UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Tanise Carnieri Pierin

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE ARTIN A PARTIR DOS EXT-PROJETIVOS NA PARTE DIREITA DE SUAS CATEGORIAS DE MÓDULOS

CURITIBA

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Tanise Carnieri Pierin

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE ARTIN A PARTIR DOS EXT-PROJETIVOS NA PARTE DIREITA DE SUAS CATEGORIAS DE MÓDULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

CURITIBA

2011

À minha família,
que com amor e confiança incentiva-me a buscar meus sonhos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo que fui, sou e serei, permitindo vencer mais essa etapa de minha vida.

À minha família, pelo notório incentivo dado aos meus estudos, proporcionando meu crescimento pessoal e profissional.

Ao meu orientador, Edson, pela atenção e apoio fornecidos não somente durante a elaboração desta dissertação, mas também ao longo de toda minha vida acadêmica.

A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná, que direta ou indiretamente contribuíram para o meu desenvolvimento intelectual, permitindo que eu chegasse até aqui.

À CAPES, que financiou integralmente este projeto.

E por fim aos meus amigos e colegas que participaram desse processo, tornando cada dia de trabalho muito especial, dos quais lembrarei sempre com muito carinho.

A todos, meu sincero agradecimento.

Resumo

Motivados pela definição de álgebras suportadas proposta por Assem em [2], apresentamos uma tentativa de classificar as álgebras de artin hereditárias, quasi-inclinadas e laura estritas a partir dos Ext-projetivos na parte direita de suas categorias de módulos (ou, dualmente, Ext-injetivos na parte esquerda). Para isso, estabelecemos inicialmente algumas caracterizações tanto para as partes esquerda e direita da categoria de módulos definidos sobre uma álgebra de artin, quanto para seus módulos Ext-injetivos e Ext-projetivos, respectivamente. Além disso, são descritos os *quivers* de Auslander-Reiten de álgebras laura estritas e, consequentemente, de álgebras fracamente *shod* estritas. Por fim, demonstramos alguns resultados referentes às álgebras suportadas.

Palavras-chave: *álgebras de artin, quiver de Auslander-Reiten, partes direita e esquerda da categoria de módulos, Ext-projetivos na parte direita.*

Abstract

Motivated by the definition of supported algebras proposed by Assem in [2], we present an attempt to classify hereditary, quasitilted and laura strict artin algebras from the Ext-projective in the right part of its module categories (or, dually, Ext-injective in the left part). For this purpose, we have first established some characterizations for left and right parts of the category of finitely generated modules over an artin algebra, and for its Ext-injective and Ext-projective modules, respectively. Furthermore, we describe the Auslander-Reiten quivers for laura strict algebras and therefore strict weakly shod algebras. Finally, we show some results concerning supported algebras.

Keywords: *artin algebras, Auslander-Reiten quiver, left and right parts of module category, Ext-projective in the right part.*

Sumário

Resumo iii

Abstract iv

Introdução 1

1 Conceitos e Resultados Preliminares 5

1.1 Teoria de Auslander-Reiten 5

1.1.1 Morfismos Irredutíveis e Sequências de Auslander-Reiten 5

1.1.2 Translações de Auslander-Reiten 8

1.1.3 ***Quiver*** de Auslander-Reiten 13

1.2 Teoria Inclinante 18

1.2.1 Álgebras Inclinadas 23

1.3 Outros conceitos e resultados 28

2 Um estudo das partes esquerda e direita da categoria de módulos 31

2.1 Alguns Exemplos 32

2.2 Subcategorias de *mod A* fechadas para antecessores 38

2.2.1 Subcategorias contidas em $\mathscr{L}_A$ 43

2.3 Seções e Seções à Esquerda 48

3 Ext-projetivos na parte direita da categoria de módulos de Álgebras Laura 53

3.1 Álgebras Hereditárias 53

3.2 Álgebras Quasi-inclinadas 55

3.2.1 Algumas propriedades das Fatias Completas 56

3.2.2 Consequências e outros resultados 63

3.3 Álgebras Laura Estritas 66

3.4 Álgebras fracamente ***shod*** 72

4 Um estudo das Álgebras Suportadas **75**

4.1 Álgebras Suporte 75

4.2 Álgebras Suportadas 79

4.2.1 Subcategorias contravariantemente finitas 80

4.2.2 Relação entre álgebras Laura Estritas e Suportadas à Esquerda e à Direita 88

Referências Bibliográficas **91**

Introdução

A fim de classificar uma álgebra de artin, a Teoria de Representações de Álgebras estuda os módulos indecomponíveis finitamente gerados definidos sobre essa álgebra, e os possíveis morfismos entre eles. Embora seja aceito que a origem da teoria tenha ocorrido com a associação dos números complexos a pares de números reais, dada por Hamilton, a abordagem moderna em que os módulos são vistos como representações deve-se à Emy Noether, em meados de 1930. Desde então muitas ferramentas foram apresentadas para descrever a categoria de módulos. Destaca-se o *quiver* de Auslander-Reiten, que ilustra em forma de diagrama as informações contidas nas sequências de Auslander-Reiten, definidas por Maurice Auslander e Idun Reiten em [9] e [10].

A teoria de representações de álgebras de artin hereditárias foi amplamente investigada e, até o momento, corresponde a uma das mais bem compreendidas. No caso em que A é conexa, básica e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, A é simplesmente uma álgebra de caminhos associada a um *quiver* finito, conexo, acíclico e sem relações. A partir dessas álgebras, Happel e Ringel, por um "processo de inclinação", obtiveram as álgebras inclinadas (em 1982). Tal processo consiste em determinar sobre a álgebra hereditária um módulo T inclinante e, em seguida, tomar a álgebra de endomorfismos de T. Observaram ainda que o *quiver* de Auslander-Reiten da categoria de módulos de uma álgebra inclinada contém uma fatia completa, estrutura que permite recuperar informações sobre a álgebra hereditária original. A componente do *quiver* de Auslander-Reiten que a contém é chamada componente de conexão, e sua existência é suficiente para garantir que uma dada álgebra é inclinada. Posteriormente, foi demonstrado que há no máximo duas componentes de conexão, e são exatamente duas quando a álgebra é *concealed.* Em [20], Happel, Reiten e SmalØ apresentaram uma generalização tanto para as álgebras inclinadas, quanto para as canônicas, que chamaram de álgebras quasi-inclinadas. Nesse mesmo artigo, obtiveram que as condições

1. $dim\, gl\, A \leq 2$,

2. Para cada A-módulo indecomponível X, tem-se que $dp_A\ X \leq 1$ ou $di_A\ X \leq 1$,

estabelecidas sobre a álgebra A, são necessárias e suficientes para que A seja quasi-inclinada. Nesta dissertação, apenas por simplicidade, assumimos que esta é sua definição. Também em [20], foram definidas as partes esquerda e direita da categoria de módulos, tornando possível a compreensão da teoria de representações dessa classe de álgebras.

Após investigadas as álgebras cuja dimensão global não ultrapassa dois, um próximo passo bastante natural foi buscar informações sobre uma álgebra de artin A tal que $dim\ gl\ A \leq 3$. Em [19], Flávio U. Coelho e Marcelo Lanzilotta introduziram as fracamente *shod*, que são álgebras com a propriedade descrita acima, e determinaram completamente seus *quivers* de Auslander-Reiten. Em resumo, foi demonstrado que existe exatamente uma componente *pip*-limitada e, se Γ é uma outra componente (distinta da *pip*-limitada), então é semirregular e cumpre uma das condições abaixo

1. $\Gamma \subseteq \mathscr{L} \setminus \mathscr{R}$,

2. $\Gamma \subseteq \mathscr{R} \setminus \mathscr{L}$,

em que $\mathscr{L}$ e $\mathscr{R}$ representam as partes esquerda e direita da categoria de módulos, respectivamente.

Em [6], Ibrahim Assem e Coelho definiram uma classe de álgebras que abrange todas as descritas anteriormente, as álgebras laura. Em relação a seus *quivers* de Auslander-Reiten, um resultado bastante semelhante ao das álgebras fracamente *shod* foi obtido: há exatamente uma componente não semirregular, fiel e quasi-dirigida, e cada uma das restantes, além de satisfazer uma das condições dispostas acima (1 ou 2), é semirregular e é componente do *quiver* de Auslander-Reiten de um dos produtos de álgebras inclinadas, ${}_{\infty}A$ ou A_{∞}.

Finalmente, em [7], Assem, Coelho e Sonia Trepode, introduziram as álgebras suportadas à esquerda, ou seja, com a propriedade de que as subcategorias $add\ \mathscr{L}$ de suas categorias de módulos são contravariantemente finitas. Já em [4], diversas caracterizações foram alcançadas para tais álgebras, que englobam praticamente todas as anteriores, com exceção somente de algumas álgebras inclinadas e das quasi-inclinadas estritas. Mais recentemente, Assem definiu as álgebras $\mathscr{C}$-suportadas, em que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}$ é fechada para antecessores, estabelecendo uma generalização para as suportadas à esquerda. Sua definição está baseada em módulos chamados Ext-injetivos em $add\ \mathscr{C}$, que já haviam fornecido resultados significativos na caracterização da parte $\mathscr{L}$, quando $\mathscr{C} = \mathscr{L}$.

Esta dissertação representa uma tentativa de classificar as classes de álgebras de artin hereditárias, inclinadas, quasi-inclinadas estritas, fracamente *shod* e laura estritas a partir apenas de condições satisfeitas pelos Ext-projetivos na parte direita de suas respectivas categorias de módulos (ou, dualmente, Ext-injetivos na parte esquerda). Julgamos termos atingido esse objetivo para álgebras de artin hereditárias e quasi-inclinadas devido aos seguintes resultados:

Teorema A. Uma álgebra de artin A é hereditária se, e somente se, cada A-módulo Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ (resp., Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$) é projetivo (resp., injetivo).

Teorema B. Para uma álgebra de artin quasi-inclinada A, são equivalentes:

(i) Existe um A-módulo Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ (resp., Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$).

(ii) A é inclinada e existe módulo projetivo (resp., injetivo) em uma componente de conexão.

Corolário. Seja A uma álgebra de artin. Então, A é inclinada tal que existe um módulo projetivo (resp., injetivo) em uma componente de conexão Γ de $\Gamma(mod\,A)$ se, e somente se, existe uma fatia completa em $mod\,A$, $\Sigma \subseteq \Gamma$, formada pelos módulos indecomponíveis Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$ (resp., Ext-injetivos em $add\,\mathscr{L}_A$).

Para as álgebras laura estritas (laura não quasi-inclinadas), somente foi possível garantir a existência de módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}$ e Ext-injetivos em $add\,\mathscr{L}$, e mostrar que tais conjuntos formam uma seção à direita e à esquerda, respectivamente, no sentido dado por Assem em [2]. Como as álgebras fracamente *shod* estritas são casos particulares de laura estritas, os mesmos resultados se aplicam a elas.

Os temas dessa dissertação estão dispostos da seguinte maneira: no primeiro capítulo, são apresentadas de forma bastante concisa as teorias de Auslander-Reiten e Inclinante, além de outras definições e resultados necessários nos capítulos seguintes. O segundo capítulo é dedicado às partes esquerda e direita da categoria de módulos definidos sobre uma álgebra de artin, e a seus módulos Ext-injetivos e Ext-projetivos, respectivamente. Com base em [2], apresentamos a definição mais geral de Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$, sendo $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena da categoria de módulos, fechada para antecessores. Em resumo, para uma álgebra de artin A, mostramos que o conjunto $\mathscr{E}$ dos A-módulos Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$ satisfaz:

1. $|\mathscr{E}| \leq rk\,K_0(A)$;

2. $\mathscr{E}$ intercepta cada τ_A-órbita de $\Gamma(mod\,A)$ no máximo uma vez;

3. todo caminho de morfismos irredutíveis em $\mathscr{E}$ é seccional;

4. $\mathscr{E}$ não contém ciclos de morfismos irredutíveis.

Além disso, $\mathscr{E}$ é dirigido e convexo em $ind\,A$, no caso em que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A$.

O terceiro capítulo contém os teoremas A e B enunciados acima, e os resultados obtidos para as álgebras laura e fracamente *shod* estritas, além de alguns detalhes sobre seus *quivers* de Auslander-Reiten, mencionados anteriormente. O quarto e último capítulo é destinado a um estudo das álgebras suportadas, onde são demonstradas algumas de suas equivalências. Além disso, são definidas as álgebras suporte, que possibilitam várias dessas caracterizações. Destacamos também o seguinte resultado:

Teorema C. Toda álgebra laura estrita é suportada à esquerda e à direita.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentamos conceitos básicos e resultados que serão necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Recordamos que uma álgebra A é de artin se é um módulo finitamente gerado sobre seu centro, que, adicionalmente, é um anel artiniano. Ao longo desse texto, a menos de indicação contrária, A corresponde a uma álgebra de artin, conexa e básica. Denotamos por $mod\,A$ a categoria formada pelos A-módulos finitamente gerados, e por $ind\,A$ a subcategoria plena de $mod\,A$ que consiste de um representante para cada classe de A-módulos indecomponíveis. Por A-módulo nos referimos a um A-módulo à direita. Também, denotamos por $rk\,K_0(A)$ o posto do grupo de Grothendieck, que é igual ao número de classes de isomorfismo de A-módulos simples.

1.1 Teoria de Auslander-Reiten

Uma ferramenta essencial em todos os capítulos propostos é a teoria de Auslander-Reiten. Apresentamos nesta seção apenas alguns de seus resultados, que podem ser encontrados com maiores detalhes em [11], e em [8], para o caso em que as álgebras são consideradas sobre corpos algebricamente fechados.

1.1.1 Morfismos Irredutíveis e Sequências de Auslander-Reiten

Definição 1.1. (a) *Um morfismo de A-módulos $f : L \to M$ é dito minimal à esquerda se todo $h \in End\,M$ tal que $hf = f$ é um automorfismo; f é dito quase cindido à esquerda se não é um monomorfismo que cinde e, para todo morfismo $u : L \to U$ que não é monomorfismo que cinde, existe $u' : M \to U$ tal que $u'f = u$; e f é minimal quase cindido à esquerda se é minimal e quase cindido à esquerda.*

(b) *Um morfismo de A-módulos $g : M \to N$ é dito minimal à direita se todo $k \in \mathrm{End}\, M$ tal que $gk = g$ é um automorfismo; g é dito quase cindido à direita se não é um epimorfismo que cinde e, para todo morfismo $v : V \to N$ que não é epimorfismo que cinde, existe $v' : V \to M$ tal que $gv' = v$; e g é minimal quase cindido à direita se é minimal e quase cindido à direita.*

Exemplo 1.1. *Seja P um A-módulo projetivo indecomponível. Então, a inclusão canônica $i : \mathrm{rad}\, P \to P$ é um morfismo quase cindido à direita. De fato, i não é um epimorfismo que cinde, pois caso contrário, teríamos $\mathrm{rad}\, P \simeq P$. Considere um morfismo $v : V \to P$ que não é epimorfismo que cinde, em particular, $\mathrm{Im}\, v$ é um submódulo próprio de P. Dessa forma, $\mathrm{Im}\, v \subseteq \mathrm{rad}\, P$, já que $\mathrm{rad}\, P$ é o único submódulo maximal de P e, portanto, v se fatora através de i.*

O lema a seguir nos fornece condições necessárias e suficientes para que um morfismo seja minimal quase cindido à esquerda ou à direita, para módulos indecomponíveis injetivos e projetivos, respectivamente.

Lema 1.1. (a) *Seja I um A-módulo injetivo indecomponível. Então, $g : I \to N$ é um morfismo minimal quase cindido à esquerda se, e somente se, g é um epimorfismo com núcleo $\mathrm{soc}\, I$.*

(b) *Seja P um A-módulo projetivo indecomponível. Então, $f : L \to P$ é um morfismo minimal quase cindido à direita se, e somente se, f é um monomorfismo com imagem $\mathrm{rad}\, P$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [8](p. 122). □

Definição 1.2. *Um morfismo de A-módulos $f : M \to N$ é irredutível se não é monomorfismo nem epimorfismo que cinde e, para toda fatoração $f = f_1 f_2$, com $f_1 : X \to N$ e $f_2 : M \to X$, tem-se que f_1 é um epimorfismo que cinde ou f_2 é um monomorfismo que cinde.*

Exemplo 1.2. *A inclusão canônica apresentada no exemplo acima é também um morfismo irredutível. De fato, como observado anteriormente, i não é um epimorfismo que cinde e, sendo P indecomponível, i não é um monomorfismo que cinde. Agora, seja $i = f_1 f_2$, com $f_1 : X \to P$ e $f_2 : \mathrm{rad}\, P \to X$, para algum A-módulo X. Observe que f_2 é um monomorfismo, já que i é. Neste caso, como $\mathrm{rad}\, P$ é um submódulo maximal de P, devemos ter $X = \mathrm{rad}\, P$*

ou $X = P$ e, portanto, f_2 é um monomorfismo que cinde ou f_1 é um epimorfismo que cinde, como desejado.

Observação 1.1. *(i)* Todo morfismo irredutível é um monomorfismo ou um epimorfismo: considere $f : M \to N$ um morfismo irredutível. Claramente, $f = jp$, em que $j : Im\, f \to N$ é a inclusão canônica e $p : M \to Im\, f$ é a correstrição de f. Se f não é um monomorfismo, então p também não é e, portanto, j é um epimorfismo que cinde. Logo, j é um isomorfismo, donde f é um epimorfismo.

(ii) Para cada A-módulo indecomponível M, não há morfismo irredutível $f : M \to M$: suponha que este não é o caso, e considere f um tal morfismo. Com base no item anterior, f é um epimorfismo ou um monomorfismo. Assuma que este último ocorre. De acordo com o lema de Fitting, $M = Ker\, f^n \oplus Im\, f^n$, para algum índice $n > 0$ (para mais detalhes, veja [1](p. 200)). Observe que $Ker\, f^n = 0$, já que $Ker\, f = 0$, o que implica em $M = Im\, f^n$. Uma vez que $Im\, f^n \subseteq Im\, f$, obtemos que f é também um epimorfismo e, portanto, é isomorfismo, o que é uma contradição.

Consequentemente, f é um epimorfismo. Assim, $Im\, f^n = M$, donde $Ker\, f^n = 0$. Neste caso, $Ker\, f = 0$, novamente uma contradição.

Teorema 1.2. (a) *Seja L um A-módulo indecomponível. Um morfismo $f : L \to M$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $f' : L \to M'$ tal que $(f\ f')^t : L \to M \oplus M'$ é minimal quase cindido à esquerda.*

(b) *Seja N um A-módulo indecomponível. Um morfismo $g : M \to N$ é irredutível se, e somente se, $M \neq 0$ e existe um morfismo $g' : M' \to N$ tal que $(g\ g') : M \oplus M' \to N$ é minimal quase cindido à direita.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [8](p. 103). □

Definição 1.3. *Uma sequência exata curta de A-módulos*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é dita de Auslander-Reiten (ou quase cindida) se f é um morfismo minimal quase cindido à esquerda e g é minimal quase cindido à direita.

Observe que, por definição, uma sequência de Auslander-Reiten não cinde. O teorema que apenas enunciamos abaixo lista algumas propriedades dessas sequências.

Teorema 1.3. *Seja* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta. São equivalentes:*

(i) A sequência é de Auslander-Reiten.

(ii) L é indecomponível e g é um morfismo quase cindido à direita.

(iii) N é indecomponível e f é um morfismo quase cindido à esquerda.

(iv) f é um morfismo minimal quase cindido à esquerda.

(v) g é um morfismo minimal quase cindido à direita.

(vi) L e N são indecomponíveis, e f e g são irredutíveis.

Além disso, se estas condições se verificam, então a sequência está univocamente determinada por N (ou L), a menos de isomorfismos.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [11](p. 144 e 167) ou em [8](p. 105). □

Neste momento, é natural perguntar-nos se existem sequências de Auslander-Reiten. Dedicamos a próxima seção à definições e resultados que respondem essa questão.

1.1.2 Translações de Auslander-Reiten

Sejam M um A-módulo e $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ sua presentação projetiva minimal, ou seja, $P_0 \to M$ e $P_1 \to Ker\, p_0$ são coberturas projetivas. Ao aplicarmos o funtor $Hom_A(\_, A)$, obtemos a seguinte sequência exata de A-módulos à esquerda

$$0 \longrightarrow Hom_A(M,A) \longrightarrow Hom_A(P_0,A) \xrightarrow{Hom_A(p_1,M)} Hom_A(P_1,A) \longrightarrow Coker\, Hom_A(p_1,M) \longrightarrow 0$$

Ao conúcleo de $Hom_A(p_1,M)$ chamamos de transposta de M e denotamos por $Tr\, M$. Uma vez que as presentações projetivas minimais de M são unicamente determinadas, a menos de isomorfismos, o mesmo ocorre com $Tr\, M$.

Observação 1.2 (Algumas propriedades da transposta)**.** Como anteriormente, sejam M um A-módulo indecomponível e $Tr\,M$ sua transposta.

(i) Se M é projetivo, então $P_1 = 0$ e, portanto, $Tr\,M = 0$. Reciprocamente, se $Tr\,M = 0$, então $Hom_A(p_1, A)$ é um epimorfismo que cinde, já que $Hom_A(P_1, A)$ é um A-módulo à esquerda projetivo. Neste caso, p_1 é um monomorfismo que cinde, donde M é projetivo.

(ii) Se M não é projetivo, é possível mostrar que $Tr\,M$ é indecomponível e, além disso, $Tr\,(Tr\,M) \simeq M$.

(iii) Se M e N são indecomponíveis não projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $Tr\,M \simeq Tr\,N$ (para mais detalhes em relação aos itens *(ii)* e *(iii)*, veja [11](p. 105)).

Considere dois A-módulos M e N.

- $\mathscr{P}(M,N)$ é o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ que consiste dos morfismos de M para N que se fatoram através de módulos projetivos.
- Dualmente, $\mathscr{I}(M,N)$ é o subgrupo de $Hom_A(M,N)$ que consiste dos morfismos de M para N que se fatoram através de módulos injetivos.

Definimos então a categoria $\underline{mod}\,A = (mod\,A)/\mathscr{P}$, cujos objetos coincidem com aqueles da categoria $mod\,A$, e morfismos de M para N pertencem a $\underline{Hom}_A(M,N)$. De maneira dual, definimos $\overline{mod}\,A = (mod\ A)/\mathscr{I}$, cujos morfismos pertencem a $\overline{Hom}_A(M,N) = Hom_A(M,N)/\mathscr{I}(M,N)$.

Como mencionamos acima, a transposta Tr associa um módulo M em $\underline{mod}\ A$ ao módulo $Tr\,M$, que é um objeto da categoria $\underline{mod}\ A^{op}$. Agora, considere $f : M \to N$ em $\underline{mod}\ A$. Podemos construir para M e N as presentações projetivas minimais

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "p_1"] & P_0 \arrow[r, "p_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ P_1' \arrow[r, "p_1'"] & P_0' \arrow[r, "p_0'"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sendo P_0 projetivo, existe um morfismo $f_0 : P_0 \to P_0'$ tal que $p_0' f_0 = f p_0$. Com um pouco mais de trabalho, é possível mostrar que há também um único morfismo $f_1 : P_1 \to P_1'$

satisfazendo $p_1' f_1 = f_0 p_1$. Aplicando ao diagrama comutativo obtido o funtor $Hom_A(\_, A)$, construímos

$$\begin{array}{ccccccc} Hom_A(P_0', A) & \longrightarrow & Hom_A(P_1', A) & \longrightarrow & Tr\,N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle Hom_A(f_0,A)} & & \downarrow{\scriptstyle Hom_A(f_1,A)} & & & & \\ Hom_A(P_0, A) & \longrightarrow & Hom_A(P_1, A) & \longrightarrow & Tr\,M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde existe um único morfismo $Tr\,f : Tr\,N \to Tr\,M$ fazendo com que esse diagrama comute. Além disso, tal morfismo não se fatora através de projetivos. Assim, $Tr : \underline{mod}\ A \to \underline{mod}\ A^{op}$ é um funtor e, mais ainda, uma dualidade (veja, por exemplo, [11](p. 104)).

Definição 1.4. *As translações de Auslander-Reiten correspondem às composições*

$$\tau = DTr \quad e \quad \tau^- = TrD,$$

em que $D : mod\,A \to mod\,A^{op}$, como definido em [11](p. 37).

Para cada módulo M, τM será chamado de transladado de M, e $\tau^- M$, transladado inverso de M.

Observação 1.3. Dados dois A-módulos indecomponíveis M e N, pode-se obter que

(i) τM é um módulo nulo se, e somente se, M é projetivo;

(ii) $\tau^- N$ é um módulo nulo se, e somente se, N é injetivo;

(iii) Se M não é projetivo, então τM é indecomponível e, além disso, $\tau^-\tau M \simeq M$;

(iv) Se N não é injetivo, então $\tau^- N$ é indecomponível e, além disso, $\tau\tau^- N \simeq N$;

(v) Se M e N não são projetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau M \simeq \tau N$;

(vi) Se M e N não são injetivos, então $M \simeq N$ se, e somente se, $\tau^- M \simeq \tau^- N$.

As demonstrações podem ser encontradas em [11](p. 107) ou [8](p. 116).

Dado um A-módulo M, sua dimensão projetiva, denotada por $dp_A M$ (ou, simplesmente, por $dp\ M$ quando não houver dúvidas em relação à álgebra em questão), corresponde ao menor inteiro positivo n tal que existe uma sequência exata

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

com cada P_i projetivo. Dualmente, pode-se definir o conceito de dimensão injetiva de M, denotada por $di\,M$.

O supremo das dimensões projetivas de todos os A-módulos ou, equivalentemente, das dimensões injetivas, é chamado de dimensão global da álgebra A, e denotado por $dim\,gl\,A$.

Lema 1.4. *Seja M um A-módulo.*

(a) *$dp\,M \leq 1$ se, e somente se, $Hom_A(DA, \tau M) = 0$.*

(b) *$di\,M \leq 1$ se, e somente se, $Hom_A(\tau^- M, A) = 0$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 7 e 8). □

Em virtude do lema acima, para que a dimensão projetiva de um módulo M não exceda 1, é necessário e suficiente que não haja morfismo não nulo de um injetivo para o transladado de M. Dualmente, para que $di\,M \leq 1$, não deve haver morfismo não nulo de $\tau^- M$ para um módulo projetivo.

Lema 1.5 (Fórmulas de Auslander-Reiten)**.** *Sejam M e N A-módulos. Então, existem isomorfismos*

$$Ext^1_A(M,N) \simeq D\underline{Hom}_A(\tau^- N, M) \simeq D\overline{Hom}_A(N, \tau M)$$

funtoriais em ambas as variáveis.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [5](p. 8 e 9). □

Observação 1.4. Seja M um A-módulo tal que $dp\ M \leq 1$. Devido ao lema (1.4), $Hom_A(DA, \tau M) = 0$. Neste caso, nenhum morfismo não nulo de um A-módulo N para τM se fatora por um injetivo e, portanto, $Hom_A(N, \tau M) = \overline{Hom}_A(N, \tau M)$. Dessa forma, $Ext^1_A(M,N) \simeq DHom_A(N, \tau M)$. De maneira análoga, podemos concluir que se $di\ M \leq 1$, então $Ext^1_A(M,N) \simeq DHom_A(\tau^- N, M)$.

O teorema a seguir é o principal dessa seção, e nos garante que existem sequências de Auslander-Reiten.

Teorema 1.6. (a) *Para todo A-módulo indecomponível não projetivo M, existe uma sequência de Auslander-Reiten*

$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0.$$

(b) *Para todo A-módulo indecomponível não injetivo N, existe uma sequência de Auslander-Reiten*

$$0 \to N \to F \to \tau^{-}N \to 0.$$

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [11](p. 145). □

A partir desse resultado podemos concluir que, para todo A-módulo M indecomponível, existe um morfismo minimal quase cindido à direita $f : N \to M$, pois se M é projetivo, $rad\, M \hookrightarrow M$ é minimal quase cindido à direita, de acordo com o exemplo (1.1), e se M não é projetivo, existe a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \to \tau M \to N \to M \to 0.$$

Corolário 1.7. (a) *Seja M um A-módulo indecomponível não projetivo. Então, existe um morfismo irredutível $f : X \to M$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $f' : \tau M \to X$.*

(b) *Seja N um A-módulo indecomponível não injetivo. Então, existe um morfismo irredutível $g : N \to Y$ se, e somente se, existe um morfismo irredutível $g' : Y \to \tau^{-}N$.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (a), já que a demonstração de (b) pode ser obtida de maneira dual. Suponha que f é irredutível. De acordo com o teorema (1.2), existe um morfismo $g : X' \to M$ tal que $(f\ \ g) : X \oplus X' \to M$ é minimal quase cindido à direita. Uma vez que M não é projetivo, a sequência

$$0 \longrightarrow \tau M \xrightarrow{(f'\ g')^t} X \oplus X' \xrightarrow{(f\ g)} M \longrightarrow 0$$

é de Auslander-Reiten. Novamente através do teorema (1.2), obtemos que f' é irredutível.

A recíproca é obtida analogamente. □

Corolário 1.8. (a) *Seja S um A-módulo simples projetivo, não injetivo. Se $f : S \to M$ é irredutível, então M é projetivo.*

(b) *Seja S um A-módulo simples injetivo, não projetivo. Se $g : N \to S$ é irredutível, então N é injetivo.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas (a). Podemos assumir, sem perda de generalidade, que M é indecomponível. Suponha, por absurdo, que M não é projetivo. Neste caso, sendo f irredutível, o corolário anterior nos garante que $f' : \tau M \to S$ é também um morfismo irredutível. Segundo a observação (1.1), f' é um monomorfismo ou um epimorfismo. Observe que este último não pode ocorrer, pois caso contrário, f' cindiria, já que S é projetivo. Logo, τM é um submódulo próprio não nulo de S, contradizendo a hipótese de que S é simples. Consequentemente, M é projetivo. □

O resultado que enunciamos abaixo nos permite obter exemplos de sequências de Auslander-Reiten. Além disso, é bastante útil na construção do *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra, objeto de discussão da próxima seção.

Proposição 1.9. *Seja P um A-módulo indecomponível projetivo-injetivo, não simples. Então, a sequência*

$$0 \longrightarrow rad\, P \xrightarrow{(q\ \ i)^t} rad\, P/soc\, P \oplus P \xrightarrow{(-j\ \ p)} P/soc\, P \longrightarrow 0$$

é de Auslander-Reiten, em que i e j são inclusões, e p e q, projeções.

Demonstração: Veja, por exemplo, [8](p. 124). □

1.1.3 *Quiver* de Auslander-Reiten

Baseados em [8], apresentamos a construção do *quiver* de Auslander-Reiten da categoria de módulos de uma dada álgebra, que somente ao longo dessa seção, salvo indicação contrária, é sempre considerada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K.

Para tanto, será necessária a seguinte definição, de radical de categorias.

Definição 1.5. *Seja A uma álgebra de artin. O radical da categoria mod A corresponde, para cada par (M,N) de A-módulos, ao conjunto $rad_A\ (M,N) = \{f \in Hom_A(M,N) |$ $1_N - fg$ é invertível à direita, para todo $g \in Hom_A(N,M)\}$.*

Observação 1.5. *(i)* Sejam M e N A-módulos. Se $f \in Hom_A(M,N)$ é tal que o morfismo $1_N - fg$ admite inverso à direita, para todo $g \in Hom_A(N,M)$, então $1_N - fg$ é invertível, para todo $g \in Hom_A(N,M)$. De fato, fixado $g \in Hom_A(N,M)$, considere $h \in Hom_A(N,N)$ satisfazendo $(1_N - fg)h = 1$. Assim, $h = 1 - fg(-h)$, que admite inverso à direita, k. Neste caso, $1 = hk = (1 + fgh)k = k + fghk = k + fg$, ou ainda, $k = 1 - fg$ e, portanto, h é o inverso de $1_N - fg$.

Dessa forma, podemos também definir $rad_A\,(M,N)$ por

$$\{f \in Hom_A(M,N) | 1_N - fg \text{ é invertível, para todo } g \in Hom_A(N,M)\}.$$

(ii) rad_A é um ideal bilateral de $mod\,A$ ([11](p. 178) ou [2](p. 195)).

(iii) Se M e N são indecomponíveis, então

$$rad_A\,(M,N) = \{f \in Hom_A(M,N) | f \text{ não é isomorfismo}\} \text{ ([5](p. 12)).}$$

(iv) Se M é indecomponível, então $rad_A\,(M,M) = rad\,End\,M$, já que $End\,M$ é local.

Recursivamente, definimos para $n > 1$,

$$rad_A^n\,(M,N) = \left\{\sum_i g_i f_i | g_i \in rad_A^{n-1}\,(X_i,N), f_i \in rad_A\,(M,X_i)\right., \text{ com } X_i \in ind\,A\} \text{ e}$$
$$rad_A^\infty = \bigcap_{n\geq 1} rad_A^n.$$

Em particular, $rad_A^2\,(M,N) = \{gf | f \in rad_A\,(M,Z)$ e $g \in rad_A\,(Z,N)$, para algum A-módulo $Z\}$. Observe que $rad_A^2\,(M,N) \subseteq rad_A\,(M,N)$. Se adicionarmos a M e N a hipótese de que são indecomponíveis, podemos concluir que um morfismo f de M para N é irredutível se, e somente se, $f \in rad_A\,(M,N) \setminus rad_A^2\,(M,N)$ (para mais detalhes, veja, por exemplo, [11](p. 179)). Dessa forma, definimos o quociente

$$Irr\,(M,N) = rad_A\,(M,N)/rad_A^2\,(M,N),$$

que chamamos de espaço dos morfismos irredutíveis.

Assuma que A é uma K-álgebra de dimensão finita, e sejam M e N como acima. Então, $Irr\,(M,N)$ tem estrutura de $End\,N$-$End\,M$-bimódulo, anulado à esquerda pelos elementos de $rad\,(End\,N)$ e à direita pelos elementos de $rad\,(End\,M)$, o que lhe confere uma estrutura de K-espaço vetorial, já que $End\,M$ e $End\,N$ são locais.

Proposição 1.10. *Seja* $M = \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i}$ *um* A*-módulo, com cada* M_i *indecomponível, dois a dois não isomorfos.*

(a) *Seja* $f : L \to M$ *um morfismo de* A*-módulos, com* L *indecomponível,* $f = (f_1 \cdots f_t)^t$*, em que* $f_i = (f_{i1} \cdots f_{in_i})^t : L \to M_i^{n_i}$*. Então,* f *é minimal quase cindido à esquerda se, e somente se,* $f_{ij} \in rad_A(L, M_i)$*, e as classes* $\overline{f}_{i1}, \cdots, \overline{f}_{in_i}$ *módulo* $rad_A^2(L, M_i)$ *formam uma base para* $Irr(L, M_i)$*, para todo* i*. E, se existe um* A*-módulo indecomponível* M' *tal que* $Irr(L, M') \neq 0$*, então* $M' \simeq M_i$*, para algum* i*.*

(b) *Seja* $g : M \to N$ *um morfismo de* A*-módulos, com* N *indecomponível,* $g = (g_1 \cdots g_t)$*, em que* $g_i = (g_{i1} \cdots g_{in_i}) : M_i^{n_i} \to N$*. Então,* g *é minimal quase cindido à direita se, e somente se,* $g_{ij} \in rad_A(M_i, N)$*, e as classes* $\overline{g}_{i1}, \cdots, \overline{g}_{in_i}$ *módulo* $rad_A^2(M_i, N)$ *formam uma base para* $Irr(M_i, N)$*, para cada* i*. E, se existe um* A*-módulo indecomponível* M' *tal que* $Irr(M', N) \neq 0$*, então* $M' \simeq M_i$*, para algum* i*.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [8](p. 126). □

Como consequência desse resultado, obtemos que, se $0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$ é a sequência de Auslander-Reiten com final em N, com cada M_i indecomponível e dois a dois não isomorfos, então $n_i = dim_K\, Irr(M_i, N) = dim_K\, Irr(\tau N, M_i)$, para todo i.

Corolário 1.11. *Sejam* X *e* Y A*-módulos indecomponíveis.*

(a) *Se* $\tau X \neq 0$ *e* $\tau Y \neq 0$*, então existe um isomorfismo de* K*-linear* $Irr(\tau X, \tau Y) \simeq Irr(X, Y)$*.*

(b) *Se* $\tau^- X \neq 0$ *e* $\tau^- Y \neq 0$*, então existe um isomorfismo de* K*-linear* $Irr(\tau^- X, \tau^- Y) \simeq Irr(X, Y)$*.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [8](p. 128). □

A seguir, enunciamos a principal definição dessa seção:

Definição 1.6. *Seja* A *uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. O quiver de Auslander-Reiten de* A*,* $\Gamma(mod\, A)$*, é definido por:*

(a) *Os pontos de* $\Gamma(mod\, A)$ *são as classes de isomorfismo* $[X]$ *dos* A*-módulos indecomponíveis* X*.*

(b) *Sejam* $[M]$ *e* $[N]$ *pontos em* $\Gamma(mod\,A)$ *correspondentes aos* A*-módulos indecomponíveis* M *e* N*. As flechas* $[M] \to [N]$ *estão em correspondência biunívoca com os vetores da base do* K*-espaço vetorial* $Irr\,(M,N)$.

Seja $[M]$ um ponto em $\Gamma(mod\ A)$. Suponha, inicialmente, que M é projetivo. Então, o conjunto $[M]^-$ dos antecessores imediatos de $[M]$ é formado pelas classes de isomorfismo $[L]$, em que L é um somando direto indecomponível de $rad\ M$, já que a inclusão canônica $rad\,M \to M$ é um morfismo minimal quase cindido à direita e vale a proposição (1.10). Agora, se M não é projetivo, então $[M]^-$ corresponde aos pontos $[L]$ tais que L é um somando direto do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten com final em M.

Da mesma forma, o conjunto $[M]^+$ dos sucessores imediatos de M corresponde aos pontos $[N]$ tais que N é um somando direto indecomponível de $M/soc\,M$, se M é injetivo, ou um somando direto do termo do meio da sequência de Auslander-Reiten com início em M, se M não é injetivo.

Observação 1.6. (a) Como, para cada M indecomponível, os conjuntos $[M]^-$ e $[M]^+$ são finitos, cada ponto em $\Gamma(mod\ A)$ tem somente um número finito de vizinhos. Dessa forma, cada componente conexa de $\Gamma(mod\,A)$ admite, no máximo, uma quantidade enumerável de pontos.

(b) O *quiver* de Auslander Reiten de A é finito se, e somente se, A é uma álgebra de tipo de representação finito.

(c) Se uma componente conexa Γ de $\Gamma(mod\ A)$ é finita, então $\Gamma(mod\ A) = \Gamma$ e, consequentemente, A é de tipo de representação finito (veja, por exemplo, [11](p. 233)).

(d) Como observado em (1.1), não há morfismo irredutível de um módulo indecomponível para si próprio e, portanto, não existem laços em $\Gamma(mod\,A)$.

(e) Se A é de tipo de representação finito, então também não existem flechas múltiplas em $\Gamma(mod\,A)$ ([8](p. 132)).

(f) Sejam N um A-módulo indecomponível não projetivo, e

$$0 \to \tau N \to \bigoplus_{i=1}^{t} M_i^{n_i} \to N \to 0$$

a sequência de Auslander-Reiten com final em N, com cada M_i indecomponível, dois a dois não isomorfos. Comentamos anteriormente que, para todo i,

$n_i = dim_K\, Irr(M_i, N) = dim_K\, Irr(\tau N, M_i)$. Neste caso, temos em $\Gamma(mod A)$ a seguinte configuração

$$\begin{tikzcd}
 & {[M_1]} \arrow[ddr, shift left, "\beta_{1n_1}"] \arrow[ddr, shift right, "\beta_{11}"'] & \\
 & \vdots & \\
{[\tau N]} \arrow[uur, shift left, "\alpha_{11}"] \arrow[uur, shift right, "\alpha_{1n_1}"'] \arrow[ddr, shift left, "\alpha_{t1}"] \arrow[ddr, shift right, "\alpha_{1n_t}"'] \arrow[rr, dotted, no head] & & {[N]} \\
 & \vdots & \\
 & {[M_t]} \arrow[uur, shift left, "\beta_{tn_t}"] \arrow[uur, shift right, "\beta_{t1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que o conjunto dos sucessores de $[\tau N]$ coincide com o conjunto dos antecessores de $[N]$ e, para cada i, existe uma bijeção entre $\{\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in_i}\}$ e $\{\beta_{i1}, \cdots, \beta_{in_i}\}$, ou seja, há o mesmo número de flechas de $[\tau N]$ para $[M_i]$ e de $[M_i]$ para $[N]$.

Exemplo 1.3. *Seja A a K-álgebra de caminhos associada ao quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[d, "\gamma"'] & \\
1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

com a relação $\beta\alpha = 0$. Com base nos lemas 2.4 e 2.6 de [8], podemos concluir que os A-módulos indecomponíveis projetivos e injetivos correspondem a $P_1 = 1$, $P_2 = {}^{2}_{1}$, $P_3 = {}^{3}_{2}$ e $P_4 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$; $I_1 = P_4$, $I_2 = \begin{smallmatrix} 3\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $I_3 = 3$ e $I_4 = 4$.

De acordo com o corolário (1.8)*, o final de cada morfismo irredutível com início em P_1 é projetivo. Como rad $P_2 = P_1$ e P_1 não é somando direto de rad P_3 nem de rad P_4, a inclusão $i : P_1 \to P_2$ é o único irredutível com início em P_1. Mais ainda, i é o único morfismo minimal quase cindido à direita com final em P_2 e, portanto, obtemos a sequência de Auslander-Reiten*

$$0 \to P_1 \to P_2 \to S_2 \to 0,$$

em que S_2 é o conúcleo de i. Observe que P_4 é um projetivo-injetivo não simples. Então, a *proposição* (1.9) *nos garante que a sequência*

$$0 \to P_2 \to S_2 \oplus P_4 \to \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \to 0$$

é de Auslander-Reiten. Prosseguindo com esses argumentos, construímos o quiver

$$\begin{tikzcd}
 & & & {\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
1 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix} 3\,4 \\ 2 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & {\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \\
 & & {\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

1.2 Teoria Inclinante

Quando o estudo da categoria de módulos definidos sobre uma álgebra de artin A não é simples, pode ser conveniente substituir A por uma álgebra B, e tornar o problema em A, um problema em B. Este é o principal objetivo da teoria inclinante, que compara as categorias de módulos sobre A e sobre a álgebra de endomorfismos de um A-módulo T, inclinante.

Na sequência, apresentamos somente definições e resultados indispensáveis para a compreensão dos capítulos seguintes. Para mais detalhes sobre a teoria indicamos [16], [21], [5].

Definições Básicas

Definição 1.7. *Um par* $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *de subcategorias plenas e aditivas de mod A é um par de torção se satisfaz as condições:*

(a) $Hom_A(M,N) = 0$, *para todo* $M \in \mathscr{T}$ *e todo* $N \in \mathscr{F}$.

(b) *Se* $Hom_A(M,F) = 0$ *para todo* $F \in \mathscr{F}$, *então* $M \in \mathscr{T}$.

(c) *Se* $Hom_A(T,N) = 0$ *para todo* $T \in \mathscr{T}$, *então* $N \in \mathscr{F}$.

Nas condições acima, $\mathscr{T}$ é chamada de classe de torção, e $\mathscr{F}$, classe livre de torção. Observe que o par de torção determina a direção dos morfismos da categoria.

Observação 1.7. Seja $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ um par de torção em $mod\,A$. Então,

(i) $\mathscr{T}$ é fechada para quocientes e extensões: considere a sequência exata curta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ em $mod\ A$. Ao aplicarmos o funtor $Hom_A(\_, F)$, em que $F \in \mathscr{F}$, obtemos a sequência exata

$$0 \to Hom_A(M'', F) \to Hom_A(M, F) \to Hom_A(M', F).$$

Uma vez que $M \in \mathscr{T}$, $Hom_A(M, F) = 0$, para cada $F \in \mathscr{F}$ e, portanto, $Hom_A(M'', F) = 0$, para cada $F \in \mathscr{F}$, o que nos permite concluir que $M'' \in \mathscr{T}$. Com isso, $\mathscr{T}$ é fechada para quocientes. Analogamente, podemos verificar que $M \in \mathscr{T}$ quando $M', M'' \in \mathscr{T}$. Logo, $\mathscr{T}$ é também fechada para extensões.

(ii) $\mathscr{F}$ é fechada para submódulos e extensões.

(iii) Para cada módulo M, existe uma sequência exata

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

com $tM = \sum\{Im\,\phi | \phi : T \to M, T \in \mathscr{T}\}$. Além disso, $tM \in \mathscr{T}$ e $M/tM \in \mathscr{F}$, e qualquer outra sequência exata

$$0 \to L \to M \to N \to 0,$$

em que $L \in \mathscr{T}$ e $N \in \mathscr{F}$, é isomorfa à anterior (veja, por exemplo, [5](p. 29)).

Definição 1.8. *Seja T um A-módulo.*

(a) *Um A-módulo M é dito gerado por T se existe um epimorfismo $T^m \to M$, para algum inteiro $m > 0$.*

(b) *Um A-módulo M é dito cogerado por T se existe um monomorfismo $M \to T^m$, para algum inteiro $m > 0$.*

As subcategorias plenas de $mod\,A$ formadas pelos A-módulos gerados e cogerados por T são denotadas por *Gen* T e *Cogen* T, respectivamente.

Exemplo 1.4. *Seja M um A-módulo. Então, $Hom_A(T,M)$ é um $End\ T_A$-módulo finitamente gerado e, portanto, existe um epimorfismo $(End\ T_A)^m \to Hom_A(T,M)$, para algum inteiro $m>0$. Dessa forma, há também um epimorfismo $T^m \simeq (End\ T_A)^m \otimes_B T \to Hom_A(T,M) \otimes T$, o que nos garante que $Hom_A(T,M) \otimes T$ pertence a $Gen\ T$.*

De maneira geral, a subcategoria $Gen\ T$ não é uma classe de torção. Para que isso ocorra, é suficiente que o A-módulo T cumpra a condição $Ext_A^1(T,M)=0$, para todo $M \in Gen\ T$ (veja, por exemplo, [5](p. 30)).

Módulos Inclinantes Parciais e Módulos Inclinantes

Definição 1.9. *Um módulo T é inclinante parcial (resp. coinclinante parcial) se satisfaz as seguintes condições:*

$(T1)$ *$dp\ T \leq 1$ (resp. $di\ T \leq 1$).*

$(T2)$ *$Ext_A^1(T,T)=0$.*

Os exemplos mais simples de módulos inclinantes e coinclinantes parciais são os projetivos e injetivos, respectivamente. Observe que se T é inclinante parcial, então $Ext_A^1(T,M)=0$, para todo $M \in Gen\ T$. Dessa forma, cada módulo inclinante parcial induz em $mod\,A$ um par de torção $(\mathscr{T}(T),\mathscr{F}(T))$, com $\mathscr{T}(T)=Gen\ T$ e $\mathscr{F}(T)=\{M \in mod\,A|\ Hom_A(T,M)=0\}$.

Exemplo 1.5 (Par de torção)**.** *Seja A a K-álgebra de caminhos apresentada no exemplo (1.3). O A-módulo $T = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ é inclinante parcial, já que é projetivo. Observe que $\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$ e 4 são os únicos módulos indecomponíveis que são imagens de epimorfismos de potências de T e, portanto, $Gen\ T = add\left\{\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}, 4\right\}$. Logo, $\mathscr{F}(T)=add\left\{1, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}, 3\right\}$.*

Observe também que o módulo $\begin{smallmatrix} 3 & & 4 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ não pertence a nenhuma das classes, ou seja, o par de torção não cobre, necessariamente, toda a categoria de módulos.

Definição 1.10. *Um A-módulo T inclinante parcial (resp. coinclinante parcial) é dito inclinante (resp. coinclinante) se satisfaz*

$(T3)$ *Existe uma sequência exata curta*

$$0 \to A_A \to T' \to T'' \to 0 \textit{ (resp. } 0 \to T'' \to T' \to DA_A \to 0\textit{)}$$

com $T', T'' \in add\ T$.

Observação 1.8. *(i)* Se para todo projetivo indecomponível P existe uma sequência exata $0 \to P \to T' \to T'' \to 0$, com $T', T'' \in add\ T$, então há também a sequência exata $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$, donde o módulo inclinante parcial T é inclinante. A recíproca também é obtida. (para mais detalhes, veja [5](p. 42)).

(ii) Todo módulo inclinante é fiel (recordamos que um A-módulo M é fiel se $Ann\ M = \{a \in A | Ma = 0\}$ é nulo). De fato, sendo T inclinante, a condição $(T3)$ nos garante que existe um monomorfismo $g : A_A \to T^d$, para algum inteiro $d > 0$. Assim, $Ann\ T = 0$, pois se $a \in A$ é tal que $Ta = 0$, então $g(a) = g(1)a = 0$, donde $a = 0$. No entanto, nem todo módulo inclinante parcial e fiel é inclinante. Por exemplo, o módulo fiel $T' = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 & & 4 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ definido sobre a álgebra do exemplo (1.3) não é inclinante, já que o conúcleo $\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$ da inclusão $1 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ não pertence a $add\ T'$.

A partir de um módulo inclinante parcial, podemos obter um módulo inclinante, como mostra o lema abaixo.

Lema 1.12 (Bongartz)**.** *Seja T um módulo inclinante parcial. Então, existe um módulo E tal que $T \oplus E$ é inclinante.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [5](p. 38). □

O lema de Bongartz também nos permite demonstrar que um A-módulo T é inclinante se, e somente se, é inclinante parcial e o número de somandos diretos indecomponíveis de T é igual a $rk\ K_0(A)$. Com esse resultado, amplamente utilizado nos capítulos seguintes, torna-se mais fácil verificar se um módulo é inclinante.

Sejam T um A-módulo inclinante, $B = End\ T_A$ e $m \in T$, $f \in B$. Então, $f \cdot t = f(t)$ define em T uma estrutura de B-módulo à esquerda. Além disso, é possível mostrar que ${}_BT$ é inclinante e que existe um isomorfismo $A \simeq (End_B T)^{op}$ ([5](p. 49)). Como consequência, obtemos que T_A induz um par de torção $(\mathscr{X}(T_A), \mathscr{Y}(T_A))$ em $mod\ B$, com $\mathscr{X}(T_A) = D\mathscr{F}({}_BT) = \{X_B | X \otimes_B T = 0\}$ e $\mathscr{Y}(T_A) = D\mathscr{T}({}_BT) = \{Y_B | Tor_1^B(Y, T) = 0\}$ ([5](p. 50)).

Em [16], Brenner e Butler mostraram que, dados T e $B = End\ T_A$ como anteriormente, as subcategorias $\mathscr{T}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$ de $mod\ A$ e $mod\ B$, respectivamente, são equivalentes. O mesmo ocorre com as subcategorias $\mathscr{F}(T)$ e $\mathscr{X}(T)$. É o que formalizamos com o teorema abaixo.

Teorema 1.13. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = End\ T_A$. Então,*

(a) Os funtores $Hom_A(T,\_)$ e $\_\otimes_B T$ induzem equivalências quasi-inversas entre $\mathscr{T}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$, ou seja, existem isomorfismos funtoriais entre $Hom_A(T,\_)\circ\_\otimes_B T$ e 1, e entre $\_\otimes_B T\circ Hom_A(T,\_)$ e 1.

(b) Os funtores $Ext^1_A(T,\_)$ e $Tor^B_1(\_,T)$ induzem equivalências quasi-inversas entre $\mathscr{F}(T)$ e $\mathscr{X}(T)$.

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 51). □

Na sequência, enunciamos alguns lemas obtidos como consequência do teorema de Brenner-Butler.

Lema 1.14. *Sejam A uma álgebra e T um A-módulo inclinante. Para todo $M \in \mathscr{T}(T)$, tem-se que $dp\ Hom_A(T,M) \leq dp_A\ M$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 60). □

Lema 1.15. *Sejam A uma álgebra, T um A-módulo inclinante e $B = End\ T_A$. Então, $|dim\ gl\ A - dim\ gl\ B| \leq 1$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 60). □

Lema 1.16. *Seja $T = T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_t^{n_t}$, com cada T_i indecomponível e satisfazendo $T_i \not\simeq T_j$, para $i \neq j$. Se $Hom_A(T,\tau T) = 0$ (ou $Hom_A(\tau^- T, T) = 0$), então $t \leq rk\ K_0(A)$.*

Demonstração: Sejam $I = Ann\ T$ e $B = A/I$. Nessas condições, T admite uma estrutura natural de B-módulo fiel. Além disso, $\tau_B T$ é isomorfo a um submódulo de $\tau_A T$ e, portanto, $Hom_A(T,\tau_A T) = 0$ implica em $Hom_B(T,\tau_B T) = 0$. Em seguida, vamos mostrar que T é inclinante parcial enquanto B-módulo. Sendo T_B fiel, há um epimorfismo $T^m \to DB$, para algum inteiro positivo m. Neste caso, ao aplicarmos o funtor $Hom_B(\_,\tau_B T)$, obtemos a sequência exata

$$0 \to Hom_B(DB,\tau_B T) \to Hom_B(T^m,\tau_B T),$$

donde $Hom_B(DB,\tau_B T) = 0$, ou ainda, $dp_B\ T \leq 1$. Também, $Ext^1_B(T,T) \simeq DHom_B(T,\tau_B T) = 0$, finalizando a demonstração da afirmação feita.

De acordo com o lema de Bongartz, existe um B-módulo E tal que $T \oplus E$ é inclinante em *mod* B. Claramente, t não supera o número de somandos diretos indecomponíveis de T, que por sua vez, corresponde a $rk\ K_0(B)$. Como $rk\ K_0(B) \leq rk\ K_0(A)$, obtemos o resultado. □

1.2.1 Álgebras Inclinadas

Recordamos que uma álgebra de artin H é hereditária se todo submódulo de um H-módulo projetivo é projetivo. Sua teoria de representações foi bastante estudada e é amplamente conhecida. No caso em que H é uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre um corpo K algebricamente fechado, H é hereditária se, e somente se, é da forma KQ, para algum *quiver* Q conexo, finito e acíclico. Além disso, é de tipo de representação finito se, e somente se, Q possui um grafo subjacente do tipo Dynkin.

Introduzimos, nessa seção, a classe de álgebras que mais se aproxima das hereditárias, a classe das álgebras inclinadas.

Definição 1.11. *Uma álgebra A é inclinada se existem uma álgebra hereditária H e um H-módulo inclinante T tais que $A \simeq End\ T_H$.*

Exemplo 1.6. *(i) Seja H uma álgebra hereditária. Então, H é inclinada, pois $End\ H_H \simeq H$ e H é um H-módulo inclinante.*

(ii) A álgebra de caminhos apresentada no exemplo (1.3) *é inclinada.*

Observação 1.9. Sejam H uma álgebra hereditária, T_H inclinante e $A \simeq End\ T_H$.

(i) Segundo o teorema (1.13), um A-módulo Y em $\mathscr{Y}(T)$ é da forma $Hom_H(T, M)$, para algum $M \in \mathscr{T}(T)$. Neste caso, podemos concluir através do lema (1.14) que $dp_A\ Y \leq dp_H\ M$ e, portanto, $dp_A\ Y \leq 1$, já que H é hereditária.

(ii) Todo A-módulo projetivo pertence a $\mathscr{Y}(T)$. De fato, seja P um A-módulo projetivo indecomponível. Então, $P \simeq Hom_H(T, T_i)$, para algum somando direto T_i de T. Em particular, $T_i \in \mathscr{T}(T)$, donde $P \in \mathscr{Y}(T)$, devido ao teorema (1.13).

(iii) O par de torção $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ em *mod* A cinde, ou seja, todo A-módulo pertence a $\mathscr{X}(T)$ ou a $\mathscr{Y}(T)$ (para mais detalhes, veja página 69 de [5]).

Sejam A uma álgebra de artin conexa, M e N A-módulos indecomponíveis. Um caminho de M para N em $ind\,A$ de comprimento t é uma sequência

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t = N\ , \tag{1.1}$$

com $t \geq 0$, cada $M_i \in ind\,A$ e cada f_i um morfismo não nulo. Tal caminho é denotado por $M \rightsquigarrow N$.

Nessas condições, M é dito antecessor de N, e N, sucessor de M. Claramente, todo módulo indecomponível é antecessor e sucessor de si próprio. Se, adicionalmente, $M \simeq N$ e algum f_i não é isomorfismo, então (1.1) é um ciclo. Um refinamento de (1.1) é um caminho em $ind\,A$

$$M = M'_0 \xrightarrow{f'_1} M'_1 \xrightarrow{f'_2} \cdots \xrightarrow{f'_{s-1}} M'_{s-1} \xrightarrow{f'_s} M'_s = N$$

em que $s \geq t$ e $M_i \simeq M'_{\sigma(i)}$, para uma permutação $\sigma : \{1, \cdots, t-1\} \to \{1, \cdots, s-1\}$ que preserva ordem.

Dada uma componente Γ de $\Gamma(mod\ A)$, dizemos que Γ é convexa se, para todo caminho $M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_{t-1} \to M_t = N$ em $ind\,A$, com $M, N \in \Gamma$, tem-se que cada M_i pertence a Γ. Um A-módulo M é convexo se o conjunto $ind\ M$, formado por seus somandos diretos indecomponíveis, é convexo. Também, um *subquiver* pleno Σ de Γ é uma seção em Γ se satisfaz:

$(S1)$ Σ é acíclico.

$(S2)$ Para cada $x \in \Gamma$, existe único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.

$(S3)$ Σ é convexo em Γ: se $x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_t = y$ é um caminho em Γ, com $x, y \in \Gamma$, então $x_i \in \Sigma$, para todo i.

Lema 1.17. *Sejam Γ uma componente de $\Gamma(mod\ A)$ e Σ uma seção em Γ. Considere uma flecha $x \to y$ em Γ.*

(a) *Se $x \in \Sigma_0$, então $y \in \Sigma_0$ ou $\tau y \in \Sigma_0$.*

(b) *Se $y \in \Sigma_0$, então $x \in \Sigma_0$ ou $\tau^- x \in \Sigma_0$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 89). $\square$

Lembramos que um A-módulo é sincero se, para todo A-módulo projetivo P não nulo, tem-se que $Hom_A(P,M) \neq 0$. Claramente, todo módulo fiel é sincero. No entanto, a recíproca não é necessariamente obtida. Como exemplo, citamos o módulo $M = S_1 \oplus S_2$, definido sobre a K-álgebra de caminhos associada ao *quiver*

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2\,.$$

Definição 1.12. *Um conjunto finito* $\Sigma \subseteq ind\,A$ *é uma fatia em* $mod\,A$ *se satisfaz as condições:*

$(F1)$ $\bigoplus_{U\in\Sigma} U$ *é um* A*-módulo sincero.*

$(F2)$ Σ *é um conjunto convexo em* $ind\,A$*.*

$(F3)$ *Se* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *é uma sequência de Auslander-Reiten, então no máximo um dentre os módulos* L *e* N *pertence a* Σ*.*

- Σ *é uma fatia completa se também cumpre a seguinte condição:*

$(F4)$ *Se* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *é uma sequência de Auslander-Reiten e um somando indecomponível de* M *está em* Σ*, então* $L \in \Sigma$ *ou* $N \in \Sigma$*.*

Exemplo 1.7. *Seja* $A = KQ$ *uma álgebra hereditária (e, portanto, inclinada), em que* Q *é o quiver*

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4$$

Então, seu quiver de Auslander-Reiten é dado por

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
& \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \\
& & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \\
& & & \begin{smallmatrix}4\\3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

O conjunto $\Sigma = \left\{ \begin{smallmatrix}4\\3\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}, 4 \right\}$*, claramente, forma uma fatia completa em* $mod\,A$*. No entanto,* $\Sigma \setminus \{4\}$ *é uma fatia que não é completa, pois a sequência de Auslander-Reiten*

$0 \to 3 \to {\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}} \to 4 \to 0$ *tem seu termo do meio em* Σ, *mas* 3 *e* 4 *não pertencem a* Σ.

Como definido acima, para verificarmos se uma álgebra A é inclinada, devemos encontrar uma álgebra hereditária H e um H-módulo inclinante tais que a álgebra de endomorfismos $End\ T_H$ coincida com A. Este processo pode ser resumido a determinar em $\Gamma(mod\, A)$ uma fatia completa. É o que nos garante o teorema a seguir, de Happel e Ringel:

Teorema 1.18. *Seja A uma álgebra. São equivalentes:*

(a) *A é uma álgebra inclinada.*

(b) *Existe uma fatia completa em $mod\, A$.*

(c) *Existe uma fatia em $mod\, A$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 86). □

O resultado que apenas enunciamos a seguir nos mostra como construir fatias completas.

Teorema 1.19. (a) *Sejam H uma álgebra hereditária, T um H-módulo inclinante e $A = End\ T_H$. Então, $\Sigma = ind\,(Hom_H(T, DH))$ é uma fatia completa em $mod\, A$. Além disso, todo antecessor de Σ em Γ pertence a $\mathscr{Y}(T)$, e todo sucessor próprio de Σ em Γ pertence a $\mathscr{X}(T)$, em que Γ é a componente de $\Gamma(mod\, A)$ que contém Σ.*

(b) *Sejam A uma álgebra e Σ uma fatia completa em $mod\ A$. Então, $M = \bigoplus_{U \in \Sigma} U$ é um módulo inclinante e convexo, $H = End\ M$ é hereditária, $T_H = D({}_H M)$ é inclinante e $\Sigma = ind\,(Hom_H(T, DH))$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 87) e [8](p. 320). □

Exemplo 1.8. *Dada uma álgebra inclinada, seu quiver de Auslander-Reiten pode conter várias fatias completas. Por exemplo, se A é a álgebra de caminhos associada ao quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & 4 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

com a relação $\alpha\beta = \gamma\delta$, então $\Gamma(mod\, A)$ é

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}3\,2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}4\\3\,2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}4\\3\,2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
 & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

e, portanto, os conjuntos $\left\{\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\,2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{3, \begin{smallmatrix}3\,2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{3, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\end{smallmatrix}\right\}$ *e* $\left\{\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}4\\3\,2\\1\end{smallmatrix}\right\}$ *são exemplos de fatias completas em $mod\, A$.*

O método que consiste em encontrar uma fatia completa em $mod\, A$ para determinar se a álgebra A é inclinada é bastante eficaz quando esta é de tipo de representação finito. No entanto, o mesmo pode não ocorrer para o caso em que A é de tipo de representação infinito. Para suprimir este problema, Liu e Skowroński desenvolveram, de forma independente, um critério que permite obter se A é inclinada conhecendo $\Gamma(mod\, A)$ apenas localmente.

Teorema 1.20 (Critério de Liu-Skowroński)**.** *Seja A uma álgebra de artin. São equivalentes:*

(a) *A é inclinada.*

(b) *$\Gamma(mod\, A)$ contém uma seção fiel Σ tal que $Hom_A(U, \tau_A V) = 0$, para todos $U, V \in \Sigma_0$.*

(c) *$\Gamma(mod\, A)$ contém uma seção fiel Σ tal que $Hom_A(\tau_A^- U, V) = 0$, para todos $U, V \in \Sigma_0$.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 92). □

O resultado acima é também obtido como consequência do seguinte teorema, que nos será bastante útil no capítulo 3:

Teorema 1.21. *Sejam Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ e Σ um subquiver pleno e convexo de Γ. São equivalentes:*

(a) *Σ é uma seção fiel tal que $Hom_A(U, \tau_A V) = 0$, para todo $U, V \in \Sigma_0$.*

(b) *Σ é uma seção fiel tal que $Hom_A(\tau_A^- U, V) = 0$, para todo $U, V \in \Sigma_0$.*

(*c*) $T = \bigoplus_{U \in \Sigma_0} U$ *é um módulo inclinante e convexo.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [5](p. 91). □

1.3 Outros conceitos e resultados

Como anteriormente, seja A uma álgebra de artin conexa. Um A-módulo indecomponível M é dito estável à direita (resp., estável à esquerda) se $\tau_A^n X \neq 0$, para cada $n \leq 0$ (resp., $n \geq 0$), e é estável se é estável à direita e à esquerda. Se Γ é uma componente do *quiver* de Auslander-Reiten de A, o *subquiver* pleno de Γ gerado pelos módulos estáveis à direita (resp., à esquerda) em Γ é denotado por ${}_r\Gamma$ (resp., ${}_\ell\Gamma$).

Uma componente Γ de $\Gamma(mod\,A)$ é dita semirregular se não contém simultaneamente módulos projetivo e injetivo, e não semirregular se, ao contrário, contém módulos projetivo e injetivo, simultaneamente. Se $rad_A^\infty(M,N) = 0$, para todos M e N em Γ, dizemos que Γ é estândar generalizada. Se, adicionalmente, Γ contém no máximo um número finito de módulos em ciclos, Γ é dita quasi-dirigida.

Seja

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} M_{t-1} \xrightarrow{f_t} M_t = N \qquad (*)$$

um caminho de M para N em *ind A*, como definido na página 19. Se cada f_i é um morfismo irredutível, então $(*)$ é um caminho de morfismos irredutíveis. Neste caso, se $\tau M_{i+1} \not\cong M_{i-1}$, para cada $i \in \{1, \cdots, t\}$, $(*)$ é dito seccional.

Na sequência, reunimos alguns resultados sobre caminhos, bastante úteis nos demais capítulos.

Lema 1.22. *Nenhum ciclo de morfismos irredutíveis é seccional.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [15]. □

Lema 1.23. *Sejam A uma álgebra de artin e $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_t = X$ um ciclo de morfismos irredutíveis, em que cada X_i é indecomponível, e $r \geq 1$. Se $\tau^i X_j \neq 0$, para todo i, com $1 \leq i \leq r$, e cada $j = 0, \cdots, t$, então existe um caminho de morfismos irredutíveis de X para $\tau^r X$.*

Demonstração: Seja $X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_t = X$ nas condições acima. Como nenhum ciclo de morfismos irredutíveis é seccional, existe s, com $2 \leq s \leq t$, tal que $\tau X_s \simeq X_{s-2}$.

Uma vez que $\tau X_j \neq 0$, para cada $j = 0, \cdots, t$, há um caminho $\tau X_0 \to \tau X_1 \to \cdots \to \tau X_t = \tau X$ e, portanto, podemos obter

$$X = X_0 \to \cdots \to X_{s-2} = \tau X_s \to \cdots \to \tau X$$

Seguindo com esse argumento, obtemos o caminho desejado. □

Lema 1.24. *Sejam A uma álgebra de artin, M e N A-módulos indecomponíveis, e $f : M \to N$ um morfismo não nulo que pertence a $rad_A^{\infty}(M,N)$. Então, para cada $t \geq 1$,*

(a) *Existe um caminho em ind A*

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t \xrightarrow{g_t} N$$

em que $f_1, \cdots, f_t$ são morfismos irredutíveis, e $g_t \in rad_A^{\infty}(M_t, N)$.

(b) *Existe um caminho em ind A*

$$M \xrightarrow{g'_t} N_t \xrightarrow{f'_{t-1}} \cdots \xrightarrow{f'_2} N_1 \xrightarrow{f'_1} N_0 = N$$

em que $f'_1, \cdots f'_t$ são morfismos irredutíveis, e $g'_t \in rad_A^{\infty}(M, N_t)$.

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [5](p. 15). □

Lema 1.25. *Sejam Γ uma componente conexa de $\Gamma(mod\, A)$ e $M \in \Gamma$ que pertence a um ciclo em Γ.*

(a) *Se Γ contém projetivo, então existe um caminho em $\Gamma(mod\, A)$ de M para um projetivo.*

(b) *Se Γ contém injetivo, então existe um caminho em $\Gamma(mod\, A)$ de um injetivo para M.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas (a), já que a demonstração de (b) pode ser obtida de maneira dual. Sejam $M \in \Gamma$ e

$$M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_t = M$$

um ciclo em Γ.

Suponha que o conjunto $I = \{i \mid 0 \leq i \leq t-1 \text{ } e\, M_i \text{ } \textit{não é estável à esquerda}\}$ é não vazio. Observe que, para cada $i \in I$, existe um único $r_i \geq 0$ de modo que $\tau^{r_i} M_i$ é projetivo. Tome $i_0 \in I$ satisfazendo $r = r_{i_0} \leq r_i$, para todo $i \in I$. Neste caso, $\tau^{\ell} M_j \neq 0$, para todo $\ell \leq r$ e todo $j \in \{0, \cdots, t-1\}$. De acordo com o lema (1.23), existe um caminho $M_{i_0} \rightsquigarrow \tau^r M_{i_0}$ em $\Gamma(mod\, A)$ e, portanto, há um caminho $M \rightsquigarrow M_{i_0} \rightsquigarrow \tau^r M_{i_0}$, como desejado.

Por fim, suponha que $I = \emptyset$. Como Γ é conexa e contém projetivo, existe um passeio em $\Gamma(mod\, A)$

$$N - N_1 - \cdots - N_m = P$$

de comprimento ℓ mínimo, com P projetivo e N pertencente à τ-órbita de M.

Em seguida, vamos mostrar que cada N_i é estável à esquerda. Assuma que este não é o caso e considere i_0 o menor índice tal que N_{i_0} não é estável à esquerda. Assim, há um passeio entre um módulo que pertence à τ-órbita de M e o projetivo da τ-órbita de N_{i_0} de comprimento menor que ℓ, o que não pode ocorrer.

Sendo cada N_i estável à esquerda, é possível obtermos um caminho $M' \rightsquigarrow P$, em que $M' = \tau^s M$. Se $s < 0$, então há um caminho $M \rightsquigarrow \tau^s M$ em Γ. Agora, se $s > 0$, obtemos $M \rightsquigarrow \tau^s M$ a partir do lema (1.23). $\square$

Capítulo 2

Um estudo das partes esquerda e direita da categoria de módulos

Em [20], Happel, Reiten e SmalØ introduziram os conceitos de partes esquerda e direita de *mod* A, denotadas por $\mathscr{L}_A$ e $\mathscr{R}_A$, respectivamente, que exercem um importante papel na descrição das componentes do *quiver* de Auslander-Reiten de A. Muitas propriedades dessas subcategorias plenas de *ind* A são obtidas como resultado do estudo de módulos particulares, chamados Ext-injetivos em *add* $\mathscr{L}_A$ e Ext-projetivos em *add* $\mathscr{R}_A$, principais interesses dessa dissertação.

Neste capítulo, essencialmente baseado nos artigos [2], [6], [7], apresentamos alguns resultados obtidos para $\mathscr{L}_A$ e, mais geralmente, para subcategorias plenas de *ind* A fechadas para antecessores. Apresentamos também algumas características dos A-módulos Ext-injetivos nessas subcategorias.

Definição 2.1. *(i) A parte esquerda de mod A é a subcategoria plena de ind A formada pela classe de objetos*

$$\mathscr{L}_A = \{M \in ind\, A \mid dp\, L \leq 1, \text{ para todo } L \in ind\, A \text{ com } L \rightsquigarrow M\}$$

(ii) A parte direita de mod A é a subcategoria plena de ind A formada pela classe de objetos

$$\mathscr{R}_A = \{M \in ind\, A \mid di\, L \leq 1, \text{ para todo } L \in ind\, A \text{ com } M \rightsquigarrow L\}$$

Claramente, $\mathscr{L}_A$ é fechada para antecessores e $\mathscr{R}_A$, para sucessores.

2.1 Alguns Exemplos

(i) Seja A a álgebra de caminhos associada ao *quiver* $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Então, o *quiver* de Auslander-Reiten de A é

$$\begin{tikzcd} & {[P_1]=[I_2]} \arrow[dr] & \\ {[P_2]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, dash] & & {[I_1]} \end{tikzcd}$$

O projetivo $P_2 = S_2$ pertence a $\mathscr{L}_A$, pois tem dimensão projetiva nula e é seu único antecessor indecomponível (a menos de isomorfismos). Também, $P_1 = I_2 \in \mathscr{L}_A$, já que seus antecessores indecomponíveis, a saber P_2 e o próprio P_1, têm dimensão projetiva no máximo 1. Sendo $P_1, P_2 \in \mathscr{L}_A$, para que $I_1 \in \mathscr{L}_A$, basta que $dp\ I_1 \leq 1$. Esta condição é, de fato, satisfeita, uma vez que não há morfismo não nulo de um A-módulo injetivo para $\tau_A I_1 \simeq P_2$. Dessa forma, podemos concluir que $\mathscr{L}_A = ind\, A$.

Através de argumentos similares, obtemos que $\mathscr{R}_A = ind\, A$.

(ii) Mais geralmente, se a álgebra A é hereditária, então $\mathscr{L}_A = ind\ A = \mathscr{R}_A$, pois cada A-módulo tem dimensões projetiva e injetiva não excedendo 1.

(iii) Considere A a álgebra de caminhos associada ao *quiver*

$$1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 3$$

com a relação $\alpha\beta = 0$. Então, $\Gamma(mod\, A)$ é dado por

$$\begin{tikzcd} & {[P_2]=[I_1]} \arrow[dr] & & & \\ {[P_1]} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, dash] & & {[S_2]} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, dash] & & {[I_3]} \\ & & & {[P_3]=[I_2]} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Claramente, $P_1, P_2 \in \mathscr{L}_A$. De acordo com o lema (1.4), $dp\, S_2 \leq 1$, uma vez que não há morfismo não nulo de um A-módulo injetivo para $\tau_A S_2 \simeq P_1$. Então, $S_2 \in \mathscr{L}_A$, pois seus antecessores em *ind A* são P_1, P_2 e S_2, apenas. Como consequência, $P_3 \in \mathscr{L}_A$. Por outro lado, $S_3 = I_3 \notin \mathscr{L}_A$, já que existe um morfismo não nulo $I_1 \to S_2 \simeq \tau_A S_3$. Dessa forma, $\mathscr{L}_A = \{P_1, P_2, P_3, S_2\}$.

Observe que $I_3 \in \mathscr{R}_A$, e que $I_2 \in \mathscr{R}_A$, já que seus sucessores indecomponíveis são I_3 e si próprio. Também, $S_2 \in \mathscr{R}_A$, pois não há morfismo não nulo entre $\tau_A^- S_2 \simeq I_3$ e um A-módulo projetivo e, portanto, $di\, S_2 \leq 1$. Como todo sucessor indecomponível de I_1 pertence a $\mathscr{R}_A$, $I_1 \in \mathscr{R}_A$. No entanto, $P_1 \notin \mathscr{R}_A$, uma vez que $Hom_A(\tau_A^- P_1, P_3) \neq 0$. Logo, $\mathscr{R}_A = \{P_2, S_2, P_3, I_3\}$.

(iv) É possível que $\mathscr{L}_A$ e $\mathscr{R}_A$ sejam vazios. Como exemplo citamos as álgebras autoinjetivas conexas, não semissimples. Em seguida, definimos e mostramos alguns resultados sobre essas álgebras, que nos permitem verificar que as partes esquerda e direita de suas categorias de módulos são, de fato, vazias.

Definição 2.2 (Álgebras Autoinjetivas)**.** *Uma K-álgebra noetheriana à direita e à esquerda é autoinjetiva à direita se A_A é um A-módulo injetivo.*

Sendo A autoinjetiva, pode-se mostrar que todo A-módulo projetivo é também injetivo (veja [1](p. 317)). Tendo em vista esta afirmação, podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja A uma K-álgebra autoinjetiva, não semissimples. Então, $dp\, M = \infty$, para todo A-módulo M não projetivo.*

Demonstração: Seja M um A-módulo não projetivo, com $dp\, M = n < \infty$. Neste caso, uma resolução projetiva de M é da forma

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\ .$$

Como A é autoinjetiva e P_n é um A-módulo projetivo, obtemos que P_n é também injetivo e, portanto, a sequência exata

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow Coker\, d_n \longrightarrow 0$$

cinde. Então, $Coker\ d_n$ é somando direto de P_{n-1}, donde é projetivo. Defina $d : Coker\, d_n \to P_{n-2}$ por $d(x + Im\, d_n) = d_{n-1}(x)$. Observe que $Im\, d = Im\, d_{n-1} = Ker\, d_{n-2}$ e que d é um monomorfismo. Logo, a sequência

$$0 \longrightarrow Coker\, d_n \xrightarrow{d} P_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} 0$$

é uma resolução projetiva de M com comprimento menor do que n, o que é uma contradição.

Consequentemente, todo A-módulo não projetivo tem dimensão projetiva infinita.

□

Exemplo 2.1. *Sejam A uma K-álgebra autoinjetiva conexa, não semissimples, e M um A-módulo não projetivo. De acordo com o lema* (2.1), *$\operatorname{dp} M = \infty$ e, portanto, M não pertence a $\mathscr{L}_A$. Então, para concluirmos que $\mathscr{L}_A = \emptyset$, resta-nos mostrar que não existem projetivos em $\mathscr{L}_A$. Considere P um A-módulo projetivo e indecomponível, não simples. Suponha que rad P é projetivo. Sendo A autoinjetiva, obtemos que rad P é injetivo, donde o monomorfismo minimal quase cindido à direita rad $P \hookrightarrow P$ cinde, o que é uma contradição. Dessa forma, todo A-módulo projetivo, não simples, admite um antecessor não projetivo (a saber, somando indecomponível de rad P) e, consequentemente, não pertence a $\mathscr{L}_A$.*

Em seguida, vamos mostrar que nenhum A-módulo projetivo e indecomponível é simples. Suponha que este não é o caso, e considere P um A-módulo nas condições acima. Tome P'_A projetivo tal que P não é seu somando direto e $P \oplus P' = A_A$. Assim, obtemos que

$$A \simeq End_A\,(P \oplus P') = \begin{bmatrix} End_A\, P & Hom_A(P', P) \\ Hom_A(P, P') & End_A\, P' \end{bmatrix},$$

pois $A \simeq End_A\, A$.

Sendo P simples, todo morfismo não nulo $P' \to P$ é epimorfismo e, portanto, cinde, já que P é projetivo. Então, P é somando direto de P', o que é uma contradição. Dessa forma, há somente o morfismo nulo de P' para P. Uma vez que P é também injetivo simples, podemos concluir, de forma análoga, que não existe morfismo não nulo $P \to P'$.

Logo, $A \simeq \begin{bmatrix} End_A\, P & 0 \\ 0 & End_A\, P' \end{bmatrix}$, nos garantindo que A é desconexa, contradição. Consequentemente, $\mathscr{L}_A = \emptyset$.

Com argumentos similares, é possível mostrar que $\mathscr{R}_A = \emptyset$.

Na sequência, apresentamos alguns resultados que descrevem as partes esquerda e direita da categoria de módulos de uma álgebra de artin conexa.

Lema 2.2. *Seja A uma álgebra de artin. Então,*

(a) *Se P é um A-módulo projetivo e indecomponível, então existe no máximo um número finito de módulos $M \in \mathscr{R}_A$ tais que há um caminho $M \rightsquigarrow P$. Mais ainda, todo tal* *caminho é refinável a um caminho de morfismos irredutíveis, e todo tal caminho de irredutíveis é seccional.*

(b) *Se I é um A-módulo injetivo e indecomponível, então existe no máximo um número finito de módulos $N \in \mathscr{L}_A$ tais que há um caminho $I \rightsquigarrow N$. Mais ainda, todo tal caminho é refinável a um caminho de morfismos irredutíveis, e todo tal caminho de irredutíveis é seccional.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (a). Seja P um A-módulo projetivo e indecomponível. Suponha, por absurdo, que existem infinitos antecessores de P em $\mathscr{R}_A$. Neste caso, para cada $t \geq 0$, há um caminho em *ind A*

$$M_t \xrightarrow{f_t} M_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} M_0 = P \ ,$$

com todo $M_i \in \mathscr{R}_A$ e cada f_i não isomorfismo. Em seguida, vamos mostrar que o caminho dado acima induz

$$N_s \xrightarrow{g_s} N_{s-1} \xrightarrow{g_{s-1}} \cdots \xrightarrow{g_1} N_0 = P \ , \tag{2.1}$$

em que $s \geq t$, $N_i \in \mathscr{R}_A$ e todo g_i é irredutível.

Seja $h_1 : L_1 \to P$ o morfismo minimal quase cindido à direita com final em P. Observe que f_1 não é um epimorfismo que cinde, pois do contrário, teríamos $M_1 \simeq M_0$, o que não ocorre. Então, f_1 se fatora através de h_1, ou seja, $Hom_A(M_1, L_1) \neq 0$. Tome N_1 somando indecomponível de L_1 tal que $Hom_A(M_1, N_1) \neq 0$. Dessa forma, podemos construir o caminho $M_1 \xrightarrow{g_1'} N_1 \xrightarrow{g_1} P$, com N_1 indecomponível, g_1' não nulo e g_1 irredutível. Além disso, $N_1 \in \mathscr{R}_A$, já que $M_1 \in \mathscr{R}_A$.

Suponha indutivamente que existe um caminho

$$M_j \xrightarrow{g_i'} N_i \xrightarrow{g_i} N_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} P \ ,$$

com $i \geq j$, cada $N_k \in \mathscr{R}_A$, cada g_k irredutível e $g_i' \neq 0$. Se g_i' não é um isomorfismo, então se fatora através do morfismo minimal quase cindido à direita com final em N_i, dando origem ao caminho

$$M_j \xrightarrow{g_{i+1}'} N_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} N_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} P \ ,$$

em que N_{i+1} é indecomponível, g_{i+1} é irredutível e g_{i+1}' é não nulo. Também, $N_{i+1} \in \mathscr{R}_A$, uma vez que $M_j \in \mathscr{R}_A$.

Agora, se g_i' é isomorfismo, considere o morfismo $g_i' f_{j+1} : M_{j+1} \to N_i$, que não é isomorfismo, pois caso contrário, teríamos $M_{j+1} \simeq M_j$. Neste caso, $g_i' f_{j+1}$ se fatora através do morfismo minimal quase cindido à direita com final em N_i, donde podemos construir o caminho

$$M_{j+1} \xrightarrow{g_{i+1}'} N_{i+1} \xrightarrow{g_{i+1}} \cdots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} P \ ,$$

com $N_{i+1} \in \mathscr{R}_A$, g_{i+1} irredutível e g_{i+1}' não nulo. Em ambos os casos, obtemos o caminho desejado.

Resta-nos verificar que (2.1) é um caminho seccional. Suponha que este não é o caso. Então, existe um menor índice j tal que $\tau_A N_{j-1} \simeq N_{j+1}$ e

$$N_j \to N_{j-1} \to \cdots \to N_1 \to N_0$$

é seccional. Devido a [15], a composta de irredutíveis de um caminho seccional é não nula, ou seja, $Hom_A(\tau_A^{-}(\tau_A N_{j-1}), P) \neq 0$. Logo, $di\ N_{j+1} \geq 2$, o que contradiz $N_{j+1} \in \mathscr{R}_A$. Consequentemente, (2.1) é, de fato, seccional e, portanto, segue do lema (1.22) que os módulos N_k são dois a dois não isomorfos. Como estamos supondo que P admite infinitos antecessores em $\mathscr{R}_A$, podemos assumir que (2.1) é tal que $s \geq rk\ K_0(A)+1$. Então, o lema (1.16) nos garante que existem p, q satisfazendo $1 \leq p, q \leq s$ e $Hom_A(N_p, \tau_A N_q) \neq 0$. Novamente pelo lema (1.4), obtemos que $di\ \tau_A N_q \geq 2$, pois $Hom_A(N_q, P) \neq 0$. Assim, $N_p \notin \mathscr{R}_A$, o que não deve ocorrer.

Portanto, há somente um número finito de módulos em $\mathscr{R}_A$ antecessores de um A-módulo projetivo e indecomponível. □

Como consequência do lema acima, obtemos a seguinte caracterização para $\mathscr{R}_A$ e $\mathscr{L}_A$:

Corolário 2.3. *Seja A uma álgebra de artin.*

(a) *$\mathscr{R}_A$ consiste dos módulos $M \in ind\ A$ tais que, se existe um caminho de M para um A-módulo projetivo e indecomponível, então este caminho pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis, e todo tal caminho de irredutíveis é seccional.*

(b) *$\mathscr{L}_A$ consiste dos módulos $N \in ind\ A$ tais que, se existe um caminho de um A-módulo injetivo e indecomponível para N, então este caminho pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis, e todo tal caminho de irredutíveis é seccional.*

Demonstração: Vamos demonstrar (a). Sejam $M \in \mathscr{R}_A$ e $M \rightsquigarrow P$ um caminho em $ind\ A$, com P projetivo. De acordo com o lema anterior, este caminho pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis seccional, como desejado.

Por outro lado, seja $M \in ind\,A$ tal que, se existe um caminho $M \rightsquigarrow P$ em $ind\,A$, em que P é projetivo, então este caminho é refinável a um caminho de irredutíveis e todo tal refinamento é seccional. Suponha, por absurdo, que $M \notin \mathscr{R}_A$. Neste caso, M admite um sucessor N satisfazendo $di\,N \geq 2$. Segundo o lema (1.4), $Hom_A(\tau_A^- N, A) \neq 0$ e, portanto, $Hom_A(\tau_A^- N, P) \neq 0$, para algum projetivo indecomponível P. Dessa forma, obtemos o caminho

$$M \rightsquigarrow N \rightarrow * \rightarrow \tau_A^- N \rightarrow P$$

que, em particular, pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis seccional, o que é uma contradição. Consequentemente, $M \in \mathscr{R}_A$. □

Lema 2.4. *Sejam A uma álgebra de artin e Γ uma componente de $\Gamma(mod\,A)$. Então,*

(a) *Se Γ contém módulos projetivos, então $\Gamma \cap \mathscr{R}_A$ é dirigido.*

(b) *Se Γ contém módulos injetivos, então $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ é dirigido.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas (a), pois (b) é obtido dualmente. Seja $M \in \Gamma \cap \mathscr{R}_A$ sob o ciclo

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{t-1} \rightarrow M_t = M.$$

Como Γ contém módulos projetivos, conforme o lema (1.25), existe um caminho $M = N_0 \rightarrow \cdots \rightarrow N_s = P$ em $\Gamma(mod\,A)$, com P projetivo. Uma vez que $M \in \mathscr{R}_A$, segue do corolário (2.3) que o caminho de morfismos irredutíveis

$$M = M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_t = M = N_0 \rightarrow \cdots \rightarrow P$$

é seccional, contradizendo o lema (1.22). Consequentemente, $\Gamma \cap \mathscr{R}_A$ é dirigido. □

Observe que se A é uma álgebra de tipo de representação finito, então $\mathscr{L}_A$ e $\mathscr{R}_A$ são dirigidos.

Observação 2.1. Seja $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ M & C \end{bmatrix}$ uma álgebra de artin na forma de matriz triangular. Então, cada B-módulo N admite uma estrutura natural de A-módulo: dados $n \in N$ e $a = \begin{pmatrix} b & 0 \\ m & c \end{pmatrix} \in A$, defina $n \cdot a = n \cdot b$. Analogamente para o caso dos C-módulos.

Tendo esta observação em vista, podemos concluir que todo A-módulo indecomponível com estrutura de B-módulo (ou C-módulo) é também indecomponível enquanto B-módulo (ou C-módulo), e todo A-módulo projetivo com estrutura de B-módulo (ou C-módulo), é um B-módulo projetivo (ou C-módulo).

Proposição 2.5. *Seja* $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ M & C \end{bmatrix}$ *uma álgebra de artin. Então,* $\mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_B$ *se, e somente se, para cada idempotente primitivo* $e_c \in C$*, o* A*-módulo projetivo e indecomponível* P_c *correpondente não pertence a* $\mathscr{L}_A$*.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $\mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_B$. Seja $e_c \in C$ um idempotente primitivo tal que $P_c \in \mathscr{L}_A$. Então, $P_c \in \mathscr{L}_B$, em particular, P_c tem estrutura de B-módulo, o que é uma contradição.

($\Leftarrow$) Inicialmente, vamos mostrar que $\mathscr{L}_A \subseteq ind\, B$. Considere $X \in \mathscr{L}_A$ tal que $X \notin ind\, B$. De acordo com a observação feita acima, X não admite uma estrutura de B-módulo. Então, deve existir um idempotente primitivo $e_c \in C$ tal que Xe_c é não nulo, uma vez que X é um A-módulo não nulo e não é B-módulo. Como $Xe_c \simeq Hom_A(e_cA, X)$, existe um morfismo não nulo $P_c \to X$. Dessa forma, obtemos que $P_c \in \mathscr{L}_A$, já que $X \in \mathscr{L}_A$, contradição que finaliza a demonstração da afirmação.

Em seguida, afirmamos que os antecessores de X em $mod\, B$ coincidem com seus antecessores em $mod\, A$. De fato, uma vez que todo B-módulo é também um A-módulo, a inclusão $Pred_B\, X \subseteq Pred_A\, X$ é obviamente obtida. Resta-nos verificar que $Pred_A\, X \subseteq Pred_B\, X$. Para isso, considere $Y \in Pred_A\, X$, indecomponível. Neste caso, existe uma sequência em $ind\, A$, $Y = Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_t = X$. Como $X \in \mathscr{L}_A$, cada $Y_i \in \mathscr{L}_A$. Agora, $\mathscr{L}_A \subseteq ind\, B$, fornecendo a cada Y_i uma estrutura de B-módulo, donde $Y \in Pred_B\, X$.

Por fim, considere Y antecessor de X. Como $Y \in \mathscr{L}_A$, há uma resolução projetiva minimal $0 \to P_1 \to P_0 \to Y \to 0$ em $mod\, A$. Também, $P_0, P_1 \in add\, \mathscr{L}_A$, pois $Y \in \mathscr{L}_A$. Dessa forma, P_0 e P_1 são B-módulos projetivos e, portanto, $dp_B Y \leq 1$. Consequentemente, $X \in \mathscr{L}_B$.

□

2.2 Subcategorias de *mod A* fechadas para antecessores

Ao longo dessa seção, a menos de indicação contrária, $\mathscr{C}$ corresponde a uma subcategoria plena de $ind\, A$ fechada para antecessores.

Definição 2.3. *Seja* $\mathscr{C}$ *uma subcategoria plena e aditiva de ind A fechada para extensões. Dado um* A*-módulo* X *não nulo em add* $\mathscr{C}$*,* *(i)* *X é Ext-projetivo em add $\mathscr{C}$ se $Ext_A^1(X,\_)|_{\mathscr{C}} = 0$.*

(ii) *X é Ext-injetivo em add $\mathscr{C}$ se $Ext_A^1(\_,X)|_{\mathscr{C}} = 0$.*

Lema 2.6. *Sejam $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de ind A fechada para antecessores, e $P_0 \in \mathscr{C}$. São equivalentes:*

(a) *P_0 é Ext-projetivo em add $\mathscr{C}$.*

(b) *Se a sequência $0 \to L \to M \to N \to 0$ é exata, com $L, M, N \in \mathscr{C}$, então a sequência $0 \to Hom_A(P_0, L) \to Hom_A(P_0, M) \to Hom_A(P_0, N) \to 0$ é exata.*

(c) *Toda sequência exata curta da forma $0 \to L \to M \to P_0 \to 0$ cinde.*

(d) *P_0 é um A-módulo projetivo.*

Demonstração: $(c) \Rightarrow (d)$ Seja $f : P \to P_0$ a cobertura projetiva de P_0. Segundo o item (c), a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Ker\, f \longrightarrow P \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow 0$$

cinde e, portanto, P_0 é somando direto de P. Dessa forma, P_0 é projetivo.

As demais implicações seguem diretamente. □

Baseados no lema acima, podemos afirmar que os A-módulos Ext-projetivos em $\mathscr{C}$ correspondem aos projetivos que pertencem a *add* $\mathscr{C}$. No entanto, um resultado semelhante não pode ser obtido para os Ext-injetivos em *add* $\mathscr{C}$, pois, embora todo A-módulo injetivo de $\mathscr{C}$ seja Ext-injetivo em *add* $\mathscr{C}$, a recíproca não é geralmente verdadeira (veja exemplo (2.2)).

O lema seguinte nos fornece uma caracterização para os A-módulos Ext-injetivos em *add* $\mathscr{C}$. Destacamos a equivalência obtida entre os itens (a) e (d), bastante utilizada nas demonstrações de resultados propostos adiante.

Lema 2.7. *Sejam $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de ind A fechada para antecessores e $E_0 \in \mathscr{C}$. Então, são equivalentes:*

(a) *E_0 é Ext-injetivo em add $\mathscr{C}$.*

(b) *Se $0 \to L \to M \to N \to 0$ é uma sequência exata em add $\mathscr{C}$, então a sequência induzida $0 \to Hom_A(N, E_0) \to Hom_A(M, E_0) \to Hom_A(L, E_0) \to 0$ é exata.*

(c) *Toda sequência exata da forma* $0 \to E_0 \to M \to N \to 0$, *com* $N \in add\,\mathscr{C}$, *cinde.*

(d) $\tau_A^- E_0 \notin \mathscr{C}$.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata em $add\,\mathscr{C}$. Neste caso, podemos construir a seguinte sequência

$$0 \to Hom_A(N, E_0) \to Hom_A(M, E_0) \to Hom_A(L, E_0) \to Ext_A^1(M, E_0),$$

que também é exata. Uma vez que $M \in add\,\mathscr{C}$, obtemos que $Ext_A^1(M, E_0) = 0$, como desejado.

$(b) \Rightarrow (c)$ Considere a sequência exata $0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$, com $N \in add\,\mathscr{C}$. De acordo com (b), $0 \to Hom_A(N, E_0) \to Hom_A(M, E_0) \to Hom_A(E_0, E_0) \to 0$ é exata e, portanto, existe $g \in Hom_A(M, E_0)$ tal que $Hom_A(f, E_0)(g) = 1_{E_0}$, ou ainda, $g \circ f = 1_{E_0}$. Logo, f é uma seção.

$(c) \Rightarrow (d)$ Suponha, por absurdo, que $\tau_A^- E_0 \in \mathscr{C}$. Devido a (c), a sequência de Auslander-Reiten $0 \to E_0 \to * \to \tau_A^- E_0 \to 0$ cinde, o que é uma contradição.

$(d) \Rightarrow (a)$ Suponha que E_0 não é Ext-injetivo em $add\,\mathscr{C}$. Então, para algum $M \in add\,\mathscr{C}$, devemos ter $Ext_A^1(M, E_0) \neq 0$. Mas, pelo lema (1.5),

$$DExt_A^1(M, E_0) \simeq \underline{Hom}_A(\tau_A^- E_0, M)$$

e, portanto, $\tau_A^- E_0 \in add\,\mathscr{C}$, o que não ocorre. □

Exemplo 2.2. *Seja A a álgebra de caminhos apresentada no item (iii) do exemplo* (2.1). *Então, como havíamos calculado,* $\mathscr{L}_A = \{P_1, P_2, P_3, S_2\}$.

Segundo o lema anterior, os módulos indecomponíveis Ext-injetivos em add $\mathscr{L}_A$ são S_2, $P_2 = I_1$ *e* $P_3 = I_2$. *Observe que* S_2 *não é injetivo, nos permitindo concluir que nem todo A-módulo Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$ é injetivo.*

Seja $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de *ind A* fechada para *sucessores.* Pode-se mostrar, de maneira dual à feita anteriormente, que os únicos módulos Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$ são os módulos injetivos que pertencem a $add\,\mathscr{C}$. Também, obtém-se a seguinte caracterização para os módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{C}$:

Lema 2.8. *Sejam $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de ind A fechada para sucessores e $E_0 \in \mathscr{C}$. São equivalentes:*

(a) *E_0 é Ext-projetivo em add $\mathscr{C}$.*

(b) *Se a sequência $0 \to L \to M \to N \to 0$ é exata, com $L, M, N \in \mathscr{C}$, então a sequência $0 \to Hom_A(E_0, L) \to Hom_A(E_0, M) \to Hom_A(E_0, N) \to 0$ é exata.*

(c) *Toda sequência exata curta da forma $0 \to L \to M \to E_0 \to 0$, com $L \in \mathscr{C}$, cinde.*

(d) *$\tau_A E_0 \notin \mathscr{C}$.*

□

Notação.

(i) O conjunto formado pelos A-módulos indecomponíveis Ext-injetivos em *add* $\mathscr{C}$ será sempre denotado por $\mathscr{E}$. Quando $\mathscr{C} = \mathscr{L}_A$, será denotado por $\mathscr{E}_A$.

(ii) Sendo $\mathscr{C}$ uma subcategoria fechada para *sucessores*, o conjunto dos A-módulos indecomponíveis Ext-projetivos em *add* $\mathscr{C}$ será sempre denotado por $\mathscr{P}$. Quando $\mathscr{C} = \mathscr{R}_A$, será denotado por $\mathscr{P}_A$.

Observação 2.2. A existência de módulos em $\mathscr{L}_A$ (resp., $\mathscr{R}_A$) não é suficiente para que $\mathscr{E}_A$ (resp., $\mathscr{P}_A$) seja não vazio (veja, por exemplo, a observação (3.3)). A afirmação é válida quando A é de tipo de representação finito, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 2.9. *Seja A uma álgebra de tipo de representação finito.*

(a) *Se não existe A-módulo Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$, então $\mathscr{L}_A$ é vazio.*

(b) *Se não existe A-módulo Ext-projetivo em add $\mathscr{R}_A$, então $\mathscr{R}_A$ é vazio.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (a). Suponha que $\mathscr{L}_A$ é não vazio e considere $X \in \mathscr{L}_A$. Então, $\tau_A^{-} X \in \mathscr{L}_A$, pois caso contrário, X seria Ext-injetivo em *add* $\mathscr{L}_A$. Da mesma forma, obtemos que $\tau_A^{-n} X \in \mathscr{L}_A$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sendo A de tipo de representação finito, X é periódico ou X está na órbita de um projetivo e de um injetivo. Já que este último não ocorre, podemos concluir que X é periódico, o que é uma contradição, pois $\mathscr{L}_A$ é dirigido, conforme o lema (2.4). Logo, $\mathscr{L}_A = \emptyset$. □

A seguir, demonstramos uma série de resultados que descrevem $\mathscr{E}$. Cada um deles tem sua versão dual, que não será enunciada.

Lema 2.10. (a) *Para todo $E', E'' \in \mathscr{E}$, temos que $Hom_A(\tau_A^- E', E'') = 0$.*

(b) $|\mathscr{E}| \leq rk\, K_0(A)$.

(c) *$\mathscr{E}$ intercepta cada τ-órbita de $\Gamma(mod\, A)$ no máximo uma vez.*

(d) *Todo caminho de morfismos irredutíveis contido em $\mathscr{E}$ é seccional.*

(e) *$\mathscr{E}$ não contém ciclos de morfismos irredutíveis.*

Demonstração: (a) Suponha que existe morfismo não nulo de $\tau_A^- E'$ para E''. Como $E'' \in \mathscr{C}$ e $\mathscr{C}$ é fechada para antecessores, obtemos que $\tau_A^- E' \in \mathscr{C}$, o que é uma contradição, pois $E' \in \mathscr{E}$. Logo, $Hom_A(\tau_A^- E', E'') = 0$, para cada $E', E'' \in \mathscr{E}$.

(b) O resultado segue do item (a) e do lema (1.16).

(c) Suponha, por absurdo, que E', $\tau_A^t E' \in \mathscr{E}$, com $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Se $t > 0$, temos o caminho $\tau_A^t E' \to * \to \tau_A^{t-1} E' \rightsquigarrow E'$. Como $E' \in \mathscr{C}$, obtemos que $\tau_A^{t-1} E' \in \mathscr{C}$, o que contradiz a afirmação $\tau_A^t E' \in \mathscr{E}$.

Analogamente para o caso em que $t < 0$.

(d) É consequência de (c).

(e) Suponha que existe um ciclo $E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_m = E_0$ de morfismos irredutíveis em $\mathscr{E}$. Então, esse caminho não é seccional (lema (1.22)) e, portanto, $E_{t+2} = \tau_A^- E_t$, para algum $0 \leq t < m-1$, contradizendo (a). □

Lema 2.11. (a) *Seja $E' = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ um caminho em $ind\, A$, com $E' \in \mathscr{E}$ e $M_t \in \mathscr{C}$. Se nenhum f_i se fatora por um A-módulo injetivo, então $M_i \in \mathscr{E}$, para todo i.*

(b) *Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ que não contém injetivos e tal que $\Gamma \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$. Então, para cada $M \in \Gamma \cap \mathscr{C}$, existe um único $m \geq 0$ tal que $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}$.*

Demonstração: (a) Seja $E' = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ como no enunciado de (a). Então, cada $M_i \in \mathscr{C}$, pois $M_t \in \mathscr{C}$. Dessa forma, resta-nos mostrar que $\tau_A^- M_i \notin \mathscr{C}$.

Uma vez que nenhum f_i se fatora por injetivo, o isomorfismo de Auslander-Reiten $\underline{Hom}_A(\tau_A^- M_{i-1}, \tau_A^- M_i) \simeq \overline{Hom}_A(M_{i-1}, M_i)$ nos permite concluir que, para cada i, existe um morfismo não nulo $\tau_A^- M_{i-1} \to \tau_A^- M_i$, já que $\overline{Hom}_A(M_{i-1}, M_i) \neq 0$. Neste caso, podemos construir um caminho

$$\tau_A^- E' = \tau_A^- M_0 \to \tau_A^- M_1 \to \cdots \to \tau_A^- M_t$$

Sendo $E' \in \mathscr{E}$, concluímos que $\tau_A^- E' \notin \mathscr{C}$ e, portanto, $\tau_A^- M_i \notin \mathscr{C}$, para todo i, donde o resultado segue.

(b) Para cada $E' \in \Gamma \cap \mathscr{E}$, considere $\tau^- E'$, que não pertence a $\mathscr{C}$. Dado $M \in \mathscr{C}$, como Γ é estável à direita e $\Gamma \cap \mathscr{E}$ é finito (devido ao lema (2.10)(b)), existe $\ell > 0$ tal que $\tau_A^{-\ell} M$ é sucessor de cada $\tau_A^- E'$. Neste caso, $\tau_A^{-\ell} M \notin \mathscr{C}$ e existe $m \geq 0$ com $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{C}$ e $\tau_A^{-(m+1)} M \notin \mathscr{C}$. Portanto, $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}$.

Além disso, m é único, pois caso contrário, $\mathscr{E}$ interceptaria uma mesma órbita mais de uma vez, contradizendo o lema (2.10)(c). □

A partir do item (b) do lema acima, podemos concluir que $\mathscr{E}$ intercepta todas as τ_A-órbitas de $\Gamma \cap \mathscr{C}$, em que Γ é uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ que não contém injetivos e satisfaz $\Gamma \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$.

2.2.1 Subcategorias contidas em $\mathscr{L}_A$

Nesta seção, $\mathscr{C}$ representa uma subcategoria plena de $\mathscr{L}_A$, fechada para antecessores.

Lema 2.12. *Seja I um A-módulo indecomponível injetivo. Então,*

(a) *existem, no máximo, rk $K_0(A)$ módulos $N \in \mathscr{C}$ sucessores de I.*

(b) *todo tal caminho $I \rightsquigarrow N$ é refinável a um caminho de morfismos irredutíveis.*

(c) *todo tal caminho de irredutíveis é seccional.*

(d) *todo módulo $N \in \mathscr{C}$ é Ext-injetivo em add $\mathscr{C}$.*

Demonstração: Se $I \notin \mathscr{C}$, então nenhum sucessor de I pertence a $\mathscr{C}$. Agora, se $I \in \mathscr{C}$, para a verificação dos itens (a), (b), (c) e (d), basta repetir a demonstração feita no lema (2.2). □

Os módulos Ext-injetivos em *add* $\mathscr{C}$ podem ser de dois tipos:

- $M \in \mathscr{C}$ é dito de primeiro tipo se existem um A-módulo injetivo indecomponível e um caminho $I \rightsquigarrow M$,

- Se $M \in \mathscr{C}$ não é de primeiro tipo, então é de segundo tipo.

Notação: $\mathscr{E}_1$ é formado pelos módulos Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$ indecomponíveis de primeiro tipo e $\mathscr{E}_2$, Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$ de segundo tipo.

Corolário 2.13. *Seja $M \in \mathscr{C}$. São equivalentes:*

(a) *M é Ext-injetivo de primeiro tipo.*

(b) *Existem um A-módulo injetivo e um caminho de morfismos irredutíveis $I \rightsquigarrow M$.*

(c) *Existem um A-módulo injetivo e um caminho de morfismos irredutíveis seccional $I \rightsquigarrow M$.*

(d) *Existe um A-módulo injetivo tal que $Hom_A(I,M) \neq 0$.*

Demonstração: As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(b) \Rightarrow (c)$ são consequências imediatas do lema (2.12).

$(c) \Rightarrow (d)$ De acordo com [15], a composição entre todos os morfismos do caminho de irredutíveis seccional $I \rightsquigarrow M$ é não nula e, portanto, $Hom_A(I,M) \neq 0$.

$(d) \Rightarrow (a)$ É óbvio. □

Proposição 2.14. *Sejam $E' \in \mathscr{E}$ e $M \in \mathscr{C}$ tais que existe um caminho de E' para M em $ind\,A$. Então, este caminho pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis seccional e $M \in \mathscr{E}$.*

Demonstração: Sejam E', $M \in \mathscr{E}$ e

$$E' = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = M \tag{2.2}$$

um caminho em $ind\,A$. De acordo com (2.11), se nenhum f_i se fatora através de módulos injetivos, então $M_i \in \mathscr{E}$, para todo i.

Assuma que, para algum natural j, f_j se fatora por injetivo, e tome i o menor deles. Dessa forma, nenhum dos morfismos do caminho $E' \rightsquigarrow M_{i-1}$ se fatora por módulos injetivos e, portanto, $M_k \in \mathscr{E}$, para cada $k \leq i-1$. Obtemos também um caminho

$I \to M_i \rightsquigarrow M_t = M$, com I injetivo. Como $M \in \mathscr{C}$, segue da demonstração do lema (2.12) que $M_k \in \mathscr{E}$, para todo $k \geq i$. Em particular, $M \in \mathscr{E}$.

Resta-nos mostrar que o caminho dado em (2.2) é refinável a um caminho de morfismos irredutíveis seccional. Suponha, por absurdo, que para algum $i \in \{0, \cdots t\}$, f_i pertence a $rad^{\infty}(M_{i-1}, M_i)$. Em virtude do lema (1.24), dado $s \geq 0$, existe um caminho em $ind\, A$

$$E' = M_0 \rightsquigarrow M_{i-1} = N_0 \to N_1 \to \cdots N_s \to M_i \rightsquigarrow M_t = M.$$

De acordo com o que foi demonstrado acima, cada N_s é um módulo em $\mathscr{E}$, contradizendo o item (b) do lema (2.10). Com isso, podemos concluir que todo f_i é uma soma de composta de morfismos irredutíveis. A seccionalidade segue então pelo item (d) do lema (2.10). □

Corolário 2.15. *Seja $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $\mathscr{L}_A$, fechada para antecessores. Então, $\mathscr{E}$ é convexo em ind A.*

Demonstração: Segue diretamente da demonstração da proposição anterior. □

Corolário 2.16. *Nas condições do corolário acima, cada módulo em $\mathscr{E}$ é dirigido em ind A.*

Demonstração: Sejam $M \in \mathscr{E}$ e $M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_t = M$ um ciclo em $ind\, A$. De acordo com a proposição anterior, este ciclo pode ser refinado a um ciclo de morfismos irredutíveis com todos os módulos em $\mathscr{E}$, o que contradiz (2.10)(e). □

O resultado a seguir é uma generalização do lema (2.4).

Corolário 2.17. *Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ que contém um A-módulo injetivo. Então, todo módulo em $\Gamma \cap \mathscr{C}$ é dirigido.*

Demonstração: Sejam $M \in \Gamma \cap \mathscr{C}$ e $M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_t = M$ um ciclo. Devido ao lema (1.25), existem um A-módulo injetivo I e um caminho $I \rightsquigarrow M$ em $\Gamma(mod\, A)$. Dessa forma, há um caminho $I \rightsquigarrow M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_t = M$. Uma vez que $M \in \mathscr{C}$, cada M_i pertence a $\mathscr{C}$, e também $I \in \mathscr{C}$. Neste caso, a partir da proposição (2.14), podemos concluir que cada M_i pertence a $\mathscr{E}$, contradizendo o corolário (2.16).

Como consequência, obtemos que todo módulo em $\Gamma \cap \mathscr{C}$ é dirigido. □

Teorema 2.18. *Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ tal que $\Gamma \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$. Então,*

(a) *Para todo* $M \in \Gamma \cap \mathscr{C}$, *existe (e é único)* $m \geq 0$ *tal que* $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}$.

(b) *O número de* τ_A*-órbitas de* $\Gamma \cap \mathscr{C}$ *é igual a* $|\Gamma \cap \mathscr{E}|$.

(c) $\Gamma \cap \mathscr{C}$ *não contém módulos em ciclos em* Γ.

Demonstração: (a) Seja $M \in \Gamma \cap \mathscr{C}$. De acordo com o item (b) do lema (2.11), se Γ não contém A-módulos injetivos, existe um único $m \geq 0$ tal que $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}$. Podemos, então, assumir que Γ contém injetivo. Suponha, por absurdo, que $\tau_A^{-\ell} M \in \mathscr{C}$, para todo $\ell \geq 0$. Neste caso, M é estável à direita, mas não é periódico, devido ao corolário (2.17). Dado I um A-módulo injetivo em Γ, há um passeio de I para um módulo na τ_A-órbita de M. Considere o passeio de um injetivo para a τ_A-órbita de M de menor comprimento. Então, a partir do argumento utilizado na demonstração do lema (1.25), podemos concluir que cada módulo pertencente a esse passeio, com exceção do injetivo I, é estável à direita e, portanto, existe um caminho de morfismos irredutíveis $I \rightsquigarrow \tau_A^{-s} M$, para algum $s \geq 0$. Uma vez que $I \in \mathscr{E}$ e que $\tau_A^{-s} M \in \mathscr{C}$, obtemos que $\tau_A^{-s} M \in \mathscr{E}$ (proposição (2.14)). Logo, $\tau_A^{-s-1} M \notin \mathscr{C}$, o que é uma contradição. Dessa forma, existe $m \geq 0$ satisfazendo $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}$.

A demonstração da unicidade é obtida pelo item (c) do lema (2.10).

(b) De acordo com o item anterior, o número de τ_A-órbitas em $\Gamma \cap \mathscr{C}$ é maior ou igual a $|\Gamma \cap \mathscr{E}|$. Uma vez que cada módulo em $\Gamma \cap \mathscr{E}$ está em exatamente uma τ_A-órbita de $\Gamma \cap \mathscr{C}$, obtemos o resultado.

(c) Segundo o corolário (2.17), se Γ contém injetivos, então cada módulo em $\Gamma \cap \mathscr{C}$ é dirigido. Neste caso, podemos supor que Γ não contém A-módulo injetivo. Seja $M = M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_t = M$ um ciclo, com cada $M_i \in \Gamma$ e $M \in \Gamma \cap \mathscr{C}$. Então, $M_i \in \mathscr{C}$, para todo $i \in \{0, \cdots t-1\}$. Além disso, nenhum M_i pertence a $\mathscr{E}$, já que este é dirigido, devido ao item (e) do lema (2.10). De acordo com o lema (1.5), para cada i, obtemos que $\underline{Hom_A}(\tau_A^{-} M_{i-1}, \tau_A^{-} M_i) \simeq \overline{Hom_A}(M_{i-1}, M_i)$ e, portanto, existe um caminho

$$\tau_A^{-} M \to \tau_A^{-} M_1 \to \cdots \to \tau_A^{-} M_t = \tau_A^{-} M$$

e $\tau_A^{-} M_i \in \Gamma \cap \mathscr{C}$. Prosseguindo com esse argumento, podemos concluir que, para cada índice $m \geq 0$, o módulo $\tau_A^{-m} M$ pertence a $\Gamma \cap \mathscr{C}$ e está sob ciclo, o que contradiz o item (a). Logo, não pode haver em $\Gamma \cap \mathscr{C}$ módulos que estão em ciclos entre módulos de Γ. $\square$

Teorema 2.19. *Seja* Γ *uma componente de* $\Gamma(mod\, A)$. *Se* $\Gamma \cap \mathscr{E} = \emptyset$, *então* $\Gamma \subseteq \mathscr{C}$ *ou* $\Gamma \cap \mathscr{C} = \emptyset$.

Demonstração: Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$ tal que $\Gamma \cap \mathscr{E} = \emptyset$. Suponha que $\Gamma \nsubseteq \mathscr{C}$ e que $\Gamma \cap \mathscr{C} \neq \emptyset$. Então, existem $X \in \Gamma \setminus (\Gamma \cap \mathscr{C})$, $Y \in \Gamma \cap \mathscr{C}$ e um passeio $Y - X$ em Γ. Dessa forma, podemos determinar um morfismo $Y' \to X'$ em Γ, com $Y' \in \mathscr{C}$ e $X' \notin \mathscr{C}$. Observe que Y' não é injetivo, pois caso contrário, $Y' \in \mathscr{E}$, o que não ocorre. Neste caso, existe um morfismo irredutível $X' \to \tau_A^{-} Y'$. Como $X' \notin \mathscr{C}$, obtemos que $\tau_A^{-} Y' \notin \mathscr{C}$ e, portanto, $Y' \in \mathscr{E}$, contradizendo novamente a hipótese de que $\Gamma \cap \mathscr{E} = \emptyset$. Consequentemente, uma das condições, $\Gamma \subseteq \mathscr{C}$ ou $\Gamma \cap \mathscr{C} = \emptyset$, deve ocorrer. □

Propriedades satisfeitas por $\mathscr{E}$ e $\mathscr{P}$

Sejam A uma álgebra de artin e $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $ind\, A$ fechada para antecessores. Em resumo, mostramos nessa seção que $\mathscr{E}$ satisfaz as seguintes propriedades:

- $|\mathscr{E}| \leq rk\ K_0(A)$;
- intercepta cada τ_A-órbita de $\Gamma(mod\, A)$ no máximo uma vez;
- todo caminho de morfismos irredutíveis em $\mathscr{E}$ é seccional;
- não contém ciclos de morfismos irredutíveis.

Se adicionarmos à subcategoria $\mathscr{C}$ a condição $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A$, então $\mathscr{E}$ também:

- é convexo em $ind\, A$;
- é dirigido em $ind\, A$.

Dualmente, seja $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $ind\, A$ fechada para sucessores. Então, o conjunto dos módulos indecomponíveis Ext-projetivos em $add\, \mathscr{R}_A$, $\mathscr{P}$, satisfaz:

- $|\mathscr{P}| \leq rk\ K_0(A)$;
- intercepta cada τ_A-órbita de $\Gamma(mod\, A)$ no máximo uma vez;
- todo caminho de morfismos irredutíveis em $\mathscr{P}$ é seccional;
- não contém ciclos de morfismos irredutíveis.

Se, adicionalmente, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{R}_A$, então:

- $\mathscr{P}$ é convexo em $ind\,A$;
- $\mathscr{P}$ é dirigido em $ind\,A$.

2.3 Seções e Seções à Esquerda

Seja A uma álgebra de artin. Recordamos do capítulo 1 que um *subquiver* pleno e conexo de uma componente Γ de $\Gamma(mod\,A)$ é uma seção se

- é acíclico;
- intercepta exatamente uma vez cada τ_A-órbita de Γ;
- é convexo em Γ.

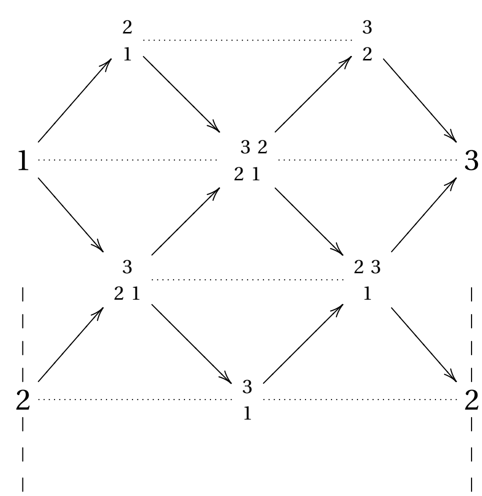
Considere $\mathscr{C} = \mathscr{L}_A$ e Γ uma componente de $\Gamma(mod\ A)$ satisfazendo $\Gamma \cap \mathscr{E}_A \neq \emptyset$. De acordo com o corolário (2.16) e a proposição (2.14), $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ é acíclico e convexo em Γ. No entanto, a condição $(S2)$ não é sempre satisfeita, como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3. *Seja A a álgebra de caminhos associada ao quiver*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

com a relação $\alpha\beta = 0$.

Neste caso, $\Gamma(mod\,A)$ *é dado por*



Note que $\mathscr{E}_A = \left\{P_1 = 1, P_2 = {}^{2}_{1}\right\}$ *e, portanto, não intercepta todas as* τ_A*-órbitas de* $\Gamma(mod\, A)$. *Logo,* $\mathscr{E}_A$ *não é uma seção, embora satisfaça as condições* $(S1)$ *e* $(S3)$.

Este fato motivou a seguinte definição, proposta em [2]:

Definição 2.4. *Seja* Γ *um quiver de translação.*

(i) Um subquiver pleno Σ *de* Γ *é uma seção à esquerda se satisfaz:*

$(SE1)$ Σ *é acíclico.*

$(SE2)$ *Para todo* $x \in \Gamma_0$ *tal que existem* $y \in \Sigma_0$ *e um caminho* $x \rightsquigarrow y$, *há um único* $n \geq 0$ *de modo que* $\tau^{-n}x \in \Sigma_0$.

$(SE3)$ Σ *é convexo.*

(ii) Um subquiver pleno Σ *de* Γ *é uma seção à direita se satisfaz:*

$(SD1)$ Σ *é acíclico.*

$(SD2)$ *Para todo* $x \in \Gamma_0$ *tal que existem* $y \in \Sigma_0$ *e um caminho* $y \rightsquigarrow x$, *há um único* $n \geq 0$ *de modo que* $\tau^{n}x \in \Sigma_0$.

$(SD3)$ Σ *é convexo.*

Exemplo 2.4. *(i) O conjunto* $\mathscr{E}_A$ *apresentado no exemplo anterior, e o morfismo* $P_1 \to P_2$ *definem uma seção à esquerda em* $\Gamma(mod\ A)$, *pois, como observado, satisfaz as condições* $(SE1)$ *e* $(SE3)$, *e* $(SE2)$, *já que não há nenhum caminho de um módulo em* $\Gamma(mod\, A)$ *que não pertence a* $\mathscr{E}_A$ *para módulos em* $\mathscr{E}_A$.

(ii) Ainda em relação ao exemplo anterior, pode-se concluir analogamente que os módulos I_2 *e* I_3, *e o morfismo* $I_2 \to I_3$ *definem uma seção à direita em* $\Gamma(mod\, A)$.

Como pudemos verificar anteriormente, se Γ é uma componente do *quiver* de Auslander-Reiten da categoria de módulos de uma álgebra A, tal que $\Gamma \cap \mathscr{E}_A \neq \emptyset$, então $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ nem sempre forma uma seção em Γ. No entanto, $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ é uma seção à esquerda, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.20. *Seja* A *uma álgebra de artin.*

(i) Se Γ *é uma componente de* $\Gamma(mod\, A)$ *que contém um módulo Ext-injetivo em add* $\mathscr{L}_A$*, então* $\Gamma \cap \mathscr{E}$ *é uma seção à esquerda em* Γ*.*

(ii) Se Γ *é uma componente de* $\Gamma(mod\, A)$ *que contém um módulo Ext-projetivo em add* $\mathscr{R}_A$*, então* $\Gamma \cap \mathscr{P}_A$ *é uma seção à direita em* Γ*.*

Demonstração: Vamos demonstrar (a) somente. Seja Γ uma componente de $\Gamma(mod\, A)$, com $\Gamma \cap \mathscr{E}_A \neq \emptyset$, então $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ satisfaz as condições $(SE1)$ e $(SE3)$, como mencionado acima. A seguir, vamos mostrar que $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ cumpre também $(SE2)$. Considere $M \in \Gamma$ tal que existe um caminho $M \rightsquigarrow Y$, com $Y \in \Gamma \cap \mathscr{E}_A$. Neste caso, $M \in \Gamma \cap \mathscr{L}_A$ e, portanto, há um único $m \geq 0$ tal que $\tau_A^{-m} M \in \mathscr{E}_A$, devido ao item (a) do teorema (2.18), como desejado.

Como consequência, temos que $\Gamma \cap \mathscr{E}_A$ define uma seção à esquerda em Γ. □

Proposição 2.21. *Seja* Σ *uma seção à esquerda em um quiver de translação* Γ*. Então,*

(a) Σ *intercepta cada* τ*-órbita de* Γ *no máximo uma vez.*

(b) *Todo caminho entre dois vértices de* Σ *é seccional.*

(c) *Se* $x \in \Gamma_0$ *é injetivo e antecede* Σ*, então* $x \in \Sigma_0$*.*

(d) *Se* $x \to y$, $x \in \Sigma_0$ *e* y *é não projetivo, então* $y \in \Sigma_0$ *ou* $\tau y \in \Sigma_0$*.*

(e) *Se* $x \to y$, $y \in \Sigma_0$*, então* $x \in \Sigma_0$ *ou* $\tau^{-} x \in \Sigma_0$*.*

(f) *Se* $x \in \Sigma_0$ *e* y *antecede* Σ*, então se há um caminho de* x *para* y*, este é seccional e* $y \in \Sigma_0$*.*

Demonstração: (a) e (b) são obtidas devido à unicidade de $n \geq 0$ em $(SE2)$.

(c) Sejam $x \in \Gamma_0$ injetivo e $y \in \Sigma_0$ tais que existe um caminho $x \rightsquigarrow y$. De acordo com $(S2)$, há um único $n \geq 0$ de modo que $\tau^{-n} x \in \Sigma_0$. Sendo x injetivo, obtemos que $n = 0$, donde $x \in \Sigma_0$.

(d) Sendo Γ um *quiver* de translação e y não projetivo, existe um morfismo $\tau y \to x$. Devido à condição $(SE2)$, há um único $n \geq 0$ tal que $\tau^{-n}(\tau y) \in \Sigma_0$, ou ainda, $\tau^{1-n} y \in \Sigma_0$.

Se $n > 1$, temos o caminho $x \to y \rightsquigarrow \tau^{1-n} y$. Uma vez que Σ é convexo em Γ, segue que $y \in \Sigma_0$, o que contradiz $(SE2)$.

Dessa forma, $n = 0$ ou $n = 1$ e, portanto, $\tau y \in \Sigma_0$ ou $y \in \Sigma_0$.

(e) Se x é injetivo, então $x \in \Sigma_0$, devido a (c). Assuma que x não é injetivo. Neste caso, existe um morfismo de y para $\tau^- x$. Como $\tau^- x$ não é projetivo e $y \in \Sigma_0$, segue de (d) que $\tau^- x \in \Sigma_0$ ou $x \in \Sigma_0$.

(f) Seja $z \in \Sigma_0$ tal que existe um caminho de y para z. Por $(SE2)$, há um único $n \geq 0$ satisfazendo $\tau^{-n} y \in \Sigma_0$. O caminho $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow \tau^{-n} y$ e a convexidade de Σ em Γ implicam em $y \in \Sigma_0$. Logo, $n = 0$. A seccionalidade de $x \rightsquigarrow y$ segue então de (b). □

Dualmente, obtemos

Proposição 2.22. *Seja Σ uma seção à direita em um quiver de translação Γ. Então,*

(a) *Σ intercepta cada τ_A-órbita de Γ no máximo uma vez.*

(b) *Todo caminho entre dois vértices de Σ é seccional.*

(c) *Se $x \in \Gamma_0$ é projetivo e sucede Σ, então $x \in \Sigma_0$.*

(d) *Se $x \to y$, $y \in \Sigma_0$ e x não é injetivo, então $x \in \Sigma_0$ ou $\tau^- x \in \Sigma_0$.*

(e) *Se $x \to y$, $x \in \Sigma_0$, então $y \in \Sigma_0$ ou $\tau x \in \Sigma_0$.*

(f) *Se $x \in \Sigma_0$ e y sucede Σ, então todo caminho de y para x é seccional e $y \in \Sigma_0$.*

□

A seguinte proposição nos dá condições necessárias e suficientes para que uma seção à esquerda seja também uma seção.

Proposição 2.23. *Seja Σ uma seção à esquerda em Γ. São equivalentes:*

(a) *Σ é uma seção.*

(b) *Todo projetivo em Γ é antecessor de Σ.*

(c) *Para todo projetivo $p \in \Gamma_0$ tal que existem $x \in \Sigma_0$ e um caminho $x \rightsquigarrow p$, temos que $p \in \Sigma_0$.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $p \in \Gamma_0$ projetivo. Como Σ é uma seção, devido à condição $(S2)$, existe $n \leq 0$ tal que $\tau^n p \in \Sigma_0$. Dessa forma, há um caminho de p para Σ em Γ, como desejado.

$(b) \Rightarrow (c)$ Seja $p \in \Gamma_0$ projetivo tal que existe um caminho $x \rightsquigarrow p$, com $x \in \Sigma_0$. Por hipótese, há um caminho $p \rightsquigarrow y$, para algum $y \in \Sigma_0$. Uma vez que Σ é seção à esquerda, Σ é, em particular, convexa em Γ e, portanto, $p \in \Sigma_0$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Basta-nos verificar que Σ cumpre a condição $(S2)$. Vamos mostrar que se $x \in \Sigma_0$ e $z \in \Gamma_0$ pertencem à τ-órbitas vizinhas, então Σ intercepta a τ-órbita de z. Considere $m \in \mathbb{Z}$ e y na τ-órbita de z tais que existe uma das flechas $\tau^m x \to y$ ou $y \to \tau^m x$, com $|m|$ menor possível. Suponha, inicialmente, que $m > 0$. Se existe uma flecha $\tau^m x \to y$, também deve existir $y \to \tau^{m-1} x$, o que contradiz a minimalidade de $|m|$. Agora, se existe uma flecha $y \to \tau^m x$, então há um caminho $y \to \tau^m x \rightsquigarrow x$. De acordo com a condição $(SE2)$, $\tau^k x \in \Sigma_0$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, donde Σ corta a τ-órbita de z.

Assuma que $m < 0$. Se existe uma flecha $y \to \tau^m x$, então há também uma flecha $\tau^{m+1} x \to y$, novamente contradizendo a minimalidade de $|m|$. Suponha que existe $\tau^m x \to y$. Se y não é projetivo, há uma flecha $\tau y \to \tau^m x$ e, portanto, uma flecha $\tau^{m+1} x \to \tau y$, que contradiz a minimalidade de $|m|$. Por outro lado, se y é projetivo, então $y \in \Sigma_0$, pois $x \rightsquigarrow \tau^m x \to y$ é um caminho com $x \in \Sigma_0$. Como Σ é convexo em Γ, obtemos que $\tau^m x \in \Sigma_0$ e, sendo $x \in \Gamma_0$ antecessor de Σ, segue de $(SE2)$ que existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$, donde m é necessariamente nulo, o que é uma contradição.

Por fim, assuma que $m = 0$. Se existe flecha $y \to x$, então $y \in \Sigma_0$ ou $\tau^- y \in \Sigma_0$, devido ao item (e) do lema (2.21). Se a flecha é da forma $x \to y$ e y não é projetivo, então existe $\tau y \to x$ e, portanto, $\tau y \in \Sigma_0$ ou $y \in \Sigma_0$. Agora, se y é projetivo, $y \in \Sigma_0$, por hipótese.

Assim, em todos os casos possíveis, concluímos que Σ intercepta a τ-órbita de z. Por meio de indução, obtemos o resultado desejado. $\square$

Um resultado dual ao anterior podem ser enunciado para as seções à direita.

Capítulo 3

Ext-projetivos na parte direita da categoria de módulos de Álgebras Laura

Neste capítulo, buscamos uma caracterização para as classes de álgebras hereditárias, quasi-inclinadas, fracamente *shod* e laura estritas em relação aos Ext-projetivos na parte direita de suas categorias de módulos (ou, dualmente, Ext-injetivos na parte esquerda).

Iniciamos a discussão com as álgebras hereditárias.

3.1 Álgebras Hereditárias

Recordamos do capítulo 1 que uma álgebra A é hereditária se todo submódulo de um A-módulo projetivo é também projetivo. Dessa forma, cada módulo tem dimensão projetiva no máximo 1 e, portanto, a dimensão global de A não excede 1. A partir dessa informação, demonstramos o resultado dessa seção:

Teorema 3.1. *Seja A uma álgebra de artin. Então, são equivalentes:*

(a) *A é hereditária.*

(b) *O conjunto dos A-módulos indecomponíveis Ext-projetivos em add $\mathscr{R}_A$ coincide com o conjunto dos A-módulos indecomponíveis projetivos.*

(b') *O conjunto A-módulos indecomponíveis Ext-injetivos em add $\mathscr{L}_A$ coincide com o conjunto dos A-módulos indecomponíveis injetivos.*

(c) *Se existe Ext-projetivo indecomponível em add $\mathscr{R}_A$, então é projetivo.*

(c') *Se existe Ext-injetivo indecomponível em add $\mathscr{L}_A$, então é injetivo.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que A é hereditária. Então, todo A-módulo tem dimensão injetiva não excedendo 1 e, portanto, $ind\, A = \mathscr{R}_A$. Em particular, cada projetivo indecomponível pertence a $\mathscr{R}_A$, ou seja, é Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$.

Por outro lado, sendo M um módulo indecomponível Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, obtemos que $Ext^1_A(M,\_)|_{add\, \mathscr{R}_A} = 0$. Neste caso, $Ext^1_A(M,\_)|_{mod\, A} = 0$, o que nos permite concluir que M é projetivo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $\mathscr{P}_A$ o conjunto formado pelos módulos indecomponíveis Ext-projetivos em $add\, \mathscr{R}_A$, e assuma que $\mathscr{P}_A$ é igual ao conjunto de todos os A-módulos indecomponíveis projetivos. Considere M um A-módulo e P_M sua cobertura projetiva. Então, P_M é Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, pois pode ser escrito como soma direta de A-módulos indecomponíveis projetivos. Em particular, $P_M \in add\, \mathscr{R}_A$. Como $\mathscr{R}_A$ é fechada para sucessores, obtemos que $M \in add\, \mathscr{R}_A$, donde $di\, M \leq 1$. Uma vez que M foi tomado arbitrariamente, segue que $dim\, gl\, A \leq 1$. Consequentemente, A é hereditária.

As implicações $(a) \Rightarrow (b')$ e $(b') \Rightarrow (a)$ podem ser obtidas de maneira dual à feita acima.

$(a) \Rightarrow (c)$ Foi demonstrado em $(a) \Rightarrow (b)$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Seja $\mathscr{P}_A$ como anteriormente. Suponha, por absurdo, que A não é hereditária. Então, a equivalência obtida entre os itens (a) e (b) nos garante a existência de um A-módulo indecomponível projetivo P que não pertence a $\mathscr{R}_A$, ou seja, $P \notin \mathscr{P}_A$. Sendo A uma álgebra conexa, existe um A-módulo projetivo P' tal que há um morfismo não nulo de P para P' ou P' para P. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $P' \in \mathscr{P}_A$. Neste caso, não deve haver morfismo não nulo $P' \to P$, já que $\mathscr{R}_A$ é fechada para sucessores e $P \notin \mathscr{P}_A$. Assim, necessariamente, $Hom_A(P, P') \neq 0$. Se existe um caminho de irredutíveis

$$P = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_t = P' \qquad (*)$$

então f_{t-1} é um monomorfismo, donde X_{t-1} não é injetivo. Dessa forma, há também um morfismo irredutível $P' \to \tau_A^- X_{t-1}$ e, portanto, $\tau_A^- X_{t-1} \in \mathscr{R}_A$. Uma vez que $\tau_A^- X_{t-1}$ não é um módulo projetivo, $\tau_A^- X_{t-1} \notin \mathscr{P}_A$, o que implica em $X_{t-1} \in \mathscr{R}_A$. Quanto ao módulo X_{t-2}, são necessários dois casos:

- Se X_{t-2} não é injetivo, então repetindo o argumento acima, obtemos que $X_{t-2} \in \mathscr{R}_A$.

- Caso contrário, f_{t-2} é um epimorfismo e, portanto, X_{t-1} não é projetivo. Por hipótese,

X_{t-1} não é Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$, o que nos permite concluir que $\tau_A X_{t-1} \in \mathscr{R}_A$. Também, há um morfismo (irredutível) $\tau_A X_{t-1} \to X_{t-2}$, donde $X_{t-2} \in \mathscr{R}_A$.

De maneira análoga, podemos concluir que cada $X_i \in \mathscr{R}_A$, em particular, $P \in \mathscr{R}_A$, o que é uma contradição. Logo, $rad^{\infty}(P, P') \neq 0$, nos garantindo que, para cada $t \geq 0$, existe um caminho em $ind\,A$

$$P \xrightarrow{f} X_t \xrightarrow{f_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{f_{t-2}} \cdots \xrightarrow{f_0} X_0 = P' \ ,$$

com $f \in rad^{\infty}(P, X_t)$ e cada f_i irredutível. Como feito anteriormente, cada $X_i \in \mathscr{R}_A$. Tome $t > rk\ K_0(A)$, então há um menor índice j tal que X_j não é Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$, segundo o lema (2.10)(b). Neste caso, $X_j \to X_{j-1}$ é um monomorfismo, pois $X_{j-1} \in \mathscr{P}_A$, donde podemos construir a sequência exata curta

$$0 \to X_j \to X_{j-1} \to X_{j-1}/X_j \to 0.$$

Portanto, a sequência $Ext^1_A(X_{j-1}, \_) \to Ext^1_A(X_j, \_) \to Ext^2_A(X_{j-1}/X_j, \_)$ também é exata. Como X_{j-1} é projetivo e $Ext^2_A(X_{j-1}/X_j, \_)|_{add\,\mathscr{R}_A} = 0$, obtemos que $X_j \in \mathscr{P}_A$, o que é uma contradição. Consequentemente, A é hereditária.

A equivalência entre (a) e (c') é obtida dualmente.

3.2 Álgebras Quasi-inclinadas

Damos continuidade ao estudo proposto com as álgebras de dimensão global menor ou igual a dois.

Definição 3.1. *Uma álgebra A é dita quasi-inclinada se satisfaz as condições:*

(i) $dim\,gl\,A \leq 2$.

(ii) Para cada A-módulo indecomponível X, $dp_A\,X \leq 1$ *ou* $di_A\,X \leq 1$.

Toda álgebra inclinada é quasi-inclinada. De fato, sendo A inclinada, o lema (1.15) nos garante que $dim\ gl\ A \leq 2$. Resta-nos verificar que A cumpre o item *(ii)* da definição acima. Seja M um A-módulo indecomponível. De acordo com a observação (1.9)*(iii)*, $M \in \mathscr{X}(T)$ ou $M \in \mathscr{Y}(T)$. Se esse último ocorre, então existe um módulo $M' \in \mathscr{T}(T)$

tal que $Hom(T,M') \simeq M$, conforme o teorema (1.13). Neste caso, $dp_A\ M \leq dp\ \ M' \leq 1$. Agora, se $M \in \mathscr{X}(T)$, então $\tau_A^{-}X \in \mathscr{X}(T)$, já que $\mathscr{X}(T)$ é fechada para sucessores. Logo, $Hom_A(\tau_A^{-}M, A) = 0$, uma vez que $A_A \in \mathscr{Y}(T)$ e, portanto, $di_A\ M \leq 1$.

Observação 3.1. Em [20], Happel, Reiten e SmalØ demonstraram que se A é uma álgebra quasi-inclinada, então $\mathscr{L}_A$ contém todos os módulos projetivos e $\mathscr{R}_A$ todos os injetivos.

3.2.1 Algumas propriedades das Fatias Completas

De acordo com a definição apresentada no capítulo 1, um conjunto finito Σ de A-módulos indecomponíveis forma uma fatia completa em $mod\,A$ se

- é convexo em $ind\,A$;
- a soma direta de seus módulos resulta em um módulo sincero;
- intercepta exatamente uma vez cada τ_A-órbita da componente de $\Gamma(mod\,A)$ que o contém.

Como demonstrado, por exemplo, em [5](p. 85), o número de somandos diretos indecomponíveis de Σ é igual ao posto do grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A.

Destacamos no exemplo (1.8) que, dada uma álgebra inclinada A, pode não haver somente uma fatia completa em sua categoria de módulos. No entanto, cada uma delas está contida na interseção $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$, como mostra o lema a seguir.

Teorema 3.2. *Seja A uma álgebra inclinada. Se Σ é uma fatia completa em $mod\,A$, então $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$.*

Demonstração: Seja Σ uma fatia completa em $mod\,A$. De acordo com o teorema (1.19)(b), existem uma álgebra hereditária H e um H-módulo inclinante T tais que $\Sigma = ind\,(Hom_H(T, DH))$. Vamos mostrar, inicialmente, que $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_A$. Segundo o item ($a$) do teorema (1.19), todo antecessor de Σ pertence a $\mathscr{Y}(T)$. O resultado é então obtido, uma vez que todo módulo em $\mathscr{Y}(T)$ tem dimensão projetiva não excedendo 1 (observação (1.9)).

Resta-nos mostrar que $\Sigma \subseteq \mathscr{R}_A$. Novamente através do item (a) do teorema (1.19), podemos concluir que todo sucessor próprio de Σ está em $\mathscr{X}(T)$. Afirmamos que $\mathscr{X}(T) \subseteq \mathscr{R}_A$. De fato, dado $M \in \mathscr{X}(T)$, o item *(ii)* da observação (1.9) nos garante que todo A-módulo projetivo pertence a $\mathscr{Y}(T)$. Como não existe morfismo não nulo de $\mathscr{X}(T)$ para

$\mathscr{Y}(T)$, obtemos que $Hom_A(\tau_A^- M, A) = 0$. Portanto, $di_A\, M \leq 1$, conforme o lema (1.4), finalizando a demonstração da afirmação. Logo, todo sucessor próprio de Σ pertence a $\mathscr{R}_A$. Por fim, considere $X \in \Sigma$. Então, $\tau_A^- X \notin \Sigma$, já que este intercepta cada τ_A-órbita uma única vez. Neste caso, $\tau_A^- X \in \mathscr{X}(T)$, donde $di_A\, X \leq 1$, como anteriormente. Dessa forma, $\Sigma \subseteq \mathscr{R}_A$, como desejado.

□

Lema 3.3. *Sejam A uma álgebra inclinada e Σ uma fatia completa em mod A.*

(a) *Se não existem módulos projetivos em Σ, então $\tau_A \Sigma$ é uma fatia completa em mod A.*

(b) *Se não existem módulos injetivos em Σ, então $\tau_A^- \Sigma$ é uma fatia completa em mod A.*

Demonstração: Vamos demonstrar (a). Suponha que Σ não admite módulos projetivos. Então,

- $\bigoplus_{M \in \tau_A \Sigma} M$ é sincero: seja P um A-módulo indecomponível projetivo. Sendo $\bigoplus_{M \in \tau_A \Sigma} \tau_A^- M$ sincero, existe $\tau_A^- N \in \Sigma$ satisfazendo $Hom_A(P, \tau_A^- N) \neq 0$. Considere $\tau_A^- N_0 \in \Sigma$ tal que $Hom_A(P, \tau_A^- N_0) \neq 0$ e todos seus antecessores próprios em Σ não admitem morfismo não nulo com início em P (este módulo existe, pois Σ não tem ciclos). Uma vez que $\tau_A^- N_0$ não é projetivo, existe a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \to N_0 \to E_1 \oplus \cdots \oplus E_t \to \tau_A^- N_0 \to 0.$$

  Agora, como $P \to \tau_A^- N_0$ não é um epimorfismo que cinde, há um índice i, com $1 \leq i \leq t$, tal que $Hom_A(P, E_i) \neq 0$. De acordo com a escolha de $\tau_A^- N_0$, $E_i \notin \Sigma$ e, portanto, $\tau_A^- E_i \in \Sigma$. Logo, $E_i \in \tau_A \Sigma$, donde $Hom_A(P, \tau_A \Sigma) \neq 0$.

Também, $\tau_A \Sigma$ satisfaz a condição:

- ($F2$): seja $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} M_t$ um caminho em *ind* A, com $M_0, M_t \in \tau_A \Sigma$. Assuma, inicialmente, que nenhum f_i se fatora através de um A-módulo injetivo. Devido ao lema (1.5), para cada $i \in \{1, \cdots, t\}$, obtemos que $\underline{Hom}_A(\tau_A^- M_{i-1}, \tau_A^- M_i) \simeq \overline{Hom}_A(M_{i-1}, M_i)$ e, portanto, construímos o caminho

$$\tau_A^- M_0 \longrightarrow \tau_A^- M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau_A^- M_t \ ,$$

  em que $\tau_A^- M_0, \tau_A^- M_t \in \Sigma$. Sendo Σ um conjunto convexo em *ind* A, para todo i, temos que $\tau_A^- M_i \in \Sigma$, donde cada M_i pertence a $\tau_A \Sigma$.

Em seguida, vamos mostrar que, de fato, nenhum f_i se fatora por um injetivo. Suponha que este não é o caso, e considere j o maior índice tal que existem morfismos $g : M_j \to I$ e $h : I \to M_{j+1}$, com I injetivo, satisfazendo $f_j = hg$. Então, $\tau_A^- M_{j+1}$ é antecessor de $\tau_A^- M_t \in \Sigma$, como anteriormente. Em particular, $\tau_A^- M_{j+1} \in \mathscr{L}_A$. Agora, como $Hom_A(I, M_{j+1}) \neq 0$, segue do lema (1.4) que $dp_A\ \tau_A^- M_{j+1} > 1$, o que não pode ocorrer. Consequentemente, $\tau_A \Sigma$ é convexo em $ind\, A$.

- $(F3)$: seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência de Auslander-Reiten tal que $L, N \in \tau_A \Sigma$. Em particular, $\tau_A^- L, \tau_A^- N \in \Sigma$. Uma vez que $\tau_A^- L \simeq N \in \Sigma$, obtemos uma contradição, pois Σ intercepta uma única vez cada τ_A-órbita da componente que o contém. Logo, no máximo L ou N pertence a $\tau_A \Sigma$.

- $(F4)$: seja $0 \to L \to \tau_A M \oplus U \to \tau_A^- L \to 0$ uma sequência de Auslander-Reiten, com $\tau_A M \in \tau_A \Sigma$. Suponha, inicialmente, que $\tau_A^- L$ não é um módulo injetivo. Como existe um morfismo irredutível $\tau_A M \to \tau_A^- L$, há um morfismo $\tau_A^- L \to M$, igualmente irredutível (corolário (1.7)). Então, devido ao teorema (1.2), temos a sequência de Auslander-Reiten
$$0 \to \tau_A^- L \to M \oplus V \to \tau_A^{-2} L \to 0$$
para algum A-módulo V. Sendo $M \in \Sigma$ e Σ uma fatia completa em $mod\, A$, podemos garantir que $\tau_A^- L \in \Sigma$ ou $\tau_A^{-2} L \in \Sigma$. No primeiro caso, $L \in \tau_A \Sigma$ e, no segundo, $\tau_A^- L \in \Sigma$, obtendo o resultado desejado.

  Agora, suponha que $\tau_A^- L$ é injetivo. De acordo com o teorema (1.21), Σ é uma seção fiel, já que forma uma fatia completa. Assim, uma vez que há um morfismo $\tau_A^- L \to M$, segue do lema (1.17) que $\tau_A^- L \in \Sigma$ e, portanto, $L \in \tau_A \Sigma$.

□

Definição 3.2. *Seja A uma álgebra inclinada. Uma componente Γ de $\Gamma(mod\, A)$ é uma componente de conexão se contém uma fatia completa em $mod\, A$.*

Observação 3.2. É possível mostrar que o *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra inclinada contém, no máximo, duas componentes de conexão.

Apresentamos no teorema a seguir condições suficientes sobre uma álgebra A para que existam módulos Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$ e Ext-injetivo em $add\, \mathscr{L}_A$.

Teorema 3.4. (a) *Seja A uma álgebra inclinada tal que uma componente de conexão de $\Gamma(mod\, A)$ contém um módulo projetivo. Então, há um projetivo em $\mathscr{R}_A$ e, em particular, um Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$.*

(b) *Seja A uma álgebra inclinada tal que uma componente de conexão de $\Gamma(mod\, A)$ contém um módulo injetivo. Então, há um injetivo em $\mathscr{L}_A$ e, em particular, um Ext-injetivo em $add\, \mathscr{L}_A$.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas o item (a). Seja Γ uma componente de conexão de $\Gamma(mod\, A)$ que contém um módulo projetivo, e considere $\Sigma \subseteq \Gamma$ uma fatia completa em $mod\, A$. Podemos assumir que Σ contém um projetivo P'. De fato, se este não for o caso, tome $\tau_A \Sigma$, que também forma uma fatia completa contida em Γ, conforme o lema (3.3). Se não existir projetivo em $\tau_A \Sigma$, basta prosseguir com este argumento por um número finito de vezes, já que Γ admite módulo projetivo e cada uma das fatias completas construídas intercepta todas as suas τ-órbitas.

Além disso, pelo lema (3.2), $\Sigma \subseteq \mathscr{R}_A$. Em particular, $P' \in \mathscr{R}_A$, donde existe Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$. □

Tendo em vista o teorema acima, é natural perguntar-nos se uma álgebra A que admite Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$ é inclinada. A seguir, mostramos que a resposta é positiva quando supomos A quasi-inclinada conexa. Uma demonstração alternativa pode ser encontrada em [20].

Teorema 3.5. *Seja A uma álgebra quasi-inclinada.*

(a) *Se $\mathscr{R}_A$ admite um A-módulo X Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, então existe uma fatia completa em $mod\, A$ formada pelos módulos indecomponíveis Ext-projetivos em $add\, \mathscr{R}_A$ e, em particular, A é inclinada.*

(b) *Se $\mathscr{L}_A$ admite um A-módulo X Ext-injetivo em $add\, \mathscr{L}_A$, então existe uma fatia completa em $mod\, A$ formada pelos módulos indecomponíveis Ext-injetivos em $add\, \mathscr{L}_A$ e, em particular, A é inclinada.*

Demonstração: Vamos apenas demonstrar (a). Assuma que $\mathscr{R}_A$ contém um módulo X tal que $Ext^1_A(X, \_)\mid_{add\, \mathscr{R}_A} = 0$. Considere Z a soma direta de uma cópia de cada A-módulo Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, indecomponível. Em seguida, vamos mostrar que Z forma uma fatia completa. Para isso, é necessário verificarmos as condições abaixo:

$(F1)$ Z é sincero.

$(F2)$ Se $X,\ Y \in ind\, A \cap add\, Z$ e existe um caminho $X \rightsquigarrow M \rightsquigarrow Y$, com $M \in ind\, A$, então $M \in add\, Z$.

$(F3)$ Se M é não projetivo, então M ou τM não pertence a $add\, Z$.

$(F4)$ Se $X \in ind\, A$, $Y \in add\, Z$ e $f : X \to Y$ é irredutível, então $X \in add\, Z$ ou X não é injetivo e $\tau^{-} X \in add\, Z$.

$(F4)$ Sejam X, Y e f como descritos acima, e Γ a componente de $\Gamma(mod\, A)$ que contém Y. De acordo com a proposição (2.20), $\Gamma \cap \mathscr{P}_A$ é uma seção à direita em Γ. Segundo o item (d) da proposição (2.22), se X não é injetivo, então $\tau_A^{-} X \in \Gamma \cap \mathscr{P}_A$, ou seja, $\tau_A^{-} X \in add\, Z$. Por outro lado, suponha que X é injetivo, em particular, $X \in \mathscr{R}_A$, devido à observação (3.1). Sendo f um morfismo irredutível, f é um monomorfismo ou f é um epimorfismo. Observe que o primeiro caso não ocorre, pois do contrário, f cindiria, já que X é injetivo. A partir de um argumento semelhante, obtemos também que Y não é projetivo. Então, há um morfismo irredutível $\tau_A Y \to X$ e $\tau_A Y \notin \mathscr{R}_A$. Se X é projetivo, então $X \in add\, Z$, como desejado. Caso contrário, existe um morfismo irredutível $\tau_A X \to \tau_A Y$ e, portanto, $\tau_A X \notin \mathscr{R}_A$, uma vez que $\tau_A Y \notin \mathscr{R}_A$. Logo, $X \in add\, Z$.

$(F3)$ Seja M não projetivo e suponha que M, $\tau M \in add\, Z$. Então, $Ext_A^1(M, \tau M) = 0$, pois M é Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$ e τM pertence a $\mathscr{R}_A$. Mas isso é uma contradição e, portanto, no máximo um desses módulos pertence a $\mathscr{R}_A$.

$(F2)$ Para mostrarmos essa afirmação, basta verificarmos que se $Y \in add\, Z$, $X \in \mathscr{R}_A$ e $X \rightsquigarrow Y$ é um caminho, então $X \in add\, Z$, pois $X,\ Y \in add\, Z \cap ind\, A$ e $X \rightsquigarrow M \rightsquigarrow Y$, com $M \in ind\, A$, implicam em $M \in \mathscr{R}_A$, já que $X \in \mathscr{R}_A$ e $Y \in add\, Z$.

Considere X, Y e $X \rightsquigarrow Y$ como acima. De acordo com o dual da proposição (2.14), este caminho pode ser refinado a um caminho

$$X = Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{t-2}} Y_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} Y_t = Y\ ,$$

de morfismos irredutíveis. Uma vez que $X \in \mathscr{R}_A$, cada Y_i pertence a $\mathscr{R}_A$, para $0 < i \le t$. Devido à condição $(F4)$, sendo f_{t-1} irredutível, obtemos que $Y_{t-1} \in add\, Z$, ou Y_{t-1} é não injetivo e $\tau^{-} Y_{t-1} \in add\, Z$. Este último não pode acontecer, pois caso contrário, $Y_{t-1} \notin \mathscr{R}_A$, o que é uma contradição. Logo, $Y_{t-1} \in add\, Z$. Novamente através do item $(F4)$, podemos concluir que $Y_i \in add\, Z$, para todo $0 < i \le t-2$ e, em particular, $X = Y_1 \in add\, Z$.

$(F1)$ Sendo Z um módulo Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$, seu transladado $\tau_A Z$ deve pertencer a $add\,\mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$. Neste caso, para cada A-módulo injetivo I, obtemos que $Hom_A(I, \tau_A Z) = 0$, pois $\mathscr{R}_A$ contém todos os injetivos indecomponíveis. Portanto, $dp_A\, Z \leq 1$ (devido ao lema (1.4)), o que nos garante que Z é inclinante parcial. Então, há uma sequência exata em $mod\, A$

$$0 \to A \to Z' \to Z'' \to 0,$$

com $Z'' \in add\, Z$, tal que $Z' \oplus Z''$ é um módulo inclinante. É também possível mostrar que cada somando direto indecomponível de Z' é projetivo ou tem um morfismo não nulo para um somando indecomponível de Z (para mais detalhes, veja [23]). Assim, todo somando direto indecomponível de Z' que pertence a $\mathscr{R}_A$ é Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$, pois, de acordo com o item $(F2)$, a existência de um caminho $M \rightsquigarrow N$, com $N \in add\, Z$ e $M \in \mathscr{R}_A$, implica em $M \in add\, Z$. Em seguida, vamos mostrar que nenhum somando direto indecomponível de Z' pertence a $\mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$. Suponha, por absurdo, que $X \in \mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$ é somando de Z'.

- Se X não é projetivo, então possui um morfismo não nulo para um módulo indecomponível em $add\, Z$. Como é válido o item $(F4)$, tal morfismo deve se fatorar através de $\tau_A Z$, donde $Hom_A(X, \tau_A Z) \neq 0$ (veja, por exemplo, [5](p. 90)). Observe ainda que $Hom_A(X, \tau_A Z) = \overline{Hom}_A(X, \tau_A Z)$, já que $Hom_A(I, \tau_A Z) = 0$. Logo, $0 \neq D Hom_A(X, \tau_A Z) = D\overline{Hom}_A(X, \tau_A Z) \simeq Ext^1_A(Z, X)$, uma contradição.

- Assuma que X é projetivo e $Hom_A(X, Z) = 0$. Observe que $Z' \oplus Z'' = P \oplus Z'''$, em que P é a soma direta dos somandos projetivos de Z' que não estão em $\mathscr{R}_A$ e Z''' é o restante. Então, $P \in add\,(\mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A)$ e $Z''' \in add\, Z$. Também,

$$End(P \oplus Z''') \simeq \begin{pmatrix} End\, P & Hom_A(Z''', P) \\ Hom_A(P, Z''') & End\, Z''' \end{pmatrix},$$

  que corresponde a uma álgebra conexa, pois $Z' \oplus Z''$ é inclinante. Uma vez que $P \notin add\,\mathscr{R}_A$, obtemos que $Hom_A(Z''', P) = 0$ e, portanto, $Hom_A(P, Z''') \neq 0$. Como feito anteriormente, $f \in Hom_A(P, Z''')$ se fatora através de $add\,\tau Z$, ou seja, $Hom_A(P, \tau Z) \neq 0$. Por fim, sendo $Hom_A(P, \tau Z) \simeq \overline{Hom}_A(P, \tau Z) \simeq Ext^1_A(Z, P)$, temos uma contradição, pois $Z' \oplus Z''$ é inclinante.

Dessa forma, $Z' \oplus Z''$ é um módulo sincero que pertence a $add\, Z$, donde Z é sincero.

□

Corolário 3.6. *Se A é uma álgebra quasi-inclinada estrita, então não existe módulo Ext-projetivo em add $\mathscr{R}_A$, nem Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$.*

□

Observação 3.3. Seja A uma álgebra quasi-inclinada estrita. Embora $\mathscr{R}_A$ seja não vazio (pois contém todos os A-módulos injetivos, conforme observação feita acima), o conjunto dos módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$ é vazio.

Ainda como consequência do teorema (3.5), temos o seguinte resultado, que também pode ser encontrado em [20] com uma demonstração alternativa.

Corolário 3.7. *Se A é uma álgebra quasi-inclinada, são equivalentes:*

(i) Existe um A-módulo Ext-projetivo em add $\mathscr{R}_A$.

(ii) $\mathscr{R}_A$ contém um A-módulo projetivo.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja Σ o conjunto dos A-módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$, indecomponíveis. Então, devido ao teorema anterior, Σ forma uma fatia completa em $mod\,A$. Suponha, por absurdo, que $\mathscr{R}_A$ não contém projetivos. Neste caso, $\tau_A\Sigma$ é também uma fatia completa, conforme o lema (3.3). Além disso, $\tau_A\Sigma \in \mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$, o que contradiz o teorema (3.2). Consequentemente, existe projetivo em $\mathscr{R}_A$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ É óbvio. □

Dualmente, obtemos:

Corolário 3.8. *Se A é uma álgebra quasi-inclinada, são equivalentes:*

(i) Existe um A-módulo Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$.

(ii) $\mathscr{L}_A$ contém um A-módulo injetivo.

De acordo com o teorema e o corolário acima, se uma álgebra quasi-inclinada admitir um projetivo em $\mathscr{R}_A$, então é inclinada. Além disso, a componente Γ de $\Gamma(mod\ A)$ que contém esse projetivo é de conexão. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado, que caracteriza completamente as álgebras quasi-inclinadas em relação à existência de Ext-projetivos na parte direita de suas categorias de módulos (ou, dualmente, Ext-injetivos na parte esquerda).

Teorema 3.9. *Para uma álgebra A quasi-inclinada, são equivalentes:*

(i) *Existe um A-módulo Ext-projetivo em add $\mathscr{R}_A$ (resp. Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$).*

(ii) *A é inclinada e existe módulo projetivo (resp. injetivo) em uma componente de conexão.*

Demonstração: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Segue do teorema (3.5) e do corolário (3.7).

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Segue diretamente do teorema (3.4). □

Com base na discussão acima, podemos claramente enunciar para as álgebras inclinadas o seguinte resultado:

Corolário 3.10. *Seja A uma álgebra de artin.*

(a) *A é inclinada tal que existe um módulo projetivo em uma componente de conexão Γ de $\Gamma(mod\, A)$ se, e somente se, existe uma fatia completa em mod A, $\Sigma \subseteq \Gamma$, formada pelos módulos indecomponíveis Ext-projetivos em add $\mathscr{R}_A$.*

(b) *A é inclinada tal que existe um módulo injetivo em uma componente de conexão Γ de $\Gamma(mod\, A)$ se, e somente se, existe uma fatia completa em mod A, $\Sigma \subseteq \Gamma$, formada pelos módulos indecomponíveis Ext-injetivos em add $\mathscr{L}_A$.*

Demonstração: Segue dos teoremas anterior e (3.5). □

3.2.2 Consequências e outros resultados

Dada uma álgebra A arbitrária, uma componente Γ de $\Gamma(mod\, A)$ é dita:

(i) regular se não contém módulos projetivos e injetivos;

(ii) pós-projetiva se é acíclica e, para cada módulo indecomponível em Γ, existem $t \geq 0$ e um vértice a do *quiver* ordinário de A tais que $M \cong \tau^{-t} P(a)$;

(iii) pré-injetiva se é acíclica e, para cada módulo indecomponível em Γ, existem $t \geq 0$ e um vértice a do *quiver* ordinário de A tais que $M \cong \tau^{t} I(a)$.

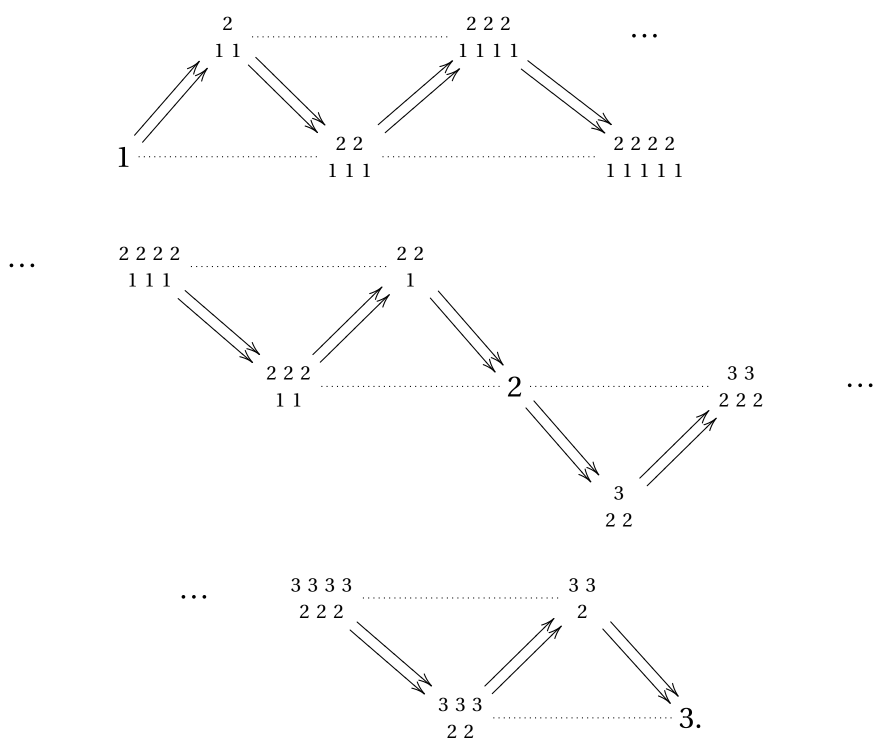
A partir desses conceitos, estabelecemos as seguintes definições:

Definição 3.3. *Um A-módulo indecomponível é regular (ou pós-projetivo, ou pré-injetivo) se pertence a uma componente regular (pós-projetiva, pré-injetiva, respectivamente) de $\Gamma(mod\ A)$, e um A-módulo é regular (ou pós-projetivo, ou pré-injetivo) se corresponde a uma soma direta de A-módulos indecomponíveis regulares (pós-projetivos, pré-injetivos, respectivamente).*

Exemplo 3.1. *Seja A a álgebra de caminhos associada ao quiver*

$$1 \leftleftarrows 2 \leftleftarrows 3\ ,$$

com todas as relações possíveis. Então, as componentes pós-projetiva, regular e pré-injetiva de $\Gamma(mod\ A)$ correspondem, respectivamente, a



Considere H uma álgebra hereditária, T um H-módulo inclinante e $A = End\ T_H$. Recordamos do capítulo 1 que o conjunto dos A-módulos da forma $Hom_H(T, I)$, com I um H-módulo injetivo, define uma fatia completa em $mod\ A$. A componente de conexão de $\Gamma(mod\ A)$ que a contém é chamada de componente de conexão determinada por T, e denotada por $\mathbf{C}_T$.

Proposição 3.11. *Sejam H uma álgebra hereditária de tipo de representação infinito, T_H inclinante, $A = End\ T_H$ e $\mathbf{C}_T$ a componente de conexão de $\Gamma(mod\ A)$ determinada por T.*

Então,

(a) $\mathbf{C}_T$ *contém um módulo projetivo se, e somente se, T tem um somando direto pré-injetivo.*

(b) $\mathbf{C}_T$ *contém um módulo injetivo se, e somente se, T tem um somando direto pós-projetivo.*

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [8](p. 326 e 327). □

Definição 3.4. *Uma álgebra A é concealed se existe um H-módulo T inclinante e pós-projetivo, com H hereditária de tipo de representação infinito, tal que $A = End\ T_H$.*

Observação 3.4. *(i)* Sendo H uma álgebra hereditária de tipo de representação infinito, é possível mostrar que uma álgebra A é da forma $End\ T_H$, para algum T_H inclinante pós-projetivo se, e somente se, $A \simeq End\ T'_H$, para algum T'_H inclinante pré-injetivo.

(ii) Ainda em relação a uma álgebra *concealed*, pode-se mostrar que seu *quiver* de Auslander-Reiten admite duas componentes de conexão, a saber, a pós-projetiva e a pré-injetiva, e reciprocamente (para mais detalhes, veja páginas 332 e 333 de [8]).

(iii) Se T_H é inclinante e regular, obtemos que $A = End\ T_H$ não é *concealed* e, portanto, $\mathbf{C}_T$ é a única componente de conexão em $\Gamma(mod\,A)$. A partir da proposição anterior, pode-se concluir que $\mathbf{C}_T$ é regular. A recíproca também é obtida.

(iv) Com a hipótese adicional de H ser selvagem, é possível mostrar que $\mathbf{C}_T$ corresponde a $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$. (veja páginas 46 e 47 de [20]).

Proposição 3.12. *Seja A uma álgebra concealed. Então, existem módulos Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ e Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$.*

Demonstração: Como observado anteriormente, sendo A *concealed*, existe um módulo inclinante e pré-injetivo T sobre uma álgebra hereditária H de tipo de representação infinito tal que $A \simeq End\ T_H$. Segue da proposição (3.11) que $\mathbf{C}_T$ contém um módulo projetivo e, portanto, a existência de um Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ é assegurada pelo teorema (3.9). Também, existe um H-módulo T' inclinante e pós-projetivo tal que $A = End\ T'_H$. Podemos, então, concluir de maneira análoga à anterior que existe módulo Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$. □

O teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente sobre o H-módulo inclinante T (H hereditária de tipo de representação infinito) para que a álgebra inclinada $A = End\ T_H$ admita módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$ ou Ext-injetivos em $add\,\mathscr{L}_A$.

Teorema 3.13. *Sejam H uma álgebra hereditária de tipo de representação infinito, T_H inclinante e $A = End\ T_H$. Então, T_H é regular se, e somente se, não existem módulos Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ e Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$.*

Demonstração: Seja T um H-módulo regular. Devido à observação (3.4), $\mathbf{C}_T$ é a única componente de conexão de $\Gamma(mod\ A)$ e, além disso, é regular. Então, não existe módulo projetivo, nem injetivo em $\mathbf{C}_T$. O resultado então segue pelo teorema (3.9).

Reciprocamente, assuma que não existem módulos Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ e Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$. Suponha que T_H não é regular, então $\mathbf{C}_T$ contém um módulo projetivo ou um injetivo, segundo o item *(iii)* da observação acima. Assim, o teorema (3.9) nos garante que, no primeiro caso, existe módulo Ext-projetivo em $add\,\mathscr{R}_A$ e, no segundo, existe Ext-injetivo em $add\,\mathscr{L}_A$, o que é uma contradição. Consequentemente, T_H é regular, como desejado. □

3.3 Álgebras Laura Estritas

Nesta seção, com base no artigo [6], apresentamos alguns resultados que nos permitem descrever o *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra laura estrita A. Em resumo, $\Gamma(mod\,A)$ consiste de uma componente não semirregular, fiel e quasi-dirigida, e de componentes de um produto direto de álgebras inclinadas. A partir desses resultados, analisamos a existência de A-módulos Ext-injetivos em $add\,\mathscr{L}_A$ (ou, dualmente, Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$).

Recordamos que uma subcategoria $\mathscr{C}$ de $ind\ A$ é cofinita se no máximo um número finito de A-módulos indecomponíveis não pertence a $\mathscr{C}$.

Definição 3.5. *Uma álgebra A é laura se a união $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ é cofinita em $ind\ A$.*

Exemplo 3.2. (a) *Toda álgebra quasi-inclinada é laura. Uma demonstração para essa afirmação pode ser encontrada em [18](p. 5).*

(*b*) *Seja A a K-álgebra de caminhos associada ao quiver*

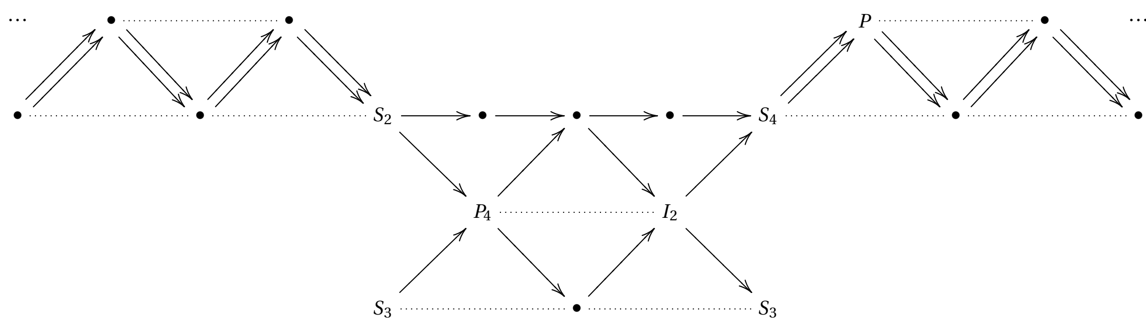
$$
\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dl] & & \\
1 & 2 \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & & 4 \arrow[ul] \arrow[ll] & 5 \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}
$$

com todas as possíveis relações. Então, o quiver de Auslander-Reiten de A consiste:

(i) das componente pós-projetiva e família de tubos homogêneos correspondentes à álgebra de Kronecker dada pelo subquiver pleno que contém os vértices 1 e 2;

(ii) das componentes pré-injetiva e família de tubos homogêneos correspondentes à álgebra de Kronecker dada pelo subquiver pleno que contém os vértices 4 e 5;

(iii) da seguinte componente não semirregular:



onde são identificadas as duas cópias de S_3.

As componentes descritas em (i) estão contidas em $\mathscr{L}_A$, pois não contêm injetivos e não há morfismos não nulos de módulos em (ii) ou (iii) para módulos em (i). Analogamente, as componentes descritas em (ii) estão contidas em $\mathscr{R}_A$. Também pertencem a $\mathscr{L}_A$ os módulos que antecedem S_2 e, a $\mathscr{R}_A$, os módulos que sucedem S_4. Dessa forma, apenas um número finito de módulos não pertence à união $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ e, portanto, A é laura.

Definição 3.6. *Uma álgebra laura que não é quasi-inclinada é dita laura estrita.*

Na sequência, são discutidos alguns resultados que nos permitem descrever o *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra laura estrita.

Proposição 3.14. *Seja A uma álgebra laura estrita. Então, $\Gamma(mod\ A)$ admite uma componente não semirregular quasi-dirigida. Em particular, tal componente tem apenas um número finito de τ_A-órbitas.*

Demonstração: Pode ser encontrada no lema (3.4) e na proposição (3.5) de [6]. □

Sejam A uma álgebra laura estrita de tipo de representação infinito e Γ uma componente não semirregular, quasi-dirigida e fiel do *quiver* de Auslander-Reiten de A, cuja existência é garantida pela proposição (3.14). De acordo com o teorema (2.1) de [11](p. 233), Γ é infinita. Então, ao menos uma de suas partes estáveis, à esquerda ou à direita, é infinita. Ao longo dessa seção, sempre que necessário, vamos assumir que ${}_{\ell}\Gamma$ é infinita. Destacamos que ${}_{\ell}\Gamma$ possui somente um número finito de componentes conexas contendo mais de um ponto, uma vez que Γ contém somente um número finito de τ_A-órbitas (digamos, s componentes com mais de um ponto). Em virtude de [22](2.5) e da proposição (3.14), tais componentes não admitem ciclos e, portanto, podemos tomar, para cada $i \in \{1, \cdots, s\}$, uma subseção maximal, ${}_{i}\Sigma$. Nessas condições:

Definição 3.7. (a) ${}_{\infty}A_i = End \bigoplus_{P_x \to {}_i\Sigma} P_x$.

(b) *A álgebra final à esquerda de A é dada por* ${}_{\infty}A = {}_{\infty}A_1 \times \cdots \times {}_{\infty}A_s$.

Para cada índice $i \in \{1, \cdots, s\}$, a seção ${}_{i}\Sigma$ definida acima é uma fatia completa em $mod\, {}_{\infty}A_i$ e, em particular, ${}_{\infty}A_i$ é uma álgebra inclinada. É o que nos mostra o lema abaixo.

Lema 3.15. (a) *Para cada i,* ${}_{\infty}A_i$ *é inclinada, tendo* ${}_{i}\Sigma$ *como fatia completa.*

(b) *Se* P, P' *são* A*-módulos projetivos e indecomponíveis tais que* $Hom_A(P, P') \neq 0$ *e* P' *é um* ${}_{\infty}A_i$*-módulo projetivo, então* P *é também um* ${}_{\infty}A_i$*-módulo projetivo.*

Demonstração: (a) De acordo com o teorema (1.20), para concluirmos que ${}_{\infty}A_i$ é uma álgebra inclinada, basta mostrarmos que ${}_{i}\Sigma$ é uma seção fiel tal que $Hom_{{}_{\infty}A_i}(U, \tau_{{}_{\infty}A_i} V) = 0$, para todos $U, V \in {}_{i}\Sigma$. Seja $M = \bigoplus_{U \in {}_i\Sigma} U$. Então, M é um ${}_{\infty}A_i$-módulo sincero, já que $Hom_{{}_{\infty}A_i}(P(j), M) \neq 0$, para cada j no suporte de um dos módulos em ${}_{i}\Sigma$. Além disso, como observamos acima, M é dirigido. Uma vez que todo módulo dirigido e sincero é fiel (para mais detalhes, veja [8](p. 364)), M é um ${}_{\infty}A_i$-módulo fiel.

Devido à proposição (3.14), Γ é estândar generalizada e, portanto, $Hom_{{}_{\infty}A_i}(U, \tau_{{}_{\infty}A_i} V) = 0$, para todos $U, V \in {}_{i}\Sigma$, o que finaliza a demonstração.

(b) Como pudemos verificar no item (a), M é um ${}_{\infty}A_i$-módulo fiel. Neste caso, existe um monomorfismo ${}_{\infty}A_i \to M^{(m)}$, para algum $m > 0$. Sendo P' um ${}_{\infty}A_i$-módulo indecomponível projetivo, há também um monomorfismo $P' \to M^{(m)}$. Agora, como

$Hom_A(P, P') \neq 0$, existe um morfismo não nulo $P \to M$ e, portanto, P tem estrutura de ${}_{\infty}A_i$-módulo. Além disso, P é projetivo também como ${}_{\infty}A_i$-módulo. □

Lema 3.16. *(a) Se $P \in ind\,A$ é projetivo e não é um ${}_{\infty}A$-módulo, então $P \in \Gamma$.*

(b) Se $I \in ind\,A$ é injetivo e não é um A_{∞}-módulo, então $I \in \Gamma$.

Demonstração: (a) Seja P nas condições dispostas no enunciado. Uma vez que A é conexa, dado $P' = P_0 \in ind\,A$ projetivo com estrutura de ${}_{\infty}A$-módulo, existe $P_1 \in ind\,A$ projetivo tal que $Hom_A(P_0, P_1) \neq 0$ ou $Hom_A(P_1, P_0) \neq 0$. Novamente, existe $P_2 \in ind\,A$ projetivo satisfazendo $Hom_A(P_1, P_2) \neq 0$ ou $Hom_A(P_2, P_1) \neq 0$. Dessa forma, construímos uma sequência de A-módulos projetivos indecomponíveis

$$P' = P_0, \cdots, P_t = P,$$

em que $Hom_A(P_{i-1}, P_i) \neq 0$ ou $Hom_A(P_i, P_{i-1}) \neq 0$, para cada $i \in \{1, \cdots t\}$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que P_i não é ${}_{\infty}A$-módulo projetivo, para todo $i > 0$. Então, devido ao item (b) do lema acima, não é possível que $Hom_A(P_1, P') \neq 0$, pois caso contrário, P_1 seria ${}_{\infty}A$-módulo projetivo. Assim, necessariamente, $Hom_A(P', P_1) \neq 0$. Neste caso, há um índice j tal que $Hom_A({}_j\Sigma, P_1) \neq 0$, uma vez que ${}_j\Sigma$ é uma fatia completa em $mod\,{}_{\infty}A_j$ e P_1 não tem estrutura de ${}_{\infty}A$-módulo. Segue então de [6](4.1) que $P_1 \in \Gamma$. Em relação ao projetivo P_2, se $Hom_A(P_1, P_2) \neq 0$, então $P_2 \in \Gamma$, conforme [6](4.1). Suponha que $Hom_A(P_2, P_1) \neq 0$. Observe que $P_2 \in \Gamma$, pois se não fosse esse o caso, P_2 seria um ${}_{\infty}A$-módulo, já que o morfismo $P_2 \to P_1$ poderia se fatorar através de ${}_1\Sigma \cup \cdots \cup {}_s\Sigma$. Ao prosseguir com esse processo, concluímos que $P \in \Gamma$, como desejado. □

O resultado a seguir nos fornece uma descrição completa do *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra laura estrita. Como mencionado no início dessa seção, suas componentes ou são componentes de um produto de álgebras inclinadas, a saber ${}_{\infty}A$ e A_{∞}, ou corresponde a uma componente não semirregular.

Teorema 3.17. *Seja A uma álgebra laura que não é quasi-inclinada. Então, $\Gamma(mod\,A)$ admite uma única componente não semirregular, que é quasi-dirigida e fiel. Além disso, se Γ' é uma componente de $\Gamma(mod\,A)$ distinta de Γ, então Γ' é semirregular e satisfaz exatamente uma das condições listadas abaixo:*

(i) Γ' é uma componente de $\Gamma(mod\,{}_{\infty}A)$ tal que $Hom_A(\Gamma', \Gamma) \neq 0$ e $\Gamma' \subseteq \mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$.

(ii) Γ' *é uma componente de* $\Gamma(mod\, A_\infty)$ *tal que* $Hom_A(\Gamma, \Gamma') \neq 0$ *e* $\Gamma' \subseteq \mathscr{R}_A \setminus \mathscr{L}_A$.

Demonstração: Veja, por exemplo, [6](p. 18). □

Observe que, nas condições do teorema acima, $\Gamma(mod\, A)$ é semelhante ao *quiver* de Auslander-Reiten de uma álgebra inclinada, já que toda componente semirregular é componente de uma álgebra inclinada, e a única componente não semirregular faz o papel de componente de conexão.

Corolário 3.18. *Seja A uma álgebra laura estrita. Então,*

(a) *Se I é um A-módulo injetivo indecomponível que não pertence a* $\mathscr{R}_A$*, então* $I \in \Gamma$.

(b) *Se P é um A-módulo projetivo indecomponível que não pertence a* $\mathscr{L}_A$*, então* $P \in \Gamma$.

Demonstração: Vamos demonstrar apenas (b). Seja $P \notin \mathscr{R}_A$, e suponha que $P \notin \Gamma$. Neste caso, P pertence a uma componente Γ' de $\Gamma(mod\, A)$ distinta de Γ. De acordo com o teorema (3.17), Γ' é uma componente de $\Gamma(mod\, A_\infty)$ e, portanto, P é um A_∞-módulo. No entanto, segundo o lema (3.16), P tem estrutura de ${}_\infty A$-módulo, dando origem a uma contradição. Logo, P deve pertencer a Γ. □

Uma vez discutidos os conceitos e resultados acima, podemos retornar ao objetivo principal dessa seção, que é analisar a existência de módulos Ext-projetivos na parte direita da categoria de módulos de uma álgebra laura estrita (ou, dualmente, Ext-injetivos na parte esquerda). Inicialmente, vamos mostrar que caso exista um módulo Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, este necessariamente irá pertencer à única componente não semirregular do *quiver* de Auslander-Reiten de A.

Proposição 3.19. *Seja A uma álgebra laura estrita. Se M é um módulo Ext-projetivo em* $add\, \mathscr{R}_A$*, então* $M \in \Gamma$*, em que* Γ *é a única componente não semirregular de* $\Gamma(mod\, A)$.

Demonstração: Considere M um módulo Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$, e suponha que $M \notin \Gamma$. De acordo com o teorema (3.17), M pertence a uma componente semirregular Γ' de $\Gamma(mod\, A)$, que satisfaz uma das condições abaixo:

(i) $\Gamma' \leq \Gamma(mod\, {}_\infty A)$ e $\Gamma' \subseteq \mathscr{L}_A \setminus \mathscr{R}_A$.

(ii) $\Gamma' \leq \Gamma(mod\, A_\infty)$ e $\Gamma' \subseteq \mathscr{R}_A \setminus \mathscr{L}_A$.

Como $M \in \mathscr{R}_A$, a primeira possibilidade está excluída e, portanto, $\Gamma' \leq \Gamma(mod\, A_\infty)$. Observe que, devido ao lema (3.16), M não é projetivo. Neste caso, $\tau_A M \neq 0$ e, como $\Gamma' \subseteq \mathscr{R}_A \setminus \mathscr{L}_A$, podemos concluir que $\tau_A M \in \mathscr{R}_A$, contradizendo a hipótese de que M é Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$. Logo, $M \in \Gamma$. □

Proposição 3.20. *Seja A uma álgebra laura estrita. Então, existe um módulo Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$.*

Demonstração: Sejam A uma álgebra laura estrita e Γ a única componente não semirregular do *quiver* de Auslander-Reiten de A. Suponha, por absurdo, que não existe em Γ um módulo Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$. Então, para cada $M \in \Gamma \cap \mathscr{R}_A$, obtemos que $\tau_A M \in \mathscr{R}_A$. Dessa forma, podemos concluir que cada módulo em $\Gamma \cap \mathscr{R}_A$ é estável à esquerda, e não é periódico, pois $\Gamma \cap \mathscr{R}_A$ é dirigido (lema (2.4)). Considere o passeio em Γ de menor comprimento de um projetivo P para um módulo $M \in \Gamma \cap \mathscr{R}_A$. A minimalidade nos garante que todo módulo nesse passeio é estável à esquerda e, portanto, há um caminho $\tau_A^s M \rightsquigarrow P$, para algum $s \geq 0$. Uma vez que $\tau_A^s M \in \mathscr{R}_A$ e $\mathscr{R}_A$ é fechada para sucessores, segue que $P \in \mathscr{R}_A$, o que é uma contradição.

Consequentemente, há sempre um Ext-projetivo em $add\, \mathscr{R}_A$. □

Dualmente, é possível concluir que existe um módulo Ext-injetivo em $add\, \mathscr{L}_A$, sempre que A corresponder a uma álgebra laura estrita.

Sendo o conjunto dos módulos Ext-projetivos em $add\ \mathscr{R}_A$ e $\mathscr{E}_A$ não vazios, a proposição (2.20) nos garante que $\mathscr{P}_A$ e $\mathscr{E}_A$ formam uma seção à direita e uma seção à esquerda em Γ, respectivamente. É o que nos diz o teorema abaixo.

Teorema 3.21. *Sejam A uma álgebra laura estrita e Γ a única componente não semirregular de $\Gamma(mod\, A)$. Então, $\mathscr{P}_A$ (resp. $\mathscr{E}_A$) é uma seção à direita (resp. à esquerda) em Γ.*

□

Exemplo 3.3. *Embora $\mathscr{P}_A$ seja uma seção à direita em Γ, não é necessariamente uma seção. Considere, por exemplo, a álgebra apresentada no item (b) de (3.2). Então, $\mathscr{P}_A = \{S_4, P\}$ e, portanto, $\mathscr{P}_A$ não intercepta todas as τ_A-órbitas de Γ.*

3.4 Álgebras fracamente *shod*

Definição 3.8. *Uma álgebra A é fracamente shod se existe* $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tal que o comprimento de todo caminho em ind A de um injetivo para um projetivo, com cada morfismo não isomorfismo, não ultrapassa* n_0. *Se A é fracamente shod e não é quasi-inclinada, então A é chamada fracamente shod estrita.*

Observação 3.5. Sendo A uma álgebra fracamente *shod*, todo caminho em *ind* A de um módulo injetivo para um projetivo pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis. De fato, seja $I \rightsquigarrow P$ um caminho em *ind* A, com I injetivo e P projetivo. Então, nenhum morfismo nesse caminho pertence a $rad^{\infty}(mod\, A)$, pois caso contrário, existiriam infinitos módulos sucessores de I e antecessores de P, devido ao lema (1.24), donde segue o resultado.

Exemplo 3.4. *(i) Seja A a álgebra apresentada no exemplo* (3.2). *Então, A não é fracamente shod, pois podemos construir um caminho de comprimento tão grande quanto quisermos do injetivo* I_2 *para o projetivo* P_4, *uma vez que há um ciclo sob o módulo simples* S_3.

Em [19], Coelho e Lanzilotta mostraram a seguinte equivalência para álgebras fracamente *shod*:

Teorema 3.22. *Seja A uma álgebra. São equivalentes:*

(a) *A é fracamente shod.*

(b) *(i)* $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ *é cofinito em ind A.*

(ii) nenhuma componente de $\Gamma(mod\, A)$ *não semirregular admite ciclos.*

□

Com base neste teorema, podemos concluir que uma álgebra A fracamente *shod* estrita é também laura estrita. Então, seu *quiver* de Auslander-Reiten contém uma componente não semirregular, quasi-dirigida e fiel, Γ, e as demais, semirregulares, são componentes do *quiver* de Auslander-Reiten das álgebras inclinadas ${}_{\infty}A$ e A_{∞}. O teorema acima também nos garante que Γ não admite ciclos, sendo portanto dirigida.

Nessas condições, a proposição (3.20) nos assegura a existência de módulos Ext-projetivos em $add\,\mathscr{R}_A$ e Ext-injetivos em $add\,\mathscr{L}_A$. Além disso, podemos afirmar diretamente que tais módulos pertencem a Γ.

Teorema 3.23. *Seja A uma álgebra fracamente shod estrita.*

(i) Existe módulo Ext-projetivo em add $\mathscr{R}_A$ e, além disso, este pertence à única componente não semirregular, fiel e dirigida de $\Gamma(mod\,A)$.

(ii) Existe módulo Ext-injetivo em add $\mathscr{L}_A$ e, além disso, este pertence à única componente não semirregular, fiel e dirigida de $\Gamma(mod\,A)$.

□

Assim como nas álgebras laura estritas, os módulos Ext-projetivos na parte direita (resp. Ext-injetivos na parte esquerda) da categoria de módulos sobre uma álgebra A fracamente *shod* estrita formam uma seção à direita (resp. à esquerda) na única componente *pip*-limitada de $\Gamma(mod\,A)$, que pode não ser uma seção:

Exemplo 3.5. *Seja A a álgebra de caminhos associada ao quiver*

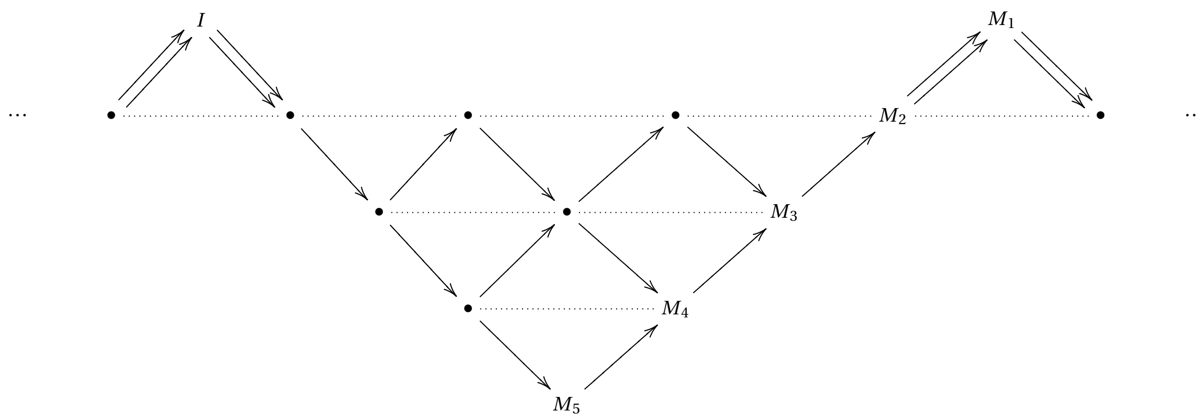
$$1 \underset{\alpha_2}{\overset{\alpha_1}{\leftleftarrows}} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \longleftarrow 4 \xleftarrow{\gamma} 5 \underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\leftleftarrows}} 6$$

com as relações $\alpha_i\beta = \gamma\delta_i = 0$, para $i = 1,2$. Então, o quiver de Auslander-Reiten de A é constituído:

(i) pela componente pós-projetiva e tubos homogêneos referentes à álgebra de Kronecker dada pelo subquiver pleno formado pelos vértices 1 e 2;

(ii) pela componente pré-injetiva e tubos homogêneos referentes à álgebra de Kronecker dada pelo subquiver pleno formado pelos vértices 5 e 6;

(iii) pela componente Γ



Observe que $\mathscr{R}_A$ consiste dos módulos descritos em (ii) e dos sucessores em Γ de M_5. Então, os módulos indecomponíveis Ext-projetivos em $\mathscr{R}_A$ são M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5. Dessa forma, $\mathscr{P}_A$ não é uma seção, uma vez que não intercepta a τ_A-órbita que contém I.

Capítulo 4

Um estudo das Álgebras Suportadas

Com base nos artigos [4] e [7], dedicamos este capítulo a um estudo das álgebras suportadas. Aqui, salvo indicação contrária, $\mathscr{C}$ corresponde a uma subcategoria plena de $\mathscr{L}_A$, fechada para antecessores, e $\mathscr{E}$ ao conjunto formado pelos A-módulos indecomponíveis Ext-injetivos em $add\,\mathscr{C}$. Também, F representa a soma direta dos A-módulos projetivos e indecomponíveis que não pertencem a $\mathscr{C}$, e T o A-módulo $E \oplus F$.

4.1 Álgebras Suporte

Definição 4.1. *A álgebra suporte $A(\mathscr{C})$ de $\mathscr{C}$ é a álgebra de endomorfismos da soma direta de todos os A-módulos projetivos indecomponíveis que pertencem a $\mathscr{C}$.*

Observe que $A(\mathscr{C})$ é uma subcategoria plena de A, fechada para sucessores e, portanto,

$$A = \begin{pmatrix} A(\mathscr{C}) & 0 \\ M & B \end{pmatrix},$$

com B uma álgebra e M um B-$A(\mathscr{C})$-bimódulo. Então, a proposição (2.5) nos garante que $\mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_{A(\mathscr{C})}$.

A seguir, listamos algumas propriedades satisfeitas pelos A-módulos E e T.

Lema 4.1. (a) *E é um A-módulo inclinante parcial e convexo.*

(b) *E é um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante parcial e convexo. Em particular, $|\mathscr{E}| \leq rk\ K_0(A(\mathscr{C}))$.*

(c) *E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante parcial.*

(d) *T é inclinante parcial.*

(e) *T é um A-módulo inclinante se, e somente se, $|\mathscr{E}|$ corresponde ao número de projetivos em $\mathscr{C}$ ou se, e somente se, E é um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante.*

(f) *Se T é um A-módulo inclinante, então o par de torção associado $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ é dado por $\mathscr{F}(T) = add\,(\mathscr{C} \setminus \mathscr{E})$ e $\mathscr{T}(T) = add\,(ind\,A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E}))$.*

Demonstração: (a) A condição $dp\ E \leq 1$ é obtida devido ao fato de que E pertence a $add\ \mathscr{L}_A$. Sendo E Ext-injetivo em $add\ \mathscr{C}$, temos que $Ext^1_A(\_, E)|_{add\ \mathscr{C}} = 0$. Em particular, $Ext^1_A(E, E) = 0$.

A convexidade de E segue do corolário (2.15).

(b) O A-módulo E tem estrutura de $A(\mathscr{C})$-módulo, pois $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_{\mathscr{A}(\mathscr{C})}$, devido à proposição (2.5). Também, como feito na demonstração dessa mesma proposição, é possível concluir que $dp_{A(\mathscr{C})}\ E \leq 1$. Por fim, sendo todo $A(\mathscr{C})$-módulo um A-módulo, obtemos que $Ext^1_{A(\mathscr{C})}(E, E) = 0$, e a convexidade de E enquanto $A(\mathscr{C})$-módulo.

(c) Sendo E um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante parcial, basta mostrarmos que $di_{A(\mathscr{C})}\ E \leq 1$. Seja $E' \in \mathscr{E}$, então $\tau_A^- E' \notin \mathscr{C}$. Neste caso, $\tau^-_{A(\mathscr{C})} E' \notin \mathscr{C}$, já que é isomorfo a um submódulo de $\tau_A^- E'$. Em particular, $Hom_{A(\mathscr{C})}(\tau^-_{A(\mathscr{C})} E', A(\mathscr{C})) = 0$ e, portanto, $di_{A(\mathscr{C})}\ E \leq 1$, segundo o lema (1.4).

(d) De acordo com o item (a), $dp_A\ E \leq 1$ e, portanto, $dp_A\, T \leq 1$, uma vez que $dp_A\ F = 0$.

Novamente pelo item (a), $Ext^1_A(E, E) = 0$. Além disso, sendo F um A-módulo projetivo, $Ext^1_A(F, \_)|_{mod\ A} = 0$. Então,

$$\begin{aligned} Ext^1_A(T, T) &= Ext^1_A(E \oplus F, E \oplus F) = Ext^1_A(E, E) \oplus Ext^1_A(E, F) \oplus Ext^1_A(F, E) \oplus Ext^1_A(F, F) \\ &= Ext^1_A(E, F) \end{aligned}$$

Mas $Ext^1_A(E, F) \simeq DHom_A(F, \tau_A E) = 0$, pois $\tau_A E \in add\ \mathscr{C}$ e $F \notin add\ \mathscr{C}$. Com isso, $Ext^1_A(T, T) = 0$ e, portanto, T é inclinante parcial.

(e) Segundo o item (d), T é inclinante parcial. Então, como observamos no capítulo 3, T é inclinante se, e somente se, $|T| = rk\ K_0(A)$, que corresponde ao número de A-módulos projetivos indecomponíveis. Neste caso, T é inclinante se, e somente se, $|\mathscr{E}|$ é igual ao número de módulos projetivos em $\mathscr{C}$.

(f) Sendo T um A-módulo inclinante, T define em $mod\ A$ um par de torção $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$, em que $\mathscr{T}(T) = Gen\ T$ e $\mathscr{F}(T) = Cogen\ \tau_A T$. Vamos mostrar, inicialmente, que $\mathscr{F}(T) = add\,(\mathscr{C} \setminus \mathscr{E})$. Para isso, considere $M \in \mathscr{F}(T)$, indecomponível. Então, existe um monomorfismo $M \to \tau_A T^d$, para algum $d > 0$. Como F é um A-módulo projetivo, obtemos que $\tau_A T^d = \tau_A E^d$ e, portanto, $M \in \mathscr{C}$, pois $E \in add\,\mathscr{C}$. Suponha $M \in \mathscr{E}$, então o caminho

$$M \to \tau_A E^d \rightsquigarrow E^d$$

e a convexidade de $\mathscr{E}$ em $ind\,A$ nos garantem que $\tau_A E^d \in \mathscr{E}$, uma contradição com o item (b) do lema (2.10). Logo, $M \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{E}$.

Por outro lado, seja $M \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{E}$ tal que $M \notin \mathscr{F}(T)$. Então, $Hom_A(T, M) \neq 0$, donde existe um somando indecomponível E' de E satisfazendo $Hom_A(E', M) \neq 0$, uma vez que $Hom_A(F, M) = 0$. Como $M \in \mathscr{C}$, segue da proposição (2.14) que $M \in \mathscr{E}$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathscr{C} \setminus \mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}(T)$.

Por fim, vamos mostrar que $add\ (ind\ A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E})) \subseteq \mathscr{T}(T)$, já que a inclusão $\mathscr{T}(T) \subseteq add\,(ind\,A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E}))$ é garantida pelo resultado que obtivemos acima. Considere, inicialmente, $X \in \mathscr{E}$. Neste caso, $Ext^1_A(T, X) = Ext^1_A(E, X) \oplus Ext^1_A(F, X) = 0$ (pois F é projetivo e $E \in add\,\mathscr{C}$), donde $X \in \mathscr{T}(T)$. Agora, seja $X \notin \mathscr{C}$ tal que $X \notin \mathscr{T}(T)$. Então, em particular, $Ext^1_A(T, X) \neq 0$. Como $Ext^1_A(T, X) \simeq D\overline{Hom_A}(X, \tau_A T)$, há um morfismo não nulo de X para $\tau_A T = \tau_A E$ e, portanto, $X \in \mathscr{C}$, o que é uma contradição. Consequentemente, $\mathscr{T}(T) = add\,(ind\,A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E}))$. $\square$

Como destacado acima, E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante parcial. Agora, se $A(\mathscr{C})$ é uma álgebra conexa, então E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante, como mostra o lema a seguir.

Lema 4.2. *Se $A(\mathscr{C})$ é uma álgebra conexa, então E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante.*

Demonstração: Assuma que $A(\mathscr{C})$ é conexa. De acordo com o lema anterior, E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante parcial. Então, com o auxílio do lema (1.12), podemos concluir que existe uma sequência exata

$$0 \to E^d \to X \to DA(\mathscr{C}) \to 0 \tag{4.1}$$

em $mod\,A(\mathscr{C})$ tal que $E \oplus X$ é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante. A fim de verificarmos que E é coinclinante, vamos mostrar que todo somando direto indecomponível de X é também um somando direto de E. Para isso, seja Y somando de X, indecomponível. Segundo [23], Y é um $A(\mathscr{C})$-módulo injetivo ou $Hom_{A(\mathscr{C})}(E, Y) \neq 0$. Suponha, inicialmente, que esta última condição ocorre, e que $Y \notin \mathscr{C}$. Considere o morfismo não nulo $f_1 : E' \to Y$, com $E' \in \mathscr{E}$. Observe que f_1 não é um monomorfismo que cinde, pois caso contrário, $E' \simeq Y$, o que é uma contradição. Assim, f_1 se fatora através do morfismo minimal quase cindido à esquerda $g_1 : E' \to M$ e, portanto, existe um somando indecomponível $M' = M'_1$ de M satisfazendo $Hom_{A(\mathscr{C})}(M'_1, Y) \neq 0$. Sendo g_1 minimal, o morfismo $\pi g_1 : E' \to M'_1$, em que $\pi : M \to M'_1$ corresponde à projeção canônica, é não nulo (ver [11] p. 6 e 7). Neste caso, segundo a proposição (2.14), se $M'_1 \in \mathscr{C}$, então $M'_1 \in \mathscr{E}$. Considere, agora, o morfismo não nulo $f_2 : M'_1 \to Y$. Como anteriormente, f_2 não é um monomorfismo que cinde, donde se fatora através do morfismo minimal quase cindido à esquerda $g_2 : M'_1 \to M_2$. Então, $Hom_{A(\mathscr{C})}(M'_2, Y) \neq 0$, para algum somando indecomponível M'_2 de M_2. Sendo $\pi_2 : M_2 \to M'_2$ a projeção canônica, o morfismo $\pi_2 g_2 : M'_1 \to M'_2$ é não nulo. Logo, se $M'_2 \in \mathscr{C}$, então $M'_2 \in \mathscr{E}$. Com isso, construímos o caminho

$$E' \to M'_1 \to M'_2$$

em $\mathscr{E}$. Ao prosseguir com esse processo, como $|\mathscr{E}|$ é finito, para algum índice i_0, o módulo M'_{i_0} encontrado deverá coincidir com algum M'_i anterior, dando origem a um ciclo de morfismos irredutíveis em $\mathscr{E}$, o que contradiz (2.10)(e). Assim, algum M'_i não pertence a $\mathscr{C}$ e, portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que $M' \notin \mathscr{C}$. Então, M' não é um $A(\mathscr{C})$-módulo projetivo, donde $Hom_{A(\mathscr{C})}(\tau_{A(\mathscr{C})}M', E') \neq 0$, já que existe um morfismo irredutível entre E' e M. Como $E' \in \mathscr{C}$, obtemos que $\tau_{A(\mathscr{C})}M' \in \mathscr{C}$. Observe que $\tau_{A(\mathscr{C})}M' \in \mathscr{E}$, pois caso contrário, teríamos que $\tau_A^- \tau_{A(\mathscr{C})}M' \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_{A(\mathscr{C})}$ e, portanto,

$$\tau_A^- \tau_{A(\mathscr{C})}M' \simeq \tau_{A(\mathscr{C})}^{-1} \tau_{A(\mathscr{C})}M' \simeq M',$$

o que contradiz a hipótese de que $M' \notin \mathscr{C}$. Assim, $Hom_{A(\mathscr{C})}(\tau_{A(\mathscr{C})}^{-1}E, Y) \neq 0$, pois $Hom_{A(\mathscr{C})}(M', Y) \neq 0$.

Uma vez que $di_{A(\mathscr{C})}\ E \leq 1$, a observação (1.4) nos garante que $Hom_{A(\mathscr{C})}(\tau_{A(\mathscr{C})}^{-1}E, Y) \simeq DExt^1_{A(\mathscr{C})}(Y, E)$, nos permitindo concluir que $Ext^1_{A(\mathscr{C})}(Y, E) \neq 0$, o que é uma contradição, pois $X \oplus E$ é coinclinante. Logo, $Y \in \mathscr{C}$. Novamente através da proposição (2.14), obtemos que $Y \in \mathscr{E}$.

Tendo em vista o resultado obtido acima, podemos reescrever a sequência em (4.1) da forma

$$0 \to E_0 \to E_1 \oplus J \to DA(\mathscr{C}) \to 0,$$

com $add\,(E_0 \oplus E_1) = add\ E$ e J um $A(\mathscr{C})$-módulo injetivo tal que $Hom_{A(\mathscr{C})}(E, J) = 0$. Em seguida, vamos mostrar que $J = 0$. Suponha que este não é o caso. Sendo $A(\mathscr{C})$ conexa e $E \oplus J$ coinclinante, a álgebra de endomorfismos $End_{A(\mathscr{C})}(E \oplus J)$ é conexa, donde existe um somando indecomponível J' de J satisfazendo $Hom_{A(\mathscr{C})}(J', E) \neq 0$ ou $Hom_{A(\mathscr{C})}(E, J') \neq 0$. Este último não ocorre, já que $Hom_{A(\mathscr{C})}(E, J) = 0$. Então, devemos ter $Hom_{A(\mathscr{C})}(J', E) \neq 0$. Desde que $E \in \mathscr{C}$, $J' \in \mathscr{C}$. Além disso, $J' \notin \mathscr{E}$ e, portanto, $\tau_A^- J' \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A \subseteq \mathscr{L}_{A(\mathscr{C})}$, isto é, $\tau^{-1}_{A(\mathscr{C})} J' \simeq \tau_A^- J'$. No entanto, $\tau^{-1}_{A(\mathscr{C})} J' = 0$, um absurdo, pois o módulo nulo não é indecomponível. Consequentemente, E é coinclinante. □

Teorema 4.3. *Seja B uma componente conexa de $A(\mathscr{C})$ tal que $\mathscr{E} \cap$ mod $B \neq \emptyset$. Então, B é uma álgebra inclinada e tem como fatia completa $\mathscr{E} \cap$ mod B.*

Demonstração: Apenas por simplicidade, vamos assumir que $A(\mathscr{C})$ é conexa. Como todo módulo pertencente a $\mathscr{C}$ tem estrutura de $A(\mathscr{C})$-módulo, obtemos que $\mathscr{E} = mod\, A(\mathscr{C}) \cap \mathscr{E}$. A fim de concluirmos que $\mathscr{E}$ define uma fatia completa em $mod\, A(\mathscr{C})$, vamos mostrar que $E = \bigoplus_{U \in \mathscr{E}} U$ é um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante e convexo.

A convexidade de E é garantida pela proposição (2.14). Segundo o lema anterior, E é um $A(\mathscr{C})$-módulo coinclinante, em particular, $|\mathscr{E}| = rk\, K_0(A)$. Uma vez que E é também um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante parcial, podemos concluir que E é inclinante, como desejado. □

Em virtude desse teorema, se a álgebra $A(\mathscr{C})$ é conexa e $\mathscr{E} \neq \emptyset$, então $\mathscr{E}$ forma uma fatia completa em $mod\ A(\mathscr{C})$ e, portanto, $|\mathscr{E}|$ deve corresponder ao posto do grupo de Grothendieck $K_0(A(\mathscr{C}))$ de $A(\mathscr{C})$.

4.2 Álgebras Suportadas

Enquanto buscavam descrições para as classes $\mathscr{L}$ e $\mathscr{R}$, Assem, Coelho e Trepode (em [7]) consideraram álgebras com a propriedade de que as subcategorias plenas $add\, \mathscr{L}$ de suas categorias de módulos fossem contravariantemente finitas, que chamaram de suportadas à esquerda. Posteriomente, em [2], Assem propôs a seguinte definição:

Definição 4.2. *Seja $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de ind A fechada para antecessores. Uma álgebra A é dita $\mathscr{C}$-suportada se add $\mathscr{C}$ = Cogen E, em que $E = \bigoplus_{U \in \mathscr{E}} U$.*

Ainda em [2], foi demonstrado que A é $\mathscr{C}$-suportada se, e somente se, $add\ \mathscr{C}$ é contravariantemente finita em $mod\ A$, garantindo que as definições de $\mathscr{L}_A$-suportada e suportada à esquerda são equivalentes. Considerações duais podem ser feitas para álgebras suportadas à direita. Ao longo desse texto, admitimos a definição de Assem para álgebras suportadas à esquerda e à direita.

4.2.1 Subcategorias contravariantemente finitas

O conceito de subcategoria contravariantemente finita (dualmente, covariantemente finita) de uma categoria foi introduzido por Auslander e SmalØ em [12]. Embora a ideia tenha diversas aplicações, verificar se uma subcategoria tem uma dessas propriedades pode não ser simples. Em [17], Carlson e Happel apresentaram condições necessárias (porém não suficientes) para garantir que uma dada subcategoria é contravariantemente finita, que serão também enunciadas abaixo.

Definição 4.3. *Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ subcategorias aditivas de mod A.*

(a) *$\mathscr{C}$ é contravariantemente finita em $\mathscr{D}$ se, para todo $D \in \mathscr{D}$, existem $C_D \in \mathscr{C}$ e um morfismo $f_D : C_D \to D$ tais que, se $f : C' \to D$ é um morfismo, com $C' \in \mathscr{C}$, então há $g : C' \to C_D$ fazendo com que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} C_D \arrow[r, "f_D"] & D \\ & C' \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

comute.

(b) *$\mathscr{C}$ é covariantemente finita em $\mathscr{D}$ se, para todo $D \in \mathscr{D}$, existem $C_D \in \mathscr{C}$ e um morfismo $f_D : D \to C_D$ tais que, se $f : D \to C'$, com $C' \in \mathscr{C}$, então há $g : C_D \to C'$ fazendo com que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f_D"] \arrow[d, "f"'] & C_D \arrow[dl, "g"] \\ C' & \end{tikzcd}$$

comute.

Exemplo 4.1. *(i) Sejam A uma álgebra e $\mathscr{T}$ uma classe de torção em mod A. Como observamos no capítulo 1, cada A-módulo M admite um único submódulo tM, com $tM \in \mathscr{T}$. Dessa forma, dados um módulo $L \in \mathscr{T}$ e um morfismo $f : L \to M$, ao tomarmos $\overline{f} : L \to tM$, com $\overline{f}(x) = f(x)$, para $x \in L$, obtemos que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} tM \arrow[r, "i"] & M \\ & L \arrow[ul, "\overline{f}"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

comuta e, portanto, $\mathscr{T}$ é uma subcategoria de mod A contravariantemente finita.

Dualmente, podemos concluir que a classe livre de torção $\mathscr{F}$ em mod A é covariantemente finita.

(ii) *Em [24], Smalø demonstrou que se $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ é um par de torção em mod A, então $\mathscr{F}$ é contravariantemente finita em mod A se, e somente se, é da forma Cogen N, para algum A-módulo N. Assim, podemos afirmar que as classes livres de torção associadas a um A-módulo T inclinante são subcategorias contravariantemente finitas em mod A.*

Teorema 4.4. *Sejam $\mathscr{C}$ uma subcategoria de mod A contravariantemente finita e M um A-módulo indecomponível que não pertence a $\mathscr{C}$. Suponha que $f : X \to M$ é uma $\mathscr{C}$-aproximação minimal não nula. Então, existe um somando direto indecomponível U de X tal que há um morfismo irredutível $g : U \to V$, com $V \notin \mathscr{C}$.*

Demonstração: Sejam $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_t$, com X_i indecomponível, e $\sigma_i : X_i \to E_i$ o morfismo minimal quase cindido à esquerda com início em X_i. Considere $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_t \end{pmatrix}$: $X \to Y$, em que $Y = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$. Suponha, por absurdo, que $Y \in \mathscr{C}$. Observe que, para cada $i \in \{1, \cdots, t\}$, $f_i : X_i \to M$ não é um monomorfismo que cinde, pois caso contrário, X_i e M seriam isomorfos, já que M é indecomponível. Neste caso, existe um morfismo $\theta_i : E_i \to M$ tal que $\theta_i \sigma_i = f_i$. Agora, como $f = (f_1 \cdots f_t)$ é uma $\mathscr{C}$-aproximação e $Y \in \mathscr{C}$, há um morfismo $\tau : Y \to X$ satisfazendo $f\tau = \theta$, com $\theta = (\theta_1 \cdots \theta_t)$. Defina $\mu = \tau\sigma : X \to X$, então $f\mu = f\tau\sigma = \theta\sigma = f$.

Sendo A uma álgebra de artin, as cadeias

$$0 \subseteq Ker\,\mu \subseteq Ker\,\mu^2 \subseteq \cdots \quad \text{e} \quad Im\,\mu \supseteq Im\,\mu^2 \supseteq \cdots Im\,\mu^n \supseteq \cdots$$

de submódulos de X são estacionárias e, portanto, existe um índice $n > 0$ tal que $Im\,\mu^n = Im\,\mu^{n+j}$, e $Ker\,\mu^n = Ker\,\mu^{n+j}$, para todo $j \geq 0$. Note também que $Ker\,\mu^n \cap Im\,\mu^n = \{0\}$. De fato, suponha que este não é o caso. Então, existe $x \in Ker\,\mu^n \cap Im\,\mu^n$ não nulo, donde $\mu^n(x) = 0$ e $\mu^n(y) = x$, para algum $y \in X$. Dessa forma, $\mu^{2n}(y) = 0$, ou seja, $y \in Ker\,\mu^{2n} = Ker\,\mu^n$, nos permitindo concluir que $x = 0$, contradição que finaliza a demonstração da afirmação feita. Logo, $X = Ker\,\mu^n \oplus Im\,\mu^n$ e, em particular, $Im\,\mu^n \in \mathscr{C}$. Uma vez que $f\mu = f$, pode-se obter facilmente que $f\mu^n = f$ e, portanto, f se fatora através de $Im\,\mu^n$. Sua minimalidade então nos garante que $X = Im\,\mu^n$, donde μ^n é um isomorfismo. Como consequência, obtemos que $(\mu^n)^{-1} \circ (\mu^{n-1} \circ \tau)$ é o morfismo inverso à esquerda de σ, o que não pode ocorrer, já que σ não é um monomorfismo que cinde. Assim,

$Y \notin \mathscr{C}$ e g é uma restrição de σ a um dos somandos indecomponíveis de X. □

É consequência imediata desse resultado que uma subcategoria de *ind* A que corresponde à união de componentes regulares do *quiver* de Auslander-Reiten de A não é contravariantemente finita.

A seguir, apresentamos uma condição necessária e suficiente sobre o A-módulo T para que a álgebra A seja $\mathscr{C}$-suportada.

Lema 4.5. *Uma álgebra A é $\mathscr{C}$-suportada se, e somente se, $T = E \oplus F$ é um A-módulo inclinante.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que A é $\mathscr{C}$-suportada, então $add\,\mathscr{C} = Cogen\ E$. Uma vez que $\mathscr{C}$ é fechada para antecessores, claramente, $\mathscr{C}$ é também fechada para extensões. Neste caso, devido ao teorema (A.6) de [13], os números de classes de isomorfismo de Ext-injetivos e Ext-projetivos indecomponíveis em *Cogen* E coincidem. De acordo com o lema (2.6), os Ext-projetivos em $add\,\mathscr{C}$ indecomponíveis correspondem aos projetivos pertencentes a $\mathscr{C}$. Dessa forma, o número de somandos indecomponíveis de E é igual ao número de classes de isomorfismo de projetivos em $\mathscr{C}$ e, portanto, $|T| = rk\ K_0(A)$. Como T é sempre inclinante parcial ((4.1)(c)), obtemos o resultado.

($\Leftarrow$) Assuma que T é um A-módulo inclinante. Então, T define o par de torção $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ em $mod\,A$, em que $\mathscr{F}(T) = add\,(\mathscr{C} \setminus \mathscr{E})$ e $\mathscr{T}(T) = add\,(ind\,A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E}))$. Como observamos em (4.1), $\mathscr{F}(T)$ é contravariantemente finita em $mod\,A$. Dessa forma, $add\,\mathscr{C}$ é também contravariantemente finita em $mod\,A$. De fato, seja M um A-módulo arbitrário. Sendo $\mathscr{F}(T)$ contravariantemente finita, existem um A-módulo $N_M \in \mathscr{F}(T)$ e um morfismo $f : N_M \to M$ tais que, para todo morfismo $g : L \to M$, com $L \in \mathscr{F}(T)$, há $h : L \to N_M$ fazendo o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} N_M \arrow[r, "f"] & M \\ & L \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

comutar. Sejam $\{g_1, \cdots, g_d\}$ um conjunto de geradores do $End_A\ E$-módulo $Hom_A(E, M)$, e $[f\ g_1\ \cdots\ g_d] : N_M \oplus E^d \to M$. Considere $L \in \mathscr{C} = ind\,\mathscr{F}(T) \cup \mathscr{E}$ e um morfismo $g : L \to M$. Se $L \in ind\,\mathscr{F}(T)$, existe $h : L \to N_M$ tal que $fh = g$, como fora observado. Neste caso, tomando $[h\ 0\ \cdots\ 0]^t$, obtemos que $[f\ g_1\ \cdots\ g_d][h\ 0\ \cdots\ 0]^t = g$. Por outro lado, se $L \in \mathscr{E}$, então $g = \left(\sum_{i=1}^{d} g_i a_i\right) \circ j$, em que cada $a_i \in End_A\ E$ e $j : L \to E$ é a inclusão canônica.

Assim, ao tomarmos $h = [0\ a_1 j\ \cdots\ a_d j]^t : L \to N_M \oplus E^d$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} N_M \oplus E^d \arrow[r, "{[f\ g_1 \cdots g_d]}"] & M \\ & L \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

comuta, o que põe fim a demonstração da afirmação feita. Logo, A é $\mathscr{C}$-suportada. □

As classes de álgebras apresentadas nos capítulos anteriores são, em sua maioria, exemplos de álgebras suportadas à esquerda ou à direita. As exceções são aquelas que não admitem Ext-injetivos na parte esquerda de suas categorias de módulos ou Ext-projetivos na parte direita, como observamos abaixo:

(i) Toda álgebra de tipo de representação finito é $\mathscr{C}$-suportada, com $\mathscr{C}$ subcategoria plena de *ind* A fechada para antecessores. De fato, considere A uma álgebra com a propriedade acima. Tendo em vista o lema anterior, é suficiente mostramos que T é um A-módulo inclinante. Seja M um somando direto indecomponível de E. De acordo com o corolário (2.16), M não é periódico e, portanto, está na τ_A-órbita de um módulo projetivo e de um injetivo, já que A é de tipo de representação finito. Uma vez que a τ_A-órbita de cada projetivo em $\mathscr{C}$ claramente admite um módulo Ext-injetivo em *add* $\mathscr{C}$, podemos concluir que o número de somandos indecomponíveis de E corresponde ao número de módulos projetivos em $\mathscr{C}$. Logo, $|T| = rk\, K_0(A)$, nos garantindo que T é inclinante.

O mesmo pode ser feito para o caso em que $\mathscr{C}$ é fechada para *sucessores*.

(ii) Seja A uma álgebra inclinada.

- Suponha que existe um A-módulo injetivo em uma componente de conexão de $\Gamma(mod\ A)$. Devido ao corolário (3.10), o conjunto dos módulos Ext-injetivos em *add* $\mathscr{L}_A$ forma uma fatia completa em *mod* A e, portanto, $\bigoplus \mathscr{E}_A$ é inclinante. Novamente através do lema acima, concluímos que A é suportada à esquerda.
- Se não existe A-módulo injetivo em uma componente de conexão de $\Gamma(mod\ A)$, então também não existem módulos Ext-injetivos em *add* $\mathscr{L}_A$ e, portanto, A não é suportada à esquerda. Dessa forma, nem toda álgebra inclinada é suportada à esquerda.

De maneira análoga, podemos concluir que toda álgebra inclinada que admite um módulo projetivo em uma das componentes de conexão de seu *quiver* de Auslander-Reiten é suportada à direita.

Nada se pode afirmar no caso em que $\mathscr{C}$ é uma subcategoria plena de $mod\, A$ fechada para antecessores (ou sucessores) distinta de $\mathscr{L}_A$ (ou $\mathscr{R}_A$).

(iii) As álgebras quasi-inclinadas estritas também são exemplos de álgebras que não são suportadas à esquerda, nem à direita, uma vez que não admitem módulos Ext-injetivos em $add\, \mathscr{L}_A$, nem Ext-projetivos em $add\, \mathscr{R}_A$, segundo o corolário (3.6).

(iv) Na seção seguinte, mostramos que toda álgebra laura estrita é suportada à esquerda e à direita (veja o teorema (4.10)). Consequentemente, as álgebras fracamente *shod* estritas são suportadas à esquerda e à direita.

Em [4], Assem, Cappa, Platzeck e Trepode apresentaram várias equivalências para as álgebras suportadas à esquerda (e, dualmente, à direita) que, em [2], foram generalizadas para uma subcategoria $\mathscr{C}$ de $\mathscr{L}_A$ fechada para antecessores (resp., subca- tegoria de $\mathscr{R}_A$ fechada para sucessores). Para que possamos demonstrar algumas dessas equivalências, serão necessárias a proposição e definições seguintes:

Definição 4.4. *Para um A-módulo N, $Sup\,(\_, N) = \{M \in mod\, A | Hom_A(M, N) \neq 0\}$.*

Proposição 4.6. *Seja M um A-módulo tal que $Hom_A(\tau^- M, M) = 0$. Então, $Sup\,(\_, M)$ é fechada para antecessores se, e somente se, $add\; Sup\,(\_, M) = Cogen\; M$. Além disso, neste caso, M é Ext-injetivo em $add\; Sup\,(\_, M)$.*

Demonstração: Dado um A-módulo M satisfazendo a condição $Hom_A(\tau^- M, M) = 0$, suponha que $add\; Sup\,(\_, M)$ é fechada para antecessores. Uma vez que $Cogen\; M \subseteq Sup(\_, M)$, basta verificarmos que $Sup(\_, M) \subseteq Cogen\, M$. Sejam $X \in Sup(\_, M)$ e $\{f_1, \cdots, f_d\}$ um conjunto de geradores do $End_A\, X$-módulo $Hom_A(X, M)$. O morfismo $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} :$ $X \to M^d$ é injetor. De fato, assuma que este não é o caso, então $V = Ker\, f \neq 0$. Podemos construir a sequência exata

$$0 \to V \to X \to U \to 0,$$

em que U corresponde ao conúcleo do morfismo inclusão $i : V \to X$. Neste caso, obtemos a também sequência exata

$$0 \to Hom_A(U,M) \to Hom_A(X,M) \to Hom_A(V,M) \to Ext^1_A(U,M).$$

Além disso, $Ext^1_A(U,M) = 0$, pois $Hom_A(\tau^- M, M) = 0$ e existe um monomorfismo de U para M. Como $Sup\,(\_, M)$ é fechada para antecessores e $X \in Sup\,(\_, M)$, temos que $V \in Sup\,(\_, M)$ e, portanto, há um morfismo não nulo $h : V \to M$. Sendo $Hom_A(i, M)$ sobrejetor, existe $h' : X \to M$ tal que $h = h'i$. Também, existe $u = [u_1 \cdots u_d]$ tal que $h' = \sum_{i=1}^{d} u_i f_i$. Assim, $h = h'i = u f i = 0$, o que é uma contradição. Logo, f é um monomorfismo, donde $X \in Cogen\, M$.

Inversamente, suponha que $add\; Sup\,(\_, M) = Cogen\; M$. Sejam $X \in Sup\,(\_, M)$ e $Y = Y_t \to Y_{t-1} \to \cdots \to Y_0 = X$ um caminho. Por meio de indução sobre o índice i, com $0 \leq i \leq t$, vamos mostrar que cada Y_i pertence a $Sup\,(\_, M)$. Se $i = 0$, então $Y_0 = X \in Sup\,(\_, M)$. Assuma que, para $i < t$, $Y_i \in Sup\,(\_, M)$. Como $Sup\,(\_, M) = Cogen\, M$, existem $d_i > 0$ e um monomorfismo $Y_i \to M^{d_i}$. Neste caso, a composição $Y_{i+1} \to Y_i \to M^{d_i}$ é um morfismo não nulo e, portanto, $Y_{i+1} \in Sup\,(\_, M)$.

Consequentemente, $Y \in Sup\,(\_, M)$, donde podemos concluir que $Sup\,(\_, M)$ é fechada para antecessores. □

Definição 4.5. *Seja A uma álgebra de artin.*

(a) *Um A-módulo M é quase dirigido se não existem dois somandos indecomponíveis M' e M'' de M, e um caminho $M' \rightsquigarrow \tau_A M''$ em ind A.*

(b) *Um A-módulo L é quase codirigido se não existem dois somandos indecomponíveis L' e L'' de L, e um caminho $\tau_A^- L' \rightsquigarrow L''$ em ind A.*

Definição 4.6. *Seja $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}_A$. A subcategoria plena de ind A que consiste dos módulos X tais que existem $E' \in \mathscr{E}$ e um caminho $X \rightsquigarrow E'$ em ind A é denotada por Pred E.*

Teorema 4.7. *Sejam A uma álgebra de artin, $\mathscr{C}$ uma subcategoria plena de $\mathscr{L}_A$ fechada para antecessores. Então, são equivalentes:*

(a) *A é $\mathscr{C}$-suportada.*

(b) $\mathscr{C} = Sup\,(\_, E)$.

(c) $\mathscr{C} = Pred\ E$.

(d) *Existe um A-módulo L quase codirigido tal que* $\mathscr{C} = Sup\,(\_, L)$.

(e) *Existe um A-módulo L tal que* $Hom_A(\tau^- L, L) = 0$ *e* $\mathscr{C} = Sup\,(\_, L)$.

(f) *E é um* $A(\mathscr{C})$*-módulo sincero.*

(g) $\mathscr{E} \cap mod\ \ B \neq \emptyset$*, para toda componente conexa B de* $A(\mathscr{C})$.

(h) *E é um* $A(\mathscr{C})$*-módulo coinclinante.*

(i) *E é um* $A(\mathscr{C})$*-módulo inclinante.*

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Sendo A $\mathscr{C}$-suportada, temos que $add\,\mathscr{C} = Cogen\,E$, por definição. Claramente, $Cogen\,E \subseteq add\,Sup\,(\_, E)$. Agora, como $E \in add\,\mathscr{C}$, com $\mathscr{C}$ fechada para antecessores, podemos concluir que $add\,Sup\,(\_, E) \subseteq add\,\mathscr{C}$. Neste caso, $add\,\mathscr{C} = add\,Sup\,(\_, E)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Suponha que $\mathscr{C} = Sup\,(\_, E)$. Obviamente, $\mathscr{C} \subseteq Pred\ E$. Por outro lado, como $E \in \mathscr{C}$, obtemos que todo antecessor de E pertence a $\mathscr{C}$ e, portanto, $Pred\ E \subseteq \mathscr{C}$.

$(b) \Rightarrow (d)$ Suponha que $\mathscr{C} = Sup\,(\_, E)$. Basta verificarmos que E é quase codirigido.

Sejam M_i e M_j somandos de E, e $\tau^- M_i \rightsquigarrow M_j$ um caminho. Como $\mathscr{C}$ é fechada para antecessores e $M_j \in \mathscr{C}$, obtemos que $\tau^- M_i \in \mathscr{C}$, o que não pode ocorrer, já que M_i é Ext-injetivo em $add\,\mathscr{C}$. Logo, E é quase codirigido.

$(d) \Rightarrow (e)$ É óbvio.

$(e) \Rightarrow (b)$ Seja L um A-módulo com as propriedades descritas em (e). De acordo com a proposição (4.6), $add\,\mathscr{C} = Cogen\ L$ e L é Ext-injetivo em $add\,\mathscr{C}$. Neste caso, $L \in add\ E$ e, portanto, $Sup\,(\_, L) \subseteq Sup\,(\_, E)$.

Por outro lado, seja $X \in Sup\,(\_, E)$, então $X \in \mathscr{C} = Sup\,(\_, L)$, pois $E \in \mathscr{C}$ e $\mathscr{C}$ é fechada para antecessores.

Consequentemente, $\mathscr{C} = Sup\,(\_, E)$.

$(b) \Rightarrow (f)$ Observe, inicialmente, que cada $A(\mathscr{C})$-módulo projetivo indecomponível pertence a $\mathscr{C}$. Agora, sendo $\mathscr{C} = Sup\,(\_, E)$, todo $A(\mathscr{C})$-módulo projetivo indecomponível P satisfaz $Hom_{A(\mathscr{C})}(P, E) \neq 0$ e, portanto, E é um $A(\mathscr{C})$-módulo sincero.

$(c) \Rightarrow (g)$ e $(f) \Rightarrow (g)$ Sejam B uma componente conexa de $A(\mathscr{C})$ e P um $A(\mathscr{C})$-módulo indecomponível projetivo. Como observado anteriormente, $P \in \mathscr{C}$. Então, se vale (c), existem $E' \in \mathscr{E}$ e um caminho $P \to E'$, e se vale (f), existe $E' \in \mathscr{E}$ tal que há um morfismo não nulo $P \to E'$. Em ambos os casos, obtemos que $E' \in mod\, A(\mathscr{C})$, como desejado.

As implicações $(g) \Rightarrow (h)$ e $(h) \Rightarrow (i)$ podem ser encontradas na demonstração do lema (4.2).

$(i) \Rightarrow (a)$ Suponha que E é um $A(\mathscr{C})$-módulo inclinante, então $|\mathscr{E}| = rk\ K_0(A(\mathscr{C}))$, que corresponde ao número de A-módulos projetivos que pertencem a $\mathscr{C}$. O resultado então segue do item (d) do lema (4.1) e de (4.5). $\square$

Corolário 4.8. *Uma álgebra A é $\mathscr{C}$-suportada se, e somente se, todo morfismo $f : L \to M$, com $L \in \mathscr{C}$ e $M \notin \mathscr{C}$, se fatora através de $add\, E$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja $f : L \to M$ um morfismo em $mod\, A$, com $L \in \mathscr{C}$ e $M \notin \mathscr{C}$. Se $L \in \mathscr{E}$, então não há nada a demonstrar. Vamos supor que $L \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{E}$. Sendo A $\mathscr{C}$-suportada, o lema (4.5) nos garante que $T = E \oplus F$ é inclinante. Neste caso, T define um par de torção $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$ em $mod\, A$, dado por $\mathscr{T}(T) = add(ind\, A \setminus (\mathscr{C} \setminus \mathscr{E}))$ e $\mathscr{F}(T) = add(\mathscr{C} \setminus \mathscr{E})$. Como $M \notin \mathscr{C}$, obtemos que $M \in \mathscr{T}(T)$.

Considere $\{g_1, \cdots, g_d\}$ um conjunto de geradores do $End\ T$-módulo $Hom_A(T, M)$, e o morfismo $g = [g_1 \cdots g_d] : T^d \to M$. Em seguida, vamos mostrar que g é sobrejetor. Uma vez que $M \in \mathscr{T}(T) = Gen\ T$, existem um inteiro positivo m e um epimorfismo $f : T^m \to M$. Assim, há um morfismo $h : T^m \to T^d$ tal que $gh = f$. Sendo f sobrejetor, podemos concluir que g é também sobrejetor, finalizando a demonstração da afirmação.

Dessa forma, a sequência $0 \longrightarrow Ker\, g \longrightarrow T^d \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ é exata. Além disso, $Ker\, g \in \mathscr{T}(T)$. Ao aplicarmos o funtor $Hom_A(L, \_)$ na sequência acima, obtemos

$$0 \to Hom_A(L, T^d) \to Hom_A(L, M) \to Ext^1_A(L, Ker\ g)$$

que é também uma sequência exata. Mas $Ext^1_A(L, Ker\ g) \simeq D\overline{Hom_A}(Ker\ g, \tau_A L) = 0$, pois $Ker\ g \in \mathscr{T}(T)$ e $\tau_A L \in \mathscr{F}(T)$. Neste caso, $Hom_A(L, g)$ é sobrejetor e, portanto, f se fatora através de $add\, T$. Como $Hom_A(L, F) = 0$, f se fatora por $add\, E$.

$(\Leftarrow)$ Uma vez que a inclusão $Cogen\ E \subseteq add\ \mathscr{C}$ é sempre obtida, basta verificarmos que $add\ \mathscr{C} \subseteq Cogen\ E$. Sejam $L \in \mathscr{C}$ e $f : L \to I$ sua envolvente injetiva. Se $I \in \mathscr{C}$, então I é Ext-injetivo em $add\ \mathscr{C}$, donde $I \in Cogen\ E$. Caso contrário, f se fatora por $add\ E$, ou seja, existem $X \in add\ E$ e morfismos $g : L \to X$, $h : X \to I$ tais que $f = hg$. Sendo

f um monomorfismo, obtemos que g é um monomorfismo e, portanto, $L \in Cogen\ E$. Consequentemente, A é $\mathscr{C}$-suportada.

□

4.2.2 Relação entre álgebras Laura Estritas e Suportadas à Esquerda e à Direita

Dedicamos essa breve seção à demonstração de que toda álgebra laura estrita é tanto suportada à esquerda quanto à direita.

Lema 4.9. *Sejam A uma álgebra laura estrita, Γ a componente de $\Gamma(mod\ A)$ não semirregular e ${}_1\Sigma, \cdots, {}_s\Sigma$ as subseções descritas na definição* (3.7). *Então, o número de τ_A-órbitas em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ corresponde à soma entre $|{}_1\Sigma| + \cdots + |{}_s\Sigma|$ e o número de classes de isomorfismo de projetivos em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$.*

Demonstração: Vamos mostrar, inicialmente, que o número de τ_A-órbitas em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ que não contêm projetivos é menor ou igual a $|{}_1\Sigma| + \cdots + |{}_s\Sigma|$. Seja $\mathscr{O}(X)$ uma τ_A-órbita em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ que não contém projetivo. Então, X é estável à esquerda e, além disso, não é periódico, pois $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ é dirigido, devido ao lema (2.4)(b). Neste caso, a τ_A-órbita de X em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ tem interseção não trivial (ou seja, de mais de um ponto) com uma componente conexa de ${}_\ell\Gamma$, já que existe somente um número finito de A-módulos projetivos. Portanto, a cada τ_A-órbita de $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ pode-se associar uma τ_A-órbita de uma componente conexa infinita de ${}_\ell\Gamma$.

Por outro lado, seja $X \in \Gamma'$, com Γ' uma componente conexa de ${}_\ell\Gamma$, infinita. Em seguida, vamos mostrar que se a τ_A-órbita de X não tem interseção com $\mathscr{L}_A$, então X é periódico. Para isso, suponha que X não é periódico. Por hipótese, para cada $\ell \geq 0$, existe um antecessor $\tau^- Y_\ell$ de $\tau_A^\ell X$ tal que $dp\ {}_A\tau^- Y_\ell > 1$. De acordo com o lema (1.4), $Hom_A(I_\ell, Y_\ell) \neq 0$, para algum injetivo I_ℓ. Uma vez que o número de A-módulos injetivos é finito, há um injetivo I tal que existe um caminho $I \rightsquigarrow \tau_A^{\ell_i} X$, para todo $\ell_i \in \Lambda$, em que Λ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Considere um passeio de um módulo $Y \in \mathscr{L}_A$ para um módulo da forma $\tau_A^s X$, com $s \geq 0$, digamos

$$Y = Y_0 - Y_1 - \cdots - Y_t = \tau_A^u X$$

Observe que algum Y_i não é estável à esquerda, pois caso contrário, seria possível construir um caminho $\tau_A^v X \rightsquigarrow Y$, com $v \geq 0$ e, portanto, $\tau_A^v X \in \mathscr{L}_A$, contradizendo a hipótese. Tome j o maior índice tal que Y_j não é estável à esquerda, então cada módulo do passeio

$$Y_{j+1} - \cdots - Y_t = \tau_A^u X$$

é estável à esquerda e não é periódico, donde podemos construir um caminho $\tau_A^k X \rightsquigarrow Y_{j+1}$, para algum $k \geq 0$. Agora, como Y_j não é estável à esquerda, existe $\theta \geq 0$ satisfazendo $\tau_A^\theta Y_j \simeq P$, em que P é um A-módulo projetivo. Assim, há também um caminho $\tau_A^m X \rightsquigarrow P$, com $m \geq 0$. Sendo Λ infinito, podemos encontrar infinitos índices $\ell_{i_0} \in \Lambda$ tais que $\ell_{i_0} > m$. Para cada um desses, o módulo indecomponível $\tau_A^{\ell_{i_0}} X$ pertence ao caminho

$$I \rightsquigarrow \tau_A^m X \rightsquigarrow P,$$

o que contradiz o teorema (2.4) de [6], já que A é laura. Com isso, está finalizada a demonstração da afirmação feita.

Dessa forma, se X é estável à esquerda e não é periódico, então X define uma τ_A-órbita em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$. Como não existem ciclos em Γ', obtemos que $|_1\Sigma| + \cdots + |_s\Sigma|$ é menor ou igual ao número de τ_A-órbitas em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ que não contêm módulo projetivo. Consequentemente, a soma do número de classes de isomorfismo de projetivos em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ e $|_1\Sigma| + \cdots + |_s\Sigma|$ é igual ao número de τ_A-órbitas em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$, como desejado. □

Teorema 4.10. *Seja A uma álgebra laura estrita. Então, A é suportada à esquerda e à direita.*

Demonstração: Assuma que A é uma álgebra laura estrita. Vamos demonstrar apenas que A é suportada à esquerda, já que o restante pode ser obtido de maneira dual. Conforme o lema (4.5), basta mostrarmos que T é um A-módulo inclinante. Agora, devido ao item (c) do lema (4.1), T é sempre inclinante parcial, restando-nos apenas verificar que $|T| = rk\, K_0(A)$.

Seja Γ a componente de $\Gamma(mod\ A)$ não semirregular, quasi-dirigida e fiel, então $\mathscr{E}_A \subseteq \Gamma$. De fato, dado $M \in (\mathscr{E}_A)_1$, temos que $M \in \mathscr{L}_A$ e existem um injetivo I e um caminho $I \rightsquigarrow M$ em $ind\, A$. Neste caso, $I \in \mathscr{L}_A$ e, portanto, $I \in \Gamma$, segundo o corolário (3.18). Além disso, de acordo com a proposição (2.14), o caminho obtido pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis, donde $M \in \Gamma$. Agora, se $M \in (\mathscr{E}_A)_2$, então há um projetivo P não pertencente a $\mathscr{L}_A$ e um caminho seccional $P \rightsquigarrow \tau_A^- M$. Novamente, através do lema (3.18), concluímos que $P \in \Gamma$ e, consequentemente, $M \in \Gamma$, finalizando a demonstração da afirmação. Logo, $\Gamma \cap \mathscr{E}_A = \mathscr{E}_A$ e, em particular, $\Gamma \cap \mathscr{E}_A \neq \emptyset$. Segue então do teorema (2.18) que o número de τ_A-órbitas de $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ corresponde a $|\mathscr{E}_A|$. Dessa forma, é suficiente mostrarmos que os números de classes de isomorfismo de projetivos em $\mathscr{L}_A$ e de τ_A-órbitas de $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ coincidem. Segundo o lema (4.9), como A é laura estrita, o número de τ_A-órbitas de $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ é igual à soma entre o número de classes de isomorfismo de projetivos em $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ e $|{}_1\Sigma| + \cdots + |{}_s\Sigma|$, em que ${}_1\Sigma, \cdots, {}_s\Sigma$ são as subseções da definição (3.7). Devido ao lema (3.15), ${}_1\Sigma \cup \cdots \cup {}_s\Sigma$ define uma fatia completa em $mod\ {}_\infty A$ e, portanto, $|{}_1\Sigma| + \cdots + |{}_s\Sigma| = rk\ K_0({}_\infty A)$, que por sua vez corresponde ao número de classes de isomorfismo de ${}_\infty A$-módulos projetivos indecomponíveis. Por fim, observe que todo ${}_\infty A$-módulo projetivo indecomponível está em $\mathscr{L}_A$ e não está em Γ, e, reciprocamente, todo A-módulo projetivo em $\mathscr{L}_A$ que não pertence a Γ é ${}_\infty A$-módulo projetivo indecomponível.

Consequentemente, o número de τ_A-órbitas de $\Gamma \cap \mathscr{L}_A$ é igual ao número de classes de isomorfismo de módulos projetivos em $\mathscr{L}_A$, e o resultado segue. □

A recíproca do teorema acima é claramente falsa, sendo as álgebras hereditárias de tipo de representação finito contra-exemplos. Até o momento, nenhuma condição foi estabelecida sobre as álgebras suportadas à esquerda e à direita para que sejam laura estritas.

Referências Bibliográficas

[1] I. Assem. *Algèbres et Modules.* Les Presses de l'Université d'Ottawa, 2007.

[2] I. Assem. Left sections and the left part of an artin algebra. *Colloq. Math.*, 2007.

[3] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and S. Trepode. The left part and the Auslander-Reiten components of an artin algebra. *Revista de la Unión Mat. Arg.*, 46(2):19–33, 2005.

[4] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and S. Trepode. Some characterizations of supported algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(3):1121–1135, 2007.

[5] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and M. Verdecchia. *Módulos Inclinantes y Álgebras Inclinadas*, volume 21 of *Notas de Álgebra y Análisis.* Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, 2008.

[6] I. Assem and F. U. Coelho. Two-sided gluings of tilted algebras. *J. Algebra*, 269(2):456–479, 2003.

[7] I. Assem, F. U. Coelho, and S. Trepode. The left and the right parts of a module category. *J. Algebra*, 281(2):518–534, 2004.

[8] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[9] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of artin algebras III, almost split sequences. *Comm. Algebra*, 3(3):239–294, 1975.

[10] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of artin algebras IV: invariants given by almost split sequences. *Comm. Algebra*, 5:443–518, 1977.

[11] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. SmalØ. *Representation Theory of Artin Algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] M. Auslander and S. O. SmalØ. Preprojective modules over artin algebras. *J. Algebra*, 66:61–122, 1980.

[13] M. Auslander and S. O. SmalØ. Addendum "Almost split sequences in subcategories". *J. Algebra*, 71(2):592–594, 1981.

[14] M. Auslander and S. O. SmalØ. Almost split sequences in subcategories. *J. Algebra*, 69(2):426–454, 1981.

[15] K. Bongartz. On a result of Bautista and Smalϕ on cycles. *Comm. Algebra*, 11(18): 2123–2124, 1983.

[16] S. Brenner and M. C. R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Lecture Notes in Math.*, 832:103–169, 1980.

[17] J. F. Carlson and D. Happel. Contravariantly finite subcategories and irreducible maps. *American Math. Society*, 117(1):61–65, 1993.

[18] F. U. Coelho and M. Lanzilotta. Algebras with small homological dimensions. *Manuscripta Math.*, 100:1–11, 1999.

[19] F. U. Coelho and M. Lanzilotta. Weakly shod algebras. *J. Algebra*, 256(1):379–403, 2003.

[20] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalϕ. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 120(575), 1996.

[21] D. Happel and C. M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274:399–443, 1982.

[22] S. Liu. Semi-stable components of an auslander-reiten quiver. *J. London Math. Soc.*, 2(47):405–416, 1993.

[23] C. M. Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, volume 1099 of *Lectures Notes in Math.* Springer, 1984.

[24] S. O. SmalØ. Torsion theories and tilting modules. *Bull. London Math. Soc.*, 16:518–522, 1984.