ pela ação ser livre, e portanto

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}_2) \cdot g_2 = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}_1 \cdot g_1 g_2^{-1}) \cdot g_2 = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}_1) \cdot g_1 g_2^{-1} g_2 = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}_1) \cdot g_1.$$

É fácil ver agora que ψ_α é de fato uma trivialização local de $P(M,G)$. Suponha agora que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e sejam $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $u \in \pi^{-1}(x)$. Sejam também $\tilde{u} \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$ e $g \in G$ tais que $u = \tilde{u} \cdot g$, então

$$g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(\tilde{u} \cdot g)\varphi_\beta(\tilde{u} \cdot g)^{-1} = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}) g g^{-1} \tilde{\varphi}_\beta(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}) \tilde{\varphi}_\beta(\tilde{u})^{-1} \in H,$$

e portanto as funções de transição tomam valores em H.

Reciprocamente, assuma que exista uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M com um conjunto de funções de transição tomando valores em H. Da definição de subgrupo de Lie, é possível mostrar que a restrição do contradomínio $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to H$ é uma aplicação diferenciável na estrutura diferenciável de H. Pelo teorema 1.1 é possível construir um fibrado principal $Q(M,H)$ a partir desta cobertura e destas funções de transição. Seja $f_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ a composição das três aplicações abaixo (que são mergulhos):

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H \to U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha).$$

As aplicações f_α concordam nas interseções, definindo portanto um mergulho $f : Q \to P$. $\square$

Definição 1.9. *Sejam $\mathscr{B}_1 = P_1(M,G_1)$ e $\mathscr{B}_2 = P_2(M,G_2)$ fibrados principais e (f,f') um morfismo de $\mathscr{B}_1$ em $\mathscr{B}_2$. Dizemos que (f,f') é um* ***isomorfismo*** *entre esses fibrados se f for um difeomorfismo e f' um isomorfismo de grupos de Lie. No caso em que $P_1 = P_2$ e $G_1 = G_2$, dizemos que (f,f') é um* ***automorfismo*** *do fibrado.*

Dados dois automorfismos (f_1,f_1') e (f_2,f_2') de um fibrado principal $\mathscr{B} = P(M,G)$, tem-se que $(f_1,f_1')\circ(f_2,f_2') := (f_1\circ f_2, f_1'\circ f_2')$ é também um automorfismo do fibrado $\mathscr{B}$. O conjunto dos automorfismos do fibrado $\mathscr{B}$, denotado por $\mathscr{G}(\mathscr{B})$, é um grupo com a operação $\circ$. Evidentemente a identidade deste grupo é o morfismo $(\mathrm{Id}_P, \mathrm{Id}_G)$ e se (f,f') é um automorfismo do fibrado, o seu inverso é o morfismo (f^{-1}, f'^{-1}).

Observação 1.2. No caso de dois fibrados $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sobre o mesmo espaço M e mesmo grupo G, um isomorfismo $(f,f') : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ tal que $f' = \mathrm{Id}_G$ e $F = \mathrm{Id}_M$ é chamado de **equivalência**.

Seja $\mathscr{B} = P(M,G)$ um fibrado principal e $\{(U_\lambda, \psi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de M por trivializações locais para $\mathscr{B}$. Considere um **refinamento** desta cobertura, isto é, uma cobertura aberta $\{U_k'\}_{k\in K}$ de M tal que cada U_k' está contido em algum U_λ. Para cada $k \in K$, selecione $\lambda = \lambda(k) \in \Lambda$ com $U_k' \subset U_\lambda$. Se $\psi_k' : \pi^{-1}(U_k') \to U_k' \times G$ é definida por $\psi_k' = \psi_\lambda|_{\pi^{-1}(U_k')}$, então $\{(U_k', \psi_k')\}_{k\in K}$ também é uma cobertura trivializante de $\mathscr{B}$. Agora suponha que sejam dados dois fibrados principais, $\mathscr{B}_1 = P_1(M,G)$ e $\mathscr{B}_2 = P_2(M,G)$, e considere coberturas abertas trivializantes $\{U^1_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$ e $\{U^1_{\lambda_2}\}_{\lambda_2\in\Lambda_2}$ de $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ respectivamente. Segue então que $\{U^1_{\lambda_1} \cap U^2_{\lambda_2}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1, \lambda_2\in\Lambda_2}$ é um refinamento comum destas coberturas e assim é uma cobertura trivializante para ambos $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$. Portanto, não há perda de generalidade supor que dois fibrados $P_1(M,G)$ e $P_2(M,G)$ tenham as mesmas vizinhanças trivializantes. Segue abaixo um critério para equivalência de fibrados principais.

Teorema 1.2. *Sejam $\mathscr{B}_1 = P_1(M,G)$ e $\mathscr{B}_2 = P_2(M,G)$ fibrados principais e $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura trivializante para ambos $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$. Sejam $g^1_{\alpha\beta}, g^2_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ as funções de transição correspondentes para $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ respectivamente. Então $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ são equivalentes se, e somente se, existem funções contínuas $h_\lambda : U_\lambda \to G$, $\lambda \in \Lambda$, tais que*

$$g^2_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x)^{-1} g^1_{\alpha\beta}(x) h_\beta(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Demonstração: Suponha primeiramente que $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sejam equivalentes e seja $f : P_1 \to P_2$ uma equivalência. Fixe $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Note que para qualquer $u \in \pi_1^{-1}(x)$, temos $f(u) \in \pi_2^{-1}(x)$. Sejam $\psi^1_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ e $\psi^2_\alpha : \pi_2^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ trivializações de $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sobre U_α, e similarmente sobre U_β. Dado $g \in G$ qualquer, note que

$$\varphi^1_\alpha(u\cdot g)\varphi^2_\alpha(f(u\cdot g))^{-1} = \varphi^1_\alpha(u)\cdot g\cdot g^{-1}\varphi^2_\alpha(f(u))^{-1} = \varphi^1_\alpha(u)\varphi^2_\alpha(f(u))^{-1},$$

de modo que tem sentido definir $h_\alpha : U_\alpha \to G$ por $h_\alpha(x) = \varphi^1_\alpha(u)\varphi^2_\alpha(f(u))^{-1}$, em que u é qualquer elemento de $\pi_1^{-1}(x)$. Similarmente para h_β.

Como $g^1_{\alpha\beta}(x) = \varphi^1_\alpha(u)\varphi^1_\beta(u)^{-1}$ e $g^2_{\alpha\beta}(x) = \varphi^2_\alpha(f(u))\varphi^2_\beta(f(u))^{-1}$, segue que

$$g^2_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(x)^{-1}g^1_{\alpha\beta}(x)h_\beta(x).$$

Para a recíproca, para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos $f_\lambda : \pi_1^{-1}(U_\lambda) \to \pi_2^{-1}(U_\lambda)$ por

$$f_\lambda(u) = (\psi^2_\lambda)^{-1}(x, h_\lambda(x)^{-1}\varphi^1_\lambda(u)).$$

Verifica-se que estas aplicações coincidem nas interseções $U_\alpha \cap U_\beta$ e que portanto definem globalmente uma aplicação $f : P_1 \to P_2$ e, além disto, pode-se mostrar que f é uma equivalência. □

Teorema 1.3. *Seja M uma variedade, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma cobertura aberta de M e G um grupo de Lie. Suponha que em cada interseção não vazia $U_\alpha \cap U_\beta$ seja dada uma aplicação diferenciável $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ e de modo que esta família de aplicações satisfaça a condição de cociclo: $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta}\cdot g_{\beta\alpha}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Então existe um fibrado principal $P(M,G)$ que possui esta família de aplicações como funções de transição e, além disso, tal fibrado é único a menos de isomorfismo.*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [KN69] pg. 52.

Finalmente, vamos apresentar os exemplos de fibrados principais que mais usaremos ao longo deste trabalho.

Exemplo 1.1. *Se M é uma variedade e G é um grupo de Lie, então G age livremente em $P := M \times G$ definindo a ação por $(u,g)\cdot h = (u, g\cdot h)$. Isto fornece o fibrado principal $P(M,G)$ que é chamado de fibrado principal* ***trivial****. Note que segue da definição de isomorfismo de fibrados principais que todo fibrado é localmente isomorfo a um fibrado trivial.*

Exemplo 1.2. *Se $\mathscr{B} = P(M,G)$ é um fibrado principal e S é uma subvariedade da variedade M, podemos considerar a restrição $\pi|_{\pi^{-1}(S)} : \pi^{-1}(S) \to S$ e verificar que $\pi^{-1}(S)(S,G)$ é também, naturalmente, um fibrado principal, chamado de* ***porção*** *de $\mathscr{B}$ sobre S e será denotado por $\mathscr{B}|_S$.*

Exemplo 1.3. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Temos que H age à direita em G pela multiplicação do grupo: $(g,h) \mapsto g \cdot h$, para $g \in G$ e $h \in H$. Sabemos que ([Lee03] pg.* 229*) o espaço de órbitas G/H tem uma única estrutura de variedade para a qual a projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é uma submersão. Além disso, é possível mostrar que tal projeção admite uma seção numa vizinhança de $\pi(e)$. Pela observação* 1.1*, temos então um fibrado principal $G(G/H, H)$.*

Exemplo 1.4. *Seja M uma variedade de dimensão n. Um* ***referencial linear*** *u em um ponto $x \in M$ é uma base ordenada $(X_1, ..., X_n)$ do espaço tangente T_xM. Seja $L(M)$ o conjunto de todos os referenciais lineares em todos os pontos de M e $\pi : L(M) \to M$ a aplicação que leva um referencial u em x no ponto x. O grupo linear $GL(n,\mathbb{R})$ age à direita em $L(M)$ como segue. Se $a = (a_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$ e $u = (X_1, ..., X_n)$ é um referencial linear em $x \in M$, defina $u \cdot a$ como sendo o referencial linear $(Y_1, ..., Y_n)$ dado por $Y_j = \sum_i a_{ij} X_i$. Esta ação é livre e, além disso, dados dois referenciais lineares u, u' em $x \in M$, a existência da matriz mudança de base de u para u' nos diz que esta ação é transitiva na fibra $\pi^{-1}(x)$. Vamos colocar uma estrutura diferenciável em $L(M)$.*

Seja $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas locais em um aberto coordenado U de M. Os campos $X_i = \partial/\partial x_j$ em cada ponto de U formam uma base do espaço tangente correspondente. Portanto, dado um referencial linear $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ em $x \in M$, temos que existe uma única matriz (matriz mudança de base) $a = (a_{ij}) \in GL(n,\mathbb{R})$ para a qual $Y_j = \sum_i a_{ij} X_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Isso fornece então uma bijeção entre $\pi^{-1}(U)$ e $U \times GL(n,\mathbb{R})$. Para tornar $L(M)$ uma variedade diferenciável, tomamos $(x_1, ..., x_n, a_{ij})$ como coordenadas em $\pi^{-1}(U)$. Assim, temos que $L(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$ é um fibrado principal, chamado de ***fibrado dos referenciais lineares sobre*** *M.*

Um conceito importante que aparece na teoria de fibrados principais é o conceito de **gerador infinitesimal**. Antes de defini-lo, lembremos o resultado importante de que o colchete de Lie $[X, Y]$ de dois campos de vetores X, Y numa variedade M é dado por:

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(Y - (\varphi_t)_* Y\right),$$

onde φ_t é o fluxo (local) do campo X. Mais especificamente, se $x \in M$, então:

$$[X, Y]_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(Y_x - ((\varphi_t)_* Y)_x\right).$$

Em particular, se A e B são campos invariantes à esquerda num grupo de Lie G, então

$a_t := \exp(tA) = \varphi_t(e)$ e para cada $g \in G$ temos $\varphi_t(g) = g \cdot a_t = R_{a_t}(g)$, assim:

$$[B,A] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \big((\varphi_t)_* B - B\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \big((R_{a_t})_* B - B\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Big(\mathrm{ad}(a_t^{-1})B - B\Big).$$

Seja $f : P \times G \to P$ uma ação à direita de um grupo de Lie G numa variedade P. Para cada $u \in P$, seja $f_u : G \to P$ a aplicação induzida: $f_u(g) = f(u,g)$. Dado $A \in \mathfrak{g}$, podemos associar o campo $A^\# \in \mathfrak{X}(P)$, chamado de **gerador infinitesimal** de A (ou **campo fundamental** de A), colocando para cada $u \in P$, $A^\#(u) = (f_u)_* A$, ou seja:

$$A^\#(u) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot \exp(tA).$$

Proposição 1.4. *A aplicação $\varepsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ definida por $\varepsilon(A) = A^\#$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Quando a ação for efetiva, então ε é injetiva e quando a ação for livre, então para todo $A \in \mathfrak{g}$ não nulo, o campo $A^\#$ não se anula.*

Demonstração: Evidentemente ε é linear. Para ver que $[A^\#, B^\#] = [A,B]^\#$, sejam $u \in P$ e $a_t = \exp(tA)$, daí

$$[A^\#, B^\#]_u = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Big(B^\#_u - (R_{a_t})_*(B^\#_{\varphi_{-t}(u)})\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Big(B^\#_u - (R_{a_t})_*(f_{u\cdot a_t^{-1}})_* B\Big),$$

e por outro lado

$$R_{a_t} \circ f_{u\cdot a^{-1}}(g) = R_{a_t}(u \cdot a_t^{-1} \cdot g) = u \cdot a_t^{-1} \cdot g \cdot a_t = f_u(\mathrm{ad}(a_t^{-1}))(g),$$

para todo $g \in G$. Portanto $(R_{a_t} \circ f_{u\cdot a_t^{-1}})_* B = (f_u)_*(\mathrm{ad}(a_t^{-1})_* B)$, e então:

$$[A^\#, B^\#]_u = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \Big((f_u)_*(B - \mathrm{ad}(a_t^{-1})_* B)\Big) = (f_u)_*([A,B]) = [A,B]^\#_u.$$

Assim ε é um homomorfismo de álgebras de Lie. Seja agora $A \in \mathfrak{g}$ tal que $A^\#_u = 0$ para algum $u \in P$. Considere a curva $\alpha(t) = u \cdot a_t$. Temos que $\alpha'(0) = A^\#_u = 0$. Dado outro $t_0 \in \mathbb{R}$ qualquer, temos que:

$$\alpha'(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} u \cdot a_t = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u \cdot a_{t+t_0} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (u \cdot a_t) \cdot a_{t_0} = (R_{a_{t_0}})_*(A^\#_u) = 0.$$

Portanto a curva α é constante, e como $\alpha(0) = u$, segue que $u \cdot a_t = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha agora que a ação seja efetiva. Para ver que ε é injetiva, seja $A \in \mathfrak{g}$ para o qual $\varepsilon(A) = 0$, isto é, $A^{\#}_u = 0$ para todo $u \in P$. Mas isto implica que $u \cdot a_t = u$ para todo $u \in P$, e como a ação é efetiva temos que $a_t = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim $A = 0$. Se a ação é livre, como foi mostrado acima, se em algum $u \in P$ tivermos $A^{\#}_u = 0$, então $a_t = e$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e portanto $A = 0$. $\square$

Voltamos agora ao caso de fibrados principais. Se $P(M,G)$ é um fibrado principal então, por definição, a ação de G em P é livre. Portanto, dado $A \in \mathfrak{g}$ não nulo, o campo $A^{\#} \in \mathfrak{X}(P)$ não se anula. Além disso, dado $u \in P$ temos também por definição que $A^{\#}_u = \mathrm{d/dt}|_{t=0}(u \cdot \exp(tA))$, e como o caminho $t \mapsto u \cdot \exp(tA)$ tem imagem na fibra sobre $x := \pi(u)$, segue que $A^{\#}_u \in T_u(\pi^{-1}(x))$. Podemos induzir assim a aplicação $\varepsilon_u : \mathfrak{g} \to T_u(\pi^{-1}(x))$, $\varepsilon_u(A) = A^{\#}_u$, que é injetiva pela observação acima, e portanto um isomorfismo pois $\dim\mathfrak{g} = \dim T_u(\pi^{-1}(x))$. A proposição abaixo será usada posteriormente.

Proposição 1.5. *Seja $A^{\#}$ o gerador infinitesimal de $A \in \mathfrak{g}$. Então para cada $g \in G$, $(R_g)_* A^{\#}$ é o gerador infinitesimal correspondente a ad$(g^{-1})_* A \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Sabemos que para todos $A \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$ vale a relação:

$$\exp(\mathrm{ad}(g)_* A) = \mathrm{ad}(g)(\exp(A)).$$

Fixando $u \in P$ e escrevendo $B = \mathrm{ad}(g^{-1}) * A$, temos que:

$$\begin{aligned}
(R_g)_* A^{\#}_{R_{g^{-1}}(u)} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R_g((u \cdot g^{-1}) \cdot \exp(tA)) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \cdot (\mathrm{ad}(g^{-1}) \cdot \exp(tA)) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \cdot \exp(\mathrm{ad}(g^{-1})_* A) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u \cdot \exp(tB) \\
&= B^{\#}(u).
\end{aligned}$$

$\square$

1.2 Fibrados Associados

Faremos agora uma importante construção que nos levará a definir os chamados fibrados vetoriais. Os fibrados associados têm um papel importante na relação entre fibrados principais e fibrados vetoriais que será explorada mais adiante.

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e suponha que tenhamos uma ação à esquerda ρ de G em uma variedade F. Podemos definir uma ação à direita de G na variedade produto $P\times F$ colocando $(u,v)\cdot g := (u\cdot g, g^{-1}\cdot v)$. Seja $E = P\times_G F := (P\times F)/G$ o espaço quociente por esta ação. Dado $(u,v)\in P\times F$, denotaremos por $[u,v]$ sua classe em E. Fica bem definida a aplicação $\pi_E : E\to M$, $\pi_E([u,v]) = \pi(u)$. Chamaremos a aplicação π_E simplesmente de projeção, e como em fibrados principais, dado $x\in M$, o conjunto $\pi_E^{-1}(x)$ é chamado a **fibra** sobre x.

Daremos agora ao conjunto E uma estrutura de variedade diferenciável. Para isso, fixe $x\in M$ e uma trivialização local $\psi : \pi^{-1}(U)\to U\times G$, em que U é um aberto de M contendo x. Temos que $\psi(u) = (\pi(u),\varphi(u))$, em que $\varphi : \pi^{-1}(U)\to G$ satisfaz $\varphi(u\cdot g) = \varphi(u)\cdot g$. Vamos definir uma bijeção $\phi : \pi_E^{-1}(U)\to U\times F$ da seguinte maneira: dado $[u,v]\in\pi_E^{-1}(U)$, defina $\phi([u,v]) = (\pi(u),\varphi(u)\cdot v)$.

Para ver que ϕ está bem definida, suponha que (u,v) e (u',v') sejam tais que $[u,v] = [u',v']$, assim existe um elemento $g\in G$ para o qual $(u,v) = (u',v')\cdot g = (u'\cdot g, g^{-1}\cdot v')$, o que implica $u = u'\cdot g$ e $v = g^{-1}\cdot v'$. Então $\varphi(u')\cdot v' = \varphi(u\cdot g)\cdot g^{-1}\cdot v = \varphi(u)gg^{-1}\cdot v = \varphi(u)\cdot v$. Como $u = u'\cdot g$, u e u' estão na mesma fibra, e portanto $\pi(u) = \pi(u')$. Assim ϕ está bem definida.

Para ver que ϕ é injetiva, sejam $[u,v],[u',v']\in E$ tais que $\phi([u,v]) = \phi([u',v'])$. Segue que $(\pi(u),\varphi(u)\cdot v) = (\pi(u'),\varphi(u')\cdot v')$. Em particular $\pi(u) = \pi(u')$, portanto existe $g\in G$ para o qual $u' = u\cdot g$, assim

$$g^{-1}\cdot v = g^{-1}\varphi(u)^{-1}\varphi(u')v' = g^{-1}\varphi(u)^{-1}\varphi(u)g\cdot v' = v'$$

e daí $[u,v] = [u',v']$. Para ver que ϕ é sobrejetiva seja $(y,v)\in U\times F$ e escolha $u\in\pi^{-1}(y)$. Temos então que $\phi[u,\varphi(u)^{-1}\cdot v] = (y,v)$.

Mostraremos agora que as aplicações ϕ induzem uma estrutura diferenciável em E. Para isso, definiremos as cartas e verificaremos que as funções de transição são diferenciáveis. Sejam U_α e U_β subconjuntos abertos de M tais que $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, para os quais estejam definidas trivializações locais ψ_α e ψ_β e com a função de transição correspondente $g_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta\to G$. Sejam $\phi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times F$ e $\phi_\beta : \pi_E^{-1}(U_\beta)\to U_\beta\times F$ as aplicações induzidas. Suponha que exista $x\in B_\alpha\cap B_\beta$, com $B_\alpha\subset\pi_E^{-1}(U_\alpha)$ e $B_\beta\subset\pi_E^{-1}(U_\beta)$, e que $\phi_\alpha(B_\alpha)$, $\phi_\beta(B_\beta)$ sejam domínios de cartas f_α e f_β da variedade $M\times F$. As cartas correspondentes em E são definidas por $c_\alpha = f_\alpha\circ\phi_\alpha$, $c_\beta = f_\beta\circ\phi_\beta$. Dado p, temos que $c_\alpha\circ c_\beta^{-1}(p) = f_\alpha\circ\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}f_\beta^{-1}(p)$. Escrevendo $f_\beta^{-1}(p) = (x,v)$ e escolhendo u para o qual $\pi(u)=x$, temos que

$$c_\alpha \circ c_\beta^{-1}(p)=f_\alpha(\phi_\alpha([u,\varphi_\beta(u)^{-1}\cdot v]))=f_\alpha(x,\varphi_\alpha(u)\circ\varphi_\beta(u)^{-1}\cdot v)=f_\alpha(x,g_{\alpha\beta}(x)\cdot v).$$

Portanto as funções de transição são diferenciáveis e E é uma variedade diferenciável. Note que com esta estrutura, $\pi_E : E \to M$ é diferenciável. Chamamos E, ou mais precisamente $E(P,M,G,\rho,F)$, de **fibrado associado** ao fibrado $P(M,G)$ com fibra F.

1.3 Conexões em Fibrados Principais

Definição 1.10. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal sobre uma variedade M com grupo G. Para cada $u\in P$ seja V_u o subespaço de T_uP consistindo dos vetores tangentes à fibra que passa por u, isto é, $V_u = Ker\,\pi_{*u}$. Uma **conexão** C em P é uma escolha de um subespaço H_u de T_uP, para cada $u\in P$, tal que:*

1. *$T_uP = V_u \oplus H_u$.*
2. *$H_{u\cdot g} = (R_g)_* H_u$ para todo $u\in P$ e $g\in G$.*
3. *H_u é uma distribuição diferenciável.*

O subespaço V_u é chamado **subespaço vertical** e H_u é chamado **subespaço horizontal** de T_uP (com respeito à conexão C). Cada vetor $X\in T_uP$ se decompõe numa soma $X = X_v + X_h$, em que $X_v \in V_u$ é a componente vertical de X e $X_h \in H_u$ é a componente horizontal de X.

Temos uma maneira natural de associar a cada conexão C em P uma 1-forma em P com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Definição 1.11. *A **forma de conexão** ω de uma conexão C é definida em cada $X \in T_uP$ como sendo o único $A\in\mathfrak{g}$ tal que $(A^\#)_u = X_v$.*

A forma ω está bem definida pois temos o isomorfismo ε_u de $\mathfrak{g}$ em V_u induzido pelo gerador infinitesimal. Note que o núcleo desta 1-forma é, em cada ponto, o subespaço horizontal correspondente. Segue abaixo uma proposição que apresenta as propriedades que caracterizam a forma de conexão.

Proposição 1.6. *A forma de conexão ω tem as seguintes propriedades:*

1. *$\omega(A^\#) = A$ para todo $A\in\mathfrak{g}$.*

2. *$(R_g)^*\omega = ad(g^{-1})_* \circ \omega$, isto é, $\omega(R_g)_*X = ad(g^{-1})_*(\omega(X))$ para todo $g \in G$ e todo campo vetorial X sobre P.*

Reciprocamente, dada uma 1-forma ω com valores em $\mathfrak{g}$ sobre P tendo as propriedades acima, existe uma única conexão C em P cuja forma de conexão é ω.

Demonstração: Seja ω a forma de conexão. A primeira propriedade segue imediatamente da definição de ω. Para mostrar a segunda, por linearidade podemos separar nos casos em que X é horizontal e em que X é vertical. Se X é horizontal, então $\omega(X) = 0$ e além disso, pela condição 2. da definição de conexão, segue que $(R_g)_*X$ também é horizontal, portanto $\omega((R_g)_*(X)) = 0$, e a igualdade segue pela linearidade de $\mathrm{ad}(g^{-1})_*$. Se X é vertical, podemos supor que é então um campo vetorial fundamental $A^\#$. Como $(R_g)_*(X)$ é o campo vetorial fundamental correspondente a $\mathrm{ad}(g^{-1})_*(A)$, então

$$(R_g^*\omega)_u(X) = \omega_{u\cdot g}((R_g)_*X) = \mathrm{ad}(g^{-1})_*(A) = \mathrm{ad}(g^{-1})_*(\omega_u(X)).$$

Reciprocamente, dada uma 1-forma ω satisfazendo 1 e 2, definimos

$$H_u = \{X \in T_uP; \omega(X) = 0\}$$

e mostra-se agora que $u \mapsto H_u$ define uma conexão em P. □

A projeção $\pi : P \to M$ induz uma aplicação linear $(\pi_*)_u : T_uP \to T_xM$, para cada $u \in P$, em que $x = \pi(u)$. Na presença de uma conexão em P, $(\pi_*)_u$ é um isomorfismo quando restrito ao subespaço horizontal H_u (o núcleo de $(\pi_*)_u$ é justamente V_u). Isso nos permite definir levantamento horizontal de campos vetoriais:

Definição 1.12. *O **levantamento horizontal** de um campo vetorial X em M é o único campo vetorial em P que é horizontal e que se projeta em X. Tal campo será denotado por X^H. A condição de se projetar em X significa $\pi_*(X_u^H) = X_{\pi(u)}$ para todo $u \in P$.*

Proposição 1.7. *Dada uma conexão em P e um campo vetorial X em M, existe um único levantamento horizontal X^H. O levantamento X^H é invariante por R_g para todo $g \in G$. Reciprocamente, todo campo vetorial Y em P que é horizontal e invariante por G, é o levantamento de um campo vetorial X em M.*

Demonstração: A existência e unicidade de X^H segue do isomorfismo de H_u com $T_{\pi(u)}M$. Para ver que X^H é diferenciável se X é diferenciável, tomamos uma vizinhança U de um dado ponto

$x \in M$ tal que $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$. Usando este difeomorfismo, nós primeiro obtemos um campo diferenciável Y em $\pi^{-1}(U)$ tal que $\pi_*(Y) = X$. Então X^H é a componente horizontal de Y e portanto é diferenciável. A invariância de X^H por G é clara pela invariância dos subespaços horizontais por G. Reciprocamente, para todo $x \in M$, tome um ponto $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$ e defina $X_x = \pi_*(Y_u)$. O vetor X_x é independente da escolha de u na fibra de x, pois se $u' = u \cdot g$, então $\pi_*(Y_{u'}) = \pi_*(R_g)_*(Y_u) = \pi_*(Y_u)$. Segue então que Y é o levantamento do campo vetorial X. $\square$

Algumas propriedades do levantamento de campos:

Proposição 1.8. *Sejam X e Y campos vetoriais em M e X^H e Y^H os levantamentos horizontais correspondentes. Então:*

1. *$X^H + Y^H$ é o levantamento horizontal de $X + Y$.*
2. *Para toda função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, $(f \circ \pi) \cdot X^H$ é o levantamento horizontal de $f \cdot X$.*
3. *A componente horizontal $[X^H, Y^H]_h$ de $[X^H, Y^H]$ é o levantamento horizontal de $[X, Y]$.*

Demonstração: As duas primeiras são evidentes e a terceira segue da igualdade:

$$\pi_*([X^H, Y^H]_h) = \pi_*([X^H, Y^H]) = [X, Y].$$

$\square$

Observe que se $(x^1, ..., x^n)$ é um sistema de coordenadas locais no aberto $U \subset M$ e X_i^H é o levantamento horizontal do campo vetorial $X_i = \partial/\partial x_i$, então $(X_1^H, ..., X_n^H)$ é uma base para a distribuição horizontal $u \mapsto H_u$ em $\pi^{-1}(U)$.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e ω uma forma de conexão. Veremos como ω se comporta com respeito a trivializações locais. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M com uma família de trivializações locais $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ e a família correspondente de funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$. Para cada α, seja $s_\alpha : U_\alpha \to P$ a seção local canônica associada a ψ_α. Seja Θ a 1-forma de Maurer-Cartan em G. Para cada α, o **potencial de calibre**, no calibre s_α, é a 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ definida em U_α por

$$\mathscr{A}_\alpha = s_\alpha^* \omega.$$

Em cada interseção $U_\alpha \cap U_\beta$ não vazia, defina também uma forma $\Theta_{\alpha\beta}$, com valores em $\mathfrak{g}$, colocando

$$\Theta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^* \Theta.$$

Proposição 1.9. *Em cada interseção $U_\alpha \cap U_\beta$ não vazia, as formas $\mathscr{A}_\alpha$, $\mathscr{A}_\beta$ e $\Theta_{\alpha\beta}$ satisfazem*

$$\mathscr{A}_\beta = ad(g_{\alpha\beta}^{-1})_* \circ \mathscr{A}_\alpha + \Theta_{\alpha\beta}.$$

Reciprocamente, dada uma família de formas $\{\mathscr{A}_\alpha\}$, cada uma definida em U_α e satisfazendo a equação acima para cada α, β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe uma única forma de conexão ω em P para a qual as formas $\mathscr{A}_\alpha$ são dadas pela maneira descrita acima.

Demonstração: Seja $f : P \times G \to P$ a ação dada no fibrado e lembramos que denotamos por $f_{u_0} : G \to P$ e $R_{g_0} : P \to P$ as aplicações induzidas pela ação. Identificaremos $T_{(u_0,g_0)}(P \times G)$ com $T_{u_0}P \times T_{g_0}G$, de modo que para cada $w = (w_P, w_G) \in T_{u_0}P \times T_{g_0}G$ a derivada da ação f se expressa por $f_*(w) = R_{g_0 *} w_P + f_{u_0 *} w_G$. Primeiramente fixe α, β para os quais $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Fixe $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $X \in T_x M$. Temos que $s_\beta(x) = s_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)$. Agora, para qualquer $y \in U_\alpha \cap U_\beta$, $s_\beta(y) = s_\alpha(y) \cdot g_{\alpha\beta}(y) = f \circ (s_\alpha, g_{\alpha\beta})(y)$, e daí

$$\begin{aligned} s_{\beta_*} X &= f_*(s_{\alpha *} X, g_{\alpha\beta_*} X) \\ &= R_{g_0 *}(s_{\alpha *} X) + f_{u_0 *}(g_{\alpha\beta_*} X) \\ &= (R_{g_0} \circ s_\alpha)_* X + (f_{u_0} \circ g_{\alpha\beta})_* X, \end{aligned}$$

em que $g_0 = g_{\alpha\beta}(x)$ e $u_0 = s_\alpha(x)$. Para completar a primeira parte da demonstração, basta mostrar que

$$\begin{aligned} \omega((R_{g_0} \circ s_\alpha)_* X) &= \mathrm{ad}(g_{\alpha\beta}^{-1})(\mathscr{A}_\alpha(X)) \\ \omega((f_{u_0} \circ g_{\alpha\beta})_* X) &= \Theta_{\alpha\beta}(X). \end{aligned}$$

A primeira igualdade é a que segue:

$$\begin{aligned} \omega\left((R_{g_{\alpha\beta}(x)} \circ s_\alpha)_* X\right) &= \omega_{s_\beta(x)}\left((R_{g_{\alpha\beta}(x)})_{* s_\alpha(x)}(s_{\alpha *} X)\right) \\ &= \omega_{s_\beta(x)}\left((R_{g_{\alpha\beta}(x)})_{* s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1}}(s_{\alpha *} X)\right) \\ &= \mathrm{ad}(g_{\alpha\beta}(x)^{-1})_* \left(\omega_{s_\beta(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x)^{-1}}(s_{\alpha *} X)\right) \\ &= \mathrm{ad}(g_{\alpha\beta}(x)^{-1})_* \left(\omega_{s_\alpha(x)}(s_{\alpha *} X)\right) \\ &= \mathrm{ad}(g_{\alpha\beta}(x)^{-1})_* \left((s_\alpha^* \omega)_x(X)\right) \\ &= \mathrm{ad}(g_{\alpha\beta}(x)^{-1})_* (\mathscr{A}_\alpha(X)). \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, seja $A \in \mathfrak{g}$ o campo invariante à esquerda em G que satisfaz

$A(g_{\alpha\beta}(x)) = (g_{\alpha\beta})_{*x}(X)$, de modo que

$$\Theta_{\alpha\beta}(X) = (g_{\alpha\beta}^*\Theta)(X) = \Theta_{g_{\alpha\beta}(x)}(g_{\alpha\beta_*}X) = \Theta_{g_{\alpha\beta}(x)}\left(A(g_{\alpha\beta}(x))\right) = A.$$

Portanto, precisamos mostrar que $\omega_{s_\beta(x)}\left((f_{u_0}\circ g_{\alpha\beta})_*X\right) = A$. Considere o gerador infinitesimal $A^\#$. Por definição, $A^\#(u) = (f_u)_*A$, de modo que $A^\#(s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x)) = (f_{s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x)})_*A$. Mas

$$\begin{aligned} f_{s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x)}(g) &= (s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x))\cdot g = s_\alpha(x)\cdot(g_{\alpha\beta}(x)\cdot g) \\ &= f_{u_0}(g_{\alpha\beta}(x)\cdot g) = f_{u_0}(L_{g_{\alpha\beta}(x)}(g)) \\ &= f_{u_0}\circ L_{g_{\alpha\beta}(x)}(g), \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} (f_{s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x)})_*A &= (f_{u_0})_*((L_{g_{\alpha\beta}(x)})_*A) \\ &= (f_{u_0})_*(A(g_{\alpha\beta}(x))) \\ &= (f_{u_0})_*((g_{\alpha\beta})_*X) \\ &= (f_{u_0}\circ g_{\alpha\beta})_*X. \end{aligned}$$

Assim, $A^\#(s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x)) = (f_{u_0}\circ g_{\alpha\beta})_*X$, concluindo que

$$\begin{aligned} \omega\left((f_{u_0}\circ g_{\alpha\beta})_*X\right) &= \omega\left(A^\#(s_\alpha(x)\cdot g_{\alpha\beta}(x))\right) \\ &= \omega\left(A^\#(s_\beta(x))\right) \\ &= A. \end{aligned}$$

Para mostrar a recíproca, vamos dividir o argumento em algumas partes. Primeiramente, seja (U,ψ) uma trivialização local e $s(x) = \psi^{-1}(x,e)$ a seção canônica associada. Sejam $(x_0,g_0)\in P\times G$ e $(X,Y)\in T_{(x_0,g_0)}P\times G$. Fixando x_0 e deixando variar g, a aplicação induzida por ψ^{-1} é $\psi_{x_0}^{-1}(g) = s(x_0)\cdot g$. Analogamente, fixando g_0 e deixando variar x, a aplicação induzida por ψ^{-1} é $\psi_{g_0}^{-1}(x) = s(x)\cdot g_0 = (R_{g_0}\circ s)(x)$. Deste modo

$$\psi_*^{-1}(X,Y) = R_{g_0*}(s_*X) + f_{s(x_0)_*}Y.$$

Escrevendo $A = (L_{g_0^{-1}})_{*g_0}Y$, então $Y = (L_{g_0})_*A$ e assim $f_{s(x_0)_*}Y = f_{s(x_0)_*}((L_{g_0})_*A) = A^\#(s(x_0)\cdot g_0)$. Em particular, quando $g_0 = e$ obtemos $\psi^{-1}_{*(x_0,e)}(X,A) = s_*X + A^\#(s(x_0))$. Concluímos assim que todo elemento em $T_{s(x_0)}(\pi^{-1}(U))$ pode ser escrito (de maneira única) como $s_{*x_0}(X) + A^\#(s(x_0))$

para algum $A \in \mathfrak{g}$.

Primeiro definimos a forma em porções do fibrado. Dado um índice α, vamos definir ω_α em $\pi^{-1}(U_\alpha)$ como segue: se $x_0 \in U_\alpha$, $u = s_\alpha(x_0)$, $X \in T_{x_0}M$ e $A \in \mathfrak{g}$, defina

$$\omega_\alpha(u)(s_{\alpha *}X + A^\#(u)) = \mathscr{A}_\alpha(X) + A.$$

Note que qualquer ponto em $\pi^{-1}(U_\alpha)$ se escreve de maneira única como $s_\alpha(x_0)\cdot g$, para algum $x_0 \in U_\alpha$ e algum $g \in G$. Escreva $u = s(x_0)$ e para cada $X \in T_{u\cdot g}(\pi^{-1}(U_\alpha))$, defina

$$\omega_\alpha(u \cdot g)(X) = \mathrm{ad}(g^{-1})_* \circ \omega_\alpha((R_{g^{-1}})_* X).$$

Mostra-se daí que ω_α é uma forma de conexão em $P|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$. Sejam agora (U_α, ψ_α) e (U_β, ψ_β) trivializações locais tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e sejam $x_0 \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $X \in T_{x_0}M$. Derivando ambos os lados da igualdade $s_\beta(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot s_\alpha(x) = (f \circ (g_{\alpha\beta}, s_\alpha))(x)$ podemos obter

$$s_{\beta_*}(X) = (R_{g_{\alpha\beta}(x_0)})_*(s_{\alpha *}(X)) + \Theta_{\alpha\beta}(X)^\#(s_\beta(x_0)).$$

Mostra-se com o auxílio desta expressão que as formas ω_α e ω_β coincidem em $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, de modo que definem uma forma ω em todo o espaço total P. $\square$

No caso particular em que o grupo estrutural G é um grupo de matrizes, podemos escrever as equações de compatibilidade de uma maneira mais simples. Seja $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $X \in T_x M$. Considere um curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X$, daí

$$\begin{aligned}
\Theta_{g_{\alpha\beta}(x)}\Big((g_{\alpha\beta})_* X\Big) &= \Theta_{g_{\alpha\beta}(x)}\Big((g_{\alpha\beta} \circ \alpha)'(0)\Big) \\
&= \Big(L_{g_{\alpha\beta}(x)^{-1}}\Big)\Big((g_{\alpha\beta} \circ \alpha)'(0)\Big) \\
&= \Big(L_{g_{\alpha\beta}(x)^{-1}} \circ g_{\alpha\beta} \circ \alpha\Big)'(0) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big((g_{\alpha\beta}(x))^{-1}(g_{\alpha\beta} \circ \alpha)(t)\Big) \\
&= g_{\alpha\beta}(x))^{-1}(g_{\alpha\beta} \circ \alpha)'(0).
\end{aligned}$$

Na linguagem matricial, podemos escrever o resultado acima como $\Theta_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}\Theta = g^{-1}_{\alpha\beta} d\, g_{\alpha\beta}$. Sabemos também que em grupos de matrizes vale $\mathrm{ad}(g)_* A = g A g^{-1}$, de modo que

$$\mathscr{A}_\beta = g^{-1}_{\alpha\beta} \mathscr{A}_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\, d\, g_{\alpha\beta}.$$

Da mesma forma que dada uma conexão é possível fazer levantamentos horizontais de campos vetoriais no espaço base, temos também uma noção de levantamento horizontal de curvas e transporte paralelo de uma fibra ao longo de uma curva. Seja $\alpha : [a,b] \to M$, uma curva de classe C^1 por partes em M. Um levantamento horizontal de α (ou simplesmente levantamento) é uma curva $\hat{\alpha} : [a,b] \to P$ tal que $\pi(\hat{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Aqui, uma curva horizontal quer dizer uma curva de classe C^1 por partes cujos vetores tangentes são sempre horizontais.

Proposição 1.10. *Seja $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva de classe C^1 em M e seja $x = \alpha(0)$. Para qualquer ponto $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$, existe um único levantamento $\hat{\alpha}$ de α tal que $\hat{\alpha}(0) = u$.*

Demonstração: Pela trivialidade local do fibrado podemos escolher uma curva $\beta : [0,1] \to P$ (não necessariamente horizontal) de classe C^1 por partes tal que $\beta(0) = u$ e $\pi(\beta(t)) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Da transitividade da ação, qualquer outra curva $\hat{\alpha}$ para a qual $\pi(\hat{\alpha}(t)) = \alpha(t)$ e $\hat{\alpha}(0) = u$ deve ser da forma $\hat{\alpha}(t) = \beta(t) \cdot g(t)$, em que $g : [0,1] \to G$ é uma curva com $g(0) = e$. Vamos supor que um tal levantamento exista e estudar que equação diferencial a curva g deve satisfazer. Denote por $f : P \times G \to P$ a ação de G em P. Temos que $\hat{\alpha}(t) = f(\beta(t), g(t))$, e portanto:

$$\hat{\alpha}'(t) = f_*(\beta'(t), g'(t)) = (R_{g(t)})_*(\beta'(t)) + (f_{\beta(t)})_*(g'(t)).$$

Para cada t, o vetor $(f_{\beta(t)})_*(g'(t))$ é vertical, e portanto pode ser visto como um gerador infinitesimal $A(t)^\#$ de algum vetor $A(t) \in \mathfrak{g}$ no ponto $\hat{\alpha}(t)$. Mostraremos agora que $A(t)$ deve ser o valor na identidade do único campo invariante à esquerda cujo valor em $g(t)$ é $g'(t)$. De fato, para todo $t_0 \in [0,1]$, temos

$$A(t_0)^\#(\hat{\alpha}(t_0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \hat{\alpha}(t_0) \cdot \exp(tA(t_0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \beta(t_0) g(t_0) \exp(t(L_{g(t_0)^{-1}})_* g'(t_0)),$$

e fazendo mudança de variáveis $u = t - t_0$, encontramos

$$A(t_0)^\#(\hat{\alpha}(t_0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \beta(t_0) g(t_0) g(t - t_0) = (f_{\beta(t_0)})_* g'(t_0),$$

de modo que $\hat{\alpha}'(t) = (R_{g(t)})_* \beta'(t) + A(t)^\#(\hat{\alpha}(t))$. Assim, calculando a forma ω em cada um dos termos do lado direito da igualdade que expressa $\hat{\alpha}'(t)$, encontramos

$$\omega((R_{g(t)})_* \beta'(t)) = (R_{g(t)})^* \omega(\beta'(t)) = \mathrm{ad}(g(t)^{-1})_* \omega(\beta'(t))$$

e

$$\omega(A(t)^\#(\hat{\alpha}(t))) = (L_{g(t)^{-1}})_* g'(t).$$

Queremos que $\hat{\alpha}(t)$ seja horizontal, e para isso devemos ter $\omega(\hat{\alpha}'(t))=0$. Como

$$\mathrm{ad}(g(t)^{-1})_*\omega(\beta'(t))=(L_{g(t)^{-1}})_*(R_{g(t)})_*\omega(\beta'(t)),$$

teremos:

$$g'(t)=-((R_{g(t)})_*\circ\omega)(\beta'(t)).$$

Prova-se que esta equação diferencial acima tem solução única com $g(0)=e$ ([Nab97] pg. 308). $\square$

Com a noção de levantamento de curvas, podemos definir o chamado **transporte paralelo** de uma fibra ao longo de uma curva. Para isso, sejam $\alpha:[0,1]\to M$ uma curva de classe C^1, $x_0=\alpha(0)$ e $x_1=\alpha(1)$. Para cada $u_0\in\pi^{-1}(x_0)$, o único levantamento de α começando em u_0 termina em um ponto $\hat{\alpha}(1)=u_1\in\pi^{-1}(x_1)$.

Assim, fica bem definida uma aplicação $\tau_\alpha:\pi^{-1}(x_0)\to\pi^{-1}(x_1)$. Se fixarmos $g\in G$ e restringirmos a aplicação R_g a $\pi^{-1}(x_0)$, teremos que $\tau_\alpha\circ R_g=R_g\circ\tau_\alpha$. Isto é verdade pois apenas precisamos observar que se $\hat{\alpha}$ é o levantamento de α começando em u_0, então por unicidade do levantamento, o levantamento de α começando em $u_0\cdot g$ é o caminho $\hat{\alpha}\cdot g$. Em geral, podemos definir a transporte paralelo para curvas de classe C^1 por partes de maneira evidente.

Para a proposição abaixo, dada uma curva $\alpha:[0,1]\to M$, definimos $\alpha^{-1}:[0,1]\to M$ por $\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$ para cada $t\in[0,1]$ e se $\beta:[0,1]\to M$ é uma outra curva, com $\alpha(1)=\beta(0)$, definimos a curva $\alpha*\beta:[0,1]\to M$ por $\alpha*\beta(t)=\alpha(2t)$ se $t\in[0,1/2]$ e $\alpha*\beta(t)=\beta(2t-1)$ se $t\in[1/2,1]$. A curva α^{-1} é chamada de curva inversa de α e $\alpha*\beta$ é chamada de justaposição de α e β.

Proposição 1.11.

1. *Se α é curva de classe C^1 por partes em M, então o transporte paralelo ao longo da curva α^{-1} é o inverso do transporte paralelo ao longo de α: $\tau_\alpha^{-1}=\tau_{\alpha^{-1}}$.*

2. *Se α é uma curva ligando x até y em M e β liga y até z em M, então o transporte paralelo ao longo da justaposição $\alpha\cdot\beta$, que liga x até z, é a composição dos respectivos transportes paralelos: $\tau_{\alpha*\beta}=\tau_\alpha\circ\tau_\beta$.*

Suponha agora que seja dada uma conexão C num fibrado principal $P(M,G)$. Dado $x\in M$, como observado acima, cada curva de classe C^k por partes α começando e terminando em x determina uma bijeção da fibra $\pi^{-1}(x)$ nela mesma. O conjunto de tais bijeções forma um grupo, o qual é chamado de **grupo de holonomia de C com ponto base** x, e é denotado por Hol_x.

1.4 Forma de curvatura

Vamos definir nesta seção a chamada **curvatura** de uma conexão e mostrar a primeira equação de estrutura. Começaremos definindo objetos mais gerais, as formas pseudotensoriais.

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ uma representação de G num espaço vetorial real V de dimensão finita.

Definição 1.13. *Uma r-forma φ em P com valores em V é dita* ***pseudotensorial do tipo*** (ρ, V) *se*

$$(R_g)^*\varphi = \rho(g^{-1}) \circ \varphi$$

para todo $g \in G$. A forma φ é chamada ***forma tensorial*** *se $\varphi(X_1, ..., X_r) = 0$ toda vez que algum X_i é vertical.*

Exemplo 1.5. *Se ρ_0 é a representação trivial, então uma r-forma tensorial do tipo (ρ_0, V) pode ser escrita como $\varphi = \pi^*\varphi_M$, em que φ_M é uma r-forma em M com valores em V.*

Exemplo 1.6. *Sejam ρ uma representaçao de G em V e E o fibrado associado. Uma forma tensorial de grau r e tipo (ρ, V) pode ser pensada como uma associação que a cada $x \in M$ fornece uma aplicação r-linear alternada $\tilde{\varphi}_x : T_xM \times ... \times T_xM \to \pi_E^{-1}(x)$. Para isso, basta definir $\tilde{\varphi}_x(X_1, ..., X_r) = [u, \varphi(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_r)]$, em que $u \in \pi^{-1}(x)$ e $\tilde{X}_i$ é qualquer vetor em T_uP para o qual $\pi_*\tilde{X}_i = X_i$. Reciprocamente, dadas r-formas alternadas $\tilde{\varphi}_x : T_xM \times ... \times T_xM \to \pi_E^{-1}(x)$, definimos $\varphi_u(X_1, ..., X_r) = [\pi(u), \tilde{\varphi}_{\pi(u)}(\pi_*X_1, ..., \pi_*X_r)]$. Note que a escolha de uma 0-forma linear alternada para cada $x \in M$ com valores em $\pi_E^{-1}(x)$, é simplesmente uma seção de E. Em particular, uma 0-forma tensorial do tipo (ρ, V), isto é, uma função $f : P \to V$ tal que $f(u \cdot g) = \rho(g^{-1})(f(u))$, pode ser pensada como uma seção de E.*

Proposição 1.12. *Seja C uma conexão em $P(M,G)$. Se φ é uma forma pseudotensorial de grau r do tipo (ρ, V), então:*

1. *A forma $(\varphi \cdot h)$, definida por $(\varphi \cdot h)(X_1, ..., X_r) = \varphi((X_1)_h, ..., (X_r)_h)$, é uma forma tensorial do tipo (ρ, V).*

2. *A forma $d\varphi$ é pseudotensorial de grau $r+1$ do tipo (ρ, V).*

3. *A $(r+1)$-forma $D\varphi := (d\varphi) \cdot h$ é forma tensorial de tipo (ρ, V).*

Demonstração:

1. Temos que
$$(R_g)^*(\varphi \cdot h)(X_1, ..., X_r) = \varphi(((R_g)_* X_1)_h, ..., ((R_g)_* X_r)_h),$$
mas se X é horizontal e Y é vertical, então
$$((R_g)_*(X+Y))_h = ((R_g)_* X + (R_g)_* Y)_h = (R_g)_* X$$
e
$$(R_g)_*(X+Y)_h = (R_g)_* X.$$
Portanto $(R_g)_*(X_h) = ((R_g)_* X)_h$, o que implica
$$(R_g)^*(\varphi \cdot h)(X_1, ..., X_r) = (R_g)^* \varphi((X_1)_h, ..., (X_r)_h) = \rho(g^{-1})\varphi((X_1)_h, ..., (X_r)_h).$$
Logo, $R_g^*(\varphi \cdot h) = \rho(g^{-1}) \circ (\varphi \cdot h)$ e $\varphi \cdot h$ é pseudotensorial de mesma grau e tipo que φ. Da forma como foi definida, $\varphi \cdot h$ é evidentemente tensorial.

2. Como $d(\rho(g^{-1}) \circ \varphi) = \rho(g^{-1}) \circ d\varphi$, temos que
$$(R_g)^*(d\varphi) = d((R_g)^* \varphi) = d(\rho(g^{-1}) \circ \varphi) = \rho(g^{-1})(d\varphi).$$

3. É evidente juntando os itens anteriores.

□

A forma $D\varphi$ é chamada **derivada exterior covariante** de φ. Note que se ω é a forma de conexão de C, então ω é uma forma pseudotensorial de grau 1 e tipo $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$.

Definição 1.14. *A 2-forma tensorial de tipo $(ad, \mathfrak{g})$ definida por $\Omega := D\omega$ é chamada de* ***forma de curvatura de*** *ω (ou simplesmente curvatura de ω).*

Antes de mostrarmos a primeira equação de estrutura, precisamos de uma lema.

Lema 1.13. *Se X é um campo horizontal e $A^\#$ é um campo fundamental, então $[X, A^\#]$ é um campo horizontal.*

Demonstração: Se $a_t = \exp(tA)$, então
$$[X, A^\#] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{t} \cdot \left((R_{a_t})_* X - X\right).$$

Como X é horizontal, temos que $(R_{a_t})_* X$ é também horizontal por definição de conexão e portanto o limite acima acontece em subespaços horizontais (que são fechados por serem de dimensão finita) e assim $[X, A^\#]$ é horizontal. □

Teorema 1.14 (Primeira Equação de Estrutura)**.** *Seja ω uma forma de conexão num fibrado principal $P(M,G)$ e Ω sua forma de curvatura, então para cada $u \in P$:*

$$d\omega(X,Y) = -[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X,Y)$$

para todos $X, Y \in T_u P$.

Demonstração: Como ambas as expressões do lado esquerdo e do lado direito da igualdade que queremos mostrar são formas bilineares, basta mostrá-la em 3 casos.

1. Se X e Y são horizontais.

   Como $X_h = X$ e $Y_h = Y$, então $\Omega(X,Y) = d(\omega \cdot h)(X,Y) = d\omega(X,Y)$, assim a igualdade vale pois $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ por definição de forma de conexão.

2. Se X e Y são verticais.

   Podemos supor que ambos são campos fundamentais $A^\#$ e $B^\#$ e assim, pela fórmula de Cartan ([Lee03] pg. 310) temos

$$\begin{aligned} d\omega(A^\#, B^\#) &= A^\#(\omega(B^\#)) - B^\#(\omega(A^\#)) - \omega([A^\#, B^\#]) \\ &= -\omega([A,B]^\#) \\ &= -[A,B] \\ &= -[\omega(A^\#), \omega(B^\#)], \end{aligned}$$

   e como $\Omega(A^\#, B^\#) = 0$, a igualdade segue.

3. Se X é horizontal e Y é vertical.

   Estenda X para um campo horizontal em P e suponha que $Y = A^\#$ é um campo fundamental e note que, desta maneira, o lado direito se anula. Então, basta mostrar que $d\omega(X, A^\#) = 0$, mas

$$d\omega(X, A^\#) = X(\omega(A^\#)) - A^\#(\omega(X)) - \omega([X, A^\#]) = -\omega([X, A^\#]) = 0,$$

   em que na última igualdade acima foi usado o lema anterior.

□

Corolário 1.15. *Para levantamentos horizontais X^H e Y^H de campos X e Y de M temos*

$$\Omega(X^H, Y^H) = -\omega([X^H, Y^H]_v)$$

Demonstração: Novamente usando que campos horizontais pertencem ao núcleo de ω, temos que:

$$\begin{aligned}
\Omega(X^H, Y^H) &= d\omega(X^H, Y^H) + [\omega(X^H), \omega(Y^H)] \\
&= X^H(\omega(Y^H)) - Y^H(\omega(X^H)) - \omega([X^H, Y^H]) \\
&= -\omega([X^H, Y^H]_h) - \omega([X^H, Y^H]_v) \\
&= -\omega([X^H, Y^H]_v).
\end{aligned}$$

□

Observação 1.3. Note que o corolário acima nos fornece uma interpretação geométrica para a curvatura de uma conexão. De fato, se Ω é nula em todo par de vetores tangentes de P, então pelo corolário acima $\omega([X^H, Y^H]_v) = 0$, mas como o núcleo de ω é o conjunto dos vetores horizontais, temos que $[X^H, Y^H]_v = 0$ e portanto $[X^H, Y^H]$ é horizontal. Isto significa que a distribuição horizontal desta conexão é uma **distribuição integrável**. Portanto a curvatura da conexão mede a falha da distribuição horizontal correspondente ser integrável. Além disso, pela proposição 1.8, o levantamento horizontal de $[X, Y]$ é $[X^H, Y^H]_h$, portanto se a curvatura é nula, o levantamento horizontal de $[X, Y]$ é $[X^H, Y^H]$. Isto significa que a aplicação de levantamento horizontal preserva colchetes, em outras palavras, é um morfismo de álgebras de Lie. Assim, podemos dizer também que a curvatura mede a falha do levantamento horizontal ser um morfismo de álgebras de Lie.

Na terminologia física, a curvatura Ω de uma conexão ω é geralmente chamada de **campo de calibre**. Note que o termo $[\omega(\cdot), \omega(\cdot)]$ na primeira equação de estrutura é uma 2-forma com valores em $\mathfrak{g}$. Dada uma seção local $s : U \to \pi^{-1}(U)$ do fibrado $P(M, G)$, chamaremos o pullback $\mathscr{F} := s^*\Omega$ de **intensidade (local) do campo**, ou simplesmente **intensidade**. Isto não é uma terminologia padrão, fizemos uma possível tradução do termo original oriundo do inglês: **local field strenght**. Seja $\mathscr{A}$ o potencial de calibre de ω (no calibre s). Note que $s^*[\omega, \omega] = [s^*\omega, s^*\omega]$, e como o pull-back comuta com a derivada exterior, temos que

$$\mathscr{F} = s^*\Omega = s^*(d\omega + [\omega,\omega]) = d(s^*\omega) + [s^*\omega, s^*\omega] = d\mathscr{A} + [\mathscr{A},\mathscr{A}].$$

Se U é o domínio de um carta $f : U \to \mathbb{R}^n$ (ou diminuindo U se necessário), as expressões em coordenadas $(s\circ f^{-1})^*\omega$ e $(s\circ f^{-1})^*\Omega$ de $\mathscr{A}$ e $\mathscr{F}$ respectivamente, se relacionam de forma semelhante:

$$\begin{aligned}
(s\circ f^{-1})^*\Omega &= (f^{-1})^*(s^*\Omega)\\
&= (f^{-1})^*(d(s^*\omega) + [s^*\omega, s^*\omega])\\
&= d((s\circ f^{-1})^*\omega + [(f^{-1}\circ s)^*\omega, (f^{-1}\circ s)^*\omega].
\end{aligned}$$

Lembramos que se $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$, $i = 1,2$, são calibres, com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então os potenciais correspondentes $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ devem satisfazer uma certa relação de compatibilidade. Veremos agora qual é essa relação com respeito as intensidades $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$.

Teorema 1.16. *Seja ω uma forma de conexão em um fibrado principal $P(M,G)$ com curvatura Ω. Sejam $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ calibres com $U_1\cap U_2 \neq \emptyset$ e seja $g_{12} : U_1 \cap U_2 \to G$ a função de transição correspondente. Então, em $U_1 \cap U_2$,*

$$\mathscr{F}_2 = ad(g_{12}^{-1}) \circ \mathscr{F}_1.$$

Demonstração: Fixe um $x_0 \in U_1 \cap U_2$ e $X, Y \in T_{x_0}M$. Temos por definição de pull-back (omitindo os pontos), que

$$\mathscr{F}_2(X,Y) = \Omega((s_2)_*X, (s_2)_*Y).$$

Mas $(s_2)_* = (R_{g_{12}})_*(s_1)_*X + \Theta_{12}(X)^\#$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_2(X,Y) &= \Omega\Big((R_{g_{12}})_*(s_1)_*X, (R_{g_{12}})_*(s_1)_*Y\Big)\\
&= R^*_{g_{12}}\Omega(s_{1*}X, s_{1*}Y))\\
&= \mathrm{ad}(g_{12}^{-1})(\Omega(s_{1*}X, s_{1*}Y))\\
&= \mathrm{ad}(g_{12}^{-1})(\mathscr{F}_1(X,Y)).
\end{aligned}$$

Onde usamos que $\Theta_{12}(X)^\#$ e $\Theta_{12}(Y)^\#$ são verticais e que Ω anula vetores verticais. $\square$

Se $\{e_1,...,e_r\}$ é uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então existem escalares c^i_{jk} para os quais:

$$[e_j, e_k] = \sum_i c^i_{jk} e_i.$$

Estes escalares são chamados **constantes de estrutura de** $\mathfrak{g}$ com respeito à base $\{e_1,...,e_r\}$. Nesta base podemos escrever $\omega = \sum_i \omega_i e_i$ e $\Omega = \sum_i \Omega_i e_i$, em que ω_i são 1-formas em P com valores em $\mathbb{R}$ e Ω_i são 2-formas em P com valores em $\mathbb{R}$. Podemos expressar a primeira equação de estrutura da seguinte forma:

$$d\omega_i = -\sum_{j<k} c^i_{jk} \omega_j \wedge \omega_k + \Omega_i.$$

Teorema 1.17 (Primeira Identidade de Bianchi)**.** $D\Omega = 0$.

Demonstração: Temos que mostrar que para vetores horizontais X, Y e Z vale $d\Omega(X, Y, Z) = 0$. Aplicando a diferencial exterior na primeira equação de estrutura teremos que:

$$0 = dd\omega_i = -\sum_{j<k} c^i_{jk} d\omega_j \wedge \omega_k + \sum_{j<k} c^i_{jk} \omega_j \wedge d\omega_k + d\Omega_i.$$

Como $\omega_i(X) = 0$ quando X é horizontal, temos

$$d\Omega_i(X, Y, Z) = 0$$

sempre que X, Y e Z são horizontais. □

1.5 Fibrados Vetoriais e conexões lineares

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal, $V = \mathbb{F}^m$, em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e seja $\rho : G \to GL(n,\mathbb{F})$ uma representação de G.

Definição 1.15. *O fibrado associado $E(P, M, G, \rho, \mathbb{F}^m)$ é chamado de* ***fibrado vetorial*** *de* ***posto*** *m e fibra $\mathbb{F}^m$.*

Lembramos que uma trivialização local de E é uma aplicação $\psi_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{F}^m$ da forma $\psi_E([u, v]) = (\pi_E(u), \varphi(u) \cdot v)$, em que φ é induzida de uma trivialização local $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ de $P(M,G)$. Fixando $x \in M$, $\psi_E|_{\pi_E^{-1}(x)} : \pi_E^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{F}^m$ é um difeomorfismo. A fibra $\pi_E^{-1}(x)$ pode ser munida naturalmente de uma estrutura de espaço vetorial, que faz com que a aplicação anterior seja um isomorfismo linear. De fato, dados $[u,v],[u',v'] \in \pi_E^{-1}(x)$, seja $g \in G$ o único elemento tal que $u' \cdot g = u$ e defina

$$[u,v]+[u',v'] := [u, v+\rho(g^{-1})\cdot v'].$$

Desta maneira, cada fibra do fibrado E é um espaço vetorial isomorfo a $\mathbb{F}^m$. Além disso, podemos também definir uma estrutura de espaço vetorial para o conjunto de seções de E (seções diferenciáveis), denotado por $\Gamma(E)$. Para isso, sejam $c \in \mathbb{F}^m$, $s, s' \in \Gamma(E)$ e defina $c \cdot s + s' \in \Gamma(E)$ colocando para cada $x \in M$:

$$(c\cdot s + s')(x) := c \cdot s(x) + s'(x).$$

Claramente, se $m \geq 1$ o espaço vetorial $\Gamma(E)$ tem dimensão infinita. Podemos considerar também $\Gamma(E)$ como um módulo sobre a álgebra das funções suaves em M com valores em $\mathbb{F}$. Para isso, dada $f : M \to F$ e $s \in \Gamma(E)$, defina $f \cdot s \in \Gamma(E)$ colocando para cada $x \in M$:

$$(f\cdot s)(x) := f(x)\cdot s(x).$$

Seja C uma conexão em P e $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva de classe C^1 por partes em M. Lembramos que dado $u \in \pi^{-1}(\alpha(0))$, existe um único levantamento horizontal $\hat{\alpha}$ começando em u. Se $v \in \mathbb{F}^m$, definimos o **levantamento horizontal de α em E** passando por v como sendo a curva $[\hat{\alpha}(t), v]$. Esta noção nos permite também definir o transporte paralelo $\tau_\alpha : \pi_E^{-1}(\alpha(0)) \to \pi_E^{-1}(\alpha(1))$ colocando $\tau_\alpha([\hat{\alpha}(0), v]) = [\hat{\alpha}(1), v]$. Podemos verificar que esta aplicação é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Uma **seção ao longo de α** é uma aplicação diferenciável $\varphi : [0,1] \to E$ tal que $\varphi(t) \in \pi_E^{-1}(\alpha(t))$ para todo $t \in [0,1]$, isto é, $\pi_E(\varphi(t)) = \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Exemplo 1.7. *Seja M uma variedade de dimensão n. Considere o fibrado de referenciais lineares $L(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$ e seja $V = \mathbb{R}^n$. O fibrado vetorial E associado a $L(M)$ com fibra V, sendo que a ação de $GL(n,\mathbb{R})$ em V é a ação usual $A \cdot v = A(v)$, é naturalmente identificado com o fibrado tangente TM. De fato, a aplicação $f : E \to TM$ definida por $f([u,v]) = u \cdot v$ é um difeomorfismo e é isomorfismo quando restrito às fibras. Aqui o referencial $u = (X_1, ..., X_n)$ em $x \in M$ é pensado como uma aplicação linear $u : \mathbb{R}^n \to T_xM$, $e_i \mapsto X_i$.*

Exemplo 1.8. *Sendo M como no exemplo anterior, agora consideramos $V = \boldsymbol{T}^{(r,s)}\mathbb{R}^n$ o espaço vetoriais dos tensores de tipo (r,s) no espaço $\mathbb{R}^n$. O grupo $GL(n,\mathbb{R})$ age à esquerda em V da seguinte maneira: Se $A \in GL(n,\mathbb{R})$ e $T \in \boldsymbol{T}^{(r,s)}\mathbb{R}^n$, definimos $A \cdot T$ colocando para $\varphi_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ e $v_j \in \mathbb{R}^n$, $(A\cdot T)(\varphi_i, v_j) = T(A^*(\varphi_i), A^{-1}(v_j))$, em que A^* é a aplicação transposta de A. O fibrado associado a*

$L(M)$ e com fibra V dado pela ação comentada é identificado com o fibrado dos tensores $\boldsymbol{T}^{(r,s)}M$, cujas seções são os campos de tensores em M.

A conexão C em P nos permite definir uma maneira de derivar seções ao longo de curvas de M. De fato, fixando $t \in [0,1]$, definimos a **derivada covariante de** φ **na direção** $\alpha'(t)$ por:

$$\nabla_{\alpha'(t)}\varphi := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\tau_\alpha(\varphi(\alpha(t+h))) - \varphi(\alpha(t))\right].$$

Em que $\tau_\alpha : \pi_E^{-1}(\alpha(t+h)) \to \pi_E^{-1}(\alpha(t))$ é o transporte paralelo. Note que $\nabla_{\alpha'(t)}\varphi \in \pi_E^{-1}(\alpha(t))$ para todo $t \in [0,1]$, e portanto a derivada covariante define uma nova seção ao longo de α. Dizemos que a seção φ é **paralela** quando $\nabla_{\alpha'(t)}\varphi = 0$ para todo $t \in [0,1]$.

Seja agora $x \in M$ e suponha que exista uma seção φ de E definida em uma vizinhança aberta U de x. Seja $u \in \pi^{-1}(U)$ e considere a aplicação associada $u : \mathbb{F}^m \to \pi_E^{-1}(\pi(u))$ definida por $u(v) = [u, v]$, a qual é um isomorfismo linear. Associada à seção φ, definimos $f : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{F}^m$ por

$$f(u) = u^{-1} \circ \varphi(\pi(u)).$$

Fixe $u \in \pi^{-1}(x)$ e seja α uma curva tal que $\alpha(0) = x$. Sejam $X = \alpha'(0)$ e $\tilde{X} \in H_u$ o vetor horizontal tal que $\pi_*(\tilde{X}) = X$.

Lema 1.18. $\nabla_X\varphi = u(\tilde{X}(f))$.

Demonstração: Seja $\hat{\alpha}$ o levantamento de α começando em u, então $\hat{\alpha}'(0) = \tilde{X}$. Temos então que:

$$\tilde{X}(f) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(f(\hat{\alpha}(h)) - f(u)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h))) - u^{-1}(\varphi(x))\right)$$

e

$$u(\tilde{X}(f)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(u \circ \hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h))) - \varphi(x)\right).$$

É suficiente mostrar então que

$$u \circ \hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h))) = \tau_\alpha(\varphi(\alpha(h))).$$

Se $\xi = \hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h)))$, então $[\hat{\alpha}(t), \xi]$ é curva horizontal em E, e como

$$[\hat{\alpha}(t), \xi]|_{t=h} = [\hat{\alpha}(h), \hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h)))] = \hat{\alpha}(h) \circ \hat{\alpha}(h)^{-1}(\varphi(\alpha(h))) = \varphi(\alpha(h))$$

segue que $\tau_\alpha(\varphi(\alpha(h))) = [\hat{\alpha}(0), \xi] = [u, \xi] = u(\xi)$, o que conclui o lema. $\square$

Em particular, note que o valor $\nabla_{\alpha'(0)}\varphi$ não depende da curva α, mas apenas do vetor $\alpha'(0)$. Isto nos permite definir para cada $X \in T_xM$ a derivada covariante de φ na direção X em x como sendo $\nabla_X\varphi := \nabla_{\alpha'(0)}\varphi$, em que α é qualquer curva passando por x e tangente a X. Essencialmente da propriedade de τ_α ser um isomorfismo e do lema acima, podemos mostrar as seguintes propriedades da derivada covariante enunciadas na proposição abaixo:

Proposição 1.19. *Sejam $X, Y \in T_xM$ e sejam φ e ψ seções de E definidas em uma vizinhança aberta de x. Então:*

1. $\nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi$;
2. $\nabla_X(\varphi+\psi) = \nabla_X\varphi + \nabla_X\psi$;
3. $\nabla_{\lambda X}\varphi = \lambda \cdot \nabla_X\varphi$, *em que* $\lambda \in \mathbb{F}$;
4. $\nabla_X(f\varphi) = f(x)\cdot\nabla_X\varphi + X(f)\cdot\varphi(x)$, *em que f é uma função definida numa vizinhança de x com valores em $\mathbb{F}$.*

Se X é um campo numa vizinhança aberta U de x, a derivada covariante da seção φ na direção de X, denotada por $\nabla_X\varphi$, é a seção de E definida por $\big(\nabla_X\varphi\big)(x) := \nabla_{X(x)}\varphi$ para cada $x \in U$.

Uma **métrica** em um espaço vetorial V é uma aplicação $g : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então g é linear na primeira variável e simétrica nas duas variáveis, isto é, $g(X,Y) = g(Y,X)$ e se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então g é linear na primeira variável e simétrica conjugada nas duas variáveis, isto é, $g(X,Y) = \overline{g(Y,X)}$.

Definição 1.16. *Uma **métrica** em um fibrado vetorial E é uma escolha de uma métrica g_x em cada fibra $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, e que varie de maneira C^∞ no seguinte sentido: dadas seções φ e ψ de E, a função $x \mapsto g_x(\varphi(x),\psi(x))$ é C^∞. Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o fibrado é dito **semi-riemanniano** e se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o fibrado é dito **semi-hermitiano**. Se, além disso, a métrica é positiva definida em cada fibra, o fibrado é dito Riemanniano de $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e Hermitiano se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

Definição 1.17. *Dada uma métrica g em E, uma conexão num fibrado principal $P(M,G)$ é dita **conexão métrica**, ou que a conexão é **compatível com a métrica**, quando o transporte paralelo de E é isometria.*

Dada uma métrica g em E, podemos construir uma redução $Q(M,H)$ de $P(M,G)$ como segue. Na fibra típica $\mathbb{F}^m$ de E consideramos o produto interno canônico:

$$<\xi,\eta>=\sum_i \xi_i\eta_i \quad \text{para} \quad \xi=(\xi_1,...,\xi_m), \eta=(\eta_1,...,\eta_m)\in\mathbb{R}^m$$

$$<\xi,\eta>=\sum_i \overline{\xi}_i\eta_i \quad \text{para} \quad \xi=(\xi_1,...,\xi_m),\eta=(\eta_1,...,\eta_m)\in\mathbb{C}^m.$$

Seja Q o conjunto dos $u\in P$ tais que $g(u(\xi),u(\eta))=<\xi,\eta>$ para todos $\xi,\eta\in\mathbb{F}^m$, isto é, tais que a aplicação $u:\mathbb{F}^m\to\pi_E^{-1}(\pi_E(u))$ seja uma isometria. Então Q é um subvariedade fechada de P. Fazendo as devidas restrições nas trivializações locais de P, mostra-se que Q é um subfibrado reduzido de P com grupo de estrutura H dado por

$$H=\{g\in G;\rho(g)\in O(m)\} \quad \text{se } \mathbb{F}=\mathbb{R}$$

$$H=\{g\in G;\rho(g)\in U(m)\} \quad \text{se } \mathbb{F}=\mathbb{C},$$

em que ρ é a representação de G em $GL(m,\mathbb{F})$.

Restringiremos nossa atenção agora ao fibrado de referenciais $L(M)(M,GL(n,\mathbb{R}))$. Uma conexão neste fibrado é chamada de **conexão linear**. Até o fim desta seção, denotaremos por P o fibrado $L(M)$.

Definição 1.18. *A* 1*-forma canônica* ϑ *de* P *é a forma com valores em* $\mathbb{R}^n$ *definida colocando para cada* $X\in T_uP$*,* $\vartheta(X)=u^{-1}(\pi_*X)$*, em que o ponto* $u=(X_1,...,X_n)\in P$ *é pensado como uma aplicação* $u:\mathbb{R}^n\to T_{\pi(u)}M$*,* $e_i\mapsto X_i$*.*

Proposição 1.20. *A forma* ϑ *é tensorial de tipo* $(\rho,\mathbb{R}^n)$*, em que* ρ *é a ação canônica de* $GL(n,\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração: Dados $g\in GL(n,\mathbb{R})$ e $X\in T_uP$, temos que

$$R_g^*\vartheta(X)=\vartheta((R_g)_*X)=(u\cdot g)^{-1}(\pi_*X)=g^{-1}u^{-1}(\pi_*X)=g^{-1}\vartheta(X),$$

o que mostra que ϑ é pseudotensorial. Se X é vertical, então $\pi_*X=0$, e assim $\vartheta(X)=u^{-1}(0)=0$. $\square$

Dado $v\in\mathbb{R}^n$, podemos associar o **campo horizontal fundamental** $B(v)$ em P como segue. Dado $u\in P$, $B(v)_u$ é o único vetor horizontal em u para o qual $\pi_*B(v)_u=u(v)$, em que $u:\mathbb{R}^n\to T_{\pi(u)}M$. Note no entanto que esta definição, ao contrário da definição de gerador infinitesimal, necessita de uma conexão em P.

Proposição 1.21. *Os campos horizontais fundamentais têm as seguintes propriedades (análogas às propriedades dos geradores infinitesimais):*

1. *Se* ϑ *é a forma canônica de* P*, então* $\vartheta(B(v))=v$ *para todo* $v\in\mathbb{R}^n$*.*

2. *$(R_g)_*(B(v)) = B(g^{-1}v)$, para $g \in GL(n, \mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$.*

3. *Se $v \neq 0$, então $B(v)$ não se anula.*

Lema 1.22. *Vale que $[A^\#, B(v)] = B(A \cdot v)$ para todo $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Se $a_t = \exp(tA)$, então

$$[A^\#, B(v)] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(B(v) - (R_{a_t})_*(B(v))\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(B(v) - B(a_t^{-1}v)\right).$$

Por outro lado, como a associação $v \mapsto B(v)_u$ é isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ no subespaço horizontal H_u, então teremos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \left(B(v) - B(a_t^{-1}v)\right) = B\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (v - a_t^{-1}v)\right) = B(A \cdot v).$$

□

Definimos a **forma de torção** Υ de uma conexão linear C por $\Upsilon := D\vartheta$. Assim, Υ é uma 2-forma tensorial em P de tipo $(\mathrm{Id}, \mathbb{R}^n)$. Mostraremos agora a segunda equação de estrutura, a qual envolve Υ.

Teorema 1.23 (Segunda Equação de Estrutura)**.**

$$d\vartheta(X, Y) = \omega(Y) \cdot \vartheta(X) - \omega(X) \cdot \vartheta(Y) + \Upsilon(X, Y)$$

Demonstração: A demonstração é similar à demonstração da primeira equação de estrutura. Procedemos separando em 3 casos.

1. Se X e Y são verticais podemos supor que $X = A^\#$ e $Y = B^\#$ são campos verticais fundamentais. Então ambos os lados se anulam pois ambas ϑ e Υ se anulam em campos verticais.

2. Se X e Y são horizontais podemos supor que $X = B(u)$ e $Y = B(v)$ são campos horizontais fundamentais. Como X e Y são horizontais, $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ por definição de forma de conexão e $\Upsilon(X, Y) = d\vartheta(X, Y)$ por definição de derivada exterior covariante, e a igualdade segue.

3. Se X é vertical e Y é horizontal podemos supor que $X = A^\#$ e $Y = B(u)$. Temos que $\Upsilon(X, Y) = 0$ pela definição de derivada exterior covariante, $\omega(Y) = 0$ por definição de

forma de conexão e $\omega(X)\cdot\vartheta(Y)=\omega(A^{\#})\cdot\vartheta(B(v))=A\cdot v$. Pela fórmula de Cartan:

$$d\vartheta(X,Y)=A^{\#}(\vartheta(B(v)))-B(v)(\vartheta(A^{\#}))-\vartheta[A^{\#},B(v)]=-\vartheta(B(A\cdot v))=-A\cdot v,$$

o que conclui a demonstração.

□

Seja $\{e_1,...,e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como as formas ϑ e Υ tomam valores em $\mathbb{R}^n$ podemos escrevê-las como

$$\vartheta=\sum_i \vartheta_i e_i, \quad \Upsilon=\sum_i \Upsilon_i e_i,$$

em que ϑ_i e Υ_i são formas em P com valores em $\mathbb{R}$. Para cada $i,j=1,2,...,n$, denote por E_{ij} a matriz $n\times n$ cuja entrada na posição (i,j) é 1 e é 0 nas demais. Como as formas ω e Ω tomam valores em $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, podemos escrever

$$\omega=\sum_{i,j}\omega_{ij}E_{ij}, \quad \Omega=\sum_{i,j}\Omega_{ij}E_{ij}.$$

Assim, comparando coordenada com coordenada, podemos escrever as equações de estrutura como

1. $d\vartheta_i=-\sum_k \omega_{ik}\wedge\vartheta_k+\Upsilon_i, \qquad i=1,2,...,n.$
2. $d\omega_{ij}=-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij}, \qquad i,j=1,2,...,n.$

Sabemos que o conjunto das formas diferenciais com valores reais forma uma $\mathbb{R}$-álgebra com soma e o produto por escalares usuais e com o produto exterior. Podemos considerar então a álgebra das matrizes cujas entradas são elementos na álgebra das formas diferenciais com valores em $\mathbb{R}$ e definimos a diferencial exterior de uma matriz de formas como sendo a matriz das diferenciais. Podemos daí escrever as equações acima na forma matricial:

1. $d\vartheta=-\omega\wedge\vartheta+\Upsilon$
2. $d\omega=-\omega\wedge\omega+\Omega.$

Teorema 1.24 (Segunda Identidade de Bianchi)**.** *Para uma conexão linear, temos:*

$$D\Upsilon=\Omega\wedge\vartheta,$$

isto é,

$$3D\Upsilon(X,Y,Z) = \Omega(X,Y)\vartheta(Z) + \Omega(Y,Z)\vartheta(X) + \Omega(Z,X)\vartheta(Y)\ ,\ \textit{para}\ X,Y,Z \in T_u P$$

Demonstração: Se aplicarmos d na primeira equação de estrutura vamos obter

$$0 = -d\omega \wedge \vartheta + \omega \wedge d\vartheta + d\Upsilon.$$

Por definição de forma de conexão, temos que $\omega(X_h) = 0$, além disso, $\vartheta(X_h) = \vartheta(X)$ pois $\pi_*(X) = \pi_*(X_h + X_v) = \pi_*(X_h)$ e finalmente temos que $d\omega(X_h, Y_h) = \Omega(X,Y)$ por definição da forma de curvatura. Portanto:

$$D\Upsilon(X,Y,Z) = d\vartheta(X_h, Y_h, Z_h) = (d\omega \wedge \vartheta)(X_h, Y_h, Z_h) = (\Omega \wedge \vartheta)(X,Y,Z).$$

$\square$

Capítulo 2

Simetrias em Geometria

Neste capítulo mostraremos através de alguns exemplos como conexões em fibrados principais podem fornecer diferentes tipos de geometrias. Essencialmente, mostraremos alguns exemplos de espaços simétricos, os quais serão realizados como espaço base de certos fibrados principais. Escolhemos em especial os exemplos de geometrias clássicas, isto é, as únicas variedades Riemannianas simplesmente conexas e completas de curvatura constante: o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (Geometria Euclidiana), a esfera S^n (Geometria Esférica) e o espaço hiperbólico H^n (Geometria Hiperbólica)[Car92].

2.1 Espaços Homogêneos Simétricos

Antes de definir espaços homogêneos simétricos, vamos mostrar como é possível induzir conexões por morfismos de fibrados. A proposição abaixo será usada posteriormente.

Proposição 2.1. *Seja* $(f, f') : P_1(M_1, G_1) \to P_2(M_2, G_2)$ *um morfismo de fibrados principais tal que a aplicação induzida* $F : M_1 \to M_2$ *seja um difeomorfismo. Seja* C_1 *uma conexão em* P_1*,* ω_1 *e* Ω_1 *as suas formas de conexão e curvatura, respectivamente. Então:*

1. *Existe uma única conexão* C_2 *em* P_2 *tal que os subespaços horizontais de* C_1 *são levados em subespaços horizontais de* C_2 *pela aplicação* f*.*

2. *Se* ω_2 *e* Ω_2 *são as formas correspondentes de* C_2*, então* $f^*\omega_2 = f \cdot \omega_1$ *e* $f^*\Omega_2 = f \cdot \Omega_1$*, em que* $(f \cdot \omega_1)(X) = (f'_*)_e(\omega_1(X))$*, e* $(f \cdot \Omega_1)$ *é definida de maneira análoga.*

Demonstração:

1. Definiremos a conexão C_2 expressando quais serão os subespaços horizontais desta.

   Dado $u_2 \in P_2$, temos que $\pi_2(u_2) \in M_2$. Como F é sobrejetiva, existe $x_1 \in M_1$ tal que $F(x_1) = \pi_2(u_2)$.

   Escolha $u_1 \in P_1$ para o qual $\pi_1(u_1) = x_1$, então $\pi_2(f(u_1)) = F(\pi_1(u_1)) = F(x_1) = \pi_2(u_2)$ e assim existe $g_2 \in G_2$ para o qual $u_2 = f(u_1) \cdot g_2$. Defina $H_{u_2} := (R_{g_2})_*(f_*(H_{u_1}))$, em que H_{u_1} é o subespaço horizontal em u_1 da conexão C_1.

   Mostraremos agora que H_{u_2} não depende da escolha de u_1 e nem de g_2. Suponha que $u_2 = f(u_1') \cdot g_2'$. Então $f(u_1)$ e $f(u_1')$ estão na mesma fibra, isto é, $\pi_2(f(u_1)) = \pi_2(f(u_1'))$, e portanto $F(\pi_1(u_1)) = F(\pi_1(u_1'))$, o que implica $\pi_1(u_1) = \pi_1(u_1')$ pois F é injetiva. Assim, existe $g_1 \in G_1$ tal que $u_1' = u_1 \cdot g_1$. Portanto

   $$f_*(H_{u_1'}) = f_*(H_{u_1 \cdot g_1}) = f_*((R_{g_1})_*(H_{u_1})) = (R_{\overline{g}_2})_*(f_*(H_{u_1})),$$

   em que a última igualdade acima segue de (f, f') ser morfismo, onde $\overline{g}_2 = f'(g_1)$. Como $f(u_1') = f(u_1 \cdot g_1) = f(u_1) \cdot f'(g_1) = f(u_1) \cdot \overline{g}_2$, temos que $f(u_1) \cdot g_2 = f(u_1') \cdot g_2' = f(u_1) \cdot \overline{g}_2 g_2'$, o que implica $g_2 = \overline{g}_2 g_2'$, e assim

   $$(R_{g_2'})_*(f_*(H_{u_1'})) = (R_{g_2 g_2'^{-1}})_* f_*(H_{u_1'}) = (R_{g_2})_*(R_{\overline{g}_2^{-1}})_*(R_{\overline{g}_2})_* f_* H_{u_1} = (R_{g_2})_* f_*(H_{u_1}),$$

   portanto H_{u_2} está bem definido.

   Para ver que esta distribuição é invariante, sejam u_2, u_1 e g_2 como acima e seja $g_2' \in G_2$ qualquer. Então $u_2 \cdot g_2' = f(u_1) \cdot (g_2 g_2')$, o que implica, por definição da distribuição, $H_{u_2 \cdot g_2'} = (R_{g_2'})_*((R_{g_2})_* f_*(H_{u_1}) = (R_{g_2'})_* H_{u_2}$.

   Para ver que $T_{u_2}P_2 = H_{u_2} \oplus V_{u_2}$, basta mostrar que $((\pi_2)_*)_{u_2}$ é isomorfismo quando restrito à H_{u_2}. Seja $x_2 = \pi_2(u_2)$. Como existe $u_1 \in P_1$ tal que $f(u_1) \in \pi_2^{-1}(x_2)$, basta mostrar que $(\pi_2)_*$ restrito à $H_{f(u_1)}$ é isomorfismo pois, se para u_1 é isomorfismo, então para $u_1' = u_1 \cdot g_1$ também é isomorfismo pela comutatividade do diagrama abaixo:

   $$\begin{tikzcd} H_{u_1} \arrow[r, "(\pi_1)_*"] \arrow[d, "(R_{g_1})_*"'] & T_{x_1}M_1 \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ H_{u_1 \cdot g_1} \arrow[r, "(\pi_1)_*"] & T_{x_1}M_1 \end{tikzcd}$$

De $\pi_2 \circ f = F \circ \pi_1$, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{u_1} & \xrightarrow{f_*} & H_{f(u_1)} \\ \downarrow{\scriptstyle (\pi_1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_2)_*} \\ T_{x_1}M_1 & \xrightarrow{F_*} & T_{F(x_1)}M_2 \end{array}$$

Da definição de C_2, no diagrama acima temos que f_* é sobrejetiva e que $(\pi_1)_*$ e F_* são isomorfismos. Segue que f_* é injetiva, pois se $f_*(X) = f_*(Y)$, então $(\pi_2)_* f_*(X) = (\pi_2)_* f_*(Y)$, o que implica $F_*(\pi_1)_*(X) = F_*(\pi_1)_*(Y)$, e portanto $X = Y$ pois $F_* \circ (\pi_1)_*$ é isomorfismo. Assim, a restrição de $(\pi_2)_*$ a $H_{f(u_1)}$ é um isomorfismo, e o item está demonstrado.

A unicidade de C_2 é clara da sua própria definição.

2. Vamos mostrar que para todo $X \in T_{u_1}P_1$ vale $\omega_2(f_*X) = f'_*(\omega_1(X))$. Da linearidade dos objetos envolvidos, basta separar em dois casos.

   Primeiro, se $X \in H_{u_1}$, então os dois lados se anulam pois f preserva subespaços horizontais, os quais são, em cada ponto, núcleo da forma de conexão.

   Segundo, se $X \in V_{u_1}$, então $X = (A_1^*)_{u_1}$ é um campo fundamental. Seja $A_2 = f'_*(A_1)$. Denotando por L_u a aplicação induzida por ambas ações nos fibrados $P_i(M_i, G_i)$: $L_u(g) = u \cdot g$, para $u \in P_i$ e $g \in G_i$ e da definição de morfismo de fibrados, temos que $f \circ L_{u_1} = L_{f(u_1)} \circ f'$, então

$$f_*(X) = f_*((A_1^*)_{u_1}) = f_*(L_{u_1})_*(A_1) = (L_{f(u_1)})_*(f'_*(A_1)) = (L_{f(u_1)})_* A_2 = (A_2^*)_{f(u_1)},$$

   e assim

$$\omega_2(f_*X) = \omega_2(A_2^*) = A_2 = f'_*(A_1) = f'_*(\omega_1(A_1^*)) = f'_*(\omega_1(X)).$$

   Finalmente, para a equação correspondente para as formas de curvatura, observe que $f^* d\omega_2 = f \cdot d\omega_1$. Aplicando f^* na primeira equação de estrutura, teremos

$$f^* d\omega_2 = -f^*([\omega_2, \omega_2]) + f^*\Omega_2 = -f \cdot ([\omega_1, \omega_1]) + f \cdot \Omega_1 = f \cdot d\omega_1,$$

   daí

$$-[f^*\omega_2, f^*\omega_2] + f^*\Omega_2 = -[f \cdot \omega_1, f \cdot \omega_1] + f \cdot \Omega_1,$$

   o que implica $f^*\Omega_2 = f \cdot \Omega_1$.

□

Na situação da proposição acima, dizemos que (f,f') leva a conexão C_1 na conexão C_2. No caso particular em que (f,f') é um automorfismo de um fibrado principal $P(M,G)$ com uma conexão C, dizemos que C é **invariante** por (f,f') se este morfismo leva C em C. Existe uma proposição análoga à anterior que será enunciada aqui apenas para constar, pois não será usada posteriormente.

Proposição 2.2. *Seja $(f,f'):P_1(M_1,G_1)\to P_2(M_2,G_2)$ um morfismo de fibrados principais tal que $f':G_1\to G_2$ é um isomorfismo de grupos. Seja C_2 uma conexão em P_2, ω_2 sua forma de conexão correspondente e Ω_2 sua forma de curvatura. Então:*

1. *Existe uma única conexão C_1 em P_1 tal que os subespaços horizontais de P_1 são levados em subespaços horizontais de P_2.*
2. *Se ω_1 e Ω_1 são a forma de conexão e a forma de curvatura respectivamente de C_1, então $f^*\omega_2=f\cdot\omega_1$ e $f^*\Omega_2=f\cdot\Omega_1$.*

Demonstração: Defina $\omega_1=f'^{-1}_*(f^*\omega_2)$. Sejam $X_1\in T_{u_1}P_1$ e $g_1\in G_1$ e colocando $X_2=f_*(X_1)$ e $g_2=f'(g_1)$. Então nós temos:

$$\begin{aligned}
\omega_1((R_{g_1})_*X_1) &= f'^{-1}_*(\omega_2(f_*((R_{g_1})_*)X_1))=f'^{-1}_*(\omega_2((R_{g_2})_*X_2))\\
&= f^{-1}_*(\mathrm{ad}(g_2^{-1})_*\omega_2(X_2))=\mathrm{ad}(g_1^{-1})_*(f'^{-1}_*(\omega_2(X_2)))\\
&= \mathrm{ad}(g_1^{-1})_*(\omega_1(X_1)).
\end{aligned}$$

Sejam agora $A_1\in\mathfrak{g}_1$ e $A_2=f'_*(A_1)$. Temos que $\omega_1(A_1^*)=f'^{-1}_*(\omega_2(A_2^*))=f'^{-1}_*(A_2)=A_1$. Portanto ω_1 é uma forma de conexão em P_1. A outra afirmação tem uma prova análoga à da proposição anterior. □

Como dissemos antes, realizaremos alguns espaços simétricos como espaço base de alguns fibrados principais, mas estes últimos por sua vez, não são quaisquer fibrados, são de fato fibrados principais da forma $G(G/H,H)$, em que H é um subgrupo fechado de G. Nestes fibrados em especial, temos uma maneira de definir conexões que é essencialmente a procura de um bom complemento para a álgebra de Lie de H em $\mathfrak{g}$, o qual deve ser invariante pela representação adjunta de H, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.3. *Seja G um grupo de Lie conexo e H um subgrupo fechado de G. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ as álgebras de Lie de G e H respectivamente.*

1. *Se existe um subespaço $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ e $ad(H)_*\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, então a componente em $\mathfrak{h}$, denotada por ω, da forma e Maurer-Cartan de G com respeito a decomposição acima define uma conexão no fibrado $G(G/H, H)$, a qual é invariante pelas translações à esquerda em G.*

2. *Reciprocamente, qualquer conexão em $G(G/H, H)$ invariante pelas translações à esquerda em G (se existir) determina uma tal decomposição e é obtida da maneira descrita no item 1.*

3. *A forma de curvatura Ω de tal conexão invariante é dada por $\Omega(X, Y) = -[X, Y]_{\mathfrak{h}}$, para todos X, Y campos invariantes à esquerda pertencentes a $\mathfrak{m}$.*

Demonstração:

1. Seja $A \in \mathfrak{h}$ e $A^\#$ o gerador infinitesimal de A. Note que $A^\#$ é invariante à esquerda:

$$(L_g)_*A = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \cdot \exp(tA) = A^\#_g.$$

Mas isto implica que $\Theta(A^\#) = A^\#_e = A = \omega(A^\#)$. Para ver que $(R_h)_*\omega = \mathrm{ad}(h^{-1})_* \circ \omega$, seja $X \in T_gG$ e φ a projeção de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{m}$, então

$$\Theta((R_h)_*X) = \omega((R_h)_*X) + \varphi((R_h)_*X),$$

e por outro lado

$$\mathrm{ad}(h^{-1})_*\Theta(X) = \mathrm{ad}(h^{-1})_*\omega(X) + \mathrm{ad}(h^{-1})_*\varphi(X).$$

Assim, comparando componente com componente:

$$\underbrace{\omega((R_h)_*X)}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{(\varphi((R_h)_*X) - \mathrm{ad}(h^{-1})_*\varphi(X))}_{\in\mathfrak{m}} = \underbrace{\mathrm{ad}(h^{-1})_*\omega(X)}_{\in\mathfrak{h}} + \underbrace{0}_{\in\mathfrak{m}},$$

temos que $\omega((R_h)_*X) = \mathrm{ad}(h^{-1})_*\omega(X)$, o que mostra que ω é uma forma de conexão. Em $g = e$, ω é a projeção sobre $\mathfrak{h}$, portanto $\mathfrak{m}$ é o subespaço horizontal por esta conexão em $g = e$ (núcleo de ω).

A forma ω é invariante à esquerda, isto é, $L_g^*\omega = \omega$ para todo $g \in G$, pois se $X \in T_{g'}G$, então

$$\begin{aligned} L_g^*\omega(X) &= \omega_{gg'}((L_g)_*X) \\ &= \omega_{gg'}((L_g)_*\circ(L_{g'})_*(X_e)) \\ &= \omega_{gg'}((L_{gg'})_*(X_e)) \\ &= (X_e)_{\mathfrak{h}} \\ &= \omega_{g'}((L_{g'})_*(X_e)) \\ &= \omega_{g'}(X). \end{aligned}$$

2. Seja ω uma forma de conexão em $G(G/H,H)$ invariante pelas translações à esquerda de G. Seja $\mathfrak{m}$ o subespaço horizontal em $g=e$. Por definição de espaço horizontal temos que $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$. Por definição de forma de conexão, $\mathfrak{m}$ é o núcleo de ω em $g=e$, e pela conexão ser invariante à esquerda, temos que esta forma de conexão é justamente, para cada $X\in T_{g'}G$, a componente em $\mathfrak{h}$ do valor na identidade do único campo invariante à esquerda em G cujo valor em g' é X. Note também que dado $h\in H$ e $m\in\mathfrak{m}$ temos que

$$\omega(\mathrm{ad}(h)_*m)=\omega((R_{h^{-1}})_*m)=R_{h^{-1}}^*\omega(m)=\mathrm{ad}(h)_*\omega(m)=0,$$

o que implica $\mathrm{ad}(h)_*m\in\mathrm{Ker}\omega_e=\mathfrak{m}$, e assim $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$. Como $\mathrm{ad}(h)_*$ é isomorfismo para todo h, temos que $\dim\mathrm{ad}(h)_*\mathfrak{m}=\dim\mathfrak{m}$, e portanto $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$.

3. Combinando a primeira equação de estrutura com a fórmula de Cartan obtemos:

$$\Omega(X,Y)=d\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)]=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])+[\omega(X),\omega(Y)].$$

Mas se $X,Y\in\mathfrak{m}$, então $\omega(X)=\omega(Y)=0$, o que implica $\Omega(X,Y)=-[X,Y]_{\mathfrak{h}}$.

□

Definição 2.1. *Seja G um grupo de Lie conexo com um automorfismo involutivo σ não trivial, isto é, $\sigma^2=\mathrm{Id}_G$ e $\sigma\neq\mathrm{Id}_G$. Seja H um subgrupo fechado de G tal que $Fix(\sigma)_e\leq H\leq Fix(\sigma)$, em que $Fix(\sigma)_e$ é a componente da identidade de $Fix(\sigma)$. Dizemos que o espaço homogêneo G/H é* ***simétrico*** *(definido por σ).*

Como $\sigma^2=\mathrm{Id}_G$ e $\sigma(e)=e$, segue que o automorfismo de álgebras de Lie $(\sigma_*)_e:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ também é involutivo. Isto implica que o polinômio minimal de $T=(\sigma_*)_e$ assume uma das seguintes formas: $p_1(x) = (x+1)$, $p_2(x) = (x-1)$, ou $p_3(x) = (x+1)(x-1)$. Em qualquer uma das possibilidades, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h},$$

em que $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; T(X) = X\}$ e $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}; T(X) = -X\}$ (podendo acontecer de algum destes espaços ser nulo).

Note que $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Para ver isso, sejam $h \in H$ e $X \in \mathfrak{m}$. Como $\mathrm{ad}(h)_*X = (R_{h^{-1}})_*X$ e $\sigma \circ R_h = R_{\sigma(h)} \circ \sigma = R_h \circ \sigma$, sendo que esta última igualdade é verdade pois $h \in H \leq \mathrm{Fix}(\sigma)$, temos que:

$$\sigma_*((R_{h^{-1}})_*X) = (\sigma \circ R_{h^{-1}})_*X = (R_{h^{-1}})_*\sigma_*X = -(R_{h^{-1}})_*X.$$

Isto é, $\sigma_*(\mathrm{ad}(h)_*X) = -\mathrm{ad}(h)_*X$, e portanto $\mathrm{ad}(H)_*\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, e de $\mathrm{ad}(h)_*$ ser isomorfismo, temos que $\mathrm{ad}(H)_*\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Logo, $\mathfrak{m}$ induz uma conexão invariante no fibrado $G(G/H, H)$, a qual é denominada a **conexão canônica** de $G(G/H, H)$. Denotaremos esta conexão por C_S. O automorfismo σ pode ser pensado como um automorfismo do fibrado $G(G/H, H)$.

O automorfismo σ induz naturalmente um difeomorfismo involutivo $\sigma_0 : G/H \to G/H$, bastando definir $\sigma_0([g]) = [\sigma(g)]$. Temos que $\pi \circ \sigma = \sigma_0 \circ \pi$, em que $\pi : G \to G/H$ é a projeção canônica, e $\sigma_0([e]) = [\sigma(e)] = [e]$, isto é, $[e]$ é ponto fixo de σ_0.

Observação 2.1. A origem $[e]$ é um ponto fixo isolado de σ_0. De fato, suponha por absurdo que isto seja falso e seja $([g_n])$ uma sequência em G/H de pontos fixos de σ_0 que converge para $[e]$ e tal que $[g_n] \neq [e]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela existência de seções locais de $G(G/H, H)$ podemos supor que g_n converge para e, com $g_n \neq e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\sigma_0[g_n] = [\sigma(g_n)] = [g_n]$, deve existir $h_n \in H$ para o qual $\sigma(g_n) = g_n \cdot h_n$. Mas isto implica que

$$g_n = \sigma^2(g_n) = \sigma(g_n) \cdot \sigma(h_n) = g_n \cdot h_n^2,$$

sendo a última igualdade acima válida pois H é subgrupo de $\mathrm{Fix}(\sigma)$, e segue então que $h_n^2 = e$. Como h_n converge para e, e a aplicação $g \mapsto g^2$ é um difeomorfismo local em torno de $g = e$, segue que para n suficientemente grande, $h_n = e$, e portanto $\sigma(g_n) = g_n$. Assim, tomando n maior se necessário, g_n está na componente da identidade de $\mathrm{Fix}(\sigma)$, e portanto em H, o que implica $[g_n] = [e]$, o que é absurdo pela escolha da sequência $([g_n])$.

A involução σ_0 é dita uma **simetria em torno de** $[e]$.

Teorema 2.4. *Seja G/H um espaço homogêneo simétrico e C_S a conexão canônica de $G(G/H, H)$.*

1. *C_S é invariante por σ (pensada como automorfismo do fibrado).*

2. *Para cada $X \in \mathfrak{m}$, sejam $a_t = \exp(tX)$ e $x_t = \pi(a_t)$. Então o transporte paralelo da fibra H ao longo da curva x_t coincide com a translação à esquerda $h \mapsto a_t \cdot h$, $h \in H$.*

Demonstração:

1. Seja $X \in T_g G$ pensado como campo invariante à esquerda e $X_e = X_1 + X_2$ sua decomposição com respeito à $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Como $\sigma \circ L_g = L_{\sigma(g)} \circ \sigma$, temos que:

$$\begin{aligned}
\sigma^*\omega(X) &= \omega_{\sigma(g)}(\sigma_*(L_g)_* X_e) \\
&= \omega_{\sigma(g)}((L_{\sigma(g)})_* \sigma_* X) \\
&= \omega_{\sigma(g)}((L_{\sigma(g)})_* \sigma_* X_1 + (L_{\sigma(g)})_* \sigma_* X_2) \\
&= \omega_{\sigma(g)}((L_{\sigma(g)})_* X_1 - (L_{\sigma(g)})_* X_2) \\
&= \omega_e(X_1) - \omega_e(X_2) = X_1 = \omega(X).
\end{aligned}$$

2. Primeiramente note que as curvas integrais de X são curvas horizontais por X ser um campo invariante à esquerda em $\mathfrak{m}$. Portanto, dado $h \in H$, isto é, um elemento da fibra de $[e]$, a curva integral de X passando por h é $a_t \cdot h$, que é horizontal pela observação acima e que claramente se projeta em x_t. Por unicidade do transporte paralelo, segue então que a translação à esquerda por a_t é o transporte paralelo da fibra H ao longo de x_t.

□

Por simplicidade de notação, até o final desta seção escreveremos $M = G/H$. Lembramos que para cada $g \in G$, definimos $L_g : M \to M$, a translação à esquerda no espaço homogêneo M, dada por $L_g([g']) = [g \cdot g']$, a qual é difeomorfismo com inverso $L_{g^{-1}}$. O teorema acima nos permite definir uma conexão linear no fibrado $L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$. Para isso, primeiramente vamos definir um morfismo de fibrados principais $(f, f') : G(M, H) \to L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$. Fixe um referencial linear $u = (X_1, ..., X_n)$ em $[e]$ (o qual pode ser identificado com uma base de $\mathfrak{m}$) e para cada $g \in G$ defina $f(g)$ como o referencial em $[g]$ que é imagem de u pela diferencial de L_g. Defina também $f' : H \to GL(n, \mathbb{R})$, colocando $f'(h)$ como a matriz da transformação linear $(L_h)_* : T_{[e]}M \to T_{[e]}M$ na base u.

Note que (f, f') é um morfismo de fibrados e que a aplicação induzida F é a identidade de M a qual é, em particular, um difeomorfismo. Pela proposição 2.1 este morfismo induz uma única conexão em $L(M)(M, GL(n, \mathbb{R}))$ para a qual f leva subespaços horizontais em subespaços horizontais (e portanto curvas horizontais em curvas horizontais). Tal conexão também será denotada por C_S e será chamada a **conexão linear canônica** de $L(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$.

Antes de estudar esta conexão linear canônica, na próxima seção apresentaremos algumas proposições sobre transformações afins.

2.2 Transformações

Seja M uma variedade com uma conexão linear C. Já vimos que a conexão C induz uma noção de derivação de seções ao longo de curvas em cada fibrado vetorial associado ao fibrado de referenciais $L(M)$ (pg. 29). No caso do fibrado tangente TM, uma seção ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : [0,1] \to M$ é chamada de **campo de vetores ao longo de** α. Em particular, o campo de velocidades $t \mapsto \alpha'(t)$ é um campo de vetores ao longo de α. Quando este campo de velocidades é paralelo, isto é, $\nabla_{\alpha'(t)}\alpha' = 0$ para cada $t \in [0,1]$, dizemos que α é uma **geodésica** (com respeito à conexão C). Mais geralmente, uma seção do fibrado tangente em um subconjunto aberto de M é um campo de vetores neste aberto, portanto se X e Y são campos de vetores em um aberto U de M, tem sentido o campo de vetores $\nabla_X Y$ em U.

O **tensor de Torção**, denotado por T, é definido por:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Também definimos o **tensor de Curvatura**, denotado por R, colocando:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Definição 2.2. *Sejam M e M' variedades com conexões lineares C e C' respectivamente. Dizemos que uma aplicação de $f : M \to M'$ de classe C^1 é uma **aplicação afim** se sua derivada $f_* : TM \to TM'$ leva curvas horizontais em curvas horizontais, isto é, f_* leva cada campo vetorial paralelo ao longo de uma curva α em um campo vetorial paralelo ao longo da curva $f \circ \alpha$.*

Em particular, quando o campo de velocidades de uma curva α for paralelo, então o campo de velocidades de $f\circ\alpha$ também é paralelo, em outras palavras, f leva geodésicas em geodésicas.

Para a próxima proposição, lembramos que se $f : M \to M'$ é uma aplicação suave e se X e X' são campos vetoriais em M e M' respectivamente, dizemos que X e X' estão f**-relacionados** se para cada $x \in M$ vale $f_*(X_x) = X'_{f(x)}$. Além disso, lembramos também que se X está f-relacionado a X' e Y está f-relacionado a Y', então $[X,Y]$ está f-relacionado a $[X',Y']$.

Proposição 2.5. *Seja $f : M \to M'$ uma aplicação afim. Sejam X, Y e Z campos vetoriais em M que são f-relacionados a certos campos vetoriais X', Y' e Z' de M' respectivamente. Então:*

1. *$\nabla_X Y$ é f-relacionado a $\nabla_{X'} Y'$, onde ∇ denota a derivação covariante em ambas M e M'.*

2. *$T(X, Y)$ é f-relacionado a $T'(X', Y')$, em que T e T' são os tensores de torção de M e M' respectivamente.*

3. *$R(X, Y)Z$ é f-relacionado a $R'(X', Y')Z'$, em que R e R' são os tensores de curvatura de M e M' respectivamente.*

Demonstração: Seja x_t uma curva integral de X e seja τ o transporte paralelo de x_t até x_0, então por definição de derivada covariante:

$$(\nabla_X Y)_{x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\tau Y_{x_t} - Y_{x_0} \right).$$

Seja $x'_t = f(x_t)$ e seja τ' o transporte paralelo de x'_t até x'_0. Como f preserva campos paralelos e da unicidade do transporte paralelo, temos que f comuta com o transporte paralelo, e portanto:

$$\begin{aligned} f_*(\nabla_X Y)_{x_0} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f_*(\tau Y_{x_t}) - f_*(Y_{x_0}) \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\tau' Y'_{x_t} - Y'_{x_0} \right) = (\nabla_{X'} Y')_{x'_0}. \end{aligned}$$

As afirmações 2. e 3. seguem facilmente de 1. e de que os colchetes estão f-relacionados. □

Definição 2.3. *Um difeomorfismo f de uma variedade M nela própria é chamado de uma **transformação** de M. Se é dada uma conexão linear em $L(M)$, uma **transformação afim** de M é um difeomorfismo $f : M \to M$ que é ao mesmo tempo uma aplicação afim.*

Uma transformação de M induz um automorfismo $\tilde{f}$ de $L(M)$. Dado um referencial $u = (X_1, ..., X_n)$ em $x \in M$, definimos $\tilde{f}(u) = (f_*(X_1), ..., f_*(X_n))$. A aplicação induzida por $\tilde{f}$ é justamente f, isto é, $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.

Note que a definição de $\tilde{f}$ nos garante que a forma canônica ϑ de $L(M)$ é invariante por $\tilde{f}$. De fato, dado $u = (X_1, ..., X_n)$ e $X \in T_u P$, temos que $f_* \circ u = \tilde{f}(u)$. Portanto $(\tilde{f}(u))^{-1} = u^{-1} \circ f_*^{-1}$, e assim

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^*\vartheta(X) &= \vartheta(\tilde{f}_*X) \\
&= (\tilde{f}(u))^{-1}(\pi_*\tilde{f}_*X) \\
&= (\tilde{f}(u))^{-1}(f_*\pi_*X) \\
&= u^{-1}f_*^{-1}f_*(\pi_*(X)) \\
&= u^{-1}(\pi_*X) = \vartheta(X).
\end{aligned}$$

Suponha que seja dada uma conexão linear C em $L(M)$ com forma de conexão ω e que f seja uma transformação afim. Da proposição 2.1, temos que $\tilde{f}$ leva a conexão C em uma conexão, digamos, $\tilde{f}(C)$. Por outro lado, seja $X \in T_u P$ um vetor horizontal em u, o qual podemos estender para um campo horizontal em P, e tome uma curva horizontal α em P tangente a X. Daí $\tilde{f}_*(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{f}(\alpha(t))$.

Escrevendo $\alpha(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$, que é um referencial em $\pi(\alpha(t)) = \widetilde{\alpha}(t)$, temos que $\tilde{f}(\alpha(t)) = (f_*(X_1(t)), ..., f_*(X_n(t)))$ é um referencial em $\pi(\tilde{f} \circ \alpha(t)) = f(\tilde{\alpha}(t))$. Como a curva α é horizontal, segue que cada $X_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, é um campo paralelo ao longo de $\widetilde{\alpha}$, e por definição de transformação afim temos que $f_*(X_i(t))$ é um campo paralelo ao longo de $f \circ \widetilde{\alpha}$. Assim, a curva $\tilde{f} \circ \alpha$ é também horizontal. Logo, o automorfismo $\tilde{f}$ leva subespaços horizontais em subespaços horizontais, isto é, preserva a conexão: $\tilde{f}(C) = C$. Em termos da forma de conexão de C, isto significa que $\tilde{f}^*\omega = \omega$.

Note também que, por esta observação acima, os campos horizontais fundamentais são invariantes por $\tilde{f}$. De fato, sejam $u = (X_1, ..., X_n) \in P$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $B(v)$ o campo horizontal fundamental associado, se $v = \sum_i a_i e_i$, então:

$$\begin{aligned}
\pi_*(\tilde{f}_*B(v)_u) &= f_*\pi_*B(v)_u \\
&= f_*u(v) \\
&= f_*\left(\sum a_i X_i\right) \\
&= \sum a_i f_*(X_i) \\
&= \tilde{f}(u)(v).
\end{aligned}$$

Portanto, como $\tilde{f}_*(B(v))$ é horizontal, temos que $\tilde{f}_*(B(v)_u) = B(v)_{\tilde{f}(u)}$. Resumimos a discussão acima na seguinte proposição:

Proposição 2.6. *1. Se $f : M \to M$ é uma transformação, então a forma canônica ϑ de $L(M)$ é* *invariante por $\tilde{f}$.*

2. *Se M possui uma conexão linear C e $f: M \to M$ é uma transformação afim, então C é invariante por $\tilde{f}$.*

Para finalizar as observações sobre transformações afins, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.7. *Seja C uma conexão linear em M. Para uma transformação f de M, as condições abaixo são equivalentes:*

1. *f é uma transformação afim de M.*
2. *$\tilde{f}^*\omega = \omega$, em que ω é a forma de conexão de C e $\tilde{f}$ é a transformação de P induzida por f.*
3. *$\tilde{f}$ deixa todo campo horizontal fundamental $B(v)$ invariante.*
4. *$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X}(f_*Y)$ para quaisquer campos vetoriais X e Y em M.*

Demonstração: A equivalência entre 1. e 2. e a implicação 2. $\Rightarrow$ 3. já foram feitas. Para ver que 3. implica 2. note que se $u \in P$, então o subespaço horizontal em u é $H_u = \{B(v)_u; v \in \mathbb{R}^n\}$, pois a hipótese significa que $\tilde{f}$ leva subespaços horizontais em subespaços horizontais. Isto implica que $\tilde{f}(C) = C$ e portanto $\tilde{f}^*\omega = \omega$. A implicação 1. $\Rightarrow$ 4. foi feita na proposição 2.5. Finalmente, para ver que 4. implica 1. seja Y um campo paralelo (não nulo) ao longo de uma curva x_t. Seja X o campo velocidade da curva x_t e estenda estes campos para M (o que é possível em vizinhanças suficientemente pequenas), denotando pelas mesmas letras tais extensões. A hipótese nos diz que f_*Y é paralelo ao longo de $f(x_t)$, e portanto f é uma transformação afim. □

Voltaremos agora a discutir o caso da conexão linear canônica no fibrado $L(M)(M, GL(n,\mathbb{R}))$, em que $M = G/H$. Antes de enunciar as propriedades desta conexão linear canônica e partir para os exemplos, veremos um lema.

Lema 2.8. *Seja $U \subset M$ um subconjunto aberto de uma variedade M com uma conexão linear. Sejam $x \in U$ e $\sigma: U \to U$ uma aplicação afim involutiva da qual x é um ponto fixo isolado. Então $\sigma_*(x) = -Id_{T_xM}$. Em particular, σ reverte as geodésicas que passam por x, isto é, para todo $X \in T_xM$ tal que a aplicação* exp *esteja definida, vale $\sigma(\exp(X)) = \exp(-X)$.*

Demonstração: Denote por $T = \sigma_*(x)$. Como σ é uma involução em U que fixa x, temos que $T: T_xM \to T_xM$ também satisfaz $T^2 = \mathrm{Id}$. Segue então que o polinômio minimal de T só pode ser $p_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $p_2(\lambda) = \lambda - 1$ ou $p_3(\lambda) = \lambda + 1$. Se fosse p_1 ou p_2 teríamos que $+1$ é autovalor de T, o que implica que existe $X \neq 0$ para o qual $T(X) = X$. Tome então a geodésica α tal que

$\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X$. Como σ é afim, temos que $\sigma \circ \alpha$ é uma geodésica tal que $\sigma \circ \alpha(0) = \sigma(x) = x$ e $(\sigma \circ \alpha)'(0) = T(X) = X$. Pela unicidade de geodésicas, devemos ter $\sigma \circ \alpha = \alpha$ e x não seria um ponto fixo isolado. Logo p_3 deve ser o polinômio minimal de T, o que implica $T = -\mathrm{Id}$. Assim, σ leva uma geodésica passando por x com velocidade $X \neq 0$ em uma geodésica passando por x com velocidade $-X$, por unicidade de geodésicas, isto nos diz que $\sigma(\exp(X)) = \exp(-X)$. □

Observação 2.2. Vale também a recíproca do lema acima. Uma simetria em torno de um ponto $x \in M$ é definida como sendo um difeomorfismo S_x de uma vizinhança U de x nela própria que manda $\exp(X)$ em $\exp(-X)$ para todo $X \in T_x M$ (para o qual a aplicação $\exp(X)$ esteja definido). Uma tal simetria é uma involução (numa vizinhança possivelmente menor) na a qual x é ponto fixo isolado. Além disso, $(S_x)_* = -\mathrm{Id}$ em $T_x M$ pois

$$(S_x)_*(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S_x(\exp(tX)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-tX) = -X.$$

Teorema 2.9. *A conexão linear canônica num espaço homogêneo simétrico G/H tem as seguintes propriedades:*

1. *C é invariante por G bem como a simetria σ_0 em torno de $[e]$.*
2. *O transporte paralelo de vetores ao longo de $x_t = [a_t]$, em que $a_t = \exp(tX)$ com $X \in \mathfrak{m}$, é a diferencial $(L_{a_t})_*$. Em particular, x_t é uma geodésica.*
3. *O tensor de torção T é nulo.*
4. *Qualquer campo de tensores G-invariante K em G/H é paralelo com respeito à C_S. Em particular, o tensor de curvatura R é paralelo, isto é, $\nabla R = 0$.*

Demonstração:

1. Mostraremos que a aplicação $L_g : M \to M$ é afim para todo $g \in G$, isto é, que a aplicação $\tilde{L}_g$ preserva a conexão canônica de $L(M)$. Denote por $\tilde{\omega}$ a forma de conexão da conexão canônica de $L(M)$. Sejam $u = f(g') \in L(M)$ e $X = f_*(X') \in H_u = f_*(H_{g'})$.

Como $\tilde{L}_g \circ f = f \circ L_g$ e ω é invariante por L_g, temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}((\tilde{L}_g)_* X) &= \tilde{\omega}((\tilde{L}_g)_* f_* X') \\
&= \tilde{\omega}(f_*(L_g)_* X') \\
&= f^* \tilde{\omega}((L_g)_* X') \\
&= f' \cdot \tilde{\omega}((L_g)_* X') \\
&= f'_*(\omega((L_g)_* X')) \\
&= f'_*(L_g^* \omega(X')) = f'_*(\omega(X')) = f'(0) = 0.
\end{aligned}$$

E portanto $\tilde{L}_g$ leva subespaços horizontais em subespaços horizontais nesse caso.

Quando $u = f(g') \cdot A$ e $X = (R_A)_*(f_*(X')) \in H_u = (R_A)_*(f_* H_{g'})$ temos que

$$\tilde{\omega}((\tilde{L}_g)_* X) = \tilde{\omega}((\tilde{L}_g)_*(R_A)_* f_* X') = \tilde{\omega}((R_A)_*(\tilde{L}_g)_* f_* X') = \mathrm{ad}(A^{-1})_* \tilde{\omega}((\tilde{L}_g)_* f_* X') = 0.$$

Assim, L_g é uma aplicação afim. A invariância por σ_0 segue essencialmente da invariância de C_S por σ, vista no item 1. do teorema 2.4.

2. Lembremos da definição de f que $u = (X_1, \ldots, X_n)$ é o referencial fixado em $[e]$. Lembrando que a curva a_t é horizontal em G temos que, por definição da conexão em $L(M)$, a curva $f(a_t)$ é horizontal começando em $f(a_0) = f(e) = u$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, por definição de transporte paralelo no fibrado associado com fibra $\mathbb{R}^n$, o transporte paralelo de $[u, v]$ é $[f(a_t), v]$, que corresponde à $f(a_t) \cdot v$ pelo isomorfismo deste fibrado associado com o fibrado tangente TM, em que $f(a_t) : \mathbb{R}^n \to T_{x_t} M$, $e_i \mapsto (L_{a_t})_* X_i$. Assim, o transporte paralelo de $[f(a_t), e_i]$ corresponde ao transporte paralelo de X_i, portanto o transporte paralelo de X_i em t é $f(a_t) \cdot e_i = (L_{a_t})_* X_i$, isto é, o transporte paralelo no fibrado tangente TM ao longo de x_t é dado pela aplicação $(L_{a_t})_*$.

   Assim, a curva x_t é geodésica pois para cada h fixado temos:

$$(L_{a_t})_* x'_h = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\bar{t}=h} L_{a_t}(x_{\bar{t}}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\bar{t}=h} [a_t \cdot a_{\bar{t}}] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{\bar{t}=h} x_{t+\bar{t}} = x'_{t+h}.$$

3. Sejam $X, Y \in T_{[e]} M$. Como σ_0 é uma aplicação afim temos, que o tensor de torção é invariante por σ_0, além disso, a derivada de σ_0 em $[e]$ é $-\mathrm{Id}$, e portanto:

$$-T(X, Y) = (\sigma_0)_* T(X, Y) = T((\sigma_0)_* X, (\sigma_0)_* Y) = T(-X, -Y) = T(X, Y).$$

Assim, $T(X,Y) = 0$ em $[e]$, e portanto $T \equiv 0$ em M pois L_g é aplicação afim para todo $g \in G$.

4. Se K é um tensor G-invariante, para ver que K é paralelo basta ver que $\nabla_X K = 0$ para todo $X \in T_{[e]}M$. Por outro lado, X é tangente à uma curva da forma $x_t = [a_t]$, em que $a_t = \exp(tX')$ para um certo $X' \in \mathfrak{m}$. Então, da definição de derivada covariante, e do transporte paralelo ser dado pela translação à esquerda por a_t (item 2.), segue novamente da G-invariância de K que $\nabla_X K = 0$, e portanto K é paralelo.

$\square$

Observação 2.3. Se existe alguma métrica Riemanniana g em G/H invariante por G, então sua conexão Riemanniana é a conexão Γ. De fato, como g é invariante por G, segue por 4. que g é um tensor paralelo com respeito à Γ, isto é, Γ é compatível com a métrica g. Como Γ tem torção nula, a conexão Γ é simétrica, e a observação segue da unicidade da conexão Riemanniana. É possível mostrar que se H é compacto, uma tal métrica g sempre existe.

Observação 2.4. Dado $h \in H$, temos que para todo $g \in G$ valem $\pi \circ \mathrm{ad}(h)(g) = \pi(hgh^{-1}) = [hg]$ e $L_h \circ \pi(g) = L_h([g]) = [hg]$ e assim $\pi \circ \mathrm{ad}(h) = L_h \circ \pi$. Como L_h fixa $[e]$ e $\mathrm{ad}(h)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\mathrm{ad}(h)_*} & \mathfrak{m} \\ {\scriptstyle \pi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ T_{[e]}M & \xrightarrow{(L_h)_*} & T_{[e]}M \end{array}$$

Como $\pi_* : \mathfrak{m} \to T_{[e]}M$ é um isomorfismo, podemos dizer que $\mathrm{ad}(h)$ em $\mathfrak{m}$ corresponde à translação à esquerda $(L_h)_*$ em $T_{[e]}M$.

2.3 Exemplos de Espaços Homogêneos Simétricos

Antes de começar com os exemplos de espaços homogenêos simétricos precisamos de um teorema que vai nos auxiliar.

Teorema 2.10. *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável com uma ação transitiva $\varphi : G \times M \to M$. Então, dado $x \in M$ qualquer, a aplicação $\varphi_x : G/G_x \to M$ dada por $\varphi_x([g]) = \varphi(g,x)$ é um difeomorfismo, em que $G_x = \{g \in G; \varphi(g,x) = x\}$ é o subgrupo de isotropia de x.*

Demonstração: Para ver que φ_x está bem definida suponha que $[g]=[g']$ e seja $h \in G_x$ para o qual $g' = gh$. Então $g' \cdot x = (gh)\cdot x = g(h\cdot x) = g\cdot x$. Esta aplicação é injetiva pois se $\varphi_x([g]) = \varphi_x([g'])$, então $g\cdot x = g'\cdot x$, mas isto implica que $g'g^{-1} \in G_x$, e portanto $[g]=[g']$. Ela é sobrejetiva pois a ação de G em M é transitiva. Portanto φ_x é uma bijeção. Da existência de seções locais no quociente G/G_x sabe-se que φ_x é diferenciável se, e só se, a composição $g \mapsto [g] \mapsto \varphi_x([g])$ é diferenciável, mas este é o caso pois esta composição é a restrição da ação (que é diferenciável) a $G \times \{x\}$. Esta aplicação é também G-equivariante no sentido de que preserva as ações de G em G/G_x (ação por translação à esquerda) e em M (ação dada). De fato, se $g \in G$, então

$$\varphi_x(g\cdot[g']) = \varphi_x([gg']) = (gg')\cdot x = g(g'\cdot x) = g\cdot\varphi_x([g']).$$

A equivariância implica que φ_x tem posto constante. De fato, se $[g],[g'] \in G/G_x$, podemos tomar $h \in G$ para o qual $[g'] = h\cdot[g] = [hg]$. Note daí que $L_h \circ \varphi_x = \varphi_x \circ \overline{L}_h$, em que $\overline{L}_h$ é a translação à esquerda por h em G/G_x. Esta comutatividade nos garante que as derivadas $(\varphi_x)_{*[g]}$ e $(\varphi_x)_{*[g']}$ são conjugadas pelos isomorfismos $(L_h)_*$ e $(\overline{L}_x)_*$, e portanto devem ter o mesmo posto. Como φ_x é bijetiva, segue que é um difeomorfismo pelo Teorema do Posto. □

2.3.1 Geometria Esférica

Dado $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, a norma euclidiana de x é dada por $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2$. Realizaremos primeiramente a esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ como um espaço homogêneo. A aplicação $\|\cdot\|$ é a forma quadrática associada à forma bilinear $(x,y) \mapsto \sum_i x_i y_i$ (que é o produto interno usual de $\mathbb{R}^{n+1}$). O grupo das transformações lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam esta forma quadrática é denotado por $O(n+1)$, denominado grupo ortogonal (associado a norma euclidiana). Matricialmente, $O(n+1) = \{A \in GL(n+1,\mathbb{R}); A^T\cdot A = \mathrm{Id}\}$. O grupo ortogonal é um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n+1) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}); X^T + X = 0\}$. A componente da identidade deste grupo é o subgrupo $SO(n+1) = \{A \in O(n); \det A = 1\}$.

Existe uma ação natural de $G = SO(n+1)$ em S^n dada por $\varphi(A,x) = A\cdot x$. Usando o processo de Gram-Schmidt é possível ver que esta ação é transitiva. Se $e_0 = (1,0,\dots,0)$, então o grupo de isotropia desta ação em e_0 é $G_{e_0} = \{A \in SO(n+1); Ae_0 = e_0\}$. Como Ae_0 é o vetor na primeira coluna de A, então $A \in G_{e_0}$ implica que a primeira coluna de A é o vetor e_0. Como A deve ser ortogonal, ou seja, seus vetores coluna devem formar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ com respeito ao produto interno usual, temos que a primeira linha de A deve ser e_0^T. Vemos facilmente agora que o subgrupo de isotropia em e_0 é

$$G_{e_0} = \left\{ A \in SO(n+1); A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}, \overline{A} \in SO(n) \right\}.$$

Mas note que este grupo é isomorfo a $SO(n)$, e por abuso de notação escreveremos simplesmente $G_{e_0} = SO(n)$. Segue pelo teorema 2.10 que a aplicação φ_{e_0} fornece um difeomorfismo entre $SO(n+1)/SO(n)$ e S^n.

Conseguimos assim explicitar a esfera como o espaço homogêneo $SO(n+1)/SO(n)$. Vamos descrevê-la agora como um espaço homogêneo simétrico. Considere a matriz

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

e a involução $\sigma : SO(n+1) \to SO(n+1)$ dada por $\sigma(A) = SAS^{-1}$. Note que $S^{-1} = S$. Vamos explicitar os elementos de $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{A \in SO(n+1); SA = AS\}$.

Se $A = \begin{pmatrix} a & u^T \\ v & \overline{A} \end{pmatrix}$, então para que $A \in \mathrm{Fix}(\sigma)$ devemos ter

$$\begin{pmatrix} a & u^T \\ v & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u^T \\ v & \overline{A} \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} -a & u^T \\ -v & \overline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -u^T \\ v & \overline{A} \end{pmatrix}$$

o que implica $u = v = 0$. Mas para que $A \in SO(n+1)$ devemos ter ainda

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -0 \\ 0 & \overline{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \overline{AA}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

o que implica $a = \pm 1$ e $\overline{A} \in O(n)$. Mas como $\det A = 1$, devemos ter que $a = 1$ e $\overline{A} \in SO(n)$ ou $a = -1$ e $\det \overline{A} = -1$. Reciprocamente, não é difícil ver que todas as matrizes A desta forma estão em $\mathrm{Fix}(\sigma)$. Concluímos então que a componente da identidade de $\mathrm{Fix}(\sigma)$ é $H = SO(n)$ (com a mesma identificação feita anteriormente). Desta maneira, $G/H = SO(n+1)/SO(n)$ é um espaço homogêneo simétrico.

A derivada de σ em $A = \mathrm{Id}$ é dada por $\sigma_*(B) = SBS$ para $B \in \mathfrak{so}(n+1)$. Por uma conta análoga à que já fizemos, a álgebra de Lie de $H = SO(n)$ (que é o autoespaço de $\lambda = 1$) como subálgebra de Lie de $\mathfrak{so}(n+1)$ é

$$\mathfrak{h} = \left\{ B \in \mathfrak{so}(n+1); B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B} \end{pmatrix}, \overline{B} \in \mathfrak{so}(n) \right\} \approx \mathfrak{so}(n).$$

Para ver qual é o subespaço horizontal $\mathfrak{m}$ (que é o autoespaço de $\lambda = -1$) note que se $B = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ -u & \overline{B} \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1)$, então para que $B \in \mathfrak{m}$ devemos ter $SBS = -B$, ou seja

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ -u & \overline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ -u & \overline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ -u & -\overline{B} \end{pmatrix},$$

o que implica $\overline{B} = 0$. Não é difícil verificar que toda B desta forma pertence a $\mathfrak{m}$, daí $\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{m}$, em que

$$\mathfrak{m} = \left\{ B \in \mathfrak{so}(n+1); B = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ -u & 0 \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Se $B \in H$, então a representação adjunta em $\mathfrak{m}$ fica

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overline{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\overline{B}u)^T \\ \overline{B}u & 0 \end{pmatrix},$$

que é essencialmente (com as devidas identificações) a ação usual de $SO(n)$ em $\mathbb{R}^n$.

Analogamente, para $B \in \mathfrak{so}(n)$, temos que

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\overline{B}u)^T \\ \overline{B}u & 0 \end{pmatrix},$$

o que nos diz que a ação adjunta de $\mathfrak{so}(n)$ em $\mathfrak{m}$ é essencialmente a ação de $\mathfrak{so}(n)$ em $\mathbb{R}^n$. Transfira o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ para $\mathfrak{m}$ via a identificação

$$u \in \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m},$$

obtendo assim um produto interno em $\mathfrak{m}$ que é invariante por $\mathrm{ad}(SO(n))$. Note que se $u, v \in \mathbb{R}^n$ correspondem às matrizes $X, Y \in \mathfrak{m}$ respectivamente, então $< u, v >= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB)$, assim, o produto interno em $\mathfrak{m}$ é a restrição a $\mathfrak{m}$ do produto interno em $\mathfrak{so}(n+1)$ dado por

$$< A, B >= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB),$$

o qual é invariante por ad$(SO(n+1))$ em todo $\mathfrak{so}(n+1)$ (basta lembrar que para quaisquer matrizes A, B vale que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$). O produto interno em $\mathfrak{m} \approx T_{[\mathrm{Id}]}(SO(n+1)/SO(n))$ se extende para uma métrica em $SO(n+1)/SO(n)$ invariante por $SO(n+1)$. Explicaremos como isso pode ser feito. Para fixar a notação, seja $M = SO(n+1)/SO(n)$. Sejam $X, Y \in T_{[A]}M$ e sejam $X', Y' \in T_{[\mathrm{Id}]}M$ para os quais $(L_A)_*X' = X$ e $(L_A)_*Y' = Y$ e defina $< X, Y >:=< X', Y' >$. Para ver que este produto está bem definido, suponha que $[A'] = [A]$ e seja $B \in SO(n)$ para o qual $A' = AB$. Sejam $\overline{X}, \overline{Y} \in T_{[\mathrm{Id}]}M$ tais que $(L_{A'})_*\overline{X} = X$ e $(L'_A)_*\overline{Y} = Y$. Como $L_{A'} = L_A \circ L_B$, temos que

$$(L_A)_*X' = (L_{A'})_*\overline{X} = (L_A)_*(L_B)_*\overline{X},$$

o que implica $(L_B)_*\overline{X} = X'$ (analogamente $(L_B)_*\overline{Y} = Y'$). Pela observação 2.4, a transformação $(L_B)_*$ corresponde a ad(B) em $\mathfrak{m}$, a qual preserva o produto interno. Assim $< X', Y' >=< \overline{X}, \overline{Y} >$, e portanto a métrica está bem definida.

Encontraremos agora a diferencial de φ_{e_0} em [Id]. Seja $X \in \mathfrak{m}$ e $u \in \mathbb{R}^n$ o elemento associado a X. Então:

$$(\varphi_{e_0})_*X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{e_0}[\exp(tX)] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)\cdot e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Assim, $(\varphi_{e_0})_*$ é uma isometria com respeito à métrica de S^n induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$ (a qual é invariante por $SO(n+1)$). Agora, se $A \in SO(n+1)$, da relação $\varphi_{e_0} \circ L_A = A \circ \varphi_{e_0}$ e da invariância das respectivas métricas por $SO(n+1)$, é fácil mostrar que φ_{e_0} é uma isometria.

As geodésicas de $SO(n+1)/SO(n)$ começando em [Id] são as curvas da forma $\pi(\exp(tX))$ com $X \in \mathfrak{m}$. Por exemplo, se X corresponde a $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \cos t & -\mathrm{sen} t & 0\cdots 0 \\ \mathrm{sen} t & \cos t & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \mathrm{Id}_{n-1} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

e sua realização em S^n é

$$\varphi_{e_0}(\pi(\exp tX)) = \exp(tX)\cdot e_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

a qual representa um círculo máximo no plano x_0, x_1.

Todas as outras geodésicas em S^n começando em e_0 são obtidas a partir desta usando as rotações que deixam e_0 fixo (aquelas de $SO(n)$). Fica realizada então a Geometria Esférica S^n como o espaço homogêneo simétrico $SO(n+1)/SO(n)$.

2.3.2 Geometria Hiperbólica

Considere em $\mathbb{R}^{n+1}$ a base canônica $e_0, e_1, ..., e_n$ e considere também a forma bilinear simétrica e não-degenerada F definida por

$$F(x,y) = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i, \quad x,y \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Seja $O(1,n)$ o grupo ortogonal para esta forma bilinear, isto é,

$$\begin{aligned} O(1,n) &= \left\{A \in GL(n+1,\mathbb{R}); F(Ax,Ay) = F(x,y), \forall x,y \in \mathbb{R}^{n+1}\right\} \\ &= \left\{A \in GL(n+1,\mathbb{R}); A^TSA = S\right\} \end{aligned}$$

em que

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

como no exemplo anterior. No caso de $n=3$, $O(1,3)$ é chamado de **Grupo de Lorentz**. Note que $A = (a_{ij})$ pertence a $O(1,n)$ se, e somente se, os vetores coluna $u_0, u_1, ..., u_n$ satisfazem:

$$\begin{array}{ccc} F(u_0,u_0) = -1 & F(u_i,u_i) = 1 & \text{para } 1 \le i \le n \\ F(u_i,u_j) = 0 & \text{para } 0 \le i < j \le n & \end{array}.$$

Em particular, $-a_{00}^2 + \sum_{k=1}^n a_{k0}^2 = -1$, o que implica $a_{00} \ge 1$ ou $a_{00} \le -1$. Da relação $A^TSA = A$, obtemos $\det A = \pm 1$. A partir disso pode-se mostrar que $O(1,n)$ tem 4 componentes conexas, e que $SO(1,n) := O(1,n) \cap SL(n+1,\mathbb{R})$ tem duas. Mostra-se também que a componente da identidade de $O(1,n)$ é $SO^+(1,n) = \{A \in SO(1,n); a_{00} \geq 1\}$. Denote por G esta componente da identidade. A álgebra de Lie de G é

$$\mathfrak{o}(1,n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}); X^T S + SX = 0\}.$$

Considere o hiperbolóide de duas folhas $M = F^{-1}\{-1\}$, e seja M^+ a componente conexa de e_0. A ação usual φ de $O(1,n)$ em M pode ser restrita a G e M^+ e obter que ela é transitiva usando o processo de Gram-Schmidt. Dado $x \in M^+$, temos que $F(x,x) = -1$ e $x_0 \geq 1$. Se pensarmos M^+ como uma hiperfície, temos que o espaço tangente $T_x M^+$ pode ser identificado como o subespaço de todos os vetores $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ para os quais $F(x,a) = 0$. Desta maneira, a restrição de F a $T_x M$ é positiva definida pelo Teorema da Inércia de Sylvester ([Lan02] pg. 577), e portanto F define uma métrica Riemanniana em M^+, a qual é invariante por G (pela definição de $O(1,n)$).

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \in G_{e_0}$, então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & \overline{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u^T \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -u^T \\ -u & -uu^T + \overline{A}^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Assim $u = 0$ e $\overline{A}^T A = \mathrm{Id}$. Como $\det A = 1$, temos que $\overline{A} \in SO(n)$. É fácil verificar que toda matriz A desta forma está em G_{e_0}. Portanto $G_{e_0} = SO(n)$. Novamente pelo teorema 2.10, φ_{e_0} fornece um difeomorfismo G-equivariante entre $SO^+(1,n)/SO(n)$ e M^+.

Conseguimos assim explicitar o hiperbolóide (mais precisamente uma folha deste) como o espaço homogêneo $SO^+(1,n)/SO(n)$. Vamos explicitá-lo agora como um espaço homogêneo simétrico. Considere a involução $\sigma : G \to G$ definida por $\sigma(A) = SAS$. Como antes, se $A \in \mathrm{Fix}(\sigma)$, a relação $AS = SA$ nos fornece que A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Da relação $A^T SA = S$, obtemos que $a = \pm 1$ e $\overline{A} \in O(n)$. Como $a = a_{00} \geq 0$, implica que $a = 1$, e por $\det A = 1$ segue que $\overline{A} \in SO(n)$. Reciprocamente é fácil ver que toda matriz desta forma está em $\mathrm{Fix}(\sigma)$, isto é, $\mathrm{Fix}(\sigma) = SO(n)$. Desta maneira, $G/H = SO^+(1,n)/SO(n)$ é um espaço homogêneo simétrico. Como antes, a álgebra de Lie de $SO(n)$ como subalgebra de $\mathfrak{g}$ é o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, em que $B \in \mathfrak{so}(n)$.

Para ver qual é o subespaço horizontal $\overline{\mathfrak{m}}$, temos que caracterizar os elementos $B \in \mathfrak{g}$ para os quais $SBS = -B$. Se $B = \begin{pmatrix} b & u^T \\ v & \overline{B} \end{pmatrix}$, a relação $SBS = -B$ nos fornece $b = 0$ e $\overline{B} = 0$. A relação $B^T S + SB = 0$ nos fornece $u = v$. É fácil concluir agora que

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ B \in \mathfrak{g}; B = \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Identificando $\overline{\mathfrak{m}}$ com $\mathbb{R}^n$ nós vemos que $\mathrm{ad}(SO(n))$ em $\overline{\mathfrak{m}}$ (como no exemplo anterior) é a ação usual de $SO(n)$ em $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (Bu)^T \\ Bu & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(n))$ em $\overline{\mathfrak{m}}$ é expressa por:

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (Bu)^T \\ Bu & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos induzir o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ em $\overline{\mathfrak{m}}$ e definir uma métrica G invariante em G/H de uma maneira semelhante à do exemplo anterior.

A diferencial da aplicação φ_{e_0} em $X \in \overline{\mathfrak{m}}$ é $\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, em que $u \in \mathbb{R}^n$ é o elemento associado à X. Portanto φ é um isometria em [Id]. Como no exemplo anterior, mostra-se que φ_{e_0} é uma isometria.

As geodésicas de $SO^+(1,n)/SO(n)$ começando em [Id] são as curvas da forma $\pi(\exp(tX))$ com $X \in \overline{\mathfrak{m}}$. Por exemplo, se X corresponde a $e_1 = (1,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$, então:

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \cosh t & \mathrm{senh} t & 0\cdots 0 \\ \mathrm{senh} t & \cosh t & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \mathrm{Id}_{n-1} \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

a sua realização em M^+ é

$$\varphi_{e_0}(\pi(\exp tX)) = \exp(tX)\cdot e_0 = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \mathrm{senh} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que representa uma hipérbole no plano x_0x_1.

Todas as outras geodésicas em M^+ começando em e_0 são obtidas a partir desta usando as rotações (hiperbólicas) que deixam e_0 fixo (aquelas de $SO(n)$). Fica realizada então a Geometria Hiperbólica H^+ (no modelo do hiperbolóide) como o espaço homogêneo simétrico $SO^+(1,n)/SO(n)$.

2.3.3 Geometria Euclidiana

Seja $A(n)$ o conjunto das aplicações afins em $\mathbb{R}^n$, isto é, $T \in A(n)$ se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é da forma $T(x) = Bx + u$, em que $B \in O(n)$ e $u \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $A(n)$ é um grupo com a operação de composição e age transitivamente em $\mathbb{R}^n$ de maneira usual: $\varphi(T,x) = T(x)$. Porém, vamos identificar $A(n)$ com um subgrupo de $GL(n+1,\mathbb{R})$ mediante o monomorfismo

$$T \mapsto \overline{T} = \begin{pmatrix} B & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1,\mathbb{R}).$$

Identificaremos $\mathbb{R}^n$ com um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante a aplicação $x \mapsto \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Desta maneira, $T(x)$ corresponde a $\overline{T}(\overline{x})$. Note que o subgrupo de isotropia de $0 \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto das aplicações afins da forma $T(x) = Bx$, que é isomorfo a $O(n)$. Portanto, pelo teorema 2.10, segue que φ_0 fornece um difeomorfismo entre $A(n)/O(n)$ e $\mathbb{R}^n$.

Conseguimos assim explicitar o espaço euclidiano como o espaço homogêneo $A(n)/O(n)$. Vamos explicitá-lo agora como um espaço homogêneo simétrico. Considere a matriz

$$S = \begin{pmatrix} -\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a involução $\sigma : A(n) \to A(n)$ dada por $\sigma(T) = STS$. Se $T = \begin{pmatrix} T' & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então para que $T \in \mathrm{Fix}(\sigma)$, devemos ter

$$TS = \begin{pmatrix} -T' & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T' & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ST,$$

o que implica $u = 0$. Analogamente, não é difícil verificar que toda matriz desta forma pertence a $\mathrm{Fix}(\sigma)$, e assim $\mathrm{Fix}(\sigma) = O(n)$. Então temos o espaço homogêneo simétrico $G/H = A(n)/O(n)$.

Como anteriormente, o subespaço horizontal $\mathfrak{m}$ é o conjunto das matrizes $B \in \mathfrak{g}$ tais que $SBS = -B$. Se $B = \begin{pmatrix} B' & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$SBS = \begin{pmatrix} B' & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B' & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica $B' = 0$. É fácil ver que toda matriz em $\mathfrak{g}$ desta forma satisfaz $SBS = -B$, de modo que

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Se $B \in \mathfrak{g}$, então a representação adjunta em $\mathfrak{m}$ fica:

$$\mathrm{ad} \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B'u \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é essencialmente a ação usual de $O(n)$ em $\mathbb{R}^n$. Induzindo o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ em $\mathfrak{m}$ teremos que se $U, V \in \mathfrak{m}$, então $< U, V >= \mathrm{tr}(U^T V)$ e este produto é, portanto, invariante por $\mathrm{ad}(O(n))$. Como nos exemplos anteriores, podemos definir uma métrica G-invariante em G/H. Se $U \in \mathfrak{m}$ corresponde a $u \in \mathbb{R}^n$, então $(\varphi_0)_* X = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, e portanto é uma isometria em $[0]$. Como anteriormente, mostra-se que φ_0 é na verdade uma isometria de G/H em $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica.

As geodésicas de G/H começando em $[0]$ são as curvas da forma $\pi(\exp(tX))$ com $X \in \mathfrak{m}$. Por exemplo, se $X \in \mathfrak{m}$ corresponde a $u \in \mathbb{R}^n$, então

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sua realização em $\mathbb{R}^n$ é

$$\varphi_{e_0}(\pi(\exp tX)) = \exp(tX)\cdot e_0 = \begin{pmatrix} t\cdot u \\ 1 \end{pmatrix}$$

a qual representa a reta $t \mapsto t\cdot u$ em $\mathbb{R}^n$. Fica realizada então a Geometria Euclidiana $\mathbb{R}^n$ como o espaço homogêneo simétrico $A(n)/O(n)$.

Capítulo 3

Simetrias em Física

Neste capítulo apresentaremos uma maneira de ver como conexões em fibrados principais se relacionam com alguns temas oriundos da física (mais especificamente física teórica). O que mostraremos, com exemplos, é que existem certas intensidades em espaços que são estudados pela física, que correspondem a expressões locais de conexões em certos fibrados principais, permitindo traduzir de algum modo o estudo de um objeto da física no estudo de um objeto geométrico. Antes de começar, é necessário entender um pouco da álgebra dos quatérnios e em seguida os espaços projetivos.

3.1 Álgebra dos Quatérnios e Espaços Projetivos

Existem algumas maneiras diferentes de apresentar a álgebra dos quatérnios. Aqui apresentaremos duas, e ambas serão usadas, fazendo a mudança de ponto de vista sempre que for conveniente. Como primeiro ponto de vista, podemos apresentar a álgebra dos quatérnios como uma subálgebra da álgebra das matrizes de ordem 2 com coeficientes complexos. Seja

$$\mathfrak{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C}).$$

Como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathfrak{R}$ tem dimensão 4, tendo como base canônica o conjunto de matrizes:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos então um isomorfismo de espaços vetoriais dado por

$$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k} \mapsto (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4.$$

Podemos assim definir um produto interno em $\mathfrak{R}$, exigindo que este isomorfismo seja uma isometria. Note daí que se $\alpha = x_0 + i x_1$, $\beta = x_2 + i x_3$ e $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, então $\|x\|^2$ é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

Podemos também ver, como segundo ponto de vista, a álgebra dos quatérnios como sendo o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto induzido de $\mathfrak{R}$, fazendo do isomorfismo de espaços vetoriais do parágrafo anterior um isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Valem as seguintes relações:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$$
$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Denotaremos por $\mathbb{H}$ a álgebra $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ e chamaremos ela de **álgebra dos quatérnios** (ou a álgebra $\mathfrak{R}$, pois são isomorfas). Note que, pelas relações acima, esta álgebra é não comutativa. Todo elemento de $\mathbb{H}$ pode ser escrito como $q = x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$. Definimos $\mathrm{Re}(q) = x_0$ e $\mathrm{Im}(q) = x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$. Se $\mathrm{Im}(q) = 0$, chamamos q de quatérnio real. O conjunto destes é naturalmente isomorfo (como álgebra) a $\mathbb{R}$, e, além disso, este é exatamente o centro da álgebra $\mathbb{H}$. O conjunto dos quatérnios para os quais $\mathrm{Re}(q) = 0$ são chamados de quatérnios imaginários puros e é denotado por $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Como nos complexos, definimos o conjugado de q por $\overline{q} = x_0 \cdot \mathbf{1} - x_1 \cdot \mathbf{i} - x_2 \cdot \mathbf{j} - x_3 \cdot \mathbf{k}$.

Valem as relações abaixo para todos $q, q' \in \mathbb{H}$ e $c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} a)\ \overline{cq + dq'} = c\overline{q} + d\overline{q}' & b)\ \overline{\overline{q}} = q \\ c)\ |\overline{q}| = |q| & d)\ |cq| = |c||q| \\ e)\ \overline{qq'} = \overline{q}'\overline{q} & f)\ |qq'| = |q||q'| \end{array}$$

Além destas, temos também que $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$, e para $q, q' \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, valem $\overline{qq'} = q'q$ e $qq' - q'q = 2\mathrm{Im}(qq')$. Todo elemento não nulo $q \in \mathbb{H}$ tem um inverso, o qual é dado por $q^{-1} = \overline{q} \cdot |q|^{-2}$, mostrando que $\mathbb{H}$ é um corpo não comutativo.

Considere o conjunto dos quatérnios unitários $\{x \in \mathbb{H}; |q| = 1\}$. Pelas propriedades acima, vemos que este conjunto é na verdade um grupo com a operação de multiplicação de $\mathbb{H}$. Como conjunto de matrizes, note que toda matriz $A \in \mathfrak{R}$ satisfaz $AA^* = \det A \cdot I$ (A^* denota a matriz transposta conjugada de A, isto é, $A^* = \overline{A}^t$), e da relação $|A|^2 = \det A$, segue que toda matriz de norma 1 em $\mathfrak{R}$ é unitária, formando portanto um subconjunto de $SU(2)$. Por outro lado, podemos verificar facilmente que toda matriz de $SU(2)$ está em $\mathfrak{R}$ e tem norma 1, de modo que, como conjunto de matrizes, o conjunto dos quatérnios unitários nada mais é do que o grupo $SU(2)$. Por outro lado, pensando $\mathbb{H}$ como o conjunto $\mathbb{R}^4$, o conjunto dos vetores de norma 1 é exatamente a esfera S^3, e assim, podemos induzir a estrutura de grupo de $SU(2)$ em S^3, de modo que agora sejam grupos isomorfos.

O conjunto $\mathbb{H}^n = \{(q_1,...,q_n); q_j \in \mathbb{H}\}$ é $\mathbb{R}^{4n}$ como $\mathbb{R}$ espaço vetorial, mas também pode ser pensado como um $\mathbb{H}$-módulo à direita com as operações:

$$(q_1,...,q_n)+(q_1',...,q_n') = (q_1+q_1',...,q_n+q_n')$$

e

$$(q_1,...,q_n)\cdot q = (q_1\cdot q,...,q_n\cdot q).$$

Podemos definir também um produto interno canônico em $\mathbb{H}^n$, colocando

$$<(q_i),(q_i')>=\sum_i \overline{q_i}q_i' \in \mathbb{H}.$$

Este produto é não degenerado no seguinte sentido: se $<\xi,\eta>=0$ para todo η, então $\xi=0$. Existe também uma base canônica $\{e_1,...,e_n\}$ para $\mathbb{H}^n$, em que $e_j = (0,...,\mathbf{1},...,0)$. Um endomorfismo P de $\mathbb{H}^n$, isto é, um morfismo do $\mathbb{H}$-módulo $\mathbb{H}^n$ nele próprio, é inteiramente determinado pela matriz $(p_{ij}) \in M_n(\mathbb{H})$ definida por $P(e_j) = \sum_i e_i p_{ij}$. A matriz (p_{ij}), também denotada por P, é chamada de matriz de P na base canônica $\{e_1,...,e_n\}$, como é feito usualmente no caso de espaços vetoriais. O conjunto de tais endomorfismos é denotado por $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^n$. Se $Q:\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ é um outro endomorfismo, então a composição $Q\circ P$ também é um endomorfismo e sua matriz na base canônica é a matriz produto definida por

$$Q\cdot P = \left(\sum_i q_{ki}p_{ij}\right).$$

Deste modo, temos um isomorfismo de $\mathbb{H}$-álgebras $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^n \to M_n(\mathbb{H})$, $P \mapsto (p_{ij})$. Além disso, $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^n$ é bijetiva se, e somente se, (p_{ij}) é invertível. O conjunto das matrizes invertíveis em $M_n(\mathbb{H})$ é um grupo com a operação de multiplicação de matrizes e é denotado por $GL(n,\mathbb{H})$ (que corresponde ao grupo dos endomorfismos invertíveis em $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^n$).

Note que $P \in M_n(\mathbb{H})$ satisfaz $<P\xi,P\eta>=<\xi,\eta>$, para todos $\xi,\eta \in \mathbb{H}^n$, se, e somente se, $P^*P = \mathrm{Id}$. O conjunto de tais matrizes é um grupo e é denotado por $Sp(n)$, chamado de **grupo**

simplético de ordem n. Em particular, para $n=1$, note que $< P\xi, P\eta >= \overline{P\xi}P\eta = \overline{\xi}\,\overline{P}P\eta = \overline{\xi}\eta$ para todos os $\xi,\eta\in\mathbb{H}$ se, e somente se, $\overline{P}P=1$, e portanto $Sp(1)=S^3\cong SU(2)$.

Existe ainda outra maneira de ver o grupo simplético $Sp(n)$. Para cada $q=x_0+x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$, escreva $z_1=x_0+x_1\mathbf{i}$ e $z_2=x_2+x_3\mathbf{i}$, então $z_1+z_2\mathbf{j}=q$. Assim podemos identificar $\mathbb{H}$ com $\mathbb{C}^2$ via a aplicação $q\mapsto(z_1,z_2)$. Dada $P\in M_n(\mathbb{H})$, escrevendo $P=A+B\cdot\mathbf{j}$, com $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, defina

$$\phi(P)=\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Então ϕ é um monomorfismo da álgebra $M_n(\mathbb{H})$ na álgebra $M_{2n}(\mathbb{C})$ e é tal que $\phi(\overline{P}^t)=\overline{\phi(P)}^t$. Apesar da não comutatividade de $\mathbb{H}$, podemos definir o determinante de uma matriz $P\in M_n(\mathbb{H})$ por $\det P := \det\phi(P)$. Mostra-se que P é invertível se, e somente se, $\phi(P)$ é invertível. Segue então que, com a estrutura canônica de variedade diferenciável de $M_n(\mathbb{H})$, $GL(n,\mathbb{H})$ é um subconjunto aberto.

Da igualdade $\phi(\overline{P}^t)=\overline{\phi(P)}^t$ temos que $P\in Sp(n)$ se, e somente se, $\phi(P)\in U(2n)$. Assim, podemos identificar $Sp(n)$ com os elementos de $U(2n)$ da forma $\begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}$.

Há uma caracterização de tais matrizes da forma acima. Note que $M\in M_{2n}(\mathbb{C})$ tem a forma acima se, e somente se, $JMJ^{-1}=\overline{M}$, em que

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0\end{pmatrix}.$$

Se M é unitária, então a condição $JMJ^{-1}=\overline{M}$ é equivalente a $M^tJM=J$. Assim, podemos identificar $Sp(n)$ como o subgrupo de $U(2n)$ cujos elementos M satisfazem $M^tJM=J$. $GL(n,\mathbb{H})$ é identificado como o grupo das matrizes invertíveis $2n\times 2n$ tais que $JMJ^{-1}=\overline{M}$. Temos também o grupo linear especial $SL(n,\mathbb{H})$, definido como o conjunto de matrizes quaterniônicas P para as quais $\det\phi(P)=1$, o qual é evidentemente subgrupo de $GL(n,\mathbb{H})$. Podemos identificar $SL(n,\mathbb{H})$ como o conjunto das matrizes $M\in M_{2n}(\mathbb{C})$ tais que $JMJ^{-1}=\overline{M}$ e $\det M=1$.

Passaremos agora a descrever brevemente os espaços projetivos. Seja $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, e fixe $n\geq 2$. Definimos uma relação de equivalência em $\mathbb{F}^n$ colocando $\xi\equiv\eta$ se existe $a\in\mathbb{F}$ não nulo para o qual $\eta=\xi\cdot a$. A classe de equivalência de ξ é $[\xi]=\{\xi\cdot a; a\in\mathbb{F}-\{0\}\}$. O espaço quociente por essa relação de equivalência é denotado por $\mathbb{FP}^{n-1}$ e é chamado de **espaço projetivo** de dimensão $n-1$. Denote por π a projeção canônica $\pi(\xi)=[\xi]$ e coloque neste espaço projetivo a topologia quociente.

Podemos ver também $\mathbb{FP}^{n-1}$ como um quociente da esfera $S = \{\xi \in \mathbb{F}^n; <\xi,\xi>=1\}$ e mostrar que induz a mesma topologia quociente. Desta maneira, se $\xi \in S$, então sua classe agora é $[\xi] = \{\xi \cdot a; a \in \mathbb{F} \text{ e } |a| = 1\}$.

Mostraremos que $\mathbb{FP}^{n-1}$ é uma variedade diferenciável (real). Note primeiramente que se $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in S$, então $\xi_k \neq 0$ se, e somente se $\xi_k \cdot a \neq 0$ para todo $a \in \mathbb{F}$ tal que $|a| = 1$. Assim, tem sentido dizer que $[\xi] \in \mathbb{FP}^{n-1}$ satisfaz $\xi_k \neq 0$. Para cada $k = 1,2,...,n$ defina

$$V_k = \{[\xi] \in \mathbb{FP}^{n-1}; \xi_k \neq 0\},$$

de modo que $\pi^{-1}(V_k) = \{\xi \in S; \xi_k \neq 0\}$ é um aberto em S. Pela definição de topologia quociente, segue que V_k é aberto em $\mathbb{FP}^{n-1}$. Definimos então uma aplicação $f_k : V_k \to \mathbb{F}^{n-1}$ por

$$\begin{aligned} f_k([\xi]) &= f_k([\xi_1,...,\xi_k,...,\xi_n]) \\ &= \left(\xi_1(\xi_k)^{-1},...,\hat{1},...,\xi^n(\xi_k)^{-1}\right) \end{aligned}$$

em que $\hat{1}$ denota que 1 foi deletado na posição k. A inversa de f_k é dada por

$$f_k^{-1}(x_1,...,x_{n-1}) = [x_1,...,1,...,x_{n-1}]$$

onde 1 aparece na posição k. Das expressões de f_k e sua inversa, concluímos que f_k nos fornece um homeomorfismo de V_k em $\mathbb{F}^{n-1}$. Para analisar as funções de transição, fixe $k, j \in \{1,2,...,n\}$ e analisemos a diferenciabilidade de

$$f_k \circ f_j^{-1} : f_j(V_k \cap V_j) \to f_k(V_k \cap V_j).$$

A escrita no caso geral deve ficar clara se escrevermos a expressão da função acima apenas para $k = 2$ e $j = 1$ (caso particular que será de interesse posterior):

$$f_2 \circ f_1^{-1}(x_2,...,x_n) = f_2([1,x_2,...,x_n]) = ((x_2)^{-1}, x_3(x_2)^{-1},...,x_n(x_2)^{-1}).$$

Segue então que, pela expressão das funções de transição, (V_k, f_k) fornece um atlas para $\mathbb{FP}^{n-1}$. Em particular, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, as funções de transição acima são de fato analíticas, de modo que $\mathbb{CP}^{n-1}$ tem uma estrutura de variedade complexa, mas não é nessa estrutura que nos concentraremos, só nos importará a estrutura como variedade real.

No caso de $n=2$, (V_1, f_1) e (V_2, f_2) fornecem um atlas para $\mathbb{FP}^1$. Note que

$$f_2 \circ f_1^{-1}(a) = f_2([1,a]) = a^{-1},$$

e o mesmo acontece para $f_1 \circ f_2^{-1}$. Assim, $f_1(V_1 \cap V_2) = f_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{F} - \{0\}$. Para descrevermos certas identificações dos espaços projetivos no caso $n=2$, vamos modificar um pouco a carta f_1. Defina $\overline{f}_1 : V_1 \to \mathbb{F}$ colocando $\overline{f}_1([\xi]) = \overline{f_1([\xi])}$ (se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ colocamos $\overline{a} = a$). Então $(V_1, \overline{f}_1)$ ainda é uma carta para $\mathbb{FP}^1$ (como variedade real), e com esse ajuste temos

$$f_2 \circ \overline{f}_1^{-1}(a) = \overline{a}^{-1} = \overline{f}_1 \circ f_2^{-1}(a), a \in \mathbb{F} - \{0\}.$$

Usaremos esta expressão para mostrar os seguintes difeomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^1 &\cong S^1 \\ \mathbb{CP}^1 &\cong S^2 \\ \mathbb{HP}^1 &\cong S^4 \end{aligned}$$

Para fazer isso, vamos lembrar primeiramente como eram definidas as projeções estereográficas na esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam $N = (0, ..., 0, 1)$ e $S = (0, ..., 0, -1)$ os pólos norte e sul na esfera S^n, respectivamente. Sejam $U_S = S^n - \{N\}$ e $U_N = S^n - \{S\}$. Defina $p_S : U_S \to \mathbb{R}^n$ e $p_N : U_N \to \mathbb{R}^n$ por

$$p_S(\xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1}) = \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_{n+1}}, ..., \frac{\xi_n}{1 - \xi_{n+1}} \right)$$

e

$$p_N(\xi_1, ..., \xi_n, \xi_{n+1}) = \left(\frac{\xi_1}{1 + \xi_{n+1}}, ..., \frac{\xi_n}{1 + \xi_{n+1}} \right).$$

As inversas dessas projeções em $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ são

$$p_S^{-1}(x) = (1 + |x|^2)^{-1}(2x_1, ..., 2x_n, |x|^2 - 1)$$

e

$$p_N^{-1}(x) = (1 + |x|^2)^{-1}(2x_1, ..., 2x_n, 1 - |x|^2),$$

de modo que para cada $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, vale

$$p_S \circ p_N^{-1}(x) = \frac{1}{|x|^2} x = p_N \circ p_S^{-1}(x).$$

Para mostrar os difeomorfismos mencionados, vamos considerar as projeções estereográficas (U_S, p_S) e (U_N, p_N) de S^1, S^2 e S^4 como aplicações em $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ respectivamente. Então, para todo $a \in \mathbb{F} - \{0\}$ temos $p_S \circ p_N^{-1}(a) = \overline{a}^{-1} = p_N \circ p_S^{-1}(a)$. Temos assim difeomorfismos $p_S^{-1} \circ f_2 : V_2 \to U_S$ e $p_N^{-1} \circ \overline{f}_1 : V_1 \to U_N$. Estes difeomorfismos coincidem em $V_1 \cap V_2$. De fato, dado $[\xi] \in V_1 \cap V_2$, então $f_2([\xi]) \in f_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{F} - \{0\}$, mas, em $\mathbb{F} - \{0\}$, $\overline{f}_1 \circ f_2^{-1} = p_N \circ p_S^{-1}$, daí:

$$
\begin{array}{rcl}
(\overline{f}_1 \circ f_2^{-1})(f_2[\xi])) & = & (p_N \circ p_S^{-1})(f_2[\xi]) \\
\overline{f}_1[\xi] & = & p_N(p_S^{-1} \circ f_2)[\xi] \\
p_N^{-1} \circ \overline{f}_1[\xi] & = & p_S^{-1} \circ f_2[\xi]
\end{array}
$$

Como $V_1 \cup V_2 = \mathbb{FP}^1$ e $U_N \cup U_S$ é a esfera, temos que a colagem destes difeomorfismos fornece os difeomorfismos requeridos.

3.2 Fibrados de Hopf

Nesta seção introduziremos os fibrados de Hopf a partir dos espaços projetivos descritos na seção anterior.

1. Para o caso de $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, temos a projeção canônica $\pi : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Primeiramente veja que $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ age à direita em S^{n-1} colocando, para cada $x \in S^{n-1}$, $x \cdot (+1) = x$ e $x \cdot (-1) = -x$, que evidentemente é ação livre. Para cada $k = 1, 2, ..., n$, sejam

   $$U_k^+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}; x_k > 0\}, U_k^- = \{x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}; x_k < 0\},$$

   os quais formam uma cobertura aberta de S^{n-1} e são disjuntos para cada k. A restrição de π a qualquer um deles é injetiva e, mais que isso, é uma aplicação aberta, o que implica que $\pi(U_k^\pm)$ é um aberto em $\mathbb{RP}^{n-1}$ difeomorfo a $U_k^\pm$. Defina então

   $$
   \begin{array}{rcl}
   \psi_k : \pi^{-1}(\pi(U_k^\pm)) & \longrightarrow & \pi(U_k^\pm) \times \mathbb{Z}_2 \\
   x & \longmapsto & (\pi(x), \varphi_k(x))
   \end{array}
   $$

   em que $\varphi_k(x) = +1$ se $x \in U_k^+$ e $\varphi_k(x) = -1$ se $x \in U_k^-$. Verifica-se facilmente que as aplicações ψ_k são trivializações locais. Temos assim um fibrado principal $S^{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$.

2. Para o caso de $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, temos a projeção canônica $\pi : S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$. Pensando $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $S^{2n-1} = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n; \overline{z_1} z_1 + ... + \overline{z_n} z_n = 1\}$, temos que S^1 age à direita de S^{2n-1} colocando,

para cada $z \in S^1$ e $(z_1,...,z_n) \in S^{2n-1}$, $(z_1,...,z_n)\cdot z = (z_1 \cdot z, ..., z_n \cdot z)$. Na mesma notação de antes, temos as cartas (V_k, f_k) de $\mathbb{CP}^{n-1}$, e daí podemos definir

$$\begin{aligned} \psi_k : \pi^{-1}(V_k) &\longrightarrow V_k \times S^1 \\ \xi = (z_1,...,z_n) &\longmapsto (\pi(\xi), \varphi_k(\xi)) \end{aligned}$$

em que $\varphi_k(\xi) = z_k \cdot |z_k|^{-1}$. A inversa de ψ_k em $([z_1,...,z_n], z)$ é

$$\psi_k([z_1,...,z_n], z) = (z_1 z_k^{-1}|z_k|z, ..., z_n z_k^{-1}|z_k|z).$$

Verifica-se que as aplicações ψ_k são trivializações locais, e portanto temos um fibrado principal $S^{2n-1}(\mathbb{CP}^{n-1}, S^1)$.

3. Este item é muito semelhante ao item 2. Temos a projeção $\pi : S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$ e pensamos $S^3 \subset \mathbb{H}$ e $S^{4n-1} = \{(q_1,...,q_n) \in \mathbb{H}^n; \overline{q_1}q_1 + ... + \overline{q_n}q_n = 1\}$. A ação de S^3 em S^{4n-1} é definida de maneira semelhante à do item anterior, $(q_1,...,q_n)\cdot q = (q_1 \cdot q, ..., q_n \cdot q)$, e acontece o mesmo com as aplicações ψ_k:

$$\begin{aligned} \psi_k : \pi^{-1}(V_k) &\longrightarrow V_k \times S^3 \\ \xi = (q_1,...,q_n) &\longmapsto (\pi(\xi), \varphi_k(\xi)) \end{aligned}$$

com $\varphi_k(\xi) = q_k|q_k|^{-1}$. Teremos assim um fibrado principal $S^{4n-1}(\mathbb{HP}^{n-1}, S^3)$.

Resumindo, temos os chamados **Fibrados de Hopf**:

$$S^{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}, \mathbb{Z}_2), \quad S^{2n-1}(\mathbb{CP}^{n-1}, S^1), \quad S^{4n-1}(\mathbb{HP}^{n-1}, S^3).$$

Em particular quando $n = 2$, usando os difeomorfismos citados na seção anterior, temos os fibrados

$$S^1(S^1, \mathbb{Z}_2), \quad S^3(S^2, S^1), \quad S^7(S^4, S^3).$$

É comum distinguir estes fibrados entre a classe dos fibrados de Hopf reais, complexos e quaterniônicos. O que pretendemos fazer agora é mostrar que existem conexões naturais nos fibrados complexo e quaterniônico no caso $n = 2$, e calcularemos as curvaturas correspondentes. Para fazer isso, precisaremos primeiro descrever mais explicitamente as aplicações que envolvem cada um desses fibrados, para daí fazer contas com a forma de conexão e curvatura em cada caso.

3.2.1 Fibrado Complexo

Nos atentaremos agora ao fibrado complexo de Hopf $S^3(\mathbb{CP}^1, S^1)$. Temos duas trivializações (V_i, ψ_i), $i = 1,2$, e duas seções locais associadas $s_i : V_i \to \pi^{-1}(V_i)$ dadas por

$$s_1([z_1,z_2]) = \left(|z_1|, \frac{z_2 \cdot |z_1|}{z_1}\right) \text{ e } s_2([z_1,z_2]) = \left(\frac{z_1 \cdot |z_2|}{z_2}, |z_2|\right).$$

Lembramos que a aplicação $p_S^{-1} \circ f_2$ fornece um difeomorfismo entre $\mathbb{CP}^1$ e S^2. Algumas contas mostram que este difeomorfismo pode ser escrito da seguinte forma:

$$p_S^{-1} \circ f_2([z_1,z_2]) = (2z_1\overline{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Verifica-se que se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$ e $-iz_1\overline{z}_2 + i\overline{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2)$, de modo que

$$2z_1\overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) + (-iz_1\overline{z}_2 + i\overline{z}_1 z_2).$$

Podemos escrever a projeção $\pi : S^3 \to S^2$ nestes termos:

$$\pi(z_1,z_2) = (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2, -iz_1\overline{z}_2 + i\overline{z}_1 z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$

Dado um ponto $(z_1,z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$, podemos escrever $z_1 = r_1 e^{i\xi_1}$ e $z_2 = r_1 e^{i\xi_2}$ com $r_1, r_2 \geq 0$ e $r_1^2 + r_2^2 = 1$, daí existe $\phi \in [0,\pi]$ tal que $r_1 = \cos(\phi/2)$ e $r_2 = \mathrm{sen}(\phi/2)$, de modo que

$$S^3 = \left\{\left(\cos(\phi/2)e^{i\xi_1}, \mathrm{sen}(\phi/2)e^{i\xi_2}\right); 0 \leq \phi/2 \leq \pi/2 \text{ e } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Nestas coordenadas π é expressa por

$$\pi(\phi, \xi_1, \xi_2) = (\mathrm{sen}\phi\cos\theta, \mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta, \cos\phi),\ \theta = \xi_1 - \xi_2,$$

que é justamente uma parametrização de S^2 por coordenadas esféricas. Por outro lado, dado um ponto $(\mathrm{sen}\phi\cos\theta, \mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta, \cos\phi) \in S^2$, qualquer par da forma

$$(z_1,z_2) = (\cos(\phi/2)e^{i\xi_1}, \mathrm{sen}(\phi/2)e^{i\xi_2}) \in S^3,$$

com $\xi_1 - \xi_2 = \theta$, satisfaz

$$\left(|z_1|, \frac{z_2|z_1|}{z_1}\right) = \left(\cos(\phi/2), \mathrm{sen}(\phi/2)e^{-i\theta}\right)$$

e
$$\left(\frac{z_1|z_2|}{z_2}, |z_2|\right) = \left(\cos(\phi/2)e^{i\theta}, \operatorname{sen}(\phi/2)\right).$$

Lembrando que pelo difeomorfismo $p_S^{-1} \circ f_2$ o subconjunto V_2 corresponde a U_S, e por $p_N^{-1} \circ \overline{f}_1$ o subconjunto V_1 corresponde a U_N, então as seções locais s_1 e s_2 correspondem, respectivamente, às seções $s_N : U_N \longrightarrow S^3$ e $s_S : U_S \longrightarrow S^3$, de modo que, pela expressão calculada acima temos
$$s_N(\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) = \left(\cos\frac{\phi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}e^{-i\theta}\right)$$
e
$$s_S(\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) = \left(\cos\frac{\phi}{2}e^{i\theta}, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right).$$

Com a identificação usual $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$ e sendo $\iota : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a inclusão, então

$$\iota \circ s_N(\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) = \left(\cos\frac{\phi}{2}, 0, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\theta, -\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\iota \circ s_S(\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) = \left(\cos\frac{\phi}{2}\cos\theta, \cos\frac{\phi}{2}\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}, 0\right)$$

Considere agora a 1-forma $\tilde{\alpha}$ em $\mathbb{R}^4$ definida, relativamente as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^4$, por
$$\tilde{\alpha} = -x_2dx_1 + x_1dx_2 - x_4dx_3 + x_3dx_4$$

e sua restrição
$$\alpha = \iota^*\tilde{\alpha}$$

a S^3. Mostra-se sem dificuldades que $\omega = i \cdot \alpha$ é uma conexão neste fibrado complexo. Vamos nos referir a esta conexão como a conexão canônica do fibrado complexo de Hopf. Usaremos agora os calibres s_N e s_S para expressar os potenciais de calibre correspondentes da conexão canônica (a menos do fator i, apenas para não carregar a notação) e em seguida encontraremos as intensidades correspondentes. Mas observe primeiramente que, como o grupo do fibrado complexo é S^1, que é abeliano, para encontrar as intensidades precisamos apenas diferenciar (usualmente) os potenciais de calibre, já que na expressão da curvatura o termo envolvendo o colchete é nulo.

$$\begin{aligned}
(s_N^*\alpha)(\phi,\theta) &= ((\iota\circ s_N)^*\tilde{\alpha})(\phi,\theta)\\
&= -0\cdot d\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)+\cos\frac{\phi}{2}d(0)+\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\mathrm{sen}\theta\, d\left(\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\cos\theta\right)\\
&\quad +\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\cos\theta\, d\left(-\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\mathrm{sen}\theta\right)\\
&= \mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\mathrm{sen}\theta\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\cos\theta\, d\phi-\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\mathrm{sen}\theta\, d\theta\right)\\
&\quad -\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\cos\theta\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\mathrm{sen}\theta\, d\phi+\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}\cos\theta\, d\theta\right)\\
&= -\mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2}d\theta\\
&= -\frac{1}{2}(1-\cos\phi)d\theta
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que em U_S temos $(s_S^*\alpha)(\phi,\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\phi)d\theta$. Portanto, as intensidades correspondentes (a menos do fator i) se expressam por

$$F_N = d\left(-\frac{1}{2}(1-\cos\phi)d\theta\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\phi\, d\phi\wedge d\theta$$

e

$$F_S = d\left(\frac{1}{2}(1+\cos\phi)d\theta\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\phi\, d\phi\wedge d\theta.$$

Observe que as expressões acima são as mesmas, o que nos permite definir uma 2-forma F globalmente em S^2. Segue então que a intensidade $\mathscr{F}=iF$ neste caso é definida globalmente em S^2. Enfatizamos novamente que isto aconteceu (e isto não acontecerá no caso da conexão canônica no fibrado quaterniônico) porque S^1 é abeliano (o que não é verdade no caso de $SU(2)$). Comentaremos agora um fato interessante, no qual veremos uma outra maneira de entender a forma ω, expressando uma relação entre esta conexão e a forma de Maurer Cartan de $SU(2)$.

Se $A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, então o único campo invariante à esquerda em $GL(n,\mathbb{C})$ cujo valor na identidade é A é, em cada $g\in GL(n,\mathbb{C})$, o vetor $g\cdot A\in T_gGL(n,\mathbb{C})\cong\mathbb{R}^{2n}$, de modo que podemos escrever a forma de Maurer-Cartan de $GL(n,\mathbb{C})$ como o produto $\Theta(g)=g^{-1}dz(g)$, onde dz é a matriz das formas dz_{ij}.

A forma de Maurer Cartan de $SU(2)$ é a restrição a $SU(2)$ da forma de Maurer Cartan de

$GL(2,\mathbb{C})$. Dado $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$, temos que a forma de Maurer Cartan de $SU(2)$ em g é a restrição de

$$g^{-1}dz = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dz_{11} & dz_{12} \\ dz_{21} & dz_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}dz_{11} - \beta dz_{21} & \overline{\alpha}dz_{12} - \beta dz_{22} \\ \overline{\beta}dz_{11} + \alpha dz_{21} & \overline{\beta}dz_{12} + \alpha dz_{22} \end{pmatrix}$$

a $T_gSU(2)$. Como $\mathfrak{su}(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}); \overline{A}^t = -A \text{ e } \mathrm{tr}(A) = 0\}$, segue que a entrada 11 (e também a entrada 22) da forma de Maurer Cartan de $SU(2)$ é imaginária pura. Além disso, temos que $-\overline{\beta} = z_{21}(g)$ e portanto a entrada 11 da forma de Maurer Cartan de $SU(2)$ é a restrição a $SU(2)$ da forma $\mathrm{Im}(\overline{z}_{11}dz_{11} + \overline{z}_{21}dz_{21})$.

O interessante é que a forma $\mathrm{Im}(\overline{z}_{11}dz_{11} + \overline{z}_{21}dz_{21})$ já apareceu antes. Se $z_{11} = x_1 + ix_2$ e $z_{21} = x_3 + ix_4$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\overline{z}_{11}dz_{11} + \overline{z}_{21}dz_{21}) &= \mathrm{Im}((x_1 - ix_2)(dx_1 + idx_2) + (x_3 - ix_4)(dx_3 + idx_4)) \\ &= -x_2dx_1 + x_1dx_2 - x_4dx_3 + x_3dx_4, \end{aligned}$$

que é justamente a forma $\tilde{\alpha}$. Assim, a conexão canônica do fibrado complexo é a restrição a $SU(2)$ da forma $i \cdot \mathrm{Im}(\overline{z}_{11}dz_{11} + \overline{z}_{21}dz_{21})$.

Descreveremos agora o conceito de monopolo magnético introduzido por Dirac e relacionaremos este conceito com a conexão canônica do fibrado $S^3(S^2, S^1)$. Lembramos que uma carga elétrica pontual q, em repouso na origem de um referencial inercial, determina um campo elétrico $\vec{E}$ descrito nesse referencial de acordo com a Lei de Coulomb: $\vec{E} = (q/\rho^2)\hat{e}_\rho$, para $\rho \neq 0$ (aqui estamos escrevendo em coordenadas esféricas ρ, ϕ, θ com vetores coordenados unitários $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi$ e $\hat{e}_\theta$). O campo magnético correspondente, $\vec{B}$, é identicamente nulo neste referencial: $\vec{B} = 0, \rho \neq 0$. Em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem as chamadas equações de Maxwell estáticas:

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \mathrm{rot}\vec{E} = 0 \quad \mathrm{rot}\vec{B} = 0 \ .$$

Paul Dirac procurava uma maneira de justificar o porquê da carga elétrica ser quantizada, isto é, aparecer apenas em quantidades múltiplas de alguma quantidade básica de carga. Para isso, ele pensou que deveria existir um "análogo" magnético para a carga elétrica. A ideia é supor que exista uma partícula tal que quando está em repouso na origem de algum referencial inercial, ela determina um campo eletromagnético descrito neste referencial por

$$\vec{E}=0, \quad \vec{B}=\frac{g}{\rho^2}\hat{e}_\rho, \quad \rho \neq 0$$

onde g é uma constante, chamada a **carga do monopolo**. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também satisfazem as equações de Maxwell estáticas. O campo $\vec{B}$ assim definido não possui um potencial vetor em $\mathbb{R}^3-\{0\}$ (isto é, um campo $\vec{A}$ diferenciável em $\mathbb{R}^3-\{0\}$ tal que $\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{B}$). Assim como o fibrado de Hopf complexo só pode ser descrito por no mínimo duas trivializações locais (veremos posteriormente que este fibrado não é trivial), precisamos de pelo menos dois potenciais vetores locais para descrever $\vec{B}$. Lembrando primeiramente que se $\vec{A}=A_\rho\hat{e}_\rho+A_\phi\hat{e}_\phi+A_\theta\hat{e}_\theta$ é um campo diferenciável escrito em coordenadas esféricas, então

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{A} &= \frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\theta\,\mathrm{sen}\phi)-\frac{\partial}{\partial\theta}A_\phi\right)\hat{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}A_\rho-\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\theta)\right)\hat{e}_\phi\\ &+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi)-\frac{\partial}{\partial\phi}A_\rho\right)\hat{e}_\theta.\end{aligned}$$

Defina $Z_-=\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3; z\leq 0\}$ (chamada uma **corda de Dirac**) e seu complemento $U_+=\mathbb{R}^3-Z_-$. Usando a expressão acima para o rotacional em coordenadas esféricas, verifica-se que o campo

$$\vec{A}_+(\rho,\phi,\theta)=\frac{g}{\rho\,\mathrm{sen}\phi}(1-\cos\phi)\hat{e}_\theta$$

é um potencial vetor diferenciável para $\vec{B}$ em U_+. De modo análogo, se $Z_+=\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3; z\geq 0\}$ e $U_-=\mathbb{R}^3-Z_+$, então

$$\vec{A}_-(\rho,\phi,\theta)=\frac{-g}{\rho\,\mathrm{sen}\phi}(1+\cos\phi)\hat{e}_\theta$$

é um potencial vetor diferenciável para $\vec{B}$ em U_-. Na interseção $U_-\cap U_+$ (que é o complemento do eixo z em $\mathbb{R}^3$) os campos $\vec{A}_-$ e $\vec{A}_+$ não coincidem (caso contrário definiriam um potencial vetor em todo o $\mathbb{R}^3-\{0\}$), e de fato, nesta interseção, a diferença entre os campos é $\vec{A}_+-\vec{A}_-=(2g/\rho\,\mathrm{sen}\phi)\hat{e}_\theta$. Por outro lado, lembrando que a expressão do gradiente em coordenadas esféricas é

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{e}_\phi+\frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{e}_\theta,$$

vemos que $(2g/\rho\,\mathrm{sen}\phi)\hat{e}_\theta$ é o gradiente de $f=2g\theta$, isto é:

$$\vec{A}_+-\vec{A}_-=\nabla(2g\theta), \text{ em } U_+\cap U_-.$$

Note que se $\vec{A}$ é um potencial vetor para um campo $\vec{B}$, então $\vec{A}+\nabla\Omega$ é também um potencial vetor deste campo para qualquer função diferenciável Ω, já que $\text{rot}(\nabla\Omega)=0$. Para ver como essa observação anterior influi no nosso estudo, consideremos agora uma carga elétrica q se movendo nas vizinhanças do monopolo (pensada como uma carga teste, de modo que seu próprio campo não afeta o monopolo). Desta maneira, a carga pode ser pensada como um objeto da mecânica quântica, o qual pode ser descrito por sua função de onda $\psi(x,y,z,t)$. Tal função toma valores complexos e deve conter toda a informação fisicamente mensurável sobre a carga. A função de onda ψ para q é encontrada resolvendo a chamada equação de Schrödinger para este sistema carga/monopolo. Tal equação é construída escrevendo o Hamiltoniano clássico e substituindo pelas "regras de correspondência" cada quantidade clássica no Hamiltoniano por um operador apropriado. O fato é que o Hamiltoniano para uma carga em um campo eletromagnético envolve a escolha de um potencial vetor, $\vec{A}$, para o campo eletromagnético. É possível mostrar que se trocarmos $\vec{A}$ por $\vec{A}+\nabla\Omega$ na equação de Schrödinger, a solução ψ é trocada por $e^{iq\Omega}\psi$:

$$\vec{A}\longrightarrow\vec{A}+\nabla\Omega\Longrightarrow\psi\longrightarrow e^{iq\Omega}\psi.$$

Note que a observação mostra que uma mudança de potencial vetor muda apenas a fase da função de onda ψ, e não o seu módulo (a fase em coordenadas esféricas é representada pelo ângulo θ). Tais mudanças não têm significado físico já que todas as quantidades físicas mensuráveis associadas à carga q dependem somente do módulo ao quadrado da função de onda. Porém, é observado experimentalmente que tal mudança de fase tem consequências importantes na situação em que existem cargas interagindo, de modo que é necessário entender a fase relativa das cargas.

Voltamos agora ao caso de um carga q se movendo nas vizinhanças de um monopolo. Denote por ψ_+ (respec. ψ_-) a função de onda para a carga q determinada (via equação de Schrödinger) por $\vec{A}_+$ (respec. $\vec{A}_-$). Sabemos que em $U_+\cap U_-$ temos $\vec{A}_+=\vec{A}_-+\nabla(2g\theta)$. Assim, da observação sobre mudança de potenciais vetores feita acima, devemos ter $\psi_+=e^{i(2qg\theta)}\psi_-$. Mas em $U_+\cap U_-$ (o qual contém o círculo $(\rho,\phi,\theta)=(1,\pi/2,\theta)$), para cada t fixado o valor de ψ_+ em $(1,\pi/2,\theta)$ e em $(1,\pi/2,\theta+2\pi)$ deve ser o mesmo. Vale a observação análoga para ψ_-. Isto implica que a mudança $\theta\to\theta+2\pi$ deve deixar $e^{i(2qg\theta)}$ inalterado, daí

$$e^{i(2qg(\theta+2\pi))}=e^{i(2qg\theta)}e^{i(4qg\pi)}.$$

Consequentemente, devemos ter $e^{i(4qg\pi)}=1$, o que acontece se, e somente se, $4qg\pi=2n\pi$

para algum inteiro n. Concluímos assim que

$$qg = \frac{1}{2}n, \text{ para algum inteiro } n.$$

Esta condição acima é chamada de **Condição de quantização de Dirac**, que é interpretada como a asserção de que se existe um monopolo magnético, então a carga elétrica deve ser quantizada.

Escreveremos agora a procura dos potenciais vetores em termos de formas diferenciais. Primeiramente note que $\vec{B} = (g/\rho^2)\hat{e}_\rho = (g/\rho^3)(x,y,z)$ em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, em que $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. A 2-forma correspondente é $F = (g/\rho^3)(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$. Nesta linguagem, um potencial vetor para $\vec{B}$ corresponde a uma 1-forma A tal que $dA = F$. Novamente, não deve existir uma tal forma em todo o $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, entretanto, nos seus respectivos domínios U_+ e U_-, as 1-formas

$$A_+ = \frac{g}{\rho}\frac{1}{z+\rho}(x\,dy - y\,dx)$$

e

$$A_- = \frac{g}{\rho}\frac{1}{z-\rho}(x\,dy - y\,dx)$$

tem a propriedade $dA_+ = F$ e $dA_- = F$. Em coordenadas esféricas estas formas se expressam por:

$$A_+ = g(1-\cos\phi)d\theta$$

e

$$A_- = -g(1+\cos\phi)d\theta.$$

Note pelas expressões acima que elas não dependem de ρ. Isto nos permite fixar $\rho = 1$ e identificar tais formas como sendo formas definidas em S^2 (pelas mesmas expressões), em que U_+ corresponde a U_N e U_- corresponde a U_S. No caso em que a carga é unitária, isto é, $q = 1$, temos que $g = (1/2)n$ para algum inteiro n. Isto nos diz que o menor valor positivo para g é $g = 1/2$ ($n = 1$). Neste caso, as 1-formas para o monopolo são

$$A_N = \frac{1}{2}(1-\cos\phi)d\theta, \text{ em } U_N \subset S^2,$$

e

$$A_S = -\frac{1}{2}(1+\cos\phi)d\theta, \text{ em } U_S \subset S^2.$$

Essas expressões são exatamente aquelas que encontramos para os potenciais de calibre da conexão canônica do fibrado complexo (a menos do fator i). Assim, a conexão canônica do fibrado de Hopf complexo (mais precisamente sua curvatura) corresponde ao campo eletromagnético do monopolo de menor carga magnética. Para finalizar esta seção, voltamos ao caso geral de um monopolo de carga $g = n/2$ e vamos deixar calculada a seguinte expressão (que é associada ao fluxo magnético do campo $\vec{B}$):

$$\frac{i}{2\pi}\int_{S^2}\mathscr{F} = -\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F = -\frac{g}{2\pi}\int_{S^2}\operatorname{sen}\phi\, d\phi\wedge d\theta = -\frac{g}{2\pi}\cdot 4\pi = -2g.$$

Como $g = n/2$, temos portanto que

$$\frac{i}{2\pi}\int_{S^2}\mathscr{F} = -n \in \mathbb{Z}.$$

Posteriormente, voltaremos nossa atenção para o valor inteiro que apareceu acima.

3.2.2 Fibrado Quaterniônico

Analogamente ao caso complexo, se $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{H})$, então o único campo invariante à esquerda em $GL(n,\mathbb{H})$ cujo valor na identidade é A é, em cada $g \in GL(n,\mathbb{H})$, o vetor $g\cdot A \in T_gGL(n,\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^{4n}$, de modo que podemos escrever a forma de Maurer-Cartan como o produto $\Theta(g) = g^{-1}dq(g)$, onde dq é a matriz das formas dq_{ij}.

A forma de Maurer Cartan de $Sp(2)$ é a restrição a $Sp(2)$ da forma de Maurer Cartan de $GL(2,\mathbb{H})$. Dado $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in Sp(2)$, temos que a forma de Maurer Cartan de $Sp(2)$ em g é a restrição de

$$g^{-1}dq = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dq_{11} & dq_{12} \\ dq_{21} & dq_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}dq_{11} - \beta dq_{21} & \overline{\alpha}dq_{12} - \beta dq_{22} \\ \overline{\beta}dq_{11} + \alpha dq_{21} & \overline{\beta}dq_{12} + \alpha dq_{22} \end{pmatrix}$$

a $T_gSp(2)$. Como $\mathfrak{sp}(2) = \{A \in GL(4,\mathbb{C}); \overline{A}^t = -A \text{ e } JA + A^tJ = 0\}$, segue que a entrada 11 da forma de Maurer Cartan de $Sp(2)$ é imaginária pura. Como $-\overline{\beta} = q_{21}(g)$, a entrada 11 da forma de Maurer Cartan de $Sp(2)$ é a restrição a $Sp(2)$ da forma $\operatorname{Im}(\overline{q}_{11}dq_{11} + \overline{q}_{21}dq_{21})$.

O estudo do fibrado complexo nos mostrou que é interessante entender a entrada 11 da forma de Maurer-Cartan de $SU(2)$, pois esta é (a menos do fator i) a conexão canônica do fibrado complexo, a qual está relacionada com o monopolo. Vamos, por analogia, estudar a entrada 11 da forma de Maurer Cartan de $Sp(2)$, que é a restrição da forma $\operatorname{Im}(\overline{q}_{11}dq_{11} + \overline{q}_{21}dq_{21})$

a $Sp(2)$. Esta forma não é, a princípio, uma forma definida em S^7, porém é possível induzir esta forma para uma correspondente em S^7. Veremos agora como isso pode ser feito.

Considere $S^7 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2; |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$ e $Sp(2) \subset M_2(\mathbb{H})$ como o conjunto das matrizes g tais que $g \cdot g^* = g^* \cdot g = \mathrm{Id}$. Temos uma ação transitiva natural de $Sp(2)$ em S^7, definida como o produto usual de matrizes de $Sp(2)$ por vetores de $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ (pensados como vetores coluna).

Se $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2)$, temos que $\overline{\alpha}\beta + \overline{\gamma}\delta = 0$ e $\gamma\overline{\gamma} + \delta\overline{\delta} = 1$. Fixe $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S^7$ e $g \in Sp(2)$ um elemento na isotropia de e_1 por esta ação. Temos que $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$, o que implica $\beta = 0$ e $\delta\overline{\delta} = 1$. Mostra-se daí que o grupo de isotropia de e_1 por esta ação é o conjunto das matrizes g da forma $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, com $q \in Sp(1)$ (quatérnio unitário), de modo que a isotropia em e_1 é isomorfa a $Sp(1)$.

Fixando $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2)$, a classe de g em $Sp(2)/Sp(1)$ é o conjunto

$$[g] = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}; |q| = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \cdot q \\ \gamma & \delta \cdot q \end{pmatrix}; |q| = 1 \right\},$$

de modo que a primeira coluna de qualquer representante da classe $[g]$ é o mesmo vetor em H^2. Segue então que o difeomorfismo entre $Sp(2)/Sp(1)$ e S^7 do Teorema 2.10 do capítulo 2 é

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{e_1} : Sp(2)/Sp(1) & \longrightarrow & S^7 \\ {[g]} & \longmapsto & g \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \end{array}$$

em que (α, γ) é a primeira coluna de qualquer representante g de $[g]$.

Como a forma $\mathrm{Im}(\overline{q}_{11} dq_{11} + \overline{q}_{21} dq_{21})$ só depende das entradas 11 e 21 de $g \in Sp(2)$, segue que esta forma tem o mesmo valor em qualquer elemento da classe $[g] \in Sp(2)/Sp(1)$, e deste modo é possível induzir uma forma no quociente $Sp(2)/Sp(1)$. Via a expressão do difeomorfismo φ_{e_1}, temos que a forma correspondente em S^7 é a restrição a S^7 da forma $\tilde{\omega}$ em $\mathbb{H}^2$ definida por $\tilde{\omega} = \mathrm{Im}(\overline{q}_1 dq_1 + \overline{q}_2 dq_2)$. Se $\iota : S^7 \to \mathbb{H}^2$ é a inclusão, então a forma que queremos estudar é $\omega := \iota^* \tilde{\omega}$.

Antes de fazer esse estudo, observamos que será conveniente escrever os objetos envolvidos na linguagem dos quatérnios. Vamos pensar então o fibrado quaterniônico como $S^7(\mathbb{HP}^1, Sp(1))$, com $S^7 \subset \mathbb{H}^2$ e $Sp(1) \subset \mathbb{H}$. A álgebra de Lie de $Sp(1)$ será identificada com a álgebra de Lie $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ com o colchete $[q, q'] = qq' - q'q = 2\mathrm{Im}(qq')$. Lembramos também os elementos básicos envolvidos no fibrado quaterniônico.

As trivializações locais são (V_k,ψ_k), para $k=1,2$, em que $V_k=\{[q_1,q_2]\in\mathbb{HP}^1; q_k\neq 0\}$ e a aplicação $\psi_k:\pi^{-1}(V_k)\to V_k\times Sp(1)$ é definida por $\psi_k(q_1,q_2)=(\pi(q_1,q_2),|q_k|^{-1}q_k)$. As inversas ψ_k^{-1} correspondentes são dadas por

$$\psi_1^{-1}([q_1,q_2],q)=(|q_1|q,q_1q_1^{-1}|q_1|q)\quad\text{e}\quad\psi_2^{-1}([q_1,q_2],q)=(q_1q_2^{-1}|q_2|q,|q_2|q),$$

de modo que a função de transição $g_{12}:V_1\cap V_2\to Sp(1)$ é

$$g_{12}([q_1,q_2])=|q_1|^{-1}q_1q_2^{-1}|q_2|.$$

Os calibres $s_k:V_k\to S^7$ associados são, respectivamente,

$$s_1([q_1,q_2])=(|q_1|,q_2q_1^{-1}|q_1|)\quad\text{e}\quad s_2([q_1,q_2])=(q_1q_2^{-1}|q_2|,|q_2|).$$

Lembrando também que V_1 e V_2 são cartas de $\mathbb{HP}^1$, com difeomorfismos $f_k:V_k\to\mathbb{H}$ dados por $f_1([q_1,q_2])=q_2q_1^{-1}$ e $f_2([q_1,q_2])=q_1q_2^{-1}$. As inversas correspondentes são $f_1^{-1}(q)=[1,q]$ e $f_2^{-1}(q)=[q,1]$, de modo que $f_2\circ f_1^{-1}(q)=q^{-1}=f_1\circ f_2^{-1}$, para todo $q\in\mathbb{H}-\{0\}$. Como os pares $(1,q)$ e $(q,1)$ em geral não pertencem a S^7, é mais conveniente escrever as seguintes descrições, equivalentes, de f_1^{-1} e f_2^{-1}:

$$f_1^{-1}(q)=\left[(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}},q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\quad\text{e}\quad f_2^{-1}(q)=\left[q(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}},(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Observe daí que $(s_1\circ f_1^{-1})(q)=\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(1,q)$ e $(s_2\circ f_2^{-1})(q)=\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}(q,1)$.

Recordados os objetos necessários, vamos estudar agora a forma $\omega=\iota^*\tilde{\omega}$. Para todos $u\in S^7$ e $X\in T_uS^7$, temos $\omega_u(X)=\tilde{\omega}_u(\iota_*X)$. Colocando $u=(q_1,q_2)$ e $X=(v_1,v_2)\in T_uS^7\subset T_{q_1}\mathbb{H}\times T_{q_2}\mathbb{H}$, vale

$$\omega_u(X)=\mathrm{Im}(\overline{q}_1v_1+\overline{q}_2v_2).$$

Vamos ver agora que ω é uma forma de conexão no fibrado quaterniônico. Se $q\in Sp(1)$, então $((R_q)_*)_{uq^{-1}}X=(v_1q,v_2q)$, então

$$\omega_u((R_q)_{*_{uq^{-1}}}X)=\mathrm{Im}\left(\overline{q}_1(v_1q)+\overline{p}_2(v_2q)\right).$$

Por outro lado, como $q^{-1}=\overline{q}$, pois $q\in Sp(1)$, temos

$$\omega_{uq^{-1}}X=\operatorname{Im}\left(\overline{q_1q^{-1}}v_1+\overline{q_2q^{-1}}v_2\right)=\operatorname{Im}\left(q\overline{q}_1v_1+q\overline{q}_2v_2\right)$$

e portanto

$$\operatorname{ad}(q^{-1})_*\circ\omega_{uq^{-1}}X=q^{-1}\cdot\omega_{uq^{-1}}(X)\cdot q=\operatorname{Im}(\overline{q}_1(v_1q)+\overline{q}_2(v_2q)).$$

Vamos ver agora que $\omega(A^*)=A$, para cada $A\in\operatorname{Im}(\mathbb{H})$. Mas como

$$A^*_{(q_1,q_2)}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(q_1,q_2)\cdot\exp(tA)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(q_1\cdot\exp(tA),q_2\cdot\exp(tA))=(q_1\cdot A,q_2\cdot A),$$

temos que

$$\omega_u(A^*_u)=\operatorname{Im}\left(\overline{q}_1(q_1\cdot A)+\overline{q}_2(q_2\cdot A)\right)=\operatorname{Im}\left((|q_1|^2+|q_2|^2)A\right)=\operatorname{Im}(A)=A.$$

Assim, ω é uma forma de conexão do fibrado $S^7(\mathbb{HP}^1,Sp(1))$, chamada de conexão canônica do fibrado quaterniônico. Encontraremos agora os potenciais de calibre desta conexão usando os calibres s_1 e s_2 e, posteriormente, encontraremos as intensidades correspondentes. Antes disso, encontraremos expressões para $(s_k\circ f_k^{-1})^*\omega$, com $k=1,2$. Note que pela definição de pull-back

$$((s_k\circ f_k^{-1})^*\omega))_q\cdot X=((f_k^{-1})^*(s_k^*\omega))_q\cdot X=(s_k^*\omega)_{f_k^{-1}(q)}(f_k^{-1}{}_*\cdot X).$$

Seja $s=s_1\circ f_1^{-1}$. Então para cada $q\in\mathbb{H}$, temos que $s(q)=(1+|q|^2)^{-\frac{1}{2}}(1,q)$. Identificando cada $v\in T_q\mathbb{H}$ com $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(q+vt)$, teremos que

$$(s_*)_q\cdot v=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}s(q+tv)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\frac{1}{\sqrt{1+|q+tv|^2}}(1,q+tv),$$

mas

$$|q+tv|^2=(q+tv)(\overline{q}+t\overline{v})=|q|^2+2\operatorname{Re}(v\overline{q})\cdot t+|v|^2t^2,$$

e portanto

$$(s_*)_q\cdot v=\left(-\frac{\operatorname{Re}(v\overline{q})}{(1+|q|^2)^{3/2}},\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}v-\frac{\operatorname{Re}(v\overline{q})}{(1+|q|^2)^{3/2}}q\right).$$

Vamos expressar agora $(s^*\omega)_q(v)=\omega_{s(q)}(s_{*q}(v))$. Da definição de ω, podemos expressar cada uma de suas parcelas:

$$\begin{aligned}
(\overline{q_2}dq_2)_{s(q)}(s_{*q}(v)) &= \overline{q_2}(s(q))dq_2(s_{*q}(v)) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}\overline{q}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+|q|^2}}v - \frac{\mathrm{Re}(v\overline{q})}{(1+|q|^2)^{3/2}}q\right) \\
&= \frac{1}{1+|q|^2}\overline{q}v - \frac{\mathrm{Re}(v\overline{q})|q|^2}{(1+|q|^2)^2}
\end{aligned}$$

e, de modo análogo, $(\overline{q_1}dq_1)_{s(q)}(s_{*q}(v)) = -\dfrac{\mathrm{Re}(v\overline{q})}{(1+|q|^2)^2}$, daí

$$\omega_{s(q)}(s_{*q}(v)) = (\mathrm{Im}(\overline{q_1}dq_1 + \overline{q_2}dq_2))_{s(q)}(s_{*q}(v)) = \frac{\mathrm{Im}(\overline{q}v)}{1+|q|^2},$$

e finalmente, temos a expressão

$$((s_1 \circ f_1^{-1})^*\omega)_q \cdot v = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{q}}{1+|q|^2}v\right),$$

a qual pode ser escrita como

$$(s_1 \circ f_1^{-1})^*\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{q}}{1+|q|^2}dq\right).$$

Mostra-se analogamente que

$$(s_2 \circ f_2^{-1})^*\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{q}}{1+|q|^2}dq\right).$$

Por mais que as expressões acima sejam "a mesma", deve estar entendido que usamos coordenadas diferentes nos casos $k=1$ e $k=2$. Mas não são exatamente estas expressões que nos interessam. O que precisamos encontrar são os pull-backs $s_1^*\omega$ e $s_2^*\omega$, porém, o serviço mais trabalhoso já foi feito. Se $p \in V_1$ e $X \in T_pS^4$, então

$$\mathscr{A}_1(X) = (s_1^*\omega)_pX = ((s_1 \circ f_1^{-1})^*\omega)_{f_1(p)}((f_1)_{*p}X) = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{f_1(p)}v}{1+|f_1(p)|^2}\right),$$

em que $v = dq(((f_1)_*)_pX)$. Similarmente, para $p \in V_2$ e $X \in T_pS^4$ temos

$$\mathscr{A}_2(X) = (s_2^*\omega)_pX = ((s_2 \circ f_2^{-1})^*\omega)_{f_2(p)}(f_2)_{*p}X = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{f_2(p)}w}{1+|f_2(p)|^2}\right),$$

em que $w = dq((f_{2*})_p X)$.

O próximo passo é calcular a curvatura dessa conexão. Para isso, usaremos a primeira equação de estrutura. Antes disso, vamos recordar uma definição um pouco mais geral de produto exterior de 1-formas. Sejam U, V e W espaços vetoriais reais e $\rho : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Se M é uma variedade diferenciável, ω é uma 1-forma em M com valores em U e η é uma 1-forma em M com valores em V, podemos definir o produto ρ-exterior, denotado por $\omega \wedge_\rho \eta$, colocando

$$(\omega \wedge_\rho \eta)_x(X, Y) = \rho(\omega_x(X), \eta_x(Y)) - \rho(\omega_x(Y), \eta_x(X)),$$

para cada $x \in M$ e $X, Y \in T_x M$.

Se $\{u_1, ..., u_c\}$ e $\{v_1, ..., v_d\}$ são bases para U e V respectivamente, então podemos escrever $\omega = \sum_i \omega_i u_i$ e $\eta = \sum_j \eta_j v_j$, para certas 1-formas reais ω_i e η_j definidas em M. A partir daí, temos que

$$\omega \wedge_\rho \eta = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{d} (\omega_i \wedge \eta_j) \rho(u_i, v_j).$$

Faremos dois exemplos de produto ρ-exterior, os quais aparecerão no cálculo da curvatura da conexão canônica. Primeiro, considere $U = V = W = \mathbb{H}$ e ρ sendo a multiplicação de $\mathbb{H}$, $\rho(q, q') = q \cdot q'$. Sejam $dq = dq_0 + dq_1\mathbf{i} + dq_2\mathbf{j} + dq_3\mathbf{k}$ e $d\overline{q} = dq_0 - dq_1\mathbf{i} - dq_2\mathbf{j} - dq_3\mathbf{k}$ as 1-formas usuais em $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, então

$$\begin{aligned}
dq \wedge_\rho dq &= 2(dq_2 \wedge dq_3\mathbf{i} + dq_3 \wedge dq_1\mathbf{j} + dq_1 \wedge dq_2\mathbf{k}) \\
dq \wedge_\rho d\overline{q} &= -2((dq_0 \wedge dq_1 + dq_2 \wedge dq_3)\mathbf{i} + (dq_0 \wedge dq_2 - dq_1 \wedge dq_3)\mathbf{j} + \\
&+ (dq_0 \wedge dq_3 + dq_1 \wedge dq_2)\mathbf{k}) \\
d\overline{q} \wedge_\rho dq &= 2((dq_0 \wedge dq_1 - dq_2 \wedge dq_3)\mathbf{i} + (dq_0 \wedge dq_2 + dq_1 \wedge dq_3)\mathbf{j} + \\
&+ (dq_0 \wedge dq_3 - dq_1 \wedge dq_2)\mathbf{k}).
\end{aligned}$$

O segundo exemplo é o seguinte. Suponha que $U = V = W = \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ e que ρ seja o colchete: $\rho(q, q') = [q, q'] = 2\mathrm{Im}(qq')$. Sejam ω e η 1-formas em M com valores em $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ e tome $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ como base de $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, daí

$$\begin{aligned}
\omega \wedge_\rho \eta &= \omega_1 \wedge \eta_1[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + \omega_1 \wedge \eta_2[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + \omega_1 \wedge \eta_3[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \\
&+ \omega_2 \wedge \eta_1[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + \omega_2 \wedge \eta_2[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + \omega_2 \wedge \eta_3[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\
&+ \omega_3 \wedge \eta_1[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + \omega_3 \wedge \eta_2[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + \omega_3 \wedge \eta_3[\mathbf{k}, \mathbf{k}].
\end{aligned}$$

Das relações entre **i**, **j** e **k**, a expressão acima de reduz a:

$$\omega \wedge_\rho \eta = 2\left[(\omega_2\wedge\eta_3 - \omega_3\wedge\eta_2)\mathbf{i} + (\omega_3\wedge\eta_1 - \omega_1\wedge\eta_3)\mathbf{j} + (\omega_1\wedge\eta_2 - \omega_2\wedge\eta_1)\mathbf{k}\right].$$

Em particular, quando a variedade M é $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, podemos escrever cada ω_i como

$$\omega_i = \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^i_\alpha dq_\alpha,\, i = 1,2,3,$$

e daí

$$\begin{aligned}
\omega &= \left(\sum_{\alpha=0}^{3}\omega^1_\alpha dq_\alpha\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{\alpha=0}^{3}\omega^2_\alpha dq_\alpha\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{\alpha=0}^{3}\omega^3_\alpha dq_\alpha\right)\mathbf{k}\\
&= (\omega^1_0\mathbf{i} + \omega^2_0\mathbf{j} + \omega^3_0\mathbf{k})dq_0 + (\omega^1_1\mathbf{i} + \omega^2_1\mathbf{j} + \omega^2_1\mathbf{k})dq_1 + (\omega^1_2\mathbf{i} + \omega^2_2\mathbf{j} + \omega^3_2\mathbf{k})dq_2 +\\
&+ (\omega^1_3\mathbf{i} + \omega^2_3\mathbf{j} + \omega^2_3\mathbf{k})dq_3\\
&= \tilde\omega_0 dq_0 + \tilde\omega_1 dq_1 + \tilde\omega_2 dq_2 + \tilde\omega_3 dq_3,
\end{aligned}$$

em que as funções $\tilde\omega_i$ tomam valores em Im($\mathbb{H}$). Fazendo $\eta = \omega$, teremos

$$\omega \wedge_\rho \omega = 4(\omega_2\wedge\omega_3\mathbf{i} + \omega_3\wedge\omega_1\mathbf{j} + \omega_1\wedge\omega_2\mathbf{k}).$$

Explicitando cada um dos coeficientes em termos dos dq_α's, teremos

$$\omega\wedge_\rho\omega = 4\left[\left(\sum_{\alpha,\beta}\omega^2_\alpha\omega^3_\beta dq_\alpha\wedge dq_\beta\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{\alpha,\beta}\omega^3_\alpha\omega^1_\beta dq_\alpha\wedge dq_\beta\right)\mathbf{j} + \left(\sum_{\alpha,\beta}\omega^1_\alpha\omega^2_\beta dq_\alpha\wedge dq_\beta\right)\mathbf{k}\right],$$

Por outro lado, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\tilde\omega_\alpha\cdot\tilde\omega_\beta &= -(\omega^1_\alpha\omega^1_\beta + \omega^2_\alpha\omega^2_\beta + \omega^3_\alpha\omega^3_\beta) + (\omega^2_\alpha\omega^3_\beta - \omega^3_\alpha\omega^2_\beta)\mathbf{i} + (\omega^3_\alpha\omega^1_\beta - \omega^1_\alpha\omega^3_\beta)\mathbf{j}\\
&+ (\omega^1_\alpha\omega^2_\beta - \omega^2_\alpha\omega^1_\beta)\mathbf{k},
\end{aligned}$$

e

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}(\omega^1_\alpha\omega^1_\beta + \omega^2_\alpha\omega^2_\beta + \omega^3_\alpha\omega^3_\beta)dq_\alpha\wedge dq_\beta = 0,$$

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}(\omega^2_\alpha\omega^3_\beta - \omega^3_\alpha\omega^2_\beta)dq_\alpha\wedge dq_\beta = 2\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\omega^2_\alpha\omega^3_\beta dq_\alpha\wedge dq_\beta,$$

similarmente para $\omega^3_\alpha\omega^1_\beta - \omega^1_\alpha\omega^3_\beta$ e $\omega^1_\alpha\omega^2_\beta - \omega^2_\alpha\omega^1_\beta$, assim

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \tilde{\omega}_\alpha \cdot \tilde{\omega}_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta &= \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} 2\omega^2_\alpha\omega^3_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta \mathbf{i} + 2\omega^3_\alpha\omega^1_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta \mathbf{j} \\ &+ 2\omega^1_\alpha\omega^2_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2}\omega \wedge_\rho \omega.\end{aligned}$$

Finalmente, observe que em termos dos colchetes $[\tilde{\omega}_\alpha, \tilde{\omega}_\beta] = \tilde{\omega}_\alpha \cdot \tilde{\omega}_\beta - \tilde{\omega}_\beta \cdot \tilde{\omega}_\alpha$, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\omega \wedge_\rho \omega = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} \tilde{\omega}_\alpha \cdot \tilde{\omega}_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} [\tilde{\omega}_\alpha, \tilde{\omega}_\beta] dq_\alpha \wedge dq_\beta.$$

Daqui por diante omitiremos o símbolo ρ no produto exterior, pois fica implícito qual produto está sendo usado em cada expressão. A derivada exterior $d\omega$ pode ser escrita em termos dos dq_β's:

$$d\omega = d\tilde{\omega}_0 \wedge dq_0 + \ldots + d\tilde{\omega}_3 \wedge dq_3 = \sum_\beta d\tilde{\omega}_\beta \wedge dq_\beta.$$

Mais ainda,

$$d\tilde{\omega}_\beta = d\omega^1_\beta \mathbf{i} + d\omega^2_\beta \mathbf{j} + d\omega^3_\beta \mathbf{k} = \sum_\alpha (\partial_\alpha \omega^1_\beta dq_\alpha)\mathbf{i} + (\partial_\alpha \omega^2_\beta dq_\alpha)\mathbf{j} + (\partial_\alpha \omega^3_\beta dq_\alpha)\mathbf{k},$$

em que ∂_α é uma abreviação de $\partial/\partial q_\alpha$. Assim,

$$d\tilde{\omega}_\beta = \sum_\alpha (\partial_\alpha \omega^1_\beta \mathbf{i} + \partial_\alpha \omega^2_\beta \mathbf{j} + \partial_\alpha \omega^3_\beta \mathbf{k}) dq_\alpha = \sum_\alpha \partial_\alpha \tilde{\omega}_\beta dq_\alpha,$$

(em que a derivada na última igualdade é tomada componente a componente de $\tilde{\omega}_\beta$), e portanto:

$$d\omega = \sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha \tilde{\omega}_\beta dq_\alpha \wedge dq_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} (\partial_\alpha \tilde{\omega}_\beta - \partial_\beta \tilde{\omega}_\alpha) dq_\alpha \wedge dq_\beta,$$

concluindo que:

$$\begin{aligned} d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega &= \sum_{\alpha,\beta} \left(\partial_\alpha \tilde{\omega}_\beta + \tilde{\omega}_\alpha \tilde{\omega}_\beta\right) dq_\alpha \wedge dq_\beta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \left(\partial_\alpha \tilde{\omega}_\beta - \partial_\beta \tilde{\omega}_\alpha + [\tilde{\omega}_\alpha, \tilde{\omega}_\beta]\right) dq_\alpha \wedge dq_\beta. \end{aligned}$$

Em particular, considere $\omega = \mathrm{Im}(f(q)dq)$, em que $f(q) = f_0(q) + f_1(q)\mathbf{i} + f_2(q)\mathbf{j} + f_3(q)\mathbf{k}$ é uma aplicação diferenciável em $\mathbb{H}$ com valores em $\mathbb{H}$. Se escrevemos ω na forma $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha dq_\alpha$, devemos ter $\omega_0 = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, $\omega_1 = f_0\mathbf{i} + f_3\mathbf{j} - f_2\mathbf{k}$, $\omega_2 = -f_3\mathbf{i} + f_0\mathbf{j} + f_1\mathbf{k}$ e $\omega_3 = f_2\mathbf{i} - f_1\mathbf{j} + f_0\mathbf{k}$. Não é difícil verificar que $d\omega = \mathrm{Im}(df \wedge dq)$ e $\frac{1}{2}\omega \wedge \omega = \mathrm{Im}(f(q)dq \wedge f(q)dq)$, de modo que

$$d\omega + \frac{1}{2}\omega \wedge \omega = \mathrm{Im}(df \wedge dq + f(q)dq \wedge f(q)dq).$$

Aplicaremos estas fórmulas ao caso da 1-forma

$$\mathscr{A} = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{q}}{1+|q|^2}dq\right),$$

isto é, para $f(q) = \frac{\overline{q}}{1+|q|^2}$. Esta forma é a expressão em coordenadas de um potencial de calibre da conexão canônica de S^7. Note que

$$f(q)dq \wedge f(q)dq = (1+|q|^2)^{-2}(\overline{q}dq \wedge \overline{q}dq).$$

A diferencial de f é calculada como segue:

$$\begin{aligned} df &= d((1+|q|^2)^{-1}\overline{q}) \\ &= d((1+|q|^2)^{-1}(q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}) \\ &= d((1+|q|^2)^{-1}q_0) - d((1+|q|^2)^{-1}q_1)\mathbf{i} - d((1+|q|^2)^{-1}q_2)\mathbf{j} - d((1+|q|^2)^{-1}q_3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Como $d((1+|q|^2)^{-1}q_\alpha) = (1+|q|^2)^{-1}dq_\alpha + q_\alpha d((1+|q|^2)^{-1})$, temos

$$df = (1+|q|^2)^{-1}d\overline{q} + \overline{q}d((1+|q|^2)^{-1}),$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} d((1+|q|^2)^{-1}) &= \partial_0(1+|q|^2)^{-1}dq_0 + \partial_1(1+|q|^2)^{-1}dq_1 \\ &+ \partial_2(1+|q|^2)^{-1}dq_2 + \partial_3(1+|q|^2)^{-1}dq_3 \\ &= -(1+|q|^2)^{-2}(2q_0dq_0 + 2q_1dq_1 + 2q_2dq_2 + 2q_3dq_3) \\ &= -(1+|q|^2)^{-2}(qd\overline{q} + \overline{qd\overline{q}}), \end{aligned}$$

daí

$$\overline{q}d((1+|q|^2)^{-1}) = -(1+|q|^2)^{-2}(|q|^2d\overline{q} + \overline{q}dq\overline{q}),$$

e finalmente
$$df = (1+|q|^2)^{-2}(d\overline{q} - \overline{q}dq\overline{q}).$$

Agora note que

$$\begin{aligned} df \wedge dq &= (1+|q|^2)^{-2}(d\overline{q}\wedge dq - (\overline{q}dq\overline{q})\wedge dq) \\ &= (1+|q|^2)^{-2}(d\overline{q}\wedge dq - (\overline{q}dq)\wedge(\overline{q}dq)), \end{aligned}$$

de modo que $df\wedge dq + f(q)dq\wedge f(q)dq = (1+|q|^2)^{-2}d\overline{q}\wedge dq$. Como $(1+|q|^2)^{-2}$ é real e $d\overline{q}\wedge dq$ é imaginário puro, obtemos finalmente a expressão em coordenadas de uma intensidade da conexão canônica (na verdade a expressão é a mesma no outro calibre):

$$\mathscr{F} = d\mathscr{A} + \frac{1}{2}\mathscr{A}\wedge\mathscr{A} = \frac{1}{\left(1+|q|^2\right)^2}d\overline{q}\wedge dq.$$

A expressão acima é de fato a expressão de uma intensidade pois

$$\frac{1}{2}\omega\wedge_\rho \omega(X,Y) = [\omega(X),\omega(Y)] - [\omega(Y),\omega(X)] = [\omega(X),\omega(Y)].$$

De modo semelhante, dados $n\in\mathbb{H}$ e $\lambda > 0$, a 1-forma $\mathscr{A}_{\lambda,n}$ definida em $\mathbb{H}$, com valores em $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, dada por
$$\mathscr{A}_{\lambda,n} = \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{q}-\overline{n}}{|q-n|^2+\lambda^2}dq\right)$$
satisfaz
$$\mathscr{F}_{\lambda,n} = d\mathscr{A}_{\lambda,n} + \frac{1}{2}\mathscr{A}_{\lambda,n}\wedge\mathscr{A}_{\lambda,n} = \frac{\lambda^2}{\left(|q-n|^2+\lambda^2\right)^2}d\overline{q}\wedge dq.$$

Calculada a expressão em coordenadas da curvatura da conexão canônica, caminharemos agora, mais uma vez, na direção de relacionar geometria com física por meio das conexões em fibrados principais. Existe uma relação entre as formas $\mathscr{A}_{\lambda,n}$ (em particular a conexão canônica, que é o caso $\lambda = 1$ e $n = 0$) e a chamada Teoria de Yang-Mills. Comentaremos esta relação a seguir e para isso, começaremos com alguns comentários históricos sobre esta teoria.

Em 1932, Heinsenberg sugeriu a possibilidade de que os conhecidos nucleons (o próton e o neutron) eram, na verdade, apenas dois "estados" diferentes da mesma partícula e propôs uma ferramenta matemática para modelar isto, chamada de estado de **spin isotópico** de um nucleon. Assim como a fase de uma partícula carregada é representada por um número complexo de módulo 1 e as mudanças de fase são acompanhadas por uma ação de $U(1)$ em S^1 (uma rotação), o spin isotópico de um nucleon é representado por um par de números complexos, cuja soma dos quadrados de seus módulos é 1, e mudanças no estado de spin isotópico são acompanhadas por uma ação de $SU(2)$ em S^3. Em 1954, C. N. Yang e R. L. Mills se preocuparam em construir uma teoria de spin isotópico análoga à teoria do eletromagnetismo. Eles consideraram funções potenciais a valores matriciais e os campos correspondentes, construídos a partir das derivadas das funções potenciais. A hipótese física desta teoria (que não é o ponto desta observação) levou-os a propor certas equações diferenciais que os potenciais devem satisfazer, que são as chamadas **equações de Yang-Mills** (veja [YM54]). Posteriormente, em 1975, Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin (veja [BPST75]) encontraram soluções para estas equações, as quais foram chamadas de "pseudo partículas" (apenas o caso $n = 0$ aparece explicitamente em [BPST75]). O fato mais importante é que estas soluções coincidem essencialmente com as formas $\mathscr{A}_{\lambda,n}$ definidas acima. Isto foi feito explicitamente e generalizado por Trautman (veja [Tra77]).

É importante observar que não era conhecida a linguagem de fibrados principais naquela época, de modo que por um potencial de calibre (ou simplesmente potencial), se entendia uma 1-forma $\mathscr{A}$ em $\mathbb{R}^4$ com valores em $\mathfrak{su}(2)$, e sua intensidade correspondente é dada por $\mathscr{F} = d\mathscr{A} + \frac{1}{2}\mathscr{A} \wedge \mathscr{A}$. De fato podemos considerar (mas não precisamos) $\mathscr{A}$ como um potencial de calibre da maneira como definimos anteriormente. Basta considerar o fibrado trivial $\mathbb{R}^4 \times SU(2)$ sobre $\mathbb{R}^4$, e notar que a hipótese da proposição 1.8 do capítulo 1 é satisfeita vacuamente. Comentaremos um pouco mais sobre as equações de Yang-Mills posteriormente.

Considere agora um potencial de calibre $\mathscr{A}$ em $\mathbb{H}$ e $\mathscr{F}$ seu campo correspondente. Para cada $q \in \mathbb{H}$, definimos $\|\mathscr{F}(q)\|^2$ como sendo a soma das normas, ao quadrado, das componentes de $\mathscr{F}(q)$ relativamente a $dq_\alpha \wedge dq_\beta$. A norma que usamos em $\mathfrak{su}(2) \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ é a norma relativa à forma de Killing de $\mathfrak{su}(2)$, e verifica-se que tal norma vale o dobro da norma euclidiana em $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$. Definimos a **ação de Yang-Mills** de $\mathscr{A}$ como sendo

$$\|\mathscr{F}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \|\mathscr{F}(q)\|^2.$$

Eventualmente o valor acima é denotado por $YM(\mathscr{A})$. O funcional YM que associa a cada potencial $\mathscr{A}$ sua ação de Yang-Mills $YM(\mathscr{A})$ é chamado de **funcional de Yang-Mills** de $\mathbb{R}^4$.

No caso do potencial oriundo da conexão canônica do fibrado de Hopf, temos que sua intensidade nas coordenadas usuais de $\mathbb{H}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} &= \frac{1}{(1+|q|^2)^2} d\overline{q}\wedge dq \\
&= \frac{2}{(1+|q|^2)^2}[(dq_0\wedge dq_1 - dq_2\wedge dq_3)\mathbf{i} \\
&+ (dq_0\wedge dq_2 + dq_1\wedge dq_3)\mathbf{j} + (dq_0\wedge dq_3 - dq_1\wedge dq_2)\mathbf{k}] \\
&= \frac{2\mathbf{i}}{(1+|q|^2)^2} dq_0\wedge dq_1 + \frac{-2\mathbf{i}}{(1+|q|^2)^2} dq_2\wedge dq_3 + \ldots
\end{aligned}$$

de modo que

$$\|\mathscr{F}\|^2 = 48\int_{\mathbb{R}^4}\frac{1}{(1+|q|^2)^4}.$$

A integral acima pode ser calculada usando coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^4$, definidas por:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \rho\,\mathrm{sen}\chi\,\mathrm{sen}\phi\cos\theta \\
q_1 &= \rho\,\mathrm{sen}\chi\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\theta \\
q_2 &= \rho\,\mathrm{sen}\chi\cos\phi \\
q_3 &= \rho\cos\chi
\end{aligned}$$

para $\rho = |q| \geq 0$, $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}\|^2 &= 48\int_{\mathbb{R}^4}\frac{1}{(1+|q|^2)^4} \\
&= 48\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+\rho^2)^4}\rho^3\mathrm{sen}^2\chi\,\mathrm{sen}\phi\, d\rho\, d\chi\, d\phi\, d\theta \\
&= 48\left(\int_0^{\infty}\frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^4}d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\chi\,\mathrm{sen}\phi\, d\chi\, d\phi\, d\theta\right) \\
&= 48\left(\frac{1}{12}\right)(2\pi^2) \\
&= 8\pi^2.
\end{aligned}$$

Assim, $YM(\mathscr{A}) = 8\pi^2$. De modo análogo, mostra-se que $YM(\mathscr{A}_{\lambda,n}) = 8\pi^2$.

3.3 Fibrados sobre esferas

Um fato importante que nos interessa é que podemos classificar os fibrados principais sobre as esferas S^n, com $n \geq 2$. O caminho pelo qual nós faremos isso não faz menção à estrutura diferenciável dos objetos em questão, de modo que podemos considerar fibrados principais apenas topológicos. Isto significa que vamos supor que o grupo de estrutura do fibrado seja um grupo topológico (conexo por caminhos), que o espaço total e o espaço base sejam apenas espaços topológicos e que as trivializações locais sejam homeomorfismos. Não será necessário supor que o espaço base seja o espaço de órbitas da ação, mas sim que tenhamos uma projeção $\pi : P \to X$ contínua e sobrejetora e que a ação preserve as fibras, isto é, $\pi(u \cdot g) = \pi(u)$ para todos $u \in P$ e $g \in G$. Isso nos permite considerar fibrados principais sobre, por exemplo, cubos ou discos. Nesta seção usaremos as notações $I = [0,1]$, $I^n = [0,1] \times ... \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n$ para o cubo n-dimensional e $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ para o disco n-dimensional.

Se $P(X,G)$ é um fibrado principal (topológico) e $f : Z \to X$ é uma aplicação contínua de um espaço topológico Z em X, diremos que f possui um **levantamento** se existe uma aplicação contínua $\tilde{f} : Z \to P$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$. Precisaremos de um teorema de levantamento de homotopia para fibrados. Uma versão que nos interessa é enunciada abaixo, e a sua demonstração pode ser encontrada em [Nab97] (pg. 172).

Teorema 3.1 (Levantamento de Homotopia)**.** *Seja $P(X,G)$ um fibrado principal topológico e n um inteiro positivo. Suponha que $f : I^n \to X$ é uma aplicação contínua que possui um levantamento $\tilde{f} : I^n \to P$. Seja $F : I^n \times I \to X$ uma homotopia tal que $F(x,0) = f(x)$ para todo $x \in I^n$. Então existe uma homotopia $\tilde{F} : I^n \times I \to P$ tal que $\pi \circ \tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(x,0) = \tilde{f}(x)$ para todo $x \in I^n$.*

Lema 3.2. *Seja G um grupo topológico e n um inteiro positivo. Então qualquer G-fibrado principal sobre o cubo I^n é trivial.*

Demonstração: Seja $P(I^n, G)$ um fibrado principal. Fixe $x_0 \in I^n$ e $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Como I^n é contrátil, a aplicação $\mathrm{Id} : I^n \to I^n$ é homotópica à aplicação constante $f : I^n \to I^n$, $f(x) = x_0$. Seja $F : I^n \times [0,1] \to I^n$ uma homotopia com $F(x,0) = x_0$ e $F(x,1) = x$ para todo $x \in I^n$. Observe que a aplicação constante $\tilde{f} : I^n \to P$, $\tilde{f}(x) = u_0$, é um levantamento de f, isto é, $\pi \circ \tilde{f} = f$. Portanto segue do teorema de levantamento de homotopia que existe uma homotopia $\tilde{F} : I^n \times I \to P$ tal que $\pi \circ \tilde{F} = F$. Em particular, $\pi \circ \tilde{F}(x,1) = F(x,1) = x$ para todo $x \in I^n$, de modo que a aplicação $x \mapsto \tilde{F}(x,1)$ é uma seção global do fibrado, assim P deve ser trivial. □

Como corolário do lema acima, obtemos que qualquer fibrado principal topológico sobre o disco D^n também é trivial pois I^n é homeomorfo a D^n.

Identificaremos S^{n-1} como o subconjunto do pontos $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ para os quais $x_{n+1} = 0$ (o "equador" de S^n). Fixe $x_0 \in S^{n-1}$ e um número $0 < \epsilon < 1$. Defina os seguintes subconjuntos de S^n:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_1 &= \{x \in S^n; x_{n+1} \geq 0\} \\
\mathscr{H}_2 &= \{x \in S^n; x_{n+1} \leq 0\} \\
U_1 &= \{x \in S^n; -\epsilon < x_{n+1} \leq 1\} \supseteq \mathscr{H}_1 \\
U_2 &= \{x \in S^n; -1 \leq x_{n+1} < \epsilon\} \supseteq \mathscr{H}_2.
\end{aligned}$$

Assim, $U_1 \cap U_2$ é uma "faixa aberta" contendo S^{n-1}. Seja $\mathscr{B} = P(S^n, G)$ um fibrado principal. Veremos agora que U_1 e U_2 são vizinhanças trivializantes e, além disso, podemos escolher trivializações $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ de modo que todas as funções de transição g_{ij} levam x_0 em $e \in G$. Considere primeiramente a restrição $\mathscr{B}|_{\overline{U}_i}$. Tal restrição é trivial pois $\overline{U}_i$ é homeomorfo ao disco D^n, o qual é contrátil, e portanto esta restrição tem uma seção global. Consequentemente, a porção $\mathscr{B}|_{U_i}$ também é trivial. Escolha então equivalências $\tilde{\psi}_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$, $i = 1, 2$. Segue facilmente que $\tilde{\psi}_i$, $i = 1, 2$, são trivializações locais para $\mathscr{B}$.

Agora seja $\tilde{g}_{12} : U_1 \cap U_2 \to G$ a função de transição correspondente às trivializações locais $\{(U_1, \tilde{\psi}_1), (U_2, \tilde{\psi}_2)\}$ e suponha que $\tilde{g}_{12}(x_0) = g \in G$. Escreva $\tilde{\psi}_2 = (\pi, \tilde{\varphi}_2)$. Para ajustar as funções de transição, colocamos $\psi_2(u) = (\pi(u), \varphi_2(u))$, em que $\varphi_2(u) = g\tilde{\varphi}_2(u)$, daí

$$\tilde{\varphi}_1(u)\varphi_2(u)^{-1} = \tilde{\varphi}_1(u)\tilde{\varphi}_2(u)^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = e.$$

Assim, com as trivializações locais $\psi_1 = \tilde{\psi}_1$ e $\psi_2 = (\pi, \varphi_2)$, temos que todas as funções de transição correspondentes levam x_0 em $e \in G$.

Assim, podemos supor que para qualquer fibrado principal $\mathscr{B} = P(S^n, G)$, U_1 e U_2 são vizinhanças trivializantes e, além disso, as funções de transição correspondentes levam x_0 em e. Definimos, para cada fibrado $\mathscr{B}$, a **aplicação característica**

$$T : (S^{n-1}, x_0) \to (G, e)$$

por

$$T = g_{12}|_{S^{n-1}}$$

Usamos a notação $f : (X, a) \to (Y, b)$ para dizer que a aplicação f satisfaz $f(a) = b$.

Lema 3.3. *Qualquer aplicação contínua $T : (S^{n-1}, x_0) \to (G, e)$ é a aplicação característica de algum fibrado principal $\mathscr{B}$ sobre S^n com grupo G.*

Demonstração: Seja $r : U_1 \cap U_2 \to S^{n-1}$ a restrição da projeção esteográfica (do pólo sul ou norte) à faixa $U_1 \cap U_2$ e defina $g_{12}(x) = T(r(x))$, para $x \in U_1 \cap U_2$. Então $g_{12}|S^{n-1} = T$. Colocamos $g_{21}(x) = g_{12}(x)^{-1}$ em $U_1 \cap U_2$, $g_{11}(x) = e$ em U_1 e $g_{22}(x) = e$ em U_2. Então as funções g_{ij} satisfazem a condição de co-ciclo e portanto definem (pelo teorema 1.1 do cap.1) um único fibrado principal P sobre S^n com grupo G (a menos de equivalência) que possui as funções g_{ij} como funções de transição. □

Lema 3.4. *Seja G um grupo topológico conexo por caminhos e $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ dois fibrados principais sobre S^n com grupo G, $n \geq 2$. Sejam T_1 e T_2 as aplicações características respectivas. Então $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ são equivalentes se, e somente se, as aplicações T_1 e T_2 são homotópicas relativas a $\{x_0\}$.*

Demonstração: Suponha primeiramente que $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sejam equivalentes. Como nós estamos supondo que tais fibrados tem as mesmas vizinhanças trivializantes, temos que (da equivalência) existem funções contínuas $h_j : U_j \to G$, $j = 1,2$, tais que $g^2_{12}(x) = h_1(x)^{-1} g^1_{12}(x) h_2(x)$, para todo $x \in U_1 \cap U_2$. Seja $\mu_j = h_j|_{S^{n-1}}$. Então $T_2(x) = \mu_1(x)^{-1} T_1(x) \mu_2(x)$, para todo $x \in S^{n-1}$. Como $T_1(x_0) = T_2(x_0) = e$, temos que $\mu_1(x_0) = \mu_2(x_0)$ e vamos denotar este elemento por $g \in G$.

Agora, cada $\mathscr{H}_i$, $i = 1,2$, é homeomorfo a D^n e possui bordo S^{n-1}, de modo que $\mathscr{H}_i$ é contrátil e, como $x_0 \in S^{n-1} \subset \mathscr{H}_i$, temos

$$\pi_{n-1}(\mathscr{H}_i, x_0) = 0, i = 1,2.$$

Isto significa que todas as aplicações contínuas de (S^{n-1}, x_0) em $(\mathscr{H}_i, x_0)$ são homotópicas à aplicação constante x_0. Em particular, as aplicações de inclusão $(S^{n-1}, x_0) \hookrightarrow (\mathscr{H}_i, x_0)$ são ambas homotópicas, relativas a x_0, à aplicação constante igual a x_0 de S^{n-1} em $\mathscr{H}_i$. Para cada $i = 1,2$, seja H_i tal homotopia.

Defina $K_i = h_i \circ H_i : S^{n-1} \times [0,1] \to G$ e note que

$$\begin{aligned} K_i(x,0) &= h_i(x) = \mu_i(x), x \in S^{n-1} \\ K_i(x,1) &= h_i(x_0) = \mu_i(x_0) = g, x \in S^{n-1} \\ K_i(x_0,t) &= h_i(x_0) = \mu_i(x_0) = g, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Assim, K_i é uma homotopia, relativa a x_0, entre μ_i e a aplicação constante de S^{n-1} em G cujo valor é g. Finalmente, defina $K: S^{n-1}\times[0,1]\to G$ por $K(x,t)=K_1(x,y)^{-1}T_1(x)K_2(x,t)$, e assim

$$\begin{aligned}
K(x,0) &= K_1(x,0)^{-1}T_1(x)K_2(x,0)=\mu_1(x)^{-1}T_1(x)\mu_2(x)=T_2(x)\\
K(x,1) &= K_1(x,1)^{-1}T_1(x)K_2(x,1)=g^{-1}T_1(x)g\\
K(x_0,t) &= K_1(x_0,t)^{-1}T_1(x_0)K_2(x_0,t)=g^{-1}eg=e,
\end{aligned}$$

de modo que K é uma homotopia, relativa a x_0, entre T_2 e $g^{-1}T_1g$. Para construir uma homotopia, relativa a x_0, entre $g^{-1}T_1g$ e T_1, usamos que G é conexo por caminhos e escolhemos um caminho contínuo $\alpha:[0,1]\to G$, com $\alpha(0)=g$ e $\alpha(1)=e$, e verificamos que $H: S^{n-1}\times[0,1]\to G$ definida por $H(x,t)=(\alpha(t))^{-1}T_1(x)\alpha(t)$ é a homotopia desejada. Concluímos assim que se $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ são equivalentes, então T_1 é homotópica, relativa a x_0, a T_2.

Reciprocamente, suponha que $T_1\simeq T_2$ rel$\{x_0\}$ (a notação rel$\{x_0\}$ significa que existe uma homotopia entre T_1 e T_2 que é relativa a $\{x_0\}$). Não é difícil verificar que $T_1T_2^{-1}: S^{n-1}\to G$ definida por $(T_1T_2^{-1})(x)=T_1(x)T_2(x)^{-1}$ é homotópica, relativa a x_0, à aplicação constante igual a e. Sendo assim, ela tem uma extensão contínua $v:\mathscr{H}_1\to G$. De fato, ela tem uma extensão contínua para o disco D^n e daí podemos fazer a composição da inversa da projeção $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\mathscr{H}_1\mapsto(x_1,\ldots,x_n,0)\in D^n$ com tal extensão, obtendo assim uma extensão definida em $\mathscr{H}_1$. Defina $h_1: U_1\to G$ por

$$h_1(x)=\begin{cases} v(x), & , \quad x\in\mathscr{H}_1\\ g^1_{12}(x)g^2_{12}(x)^{-1} & , \quad x\in\mathscr{H}_2\cap U_1.\end{cases}$$

Como $\mathscr{H}_1\cap(\mathscr{H}_2\cap U_1)=S^{n-1}$ e, sobre S^{n-1}, $v(x)=T_1(x)T_2(x)^{-1}=g^1_{12}(x)g^2_{12}(x)^{-1}$, segue que $h_1(x)$ é contínua.

Agora seja $\mathring{\mathscr{H}}_2$ o interior de $\mathscr{H}_2$ (de modo que $\mathring{\mathscr{H}}_2\subset U_2$) e $\mathring{\psi}^i_2=\psi^i_2|_{\pi_i^{-1}(\mathring{\mathscr{H}}_2)}$, $i=1,2$. Então $\{(U_1,\psi^1_1),(\mathring{\mathscr{H}}_2,\mathring{\psi}^1_2)\}$ e $\{(U_1,\psi^2_1),(\mathring{\mathscr{H}}_2,\mathring{\psi}^2_2)\}$ trivializam $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ respectivamente, e as correspondentes funções de transição são justamente as restrições apropriadas de g^1_{ij} e g^2_{ij} (continuamos a usar os mesmos símbolos para estas restrições). Agora defina $h_2:\mathring{\mathscr{H}}_2\to G$ por $h_2(x)=e$. Então, para $x\in U_1\cap\mathring{\mathscr{H}}_2$,

$$\begin{aligned}
h_1(x)^{-1}g^1_{12}(x)h_2(x) &= h_1(x)^{-1}g^1_{12}(x)\\
&= g^2_{12}(x)g^1_{12}(x)^{-1}g^1_{12}(x)=g^2_{12}(x),
\end{aligned}$$

e assim podemos concluir que os fibrados $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ são equivalentes. $\square$

Assim, juntando os dois lemas anteriores, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Seja G um grupo topológico conexo por caminhos. Então o conjunto de classes de equivalência de G-fibrados principais sobre S^n, $n \geq 2$, está em bijeção com os elementos de $\pi_{n-1}(G)$.*

É importante ressaltar que tal bijeção é obtida pela aplicação característica. Como observamos, um fibrado principal sobre S^n pode ser descrito por duas trivializações locais, e assim, essencialmente uma função de transição. O teorema anterior nos afirma que toda informação sobre o fibrado está contida na classe de homotopia da função de transição. Embora a classificação obtida pelo teorema acima seja de natureza topológica, ela tem uma versão diferenciável. A grosso modo, a razão para isto é que a classificação acima depende apenas de classes de homotopia, e qualquer aplicação contínua entre variedades diferenciáveis é homotópica a uma aplicação diferenciável.

Como casos particulares de nosso interesse, observamos que os fibrados principais sobre S^2 com grupo S^1 são classificados por $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. O mesmo acontece com os fibrados principais sobre S^4 com grupo $SU(2) \cong S^3$, pois $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$.

Sabemos que um grande resultado devido a Hopf nos diz que, em geral, $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, sendo este isomorfismo dado pelo grau da aplicação. Assim, quem classifica um fibrado principal sobre S^2 com grupo S^1 é o grau da função de transição, a qual pode ser pensada como uma aplicação se S^1 em S^1. Uma maneira de caracterizar o grau de uma aplicação de S^1 em S^1 é que pensando que ela é uma curva fechada em S^1, e daí o grau dessa aplicação é o **número de rotação** desta curva, isto é, o número líquido de voltas que a curva dá em torno da origem no sentido anti-horário (grau positivo). Lembramos que no fibrado de Hopf complexo a função de transição é, em coordenadas polares, $e^{i\theta}$, de modo que seu grau é 1. Portanto o fibrado complexo de Hopf corresponde à classe 1 de homotopia de $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Esse valor inteiro, como já vimos anteriormente, pode ser obtido calculando uma certa integral. Faremos isso agora novamente, porém, relacionando explicitamente esta integral com o grau da função de transição. Considere um fibrado principal $P(S^2, S^1)$ e ω uma forma de conexão neste fibrado, com forma de curvatura Ω. Vamos supor, como antes, que U_1 e U_2 são vizinhanças trivializantes. Sejam s_1 e s_2 as seções canônicas associadas a estas trivializações. Escreva $\mathscr{A}_1 = s_1^*\omega$, $\mathscr{A}_2 = s_2^*\omega$, $\mathscr{F} = s_1^*\Omega$ e g_{12} a função de transição correspondente. Pensaremos g_{12} como uma curva fechada do intervalo $[0, 2\pi]$ em S^1, de modo que podemos escrever

$g_{12}(t) = e^{i\varphi(t)}$, em que $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Na interseção $U_1 \cap U_2$, temos que

$$\mathscr{A}_1 = g_{12}^{-1} \mathscr{A}_2 g_{12} + g_{12}^{-1} d g_{12} = \mathscr{A}_2 + i d\varphi.$$

Escrevemos $\mathscr{A}_1 = iA_1$ e $\mathscr{A}_2 = iA_2$ e $\mathscr{F} = iF$. Temos então que $d\varphi = A_1 - A_2$ e pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2\pi}\int_{S^2} \mathscr{F} &= -\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathscr{H}_1} F + \int_{\mathscr{H}_2} F\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathscr{H}_1} dA_1 + \int_{\mathscr{H}_2} dA_2\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{S^1} A_1 - A_2\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi.
\end{aligned}$$

Lembrando que o grau de g_{12} é dado por $k = 1/(2\pi i)\int_{g_{12}} dz/z$, temos que

$$\int_{g_{12}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\varphi(t)}} i\varphi'(t) e^{i\varphi(t)} dt = i\int_0^{2\pi} \varphi'(t) dt = i\int_0^{2\pi} d\varphi,$$

logo

$$\frac{i}{2\pi}\int_{S^2} \mathscr{F} = -\frac{1}{2\pi}\cdot(2\pi k) = -k \in \mathbb{Z}.$$

De modo similar, vamos agora expressar uma certa integral (relacionada com o funcional de Yang-Mills) de uma intensidade de uma conexão em um fibrado principal $P(S^4, S^3)$ como o grau da função de transição. Antes de fazer isso, é necessário fazer alguns comentários sobre o operador Estrela de Hodge, que será denotado por $*$, e sobre uma relação deste com o funcional de Yang-Mills. Para ver uma definição deste operador, consulte por exemplo [Ble81]. Em geral, se M é uma variedade Riemanniana orientável de dimensão n, então fixado um inteiro $0 \le k \le n$, o operador estrela de Hodge é definido no espaço das k-formas $\Lambda^k(M)$ e toma valores no espaço de formas $\Lambda^{n-k}(M)$. Este operador é um isomorfismo de espaços vetoriais, cujo inverso é $*^{-1} = (-1)^{k(n-k)}*$. Mais geralmente ainda, pode-se definir um operador estrela de Hodge para formas com valores em um espaço vetorial V de dimensão finita. Para isso, primeiro fixamos uma base de V e definimos o operador componente a componente. Deve-se mostrar que esta definição não depende da base escolhida. A situação que nos interessa é o caso em que M

tem dimensão 4 e $*$ atua em 2-formas. Neste caso, $*: \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ e $*^{-1} = *$, de modo que $*$ é uma involução e, portanto, em cada ponto tem autovalores $+1$ e -1. Isto nos permite decompor o espaço $\Lambda^2(M)$ em uma soma direta de $C^\infty(M)$-módulos:

$$\Lambda^2(M) = \Lambda^2_+(M) \oplus \Lambda^2_-(M),$$

em que $\Lambda^2_+(M)$ é o espaço das 2-formas $\mathscr{F}$ que satisfazem $*\mathscr{F} = \mathscr{F}$, que chamaremos de formas **auto duais**, e $\Lambda^2_-(M)$ é o espaço das 2-formas $\mathscr{F}$ que satisfazem $*\mathscr{F} = -\mathscr{F}$, que chamaremos de formas **anti auto duais**. Dada $\mathscr{F} \in \Lambda^2(M)$ qualquer, temos a decomposição $\mathscr{F} = \mathscr{F}^+ + \mathscr{F}^-$, em que $\mathscr{F}^+ = \frac{1}{2}(\mathscr{F} + *\mathscr{F}) \in \Lambda^2_+(M)$ e $\mathscr{F}^- = \frac{1}{2}(\mathscr{F} - *\mathscr{F}) \in \Lambda^2_-(M)$.

É mais simples explicitar a ação do operador $*$ quando $M = \mathbb{H}$ (métrica e orientação canônicas):

$$*(dq_i \wedge dq_j) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\, dq_k \wedge dq_l,$$

em que

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1 & \text{se } ijkl \text{ é uma permutação par de 1234} \\ -1 & \text{se } ijkl \text{ é uma permutação ímpar de 1234} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é o chamado símbolo de Levi-Civita. Usando isto, temos bases canônicas para os espaços de formas auto duais e para o espaço de formas anti auto duais:

$$\Lambda^2_+(\mathbb{H}) = < dq_1 \wedge dq_2 + dq_3 \wedge dq_4, dq_1 \wedge dq_3 + dq_4 \wedge dq_2, dq_1 \wedge dq_4 + dq_2 \wedge dq_3 >$$

e

$$\Lambda^2_-(\mathbb{H}) = < dq_1 \wedge dq_2 - dq_3 \wedge dq_4, dq_1 \wedge dq_3 - dq_4 \wedge dq_2, dq_1 \wedge dq_4 - dq_2 \wedge dq_3 > .$$

É fácil verificar agora que se $\mathscr{F} \in \Lambda^2_+(\mathbb{H})$ e $\mathscr{G} \in \Lambda^2_-(\mathbb{H})$, então $\mathscr{F} \wedge \mathscr{G} = 0$.

Note que, da expressão de $d\overline{q} \wedge dq$ obtida na seção anterior, as formas $\mathscr{F}_{\lambda,n}$ são todas anti auto duais. É importante observar que os conceitos anti auto dual e auto dual se invertem quando revertemos a orientação da variedade, de modo que a distinção entre esses conceitos não tem significância substancial, sendo apenas uma escolha de convenção.

Uma observação importante a respeito do operador $*$ com respeito à conformalidade deve ser feita. Se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são variedades Riemannianas orientadas de dimensão 4 e $f: M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo conforme que preserva orientação, então $*$ comuta com o pull-back por f: $*(f^*\mathscr{F}) = f^*(*\mathscr{F})$, para toda $\mathscr{F} \in \Lambda^2(M_2)$. Por exemplo, podemos considerar $\mathbb{R}^4$

e S^4 (com métricas e orientações canônicas). A projeção estereográfica $p_S : U_S \to \mathbb{R}^4$ é um difeomorfismo conforme que preserva a orientação, de modo que uma 2-forma em U_S é anti auto dual se, e somente se, seu pull-back por p_S^{-1} é anti auto dual em $\mathbb{R}^4$ (espaço no qual já sabemos uma base relativamente simples de formas anti auto duais). Por continuidade, uma 2-forma em S^4 é anti auto dual se, e somente se, seu pull-back por p_S^{-1} é anti auto dual em $\mathbb{R}^4$. Seja $P(S^4, S^3)$ um fibrado principal e ω uma 1-forma de conexão em P com forma de curvatura Ω. Se s_S é a seção canônica definida em U_S, então $\mathscr{F}_S = s_S^*\Omega$ é uma 2-forma em $U_S \subset S^4$. Dizemos que ω é anti auto dual (respec. auto dual) se $\mathscr{F}_S$ é anti auto dual (respec. auto dual).

Vamos agora discutir uma relação entre o operador $*$ e o funcional de Yang-Mills. Usaremos explicitamente a identificação entre $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ e $\mathfrak{su}(2)$ dada por $\mathbf{i} = i\sigma_3$, $\mathbf{j} = i\sigma_2$ e $\mathbf{k} = i\sigma_1$, em que

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

são as **matrizes de Pauli**. Considere também as matrizes 2×2 $E_i = (a_{kl})$, em que $a_{kl} = 0$ se $k \neq i$ ou $l \neq i$ e $a_{ii} = 1$. Daí $\mathbf{i} = iE_1 - iE_4$, $\mathbf{j} = E_2 - E_3$ e $\mathbf{k} = iE_2 + iE_3$. Se $\mathscr{F}$ é uma 2-forma em $\mathbb{H}$ com valores em $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, podemos escrevê-la como $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1\mathbf{i} + \mathscr{F}_2\mathbf{j} + \mathscr{F}_3\mathbf{k}$. Usando a identificação de $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ com $\mathfrak{su}(2)$, podemos pensar $\mathscr{F}$ como uma 2-forma com valores em $\mathfrak{su}(2)$ e escrevê-la em forma matricial. Consideraremos novamente a álgebra de matrizes com entradas na álgebra das formas diferenciais com o produto $\wedge$. Entretanto, agora precisamos considerar apenas matrizes 2×2 cujas entradas são formas de grau par. Note que a $\mathbb{R}$-álgebra das formas de grau par é comutativa. Expressamos $\mathscr{F}$ na linguagem de matrizes e calculamos $\mathrm{tr}(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} &= \mathscr{F}_1(iE_1 - iE_4) + \mathscr{F}_2(E_2 - E_3) + \mathscr{F}_3(iE_2 + iE_3) \\
&= i\mathscr{F}_1 E_1 + (\mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3)E_2 + (-\mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3)E_3 - i\mathscr{F}_1 E_4 \\
&= \begin{pmatrix} i\mathscr{F}_1 & \mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3 \\ -\mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3 & -i\mathscr{F}_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F} = \begin{pmatrix} i\mathscr{F}_1 & \mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3 \\ -\mathscr{F}_2 + i\mathscr{F}_3 & -i\mathscr{F}_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} i*\mathscr{F}_1 & *\mathscr{F}_2 + i*\mathscr{F}_3 \\ -*\mathscr{F}_2 + i*\mathscr{F}_3 & -i*\mathscr{F}_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^3 \mathscr{F}_i\wedge *\mathscr{F}_i & \times \\ \times & -\sum_{i=1}^3 \mathscr{F}_i \wedge *\mathscr{F}_i \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\mathrm{tr}(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F}) = -2\sum_{i=1}^{3}\mathscr{F}_i\wedge *\mathscr{F}_i.$$

Podemos escrever $\mathscr{F}$ também em função dos dq_i, dq_j: $\mathscr{F} = \sum_{i<j}\mathscr{F}_{ij}dq_i\wedge dq_j$, em que $\mathscr{F}_{ij} = \mathscr{F}^1_{ij}\mathbf{i} + \mathscr{F}^2_{ij}\mathbf{j} + \mathscr{F}^3_{ij}\mathbf{k}$. Desta maneira, $\mathscr{F}_k = \sum_{i<j}\mathscr{F}^k_{ij}dq_i\wedge dq_j$, para $k = 1,2,3$, e a soma é calculada sobre $0\leq i<j\leq 3$. Expressando nestes termos $*\mathscr{F}$, vemos que vale

$$\mathscr{F}_k\wedge *\mathscr{F}_k = \left(\sum_{i<j}(\mathscr{F}^k_{ij})^2\right)dq_0\wedge dq_1\wedge dq_2\wedge dq_3,$$

de modo que

$$\mathrm{tr}(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F}) = -2\left[\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i<j}(\mathscr{F}^k_{ij})^2\right)\right]dq_0\wedge dq_1\wedge dq_2\wedge dq_3 = -\|\mathscr{F}(q)\|^2 dq_0\wedge dq_1\wedge dq_2\wedge dq_3$$

e concluímos que, se $\mathscr{F}$ é oriundo de um potencial $\mathscr{A}$, vale

$$YM(\mathscr{A}) = \int_{\mathbb{R}^4}\|\mathscr{F}(q)\|^2 = -\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{tr}(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F}).$$

Em particular, com respeito aos potenciais anti auto duais $\mathscr{A}_{\lambda,n}$, teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{tr}\left[\left(\frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right)^2\right] &= \frac{-1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{tr}(\mathscr{F}^2)\\
&= \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{tr}(\mathscr{F}\wedge *\mathscr{F})\\
&= \frac{-1}{8\pi^2}YM(\mathscr{A}_{\lambda,n})\\
&= -1\in\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

em que $\mathscr{F}^k$ é a k-ésima potência exterior de $\mathscr{F}$.

Lembramos que o funcional de Yang-Mills é definido para potenciais em $\mathbb{R}^4$. É de interesse físico encontrar os potenciais que minimizam (localmente) o funcional de Yang-Mills. Para encontrá-los, encontram-se primeiramente as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao funcional de Yang-Mills. Mostra-se que tais equações são

$$\sum_{i=0}^{3}\left(\partial_i\mathscr{F}_{ij}+[\mathscr{A}_i,\mathscr{F}_{ij}]\right)=0, j=1,2,3.$$

Estas equações são não-lineares e são de segunda ordem nas componentes $\mathscr{A}_i$ do potencial $\mathscr{A}$. Existe um interesse particular em física nos mínimos absolutos deste funcional, os quais são chamados de **instantons**. Um fato que queremos comentar, o qual faz uma ligação importante entre a linguagem de conexões em fibrados e os potencias de ação finita que são soluções das equações de Yang-Mills (chamados de **potenciais de Yang-Mills**), é uma consequência do Teorema das Singularidades Removíveis de Uhlenbeck ([Uhl82]), que é o seguinte: Se $\mathscr{A}$ é um potencial de Yang-Mills em $\mathbb{R}^4$, então existe um único fibrado principal $P(S^4,S^3)$, uma forma de conexão ω em P e uma seção local $s:U_S\to\pi^{-1}(U_S)$ tais que $\mathscr{A}=(s\circ p_S^{-1})^*\omega$. Neste caso, note que a ação de $\mathscr{A}$, por ser finita, pode ser escrita como uma integral do seu correspondente em S^4 (o seu pull-back por p_S), o qual também denotaremos por $\mathscr{F}$. Mostra-se que o número

$$k=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4}\operatorname{tr}\left[\left(\frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right)^2\right]$$

é um inteiro, em que $\mathscr{F}$ é a intensidade de qualquer conexão neste fibrado, e que este inteiro classifica o fibrado principal $P(S^4,S^3)$ pois ele coincide com o grau da função de transição do fibrado. O fato de que tais integrais (no caso do grupo S^1 e do grupo $SU(2)$) não dependem da escolha da conexão no fibrado está associado ao tipo de formas que estamos integrando. De fato, em ambos os casos estamos integrando formas que são polinômios em $\mathscr{F}$, e mais que isso, são polinômios invariantes, o que significa que tais polinômios são invariantes por conjugação (como é o caso de tr). Estas formas são casos particulares das chamadas classes características (veja por exemplo [KN69] vol.2 ou [MS74]). No caso do grupo S^1, a forma $\mathscr{F}$ corresponde ao primeiro caracter de Chern e no caso do grupo $SU(2)$, a forma $(1/2)\operatorname{tr}\left(\frac{i\mathscr{F}}{2\pi}\right)^2=-(1/8\pi^2)\operatorname{tr}(\mathscr{F}\wedge\mathscr{F})$ corresponde ao segundo caracter de Chern.

Para finalizar, se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são 2-formas em $\mathbb{H}$ com valores em $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, e se escrevermos $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1\mathbf{i}+\mathscr{F}_2\mathbf{j}+\mathscr{F}_3\mathbf{k}$ e $\mathscr{G}=\mathscr{G}_1\mathbf{i}+\mathscr{G}_2\mathbf{j}+\mathscr{G}_3\mathbf{k}$, então é fácil verificar que $\operatorname{tr}(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})=-2\sum_i\mathscr{F}_i\wedge\mathscr{G}_i$. Em particular, se $\mathscr{F}$ é auto dual e $\mathscr{G}$ é anti auto dual, então $\mathscr{F}_i\wedge\mathscr{G}_i=0$, e portanto $\operatorname{tr}(\mathscr{F}\wedge\mathscr{G})=0$. Assim, dado um potencial de Yang-Mills $\mathscr{A}$ em $\mathbb{H}$ qualquer, e $\mathscr{F}$ a intensidade correspondente, temos a decomposição $\mathscr{F} = \mathscr{F}^+ + \mathscr{F}^-$, e daí

$$\begin{aligned} YM(\mathscr{A}) &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathscr{F} \wedge *\mathscr{F}) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\left(\mathscr{F}^+ \wedge *\mathscr{F}^+\right) + \mathrm{tr}\left(\mathscr{F}^- \wedge *\mathscr{F}^-\right) \\ &= \|\mathscr{F}^+\|^2 + \|\mathscr{F}^-\|^2, \end{aligned}$$

e além disso,

$$\begin{aligned} 8\pi^2 k &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(\mathscr{F} \wedge \mathscr{F}) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\left((\mathscr{F}^+ + \mathscr{F}^-) \wedge (\mathscr{F}^+ + \mathscr{F}^-)\right) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\left(\mathscr{F}^+ \wedge *\mathscr{F}^+\right) + \mathrm{tr}\left(\mathscr{F}^- \wedge *\mathscr{F}^-\right) \\ &= \|\mathscr{F}^+\|^2 - \|\mathscr{F}^-\|^2. \end{aligned}$$

Combinando algebricamente as duas igualdades obtidas acima, podemos obter a desigualdade $YM(\mathscr{A}) \geq 8\pi^2|k|$. Verifica-se daí que a igualdade ocorre se, e somente se, $*\mathscr{F} = (\text{sinal } k)\mathscr{F}$, de modo que os mínimos absolutos do funcional de Yang-Mills são exatamente os potenciais anti auto duais (auto duais). Em particular, os potenciais $\mathscr{A}_{\lambda,n}$, os quais correspondem a $k = -1$ (fibrado de Hopf quaterniônico), são todos mínimos absolutos do funcional de Yang-Mills.

Referências Bibliográficas

[Ati79] M.F. Atiyah. *Geometry of Yang-Mills Fields.* Scuola normale superiore, 1979.

[BG80] R.L. Bishop and S.I. Goldberg. *Tensor analysis on manifolds.* Dover Publications, 1980.

[Ble81] D. Bleecker. *Gauge theory and variational principles.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

[BPST75] AA Belavin, A.M. Polyakov, AS Schwartz, and Y.S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Physics Letters B*, 59(1):85–87, 1975.

[BT82] R. Bott and L.W. Tu. *Differential forms in algebraic topology.* Springer, 1982.

[Car92] M.P. Do Carmo. *Riemannian geometry.* Birkhauser, 1992.

[Dar94] R. W. R. Darling. *Differential forms and connections.* Cambridge Univ Pr, 1994.

[DK90] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds.* Oxford University Press, USA, 1990.

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge Univ Pr, 2002.

[Hel62] S. Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press, 1962.

[Jar05] M. Jardim. *An introduction to gauge theory and its applications.* Vigésimo quinto Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA, 2005.

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry.* Interscience Publ., New York, Vol. 1 (1963), Vol. 2 (1969).

[Lan02] S. Lang. *Algebra.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lee97] J.M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature.* Springer Verlag, 1997.

[Lee03] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer Verlag, 2003.

[Mil77] R.S. Millman. Kleinian transformation geometry. *American Mathematical Monthly*, 84(5):338–349, 1977.

[MS74] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.

[Nab97] G.L. Naber. *Topology, geometry, and gauge fields: Foundations*. Springer Verlag, 1997.

[Nak03] M. Nakahara. *Geometry, topology, and physics*. Taylor & Francis, 2003.

[Nom54] K. Nomizu. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 76(1):33–65, 1954.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*. Academic Press, 1983.

[Pet06] P. Petersen. *Riemannian geometry*. Springer Verlag, 2006.

[Spi75] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 1-5*. Publish or Perish, 1975.

[Ste99] N.E. Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton Univ Pr, 1999.

[Tra77] A. Trautman. Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings. *International Journal of Theoretical Physics*, 16(8):561–565, 1977.

[Uhl82] K. K. Uhlenbeck. Removable singularities in Yang-Mills fields. *Communications in Mathematical Physics*, 83(1):11–29, 1982.

[War83] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer Verlag, 1983.

[YM54] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, 1954.