UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ELEN ANDREA JANZEN

O PAPEL DO PROFESSOR NA FORMAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DE ESTUDANTES DURANTE A CONSTRUÇÃO DE PROVAS EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

CURITIBA

2011

ELEN ANDREA JANZEN

O PAPEL DO PROFESSOR NA FORMAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DE ESTUDANTES DURANTE A CONSTRUÇÃO DE PROVAS EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Educação, Linha de Educação Matemática, Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

CURITIBA

2011

Aos meus pais,

por todo o amor, por quem sou

e por tudo que alcancei

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e pelas oportunidades, e pelos dons que nos concede.

À minha família, pelo amor, compreensão e cumplicidade, transmitindo-me sempre muito apoio e encorajamento para a realização desta jornada.

Ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes, pela orientação e ensinamentos, pelo apoio e incentivos, e pela confiança neste trabalho.

Aos amigos que compartilharam o processo desta pesquisa e sempre estiveram presentes dando seu apoio.

Aos professores, funcionários e colegas do programa de Pós-Graduação em Educação pela dedicação e amizade.

Aos professores do Departamento de Expressão Gráfica da UFPR pela dispensa para realizar parte desta pesquisa.

À CAPES, pela possibilidade de realizar o doutorado-sanduíche na Alemanha.

Ao Institut für Didaktik der Mathematik e ao Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, pela acolhida e pela oportunidade de realizar parte da pesquisa

Aos professores e alunos participantes dessa pesquisa, pela disponibilidade e por possibilitarem-me observá-los.

À todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para que este trabalho se realizasse.

Ensinar não é transferir conhecimentos,
mas criar as possibilidades para a
sua criação ou produção

Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa visa a trabalhar com provas em geometria em um ambiente dinâmico da perspectiva do papel do professor de ensino superior, em seu papel de formador do pensamento matemático. Assim, num primeiro momento apresentamos uma discussão sobre o que é o pensamento matemático e o que se entende por provas, que são vistas como um processo e não apenas um resultado formal. Na seqüência, se aborda o conhecimento geométrico num ambiente dinâmico, e como as potencialidades do software contribuem para a construção de provas e do pensar matematicamente. Feita esta discussão, pode-se falar no papel do professor neste contexto, e apresentamos um estudo prático que tem como finalidade compreender, através de uma análise descritiva, este novo papel do professor frente às tecnologias onde ele não é mais o único detentor do conhecimento, mas passa a ser um orientador das atividades do aluno. Apresentamos então, com base na análise descritiva, algumas categorias do tipo de intervenção que o professor realiza enquanto orienta o aluno na construção de uma prova num ambiente dinâmico.

Educação Matemática. Pensamento Matemático. Formação de Professores. Provas. Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This research aims to work with proofs in geometry in a dynamic environment of the perspective of the role of the university teacher, in his formative role of the mathematical thinking. So, at first we present a discussion about the mathematical thinking and what is understood by proofs, which are seen as a process and not just a formal result. In the sequence, the geometrical knowledge is approached in a dynamic environment, looking into how the potentialities of the software contribute to the construction of proofs and the mathematical thinking. After this discussion it is possible to talk about the teacher's role in this context, so present an empirical study that has as a goal to understand, through a descriptive analysis, this new role of the teacher when working with technologies where he is no longer the only holder of knowledge but is now an advisor of the student's activities. We present, based on the descriptive analysis, some categories of the type of intervention that the teacher carries out while orientating the student in the construction of proofs in a dynamic geometry environment.

Mathematics Education. Mathematical Thinking. Teacher's Formation. Proofs. Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde minha entrada como docente na Universidade, atuando num curso de Licenciatura em Matemática, tenho trabalhado com provas e demonstrações[1] em geometria. E em minha prática, tenho percebido que os alunos têm uma grande dificuldade em trabalhar com elas. De acordo com a literatura, os próprios termos 'demonstração' e 'prova' tem sido usados das mais diversas formas; e as mais variadas funções lhe são atribuídas. Isso mostra a complexidade de sua conceituação e compreensão.

De acordo com de Villiers (2001, p.31), os alunos parecem não compreender as funções da prova e o autor afirma que o principal problema em jogo é a motivação que as várias funções da demonstração assumem para os alunos. Tradicionalmente, a função da prova é o de verificação e convicção da veracidade de afirmações matemáticas. No entanto, este ponto de vista como sendo a principal função da demonstração não explora todo o potencial da demonstração na educação, pois a convicção em matemática é muitas vezes obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica. Teoremas são, na maior parte das vezes, descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações (DE VILLIERS, 2001, p.32).

Matemáticos, na sua maioria, compartilham da opinião de que a prova é mais valiosa quando conduz a uma compreensão, ajudando a pensar mais claramente e efetivamente sobre matemática (HANNA, 2000b, p.7). Assumindo tal posição, em que uma prova deve levar, a princípio, a uma melhor compreensão da propriedade em questão, ou seja, de início deve assumir um papel de explicação, fica a tarefa de trabalhar a delicada relação existente entre o conhecimento intuitivo e sua sistematização teórica, isto é, a relação entre o pensamento intuitivo e o pensamento formal. Trabalhar com esta relação é, em geral, bastante difícil para os alunos, pois estes egressam do Ensino Médio com muitas informações intuitivas e dispersas

1 Para esta pesquisa, não faremos a distinção entre os termos 'prova' e 'demonstração'.

e também com diversos procedimentos algorítmicos sem a devida compreensão. Para eles, parece complicado entender que propriedades conhecidas devam ser questionadas e longos argumentos usados para sustentar a sua veracidade, que é “evidente” (MARIOTTI, 2000, p.30). No entanto, também é difícil para muitos professores que, embora saibam fazer demonstrações, possuem pouca clareza sobre seu valor educativo. Neste sentido, vale ressaltar que a necessidade de argumentação para sustentar uma verdade é condição para a comunicabilidade da matemática, pois o que é “evidente” para um pode não sê-lo para outro.

Atualmente há várias possibilidades de se trabalhar com a geometria. Na utilização do papel e lápis, a repetição de uma construção de modo a procurar as invariâncias e as regularidades da situação pode conduzir à desmotivação. Com a chegada da tecnologia, surgem novas maneiras de se abordar o assunto. Denominada Geometria Dinâmica, softwares como o Cabri-Géomètre, Sketchpad, Cinderella, entre outros, permitem a manipulação de figuras geométricas baseadas em suas propriedades. Esta manipulação, neste sentido, está mais ligada a idéia de visualização. No entanto, visualização não é apenas uma percepção visual direta, mas uma apreensão operatória da figura em questão, o que envolve uma dinâmica, e o que envolveria uma nova concepção manipulativa da Geometria. Ou seja, a visualização se foca na percepção e compreensão de imagens visuais; e isto exige um “aprender a ver e a ler” estas figuras. Para desenvolver a visualização, a figura desempenha um papel importante exatamente pelo suporte intuitivo que pode dar e por desempenhar uma função heurística (MORETTI, 2006, p.5). No entanto, normalmente se trabalha com as figuras numa abordagem psicológica da percepção imediata, onde apenas se vê o que está posto, sem uma exploração e análise, ou seja, uma percepção que não oferece condições ao aluno para olhar a figura sob outros aspectos, isto é, não possibilita uma exploração heurística.

Duval (1999b) corrobora com tais idéias, pois afirma que as figuras têm papel intuitivo e heurístico na representação geométrica, porque permitem analisar uma situação em conjunto, são um meio mais direto para explorar os diferentes aspectos de um problema. Portanto, as possibilidades heurísticas de uma figura requerem não só uma habilidade visual, mas, também, outras competências, ou seja, é preciso dominar conhecimentos matemáticos para uma visão geral que engloba figura e enunciado. Assim, não se trata apenas de enxergar o que está posto, mas sim da realização de reconfigurações, as visíveis e as possíveis, ou seja, trata-se da apreensão operatória da figura, de perceber as relações que estão presentes ali. Esta exploração heurística permite dar um sentido mais dinâmico às características da figura, permitindo fazer manipulações, físicas ou mentais, sobre o todo ou parte da figura (MORETTI, 2006, p.7).

Assim, trabalhar com esta função heurística da figura possibilita ao aluno desenvolver suas formas de pensar, de olhar e de raciocinar; neste sentido, visando a uma reeducação do olhar em geometria: não o simples “ver”, mas considerando a apreensão operatória. Para tais fins, os softwares de geometria têm grande potencial, pois podem possibilitar a exploração desta função heurística, explicitando a dinâmica envolvida no próprio conceito, um novo conceito, de figura que surge neste contexto; não uma figura estática que se movimenta, senão uma figura dinâmica, dinamicidade que passa a fazer parte da constituição da figura. Assim, os ambientes computacionais (ambientes nos quais os computadores são utilizados como ferramentas pedagógicas) para criação e exploração geométrica são ferramentas poderosas para levar os alunos a formular e a testar conjecturas, trabalhando também com a função heurística das figuras.

Salienta-se, no entanto, que as responsabilidades pelas alterações não podem ser atribuídas à ferramenta computacional, por si só. Com efeito, a tecnologia, neste caso o computador, apresenta-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem. Ela tem sua importância como um instrumento significativo para favorecer a aprendizagem de alguém. Assim, irá colaborar se usada adequadamente, para o desenvolvimento cognitivo dos alunos (MASETTO, 2006, p. 139). Portanto, é todo um contexto social e cultural da utilização das tecnologias, nomeadamente as atividades propostas, e, principalmente, a atuação do professor.

As competências e habilidades do professor de hoje não são mais as mesmas de décadas passadas. Se antes o professor era formado para valorizar conteúdos e ensinamentos acima de tudo, privilegiando a técnica de aula expositiva para transmitir esses ensinamentos (MASETTO, 2006, p.134), hoje, tem, ou precisa ter, papel mais formador, isto é, não será apenas um transmissor de um saber matemático, mas formador do pensar matemático.

Dentre as novas competências do professor, reside aquela de conhecer e usar as novas tecnologias. Ao trabalhar com uma geração que convive com as tecnologias e que tem interiorizado transformações significativas na maneira de viver, de relacionar e de pensar (PERRENOUD, 2000, p.139), e, sobretudo, na maneira de conceber as diversas relações geométricas, e, portanto, de pensar geometricamente, não pode ele, o professor, prescindir de conhecê-las e utilizá-las em sua prática.

Trazer as novidades da tecnologia para dentro da sala de aula é o que tem acontecido em muitas escolas e universidades. Neste processo de inserção, o professor é elemento fundamental. É através dele que a tecnologia chega às salas de aula, e é utilizada no processo de ensino e aprendizagem, embora os alunos já tragam alguma experiência de uso dessa tecnologia em outros contextos.

Neste sentido, pode-se formular a seguinte hipótese: o alcance da tecnologia está relacionado ao domínio por parte do professor; se este estiver preparado para utilizá-la de forma coerente, buscando todo seu potencial para a formação do aluno, aí sim se poderá falar em avanços na educação por meio da tecnologia.

Portanto, não se trata de transmitir informações sobre a tecnologia, mas sim usar da tecnologia para a construção do conhecimento e, especificamente no caso da geometria, do pensamento matemático como ingrediente fundamental formativo. Formar não é apenas informar e uma das novas competências exigidas do professor é usar também da tecnologia para a formação do aluno. Assim, é fazer da tecnologia uma ferramenta significativa pedagogicamente, na medida em que contribui para conduzir ao estabelecimento de relações entre conhecimentos e suas diversas formas de representação; para aprender a fazer perguntas, como um primeiro passo de um ensino e aprendizagem mais investigativos; para oferecer novas possibilidades de trabalhar operativamente; dentre outras coisas (WEIGAND, 2002, p.28). Neste sentido, o papel do professor passa a ter um caráter formativo, especialmente na formação do pensamento matemático.

Assim, os softwares desenvolvidos na área de geometria permitem, como já dito, que o “aprender” seja mais investigativo, tornando o aluno parte do processo, isto é, pode fazer do aluno um ser ativo em busca do conhecimento, sem dispensar o professor em seu papel formativo. No que se refere a provas, tais softwares se tornam uma ferramenta poderosa que possibilita ao aluno explorar e conjecturar, um processo prévio à elaboração de uma prova e/ou demonstração que é o que se procura no final. Mas como fica o papel do professor para que isto realmente ocorra? Para que o aluno realmente se torne um ser ativo e construa seu conhecimento? Nas formas do “pensar matematicamente”, uma etapa realmente importante e relevante para a construção do conhecimento matemático refere-se a processos de caráter não dedutivo, envolvendo raciocínios ou argumentações indutivas ou analógicas, etc, mais do lado da intuição matemática que do raciocínio formal.

À luz desta discussão, podemos formular a seguinte hipótese: nesta etapa, é fundamental, por um lado, a intervenção do professor como catalisador desses processos em seu papel formativo, e por outro, as potencialidades dinâmicas dos softwares utilizados. Segundo Mariotti (2000, p.31), o professor tem de elaborar uma nova relação com o conhecimento matemático, mais dinâmico, se adaptando a esses novos elementos que aparecem com a tecnologia.

Neste sentido, esta pesquisa tem como objetivo buscar compreender qual o papel do professor de ensino superior frente às tecnologias como formador do pensar matematicamente tendo como cenário o desenvolvimento de provas num ambiente dinâmico de geometria. Buscamos, então, explorar o potencial de trabalhar com provas em geometria em um ambiente dinâmico da perspectiva do professor de ensino superior, em ambas direções: teórica e prática. Ou seja, o que significa trabalhar com provas em ambientes dinâmicos em termos teóricos – como a dinamicidade de certa maneira muda os conceitos geométricos envolvidos – mas também buscamos as implicações para a prática do professor – quando usa e explora as potencialidades desses softwares. Portanto, uma questão a ser discutida pela pesquisa é: Como pode o professor de ensino superior criar um ambiente favorável para o aprender a pensar matematicamente através de provas em geometria num ambiente dinâmico com suas potencialidades?

Para que isto possa ser discutido é necessário, primeiramente, colocar o que é o pensar matematicamente e o que são estes ambientes dinâmicos de geometria e quais suas potencialidades, para então se poder falar do papel do professor neste contexto.

Assim, num primeiro momento, apresentamos no capítulo 2 o que entendemos por pensamento matemático e os processos que estão envolvidos. Na seqüência apresentamos também o que se entende por prova na literatura e quais as funções atribuídas a ela. Neste sentido, explicitamos os processos que estão envolvidos num momento anterior a uma prova formal, que é onde diversos processos do pensar matematicamente podem ocorrer. Trazemos, então, o que entendemos por prova: um processo e não apenas um produto final.

Como nosso interesse dentro da matemática está especificamente na geometria, no capítulo 3 apresentamos, primeiramente, como se dá a construção do conhecimento geométrico. Em seguida, passamos a mostrar o que são os ambientes dinâmicos de geometria e quais suas potencialidades num processo de prova. Também discutimos o que muda no próprio conceito de figura em um ambiente dinâmico, onde o foco está nas relações entre os objetos e não no objeto em si, possibilitando uma definição dinâmica de 'figura'.

O capítulo 4 trata, então, do professor de ensino superior, quem é e qual sua formação. Segue uma discussão do papel formativo deste professor e de sua prática em relação às tecnologias.

No capítulo 5 apresentamos o estudo prático que foi realizado, seu objetivo, os sujeitos participantes e as atividades que foram selecionadas. Na seqüência, no capítulo 6, faz-se então a análise deste estudo, buscando compreender melhor o papel formativo do professor de ensino superior diante de atividades de prova num ambiente dinâmico. Para então no capítulo 7 colocar as considerações a respeito da pesquisa e possíveis desdobramentos para o trabalho.

Os anexos apresentam as transcrições dos vídeos do estudo prático assim como a transcrição das entrevistas, traduzidas para o português.

2 O PENSAMENTO MATEMÁTICO E A PROVA

Para compreender como os alunos podem chegar a construir provas formais, de caráter dedutivo, é importante examinar o processo que vem antes. Atividades de exploração que envolvam raciocínios de natureza não formal são o cenário onde o pensar matematicamente pode acontecer. Portanto, primeiramente apresentamos o que entendemos por pensar matematicamente e por provas, para então discutir as atividades nas quais os alunos se engajam antes de elaborarem uma prova formal, visando a um conceito de prova como processo, não como produto.

2.1 O PENSAMENTO MATEMÁTICO

Muitos dos cursos de graduação tendem a dar ao aluno o produto do pensamento matemático ao invés do processo de pensar matematicamente. (SKEMP 1971[2], *apud* TALL 1991, p.3), no entanto, há de se reconhecer que existam alguns cursos onde se tem a iniciativa de trabalhar de forma diferente. Antes que um teorema possa ser conjecturado, o que dirá provado, existe muito trabalho a ser feito concebendo quais idéias podem ser aproveitadas e quais relações podem ser úteis. Portanto, nesta fase inicial, mais criativa, até se pode ter uma lógica envolvida, mas é necessária uma atividade mental mais flexível, informal, que faz parte do processo que chamamos de pensamento matemático. Mas então o que é o pensamento matemático? No livro editado por Tall (1991) temos uma discussão a respeito do pensamento matemático avançado. Segundo o autor, muitos dos processos do pensamento matemático avançado já se encontram num nível mais elementar, no entanto, não são aprofundados ou não possuem a clareza necessária. Neste sentido, existe uma transição significativa ao passar do pensamento matemático elementar para o avan-

2 Skemp, R. R. (1971) The Psychology of Learning Mathematics, Penguin, London.

çado: o de descrever para definir, o de convencer para provar, de uma maneira lógica baseada em tais definições.

Segundo Tall, há todo um ciclo de atividades no pensamento matemático avançado: desde o ato criativo de considerar um problema no contexto da pesquisa matemática que leva à formulação criativa de conjecturas até o estágio final do refinamento e da prova. Muitas dessas atividades até aparecem no pensamento matemático elementar, mas as definições formais e as argumentações e deduções são o que distinguem o pensamento matemático avançado (TALL, 1991).

Dreyfus (1991) discute a importância dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado. Para este autor não existe uma distinção clara entre os processos do pensamento matemático elementar e o avançado, no entanto, o avançado tem seu foco maior em abstrações, definições e deduções. Além disso, uma característica distinta entre ambos os pensamentos é a complexidade, e como ela é tratada.

Dentre os processos do pensamento matemático avançado discutidos por Dreyfus temos a representação e a abstração. As representações possuem uma função importante no pensar e aprender matemática. Quando falamos em grupos, integrais ou qualquer outro objeto ou processo matemático, cada um tem algo diferente em mente de acordo com experiências anteriores, temos então representações mentais do objeto ou processo em consideração. Essas representações mentais se referem a esquemas ou quadros de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. Professores e alunos em geral possuem representações mentais distintas o que acarreta na dificuldade dos alunos de compreender seus professores.

Para se ter uma boa compreensão da matemática, segundo Dreyfus (1991), é necessário que se tenha representações mentais ricas de conceitos, que contenham vários aspectos deles. Isso permite uma maior flexibilidade na resolução de problemas. Em geral, isso falta aos alunos, pois se percebe que qualquer mudança na estrutura de um problema ou na sua formulação lhes tira a capacidade de resolução. No entanto, quando se tem várias representações mentais de um conceito elas podem competir ou se completar. Se competirem, podem se tornar um obstáculo à aprendizagem, mas se forem complementares podem se integrar numa única representação de tal conceito. Isto está relacionado ao segundo processo discutido mais a frente, a abstração. Os alunos em geral se limitam a usar uma única representação do conceito e assim falham em resolver o problema em questão. Uma possível abordagem no ensino é usar diversas representações desde o inicio, fazendo a "tradução" de uma para outra. Os ambientes computacionais são uma ferramenta útil para tal, onde também aparece o processo de visualização. Visualização aqui não como simplesmente ver o que está posto, mas sim olhar cada parte, buscar configurações e relações que possam ser exploradas. Assim, a visualização tem seu papel importante no trabalho de muitos matemáticos e é também uma maneira na qual as diversas representações mentais podem vir a existir. Há um pensamento visual por trás da visualização que também faz parte do pensamento matemático.

Enquanto a representação é também parte do pensamento matemático elementar, o outro processo discutido por Dreyfus, a abstração, faz parte dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado. Se o aluno desenvolver a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático.

No entanto, dois outros processos além da representação são pré-requisitos para a abstração: generalizar e sintetizar. Para Dreyfus (1991, p.35) generalizar significa "derivar ou induzir de particulares, identificar aspectos em comum, expandir domínios de validade", já sintetizar significa "combinar ou compor partes de tal maneira que formem um inteiro, uma entidade, que é mais do que apenas a soma das partes".

Um aspecto apontado por Thurston (1990[3], *apud* DREYFUS 1991, p.35) é que essa possibilidade de síntese da matemática a torna compressível. No entanto, este autor afirma que enquanto o *insight* que vem com essa compressão é uma das particularidades da matemática, esse processo é irreversível, ou seja, é difícil para um matemático ou professor de matemática se colocar no lugar do aluno que ainda não alcançou essa síntese e perceber quanto trabalho detalhado com conceitos e operações é necessário para ter a habilidade de começar a sintetizar. Portanto, é importante o professor se conscientizar desse fato, de que o aluno ainda não possui essa habilidade de síntese, e seu papel de professor é criar a possibilidade de o aluno adquiri-la.

O processo de abstração é intimamente ligado ao de generalização, no entanto Dreyfus (1991, p.36) diferencia tais processos: para o autor "generalizar geral-

3 Thurston, W. P. (1990) Mathematical Education, Notices of the American Mathematical Society, 37 (7), 844-850.

mente envolve uma expansão da estrutura do conhecimento do indivíduo enquanto a abstração envolve uma reconstrução mental”. Abstração é, portanto, para o autor, um processo construtivo que requer a habilidade de mudar o foco dos objetos em si para a estrutura de suas propriedades e relações. Assim, a abstração possui o potencial de generalizar e sintetizar, enquanto abstrair e representar são processos que se complementam em direções opostas, como afirma Dreyfus:

> Se por um lado, um conceito é abstraído de diversas representações suas, do outro, representações são sempre representações de algum conceito mais abstrato. Se uma única representação de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela e não no objeto abstrato. No entanto, se diversas representações são consideradas em paralelo, a relação do conceito abstrato envolvido é que se torna importante. (DREYFUS, 1991, p.38 – tradução nossa)

Existe também uma necessidade cognitiva em paralelo: o pensamento de muitos matemáticos e alunos de matemática melhora se forem capazes de se colocarem mentalmente em uma representação particular, uma representação visual. Novamente aparece a visualização que tem, portanto, sua contribuição nos processos que envolvem o pensar matematicamente. Isto será discutido com mais detalhes no capítulo seguinte.

2.1.1 O Pensamento Matemático Avançado e os Processos Envolvidos

Dreyfus (1991) não só discute os processos envolvidos no pensamento matemático avançado, mas também o próprio pensamento matemático avançado como um processo. Segundo o autor, um dos objetivos importantes dos professores de matemática sempre foi a compreensão, mais do que saber ou estar apto a fazer algo. Para ele, a compreensão é um processo que ocorre na mente do aluno e até pode ser um rápido *insight*, um clique na mente, mas em geral é baseada numa longa seqüência de atividades de aprendizagem na qual ocorrem e interagem diversos processos mentais. Assim, é difícil analisar o que significa compreender um conceito matemático, mas pesquisadores da educação matemática se tornaram conscientes da importância dos componentes do processo de compreensão da matemática avançada e suas interações.

No que se refere ao ensino baseado no currículo, Dreyfus (1991) também aponta para o fato de que os típicos cursos de matemática a nível universitário em geral possuem um cronograma definido, que diz ao professor exatamente o que ele deve cumprir. Independente do que seja, para o professor é um conteúdo bem conhecido, um segmento aceito do conhecimento matemático e, por mais que o professor pense nas diversas maneiras de organizar seu material em uma estrutura lógica, em geral cada uma dessas estruturas irá basicamente consistir num determinado número de teoremas a serem provados, e de aplicações desses teoremas. E ele o fará buscando usar todo o tempo disponível para isso, mas fazendo uso extensivo de formalismos convenientes do conteúdo especifico. Fazendo isso, um aspecto importante da matemática está sendo apresentado aos alunos, o produto final no qual aquele segmento da matemática se tornou. O professor presumivelmente sabe que a matemática não é criada nessa forma polida e final, mas por tentativa e erro, através de afirmações parcialmente corretas (ou incorretas), através de formulações intuitivas, através de desenhos pelos quais se tenta visualizar partes de estruturas matemáticas em questão, através de mudanças dinâmicas feitas nessas figuras, etc. E mesmo o professor sabendo disso, isso não impede que caia num ensino da matemática formal e polida.

A maior parte da matemática ensinada desde o ensino fundamental até o curso superior é sobre rituais: "faça isso, depois aquilo, depois aquele outro..." e os professores em geral aceitam o ritual realizado de forma correta como sendo sucesso suficiente para o momento. Em outras palavras, o que a maioria dos alunos aprende nos cursos de matemática é realizar uma série de procedimentos padronizados, em formalismos definidos, para obter respostas a uma classe de exercícios bem delimitada, um ensino baseado em processos algoritmizados. Como afirma Dreyfus (1991, p. 28) eles terminam com um montante considerável de conhecimento matemático, mas sem a metodologia de trabalho de um matemático, ou seja, neles falta o *know-how* que lhes permita usar seu conhecimento de uma maneira flexível para resolver problemas que lhes sejam desconhecidos. Foi-lhes passado o produto da atividade dos matemáticos em sua forma final, mas não obtiveram *insight* no processo que levou os matemáticos a criar esses produtos. (DREYFUS, 1991)

A mente de um matemático é um lugar para se procurar por idéias de como melhorar a compreensão dos alunos. Hadamard (1945[4], *apud* DREYFUS 1991) enfatiza a importância do raciocínio informal, do pensar na ausência de palavras, da

4 Hadamard, J. (1945), The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton University Press.

imagem visual, de imagens mentais, de brincar com as idéias, etc; ou seja, do aspecto experimental da matemática. Devido ao progresso tecnológico que vem sendo feito na computação gráfica, os meios visuais tem sido mais usados e os computadores podem servir de ferramenta heurística tanto para o matemático como para os alunos de matemática. Se a ferramenta estiver direcionada para um fenômeno interessante e corretamente focada, poderá mostrar um quadro inesperado, geralmente visual, do fenômeno sendo estudado, e assim levar a novas idéias, ou ao reconhecimento de relações desconhecidas. No caso do pesquisador, espera-se que essas idéias e relações sejam originais, no caso do aluno, já podem ser conhecidas de outras pessoas, mas serão novas para este indivíduo em particular.

Embora os processos de pesquisa e de aprendizagem possam ser diferentes, existem similaridades importantes, nomeadamente em ambos os casos o indivíduo tem que manipular, investigar e descobrir algo sobre objetos sobre os quais seu conhecimento é muito parcial e fragmentado.

> Assim como o processo de pesquisa é complexo, assim também é o processo de aprendizagem correspondente. Ele contém a essência do que é o pensamento matemático avançado. Ele provavelmente compreenderá, em qualquer etapa e com estreitas interações, vários processos como representar, visualizar, generalizar, assim como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Em outras palavras, o pensamento matemático avançado consiste de uma grande gama de processos que interagem. (DREYFUS, 1991, p.30 – tradução nossa)

É importante para o professor de matemática estar ciente desses processos mencionados por Dreyfus para poder compreender algumas das dificuldades que os alunos enfrentam. Nas palavras do autor (DREYFUS 1991, p.41): “Nosso objetivo deveria ser o de trazer o pensamento matemático dos alunos o mais próximo possível do pensamento de um matemático. E compreender os processos envolvidos no pensamento matemático avançado e suas inter-relações é um pré-requisito para tal.” Trazer o aluno mais próximo possível do pensamento de um matemático é então criar oportunidades e situações que o levem a manipular, investigar e descobrir a matemática. Para que isso seja possível, essa dinâmica dentro da matemática, não é possível enxergá-la como uma ciência pronta e acabada.

2.2 A MATEMÁTICA COMO ATIVIDADE

A concepção de Matemática que adotaremos para este trabalho se assemelha, então, com a concepção matemática de Freudenthal. Ele defende que a matemática é uma atividade e que a melhor forma de aprender essa atividade é executá-la.

Segundo Freudenthal (1991, p.14) qualquer pesquisador ou matemático irá concordar que a matemática é uma atividade, uma atividade individual que poderá se tornar em algo publicável ou não. E para a publicação, por que incomodar os leitores com todo o processo, com os erros e os caminhos abandonados? Então, organizam e apresentam o trabalho final, polido e acabado. Assim, o estilo em que a matemática vem sendo apresentada dá a impressão de que o que foi colocado ou provado ali sempre foi assim polido e organizado desde o início, ignorando o processo de descoberta. Assim ela também é apresentada na escola e na universidade, provas prontas, que não levam em conta o processo de como foi criado, e isso não contribui para a compreensão do leitor/aluno sobre o assunto. Mas ver a matemática como atividade: uma atividade de descoberta, de organização numa interação entre conteúdo e forma (FREUDENTHAL, 1991), pode contribuir para que o aluno aprenda a pensar matematicamente.

Em Polya encontramos uma concepção semelhante, ele descreve que o pensar matematicamente se manifesta, em sua opinião, não só na capacidade de saber lidar com abstrações e estruturas abstratas, mas na capacidade de fazer matemática. Esse último, para Polya significa saber resolver problemas matemáticos.

> ... porque ela (a Matemática) tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa. A Matemática apresentada da maneira euclidiana revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. (POLYA, 1995, p.VI).

Segundo Roth (2005), para Polya essa dualidade da matemática se espelha no pensamento matemático e assim também nas atividades dos matemáticos, o que o seguinte trecho corrobora:

> As atividades que mais se sobressaem nos matemáticos são a descoberta de demonstrações rigorosas e a construção de sistemas axiomáticos. Mas existem outras atividades, que deixam poucos vestígios numa obra completa e publicada, e por isso, não chamam tanta atenção. Mas nem por isso são menos importantes; quer dizer, o reconhecimento de conceitos de uma

> situação concreta, seguindo com conjecturas de formas variadas, a antecipação de um resultado ou da linha central de uma demonstração, antes de os pormenores serem preenchidos. Conjecturar engloba generalizar de casos observados, argumentação indutiva, analogia etc. (POLYA[5], 1980, *apud* ROTH, 2005, p.49 – tradução nossa)

As considerações de Polya sobre as atividades dos matemáticos mostram um possível caminho de como se aproximar do fenômeno de “pensar matematicamente”. É buscar as atividades características dos matemáticos quando estes buscam a resolução de algum problema de matemática, é aprender a conjecturar, a generalizar, a sintetizar e buscar padrões, é se engajar na atividade que a matemática é.

2.2.1 Tipos de Raciocínio

Dentre as diversas atividades características dos matemáticos estão as diferentes formas de argumentação e raciocínio, como a lógico-dedutiva, indutiva, abdutiva e analógica.

A dedução e a indução são as mais conhecidas no campo matemático. A dedução é um procedimento lógico que vai do geral ao particular. Já a indução realiza um caminho contrário ao da dedução, pois se parte de casos particulares e se procura uma lei geral, uma definição ou teoria geral que sintetize todos esses casos particulares.

A abdução, para Peirce, já é uma busca por uma explicação, ou seja, é o processo de formar hipóteses explicativas (BEUCHOT, 1998), justamente na direção da procura de compreensão. Neste sentido, explorações são transformadas em conjecturas. O raciocínio abdutivo permite obter hipóteses que formulamos antes da confirmação (ou negação) de um caso. Em outras palavras, fazer abdução é raciocinar até chegar a uma hipótese o que é diferente de raciocinar a partir de uma hipótese como acontece na dedução. Portanto, para compreender como alunos podem chegar a construir provas formais, de caráter dedutivo, é importante examinar a maneira de pensar que precede a prova formal, em atividades de exploração que envolvam raciocínio matemático informal, especialmente o abdutivo.

Já a analogia, segundo Polya (1995, p.29) é uma espécie de semelhança: “objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto, objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes”. Ainda segundo o

5 Polya, G. (1980), Wie lehren wir Problemlösen? In: Mathematiklehrer, Heft 1, P.3 -5.

mesmo autor, a analogia está presente no nosso cotidiano, no nosso pensamento e nossa fala, e atinge também as mais elevadas conclusões científicas. Assim, ela pode ser utilizada nos mais diversos níveis e alcançar, inclusive, o rigor matemático. Ao tentarmos resolver um problema proposto podemos muitas vezes utilizar a resolução de um problema análogo mais simples, empregando o mesmo método ou o resultado, ou ambos. Muitas vezes a analogia pode ajudar também na elaboração de uma conjectura, onde a previsão de um resultado pode surgir de um problema análogo através de um conveniente processo de tradução.

Em todos esses tipos de argumentação podemos identificar um aspecto importante, neles percebemos a relação com a intuição. Em algum momento, somos guiados pela intuição para encontrar o passo seguinte, seja na dedução, na indução, na abdução ou na analogia. Assim, a intuição no raciocínio matemático é um aspecto importante e deve ser considerado. A seção seguinte discute com mais detalhes o papel da intuição nestes processos.

2.2.2 Papel da Intuição no Raciocínio Matemático

O raciocínio matemático em geral não é reduzível a estruturas conceituais formais.

> A história de aquisições matemáticas tem sido influenciada pela profunda tendência de indivíduos de produzir dispositivos tacitamente mentais que lhes permite acreditar diretamente na validação objetiva de suas concepções, mesmo antes de uma justificativa completa ter sido alcançada. Nós consideramos que a emergência de cognições aparentemente evidentes e consistentes – denominadas intuições – é uma condição fundamental de uma atividade de raciocínio normal, fluente e produtiva. Uma intuição é uma estrutura cognitiva complexa que tem o papel de organizar a informação disponível (mesmo que incompleta) e torná-la em representações aparentemente coerentes, internamente consistentes, evidentes e significativas. (FISCHBEIN, 1987, p.211 – tradução nossa)

Isso acaba por trazer uma contradição entre a natureza da matemática do ponto de vista formal, organizada de maneira axiomática, e a natureza do raciocínio matemático. Segundo Fischbein (1987), a dinâmica do raciocínio matemático inclui diversos componentes psicológicos como crenças e expectativas, imagens visuais, analogias e paradigmas. Estes, muito mais de serem apenas resíduos de formas primitivas de raciocínio, são ingredientes genuinamente produtivos e ativos de qualquer tipo de raciocínio (FISCHBEIN, 1987). Segundo o mesmo autor, formas intuitivas de raciocínio não são apenas um estágio transitório no desenvolvimento da inteligência, mas são uma influência na nossa maneira de resolver e interpretar problemas em qualquer estágio da vida. Portanto, a educação matemática não pode ignorar o impacto da intuição nas maneiras de raciocinar dos alunos. Deve-se considerar também o fato de que concepções baseadas na intuição não são eliminadas por meras explicações verbais, pois são produto de uma experiência pessoal, do envolvimento pessoal do individuo em certas atividades teóricas ou práticas (FISCHBEIN, 1987).

Segundo Fischbein (1987) existem dois tipos de intuição: a intuição primária, que se refere àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem nos humanos, de uma maneira natural e espontânea, independente e antes de uma instrução sistemática; e a intuição secundária, que é resultado de um treino intelectual sistemático. Para o autor, novas intuições ou crenças cognitivas podem ser criadas através de uma influência sistemática e instrucional.

> O desenvolvimento de novas intuições matemáticas – secundárias – implica, então, situações didáticas em que o aluno pode avaliar, conjecturar, supor, encontrar e checar soluções. (FISCHBEIN, 1987, p.213 – tradução nossa)

Outro aspecto importante a ser observado é que as novas intuições criadas não substituem simplesmente as primitivas. Estas em geral são resistentes e co-existem com as intuições novas, superiores e aceitas cientificamente. Isso pode gerar inconsistências nas reações dos alunos dependendo da natureza do problema (FISCHBEIN, 1987). Portanto, o aluno deve aprender a analisar e formalizar suas intuições primárias. Isso implica em aprender a abstrair estruturas formais de realidades práticas e de interpretações intuitivas e como descrevê-las de forma explícita. Como exemplifica Fischbein (1987, p.207), nós sabemos intuitivamente o que é um círculo ou quadrado ou um triângulo, e reconhecemos essas figuras, mas é um exercício tentar descrever as propriedades gerais e comuns de uma maneira precisa e completa. Neste sentido também está a dificuldade dos alunos apontada por Fischbein (1987):

> O principal problema é aprender a viver com os conceitos intuitivos – necessários para um raciocínio produtivo e fluente – e, ao mesmo tempo, controlar o impacto no raciocínio dessas influencias intuitivas. Para isso, o aluno tem que aprender a estar ciente do significado exato e formal dos conceitos matemáticos e de suas implicações, por um lado, e do outro, as intuições que ele possui. (FISCHBEIN, 1987, p.207 – tradução nossa).

Ou seja, é difícil para um aluno aceitar que um quadrado é um paralelogramo, porque para ele intuitivamente um paralelogramo significa ângulos e lados desiguais – como conseqüência do modelo prototípico. Mas formalmente o quadrado é um paralelogramo porque a definição de um quadrado implica em todas as propriedades de um paralelogramo.

Tall (1991) afirma que a intuição é o produto da imagem de conceito do indivíduo, assim, quanto mais o individuo for educado em pensamento lógico, mais o imaginário de conceitos irá ressonar como uma resposta lógica. Segundo o autor, isso se torna evidente no crescimento do pensamento dos alunos, que passam de intuições iniciais baseadas na sua matemática pré-formal para intuições mais refinadas e formais à medida que sua experiência cresce. Portanto, o desenvolvimento da intuição secundária apontada por Fischbein, mais lógica e refinada, deveria ser um dos objetivos principais de uma educação matemática.

2.3 O CONCEITO DE PROVA E AS FUNÇÕES DA PROVA

O conceito de prova que se encontra na literatura é bastante variado, de acordo com a abordagem escolhida. Têm-se autores que colocam estágios de argumentação como Tall (1989), outros fazem uma abordagem cognitiva, como Duval (1992[6], *apud* DREYFUS 1999), outros ainda colocam níveis de sofisticação de demonstrações, como Dormolen (1977) e Balacheff (2000).

Tall (1989, p.5) sugere três estágios de argumentação convincente: convencer a si mesmo; convencer um amigo e convencer um inimigo. Segundo o autor, convencer a si mesmo é a parte mais fácil, pois é difícil desacreditar um *insight* que tivemos, quando temos uma idéia de argumentação. Já o estágio seguinte, de convencer um amigo, permite colocar as idéias em uma seqüência coerente, para que possa ser explicado a alguém. O terceiro estágio seria de convencer um “inimigo” – um árbitro da lógica que submete cada etapa de um argumento a um exame minucioso para procurar possíveis falhas. No entanto, convencer e compreender são duas

6 Duval, R. Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?', *petit* x 31, 37-61, 1992

coisas distintas; convencer a si mesmo, ou ao próximo, não significa que compreendeu a proposição em questão.

O autor acrescenta ainda que a noção formal do que é uma prova matemática está ausente nestes estágios, pois a prova matemática difere de convencer um amigo ou inimigo porque deve estar baseada em duas importantes idéias: uma é que ela requer definições e afirmações claramente formuladas, e outra, é que ela requer procedimentos aceitos para deduzir a verdade de uma afirmação de outra anteriormente provada verdadeira. Para este autor, a razão pela qual a inserção da prova matemática formal é difícil, é porque conceitos e definições formais não são trabalhados adequadamente; e, sem definições e conceitos adequados não se pode ter absoluta certeza do que se está falando e conseqüentemente, se o que se tem é uma prova formal.

Duval (1992, *apud* DREYFUS, 1999, p.102) faz uma abordagem cognitiva e distingue três formas de justificativas: explicação, argumento e prova. De acordo com este autor, a função principal de uma explicação é descritiva, seu objetivo é produzir razões. Argumentos e provas, por outro lado, examinam a força destas razões; em particular, se estão livres de contradições; sua função é determinar e possivelmente mudar o real valor do que está sendo afirmado.

Dormolen (1977, p.28) afirma que o nível de pensamento de um iniciante será absolutamente inaceitável para um matemático experiente com seu nível de pensamento. Assim, a resposta de um aluno do ensino fundamental não é a mesma que se espera de um professor, que ainda terá um nível distinto daquele matemático pesquisador. Neste sentido, o autor cita Van Hiele (DORMOLEN, 1977, p.32) e a existência de três níveis de sofisticação para as demonstrações: nível fundamental, nível um e nível dois. Nível fundamental: o pensamento do aluno está limitado a objetos específicos; por exemplo, este trapézio é diferente deste outro. A partir do momento que observa objetos similares e descobre certas propriedades em comum, o objeto passa a ser um conceito, e o aluno atinge o nível um, ou seja, se determinadas propriedades deste trapézio valem para todos os trapézios, então o trapézio não é mais uma forma, mas se torna um conceito. Nível um: a organização do pensamento é menos local, mas ainda limitada à área em discussão. Depois de trabalhar um tempo no nível um o aluno passa a perceber que argumentos em áreas completamente dissimilares possuem elementos em comum, a analogia em ação. Esses argumentos são eles próprios, exemplos que conduzem à compreensão do que é uma organização lógica. O aluno consegue raciocinar sobre o raciocínio, alcançando o nível dois. Nível dois: no nível mais alto o indivíduo é capaz de efetuar uma organização interna do nível mais baixo, e apresenta argumentos gerais. Segundo o autor, na educação matemática é importante que o professor compreenda que é impossível operar num nível mais alto se o nível anterior não foi alcançado. Se o aluno é forçado a trabalhar num nível que não seja aquele no qual está, irá fazer uso de macetes e manipulações que decorou. Não será capaz de distinguir entre duas soluções similares se não reconhecer o problema de início. Se ele tem de provar algo, ele o faz – quando consegue – porque o professor lhe pediu e não por sentir a necessidade de fazê-lo. Dormolen (1977, p.33) afirma que enquanto não ensinarmos aos alunos o que realmente significa desenvolver uma demonstração, não podemos esperar deles argumentos dedutivos com compreensão e discernimento.

Balacheff (2000, p.11) faz uma diferenciação entre os verbos ‘explicar’, ‘provar’ e ‘demonstrar’ que são freqüentemente usados como sinônimos. Para ele, a explicação se situa ao nível do indivíduo. Para este indivíduo, a explicação estabelece e garante a validade de uma proposição, se arraiga no seu conhecimento e no que constitui a sua racionalidade, isto é, as suas próprias regras da decisão da verdade. A explicação não se reduz necessariamente a uma cadeia dedutiva, ela se orienta para o descobrimento de um novo saber. Quando a explicação passa a ser reconhecida e aceita por certa comunidade, num determinado momento, é denominada de prova. Assim, a passagem da explicação para a prova faz referência a um processo social, isto é, quando a explicação que assegura a validade de uma proposição é aceita por certa comunidade, muda de posição. No entanto, esta posição não é definitiva; com o tempo pode evoluir com o avanço dos saberes nos quais se apóia. Balacheff (2000, p.26) sugere, então, que a prova surge subdividida em quatro níveis para a “validação” dos raciocínios:

1) O empirismo ingênuo, que toma para validação de uma propriedade a sua verificação em alguns poucos casos, sem questionar o fato do objeto ser particular, ou seja, a validação se dá pela exibição de casos particulares em que a proposição se verifica;
2) A experiência crucial é um procedimento de validação em que é proposto, explicitamente, o problema do geral em contraposição ao particular,

assim, ele intenta verificar a propriedade em caso particular, mas sem considerá-lo tão particular de modo a permitir a generalização; isto é, a validação se dá pela verificação da proposição em questão num caso particular tido como típico;

3) O exemplo genérico consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular do objeto geométrico; ou seja, a validação se dá pela apresentação de propriedades aplicadas sobre um caso típico; e
4) A experiência mental que é uma explicação depreendida de concretização em representante particular, assim a argumentação flui através de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação e não mais através de situações genéricas como no nível anterior; isto é, a validação se dá pela apresentação de deduções lógicas baseadas em propriedades.

Este último nível representa a demonstração, no sentido da dedução lógica, onde a validade dos raciocínios é garantida pela via dedutiva e é um tipo de prova estritamente codificada e formal. Ou seja, é uma seqüência de afirmações organizada de acordo com regras determinadas: uma afirmação é reconhecida como sendo verdadeira se é deduzida de afirmações que a precedem através de uma regra de dedução tomada num conjunto de regras bem definido. O nível "exemplo genérico" é uma fase intermediária dependendo da ação sobre o exemplo – ou ação que ainda depende de concretização particular, ou ação que já faz uso da concretização apenas como suporte para expressar raciocínio generalizador. Assim, é no nível da experiência mental que o aluno, com ações interiorizadas dirigindo-se à generalidade, converge para a explicação caracterizada como demonstração matemática; e nesta se transforma quando considera os princípios do modelo teórico (GRAVINA, 2001).

Vemos, então, toda uma movimentação de idéias e recursos procedimentais na direção da construção de uma demonstração.

2.3.1 As Funções da Prova

Segundo de Villiers (2001, p.32), a prova e/ou demonstração tem outras funções importantes dentro da matemática, que, em algumas situações são de maior importância para matemáticos do que a simples verificação, isto é, a explicitação da verdade, que é tida como a função tradicional. Segundo o autor, algumas dessas são:

Explicação: A prova não é apenas uma questão de ter certeza sobre algo, mas de explicar por quê. Dessa forma, a prova deveria fornecer *insight* em por que um determinado teorema ou propriedade é verdade. Hersh (1993, p.389 e 396) leva esta idéia ao campo do ensino quando afirma que o principal papel da prova na sala de aula é de explicar. Para este autor o papel da prova na sala de aula é diferente daquele na pesquisa. Na pesquisa, seu papel é de convencer, de buscar a veracidade de afirmações. Na sala de aula, convencer não é problema, pois alunos se convencem facilmente com alguns exemplos. O que uma prova deve fazer para os alunos é providenciar uma maneira de compreender por que o teorema em questão é verdadeiro.

Descoberta: A prova também leva à descoberta ou invenção de novos resultados. Aliás, Rav (1999) afirma que a essência da matemática está em inventar métodos, ferramentas e estratégias para resolver problemas, e a prova é o coração da matemática como catalisador desse crescimento. Como exemplo, cita o fato de as várias tentativas de provar a conjectura de Goldbach agiram como catalisadoras do desenvolvimento de novos métodos e descobertas de outras propriedades.

Comunicação: Muitos matemáticos enfatizam a importância da prova também no papel de transmitir o conhecimento matemático. No entanto, aqui fica claro o fator social da prova, pois depende muito da audiência. Uma prova pode ser comunicada em dois minutos para matemáticos da mesma área ou em duas horas para alguém que não tem afinidade com a área.

Sistematização: o principal objetivo é organizar afirmações que parecem não ser relacionadas, mas são conhecidas num todo unificado e coerente, ou seja, organizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas.

Dentre as várias funções, matemáticos na sua maioria ainda compartilham da opinião de que a prova é mais valiosa quando conduz a uma compreensão, ajudando a pensar mais claramente e efetivamente sobre matemática (HANNA, 2000b, p.7). Compreender significa perceber e apreender o significado de algo. Ou seja, compreender algo é mais forte do que apenas saber algo. É conhecimento e não apenas informação. Não é só buscar o “o que” ou o “como”, mas também o “por que”. Neste sentido, a compreensão está ligada à explicação, pois, explicar significa elucidar e justificar algo, esclarecer. Se em sala de aula forem feitas simples reproduções de provas matemáticas prontas, o aluno perde a chance de “fazer matemática” e descobrir novas relações. No entanto, se o aluno puder explorar situações e formular suas conjecturas (numa fase experimental), possivelmente se tornará curioso para explicar e justificar que aquilo que está “vendo” pode ser sempre verdadeiro. E este o será, somente se for justificado por meio de uma prova, uma prova que explique a veracidade do que foi descoberto.

Resumindo, na construção do conhecimento matemático, entendendo matemática como atividade, primeiro devemos “ver” ou “reconhecer” a verdade de um teorema para depois justificá-la através de uma demonstração. O campo que possibilita esta “visão” da verdade é o que alguns autores chamam de “território antes da prova”.

2.4 O TERRITÓRIO ANTES DA PROVA

Edwards (1990, p.190) caracteriza a prova em uma perspectiva mais abrangente, como sendo o conjunto de processos envolvidos em traduzir intuições ou generalizações em asserções de certeza, expressas em uma linguagem que não seja ambígua, mas que seja precisa e aceita dentro da comunidade de matemáticos.

Esta autora chama de ‘território antes da prova’ o “espaço” de precursores intelectuais em potencial para a prova: maneiras de pensar, de falar e de agir que dão suporte ao objetivo de busca e estabelecimento de verdades matemáticas. Tal território abrange atividades nas quais o aluno explorador (ou o matemático) irá se engajar, antes do passo final de criar uma prova formal. É durante esta fase exploratória e de testes que aprendizes e *experts* igualmente usam suas intuições ao procurar padrões, seguir palpites, testar idéias e formular generalizações que podem se tornar conjecturas.

Segundo a mesma autora existe um conjunto de elementos em potencial dentro deste território antes da prova. A autora os coloca em uma lista numa seqüência crescente de rigor e formalização (EDWARDS, 1990, p.190):

1) Perceber e/ou construir padrões, regularidades ou regras (envolve a busca e o reconhecimento de invariantes em situações matemáticas).
2) Descrever tais padrões, isto é, colocar as regularidades em palavras. Tal descrição pode ser feita de maneira (a) verbal, informal ou através de descrições figurais como diagramas, ou (b) através de afirmações formais com notação matemática. Independente de ser informal ou formal, o aluno também pode expressar o padrão em diferentes níveis de generalidade: (i) uma coleção de exemplos específicos ou casos individuais ou (ii) uma generalização, de tal maneira que implique que mais do que um conjunto de casos específicos está envolvido. Em qualquer um dos casos, o aluno pode fazer explícito a expectativa de que o padrão/regularidade valha no geral, para casos similares, o que constitui o elemento seguinte.
3) Conjecturar, ou afirmar que um padrão/regularidade é verdadeiro em geral.

Alunos podem tentar validar suas conjecturas utilizando ao menos dois tipos de raciocínio:

4) Raciocínio indutivo, ou verificando casos específicos para ver se o padrão se mantém. É o que Balacheff chama de empirismo ingênuo. Para alguns alunos, este é o único tipo de raciocínio utilizado para verificar conjecturas. A transição do indutivo para o dedutivo não é um processo simples.
5) Raciocínio dedutivo, ou prova dedutiva: encontrar um caminho para mostrar porque a generalização se mantém, utilizando outros resultados matemáticos e/ou *insight* para a estrutura matemática envolvida na generalização. Para que um argumento seja uma prova conceitual, a justificação, que forma a base para a validação da proposição deve estar apoiada sobre uma análise das propriedades dos objetos em questão. Estas propriedades não são mais evidenciadas em instâncias particulares, mas formuladas em sua generalidade – o que Balacheff denomina de experiência mental.

Essas categorias apontadas por Edwards, que descrevem os processos anteriores à prova, acabam por englobar as atividades listadas por Ball (2002) quando a autora tenta sumarizar suas idéias sobre o pensar matematicamente. Ela cria um diagrama de atividades (Figura 2.1) no qual as pessoas se engajam enquanto "pensam matematicamente" e acrescenta: "o pensar matematicamente ocorre enquanto você se move entre as conexões das diversas atividades listadas."

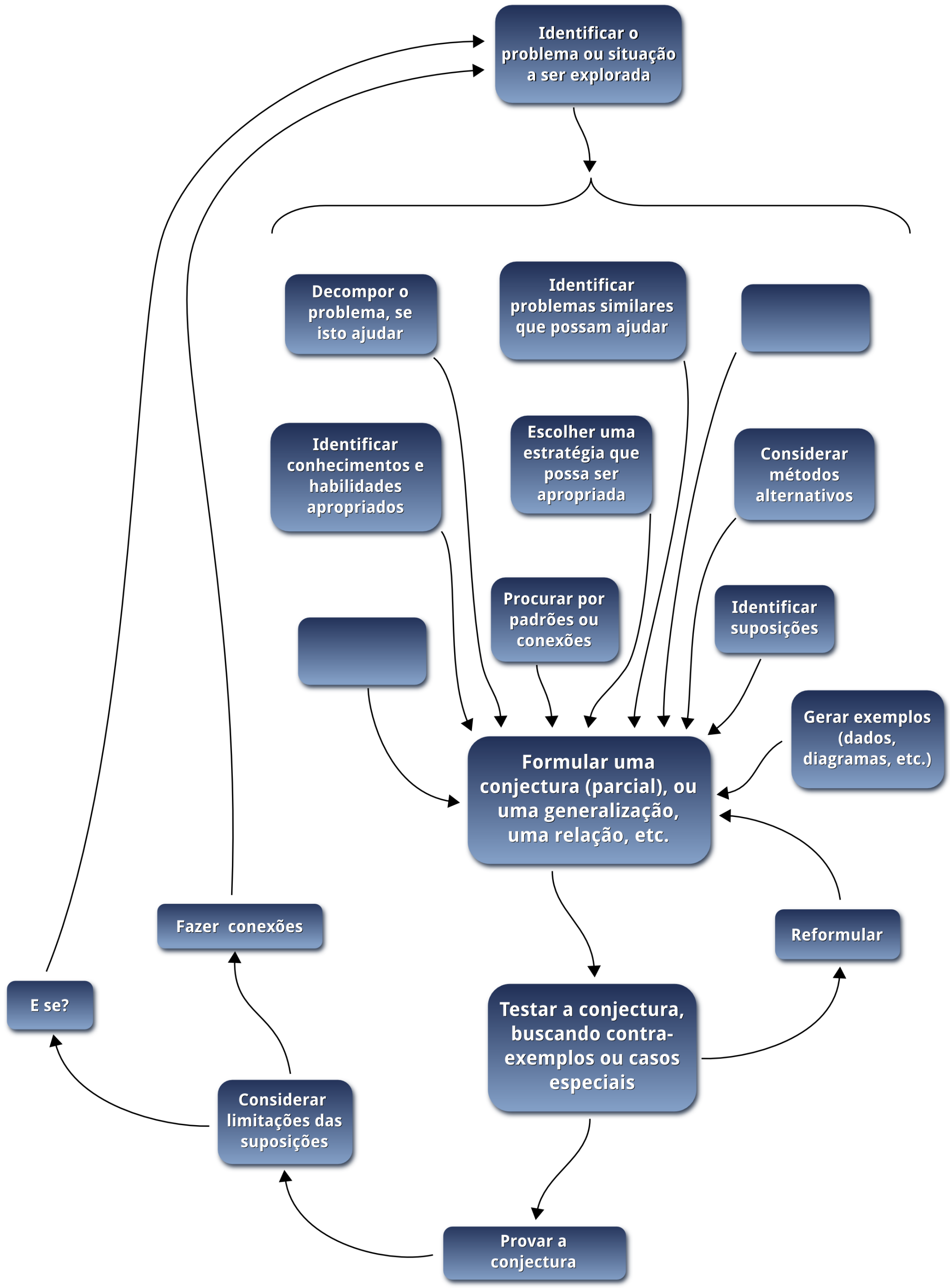


FIGURA 2.1: DIAGRAMA DE BALL.
Fonte: Ball (2000)

Os balões vazios na figura mostram que a autora não exclui outras atividades que também possam ser inclusas no esquema. A autora ainda completa suas considerações acrescentando a lista de atividades relativas ao se pensar matematicamente criada por Watson e Mason (1998). Estes autores escolheram algumas palavras que descrevem o pensar matematicamente, dividindo-as em seis grupos:

a) exemplificar, especificar;
b) completar, deletar, corrigir;
c) comparar, classificar, organizar;
d) variar, modificar, alterar;
e) generalizar, conjecturar;
f) explicar, justificar, verificar, convencer e refutar.

O interesse, aqui, no âmbito do pensar matematicamente, não é em ir direto ao quinto elemento apontado por Edwards, mas sim em explorar os outros quatro elementos: perceber e descrever padrões, conjecturar e proceder em raciocínio indutivo, para então chegar ao raciocínio dedutivo. É passar pelas diversas atividades listadas por Ball. Felix Klein (2007, p.208) corrobora com tal idéia quando afirma que o investigador na matemática, assim como em qualquer outra ciência, não trabalha em um estilo rigoroso dedutivo. Ao contrário, faz uso essencial de sua imaginação e procede indutivamente auxiliado pela heurística. Assim também os alunos terão que dominar/controlar as suas dificuldades da mesma maneira como matemáticos o fizeram, se acostumando gradualmente aos novos conceitos, trabalhando com eles e tirando vantagem de todo suporte que o professor pode oferecer, em seu papel de formador do pensamento matemático.

2.5 A PROVA COMO UM PROCESSO

À luz da discussão anterior queremos apresentar a perspectiva de prova considerada nesta pesquisa. Primeiramente, ao invés de considerar a prova como um resultado, iremos considerá-la como um processo.

Segundo Olivero (2002, p.41) o processo de prova se constitui de duas fases: a construção da conjectura e a construção da prova, o reconhecimento da verdade e a elaboração de sua justificação. Na primeira fase o indivíduo procura por elementos, ou propriedades, enquanto explora uma situação e formula conjecturas, conjecturas essas que são apenas “verdades provisórias” e serão organizadas mais tarde (o que é o processo), enquanto na segunda fase esses elementos são colocados em uma ordem de acordo com regras lógicas, a prova como produto, que visa consolidar a verdade. Ou seja, temos a construção das conjecturas (que são as verdades provisórias), para então escolher a conjectura chave (que irá de fato provar o teorema) e a prova da conjectura chave, construindo assim a demonstração do teorema.

Olivero (2002) inclui, portanto, a fase exploratória no processo de prova, onde “pedaços” são reunidos que contém elementos chaves da própria prova. Engloba, portanto, as atividades listadas por Ball no ato de pensar matematicamente, assim como o território antes da prova apontado por Edwards. A prova, em geral, deve ser dedutiva, no entanto o processo para se chegar nela pode envolver diferentes formas de raciocínio como a indução, a abdução, etc. numa fase exploratória que faz parte do processo.

Assim, um dos objetivos dos professores de matemática é, então, possibilitar que seus alunos aprendam a pensar matematicamente, a se engajar nas atividades e processos envolvidos, eis seu papel de formador. Isso ocorre num diálogo exatamente nesse território antes da prova, na primeira fase apontada por Olivero (2002), antes de se chegar à prova como produto final.

3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO E O AMBIENTE DINÂMICO

Este capítulo trata das questões que dizem respeito à construção do conhecimento geométrico, que tem características próprias. Na seqüência também se discutem as dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da geometria. Como ferramenta para mediar as ações do pensamento, apresentamos o que são os ambientes dinâmicos e suas potencialidades no ensino. Além disso, se discute o próprio conceito de figura que surge diferente neste ambiente dinâmico.

3.1 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

A maioria dos professores de matemática acaba utilizando um processo de transmissão de informação que conduz o aluno sem que este tenha uma experiência dos métodos matemáticos na qual ele analise a matemática como área investigativa; acabam apresentando algo bonito e supostamente eficiente, mas completamente pronto, sem dar chance ao legítimo ato do pensar matematicamente acontecer (AL-MOULOUD, 2000, p.3). Isto também vale, em particular, para a geometria. Mas como então a geometria deveria ser ensinada? Duval (1998, p. 37-38) responde esta pergunta dizendo que para discutir esse assunto é necessário considerar a complexidade cognitiva da atividade geométrica. Para este autor, a geometria envolve três tipos de processos cognitivos os quais tem funções epistemológicas específicas:

a) O processo de visualização que se refere ao espaço de representação, ou seja, à ilustração de uma afirmação, à exploração heurística de uma situação ou uma verificação subjetiva;
b) O processo de construção por ferramentas onde a construção de configurações pode desempenhar o papel de um modelo que relaciona as

ações sobre os resultados representados e observados aos objetos matemáticos que estão representados; e

c) O processo de raciocínio relacionado a processos discursivos para a extensão do conhecimento, para a prova e a explicação.

O mesmo autor afirma que, embora esses processos possam ser realizados separadamente, eles estão entrelaçados e sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em geometria.

Para compreender um problema geométrico não basta olhar simplesmente uma figura, é preciso considerar cada parte, olhá-la separadamente, reunir o que convém, considerando-o como um todo e procurando ver simultaneamente as várias conexões exigidas pelo problema. No entanto, uma abordagem exclusivamente psicológica da percepção das figuras, a percepção imediata, não dá condições ao aluno de olhar a figura em um nível mais profundo, com um olhar matemático (FLORES, 1997, p.16). Ou seja, a apreensão de uma figura geométrica não pode ser pura e simplesmente uma apreensão perceptiva. Duval (1999a) distingue três outras formas de interpretação de uma mesma figura: a apreensão discursiva, a apreensão seqüencial e a apreensão operatória. Assim, "ver" uma figura requer um aprendizado. A exploração visual exige muito mais que a percepção isolada de formas elementares. Portanto, "é preciso focalizar o olhar sobre outros dados que não são impostos imediatamente ao olhar, se apoiar na correspondência entre a visão de uma seqüência de sub-figuras pertinentes e a organização do discurso, possibilitando uma real exploração heurística da figura" (FLORES, 1997, p.25).

A apreensão perceptiva é imediata e espontânea, permitindo apenas constatações vistas de forma geral sem levar em conta os diferentes funcionamentos da figura. Para que a figura desempenhe um papel heurístico, é necessário vê-la de maneira mais profunda. Uma figura adquire um estatuto de figura geométrica quando: primeiro, é vista em relação a uma configuração (denominação, relação, etc), o que estaria relacionada à apreensão discursiva; e, segundo, quando é construída a partir de ordens de construção, relacionada à apreensão seqüencial. A apreensão discursiva de uma figura corresponde a uma explicitação de propriedades matemáticas como aquelas indicadas pelas hipóteses. Neste sentido, a figura é olhada a partir daquilo que é dado no enunciado, e são as propriedades matemáticas explicitadas que garantem às figuras o seu estatuto de figura geométrica. A função da apreensão seqüencial é a reprodução da figura numa tarefa de construção; sendo que a apreensão perceptiva funciona apenas como um controle para determinar a coerência da construção da figura. (FLORES, 1997, p.31)

Em uma figura geométrica existem mais possíveis sub-configurações do que aquelas que estão explícitas em sua construção ou enunciadas como hipóteses. E é este "excedente" que cria o poder heurístico das figuras, pois algumas sub-configurações dão as idéias chaves para uma solução ou explicação. Trata-se da apreensão operatória, que é centrada nas possíveis modificações de uma figura inicial e sobre as reorganizações perceptivas que estas modificações acarretam. Tal apreensão permite dar um sentido dinâmico às características da figura, podendo-se fazer manipulações sobre todo ou parte da figura (DUVAL, 1998, p.41).

Pode-se observar, no entanto, que as várias apreensões não funcionam isoladamente, mas sim uma em função da outra. O importante, no ensino da geometria, é a articulação entre elas (DUVAL[7], 1997, *apud* FLORES, 1997, p.39):

a) entre apreensão perceptiva e discursiva (para ter o que chamamos de figura geométrica);
b) entre apreensão discursiva e seqüencial;
c) entre apreensão perceptiva e operatória (o que corresponde a visualização, sendo que para visualização não é preciso a mobilização de teoremas ou proposições);
d) entre apreensão operatória e discursiva (que permite unir a heurística e a prova).

Como toda figura pode ser modificada de diversas formas, Duval (1999a, p.12) também distingue três tipos de modificação: a modificação mereológica (consiste na divisão de uma figura em partes para em seguida combiná-las em outra figura), ótica (consiste em aumentar, diminuir ou deformar uma figura – problemas de homotetia ou perspectiva) e posicional (consiste no deslocamento da figura no plano em relação ao plano fronto-paralelo).

A operação de reconfiguração é a que caracteriza a modificação mereológica: é uma operação que consiste em reorganizar uma ou várias sub-figuras diferentes de uma figura dada em outra figura, fazendo comparações, e eventualmente reagrupando em uma figura de um contorno global diferente, ou seja, consiste na complementaridade de formas. É a este nível que esta operação intervém na produtivi-

7 Duval, R. La Géométrie et lês Variables de Visualisation, 1997.

dade heurística das figuras geométricas e se revela como uma operação fundamental para a apreensão matemática das figuras (DUVAL, 1999b, p.165).

Abaixo, na figura 3.1, é mostrado o exemplo dado por Duval para a operação de reconfiguração. Com o seguinte enunciado: “ABCD é um retângulo. Seja P um ponto qualquer da diagonal AC. EG é a paralela a AD que passa por P, e FH é paralela a AB que passa por P. Mostre a igualdade das áreas dos retângulos HPGD e EBFP qualquer que seja a posição do ponto P”.

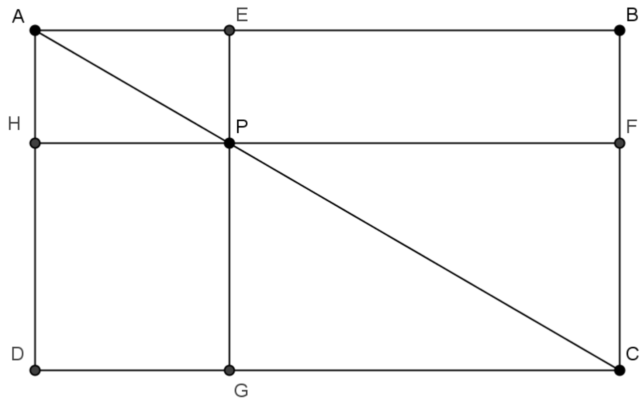


FIGURA 3.1: EXEMPLO DE ATIVIDADE DE RECONFIGURAÇÃO DADO POR DUVAL
FONTE: Duval (1999b)

A igualdade das áreas mencionadas não é possível de obter por sobreposição, e assim não é possível chegar a uma solução apenas com uma apreensão perceptiva direta. Para “ver” a igualdade de áreas é necessária uma atividade de comparação de sub-figuras complementares, ou seja, é necessário re-configurar a figura original para conseguir a igualdade através da complementaridade de formas. Para se ter a comparação, e se chegar à conclusão de que os retângulos HPGD e EBFP têm mesma área, precisa-se olhar para as outras figuras formadas. A diagonal AC divide o retângulo em dois triângulos congruentes. Estes, por sua vez, são divididos em três partes pelos segmentos EG e HF: em outros dois triângulos menores e um retângulo. Então, temos que a área do triângulo ADC = área: do triângulo AHP + triângulo PCG + retângulo HPGD; e a área do triângulo ABC (congruente ao triângulo ADC) = área: do triângulo AEP + triângulo PFC + retângulo EBFP. Como os triângulos AEP e AHP são congruentes e portanto possuem mesma área, e assim também os triângulos PFC e PGC são congruentes e, portanto, com mesma área, conclui-se, pela soma de áreas, que os retângulos HPGD e EBFP também são equivalentes, isto é, possuem áreas iguais.

Para Duval (1999b, p.170), o sucesso da exploração de uma figura, no quadro de um problema dado, vai depender exatamente da articulação entre a apreensão operatória da figura e um jogo discursivo de inferências o qual mobiliza uma malha de definições e teoremas. Neste sentido, as figuras, com sua função heurística, permitem analisar e entender as partes, enquanto no discurso se tem a síntese, reagrupando as partes para ter o todo.

Assim, para Duval (1999b, p.161 e 168), a análise heurística de uma figura está próxima de um processo de abdução, que é busca por uma explicação, e que não se pode comparar com um caminho dedutivo. O que deve acontecer na busca de uma demonstração de uma proposição é uma interação entre abdução e dedução, ou seja, deve haver uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução guiam a abordagem (*démarche*) heurística e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a abordagem baseada nos objetos representados na figura.

Fischbein (2002, p.3) trabalha com esta relação figura e discurso quando introduz a noção de *conceito figural*. De acordo com o autor, a geometria trata com entidades mentais – as chamadas figuras geométricas – que possuem características conceituais e figurais simultaneamente, pois as entidades as quais nos referimos em geometria (ponto, reta, ângulo, ou mesmo o triângulo, e as operações que realizamos com eles) possuem qualidades conceituais. No raciocínio matemático não nos referimos a eles como objetos materiais nem como desenhos, são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático trabalha. Além disso, é apenas em um sentido conceitual que podemos considerar a perfeição absoluta de tais entidades geométricas, que possuem, então, correspondentes materiais, sendo estes representações gerais e não cópias de objetos particulares e concretos. Outra característica das figuras geométricas é que suas propriedades são impostas por definições, ou derivadas destas, em certo sistema axiomático. Deste ponto de vista, uma figura geométrica tem uma natureza conceitual – um quadrado não é apenas uma imagem desenhada em uma folha de papel, é uma forma controlada por uma definição. Assim, uma figura geométrica pode ser descrita como possuidora de propriedades intrinsecamente conceituais. Estes são os *conceitos figurais*, que possuem, portanto, duas componentes: conceitual e outro figural. O componente conceitual, com maior ou menor grau de formalismo baseado na linguagem natural e/ou simbólica, caracteriza certa classe de idealizações, abstrações, generalizações, etc.

Já o componente figural é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e pode ser expresso através de um desenho.

3.2 DIFICULDADES ENCONTRADAS PELOS ALUNOS

Com a introdução dos conceitos figurais Fischbein já evidencia uma das dificuldades dos alunos na ascensão de patamar de conhecimento, do empírico para o hipotético-dedutivo: interpretar o desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração.

Segundo Gravina (2001, p. 59) o sistema de representação da geometria possui uma linguagem natural/simbólica e desenhos que dão suporte para os raciocínios de natureza dedutiva. Como exemplo, a autora cita o Teorema de Pitágoras – Num triângulo retângulo a área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos, este inicia com um desenho simples solidário ao enunciado, um triângulo retângulo e quadrados sobre os lados do triângulo; no entanto, é o acréscimo de novos objetos geométricos que torna o desenho solidário à demonstração. Neste sentido, uma das dificuldades da situação de aprendizagem é interpretar o desenho que acompanha uma definição ou um teorema e sua demonstração, como já evidenciado por Fischbein.

> Trata-se de entender que o desenho é uma instância particular de representação de determinada classe de objetos geométricos e que é na fusão adequada de significantes (no desenho) e significados (no enunciado) que se constituem mentalmente os objetos geométricos e os teoremas cristalizados no sistema de representação (GRAVINA, 2001, p.59).

Como Fischbein (2002, p.10) afirma, a dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência de negligenciar a definição em função da pressão de restrições figurais, representa um dos maiores obstáculos ao raciocínio geométrico. Freqüentemente, restrições figurais escapam do controle conceitual e impõem à linha de raciocínio interpretações que figurativamente são consistentes, mas que não estão mais sujeitas às restrições conceituais.

São os desenhos prototípicos que acabam sendo a origem dessas dificuldades, como afirma Gravina (2001, p.61), pois esses desenhos são tomados como a expressão da componente figural de onde são procedentes as propriedades depreendidas. Segundo a mesma autora, “a dificuldade está em entender que um desenho nada mais é do que uma instância particular do componente figural, guardando, portanto, uma generalidade no seu aspecto figural, controlada pelo componente conceitual”.

Outra dificuldade apontada por Gravina (2001, p. 75) remete à operação de reconfiguração apresentada por Duval e, segundo a autora, é a mais complexa das dificuldades. Ela ocorre quando os objetos geométricos necessários ao encadeamento de relações inferenciais ainda não estão visíveis na componente figural e, portanto, devem ser identificados e acrescentados para que as sub-configurações possam aparecer e assim sustentar a argumentação. É o que Gravina denomina de ‘extensão do desenho’, ilustrado no exemplo na figura 3.2.

Esta dificuldade fica ainda maior quando a extensão do componente figural necessária aparece em uma posição não familiar, isto é, quando não é prototípica.

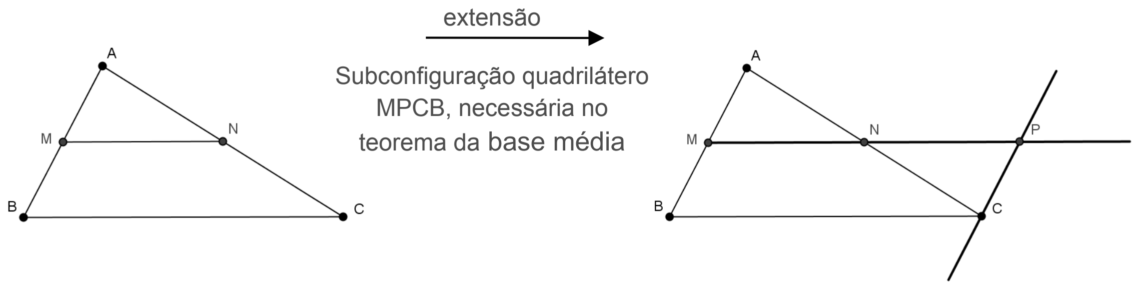


FIGURA 3.2: EXTENSÃO DO DESENHO
FONTE: Gravina (2001)

Moore (1994) examina as dificuldades cognitivas em relação à transição para a prova formal de estudantes de graduação. Segundo sua análise, ele revela fontes de dificuldades dos alunos como a compreensão de conceitos, e o domínio da linguagem matemática e notações, quando estes realizam uma prova. O autor aponta a importância da distinção entre definição de conceito e a imagem de conceito, o primeiro refere-se à forma verbal, acurada, que explica o conceito, como aparecem nos livros; já a segunda é uma estrutura cognitiva, como as figuras mentais, juntamente com propriedades, que estão na mente do indivíduo, associado ao conceito. Segundo Moore (1994, p. 251), a dificuldade associada à compreensão de conceitos se dá exatamente pelo fato de os alunos terem pouca compreensão intuitiva dos conceitos assim como imagens de conceitos inadequadas para realização de provas. Como exemplo, pode-se citar o fato da resistência dos alunos quanto à definição/conceito de paralelogramo: “um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos”, no entanto, a maioria insiste em se referir sempre ao paralelogramo como “quadrilátero com lados opostos paralelos, dois consecutivos sempre diferentes e com ângulos agudos e obtusos, etc.” (GRAVINA, 2001, p. 63)

Essas dificuldades figurais e conceituais geram, então, as dificuldades dos alunos na realização de provas. Se provar uma propriedade geométrica significa estabelecer sua veracidade através de uma argumentação, então o propósito é explicitar as razões que explicam a evidência de uma propriedade, por mais que seja intuitivamente óbvia. Como afirmam Davis e Hersch (1985, p.140) parece claro que nós buscamos uma demonstração porque se alguma coisa é verdadeira e nós não conseguimos explicar “por quê”, isto significa uma falta de entendimento de nossa parte. Nós acreditamos que a demonstração é uma forma de entender por que uma conjectura é verdadeira, o que é muito mais do que convincentes argumentos heurísticos.

Gravina (2001, p. 64) corrobora com esta idéia com uma ilustração: mediante manipulações empíricas conclui-se que ‘um ângulo inscrito num círculo, subentendendo sempre o mesmo arco, tem medida constante’. E afirma que de início, se tem apenas uma forte conjectura com forte evidência de veracidade, mas não compreensão, é na argumentação que se dá a compreensão.

3.3 OS AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Na história da humanidade sempre estão presentes os mais diversos artefatos que, se antes eram para substituir o trabalho físico, agora são máquinas que ampliam o alcance e o poder da mente humana. Inicialmente eram utilizados mais para a realização de cálculos que ultrapassavam a capacidade intelectual humana, por isso denominados computadores, mas atualmente fazem parte do nosso dia-a-dia e interferem tanto no desenvolvimento social como individual.

A tecnologia informática, segundo Gravina (2001, p.35) disponibiliza “ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação dos funcionamentos cognitivos” através de linguagens de programação, de documentos hipertextuais assim como da modelagem e simulação. Essas ferramentas e seus objetos metafóricos tornam-se a representação de imagens mentais com o dinamismo de imagens presentes na tela do computador. Assim, esses ambientes suportam "formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito ou do desenho estático."

No contexto da educação matemática temos, na década de 80, o surgimento de um primeiro suporte informático que é a tartaruga Logo, de Papert[8]. Desde então, as potencialidades das interfaces que dão suporte ao pensamento matemático vêm crescendo e hoje temos diversos softwares. Particularmente na Geometria temos hoje uma grande variedade de softwares – os ambientes de geometria dinâmica – que, por mais que tenham interfaces distintas, possuem funções semelhantes. King e Schattschneider (1997, p.xi) apontam os principais benefícios e aplicações dos softwares de geometria dinâmica: (i) a precisão de construções e a capacidade de visualização das relações geométricas; (ii) a possibilidade de exploração das construções e descoberta de relações e propriedades geométricas; (iii) a busca de prova de teoremas, de forma experimental e heurística; (iv) a geração de transformações e lugares geométricos; e (v) a possibilidade de simulação e de construção de micromundos com características próprias.

Dentre estes softwares podemos citar:

a) o Cabri Géomètre[9], desenvolvido por J. M. Laborde e Frank Bellemain em 1985, que hoje já possui versões melhoradas inclusive uma versão 3D;
b) o Cinderella[10], criado por Jürgen Richter-Gebert e Ulli Kortenkamp com a tecnologia Java, teve sua primeira versão lançada em 1996, e trabalha também com geometrias não-euclidianas;
c) o Geometer's Sketchpad[11], criado por Nicholas Jackiw, teve sua primeira versão lançada em 1991 para Macintosh e em 1993 para o Windows. Mas foi sua versão de 2001 que trouxe várias mudanças incluindo também a possibilidade de agregar o cálculo e a álgebra.
d) e o Geogebra[12], desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2002, que é um software livre e multi-plataforma e também reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, tendo a vantagem de apresentar representações distintas de um mesmo objeto. Este último foi utilizado para este trabalho.

---

8 Papert, S. Logo – Computadores e educação. São Paulo SP: Editora Brasiliense, 1988.
9 http://www.cabri.com.br
10 http://www.cinderella.de
11 http://www.dynamicgeometry.com/
12 http://www.geogebra.org

Estes ambientes de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem sendo que tais objetos podem ser manipulados diretamente na tela do computador. Na figura 3.3, tem-se um exemplo da interface do software Geogebra; cada item do menu inicial possui ainda um sub-menu, com mais possibilidades de construções daquela categoria.

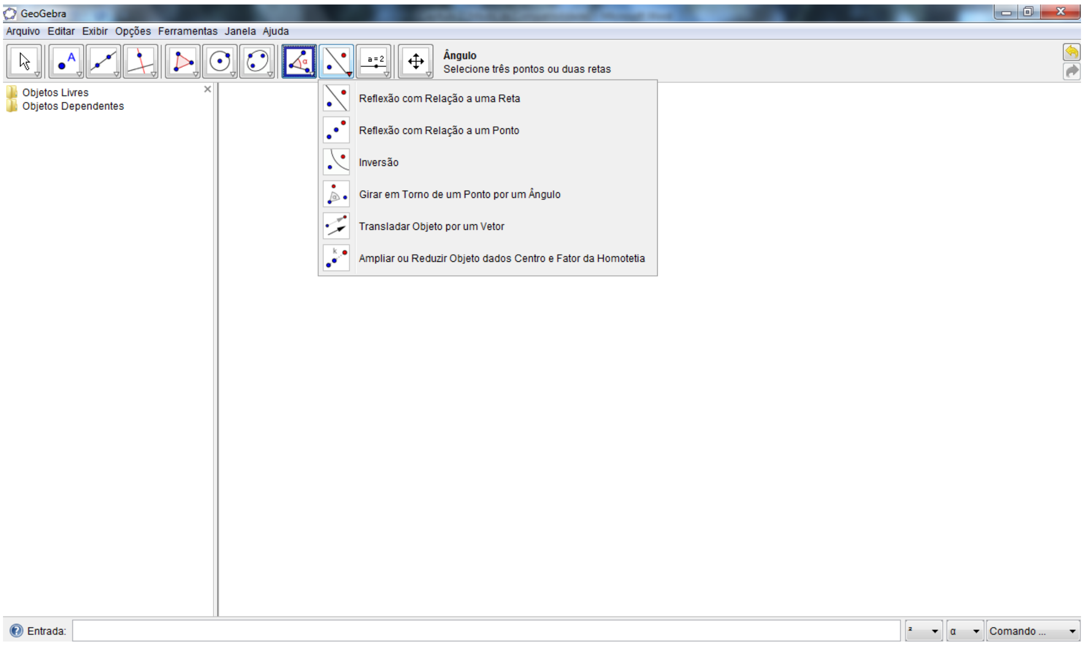


FIGURA 3.3: INTERFACE DO SOFTWARE GEOGEBRA
FONTE: A autora (2011)

A construção de objetos é feita mediante algumas primitivas que são disponibilizadas pelo software, como ponto, reta, círculo, retas paralelas ou perpendiculares apresentando inclusive a possibilidade de utilizar transformações geométricas. Isso gera toda uma relação de dependência na figura construída. Se construirmos um triângulo eqüilátero ABC a partir dos pontos A e B, então C não pode ser arrastado, apenas A e B. De um ponto de vista relacional não há necessidade de distinguir entre os pontos A, B e C, pois todos são vértices do triângulo eqüilátero e, portanto, possuem as mesmas propriedades, mas no software é diferente, pois A e B definem a posição de C enquanto que C não determina a posição de A e B (OLIVERO, 2002, p.59), como na figura 3.4[13]. Assim, num ambiente de software não é permitido arrastar pontos dependentes, e a distinção entre “arrastável” (*dragable*) e “não arrastável” (*non-dragable*) aparece. Essa distinção é desconhecida e desnecessária em um am-

13 Alguns softwares, como o Geogebra, já possuem a ferramenta de construção direta de um polígono regular, mas mesmo assim continua sendo definido por dois pontos, sendo estes os únicos possíveis de serem arrastados.

biente de papel e lápis, mas é importante no ambiente de geometria dinâmica (HÖLZL, 1996, p.172).

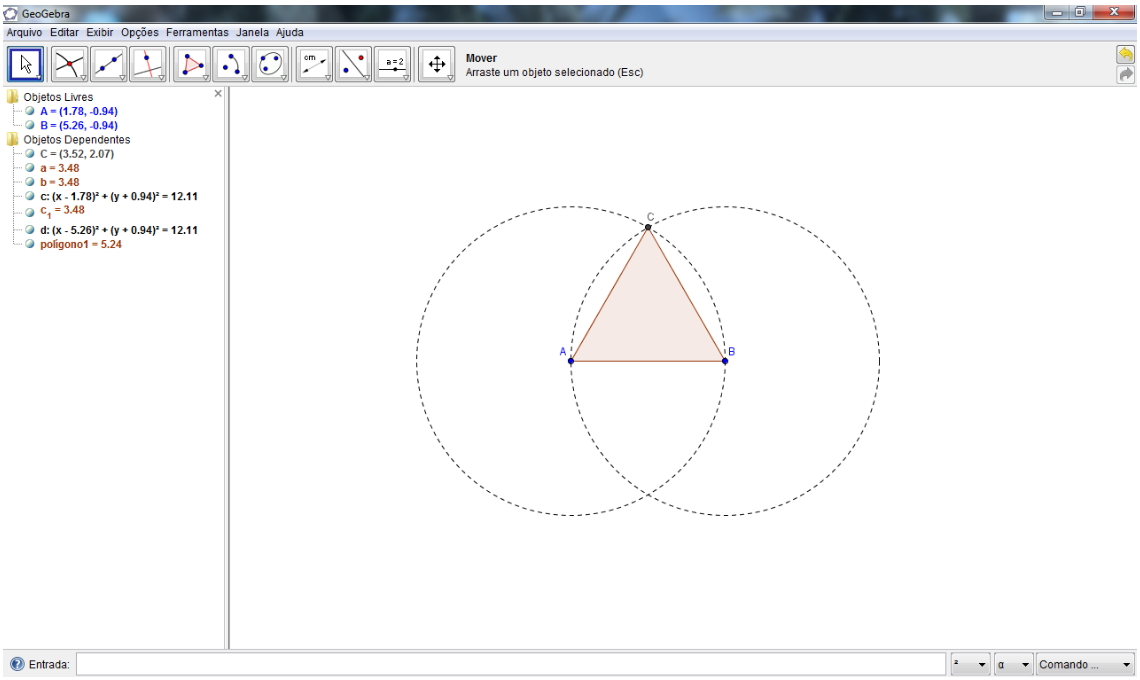


FIGURA 3.4: CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO
FONTE: A autora (2011)

3.3.1 O “arrastar”

Esses programas oferecem, portanto, a possibilidade de movimento, eis o dinâmico do ambiente do software, e assim, as figuras podem ser arrastadas e modificadas, processo que enriquece a própria concepção de ‘figura’, incorporando nela a dinamicidade subjacente. Olivero (2002, p.59) afirma então que a característica mais relevante dos softwares de geometria dinâmica é exatamente essa função de “arrastar” (*dragging*), isto é, a possibilidade de mover e manipular as figuras construídas na tela do computador: se uma figura foi construída corretamente, de acordo com as propriedades geométricas, ela manterá suas relações internas mesmo sendo arrastada.

Gravina (2001, p.83) denomina este recurso de “estabilidade sob ação do movimento”, em suas palavras:

> Estes programas oferecem o recurso de ‘estabilidade sob ação do movimento’: feita uma construção, mediante deslocamentos (*dragging*) aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico, o desenho na tela do computador – instância de representação do componente figural – transforma-se, mas preserva, nas novas instâncias, as relações geométricas

> impostas inicialmente à construção, bem como as relações delas decorrentes. Ou seja, para um dado objeto tem-se na tela do computador uma coleção de 'desenhos em movimento' que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. (GRAVINA, 2001, p.83)

Assim, por exemplo, um quadrado construído "à mão livre" na tela do computador, ao ser arrastado por um dos vértices perderá suas propriedades de ângulos retos e lados congruentes, mas se for construído pelas propriedades, não as perderá se for arrastado. Ou seja, essa estabilidade sob ação do movimento resulta exatamente das relações geométricas impostas à construção, evidenciando as propriedades características do quadrado enquanto objeto geométrico.

Desta maneira, a função de "arrastar" sugere novas maneiras de raciocinar e operar e até mesmo de conceber a geometria, alterando sua ontologia, constituída agora não mais de objetos geométricos senão de relações geométricas, explicitando, então, o caráter relacional dos objetos geométricos.

Olivero (2002) faz, inclusive, uma classificação das modalidades de arrastar de acordo com o que aparece na interface quando os alunos usam o software e no que os alunos parecem estar se focando enquanto arrastam a(s) figura(s). As modalidades são:

a) Sem arrastar (*non dragging*): não movimentam nada na tela;
b) Arrastar como teste (*dragging test*): movimento de pontos arrastáveis para ver se a figura mantém a propriedade desejada;
c) Arrastar vagando (*wandering dragging*): movimento do objeto aleatório para tentar descobrir alguma configuração ou regularidade na figura;
d) Arrastar guiado (*guided dragging*): como o arrastar de pontos base da figura para dar uma forma particular;
e) Arrastar num lugar geométrico (*lieu muet dragging*): quando se segue um determinado caminho escondido, mesmo sem estar ciente, ou quando se move pontos sobre um caminho dado, mas não visível;
f) Arrasto de linha (*line dragging*): desenho de novos pontos sobre aqueles que mantêm a regularidade da figura.

Assim, o processo de construção e a estabilidade geométrica das diferentes instâncias de representação propiciam a adequada fusão entre os componentes conceitual e figural que constituem a situação geométrica. Uma "família de desenhos em movimento" substitui o desenho particular como expressão do componente figural, descaracterizando as particularidades não relevantes do desenho particular (GRAVINA, 2001, p.89). Portanto, o recurso de arrastar, ou de “estabilidade sob ação de movimento”, como o denomina Gravina (2001), revela aos alunos o grau de controle que eles exercem sobre os objetos. Têm-se múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e assim os alunos passam a compreender que, a partir de certos fatos declarados (hipóteses), outros destes decorrem – os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação. Esta compreensão é parte fundamental para a construção de uma demonstração.

E é pelo recurso de estabilidade que os desenhos deixam de ser prototípicos e os alunos se tornam mais hábeis na identificação, quando em processo de demonstração, de sub-configurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar de uma argumentação/demonstração. Assim, manipulando os objetos na tela, os alunos podem questionar os resultados de suas ações de imediato, conjecturando e testando a validade das conjecturas primeiramente através dos recursos de natureza empírica, podendo se engajar, num segundo momento, na construção de argumentações teóricas. (GRAVINA, 2001, p.89).

Mesmo em configurações geométricas mais complexas é a dinamicidade da figura que revela os fatos estáveis implícitos, e, como afirma Gravina (2001, p.91) é este dinamismo que evidencia a função heurística do desenho, colocando em cena as apreensões operatórias necessárias ao fluir da argumentação dedutiva.

3.3.2 Desenho e Figura Geométrica no ambiente dinâmico

Segundo Olivero (2002, p.59), esta função de arrastar do software também pode ser um mediador entre os conceitos de desenho e figura adequados à geometria dinâmica: o desenho pode representar um objeto geométrico, com relações internas, mas que podem ser transformadas em outras instâncias pelo arrastar; já as figuras são os invariantes geométricos que se mantém mesmo com o arrastar de alguma de suas partes.

Uma particularidade muito importante das demonstrações geométricas é exatamente o fato de que por meio delas se estabelecem propriedades gerais das figuras (FETISSOV, 1994, p.28), sendo estas figuras construídas usando técnicas de desenho ou apenas um esboço ou um software. Fazendo uma prova com base em fatos iniciais corretos, isto é, com propriedades gerais e permanentes e não particulares do desenho, fica estabelecida a veracidade do teorema em questão. Como já mencionado em seção anterior, é aqui que reside uma das dificuldades dos alunos: enxergar a figura como uma classe de figuras geométricas, que pode ser explicitada e entendida através de um representante adequado chamado de 'exemplo genérico'; isto é, tirar a singularidade da figura e ficar com o aspecto geral.

Esta dificuldade é estudada por Sangiácomo (1996) em sua dissertação de mestrado. A autora busca estudar a passagem do desenho para a figura geométrica, no âmbito histórico e pedagógico. A partir de um estudo reflexivo, a autora ressalta dois pontos críticos: o primeiro trata da dificuldade que os alunos têm de reconhecer os invariantes de uma figura (parte geral da figura), pois consideram as propriedades que são particulares numa determinada posição (ou determinado desenho); o segundo trata do fato de que os alunos em nenhum momento são levados a perceber que existe uma classe de figuras que representa um objeto geométrico, que é impossível desenhá-las e que por isso usamos uma única figura para ser seu representante. Neste sentido, Laborde e Capponi (1994, p.54) afirmam que o ensino da Geometria ignora as relações entre objeto geométrico e desenho simplesmente silenciando sobre sua distinção ou agindo como se existisse um elo natural.

Para Laborde[14] (1993, *apud* JUNQUEIRA, 1996, p.66) o fato de não deixar claro para os alunos a distinção entre desenho e figura/objeto geométrico dificulta a sua análise teórica. Os conceitos próprios que os alunos constroem sobre as figuras geométricas privilegiam a aparência material dos desenhos, introduzindo obstáculos na análise teórica das figuras. Os obstáculos causados pelos aspectos perceptuais foram sintetizados por Yerushalmy e Chazan[15] (1990, *apud* JUNQUEIRA, 1996, p.66) nas três categorias seguintes:

a) modos de ver um desenho (o modo mais usual de ver um desenho pode não ser a visualização que apóia um raciocínio que conduza à solução do problema);
b) particularidade de um desenho (os desenhos representados como modelos de classes de objetos podem apresentar características próprias

14 Laborde, C. The Computer as part of the learning environment: The case of Geometry. Em C. Keitel e K. Ruthven (Eds.), Learning from Computers: Mathematics education and technology. Berlim: Springer Verlag, 1993.

15 Yerushalmy, M.; Chazan, D. Overcoming visual obstacles with the aid of Supposer. Educational Studies in Mathematics, 21, p. 199-219, 1990.

levando o aluno a contar com detalhes irrelevantes ou mesmo introduzir dados falsos); e

c) desenho tipo como modelos (alunos constroem conceitos geométricos próprios que são parciais ou incorretos fortemente influenciados pelos exemplos prototípicos das figuras – como o triângulo retângulo com o ângulo reto sempre no canto inferior esquerdo).

Neste sentido, as figuras construídas em ambiente dinâmico adquirem um estatuto diferente dos simples desenhos. Passam a ser exemplos genéricos, com a possibilidade da exploração dinâmica das propriedades envolvidas, já que a construção da figura utiliza explicitamente as suas propriedades, proporcionando a visualização de muitas e diferentes representações de uma mesma classe de figuras. Como afirma Junqueira (1993, p.70), se por um lado o computador coloca limitações que conduzem o aluno à utilização das propriedades geométricas das figuras e à descrição processual da figura em termos de construções elementares sucessivas e não apenas à sua percepção visual, por outro, uma vez construída a figura, esta pode ser deformada por arrastamento de alguns dos seus objetos de base. Esta manipulação de objetos específicos na tela do computador faculta aos alunos a possibilidade de considerar a figura representativa de uma classe de objetos, ou de construções, que mantém invariantes as propriedades.

Weigand (2002, p.189) afirma que os softwares de geometria dinâmica abrem a possibilidade, portanto, de um acesso experimental a proposições e à compreensão de conceitos. É um dos pontos fortes desta ferramenta. Pois, como afirma o autor, o computador apenas nos dá um resultado e não explica o porquê de tal resultado. Sequer dá um indicativo de uma possível razão. Portanto, o uso do computador estimula, primeiramente, a formulação de conjecturas.

Hoyles e Jones (1998) corroboram esta idéia quando afirmam que os ambientes de geometria dinâmica, pelo fato de permitirem a produção de construções auxiliares, casos extremos e por darem suporte a perguntas do tipo “e se” e “e se não”, possuem o potencial de promover um elo entre o raciocínio empírico e o dedutivo.

Assim, a exploração heurística da figura e a elaboração de conjecturas permitem aos alunos descobrir e construir "novos" conhecimentos matemáticos, fazendo conexões com o que estão aprendendo e as experiências e conhecimentos anteriores. Portanto, os ambientes computacionais para criação e exploração geométrica são ferramentas poderosas para levar os alunos a formular e a testar conjecturas, trabalhando também com a função heurística das figuras. É, então, plausível afirmar que estes ambientes podem provocar modificações nos processos de exploração das situações envolvendo interações dos raciocínios indutivo, abdutivo e dedutivo. No entanto, o computador, ou os softwares mais especificamente, apresentam-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem. Eles têm sua importância como um instrumento significativo para favorecer a aprendizagem. Desta maneira, é o contexto no qual os softwares são utilizados, as tarefas que são trabalhadas e a maneira que são utilizados pelo professor que fará a diferença no processo ensino-aprendizagem. Fica clara aqui a responsabilidade do professor para a melhor utilização dos softwares, pois é ele que irá colocá-los num contexto de aula e irá elaborar as atividades que possam explorar suas potencialidades.

4 O PROFESSOR DE ENSINO SUPERIOR

4.1 INTRODUÇÃO

Antes de aprofundarmos a discussão sobre o papel do professor de ensino superior frente às tecnologias no ensino, mais precisamente, com provas em matemática num ambiente dinâmico, cabe especificar quem é o professor de ensino superior e qual a sua formação.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN 9394/96) se refere aos professores das Instituições de Ensino Superior (IES), mais especificamente nos Títulos V "Dos níveis e das Modalidades de Educação e Ensino", Capítulo IV "Da Educação Superior", e VI "Dos Profissionais da Educação":

> Título V
>
> "Dos níveis e das Modalidades de Educação e Ensino"
>
> (...)
>
> Capítulo IV
>
> "Da Educação Superior"
>
> (...)
>
> Art. 52 – (...)
>
> II – um terço do corpo docente, pelo menos, com titulação acadêmica de mestrado ou doutorado.
>
> (...)

Título VI

"Dos profissionais de Educação"

(...)

Art.65 – A formação docente, exceto para a educação superior, incluirá prática de ensino de, no mínimo, trezentas horas.

Art.66 – A preparação para o exercício do magistério superior far-se-á em nível de pós-graduação, prioritariamente em programas de mestrado e doutorado.

(...)

Art.67 – (...)

Parágrafo único: a experiência docente é pré-requisito para o exercício profissional de quaisquer outras funções de magistério, nos termos das normas de cada sistema de ensino.

Analisando, então, estes artigos que abordam a formação do professor de ensino superior em geral, nota-se que na verdade não tratam dessa formação, apenas delimitam alguns espaços onde ela pode ocorrer que, como são em níveis de pós-graduação, não significa necessariamente que conseguirão abordar temas pertinentes às práticas educativas. Não se pode, no entanto, acreditar que um professor que possui um curso de pós-graduação em seu currículo está de antemão habilitado para compreender o sistema educacional e os aspectos que envolvem a educação. Claro que há aqueles que buscam a área da Educação em sua formação, no entanto no vasto leque de disciplinas ofertadas, aquelas que dizem respeito específico às práticas docentes às vezes podem ser deixadas de lado. Ou seja, o fato de ter uma especialização, seja ela qual for, não significa necessariamente estar apto para lecionar nas instituições do ensino superior.

No Brasil, segundo Fernandes e Bastos (2007), no âmbito dos cursos de pós-graduação a preocupação ainda fica centrada no espaço da educação formal, com ênfase na pesquisa, assim, seu desempenho como professor acaba sendo medido por sua produção científica na sua área de graduação. Neste contexto, o conteúdo específico tem um peso muito maior que o conhecimento pedagógico dos professores do ensino superior e os professores acabam por verem a si mesmos muito mais como pesquisadores ou profissionais (da medicina ou engenharia) do que professores de fato (ZABALZA, 2004).

Neste sentido, Assis e Castanho (2006) analisam a seguinte pergunta: “Consegue qualquer curso universitário habilitar o professor para lecionar no nível superior?”. Ou seja, se sua formação na pós-graduação é voltada para a pesquisa, sua formação pedagógica vem de seu curso de graduação (quando da licenciatura). Dentre suas considerações, as autoras resumem sua análise com palavras de Anastasiou:

> No caso da profissão universitária, para a maioria dos professores que atuam nas instituições do ensino superior, os cursos efetivados na universidade não funcionaram como preparação para a docência, com exceção dos professores oriundos da área da Educação ou Licenciaturas, que tiveram oportunidades de discutir elementos teóricos e práticos relativos à questão do ensino e da aprendizagem, porém para outra faixa de idade dos alunos.
>
> Poder-se-ia até dizer que, a maioria dos que atuam na docência universitária, tornou-se professor da noite para o dia: dormiram profissionais e pesquisadores de diferentes áreas e acordaram professores. Por mais excelência que tragam das diferentes áreas de atuação não há garantia de que a mesma tenha igual peso na construção do significado, dos saberes, das competências, dos compromissos e das habilidades referentes à docência. Por maior autonomia que tenham em sua profissão de origem, não há garantias de que estejam preparados para conceber e implementar alternativas e soluções pedagógicas adequadas, diante dos problemas que surgem na aprendizagem de seus alunos, nas salas de aula da universidade. (ANASTASIOU[16], 2002, *apud* ASSIS e CASTANHO, 2006, p.10)

O objetivo não é de modo algum criticar a atuação dos professores do ensino superior, tampouco generalizar, pois cabe lembrar também que muitos professores fazem estudos próprios a fim de melhorar sua prática, mas sim apontar para a importância de se refletir sobre sua prática docente, dado que sua formação de pós-graduação é, em geral, voltada para a pesquisa. Pois “o professor universitário, ao mesmo tempo em que é cobrado a realizar pesquisas e produções, o paradigma atual aponta justamente para sua atuação docente, cobrando-lhe uma posição diante das questões acerca de ensinar o aluno a “aprender a aprender”, buscando efetivar a qualidade de ensino” (ASSIS e CASTANHO, 2006).

---

16 Anastasiou, L. G. C. Construindo a docência no ensino superior: relação entre saberes pedagógicos e saberes científicos. In: ROSA, S. E. G. SOUZA, V. Didática e práticas de Ensino: interfaces com diferentes saberes e lugares formativos. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

4.2 O PAPEL FORMATIVO DO PROFESSOR

Para Zabalza (2004), a função básica da docência universitária é a formação do aluno e afirma que atualmente a universidade oferece um marco discreto e inconsistente em relação aos propósitos formativos. Segundo o autor, o significado de “formação” se perdeu, tomando diversas formas, e atualmente qualquer coisa pode ser atribuída à categoria do aspecto formativo. Neste sentido, “a formação é definida mais pelo que se ofertou ou pelo tipo de produto externo que se quer obter do que pelo efeito real que ela exercerá sobre as pessoas que se beneficiam dela” (ZABALZA, 2004, p.38).

A importância da formação deriva, para Zabalza, do vínculo necessário ao crescimento e aperfeiçoamento das pessoas, num sentido global. Quando fala de formação nesta visão mais ampla e completa, o que o autor denomina de “formação formativa”, ele pretende integrar nela conteúdos formativos como: (i) novas possibilidades de desenvolvimento pessoal; (ii) novos conhecimentos; (iii) novas habilidades, (iv) atitudes e valores; e o (v) enriquecimento das experiências. Neste sentido rompe com visões desvirtuadas da formação como simples formatação ou condicionamento, mas defende a possibilidade dos alunos obterem um desempenho mais autônomo. O autor não quer transformar os processos formativos em ideais e inalcançáveis, apenas busca essa reflexão sobre a formação e o papel formativo da docência universitária. Se os professores universitários são formadores e não apenas “explicadores” dos conteúdos das disciplinas, e se querem assumir esse “compromisso formativo”, então o que é esperado deles? (ZABALZA, 2004, p.43) O próprio autor afirma que esta não é uma questão simples, nem sob a perspectiva do professor e da forma que concebe seu papel, nem da perspectiva das condições de trabalho e nem da expectativa dos alunos. Portanto,

> ... talvez a influência formativa mais clara e pertinente ocorra de forma indireta, por meio do trabalho sobre os conteúdos. O tipo de conteúdos selecionados, a forma de abordá-los, a metodologia empregada, as exigências geradas para a aprovação, entre outros constituem elementos que revelam, quando são empregados, uma grande capacidade de impacto formativo sobre os estudantes. (ZABALZA, 2004, p.116)

Neste sentido, também, existe a passagem da docência baseada no ensino para aquela baseada na aprendizagem, onde a preocupação está em que o aluno realmente aprenda. Ou seja, o professor universitário deve ser um profissional da aprendizagem, ao invés de ser um especialista que conhece muito bem sua área e sabe explicá-la, mas deixa a tarefa de aprender como função do aluno. Isso é parte de seu papel formativo, a necessidade não apenas de uma competência científica (conhecedor do âmbito cientifico ensinado), mas também de uma competência pedagógica, compromissado com a formação e com a aprendizagem de seus alunos (ZABALZA, 2004).

4.3 O PROFESSOR E AS TECNOLOGIAS

Na inserção de novas tecnologias na educação, não se trata de modificar conteúdos e objetivos do ensino da matemática, mas sim de modificar a maneira de lidar com esses conteúdos, os métodos de ensinar que possam levar a uma melhor compreensão destes, e assim atinjam objetivos “antigos” (WEIGAND, 2002). Isto está relacionado diretamente com o papel do professor em sala de aula. Experiências com a inserção do computador no ensino de matemática mostram que o ensino assistido por computador se distingue do ensino tradicional centrado no professor oferecendo a chance de um ensino centrado no aluno. Com isto, novas tarefas e responsabilidades recaem sobre o professor (WEIGAND, 2002).

De acordo com Masetto (2000), o professor tem de assumir uma nova atitude. Embora ainda possa desempenhar, de vez em quando, o papel do especialista que possui conhecimentos e/ou experiências a comunicar, na maior parte do tempo desempenhará o papel de orientador das atividades do aluno, de consultor, de facilitador da aprendizagem, de alguém que pode colaborar para dinamizar a aprendizagem do aluno; assim, desenvolverá o papel de mediação pedagógica. Para este autor, mediação pedagógica é “a atitude, o comportamento do professor que se coloca como um facilitador, incentivador ou motivador da aprendizagem, que se apresenta com a disposição de ser uma ponte entre o aprendiz e sua aprendizagem – não uma ponte estática, mas uma ponte dinâmica, que ativamente colabora para que o aprendiz chegue aos seus objetivos” (MASETTO, 2000, p.144).

Almeida (1999) coloca a prática do professor como estando no intervalo entre dois extremos. Segundo a autora, o professor atua entre os limites de duas situações que oscilam entre deixar o aluno totalmente livre para agir e simplesmente deixar acontecer, ou então, assumir o outro extremo e ensinar tudo o tempo todo. Na primeira situação pode haver um desgaste, já que o aluno pode acabar tentando “redescobrir a roda”, ou ficar desenvolvendo ações que repetem o que já descobriu. Na segunda situação, o professor assume controle do processo, fornecendo todas as informações, restringindo a criatividade e a iniciativa dos alunos. Assim, a prática deveria estar no intervalo entre estes dois extremos, se alterando constantemente de acordo com cada situação, pois é importante o professor ser o responsável pelo processo, sendo necessário que adquira a sabedoria da espera, o saber reconhecer no aluno aquilo que nem ele próprio viu nele mesmo ou em suas produções. Segundo a mesma autora, o professor que trabalha na educação com informática deve desenvolver na relação aluno-computador uma mediação pedagógica que se explicite em atitudes que intervenham para promover o pensamento do aluno, implementar seus projetos, compartilhar problemas sem apontar soluções, ajudando assim o aprendiz a entender, a analisar, testar e corrigir os erros (ALMEIDA, 1999, p.42).

Moran (2006) afirma que o papel do professor é, então, fundamentalmente o de orientador/mediador, pois para ele, o professor é um pesquisador em serviço. Ou seja, aprende com a prática e a pesquisa e ensina a partir do que aprende. Neste sentido, expressa o papel do professor de quatro formas distintas:

a) Orientador/mediador intelectual - Colabora na seleção das informações pertinentes, auxiliando para que elas tenham significado para os alunos, com o intuito de que eles as contextualizem através da compreensão, avaliação, reelaboração e adaptação.
b) Orientador/mediador emocional - Motiva, incentiva, estimula, organiza os limites, com equilíbrio, credibilidade, autenticidade, empatia.
c) Orientador/mediador gerencial e comunicacional - Tem a função de organizador, seja no que se refere ao gerenciamento das atividades propostas, seja no desenvolvimento das diversas formas de comunicação e de interação.
d) Orientador ético - Ensina a assumir e vivenciar valores construtivos, individual e socialmente. Contribui na construção sensorial-intelectual-emocional-ética dos estudantes que vão consolidando referenciais de atitudes, valores e idéias. “Um bom educador faz a diferença”.

No entanto, essa mudança de atitude sugerida por Masetto, não é simples nem fácil. Na forma tradicional de ensino o professor é o detentor do saber, que comunica ou transmite algo aos alunos; e o professor se sente seguro neste papel. Sair dessa posição para entrar em um diálogo direto com os alunos correndo o risco de ouvir uma pergunta para a qual não tenha a resposta no momento, propondo aos alunos que pesquisem juntos para buscar a resposta gera grande desconforto e insegurança. Eis o motivo por que muitos professores evitam trabalhar com as tecnologias; eles preferem ficar, como denominam Borba e Penteado (2005), na zona de conforto, onde tudo é conhecido, previsível e controlável. Por mais que estejam cientes do fato que sua prática pode não favorecer a aprendizagem dos alunos, não fazem nada para mudar isso. Não avançam para a chamada zona de risco, na qual é preciso avaliar constantemente as conseqüências das ações propostas e onde o professor pode dar-se conta de que não consegue ser aquele que possui todo o conhecimento necessário para trabalhar com os alunos. Ele pode vir a perceber que a sala de aula é um espaço no qual as informações devem ser organizadas e discutidas, onde se compartilham as diferentes informações e experiências, gerando e disseminando novos conhecimentos. E é do professor esta responsabilidade pela organização dessas discussões para que se tornem um ambiente de aprendizagem. Outra característica da zona de risco é a aparente perda de controle, esta aparece em decorrência de problemas técnicos e da diversidade de caminhos e dúvidas que surgem quando os alunos trabalham com um computador. Quanto às perguntas imprevisíveis, situações às vezes requerem um tempo mais longo de análise e compreensão, mesmo por parte de professores mais experientes. Em muitas situações poderá ser necessária uma exploração mais cuidadosa e até mesmo uma discussão com outras pessoas, pois o computador nem sempre responde de forma explicita. E numa sala de aula, isso constitui um ambiente de aprendizagem tanto para os alunos como para o professor. Existe ainda o risco do conhecimento que o professor tem da disciplina se tornar obsoleto; o professor pode se deparar com a necessidade de expandir muitas de suas idéias matemáticas e também buscar novas opções de trabalho com os alunos. Assim, muitos professores desistem quando percebem a dimensão desta zona de risco. Outros não desistem, mas acabam enquadrando a tecnologia em rotinas previamente estabelecidas, procurando um roteiro bem específico para evitar situações inusitadas (BORBA e PENTEADO, 2005).

Em suma, o uso de tecnologias na educação para o professor implica conhecer as potencialidades destes recursos em relação ao ensino das diferentes disciplinas, bem como promover a aprendizagem de novas competências, procedimentos e atitudes por parte dos alunos para utilizarem as máquinas e o que elas têm a oferecer de recursos.

O uso do computador na escola tem um potencial enorme, no entanto, não está diretamente relacionado à presença da máquina, mas sim do profissional professor que firma um compromisso com a pesquisa, a elaboração própria, com o desenvolvimento da crítica e da criatividade, superando a cópia, o mero ensino e a mera aprendizagem (BRITO e PURIFICAÇÃO, 2006). Um professor compromissado dessa maneira poderá exercer seu papel formativo do pensamento matemático em seus alunos.

4.3.1 O Professor e a Tecnologia no Ensino Superior

A literatura mais recente sobre o ensino superior aponta para uma crescente preocupação com a prática dos professores universitários. No entanto, embora se tenha uma maior ciência de que a tecnologia abriu novos horizontes para os professores e pesquisadores, as produções referentes ao uso das tecnologias de informação e comunicação pelo professor de ensino superior ainda são muito tímidas (MARIN, 2009, p.55). Marin (2009) faz, para seu trabalho de mestrado, uma varredura para encontrar trabalhos que discutem o uso de TIC (tecnologia de informação e comunicação) por professores de ensino superior e afirma que quase não há trabalhos desta natureza (p.57).

Temos o trabalho de Souza Jr. e Silva (2008), cujo artigo intitulado “Formação de docentes universitários e tecnologias da informação e comunicação: análise de uma experiência” discute uma análise do desenvolvimento de atividades de ensino numa plataforma virtual de aprendizagem como suporte para aulas presenciais. Isto foi feito no âmbito de um programa de Pós-Graduação em Educação com alunos do mestrado e doutorado.

O trabalho apresentado por Alegre (2005) em sua tese de doutorado buscou identificar como os professores do ensino superior do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná utilizam as tecnologias de informação e comunicação em seu trabalho docente. A autora faz sua coleta de dados através de questionários para professores das mais diversas áreas do conhecimento.

Em sua dissertação de mestrado, Garcez (2007) também busca identificar como os docentes universitários estão utilizando as tecnologias de informação e comunicação em seu trabalho docente, e o faz com quatro docentes do curso de Comunicação Social. A autora usa como instrumentos para a coleta de dados questionários, entrevistas e observações em sala de aula.

Temos também o trabalho de Marin (2009) que em sua pesquisa busca compreender como os professores de Cálculo Diferencial e Integral fazem uso da tecnologia de informação e comunicação em suas aulas (no ensino superior). O autor não se limitou a examinar a questão apenas no curso de Matemática, mas abrangeu professores de diferentes cursos que apresentam a disciplina, fazendo sua análise através de questionários e entrevistas.

Neste sentido, podemos afirmar que são poucas as pesquisas que tratam do professor de ensino superior e o uso da tecnologia, principalmente na matemática. E as que estão presentes, são trabalhos envolvendo professores do ensino superior e sua prática, mas nos mais diversos âmbitos como a comunicação social e o cálculo diferencial e integral.

4.4 O PROFESSOR E O AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

No âmbito da geometria dinâmica, têm-se muitas pesquisas realizadas, no entanto, a maioria tem como foco a aprendizagem do aluno ou os processos envolvidos. Ou seja, o foco está nas dificuldades cognitivas encontradas pelos alunos, sua relação com o conteúdo teórico, como se dá o seu raciocínio, entre outras coisas.

Dentre estas pesquisas podemos citar Jones (2000), que em um de seus estudos trabalha com alunos de 12 anos de idade e aponta para o impacto de usar softwares de geometria dinâmica. Segundo o autor, o impacto se dá, primeiramente, na medida em que o aluno compreende que a ordem em que objetos vão sendo criados leva a uma hierarquia de dependência funcional dentro da figura. Tal fato traz consigo, também, uma dependência entre propriedades utilizadas. Segundo, é que o aluno atenta para o fato de que a restrição para uma figura se tornar robusta, isto é, manter suas propriedades mesmo sendo arrastada, está interligado com a noção da característica matemática da figura. Ou seja, implica em saber trabalhar com as relações entre propriedades, algo que é necessário para compreender como uma prova "funciona". E, em terceiro, a natureza dinâmica do software influencia a forma de explicação dada pelos alunos.

Mariotti (2000) tenta analisar, em um de seus estudos realizado na Itália, a mediação de um ambiente dinâmico num trabalho de introdução à demonstração. É a descrição de um experimento a longo prazo com alunos da 9ª e 10ª séries. O objetivo do estudo é esclarecer o papel do software Cabri-Géomètre no processo ensino aprendizagem, no que diz respeito a características suas que possibilitem introduzir os alunos ao raciocínio teórico.

Olivero (2002) assume como objetivo principal de seu trabalho investigar o desenvolvimento do processo de demonstrar, isto é, a construção de conjecturas e provas, em um ambiente de geometria dinâmica, assim como as interações que ocorrem neste processo. Como resultado principal da pesquisa a autora aponta o fato de que provar se torna um processo focalizado, ou seja, dependendo do foco dado pelo aluno, diferentes conjecturas vão surgir. Tal processo focalizado irá depender, portanto, de como o aluno irá analisar o problema em questão, baseado em sua experiência anterior. Neste sentido, ressalta que um elemento chave no processo de demonstração é um bem sucedido "gerenciamento" de elementos empíricos e teóricos.

Gravina (2001), em sua tese de doutorado, propõe uma engenharia didática em ambiente de geometria dinâmica que favoreça a ascensão dos alunos em patamar de conhecimento: do empírico ao hipotético-dedutivo. Neste sentido busca responder a duas perguntas: (i) de que forma os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos entendam o significado de demonstração? (ii) como os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos construam suas próprias demonstrações? Assim, coloca sobre os alunos a responsabilidade das ações/formulações/validações tais que se concentrem na busca de razões que expliquem suas constatações empíricas. Embora coloque a importância do papel do professor como mediador pedagógico, não o discute com mais detalhes.

Almouloud e Mello (2000) tratam dos problemas ligados à formação de conceitos geométricos nos alunos de 3º e 4º ciclos básicos e trazem uma proposta para a introdução da demonstração no ensino da geometria. Neste sentido, o trabalho tem por objetivo uma reflexão sobre os problemas da formação dos conceitos geométricos nos alunos, bem como sobre a formação dos professores dos 3º e 4º ciclos básicos.

Rolkouski (2002), em sua dissertação de mestrado, busca a descrição dos processos de construção de demonstrações em geometria, por alunos de Licenciatura em Matemática, em um ambiente informatizado. Para tanto, traz um olhar sobre os alunos, futuros professores, e como eles produzem demonstrações em matemática.

Como se percebe, as pesquisas giram em torno dos alunos. No entanto, alguns desses trabalhos apontam para a importância do papel do professor, mas não se aprofundam no tema, como o faz Mariotti (2000, p.33), que afirma que o papel do professor é fundamental para guiar a discussão e permitir que o aluno desenvolva uma perspectiva teórica da geometria, e Olivero (2002, p. 248) que deixa como sugestão para pesquisas futuras no que se refere à prática do professor. Ou seja, são pesquisas que buscam compreender como se dá a aprendizagem em um ambiente dinâmico, mas não o que concerne à prática docente.

Têm-se trabalhos que envolvem o professor, mas são professores do Ensino Fundamental, como a pesquisa de Purificação que, em sua tese de doutorado (PURIFICAÇÃO, 2005), procura identificar a reconstrução de conceitos geométricos – quadriláteros - por professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, utilizando o software Cabri-Géomètre; assim como a justificativa dessas reconstruções extraindo possíveis reflexões sobre-para a prática pedagógica.

Assim também o trabalho de Almouloud (2007) que tem por objetivo investigar os fatores que interferem no processo de ensino aprendizagem envolvendo raciocínio dedutivo em matemática. Mais especificamente, coloca as seguintes questões a serem pesquisadas: Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas envolvendo provas e demonstrações? Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores no que diz respeito às provas e demonstrações em matemática?

Constata-se, portanto, que são necessários mais trabalhos que envolvam a prática do professor, inclusive do professor de ensino superior, em relação ao uso de ambientes de geometria dinâmica. Neste sentido, esta pesquisa busca subsídios para compreender o papel do professor na formação do pensamento matemático dos alunos. A busca desses subsídios é feita, então, através de um estudo prático.

5 O ESTUDO PRÁTICO

O estudo prático foi uma experiência além-mar, realizado durante um estágio de doutorado (doutorado-sanduíche) na cidade de Würzburg, Alemanha. O objetivo deste estudo prático era o de investigar as interações entre professor e aluno que acontecem no processo de prova, mais especificamente, o papel do professor neste processo, isto é, as intervenções realizadas pelos professores. Minha participação no estudo foi o de planejar as sessões, escolhendo as atividades a serem trabalhadas, e observando aluno e professor durante a sessão. Os métodos de coleta de dados usados foram gravações de vídeo e coleta de materiais. Os dados disponíveis para análise foram as transcrições dos vídeos, os arquivos do Geogebra e as folhas de papel utilizadas pelos alunos. A análise dos dados teve o objetivo de desenvolver uma descrição analítica e explanatória do papel do professor no processo de prova em um ambiente dinâmico, buscando compreender a natureza de suas intervenções durante tal processo. As sessões seguintes descrevem o processo de pesquisa de maneira mais detalhada.

5.1 A METODOLOGIA

Como o interesse está em compreender o papel do professor em um processo de prova num ambiente dinâmico para fornecer explanações sobre como este processo acontece isto nos levou a escolher uma metodologia qualitativa, tanto na coleta de dados como na análise. Assim, optamos por realizar experimentos de ensino, que segundo Borba (2004, p. 7) é um tipo de pesquisa onde ”atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o pesquisador-professor possa ‘ouvir’ de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes”. Portanto, pares de aluno-professor trabalhando com atividades selecionadas foram observados e a partir destas observações foi realizada a construção de uma teoria, o que se assemelha à metodologia de *Grounded Theory*, desenvolvida por Glaser e Strauss[17] (1967, *apud* CHARMAZ, 2006).

Charmaz, em seu livro *Constructing Grounded Theory* (2006), explicita o que é essa teoria criada por Glaser e Strauss, como ela surgiu e como construí-la, mostrando possíveis caminhos a serem seguidos. Não há uma receita a ser seguida, já que, segundo a autora, a própria pesquisa e sua análise irão indicar como prosseguir.

> Em cada fase da jornada da pesquisa, *sua* leitura de seu trabalho guia seus próximos movimentos. Essa combinação de envolvimento e interpretação te leva ao próximo passo. O ponto final da jornada emerge de onde você começa, aonde você vai, e com quem você interage, o que você vê e ouve, e como você aprende e pensa. Em suma, o trabalho final é uma construção – a sua. (CHARMAZ, 2006, p.xi)

Quanto aos dados, a autora afirma que os dados coletados são ferramentas a serem usadas. Neste sentido, ela apresenta duas maneiras de analisar os dados obtidos, o que ela denomina de codificação (*coding*): (i) codificação inicial linha por linha, uma estratégia que faz o pesquisador analisar com mais detalhes linha por linha e a partir daí começa a conceituar suas idéias; e (ii) codificação focada, que permite separar, classificar e sintetizar montantes de dados. As duas maneiras podem, ainda, aparecer na mesma pesquisa. Na medida em que essa codificação é analisada, podem surgir as categorias conceituais. (CHARMAZ, 2006, p.11)

Embora um cenário natural, um ambiente de sala de aula, talvez fosse desejado para o estudo, tivemos que optar por um cenário de laboratório, pois não havia possibilidade de realizá-lo em uma sala de aula devido ao cronograma do professor. Além disso, num experimento de ensino é possível acompanhar de perto o raciocínio desenvolvido pelo aluno e sua interação direta com o professor, enquanto reage às intervenções realizadas por ele, o que numa sala de aula fica mais difícil de ser percebido.

O papel da pesquisadora também é uma peça chave neste processo, pois seu *insight* é o instrumento fundamental para a análise. Os dados para tal pesquisa de investigação são de natureza descritiva, como uma evidência externa do desenvolvimento do processo.

17 Glaser, B. G.; Strauss, A. L. The discovery of grounded theory. Aldine, Chicago, 1967.

A idéia de construir uma teoria à medida que se vai analisando os dados se dá pelo fato de os próprios dados sugerirem novas formas de serem analisados. Como colocam Bogdan e Biklen:

> Como um pesquisador qualitativo que planeja desenvolver uma espécie de teoria sobre algo que você tem estudado, a direção que você irá seguir irá surgir depois que você coletou os dados, depois de ter passado tempo com seus sujeitos. Você não está juntando um quebra-cabeça onde você já conhece a figura. Você está construindo uma figura que toma forma à medida que você reúne e examina as partes. ... O pesquisador qualitativo planeja usar parte do estudo para aprender quais as perguntas que são importantes. (Bodgan e Biklen, 1998, *apud* OLIVERO, 2002 – tradução nossa)

Um processo indutivo de análise é realizado, começando de algumas suposições teóricas, mas aberto a "ler" os dados coletados com intuito de desenvolver categorias de análise. Neste sentido, o *framework* se desenvolve durante a pesquisa, o que vem ao encontro da *grounded theory*.

Tentar compreender o papel do professor como formador do pensamento matemático em um processo de prova num ambiente dinâmico requer observação e análise acurada das interações entre o professor e o aluno, buscando a natureza das intervenções realizadas pelo professor. Assim, o experimento de ensino se mostra adequado para o tipo de pesquisa pretendida.

5.2 OS SUJEITOS ENVOLVIDOS

Como o objetivo da pesquisa é compreender melhor o papel do professor em auxiliar o aluno a aprender a pensar matematicamente a um nível de universidade, fui conversar com os professores do Departamento de Educação Matemática da universidade alemã onde tive a oportunidade de fazer o estágio de doutorado. Dois dos professores de tal Departamento se mostraram abertos à pesquisa, e concordaram em colaborar com seu tempo. Conversei com tais professores, expondo um pouco da minha pesquisa para que pudessem entender o que precisava deles enquanto professores. Pude também realizar uma entrevista com eles para entender e conhecer o que pensavam a respeito do assunto abordado, com o intuito de que isso também pudesse auxiliar na análise posterior dos dados coletados.

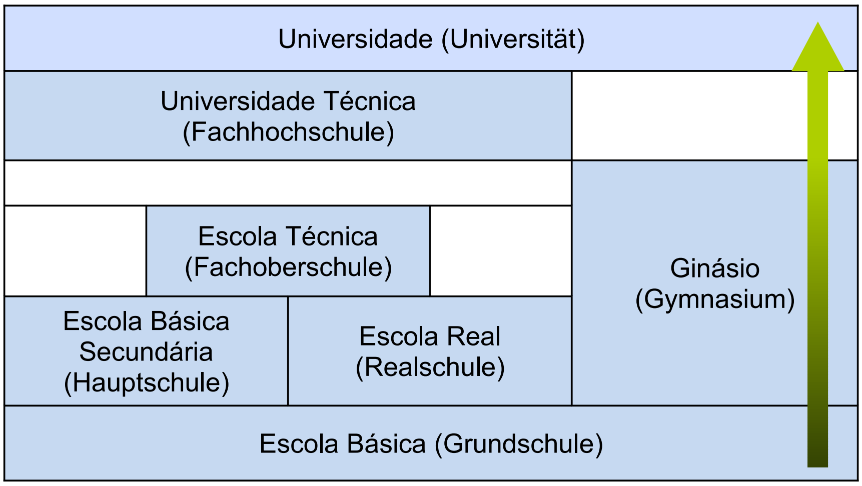
Para a escolha dos alunos, se optou por trabalhar com os alunos que estavam cursando a disciplina de Elementos de Geometria, pois estes estavam trabalhando com provas e demonstrações e foram introduzidos ao *software* Geogebra no início do curso. Tal disciplina era dividida em aulas teóricas e aulas práticas de exercícios e o uso do *software* era um auxílio utilizado algumas vezes durante as aulas de exercícios, sendo que mais em atividades de tarefa domiciliar, assim optamos por fazer a pesquisa não durante as aulas, mas em laboratório para que pudesse ser trabalhado somente no software. Escolhemos então trabalhar com os dois alunos que se dispuseram a participar da pesquisa. Os dois eram alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, cursando então a disciplina acima mencionada.

5.2.1 O Sistema Educacional Alemão e a Formação do Professor

Embora o sistema alemão e o sistema brasileiro sejam diferentes, possuem suas similaridades. Após uma formação geral equivalente ao nosso ensino fundamental e médio, o aluno pode ir para a universidade e adquirir uma educação superior específica, desde que tenha notas para isso, pois lá não há o sistema de vestibular como aqui, assim, o aluno apenas possui a possibilidade de cursar uma universidade se obtiver bom desempenho durante toda sua vida escolar.

Uma diferença notória é o fato de na Alemanha cada estado ter autonomia sobre o sistema educacional, diferente do brasileiro onde o MEC age em território nacional. Na Alemanha, cada estado pode decidir sobre os programas de estudo, os livros didáticos e mesmo o sistema escolar. Por exemplo, na maioria dos estados há apenas um tipo de escola, geral, que vai até a décima série (*Gesamtschule*), mas em Sachsen e Bayern é diferente, eles possuem três tipos de escolas, dependendo do foco e do desempenho do aluno. Outro fato, em Bayern existe um mesmo exame final para todo o estado, enquanto em outros estados esse exame final é definido localmente. Como minha pesquisa se realizou na universidade da cidade de Würzburg, situada em Bayern, irei concentrar meus esforços na descrição do sistema de formação neste estado.

O quadro 5.1 mostra um diagrama do sistema escolar de Bayern. A Escola Básica (*Grundschule*) vai dos anos 1 a 4, depois disso, os alunos são divididos em três escolas distintas, dependendo de seu desempenho: Escola Básica Secundária (*Hauptschule*), Escola Real (*Realschule*) e o Ginásio (*Gymnasium*).



QUADRO 5.1: DIAGRAMA DO SISTEMA EDUCACIONAL ALEMÃO
FONTE: A autora (2011)

A Escola Secundária Básica dá continuidade ao ensino da escola primária e inclui os anos de 5 a 9 (quando há alunos maduros para tal, também é ofertado o décimo ano). Oferece uma educação básica geral. Esta escola corresponde a alunos que possuem o foco de seus interesses e seu desempenho voltado para o pensamento visual-concreto e para assuntos práticos. Após o nono ano, estes alunos entram na vida profissional, num sistema dual: aprendem uma profissão na medida em que a praticam, ou seja, possuem uma formação continuada numa determinada profissão. Eles trabalham alguns dias da semana, enquanto nos outros eles estudam. Após o décimo ano eles podem tentar cursar a Escola Técnica (*Fachoberschule*) se mostrarem desempenho adequado. A Escola Técnica inclui os anos 11 e 12 e fornece uma educação prática especializada.

A Escola Real (*Realschule*) inclui os anos 5 a 10 e também dá continuidade à escola primária. Ela oferece uma formação mediana, com uma educação geral preparatória para a vida profissional. A partir do sétimo ano áreas especificas devem ser escolhidas: área técnica matemática e científica, área de economia, área de línguas, e o foco em área artística e social. Depois da décima série também podem cursar a Escola Técnica ou ingressar na vida profissional.

Já o Ginásio inclui os anos de 5 a 12 (recentemente mudado para 13); também dá continuidade ao ensino da escola primária e conclui com um Exame Final

(*Abiturprüfung*), e oferece uma maturidade geral para ingressar na universidade. Ela fornece uma educação geral detalhada que se espera possuir para ingressar na universidade. Há diferentes direções a serem escolhidas: lingüística, científica-tecnológica, artística e sócio-econômica. Em geral, um estudo universitário é iniciado depois do término do Ginásio, mas também se pode ingressar na vida profissional ou optar por um treinamento profissional.

Com o exame *Abitur*, o aluno pode ingressar em um curso universitário de sua escolha, dependendo da direção que ele seguiu com seus estudos no Ginásio. Como meu foco é o professor (de matemática), vou continuar a explanação nesta direção, da formação do professor e não de outras profissões.

Se o aluno quer se tornar um professor de matemática, ele tem que decidir em que nível escolar ele quer lecionar, isto é, a formação do professor é diferente para cada nível e foca nos conteúdos daquele nível. A duração do curso também depende do nível: a duração mínima é de 3 anos, mais um ano adicional para exames finais para os níveis de Escola Primária, Secundária Básica e Escola Real, e 4 a 5 anos para os professores que querem lecionar no Ginásio. Após cursarem todas as disciplinas da graduação, os alunos completam seus estudos com o Primeiro Exame Estadual (*Erstes Staatsexamen*) e seguem para um período de 2 anos de treinamento como professor assistente (*Referendariat*).

Esse período de professor assistente consiste de quatro fases: uma fase introdutória de 3 meses nos quais o aluno-professor passa 10 horas por semana em sala de aula observando e auxiliando o professor da classe; uma fase de 6 meses, que inclui observação e 4 a 8 horas de prática docente assistida por semana; uma fase intensiva de 12 meses que inclui 4 horas por semana de observação ou prática docente assistida e 8 a 10 horas por semana de prática docente não-assistida; e um período de preparação para o Segundo Exame Estadual (*Zweites Staatsexamen*) de 3 meses que inclui prática docente assistida e não-assistida e observação. Somente depois de realizado o Segundo Exame Estadual o aluno recebe o diploma de professor.

Para se tornar um professor a nível universitário ele deve continuar seus estudos no mestrado e doutorado. Durante o doutorado, o que em geral é um período de 3 anos, o doutorando pode obter uma bolsa de estudo e se dedicar integralmente aos estudos ou então, caso não obtenha uma bolsa, se torna professor assistente na universidade onde faz seus estudo de doutorado. Após adquirir seu título de doutor o professor passa para o período de Habilitação, que é um período de 3 a 5 anos onde ele pode escrever um livro ou fazer uma segunda pesquisa enquanto leciona em uma universidade como professor assistente. Após este período que ele pode se candidatar para uma posição fixa, desde que seja em uma universidade diferente daquela em que tenha adquirido seu título de doutor. No entanto, este período de Habilitação não tem mais sido uma exigência, podendo o professor doutor se candidatar a uma vaga imediatamente após ter concluído seu doutorado.

Embora uma pessoa que não tenha se graduado numa licenciatura, isto é, não tiver cursado uma graduação com intuito de se tornar professor, teoricamente ela ainda pode ser professor em uma universidade desde que tenha um mestrado e um doutorado. No entanto, a maioria das universidades exige que o professor doutor que se candidata tenha experiência em docência na escola, o que limita as chances de alguém que não tenha essa formação.

5.3 AS ATIVIDADES

Para a escolha das atividades, buscamos encontrar problemas interessantes, que possibilitassem certo desafio aos alunos e tivessem sentido serem trabalhadas num ambiente dinâmico. De início, foram escolhidas quatro atividades. Para, de certa maneira testá-las, foi feito um estudo exploratório com um grupo de alunos. Como não teríamos professores voluntários suficientes para fazer o estudo exploratório e o estudo prático em si, optamos por fazer o exploratório com alunos mais avançados, que já poderiam atuar no papel de professor. Estes alunos estavam, então, no final de seus estudos, terminando o curso de Matemática e foram divididos em dois grupos: um grupo faria o papel de professor, enquanto o outro seria o dos alunos resolvendo as atividades.

Embora este estudo exploratório não tenha tido muito sucesso no quesito de eles interpretarem o papel do professor, pois parece que não se sentiram a vontade fazendo-o com seus colegas e ainda sob uma observação, o intuito de testar as atividades foi alcançado. A partir do que foi observado, foram feitas modificações para o estudo principal. Das quatro atividades inicialmente escolhidas, foram mantidas apenas duas, sendo que uma delas ainda foi modificada para que tivesse um cunho de problema aberto. As atividades não envolviam nenhum conteúdo específico de geometria, mas sim um conhecimento geral e propriedades básicas dessa área.

5.3.1 Atividade 1

A primeira atividade apresentada foi a seguinte:

Seja ABC um triângulo onde D é ponto médio de AB e E é ponto médio de AC. Crie os pontos B' e C' sendo simétricos de B e C, respectivamente, pelos pontos E e D. Movimente os vértices do triângulo e observe a relação entre os pontos B', A e C'. Qual relação existe ali? Justifique sua resposta.

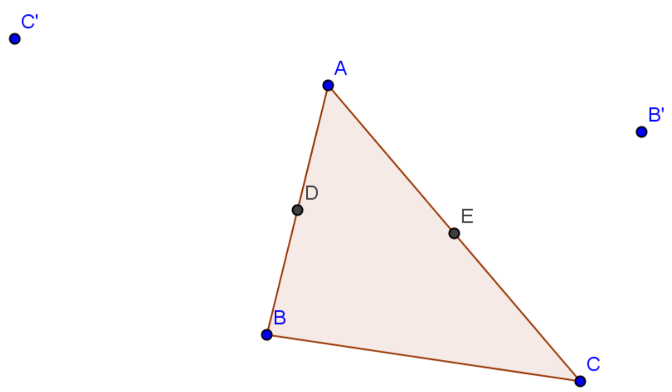


FIGURA 5.1: ATIVIDADE 1
FONTE: A autora (2011)

5.3.2 Atividade 2

A segunda atividade apresentada foi a seguinte:

Seja ABCD um quadrilátero convexo. Considere as bissetrizes dos ângulos internos e seus pontos de interseção E, F, G e H dos pares de bissetrizes consecutivas. Movimente ABCD, considerando diferentes configurações.

O que acontece ao quadrilátero EFGH? Que tipo de figura pode se tornar? Pode EFGH se tornar um quadrilátero específico? Por quê? Qual a hipótese sobre ABCD você precisa para obter essas situações?

Pode EFGH se tornar um ponto? Qual hipótese sobre ABCD você precisa para que isto aconteça?

Escreva suas conjecturas e justifique-as.

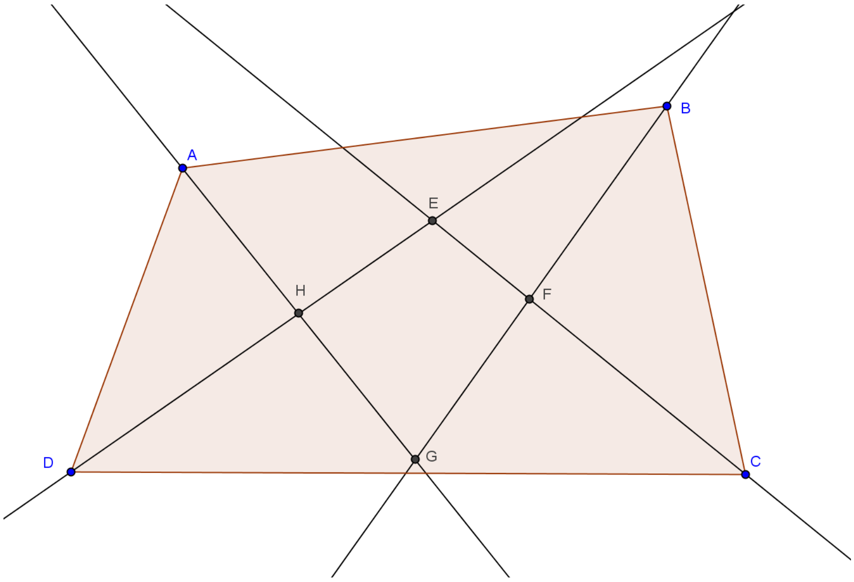


FIGURA 5.2: ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

5.3.3 Breve Análise das Atividades Selecionadas

As atividades escolhidas possuem duas linhas distintas de trabalho, isto é, enquanto na primeira a busca é por uma propriedade específica daquela configuração, na segunda há uma busca de configurações diversas que sugerem hipóteses e teses diferentes.

Na segunda atividade existe então todo um trabalho de busca de uma hipótese que gere determinada tese, o que pode levar a estratégias distintas. Quer dizer, o aluno pode começar buscando uma configuração para os pontos internos e ver qual o quadrilátero que é gerado externamente, ou o contrário, buscar uma configuração para o quadrilátero externo para observar o que acontece com o quadrilátero interno. Neste sentido, pode ser adotada a conduta de abdução para a resolução da atividade, como observado na experiência com o prof.2.

5.4 A COLETA DE DADOS

Com a opção pela pesquisa qualitativa de estudo de caso, os instrumentos de coleta de dados foram definidos. Como o interesse está sobre um processo, isto é, o foco no papel do professor enquanto o aluno está num processo de prova em um ambiente dinâmico, seria necessário ter acesso a tal. Neste sentido, entendemos que a observação desse processo em andamento nos daria um *insight* no que ocorre durante tal processo, assim, optou-se por filmar o processo. Quanto à decisão do que filmar optou-se por filmar a tela do computador, estando a câmera atrás dos indivíduos, pois as falas apareceriam mesmo assim, e os gestos em geral foram feitos voltados para a tela, isto é, apontando e gesticulando para objetos na tela do computador.

Há também os próprios arquivos salvos do software, onde é possível resgatar o histórico de construção, as folhas de papel onde os alunos anotaram as principais idéias das provas realizadas além das anotações da observação da pesquisadora. Além disso, foram realizadas pequenas entrevistas com os professores participantes para conhecer e compreender um pouco do seu entendimento sobre o assunto abordado na pesquisa.

O material coletado pelos métodos mencionados acima constituem o corpo de dados a serem analisados.

5.4.1 O Papel da Pesquisadora

Meu papel de pesquisadora teve diferentes aspectos nos diversos momentos da pesquisa. Eu tive um papel ativo na fase de planejamento do estudo ao definir as atividades a serem trabalhadas e conversando com os professores lhes explicando do que se tratava a pesquisa.

Durante a fase de aplicação, isto é, nas experiências realizadas com as duplas de professor e aluno acabei tendo um papel de observador semi-passivo. A princípio teria ficado apenas como observadora, no entanto no desenrolar do processo acabei auxiliando em alguns momentos quando os sujeitos se dirigiam a mim para tirar algumas dúvidas quanto ao que era esperado deles.

6 A ANÁLISE DESCRITIVA

Com a chegada da tecnologia na educação, isto é, os diversos softwares desenvolvidos para o auxilio na aprendizagem, é desejável que o papel do professor sofra certas mudanças. Ele passa a ser mediador e não mais apenas o detentor do conhecimento que deve ser passado para os alunos, ele deve também adquirir novas habilidades, dentre elas, ensinar o aluno a pensar matematicamente. O aluno também enfrenta mudanças em seu processo de aprendizagem, pois não se trata mais de apenas decorar o que está em livros para reproduzir em testes. Com o uso da tecnologia, o aprender se tornou investigativo e isso exige que o aluno aprenda a pensar matematicamente e cabe ao professor conduzir o aluno neste processo.

A análise descritiva de situações de aprendizagem a seguir, tem como objetivo explicitar as intervenções realizadas pelo professor durante o processo de prova de uma atividade matemática, buscando compreender este novo enfoque do seu papel de educador, o de possibilitar e capacitar o aluno a pensar matematicamente.

Os números entre parênteses se referem a falas da transcrição, que se encontram completas no anexo 1, para possibilitar ao leitor o acesso à experiência completa. A descrição e a análise estão em fonte normal, *e falas inseridas estão em itálico*. Dentre as falas, a parte entre colchetes [...] são observações da pesquisadora para deixar mais claro sobre quais objetos os envolvidos estão se referindo, já que muitas vezes eles apontam para tais na tela do computador.

6.1 O CONTEXTO

O Prof.1 é professor há seis anos, sendo que há um ano na universidade. Utiliza softwares desde o início de sua carreira docente, embora não de uma maneira sistemática nas aulas, mas sim como um reforço.

O Prof.2 é professor há cinco anos, sendo dois anos e meio na escola e dois anos e meio na universidade. Já utilizava softwares de geometria dinâmica durante sua formação, no período de Refendariat (de dois anos), portanto, no geral, utiliza há 7 anos.

Os alunos voluntários são estudantes do primeiro ano de graduação de Matemática cursando a disciplina *Elementos de Geometria*. A aluna que trabalhou com o Prof.1 não conhecia o software antes de entrar no curso, mas trabalhou com ele durante a disciplina mencionada. O aluno que trabalhou com o Prof.2 não conhecia o software Geogebra, no entanto tinha experiência com sistemas mais técnicos como o CAD.

6.2 O PROCESSO DE PROVA: PROF. 1

6.2.1 Atividade 1

A primeira atividade apresentada foi, então, a seguinte:

Seja ABC um triângulo onde D é ponto médio de AB e E é ponto médio de AC. Crie os pontos B' e C' sendo simétricos de B e C, respectivamente, pelos pontos E e D. Movimente os vértices do triângulo e observe a relação entre os pontos B', A e C'. Qual relação[18] existe ali? Justifique sua resposta.

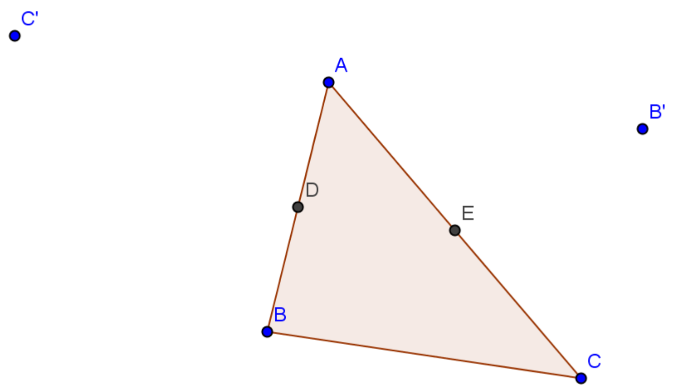


FIGURA 6.1: ATIVIDADE 1
fonte: a autora (2011)

18 A relação aqui vista dentro do enfoque relacional da geometria dinâmica.

A aluna inicia a atividade construindo a figura correspondente, o que leva em torno de 2 minutos. De início apresentou um pouco de dificuldade com as ferramentas do software, mas depois conseguiu trabalhar bem com ele. O professor a auxilia neste momento inicial, indicando algumas ferramentas úteis.

Assim que constrói a figura a aluna já faz uma conjectura: *então, conjectura é de que estão sobre uma reta* (19), e, enquanto movimenta a figura, se certifica de sua conjectura e faz a afirmação novamente: *é, parece que sim* (23).

Para a justificativa, a aluna segue para a construção de linhas auxiliares e passa a fazer considerações sobre a configuração, mas não sabe ao certo o que está procurando: *Então, você rebate o ponto D em cima da reta de simetria obtendo o ponto simétrico, assim praticamente temos uma circunferência em volta; a interseção é o ponto C', que tem a mesma distância que o ponto ... Isso… Daí pegamos a reta que passa por A e C'... Então, deveríamos simplesmente testar se esse círculo aqui [com centro em E] também passa por B'... que, obviamente, passa* (30, 31, 32),. O professor intervém, tentando organizar o que deve ser feito, para que a aluna pense no que realmente deve mostrar (33). Assim, ela retoma sua conjectura e pára para pensar, mas continua sem ter idéia do que realmente deve fazer. Faz-se uma pausa e o professor intervém novamente, agora tentando organizar um argumento matemático (36): *Como você poderia mostrar que três pontos estão sobre uma mesma reta, essa seria primeiramente a idéia que mostraria o caminho a seguir.* Ao que a aluna comenta que não sabe responder e segue fazendo algumas tentativas. Ela apresenta uma idéia (45): *Então, se A e C... supondo que A e C' estão sobre a reta, tenho que mostrar que B' também está sobre essa reta*, a qual o professor reafirma (46): *Certo, isso é bom. Quer dizer, podemos pegar dois pontos, pelos quais conseguimos com certeza passar uma reta; aí, naturalmente, se precisa mostrar que o terceiro ponto também está sobre a reta*; mas a aluna não sabe o que fazer a partir daí.

Depois de uma pequena pausa o professor intervém apontando para retas auxiliares, isto é, apontando para possíveis sub-configurações que possam ajudar na prova (49): *Você começou antes a desenhar retas adicionais que poderiam ser de ajuda, talvez existam outras retas auxiliares que poderiam lhe trazer uma idéia.*

A aluna apresenta nova idéia (50): *Eu poderia mostrar que duas retas se cortam no ponto B', que eu tenho?!*; mas não consegue seguir adiante novamente e o professor sugere usar a dinamicidade, isto é, o aspecto de movimento dinâmico oferecido pelo software, para observar o que acontece (55): *Bom, agora você pode aproveitar o dinâmico do sistema novamente, observar um pouco o que acontece quando você movimenta o triângulo.*

Como a aluna movimenta a figura em silêncio, num arrastar aleatório, o professor aponta para a reta auxiliar construída anteriormente (57), perguntando se ela lhe foi de alguma ajuda. No entanto, a aluna leva a configuração para um caso extremo particular, e não consegue seguir adiante (61), fica apenas movimentando a figura. Assim, o professor intervém (extrato do diálogo no quadro 6.1), procurando chamar a atenção da aluna para a reta auxiliar novamente (62,63): *Tem alguma coisa que lhe chama atenção nessa reta?[reta f] Será que uma determinada posição talvez?* A aluna parece ter uma idéia, mas a descarta logo em seguida (65,66), ela busca uma relação entre os pontos B' e C', o professor ainda busca entender a idéia da aluna (67, 69), no entanto a aluna a descarta ficando sem saber como seguir em frente. Novamente o professor então intervém apontando para a reta auxiliar (71): *Vamos voltar um pouco para aquela reta auxiliar que você desenhou.*

62	10:33	P	Tem alguma coisa lhe chama atenção nessa reta?	Continua mexendo com o triângulo...
63	10:48	P	Será que uma determinada posição talvez?	
64	10:58		Sim… E qual?	
65	11:05	A	Então, ela passa por B e B sempre está a uma mesma distância de E como B', ahn.... Um momento, posso experimentar algo?	Constrói a circunferência centro A e raio até B', para ver se passa pelo ponto B?!
66	11:24	A	Hmm não é isso, ok… então tiro de novo.	
67	11:32	P	O que você verificou agora?	
68	11:34	A	Estava verificando se B' e C' tem a mesma distância de A. Parecia que sim.	
69	11:47	P	Em que isso lhe seria útil?	
70	11:53	A	Então, que B'... bom, também poderia ser em outro lugar...	
71	12:09	P	Vamos voltar um pouco para aquela reta auxiliar que você desenhou. Você quer escrever algo ali?	

QUADRO 6.1: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 62-71
FONTE: A autora (2011)

A aluna aponta para o fato de perceber que A pode ser ponto médio de B' e C', e busca um caminho pela simetria, mas continua sem saber como agir (74,75,76). E como diz o professor, fazer tal afirmação seria usar a informação de que eles estão sobre uma mesma reta, que é a tese (77).

72	12:14	A	Sim…	
73	12:29	P	O que você escreveu?	
74	12:30	A	C’, A, B, quer dizer A é ponto médio de B‘ e C‘	
75	12:46	A	Talvez poderíamos fazer com... ahn... fazer com a simetria em relação a ponto. Se eu desenhar uma perpendicular que passa por A	
76	13:09	A	E movimentar B‘ e C‘... não, também não ajuda em nada...	
77	13:22	P	Para isso você já estaria assumindo um pouco que os pontos estão sobre uma reta.	

QUADRO 6.2: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 72-77
FONTE: A autora (2011)

Após pequena pausa, o professor intervém chamando a atenção da aluna novamente para a reta auxiliar e a figura que se forma, as sub-configurações que aparecem (78): *Bom, se você conectar os pontos B e C‘, que foi o que você fez com essa reta auxiliar, uma nova figura se* formou*. Podemos dizer algo sobre essa figura?.* Disso, a aluna segue fazendo considerações e consegue mostrar a congruência (80-86). Interessante observar que a aluna segue um raciocínio, mas quando o professor pede para que ela o repita, ela acaba realizando o argumento de congruência para outros dois triângulos (88-94).

78	13:33	P	Bom, se você conectar os pontos B e C‘, que foi o que você fez com essa reta auxiliar, uma nova figura se formou. Podemos dizer algo sobre essa figura?
79	13:50	A	Sobre o triângulo B’C’B ou sobre o triângulo AC’B... ok...
80	14:05	A	Ele é congruente ao ACB.
81	14:08	P	Você pode justificar isso?
82	14:11	A	O lado AB é igual pros dois, e aí eles tem o lado CB que é igual ao C’A;
83	14:26	P	Por que?
84	14:28	A	Porque C‘ e C são simétricos, com isso esta distância é a mesma [mostra CD = DC‘]
85	14:43	P	Isso é suficiente?
86	14:47	A	Ahn... D era o ponto médio de A e B, com isso as duas metades são iguais [mostra AD = DB]… ahn... aí temos aqui dois ângulos alternos, quer dizer, vários ângulos alternos, aí já teríamos LAL [caso Lado-Ângulo-Lado] e aí esses dois lados também são iguais.
87	15:13	P	Bom, você pode fixar isso um pouco?
88	15:16	P	Então, eu não acompanhei bem o final, mas se você escrever isso já vai se mostrar se estava em ordem.
89	15:28	A	Não sei se é a variante mais curta, mas...
90	15:33	P	Ok, o que você quer mostrar?
91	15:34	A	Então, eu sei que AD = BD, CD = C’D, e, vou nomeá-los α e β, aí então α = β. Isso seria LAL.
92	15:55	P	Para quais triângulos?
93	15:58	A	Esse, quer dizer para o triângulo ADC‘ e o triângulo CDB.
94	16:09	P	Exatamente, mas agora você mostrou uma congruência diferente daquela que inicialmente queria mostrar, mas...

QUADRO 6.3: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 78-94
FONTE: A autora (2011)

A aluna não dá importância de ter provado outra congruência, pois o resultado lhe interessa (95): *Mas agora eu sei que CB e AC‘ são iguais.* Além disso, o professor ainda pergunta que mais ela sabe, e assim, ainda conclui que são paralelos (97). No entanto, para justificar tal fato ela acaba falando de rotação, mudando totalmente sua argumentação (99, 100), e conclui um fato errado: *Ah sim, nós fizemos a reflexão com simetria de ponto... Daí quando você tem a reflexão simétrica, falo de rotações, porque é sempre tão bonito e fica claro o que dá pra virar. E aí quando espelhamos simetricamente, um ponto sobre o ponto [C sobre C‘], do triângulo obtemos um retângulo.* O professor discorda e refaz todo o argumento para compreensão (106 – 112), organizando o pensamento da aluna, que responde completando a argumentação.

Em seguida, o professor aponta para a figura formada pelos pontos A, B, C e C’, perguntando que forma seria (115). A aluna muda a configuração constantemente, dando os nomes de alguns possíveis quadriláteros (118,120). O professor lembra o fato de que mostraram que dois lados são paralelos, buscando na aluna o fato de ser um paralelogramo, mas ela diz que não lembra o nome. Considerando a propriedade mais importante que o nome, o professor pede para que a aluna repita o argumento que mostra que aqueles dois lados são paralelos (128). Interessante observar a resposta da aluna (131): *Ok, eles são paralelos porque a distância de AC é igual a C‘B.* Um argumento que não foi sequer mencionado em todo processo anterior, fato que o professor aponta (132). Dito isso, ela retorna para as simetrias de ponto realizadas, fazendo a afirmação correta da razão daqueles dois segmentos serem paralelos, que o professor reafirma (138*): Exato, você tem o* paralelismo *justificado por uma característica da reflexão em relação a um ponto (simetria). Eu só queria retomar isto. Então, você mostrou que AC‘ é paralelo a BC. Mas o que queremos mostrar mesmo?* A esta pergunta final, a aluna responde sem muita certeza (139): *Ahn… B‘ está sobre a reta AC‘*, o que mostra que ela estava focada em mostrar a afirmação anterior do paralelismo dos dois segmentos, mas não no objetivo geral da atividade. Aliás, ela não sabe como irá continuar, pois o professor lhe faz tal pergunta, ao que ela responde (143): *boa pergunta!*

Na seqüência a aluna pede para desenhar outra reta, construindo a reta que passa por B’ e C, e movimenta a figura pelo ponto B (144,146). Acaba num arrastar aleatório novamente tentando ter alguma idéia. O professor vem ao auxílio perguntando em qual segmento ela deve se concentrar (147). A aluna retoma o que mostrou até o momento (148, 150), *esses dois já mostrei que dá [BC e AC‘ paralelos], mas, isto se refere ao segmento [AB‘] e... não, isto parece bobo mostrar que estes dois são paralelos... Esta [AB] paralela à reta que acabei de desenhar.* O comentário final da aluna mostra uma dificuldade dos alunos, eles não vêem a necessidade de provar algo que lhes é evidente, no entanto, precisa ser feito numa demonstração. O professor tenta incentivar a aluna (151, 152), perguntando *por que é bobo*, perguntando se ela tem a conjectura de serem paralelos. A aluna segue balbuciando coisas que ela observa, e o professor, de certa maneira, guiando seu pensamento para chegarem à conclusão do paralelismo (153-162).

153	22:47	A	Tenho, sim... eu teria A, E, C ... ahn... D sempre é igual...
154	23:02	P	Qual o significado especial que o ponto E tem? Você acabou de utilizar implicitamente...
155	23:08	A	Então, A... ahn... A é refletido em E, e se obtém C.
156	23:18	P	Ok, e quais segmentos você queria mostrar que são paralelos?
157	23:21	A	A reta j [onde está o segmento B'C] e o segmento AB
158	23:30	P	Bom,você acabou de mostrar, com um argumento semelhante de reflexão em relação a ponto, que esses dois [BC e AC'] são paralelos; será que isso funcionaria aqui também?
159	23:40	A	Então, eu posso mostrar que A refletido em E, obtenho C; ahn.... e posso mostrar que B refletido em E obtenho B'.
160	23:55	P	Certo.
161	23:57	A	Ok, com isso mostrei que o segmento c é paralelo ao segmento j, ahn à reta j.
162	24:04	P	Certo, novamente com o argumento da reflexão em relação ao ponto. Exato, com isso você mostrou o que queria mostrar. Isso é útil pra você?

QUADRO 6.4: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 153-162
FONTE: A autora (2011)

A última pergunta do professor em (162) retoma seu papel de organizador, pois a aluna se mostra empenhada em provar o paralelismo, mas precisa se reorganizar para focar no objetivo da atividade. Ela retoma o que mostrou, e percebe que falta algo (163,164): *Ahn... eu sei... não, um momento... eu mostrei agora que esses dois são paralelos [mostra BC e AC'], e esses dois paralelos [j e c]... Não, eu preciso de mais alguma coisa que... ah sim... a reta, não sei o nome, a reta que passa por A e C' se corta com a reta j... no ponto B'*; mas conclui que o que falta, é exatamente a tese do problema, o que ela percebe apenas quando o professor aponta o fato (165,166): *Isso é o que você quer mostrar, não é? Aí voltamos pro início.*

Na seqüencia, o professor de certa forma organiza as informações do problema, mostrando o que de fato deve ser mostrado, e aponta para as subconfigurações. Mostrando na configuração na tela do computador, o professor retoma (168): *Certo, mas isso você tem que mostrar agora, que esse ponto B', que foi obtido refletindo o B, então ele, inicialmente, não tem nada a ver com a reta j nem com AC'. Isto quer dizer que é isso que você tem que mostrar, que exatamente este ponto B' é o ponto de interseção dessas duas retas. Mas um passo importante você já fez, sobre o que você disse do segmento CB' e AB, eles são paralelos. Bom, em qual figura você está argumentando na verdade? Mostre a figura toda.* Diante de tal pergunta, a aluna concentra seu raciocínio em tal figura, o paralelogramo CB'AB, inclusive desenhando-o na tela (Figura 6.2), e busca mais informações nela (171,172): *Então, que B refletido em E, me dá B´. E pela reta BE, quer dizer, à reta BE também pertence B'? É o ponto de interseção com... bem ele tem.... para... eles se cortam, ahn... não, de novo... A reta que passa por BE se corta com a paralela j à AB... No ponto B'.* Ela se perde nas informações, confundindo hipótese e tese, ela observa o fato de B' ser o ponto de interseção, sem perceber que esta é a tese do problema. O professor aponta o fato (174): *Por que no ponto B'? Por que o ponto B' não está um pouquinho mais pra lá ou pra cá...* A aluna então percebe que a figura apontada anteriormente é um paralelogramo, e tenta utilizar este fato para justificar sua resposta.

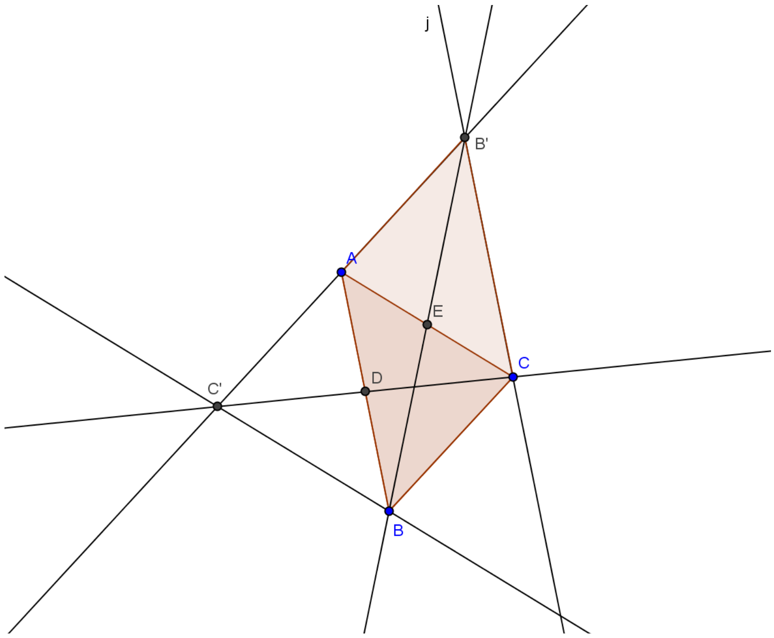


FIGURA 6.2: CONSTRUÇÃO DA ALUNA - ATIVIDADE 1
FONTE: A autora (2011)

Pelas propriedades do paralelogramo conclui que, se mostraram que B'C e AB são paralelos então AB' e CB também são. Pela transitividade de paralelismo, conclui que AC' e B'A são paralelos. No entanto, se confunde para explicar o que isto significa e não tem certeza de sua conclusão (178-193):

178	27:29	P	... Bom, o que significa paralelogramo, você sabe que esses dois são paralelos [B'C e AB], o que isso iria significar além daquilo que temos?
179	27:36	A	Isso quer dizer que AB' e CB também são paralelos.
180	27:40	P	Por que? Então estaríamos prontos?
181	27:46	A	Porque... sim, B'A é paralelo, não, é o mesmo que AC' e antes dissemos que AC' é paralelo a BC.
182	27:58	P	Bom, „é o mesmo"?
183	28:00	A	Ahn, não, estão sobre a mesma reta. Quer dizer AC' é paralelo a CB; e mostramos que B'A é paralelo a CB... ahn...
184	28:17	P	O que significa isso então?
185	28:19	A	Que eles são idênticos...
186	28:21	A	Não…
187	28:24	A	Com a distância A... ahn... de novo... Mostramos que AC' é paralelo a CB, ok. Ahn, com a distância AC.
188	28:45	P	Se isso realmente é verdade temos que verificar, por que se você movimentar a figura com certeza não será mais a distância; daí teria que ser uma perpendicular, não é?
189	28:54	A	Ok. Sim, certo, não é isso.
190	28:56	P	Mas talvez a distância não seja tão importante, eles são, em todo caso, paralelos.
191	29:00	A	Hm. E nós mostramos que B'A é paralelo a CB.
192	29:06	P	Ok. Isso quer dizer?
193	29:08	A	Já que o ponto A está nos dois, então... eles tem que estar sobre uma mesma reta?!

QUADRO 6.5: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 178-179
FONTE: A autora (2011)

Para o professor ainda falta um argumento, e ele tenta esclarecer para a aluna (198): ... *você argumentou que os segmentos AB' e AC' tem o ponto A em comum. Então, e agora somente os dois segmentos. ... E você falou que os segmentos AC' e AB' são paralelos ao segmento BC. ... Então, disso segue agora direto que os dois segmentos estão sobre uma mesma reta, que não existe um bico ali?!* A resposta da aluna é ao mesmo tempo interessante e de certa maneira frustrante (199): *Ou então, provavelmente deveríamos concluir que B' e A e C' estão sobre a mesma reta.* O professor retoma as idéias novamente e tenta mostrar à aluna o argumento faltante (200,202): *Sim, é o que estamos tentando mostrar o tempo todo, certo. Mas ainda falta um pequeno argumento para me dar por satisfeito. Então de novo, a característica de que os dois segmentos AB' e AC' estão sobre a mesma reta não pode apenas estar justificado pelo fato dos dois terem o ponto A em comum. Poderia ser que eles formassem um bico. Mas você tem um argumento decisivo para o fato de que eles não formam bico. ... Por que não há bico?* Diante da pergunta, a aluna segue um raciocínio e, com o auxílio do professor, chega à conclusão final (203-212).

203	31:15	A	Porque ambos segmentos são paralelos a CB...
204	31:18	P	… e com isso
205	31:19	A	E com isso, ahn... se eles tem o ponto A em comum, ahn... então, não formam bico.
206	31:33	P	Como eles devem ser em relação ao outro, os dois segmentos? ... Para que não forme bico.
207	31:41	A	Com 180 graus, por assim dizer. Como se diz, eles devem encostar?! Sim…
208	31:47	P	Encostar eles encostam pelo fato de terem o ponto A em comum, mas por que se dá um ângulo de 180 graus?
209	31:55	A	Porque eles são horizontais, não... como se chama aquilo...
210	31:59	P	Você já mencionou o argumento algumas vezes; isso se deve ao fato de ambas terem uma paralela em comum. Mas o que isto significa para dois segmentos que possuem uma paralela em comum, como eles estão posicionados em relação ao outro?
211	32:10	A	Também são paralelos.
212	32:12	P	Este é o argumento que ainda faltava, sim. Então, pode até ser trivial, mas deve ser dito. ...

QUADRO 6.6: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 203-212
FONTE: A autora (2011)

6.2.2 Atividade 2

A segunda atividade apresentada foi a seguinte:

Seja ABCD um quadrilátero convexo. Considere as bissetrizes dos ângulos internos e seus pontos de interseção E, F, G e H dos pares de bissetrizes consecutivas. Movimente ABCD, considerando diferentes configurações.

O que acontece ao quadrilátero EFGH? Que tipo de figura pode se tornar? Pode EFGH se tornar um quadrilátero específico? Por quê? Qual a hipótese sobre ABCD você precisa para obter essas situações?

Pode EFGH se tornar um ponto? Qual hipótese sobre ABCD você precisa para que isto aconteça?

Escreva suas conjecturas e justifique-as.

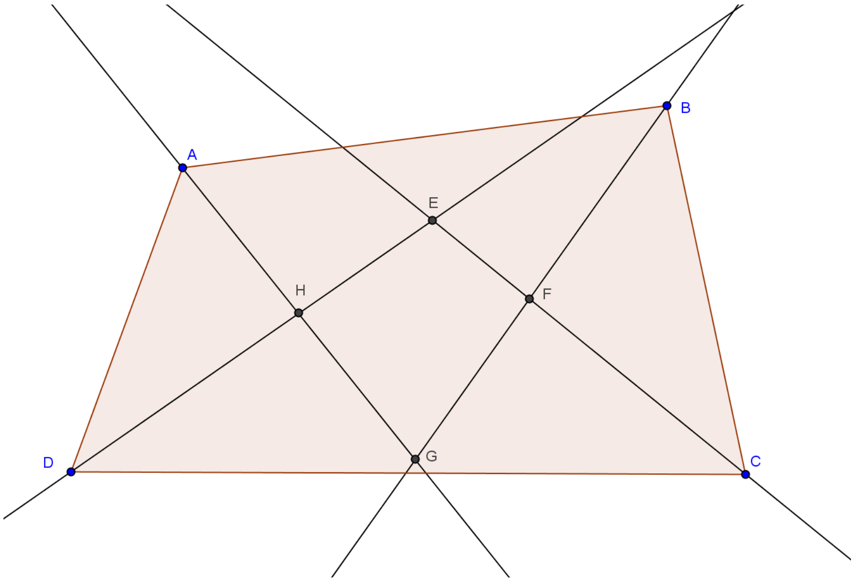


FIGURA 6.3: ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

A aluna constrói a figura de acordo com o enunciado e segue movimentando a configuração pelo vértice B. Pela dinamicidade, enuncia sua primeira conjectura (226): *Então, eu diria simplesmente que se ABCD é retângulo, então isto aqui dentro é um quadrado.* Na seqüência, volta a movimentar a figura pelo vértice B, formando um quadrilátero qualquer. Ela comenta que não é um quadrilátero específico (230), mas acaba fazendo os pontos internos coincidirem, o que acha interessante. O professor lhe pergunta se teria uma conjectura a respeito, ela ainda não define bem, mas conjectura que em algum momento é possível que os pontos coincidam (234). Ela aproxima a figura de um quadrilátero pipa, e pede para explorar um pouco mais antes de definir. Ela reafirma sua idéia, e expressa a conjectura (237) de que se for um quadrilátero pipa, os pontos internos coincidem. Como o professor está interessado em primeiro encontrar conjecturas para depois prová-las, a aluna continua sua exploração.

Assim como na atividade anterior, ela vai para um caso extremo, transformando o quadrilátero externo em um triângulo ao movimentar um dos vértices para a reta suporte de um dos lados. E desta configuração, passa para um quadrilátero côncavo, quando o professor comenta então o fato de no enunciado pedir apenas por quadriláteros convexos, já que em côncavos se tem sobreposições. Ainda discutem um pouco a situação extrema do triângulo (248-262) e passam a procurar outras conjecturas sobre quadriláteros.

Na seqüência a aluna forma um paralelogramo, e conjectura (264): *Então, conjectura, ABCD é um paralelogramo então EHFG é um retângulo*, e anota no papel. Ela tem uma idéia nova e já movimenta a configuração para tal (267): *Talvez se obtenha uma pipa lá dentro? Quase parece assim...* O professor lhe pergunta o que ela está tentando criar, ao que ela responde (269) *um trapézio, quer dizer, ahn... duas paralelas*, e o professor faz uma observação interessante (270): *Ou seja, com o quadrilátero ABCD. O tempo todo você tentou construir de alguma maneira algo específico com o quadrilátero EFGH, agora você foi pro outro...* Ela parece não perceber a mudança de estratégia, está apenas interessada em encontrar quadriláteros específicos (271): *Sim, agora eu queria ver o que aconteceria saindo de um trapézio*. Ela se frustra por não aparecer o resultado que esperava (273), ao que o professor responde se ela não vê algo especial mesmo assim (274). Ela busca alguma regularidade, um paralelismo de retas, se afastando do objetivo de relacionar quadriláteros, o que o professor aponta para dar seqüência à atividade (275-283).

275	11:07	A	Hmm… E e F parecem estar numa paralela a AB e CD.
276	11:22	P	E e F, então a reta EF? É paralela a quem?
277	11:27	A	A DC e AB, quer dizer, AB e CD seriam paralelas no trapézio e EF poderia...
278	11:39	P	Bom, isto é... você não quer construir a reta?
279	11:50	A	Estou fazendo uma construção ainda [marca GH]... não... [apaga novamente]
280	12:05	A	Poderia parecer assim…
281	12:06	P	Você não quer marcar AB também, como reta?
282	12:22	A	Sim, talvez…
283	12:24	P	Ok, então consideramos como conjectura. No entanto, nós nos afastamos um pouco da pergunta inicial, a idéia é de que o quadrilátero seja específico. Isto seria uma conjectura, talvez ela nos ajude de alguma maneira outra hora. Podemos mantê-la em mente.

QUADRO 6.7: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 275-283
FONTE: A autora (2011)

Se dando por satisfeito das conjecturas realizadas pela aluna até o momento, o professor então passa à prova delas. A aluna escolhe a conjectura do quadrilátero pipa externo, onde os pontos internos coincidem (285-288). Como a aluna apenas aproxima a configuração de um quadrilátero pipa, o professor questiona a aluna se ela realmente possui tal quadrilátero representado, procurando saber se a aluna sabe a definição do quadrilátero em questão. A aluna não responde de imediato, mas afirma que determinadas retas são perpendiculares, mostrando as diagonais (292).

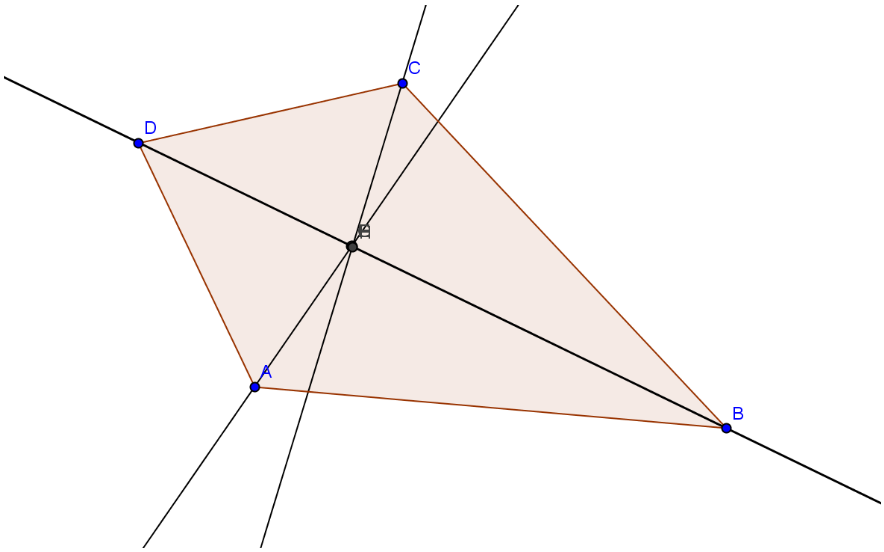


FIGURA 6.4: CONSTRUÇÃO DA ALUNA – ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

Após o professor reafirmar a conjectura, a aluna passa a analisar a situação e busca informações que possui sobre as retas, e o professor vem ao auxílio para clarear suas idéias (294-305):

294	14:43	A	As bissetrizes de ... do ângulo ADC... também é a bissetriz do ângulo ABC, já que DB ahn... sim, também se chamam diagonais?! A diagonal do quadrilátero é.
295	15:11	P	Hm, qual especificidade essa diagonal possui no quadrilátero pipa? Não é somente a diagonal...
296	15:18	A	Ela divide o quadrilátero em dois triângulos congruentes.
297	15:23	P	Ok , então como mais poderíamos chamar essa reta?
298	15:27	P	A diagonal do paralelogramo também faria isso?!
299	15:37	A	Dividir?! Não... não sei.
300	15:45	P	Bom, como estão os dois triângulos que você mencionou agora um em relação ao outro?
301	15:50	A	Ah, ahn… Ponto … ahn… eixo de simetria
302	15:54	P	Exatamente, então aqui podemos, para a bissetriz BD...
303	16:00	A	BD é o eixo de simetria do ponto A sobre o ponto C.
304	16:05	P	Exato.
305	16:10	A	Ok, com isso já mostramos que... ahn... H e G acho que era, estão um sobre o outro.

QUADRO 6.8: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 294-305
FONTE: A autora (2011)

O professor pede para a aluna definir esta parte no papel, o que a leva a tentar compreender melhor o que acabaram de discutir. Ela pergunta se já pode concluir direto que pelo fato de ter DB como eixo de simetria que H e G coincidem. O professor rebate com a pergunta por que e pede para esclarecer outro fato(315): *Bom, talvez um curto argumento ainda, por que a bissetriz de B e D também é simultaneamente o eixo de simetria? Ou, ao contrário, por que o eixo de simetria é também a bissetriz?* A aluna arrisca uma resposta, mas não tem certeza, tanto que ela mesma nega em seguida (317): *Por causa dos triângulos congruentes?! ... Não.*

Na seqüência o professor usa o argumento do “e se não” fosse assim, (318) *se você supor que não é assim... Que o eixo de simetria não é a bissetriz?!* Levando a aluna a concluir (319): *Daí os triângulos não seriam congruentes, aí não seria um quadrilátero pipa.* O professor pergunta o que falta argumentar então, ao que ela responde sem ter certeza enquanto observa a figura (322): *Ahn, isso também... E e F estão sobre o ponto. Quer dizer, que as bissetrizes BAD e BCD também se cortam no ponto E e G. Ahn...*

Após pequena pausa o professor intervém, buscando organizar as idéias da argumentação e levar a aluna a perceber o que deve ser feito para dar continuidade à justificativa da atividade (323-329):

323	18:49	P	Tenho uma pergunta ainda: é importante que a gente argumente com o ponto H e G? Você mostrou agora que as bissetrizes, no caso de um quadrilátero pipa, formam o eixo de simetria e com isso são idênticos. Quer dizer, se você cortar as duas bissetrizes você obtém, primeiramente, todos pontos como ponto de interseção. Agora na verdade se trata apenas das outras duas bissetrizes. O que você tem que mostrar nas outras duas bissetrizes?
324	19:31	A	Que elas também se cortam.
325	19:33	P	Mhm… e onde?
326	19:37	A	Ahn… num ponto.
327	19:39	P	Num ponto, sim, e onde deve estar esse ponto?
328	19:43	A	No segmento BD.
329	19:45	P	Exato, isso bastaria. Bom, então agora temos que procurar argumentos.

QUADRO 6.9: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 323-329
FONTE: A autora (2011)

A aluna observa a figura e vai concluindo suas idéias com o auxílio do professor (331-340):

331	20:02	A	Quer dizer que para apenas um... mostrar para um dos triângulos que... ahn... então, basta na verdade mostrar apenas para um dos triângulos porque são congruentes e com isso o ponto deve estar sobre, quer dizer E ou G, H ou seja lá como se chama, na mesma posição, se refletirmos em relação a um ponto... ahn, em relação a uma reta.
332	20:42	P	Bom, então você quer utilizar a simetria novamente, isso quer dizer então ahn... o que deve ser simétrico agora, para que você possa utilizar esse argumento?
333	20:55	A	Ahn, A para C.
334	20:59	P	Isso é suficiente?
335	21:03	A	E as bissetrizes também devem ser.
336	21:05	P	Ah certo. E é este o caso?
337	21:09	A	É o caso quando ahn... porque BCD é refletido pelo eixo de simetria em DAB e quando marcamos a bissetriz, esta será refletida sobre o ponto.
338	21:32	P	Isso. É exatamente o argumento que você precisa, ou seja, as duas bissetrizes são simétricas em relação ao eixo BD, e o que acontece com duas retas que são simétricas entre si, onde elas se cortam?
339	21:50	A	Sobre o eixo de simetria.
340	21:51	P	Sempre. Ou seja, isso podemos utilizar, e daí estamos prontos, na verdade. Você não quer anotar isso?

QUADRO 6.10: PROF.1 – EXTRATO DE DIÁLOGO # 331-340
FONTE: A autora (2011)

Para retomar a prova e a conjectura, o professor pede que a aluna formule novamente o que ela mostrou e para quais condições (343,345). Com isto, ele resgata a idéia e remete à recíproca, comentando que sempre é interessante buscar a possibilidade da recíproca (347): *Certo. Quer dizer que, se ABCD é um quadrilátero pipa aí você mostrou que todas as bissetrizes se cortam num ponto. Agora sempre é interessante nessas situações, saber se a recíproca também é possível. Quer dizer, se as bissetrizes se cortam num ponto então sempre será um quadrilátero pipa*. Em seguida, a aluna pede para experimentar algo (394), e acaba abrindo outra janela no software. Ela tenta fazer uma construção onde as bissetrizes se cortam em um ponto, isto é, com este fato como hipótese, mas acaba se perdendo um pouco e retorna para a janela anterior, com a configuração que trabalhava antes (351-354). O professor então a aconselha a apenas movimentar a configuração que ela já tem de tal modo que preserve o fato de as bissetrizes se cortarem em um ponto (355): *Tente apenas movimentar o quadrilátero mais um pouco para ver se você consegue um ponto com outra figura também. Aí já teríamos um ponto de partida pra saber se a recíproca é possível ou não.* Fazendo isto, ela deduz que a recíproca não é verdadeira, pois consegue outros quadriláteros onde isto acontece, mas não consegue chegar a uma propriedade que lhe diga quando isto é o caso (356-364). O professor então deixa de lado essa idéia da recíproca, dizendo que ela pode verificar isso com mais calma em outro momento, e pede para que ela prove outra conjectura (366).

Ela escolhe a conjectura de que se ABCD é um retângulo então EHFG é um quadrado e configura a construção de acordo, analisando a figura por alguns instantes. Ela inicia traçando duas retas auxiliares, mas parece não saber bem o que está procurando (Figura 6.5).

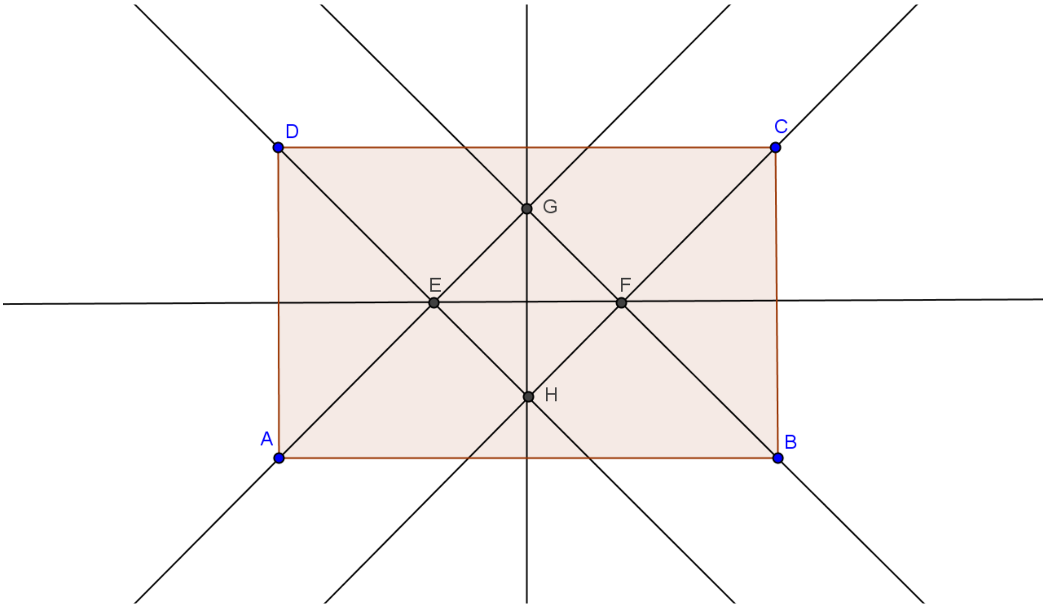


FIGURA 6.5: CONSTRUÇÃO DA ALUNA (2) – ATIVIDADE 2, SEGUNDA CONJECTURA
FONTE: A autora (2011)

O professor então lhe pergunta o que ela tem que mostrar, o que precisa ser considerado (373), ao que ela responde citando sua conjectura novamente. O professor tenta ser mais específico (375) para levar a aluna a pensar sobre o que significa mostrar que uma figura é um quadrado e ela começa a enunciar propriedades do quadrado que conhece. Isso é uma dificuldade dos alunos, não saberem a definição e confundirem com as propriedades, o que lhes leva a se tornarem inseguros sobre o que realmente precisam mostrar. O professor vem ao auxílio, tentando fazer a aluna perceber o que seria suficiente mostrar para que um quadrilátero seja um quadrado (375-382):

375	29:17	P	Certo, como você iria mostrar que é um quadrado?
376	29:20	A	Tem os mesmos ahn... então, HF é igual a FG que é igual a GE e EH, ou as diagonais se cortam num ângulo reto, quer dizer, no centro.
377	29:37	P	Ok, você disse „ou“...
378	29:40	A	E! Não, ou...
379	29:44	P	É suficiente mostrar que todos os lados são iguais...
380	29:46	A	Ah não! Os lados ainda precisam de um ângulo reto.
381	29:49	P	Ah, bom, então se você mostrar essas duas coisas aí você estará segura, quer dizer, o comprimento dos lados é igual; e os ângulos têm a mesma medida, isto é, 90 graus. Então você já pode anotar o que você tem que mostrar agora.
382	30:08	A	EHFG quadrado; mostrar que e = h = f = g e ângulo reto.

QUADRO 6.11: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 375-382
FONTE: A autora (2011)

Depois de anotar no papel, a aluna volta a se concentrar na figura e aponta o que sabe sobre a figura externa (383,385): *Quer dizer, a idéia é que ABCD é um retângulo; com isto ahn... é simétrico... Ahn... em relação à mediana de AD e à mediana de DC.* O professor pergunta então o que ela quer dizer com mediana no quadrilátero, indicando o erro de nomenclatura. Em seguida, ela volta a se concentrar na figura, buscando um argumento (390-395):

390	32:39	A	Hm… como a simetria de eixo também seria ahn a… a bissetriz BAD refletida no eixo i [mediatriz de AD] , ahn... E a bissetriz CDA também... E elas se cortam, já que são simétricas ahn... no ponto E sobre o eixo i.
391	33:24	P	Concordo. O que você conseguiu com isto?
392	33:26	A	Que eu mostrei que E está sobre o eixo. Posso argumentar o mesmo para ABC, quer dizer, o ângulo, e para o ângulo DCB e com isto mostro que ahn E está sobre F, ahn E e F estão sobre o eixo i; exatamente assim argumento para... um momento, tenho que olhar de novo... para o eixo j [mediatriz de DC], eixo de simetria para os pontos G e H, como as bissetrizes...
393	34:10	A	Exato, já que j e i… são... j e i são os eixos... são os eixos de simetria no retângulo ABCD então são perpendiculares entre si, ahn... isso… Bom, e como vemos... (risos)
394	34:43	P	Agora vem a lacuna.
395	34:44	A	Agora vem a lacuna!

QUADRO 6.12: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 390-395
FONTE: A Autora (2011)

Na seqüência, ela busca propriedades do quadrado que possam definir que a figura que ela possui é um quadrado, mas não percebe o fato de que são propriedades necessárias, isto é, argumentos necessários, mas não suficientes (396-416):

396	34:47	A	Ahn H e G estão sobre j, e E e F estão sobre i... ahn… estas são as diagonais e estão perpendiculares entre si.
397	35:03	P	Um momento, quais diagonais?
398	35:06	A	As diagonais do quadrado EGH… EGFH.
399	35:15	P	Ah sim.
400	35:16	A	E isto seria exatamente o argumento para um quadrado, quando as diagonais estão perpendiculares entre si.
401	35:22	P	Um necessário ou suficiente?
402	35:29	A	Sim…
403	35:30	P	É necessário que em um quadrado as diagonais estejam perpendiculares entre si? (ao que a aluna responde sim) É suficiente? Se em um quadrilátero as diagonais são perpendiculares entre si, então é um quadrado?
404	35:39	A	Não! Eu ainda tenho que mostrar que eles têm o mesmo comprimento, os lados.
405	35:45	P	Certo, isso ainda fica pendente, não é? Então…
406	35:49	A	Isso. Então o ângulo reto… (incompreensível)
407	35:50	P	E quando os lados tem o mesmo comprimento e as diagonais forem perpendiculares entre si, aí é um quadrado?
408	35:55	A	Aí é um quadrado.
409	35:56	P	Você tem certeza?
410	36:07	A	Sim…
411	36:08	P	Existem outros quadriláteros que possuem o comprimento dos lados iguais?
412	36:11	A	O losango.
413	36:12	P	E como estão as diagonais ali?
414	36:14	A	Também são perpendiculares. Droga. (risos)
415	36:18	A	Ok…
416	36:20	P	Quer dizer então que o argumento de perpendicularidade apenas não nos basta.

QUADRO 6.13: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 396-416
FONTE: A autora (2011)

Quando o professor aponta o fato de que ela precisa de um argumento com ângulo, ela o interrompe, pois parece ter um *insight* e animada discorre com seu argumento (419,420). Ela percebe que ainda falta algo (424), e o diálogo na seqüencia mostra o professor guiando o pensamento da aluna, através de perguntas para chegar a conclusão (425-440):

418	36:23	P	Você precisa ainda de qualquer maneira um argumento de ângulo. Talvez começamos com isto. Tente descobrir por que quando temos o ângulo de 90 graus...
419	36:32	A	Ah sim. Aqui nós temos 45 [mostra o ângulo EAD] porque os ângulos, quer dizer, porque no retângulo temos ângulos retos e aí a bissetriz é 45.
420	36:46	A	Bom, com isso temos um ângulo colateral correspondente e aqui também temos 45 [mostra o ângulo FEG]
421	36:53	P	Porque você acabou de mostrar, ah não, pela simetria de eixo, ok. E você mostrou que o ponto E está sobre o eixo de simetria.
422	37:02	A	Isso. Mas podemos argumentar diferente também, ahn… aqui também é ângulo de 45 graus [mostra ângulo FEH] e aí temos 45 mais 45, são 90.
423	37:13	P	Ok. Isso você faz analogamente com os outros pontos e você tem 90 graus em tudo. Isso é bom.
424	37:18	A	Bom, agora tem que mostrar ainda…
425	37:20	P	Quer dizer que você já tem, o que você pode dizer sobre...
426	37:23	A	Mas eu tenho, eu tenho quatro ângulos retos. E quatro ângulos retos…
427	37:26	P	O que pode ser?
428	37:27	A	Um retângulo ou um quadrado.
429	37:29	P	Por que não pode ser um retângulo?
430	37:33	P	Agora na verdade você pode utilizar seu argumento inicial
431	37:40	A	Meu anterior?
432	37:56	P	Como era o seu argumento anterior mesmo? Com qual propriedade você queria argumentar no quadrilátero?
433	38:02	A	Ah, porque as diagonais se cortam num ponto.
434	38:05	P	Bom, isso faz parte. Como elas se cortam?
435	38:08	A	Com um ângulo reto.
436	38:09	P	Certo, e como é isso no retângulo?
437	38:13	A	Bom, elas também se cortam num ângulo reto. As diagonais não! Elas não se cortam num ângulo reto num retângulo.
438	38:21	P	Pelo menos não um retângulo qualquer. Como dever ser o retângulo para que…
439	38:25	A	Quadrado! (risos)
440	38:26	P	Ah.. certo, quer dizer que você encontrou dois argumentos, achei legal, esse argumento com o eixo de simetria que os pontos devem estar sobre ele ...

QUADRO 6.14: PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 418-440
FONTE: A autora (2011)

Na fala (423), vale ressaltar a menção à analogia, ou seja, o raciocínio analógico pode ser usado em parte do processo de prova também.

A última fala do professor (em 440) revela um fato importante: nem sempre o caminho seguido pelo aluno, na argumentação, é o caminho que o professor tinha em mente quando inicia a atividade. Isso revela outra faceta do papel do professor, o de ser também um aprendiz. Ele não é mais o detentor de toda verdade, ele também aprende com o aluno quando se engajam em atividades dessa natureza.

Para terminar a atividade, o professor pede que a aluna anote as principais idéias da justificativa no papel, e com isto, acaba retomando o argumento realizado (442-453).

6.2.3 Síntese da análise

A dialética de pergunta-resposta sempre está presente. Para auxiliar o aluno a pensar matematicamente, o professor não pode simplesmente expor o que deve ser feito, ele deve coordenar e orientar o aluno no processo através de perguntas. Essas perguntas então, não são quaisquer perguntas, elas devem direcionar o aluno no processo de prova, auxiliando-o a compreender o que ele está fazendo. Alem disso, essas perguntas do professor (que são freqüentes) são também para ele próprio, na procura de uma síntese das informações obtidas. Neste sentido, podem ter um caráter mais organizacional, para organizar idéias de forma geral, guiando o processo todo, ou então um caráter mais matemático, atraindo a atenção dos alunos para sub-configurações, que são um elemento importante no processo de prova, ou ainda para o uso da dinamicidade e da visualização para contribuir no processo de prova, auxiliando o aluno no pensar matematicamente.

No processo na atividade 1 as falas da aluna mostram que ela se foca em momentos da prova, quer dizer, ela busca traçar considerações a respeito da situação que vê a sua frente, mas não consegue manter o foco no que realmente deve mostrar na atividade em geral. Neste sentido, foca sua atenção para as subconjecturas que aparecem, são passos intermediários que irão auxiliar no argumento final. O professor diversas vezes teve de intervir com intuito de organizar as idéias e sintetizar o que já foi obtido até o momento, para assim retomar com a aluna o que realmente eles deveriam provar na atividade.

Outro aspecto que sobressai é o fato de o professor sempre apontar de novo para as sub-configurações que aparecem com as retas auxiliares. A aluna, de início já sai traçando uma reta auxiliar, mas não explora de tal maneira que lhe seja útil para um caminho de prova. O professor várias vezes chamou a atenção da aluna para tais sub-configurações.

Dentre as maneiras utilizadas pelo professor para tentar guiar a aluna no processo aparece também, na segunda atividade, a estratégia do “e se não fosse assim”. Tal forma de pensar faz com o que o aluno perceba a propriedade importante em questão que limite, ou então garanta, um certo fato. Esse perceber os fatos é uma parte importante do processo de construção da prova.

O uso da dinamicidade também faz parte das intervenções do professor, é através dela que certas invariantes aparecem, para que a aluna consiga seguir em frente no processo de prova. O próprio professor, em sua entrevista, ressalta a importância das invariantes. Para ele, é uma das contribuições que a tecnologia tem a oferecer para ajudar os alunos a pensar matematicamente, pois se tem a vantagem de poder observar as configurações não de maneira estática, mas com movimento, reconhecendo assim as medidas que permanecem constantes, podendo, com isso, chegar a uma idéia para uma prova. No processo de prova realizado com a aluna ele busca exatamente estes invariantes, para, com o auxílio das sub-configurações, conduzir a aluna em tal processo.

No final da segunda atividade, vale ressaltar, surge uma parte importante desse novo papel do professor frente às tecnologias: o professor como aprendiz. O professor passa a ser um orientador da atividade e tem de correr o risco de enfrentar situações que não tinha previsto, o que é próprio do diálogo. É o que ocorre com a justificativa da segunda conjectura da segunda atividade, o professor tinha um argumento em mente, mas a aluna seguiu um caminho completamente diferente, usando outro argumento.

6.3 O PROCESSO DE PROVA: PROF. 2

6.3.1 Atividade 1

Nos primeiros minutos, o aluno se concentra em construir a figura como no enunciado. A princípio ele quer construir a simetria dos pontos pelas propriedades geométricas, mas o professor lhe diz que ele pode usar as ferramentas do software, que já faz essa simetria, mostrando onde se encontram no menu. Relendo o enunciado, o aluno movimenta a figura, e tenta fazer uma primeira conjectura (28): *Então… a conjectura é em todo caso, isto também é visível e também é lógico pelo fato de serem exatamente os pontos médios entre A e, ahn D está exatamente no meio de AB e E diretamente no meio de AC, significa que ahn quando eu movimento o segmento, movimentasse B'C' então o ponto A sempre estaria sobre esse segmento.* Nesta fala do aluno já aparece um aspecto importante do ambiente dinâmico – a visualização: ...*isto é visível*... O professor, como resposta, pede para que o aluno experimente o fato, e o aluno cria a reta B'C' e movimenta a figura confirmando visualmente sua conjectura.

Na seqüência, para uma segunda conjectura, novamente aparece na fala o aspecto visual (32): ... *e algo que também se pode ver agora é ahn o que também é lógico por causa dessa simetria desses pontos, eles estão a uma mesma distância em relação ao segmento a [mostra os pontos B e C] e em conseqüência disso a nova reta criada também é paralela a a.*

Tendo essas duas conjecturas, o professor pede para que o aluno as justifique (39). O aluno coloca bastante ênfase no aspecto visual, pois inicia sua justificativa com palavras que remetem para tal (40): *Sim, então ahn... como já falei ahn são... não sei ao certo, quer dizer quando olho a partir da reta, da reta BC, ahn B'C', os pontos D e E estão a uma mesma distância dela. Se nós ahn quer dizer, isso se realmente se olhássemos para isso.* Por mais que seja visível, o professor aponta para o fato de que isso também teria que ser justificado (42), ao que o aluno prontamente concorda.

Após uma pequena pausa, o professor pergunta como o aluno pode proceder, e o que lhe é dado (44), num intento de organizar as idéias colocadas anteriormente. Na fala seguinte do aluno novamente aparece o aspecto visual (45): *Bom, eu posso, eu posso olhar o que eu fiz ali. Quer dizer eu posso de alguma maneira ahn, por exemplo, vejo que o ponto B eu refleti em E, em conseqüência disso a distância é a mesma que esta [mostra BE e EB'] e o mesmo posso dizer aqui também [mostra C e E].* E na seqüência o próprio aluno sugere um caminho, mas não está certo disso (46): *Sim, provavelmente posso mostrar alguma coisa de ahn congruência?!* O professor lhe pede para que construa esses segmentos que ele menciona, são as subconfigurações aparecendo. O aluno constrói os segmentos, e obtém a configuração como na figura 6.6.

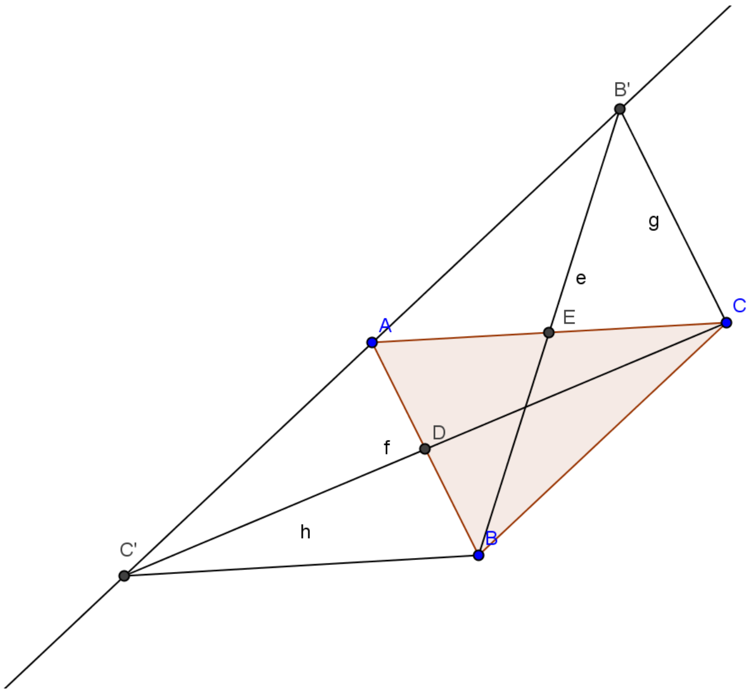


FIGURA 6.6: CONSTRUÇÃO DO ALUNO - ATIVIDADE 1
FONTE: A autora (2011)

Em seguida, o aluno busca um argumento, mas não tem certeza do caminho que quer seguir. Ele afirma que provar uma congruência seria interessante, mas já na seqüência menciona um argumento de perpendicularidade para provar o paralelismo (51-61):

51	09:08	A	Eu afirmaria que...
52	09:14	A	É... então, que este triângulo é congruente a este, porque ... [mostra os triângulos ABC‘ e ACB‘] - [murmura algo incompreensível]
53	09:29	P	O que você conhece deles.
54	09:31	A	Bom, eu conheço ...
55	09:34	P	Ou o que você quer mostrar?
56	09:37	A	Eu na verdade quero mostrar apenas que o ponto A está sobre a reta B’C’.
57		P	Correto
58	10:09	P	Você mencionou a pouco, a congruência
59	10:14	A	Talvez seja ahn seria significativo se... quer dizer, seria útil na verdade se eu pudesse mostrar a congruência do triângulo C’CB‘ com o B’BC‘, daí...
60	10:30	P	Respectivamente
61	10:32	A	Então certamente ahn seria ahn dado, quer dizer, a distância, se eu puxasse perpendiculares aqui ahn a uma mesma distância, teria provado o paralelismo. Mas ainda não...

QUADRO 6.15: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 51-61
FONTE: A autora (2011)

As falas do professor mostram seu papel de mediador enquanto organizador quando pergunta ao aluno o que ele conhece dos triângulos, assim como quando pergunta o que, afinal, o aluno quer mostrar, e novamente, quando lembra ao aluno a idéia da congruência mencionada por ele próprio anteriormente.

Depois de uma pausa, o professor intervém, tentando levar o aluno a entender o que ele deve mostrar (62): *E como você pode mostrar que o ponto A está sobre a reta B'C'?* Como o aluno responde apenas com a expressão *Tja* (que em alemão expressa sentimento de não saber como agir frente a uma situação), o professor segue outra linha de raciocínio – e se não fosse assim (64): *Como iria se parecer aqui se o ponto A estivesse fora da reta?* Deste comentário do professor segue um diálogo com um esboço feito no papel, com intuito de aplicar a idéia no problema em questão, ou seja, (65-78):

65	11:14	A	Bom daí seria... daí os pontos nos quais eu espelhei antes não estariam mais no meio, quer dizer por exemplo o ponto E não estaria mais no meio entre A e C, se eu remetesse à reflexão novamente... quer dizer, hm...
66	11:33	P	Em relação a isso, como se pode decidir se um ponto está sobre uma reta.
67	11:47	A	Não entendo isso agora...
68	11:48	P	Desenhe uma reta e um ponto fora dela. Se você acrescentar dois pontos na reta...
69	11:59	P	Como se pode descobrir agora se o ponto P está sobre a reta AB, ou se está fora dela.
70	12:09	A	Eu iria olhar se ahn se eu ahn se eu puder traçar uma paralela daí ahn e essa paralela não for idêntica à reta AB então seria, se ela não é idêntica então o ponto não está sobre a reta.
71	12:27	p	Sim, mas isso não se pode verificar simplesmente, não é? O que sempre é mais simples é quando se pode ahn estabelecer comprimentos de segmentos e então comparar estes entre si ou tamanhos de ângulos.
72	12:43	A	OK, verdade, é claro.
73	12:50	P	Podíamos unir o ponto P aos pontos A e B. E aí temos diversas possibilidades de como proceder.
74	12:59	A	Bom, eu poderia ahn naturalmente agora então eu poderia ir atrás da desigualdade de triângulos talvez para então ahn dizer que teoricamente, se eu estou sobre o ponto P, quer dizer, se o ponto P está sobre o segmento AB daí ahn se eu fosse de A até B, seria igual se eu fosse de A até B ou se eu fosse de A por P, e de P até B, seria igual, e...
75	13:28	P	Portanto qual igualdade teria que ser satisfeita?
76		A	Teria que ser satisfeita esta: $\|AP\| + \|PB\| = \|AB\|$
77	13:42	P	Mhm, ok, por exemplo.
78	13:50	P	Não sei se agora você consegue aplicar isso, se você transferir para o problema?!

QUADRO 6.16: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 65-78
FONTE: A autora (2011)

O aluno parece ter compreendido o raciocínio feito no papel, mas não consegue aplicá-lo de imediato no problema que tem em mãos (79): *Bom, eu poderia naturalmente aplicar isso, mas eu não saberia como colocar isso ou... como justificar, porque ahn...* Mas na sua fala seguinte, após uma pausa, começa a surgir uma idéia (82): *Bom, eu teria que mostrar que ahn que esses dois ângulos que são nulos para* *que então ele estivesse sobre.* O professor auxilia, perguntando então o que seria do terceiro ângulo (83), ao que o aluno responde 360 graus, corrigindo em seguida para 180 graus (84,86). Embora o aluno tenha um argumento a seguir, ainda não está bem certo disso, pois faz a afirmação em forma de pergunta (91): *Então é para eu olhar se se ahn o ângulo então de C' até A ahn C'AB' deve ter 180 Graus?!* A resposta do professor mostra que está aberto a outros caminhos, pois afirma que seria uma possibilidade (92). O aluno parece ainda não ter entendido o argumento a ser seguido, pois na seqüência busca o raciocínio efetuado anteriormente com o esboço no papel (93,94): *Certo. E como eu iria mostrar daí? Quer dizer...Eu iria, na verdade agora, eu assumiria então que ele está fora da reta e sigo dizendo agora que ahn...* O professor vem ao auxilio, e organiza as idéias (95): *Não, você não precisa assumir nada. Você tem aqui, você pode indiferente se o ponto A está sobre a reta ou não você sempre pode conectar o ponto A com o ponto C e conectar o ponto A com o ponto B ahn linha. E você naturalmente sempre tem esse ângulo em três partes,* ao que o aluno completa (96): *E essas três partes de ângulo devem dar um resultado de 180 Graus.* Dito isso, o aluno segue tentando argumentar, no entanto, comete o erro de chamar a mediana de altura, o que professor corrige (98-114):

98	16:56	A	Portanto o ângulo C'AB, BAC e CAB'. E isso eu poderia mostrar agora.
99	17:08	P	Eventualmente, sim [risos] Você mencionou antes uma vez, com esses triângulos
100	17:14	A	Os triângulos e congruência
101	17:17	P	Como você poderia juntá-los.
102	17:22	A	Bom...
103	17:33	A	Eu sei que pelo fato de eu ahn que eu ahn pelo fato de o ponto E estar diretamente no meio de AC, e pelo fato de eu ter refletido aqui, eu sei que este segmento tem o mesmo comprimento deste [mostra BE e EB'] ahn... daí...
104	17:55	A	Bom, daí se eu olhar esses dois triângulos [ABC e AB'C] logicamente AC e AC também é igual, isto é óbvio.
105	18:01	P	Exato. São lados idênticos, nos dois, você então está comparando esses dois triângulos [ABC e AB'C].
106	18:06	A	Isso, estou comparando o triângulo vermelho [ABC] com o branco [AB'C].
107	18:09	P	Ok. Então você já tem a congruência de um lado.
108	18:12	A	Um lado é igual, aí tem a altura igual... bom agora é
109	18:16	P	Mas não é a altura, essa teria que estar na perpendicular.
110	18:20	A	Ahn, bom a… a distância de E até B [murmura algo incompreensível]
111	18:28	P	É a mediana, no meio. Mhm, ok.
112	18:41	A	Bom, então posso O que você precisa
113	18:43	A	Então eu agora posso, eu tenho que partir do fato que eles são paralelos, daí eu poderia ir pelos ângulos correspondentes (alternos internos), mas isso ainda não dá porque eu ainda não sei se são paralelos.
114	18:55	A	Então, ahn...

QUADRO 6.17: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 98-114
FONTE: A autora (2011)

O aluno não consegue seguir adiante no argumento, e o professor vem ao auxílio apontando para o fato de que ele ainda não utilizou todas as propriedades da figura, de acordo como foi construída (115,118). O aluno afirma que foi com reflexão de ponto (119), mas não retira a propriedade que isto lhe traz para os triângulos que vinha considerando. O professor aponta para a simetria criada com a reflexão, perguntando qual seria o centro de tal simetria (120) ao que o aluno responde ser o ponto médio do segmento AC. Com tal afirmação, o professor novamente pergunta se ele já utilizou essa propriedade, de que o centro de simetria é o ponto médio de tal segmento. No entanto, ao invés de buscar um argumento que lhe auxilie na congruência dos triângulos que estava considerando, o aluno muda o foco (123): *Certo, é verdade, ainda não o fiz. E pelo fato de eu ter girado por aqui, então o triângulo inteiro gira automaticamente... através da reflexão ele girou então.* O professor não descarta a idéia, aponta para o fato que isto poderia estar correto, mas teria que ser explicitado melhor. O professor retoma o fato de B e B' serem simétricos, o aluno complementa que foram refletidos pelo ponto E, que é ponto médio de AC, e o professor repete a pergunta do que pode ser feito com esta propriedade, qual o proveito a tirar disso (125-127). Como o aluno não sabe ainda como agir, o professor pergunta o que aconteceria se não fosse assim, isto é, se E não fosse o ponto médio de AC, para tentar levar o aluno perceber que esta propriedade faz a diferença (129-133). O aluno percebe o que isto acarretaria (130): *Daí não iria funcionar, que então o ponto A estivesse sobre o segmento C'B'*. Dito isto, o professor retoma e insiste na pergunta, para aproveitar a propriedade (134): *Bom, até agora só sabemos que esses dois são refletidos por um ponto [B e B'], são então simétricos. Posso fazer algo com a propriedade de que este é o ponto médio do segmento AC?* Na seqüência do diálogo, o aluno percebe e afirma então que AE e EC têm mesmo comprimento, assim como BE e EB' também tem mesmo comprimento (135-140). Mas quando o professor pede para que junte as informações que tem, o aluno se confunde: *Então posso ver esses triângulos como congruentes, pois eu também sei que, na verdade não sei, isso posso supor da... da simetria... "ai minha nossa"*. No entanto, o professor reafirma que é possível seguir tal raciocínio e o aluno continua, com algumas intervenções do professor para uma maior clareza das idéias (144-174), e assim, fecha o raciocínio da congruência de triângulos:

144	22:19	A	Posso dizer agora, então se eu pegar, por exemplo, o triângulo ECB' e o triângulo AEB, os dois é pra ser congruentes e eles têm esse segmento em comum [BE e EB'] e este segmento em comum [AE e CE], porque são os pontos médios e daí na verdade também sei que eles estão sob um mesmo ângulo.
145	22:45	P	Ok. Um ângulo você precisa, não é? Qual caso de congruência você iria utilizar?
146	22:53	A	Lado-Ângulo-Lado
147	22:54	P	Exatamente. Você pode anotar para que a gente mantenha isso.
148	23:01	P	Bom, e quais segmentos são congruentes agora?
149	23:06	A	Então, são congruentes AE e ahn EC; daí ahn EB
150	23:24	P	Sim, para qual? Ainda fique na anotação.
151	23:31	A	EB e EB'.
152	23:35	A	E agora na verdade também é congruente o ângulo CEB' e o AEB. E com isto então seria, então já temos eles iguais.
153	23:56	A	Bom... e ahn agora sei então
154	24:00	P	Só um pouquinho, isso você ainda não tinha mencionado, por que eles são de mesmo tamanho? [mostra para os ângulos AEB e CEB']
155	24:10	P	Esses dois ângulos?
156	24:11	A	Sim, isso vem ahn pela simetria de pontos ahn...
157	24:23	P	Existem assim, leis sobre ângulos.
158	24:28	A	Por causa do ângulo oposto pelo vértice. Eles são iguais, porque este e este [CEB' e B'EA] se complementam em 180 graus, e embaixo a mesma coisa, e como é uma mesma reta,
159	24:40	P	Exatamente. Ângulos opostos pelo vértice na reta.
160	24:44	A	Exato.
161	24:45	P	Ok, agora você sabe que esses dois [ângulos CEB' e AEB] são congruentes entre si e o que você pode fazer com isto agora.
162	24:53	A	Bom, com isto posso agora ahn eu posso em todo caso, eu posso fazer a mesma coisa com esse triângulo [mostra C'DB] e ahn... quer dizer, eu posso em todo caso se eu tenho esses dois triângulos congruentes posso também enxergar estes dois triângulos congruentes [mostra triângulos BEC e AEB'] porque exatamente a mesma coisa
163	25:17	P	Vale exatamente a mesma coisa, ok, anote isto também. Qual o resultado que você tem disso então?
164	25:22	A	Bom, daqui ahn que o triângulo ABE é congruente com o triângulo ECB', bom, e ahn
165	25:38	P	O outro é análogo
166	25:39	A	Aí também posso, exato
167	25:41	P	Análogo vale.
168	25:44	A	Então o triângulo BCE é congruente com o triângulo AEB'
169	25:58	P	E ahn disso segue então que ahn que o triângulo original ABC é congruente com AB'C.
170	26:23	A	Isso… E agora eu posso ahn basicamente também afirmar que poderia fazer da mesma forma análoga com o triângulo AC'B porque vale a mesma reflexão
171	26:40	P	Correto.
172	26:50	A	O triângulo ABC também é congruente ao triângulo AC'B e disso resulta que esses dois também são congruentes [aponta triângulos AC'B e AB'C] pela congruência dos dois.
173	27:02	P	Certo, a transitividade da congruência.
174	27:13	A	E ahn …

QUADRO 6.18: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 144-174
FONTE: A autora (2011)

O professor então retoma seu papel de organizar as idéias e afirma (175): *Bom, agora justificamos algumas coisas, mas agora temos que voltar pro objetivo,* *na pergunta a ser respondida, do problema.* Na seqüência, o aluno tenta utilizar os resultados da congruência justificada anteriormente, mas muda o raciocínio inicial (176-180):

176	27:32	A	Bom, e agora eu sei que ahn que os ângulos também são iguais, que, portanto ahn que, por exemplo, este lado é paralelo a este [mostra AB e B'C]. Isso se pode concluir dessas congruências e ahn disso eu sei que... com isso eu descobri, em todo caso, o paralelismo dessas duas retas.
177	28:03	A	E ahn pelo fato de este ser de mesmo tamanho e paralelo a este [mostra os lados AB e B'C] e o mesmo posso dizer deste para com este [mostra lados AC e BC'], então também fica claro que então ahn o ponto A deve estar sobre esse segmento.
178	28:18	P	Não entendo
179	28:20	A	O lado C'B é igual ao lado AC pela congruência e o mesmo posso dizer do segmento AB com o C'B ahn CB'.
180	28:36	A	Bom, e ahn também pelo fato da congruência o ângulo C'BA é igual ao ângulo ACB' ahn deve seguir que... ahn... sim, depende de como eu quiser expressar, que, por exemplo, se eu definir ahn a altura do triângulo e puxar a altura por B, a altura também seria a mesma ali [mostra o ponto C] e se eu conseguir traçar um segmento ali, não dá pra ser assim?

QUADRO 6.19: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 176-180
FONTE: A autora (2011)

O professor não descarta a idéia, afirma que possivelmente poderia ser de tal maneira, mas que isso exigiria uns passos a mais, e teria que ser complementado (181,183), e lembra ao aluno que eles tinham mencionado outra idéia antes. O aluno se recorda do argumento (184): *Aquilo com os 180!* E o professor afirma então que ele tem que mostrar que A está sobre a reta determinada por B'C'. Retomando o raciocínio dos 180 graus, o aluno fecha o argumento (188): *Exatamente. Ahn... Bom, eu posso em todo caso da congruência dos triângulos, eu posso ahn eu posso concluir que estes três ângulos [mostra C'AB, BAC e CAB'] somados juntos resultam os 180 Graus dos ângulos internos de um triângulo ahn já que pela congruência é dito que o ângulo ABC [mas mostra BAC] é igual ao ângulo ACB' ahn e com isto temos dito sobre este [mostra BAC], aí o ângulo CBA é igual ao ângulo C'AB, e o mesmo posso fazer com o ângulo BCA que é igual ao B'AC e com isso eu sei então que aqui em cima estão todos os ângulos do triângulo, do triângulo original, que seriam os 180 Graus.* O professor afirma que está correto e ainda complementa que poderia ter usado outra possibilidade, envolvendo o paralelismo (191): *Sim, está ok. Você também poderia ahn o que você tinha, o paralelismo, também daria para argumentar, você poderia ter dito que o segmento AB' é paralelo ao segmento BC, e este também é paralelo a este [mostra C'A e BC]. Não é? Nos dois está A, então...* Ou seja, o professor ainda oferece uma outra possibilidade de provar a propriedade observada, mostrando ao aluno que não existe um único caminho a ser seguido.

6.3.2 Atividade 2

O aluno constrói a figura de acordo com o enunciado dado, murmurando suas ações. A princípio ele não entende corretamente, marcando a interseção das bissetrizes com os lados do quadrilátero externo, mas com o auxilio do professor, termina a configuração corretamente (Fig. 6.7)

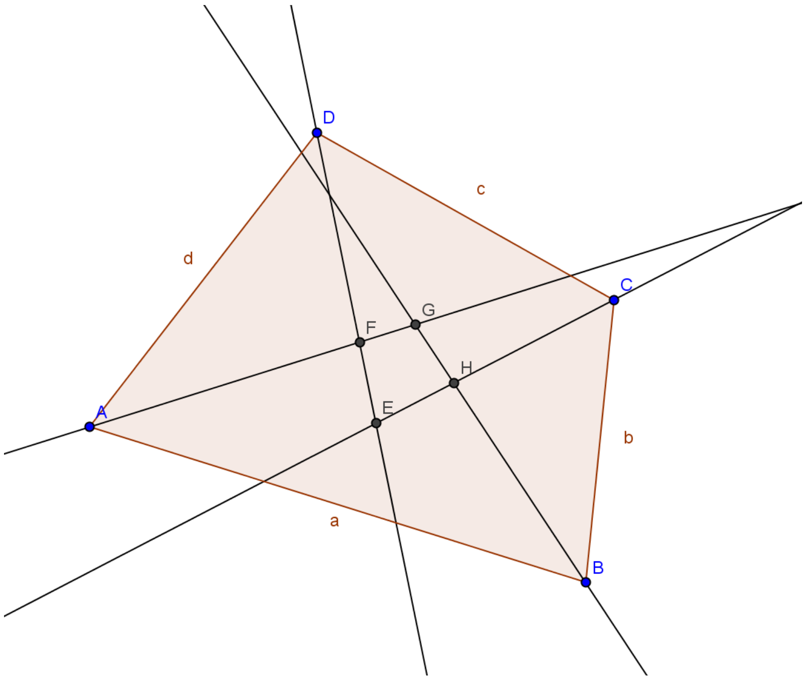


FIGURA 6.7: CONSTRUÇÃO DO ALUNO (1) - ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

Primeiramente o aluno busca conjecturas, e, após alguns momentos movimentando a figura, já enuncia a primeira coisa que pode observar. Sua primeira conjectura é mais geral e o aluno não o faz de forma acurada, algo que é questionado pelo professor na seqüencia. O aluno afirma que quando o quadrilátero externo é específico então o quadrilátero interno também o será (216). Ele tenta exemplificar com um losango, afirmando que internamente seria então um retângulo (218), mas possui apenas uma aproximação do losango – fato questionado pelo professor (219): *E é, quer dizer, estava realmente correto de forma exata... era um losango o que você tinha ali?* O aluno afirma não ter certeza, mas não dá muita atenção e descarta o losango, procurando outras conjecturas.

Na seqüência procura deixar a configuração na forma de um quadrilátero pipa e afirma (224): *Então, quando ahn quando a figura é simétrica, assim como agora no quadrilátero pipa, este não está bem, mas quase... está sim, está simétrico, ahn aí os pontos caem juntos.* E complementa (225): *Este também é o ahn o ponto da circunferência interna então, quer dizer o ponto central da circunferência que circunscreve o quadrilátero, este resulta então quando os pontos caem juntos e, portanto isso apenas acontece quando o quadrilátero ABCD, quando ele ahn possui a possibilidade de uma circunferência inscrita.* Organizando essa idéia, o aluno lança a conjectura (229): *Então quando o quadrilátero ABCD possui uma circunferência inscrita... daí os pontos E, F, G, H caem juntos sobre um ponto [na folha ainda consta: o centro dessa circunferência inscrita].*

O professor pede para que o aluno volte na conjectura que tinha elaborado anteriormente, do losango, e o aluno percebe que ela não poderia ser verdadeira (231): *Mhm. Logicamente aquilo não estava correto, pois quando é um losango, o losango também possui circunferência inscrita e então isso não pode acontecer.* O aluno percebe então que ele não tinha realmente um losango, o que ele chamou de aproximação anteriormente era um paralelogramo e assim enuncia outra conjectura (233): quando é um paralelogramo, resulta um retângulo no meio. No entanto, mantém sua primeira conjectura geral (237): um quadrilátero específico EFGH apenas resulta de um quadrilátero especifico ABCD.

O aluno segue testando outras configurações e enuncia mais uma conjectura (242): de que se for construído um trapézio regular resulta um quadrilátero pipa internamente. Ao que o professor complementa (243): se o trapézio tiver um eixo de simetria. Não se demoram nesta conjectura e o professor segue perguntando se o aluno já tem todos os quadriláteros específicos, seguindo com sua conjectura de que um quadrilátero específico EFGH apenas resulta de um quadrilátero especifico ABCD. O aluno mostra um certo conhecimento sobre as propriedades dos quadriláteros, pois afirma que o quadrado já estaria incluso na conjectura dos quadriláteros que possuem circunferência inscrita e portanto, o quadrilátero interno se mostra um ponto (251, 253), e faz a mesma afirmação para o losango e o quadrilátero pipa (255). O aluno menciona o retângulo e o professor pergunta o que acontece neste caso. Mudando a configuração para que se tenha um retângulo, o aluno logo enuncia (259): *Ah sim, no retângulo resulta um quadrado.*

O professor pergunta se existem outras possibilidades, se eles já encontraram todas as conjecturas possíveis (261), e a discussão segue com o aluno enunciando o que eles já encontraram e o que poderia estar faltando. O professor retoma a conjectura de que uma figura regular apenas pode resultar se o quadrilátero externo for regular (267,269) e pede para o aluno verificar *se esse realmente é o caso ou se com uma figura externa irregular também se pode obter algo relativo assim dentro.* O aluno busca uma configuração de quadrilátero qualquer com a qual se possa obter um específico, mas comenta que seria inevitável a relação regular-regular. No entanto, essa busca o faz perceber outro fato (284): *Bom, claro, não temos circunferência inscrita apenas em quadriláteros regulares, a circunferência inscrita também pode resultar de outra maneira. Quer dizer... ahn sim se a ahn se resultar assim ahn as perpendiculares, pelo ponto, tiver mesma distância até os lados. Mas isso não precisa ser um quadrilátero específico.* O professor complementa que esses são os quadriláteros circunscritíveis e aponta sua característica e os casos particulares que tinham analisado anteriormente (287): *Neles, os lados então são tangenciais à circunferência inscrita [mostra como, na figura]. E estes são então quadriláteros circunscritíveis especiais [mostra nos quadriláteros anotados – quadrado, losango e quadrilátero pipa].*

Na seqüência, o professor pede que o aluno escolha uma das conjecturas elaboradas para que tente justificá-la. O aluno escolhe a última discutida, onde os pontos internos coincidem e o professor lhe indica possibilidades de prosseguir (297): *Bom, se você quiser fazer nessa figura você já estaria incluindo todos os casos particulares. Mas você também pode um caso especial... ou, é, você tem que se decidir. Há diversas possibilidades, ou alguns casos específicos para chegar numa justificativa geral, ou você pode tentar ir direto para a justificativa geral e aí você tem os casos especiais automaticamente inclusos.* Enquanto o professor fala, o aluno vai modificando a construção, analisando as diversas configurações possíveis de quadriláteros quaisquer e aponta para o fato de terem ângulos opostos pelo vértice, mas que isso não traz nada de novo. O aluno então tem a idéia de traçar uma perpendicular ao lado (301) e o professor reforça a idéia dizendo que ele pode traçá-la na figura, assim começando a aparecer subconfigurações. O aluno então constrói a perpendicular ao lado DC passando pelo ponto onde os pontos E, F, G e H coincidem.

No entanto, o aluno não sabe o que fazer com tal reta, e apenas movimenta a figura num arrastar aleatório.

Após uma pausa, o professor lhe pergunta o que ele tem em mente, forçando o aluno a pensar em voz alta e compartilhar suas idéias. O aluno lança uma idéia, embora não saiba ainda como exatamente mostrá-la (307,308): *Então, agora estou tentando ahn mostrar que ahn que o que, por exemplo, que seria um dos pontos de tangência, disso segue que eu quero mostrar que o segmento do ponto E até o ponto novo [ponto sobre o segmento CD, através de perpendicular] terá o mesmo tamanho que este [mostra para o outro lado da perpendicular] e daí então a mesma coisa com os outros. Quer dizer, não exatamente a mesma coisa, mas da posição da perpendicular dali.* O professor confirma que isto poderia ser feito (309): *Você pode diretamente, sim, traçar a circunferência com este raio e ver se ele pertence ali.* E o aluno constrói a circunferência centro no ponto E e raio até o ponto de interseção da perpendicular com o lado DC. O aluno afirma que isto é visível assim, mas está ciente de que é um fato que deve ser verificado (312). O professor intervém, aconselhando o aluno a traçar pelo menos mais uma perpendicular (313), para que mais subconfigurações apareçam. O aluno constrói a perpendicular ao lado AB passando por E, que é do lado oposto à outra perpendicular que ele já possui e o professor pede para que ele construa uma perpendicular vizinha (316). Assim o aluno também traça a perpendicular ao lado AD passando por E e cria o ponto J de interseção com o lado (Fig. 6.8, na página 107).

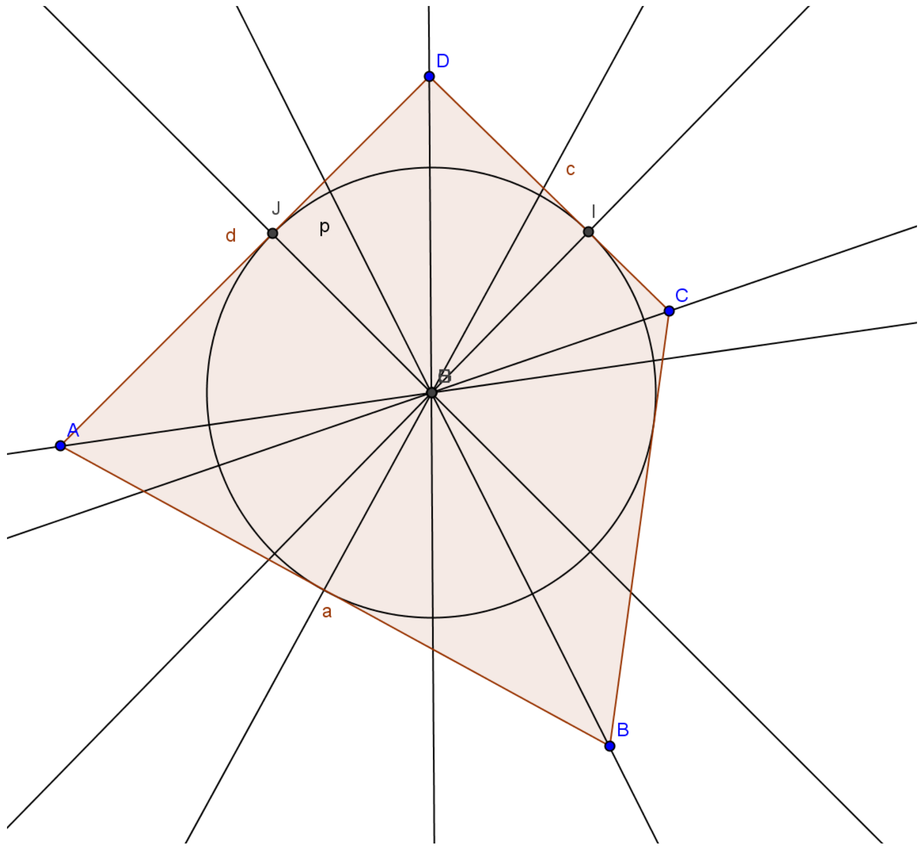


FIGURA 6.8: CONSTRUÇÃO DO ALUNO (2) - ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

Novamente se instala uma pequena pausa e o professor chama a atenção para as duas perpendiculares vizinhas e aponta para o fato de que o aluno precisa considerar agora quais as propriedades que ele utilizou para construir a figura (320,322). Neste sentido, organiza as idéias, e procura guiar o aluno para que este tenha uma idéia para a justificativa. Após pensar um pouco, o aluno começa a citar o que eles possuem na figura e tenta lançar uma idéia (324-331):

324	56:59	A	Eu sei, bom, eu sei que pelo fato de esta ser a bissetriz, sei que este ângulo, o ângulo JDE é igual ao ângulo EDI
325	56:10	P	Correto, pois é a bissetriz.
326	56:12	A	Exatamente. E eu sei que, tenho o ângulo exato agora, também sei que este ângulo é igual [mostra EJD e DIE] ele é o ângulo de 90.
327	56:34	A	Bom, agora eu tenho esse ângulo [mostra o ângulo em D]... e esse ângulo [mostra o ângulo DIE].
328	56:41	P	Aonde você quer chegar?
329	56:44	A	Bom, se eu agora, posso mostrar que são congruentes?!
330	56:49	P	Você quer mostrar que esses dois são congruentes, você já tem dois ângulos, precisa apenas de um lado ainda.
331	56:55	A	Exato. Então, o lado, por exemplo, o lado BD é o exatamente o mesmo. Quer dizer, BD é o mesmo lado e disso segue que estes dois são congruentes [mostra os triângulos EJD e EDI], e disso resulta logicamente que o segmento IE tem mesma medida que o segmento EJ; e segue desses dois juntos daí então ahn que devem estar sobre a mesma circunferência então. Portanto se fosse a circunferência inscrita, pelo fato de serem segmentos iguais, se eu traçar uma circunferência por um deles o outro também deve estar sobre ela.

QUADRO 6.20: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 324-331
FONTE: O autor (2011)

O raciocínio do aluno se mostra coerente, no entanto, é o que ele vê na configuração. Na seqüência do diálogo o professor aponta para o fato de que esse raciocínio é verdadeiro, mas não para qualquer quadrilátero (332-335):

332	57:27	P	Hm, e onde deve estar o ponto para que suas conclusões sejam válidas?
333	57:40	A	Ahn ... sim ele deve estar, deve estar a uma mesma distância para o ponto I e J, para os dois.
334	57:53	P	E onde estão todos estes pontos?
335	57:54	A	Sobre a ahn... bom, sobre a mediatriz do segmento IJ. Se eu traçasse o segmento IJ

QUADRO 6.21: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 332-335
FONTE: A autora (2011)

O professor, então, aponta um fato importante, o de que os pontos I e J são variáveis e dependentes de outros pontos, no entanto, existe um lugar geométrico no qual o centro da circunferência deve estar tal que tangencie os lados do quadrilátero (336), perguntando ao aluno qual seria este lugar geométrico. O aluno não se manifesta a respeito, apenas observa a figura e após uma pausa o professor complementa (337): *É para que estes dois triângulos sejam congruentes, não é? Isso você já encaminhou bem certinho, mas quais as condições para isso. Para esta figura como está agora, então os triângulos são congruentes. Mas para onde posso movimentar este ponto [ponto E=F=G=H]? Posso movê-lo para lá? [mostra pra esquerda em algum lugar].* Neste momento pode-se observar que eles começam um caminho de raciocínio abdutivo, eles estão frente a uma determinada situação e querem saber quais as condições que geram essa configuração. Na resposta do aluno à última pergunta do professor, percebe-se que ele está ciente de que não pode ser qualquer posição (338): *Não, porque ele tem que, então, se como foi dito, se eu, por exemplo, traçar um segmento aqui [por I e J] a mediatriz ahn o ponto E deve estar em algum lugar nesse segmento ahn em relação a esses dois pontos [I e J]. Por que tem que ter a mesma distância.* No entanto, o professor salienta o fato de que I e J são variáveis e produtos da posição do ponto E (339), ou seja, salienta que *se E estivesse em outro lugar, I e J também estariam em outro lugar.* Mas também aponta para outro fato: *Em relação a isso, essa mediatriz que mencionamos, talvez nós já a tenhamos aqui.* O aluno reconhece que essa mediatriz de IJ é a bissetriz do ângulo ADC (340) e o professor complementa (341): *Quer dizer, o centro da circunferência inscrita deve estar em algum lugar da bissetriz.*

Desse resultado, o aluno já quer concluir que então todos os pontos coincidem (343), mas o professor ressalta que ainda precisam de uma condição (344): *Sim, mas temos que colocar uma condição para que possamos descobrir, ou você pode movimentar, não vale para todos os quadriláteros, mas só para alguns.* O aluno mexe na figura movimentando o ponto C, desfazendo E=F=G=H, e o professor pergunta por que não vale para aquele quadrilátero, apontando que é essa condição que ainda precisam descobrir. O aluno vai movimentando a construção pelo ponto C, num vaivém com a configuração de E=F=G=H e outras. Como o aluno não sabe bem ao certo como prosseguir, o professor intervém, retomando uma idéia anterior do aluno, de congruência, tentando guiar o aluno para uma possível justificativa (353): *Ok, vamos voltar para a relação com a congruência. Isto estava muito bom. Você quis dizer que estes pontos de encontro da circunferência, do raio, ahn divide estes segmentos [mostra AD e DC] de tal maneira que aqui resultam dois triângulos congruentes. E isso você mostrou para este ponto. E se você continuasse isso? No próximo ponto?* O aluno menciona o fato de que poderia ser feito de forma análoga se traçasse outra perpendicular, então, constrói a perpendicular ao lado BC, passando por E, resultando no ponto K.

Na seqüência, o professor pede que o aluno deixe os triângulos congruentes mais visíveis, ou seja, pretende deixar as subconfigurações aparentes. O aluno cria os triângulos IEC e KEC deixando-os da mesma cor, e o professor pede que o aluno faça a mesma coisa com os outros pares de triângulos congruentes, pintando-os de outra cor (Fig. 6.9). Feito isto, o professor retoma o que já foi colocado e organiza as idéias, o objetivo da atividade em geral (367,368): *E sim, sobre estes pares de triângulos congruentes você sabe que segmentos e ângulos correspondentes são de mesmo tamanho. Você consegue fazer uma afirmação sobre o quadrilátero completo? Este é o objetivo, não é? Eu quero saber quais quadriláteros possuem uma circunferência inscrita, ou seja, nos quais os pontos de interseção das bissetrizes caem juntos.*

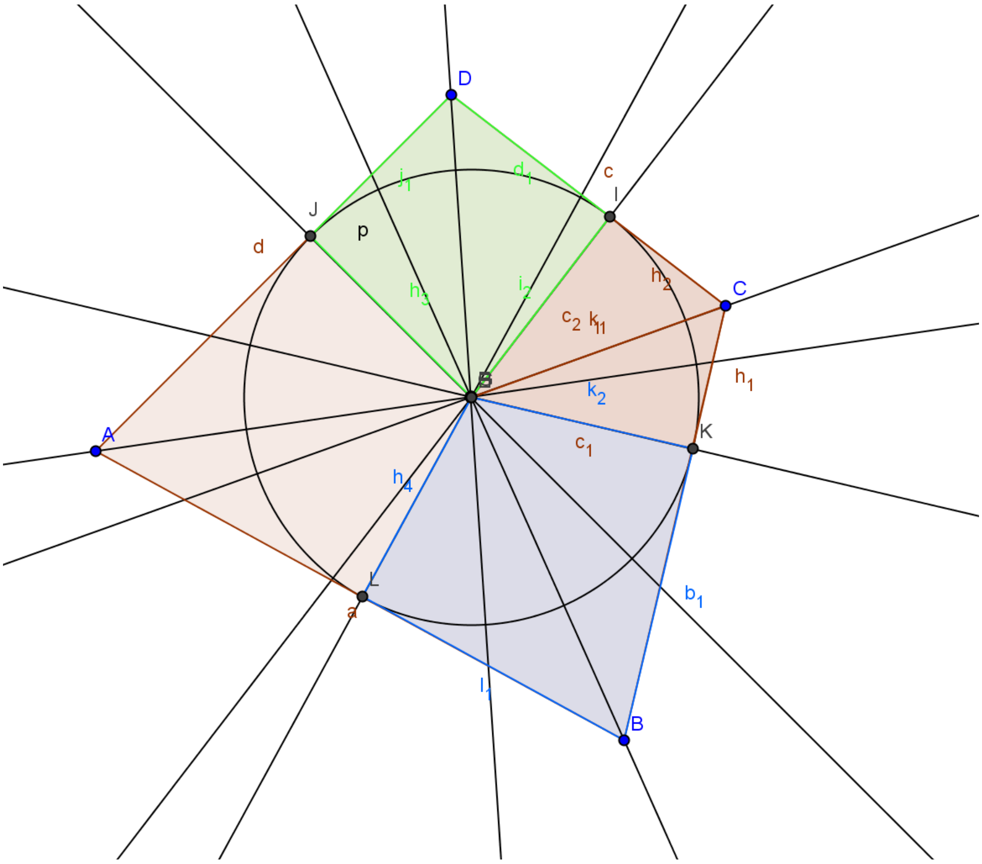


FIGURA 6.9: CONSTRUÇÃO DO ALUNO (3) - ATIVIDADE 2
FONTE: A autora (2011)

O aluno arrisca uma afirmação (369), que o quadrilátero EJDI é igual, ou seja, congruente com o IEKC, mas pela dinamicidade, movimentando a figura, descarta a conjectura imediatamente. Em seguida, aponta para a simetria dos quadriláteros pipa formados, (376) *esses quadriláteros devem ser simétricos em relação à bissetriz como eixo*, mas não sabe como prosseguir daí. O professor confirma a simetria e pede para o aluno retomar as propriedades que estão ali presentes na configuração para que tente fazer uma afirmação sobre o quadrilátero todo (378). Como o aluno não se manifesta, após uma pequena pausa o professor intervém e tenta colocar de outra maneira (379): *Bom seria assim, se em um quadrilátero tal e tal acontece, então caem juntos os pontos de interseção das bissetrizes.* E complementa (380): *Para chegar lá você tem que simplesmente experimentar de alguma maneira, olhar de novo o que você já descobriu agora.* O aluno então aponta os ângulos iguais, devido às bissetrizes (382), e os segmentos de mesmo comprimento (384) num dos quadriláteros pipa.

Em seguida, o aluno fica em silêncio olhando para a figura, e o professor pede que ele compartilhe o que está pensando. O aluno lança uma primeira idéia, ele percebe que tem de relacionar os quadriláteros pipa formados internamente, mas ainda não sabe como. Enuncia então, as informações que possuem sobre um dos quadriláteros pipa (386-388):

386	1:08:48	A	Bom, naturalmente a relação sobre a, quer dizer a que deve ser dada é que esses segmentos têm mesmo comprimento [mostra EI, EJ, EK e EL] e estou tentando no momento passar de um quadrilátero para o outro e daí podemos de alguma maneira estabelecer uma relação. Mas no momento não me ocorre nada direto... algo que eu possa relacionar tudo daí.
387	1:09:18	P	Bom você já disse, primeiro que os ângulos devem ser de mesmo tamanho, mas isto segue do fato de ser a bissetriz; agora você mostrou que
388	1:09:30	A	Que estes dois são congruentes [triângulos LEB e KEB], que isto é um quadrilátero pipa; que esta linha é igual a esta linha [LB=KB] e que este ângulo e este, bom isto já é mesmo assim ahn pelo fato de ter traçado a perpendicular, ahn este igual a este [ângulos retos LEB = KEB].

QUADRO 6.22: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 386-388
FONTE: A autora (2011)

São informações importantes, e o professor pede para que transfira isso para os outros quadriláteros pipa e tente, assim, considerar isto sobre o quadrilátero todo ABCD (389). O aluno comenta que já havia tentando isto, mas não lhe ocorre nada ainda (390), e o professor então pede para que ele anote seus resultados, procurando quais medidas são iguais, buscando pelos invariantes, *que sempre permanecem os mesmos, indiferente como* se *movimenta a figura*. O aluno menciona o fato de os quadriláteros parciais internos serem sempre quadriláteros pipa, é uma relação que deve permanecer (392) ao que o professor denomina de ser uma invariante (393). Na seqüência, o professor acaba intervindo, com o intuito de guiar o aluno para uma possível justificativa, lhe dando uma dica, e assim, re-escrevem as informações que já possuem de modo a relacioná-las com o quadrilátero ABCD:

396	1:11:34	P	Bom, talvez como uma pequena dica, você disse agora que estes segmentos são de mesmo tamanho [mostra LB e KB], mas estes são dois lados de um quadrilátero pipa. Como você poderia agora denominá-los se você olhar para o quadrilátero todo.
397	1:11:57	A	Sim, são partes das, por exemplo, o pedaço BK é parte de BC e ahn
398	1:12:05	P	Se você quiser agora designá-los com os lados a, b, c e d? Como você denominaria este segmento? [LB]
399	1:12:17	A	Este é, bom o segmento BL é então uma parte do segmento AB. E é naturalmente de mesmo tamanho, estes dois [mostra LB e KB] juntos, estes dois pelo menos.
400	1:12:29	P	Mhm, se você designar o segmento total como *a*, você poderia denominar uma parte desse segmento de a_1 [AL] e este como a_2 [LB], e estes correspondentemente de b_1 [BK] e b_2 [KC]. E então você poderia estabelecer segmentos iguais correspondentes.
401	1:12:50	P	Quais segmentos seriam de mesmo tamanho então?
402	1:12:53	A	Seriam então a_2 e b_1.
403	1:12:56	P	Mhm … anote também.
404	1:13:03	A	Então, a_2 igual a b_1 e é para fazer para todos assim, ou?

QUADRO 6.23: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 396-404
FONTE: A autora (2011)

No entanto, mesmo com essa nova maneira de designar as partes dos lados do quadrilátero ABCD, o aluno não enxerga uma possível relação (405): *Sim, mas disso ainda não posso concluir nada diretamente, quer dizer nada com que possa definir o quadrilátero. ... Isto já está aí, estou vendo, mas... tenho meus problemas agora em como posso de alguma maneira tirar realmente uma relação direta.* O professor, então, faz algumas perguntas, tentando guiar o aluno para um possível argumento, mas o aluno ainda não enxerga:

406	1:13:44	P	Quantas vezes cada segmento de cada cor aparece?
407	1:13:48	A	Duas vezes.
408	1:13:49	P	Exatamente, duas vezes. E onde cada uma aparece?
409	1:13:55	A	Um ao lado do outro.
410	1:13:58	P	Sim... e algum lugar estão os quatro? Juntos.
411	1:14:09	A	Este é o problema, eu não consigo estabelecer alguma relação. Eu não posso dizer agora que ahn este para este [lado *a* e *c*] e, ou algo parecido assim...
412	1:14:17	P	Sim, mas o que seria este para este? [lado *a* para *c*]
413	1:14:20	A	Sim, mas ali não posso fazer nada, é assim, é a única coisa, não, não posso fazer nada.
414	1:14:26	P	Eu não iria desistir tão rápido ali.

QUADRO 6.24: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 406-414
FONTE: A autora (2011)

O professor insiste na linha de pensamento, e continuando com perguntas, lança a idéia do argumento (415-417): *Então, a parte azul [LB] aparece aqui embaixo, mas não aqui em cima [em CD], não é? ... E esta também aparece aqui [AL], mas não aqui em cima também em [em CD]. E o mesmo vale ao contrário, não é? Esta não aparece aqui [DI não aparece em AB] e esta também não [IC não aparece* *em AB]. ... Como que fica com a azul então [BK]?* O aluno tira algumas conclusões, mas ainda não consegue enxergar uma relação no quadrilátero ABCD (418,419): *Bom, se pegar esta com esta [AD], aí a azul também não aparece ali, e esta também não [CK] e ao contrário também, ahn eles aparecem então ahn no ahn onde o vértice é o mesmo também, nos lados. ... Mas disso ainda não consigo tirar nenhuma relação...* O professor, então, faz outra pergunta, agora decisiva, para que o aluno encontre a linha de argumento necessária (420-429):

420	1:15:31	P	Se você comparar agora, sim, se você quiser ter todas as cores uma vez?
421	1:15:45	A	Se eu colocá-los todos um do lado do outro.
422	1:15:50	P	Precisamente cada cor uma vez só.
423	1:15:54	A	Mhm e junto isto resulta então o semi-perímetro!
424	1:15:58	P	O semi-perímetro, não é? Exatamente. E quais você pegaria então? Para a.. quais partes.
425	1:16:10	A	Todos uma vez, por exemplo, a_1 mais b_1 mais c_1 mais d_1.
426	1:16:15	P	Ou, se você vier por aqui [mostra b_1 e b_2], as duas cores já
427	1:16:20	A	Ah sim, esta para esta [mostra BC e AD]
428	1:16:23	A	Ahhhh! Eu acho que agora... poderíamos então sim tirar...
429	1:16:32	A	Ok, portanto a relação que tem que sair então é ahn, por exemplo, o segmento AB mais o segmento CD deve ser igual, quer dizer, tem que ter a mesma medida que o segmento BC mais AD. Isto é uma relação que vale, neste caso.

QUADRO 6.25: PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 420-429
FONTE: A autora (2011)

Em seguida, o professor procura organizar a prova (como produto) (430): *Ok, agora ainda temos que formular isso de uma maneira, anotar e conseguir uma seqüência. Bom, você disse agora, se as somas dos comprimentos dos lados oposto são iguais... então*. O aluno então retoma os argumentos e os anota na folha de papel (431,435,436): *Aí resultam esses quadriláteros pipa ... e através desses quadriláteros pipa é dado que ahn que estes segmentos são iguais [mostra EI, EJ, EK, EL], esses ahn esses segmentos nas perpendiculares. Que eles tem o mesmo comprimento, nos quadriláteros pipa isso é ... Sim, disso segue então que resultam esses quatro quadriláteros pipa... e disso segue daí que, dos quatro quadriláteros pipa ahn segue que, segue que pode existir uma circunferência inscrita. Isso segue do fato que, através desses quatro quadriláteros pipa ahn segue que essas linhas então, esses segmentos perpendiculares tem todos o mesmo tamanho e, portanto existe uma circunferência inscrita. ... E da circunferência inscrita segue que então que o quadrilátero interno não é mais um quadrilátero, mas apenas um ponto.*

Para ver se o argumento é válido nos casos especiais, o professor pede que o aluno verifique tais casos apontados anteriormente, na configuração. O aluno o faz, apontando as características de tais quadriláteros, mostrando que o argumento é válido para o quadrado, losango e quadrilátero pipa, e que não vale para o paralelogramo nem para o retângulo, que é caso particular do paralelogramo.

6.3.3 Síntese da Análise

O aspecto visual é bastante importante para este aluno, tanto que aparece em várias de suas falas, principalmente no início da primeira atividade. No entanto, ele está ciente de que o fato de estarem vendo não exclui a necessidade de uma justificativa. O professor, então, explora bastante a parte visual na segunda atividade, buscando usar as ferramentas do software que auxiliem na argumentação.

Este professor, assim como o Prof.1, também usa a idéia do “e se não fosse assim” em vários momentos. Na primeira atividade pergunta se não fosse assim – se o ponto A não estivesse sobre a reta B’C’ – levando o aluno a perceber qual a propriedade que é necessária para que A esteja sobre a reta. Num segundo momento, pergunta o que aconteceria se E não fosse ponto médio de AC, novamente para levar o aluno a perceber a propriedade que está ali e pode ser utilizada no argumento.

Outro aspecto interessante de ser observado é que na segunda atividade aparece a conduta da abdução como raciocínio utilizado para a justificativa da conjectura formulada. Na configuração que o aluno analisa, a propriedade se mostra verdadeira, mas o professor aponta para o fato de que se isto não acontece para todos os quadriláteros, devem existir certas condições que eles devem então tentar descobrir. Ou seja, buscam as hipóteses que geram a tese que está visível na configuração.

As subconfigurações são peças chave para a construção da justificativa e o professor as explora bem, utilizando inclusive o potencial dinâmico do software. Quando pede ao aluno que crie os quadriláteros pipa parciais e os colore com cores distintas, procura chamar a atenção do aluno para as propriedades que podem ser vistas ali.

Assim como o Prof.1, este professor também vê nos invariantes uma das principais contribuições dos softwares para o pensar matematicamente. Em determinado momento da atividade 2 faz menção direta, pedindo que o aluno anote resultados e procure medidas que sempre permanecem as mesmas, indiferente como se movimenta a figura. Neste sentido, busca guiar o aluno para um possível argumento.

A faceta do papel do professor como organizador está constantemente presente. Este aluno, assim como a primeira aluna, também se foca em partes do processo de prova, em subconjecturas, e perde de vista o objetivo geral. Na realidade, a prova final não é linear, mostrando níveis de prova, onde talvez esteja mais uma dificuldade dos alunos: linearizar uma prova. Assim, o professor precisa intervir para dar clareza às idéias, tendo como objetivo a resolução da atividade. Neste sentido, também, aponta para as propriedades que estão presentes pela construção da figura para que o aluno as leve em consideração, pois são também peças chave para o argumento que levará à justificativa da atividade proposta.

Para este professor a prova é parte importante para a compreensão. Segundo suas palavras na entrevista: “apenas trazer um conteúdo para alunos tal que ‘caia do céu’ não é minha posição, eu trabalho com a prova tal que os alunos realmente possam entender e aceitar o conteúdo”. Sua prática se mostra coerente com estas palavras, pois em todo o processo está preocupado com que o aluno compreenda o que está fazendo.

6.4 O PROFESSOR EM SEU PAPEL FORMATIVO COM AS PROVAS EM GEOMETRIA NUM AMBIENTE DINÂMICO

No âmbito desta pesquisa, o papel formativo do professor se volta para o pensar matematicamente, isto quando trabalha com provas em geometria num ambiente dinâmico.

Na matemática, esse papel formativo pode se apresentar em aspectos bem específicos como, por exemplo, criar no aluno a capacidade de síntese de um determinado conteúdo. Como já mencionado no capitulo 2, a capacidade de sintetizar é parte do processo do pensamento matemático avançado, saber combinar partes de tal maneira que se formem um inteiro (o que é mais do que apenas a soma das partes) precisa ser aprendido pelos alunos. Combinar uma série de conhecimentos sobre um objeto geométrico, para se ter um conceito definido a seu respeito, é parte do processo de aprendizagem que, sem o auxilio do professor, dificilmente será alcançado. Para tanto, é importante também usar diversas representações do objeto e fazer a “tradução” de uma representação para outra, o que também é parte do papel do professor, pois os alunos em geral se prendem a uma representação específica e se baseiam nela quando aparece tal objeto em uma situação problema. Isto se mostra na dificuldade dos alunos em descrever e/ou definir objetos geométricos, em geral, confundem a definição com as propriedades do objeto. Atualmente, a tecnologia, isto é, os diversos softwares, podem auxiliar nessa "tradução" de representações levando, inclusive, a auxiliar no processo de síntese.

Os ambientes dinâmicos de geometria permitem uma exploração de diversos aspectos de uma prova. Neste sentido, podem ser uma ferramenta útil nas mãos do professor para tentar levar o aluno para mais perto do pensamento matemático de um matemático, pois oferecem a possibilidade de manipulação, de investigação e de descoberta. Entre as características que aparecem e vem ao auxílio da prova podemos citar a visualização, as subconfigurações, e os invariantes que se mostram em meio ao movimento.

Portanto, não basta o professor apenas apresentar provas prontas, mas sim levar o aluno pelo processo todo de descoberta e construção de uma prova, para que o aluno compreenda e apreenda o raciocínio envolvido, se tornando apto para aplicá-lo em outras situações, estimulando as potencialidades da analogia e do pensamento analógico, ou seja, mais um aspecto do pensar matematicamente, ao invés de "decorar" algo pronto e acabado que não lhe é significativo. Isto implica em que o professor se torne um formador, forme o pensamento matemático do aluno, e não um "explicador de conteúdos". Num ambiente dinâmico, significa ainda que teria que sair de sua zona de conforto para encarar novas situações juntamente com o aluno, saindo de sua posição de detentor do conhecimento para o de mediador e orientador das atividades desenvolvidas pelo aluno. Neste sentido também, será elemento chave, pois terá que gerenciar um equilíbrio entre os elementos teóricos e empíricos que irão aparecer.

E é no território antes da prova final como produto que ocorre esse diálogo entre professor e aluno, é onde o professor pode assumir seu papel formativo explorando as diversas possibilidades que os ambientes dinâmicos oferecem. E nesse diálogo, que na maior parte do tempo é uma dialética de pergunta-resposta, é onde o professor tem de encontrar o equilíbrio entre os dois extremos do ensino: entre ensinar tudo o tempo todo, tirando a criatividade e a iniciativa do aluno, e deixar o aluno livre para seguir seu caminho, mas talvez desenvolvendo ações que repitam o que já tenha descoberto, não levando a novos conhecimentos. Assim, o professor deve saber quais perguntas fazer, perguntas que levem o aluno a compreender a prova que está fazendo, levando em conta as idéias por ele apresentadas.

Corroborando a idéia de Zabalza (2004) de que é no trabalho com os conteúdos que o professor pode vir a ter maior influência sobre a formação do aluno, e aplicando isto ao pensamento matemático, buscamos, através do estudo prático, desenvolver certas categorias, isto é, tipos de intervenções realizadas pelo professor durante o processo de prova num ambiente dinâmico. Tais intervenções aparecem na dialética pergunta-resposta, ou seja, em geral aparecem como perguntas realizadas pelo professor.

Num primeiro momento, percebemos três tipos de intervenções: (1) de caráter organizacional, (2) de caráter matemático, e (3) do uso específico do recurso tecnológico. No sentido de um caráter organizacional percebeu-se que os alunos muitas vezes percorriam por determinados caminhos e "perdiam a orientação" do objetivo final, assim o professor tinha que colocar o estado atual em um contexto mais amplo. Assim, por diversas vezes o professor teve que organizar as idéias do aluno e percebemos uma intervenção de cunho local ou então de cunho global:

Organização local: é quando o professor organiza as idéias do aluno dentro de um determinado momento, numa subconjectura que aparece na prova. Como por exemplo, na primeira atividade, a aluna 1 está buscando argumentos para provar igualdade e paralelismo de segmentos dentro da configuração da atividade:

106	17:32	P	De novo,você está fazendo uma simetria de ponto com quais pontos?
107	17:36	A	Com o ponto D.
108	17:38	A	É o ponto médio de AB.
109	17:40	P	Ok, e você obtém o ponto C'. E agora você quer argumentar que AC' é paralelo com BC, mas isso ainda não é bem o suficiente.
110	17:47	A	Porque AC são de mesmo tamanho e pela reflexão C'B também é.
111	17:57	P	Isso você teria que mostrar da mesma maneira como o anterior.
112	18:00	P	Quer dizer, lhe falta, você tem isso igual a isso, quer dizer, CD = DC', e o que lhe falta é um argumento que lhe diga que os pontos A e B também têm uma relação; para que você realmente possa dizer que os dois são paralelos. No momento você só sabe que os dois pontos têm a mesma distância para o ponto D.

QUADRO 6.26: ANÁLISE - PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 106-112
FONTE: A autora (2011)

Organização global: quando o professor busca colocar o aluno no contexto geral da prova, da atividade que está sendo desenvolvida. Em diversos momentos o aluno se concentra numa subconjectura e perde o foco da atividade como um todo.

Em geral, aparecem em formas de perguntas diretas, ao final de um argumento realizado para uma subconjectura como: Prof.1, atividade 1 (138) - *Então, você mostrou que AC' é paralelo a BC. Mas o que queremos mostrar mesmo?* Prof.1, atividade 1 (162) - *Certo, novamente com o argumento da reflexão em relação ao ponto. Exato, com isso você mostrou o que queria mostrar. Isso é útil pra você?* Ou aparecem no início da atividade, para organizar o que realmente deve ser provado: Prof.1, atividade 2, (373) - *O que você tem que mostrar? Então, vamos ver a primeira coisa que temos que considerar.* Com o Prof.2 podemos fazer as mesmas considerações, isto é, aparecer para organizar as idéias após a prova de uma subconjectura, como na atividade 1 (175) - *Bom, agora justificamos algumas coisas mas agora temos que voltar pro objetivo, na pergunta a ser respondida, do problema.* Ou então no início, atividade 1 (55) - *O que você quer mostrar?*, (62) - *E como você pode mostrar que o ponto A está sobre a reta B'C'?*

Já por intervenções de caráter matemático entendemos aquelas intervenções que tratam de conteúdos matemáticos e e da construção e/ou percepção de subconfigurações. Podemos, então, dividir as intervenções:

<u>Do esclarecimento de conteúdo matemático</u>: momentos onde o aluno não sabe ao certo um determinado conteúdo que aparece no processo de prova, levando o professor a dar/pedir esclarecimentos. Um exemplo disso é quando o Prof.1 e aluna 1 estão discutindo o que é necessário para que se prove, na segunda atividade, que se o quadrilátero externo é um retângulo então o quadrilátero interno é um quadrado:

396	34:47	A	Ahn H e G estão sobre j, e E e F estão sobre i... ahn… estas são as diagonais e estão perpendiculares entre si.
397	35:03	P	Um momento, quais diagonais?
398	35:06	A	As diagonais do quadrado EGH… EGFH.
399	35:15	P	Sim.
400	35:16	A	E isto seria exatamente o argumento para um quadrado, quando as diagonais estão perpendiculares entre si.
401	35:22	P	Um necessário ou suficiente?
402	35:29	A	Sim…
403	35:30	P	É necessário que em um quadrado as diagonais estejam perpendiculares entre si? É suficiente? Se em um quadrilátero as diagonais são perpendiculares entre si, então é um quadrado?
404	35:39	A	Não! Eu ainda tenho que mostrar que eles têm o mesmo comprimento, os lados.
405	35:45	P	Certo, isso ainda fica pendente, não é? Então…
406	35:49	A	Então o ângulo reto… (incompreensível)
407	35:50	P	E quando os lados tem o mesmo comprimento e as diagonais forem perpendiculares entre si, aí é um quadrado?
408	35:55	A	Aí é um quadrado.
409	35:56	P	Você tem certeza?
410	36:07	A	Sim…
411	36:08	P	Existem outros quadriláteros que possuem o comprimento dos lados iguais?
412	36:11	A	O losango.
413	36:12	P	E como estão as diagonais ali?
414	36:14	A	Também são perpendiculares. Droga. (risos)
415	36:18	A	Ok…
416	36:20	P	Quer dizer então que o argumento de perpendicularidade apenas não nos basta.
417	36:22	A	Não nos basta.

QUADRO 6.27: ANÁLISE - PROF.1 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 396-417
FONTE: A autora (2011)

De subconfigurações: As subconfigurações são, geralmente, elementos chaves no processo de prova. Muitas vezes é nas subconfigurações que aparecem as idéias de uma prova. É então, quando o professor leva o aluno a construir e perceber as subconfigurações durante o processo de prova, como na fala do Prof.1, atividade 1 (78) - *Bom, se você conectar os pontos B e C‘, que foi o que você fez com essa reta auxiliar, uma nova figura se formou. Podemos dizer algo sobre essa figura?* Falando do paralelogramo que se cria ali. Na mesma atividade, na seqüência, utilizando a mesma configuração, o professor reforça o uso de tal subconfiguração (170) - *Exatamente, nessa figura você mostrou que B‘C é paralelo a AB. Será que você pode mostrar mais coisas nesta figura?* Assim, busca com que a aluna reconheça o paralelogramo que se forma, podendo utilizar outras de suas propriedades. Quanto ao Prof.2, ele faz uso com ênfase das subconfigurações na atividade 2, inclusive colorindo as diversas figuras que aparecem, para levar o aluno a reconhecer tais figuras para buscar suas propriedades que auxiliem no argumento da atividade.

Quanto às intervenções de uso específico do recurso tecnológico, estas incluem a utilização, por parte do professor, das características do software, como o aspecto dinâmico – o arrastar – e, claro, a visualização para estimular o processo de prova e o pensar matematicamente nos alunos. Ou seja, tais intervenções estão relacionadas com questões de visualização e da descoberta de invariantes, ou ainda, se baseiam na movimentação, isto é, na possibilidade de visualização com o "arrastar" de objetos. Isso permitiu que afirmações e relações matemáticas fossem reconhecidas. E como conseqüência permitiu que os alunos seguissem para um próximo passo da prova. Dentre tais intervenções, destacamos então o uso específico:

<u>Da dinamicidade (o arrastar):</u> é quando o professor faz uso dessa característica específica dos softwares de geometria dinâmica, tentando levar o aluno ao reconhecimento de invariantes. Esse movimento, de arrastar, está mais presente na elaboração de conjecturas (ou subconjecturas) e para sua verificação. Na atividade 2, como a atividade é de cunho exploratório, isto é, permite várias configurações gerando diversas hipóteses-teses, a dinamicidade é fundamental para reconhecer invariantes e elaborar conjecturas e ambos professores exploram este aspecto.

Quanto à verificação, temos o exemplo do aluno 2, quando este faz uma subconjectura sobre os quadriláteros pipa internos que se formam na atividade 2. Na tentativa de encontrar argumentos que relacionem os quadriláteros internos formados com o quadrilátero original externo, ele lança uma idéia, mas devido à possibilidade dinâmica de verificá-la, a descarta logo em seguida, podendo ir em busca de outro caminho:

368	1:05:06	P	Você consegue fazer uma afirmação sobre o quadrilátero completo? Este é o objetivo, não é? Eu quero saber quais quadriláteros possuem uma circunferência inscrita , ou seja, nos quais os pontos de interseção das bissetrizes caem juntos.
369	1:05:26	A	Bom, eu poderia estabelecer primeiramente a conjectura, ahn que diz que esse quadrilátero, quer dizer o verde [EJDI] é igual, ou seja, congruente com este [IEKC], pelo menos parece congruente.
370	1:05:38	P	Experimente uma vez, se você movê-los se ainda permanece igual ou se modifica.
371			O aluno arrasta o ponto C, tentando manter E=F=G=H
372	1:05:50	A	Ah sim, não.
373	1:05:53	P	E? Conjectura parcial descartada imediatamente.
374	1:05:57	A	Já é bom assim [risos].

QUADRO 6.28: ANÁLISE - PROF.2 - EXTRATO DE DIÁLOGO # 368-374
FONTE: A autora (2011)

<u>Da visualização</u>: quando o professor faz menção específica da visualização em determinado momento. No entanto, em geral vem junto com a ênfase em sub-

configurações e/ou da dinamicidade. Como por exemplo, o Prof.2, na atividade 2 pede para que o aluno crie os triângulos que estão considerando congruentes, dentro dos quadriláteros pipa que se formam, para que fiquem visíveis, tentando, assim, levar o aluno a “enxergar” a relação que existe ali. Em um outro momento, na seqüência, o professor tenta retomar o que foi descoberto até o momento, pedindo que o aluno observe o que eles já possuem de informação (380) - *Para chegar lá você tem que simplesmente experimentar de alguma maneira, olhar de novo o que você já descobriu agora.* Incluindo também, a dinamicidade à dis posição para tal.

Assim, têm-se então as seguintes categorias de intervenção do professor:

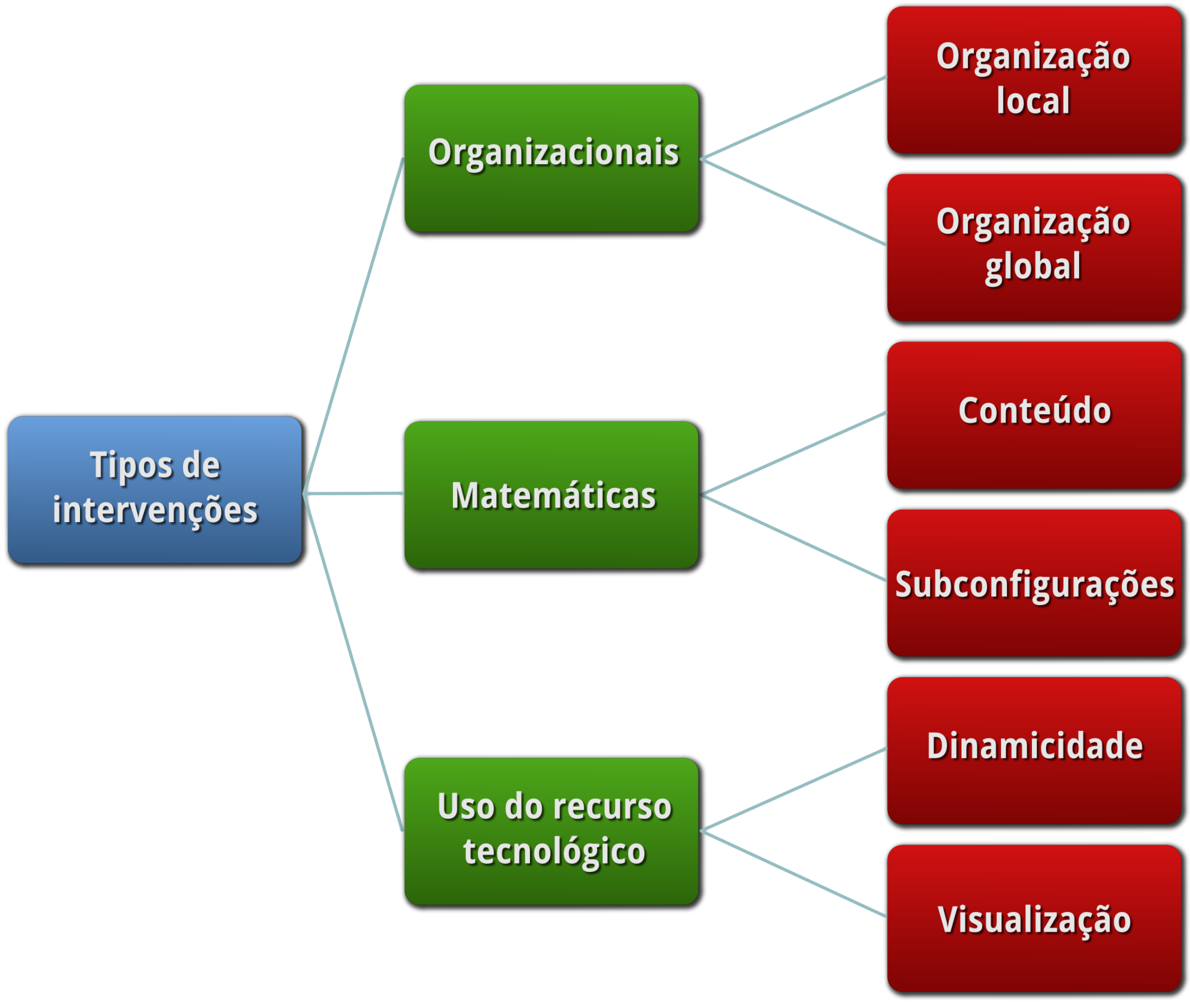


FIGURA 6.10: DIAGRAMA DE TIPOS DE INTERVENÇÕES DO PROFESSOR
FONTE: A autora (2011)

Para concluir, se nos perguntarmos, então, qual a diferença do papel do professor, a respeito do aluno, com recursos tecnológicos e sem eles, podemos perceber que com os recursos tecnológicos, a própria maneira de pensar do aluno se modifica. Os softwares vão fazer parte do novo pensamento matemático do aluno, são, portanto, extensões de seu pensamento. Isso nos remete à reorganização do pensamento apresentada e estudada por Borba e Villarreal (2005), em seu livro *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Os autores citam o trabalho de Tikhomirov (1981[19], apud BORBA E VILLARREAL, p.11, 2005) que discute como o computador afeta a cognição humana e assim pode também mudar a educação. Neste sentido, descartam o computador como substituto do ser humano e vão além, afirmam que o computador também não é um mero suplemento para o homem, mas faz parte do seu pensamento, isto é, é uma extensão do seu pensamento e pode, portanto, fazer parte também do desenvolvimento do pensamento matemático.

Assim, o professor se vê diante da necessidade de lidar com essa nova forma de pensar matematicamente que envolve processos próprios da geometria dinâmica como a dinamicidade. Precisa então estar ciente dessa nova forma de pensar para que possa executar seu papel de formador.

19 Tikhomirov, O.K. The psychological consequences of computerization. In: The Concept of Activity in Soviet Psychology, J. V. Wertsch, ed., M.E. Sharpe Inc, New York, p.256-278, 1981.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi buscar compreender o novo papel do professor de ensino superior frente às tecnologias quando trabalha com provas em geometria num ambiente dinâmico. Papel este que não é mais o de detentor do conhecimento, mas deveria ser a de um mediador, isto é, é desejável que seja, e, neste sentido, pode colocar a ênfase em seu papel de formador: formador do pensamento matemático. Para tanto, percebeu-se a necessidade de discutir primeiramente o que é este pensar matematicamente, como se constrói o conhecimento geométrico e o que são estes ambientes de geometria dinâmica para então poder falar do papel do professor.

Assim, apresentou-se uma discussão sobre o que é o pensar matematicamente e quais são os processos envolvidos. Enxergando a matemática então como uma atividade, pode-se falar de prova como um processo, um processo de compreensão. Neste sentido é no território antes da prova formal como resultado que alunos se engajam em atividades que representam o pensar matematicamente, é onde podem fazer descobertas e investigações, conjecturando e buscando idéias para a realização de provas.

Isto se aplica também ao campo específico da geometria, onde o conhecimento é construído envolvendo aspectos visuais além de teóricos. E no processo de prova em geometria, a competência para o tratamento de figuras que dão suporte à argumentação é um aspecto fundamental (GRAVINA, 2001, p.194). Neste sentido, os ambientes de geometria dinâmica vêm ao auxilio para tentar sanar algumas das dificuldades encontradas pelos alunos. O arrastar, isto é, as figuras dinâmicas e não mais estáticas, permitem assim uma exploração de classes de figuras e não de casos específicos, proporcionando ao aluno a possibilidade de fazer considerações sobre relações e não apenas sobre os objetos em si.

Tendo em vista este cenário, foi realizado um estudo prático para buscar então compreender o papel do professor de ensino superior quando trabalha com provas em geometria num ambiente dinâmico. Na análise dos dados foi possível identificar que enquanto o professor faz uso das potencialidades do software suas intervenções são direcionadas em dois sentidos: de cunho organizacional e de cunho matemático. Ou seja, não basta o professor ter domínio do conteúdo matemático, ele precisa estar apto a guiar o aluno no processo de prova, e isto exige uma faceta de organizador: auxiliar o aluno a organizar suas idéias para que este chegue a uma prova como resultado. Quanto às suas intervenções de cunho matemático, embora tenhamos colocado algumas categorias, estas dificilmente aparecem separadamente. Formam assim uma rede, unindo aspectos da dinamicidade dos softwares, do conteúdo matemático, especificidades da construção do conhecimento geométrico (como as subconfigurações) e tudo isto aliado à visualização, potencializada aqui também pelo software.

Percebe-se, portanto, a importância do território antes da prova, onde o diálogo entre professor e aluno acontece, onde a exploração e a descoberta têm seu espaço e, portanto, onde o pensar matematicamente ocorre de maneira mais explícita. Tendo como exemplo esses dois professores, que, embora tenham trabalhado com as mesmas atividades, tiveram cada um a sua maneira de desenvolvê-la, percebemos que ambos se engajam num diálogo com os alunos, buscando, através de perguntas, guiá-los na tentativa de chegarem a uma justificativa teórica do problema colocado. Ambos professores colocaram em sua entrevista que o pensar matematicamente tem mais a ver com habilidades, com a maneira de lidar com objetos matemáticos e suas relações, de ter a capacidade de argumentar, e isto se mostra em sua maneira de agir, durante o processo de prova. Quanto à contribuição das tecnologias para o ‘pensar matematicamente’, neste caso o software de geometria dinâmica, ambos os professores concordam que seu maior valor está nos invariantes, isto é, na possibilidade do movimento dos objetos. Os professores exploram isto durante a experiência, mostrando ciência deste fato e coerência com sua fala.

Durante a pesquisa surgem questões que necessitariam de um estudo mais elaborado, que nos dão subsídios para futuras pesquisas. Como a dificuldade dos alunos em se concentrar na prova como um todo, eles se focam em partes da prova, em subconjecturas, daí a necessidade do professor agir como organizador global. Isto pode decorrer do fato de que a prova não é linear, ou seja, a prova não é construída de forma linear como aparece na escrita final. É uma rede de idéias e argumentos que tem de ser organizados.

Consideramos, neste trabalho, a prova como um processo de compreensão, incluindo o território antes da prova para o desenvolvimento do pensamento matemático. Assim, outro aspecto que poderia ser aprofundado é o fato de que, se esses softwares fazem parte desse novo pensamento matemático dos alunos, isto é, são extensões de seu pensamento, o próprio conceito de prova poderia ser ampliado.

Temos ciência de certas limitações do trabalho, no sentido de ser experimento de ensino realizado em ambiente de laboratório e, portanto, requer cautela para poder ser generalizado. No entanto, ele nos traz subsídios para compreender melhor o papel formativo do professor de ensino superior neste cenário. Esperamos assim, que contribua para que professores e futuros professores possam refletir sobre seu papel formativo, tendo ciência de suas várias facetas como mediador e orientador das atividades dos alunos, contribuindo assim para que o aluno adquira a capacidade de pensar matematicamente.

REFERÊNCIAS

ALEGRE, L. M. P. **Utilização das tecnologias da informação e da comunicação na prática docente numa instituição de ensino tecnológico**. Tese de doutorado, Universidade de Campinas, Campinas, 2005.

ALMEIDA, M. E. B. **Informática e Formação de Professores.** Coleção Informática para a mudança na Educação. MEC, 1999.

ALMOULOUD, S. A. Prova e Demonstração em Matemática: Problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In:30ª Reunião Anual da Anped, 2007, Caxambu. **Anais** … Caxambu, 2007.

ALMOULOUD, S.; MELLO, E. G. S. Iniciação à Demonstração Apreendendo Conceitos Geométricos. In:23ª Reunião Anual da Anped, 2000, Caxambu. **Anais** … Caxambu, 2000.

ASSIS, A. E. S. Q.; CASTANHO, M. E. L. M. Educação, Inovação e o Professor Universitário. **Revista E-Curriculum**, São Paulo, v.2, n.3, dezembro, 2006.

BALACHEFF, N. **Procesos de Prueba em los alumnos de matemáticas.** Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BALL, D, L. What is Mathematical Thinking? **Mathematics Teaching**, n.181, p. 17 – 19, dezembro 2002.

BEUCHOT, M. Abducción y Analogía. **Analogía Filosófica** XII/1, p. 57-69, 1998.

BORBA, M.C. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: 27a Reunião Anual da Anped, 2004, Caxambu. **Anais**... Caxambu, MG, 2004.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Eduacação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation.** Mathematics Education Library, USA: Springer, 2005.

BRASIL. LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Título V, Capítulos IV e VI.

BRITO, G.; PURIFICAÇÃO, I. **Educação e novas tecnologias – um repensar.** Curitiba: IBPEX, 2006.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory: A practical guide through qualitative analysis.** London: Sage, 2006.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DORMOLEN, J. van. Learning to understand what giving a proof really means. **Educational Studies in Mathematics**, n. 8, p 27-34, 1977.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1991, p.25 - 41.

DREYFUS, T. Why Jonhy can't prove. **Educational Studies in Mathematics**, n.38, p 85 -109, 1999.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive Point of view. In: C. Mammana e V. Villani (editores), **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: PME 21, 1999, México. **Anais** … México: 1999, Vol.1, p. 3-26.

DUVAL, R. **Semiosis Y Pensamiento Humano – Registros Semioticos y Aprendizajes Intelectuales**. Colombia: Universidad del Valle, 1999.

EDWARDS, L. D. Exploring the territory before proof: students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, n.2, p. 187 – 215, 1997.

FERNADES, C. M. B.; BASTOS, A. R. B. A Formação pedagógica do professor universitário no espaço da pós-graduação. **Revista Travessias**, numero 1, 2007.

FETISSOV, A. I. **A demonstração em Geometria.** Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

FISCHBEIN, E. **Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach**. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academics Publishers, 1987.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, 24 (2), 1993. Tradução para o espanhol por Victor Larios Osorio, México, 2002.

FLORES, C. R. **Geometria e Visualização: Desenvolvenedo a competência heurística através da reconfiguração**. Dissertação de Mestrado, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 1997.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Mathematics Education Library. Netherlands: Kluwer Academics Publishers, 1991.

GARCEZ, R. O. **O uso da tecnologia de informação e comunicação, no ensino,**

por professores universitários. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2007.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HANNA, G. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. **Educational Studies in Mathematics**, n.44, p. 5 – 23, 2000.

HERSH, R. Proving is convincing and explaining. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, n.24, p.389 - 399, 1993.

HÖLZL, R. How does ‘dragging’ affect the learning of geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, n.1, p.169 -187, 1996.

HOYLES, C; JONES, K. Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: C. Mammana e V. Villani (editores), **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, p. 121-128, 1998.

JONES, K. Providing a foundation for deductive reasoning: student’s interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, n. 44, p.55-85, 2000.

JUNQUEIRA, M. Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferramentas computacionais. Projeto Minerva. **Revista Quadrante**, Vol 2, n. 1, 1993.

JUNQUEIRA, M. Exploração de Construções Geométricas em Ambientes Computacionais Dinâmicos. **Revista Quadrante**, Vol.5, n1, 1996.

KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. **Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching and Research.** The Mathematical Association of America, 1997.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Artihmetic, Algebra, Analysis.** Nova York: Cosimo Classics, 2007.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomëtre. **Em Aberto**, Brasília ano 14, n.62, 1994.

MARIN, D. **Professores de Matemática que usam a Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2009.

MARIOTTI, M. A. Introduction to proof: the mediation of a Dynamic Software Environment. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, n. 44, p. 25 – 53, 2000.

MASETTO, M. T. Mediação Pedagógica e uso da Tecnologia. In: Moran, J. M., Masetto, M. T., Behrens, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** 12 ed, Campinas: Papirus, 2006, p. 133-173.

MOORE, R. C. Making the transition to formal proof. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, n. 27, p. 249 – 266, 1994.

MORAN, J. M. Ensino Aprendizagem Inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: Moran, J. M., Masetto, M. T., Behrens, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** 12 ed, Campinas: Papirus, 2006, p. 11 - 66.

MORETTI, M. T. ; FLORES, C. R. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT**, Universidade Federal de Santa Catarina, v.11, p. 5 - 13, 2006.

OLIVERO, F. **The proving process within a dynamic geometry environment.** Tese de Doutorado, University of Bristol, Inglaterra, 2002

PERRENOUD, P. **Dez Novas Competências para Ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PURIFICAÇÃO, I. C. **Cabri-Géomètre na Formação continuada de Professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental: Possibilidades e Limites**. Tese de Doutorado, PUCSP, São Paulo, 2005.

RAV, Y. Why do we prove theorems? **Philosophia Mathematica III**, 7, 5-41, 1999.

ROLKOUSKI, E. **Demonstrações em geometria: Uma descrição de processos de construção, utilizados por alunos de licenciatura em matemática, em ambiente informatizado.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2002.

ROTH, J. **Bewegliches Denken im Mathematikunterricht.** Würzburg: Verlag Franzbecker, 2005.

SANGIÁCOMO, L. **O processo de mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica – uma Engenharia Didática com auxílio do Cabri-Géomètre**. Dissertação de mestrado, PUC-SP, São Paulo, 1996.

SOUZA JR., A. J.; SILVA, R. M. S. Formação de docentes universitários e tecnologia de informação e comunicação: análise de uma experiência. In: I Colóquio Internacional sobre o ensino superior, 2008, Feira de Santana. **Anais** … Feira de Santana,

TALL, D. The nature of mathematical proof. **Mathematics Teaching**, n. 127, p. 28-32, 1989.

TALL, D. The Pshycology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 3 – 24.

VILLIERS, M. D. de. Papel e funções da demonstração no trabalho com Sketchup. **Educação e Matemática**, n° 62, março e abril de 2001.

WATSON, A. MASON, J. **Questions and prompts for Mathematical Thinking**, ATM.

WEIGAND, H-G; WETH, T. **Computer im Mathematikunterricht – Neue Wege** zu **alten Ziele.** Heidelberg-Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 2002.

ZABALZA, M. A. **O ensino universitário: seu cenário e seus protagonistas**. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2004.

ANEXOS

Apresentam a transcrição dos vídeos do estudo prático realizado para a pesquisa assim como a transcrição das entrevistas.

Entrevista – Prof. 1

1. **Há quanto tempo você é professor de matemática em geral?**

   Ok, eu sou professor desde 2004, há seis anos então, estive cinco anos na escola e estou há um ano na universidade.

2. **Há quanto tempo você ensina na Universidade?**

   Há um ano.

3. **Há quanto tempo você usa softwares de Geometria Dinâmica?**

   Na verdade, desde o início, no entanto a infraestrutura na escola, no Ginásio, era ruim e assim utilizava Softwares de Geometria Dinâmica algumas vezes. Não na sala de aula, mas num laboratório.

   Então, enquanto estava na escola utilizou pouco o computador.

   Exatamente, só no laboratório.

   Infraestrutura, você quer dizer que não havia computadores para todos?!

   Sim, havia computadores para todos, mas tínhamos que ir com a turma numa sala extra, num laboratório. Ou seja, trabalhar com o computador e projetor na sala de aula era um transtorno porque sempre tínhamos que levar tudo, não havia projetor na sala de aula, assim utilizei relativamente pouco dentro da sala de aula.

   E na Universidade?

   Eu tenho apenas cinco horas de ensino na universidade e por isso apenas duas turmas, numa delas também trabalhei com o Geogebra, mas no geral ainda não muito.

   [Ps.: esse professor está como assistente na universidade, trabalhando em seu doutoramento, e por isso com uma carga pequena de ensino.]

4. **Qual o significado de prova em geometria pra você? O que constitui uma prova?**

   Primeiramente uma prova está aí para justificar uma afirmação; provar é partir de determinadas suposições, hipóteses geométricas, e chegar a uma asserção através de conclusões lógicas.

5. **O que você entende por compreensão em matemática, em que medida uma prova contribui à compreensão, e onde você colocaria a intuição?**

   Então, compreensão se refere, em minha opinião, a Conceitos; isto é, em primeiro lugar antes que eu possa entender uma afirmação, a fim de prová-la, tenho que ter compreendido os conceitos que aparecerem; compreender significa, neste contexto, saber definir propriedades; e finalmente então, no contexto geral da Afirmação ter compreendido os conceitos isoladamente para que eu possa começar a provar. Isso quer dizer, então, que compreensão é base para uma prova, e intuição desempenha um papel de... da intuição resultam as idéias de provas. Intuição significa, a título de exemplo, relacionar conceitos que talvez inicialmente não estejam num mesmo contexto, para no final ter uma idéia para uma prova.

6. **Qual o significado da palavra “dinâmico” em Geometria Dinâmica?**

   Então, dinâmico significa, em primeiro lugar, referente à Geometria, que eu possa modificar configurações dadas, (houve uma curta interrupção – do chefe dele)

   Bom, então, como eu havia dito, em primeiro lugar a dinâmica se refere à Geometria, às figuras com as quais se trabalha, e no contexto do ensino da Matemática claro que na vantagem de poder observar as configurações não de maneira estática, mas sim dinâmica e com isso, por exemplo, poder descobrir invariantes diante do movimento.

7. **Vê alguma diferença entre conhecimento matemático e pensamento matemático, isto é, entre saber matemática e pensar matematicamente?**

   Bom, em primeiro lugar eu iria definir como saber matemática um conhecimento que se refere a algoritmos e certas conclusões. Ou seja, alguém pode ver um exemplo, ter aprendido como se faz, mas isso não quer dizer necessariamente que tem algo a ver com maneiras de pensar matematicamente. Ou seja, o uso de algoritmos matemáticos pode ser descrito como saber matemática, ou conhecimento matemático, e pensar matematicamente se refere antes a uma certa maneira de lidar com objetos matemáticos e suas relações.

8. **Que tipo de contribuição as novas tecnologias podem oferecer para ajudar alunos a pensar matematicamente?**

   Bom, aí acho o conceito mencionado antes, o conceito de Invariantes, muito importante, porque para chegar a uma idéia para uma prova geralmente trata-se de reconhecer quais medidas permanecem constantes e aí está a vantagem da Geometria Dinâmica, pois tais coisas, muitas vezes, apenas ficam visíveis pelo movimento. Ou seja, apenas pela manipulação dinâmica de uma configuração que em geral reconheço quais medidas são ou permanecem constantes; e isso pode, em tais circunstâncias, fornecer uma idéia para uma prova. Isso pode ajudar alunos com mais dificuldades a chegar a ter a idéia de olhar para invariantes enquanto alunos que estão habituados a pensar matematicamente talvez já de início pensem a respeito de quais medidas se mantém constantes.

9. **O visual (não restrito à percepção imediata) é uma forma de conhecimento em geometria, ou conhecimento precisa de um fator discursivo (linguagem verbal)?**

   Bom, a pergunta agora é se figuras em si… e a descrição das figuras?!

   Exato, se figuras também podem ser uma forma de conhecimento ou sempre deve haver algo escrito. Ou seja, pode-se trabalhar apenas com figuras como conhecimento ou sempre se precisa de algo escrito junto?

   Bom, pelo menos é assim que, quando se observa figuras sempre se estabelece associações com alguma formulação verbal. Quer dizer, claro que existem, quando penso em exemplos de prova em seqüência que acontecem nos números figurados, já existe uma prova, entre aspas, apenas observando a figura geométrica, mas ao final, também se coloca contextos num nível verbal mesmo que estes não estejam escritos lá. Ou seja, eu diria que não necessariamente um texto escrito deve ser apresentado para que se possa entender uma figura ou a idéia contida na figura, mas, ao final, a compreensão mental da figura talvez se dê num nível verbal.

Entrevista – Prof. 2

1. **Há quanto tempo você é professor de matemática em geral?**

   Bom, no geral...

   Exato, quer dizer, não só na universidade...

   Então, depois da Formação, depois do Referendariat*, estou agora há 5 anos ativo como professor. Dois anos e meio na escola e dois anos e meio na universidade.

2. **Há quanto tempo você ensina na Universidade?**

   Então, dois anos e meio.

3. **Há quanto tempo você usa softwares de Geometria Dinâmica?**

   Na verdade, já utilizava durante a Formação, diria então há 7 anos. Na escola ativo como professor só há 5 anos. Não, engano meu, no período de Referendariat, na Formação, também. Entao há 7 anos.

   Referendariat são aqueles dois anos de prática antes da segunda prova do estado. Referendariat sind die zwei Jahre Praktikum bevor den zweiten Staatsexamen.

   Exato. E lá já se leciona e ali eu também já trabalhei com softwares de geometria dinâmica.

4. **Qual o significado de prova em geometria pra você? O que constitui uma prova?**

   Bom, pra mim, tem um papel importante, também para a compreensão, quero dizer, apenas trazer um conteúdo para os alunos, tal que "caia do céu" não é a minha posição, mas eu trabalho com a prova e sua dedução de tal forma que os alunos possam realmente entender e aceitar o conteúdo.

5. **O que você entende por compreensão em matemática, em que medida uma prova contribui à compreensão, e onde você colocaria a intuição?**

   O que quer dizer compreensão?

   Exatamente o entender, na verdade entra em sua resposta anterior, compreensão como entender.

   Ok, então, apenas... [lê a pergunta novamente, murmurando até o final]

   Onde você colocaria a intuição, também entra em algum lugar.

   Bom, o que se quer dizer aqui com intuição?!

   Então, na verdade, compreensão em Matemática, em qual sentido contribui,

   Bom, não entendo a intuição aqui... Sem prova formal agora apenas quando aceitamos que...

   Sim, pra a compreensão em matemática, a intuição também tem seu papel? Na prova também...

* Referendariat = período de dois anos de prática obrigatória logo após a formação, necessários para realizar a segunda prova do estado para receber o diploma de professor.

Bom, em qual sentido devemos ver a prova então ou... não entendo.

Sim, quer dizer, o que você entende como compreensão em matemática, se a prova também contribui para isto, também entra em sua resposta anterior...

Bom, a primeira parte então, agora para compreensão, já vejo a prova ahn também como... como uma parte, mas não apenas isso, mas também no campo maior, agora para compreensão para a Matemática, o que faz diferença ao meu ver, é saber trabalhar com as diversas Afirmações e Definições e fazer relações entre elas. Quer dizer, não apenas a origem das afirmações em si, mas as contas também, entre aspas. Ou seja, a aplicação das afirmações/teoremas tem pra mim, na verdade, um papel maior do que a prova. A prova eu vejo como, um melhor entendimento sobre as afirmações, mas depois vem essa fase de treino/exercício com as afirmações e trabalhar com elas.

Então a prova seria uma parte da...

Da compreensão. Mas para mim, antes uma pequena parte, para a compreensão em si da Matemática. Até pode ser que alguém tenha uma boa compreensão da matemática sem talvez saber provar. Não parei para pensar sobre o assunto, mas muitas vezes é assim que alguns alunos na escola são muito bons em matemática, mas não sabem muito sobre essa parte formal. Ou nem conhecem a origem; como Pitágoras ou Tales ou qualquer outra coisa, e não sabem mostrar de onde vem, mas sabem aplicar muito bem. E estes alunos são bons, eles têm uma boa compreensão da matemática? Se eles são capazes de aplicar isso em atividades, mesmo não sabendo demonstrá-lo? É uma questão em aberto, não é?

E a intuição tem algum papel? Não sei se é a palavra certa em alemão?!

Sim, temos a palavra intuição em alemão, mas não sei se cabe aqui. Quer dizer, quando se tem um sentimento do que se deve fazer...

Exato. Especialmente na compreensão na prova, tem um papel essa...

Essa intuição... provavelmente pode ser treinada através da prova, de tal maneira que se veja seqüências de provas e com isso consiga ter suas próprias idéias para futuras provas ou [incompreensível] também através de muitas atividades e/ou exercícios, aí também é possível treiná-las. Como era mesmo, se agora isso é importante?

Sim, se ela também tem um papel.

Bom, alguns já podem ter essa intuição, o que é bom, provavelmente precisa-se dela mesmo, ou, eu talvez não a chamaria de intuição mas sim flexibilidade, ou criatividade. Para poder utilizar o conhecimento fornecido de maneira correta. Por que, intuição soa como... “uma carta na manga”...

6. **Qual o significado da palavra “dinâmico” em Geometria Dinâmica?**

Bom, dinâmico, primeiramente a possibilidade de modificar, mas também didaticamente oferece mais possibilidades de fazer modificações visíveis; não apenas figuras isoladas, quer dizer, exemplos que podemos mostrar apenas de maneira estática, mas também mostrar as transições. Para que se possa mostrar a transição do geral, de figuras gerais para casos específicos, isso eu entendo como dinâmico, que realmente se possa, sim... realizar modificações de tal maneira que... tal que... como se diz essa, quando não mudam...

Invariantes?

Exato, reconhecer invariantes e medidas variáveis, que essas possam ser reconhecidas através disso. Isso nunca vale para figuras estáticas, não se pode tornar essas invariantes visíveis, e aí esses invariantes e as variantes, sim, variáveis podem ser muito bem mostradas com os softwares de geometria dinâmica. Ou bem na prova, é válido em geral, em tudo.

7. **Vê alguma diferença entre conhecimento matemático e pensamento matemático, isto é, entre saber matemática e pensar matematicamente?**

Hm... difícil, quer dizer, um seria compreensão matemáticas e o outro o pensamento matemático, ou como?

Talvez conhecimento matemático e pensamento matemático...

Bom, conhecimento matemático ahn eu diria que é o saber de afirmações e definições e a aplicação das mesmas; e depois os algoritmos, que você simplesmente possa utilizá-los. E pensamento matemático, eu diria, cai mais no sentido de saber resolver problemas, ou descobrir conteúdos, encontrar idéias para provas, quer dizer, mais assim habilidades, mais no processo do conhecimento. Assim talvez eu poderia diferenciaá-los. Ou seja, conhecimento é aquilo que pode ser passado adiante e aplicado e pensamento matemático eu definiria mais como habilidade, como capacidade de argumentar, de provar, de descobrir e resolver problemas. Assim eu diria talvez.

8. **Que tipo de contribuição as novas tecnologias podem oferecer para ajudar alunos a pensar matematicamente?**

Todas as novas tecnologias ou...

Bom, pode ser mais os softwares, não no geral. Então, eles auxiliam os alunos a pensar matematicamente?

Então, com as novas tecnologias simplesmente temos melhores possibilidades de visualizar determinados conteúdos e trabalhá-los de maneira dinâmica. Se isso melhora o pensar matematicamente, eu acho que sim. Auxilia na compreensão, não necessariamente no conhecimento, isso se pode continuar a acumular de livros, mas para a compreensão, para o pensar matematicamente, acho que as novas tecnologias tem um papel.

Sim, e como... como elas podem auxiliar... por exemplo... que tipo de contribuição, ajudam, então como...

Bom, primeiro, que os alunos podem, por exemplo, testar determinadas considerações com um sistema de geometria dinâmica e verificá-las. O que também não está exatamente num sistema de geometria dinâmica, mas cabe para as novas tecnologias, seria a possibilidade de o computador dar confirmações, quer dizer, que determinadas idéias possam ser “traduzidas” e que o computador possa fornecer a resposta se está correto ou não. Isso também ajudaria para a compreensão, para considerações matemáticas. Bom, como mais poderíamos fazer... para melhorar o pensar matematicamente. Teria que se dispor de um certo tempo como professor para eventualmente formular determinadas perguntas e colocar à disposição um tipo de campo de experimentações. Por exemplo, com o Geogebra, ou outro sistema de geometria dinâmica, onde determinadas considerações são fornecidas e, assim, algumas situações são identificadas, ou mesmo experimentar nas atividades, que se possa colocar algo assim à disposição. Essa tarefa nem seria possível com papel, quer dizer, encontrar determinadas situações antes mesmo de começar a prová-las. Então, com isso com certeza se podem melhorar tais formas de pensar. Mas agora teríamos que pensar também que quando tais novas tecnologias são empregadas podemos utilizá-las para melhorar tais formas de pensar, mas podíamos pensar o contrário também e tentar ensinar essas formas de pensar com um ensino convencional. Talvez chegaríamos nos mesmos resultados, também poderia ser. Não? Sempre se pensa, ok, o que fazer com o software de geometria dinâmica? Como posso empregá-los. E eu acredito, sim, que se pode melhorar esse pensar matematicamente, mas optamos então, com um software. Como fica se quero melhorar esse pensar matematicamente sem trabalhar com um software, e então comparo se talvez num deles... sem software temos a dificuldade de freqüentemente ter que imaginar a situação e isso não é necessário com software. Mas pode ser que aqueles que passam por essa dificuldade, e tem que imaginar a situação, com isso compreendem melhor que aqueles que recebem as figuras.

Poderia ser sim...

Só uma idéia...

Sim, ok.

9. **O visual (não restrito à percepção imediata) é uma forma de conhecimento em geometria, ou conhecimento precisa de um fator discursivo (linguagem verbal)?**

Bom, não entendo bem a pergunta agora, existem diversos níveis, o nível simbólico, o nível icônico, icônico onde temos figuras, ou simbólico onde ainda trabalhamos com variáveis e estas são agora...

Sim, nesta icônica, com as figuras, também é uma forma de conhecimento, ou sempre temos que ter algo escrito junto. Poderíamos trabalhar apenas com o visual?

Bom, uma forma de conhecimento já é quando se tem contexto na cabeça. E em grande parte já se trabalha com figuras. E se agora imagino determinados conteúdos, exatamente na geometria, aí não repenso isso com símbolos ou com álgebra ou outros sinais quaisquer, mas na verdade tenho figuras em mente, que se modificam. É sobre isso agora ahn figuras no papel ou...

Sim, os dois, mas poderia ser dinamicamente também, no software, ou... pode-se na verdade trabalhar apenas com o visual ou a parte escrita também tem que estar presente...

Então, eu imagino assim agora, que talvez com determinados conteúdos assim no computador, talvez foram descobertos, e depois devem ser assegurados ainda. Em seguida, o aluno deve anotar de alguma maneira. Ele poderia então ou desenhar, como figura, talvez com cores de alguma maneira, para que o conteúdo fique marcado, ou pode decidir fazer de maneira simbólica, por exemplo, no teorema de tales onde surgem essas relações... hm e se é a variável decisiva se isso é conhecimento, não é? Bom, em todo caso, eu diria que é conhecimento, também provavelmente sempre está presente antes da utilização ou antes das “contas”... essas figuras... Mas elas deveriam ser abstraídas mesmo assim, para que se possa transferi-las para outras coisas. Para que se possa reconhecer esse conteúdo em atividades do dia-a-dia ou em outras configurações ou em outras atividades propostas, esse processo de abstração deve ser realizado. Portanto, permanecer apenas no nível visual, acho que é muito pouco. Para que possa ser, sim, transferido.

Atividades – Prof. 1

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
1	00:03	Então, primeiro vou desenhar o triângulo.		
2	00:07	Eu posso utilizar todas as funções do Geogebra, certo?	Sim, você pode	
3	00:19	Então vou desenhar o ponto médio do segmento.		
4	00:26	Do segmento AB, ... e corto o ponto ainda		
5	00:44	Aí faço o mesmo com AC		
6	1:00			A aluna lê novamente o enunciado para entender
7	01:22	Ok, então vou esconder estas retas.		Se referindo as mediatrizes.
8	01:40	Pronto, agora preciso do ponto simétrico do B, C, D, E...		
9	01:48			Procura entender a seqüência das letras.
10	01:56	Ok, então vou traçar uma reta por...		
11	01:59		Você também pode utilizar a ferramenta simetria em relação a ponto	
12	02:07	Estamos vendo isso agora só.		Se refere ao que estão vendo em sala de aula.
13	02:17	Onde está? Aqui, provavelmente, certo?		
14	02:24	Ali, simetria em relação a ponto.		Não sabe ao certo como construir usando essa ferramenta
15	02:33		Você tem que clicar primeiro no ponto, depois do centro de simetria.	
16	02:39	cool	Isso.	
17	02:44			Faz análogo para o outro lado.
18	02:46	Ok, ...		Observa a construção.
19	02:56	Então, conjectura é de que estão sobre uma reta.		
20	02:58		Isso você já pode escrever.	Se refere a escrever no papel a sua conjectura.
21	03:04	Conjectura: B’AC’ sobre uma reta.		
22	03:18			Move os vértices do triângulo para confirmar sua conjectura
23	03:22	É, parece que sim.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
24	03:25		Então, pela dinamicidade confirma primeiramente a conjectura.	
25	03:31	Certo, e agora tenho que justificá-la...		
26				Observa a construção
27	03:51	Agora gostaria de traçar outras retas.		
28	03:54		É uma boa idéia.	
29				Constrói as retas que passam pelos pontos simétricos e analisa a figura
30	04:29	Então, você rebate o ponto D em cima da reta de simetria obtendo o ponto simétrico, assim praticamente temos uma circunferência em volta; a interseção é o ponto C‘, que tem a mesma distância que o ponto ...		
31	05:05	Isso… Daí pegamos a reta que passa por A e C‘,	Certo…	
32	05:13	Então, deveríamos simplesmente testar se esse circulo aqui [com centro em E] também passa por B‘... que, obviamente, passa.		
33	05:30		Então, você expressou uma conjectura, agora você deveria talvez pensar o que você realmente deve mostrar.	
34	05:39	Tenho que mostrar que B‘, A e C estão sobre uma reta... isso, estão sobre uma mesma reta.		Apaga as circunferências que acabou de traçar.
35	06:07	A, E, C estão sobre uma reta, e A, D, B…		
36	06:25		Como você poderia mostrar que três pontos estão sobre uma mesma reta, essa seria primeiramente a idéia que mostraria o caminho a seguir.	
37	06:45	Essa é uma boa pergunta (risos). Eles não formam um triângulo…	ok…	
38	06:56	Não possuem nenhuma distância para a reta…		
39	07:00		Em relação à qual reta?	
40	07:01	Então, B‘ não tem nenhuma distância para... eu vou nomeá-la de alguma coisa...		
41	07:06		Acho que é a reta *h*	
42	07:07	Ah, ok.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
43	07:14	Ops, o que foi isso?!		Ao tentar nomear a reta, a aluna acidentalmente ativa o zoom e a figura some da tela… o professor pega o mouse e faz a figura retornar na tela.
44	07:30		Você acidentalmente ativou o zoom.	
45	07:36	Então, se A e C... supondo que A e C‘ estão sobre a reta, tenho que mostrar que B‘ também está sobre essa reta.		
46	07:43		Certo, isso é bom. Quer dizer, podemos pegar dois pontos, pelos quais conseguimos com certeza passar um reta; aí, naturalmente, se precisa mostrar que o terceiro ponto também está sobre a reta.	
47	07:54	aham	Então, é neste momento uma primeira idéia.	
48	07:59	Certo, então A e C‘ são pontos de partida da reta, e agora...		
49	08:20		Você começou antes a desenhar retas adicionais que poderiam ser de ajuda, talvez existem outras retas auxiliares que poderiam lhe trazer uma idéia.	
50	08:40	Eu poderia mostrar que duas retas se cortam no ponto B‘, que eu tenho?! E...		
51	08:54	B C‘, isso serve… [*fala baixinho]*		
52	09:08		Qual reta você quis marcar agorinha?	
53	09:10	BC‘, mas…		
54	09:14		Porque não, sempre pode tirá-la mais tarde.	
55	09:22		Bom, agora você pode aproveitar o dinâmico do sistema novamente, observar um pouco o que acontece quando você movimenta o triângulo.	
56	09:30			Movimenta a figura até que esta vire apenas uma reta...
57	09:38		Essa reta auxiliar lhe trouxe alguma coisa?	
58	09:40	Bem, se a reta auxiliar fosse nula, B estaria sobre h, quer dizer, se o segmento BC‘ fosse nulo, aí E também estaria sobre A, e com isso B‘ seria ahn seria o... como se chama isso?		
59	10:10		O centro de simetria.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
60	10:12	Isso, o centro de simetria.	Bom, mas agora nós temos um caso muito patológico, porque todas as retas caem umas sobre as outras.	
61	10:23	Não consigo pensar em nada, então, exceto que... ahn		Mexe com a reta que contém os pontos simétricos B e B’
62	10:33		Tem alguma coisa lhe chama atenção nessa reta?	Continua mexendo com o triângulo...
63	10:48		Será que uma determinada posição talvez?	
64	10:58	Sim…	E qual?	
65	11:05	Então, ela passa por B e B sempre está a uma mesma distância de E como B‘, ahn.... Um momento, posso experimentar algo?		Constrói a circunferência centro A e raio até B’, para ver se passa pelo ponto B?!
66	11:24	Hmm não é isso, ok… então tiro de novo.		
67	11:32		O que você verificou agora?	
68	11:34	Estava verificando se B‘ e C‘ tem a mesma distância de A. Parecia que sim.		
69	11:47		Em que isso lhe seria útil?	
70	11:53	Então, que B‘... bom, também poderia ser em outro lugar...		
71	12:09		Vamos voltar um pouco para aquela reta auxiliar que você desenhou. Você quer escrever algo ali?	
72	12:14	Sim…		
73	12:29		O que você escreveu?	
74	12:30	C,’A, B, quer dizer A é ponto médio de B‘ e C‘		
75	12:46	Talvez poderíamos fazer com... ahn... fazer com a simetria em relação a ponto. Se eu desenhar uma perpendicular que passa por A		
76	13:09	E movimentar B‘ e C‘... não, também não ajuda em nada...		
77	13:22		Para isso você já estaria assumindo um pouco que os pontos estão sobre uma reta.	
78	13:33		Bom, se você conectar os pontos B e C‘, que foi o que você fez com essa reta auxiliar, uma nova figura se formou. Podemos dizer algo sobre essa figura?	
79	13:50	Sobre o triângulo B’C’B ou sobre o triângulo AC’B... ok...		
80	14:05	Ele é congruente ao ACB.		
81	14:08		Você pode justificar isso?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
82	14:11	O lado AB é igual pros dois, e aí eles tem o lado CB que é igual ao C'A;		
83	14:26		Por que?	
84	14:28	Porque C' e C são simétricos, com isso esta distância é a mesma *[mostra CD = DC']*	Certo…	
85	14:43		Isso é suficiente?	
86	14:47	Ahn... D era o ponto médio de A e B, com isso as duas metades são iguais [mostra *AD = DB*]… ahn... aí temos aqui dois ângulos alternos, quer dizer, vários ângulos alternos, aí já teríamos LAL [caso Lado-Ângulo-Lado] e aí esses dois lados também são iguais.		
87	15:13		Bom, você pode fixar isso um pouco?	
88	15:16	Sim…	Então, eu não acompanhei bem o final, mas se você escrever isso já vai se mostrar se estava em ordem.	
89	15:28	Não sei se é a variante mais curta, mas...		A aluna faz um esboço de seu raciocínio no papel
90	15:33		Ok, o que você quer mostrar?	
91	15:34	Então, eu sei que AD = BD, CD = C'D, e, vou nomeá-los α e β, aí então α = β. Isso seria LAL.		[scanear esboço…]
92	15:55		Para quais triângulos?	
93	15:58	Esse, quer dizer para o triângulo ADC' e o triângulo CDB.		
94	16:09		Exatamente, mas agora você mostrou uma congruência diferente daquela que inicialmente queria mostrar, mas...	
95	16:15	Mas agora eu sei que CB e AC' são iguais.		
96	16:20		São do mesmo tamanho, e você sabe algo mais? ... Sobre esses dois segmentos? ... Além do fato de que são de mesmo tamanho?	
97	16:29	Eles são paralelos.	Por que?	
98	16:36	Porque... aqui E é o ponto médio de novo... ahn...		
99	16:50	Por causa dessa simetria em relação ao ponto. ... Quer dizer, eu posso rotacionar o triângulo em torno dali, por D.		
100	17:02	180 Graus.	Mesmo?	
101	17:05		Por que você está falando de uma rotação agora?	
102	17:08	Ah sim, nós fizemos a reflexão com simetria de ponto... Daí quando você tem a reflexão simétrica, falo de rotações, porque é sempre tão bonito e fica claro o que dá pra virar.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
103	17:20	E aí quando espelhamos simetricamente, um ponto sobre o ponto [C sobre C‘], do triângulo obtemos um retângulo.		
104	17:29		Não concordo.	
105	17:30	Ok		
106	17:32		De novo,você está fazendo uma simetria de ponto com quais pontos?	
107	17:36	Com o ponto D.		
108	17:38	É o ponto médio de AB.	Ok, e você obtém o ponto C‘.	
109	17:40		E agora você quer argumentar que AC‘ é paralelo com BC, mas isso ainda não é bem o suficiente.	
110	17:47	Porque AC são de mesmo tamanho e pela reflexão C’B também é.		
111	17:57		Isso você teria que mostrar da mesma maneira como o anterior.	
112	18:00		Quer dizer, lhe falta, você tem isso igual a isso, quer dizer, CD = DC‘, e o que lhe falta é um argumento que lhe diga que os pontos A e B também têm uma relação; para que você realmente possa dizer que os dois são paralelos. No momento você só sabe que os dois pontos têm a mesma distância para o ponto D.	
113	18:24	Sim, mas eles são praticamente uma reflexão em torno do ponto D também.		
114	18:27		Quais pontos?	
115	18:29	A e B.	Exato. Isso você ainda não tinha mencionado. Então, isso você tem que acrescentar e ao final que figura se forma quando você observa os pontos A, B, C, C’ e D? Quer dizer, essa parte aqui, que figura que é?	
116	18:45	[*incompreensível*]		
117	18:48		Aparentemente sim, se você movimentar um pouco...	
118	19:02	Um losango, ou?		
119	19:05		Isto aqui, que figura é essa?	Mostra na tela o contorno
120	19:07	Em forma de pipa!?		
121	19:10		Assim é uma pipa.	Ela muda constantemente a forma

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
122	19:17	Um quadrilátero?!		
123	19:18		Um quadrilátero específico?	
124	19:19	É um específico, sim...		
125	19:20		Pelo menos você mostrou que esses segmentos são paralelos [BC e AC‘]	
126	19:23	Hmhm		
127	19:38	Não sei como se chama.		
128	19:40		Ok, talvez também não seja tão importante. Então talvez o principal argumento outra vez. Por que esses dois são paralelos? [BC e AC‘]. Se você dissesse novamente em uma frase?	
129	19:49	Por que AC‘e BC são paralelos...		
130	19:51		Isso. Você já mostrou, eu só gostaria de ter isso numa frase agora.	
131	19:59	Ok, eles são paralelos porque a distância de AC é igual a C‘B.		
132	20:04		Não foi assim que você argumentou. Você argumentou bem diferente.	
133	20:07	Eu argumentei diferente?		
134	20:08		Sim.	
135	20:09	Então porque... ahn A refletido em D é igual a B, e C refletido em D é igual a C‘.		
136	20:20		Exato, você tem a reflexão em relação a ponto de dois pontos e o que isso significa para a reta que é definida por esses dois pontos? O que significa para...	
137	20:33	É paralela...		
138	20:36		Exato, você tem o paralelismo justificado por uma característica da reflexão em relação a um ponto (simetria). Eu só queria retomar isto. Então, você mostrou que AC‘ é paralelo a BC. Mas o que queremos mostrar mesmo?	
139	20:50	Ahn… B‘ está sobre a reta AC‘		
140	20:55		Isso.	
141	20:57	Ok…		
142	21:01		E como continua agora?	
143	21:02	[ri um pouco…] Boa pergunta!		
144	21:10	Posso desenhar outra reta...		Constrói uma reta passando por B’e C
145	21:12		Claro...	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
146	21:45	Ainda vou experimentar algo...		Mexe na figura movimentando o ponto B
147	22:23		Em qual segmento você deve se apoiar agora?	
148	22:28	Esses dois já mostrei que dá [BC e AC‘], mas, isto se refere ao segmento [AB‘] e... não, isto parece bobo mostrar que estes dois são paralelos...		
149	22:38		Quais?	
150	22:39	Esta [AB] paralela à reta que acabei de desenhar.		
151	22:41		Por que é bobo?	
152	22:46	Hmm	Você tem a conjectura de que são paralelos?	
153	22:47	Tenho, sim... eu teria A, E, C ... ahn... D sempre é igual...		
154	23:02		Qual o significado especial que o ponto E tem? Você acabou de utilizar implicitamente...	
155	23:08	Então, A... ahn... A é refletido em E, e se obtém C.		
156	23:18		Ok, e quais segmentos você queria mostrar que são paralelos?	
157	23:21	A reta j [onde está o segmento B‘C] e o segmento AB		
158	23:30		Bom,você acabou de mostrar, com um argumento semelhante de reflexão em relação a ponto, que esses dois [BC e AC‘] são paralelos; será que isso funcionaria aqui também?	
159	23:40	Então, eu posso mostrar que A refletido em E, obtenho C; ahn.... e posso mostrar que B refletido em E obtenho B‘.		
160	23:55		Certo.	
161	23:57	Ok, com isso mostrei que o segmento c é paralelo ao segmento j, ahn à reta j.		
162	24:04		Certo, novamente com o argumento da reflexão em relação ao ponto. Exato, com isso você mostrou o que queria mostrar. Isso é útil pra você?	
163	24:19	Ahn... eu sei... não, um momento... eu mostrei agora que esses dois são paralelos [mostra BC e AC‘], e esses dois paralelos [j e c]...		
164	24:34	Não, eu preciso de mais alguma coisa que... a sim... a reta, não sei o nome, a reta que passa por A e C‘ se corta com a reta j... no ponto B‘.		
165	24:51		Isso é o que você quer mostrar, não é?	
166	24:54	Exato [ri…]	Aí voltamos pro início.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
167	25:03	Sim, mas se elas se cortam ali, aí B‘ é parte de AC‘		
168	25:10		Certo, mas isso você tem que mostrar agora, que esse ponto B‘, que foi obtido refletindo o B, então ele, inicialmente, não tem nada a ver com a reta j nem com AC‘. Isto quer dizer que é isso que você tem que mostrar, que exatamente este ponto B‘é o ponto de interseção dessas duas retas. Mas um passo importante você já fez, sobre o que você disse do segmento CB‘ e AB, eles são paralelos. Bom, em qual figura você está argumentando na verdade? Mostre a figura toda.	
169	25:50	Essa aqui. Eu vou desenhá-la: CB‘AB.		
170	26:17		Exatamente, nessa figura você mostrou que B‘C é paralelo a AB. Será que você pode mostrar mais coisas nesta figura?	
171	26:26	Então, que B refletido em E, me dá B´.	Certo.	
172	26:32	E pela reta BE, quer dizer, à reta BE também pertence B‘? É o ponto de interseção com... bem ele tem.... para... eles se cortam, ahn... não, de novo... A reta que passa por BE se corta com a paralela j à AB...	Concordo.	
173	27:03	No ponto B‘.		
174	27:10		Por que no ponto B‘? Por que o ponto B‘ não está um pouquinho mais pra lá ou pra cá...	
175	27:16	Ahn... não sei como agora.... não é um paralelogramo, ou? Como se chama essa parte aqui		
176	27:25		Paralelogramo, essa palavra ainda não utilizamos hoje.	
177	27:28	Sim, já falei ela antes.		
178	27:29		Mesmo? Bom então. Bom, o que significa paralelogramo, você sabe que esses dois são paralelos [B’C e AB], o que isso iria significar além daquilo que temos?	
179	27:36	Isso quer dizer que AB‘ e CB também são paralelos.		
180	27:40		Por que? Então estaríamos prontos?	
181	27:46	Porque... sim, B‘A é paralelo, não, é o mesmo que AC‘ e antes dissemos que AC‘ é paralelo a BC.		
182	27:58		Bom, „é o mesmo“?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
183	28:00	Ahn, não, estão sobre a mesma reta. Quer dizer AC‘ é paralelo a CB; e mostramos que B‘A é paralelo a CB... ahn...		
184	28:17		O que significa isso então?	
185	28:19	Que eles são idênticos...		
186	28:21	Não…	O que…	
187	28:24	Com a distância A... ahn... de novo... Mostramos que AC‘ é paralelo a CB, ok. Ahn, com a distância AC.		
188	28:45		Se isso realmente é verdade temos que verificar, por que se você movimentar a figura com certeza não será mais a distância; daí teria que ser uma perpendicular, não é?	
189	28:54	Ok. Sim, certo, não é isso.		
190	28:56		Mas talvez a distância não seja tão importante, eles são, em todo caso, paralelos.	
191	29:00	Hm. E nós mostramos que B‘A é paralelo a CB.		
192	29:06		Ok. Isso quer dizer?	
193	29:08	Já que o ponto A está nos dois, então... eles tem que estar sobre uma mesma reta?!		
194	29:15		Ainda me falta um pequeno argumento, dois na verdade: Você mostrou que isto é paralelo a isso [AC‘ e CB], e isto é paralelo a isso [AB‘ e CB], o que significa isso para os segmentos AB‘ e AC‘? Primeiramente? Você ainda não mencionou isto, mas com certeza está imaginando assim.	
195	29:35	Você quer dizer o fato deles serem iguais?		
196	29:37		Não, não necessariamente, quer dizer, isso também poderia ter sido mostrado, mas talvez também não seja tão importante.	
197	29:53	Muito banal, ou? [ri]		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
198	29:54		[ri junto] Sim... talvez seja este o motivo pelo qual você nem mencionou; então, você argumentou que os segmentos AB‘ e AC‘ tem o ponto A em comum. Então, e agora somente os dois segmentos. E você falou que os segmentos AC‘ e AB‘ são paralelos ao segmento BC. Então, disso segue agora direto que os dois segmentos estão sobre uma mesma reta, que não existe um bico ali.	
199	30:32	Ou então, provavelmente deveríamos concluir que B‘ e A e C‘ estão sobre a mesma reta.		
200	30:40		Sim, é o que estamos tentando mostrar o tempo todo, certo. Mas ainda falta um pequeno argumento para me dar por satisfeito.	
201	30:47	Ok.		
202	30:53	Sim… Hmm	Então de novo, a característica de que os dois segmentos AB‘ e AC‘ estão sobre a mesma reta não pode apenas estar justificado pelo fato dos dois terem o ponto A em comum. Poderia ser que eles formassem um bico. Mas você tem um argumento decisivo para o fato de que eles não formam bico. Por que não há bico?	
203	31:15	Porque ambos segmentos são paralelos a CB...		
204	31:18		… e com isso	
205	31:19	E com isso, ahn... se eles tem o ponto A em comum, ahn... então, não formam bico.		
206	31:33		Como eles devem ser em relação ao outro, os dois segmentos? ... Para que não forme bico.	
207	31:41	Com 180 graus, por assim dizer. Como se diz, eles devem encostar?!	Sim…	
208	31:47		Encostar eles encostam pelo fato de terem o ponto A em comum, mas por que se dá um ângulo de 180 graus?	
209	31:55	Porque eles são horizontais, não... como se chama aquilo...		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Obsevador
210	31:59		Você já mencionou o argumento algumas vezes; isso se deve ao fato de ambas terem uma paralela em comum. Mas o que isto significa para dois segmentos que possuem uma paralela em comum, como eles estão posicionados em relação ao outro?	
211	32:10	Também são paralelos.		
212	32:12		Este é o argumento que ainda faltava, sim. Então, pode até ser trivial mas deve ser dito. O que ainda não mostramos, quer dizer não mostramos realmente é que o segmento AB‘ e o segmento BC são paralelos, mas isto você pode matar em uma frase.	
213	32:29	Ahn... Já que A, ... não, A refletido em D, me dá B, isso... como eu tinha isso aqui...		
214	32:50		Qual o ponto que você pegou como centro de simetria no outro?	
215	32:52	No outro D, e aqui melhor pegar E. Isso, A refletido em E, me dá C e B refletido em E me dá B‘.		
216	33:00		Exatamente, e com isso ambas retas são paralelas e fechamos a lacuna nesse argumento.	
217	33:06	Bom.		
218	33:07		Bom, agora esquecemos de anotar as idéias. Fazemos isso ainda?	
219				Talvez as idéias principais.
220				A aluna retoma as idéias principais e as coloca por escrito.

Atividade 2 - Prof. 1

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
221				A aluna constrói a figura correspondente ao enunciado, murmurando suas ações.
222	01:53	Ok, é assim?	Sim	
223				relê o enunciado
224	02:03	Então vou dar uma olhada…		
225				Mexe na figura, movimentando o vértice B
226	02:19	Então, eu diria simplesmente que se ABCD é retângulo, então isto aqui dentro é um quadrado.		
227	02:29		Bom, isto é uma conjectura, vamos anotá-la.	
228	02:34	ABCD retângulo $\Rightarrow$ EHFG quadrado		
229	02:59	OK, então… vamos olhar adiante… Não, isso dá algo estranho... Ok, em algum momento os pontos saem... Se AD for suficientemente pequeno, ou se BC é suficientemente pequeno, mas... hm	Uhum	Volta a movimentar o vértice B, formando um quadrilátero qualquer
230	03:57	Não, isto não é um quadrilátero específico		Relê o enunciado para ver o que deve procurar…
231	04:08	Ah, isso seria interessante, ou?		Movimenta o vértice C e faz os pontos internos coincidirem
232	04:11	Se é possível, sim.	Sim, por isso está escrito lá, se isto na verdade é possível.	
233	04:16		Bom, você deve ter uma conjectura agora	
234	04:18	Que em algum momento é possível que se cortem num ponto… ahn…		
235	04:26		Isso já podemos deixar definido, que é possível.	
236	04:28	Assim quase parece com uma pipa... posso movimentar mais um pouco?		
237	04:44	Então, conjectura – quadrilátero pipa, se chama assim, ou? E = H = F = G	Sim.	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
238	05:08	Quando… sim	Isso você concluiria, se fosse um quadrilátero pipa então disso sai que seria um ponto. Escreva então com a seta de conclusão.	
239	05:22	Ahn… ok… e daí?		
240	05:26		Primeiro estamos procurando conjecturas, está bom assim, podemos passar para a prova depois.	
241				Movimenta a figura de tal modo que se torne um triângulo (3 vértices alinhados)
242	05:44		Exato, se você fizer isto de novo...	
243	05:47	Mas aí não temos mais um quadrilátero.		
244	05:49		Certo, neste caso não é mais um quadrilátero, o que aconteceu?	
245	05:53	Então, aí temos um triângulo, mais ou menos.		
246	05:56		Ok, será que alguma conjectura pode explicar? Quando isto acontece?	
247	06:04	Então, aí iríamos ter con... côncavo, ou?		Passa do triângulo para um quadrilátero côncavo.
248			Agora você também pode ver porque quadriláteros não-convexos são de alguma maneira bobos, pois assim temos sobreposições. Bom, e o caso extremo, você acabou de descobrir? Como você o formularia? Como conjectura?	
249	06:23	Como conjectura? Ahn... B, A, D estão sobre uma reta, então, ahn... não, daí não é um...		
250	06:32	Ok…	Mas talvez podemos considerá-lo como fenômeno de limite.	
251	06:38	Quando três pontos de um quadrilátero estão sobre uma reta, isso soa estúpido... daí se obtém um triângulo, e assim três pontos do quadrilátero interno também estão sobre uma reta, ou como que era?		A aluna já faz a anotação no papel da conjuntura.
252	07:11		Bom, você pode observar mais, eu diria que é mais do que apenas três pontos estarem sobre uma reta. Eles não estão de qualquer maneira sobre uma reta, ou seja o que acontece com os pontos?	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
253	07:29	Daí empurra... daí viram H por assim dizer		
254	07:33		Por exemplo. Mas poderia ser de outra maneira; você pode encontrar outra situação onde aconteça o mesmo?	
255	07:42	Ahn…	Isso é louco...	Faz com que os pontos de interseção de duas bissetrizes coincidam um com um vértice.
256	07:47	Onde temos os pontos então?! Ah sim... dá assim... ponto E		
257	07:56		Isso, isso também poderia acontecer, não é? Como poderíamos formular isso de maneira geral? O que acontece com o quadrilátero EFGH?	
258	08:07	Vira um triângulo, mas... sim	Ok	
259	08:13		E como ele vira um triângulo?	
260	08:14	Quando dois pontos... viram iguais, ou estão na mesma posição, ou... sim, sobrepostos.	Ficam sobrepostos…	
261	08:26		Ok, às vezes é interessante observar tais fenômenos de limite, vamos colocar no papel.	
262				A aluna escreve a conjuntura no papel e em seguida movimenta a figura para observar o que mais pode acontecer.
263	09:10	Vou fazer um paralelogramo, ou parecido...		
264	09:24	Então, conjectura, ABCD é um paralelogramo então EHFG é um retângulo.		
265	09:30		Correto, já é mais uma.	Escreve no papel.
266	09:51		Bom, temos...	Volta a movimentar a figura
267	10:05	Talvez obtém-se uma pipa lá dentro? Quase parece assim...		
268	10:19		O que você está tentando criar agora?	
269	10:21	Um trapézio, quer dizer, ahn... duas paralelas		
270	10:25	ABCD, isso…	Ou seja, com o quadrilátero ABCD. O tempo todo você tentou construir de alguma maneira algo específico com o quadrilátero EFGH, agora você foi pro outro...	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
271	10:35	Sim, agora eu queria ver o que aconteceria saindo de um trapézio		
272	10:39		Ok; isto naturalmente é uma segunda estratégia, podemos construir quadriláteros específicos com ABCD. Então, você tem alguma conjectura aqui também?	
273	10:49	Ahn, sim, mas... mas não parece que há um quadrilátero em forma de pipa no meio.		
274	10:59		Mas será que não se pode ver algo especial mesmo assim?	
275	11:07	Hmm… E e F parecem estar numa paralela a AB e CD.		
276	11:22		E e F, então a reta EF? É paralela a quem?	
277	11:27	A DC e AB, quer dizer, AB e CD seriam paralelas no trapézio e EF poderia...		
278	11:39		Bom, isto é... você não quer construir a reta?	
279	11:50	Estou fazendo uma construção ainda [marca GH]... não... [apaga novamente]		
280	12:05	Poderia parecer assim…		
281	12:06		Você não quer marcar AB também, como reta?	
282	12:22	Sim, talvez… rsrs		
283	12:24	Ah é verdade…	Ok, então consideramos como conjectura. No entanto, nós nos afastamos um pouco da pergunta inicial, a idéia é de que o quadrilátero seja específico. Isto seria uma conjectura, talvez ela nos ajude de alguma maneira outra hora. Podemos mantê-la em mente.	
284	12:39	Sim, podíamos conjecturar, mas... não... Ok, então...		
285	12:48		Mas tudo bem, se você está vendo agora que não se trata de um quadrilátero específico, podemos passar primeiramente a provar uma e outra conjectura que você mencionou. Com qual você quer começar?	
286	12:54	Ahn..	Qual lhe agrada mais?	
287		Aquele com a pipa parecia legal... pode ser?	Sim…	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
288	13:15		Ah, era aquele caso onde vira um ponto.	A aluna volta para a construção para o caso onde o quadrilátero interno se torna um ponto.
289	13:37	Ok...		
290	13:40	Ahn...	Bom, você tem certeza de que construiu um quadrilátero pipa? O que lhe daria a certeza?	
291	13:52	Eu tentaria confirmar o seguinte... a perpendicular, quer dizer, o ângulo... ahn... agora tenho o ponto...		
292	14:12	Elas são perpendiculares [mostra as diagonais]...	Ok, então, deixamos assim, só queria saber ainda... bom, vamos supor que ABCD é um quadrilátero pipa e agora temos a conjectura de que se cortam num ponto.	
293	14:28	Ahn… exato…		
294	14:43	As bissetrizes de ... do ângulo ADC... também é a bissetriz do ângulo ABC, já que DB ahn... sim, também se chamam diagonais?! A diagonal do quadrilátero é.	Sim	
295	15:11		Hm, qual especificidade essa diagonal possui no quadrilátero pipa? Não é somente a diagonal...	
296	15:18	Ela divide o quadrilátero em dois triângulos congruentes.		
297	15:23		Ok , então como mais poderíamos chamar essa reta?	
298	15:27	Ahn…	A diagonal do paralelogramo também faria isso?!	
299	15:37	Dividir?! Não... não sei.		
300	15:45		Bom, como estão os dois triângulos que você mencionou agora um em relação ao outro?	
301	15:50	Ah, ahn… Ponto … ahn… eixo de simetria		
302	15:54		Exatamente, então aqui podemos, para a bissetriz BD...	
303	16:00	BD é o eixo de simetria do ponto A sobre o ponto C.		
304	16:05		Exato.	
305	16:10	Ok, com isso já mostramos que... ahn... H e G acho que era, estão um sobre o outro.		
306	16:19		Bom, vamos definir isso um pouco no papel?	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
307				A aluna faz anotações no papel.
308	16:28	Ahn… segmento DB é eixo de simetria do quadrilátero pipa ABCD... ahn... já posso escrever „disso concluímos...“?! Ahn, H está sobre G... sim...		
309	17:14		Você quer dizer as retas...	
310	17:17	Sim. Não, os pontos.		
311	17:19		Por que?	
312	17:23	Os pontos estão no triângulo... normalmente		
313	17:27		Ah sim, seriam estas...	
314	17:29	Estamos falando deles, ou?	Sim sim ok…	
315	17:35		Bom, talvez um curto argumento ainda, por que a bissetriz de B e D também é simultaneamente o eixo de simetria? Ou, ao contrário, por que o eixo de simetria é também a bissetriz?	
316	17:47	Ahn..		
317	17:58	Por causa dos triângulos congruentes?! Não.		
318	18:05		Se você supor que não é assim... Que o eixo de simetria não é a bissetriz?!	
319	18:11	Daí os triângulos não seriam congruentes, aí não seria um quadrilátero pipa.		
320	18:15		Concordo.	
321	18:18		OK, o que temos de argumentar agora ainda?	
322	18:20	Ahn, isso também... E e F estão sobre o ponto. Quer dizer, que as bissetrizes BAD e BCD também se cortam no ponto E e G. Ahn...		
323	18:49		Tenho uma pergunta ainda: é importante que a gente argumente com o ponto H e G? Você mostrou agora que as bissetrizes, no caso de um quadrilátero pipa, formam o eixo de simetria e com isso são idênticos. Quer dizer, se você cortar as duas bissetrizes você obtém, primeiramente, todos pontos como ponto de interseção. Agora na verdade se trata apenas das outras duas bissetrizes. O que você tem que mostrar nas outras duas bissetrizes?	
324	19:31	Que elas também se cortam.		
325	19:33		Mhm… e onde?	
326	19:37	Ahn… num ponto.		

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
327	19:39		Num ponto, sim, e onde deve estar esse ponto?	
328	19:43	No segmento BD.		
329	19:45		Exato, isso bastaria. Bom, então agora temos que procurar argumentos.	
330				A aluna olha a figura e procura argumentos
331	20:02	Quer dizer que para apenas um... mostrar para um dos triângulos que... ahn... então, basta na verdade mostrar apenas para um dos triângulos porque são congruentes e com isso o ponto deve estar sobre, quer dizer E ou G, H ou seja lá como se chama, na mesma posição, se refletirmos em relação a um ponto... ahn, em relação a uma reta.	mhm.	
332	20:42		Bom, então você quer utilizar a simetria novamente, isso quer dizer então ahn... o que deve ser simétrico agora, para que você possa utilizar esse argumento?	
333	20:55	Ahn, A para C.		
334	20:59		Isso é suficiente?	
335	21:03	E as bissetrizes também devem ser.		
336	21:05		Ah certo. E é este o caso?	
337	21:09	É o caso quando ahn... porque BCD é refletido pelo eixo de simetria em DAB e quando marcamos a bissetriz, esta será refletida sobre o ponto.	Sim...	
338	21:32		Isso. É exatamente o argumento que você precisa, ou seja, as duas bissetrizes são simétricas em relação ao eixo BD, e o que acontece com duas retas que são simétricas entre si, onde elas se cortam?	
339	21:50	Sobre o eixo de simetria.		
340	21:51		Sempre. Ou seja, isso podemos utilizar, e daí estamos prontos, na verdade. Você não quer anotar isso?	
341				A aluna retoma as principais idéias no papel, murmurando o que escreve.

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
342		Triângulo ABC simétrico com BAD $\Rightarrow$bissetrizes simétricas uma em relação a outra $\Rightarrow$se cortam sobre um ponto sobre o eixo de simetria.		
343	23:15		Bom, você pode formular novamente o que você mostrou? Só qual afirmação que você mostrou. Apenas a afirmação.	
344	23:26	Eu mostrei que EFGH vira um ponto, ou seja, eles podem...		
345	23:31		Em que condições?	
346	23:33	Na condição de ABCD ser um quadrilátero pipa.		
347	23:37		Certo. Quer dizer que, se ABCD é um quadrilátero pipa aí você mostrou que todas as bissetrizes se cortam num ponto. Agora sempre é interessante nessas situações, saber se a recíproca também é possível. Quer dizer, se as bissetrizes se cortam num ponto então sempre será um quadrilátero pipa.	
348	24:03	Então, quando se cortam em um ponto, quando se, quer dizer... temos apenas um ponto onde todas as bissetrizes se cortam, aí elas passam por esse ponto...		
349	24:22	Posso experimentar algo?		
350	24:24		Claro.	
351	24:27	Ahn, um ali certo? [mostra o ponto de interseção] Vou fazer... ahn		
352	24:32	Posso abrir uma nova página? Acho que aí essa some. Ou abrir nova janela?		[Pergunta pra mim] Acho que sim, assim a outra janela permanece aberta.
353	24:48	Supondo que temos um ponto por onde passam bissetrizes. Pronto, ahn...		Abre nova janela e começa a construção pelo ponto de interseção.
354	25:09	Bem, agora já está ficando (incompreensível). Ahn... não Como volto pra outra? Ah, lá embaixo.	Lá embaixo.	Retorna à construção anterior.
355	25:26		Tente apenas movimentar o quadrilátero mais um pouco para ver se você consegue um ponto com outra figura também. Aí já teríamos um ponto de partida pra saber se a recíproca é possível ou não.	
356	25:40	Parece que não estão mais...		

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
357	25:45		Bom, o que você diria então, a recíproca é possível?	
358	25:48	Não…		
359	25:50		Isso quer dizer então, se essas retas se cortarem em um ponto não significa necessariamente que ABCD é um quadrilátero pipa. Seria interessante saber agora qual especificidade esse quadrilátero possui além disso.	
360	26:05	Bom, em todo caso tem essa [mostra a bissetriz]... bom... um momento...		
361				Murmura algo e testa algumas configurações na construção.
362	26:22		Bom, a pergunta seria agora, em quais quadriláteros na verdade todas as bissetrizes se cortam em um ponto?	
363	26:35	Ahn... eu afirmaria que quando ahn... os dois pontos sobrepostos... um momento... de novo... não, também não é isto...		Deforma a figura para ver se sua hipótese se mantém.
364	27:01		Bom isto já é um pouco mais difícil, não é? Talvez simplesmente vamos anotar essa idéia, a recíproca não é possível.	
365	27:07	Sim.		Anota no papel.
366	27:08		Você ainda colocou outras conjecturas que você talvez também queira provar. Isso seria um ponto que talvez mais tarde, se tiver vontade, pode pensar mais a respeito para descobrir quando a recíproca é verdadeira, para quais quadriláteros se obtém um ponto ali.	
367	27:26	Ok.	Bom.	
368			Qual era mesmo?	Ela inicia uma segunda conjectura.
369	27:31	ABCD é um retângulo, disso segue que EHFG é um quadrado.		

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
370				Configura a construção de acordo com a conjectura e analisa a figura estática por alguns instantes.
371	28:06	Só vou marcar duas...		Constrói as retas EF e GH e analisa a figura
372	28:53	Mas posso... hm		
373	29:01		O que você tem que mostrar? Então, vamos ver a primeira coisa que temos que considerar.	
374	29:10	Tenho que mostrar que quando ABCD é um retângulo, então EHFG é um quadrado.		
375	29:17		Certo, como você iria mostrar que é um quadrado?	
376	29:20	Tem os mesmos ahn... então, HF é igual a FG que é igual a GE e EH, ou as diagonais se cortam num ângulo reto, quer dizer, no centro.		
377	29:37		Ok, você disse „ou“...	
378	29:40	E! Não, ou...		
379	29:44		É suficiente mostrar que todos os lados são iguais...	
380	29:46	Ah não! Os lados ainda precisam de um ângulo reto.		
381	29:49		Ah, bom, então se você mostrar essas duas coisas aí você estará segura, quer dizer, o comprimento dos lados é igual; e os ângulos têm a mesma medida, isto é, 90 graus. Então você já pode anotar o que você tem que mostra agora.	
382	30:08	EHFG quadrado; mostrar que e = h = f = g e ângulo reto.		Anota no papel, murmurando junto. Depois, volta a se concentrar na figura.
383	31:05	Quer dizer, a idéia é que ABCD é um retângulo; com isto ahn... é simétrico...		
384	31:18		Concordo.	
385	31:20	Ahn... em relação à mediana de AD e à mediana de DC.		
386	31:30		Você está falando mediana, o que seria a mediana no quadrilátero?	
387	31:39		Você quer dizer mediatriz.	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
388	31:40	Mediatriz, sim, ok.		Analisa a figura novamente (murmura algo incompreensível).
389	31:58	Hm, então eu teria que mostrar que esta aqui... Mas vou marcá-la. Momento de correção... pronto.		Constrói as mediatrizes e ajeita a figura para ser um retângulo, com a simetria visível.
390	32:39	Hm… como a simetria de eixo também seria ahn a… a bissetriz BAD refletida no eixo i, ahn... E a bissetriz CDA também... E elas se cortam, já que são simétricas ahn... no ponto E sobre o eixo i.	Mhm. Sim… Concordo.	[O eixo i é a mediatriz de AD]
391	33:24		O que você conseguiu com isto?	
392	33:26	Que eu mostrei que E está sobre o eixo. Posso argumentar o mesmo para ABC, quer dizer, o ângulo, e para o ângulo DCB e com isto mostro que ahn E está sobre F, ahn E e F estão sobre o eixo i; exatamente assim argumento para... um momento, tenho que olhar de novo... para o eixo j, eixo de simetria para os pontos G e H, como as bissetrizes...	Mhm. Mhm. Concordo.	[O eixo j é a mediatriz de DC]
393	34:10	Exato, já que j e i… são... j e i são os eixos... são os eixos de simetria no retângulo ABCD então são perpendiculares entre si, ahn... isso… Bom, e como vemos (risos)	Mhm.	
394	34:43		Agora vem a lacuna.	
395	34:44	Agora vem a lacuna!		
396	34:47	Ahn H e G estão sobre j, e E e F estão sobre i... ahn… estas são as diagonais e estão perpendiculares entre si.	Mhm.	
397	35:03		Um momento, quais diagonais?	
398	35:06	As diagonais do quadrado EGH… EGFH.	Ah sim…	
399	35:15		Sim.	
400	35:16	E isto seria exatamente o argumento para um quadrado, quando as diagonais estão perpendiculares entre si.		
401	35:22		Um necessário ou suficiente?	
402	35:29	Sim…		
403	35:30	Sim	É necessário que em um quadrado as diagonais estejam perpendiculares entre si? É suficiente? Se em um quadrilátero as diagonais são perpendiculares entre si, então é um quadrado?	

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
404	35:39	Não! Eu ainda tenho que mostrar que eles têm o mesmo comprimento, os lados.		
405	35:45	Isso.	Certo, isso ainda fica pendente, não é? Então…	
406	35:49	Então o ângulo reto… (incompreensível)		
407	35:50		E quando os lados tem o mesmo comprimento e as diagonais forem perpendiculares entre si, aí é um quadrado?	
408	35:55	Aí é um quadrado.		
409	35:56		Você tem certeza?	
410	36:07	Sim…		
411	36:08		Existem outros quadriláteros que possuem o comprimento dos lados iguais?	
412	36:11	O losango.		
413	36:12		E como estão as diagonais ali?	
414	36:14	Também são perpendiculares. Droga. (risos)		
415	36:18	Ok…		
416	36:20		Quer dizer então que o argumento de perpendicularidade apenas não nos basta.	
417	36:22	Não nos basta.		
418	36:23		Você precisa ainda de qualquer maneira um argumento de ângulo. Talvez começamos com isto. Tente descobrir por que quando temos o ângulo de 90 graus...	
419	36:32	Ah sim. Aqui nós temos 45 [mostra o ângulo EAD] porque os ângulos, quer dizer, porque no retângulo temos ângulos retos e aí a bissetriz é 45.	Sim.	
420	36:46	Bom, com isso temos um ângulo colateral correspondente e aqui também temos 45 [mostra o ângulo FEG]		
421	36:53	Isso.	Porque você acabou de mostrar, ah não, pela simetria de eixo, ok. E você mostrou que o ponto E está sobre o eixo de simetria.	
422	37:02	Mas podemos argumentar diferente também, ahn… aqui também é ângulo de 45 graus [mostra ângulo FEH] e aí temos 45 mais 45, são 90.		
423	37:13		Ok. Isso você faz analogamente com os outros pontos e você tem 90 graus em tudo. Isso é bom.	
424	37:18	Bom, agora tem que mostrar ainda…		

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
425	37:20		Quer dizer que você já tem, o que você pode dizer sobre...	
426	37:23	Mas eu tenho, eu tenho quatro ângulos retos. E quatro ângulos retos…		
427	37:26		O que pode ser?	
428	37:27	Um retângulo ou um quadrado.		
429	37:29		Por que não pode ser um retângulo?	
430	37:33		Agora na verdade você pode utilizar seu argumento inicial	
431	37:40	Meu anterior?	Mhm.	
432	37:56		Como era o seu argumento anterior mesmo? Com qual propriedade você queria argumentar no quadrilátero?	
433	38:02	Ah, porque as diagonais se cortam num ponto.		
434	38:05		Bom, isso faz parte. Como elas se cortam?	
435	38:08	Com um ângulo reto.		
436	38:09		Certo, e como é isso no retângulo?	
437	38:13	Bom, elas também se cortam num ângulo reto. As diagonais não! Elas não se cortam num ângulo reto num retângulo.		
438	38:21		Pelo menos não um retângulo qualquer. Como dever ser o retângulo para que…	
439	38:25	Quadrado! (risos)		
440	38:26		Ah.. certo, quer dizer que você encontrou dois argumentos, achei legal, esse argumento com o eixo de simetria que os pontos devem estar sobre ele, ahn...	
441	38:36	(incompreensível)		
442	38:41		Isso, bom, talvez devêssemos anotar esses argumentos.	
443		Ok.		
444	38:54	Retângulo ABCD possui dois eixos de simetria. Perpendiculares, isto está claro, ou? Ahn... disso segue, bissetrizes BAD e ADC se cortam em um ponto e daí o outro análogo.	Sim.	Coloca as principais idéias no papel, murmurando o que escreve.
445	39:43		Hm, se cortam onde?	
446	39:44	Se cortam em um ponto sobre o eixo de simetria.		
447	39:46		Por que mesmo?	
448	39:49	Porque são refletidos pelo eixo.		

Nr	Tempo	Aluno	Docente	Observador
449	39:50		Exatamente, as bissetrizes mesmo também são simétricas em relação a esse eixo.	
450	39:58	Se cortam no ponto E, já que são simétricas em relação a esse eixo.		
451	40:10		No ponto E sobre o eixo, isso é importante, não é?	
452				Completa a informação.
453		Diagonais do quadrilátero HFGE são perpendiculares…		Segue escrevendo e murmurando o outro argumento.

Atividades – Prof. 2

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
1				O aluno lê a atividade.
2	00:27	Bom, eu iria simplesmente fazer um desenho primeiro.		
3			Mhm.	
4	00:48	Então desenho um triângulo. O ponto D é para ser o ponto médio do segmento AB... e E deve ser o ponto médio do segmento AC.		Vai construindo enquanto murmura suas ações.
5	01:22		Na função „exibir“ poderíamos tirar as coordenadas	
6	01:26	É verdade.		Tira as retas coordenadas deixando a tela apenas com a construção.
7	01:32	O mouse não está definido corretamente.		
8	01:33		Sim, é verdade.	
9	01:36	Bom, ok, os pontos B’ e C’ são simétricos à B e C em relação aos pontos D e E... ok... então B’ é simétrico de B, isto é...		
10	02:12	O que é simétrico agora então ahn são simétricos em relação ao ponto D, ponto B para...		
11	02:20		Então, eles provavelmente deveriam ser invertidos, para que B’ seja simétrico de B em relação ao ponto E, seria então eu acho, e C é simétrico de C’ em relação ao ponto D.	
12	02:49	Não consigo entender direito agora.		
13	02:50		Então, os pontos B‘ e C’ são cada um ponto simétrico de B e C.	
14	02:58	Certo, até aí está claro.		
15	03:00		Sim, e os ahn centros de simetria são D e DE.	
16	03:06	Então, para o B, D é centro de simetria e para C então		
17	03:10		Não, senão eles seriam	
18	03:11	Senão seria simplesmente o ponto A.		
19	03:13		Sim, isto é, respectivamente o outro ponto. [mostra o ponto E]	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
20	03:18	Ok. Seria interessante então primeiramente construir um segmento ou uma reta entre B e E...		
21	03:27		Sim, quer dizer, poderíamos fazê-lo de forma geométrica geral, mas também podemos utilizar os comandos, ali se tem a simetria diretamente.	
22	03:40	Então agora ponto e ponto...	Mhm.	Utiliza a ferramenta para achar os pontos simétricos.
23	03:46		Bom, você poderia fazer com reta...	
24	03:48	Agora fica mesmo… Onde ele está agora, lá em cima... Agora a mesma coisa com o ponto C e E.	Exato.	
25	04:14	Portanto agora eu é para movimentar o triângulo e ver o que acontece com os pontos B‘, A e C‘.	Mhm.	
26	04:22		Isso, e em seguida estabelecer uma conjectura.	
27				O aluno vai movimentado os vértices do triângulo.
28	04:48	Então… a conjectura é em todo caso, isto também é visível e também é lógico pelo fato de serem exatamente os pontos médios entre A e, ahn D está exatamente no meio de AB e E diretamente no meio de AC, significa que ahn quando eu movimento o segmento, movimentasse B’C’ então o ponto A sempre estaria sobre esse segmento.		
29	05:11		Experimente então.	
30				O aluno cria a reta B’C‘ e movimenta a figura, confirmando visualmente que A está sobre essa reta.
31	05:26	Isso se encaixa.		
32	05:33	Até aqui tudo bem, e algo que também se pode ver agora é ahn o que também é lógico por causa dessa simetria desses pontos, eles estão a uma mesma distância em relação ao segmento a [mostra os pontos B e C] e em conseqüência disso a nova reta criada também é paralela a *a*.		
33	05:51		Ok, por favor anote essas conjecturas.	O aluno anota a conjectura.
34	06:14		Então você anotou agora como conjectura que a reta B’C’ é paralela ao segmento BC?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
35	06:23	Isto já está, não. Bom... E então tem a outra conjectura ainda que A é elemento de B'C'. Exato.	Mhm.	
36	06:41		Ok,agora você tem que,	
37	06:43	No mais, não sei, são essas as conjecturas das quais preciso ou ainda tem mais conjecturas para elaborar? Eu poderia naturalmente agora ainda...	Está ok.	
38				Não, está bom.
39	06:53		Tente justificá-las agora. Talvez essa aqui que A é elemento do segmento B'C'.	
40	07:08	Sim, então ahn... como já falei ahn são... não sei ao certo, quer dizer quando olho a partir da reta, da reta BC, ahn B'C', os pontos D e E estão a uma mesma distância dela. Se nós ahn quer dizer, isso se realmente se olhássemos para isso.	Mhm.	
41	07:36	E ahn ...		
42	07:41		Isto também teria que ser justificado ou?	
43	07:43	Teria que justificar também, certo.		
44	07:53		Bom, e como você pode proceder agora. O que é dado.	
45	07:56	Bom, eu posso, eu posso olhar o que eu fiz ali. Quer dizer eu posso de alguma maneira ahn, por exemplo, vejo que o ponto B eu espelhei em E, em conseqüência disso a distância é a mesma que esta [mostra BE e EB'] e o mesmo posso dizer aqui também [mostra C e E].	Mhm.	
46	08:18	Sim, provavelmente posso mostrar alguma coisa de ahn congruência?!		
47	08:25		Para quais, sim...	
48	08:31		Talvez lhe ajude se você desenhar esses segmentos.	
49				Constrói os segmentos BB' e CC'.
50	09:02	Bom, vou desenhar mais dois segmentos		Constrói os segmentos BC' e CB'
51	09:08	Eu afirmaria que...		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
52	09:14	É... então, que este triângulo é congruente a este, porque ... [mostra os triângulos ABC‘ e ACB‘] - [murmura algo incompreensível]		
53	09:29		O que você conhece deles.	
54	09:31	Bom, eu conheço ...		
55	09:34		Ou o que você quer mostrar?	
56	09:37	Eu na verdade quero mostrar apenas que o ponto A está sobre a reta B’C’.	Correto.	
57				Analisa a figura.
58	10:09		Você mencionou a pouco, a congruência	
59	10:14	Talvez seja ahn seria significativo se... quer dizer, seria útil na verdade se eu pudesse mostrar a congruência do triângulo C’CB‘ com o B’BC‘, daí...		
60	10:30		Respectivamente	
61	10:32	Então certamente ahn seria ahn dado, quer dizer, a distância, se eu puxasse perpendiculares aqui ahn a uma mesma distância, teria provado o paralelismo. Mas ainda não...		
62	10:48		E como você pode mostrar que o ponto A está sobre a reta B’C’?	
63	11:01	Tja		
64	11:04		Como iria se parecer aqui se o ponto A estivesse fora da reta?	
65	11:14	Bom daí seria... daí os pontos nos quais eu espelhei antes não estariam mais no meio, quer dizer por exemplo o ponto E não estaria mais no meio entre A e C, se eu remetesse à reflexão novamente... quer dizer, hm...		
66	11:33		Em relação a isso, como se pode decidir se um ponto está sobre uma reta.	
67	11:47	Não entendo isso agora...		
68	11:48	Pronto.	Desenhe uma reta e um ponto fora dela. Se você acrescentar dois pontos na reta...	Faz um esboço na folha de papel.
69	11:59		Como se pode descobrir agora se o ponto P está sobre a reta AB, ou se está fora dela.	
70	12:09	Eu iria olhar se ahn se eu ahn se eu puder traçar uma paralela daí ahn e essa paralela não for idêntica à reta AB então seria, se ela não é idêntica então o ponto não está sobre a reta.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
71	12:27		Sim, mas isso não se pode verificar simplesmente, não é? O que sempre é mais simples é quando se pode ahn estabelecer comprimentos de segmentos e então comparar estes entre si ou tamanhos de ângulos.	
72	12:43	OK, verdade, é claro.		
73	12:50		Podíamos unir o ponto P aos pontos A e B. E aí temos diversas possibilidades de como proceder.	
74	12:59	Bom, eu poderia ahn naturalmente agora então eu poderia ir atrás da desigualdade de triângulos talvez para então ahn dizer que teoricamente, se eu estou sobre o ponto P, quer dizer, se o ponto P está sobre o segmento AB daí ahn se eu fosse de A até B, seria igual se eu fosse de A até B ou se eu fosse de A por P, e de P até B, seria igual, e...		
75	13:28		Portanto qual igualdade teria que ser satisfeita?	
76		Teria que ser satisfeita esta: $\|AP\| + \|PB\| = \|AB\|$		
77	13:42		Mhm, ok, por exemplo.	
78	13:50		Não sei se agora você consegue aplicar isso, se você transferir para o problema?!	
79	14:00	Bom, eu poderia naturalmente aplicar isso, mas eu não saberia como colocar isso ou... como justificar, porque ahn... [murmura algo incompreensível, como: de alguma maneira parece estúpido...]		A figura é observada de forma estática.
80	14:28		O que talvez seja mais fácil aqui, se você ahn agora você comparou segmentos entre si,	
81	14:37			PAUSA = toca o telefone – o aluno continua a pensar sobre o problema.
82	15:21	Bom, eu teria que mostrar que ahn que esses dois ângulos que são nulos para que então ele estivesse sobre.		
83	15:28		Em relação a isso, o que seria do terceiro ângulo?	
84	15:31	O terceiro ângulo teria que ser 360 Graus.		
85	15:34		Cuidado, de novo.	
86	15:37	Eu quero dizer, 180.		
87	15:38	Isso, exato.	Exato.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
88	15:39		Então, deveria ser um ângulo raso. Se você aplicar isto aqui?!	
89	15:50	Ok.		Completa informações na folha de papel
90	15:51		E então chegamos na direção de seu raciocínio com a congruência. Você pode imaginar agora que...	
91	15:57	Então eu é para olhar se se ahn o ângulo então de C' até A ahn C'AB' deve ter 180 Graus?!		
92	16:07		Seria uma possibilidade.	
93	16:09	Certo.		
94	16:11	E como eu iria mostra daí? Quer dizer... Eu iria, na verdade agora, eu assumiria então que ele está fora da reta e sigo dizendo agora que ahn...		
95	16:27		Não, você não precisa assumir nada. Você tem aqui, você pode indiferente se o ponto A está sobre a reta ou não você sempre pode conectar o ponto A com o ponto C e conectar o ponto A com o ponto B ahn linha. E você naturalmente sempre tem esse ângulo em três partes.	
96	16:52	E essas três partes de ângulo devem dar um resultado de 180 Graus.		
97			Mhm.	
98	16:56	Portanto o ângulo C'AB, BAC e CAB'. E isso eu poderia mostrar agora.	Mhm.	
99	17:08		Eventualmente, sim [risos] Você mencionou antes uma vez, com esses triângulos	
100	17:14	Os triângulos e congruência		
101	17:17		Como você poderia juntá-los.	
102	17:22	Bom...		
103	17:33	Eu sei que pelo fato de eu ahn que eu ahn pelo fato de o ponto E estar diretamente no meio de AC, e pelo fato de eu ter refletido aqui, eu sei que este segmento tem o mesmo comprimento deste [mostra BE e EB'] ahn... daí...		
104	17:55	Bom, daí se eu olhar esses dois triângulos [ABC e AB'C] logicamente AC e AC também é igual, isto é óbvio.	Exato.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
105	18:01		São lados idênticos, nos dois, você então está comparando esses dois triângulos [ABC e AB'C].	
106	18:06	Isso, estou comparando o triângulo vermelho [ABC] com o branco [AB'C].		
107	18:09		Ok. Então você já tem a congruência de um lado.	
108	18:12	Um lado é igual, aí tem a altura igual... bom agora é		
109	18:16		Mas não é a altura, essa teria que estar na perpendicular.	
110	18:20	Ahn, bom a… a distância de E até B [murmura algo incompreensível]	Mhm.	
111	18:28		É a mediana, no meio. Mhm, ok.	
112	18:41	Bom, então posso	O que você precisa	
113	18:43	Então eu agora posso, eu tenho que partir do fato que eles são paralelos, daí eu poderia ir pelos ângulos correspondentes (alternos internos), mas isso ainda não dá porque eu ainda não sei se são paralelos.	Sim.	
114	18:55	Então, ahn...		
115	18:58		Quais propriedades você ainda não utilizou?	
116	19:02	Os ângulos.		
117	19:03		Não, qual propriedade da atividade.	
118	19:11		Como você construiu essa figura.	
119	19:18	Pelo fato de que, eu fiz reflexão por ponto, pelo ponto B, e com isto	Mhm.	
120	19:22		E em qual ponto? O que é simétrico aqui, quer dizer, centro de simetria aqui.	
121	19:29	O ponto médio desse segmento, do segmento AC, por exemplo, e		
122	19:32		Você já utilizou a propriedade de que ele é o ponto médio desses dois segmentos?	
123	19:38	Certo, é verdade, ainda não o fiz. E pelo fato de eu ter girado por aqui, então o triângulo inteiro gira automaticamente... através da reflexão ele girou então.		
124	19:48		Você teria que primeiro ahn sua consideração poderia estar correta, mas teria que explicitar ela melhor, o que você quis dizer com isto.	
125	19:57		Bom, B e B' você disse certo, são simétricos, está correto, assim	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
126	20:04	Daí o ponto E é então ahn o ponto médio entre A e C, do segmento AC	Sim.	
127	20:10		O que posso fazer com essa propriedade! Você ainda não tirou nenhum proveito disso.	
128	20:23	Eu poderia dividir o triângulo em duas partes, mas isso não me traria nada...	Não.	
129	20:36		Também iria funcionar se não fosse o ponto médio? [mostra para o ponto E e o segmento AC]	
130	20:42	Daí não iria funcionar, que então o ponto A estivesse sobre o segmento C'B' e		
131	20:47		Provavelmente, não é?	
132	20:48	Sim.		
133	20:50		Sim, porque, qual a propriedade que faz a diferença.	
134	21:01		Bom, até agora só sabemos que esses dois são refletidos por um ponto [B e B'], são então simétricos. Posso fazer algo com a propriedade de que este é o ponto médio do segmento AC?	
135	21:19	Sim, quer dizer que o segmento AE é do mesmo tamanho que o segmento EC.	Mhm.	
136	21:24		E em relação ao segmento BE e EB'?	
137	21:28	Sim, eu já tinha dito anteriormente que eles têm o mesmo comprimento.		
138	21:30		Então qual afirmação você pode fazer sobre A e C?	
139	21:36	Que eles estão a uma mesma distância.	Em relação a E.	
140	21:43	A para E é igual ahn quer dizer, o segmento AE é igual ao segmento EC.	Mhm	
141	21:49		Se você juntar isto agora com a afirmação que B' é simétrico de B, em relação a E,	
142	22:00	Então posso ver esses triângulos como congruentes, pois eu também sei que, na verdade não sei, isso posso supor da da simetria... "*ai minha nossa*"		
143	22:16		Não, você pode fazer isto. O que você disse? Se eu	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
144	22:19	Posso dizer agora, então se eu pegar, por exemplo, o triângulo ECB' e o triângulo AEB, os dois é pra ser congruentes e eles têm esse segmento em comum [BE e EB'] e este segmento em comum [AE e CE], porque são os pontos médios e daí na verdade também sei que eles estão sob um mesmo ângulo.	Ok. Sim.	
145	22:45		Um ângulo você precisa, não é? Qual caso de congruência você iria utilizar?	
146	22:53	Lado-Ângulo-Lado		
147	22:54		Exatamente. Você pode anotar para que a gente mantenha isso.	
148	23:01		Bom, e quais segmentos são congruentes agora?	
149	23:06	Então, são congruentes AE e ahn EC; daí ahn EB		
150	23:24		Sim, para qual? Ainda fique na anotação.	
151	23:31	EB e EB'.	Mhm.	
152	23:35	E agora na verdade também é congruente o ângulo CEB' e o AEB. E com isto então seria, então já temos eles iguais.	Mhm, certo. Sim.	
153	23:56	Bom... e ahn agora sei então		
154	24:00		Só um pouquinho, isso você ainda não tinha mencionado, por que eles são de mesmo tamanho? [mostra para os ângulos AEB e CEB']	
155	24:10		Esses dois ângulos?	
156	24:11	Sim, isso vem ahn pela simetria de pontos ahn...		
157	24:23		Existem assim, leis sobre ângulos.	
158	24:28	Por causa do ângulo oposto pelo vértice. Eles são iguais, porque este e este [CEB' e B'EA] se complementam em 180 graus, e embaixo a mesma coisa, e como é uma mesma reta,	Sim.	
159	24:40		Exatamente. Ângulos opostos pelo vértice na reta.	
160	24:44	Exato.		
161	24:45		Ok, agora você sabe que esses dois [ângulos CEB' e AEB] são congruentes entre si e o que você pode fazer com isto agora.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
162	24:53	Bom, com isto posso agora ahn eu posso em todo caso, eu posso fazer a mesma coisa com esse triângulo [mostra C'DB] e ahn... quer dizer, eu posso em todo caso se eu tenho esses dois triângulos congruentes posso também enxergar estes dois triângulos congruentes [mostra triângulos BEC e AEB'] porque exatamente a mesma coisa	Correto.	
163	25:17		Vale exatamente a mesma coisa, ok, anote isto também. Qual o resultado que você tem disso então?	
164	25:22	Bom, daqui ahn que o triângulo ABE é congruente com o triângulo ECB', bom, e ahn		
165	25:38		O outro é análogo	
166	25:39	Aí também posso, exato		
167	25:41		Análogo vale.	
168	25:44	Então o triângulo BCE é congruente com o triângulo AEB'		
169	25:58	E ahn disso segue então que ahn que o triângulo original ABC é congruente com AB'C.		Aluno anota no papel.
170	26:23	Isso… E agora eu posso ahn basicamente também afirmar que poderia fazer da mesma forma análoga com o triângulo AC'B porque vale a mesma reflexão	Correto.	
171	26:40	Ahn		
172	26:50	O triângulo ABC também é congruente ao triângulo AC'B e disso resulta que esses dois também são congruentes [aponta triângulos AC'B e AB'C] pela congruência dos dois.	Mhm.	
173	27:02		Certo, a transitividade da congruência.	O aluno vai anotando…
174	27:13	E ahn …		
175	27:16		Bom, agora justificamos algumas coisas mas agora temos que voltar pro objetivo, na pergunta a ser respondida, do problema.	
176	27:32	Bom, e agora eu sei que ahn que os ângulos também são iguais, que, portanto ahn que, por exemplo, este lado é paralelo a este [mostra AB e B'C]. Isso se pode concluir dessas congruências e ahn disso eu sei que... com isso eu descobri, em todo caso, o paralelismo dessas duas retas.	Mhm. Mhm. Ok. Sim.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
177	28:03	E ahn pelo fato de este ser de mesmo tamanho e paralelo a este [mostra os lado AB e B'C] e o mesmo posso dizer deste para com este [mostra lados AC e BC'], então também fica claro que então ahn o ponto A deve estar sobre esse segmento.	Mhm.	
178	28:18		Não entendo	
179	28:20	O lado C'B é igual ao lado AC pela congruência e o mesmo posso dizer do segmento AB com o C'B ahn CB'.	Correto. Sim.	
180	28:36	Bom, e ahn também pelo fato da congruência o ângulo C'BA é igual ao ângulo ACB' ahn deve seguir que... ahn... sim, depende de como eu quiser expressar, que, por exemplo, se eu definir ahn a altura do triângulo e puxar a altura por B, a altura também seria a mesma ali [mostra o ponto C] e se eu conseguir traçar um segmento ali, não dá pra ser assim?		
181	29:14		Possivelmente. Provavelmente daria assim.	
182	29:18	Ou tem um jeito mais fácil.		
183	29:20		Bom, teríamos que complementar um pouco e fazer alguns passos a mais, mas você tinha uma idéia diferente antes.	
184	29:28	Aquilo com os 180!		
185	29:30		Ou, com o paralelismo também se pode fazer algo. Está correto. Você tem que mostrar agora então que ahn	
186	29:38	Oh, sim, isso é		
187	29:40		B'C, quer dizer que A está sobre a reta B'C'	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
188	29:45	Exatamente. Ahn... Bom, eu posso em todo caso da congruência dos triângulos, eu posso ahn eu posso concluir que estes três ângulos [mostra C'AB, BAC e CAB'] somados juntos resultam os 180 Graus dos ângulos internos de um triângulo ahn já que pela congruência é dito que o ângulo ABC [mas mostra BAC] é igual ao ângulo ACB' ahn e com isto temos dito sobre este [mostra BAC], aí o ângulo CBA é igual ao ângulo C'AB, e o mesmo posso fazer com o ângulo BCA que é igual ao B'AC e com isso eu sei então que aqui em cima estão todos os ângulos do triângulo, do triângulo original, que seriam os 180 Graus. E com isto estaria então	Mhm. Mhm. Mhm. Exato.	
189	30:47		Correto.	
190	30:50	Está bom assim, ou?		
191	30:52	É verdade. E disso segue que	Sim, está ok. Você também poderia ahn o que você tinha, o paralelismo, também daria para argumentar, você poderia ter dito que o segmento AB' é paralelo ao segmento BC, e este também é paralelo a este [mostra C'A e BC]. Não é? Nos dois está A, e os dois segmentos, então eles teriam que, exato	
192	31:22		Mas legal, não é? Você já pode continuar com a atividade 2.	
193	31:35	Ok.		
194	31:36		Sim.	„Você poderia salvar o arquivo para que eu tenha depois?”
195				O aluno lê a atividade enquanto o professor salva o arquivo da atividade anterior.
196	32:08	Bem, devo desenhar primeiro de novo?		
197	32:11		Pode sim.	
198	32:16	Então vou desenhar primeiramente um quadrilátero... ahn depois posso acrescentar as bissetrizes, as quatro bissetrizes internas, isso dá aqui também [com ferramenta do geogebra], onde está	Mhm.	Murmura suas ações enquanto constrói a figura.

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
199	32:35		Ali no	O aluno procura a ferramenta própria do geogebra para construir as bissetrizes.
200	32:37	Ah sim.		
201				Clica apenas nos lados, construindo assim as bissetrizes internas e externas.
202	32:55		Bom, se você pudesse retirar a segunda sempre... isso.	O aluno esconde as bissetrizes externas.
203	33:17	Ok, então agora pego o ponto de interseção então ahn onde ele está sobre a reta.	Mhm.	
204	33:27	Mhm.	Precisamente só das bissetrizes vizinhas.	
205	33:35	São estes então?!		Mas o aluno marca os pontos de interseção das bissetrizes com os lados da figura.
206	33:39		Não, ahn os pontos de interseção dessas bissetrizes com elas mesmas.	
207	33:46	Ah é verdade.		Apaga os dois pontos já marcados.
208	33:54	Então é este ... ou?		
209	34:03		Também não é tão importante agora se está na ordem certa. Isso, então sempre apenas duas bissetrizes vizinhas se cortam.	O aluno marca então os quatro pontos corretos.
210	34:25	Pronto.		
211	34:30		Exatamente, esta é a figura.	
212	34:34	Bom, e agora eu tenho que variar os pontos A, B e C e observar o que acontece então com o quadrilátero interno.	Mhm.	
213	34:46	Mhm.	Experimente ter quadriláteros específicos, assim, obtê-los.	
214	34:56	Então eu é para elaborar uma conjectura ou primeiramente apenas experimentar		
215	35:00		Se você já tem uma conjectura, você já pode	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
216	35:03	Então, minha conjectura é para todo caso já o seguinte ahn quando o quadrilátero original, quer dizer, o quadrilátero ABCD ahn for um regular ou então um quadrilátero especial então o quadrilátero interno, esse EHGF então será um desses		
217	35:19		Ok, experimente uma vez, mas ainda esteja aberto para outras coisas, certo?	
218	35:25	Então, por exemplo, isto aqui é quase um losango, de certa forma, e ahn e aí no meio um retângulo se for ahn se formou um retângulo, por assim dizer.		Conclui sua conjectura movimentando a figura e já vai indo pra próxima.
219	35:42		E é, quer dizer, estava realmente correto de forma exata... era um losango o que você tinha ali?	
220	35:55	Sim, acho que era...		
221	35:57		Também não sei ao certo agora, então experimente simplesmente mais um pouco.	
222	36:09		O que mais poderia ser.	Descarta o losango
223	36:12	Bom isso seria, por exemplo, uma, não, não bem, isso seria ahn...		Tenta ajeitar a figura tal que se torne um quadrilátero pipa, movimentando os vértices B, C e D.
224	36:54	Então, quando ahn quando a figura é simétrica, assim como agora no quadrilátero pipa, este não está bem, mas quase... está sim, está simétrico, ahn aí os pontos caem juntos.	Mhm.	
225	37:11	Este também é o ahn o ponto da circunferência interna então, quer dizer o ponto central da circunferência que circunscreve o quadrilátero, este resulta então quando os pontos caem juntos e, portanto isso apenas acontece quando o quadrilátero ABCD, quando ele ahn possui a possibilidade de uma circunferência inscrita.	Mhm.	
226	37:35		Você pode anotar isto.	
227	37:46	Portanto, quando o quadrilátero ABCD ahn... como posso dizer, for um quadrilátero especial que possa ter uma circunferência inscrita, talvez possa dizer assim, ou eu já é para escrever o que poderia ser		
228	38:05		Não, pode ser assim.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
229	38:06	Então quando o quadrilátero ABCD possui uma circunferência inscrita... daí os pontos E, F, G, H caem juntos sobre um ponto [na folha ainda consta: o centro dessa circunferência inscrita].		O aluno anota na folha murmurando junto.
230	38:48		Ok. Isto é uma conjectura, antes você também tinha uma conjectura, com o	
231	38:54	Mhm. Logicamente aquilo não estava correto, pois quando é um losango, o losango também possui circunferência inscrita e então isso não pode acontecer.		
232	39:09		Experimente uma vez.	
233	39:14	Ah sim, isto não é um losango mas ahn estes são os lados BD e AC são ahn sim, paralelos entre si, pelo menos agora mais ou menos, e ahn... quando então ahn isto então não é um losango mas um paralelogramo normal e então resulta no meio em um paralelogramo normal resulta um retângulo no meio.	Mhm.	
234	39:50		Mhm. Anote então. Não precisa ser formulado de forma bem exata, apenas para mantermos a idéia. Em forma de tópicos é suficiente.	
235				O aluno completa na folha.
236	40:18	Bem. E ahn...		
237	40:28	Sim, o ahn... minha conjectura é em todo caso que um quadrilátero especial apenas resulta dentro quando uma figura especial externa também		
238	40:41		Mhm. Você tinha dito bem no início.	
239	40:43	Exatamente, eu já havia dito no início. E, o que mais chama atenção também é, quando este triângulo ahn quadrilátero ABCD se manter o tempo todo convexo, aí resulta, também deveria ser, então resulta um quadrilátero convexo dentro também. Mas também tinha que ser assim, pelo enunciado da atividade.	Mhm.	
240				O aluno segue testando outras configurações do quadrilátero externo.
241	41:22		Mhm, o que você está tentando construir?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
242	41:26	Ao contrário também é possível ahn... se eu agora, se ahn... Sim, assim resulta por assim dizer um quadrilátero pipa no meio quando fora for um ahn sim, criado um trapézio regular		
243	41:49		Tiver um eixo de simetria	
244	41:50	Sim, um trapézio com eixo de simetria		
245	41:51		Você também pode anotar.	
246	42:17		Como você poderia proceder para possivelmente você encontre todas as conjecturas. Pode ser que ainda existam mais outras cinco conjecturas.	
247	42:38	Bom, agora podemos ahn pensar a respeito das relações ahn... dos ângulos ali ahn o ahn bem, os pontos resultam das bissetrizes, que se interceptam, e...		
248	42:53		Aha, ok ... isto já fica bem mais profundo. Antes no início você tinha uma conjectura que apenas quadriláteros especiais poderiam resultar quando	
249	43:05	Especiais, sim.		
250	43:06		Você já tem todos os quadriláteros específicos?!	
251	43:10	Mas eu também já havia dito que, por exemplo, sim eu não tenho que todos os quadriláteros especiais porque um quadrado já está automaticamente incluso aqui [mostra a primeira conjectura], porque no quadrado resulta também uma circunferência inscrita e disso segue que então os pontos estarão num mesmo ponto.	Mhm.	
252	43:27		Ok, então	
253	43:28	Então conta para os com circunferência inscrita.		
254	43:29		Então você pode incluir o quadrado aqui [mostra para as anotações na folha]	
255	43:37	Aí também tinha o losango e o quadrilátero pipa, pois o quadrilátero pipa também possui circunferência inscrita.	Sim.	
256	43:47	E no mais, um retângulo já não pode ser.		
257	43:50		Mhm. Você já experimentou? O que acontece com um retângulo?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
258				O aluno configura a construção tal que o quadrilátero externo seja um retângulo
259	44:03	Ah sim, no retângulo resulta um quadrado.		
260	44:07		Então anote.	
261	44:30		Sim, o que mais temos. Já temos tudo?	
262	44:36	Bem, no quadrilátero pipa então, nele pensamos que... o trapézio também já tínhamos, o retângulo; o quadrilátero pipa também possui circunferência inscrita; trapézio com eixo de simetria também já tínhamos		Vai murmurando posíveis quadriláteros
263	44:55		O trapézio geral... talvez ainda	
264	45:08	Assim de alguma maneira então... os lados não precisam ter eixo de simetria		Configura um trapézio qualquer
265	45:16		E é algo razoável?	
266	45:19	Sim, bem, então, na realidade é uma espécie de quadrilátero pipa, mas não é simétrico, quer dizer, algo que faça sentido eu não vejo. Ou eu construi de forma bem inexata...	Mhm.	
267	45:36		Bem, agora, sua primeira conjectura era que dentro apenas poderia resultar uma figura	
268	45:43	Uma regular		
269	45:45		Figura regular quando a externa é regular.	
270	45:46	Exatamente.		
271	45:47		Você poderia verificar isso, se esse realmente é o caso ou se com uma figura externa irregular também se pode obter algo relativo assim dentro.	
272	46:04	Hmm... se é pra ser uma espécie de retângulo então... bom, ainda não é isso... talvez seja inevitável...		O aluno busca uma configuração de quadrilátero qualquer com a qual se possa obter um especial...
273	46:30	Ahn… é inevitável que seja então...		
274	46:36		Que tipo de figura é no momento, dentro.	
275	46:41	Então, dentro é quase mas não bem um retângulo e...		
276	46:46		Sim mas o que é agora não bem um retângulo?!	
277	46:53	Ah sim, é verdade, é um ahn sim é um trapézio.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
278	46:59		Um trapézio, não é? Um lado já paralelo.	
279	47:10	Sim, e isto vem do fato de que...		
280	47:21		Complicado, não é? De colocar isto.	
281	47:22	Complicado. [*incompreenssível*]		
282	47:29	Mhm.	Mas você já tinha mencionado antes que talvez as relações dos ângulos estivessem envolvidas, mas deixemos isto de lado. Você consegue encontrar mais alguma coisa? Agora você tinha aqui que existe um ponto central, nesses tipos de quadriláteros, não é? Você consegue mais uma possibilidade na qual... O que é agora?	
283	47:56	Nada regular.	Mhm.	
284	48:01	Bom, claro, não temos circunferência inscrita apenas em quadriláteros regulares, a circunferência inscrita também pode resultar de outra maneira. Quer dizer... ahn sim se a ahn se resultar assim ahn as perpendiculares, pelo ponto, tiver mesma distância até os lados. Mas isso não precisa ser um quadrilátero especifico.	Mhm. Mhm.	
285	48:31		Existe um especial, quer dizer, este são então ahn ... são os quadriláteros circunscritíveis.	
286	48:42	Quadriláteros circunscritíveis.	Mhm.	
287	48:49	Ok.	Neles, os lados então são tangenciais à circunferência inscrita [mostra como, na figura]. E estes são então quadriláteros circunscritíveis especiais [mostra nos quadriláteros anotados – quadrado, losango e quadrilátero pipa].	
288	49:04		Ok. Então se coloque ao trabalho e tente justificar uma dessas conjecturas.	
289	49:18	Ok, bem. Tanto faz qual ou		
290	49:21		O que lhe pareça mais simples. Ou podemos ver ainda, quais os quadriláteros especiais podem resultar para E,F,G,H, o que você já tem, e daí em especial, quando eles se cortam em um ponto.	
291	49:35	Exatamente, então eu é para provar uma delas.		
292	49:37		Mhm, quer dizer, ou um quadrilátero especial ou então que eles se cortam em um ponto.	
293	49:45	Bom, uma agora então… [*incompreensível*]		
294	49:51		Das conjecturas, a que você quiser.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
295	49:55	Bom, eu vou escolher essa então, que eles se cortam em um ponto.	Ok.	
296	50:00	Hm bom, na figura que nós já temos aqui, já posso...		
297	50:14	Mhm. Mhm.	Bom, se você quiser fazer nessa figura você já estaria incluindo todos os casos particulares. Mas você também pode um caso especial... ou, é, você tem que se decidir. Há diversas possibilidades, ou alguns casos específicos para chegar numa justificativa geral, ou você pode tentar ir direto para a justificativa geral e aí você tem os casos especiais automaticamente inclusos.	Enquanto o professo fala, o aluno vai modificando a construção, analisando as diversas configurações possíveis de quadriláteros quaisquer
298	50:54	Bom, então o ahn quando ainda não é nada em especial como agora, se vê em todo caso que, suponho agora antes de tentar justificar, que ahn que, sim, também fica claro pelo fato, quando duas retas se cortam, então os ângulos, os ângulos opostos são de mesmo tamanho, já tínhamos isto na atividade anterior, então o ângulo é igual, e o		Mostra os ângulos formados pelas retas bissetrizes, quando os pontos E, F, G e H coincidem.
299	51:21		E os ângulos iguais e, então, os ângulos opostos pelo vértice, isso sempre vale, até agora, nenhuma informação nova.	
300	51:31	Sim, é verdade, provavelmente também não ajuda em nada.		
301	51:42	Então bom, eu posso ahn... eu posso naturalmente agora ahn se eu puxasse a perpendicular, eu poderia ahn...		
302	51:57		Você pode fazer isso tranquilamente.	
303				O aluno constrói a perpendicular ao lado DC passando pelo ponto onde os pontos E, F, G e H coincidem.
304	52:17	Ahn ... [*murmura algo incompreensível*]		
305	52:31	Bom, eu posso ahn ...		
306	52:42		O que você tem em mente agora?!	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
307	52:49	Então, agora estou tentando ahn mostrar que ahn que o que, por exemplo, que seria um dos pontos de tangência, disso segue que eu quero mostrar que o segmento do ponto E até o ponto novo [ponto sobre o segmento CD, através de perpendicular] terá o mesmo tamanho que este [mostra para o outro lado da perpendicular] e daí então a mesma coisa com os outros.	Mhm. Mhm.	
308	53:13	Quer dizer, não exatamente a mesma coisa, mas da posição da perpendicular dali.	Mhm.	
309	53:17		Você pode diretamente, sim, traçar a circunferência com este raio e ver se ele pertence ali.	
310				O aluno constrói a circunferência centro no ponto E e raio até o ponto de interseção da perpendicular com o lado DC
311	53:35	Sim.		
312	53:42	Bom, basicamente dá pra ver isto já, mas, isso tem que ser verificado.		
313	53:52		Trace mais algumas perpendiculares, pelo menos mais uma.	
314				O aluno constrói a perpendicular ao lado AB passando por E.
315	54:04	Bom.		
316	54:09		Agora você criou perpendiculares a lados opostos, trace uma vez uma perpendicular vizinha.	
317				O aluno constrói a perpendicular ao lado AD passando por E.
318	54:24	[*murmura algo incompreensível*]		
319	54:32	Bom, então se eu agora...		Cria o ponto de interseção entre a perpendicular e o lado AD = J.
320	54:51		Mhm, se você observar essas duas perpendiculares.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
321	54:59	Então para que eu possa provar isto, eu posso daí, bom não posso colocar condições... não, mas ahn eu sei em todos os casos que aqui é 90 graus, assim como aqui, já que traçamos perpendiculares...	Sim. Mhm.	
322	55:37		Bom, você precisa considerar quais as propriedades que você utilizou para construir a figura.	
323	55:58		Que tipo de	
324	56:59	Eu sei, bom, eu sei que pelo fato de esta ser a bissetriz, sei que este ângulo, o ângulo JDE é igual ao ângulo EDI		
325	56:10		Correto, pois é a bissetriz.	
326	56:12	Exatamente. E eu sei que, tenho o ângulo exato agora, também sei que este ângulo é igual [mostra EJD e DIE] ele é o ângulo de 90.		
327	56:34	Bom, agora eu tenho esse ângulo [mostra o ângulo em D]... e esse ângulo [mostra o ângulo DIE].		
328	56:41		Aonde você quer chegar?	
329	56:44	Bom, se eu agora, posso mostrar que são congruentes?!		
330	56:49		Você quer mostrar que esses dois são congruentes, você já tem dois ângulos, precisa apenas de um lado ainda.	
331	56:55	Exato. Então, o lado, pro exemplo, o lado BD é o exatamente o mesmo. Quer dizer, BD é o mesmo lado e disso segue que estes dois são congruentes [mostra os triângulos EJD e EDI], e disso resulta logicamente que o segmento IE tem mesma medida que o segmento EJ; e segue desses dois juntos daí então ahn que devem estar sobre a mesma circunferência então. Portanto se fosse a circunferência inscrita, pelo fato de serem segmentos iguais, se eu traçar uma circunferência por um deles o outro também deve estar sobre ela.	Mhm.	
332	57:27		Hm, e onde deve estar o ponto para que suas conclusões sejam válidas?	
333	57:40	Ahn ... sim ele deve estar, deve estar a uma mesma distância para o ponto I e J, para os dois.		
334	57:53		E onde estão todos estes pontos?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
335	57:54	Sobre a ahn... bom, sobre a mediatriz do segmento IJ. Se eu traçasse o segmento IJ		
336	58:05		Sim, mas I e J são variáveis, de acordo como estiverem os outros pontos, mas em geral,sobre qual, em qual lugar geométrico deve estar o centro para que uma circunferência em torno do ponto, encoste nos dois lados do quadrilátero [AD e DC].	
337	58:31		E para que estes dois triângulos sejam congruentes, não é? Isso você já encaminhou bem certinho, mas quais as condições para isso. Para esta figura como está agora, então os triângulos são congruentes. Mas para onde posso movimentar este ponto [ponto E=F=G=H]? Posso movê-lo para lá? [mostra pra esquerda em algum lugar].	
338	58:56	Não, porque ele tem que, então, se como foi dito, se eu, por exemplo, traçar um segmento aqui [por I e J] a mediatriz ahn o ponto E deve estar em algum lugar nesse segmento ahn em relação a esses dois pontos [I e J]. Por que tem que ter a mesma distância.		
339	59:10		Sim, está certo, embora I e J sejam produtos da posição de E. Se E estivesse em outro lugar, I e J também estariam em outro lugar. Em relação a isso, essa mediatriz que mencionamos, talvez nós já a tenhamos aqui.	
340	59:30	Sim, é a bissetriz do ângulo ADC	Sim, isso é maravilhoso, exatamente.	
341	59:34		Quer dizer, o centro da circunferência inscrita deve estar em algum lugar da bissetriz.	
342	59: 40	Exato, sim, é claro.	Correto.	
343	59:43	Sim e o mesmo poderia naturalmente, posso também com este, poderia fazer análogo e... disso resulta na verdade então já, segue que é assim. Que todos estão num mesmo ponto. Ou	Mhm.	
344	59:57		Sim, mas temos que colocar uma condição para que possamos descobrir, ou você pode movimentar, não vale para todos os quadriláteros, mas só para alguns.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
345				O aluno mexe na figura movimentando o ponto C, desfazendo E=F=G=H.
346	1:00:09		Por que não vale para este quadrilátero agora.	
347	1:00:13		Essa condição, isto você ainda tem que descobrir, não é?	O aluno vai movimentando a construção pelo ponto C, num vaivém com a configuração de E=F=G=H e outras.
348	1:00:27		O que você está modificando bem agora?	
349	1:00:31	Bom, estou puxando no ponto C, e ahn...		
350	1:00:45	Sim, estou modificando agora para ahn...		
351	1:00:51		Existe um segundo ponto onde fica igual, ou existe um lugar geométrico onde isso fica igual?	
352	1:01:00	Bem, sobre a ahn se eu, mover ahn... sobre a... se eu simplesmente mover sobre a bissetriz mesmo, se se ahn isso só é verdade... bom, isto não é uma relação...	Mhm.	
353	1:01:38	Resultam congruente, isso.	Ok, vamos voltar para a relação com a congruência. Isto estava muito bom. Você quis dizer que estes pontos de encontro da circunferência, do raio, ahn divide estes segmentos [mostra AD e DC] de tal maneira que aqui resultam dois triângulos congruentes. E isso você mostrou para este ponto. E se você continuasse isso? No próximo ponto?	
354	1:02:09	Bom, na verdade, teoricamente posso fazer algo análogo, quer dizer é a mesma coisa se nós traçássemos a perpendicular aqui de novo, devo fazer isso?	Mhm.	
355	1:02:16		Sim, claro.	
356	1:02:23	Pronto, e aqui está o ponto de interseção.		Aluno constrói a perpendicular ao lado BC, passando por E, resultando no ponto K.
357	1:02:29	Ahn, ali posso dizer exatamente a mesma coisa. Ali também posso dizer que este segmento é igual a este segmento, quer dizer esse segmento ou qualquer que seja em C ahn igual a este segmento.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
358	1:02:40		Então desenhe uma vez os dois triângulos congruentes.	
359				O aluno cria os triângulos IEC e KEC.
360	1:03:15		Ahn pode deixá-los com a mesma cor. Desenhe também estes dois triângulos congruentes [mostra triângulos JED e IED], estes você pode pintar de outra cor.	
361	1:03:31		Você também pode construir o todo, os dois triângulos juntos, pois temos a bissetriz como corte.	
362				O aluno constrói o quadrilátero composto pelos dois triângulos congruentes e os pinta de outra cor.
363	1:03:55		Ok. Se você fizer isto para os outros também? Ali você ainda precisa dos pontos de interseção da perpendicular. Não sei bem ao certo qual desses dois que é [mostra dois pontos de alguma interseção sobre o lado AB].	
364	1:04:12	É este aqui.		Cria o ponto de interseção L sobre o lado AB.
365	1:04:13		É este, sim.	
366				Cria o quadrilátero KELB e muda sua cor.
367	1:04:54	Mhm.	E sim, sobre estes pares de triângulos congruentes você sabe que segmentos e ângulos correspondentes são de mesmo tamanho.	
368	1:05:06		Você consegue fazer uma afirmação sobre o quadrilátero completo? Este é o objetivo, não é? Eu quero saber quais quadriláteros possuem uma circunferência inscrita , ou seja, nos quais os pontos de interseção das bissetrizes caem juntos.	
369	1:05:26	Bom, eu poderia estabelecer primeiramente a conjectura, ahn que diz que esse quadrilátero, quer dizer o verde [EJDI] é igual, ou seja, congruente com este [IEKC], pelo menos parece congruente.		
370	1:05:38		Experimente uma vez, se você movê-los se ainda permanece igual ou se modifica.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
371				O aluno arrasta o ponto C, tentando manter E=F=G=H
372	1:05:50	Ah sim, não.		
373	1:05:53		E? Conjectura parcial descartada imediatamente.	
374	1:05:57	Já é bom assim [risos].		
375	1:06:04		E os opostos também não são congruentes, não é? Bom, então assim não dá nada.	
376	1:06:16	Sim, mas o que em todo caso ahn sempre vale é ahn que em parte são simétricos, quer dizer, figuras simétricas, esses quadriláteros devem ser simétricos em relação à bissetriz como eixo.	Correto. Mhm. Simétricos.	
377	1:06:30	Exatamente.	Exatamente. Então, diagonais, sim, são vários quadriláteros pipa. Mas como podemos continuar agora.	
378	1:06:54	Exatamente.	Pegue novamente as propriedades, ok você pode também pode pegar as propriedades dos quadriláteros pipa, que segmentos correspondentes são de mesmo tamanho e ângulos correspondentes aqui, você consegue de alguma maneira fazer uma afirmação sobre o quadrilátero todo?	
379	1:07:16	Pontos de interseção juntos, exatamente.	Bom seria assim, se em um quadrilátero tal e tal acontece, então caem juntos os ahn pontos de interseção das bissetrizes.	
380	1:07:39		Para chegar lá você tem que simplesmente experimentar de alguma maneira, olhar de novo o que você já descobriu agora.	
381	1:07:48	Sim, ahn…		
382	1:07:58	Então, agora, por exemplo, no tri ahn quadrilátero azul vejo que este dois ângulos são iguais ahn [mostra LBE e KBE e murmura algo]		
383	1:08:08		Mhm, pela bissetriz então, não é? Ok.	
384	1:08:12	Exatamente, e ahn... bom, que estes segmentos são de mesmo comprimento... [mostra LB e KB]	Mhm.	
385	1:08:46		Você pode pensar alto também.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
386	1:08:48	Bom, naturalmente a relação sobre a, quer dizer a que deve ser dada é que esses segmentos têm mesmo comprimento [mostra EI, EJ, EK e EL] e estou tentando no momento passar de um quadrilátero para o outro e daí podemos de alguma maneira estabelecer uma relação. Mas no momento não me ocorre nada direto... algo que eu possa relacionar tudo daí.	Mhm.	
387	1:09:18		Bom você já disse, primeiro que os ângulos devem ser de mesmo tamanho, mas isto segue do fato de ser a bissetriz; agora você mostrou que	
388	1:09:30	Que estes dois são congruentes [triângulos LEB e KEB], que isto é um quadrilátero pipa; que esta linha é igual a esta linha [LB=KB] e que este ângulo e este, bom isto já é mesmo assim ahn pelo fato de ter traçado a perpendicular, ahn este igual a este [ângulos retos LEB = KEB].	Exatamente. Mhm.	
389	1:09:46		Sim, e se você transferir estes resultados também para os outros quadriláteros pipa, e tentar.. sim, considerar isto sobre o quadrilátero todo...	
390	1:10:10	Sim, já havia tentado isso agora a pouco, mas não me ocorre nada direto agora ainda	Ou escreva	
391	1:10:21		Anote uma vez seus resultados, portanto quais medidas são iguais, ou você pode buscar por invariantes, que sempre permanecem os mesmos, indiferente como você movimenta o quadrilátero.	
392	1:10:39	Bom sempre deve permanecer a relação ahn que estes quatro quadriláteros parciais sejam então quadriláteros pipa.		
393	1:10:47		Sejam quadriláteros pipa, exatamente. Isso é uma invariante, não é?	
394	1:10:55	Ahn... não posso chamá-los de quadriláteros parciais, chamo-os de		
395	1:11:00		Pode sim, pode dividir o quadrilátero todo em quatro quadriláteros pipa. Pode ser em tópicos, assim, nós sabemos o que quer dizer.	O aluno anota na folha.

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
396	1:11:34	Mhm.	Bom, talvez como uma pequena dica, você disse agora que estes segmentos são de mesmo tamanho [mostra LB e KB], mas estes são dois lados de um quadrilátero pipa. Como você poderia agora denominá-los se você olhar para o quadrilátero todo.	
397	1:11:57	Sim, são partes das, por exemplo, o pedaço BK é parte de BC e ahn		
398	1:12:05		Se você quiser agora designá-los com os lados a, b, c e d? Como você denominaria este segmento? [LB]	
399	1:12:17	Este é, bom o segmento BL é então uma parte do segmento AB. E é naturalmente de mesmo tamanho, estes dois [mostra LB e KB] juntos, estes dois pelo menos.	Mhm.	
400	1:12:29	Por exemplo, b_1 e b_2, sim.	Mhm, se você designar o segmento total como *a*, você poderia denominar uma parte desse segmento de a_1 [AL] e este como a_2 [LB], e estes correspondentemente de b_1 [BK] e b_2 [KC]. E então você poderia estabelecer segmentos iguais correspondentes.	
401	1:12:50		Quais segmentos seriam de mesmo tamanho então?	
402	1:12:53	Seriam então a_2 e b_1.		
403	1:12:56		Mhm … anote também.	
404	1:13:03	Então, a_2 igual a b_1 e é para fazer para todos assim, ou?		Aluno anota as igualdades dos segmentos.
405	1:13:26	Sim, mas disso ainda não posso concluir nada diretamente, quer dizer nada com que possa definir o quadrilátero. Isto já está aí, estou vendo, mas... tenho meus problemas agora em como posso de alguma maneira tirar realmente uma relação direta.	Mhm.	
406	1:13:44		Quantas vezes cada segmento de cada cor aparece?	
407	1:13:48	Duas vezes.		
408	1:13:49		Exatamente, duas vezes. E onde cada uma aparece?	
409	1:13:55	Um ao lado do outro.		
410	1:13:58		Sim... e algum lugar estão os quatro? Juntos.	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
411	1:14:09	Este é o problema, eu não consigo estabelecer alguma relação. Eu não posso dizer agora que ahn este para este [lado *a* e *c*] e, ou algo parecido assim...		
412	1:14:17		Sim, mas o que seria este para este? [lado *a* para *c*]	
413	1:14:20	Sim, mas ali não posso fazer nada, é assim, é a única coisa, não, não posso fazer nada.		
414	1:14:26		Eu não iria desistir tão rápido ali.	
415	1:14:49	Em parte, não. Exatamente.	Então, a parte azul [LB] aparece aqui embaixo, mas não aqui em cima [em CD], não é?	
416	1:14:56	Exato.	E esta também aparece aqui [AL], mas não aqui em cima também em [em CD]. E o mesmo vale ao contrário, não é? Esta não aparece aqui [DI não aparece em AB] e esta também não [IC não aparece em AB].	
417	1:15:06		Como que fica com a azul então [BK]?	
418	1:15:11	Bom, se pegar esta com esta [AD], aí a azul também não aparece ali, e esta também não [CK] e ao contrário também, ahn eles aparecem então ahn no ahn onde o vértice é o mesmo também, nos lados.	Mhm.	
419	1:15:26	Mas disso ainda não consigo tirar nenhuma relação...		
420	1:15:31		Se você comparar agora, sim, se você quiser ter todas as cores uma vez?	
421	1:15:45	Se eu colocá-los todos um do lado do outro.	Mhm.	
422	1:15:50		Precisamente cada cor uma vez só.	
423	1:15:54	Mhm e junto isto resulta então o semi-perímetro!		
424	1:15:58		O semi-perímetro, não é? Exatamente. E quais você pegaria então? Para a.. quais partes.	
425	1:16:10	Todos uma vez, por exemplo, a_1 mais b_1 mais c_1 mais d_1.		
426	1:16:15		Ou, se você vier por aqui [mostra b_1 e b_2], as duas cores já	
427	1:16:20	Ah sim, esta para esta [mostra BC e AD]	Mhm	
428	1:16:23	Ahhhh! Eu acho que agora... poderíamos então sim tirar...		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
429	1:16:32	Ok, portanto a relação que tem que sair então é ahn, por exemplo, o segmento AB mais o segmento CD deve ser igual, quer dizer, tem que ter a mesma medida que o segmento BC mais AD. Isto é uma relação que vale, neste caso.		
430	1:16:54		Mhm, ok, agora ainda temos que formular isso de uma maneira, anotar e conseguir uma seqüência. Bom, você disse agora, se as somas dos comprimentos dos lados oposto são iguais... então	
431	1:17:10	Aí resultam esses quadriláteros pipa ... e através desses quadriláteros pipa é dado que ahn que estes segmentos são iguais [mostra EI, EJ, EK, EL], esses ahn esses segmentos nas perpendiculares. Que eles tem o mesmo comprimento, nos quadriláteros pipa isso é	Mhm. Mhm.	
432	1:17:31		Você poderia tentar anotar novamente?	
433	1:17:37		Você não precisa escrever de forma completa, apenas tópicos, com as setas. Para que possamos transcrever todas as considerações que colocamos, também as da congruência, para anotar todas ela agora.	
434				O aluno anota as principais idéias no papel.
435	1:18:16	Sim, disso segue então que resultam esses quatro quadriláteros pipa... e disso segue daí que, dos quatro quadriláteros pipa ahn segue que, segue que pode existir uma circunferência inscrita. Isso segue do fato que, através desses quatro quadriláteros pipa ahn segue que essas linhas então, esses segmentos perpendiculares tem todos o mesmo tamanho e, portanto existe uma circunferência inscrita.	Mhm. Mhm.	
436	1:18:51	E da circunferência inscrita segue que então que o quadrilátero interno não é mais um quadrilátero, mas apenas um ponto.		
437	1:18:58		Mhm,ok, anote isso também.	O aluno termina de escrever o raciocínio no papel.
438	1:19:32	Sim.		

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
439	1:19:33		Mhm e você pode verificar isto com os casos especiais agora? Que você tinha na primeira conjectura?	
440	1:19:41	No quadrado é verdade em todo caso. Isto é óbvio. No losango, também é assim, porque o losango... sim, é assim porque os dois ahn esses dois são do mesmo tamanho que esses [se refere aos lados], então encaixa. Então no losango também se verifica, devo mostrar de alguma maneira?!	Stimmt.	
441	1:20:03		Não, tudo bem. No losango todos os lados são iguais.	
442	1:20:07	Certo, e, portanto se verifica exatamente.	Se encaixa.	
443	1:20:09	E no quadrilátero pipa não são todos iguais, mas ahn... vemos aqui, temos quadrilátero pipa aqui, se vê aqui que estes são iguais, e este igual a este, e disso segue que estes dois juntos tem o mesmo comprimento desses dois.		
444	1:20:26		Certo, e segue que	
445	1:20:29	Sim, certo, e segue então que ahn... ah sim, exato. Pelo fato deste ser igual a este [KB e LB] e este e este [KE e JE] segue que este e este [LB e EI] juntos resultam no mesmo que este e este [KB e EL].		
446	1:20:47		Exatamente, e você poderia citar contra-exemplos? O que você tinha ali agora	
447	1:20:52	Bom, a partir do ahn então, por exemplo, no paralelogramo... no paralelogramo		
448	1:21:04		Você pode fazer um esboço rapidinho.	
449	1:21:07	Vou fazer isso rapidinho.		
450				O aluno esboça um paralelogramo no papel e observa.
451	1:21:18	Ah claro, sim, não dá porque estes têm o mesmo comprimento e estes têm o mesmo comprimento, aí os ângulos opostos juntos não podem ter o mesmo tamanho que os outros dois.		
452	1:21:27		Quer dizer, poderiam, mas aí seria um caso específico.	
453	1:21:28	Aí seria um caso específico de novo, exatamente.		
454	1:21:30		O losango, não é?	

Nr.	Tempo	Aluno	Docente	Observador
455	1:21:31	Exatamente, certo.		
456	1:21:32		Ok.	
457	1:21:33	No retângulo é a mesma coisa, novamente é um caso especifico do paralelogramo, e daí o trapézio... onde também é assim. Na verdade é bem parecido.		
458	1:22:05		Ok. Muito bem, obrigado.	