UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Diego Dutra Zontini

PRÉ-CONDICIONAMENTO DO MÉTODO GAUSS-SEIDEL PARA M-MATRIZES

Curitiba, 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Diego Dutra Zontini

PRÉ-CONDICIONAMENTO DO MÉTODO GAUSS-SEIDEL PARA M-MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Yuan J. Yun.

Curitiba, 2011.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Diego Dutra Zontini

PRÉ-CONDICIONAMENTO DO MÉTODO GAUSS-SEIDEL PARA M-MATRIZES

Prof. Dr. Yuan Jin Yun
Orientador - Universidade Federal do Paraná - UFPR

Prof. Dr. Fermín Sinforiano Viloche Bazán
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. José Mario Martínez
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Curitiba, 25 de fevereiro 2011.

Aos meus pais e namorada.

Agradecimentos

Aos meus amigos e a minha família, agradeço pela ajuda em todos os momentos, e ao tempo e apoio dispensados ao longo da elaboração desta dissertação.

Ao meu orientador, professor Dr. Yuan Jin Yun, agradeço pela confiança em mim depositada, pela orientação e apoio no desenvolvimento desta dissertação e por todos os conhecimentos comigo compartilhados.

Aos professores Dr. José Mario Martínez e Dr. Fermin Sinforiano Viloche Bazán, agradeço por aceitarem participar da banca examinadora deste trabalho.

Agradeço aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFPR, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro e pela formação de qualidade propiciada.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Pitágoras

Resumo

Neste trabalho estudamos pré-condicionadores para o método Gauss-Seidel, um método iterativo para resolver sistemas lineares quadrados do tipo $Ax = b$. No início apresentamos alguns assuntos preliminares, logo depois, listamos os principais pré-condicionadores existentes na literatura, e apresentamos vários teoremas que nos permitem comparar a taxa de convergência do método Gauss-Seidel pré-condicionado com cada um dos pré-condicionadores listados na literatura.

Ainda no mesmo capítulo, propomos o pré-condicionador $P_{RU} = I + R + U$, onde I é a matriz identidade, R é a última linha de A com o sinal trocado e sem o último elemento, e U é a parte triangular estritamente superior de A com o sinal trocado.

O pré-condicionador proposto é comparado com os demais, mostrando ser bastante eficiente do ponto de vista da aceleração da taxa de convergência do método Gauss-Seidel. Com base nos resultados teóricos, apresentamos vários exemplos numéricos, os quais comprovam a eficiência do nosso pré-condicionador, e também motivam algumas conjecturas que são lançadas na conlusão.

Palavras-chave: *M-matriz, teorema de comparação, convergência, conjectura, método Gauss-Seidel, pré-condicionador.*

Abstract

We study preconditioners for the Gauss-Seidel method, that is a method for solving linear systems. In this work, a new preconditioner for the Gauss-Seidel method is proposed for solving linear systems whose coefficient matrix is a M-matrix. We analyze various preconditioners in the literature, and we shown several comparison theorems for the proposed method. By the comparison results, we can see that our preconditioner is one of the best preconditioners. Numerical examples finally are given to illustrate our theoretical results. Eventually, we conclude analyzing the comparison theorems showed previously, and some conjectures are proposed based on our numerical tests.

Keywords: *M-matrix, comparison theorem, convergence, conjecture, Gauss-Seidel method, preconditioner.*

Sumário

Resumo **iv**

Abstract **v**

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Métodos Iterativos 4

1.2 Pré-condicionamento 8

1.3 Matrizes não negativas 9

1.4 M-matrizes 12

2 Pré-condicionadores para M-matrizes **16**

2.1 Pré-condicionadores 16

2.2 Teoremas de comparação 18

3 Exemplos numéricos **42**

Conclusões **49**

A Algoritmos **51**

Introdução

Muitos problemas das mais diversar áreas, como biologia, física, ciências sociais entre outras, podem ser reduzidos a problemas envolvendo matrizes com uma certa estrutura especial. Uma das situações mais comuns é onde a matriz A em questão tem todos os elementos diagonais positivos e elementos fora da diagonal não negativos, ou seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

com $a_{ij} \geq 0$. Essas matrizes podem ser escritas da forma

$$A = sI - B \tag{1}$$

onde I é a matriz identidade, $s > 0$ e a matriz B é não negativa, ou seja, possui todos os seus elementos não negativos. Estamos interessados em problemas que envolvem matrizes da forma (1) tal que $s > \rho(B)$, onde $\rho(B)$ denota o raio espectral da matriz B, tais matrizes são chamadas de M-matrizes.

Agora, considere o seguinte sistema linear

$$Ax = b \tag{2}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma M-matriz não singular, e $b, x \in \mathbb{R}^n$. Neste trabalho, vamos supor que A possa ser escrita da forma $A = I - L - U$, onde I a matriz identidade de ordem n, $-L$ é a parte triangular estritamente inferior de A e $-U$ é a parte triangular estritamente superior de A.

Há vários métodos para resolver o sistema (2), em geral podemos destacar duas classes de métodos: os métodos diretos, que resolvem o sistema em uma quantidade finita de passos, e os métodos iterativos, que buscam encontrar uma sequência de vetores $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ que converge para a solução exata do sistema.

Dentro da classe dos métodos iterativos, existe uma subclasse chamada de métodos

splittings, tais métodos buscam separar a matriz A da forma

$$A = M - N$$

de maneira que M seja não singular, e assim temos que

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (M-N)x &= b \\ Mx - Nx &= b \\ Mx &= Nx + b \\ x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

o que sugere o método

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b.$$

Neste caso, a matriz $M^{-1}N$ é chamada de matriz de iteração do método, e a convergência do método depende, em geral, do raio espectral dessa matriz. Uma condição necessária para a convergência é que o raio espectral da matriz de iteração seja menor que 1, e quanto menor o raio espectral menos iterações são necessárias para atingirmos um determinado critério de convergência.

O método iterativo que será alvo de estudo nesse trabalho é o método Gauss-Seidel, que pode ser visto como um método *splitting*, onde escolhemos M como sendo a parte triangular inferior da matriz A, e N como sendo a parte triangular estritamente superior da matriz A com o sinal trocado.

Em alguns casos, a taxa de convergência do método não é satisfatória, e no caso de um problema mal condicionado poderia levar muito tempo para chegarmos a uma boa aproximação da solução exata. Uma maneira de acelerar a convergência é usar pré-condicionadores, ou seja, uma matriz P tal que o novo sistema pré-condicionado

$$PAx = Pb \tag{3}$$

convirja mais rapidamente que o sistema original (2). O problema agora é como determinar tal matriz P para que o raio espectral da nova matriz de iteração seja consideravelmente menor que o raio espectral da matriz original.

Neste trabalho, vamos abordar alguns pré-condicionadores para o método Gauss-Seidel sugeridos na literatura, onde a matriz dos coeficientes do sistema é uma M-matriz. Então vamos sugerir um novo pré-condicionador e comparar a eficiência do novo pré-condicionador com os demais.

Essa dissertação será apresentada na seguinte estrutura: no primeiro capítulo, faremos uma breve exposição de alguns assuntos preliminares, abordando métodos iterativos e

seus critérios de convergência, pré-condicionamento, faremos um estudo sobre as matrizes não negativas, apresentando algumas definições e propriedades importantes. E por fim, faremos um rápido estudo sobre as M-matrizes.

No segundo capítulo, apresentaremos alguns pré-condicionadores existentes na literatura, e em seguida propomos um novo pré-condicionador. Com base nisso analizamos a eficiência dos pré-condicionadores mostrando alguns teoremas de comparação entre eles.

No terceiro e último capítulo, mostraremos alguns exemplos numéricos, comparando o raio espectral das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado com cada um dos pré-condicionadores abordados neste trabalho, considerando diversos casos de acordo com as condições estabelecidas nos teoremas de comparação.

Concluímos fazendo uma análise dos teoremas de comparação apresentados no capítulo 2 e dos testes numéricos apresentados no capítulo 3, e apresentando algumas conjecturas a respeito do método proposto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve exposição a respeito de alguns assuntos preliminares, exibindo resultados importantes que se farão necessários posteriormente.

1.1 Métodos Iterativos

Vamos considerar um sistema linear

$$Ax = b \tag{1.1}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular e $x, b \in \mathbb{R}^n$. Existem várias maneiras de resolver o sistema linear (1.1), aqui vamos destacar as duas principais classes de métodos, que são os são métodos diretos e os métodos iterativos. Um método direto é um algorítmo que encontra a solução do sistema em uma quantidade finita operações aritméticas, enquanto um método iterativo é um algorítmo que gera uma sequência de vetores do $\mathbb{R}^n$ $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ de forma que no limite essa sequência convirja para a solução exata do sistema, ou seja, se x é a solução exata do sistema então

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x$$

.

Em geral, os métodos iterativos usam as iterações passadas para encontrar o próximo elemento da sequência, ou seja, $x_k = f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$. Estamos interessados em métodos que usam apenas a iteração anterior, que são métodos da seguinte forma

$$\text{dado } x_0,\ x_{k+1} = Bx_k + c \tag{1.2}$$

onde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada matriz de iteração do método (1.2), e $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor que depende do lado direito da equação (1.1). Agora, daremos algumas definições e resultados a respeito da convergência teórica de um método iterativo.

Definição 1.1. *Seja x a solução do sistema (1.1), dizemos que o método (1.2) é consistente se satisfaz*

$$x = Bx + c.$$

Definimos como o erro na k-ésima iteração o vetor

$$e_k = x_k - x,$$

e dessa forma podemos notar que um método iterativo converge para a solução exata x se, e somente se

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0.$$

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, denotamos por $\rho(A)$ o raio espectral da matriz A, que é definido por

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ é autovalor de } A\}$$

Lema 1.2. *[2] Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\epsilon > 0$. Então existe uma norma matricial induzida $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$, dependendo de A e de ϵ, tal que*

$$\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$$

Demonstração:

Seja $S^{-1}AS = J$ a forma de Jordan da matriz A, defina $D_\epsilon = \operatorname{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1})$. Então

$$(SD_\epsilon)^{-1}ASD_\epsilon = D_\epsilon^{-1}JD_\epsilon = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
\lambda_1 & \epsilon & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & \ddots & \epsilon & & & & & \\
& & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
& & & & \lambda_2 & \epsilon & & & \\
& & & & & \ddots & \ddots & & \\
& & & & & & \ddots & \epsilon & \\
& & & & & & & \lambda_1 & \\
\hline
& & & & & & & & \ddots
\end{array}\right].$$

Agora, usando a norma vetorial $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$ definida por

$$\|x\|_{A,\epsilon} = \|(SD_\epsilon)^{-1}x\|_\infty$$

e definindo $y = (SD_\epsilon)^{-1}x$ geramos a norma matricial induzida por esta norma vetorial

como sendo

$$\begin{aligned}
\|A\|_{A,\epsilon} &= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{A,\epsilon}}{\|x\|_{A,\epsilon}} \\
&= \max_{x\neq 0} \frac{\|(SD_\epsilon)^{-1}Ax\|_\infty}{\|(SD_\epsilon)^{-1}x\|_\infty} \\
&= \max_{y\neq 0} \frac{\|(SD_\epsilon)^{-1}ASD_\epsilon y\|_\infty}{\|y\|_\infty} \\
&= \|(SD_\epsilon)^{-1}ASD_\epsilon\|_\infty \\
&= \max_i |\lambda_i| + \epsilon \\
&= \rho(A) + \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Note que em geral, temos $\rho(A) \leq \|A\|$ para qualquer norma matricial.

Lema 1.3. *Se A é uma matriz quadrada, então*

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Seja λ um autovalor de A e $x \neq 0$ o autovetor associado a λ, então $A^k x = \lambda^k x$, de onde temos que

$$0 = \lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \lambda^k x$$

como $x \neq 0$, então

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^k = 0$$

de onde segue que $|\lambda| < 1$. Como λ foi tomado arbitrário, então

$$\rho(A) < 1.$$

($\Leftarrow$)

Se $\rho(A) < 1$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho(A) < 1 - \epsilon$. Assim pelo Lema 1.2, existe uma norma matricial induzida $\|\cdot\|$ tal que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon < 1.$$

Como essa norma é uma norma induzida, então satisfaz a proprieadade submultiplicativa, ou seja, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, e assim temos que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, tomando o limite quando

k tende a infinito temos

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\| \leq \lim_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0.$$

■

O próximo teorema nos dá uma condição necessária e suficiente para garantir a convergência de métodos da forma (1.2).

Teorema 1.4. *Se o método (1.2) é consistente, então a sequência* $\{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$ *gerada pelo método converge para a solução* x *do sistema, para qualquer vetor inicial* x_0 *se, e somente se* $\rho(B) < 1$

Demonstração:

Temos que o erro na iteração k é dado por $e_k = x_k - x$, além disso x_k é dado por $x_k = Bx_{k-1} + c$ e como o método é consistente temos que $x = Bx + c$ assim

$$e_k = Bx_{k-1} + c - (Bx + c) = B(x_{k-1} - x) = Be_{k-1}$$

recursivamente, temos que

$$e_k = B^k e_0$$

assim, pelo lema 1.3, temos que $\lim_{k\to\infty} B^k e_0 = 0$ para todo vetor x_0 se, e somente se $\rho(B) < 1$. ■

Uma classe de métodos iterativos bastante conhecida são os métodos da forma

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b \tag{1.3}$$

sendo $A = M - N$ com M não singular. Esses métodos são conhecidos como métodos *splittings*. Veja que nesse caso a matriz de iteração do método (1.3) é $M^{-1}N$, escolhas adequadas para as matrizes M e N produzem bons métodos iterativos, em geral a matriz M deve ser escolhida de forma que um sistema $Mu = v$ seja fácilmente resolvido.

Podemos destacar três métodos iterativos clássicos para resolução de um sistema linear, são eles o método de Jacobi, o método Gauss-Seidel e o método SOR (*successive over relaxation*).

Escrevendo a matriz do sistema da forma $A = D - L - U$, onde D é a diagonal de A, $-L$ é a parte triangular estritamente inferior de A e $-U$ é a parte triangular estritamente superior de A, o método de Jacobi é um *splitting* da forma $A = M - N$, onde $M = D$ e

$N = L + U$, ou seja, podemos escrever o método de Jacobi como

$$Dx_{k+1} = (L + U)x_k + b$$

ou ainda,

$$x_{k+1} = D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b. \tag{1.4}$$

Note que para podermos aplicar o método é necessário que $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

O método Gauss-Seidel, é um *splitting* onde $M = D - L$ e $N = U$, assim o método é escrito da seguinte maneira

$$(D - L)x_{k+1} = Ux_k + b$$

ou ainda

$$x_{k+1} = (D - L)^{-1}Ux_k + (D - L)^{-1}b \tag{1.5}$$

da mesma forma que no método de Jacobi, precisamos ter $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

O método SOR é uma generalização do método Gauss-Seidel, no qual é introduzido um parâmetro de relaxação ω. O método SOR é definido por

$$x_{k+1} = \omega\overline{x}_k + (1 - \omega)x_k$$

sendo $\overline{x}_k$ uma iteração do método Gauss-Seidel. Matricialmente, podemos escrever o método SOR da seguinte forma

$$(I - \omega D^{-1}L)x_{k+1} = \left[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U\right] x_k + \omega D^{-1}b. \tag{1.6}$$

1.2 Pré-condicionamento

Como vimos na seção anterior, a convergência de um método iterativo da forma (1.2) depende do raio espectral da matriz de iteração do método. Além disso, o raio espectral da matriz de iteração também influencia na velocidade de convergência de um método, ou seja, quanto menor o raio espectral da matriz de iteração, menor será a quantidade de iterações necessárias para que o método satisfaça um certo critério de convergência. Em outras palavras, podemos definir a taxa de convergência assintótica de um método iterativo da seguinte forma

Definição 1.5. *A taxa de convergência assintótica de um método iterativo da forma* (1.2)*, é definida por*

$$R_\infty(B) = -ln(\rho(B)).$$

Pela definição acima, podemos notar que a taxa de convergência de um método iterativo da forma (1.2), depende unicamente do raio espectral da matriz de iteração.

Uma técnica bastante conhecida para melhorar a taxa de convergência de um método iterativo é o pré-condicionamento, o que consiste em determinar uma matriz não singular P, de forma que o novo sistema

$$PAx = Pb \tag{1.7}$$

possua uma taxa de convergência maior, ou seja, que o raio espectral da nova matriz de iteração seja menor que o raio espectral da matriz de iteração do sistema original (1.1). A matriz P é chamada de pré-condicionador.

Ao método iterativo aplicado no novo sistema (1.7), damos o nome de método pré-condicionado, e assim tomando diferentes pré-condicionadores teremos diferentes métodos pré-condicionados.

1.3 Matrizes não negativas

Definição 1.6. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz não negativa se todas as entradas a_{ij} de A são não negativas. Neste caso denotamos por*

$$A \geq 0.$$

Caso todas as entradas de A sejam positivas, então dizemos que A é uma matriz positiva, denotada por

$$A > 0.$$

Com base na definição acima, dadas duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ podemos definir as seguintes relações

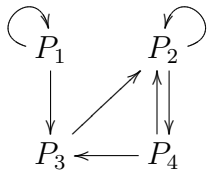
$$A \geq B, \quad \text{se} \quad A - B \geq 0;$$
$$A > B, \quad \text{se} \quad A - B > 0.$$

Definição 1.7. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, o grafo direcionado da matriz A, denotado por $G(A)$, é um grafo de n vértices $P_1, P_2, \ldots, P_n$, onde uma aresta direcionada liga P_i até P_j se, e somente se $a_{ij} \neq 0$.*

Exemplo 1.1. *Considere a matriz A dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

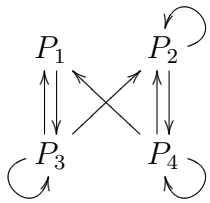
Então temos o grafo direcionado de A dado por



Exemplo 1.2. *Considere a matriz B dada por*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nesse caso, $G(B)$ é dado por



Definição 1.8. *Um grafo direcionado G está fortemente conectado, se para todo par ordenado de vértices (P_i, P_j) existe uma sequência de arestas que vai de P_i até P_j, a essa sequência de arestas damos o nome de caminho.*

No exemplo 1.1, temos que $G(A)$ não está fortemente conectado, pois nesse caso não existe nenhum caminho do vértice P_2 até o vértice P_1, já no exemplo 1.2 $G(B)$ está fortemente conectado.

Definição 1.9. *Uma matriz quadrada A é dita irredutível se o seu grafo direcionado $G(A)$ está fortemente conectado. Caso contrário dizemos que A é redutível.*

Note que no exemplo 1.1 A é redutível, enquanto no exemplo 1.2 B é irredutível.

Um importante resultado para matrizes não negativas é o Teorema de Perron-Frobenius, provado por Oskar Perron em 1907 [18] para matrizes positivas e depois extendido por Georg Frobenius em 1912 [4] para matrizes não negativas irredutíveis.

Teorema 1.10 (Perron - Frobenius [4])**.** *Se $A \geq 0$ é uma matriz quadrada irredutível, então*

1. *$\rho(A)$ é um autovalor simples de A.*
2. *existe um autovetor positivo $v > 0$ correspondente ao autovalor $\rho(A)$.*
3. *$\rho(A)$ aumenta quando alguma entrada de A é aumentada.*

Ao autovetor v relacionado ao raio espectral de A, cuja existência é garantida pelo item 2 do Teorema 1.10, damos o nome de vetor de Perron.

Corolário 1.11. *Segue diretamente do item 3 do teorema acima, que se A e B são não negativas e irredutíveis, com $A \leq B$, então*

$$\rho(A) \leq \rho(B).$$

No Teorema de Perron-Frobenius, para uma matriz não negativa, a irredutibilidade garante a existência de um autovetor positivo associado ao raio espectral da matriz, no caso de uma matriz não negativa redutível existem algumas condições que garantem a existência de um autovetor positivo

Definição 1.12. *Seja A uma matriz quadrada não negativa de ordem n, para $1 \leq i, j \leq n$ dizemos que i tem acesso a j no grafo direcionado de A se existe um caminho do vértice P_i ao vértice P_j, e dizemos que i e j se comunicam se i tem acesso a j e j tem acesso a i.*

Comunicação define uma relação de equivalência [1].

Definição 1.13. *As classes de A são as classes de equivalência da relação comunicação induzida por $G(A)$. Uma classe α tem acesso a uma classe β se para $i \in \alpha$ e $j \in \beta$ i tem acesso a j. Uma classe é dita final se ela não tem acesso a nenhuma outra classe. Uma classe α é básica se $\rho(A[\alpha]) = \rho(A)$, aqui $A[\alpha]$ denota a submatriz de A baseada nos índices de α. E for fim, uma classe é não básica se $\rho(A[\alpha]) < \rho(A)$.*

Teorema 1.14 ([1]). *Se A é uma matriz não negativa, então $\rho(A)$ corresponde a um autovetor positivo se, e somente se as classes finais de A são exatamente as classes básicas de A.*

A seguir veremos mais um teorema que nos permitirá comparar os raios espectrais de matrizes não negativas.

Teorema 1.15 (Berman e Plemmons [1]). *Se $A \geq 0$ é uma matriz quadrada, então as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se $Ax \geq \beta x$ para algum vetor $x \geq 0$ e $x \neq 0$, então $\rho(A) \geq \beta$.*
2. *Se $Ax \leq \gamma x$ para algum vetor $x > 0$, então $\rho(A) \leq \gamma$. Além disso, se A é irredutível e $\beta x \leq Ax \leq \gamma x$, desde que as duas igualdades não sejam satisfeitas simultaneamente, para algum vetor $x \geq 0$ e $x \neq 0$, então, $\beta < \rho(A) < \gamma$ e $x > 0$.*

1.4 M-matrizes

Nessa seção faremos um breve estudo sobre a classe das M-matrizes.

Definição 1.16. *Dizemos que uma matriz quadrada A é uma Z-matriz, se satisfaz*

$$a_{ij} \leq 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Definição 1.17. *Uma matriz A não singular é dita M-matriz se A é uma Z-matriz e $A^{-1} \geq 0$.*

Teorema 1.18 ([19]). *seja T uma matriz quadrada, então $\rho(T) < 1$ se, e somente se $(I - T)^{-1}$ existe e*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Supondo $\rho(T) < 1$, considere a seguinte igualdade

$$(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^k) = I + T^{k+1}$$

sendo $k \in \mathbb{N}$. Tomando o limite para k tendendo a infinito temos

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty}(I - T)(I + T + T^2 + \cdots + T^k) &= \lim_{k\to\infty} I + T^{k+1} \\ (I - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k &= I + \lim_{k\to\infty} T^{k+1} \\ (I - T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k &= I. \end{aligned}$$

De onde segue que $(I - T)^{-1}$ existe e

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

($\Leftarrow$)

Reciprocamente, considerando que $(I - T)^{-1}$ existe, então temos que $\rho(T) \neq 1$, e pelo Teorema de Perron-Frobenius, segue que existe um autovetor $x \geq 0$ tal que $Tx = \rho(T)x$. Portanto

$$(I - T)x = (1 - \rho(T))x.$$

Multiplicando a esquerda por $(I - T)^{-1}$ segue que

$$x = (1 - \rho(T))(I - T)^{-1}x$$

como $\rho(T) \neq 1$, então $(1 - \rho(T)) \neq 0$ e assim

$$(I - T)^{-1}x = \frac{1}{1 - \rho(T)}x. \tag{1.8}$$

Usando a hipótese de que

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

como T é não negativa, segue que $(I - T)^{-1} \geq 0$, e uma vez que $x \geq 0$, da igualdade (1.8) segue que

$$\frac{1}{1 - \rho(T)} > 0$$

de onde temos que $\rho(T) < 1$. ■

Lema 1.19 ([1]). *Os autovalores reais de uma M-matriz são todos positivos.*

O próximo teorema nos dá uma definição equivalente para M-matrizes.

Teorema 1.20. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz se, e somente se A pode ser escrita da forma*

$$A = sI - B \tag{1.9}$$

sendo $B \geq 0$ e $s > \rho(B)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Supondo A uma M-matriz, defina $s = \max_{1\leq i\leq n} a_{ii}$ e $B = sI - A$, por definição os elemento não diagonais de B são não negativos, e da maneira que tomamos s, teremos $B \geq 0$, e $A = sI - B$, resta mostrar que $s > \rho(B)$. De fato, como B é uma matriz não negativa, então pelo Teorema de Perron-Frobenius existe $x \geq 0$ tal que $Bx = \rho(B)x$, assim

$$\begin{aligned} Ax &= (sI - B)x \\ &= sx - Bx \\ &= sx - \rho(B)x \\ &= (s - \rho(B))x. \end{aligned}$$

Logo $s - \rho(B)$ é um autovalor real de A, e como A é uma M-matriz, pelo Lema 1.19 $s - \rho(B) > 0$, de onde segue que $s > \rho(B)$.

($\Leftarrow$)

Reciprocamente, tomando $A = sI - B$ com $B \geq 0$ e $s > \rho(B)$, claramente A é uma Z-matriz, precisamos mostrar que $A^{-1} \geq 0$, para isso veja que

$$A = sI - B = s(I - \frac{1}{s}B)$$

como $s > \rho(B)$, então $\rho(\frac{1}{s}B) < 1$ e pelo Teorema 1.18 temos

$$\begin{aligned} A^{-1} &= [s(I - \frac{1}{s}B)]^{-1} \\ &= \frac{1}{s}(I - \frac{1}{s}B)^{-1} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{s}B)^k \end{aligned}$$

como $B \geq 0$ e $s > \rho(B) \geq 0$, segue que $A^{-1} \geq 0$, e portanto A é uma M-matriz. ■

Com base nas definições apresentadas nesse capítulo, podemos classificar os *splittings* da forma (1.3) da seguinte maneira.

Definição 1.21. *Considere A uma matriz quadrada não singular, escrevendo A da forma $A = D - L - U$, onde D é a diagonal de A, $-L$ a parte triangular estritamente inferior de A e $-U$ é a parte triangular estritamente superior de A. Um splitting $A = M - N$ é chamado*

1. *Regular se $M^{-1} \geq 0$ e $N \geq 0$;*
2. *Fraco regular se $M^{-1} \geq 0$ e $M^{-1}N \geq 0$;*
3. *M-splitting se M é uma M-matriz e $N \geq 0$;*
4. *Splitting Gauss-Seidel se $M = D - L$ e $N = U$.*

Capítulo 2

Pré-condicionadores para M-matrizes

Considere um sistema linear $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n não singular, e além disso A é uma M-matriz. Por simplicidade, neste trabalho vamos considerar A da forma

$$A = I - L - U \tag{2.1}$$

com I sendo a matriz identidade de ordem n, $-L$ a parte triagular estritamente inferior de A e $-U$ a parte triangular estritamente superior de A.

2.1 Pré-condicionadores

Recentemente vários pré-condicionadores foram propostos por diversos autores, a seguir vamos apresentar uma lista dos principais pré-condicionadores propostos recentemente na literatura.

Em 1991, Gunawardena, Jain e Snyder em [6] propuseram o pré-condicionador

$$P_S = I + S \tag{2.2}$$

sendo S definido da seguinte forma

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Em 1994, Usui, Niki e Kohno em [21] propuseram o pré-condicionador

$$P_U = I + U \tag{2.4}$$

onde U é definida em (2.1).

Em 2001, Evans, Martins, e Trigo em [3] propuseram o pré-condicionador

$$P_1 = I + R_1 \tag{2.5}$$

com R_1 definido como

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Também em 2001, Niki, Kohno, Morimoto e Harada em [17] propuseram usar como pré-condicionador a matriz

$$P_{SR} = I + S + R \tag{2.7}$$

onde a matriz S é definida em (2.3) e a matriz R é definida por

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Logo depois, em 2002 Kokatemori, Harada, Morimoto e Niki propuseram em [9] usar o pré-condicionador

$$P_{max} = I + S_{max} \tag{2.9}$$

sendo a matriz S_{max} triangular estritamente superior, contendo apenas uma entrada em cada uma das $n-1$ primeiras linhas, e essa entrada é dada pelo elemento de maior módulo da respectiva linha da matriz A. Caso haja mais que um elemento nessa condição, tomamos o elemento da coluna que vier primeiro, ou seja

$$S_{max} = (s_{ij}^m) = \begin{cases} -a_{ik_i} & \text{se } 1 \leq i < n, j > i, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.10}$$

onde

$$K_i = \min j \in \{j : \max_j |a_{ij}|\} \text{ for } 1 \leq i < n. \tag{2.11}$$

Em 2004, Niki, Harada, Morimoto e Sakakihara em [15] propuseram o pré-condicionador

$$P_R = I + R \tag{2.12}$$

com R definido em (2.8).

E mais recente, em 2009, Yun em [26] propôs usar como pré-condicionador a matriz

$$P_{S1} = I + S + R_1 \tag{2.13}$$

sendo as matrizes S e R_1 definas em (2.3) e (2.6) respectivamente.

Neste trabalho, propomos um novo pré-condicionador, que é dado por

$$P_{RU} = I + R + U$$

onde R e U são definidas em (2.8) e (2.1) respectivamente.

2.2 Teoremas de comparação

Com base nos pré-condicionadores apresentados na seção anterior, apresentaremos vários resultados que nos permitirão avaliar e comparar a eficiência de tais pré-condicionadores.

Por simplicidade de notação, os pré-condicionares serão denotados por

$$\begin{cases} P_S = (I + S), \\ P_R = (I + R), \\ P_1 = (I + R_1), \\ P_{S1} = (I + S + R_1), \\ P_{max} = (I + S_{max}), \\ P_{SR} = (I + S + R), \\ P_U = (I + U), \\ P_{RU} = (I + R + U). \end{cases}$$

Suas respectivas matrizes pré-condicionadas por

$$\begin{cases} A_S = P_S A, \\ A_R = P_R A, \\ A_1 = P_1 A, \\ A_{S1} = P_{S1} A, \\ A_{max} = P_{max} A, \\ A_{SR} = P_{SR} A, \\ A_U = P_U A, \\ A_{RU} = P_{RU} A. \end{cases}$$

Finalmente, seus splittings Gauss-Seidel serão denotados respectivamente por

$$\begin{cases} A = M - N, \\ A_S = M_S - N_S, \\ A_R = M_R - N_R, \\ A_1 = M_1 - N_1, \\ A_{S1} = M_{S1} - N_{S1}, \\ A_{max} = M_{max} - N_{max}, \\ A_{SR} = M_{SR} - N_{SR}, \\ A_U = M_U - N_U, \\ A_{RU} = M_{RU} - N_{RU}. \end{cases}$$

Como estamos considerando $A = I - L - U$, então podemos escrever as matrizes referentes ao *splitting* Gauss-Seidel de cada matriz pré-condicionada da seguinte forma.

Sejam $UL = E_0 + F_0$ e $S_{max}L = E_1 + F_1$, onde E_0 e E_1 são matrizes triangulares inferiores, e as matrizes F_0 e F_1 são triangulares estritamente superiores, então

$$\begin{aligned} &M = I - L, && N = U, \\ &M_S = I - L - SL, && N_S = U - S + SU, \\ &M_R = I - L + R - RL - RU, && N_R = U, \\ &M_1 = I - L + R_1 - R_1 U, && N_1 = U, \\ &M_{S1} = I - L + R_1 - SL - R_1 U, && N_{S1} = U - S + SU, \\ &M_{max} = I - L - E_1, && N_{max} = U - S_{max} + S_{max} U + F_1, \\ &M_{SR} = I - L + R - RL - SL - RU, && N_{SR} = U - S + SU, \\ &M_U = I - L - E_0, && N_U = U^2 + F_0, \\ &M_{RU} = I - L + R - RL - RU - E_0, && N_{RU} = U^2 + F_0. \end{aligned}$$

Lema 2.1 (Li [12]). *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma M-matriz da forma (2.1), e seja $A_S = (I+S)A = M_S - N_S$ o splitting de A_S para o método Gauss-Seidel. Se $\rho(M_S^{-1}N_S) > 0$, então $Ax \geq 0$ para algum vetor de Perron $x \geq 0$ de $M_S^{-1}N_S$.*

Demonstração:

Seja x um vetor de Perron não negativo de $M_S^{-1}N_S$, ou seja, $M_S^{-1}N_Sx = \rho(M_S^{-1}N_S)x$, então

$$\begin{aligned} A_SM_S^{-1}N_S &= (M_S - N_S)M_S^{-1}N_S \\ &= N_S - N_SM_S^{-1}N_S \\ &= N_S(I - M_S^{-1}N_S) \end{aligned}$$

multiplicando por x obtemos

$$\begin{aligned} A_SM_S^{-1}N_Sx &= N_S(I - M_S^{-1}N_S)x \\ \rho(M_S^{-1}N_S)A_Sx &= [1 - \rho(M_S^{-1}N_S)]N_Sx \\ A_Sx &= \frac{1 - \rho(M_S^{-1}N_S)}{\rho(M_S^{-1}N_S)}N_Sx \end{aligned}$$

como $A_S = (I + S)A$, segue que

$$Ax = \frac{1 - \rho(T_S)}{\rho(T_S)}(I + S)^{-1}N_Sx. \tag{2.14}$$

Sejam $F = (I + S)^{-1}N_S$ e $E = (I + S)^{-1}M_S$, se mostrarmos que $Fx \geq 0$, então do fato de que $0 < \rho(T_S) < 1$ segue de (2.14) que $Ax \geq 0$. Como $M_S = I - L - SL$, então

$$\begin{aligned} E &= (I + S)^{-1}(I - L - SL) \\ &= (I + S)^{-1}[I - (I + S)L] \\ &= (I + S)^{-1} - L \\ &= (I - S + S^2 - S^3 + \cdots) - L \\ &= (I - S) + (S^2 - S^3 + \cdots) - L \\ &= (I - S) + (S^2 + S^4 + S^6 + \cdots)(I - S) - L \\ &= (I - S) + S^2(I + S^2 + S^4 + \cdots)(I - S) - L \\ &= (I - S) + S^2(I - S^2)^{-1}(I - S) - L \\ &= [I + S^2(I - S^2)^{-1}](I - S) - L. \end{aligned} \tag{2.15}$$

E usando que $N_S = U - S + SU$ e que $U - S \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
F &= (I+S)^{-1}(U - S + SU) \\
&= (I+S)^{-1}[(I+S)U - S] \\
&= U - (I+S)^{-1}S \\
&= U - (I - S + S^2 - S^3 + \cdots)S \\
&= U - (S - S^2 + S^3 - S^4 + \cdots) \\
&= (U - S) + S^2 - S^3 + S^4 - \cdots \\
&\geq S^2 - S^3 + S^4 - \cdots \\
&= S^2(I - S + S^2 - \cdots) \\
&= S^2(I + S^2 + S^4 + \cdots)(I - S) \\
&= S^2(I - S^2)^{-1}(I - S). \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Como $A = E - F$, temos $T_S = E^{-1}F$ de onde segue que $Fx = \rho(T_S)Ex$ e usando as equações (2.15) e (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\rho(T_S)\{[I + S^2(I - S^2)^{-1}](I - S) - L\}x &\geq S^2(I - S^2)^{-1}(I - S)x \\
\rho(T_S)(I - S)x + \rho(T_S)S^2(I - S^2)^{-1}(I - S)x - \rho(T_S)Lx &\geq S^2(I - S^2)^{-1}(I - S)x \\
\rho(T_S)(I - S)x + (\rho(T_S) - 1)S^2(I - S^2)^{-1}(I - S)x &\geq \rho(T_S)Lx \\
(I - S)x + \frac{\rho(T_S) - 1}{\rho(T_S)}S^2(I - S^2)^{-1}(I - S)x &\geq Lx \\
\left[I - \frac{1 - \rho(T_S)}{\rho(T_S)}S^2(I - S^2)^{-1}\right](I - S)x &\geq Lx.
\end{aligned}$$

Como $0 < \rho(T_S) < 1$ e $S^2 \geq 0$ é triangular estritamente superior, então

$$\left[I - \frac{1 - \rho(T_S)}{\rho(T_S)}S^2(I - S^2)^{-1}\right]^{-1} \geq 0$$

e portanto $(I - S)x \geq 0$, e segue de (2.16) que $Fx \geq 0$. ■

Definição 2.2. *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é dita monótona se $Ax \geq 0$ implica em $x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

O próximo lema é um resultado muito importante na comparação de resultados entre métodos *splittings*. Newmann e Plemmons, em [14] definem a seguinte norma monótona em $\mathbb{R}^n$.

Dado um vetor positivo x

$$\|y\|_x = \inf\{\alpha > 0 | -\alpha x \leq y \leq \alpha x\}$$

com base nisso temos o seguinte.

Lema 2.3 ([14]). *Sejam $A_1 = M_1 - N_1$ and $A_2 = M_2 - N_2$ splittings fraco regulares de matrizes monótonas A_1 e A_2 respectivamente, tal que $M_2^{-1} \geq M_1^{-1}$. Se existe um vetor positivo x tal que $0 \leq A_1 x \leq A_2 x$, então para a norma monótona associada a x temos*

$$\|M_2^{-1}N_2\|_x \ \leq \ \|M_1^{-1}N_1\|_x.$$

Em particular, se $M_1^{-1}N_1$ tem um vetor de Perron positivo, então

$$\rho(M_2^{-1}N_2) \leq \rho(M_1^{-1}N_1).$$

Lema 2.4 ([1]). *Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma Z-matriz então as afirmações abaixo são equivalentes*

1. *A é uma M-matriz.*
2. *Existe $x > 0$ tal que $Ax > 0$*

Lema 2.5. *Se A é uma M-matriz irredutível da forma (2.1), então cada uma das matrizes pré-condicionadas com os pré-condicionadores abordados neste trabalho é uma M-matriz.*

Demonstração:

Veja que podemos escrever $A = I - B$ onde B é uma matriz não negativa. Além disso, todos os pré-condicionadores são da forma $(I + C)$, onde C é uma matriz não negativa, e como em todos os casos C é uma parte de B, então temos que $B \geq C$, assim cada uma das matrizes pré-condicionadas é da forma

$$\begin{aligned}(I + C)(I - B) &= I - B + C - CB \\ &= I - (B - C + CB) \\ &= I - [(B - C) + CB].\end{aligned}$$

Como $B \geq C$, segue que $(B - C) \geq 0$, e como B e C são não negativas, então

$$(B - C) + CB \geq 0$$

de onde segue que cada matriz pré-condicionada é uma Z-matriz.

Como A é uma M-matriz, pelo lema 2.4 segue que existe $x > 0$ tal que $Ax > 0$, e assim cada matriz pré-condicionada satisfaz

$$(I + C)Ax = Ax + CAx > 0$$

e novamente pelo lema 2.4 segue que cada matriz pré-condicionada é uma M-matriz. ■

Lema 2.6 ([1]). *Seja $a_{i,j}^{(q)}$ o elemento da linha i e coluna j da matriz A^q. Uma matriz não negativa A é irredutível se, e somente se para todo par ordenado (i, j) existe um número natural q tal que*

$$a_{i,j}^{(q)} > 0.$$

Lema 2.7. *Se $A = I - L - U$ é uma M-matriz irredutível e existe $r \geq 0$ inteiro tal que as primeiras r colunas de U são nulas e as $n - r$ últimas colunas de U são não nulas. Seja $A = M - N$ o splitting Gauss-Seidel de A, então existe $x > 0$ tal que $A^{-1}Nx = \rho(A^{-1}N)x$.*

Demonstração:

Como A é irredutível, então $G(A)$ está fortemente conectado, além disso como $A = I - (L + U)$, então $G(L + U)$ também está fortemente conectado, e segue que $L + U$ é irredutível. Como $L + U$ é não negativa, pelo Lema 2.6 temos que existe um número natural q tal que $(L + U)^q > 0$. Observe que do fato de A ser uma M-matriz, temos que $A = I - (L+U)$ onde $\rho(L+U) < 1$, e pelo Lema 1.18 temos que $A^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty}(L+U)^k$, portanto $A^{-1} > 0$ e temos que o $A^{-1}N$ tem as primeiras r colunas nulas e as $n - r$ últimas colunas estritamente positivas.

Veja que as classes de $A^{-1}N$ são

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{r\} \text{ e } \{r + 1, r + 2, \ldots, n\}$$

sendo que a única classe final é $\{r+1, r+2, \ldots, n\}$, que é também a única classe básica, de onde segue pelo Teorema 1.14 que existe um vetor positivo x tal que $A^{-1}Nx = \rho(A^{-1}N)x$.
■

Teorema 2.8. *Se A é uma M-matriz, e $A = M - N$ é o seu splitting Gauss-Seidel, então*

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Demonstração:

Veja que

$$A = M - N = M - MM^{-1}N = M(I - M^{-1}N),$$

portanto

$$A^{-1} = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1} \\
A^{-1}N &= (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}N \\
(I - M^{-1}N)A^{-1}N &= M^{-1}N \qquad (2.17) \\
A^{-1}N - M^{-1}NA^{-1}N &= M^{-1}N \\
A^{-1}N &= M^{-1}N + M^{-1}NA^{-1}N \\
A^{-1}N &= M^{-1}N(I + A^{-1}N) \\
A^{-1}N(I + A^{-1}N)^{-1} &= M^{-1}N. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Caso A seja uma matriz irredutível nas condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.7 existe um vetor $x > 0$ tal que $A^{-1}Nx = \rho(A^{-1}N)x$ e neste caso temos

$$M^{-1}Nx = A^{-1}N(I + A^{-1}N)^{-1}x = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}x$$

e pelo Teorema 1.15 segue que

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1 + \rho(A^{-1}N)}.$$

Caso A não esteja nas condições Lema 2.7, dado $\epsilon > 0$ defina $A(\epsilon) = (a_{ij}(\epsilon))$ dada por

$$a_{ij}(\epsilon) = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad a_{ij} \neq 0, \\ -\epsilon & \text{se} \quad a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Seja $A(\epsilon) = M(\epsilon) - N(\epsilon)$ o *splitting* Gauss-Seidel de $A(\epsilon)$, claramente a equação

$$A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)(I + A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon))^{-1} = M(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)$$

é satisfeita, e como $A(\epsilon)$ é irredutível então $A^{-1}(\epsilon)N(\epsilon)$ tem um vetor $x > 0$ e

$$M(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)x = A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)(I + A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon))^{-1}x = \frac{\rho(A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon))}{1 + \rho(A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon))}x$$

e segue novamente pelo Teorema 1.15 que

$$\rho(M(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)) = \frac{\rho(A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)}{1+\rho(A(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)}.$$

Tomando o limite quando ϵ tende a zero, temos que

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)}.$$

Sendo assim temos

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)} < 1.$$

■

Lema 2.9. *Se A é uma M-matriz irredutível nas condições do Lema 2.7, e $A = M - N$ é o splitting referente ao método Gauss-Seidel de A, então $M^{-1}N$ tem um autovetor positivo x correspondente ao raio espectral de $M^{-1}N$.*

Demonstração:

Na demonstração do Teorema 2.8 mostramos que

$$M^{-1}N = A^{-1}N(I + A^{-1}N)^{-1} \tag{2.19}$$

e que

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)}. \tag{2.20}$$

Agora, pelo Lema 2.7 existe $x > 0$ tal que $A^{-1}Nx = \rho(A^{-1}N)x$, assim usando as equações (2.19) e (2.20) temos

$$\begin{aligned} M^{-1}N &= A^{-1}N(I + A^{-1}N)^{-1} \\ M^{-1}Nx &= A^{-1}N(I + A^{-1}N)^{-1}x \\ M^{-1}Nx &= \frac{\rho(A^{-1}N)}{1+\rho(A^{-1}N)}x \\ M^{-1}Nx &= \rho(M^{-1}N)x. \end{aligned}$$

■

Agora, apresentaremos uma série de teoremas de comparação entre os pré-condicionadores apresentados anteriormente.

Teorema 2.10 ([26]). *Suponha que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1). Assim,*

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M^{-1}N) < 1.$$

Demonstração:

Vamos dividir em dois casos. Primeiro suponha que A satisfaz as condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.9 segue que existe $x > 0$ tal que $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$ e $\rho(M^{-1}N) > 0$. Como $N_1 = N$ então temos o seguinte

$$\begin{aligned}
A_1 - A &= R_1 A \\
M_1 - M &= R_1 A \\
M^{-1} - M_1^{-1} &= M_1^{-1} R_1 A M^{-1} \\
M^{-1}N - M_1^{-1}N_1 &= M_1^{-1} R_1 A M^{-1} N \\
M^{-1}Nx - M_1^{-1}N_1 x &= M_1^{-1} R_1 A M^{-1} N x \\
\rho(M^{-1}N)x - M_1^{-1}N_1 x &= \rho(M^{-1}N) M_1^{-1} R_1 A x. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Como $0 < \rho(M^{-1}N) < 1$, então

$$\begin{aligned}
M^{-1}Nx &= \rho(M^{-1}N)x \\
Nx &= \rho(M^{-1}N)Mx \\
0 &= \rho(M^{-1}N)Mx - Nx \\
0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Mx - Nx) \\
0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Ax)
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$Ax \geq 0. \qquad (2.22)$$

Juntando (2.21) e (2.22) com o fato de que $M_1^{-1} \geq 0$ e $R_1 \geq 0$ temos que

$$\rho(M^{-1}N)x \geq M_1^{-1}N_1 x$$

e pelo Teorema 1.15 obtemos

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M^{-1}N).$$

No segundo caso quando A não satisfaz as condições do Lema 2.7, então dado $\epsilon > 0$,

defina $A(\epsilon)$ como na demonstração do Teorema 2.8. Defina também a matriz $R_1(\epsilon)$ por

$$R_1(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n,1}(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e nesse caso definimos $A_1(\epsilon) = (I + R_1(\epsilon))A((\epsilon))$ e temos os *splittings* referentes ao método Gauss-Seidel dados por $A(\epsilon) = M(\epsilon) - N(\epsilon)$ e $A_1(\epsilon) = M_1(\epsilon) - N_1(\epsilon)$ respectivamente. Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno teremos as condições do primeiro caso satisfeitas, e portanto

$$\rho(M_1(\epsilon)^{-1}N_1(\epsilon)) \leq \rho(M(\epsilon)^{-1}N(\epsilon))$$

fazendo ϵ tender a zero segue que

$$\rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M^{-1}N).$$

■

Teorema 2.11 ([6]). *Se A é uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_S^{-1}N_S) \leq \rho(M^{-1}N).$$

Demonstração:

Suponha que A seja irredutível nas condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.9 existe um autovetor $x > 0$ associado a $\rho(M^{-1}N)$, ou seja $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$. Como $M = I - L$ e $N = U$ então

$$\begin{aligned} (I-L)^{-1}Ux &= \rho(M^{-1}N)x \\ Ux &= \rho(M^{-1}N)(I-L)x \qquad (2.23) \\ SUx &= \rho(M^{-1}N)Sx - \rho(M^{-1}N)SLx, \qquad (2.24) \end{aligned}$$

usando as equações (2.23) e (2.24) temos

$$\begin{aligned}
M_S^{-1}N_Sx - \rho(M^{-1}N)x &= M_S^{-1}[N_S - \rho(M^{-1}N)M_S]x \\
&= M_S^{-1}[U - S + SU - \rho(M^{-1}N)I + \rho(M^{-1}N)L + \\
&\quad \rho(M^{-1}N)SL]x \\
&= M_S^{-1}[Ux - Sx + SUx - \rho(M^{-1}N)x + \rho(M^{-1}N)Lx + \\
&\quad \rho(M^{-1}N)SLx] \\
&= M_S^{-1}[\rho(M^{-1}N)Sx - Sx] \\
&= M_S^{-1}[\rho(M^{-1}N) - 1]Sx.
\end{aligned}$$

Como A é uma M-matriz, então $\rho(M^{-1}N) < 1$ e segue que $M_S^{-1}N_Sx \leq \rho(M^{-1}N)x$, agora usando o Teorema 1.15, temos que

$$\rho(M_S^{-1}N_S) \leq \rho(M^{-1}N).$$

Consideremos agora o caso onde A é redutível, então para $\epsilon > 0$ defina a matriz $A(\epsilon) = (a_{ij}(\epsilon))$ como na demonstração do Teorema 2.8, e $S(\epsilon)$ por

$$S(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}(\epsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23}(\epsilon) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1,n}(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora seja $A_S(\epsilon) = (I + S(\epsilon))A(\epsilon) = M_S(\epsilon) - N_S(\epsilon)$ e $A(\epsilon) = M(\epsilon) - N(\epsilon)$ os *splittings* Gauss-Seidel de $A_S(\epsilon)$ e $A(\epsilon)$ respectivamente. Com $\epsilon > 0$ pequeno, as condições do caso anterior são satisfeita, e portanto

$$\rho(M_S(\epsilon)^{-1}N_S(\epsilon)) \leq \rho(M(\epsilon)^{-1}N(\epsilon)).$$

Tomando $\lim_{\epsilon \to 0}$ segue que

$$\rho(M_S^{-1}N_S) \leq \rho(M^{-1}N).$$

■

Teorema 2.12 ([26]). *Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_R^{-1}N_R) \leq \rho(M_1^{-1}N_1) < 1.$$

Demonstração:

Novamente vamos considerar dois casos. Primeiro suponha que A_1 seja irredutível nas condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.9 existe $x > 0$ tal que $M_1^{-1}N_1x = \rho(M_1^{-1}N_1)x$ e com isso $\rho(M_1^{-1}N_1) > 0$. Como $N_R = N_1$, então

$$\begin{aligned}
A_R - A_1 &= (R - R_1)A \\
M_R - M_1 &= (R - R_1)A \\
M_1^{-1} - M_R^{-1} &= M_R^{-1}(R - R_1)AM_1^{-1} \\
M_1^{-1}N_1 - M_R^{-1}N_R &= M_R^{-1}(R - R_1)AM_1^{-1}N_1 \\
M_1^{-1}N_1x - M_R^{-1}N_Rx &= M_R^{-1}(R - R_1)AM_1^{-1}N_1x \\
\rho(M_1^{-1}N_1)x - M_R^{-1}N_Rx &= \rho(M_1^{-1}N_1)M_R^{-1}(R - R_1)Ax. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Porém, veja que

$$(R - R_1)A = (R - R_1)(I + R_1)A = (R - R_1)A_1 \qquad (2.26)$$

e como $0 < \rho(M_1^{-1}N_1) < 1$, então

$$\begin{aligned}
M_1^{-1}N_1x &= \rho(M_1^{-1}N_1)x \\
N_1x &= \rho(M_1^{-1}N_1)M_1x \\
0 &= \rho(M_1^{-1}N_1)M_1x - N_1x \\
0 &\leq \rho(M_1^{-1}N_1)(M_1x - N_1x) \\
0 &\leq \rho(M_1^{-1}N_1)A_1x
\end{aligned}$$

de onde temos que

$$A_1x \geq 0. \qquad (2.27)$$

Usando (2.26) e (2.27) na equação (2.25) junto com o fato de que $M_R^{-1} \geq 0$ assim como $(R - R_1) \geq 0$, obtemos

$$\rho(M_1^{-1}N_1)x \geq M_R^{-1}N_Rx$$

e pelo Teorema 1.15 segue que

$$\rho(M_R^{-1}N_R) \leq \rho(M_1^{-1}N_1).$$

No segundo caso, quando A_1 não satisfaz as condições do Lema 2.7, dado $\epsilon > 0$ defina $A(\epsilon)$ e $R_1(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8 e 2.10 respectivamente, e $R(\epsilon)$

por

$$R(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n,1}(\epsilon) & \dots & -a_{n,n-1}(\epsilon) & 0 \end{bmatrix}$$

com base nisso defina $A_1(\epsilon) = (I + R_1(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_R(\epsilon) = (I + R(\epsilon))A(\epsilon)$ e seus *splittings* Gauss-Seidel respectivamente por $A_1(\epsilon) = M_1(\epsilon) - N_1(\epsilon)$ e $A_R(\epsilon) = M_R(\epsilon) - N_R(\epsilon)$, nesse caso basta tomar $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente, e como a matriz $A_1(\epsilon)$ é irredutível segue pelo caso anterior que

$$\rho(M_R(\epsilon)^{-1}N_R(\epsilon)) \leq \rho(M_1(\epsilon)^{-1}N_1(\epsilon))$$

tomando o limite quando ϵ tende a 0 temos

$$\rho(M_R^{-1}N_R) \leq \rho(M_1^{-1}N_1).$$

■

Teorema 2.13 ([26])**.** *Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), segue que*

$$\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}) \leq \rho(M_1^{-1}N_1) < 1.$$

Demonstração:

Suponha que A e A_1 estejam nas condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.9 existe $x > 0$ tal que $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$ e $\rho(M^{-1}N) > 0$. veja que

$$\begin{aligned} M^{-1}Nx &= \rho(M^{-1}N)x \\ Nx &= \rho(M^{-1}N)Mx \\ 0 &= \rho(M^{-1}N)Mx - Nx \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Mx - Nx) \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)Ax \end{aligned}$$

de onde segue que

$$Ax \geq 0.$$

Assim

$$A_{S1}x = (I + S + R_1)Ax \geq (I + R_1)Ax = A_1x \geq 0,$$

além disso veja que

$$\begin{aligned} M_1 - M_{S1} &= SL, \\ M_{S1}^{-1} - M_1^{-1} &= M_1^{-1} S L M_{S1}^{-1}. \end{aligned}$$

Usando que $M_1^{-1} \geq 0$, $S \geq 0$, $L \geq 0$ e $M_{S1}^{-1} \geq 0$, temos que

$$M_{S1}^{-1} \geq M_1^{-1}$$

e como A_{S1} e A_1 são M-matrizes, do Lema 2.3 segue que

$$\|M_{S1}^{-1} N_{S1}\|_x \leq \|M_1^{-1} N_1\|_x$$

e como estamos supondo A_1 irredutível, então $M_1^{-1} N_1$ tem um vetor de Perron positivo, e novamente do Lema 2.3 segue que

$$\rho(M_{S1}^{-1} N_{S1}) \leq \rho(M_1^{-1} N_1).$$

Agora, caso A ou A_1 não esteja nas condições do Lema 2.7, então para $\epsilon > 0$ defina $A(\epsilon)$, $R_1(\epsilon)$ e $S(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8, 2.10 e 2.11 respectivamente, dessa forma podemos definir $A_1(\epsilon) = (I + R_1(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon) = (I + S(\epsilon) + R_1(\epsilon))A(\epsilon)$ e seus *splittings* referentes ao método Gauss Seidel serão dados por $A_1(\epsilon) = M_1(\epsilon) - N_1(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon) = M_{S1}(\epsilon) - N_{S1}(\epsilon)$ respectivamente. Com $\epsilon > 0$ pequeno teremos as condições do primeiro caso satisfeitas e assim

$$\rho(M_{S1}(\epsilon)^{-1} N_{S1}(\epsilon)) \leq \rho(M_1(\epsilon)^{-1} N_1(\epsilon))$$

fazendo ϵ tender a zero obtemos

$$\rho(M_{S1}^{-1} N_{S1}) \leq \rho(M_1^{-1} N_1).$$

■

Teorema 2.14 ([26]). *Assumindo que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), temos*

$$\rho(M_{S1}^{-1} N_{S1}) \leq \rho(M_S^{-1} N_S).$$

Demonstração:

Novamente vamos considerar dois casos. Primeiro suponha que A_S satisfaça as condições do Lema 2.7, então segue do Lema 2.9 que existe $x > 0$ tal que $M_S^{-1} N_S x = \rho(M_S^{-1} N_S) x$

e consequentemente $\rho(M_S^{-1}N_S) > 0$. Como $N_S = N_{S1}$ então temos o seguinte

$$\begin{aligned} A_{S1} - A_S &= R_1 A \\ M_{S1} - M_S &= R_1 A \\ M_S^{-1} - M_{S1}^{-1} &= M_{S1}^{-1} R_1 A M_S^{-1} \\ M_S^{-1} N_S - M_{S1}^{-1} N_{S1} &= M_{S1}^{-1} R_1 A M_S^{-1} N_S \\ M_S^{-1} N_S x - M_{S1}^{-1} N_{S1} x &= M_{S1}^{-1} R_1 A M_S^{-1} N_S x \\ \rho(M_S^{-1} N_S) x - M_{S1}^{-1} N_{S1} x &= \rho(M_S^{-1} N_S) M_{S1}^{-1} R_1 A x. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Porém, como $\rho(M_S^{-1}N_S) > 0$ então pelo Lema 2.1 temos que $Ax \geq 0$, assim da equação (2.28) junto com o fato de que $M_{S1}^{-1} \geq 0$ e $R_1 \geq 0$ obtemos

$$\rho(M_S^{-1}N_S)x \geq M_{S1}^{-1}N_{S1}x$$

e pelo Teorema 1.15 segue que

$$\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

No segundo caso, quando A_S não satisfaz as condições do Lema 2.7, dado $\epsilon > 0$, defina $A(\epsilon)$, $S(\epsilon)$ e $R_1(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8, 2.13 e 2.10 respectivamente, além disso seja $A_S(\epsilon) = (I + S(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon) = (I + S(\epsilon) + R_1(\epsilon))A(\epsilon)$ e seus *splittings* Gauss-Seidel respectivamente dados por $A_S(\epsilon) = M_S(\epsilon) - N_S(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon) = M_{S1}(\epsilon) - N_{S1}(\epsilon)$. Neste caso $A_S(\epsilon)$ é irredutível e tomando $\epsilon > 0$ pequeno suficiente, pelo caso anterior segue que

$$\rho(M_{S1}(\epsilon)^{-1}N_{S1}(\epsilon)) \leq \rho(M_S(\epsilon)^{-1}N_S(\epsilon))$$

tomando o limite quando ϵ tende a 0 temos

$$\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

■

Teorema 2.15 ([9]). *Assumindo que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), satisfazendo*

$$a_{ii+1}a_{i+1j} \leq a_{ik_i}a_{k_ij} \text{ para } 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } j \leq i \tag{2.29}$$

implica que

$$\rho(M_{max}^{-1}N_{max}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

Demonstração:

Primeiramente suponha que A e A_S estejam nas condições do Lema 2.7, seja $e \in \mathbb{R}^n$

um vetor com todas as suas componentes iguais a 1, defina $x = A^{-1}e > 0$ então pela definição de S_{max} temos que $(S_{max} - S)e \geq 0$ e assim

$$(A_{max} - A_S)x = (S_{max} - S)Ax = (S_{max} - S)e \geq 0$$

além disso, como $M_{max} = I - L - E_1$ e $M_S = I - L - SL$, e pela condição (2.29) $E_1 \geq SL$ então

$$\begin{aligned} M_S - M_{max} &= E_1 - SL, \\ M_{max}^{-1} - M_S^{-1} &= M_{max}^{-1}(E_1 - SL)M_S^{-1} \end{aligned}$$

e portanto

$$M_{max}^{-1} \geq M_S^{-1},$$

como A_{max} e A_S são M-matrizes, então pelo Lema 2.3 temos que

$$\|M_{max}^{-1}N_{max}\|_x \leq \|M_S^{-1}N_S\|_x$$

mas, do fato de termos suposto A_S nas condições do Lema 2.7, temos que $M_S^{-1}N_S$ tem um vetor de Perron positivo e novamente pelo Lema 2.3 temos

$$\rho(M_{max}^{-1}N_{max}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

Agora, caso A ou A_S não esteja nas condições do Lema 2.7, dado $\epsilon > 0$ defina $A(\epsilon)$ e $S(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8 e 2.11 respectivamente e $S_{max}(\epsilon)$ por

$$S_{max}(\epsilon) = (s_{ij}^m(\epsilon)) = \begin{cases} -a_{ik_i}(\epsilon) & \text{para } 1 \leq i < n, j > i, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde

$$K_i = \min j \in \{j : \max_j |a_{ij}(\epsilon)|\} \text{ para } 1 \leq i < n.$$

Agora sejam $A_S(\epsilon) = (I + S(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{max}(\epsilon) = (I + S_{max}(\epsilon))A(\epsilon)$ com *splittings* referentes ao método Gauss-Seidel dados por $A_S(\epsilon) = M_S(\epsilon) - N_S(\epsilon)$ e $A_{max}(\epsilon) = M_{max}(\epsilon) - N_{max}(\epsilon)$ respectivamente. Tomando ϵ suficientemente pequeno, teremos a condição (2.29) satisfeita, além disso as condições do primeiro caso serão satisfeitas e portanto temos

$$\rho(M_{max}(\epsilon)^{-1}N_{max}(\epsilon)) \leq \rho(M_S(\epsilon)^{-1}N_S(\epsilon))$$

e fazendo ϵ tender a 0 segue que

$$\rho(M_{max}^{-1}N_{max}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

■

Teorema 2.16 ([15] Teorema 2.9, corrigido em [12] Teorema 1.4)**.** *Seja A uma M-matriz da forma (2.1), e $A_S = (I+S)A = M_S - N_S$ e $A_{SR} = (I+S+R)A = M_{SR} - N_{SR}$ os spittings do método Gauss-Seidel pré-condicionado com os pré-condicionadores $I+S$ e $I+S+R$ respectivamente então*

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

Demonstração:

Consideremos primeiro o caso onde A_S satisfaz as condições do Lema 2.7, então $M_S^{-1}N_S$ tem um autovetor $x > 0$ correspondente ao seu raio espectral e $\rho(M_S^{-1}N_S) > 0$. Como $N_S = N_{SR}$, então

$$A_{SR} - A_S = M_{SR} - M_S = RA,$$

multiplicando a esquerda por M_{SR}^{-1} e a direita por M_S^{-1} obtemos

$$M_S^{-1} - M_{SR}^{-1} = M_{SR}^{-1}RAM_S^{-1},$$

multiplicando agora primeiro por $N_S = N_{SR}$ e depois por x segue que

$$\begin{aligned} M_S^{-1}N_S - M_{SR}^{-1}N_{SR} &= M_{SR}^{-1}RAM_S^{-1}N_S \\ M_S^{-1}N_Sx - M_{SR}^{-1}N_{SR}x &= M_{SR}^{-1}RAM_S^{-1}N_Sx \\ \rho(M_S^{-1}N_S)x - M_{SR}^{-1}N_{SR}x &= \rho(M_S^{-1}N_S)M_{SR}^{-1}RAx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1 $Ax \geq 0$, e como M_{SR} é uma M-matriz e $R \geq 0$, temos que

$$\rho(M_S^{-1}N_S)x \geq M_{SR}^{-1}N_{SR}x$$

e pelo Teorema 1.15

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

Consideremos agora o caso em que A_S não satisfaz as condições do Lema 2.7. Dado $\epsilon > 0$, defina $A(\epsilon)$, $S(\epsilon)$, e $R(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8, 2.11 e 2.12 respectivamente, assim podemos definir $A_S(\epsilon) = (I + S(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = (I + S(\epsilon) + R(\epsilon))A(\epsilon)$, e seus *splittings* referentes ao método Gauss-Seidel respectivamente dados por $A_S(\epsilon) = M_S(\epsilon) - N_S(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = M_{SR}(\epsilon) - N_{SR}(\epsilon)$. Dessa forma, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, as condições do caso anterior são satisfeitas e portanto temos que

$$\rho(M_{SR}(\epsilon)^{-1}N_{SR}(\epsilon)) \leq \rho(M_S(\epsilon)^{-1}N_S(\epsilon)).$$

Tomando o limite quando ϵ tende a 0, segue que

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S).$$

■

Teorema 2.17. *Suponha que $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_R^{-1}N_R).$$

Demonstração:

Dividindo em dois casos, primeiramente suponha que A e A_R se encontram nas condições do Lema 2.7, então existe $x > 0$ tal que $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$ e assim

$$A_{SR}x = (I + S + R)Ax \geq (I + R)Ax = A_Rx \geq 0$$

e como

$$\begin{aligned} M_R - M_{SR} &= SL, \\ M_{SR}^{-1} - M_R^{-1} &= M_R^{-1}SLM_{SR}^{-1} \end{aligned}$$

porém $M_R^{-1} \geq 0$, $S \geq 0$, $L \geq 0$ e $M_{SR}^{-1} \geq 0$ portanto

$$M_{SR}^{-1} \geq M_R^{-1}$$

e como A_{SR} e A_S são M-matrizes, então pelo Lema 2.3 temos

$$\|M_{SR}^{-1}N_{SR}\|_x \leq \|M_R^{-1}N_R\|_x$$

e além disso, da irredutibilidade de A_R segue que $M_R^{-1}N_R$ tem um autovetor positivo associado ao seu raio espectral, e portanto

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_R^{-1}N_R).$$

No segundo caso, quando A ou A_R não está nas condições do Lema 2.7, para $\epsilon > 0$ defina as matrizes $A(\epsilon)$, $S(\epsilon)$ e $R(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.8, 2.11 e 2.12 respectivamente. Agora sejam $A_R(\epsilon) = (I + R(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = (I + S(\epsilon) + R(\epsilon))A(\epsilon)$ e seus respectivos *splittings* Gauss-Seidel dados por $A_R(\epsilon) = M_R(\epsilon) - N_R(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = M_{SR}(\epsilon) - N_{SR}(\epsilon)$. Para $\epsilon > 0$ pequeno suficiente, claramente teremos as condições do

primeiro caso satisfeitas e portanto

$$\rho(M_{SR}(\epsilon)^{-1}N_{SR}(\epsilon)) \leq \rho(M_R(\epsilon)^{-1}N_R(\epsilon))$$

e fazendo ϵ tender a zero segue que

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_R^{-1}N_R).$$

■

Teorema 2.18. *Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_U^{-1}N_U) \leq \rho(M_{max}^{-1}N_{max}).$$

Demonstração:

Primeiro suponha que A e A_{max} estejam nas condições do Lema 2.7, então pelo Lema 2.9 existe $x > 0$ tal que $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$ e $\rho(M^{-1}N) > 0$. Além disso veja que

$$\begin{aligned} M^{-1}Nx &= \rho(M^{-1}N)x \\ Nx &= \rho(M^{-1}N)Mx \\ 0 &= \rho(M^{-1}N)Mx - Nx \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Mx - Nx) \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Ax), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$Ax \geq 0.$$

Como $U \geq S_{max}$ então

$$A_Ux = (I + U)Ax \geq (I + S_{max})Ax = A_{max}x \geq 0.$$

e do fato de $L \geq 0$ temos $UL \geq S_{max}L$, em particular suas partes inferiores satisfazem $E_0 \geq E_1$. Assim,

$$M_{max} - M_U = E_0 - E_1 \geq 0. \tag{2.30}$$

Multiplicando a equação (2.30) por $M_{max}^{-1} \geq 0$ a esquerda e por $M_U^{-1} \geq 0$ a direita obtemos

$$M_U^{-1} - M_{max}^{-1} \geq 0,$$

de onde segue que

$$M_U^{-1} \geq M_{max}^{-1}.$$

Como A_U e A_{max} são M-matrizes e $M_U^{-1} \geq M_{max}^{-1}$, segue do Lema 2.3 que

$$\|M_U^{-1}N_U\|_x \leq \|M_{max}^{-1}N_{max}\|_x,$$

mas como A_{max} satisfaz as condições do Lema 2.7, $M_{max}^{-1}N_{max}$ tem um vetor de Perron positivo e

$$\rho(M_U^{-1}N_U) \leq \rho(M_{max}^{-1}N_{max}).$$

Agora considere o caso em que A ou A_{max} não satisfaz as condições do Lema 2.7. Seja $A(\epsilon)$, definida como na demonstração do Teorema 2.8, e $S_{max}(\epsilon)$ e $U(\epsilon)$ definidas respectivamente por

$$S_{max}(\epsilon) = (s_{ij}^m(\epsilon)) = \begin{cases} -a_{ik_i}(\epsilon) - \epsilon & \text{para } 1 \leq i < n, j > i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde

$$K_i = \min j \in \{j : \max_j |a_{ij}(\epsilon)|\} \text{ para } 1 \leq i < n,$$

e

$$U(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}(\epsilon) & -a_{13}(\epsilon) & \dots & -a_{1n}(\epsilon) \\ 0 & 0 & -a_{23}(\epsilon) & \dots & -a_{2n}(\epsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1,n}(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

com $\epsilon > 0$. Sejam $A_U(\epsilon) = (I + U(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{max}(\epsilon) = (I + S_{max}(\epsilon))A(\epsilon)$ e sejam seus *splittings* referentes ao método Gauss-Seidel dados por $A_U(\epsilon) = M_U(\epsilon) - N_U(\epsilon)$ e $A_{max}(\epsilon) = M_{max}(\epsilon) - N_{max}(\epsilon)$ respectivamente. Nesse caso, para $\epsilon > 0$ pequeno temos as condições do primeiro caso satisfeitas e assim

$$\rho(M_U(\epsilon)^{-1}N_U(\epsilon)) \leq \rho(M_{max}(\epsilon)^{-1}N_{max}(\epsilon)).$$

e fazendo $\epsilon \to 0$ resulta em

$$\rho(M_U^{-1}N_U) \leq \rho(M_{max}^{-1}N_{max}).$$

■

Teorema 2.19. *Se A é uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}).$$

Demonstração:

Mais uma vez vamos separar em dois casos, primeiro suponha A e A_{SR} estão nas condições do Lema 2.7, então existe $x > 0$ com $M^{-1}Nx = \rho(M^{-1}N)x$ e $\rho(M^{-1}N) > 0$. Além disso

$$\begin{aligned} M^{-1}Nx &= \rho(M^{-1}N)x \\ Nx &= \rho(M^{-1}N)Mx \\ 0 &= \rho(M^{-1}N)Mx - Nx \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)(Mx - Nx) \\ 0 &\leq \rho(M^{-1}N)Ax, \end{aligned}$$

o que implica que

$$Ax \geq 0.$$

Assim obtemos

$$A_{RU}x = (I + R + U)Ax \geq (I + R + S)Ax = A_{SR}x \geq 0,$$

e como $U \geq S$ e $L \geq 0$, então $UL \geq SL$ e consequentemente suas partes triangular inferior satisfazem $E_0 \geq SL$. Assim

$$M_{SR} - M_{RU} = -SL + E_0 \geq 0, \tag{2.31}$$

multiplicando (2.31) a esquerda por $M_{SR}^{-1} \geq 0$ e a direita por $M_{RU}^{-1} \geq 0$ temos

$$M_{RU}^{-1} - M_{SR}^{-1} \geq 0,$$

de onde segue que

$$M_{RU}^{-1} \geq M_{SR}^{-1}.$$

Como A_{RU} e A_{SR} são M-matrizes, e $M_{RU}^{-1} \geq M_{SR}^{-1}$ segue do Lema 2.3 que

$$\|M_{RU}^{-1}N_{RU}\|_x \leq \|M_{SR}^{-1}N_{SR}\|_x,$$

e como A_{SR} é irredutível, $M_{SR}^{-1}N_{SR}$ tem um vetor de Perron positivo e novamente do Lema 2.3 temos

$$\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}).$$

No segundo caso, considere A ou A_{SR} fora das condições do Lema 2.7, então para $\epsilon > 0$ defina $A(\epsilon)$, $S(\epsilon)$, $R(\epsilon)$, e $U(\epsilon)$ da mesma forma que nos Teoremas 2.8, 2.11, 2.12 e 2.18 respectivamente.

Sejam $A_{RU}(\epsilon) = (I + R(\epsilon) + U(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = (I + S(\epsilon) + R(\epsilon))A(\epsilon)$ e seus *splittings* do método Gauss-Seidel $A_{RU}(\epsilon) = M_{RU}(\epsilon) - N_{RU}(\epsilon)$ e $A_{SR}(\epsilon) = M_{SR}(\epsilon) - N_{SR}(\epsilon)$

respectivamente. Para $\epsilon > 0$ pequeno é fácil ver que as condições do primeiro caso são satisfeitas e portanto

$$\rho(M_{RU}(\epsilon)^{-1}N_{RU}(\epsilon)) \leq \rho(M_{SR}(\epsilon)^{-1}N_{SR}(\epsilon)).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}).$$

■

Teorema 2.20. *Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1) satisfazendo*

$$|a_{nj}| \geq |a_{n,j-1}a_{j-1,j}|, \quad \textit{para} \quad j = 3, 4, \ldots, n-1, \ \textit{e} \ a_{n-1,n} = 0, \tag{2.32}$$

então

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}).$$

Demonstração:

Primeiramente considere o caso onde A_{S1} satisfaz as condições do Lema 2.7, então existe $x > 0$ tal que $M_{S1}^{-1}N_{S1}x = \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})x$. Como $N_{SR} = N_{S1}$,

$$\begin{aligned}
A_{SR} - A_{S1} &= (R - R_1)A, \\
M_{SR} - M_{S1} &= (R - R_1)A, \\
M_{S1}^{-1} - M_{SR}^{-1} &= M_{SR}^{-1}(R - R_1)AM_{S1}^{-1}, \\
M_{S1}^{-1}N_{S1} - M_{SR}^{-1}N_{SR} &= M_{SR}^{-1}(R - R_1)AM_{S1}^{-1}N_{S1}, \\
M_{S1}^{-1}N_{S1}x - M_{SR}^{-1}N_{SR}x &= M_{SR}^{-1}(R - R_1)AM_{S1}^{-1}N_{S1}x, \\
\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})x - M_{SR}^{-1}N_{SR}x &= \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})M_{SR}^{-1}(R - R_1)Ax.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

E segue de

$$A_{S1}x = \frac{1 - \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}N_{S1}x$$

que

$$\begin{aligned}
Ax &= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}(I+S+R_1)^{-1}N_{S1}x, \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(S+R_1)^k\right]N_{S1}x, \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}\left[I-(S+R_1)+(S+R_1)^2-(S+R_1)^3+\ldots\right]N_{S1}x, \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}(I-S-R_1)\left[I+(S+R_1)^2+(S+R_1)^4+\ldots\right]N_{S1}x, \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}(I-S-R_1)\left[I-(S+R_1)^2\right]^{-1}N_{S1}x.
\end{aligned}$$

Agora, seja $G=(R-R_1)$, então

$$\begin{aligned}
GAx &= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}G(I-S-R_1)\left[I-(S+R_1)^2\right]^{-1}N_{S1}x \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}(G-GS-GR_1)\left[I-(S+R_1)^2\right]^{-1}N_{S1}x \\
&= \frac{1-\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}{\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})}(G-GS)\left[I-(S+R_1)^2\right]^{-1}N_{S1}x.
\end{aligned}$$

Como A satisfaz a condição (2.32), $G-GS=(R-R_1)-(R-R_1)S\geq 0$. assim, $(R-R_1)Ax\geq 0$ e combinando com (2.33) resulta em

$$\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})x-M_{SR}^{-1}N_{SR}x\geq 0,$$

o que significa que

$$\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1})x\geq M_{SR}^{-1}N_{SR}x.$$

E segue do Teorema 1.15 que

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR})\leq\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}).$$

Agora vamos considerar o caso onde A_{S1} não satisfaz as condições do Lema 2.7. Dado $\epsilon>0$ seja $A(\epsilon)=(a_{ij}(\epsilon))$ definida por

$$a_{ij}(\epsilon)=\begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad a_{ij}\neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad i=n-1, j=n, \\ -\epsilon & \text{se} \quad a_{ij}=0 \text{ para } i\neq n-1, j\neq n, \end{cases}$$

defina também $S(\epsilon)$, $R(\epsilon)$ e $R_1(\epsilon)$ como nas demonstrações dos Teoremas 2.11, 2.12 e 2.10.

Sejam $A_{SR}(\epsilon)=(I+S(\epsilon)+R(\epsilon))A(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon)=(I+S(\epsilon)+R_1(\epsilon))A(\epsilon)$, com *splittings*

Gauss-Seidel dados respectivamente por $A_{SR}(\epsilon) = M_{SR}(\epsilon) - N_{SR}(\epsilon)$ e $A_{S1}(\epsilon) = M_{S1}(\epsilon) - N_{S1}(\epsilon)$. Neste caso, tomando $\epsilon > 0$ pequeno, as condições de irredutibilidade do primeiro caso são satisfeitas e segue do primeiro caso que

$$\rho(M_{SR}(\epsilon)^{-1}N_{SR}(\epsilon)) \leq \rho(M_{S1}(\epsilon)^{-1}N_{S1}(\epsilon)).$$

E for fim, fazendo ϵ tender a 0 resulta em

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}).$$

■

Capítulo 3

Exemplos numéricos

Neste capítulo apresentaremos vários exemplos numéricos que nos permitirão visualizar os resultados mostrados no capítulo anterior. Todos os cálculos foram feitos usando o software MATLAB, e o critério de convergência usado na resolução dos sistemas de equações lineares foi $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-16}$. Por praticidade, vamos usar a seguinte notação:

$$\begin{cases} T = M^{-1}N, \\ T_1 = M_1^{-1}N_1, \\ T_R = M_R^{-1}N_R, \\ T_S = M_S^{-1}N_S, \\ T_{S1} = M_{S1}^{-1}N_{S1}, \\ T_{max} = M_{max}^{-1}N_{max}, \\ T_{SR} = M_{SR}^{-1}N_{SR}, \\ T_U = M_U^{-1}N_U, \\ T_{RU} = M_{RU}^{-1}N_{RU}. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. *Neste exemplo vamos considerar um sistema $Ax = b$, onde A é uma M-matriz da forma $I - L - U$ que satisfaz as condições (2.29) e (2.32) simultaneamente. Considere o sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 & -0.5 \\ -0.3 & 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.5 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

A tabela 3.1 mostra os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado com cada pré-condicionador apresentado neste trabalho, e

a quantidade de iterações necessárias para resolver o sistema (3.1)

Tabela 3.1:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.4144	0.3202	0.2613	0.3621	0.2439	0.3015	0.2072	0.1714	0.1683
iterações	42	33	30	37	27	32	25	23	22

Exemplo 3.2. *A matriz do sistema abordado neste exemplo também satisfaz as condições (2.29) e (2.32) simultaneamente. Considere o sistema $Ax = b$ dado por*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & 1 & -0.1 & -0.4 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 1 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & -0.1 & -0.3 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.4 & -0.1 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Os raios espectrais das matrizes de iteração referente a matriz A, assim como a quantidade de iterações necessárias para resolver o sistema (3.2) são mostrados na tabela 3.2.

Tabela 3.2:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.7167	0.6652	0.6174	0.6759	0.6147	0.6285	0.5621	0.4923	0.4647
iterações	113	93	80	96	75	78	66	54	50

Exemplo 3.3. *Neste exemplo consideraremos um sistema $Ax = b$, com A uma M-matriz da forma $I - L - U$, tal que seja satisfeita a condição (2.29), mas que não satisfaz a condição (2.32). Considere o seguinte sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 1 & -0.1 & -0.4 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.1 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.2 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Apresentamos na tabela 3.3 a relação dos valores dos raios espectrais das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado e a quantidade de iterações necessárias para resolver o sistema (3.3).

Tabela 3.3:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.6559	0.6081	0.5300	0.5431	0.4948	0.5341	0.4367	0.3985	0.3377
iterações	87	73	59	60	53	60	47	42	36

Exemplo 3.4. *A matriz do sistema $Ax = b$ definido abaixo é uma M-matriz que satisfaz a condição (2.29), porém a condição (2.32) não é satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & 0 & -0.1 & -0.5 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 & 0 & 0 & -0.4 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0 & -0.1 & 1 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.2 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel e a quantidade de iterações necessárias para atingir o critério de convergência são exibidos na tabela 3.4.

Tabela 3.4:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.5970	0.5518	0.4591	0.4355	0.4003	0.4195	0.3298	0.3112	0.2580
iterações	72	63	49	46	42	45	35	34	30

Exemplo 3.5. *Agora vamos considerar um sistema cuja matriz é uma M-matriz satisfazendo a condição (2.32), mas não satisfazendo a condição (2.29).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.5 & -0.3 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Calculando o valor do raio espectral da matriz de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado, e a quantidade de iterações necessárias para resolver o sistema (3.5) obtemos os valores apresentados na tabela 3.5. Veja que nesse exemplo a desigualdade $\rho(T_{max}) \leq \rho(T_S)$ não é satisfeita.

Tabela 3.5:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.4146	0.4146	0.3944	0.2549	0.2549	0.4004	0.2364	0.2073	0.2050
iterações	43	43	41	29	29	41	28	25	25

Exemplo 3.6. *Neste exemplo, novamente consideraremos um sistema no qual a matriz satisfaz a condição (2.32), mas não satisfaz a condição (2.29). Seja $Ax = b$ o sistema definido por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 1 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & -0.4 & -0.1 & 1 & 0 \\ -0.3 & 0 & -0.2 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

A tabela 3.6 mostra os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração, assim como a quantidade de iterações necessárias para resolver o sistema (3.6). Veja que nesse exemplo, mesmo não sendo satisfeita a condição (2.29) a desigualdade $\rho(T_{max}) \leq \rho(T_S)$ é satisfeita.

Tabela 3.6:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.5703	0.5115	0.4927	0.4805	0.3891	0.4222	0.3577	0.3039	0.2399
iterações	66	56	53	50	40	44	38	31	27

Exemplo 3.7. *Neste exemplo, a M-matriz do sistema escolhido é de tal forma que não satisfaça nenhuma das condições (2.29) e (2.32). Defina o sistema $Ax = b$ como sendo*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 & -0.6 \\ -0.5 & 1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.4 & -0.1 & 1 & -0.3 \\ 0 & -0.7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Com base na matriz A, podemos calcular os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado. Esses valores, juntamente com a quantidade de iterações necessárias para a resolução do sistema (3.7), são apresentados na taleba 3.7.

Tabela 3.7:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.5366	0.5366	0.4824	0.4446	0.4446	0.4739	0.4064	0.3591	0.3570
iterações	58	58	49	45	45	50	41	39	38

Exemplo 3.8. *Vamos considerar o sistema $Ax = b$ como definido abaixo, novamente a matriz do sistema não satisfaz nenhuma das condições (2.29) e (2.32).*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.6 & -0.2 \\ -0.1 & 1 & 0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.5 & 0 & 1 & -0.1 & -0.4 \\ -0.3 & 0 & -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 0 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

A tabela 3.8 mostra os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração, e a quantidade de iterações para resolver o sistema.

Tabela 3.8:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.6980	0.6609	0.6471	0.6445	0.6136	0.5819	0.6063	0.3876	0.3556
iterações	100	87	83	86	77	67	73	41	39

Exemplo 3.9. *Neste exemplo, geramos M-matrizes aleatórias de ordem n com o auxílio do software MATLAB. Os valores dos raios espectrais das matrizes de iteração do método Gauss-Seidel pré-condicionado com cada um dos pré-condicionadores abordados neste trabalho, são exibidos na tabela 3.9*

Tabela 3.9:

n	$\rho(T)$	$\rho(T_1)$	$\rho(T_R)$	$\rho(T_S)$	$\rho(T_{S1})$	$\rho(T_{max})$	$\rho(T_{SR})$	$\rho(T_U)$	$\rho(T_{RU})$
3	0.3676	0.1917	0.1827	0.2701	0.0828	0.2701	0.0785	0.0687	0.0566
4	0.2340	0.2099	0.0652	0.1183	0.1058	0.0576	0.0357	0.0506	0.0457
5	0.4776	0.4555	0.4110	0.3717	0.3336	0.3558	0.3030	0.2501	0.2443
6	0.4663	0.4245	0.3846	0.3695	0.3155	0.3699	0.2727	0.2452	0.2305
8	0.6581	0.6498	0.6194	0.5892	0.5802	0.5959	0.5472	0.4313	0.4165
10	0.5869	0.5810	0.5705	0.5157	0.5076	0.5078	0.4972	0.3529	0.3457
20	0.6841	0.6821	0.6721	0.6664	0.6643	0.6532	0.6541	0.4875	0.4817
30	0.6783	0.6783	0.6723	0.6625	0.6624	0.6570	0.6562	0.4826	0.4797
40	0.6384	0.6384	0.6327	0.6240	0.6239	0.6197	0.6181	0.4292	0.4260
50	0.7833	0.7832	0.7793	0.7754	0.7753	0.7738	0.7714	0.6273	0.6251
100	0.7862	0.7861	0.7841	0.7825	0.7824	0.7810	0.7804	0.6361	0.6350
200	0.7956	0.7956	0.7948	0.7939	0.7939	0.7930	0.7931	0.6514	0.6510
300	0.8275	0.8275	0.8270	0.8264	0.8264	0.8260	0.8259	0.7009	0.7006
400	0.7537	0.7537	0.7533	0.7526	0.7526	0.7522	0.7522	0.5897	0.5895
500	0.7507	0.7507	0.7503	0.7499	0.7499	0.7495	0.7495	0.5856	0.5854
1000	0.8423	0.8423	0.8422	0.8420	0.8420	0.8419	0.8419	0.7247	0.7246

Exemplo 3.10 ([1]). *Considere a seguinte equação diferencial*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$$

com condições de fronteira

$$u(0) = \alpha \quad e \quad u(1) = \beta.$$

Essa equação modela, por exemplo, a temperatura em uma haste de comprimento unitário, com temperaturas fixadas α em $x = 0$ e β em $x = 1$ e com fonte de calor distribuida conforme $g(x)$. Vamos usar um processo discreto para aproximar a solução. Considere os valores para x dados por

$$x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \ \ldots \ , \quad x_n = nh$$

com $h = \frac{1}{n+1}$. Vamos computar aproximações $u_1, u_2, \ldots, u_n$ da solução correta u nos pontos x_i. Aqui u_i será uma aproximação de $u(ih)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $u_0 = u(0) = \alpha$, $u_{n+1} = u(1) = \beta$. Considerando a aproximação

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

multiplicando por h^2 obtemos

$$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = h^2 g(jh), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

considerando um exemplo com $n = 4$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 g(h) + \alpha \\ h^2 g(2h) \\ h^2 g(3h) \\ h^2 g(4h) + \beta \end{bmatrix}$$

Supondo $g(x) = cos(x)$, $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, de $n = 4$ obtemos $h = 1/5$ e ficamos com o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0392 \\ 0,0368 \\ 0,0330 \\ 2,0279 \end{bmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5196 \\ 0,0184 \\ 0,0165 \\ 1,0139 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Resolvendo o sistema (3.9) com cada método pré-condicionado, obtemos os dados exibidos

na tabela 3.10.

Tabela 3.10:

pré-condicionador	-	P_1	P_R	P_S	P_{S1}	P_{max}	P_{SR}	P_U	P_{RU}
raio espectral	0.6545	0.6545	0.6319	0.2593	0.2593	0.2593	0.2593	0.2593	0.2593
iterações	88	88	81	29	29	29	29	29	29

Conclusões

No capítulo 2 mostramos diversos teoremas de comparação entre os pré-condicionadores abordados, e com base nesses resultados podemos fazer uma comparação geral, a qual é apresentada no seguinte.

Corolário 3.1. *Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma M-matriz da forma (2.1), então*

(i) $\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_R^{-1}N_R) \leq \rho(M_1^{-1}N_1) \leq \rho(M^{-1}N) \leq 1$;

(ii) $\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S) \leq \rho(M^{-1}N)$;

(iii) $\rho(M_U^{-1}N_U) \leq \rho(M_{max}^{-1}N_{max})$;

(iv) $\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S)$;

(v) $\rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}) \leq \rho(M_1^{-1}N_1)$;

(vi) Se a condição (2.29) for satisfeita, então

$$\rho(M_{max}^{-1}N_{max}) \leq \rho(M_S^{-1}N_S);$$

(vii) Se a condição (2.32) for satisfeita, então

$$\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}).$$

Baseado nos resultados teóricos exibidos no capítulo 2 e resumidos no Corolário 3.1, e nos testes numéricos apresentados no capítulo 3, podemos concluir que o pré-condicionador $P_{RU} = (I+R+U)$ é efetivo no sentido de aceleração da taxa de convergência do método iterativo Gauss-Seidel. Além disso podemos ver que o pré-condicionador P_{RU} é um dos melhores pré-condicionadores comparado com os demais pré-condicionadores listados neste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos alguns exemplos numéricos com M-matrizes, e nesses exemplos fazemos algumas comparações referentes as condições (2.29) e (2.32), e pelo

exemplo 3.5, podemos concluir que a condição (2.29) não pode ser retirada do Teorema 2.15.

Baseado nos exemplos numéricos exibidos no capítulo 3, e na estrutura dos pré-condicionadores existentes na literatura, propomos algumas conjecturas a respeito da efetividade dos pré-condicionadores no sentido de acelerar a taxa de convergência do método Gauss-Seidel.

Conjectura 3.1. *Se A é uma M-matriz da forma (2.1), então*

$$\rho(M_{RU}^{-1}N_{RU}) \leq \rho(M_{U}^{-1}N_{U}).$$

Conjectura 3.2. *Seja A uma M-matriz da forma (2.1), então a seguinte desigualdade é válida*

$$\rho(M_{SR}^{-1}N_{SR}) \leq \rho(M_{S1}^{-1}N_{S1}).$$

Repare que a conjectura 3.2 é equivalente a dizer que a condição (2.32) é desnecessária. Uma possibilidade de estudo em aberto, é a demonstração das conjecturas elaboradas e uma generalização dos teoremas apresentados no capítulo (2) para um conjunto maior de matrizes.

Apêndice A

Algoritmos

A seguir apresentamos os algoritmos referentes ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com cada pré-condicionador abordado neste trabalho. Os algoritmos foram construídos buscando realizar uma quantidade reduzida de operações.

Nos algoritmos, o elemento da linha i e coluna j da matriz A será denotado por $[A]_{i,j}$. Os algoritmos foram baseados em um sistema $Ax = b$, com A da forma $A = I - L - U$. A variável *tol* representa uma determinada tolerância.

Algoritmo A.1. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel sem pré-condicionador*

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n$ ***do***

$$x_i^{(k+1)} = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)}$$

end for

end while

Algoritmo A.2. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + S)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

$$y_1 = \sum_{j=2}^{n} [U]_{1,j} x_j^{(k)}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_{i+1} = \sum_{j=i+2}^{n} [U]_{i+1,j} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,i}} \left[y_i + [S]_{i,i+1}(y_{i+1} + b_{i+1} - x_{i+1}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,j} x_j^{(k+1)} + b_i \right]$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + b_n$$

end while

Algoritmo A.3. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + R)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)} + b_i + y_i$$

end for

for $l = 2, 3, \ldots, n-1$ ***do***

$$w_l = \sum_{j=1}^{l-1} [R]_{n,j} [U]_{j,l}$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j} [U]_{j,n}} \left[b_n + \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j} (b_j - x_j^{(k+1)} + y_j) + \sum_{j=2}^{n-1} w_j x_j^{(k+1)} \right]$$

end while

Algoritmo A.4. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + R_1)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)} + b_i + y \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)}$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [R_1]_{n,1} [U]_{1,n}} \left(b_n + [R_1]_{n,1} b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} - [R_1]_{n,1} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n-1} [R_1]_{n,1} [U]_{1,j} x_j^{(k+1)} \right)$$

end while

Algoritmo A.5. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + S + R_1)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

$$y_1 = \sum_{j=2}^{n} [U]_{1,j} x_j^{(k)}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_{i+1} = \sum_{j=i+2}^{n} [U]_{i+1,j} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,i}} \left[y_i + [S]_{i,i+1}(y_{i+1} + b_{i+1} - x_{i+1}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,j} x_j^{(k+1)} + b_i \right]$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [R_1]_{n,1}[U]_{1,n}} \left(b_n + [R_1]_{n,1} b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} - [R_1]_{n,1} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n-1} [R_1]_{n,1}[U]_{1,j} x_j^{(k+1)} \right)$$

end while

Algoritmo A.6. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + S_{max})$. *Denotaremos por* $jmaxi$ *a coluna em que se encontra o elemento não nulo de* S_{max} *na linha* i.

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_i = \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)}$$

end for

$$y_n = 0$$

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [S_{max}]_{i,jmaxi}[L]_{jmaxi,i}} \left[y_i + [S_{max}]_{i,jmaxi}(y_{jmaxi} + b_{jmaxi} - x_{jmaxi}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} + [S_{max}]_{i,jmaxi} \left(\sum_{j=1}^{i-1} [L]_{jmaxi,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{jmaxi-1} [L]_{jmaxi,j} x_j^{(k)} \right) b_i \right]$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + b_n$$

end while

Algoritmo A.7. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + S + R)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

$$y_1 = \sum_{j=2}^{n} [U]_{1,j} x_j^{(k)}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_{i+1} = \sum_{j=i+2}^{n} [U]_{i+1,j} x_j^{(k)}$$

$$z_i = \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,i}} \Bigg[y_i + [S]_{i,i+1}(y_{i+1} + b_{i+1} - x_{i+1}^{(k)}) + z_i + \sum_{j=1}^{i-1} [S]_{i,i+1}[L]_{i+1,j} x_j^{(k+1)} + b_i \Bigg]$$

end for

for $l = 2, 3, \ldots, n-1$ ***do***

$$w_l = \sum_{j=1}^{l-1} [R]_{n,j}[U]_{j,l}$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j}[U]_{j,n}} \Bigg[b_n + \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j}(b_j - x_j^{(k+1)} + z_j) + \sum_{j=2}^{n-1} w_j x_j^{(k+1)} \Bigg]$$

end while

Algoritmo A.8. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + U)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$y_i = \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)}$$

end for

$w_1 = 0$

for $i = 2, \ldots, n$ ***do***

$$w_i = \sum_{j=2}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k)}$$

end for

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j}[L]_{j,i}} \left[\sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j}(y_j + b_j + w_j) + \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)} + b_i \right]$$

if $i < n-1$ ***then***

for $m = 1, 2, \ldots, n$ ***do***

$w_m = w_m + x_i^{(k+1)}[L]_{m,i} - x_{i+1}^{(k)}[L]_{m,i+1}$

end for

end if

end for

$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + b_n$

end while

Algoritmo A.9. *Algoritmo referente ao método Gauss-Seidel pré-condicionado com o pré-condicionador* $(I + R + U)$

while $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq tol$ ***do***

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$y_i = \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j} x_j^{(k)}$

end for

$w_1 = 0$

$y_n = 0$

for $i = 2, \ldots, n$ ***do***

$w_i = \sum_{j=2}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k)}$

end for

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ***do***

$t_i = \sum_{j=1}^{i-1} [L]_{i,j} x_j^{(k+1)}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j}[L]_{j,i}} \left[\sum_{j=i+1}^{n} [U]_{i,j}(y_j + b_j + w_j) + t_i + b_i \right]$$

if $i < n-1$ ***then***

for $m = 1, 2, \ldots, n$ ***do***

$w_m = w_m + x_i^{(k+1)}[L]_{m,i} - x_{i+1}^{(k)}[L]_{m,i+1}$

end for

end if

end for

for $l = 2, 3, \ldots, n-1$ ***do***

$$g_l = \sum_{j=1}^{l-1} [R]_{n,j} [U]_{j,l}$$

end for

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j} [U]_{j,n}} \left[b_n + \sum_{j=1}^{n-1} [L]_{n,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} [R]_{n,j} (b_j - x_j^{(k+1)} + t_j) + \sum_{j=2}^{n-1} g_j x_j^{(k+1)} \right]$$

end while

Referências Bibliográficas

[1] A. Berman e R.J. Plemmoms, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[2] J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[3] D.J. Evans, M.M. Martins, e M.E. Trigo, The AOR iterative method for new preconditioned linear systems, J. Comput. Appl. Math. 132 (2001) 461-466.

[4] F. G. Frobenius, Uber Matrizen aus positiven elementen. Sitz-Ber A Kad. Wiss.; Uber Matrices aus nichtneativen elementen, i bid. (1912).

[5] G. H. Golub, e C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3 ed, John Hopkins University Press, Baltimore e Londres, 1996.

[6] A.D. Gunawardena, S.K. Jain, e L. Snyder, Modified iterative methods for consistent linear systems, Linear Algebra Appl. 154-156 (1991) 123-143.

[7] A. Hadjidimos, D. Noutsos, e M. Tzoumas, More on modifications and improvements of classical iterative schemes for M-matrices, Linear Algebra Appl. 364 (2003) 253-279.

[8] T. Kohno, H. Kotakemori, e H. Niki, Improving the Modified Gauss-Seidel Method for Z-Matrices, Linear Algebra Appl. 267 (1997) 113-123.

[9] H. Kotakemori, K. Harada, M. Morimoto, e H. Niki, A comparison theorem for the iterative method with the preconditioner $(I + S_{max})$, J. Comput. Appl. Math. 145 (2002) 373-378.

[10] H. Kotakemori, H. Niki, e N. Okamoto, Accelerated iterative method for Z-matrices, J. Comput. Appl. Math. 75 (1996) 87-97.

[11] W. Li, Comparison results for solving preconditioned linear systems, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005) 319-329.

[12] W. Li, A note on the preconditioned Gauss-Seidel (GS) method for linear systems, J. Comput. Appl. Math. 182 (2005)81-90.

[13] A. Li, e W. Sun, Modified Gauss–Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices, Linear Algebra Appl. 317 (2000) 227-240.

[14] M. Neumann e R.J. Plemmons, Convergence of parallel multisplitting iterative methods for M-matrices, Linear Algebra Appl. 88/89 (1987) 559-573.

[15] H. Niki, K. Harada, M. Morimoto, e M. Sakakihara, The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Gauss-Seidel method, J. Comput. Appl. Math. 164-165 (2004) 587-600.

[16] H. Niki, T. Kohno, e M. Morimoto, The preconditioned Gauss–Seidel method faster than the SOR method, J. Comput. Appl. Math. 219 (2008) 59-71.

[17] H. Niki, T. Kohno, M. Morimoto, e K. Harada, On the practical preconditioned iterative mehtod, ICRACM2001, 2001 Japan.

[18] O. Perron, Zur Theorie der Matrices, Math. Ann. 64 (1907) 248-264.

[19] A. Quarteroni, R. Sacco, e F. Saleri, Numerical Mathematics, Springer, Nova York, 2000.

[20] L. Sun, A comparison theorem for the SOR iterative method, J. Comput. Appl. Math. 181 (2005) 336-341.

[21] M. Usui, H. Niki e T. Kohno, Adaptive Gauss-Seidel method for linear systems, Int. J. Comput. Math. 51 (1994) 119-125.

[22] R.S. Varga, Matrix iterative analysis, Springer, Berlin, 2000.

[23] J. Y. Yuan, e D. D. Zontini, Comparison Theorems of Preconditioned Gauss-Seidel methods for M -matrices, Artigo submetido a publicação, 2010.

[24] J. H. Yun, A note on preconditioned AOR method for L-matrices, J. Comput. Math. 220 (2008) 13-16.

[25] J. H. Yun, A note on the improving modified Gauss–Seidel (IMGS) method, Appl. Math. Comput. 184 (2007) 674-679.

[26] J. H. Yun, Comparison results for the preconditioned Gauss-Seidel methods, Artigo submetido a publicação, 2010.