

LUIZ ALBERTO BLANCO JORGE

**Utilização de Curvas de Forma em Séries Relativas Transformadas nas Estimativas de Volumes Totais e Parciais de Árvores de *Pinus taeda* L.**

Dissertação submetida à consideração da Comissão Examinadora, como requisito parcial na obtenção de Título de "Mestre em Ciências - M.Sc.", no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal do Setor de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA

1982



COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FLORESTAL

PARECER

Os membros da Comissão Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado apresentada pelo candidato LUIZ ALBERTO BLANCO JORGE, sob o título "UTILIZAÇÃO DE CURVAS DE FORMA EM SÉRIES TRANSFORMADAS NAS ESTIMATIVAS DE VOLUMES TOTAIS E PARCIAIS DE ÁRVORES DE *Pinus taeda* L" para obtenção do grau de Mestre em Ciências Florestais - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal do Setor de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Paraná, Área de Concentração MANEJO FLORESTAL, após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, são de parecer pela "APROVAÇÃO" da Dissertação, completando assim os requisitos necessários para receber o grau e o Diploma de Mestre em Ciências Florestais.

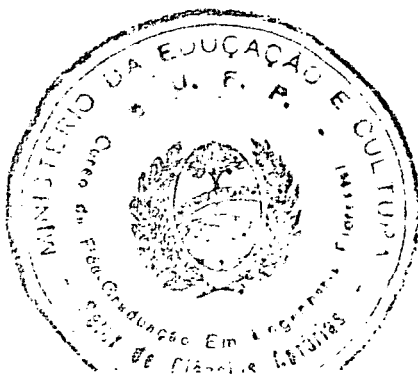
Observação: O critério de avaliação da Dissertação e defesa da mesma a partir de novembro de 1980 é apenas APROVADA ou NÃO APROVADA.

Curitiba, 08 de junho de 1982.

Professor José Alves da Silva, DR.  
Primeiro Examinador

Professor Luiz Benedito Xavier da Silva, M.Sc.  
Segundo Examinador

Professor Sylvio Péllico Netto, DR.  
Presidente



Aos meus pais e irmã

ALBERTO, ELIA e LUCIANE

À minha avó

ISOLINA

D E D I C O

## AGRADECIMENTOS

Ao orientador Professor Sylvio Péllico Netto, bem como aos co-orientadores Professores Sebastião do Amaral Machado e Roberto Tuyoshi Hosokawa, pela orientação da pesquisa.

Ao Curso de Pós - Graduação em Engenharia Florestal da Universidade Federal do Paraná, por possibilitar a realização deste Curso e do presente trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela ajuda financeira.

Ao Engenheiro Florestal João Fernando Borges por permitir a utilização dos dados usados no estudo.

Ao Engenheiro Florestal Hugo Barbosa Amorim, Professor da UFRRJ, pela grande ajuda e estímulo.

Aos companheiros, Engenheiros Florestais, Setsuo Iwakiri e Décio José de Figueiredo, pela amizade e apoio nos momentos de perplexidade.

À minha família e amigos, pela compreensão e inesgotável apoio.

À todas as pessoas, ligadas ao Curso de Engenharia Florestal da UFPR, que possibilitaram uma convivência muito importante.

## BIOGRAFIA

LUIZ ALBERTO BLANCO JORGE, filho de Alberto e Elia Martins Jorge, nasceu no dia 06 de novembro de 1955, na cidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Iniciou seus estudos na cidade do Rio de Janeiro, em 1962 terminando o primeiro grau no Colégio de São Bento, em 1971.

Em 1972 iniciou o estudo de segundo grau, no Colégio de São Bento do Rio de Janeiro, concluindo-o em 1974.

Ingressou no Curso de Engenharia Florestal - UFRRJ, em 1975, concluindo-o em dezembro de 1978.

Em 1980 iniciou o Curso de Pós-Graduação em Engenharia Florestal, na opção de Manejo Florestal, concluindo os créditos, como requisito parcial para a obtenção do título de "Mestre em Ciências" - M.Sc., em junho de 1981.

## S U M Á R I O

	Página
Lista de Figuras .....	ix
Lista de Quadros .....	xi
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Objetivos .....	2
2. REVISÃO DE LITERATURA .....	4
2.1. Forma do tronco .....	4
2.2. Quocientes de forma .....	6
2.3. Fator de forma .....	9
2.4. Equações e curvas de forma .....	12
2.4.1. Curvas de forma em séries relativas trans- formadas .....	21
2.5. Volume .....	23
2.5.1. Volume padrão .....	23
2.5.2. Estimativa indireta do volume por equações de forma .....	25
3. MATERIAL E MÉTODOS .....	27
3.1. Localização dos povoamentos .....	27
3.2. Condições climáticas da região .....	27
3.3. Caracterização dos povoamentos .....	28
3.4. Obtenção dos dados .....	28

	Página	
3.5.	Ajuste das equações que descrevem as séries relativas transformadas .....	29
3.5.1.	Séries médias originais de quocientes natu- rais e de quocientes naturais transforma- dos .....	29
3.5.2.	Modificação na equação parabólica que des- creve a série $ASy_2$ .....	33
3.5.3	Ajuste dos coeficientes e obtenção das po- tências das equações de forma .....	34
3.6.	Estimativas de volumes totais e parciais através das equações de forma .....	37
3.6.1.	Estimativa do volume total .....	39
3.6.2.	Estimativas de volumes parciais .....	41
3.6.3.	Estimativa do diâmetro sem casca a um déci- mo da altura da árvore em função do DAP ...	44
3.6.4.	Comparação dos volumes totais e parciais estimados com os respectivos volumes pa- drões .....	45
3.6.4.1.	Porcentagem média dos desvios .....	45
3.6.4.2.	Análise de resíduos .....	45
4.	RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	48
4.1.	Curvas de forma genéricas .....	48
4.2.	Estratificação dos dados em função do fator de forma natural .....	51
4.2.1.	Classes de fator de forma .....	51
4.2.2.	Funções de fator de forma .....	58

	Página
4.2.2.1. Fator de forma natural como função do DAP e altura total .....	62
4.2.2.2. Fator de forma natural como função do quociente natural ao meio do tronco .....	63
4.3. Estimativas de volumes totais e parciais ..	67
5. CONCLUSÕES .....	76
6. RESUMO .....	78
SUMMARY .....	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	83
APÊNDICE .....	86

## LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	Esquema comparativo entre o perfil do tronco que descreve quocientes naturais e as curvas que descrevem os quocientes naturais transformados .....	38
2	Desenho esquemático em que representa-se o tronco inteiro e as seções de Hohenadl de forma acumulativa .....	40
3	Figura esquemática de áreas encontradas no perfil do tronco que descreve quocientes naturais e sua relação com as correspondentes nas curvas transformadas .....	42
4	Curvas de forma transformadas genéricas .....	50
5	Curvas que descrevem a série $AS_y$ para as 5 classes de fator de forma .....	56
6	Curvas que descrevem a série $AD_y$ para as 5 classes de fator de forma .....	57
7	Representação gráfica da equação de fator de forma nº 4 para cada classe de diâmetro .....	65

Figura		Página
8	Tendência dos pontos e traçado da curva que descreve o fator de forma natural em função de $\kappa_{0,5h}/0,1$ .....	68
9	Distribuição dos resíduos de volumes totais em percentagem em relação aos valores de DAP ....	71
10	Tendência dos pontos e traçado da equação da reta que estima diâmetro sem casca a um décimo da altura da árvore em função do DAP .....	75

## LISTA DE QUADROS

Quadro		Página
1	Distribuição das árvores de <i>Pinus taeda</i> L. em classes de diâmetro e altura .....	30
2	Séries originais médias de quocientes naturais e de quocientes naturais transformados para o total dos dados .....	48
3	Séries originais médias de quocientes naturais transformados com as respectivas séries de quocientes ajustados e os correspondentes valores de resíduos individuais em percentagem .....	51
4	Séries originais médias de quocientes naturais e de quocientes naturais transformados por classe de fator de forma .....	54
5	Conjunto de equações de forma ajustadas para cada classe de fator de forma .....	55
6	Séries $AS_y$ originais médias para as 5 classes de forma com os respectivos valores estimados e os resíduos individuais em percentagem ....	59
7	Séries $AD_y$ originais médias para as 5 classes de forma com os respectivos valores estimados e os resíduos individuais em percentagem ....	60

Quadro	Página
8	Coeficiente de correlação simples entre o fator de forma natural e sua transformação logarítmica com as variáveis independentes estudadas ..... 62
9	Equações de regressão para fator de forma natural utilizando DAP e altura como variáveis independentes básicas ..... 64
10	Equações de regressão para fator de forma natural utilizando o quociente natural ao meio do tronco como variável independente ..... 66
11	Resultados do teste da troca de sinais por classe de diâmetro e para a distribuição geral dos resíduos ..... 72
12	Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem , em ordem crescente do DAP ..... 87

## 1. INTRODUÇÃO

Levantamentos florestais são realizados com o intuito de se obter informações sobre a população ou populações da área florestal de interesse. As variáveis em estudo são especificadas por ocasião da fixação dos objetivos do inventário florestal. Quando se deseja avaliar os recursos florestais disponíveis de uma área ou região, a variável volume é sem dúvida a principal ou uma das fundamentais a ser analisada. Com o desenvolvimento do setor florestal, houve necessidade de se fornecer informações mais detalhadas do estoque de matéria-prima, para que se pudesse desenvolver planos de manejo mais adequados e conseqüentemente aprimorar o suprimento às indústrias florestais e ao mercado consumidor em geral. Em decorrência disto, além de estimar volumes totais e comerciais, sentiu-se a importância de se quantificar o volume de madeira em pé existente na floresta para os diversos usos industriais e comerciais.

A classificação de toras de madeira com relação a sua utilização está diretamente ligada às dimensões das mesmas, precisando-se, para colocá-las em diferentes categorias, ter-se conhecimento de diâmetros e comprimentos. Baseados neste aspecto, vários pesquisadores desenvolveram modelos que descrevem o formato do tronco e a partir deles se pode estimar volumes de partes do mesmo. Muitas equações de forma foram

elaboradas e aplicadas em diferentes espécies e condições. Várias delas mostraram-se satisfatórias quanto a reprodução de valores diamétricos à diversas alturas e em relação as estimativas de volumes àquelas situações restritas. Porém nenhuma das equações conseguiu solucionar o problema de maneira definitiva e universal.

A presente pesquisa procurou dar continuidade ao desenvolvimento do uso das curvas de forma em séries relativas transformadas, inicialmente ajustadas para *Araucaria angustifolia* no Sul do Brasil. Como várias outras funções de forma, as utilizadas para o ajuste das referidas séries transformadas, não tem a pretensão de resolver o problema da descrição do perfil do tronco de modo categórico. Tenta-se apresentá-las outrossim, como uma das alternativas viáveis.

### 1.1. OBJETIVOS

- Ajustar as curvas de forma em séries relativas transformadas genéricas e por classe de fator de forma, para um conjunto de árvores de *Pinus taeda* L.
- Testar 7 modelos, encontrados na literatura, que estimem o fator de forma natural, sendo que em 4 destes utiliza-se o diâmetro a altura do peito e altura total como variáveis independentes básicas e os outros 3 têm o quociente natural ao meio do tronco como variável independente.
- Estimar os volumes totais das árvores através da integração da curva de forma adequada e comparar os valores estimados com os respectivos volumes de

HOHENADL, dando ênfase à distribuição gráfica dos resíduos.

- Desenvolver a metodologia para estimar volumes parciais quando da utilização de curvas de forma em séries relativas transformadas.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1. FORMA DO TRONCO

A forma do tronco pode ser abordada sob dois aspectos, sendo o primeiro relacionado ao conceito de mensuração e o outro a um ponto de vista biológico. A aproximação a um ou a outro dependerá logicamente do desejo de enfatizar a produção da árvore como matéria-prima ou o desenvolvimento da mesma como ser vivo. O formato do tronco foi definido como a razão relativa da mudança dos valores dos diâmetros com o aumento da altura da árvore, que é sinônimo de afilamento do tronco (20).

Um conceito intuitivo da forma da árvore foi adquirido como sendo a forma geométrica da massa de madeira em um único tronco dominante e de uma dada árvore. Esta massa de madeira é limitada por um invólucro hipotético. Olhando-se, muitas vezes, apenas pelo aspecto de mensuração tem-se procurado descobrir funções simples, com duas variáveis e poucos parâmetros para descrever o perfil inteiro de troncos de árvores. Como a forma da árvore é resposta a uma gama de fatores biológicos, ecológicos e genéticos, assumindo uma grande variedade de perfis, as funções simples, em sua maioria, não apresentam soluções satisfatórias ao problema (13).

GOMES<sup>11</sup> cita que a forma da árvore varia de espécie

para espécie, de indivíduo para indivíduo em uma mesma espécie, de acordo com o tratamento, com o sítio, com a situação particular em que se encontram as árvores e as próprias características intrínsecas destas. A forma para um mesmo indivíduo varia com a idade. Encontra-se na natureza uma grande variedade de formas de fustes e troncos, desde a perfeitamente similar a um tipo geométrico bem definido, até aquelas formas irregulares. Disto resulta uma dificuldade razoável, quando se propõe estudar os vegetais arbóreos sobre este ponto de vista.

São descritas por LARSSON<sup>20</sup> de forma abrangente as teorias existentes para explicar as variáveis na forma do tronco. Nenhuma delas explica definitivamente o assunto, mas apresentam interpretações que devem ser levadas em consideração como partes de um processo biológico ainda não completamente analisado. A teoria mecânica, por exemplo, baseia-se no fato de que a árvore se configura com um tronco suficientemente forte para resistir ao seu peso e às forças do vento que esbarram em sua copa, sendo este um fator importante na determinação da forma do tronco. Entretanto, como a árvore não prevê futuras condições a que ficará exposta, sua forma e densidade devem por isso, representar uma aclimação gradual às condições externas prevaescentes. A hereditariedade deve também ser levada em consideração, pois todas as árvores são predispostas a assumir certa forma. Influências do ambiente podem somente modificar a forma básica da árvore predestinada pela hereditariedade.

Nos seus estudos de forma, mensuracionistas têm procurado exprimir a forma do tronco através de expressões pu

ras que sejam independentes do diâmetro e da altura. Porém, tais tipos de expressões não têm sido encontradas, sendo utilizadas mais freqüentemente funções empíricas. Todavia os métodos que foram desenvolvidos para o estudo da forma do tronco tem sido úteis. Eles podem ser considerados sob os seguintes títulos: quocientes de forma, fator de forma, equação e curva de forma (17).

## 2.2. QUOCIENTE DE FORMA

Segundo LOETSCH et al.<sup>23</sup>, o fator de forma não é diretamente mensurável, porém, o quociente de forma, ou seja, a relação entre dois diâmetros medidos a diferentes alturas, pode ser obtida diretamente. O quociente de forma é usado geralmente como terceira variável independente para expressar a forma da árvore na utilização de equações de volume. Os quocientes de forma servem ainda como variáveis independentes em estimativa de fator de forma, e séries de quocientes de forma auxiliam na descrição dos perfis de troncos.

A primeira destas razões entre diâmetros foi proposta por SCHIFFEL\*. Ele inicialmente tomou diâmetros na metade da árvore,  $d_{0,5h}$ , como numerador, e o diâmetro a altura do peito como denominador,

$$k = \frac{d_{0,5h}}{d}$$

\* SCHIFFEL, A. Form und Inhalt der Fichte Wien. Mitt. a.d. Forst Versuchswesen. Österreich Hf. 24, 1899.

PRODAN<sup>28</sup> cita que os quocientes de forma feitos por SCHIFFEL são tentativas antigas para derivar o formato do tronco. Denomina ele o quociente de forma na metade do tronco, como quociente de forma não verdadeiro. SCHIFFEL estabeleceu ainda o quociente de forma não verdadeiro a um quarto e a três quartos do comprimento do tronco a partir da base.

O quociente de forma absoluto apresentado por JONSON, é aquele, de acordo com HUSCH et al.<sup>17</sup>, em que a posição do diâmetro superior foi mudada para um ponto entre o diâmetro a altura do peito e o topo da árvore.

$$\kappa_a = d_{0,5}(h + 1,30m)/d$$

GIRARD desenvolveu um quociente de forma para uso como variável independente na construção de tabelas de volume, o qual é a relação de percentagem entre o diâmetro sem casca ( $d_u$ ), no topo da primeira tora padrão em relação ao diâmetro a altura do peito (17).

$$\kappa_G = d_u / d$$

A metodologia de HOHENADL\* para o estudo do formato do tronco baseia-se em tomar diâmetros em posições correspondentes à frações iguais da altura total, sendo que estes devem ser expressos em termos do diâmetro basal ou algum outro diâmetro de referência (14). Tem-se então, que o tronco é dividido, do solo ao topo, em 5 partes e usou-se quocientes de forma de diâmetros tomados em 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 da altura total em relação ao diâmetro tomado a 0,1h.

\* HOHENADL, W. Der Aufbau der Baumschafte. Fw. Cbl. 1924.

Tais relações são chamadas de formas proporcionais naturais. Apresentam a grande vantagem de serem comparáveis umas com as outras, mesmo entre árvores de dimensões diferentes. A desvantagem prática é a necessidade de medir anteriormente a altura total das árvores. Os quocientes naturais são formulados genericamente como:

$$k_{0,i/0,1 h} = d_{0,i} / d_{0,1 h}$$

ASSMAN<sup>3</sup> constatou que as mudanças na forma do tronco de Abeto com o aumento em idade e altura são devidas principalmente ao aumento da base da árvore. A pressão estática nas seções transversais do tronco perto do solo, que cresce com o aumento da altura da árvore, resulta em um engrossamento contínuo da base do tronco, com o qual o ponto de inflexão da curva do tronco pôde mover-se para cima até 8 metros. Estas mudanças da forma do tronco perto do solo, não são captadas pela série de quocientes naturais desenvolvida por HOHENADL, tornando-se necessário a tomada de medidas adicionais, como a 0,125h e 0,025h ou seja a 12,5 por cento e 2,5 por cento da altura total a partir do solo.

Numerosos investigadores provaram que quocientes de forma variam dentro de limites amplos. Para determinar as normas que governam esta variação, deve-se primeiro encontrar a dependência de quocientes de forma a diâmetros e alturas. Esta dependência não pode ser determinada sem um conhecimento dos quocientes de forma médios do tronco para diferentes diâmetros e alturas (1).

Os quocientes de forma decrescem somente ligeiramente

com o crescimento dos diâmetros do tronco. Esta variação é mais pronunciada em classes de diâmetro menores e gradualmente torna-se imperceptível à medida que os diâmetros tornam-se maiores. Conseqüentemente, a magnitude de quocientes de forma depende do diâmetro à altura do peito e da altura total (1).

### 2.3. FATOR DE FORMA

HUSCH et al.<sup>17</sup> mencionam o fator de forma como a relação entre o volume real da árvore e o volume de um sólido geométrico, tal como o cilindro, um cone ou tronco de cone, possuindo mesmo diâmetro e altura. Denominando-se:

$$Wx = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h = \text{volume de um cilindro}$$

tem-se que:  $V = Wx \cdot \lambda x \quad \therefore \quad \lambda x = V/Wx$

onde:

$V =$  volume da árvore

$\lambda x =$  Fator de Forma

A relação anterior depende portanto do conhecimento do volume padrão para que se possa obter  $\lambda x$ .

O fator de forma artificial relativo ao diâmetro a altura do peito é o fator de redução para se chegar ao volume, em que o cilindro de referência tem como diâmetro aquele tomado a 1,30m de altura a partir do solo.

Árvores com formas geometricamente idênticas, mas com alturas diferentes produzem diferentes fatores de forma artificiais, o que segundo LOETSCH et al.<sup>23</sup> é causado pela influência da base das mesmas, que em árvores velhas e grandes excede a região do diâmetro a altura do peito.

O fator de forma natural é aquele em que o diâmetro de referência é locado a uma altura relativa do tronco, podendo esta ser tomada a 1/5, 1/10 ou 1/20 da altura total.

PRODAN<sup>28</sup> observa que HOHENADL conseguiu expressar em seu fator de forma natural, a série de medidas relativas tomadas ao longo do tronco por um único número ou fator, de maneira que permita dizer algo sobre o desenvolvimento da referida série. O fator de forma é determinado como:

$$\lambda_{0,1} = 0,2 (1,000 + \kappa_{0,3}^2 + \kappa_{0,5}^2 + \kappa_{0,7}^2 + \kappa_{0,9}^2)$$

Através deste fator de forma, árvores com diferentes alturas, mas que apresentam formas similares poderão ser comparadas, pois os diâmetros das séries são medidos a uma mesma distância relativa vinculada a um diâmetro situado sempre a mesma altura relativa.

O fator de forma proposto por HOHENADL mostra flutuações menores do que os fatores de forma artificiais comumente usados e experimentam pequenas trocas sistemáticas com o crescimento nas dimensões da árvore (3).

Os estudos de DITTMAR\* na Alemanha sobre o fator de forma natural, levou-o a concluir que para a determinação destes com valores abaixo de 2% de erro, é suficiente medir os diâmetros de vinte troncos no povoamento a posições 0,5h e 0,1 h para todas as alturas (1).

As investigações de PRODAN<sup>28</sup> comprovaram que entre  $\lambda_{0,1}$  e  $\kappa_{0,5 h}$  existe uma relação estatística praticamente li-

\* DITTMAR, O. Untersuchungen über die Zusammenhänge zwischen der Hohenadlschen echten Schaftholzformzahl  $\lambda_{0,9}$ , dem echten formquotienten qH und eihter Ausbauchungsreihe in mittel und nordost-deutschen Waldbeständen. Arch. f. Fw. S. 2 ff., 1958.

near, que é válida para maioria dos valores médios de povoamento de todas as espécies de madeira. Esta correlação é bastante forte. Para algumas espécies, a estimativa do fator de forma natural em função do quociente de forma natural no meio do tronco é melhor alcançada através de uma parábola de 2º grau:

$$\lambda_{0,1} = b_0 + b_1 \kappa_{0,5h} + b_2 \kappa_{0,5h}^2$$

HEGER<sup>14</sup> trabalhando com 37 árvores dominantes e codominantes de *Pinus elliottii* encontrou um coeficiente de correlação simples entre  $\lambda_{0,1}$  e  $\kappa_{0,5h}/0,1$  igual a 0,918.

Estimativas de fator de forma para árvores em crescimento são expressos, mais comumente, em função do diâmetro à altura do peito e da altura, isto em decorrência da praticidade em se medir tais variáveis no campo. As seguintes funções de fator de forma foram testadas por vários autores(23):

$$\lambda x = b_0 + b_1 d + b_2 d^2$$

$$\lambda x = b_0 + b_1 h + b_2 h/d$$

$$\lambda x = b_0 + b_1 1/h + b_2 1/d^2 + b_3 1/d^2 h$$

$$\log \lambda x = b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h$$

Analisando as condições que afetam a magnitude do fator de forma, ANUCHIN<sup>1</sup> menciona que se ocorrer uma diferença de um centímetro na medida do diâmetro à altura do peito, isto pode causar um erro de 5% no cálculo do fator de forma. Troncos de coníferas e árvores decíduas obedecem a mesma lei sob quaisquer condições históricas naturais, ou seja, troncos de todas as espécies, de mesma altura, mesma razão do

diâmetro no meio do tronco e DAP, tem fatores de forma similares. O fator de forma diminui para alturas crescentes de troncos de todas as espécies que vegetam em povoamentos, sobre uma variedade de condições de sítio e com o mesmo quociente de forma à metade do tronco. Para troncos acima de 20m de altura, este decréscimo torna-se inicialmente rápido e diminui gradualmente, enquanto para a mesma altura do tronco, o fator de forma cresce regularmente com o crescimento do quociente de forma ( $\kappa$ ).

#### 2.4. EQUAÇÕES E CURVAS DE FORMA

Uma das possibilidades de que se dispõe para a constatação da forma média do tronco de uma espécie de madeira é através da construção de uma curva modelo de tronco com o perfil característico da espécie em questão.

Tomando-se medições de diâmetros em pontos sucessivos ao longo dos troncos das árvores pode-se tentar ajustar modelos matemáticos, que forneçam um bom retrato da forma do tronco. O propósito final é obter uma ou mais equações que descrevam o perfil do tronco, da espécie ou espécies em estudo, para que se possa usá-las na estimativa do volume.

A primeira tentativa mais conhecida de expressar a forma média do tronco através da equação matemática, foi desenvolvida por HÖJER em 1903, segundo PRODAN<sup>28</sup>, onde:

$$\kappa_i = \frac{d_i}{D} = c \log \frac{c + l}{c}$$

onde: C e c são constantes;  $d_i$  = diâmetro da árvore a  $l$  metros do cume; D = diâmetro na base.

Segundo SPURR<sup>30</sup>, JONSON tomou a fórmula inicialmente desenvolvida por HÖJER e modificou-a adicionando uma constante biológica,

$$\kappa_i = \frac{di}{D} = c \log \frac{c + l - 2,5}{c}$$

onde:  $\kappa_i$  é o diâmetro em % do diâmetro da base D e  $l$  é o comprimento relativo em % de  $h - 1,3m$  ( $h$  = altura da árvore, a partir do cume).

BAKER<sup>4</sup> descreveu um sistema de curvas em que a curva de forma assemelha-se a fórmula generalizada de um parabolóide, onde:

$$Y = px^r \quad \text{ou} \quad Y^2 = px^r$$

Nesta equação: Y = diâmetro a altura do peito, sem casca

$x$  = distância do topo da árvore

$p$  e  $r$  = constantes

BEHRE<sup>5</sup> usou uma equação hiperbólica para representar curvas de forma:

$$\kappa = \frac{x}{a + bx}$$

onde:  $\kappa$  é a razão do diâmetro a distância relativa  $x$  (expressa em % da altura acima de 1,30m) para o diâmetro normal à altura do peito, retirada a influência das raízes.

Em seu estudo sobre a forma de espécies de coníferas, principalmente *Pinus taeda*, MATTE<sup>24</sup> teve um interesse especial quanto a influência das raízes na dilatação da base da árvore. Ele trabalhou com a seguinte fórmula:

$$y = x \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

onde  $x$  representa a distância do topo até alguma secção como uma proporção do comprimento compreendido entre o topo e a altura do peito;  $y$  corresponde ao diâmetro como uma proporção do diâmetro à altura do peito sem casca.

KOZAK & SMITH<sup>18</sup> afirmam que MUNRO em 1966, desenvolveu uma transformação linear do parabolóide quadrático, que descreve bem a distribuição dos diâmetros a várias alturas sem casca para árvores de coníferas do Serviço Florestal de British Columbia. Embora a equação não descreva completamente a forma da árvore da base à ponta, satisfaz, segundo eles, as necessidades para estimar a fração do volume comercial, ou seja:

$$d_i^D = b_0 + b_1 \left\{ \frac{h_i}{(h - 1,3)} \right\}$$

onde:  $d_i$  = diâmetro a uma altura qualquer da árvore

$D$  = diâmetro à altura do peito

$h_i$  = altura da secção

$h$  = altura total

Objetivando desenvolver tabelas de forma e aperfeiçoar tabelas de volume para o Álamo vermelho, BRUCE et al.<sup>6</sup> desenvolveram equações de regressão complicadas. Descrevendo a curva de forma do nível do solo até o topo eles empregaram potências acima do quadragésimo grau de altura relativa  $x$ .

$$x = \frac{h - hm}{h - 1,30}$$

onde:

$h$  = altura total

$hm$  = altura do ponto de medição

O procedimento *Stepwise* foi usado para ajustar as medições combinadas das árvores na equação:

$$\frac{d_i^2}{D^2} = \sum b_i x^{n_i} + \sum b_j \{ f(D, h) \} \{ n^{n_i} - x^{n_j} \}$$

DEMAERSCHALK<sup>7</sup> transformou equações de volume comumente usadas, em funções de forma compatíveis. Um dos princípios envolvidos foi através da derivação de equações de volume. Por exemplo a equação logarítmica de volume  $\log v = a + b \log D + c \log h$  pode ser convertida em uma equação logarítmica de forma  $\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log l + b_3 \log H$ .

Embora muitas funções de forma propostas por mensuracionistas resultem em boa estimativa da forma, a estimativa do volume é usualmente menos satisfatória por causa dos desvios, de acordo com DEMEAERSCHALK<sup>8</sup>. Os efeitos dos desvios em estimativas da forma no volume, podem ser influenciados pela posição da árvore e pelo tamanho da mesma. A conversão de equações de volume em equações de forma compatíveis é feita, porque o volume obtido através da integração da equação de forma deve ser o mesmo dado pela equação de volume, da qual é derivada. Os parâmetros livres podem ser escolhidos, para obter o melhor ajustamento possível da forma, pela minimização do erro padrão de estimativa do diâmetro sem casca.

PÉLLICO NETTO<sup>25</sup> dividiu as funções que descrevem a forma da árvore em dois grupos: as construídas para uma série absoluta contínua de forma e as equacionadas para uma série relativa contínua de forma.

Para a série absoluta contínua de forma o perfil da árvore é descrito por uma função contínua em que o diâmetro,

altura da árvore, e por vezes variáveis auxiliares, entram como variáveis do modelo. O método proposto por GRAY<sup>12</sup>, no ajuste de um modelo para o perfil de árvores, denominado de *Gray's taper line*, coaduna-se com este grupo de funções. Neste método o diâmetro tomado a um ponto no tronco é dado como função linear da altura neste ponto.

$$dx = a + b hx$$

Os coeficientes a e b são ajustados para absorver as discrepâncias existentes nas classes diamétricas.

$$a = f(d, h)$$

$$b = f(d, h)$$

Na série relativa contínua de forma a função que descreve o perfil da árvore é desenvolvida para uma série relativa de diâmetros como função de uma série relativa de alturas.

OSUMI\* citado por PRODAN<sup>28</sup>, utilizando um polinômio de 3º grau para ajustar a curva do fuste da espécie *Cryptomeria japonica* trabalhou com séries relativas.

$$n_i = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

onde:  $n_i = \kappa_{0,ih}/0,1 = d_{0,ih} / d_{0,1h}$

$$x = h_i/h$$

A representação do polinômio tem a vantagem de ser integrada com facilidade, através do que o volume pode ser estimado com precisão. PRODAN<sup>28</sup> também afirma que para o formato do pinhei

\* OSUMI, S. Studies on the stem form of the forest trees. On the relative stem form. J. Jap. For. Soc., 41(12): 471-479.

ro (Fichte), um polinômio de terceiro grau não consegue fazer uma boa aproximação. Então para a curva reproduzir bem os valores  $n_{0,1}$ ,  $n_{0,3}$ ,  $n_{0,5}$ ,  $n_{0,7}$ ,  $n_{0,9}$  torna-se necessário uma equação de 4º grau. O formato do tronco do pinheiro pode também ser representado por uma equação hiperbólica do tipo:

$$n_i = \frac{x^2}{a + bx + cx^2}$$

SCHOPFER\*citado por HOSOKAWA<sup>15</sup> e PETERS<sup>26</sup> propôs o ajustamento de um polinômio de 5º grau.

$$n_i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

PETERS<sup>26</sup> elaborou um método de construção de tabelas de volume para espécies nativas que permitiu a estimativa do volume por toras de comprimento e qualidade variáveis. Para isso ajustou uma equação polinomial de 5º grau utilizando árvores de *Araucaria araucana*.

HOSOKAWA<sup>15</sup> utilizou tal polinômio para descrever a forma média de árvores de *Araucaria angustifolia*. Comenta ele que a vantagem deste processo está no fato de que a equação polinomial é de fácil integração, permitindo assim o cálculo percentual de volume de qualquer parte do fuste.

KOZAK et al.<sup>19</sup> utilizaram o processo de descrição da forma da árvore através da série relativa contínua de forma quando propuseram a seguinte equação parabólica para coníferas medidas pelo serviço florestal de British Columbia, Canadá:

\*SCHOPFER, W. Automatisierung des Massen, Sorten - und wertberechnung stehender Waldbestände. Schriftenreihe Bad. - Würtl Forst Vers. Bd. 21, 1966.

$$\left(\frac{dx}{d}\right)^2 = a + b\frac{hx}{h} + c\left(\frac{hx}{h}\right)^2$$

Pela equação anterior observa-se que os diâmetros foram divididos pelo diâmetro a altura do peito, caracterizando-se uma série relativa, pois também foram usadas alturas relativas, porém com quocientes de forma artificiais.

SILVA<sup>29</sup> testou 20 modelos pesquisados na literatura para a determinação de uma função apropriada para representar a forma dos troncos das espécies *Fichte* (*Picea excelsa*), *Kiefer* (*Pinus silvestris*) e *Tanne* (*Abies alba*) oriundos da região de *Waldviertel* na Áustria e também para *Pinus taeda* proveniente do sul do Brasil. As medições dos diâmetros nos troncos foram realizadas segundo o procedimento do HOHENADL. A análise dos dados mostrou que a equação de KOZAK et al.<sup>19</sup> produziu o melhor ajustamento para dados relacionados com as espécies *Fichte*, *Kiefer* e *Tanne*.

Segundo LIU & KEISTER<sup>22</sup> uma curva freqüentemente falha ao descrever os pontos múltiplos de inflexão na parte do tronco que se situa na região da copa ou para ajustar a base da árvore ou ambos. Tentando resolver estes problemas, FRIES & MATERN<sup>10</sup> introduziram a técnica multivariada para construção de curvas de forma de Bétula e Pinheiro, na Suécia e British Columbia. A análise de componente principal, um dos subcampos da análise estatística multivariada, é usada no estudo para definir e comparar formas do tronco. Ela pode ser descrita como um procedimento analítico de transformação ortogonal de um grupo de variáveis correlacionadas em outro grupo de variáveis não correlacionadas. As variáveis originais são observáveis enquanto as variáveis derivadas são latentes.

No seu estudo FRIES & MATERN<sup>10</sup> utilizaram 485 árvores amostrais, em que foram medidos diâmetros com casca e a espessura da casca a: 1, 4, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 e 80 por cento da altura do tronco em relação ao solo. Ao final do trabalho chegaram eles a conclusão de que os três primeiros vetores latentes seriam usados para uma descrição da forma do tronco para árvores com variação de comprimento de copa em percentagem e variação do diâmetro a altura do peito. O primeiro vetor latente deu uma relação linear entre os diâmetros. Esta é a forma média do tronco de todas as árvores. O segundo vetor latente deu a relação linear entre os desvios do primeiro vetor latente. Agrupamentos dos dados mostraram, que os elementos do segundo vetor foram correlacionados com comprimento da copa em percentagem e que os elementos do terceiro vetor latente foram correlacionados com o DAP das árvores.

LIU & KEISTER<sup>22</sup> usaram análise de componentes principais para definir o afilamento do tronco de *Pinus taeda* e *Pinus elliottii*. Através do primeiro vetor latente encontrado tentou-se definir a forma da árvore. Para isso este vetor latente foi ajustado com uma função matemática. A técnica de regressão *stepwise* foi usada, aonde o primeiro vetor latente foi a variável dependente e as variáveis independentes foram posições das alturas correspondentes aos elementos do referido vetor e suas potências, por exemplo:  $\sqrt{x}$ ,  $x$ ,  $\sqrt{x^3}$ ,  $x^2$ ,  $\sqrt{x^5}$ ,  $x^3$ . Procurou-se então selecionar o melhor dentre um número de modelos aceitáveis, utilizando o coeficiente de determinação como critério de seleção. As variáveis escolhidas pelo *Stepwise* foram:  $\sqrt{x}$ ;  $x$ ,  $\sqrt{x^3}$ ,  $x^2$ .

ARENHS<sup>2</sup>, procurando definir a forma do tronco de árvores de *Pinus taeda* locadas em povoamentos no sul do Brasil utilizou também a análise de componentes principais. Para um conjunto de 188 árvores amostrais, tomou-se medições de diâmetros com casca e espessura de casca em sete posições relativas ao longo do tronco, quais sejam: 0,1h, 0,3h, 0,5h, 0,7h, 0,9 e adicionalmente 0,167h e 0,033h a partir do solo. Análise de regressão polinomial foi usada para ajustar um modelo para aqueles elementos do primeiro vetor latente.

Segundo LIU<sup>21</sup>, mesmo que se tenha árvores de uma única espécie, crescendo em área geográfica comum e recebendo tratamentos similares, desvios da forma característica do tronco, ocorrem corriqueiramente. Por isso achou adequado, em seu trabalho para definir a forma do tronco e estimar o volume de toras do Álamo amarelo, utilizar uma técnica numérica capaz de assumir várias formas funcionais dependendo da distribuição dos pontos. Para isso foi utilizada uma função *Splíne* de terceiro grau, onde ocorre uma interpolação por uma classe de funções coordenadas, que podem ser descritas como um grupo de polinômios de terceiro grau com segmentos de ligações regulares.

PREUSSNER<sup>27</sup> fez a dedução de uma curva de forma para o pinheiro (*Fichte*), composta de quatro funções parciais. Para isso foram medidos os diâmetros a 0,05h, 0,15h, 0,25h, 0,35h, 0,45h, 0,55h, 0,65h, 0,75h, 0,85h e 0,95h. Na subdivisão da curva de forma em 4 partes distintas, cada uma destas partes foi equacionada por uma parábola, ou seja:

$$y_1 = a_{11} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + bx}} \quad 0 \leq x \leq 0,25$$

$$y_2 = a_{21} \cdot \sqrt{1-x} \quad 0,25 \leq x \leq 0,60$$

$$y_3 = a_{31} \cdot \sqrt[4]{(1-x)^3} \quad 0,60 \leq x \leq 0,75$$

$$y_4 = a_{41} \cdot \sqrt[6]{(1-x)^5} \quad 0,75 \leq x \leq 1,0$$

onde:  $x = \frac{hx}{h}$  = série relativa de alturas

$y = \frac{dx}{d_{0,5h}}$  = série relativa de diâmetros

A série relativa de diâmetros foi tomada em relação ao diâmetro à metade do tronco, pois PREUSSNER<sup>27</sup> acredita haver uma distribuição mais homogênea dos pontos.

#### 2.4.1. CURVAS DE FORMA EM SÉRIES RELATIVAS TRANSFORMADAS

PÉLLICO NETTO<sup>25</sup> descreveu um processo para ajustar a forma da árvore em que séries transformadas são obtidas somando-se e subtraindo-se os quocientes de forma verdadeiros simétricos em relação à metade da altura (0,5h) tomada como ponto de referência. Tem-se então novas séries denominadas ASy para a soma dos quocientes de forma e ADy para a diferença entre eles.

$$ASy = d_{0,i} / d_{0,1h} + d_{0,j} / d_{0,1h} = A_{0,i} + A_{0,j}$$

$$ADy = d_{0,i} / d_{0,1h} - d_{0,j} / d_{0,1h} = A_{0,i} - A_{0,j}$$

Os diâmetros  $d_{0,i}$  estão situados entre a base (0,0h) e a metade da altura (0,5h), são eles:  $d_{0,0h}$ ,  $d_{0,1h}$ ,  $d_{0,2h}$ ,  $d_{0,3h}$ ,  $d_{0,4h}$  e  $d_{0,5h}$ . Os diâmetros  $d_{0,j}$  estão compreendidos entre a metade da altura da árvore (0,5h) e sua extremidade (1,0h), tem-se então:  $d_{0,5h}$ ,  $d_{0,6h}$ ,  $d_{0,7h}$ ,  $d_{0,8h}$ ,  $d_{0,9h}$ ,  $d_{1,0h}$  (igual a zero). Para a descrição das duas curvas dadas por  $ASy$  e  $ADy$  foram empregadas quatro equações parabólicas:

$$ASy_1 = \beta_{01} (1 + \beta_{11})^{P_1} \quad 0 \leq y \leq 0,2$$

$$ADy_1 = \beta_{01} (1 + \beta_{12})^{P_2} \quad 0 \leq y \leq 0,2$$

$$ASy_2 = \beta_{02} (1 - y)^{P_3} + \beta_{13}y^{P_3} \quad 0,2 \leq y \leq 1,0$$

$$ADy_2 = \beta_{03} (1 - y)^{P_4} \quad 0,2 \leq y \leq 1,0$$

onde a variável  $y$  expressa a série relativa transformada de alturas. Sendo  $x = (h_i/h)$  menor ou igual a 0,5h, então  $y$  será igual a  $2x$ , enquanto que se  $x$  estiver entre 0,5h e 1,0h  $y$  será  $2(1-x)$ .

Cada curva de forma foi dividida em duas partes, onde os intervalos foram delimitados na região que apresenta limite visível de concavidade, ou seja uma parte para  $0 \leq y \leq 0,2$  e outra para  $0,2 \leq y \leq 1,0$ . As equações são obtidas por tentativa. Os coeficientes  $\beta_{01}$  e  $\beta_{13}$  ficam automaticamente definidos e os coeficientes  $\beta_{02}$ ,  $\beta_{03}$ ,  $\beta_{11}$  e  $\beta_{12}$  são obtidos através dos valores  $ASy$  e  $ADy$  nos extremos de seus respectivos domínios. Os expoentes  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$  são obtidos por tentativas sucessivas. Para *Araucaria angustifolia* foram encontrados os seguintes valores para expoentes:

$$p_1 \text{ e } p_2 = -0,1$$

$$p_3 = 0,9$$

$$p_4 = 1,6$$

sugeriu-se iniciar o processo com os seguintes valores para expoentes:

$$p_1 \text{ e } p_2 = -0,1$$

$$p_3 = 0,9$$

$$p_4 = 1,4$$

## 2.5 VOLUME

### 2.5.1 VOLUME PADRÃO

Segundo HUSCH<sup>16</sup> o deslocamento fornece o método mais preciso na determinação do volume. O reservatório usado para a medição da madeira ou seja o xilômetro, possui um dispositivo para medir o volume de água deslocada pela mesma. O volume do tronco de uma árvore ou parte desta pode ser estimado também através do uso de fórmulas padrões ou fórmulas empíricas para poliedros ou sólidos de revolução. Considerando que árvores inteiras e suas seções se assemelham a sólidos padrões, o conteúdo cúbico pode ser prontamente estimado através das fórmulas correspondentes. O erro transmitido neste procedimento é dependente da diferença na forma entre a seção do tronco e o sólido geométrico em que a fórmula é baseada.

PRODAN<sup>28</sup> afirma que dividindo-se um tronco em segmentos de mesmo comprimento  $l$ , seus conteúdos individuais podem ser considerados como cilíndricos. Quanto menor for o compri

mento  $\ell$  de cada segmento, tanto mais exato será o volume do tronco a ser obtido. O comprimento dos segmentos poderia para compreensão mais exata possível do tronco ser de diferentes tamanhos. Na prática porém, a medição de seções em comprimentos absolutamente iguais de 1m, 2m ou 4m ou a medição em comprimentos relativos iguais, provaram ser vantajosas. A utilização de segmentos de comprimento relativo igual tem a vantagem de que também troncos de comprimentos absolutos diferentes podem ser comparados entre si, uma vez que o número de seções é igual. HOHENADL propôs para fins práticos e científicos 5 seções de comprimento igual relativo, onde o volume é dado por:

$$V = 0,2 \ell \frac{\pi}{4} (d_{0,1}^2 + d_{0,3}^2 + d_{0,5}^2 + d_{0,7}^2 + d_{0,9}^2)$$

GOMES<sup>11</sup> exemplifica a tomada de medições no tronco para estimativas de volume padrão usando a seguinte série absoluta de medições diamétricas:  $d_{0,30h}$ ,  $d_{1,30h}$ ,  $d_{3,30h}$ ,  $d_{5,30h}$  a partir do solo e assim sucessivamente de dois em dois metros. Cita ele as fórmulas de SMALIAN e HUBER, que utilizando-se de seções com comprimentos absolutos são as fórmulas mais usadas na estimativa do volume. A fórmula de SMALIAN é referida como fórmula para tronco de parabolóide, onde:

$$V = \ell (g_1 + g_2) / 2$$

sendo:  $\ell$  = comprimento da tora

$g_1$  = área transversal da extremidade inferior da tora

$g_2$  = área transversal da extremidade superior da tora

A fórmula de HUBER também fornece o volume de um tronco de parabolóide:

$$V = \ell \cdot g_m$$

onde:

$\ell$  = comprimento da tora

$g_m$  = área transversal no meio da tora

HUSCH<sup>16</sup> comenta que os resultados obtidos destas fórmulas (SMALIAN e HUBER) serão idênticos se a seção for um verdadeiro tronco de parabolóide. mas serão incorretos para tronco de neilóide e cone. Para troncos de neilóide e cone, a fórmula de HUBER, usando a área da seção transversal média, irá subestimar o volume, enquanto que a fórmula de SMALIAN, baseada na área das seções transversais terminais, superestimarão o volume.

#### 2.5.2. ESTIMATIVA INDIRETA DO VOLUME POR EQUAÇÕES DE FORMA

Segundo SPURR<sup>30</sup> o volume pode ser estimado diretamente utilizando-se o diâmetro à altura do peito e a altura como variáveis independentes de uso mais freqüente. Existe a possibilidade, entretanto, de descrever-se o diâmetro e a altura da árvore através de uma medida indireta do volume tal como função de forma e então a estimativa do volume seria obtida como um passo separado da estimativa de equação de forma. O método indireto é necessariamente mais complexo do que o método direto de obtenção do volume e pode ser justificado somente se através dele é obtido maior número de informações. Este argumento foi utilizado para se desenvolver curvas de forma, a fim de usá-las para estimar volumes individuais. Comenta SPURR<sup>30</sup>, que as curvas de forma poderiam ser aplicadas para uma variedade de espécies e localidades. En-

tretanto a maior universalidade das curvas de forma ainda não foi comprovada. O segundo argumento em favor das funções de forma é que elas são independentes da comerciabilidade e provêm um registro permanente da forma do tronco. Indubitavelmente o argumento mais forte para utilização de equações de forma está no fato de que, além de fornecer estimativas de volumes totais do tronco, podem ser usadas para estimar o volume de qualquer tora ou parte do tronco, o que permitirá a partirir disso a construção de tabelas de sortimento, as quais são instrumentos de suma importância no planejamento florestal global.

Quando se trabalha com funções de forma que descrevem uma série relativa de diâmetros o volume total da árvore é obtido pela igualdade.

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot h \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

Volumes parciais podem ser estimados através de integrações parciais:

$$V(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{4} h \int_{x_1}^{x_2} \{f(x)\}^2 dx$$

Ao utilizar-se funções de forma que descrevem uma série relativa transformada de diâmetros, o volume total da árvore estará todo compreendido sob a curva ASy, quando descrita de 0,0h a 1,0h. Como esta curva descreve a soma de quocientes naturais simétricos em relação a metade do tronco, o volume seria então:

$$V = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \int_0^1 \{f(y)\}^2 dy$$

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1. LOCALIZAÇÃO DOS POVOAMENTOS

Os povoadamentos de onde se coletaram os dados para o presente trabalho localizam-se no imóvel Fazenda da Costa, pertencente à empresa MANASA - Madeireira Nacional S.A., município de Guarapuava, Estado do Paraná. Essa propriedade dista cerca de 35 km da sede do município.

Guarapuava situa-se a  $51^{\circ}27'W$  de longitude e  $25^{\circ}23'S$  de latitude, a 1.040 m de altitude s.n.m. A topografia do terreno é predominantemente suave-ondulada e em alguns lugares fortemente ondulada.

#### 3.2. CONDIÇÕES CLIMÁTICAS DA REGIÃO

A região apresenta clima tipo Cfb, caracterizado por verões frescos, com a temperatura média do mês mais quente inferior a  $22^{\circ}C$  e do mês mais frio igual a  $12^{\circ}C$ . A temperatura média anual é de  $16,7^{\circ}C$ . Quanto a precipitação pluviométrica há uma distribuição regular durante o ano, variando entre 101,6 a 187,5 mm por mês, sendo a média anual de 1.674,8 mm.

### 3.2. CARACTERIZAÇÃO DOS POVOAMENTOS

A coleta dos dados foi feita em povoamentos de *Pinus taeda* L. os quais estão situados em projetos que apresentam uma área total de aproximadamente 1.500 hectares.

As idades dos povoamentos variaram de sete a quatorze anos. Foram coletados dados de árvores com todas as idades nesse intervalo, à exceção da idade de nove anos.

O espaçamento inicial dos povoamentos com sete e oito anos foi de 2,5 x 1,6m e dos demais 2,0 x 2,0m, em ambos os casos a densidade inicial foi de 2.500 árvores por ha.

Em nenhum dos povoamentos foi feito a poda. No povoamento com sete anos, observou-se, nas áreas onde ocorreram falhas, regular desenvolvimento da vegetação natural. Os povoamentos com doze anos ou mais já sofreram dois desbastes e os demais, à exceção do que tem sete anos, apenas o primeiro desbaste. O tipo de desbaste foi seletivo com uma intensidade de 45% do número inicial de árvores no primeiro desbaste e 35% do remanescente no segundo desbaste. O primeiro e segundo desbastes foram feitos ao oitavo e décimo segundo ano.

O aspecto fitossanitário geral era bom, não tendo ocorrido pragas, doenças ou incêndio em nenhum dos povoamentos.

### 3.4. OBTENÇÃO DOS DADOS

Inicialmente foram abatidas 167 árvores, porém como existia uma pequena frequência de indivíduos nas classes superiores de diâmetro e altura, foram derrubadas mais 70, totalizando 237 árvores.

O Quadro 1 apresenta a distribuição das árvores por classes de diâmetro e altura.

Para a medição dos diâmetros ao longo do fuste de cada árvore, adotou-se o seguinte procedimento:

- a) fez-se uma marca no tronco a 1,3 m de altura (diâmetro à altura do peito) para depois de derrubada a árvore, não se perder essa referência;
- b) derrubou-se a árvore, cortando-se a 0,10 m do solo;
- c) foram medidos os DAP com casca e sem casca, altura total, os diâmetros sem casca na base e a cada décimo da altura total.

### 3.5. AJUSTE DAS EQUAÇÕES QUE DESCRIVEM AS SÉRIES RELATIVAS TRANSFORMADAS

A tentativa inicial do presente estudo consistiu em ajustar curvas de forma através de séries relativas transformadas, desenvolvidas por PÉLLICO NETTO<sup>25</sup>, cujos modelos foram citados em 2.4.1, para as amplitudes de DAP, altura e fator de forma natural, que foram obtidas dos dados das 237 árvores de *Pinus taeda* L.

#### 3.5.1. SÉRIES MÉDIAS ORIGINAIS DE QUOCIENTES NATURAIS E DE QUOCIENTES NATURAIS TRANSFORMADOS

Dividindo-se o diâmetro tomado na base e os diâmetros medidos a cada décimo da altura por aquele tomado a 0,1 da altura total obteve-se para cada árvore uma série de quocientes naturais. Para se obter a série média de quocientes na

QUADRO 1. Distribuição das árvores de *Pinus taeda* L. em classes de diâmetro e altura

DAP C/C	A L T U R A ( M )																	
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	SOM
6 - 8,9	1	1	1															3
9 - 11,9		5	6	4	2	2												19
12 - 14,9	1	2	11	6	12	6	1	2	5	1								47
15 - 17,9			3	8	9	11	3		2	3	5	2	1					47
18 - 20,9			2	6	4	8	9		1	2	3	6	5					46
21 - 23,9				1	1	6		1	2	3		3	8	7	1		1	34
24 - 26,9							1		4	2	1	1		5				14
27 - 29,9							1			2	1	1	1	2	3			11
30 - 32,9													1	2	4			7
33 - 36														2	3	2	2	9
SOM	2	8	23	25	28	33	15	3	14	13	10	13	16	18	11	2	3	237

turais somou-se os quocientes naturais correspondentes a cada altura relativa de todas as árvores e posteriormente dividiu-se cada soma pelo número de árvores amostradas. A referência da série pode ser representada então por:

<u><math>x</math> (<math>h_i/h</math>)</u>	<u><math>\bar{\kappa}_{0,ih/0,1}</math></u>
0,0	$\bar{\kappa}_{0,0h/0,1}$
0,1	$\bar{\kappa}_{0,1h/0,1}$
0,2	$\bar{\kappa}_{0,2h/0,1}$
0,3	$\bar{\kappa}_{0,3h/0,1}$
0,4	$\bar{\kappa}_{0,4h/0,1}$
0,5	$\bar{\kappa}_{0,5h/0,1}$
0,6	$\bar{\kappa}_{0,6h/0,1}$
0,7	$\bar{\kappa}_{0,7h/0,1}$
0,8	$\bar{\kappa}_{0,8h/0,1}$
0,9	$\bar{\kappa}_{0,9h/0,1}$
1,0	$\bar{\kappa}_{1,0h/0,1}$

Para cada série média original de quocientes de forma naturais tem-se duas séries de quocientes naturais transformadas correspondentes, quais sejam séries  $AS_y$  e  $AD_y$ , onde  $AS_y$  foi obtida da soma de quocientes naturais simétricos à altura referente ao meio da árvore e  $AD_y$  foi conseguida pela diferença destes mesmos quocientes simétricos. A altura relativa transformada  $y$  é igual a  $2x$  para  $0 < x < 0,5$  e equivalente a  $2(1 - x)$  para  $0,5h < x < 1,0h$ . Tem-se então:

$y$	$\overline{ASy}$	$\overline{ADy}$
0,0	$\overline{AS}_{0,0} = \bar{\kappa}_{0,0}h/0,1 + \bar{\kappa}_{1,0}h/0,1$	$\overline{AD}_{0,0} = \bar{\kappa}_{0,0}h/0,1 - \bar{\kappa}_{1,0}h/0,1$
0,2	$\overline{AS}_{0,2} = \bar{\kappa}_{0,1}h/0,1 + \bar{\kappa}_{0,9}h/0,1$	$\overline{AD}_{0,2} = \bar{\kappa}_{0,1}h/0,1 - \bar{\kappa}_{0,9}h/0,1$
0,4	$\overline{AS}_{0,4} = \bar{\kappa}_{0,2}h/0,1 + \bar{\kappa}_{0,8}h/0,1$	$\overline{AD}_{0,4} = \bar{\kappa}_{0,2}h/0,1 - \bar{\kappa}_{0,8}h/0,1$
0,6	$\overline{AS}_{0,6} = \bar{\kappa}_{0,3}h/0,1 + \bar{\kappa}_{0,7}h/0,1$	$\overline{AD}_{0,6} = \bar{\kappa}_{0,3}h/0,1 - \bar{\kappa}_{0,7}h/0,1$
0,8	$\overline{AS}_{0,8} = \bar{\kappa}_{0,4}h/0,1 + \bar{\kappa}_{0,6}h/0,1$	$\overline{AD}_{0,8} = \bar{\kappa}_{0,4}h/0,1 - \bar{\kappa}_{0,6}h/0,1$
1,0	$\overline{AS}_{1,0} = \bar{\kappa}_{0,5}h/0,1 + \bar{\kappa}_{0,5}h/0,1$	$\overline{AD}_{1,0} = \bar{\kappa}_{0,5}h/0,1 - \bar{\kappa}_{0,5}h/0,1$

Através dos valores de quocientes dessas duas séries médias originais transformadas ajustou-se os coeficientes das quatro parábolas que descrevem as 2 curvas de forma.

Devido a necessidade de se ter os valores médios dos quocientes de forma naturais a 2,5 e 97,5 por cento da altura total, para auxiliarem no ajuste das curvas que descrevem as séries  $\overline{ASy}$  e  $\overline{ADy}$  entre 0,0 e 0,2 de alturas relativas transformadas, ajustou-se um polinômio de 5º grau com a série média de quocientes de forma naturais. Os quocientes a 0,025h e 0,975h foram estimados e a partir daí calculou-se os quocientes de forma transformados, considerados pertencentes as séries médias  $\overline{ASy}$  e  $\overline{ADy}$  originais:

$$\overline{AS}_{0,05} = \hat{\kappa}_{0,025}h/0,1 + \hat{\kappa}_{0,975}h/0,1$$

$$\overline{AD}_{0,05} = \kappa_{0,025}h/0,1 - \kappa_{0,975}h/0,1$$

O polinômio de 5º grau ajustado foi considerado apenas um instrumento auxiliar para se estimar os dois quocientes de forma mencionados anteriormente, visto que medidas de diâmetros naquelas alturas relativas não foram tomadas quando da coleta dos dados.

## 3.5.2. MODIFICAÇÃO NA EQUAÇÃO PARABÓLICA QUE DESCREVE A SÉRIE

 $ASy_2$ 

A série  $ASy$  é descrita originalmente, para o intervalo de alturas relativas transformadas compreendido entre 0,2h e 1,0h, pela equação:

$$ASy_2 = \beta_{02} (1 - y)^{p_3} + \beta_{13} y^{p_3}$$

Esta equação apresenta o coeficiente  $\beta_{13}$  como uma de suas características marcantes, pois assume o valor do quociente de forma transformado médio  $\overline{AS}_{1,0}$ . Pode-se observar então, que quando  $y$  assume o valor 1,0,  $ASy_2$  é igual ao valor correspondente a  $\beta_{13}$ , ou seja  $\overline{AS}_{1,0}$ , para quaisquer valores do coeficiente  $\beta_{02}$  e da potência  $p_3$ .

A equação mencionada foi testada por PÉLLICO NETTO<sup>25</sup> para um conjunto de dados de *Araucaria angustifolia* e realmente estimou muito bem os quocientes de forma transformados compreendidos em sua faixa de ação. Porém quando se deseja estimar volumes totais ou parciais de árvores, a integração da parte da curva de forma descrita por  $ASy_2$  faz-se necessária. Esta integral seria:

$$\begin{aligned} \int_{0,2}^{y_1} \{ ASy_2 \}^2 dy &= \int_{0,2}^{y_1} \{ \beta_{02}(1-y)^{p_3} + \beta_{13}y^{p_3} \}^2 dy = \\ &= \int_{0,2}^{y_1} \{ \beta_{02}^2 (1-y)^{2p_3} + 2 \cdot \beta_{02} \beta_{13} (1-y)^{p_3} \cdot y^{p_3} + \beta_{13}^2 y^{2p_3} \} dy = \\ &= \beta_{02}^2 \int_{0,2}^{y_1} (1-y)^{2p_3} dy + 2 \cdot \beta_{02} \beta_{13} \int_{0,2}^{y_1} \{ (1-y)^{p_3} \cdot y^{p_3} \} dy + \\ &+ \beta_{13}^2 \int_{0,2}^{y_1} y^{2p_3} dy \end{aligned}$$

As integrais do primeiro e terceiro membro da equação anterior são solucionadas facilmente, porém a integração do segundo termo, ou do produto  $\{(1 - y)^{p_3} y^{p_3}\}$  apresenta um problema de difícil solução devido a descontinuidades na função. Tentou-se então provocar uma mudança na equação, tal que descrevesse adequadamente os quocientes de forma e, ao mesmo tempo, conservasse as características da função inicial. Partiu-se do pressuposto de que, quando  $y$  fosse igual a 1,0,  $ASy_2$  assumiria automaticamente o valor de  $\beta_{13}$ . Eliminando-se simplesmente  $y^{p_3}$  do segundo termo no modelo original resultou:

$$ASy_2 = \beta_{13} + \beta_{02} (1 - y)^{p_3}$$

As condições necessárias para o ajuste adequado da função foram mantidas e a integração do produto do primeiro pelo segundo termo é de solução simples, ou seja:

$$\begin{aligned} \int_{0,2}^{y_1} 2\beta_{02} \cdot \beta_{13} (1 - y)^{p_3} dy &= 2\beta_{02} \cdot \beta_{13} \int_{0,2}^{y_1} (1 - y)^{p_3} dy = \\ &= \frac{2 \cdot \beta_{02} \cdot \beta_{13}}{(p_3 + 1)} \{(1 - y)^{p_3+1}\}_{0,2}^{y_1} \end{aligned}$$

Logicamente, o coeficiente  $\beta_{02}$  apresenta, quando ajustado por esta equação modificada, valor e sinal diferentes daqueles obtidos no ajustamento da equação original. A potência  $p_3$  mostra também valor diferente daquele obtido para a equação original.

### 3.5.3. AJUSTE DOS COEFICIENTES E OBTENÇÃO DAS POTÊNCIAS DAS EQUAÇÕES DE FORMA

Pelo exposto nos itens 2.4.1 e 3.5.2, os modelos que

podem descrever as curvas de forma são os seguintes:

$$\begin{aligned} ASy_1 &= \beta_{01} (1 + \beta_{11}y)^{p_1} & 0 \leq y \leq 0,2 \\ ADy_1 &= \beta_{01} (1 + \beta_{12}y)^{p_2} & 0 \leq y \leq 0,2 \\ ASy_2 &= \beta_{13} + \beta_{02} (1 - y)^{p_3} & 0,2 \leq y \leq 1,0 \\ ADy_2 &= \beta_{13} (1 - y)^{p_4} & 0,2 \leq y \leq 1,0 \end{aligned}$$

Os pontos nas extremidades dos domínios das equações foram fixados, a fim de proceder-se o ajuste gráfico das mesmas. Em  $ASy_1$  os pontos extremos correspondem as alturas relativas transformadas  $0,0h$  e  $0,2h$ . O coeficiente  $\beta_{01}$  fica definido como o valor  $\overline{AS}_{0,0}$  original. Quando  $y$  é igual a zero o quociente em  $ASy_1$  é automaticamente igual a  $\overline{AS}_{0,0}$ . Definido  $\beta_{01}$ , para se ajustar  $\beta_{11}$ , o valor  $ASy_1$  assume o correspondente quociente  $\overline{AS}_{0,2}$  original. Desta maneira fixa-se o outro extremo do domínio, visto que para qualquer  $\beta_{11}$  e  $p_1$ ,  $ASy_1$  é igual ao valor de  $\overline{AS}_{0,2}$  original quando  $y$  for  $0,2$ . Para ajustar-se  $\beta_{11}$  precisa isolá-lo na fórmula, ou seja:

$$\overline{AS}_{0,2} = \overline{AS}_{0,0} (1 + 0,2 \beta_{11})^{p_1}$$

elevando-se todos os termos da equação à potência  $1/p_1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\overline{AS}_{0,2})^{1/p_1} &= (\overline{AS}_{0,0})^{1/p_1} (1 + 0,2 \beta_{11}) \\ 0,2 \beta_{11} + 1 &= (\overline{AS}_{0,2})^{1/p_1} / (\overline{AS}_{0,0})^{1/p_1} \\ \beta_{11} &= \{ (\overline{AS}_{0,2})^{1/p_1} / (\overline{AS}_{0,0})^{1/p_1} - 1 \} / 0,2 \end{aligned}$$

O coeficiente  $\beta_{11}$  foi obtido por tentativa, considerando - se que  $p_1$  oscilou entre  $-0,60$  a  $-0,01$ , sendo que a cada passo era adicionada a grandeza  $0,01$ . Para cada valor de  $p_1$  foi encon-

trado um valor para  $\beta_{11}$ . Quando a diferença entre o quociente real e o estimado pela equação foi mínima, para um ponto entre 0,0h e 0,2h, no caso 0,05h, determinou-se o valor ótimo para  $\beta_{11}$ .

Ao ajustar a função de forma para  $ADy_1$ , seguiu-se procedimento análogo ao descrito para  $ASy_1$ . Neste caso, o valor de  $p_2$  variou de -3,50 a -1,50 adicionando-se a grandeza 0,01 a cada passo.

$$\beta_{12} = \{ (\overline{AD}_{0,2})^{1/p_2} / (\overline{AD}_{0,0})^{1/p_2} - 1 \} / 0,2$$

O coeficiente  $\beta_{13}$  é definido automaticamente como  $\overline{AS}_{1,0}$  original. No cálculo de  $\beta_{02}$  foi atribuído a  $ASy_2$  o valor de  $\overline{AS}_{0,2}$  e a  $y$  o valor 0,2. Desta forma foi fixada a extremidade do domínio correspondente a 0,2h e ao mesmo tempo garantiu-se que, tanto para  $ASy_1$  como para  $ASy_2$ , quando  $y$  é igual a 0,2, os valores fornecidos pelas duas equações que descrevem a série são idênticos e a junção das mesmas para fornecer uma única curva aconteceu de modo perfeito. Isolando-se então  $\beta_{02}$  na fórmula resultou:

$$\overline{AS}_{0,2} = \overline{AS}_{1,0} + \beta_{02} (1 - 0,2)^{p_3}$$

$$\beta_{02} = (\overline{AS}_{0,2} - \overline{AS}_{1,0}) / 0,8^{p_3}$$

Assim como  $\beta_{11}$  e  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{02}$  foi ajustado por um processo tentativo, no qual variou-se  $p_3$  de 0,50 a 2,00. Obviamente para cada valor de  $p_3$  foi encontrado um correspondente a  $\beta_{02}$ . Este valor foi considerado adequado, quando a diferença entre o quociente de forma real e o estimado pela equação foi mínima, para o ponto de altura relativa transformada, que esta exatamente no meio de 0,2 h e 1,0h, ou seja 0,6h.

Na tentativa de obter-se o coeficiente  $\beta_{03}$  condizente com a série  $ADy_2$ , fixou-se  $\overline{AD}_{0,2}$  como o valor que substituiu  $ADy_2$ , sendo  $y$  igual a 0,2. Desta forma prendeu-se os dois domínios da função, já que para  $y$  igual a 1,0 o valor em  $ADy_2$  corresponde a 0,000, o que coaduna-se com o quociente  $ADy_{1,0}$  original e  $ADy_2$  sempre assume o valor  $\overline{AD}_{0,2}$  original quando  $y$  for igual a 0,2, então:

$$\overline{AD}_{0,2} = \beta_{03} (1 - 0,2)^{p_4}$$

$$\beta_{03} = \overline{AD}_{0,2} / 0,8^{p_4}$$

Variou-se o valor de  $p_4$  de 0,9 a 1,5, obtendo-se a diferença mínima entre o quociente médio real e o estimado a 0,6h, indicando o coeficiente  $\beta_{03}$  e a potência  $p_4$  convenientes a equação.

A ligação entre as equações que descrevem  $ADy_1$  e  $ADy_2$  foi feita de maneira adequada em 0,2h (altura relativa transformada), pois as duas funções fornecem o valor original do quociente de forma na referida altura relativa.

A Figura 1 permite visualizar as curvas que descrevem os quocientes de forma naturais transformados confrontando-as com o perfil do tronco, que é comumente descrito.

### 3.6. ESTIMATIVAS DE VOLUMES TOTAIS E PARCIAIS ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DE FORMA

Os volumes totais e parciais foram estimados para todas as árvores por integração. Posteriormente, foram comparados ao volume de HOHENADL, estabelecido como volume padrão. O volume de HOHENADL para a totalidade do tronco, descrito

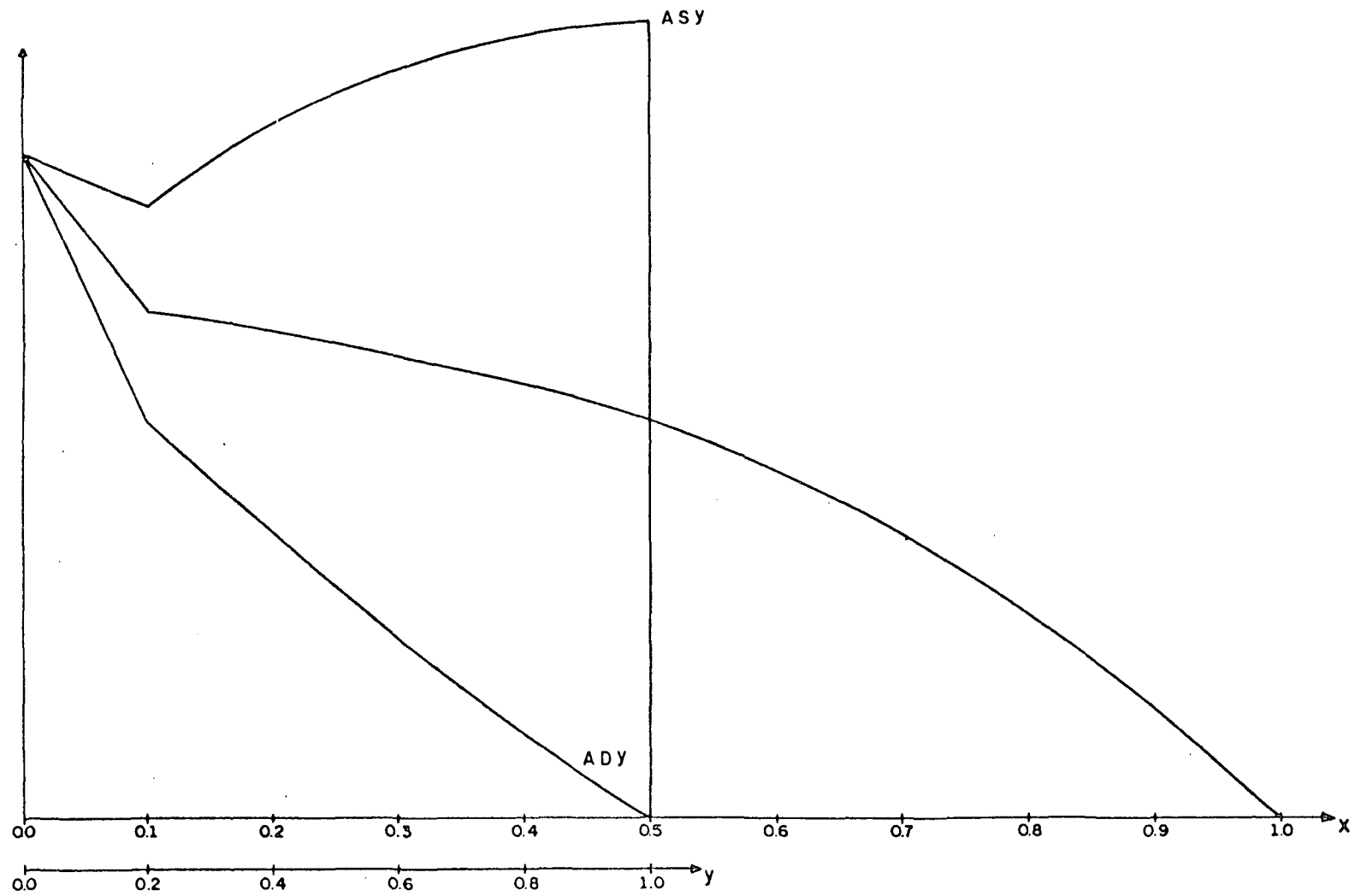


Figura 1. Esquema comparativo entre o perfil do tronco que descreve quocientes naturais e as curvas que descrevem os quocientes naturais transformados

em 2.5.1, apresenta a seguinte fórmula:

$$V_{HOH} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{0,1}^2 \cdot h \cdot 0,2(1,000 + \kappa_{0,3}^2 + \kappa_{0,5}^2 + \kappa_{0,7}^2 + \kappa_{0,9}^2)$$

o volume padrão para uma seção é:

$$V_{SEC} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{0,1}^2 \cdot h \cdot 0,2 \kappa_{0,i}^2 / 0,1$$

onde i pode assumir os valores: 1, 3, 5, 7, 9

No que tange a volumes parciais foram estimados, inicialmente, os concernentes a primeira seção de HOHENADL (0,0h a 0,2h) e depois acumulativamente de seção em seção, ou seja da base até 40, 60, 80 por cento da altura total, como ilustra a Figura 2. Desta maneira, pode-se acompanhar o comportamento da estimativa volumétrica à medida que a altura aumentou.

### 3.6.1. ESTIMATIVA DO VOLUME TOTAL

Os volumes totais das árvores individuais foram estimados pela curva de forma transformada AS, onde:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \int_0^1 \{f(y)\}^2 dy = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \int_0^1 (d_{0,i} + d_{0,j})^2 dy = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot d_{0,1}^2 \cdot h \left( \int_0^{0,2} \{\beta_{01}(1 + \beta_{11}y)^{p_1}\}^2 dy + \int_{0,2}^1 \{\beta_{13} + \beta_{02}(1-y)^{p_3}\}^2 dy \right) = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot d_{0,1}^2 \cdot h \left( \int_0^{0,2} \{\beta_{01}(1 + \beta_{11}y)^{2p_1}\} dy + \int_{0,2}^1 \{\beta_{13}^2 + 2\beta_{13}\beta_{02}(1-y)^{p_3} + \right. \\ &\quad \left. \beta_{02}^2(1-y)^{2p_3}\} dy \right) = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot d_{0,1}^2 \cdot h \left\{ \frac{\beta_{01}^2}{\beta_{11}(2p_1+1)} \cdot \{(1 + \beta_{11}y)^{2p_1+1}\} \Big|_0^{0,2} + \beta_{13} \int_{0,2}^1 \{y\} dy + \frac{2\beta_{13}\beta_{02}}{(p_3+1)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \{(1+y)^{p_3+1}\} \Big|_{0,2}^1 + \frac{\beta_{02}^2}{(2p_3+1)} \cdot \{(1-y)^{2p_3+1}\} \Big|_{0,2}^1 \right\} \end{aligned}$$

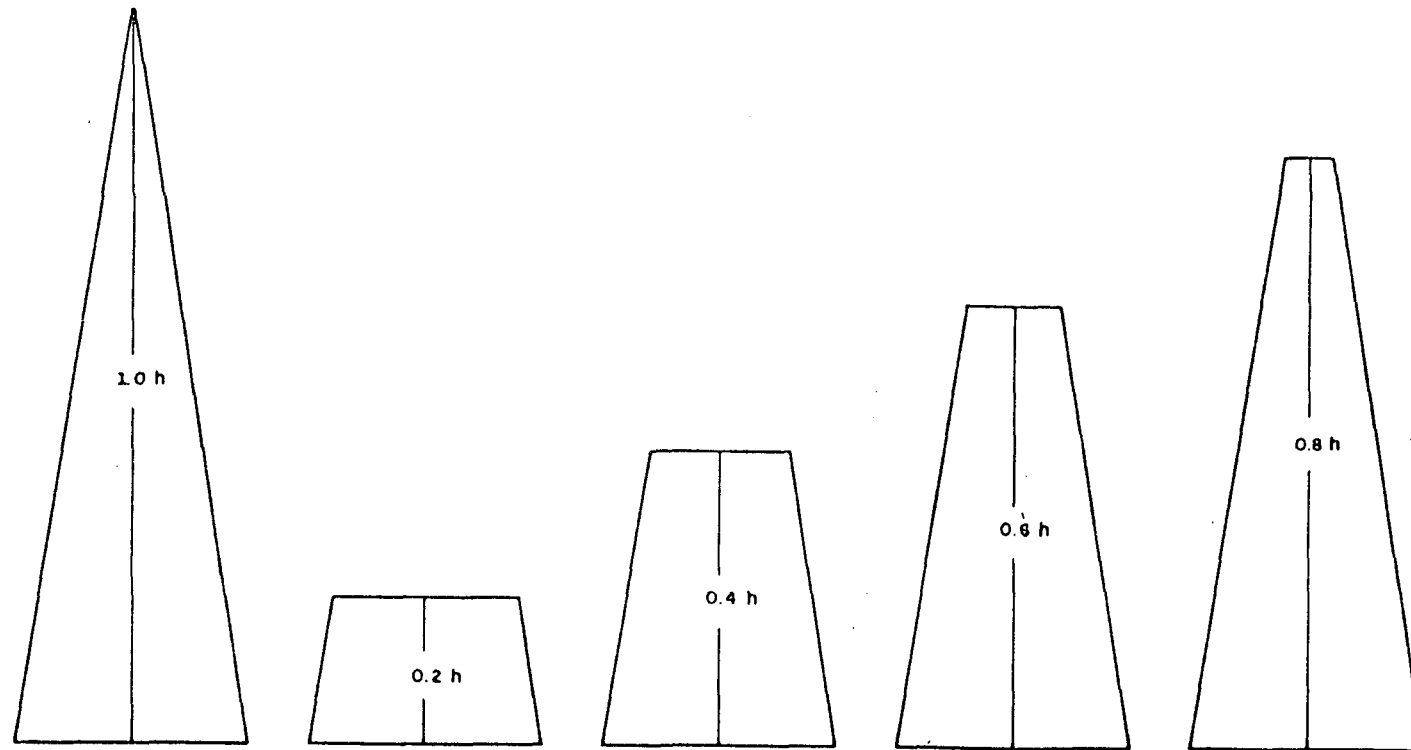


Figura 2. Desenho esquemático em que representa-se o tronco inteiro e as seções de Hohenzahl de forma acumulativa

## 3.6.2. ESTIMATIVAS DE VOLUMES PARCIAIS

Para estimar volumes parciais trabalhou-se com as duas curvas de forma  $ASy$  e  $ADy$ . Observando a Figura 3 nota-se que volumes parciais do tronco compreendidos entre a base e o meio da árvore são estimados de maneira diferente de volumes de partes do tronco acima de  $0,5h$ .

Quando se quer encontrar o volume do tronco entre  $0$  e  $0,2h$  (altura relativa não transformada) por exemplo, como mostrado na área 1 da Figura 3, utiliza-se as séries  $ASy$  e  $ADy$  de tal modo que combinando as duas consiga-se descrever os quocientes de forma correspondentes à primeira metade do tronco ( $d_{0,i}/d_{0,l}$ ) e ao integrar-se as duas séries combinadamente pode-se obter o volume da tora que se deseja. Somando  $ASy$  e  $ADy$  tem-se:

$$ASy + ADy = \frac{d_{0,i} + d_{0,j}}{d_{0,l} h} + \frac{d_{0,i} - d_{0,j}}{d_{0,l} h} = \frac{d_{0,i} + d_{0,j} + d_{0,i} - d_{0,j}}{d_{0,l}} = \frac{2d_{0,i}}{d_{0,l} h}$$

integrando-se de  $0$  a  $0,4h$  (alturas relativas transformadas):

$$\begin{aligned} V(0,4-0,0) &= \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \int_0^{0,4} \{ f(y) \}^2 dy = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot d_{0,l}^2 \int_0^{0,4} (2d_{0,i}/d_{0,l})^2 dy = \\ &= \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot d_{0,i}^2 \int_0^{0,4} 4(d_{0,i}/d_{0,l})^2 dy = \frac{\pi}{16} \cdot 4 \cdot h \cdot d_{0,l}^2 \int_0^{0,4} (d_{0,i}/d_{0,l})^2 dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d_{0,l}^2 \int_0^{0,4} (d_{0,i}/d_{0,l})^2 dy \end{aligned}$$

Então genericamente, para estimativa de volumes parciais situados entre a base e a metade da altura da árvore, usou-se:

$$V(y_2 - y_1) = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \left\{ \int_{y_1}^{y_2} (ASy)^2 dy + \int_{y_1}^{y_2} (ADy)^2 dy \right\}$$

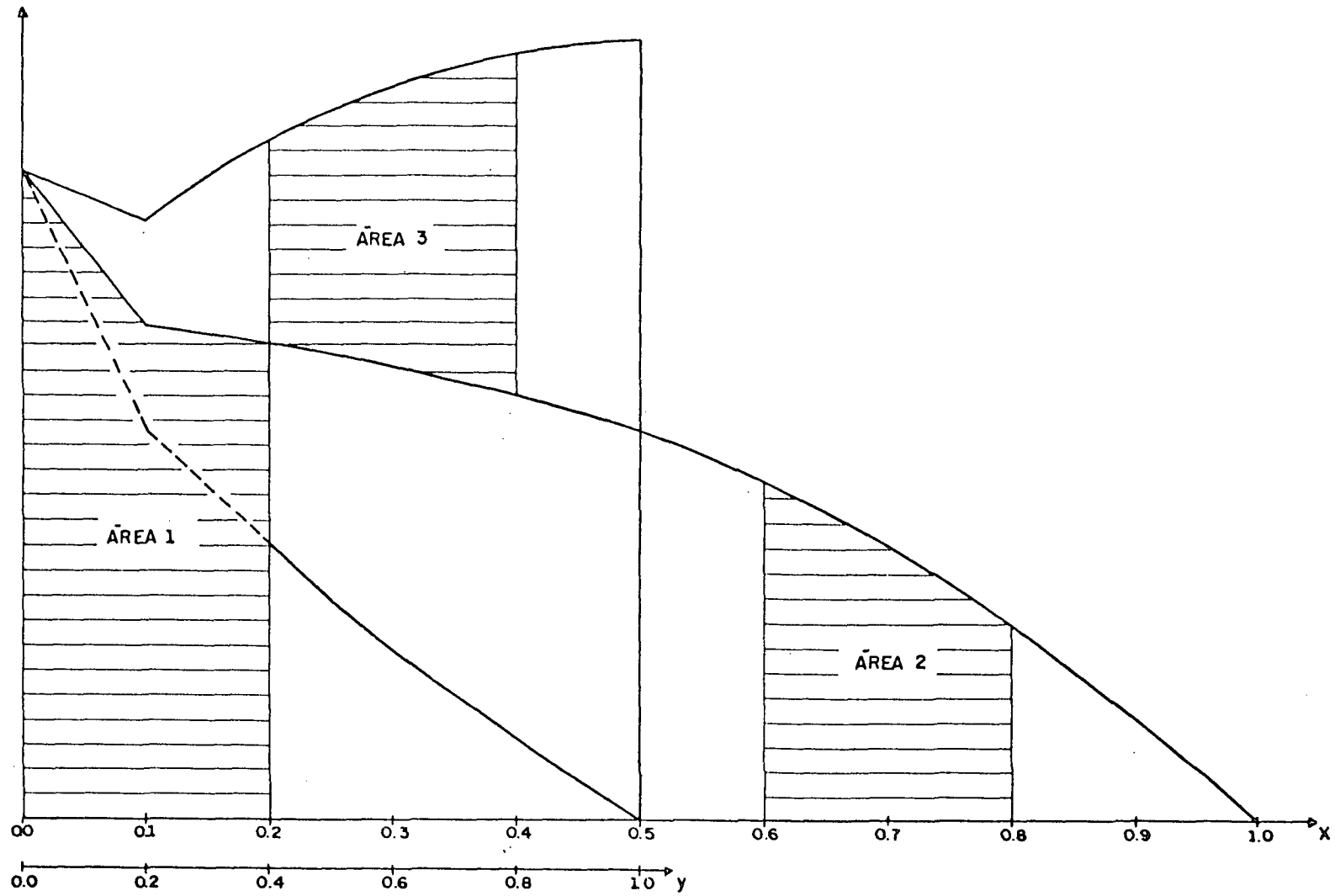


Figura 3. Desenho esquemático de áreas encontradas no perfil do tronco que descreve quocientes naturais e sua relação com as correspondentes nas curvas transformadas

A solução para integração da série ASy foi descrita em 3.6.1 para a estimativa de volumes totais. O mesmo procedimento pode ser usado quando se utiliza a série ASy para estimar volumes parciais, mudando-se o intervalo para o qual a integração deve ser efetuada. A integral para a série ADy seria:

$$\begin{aligned} \int_0^{y_2} (ADy)^2 dy &= d_{0,1}^2 \left\{ \int_0^{0,2} \{\beta_{01} (1+\beta_{12}y)^{P_2}\}^2 dy + \int_{0,2}^{y_2} \{\beta_{03} (1-y)^{P_4}\}^2 dy \right\} = \\ &= d_{0,1}^2 \left\{ \int_0^{0,2} \{\beta_{01} (1+\beta_{12}y)^{2P_2}\} dy + \int_{0,2}^{y_2} \{\beta_{03} (1-y)^{2P_4}\} dy \right\} = \\ &= d_{0,1}^2 \left\{ \frac{\beta_{01}^2}{\beta_{12}(2P_2+1)} (1+\beta_{12}y)^{2P_2+1} \Big|_0^{0,2} - \frac{\beta_{03}^2}{(2P_4+1)} (1-y)^{2P_4+1} \Big|_{0,2}^{y_2} \right\}, \end{aligned}$$

para  $y_2 > 0,2$

$$\int_0^{y_2} (ADy)^2 dy = d_{0,1}^2 \left\{ \frac{\beta_{01}^2}{\beta_{12}(2P_2+1)} (1+\beta_{12}y)^{2P_2+1} \Big|_0^{y_2} \right\}, \text{ para } y_2 < 0,2$$

$$\int_0^{y_2} (ADy)^2 dy = \int_0^{y_2} (ADy)^2 dy - \int_0^{y_1} (ADy)^2 dy$$

Com o intuito de visualizar-se onde partes do tronco situadas acima da metade da árvore estariam localizadas quando da utilização de curvas de forma em séries relativas transformadas, a Figura 3 apresenta a delimitação da área 2, entre 0,6h e 0,8h do perfil do tronco convencional, e a delimitação da área 3 entre as alturas relativas transformadas, correspondentes aos valores anteriores, quais sejam 0,4h e 0,8h. As superfícies 2 e 3 são equivalentes. Quando se descreve um movimento de rotação sobre os respectivos eixos das abcissas, os volumes gerados são sem dúvida equivalentes. Conclui-se daí, que o volume que corresponde a superfície 3 é igual ao volume

obtido da integração da série  $ASy$  entre 0,4 e 0,8 menos o volume referente a área que no perfil do tronco convencional está compreendida entre 0,2 e 0,4h, ou transformando-se as alturas relativas, contida entre 0,4h e 0,8h. Genericamente tem-se que volumes parciais do tronco locados acima da metade da altura da árvore foram estimados por:

$$V(y_2 - y_1) = V_1 - V_2$$

onde:

$$V_1 = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \left\{ \int_{y_1}^{y_2} (ASy)^2 dy \right\}$$

$$V_2 = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot \left\{ \int_{y_1}^{y_2} (ASy)^2 dy + \int_{y_1}^{y_2} (ADy)^2 dy \right\}$$

### 3.6.3. ESTIMATIVA DO DIÂMETRO SEM CASCA A UM DÉCIMO DA ALTURA DA ÁRVORE EM FUNÇÃO DO DAP

Como o diâmetro sem casca a um décimo da altura da árvore foi tomado no trabalho como referência, necessitou-se para todas as árvores ter conhecimento de seu valor. A sua medição no campo é de difícil realização, por isso estimou-se  $d_{0,1}$  como uma função do diâmetro a altura do peito, usando-se uma regressão linear, onde:

$$d_{0,1} = b_0 + b_1 d$$

onde:

$d_{0,1}$  = diâmetro sem casca a 0,1 da altura total

$d$  = diâmetro com casca a 1,3m do solo

$b_0$  e  $b_1$  = parâmetros da equação da reta

Para avaliação do ajuste foram calculados o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e o erro padrão para a regressão ( $s_{yx}$ ).

### 3.6.4. COMPARAÇÃO DOS VOLUMES TOTAIS E PARCIAIS ESTIMADOS COM OS RESPECTIVOS VOLUMES PADRÕES

#### 3.6.4.1. PERCENTAGEM MÉDIA DOS DESVIOS

Para os volumes totais e parciais, os valores estimados foram comparados com os valores observados (volume padrão) através da porcentagem média dos desvios.

Segundo HUSCH<sup>16</sup>, a porcentagem média dos desvios é calculada através da fórmula:

$$PMD = \Sigma \{ (|V_o - V_e| \cdot 100) / V_e \} / N$$

onde:

$V_o$  = volume observado individual da árvore ou de parte desta

$V_e$  = volume estimado individual da árvore ou de parte desta

$N$  = número de árvores

Esta porcentagem fornece uma idéia da quantidade pela qual cada valor individual estimado variou do valor individual observado.

#### 3.6.4.2. ANÁLISE DE RESÍDUOS

Analisou-se a existência ou não da tendenciosidade nas estimativas de volumes totais através da visualização gráfica dos resíduos em porcentagem e do teste da troca de sinais dos mesmos resíduos.

Na distribuição gráfica foram plotados os resíduos em porcentagem em relação ao diâmetro a altura do peito, o que permitiu uma análise da citada distribuição ao longo das clas

ses de diâmetro. O resíduo individual foi dado pela fórmula:

$$\text{RES \%} = \left( \frac{V_o - V_e}{V_o} \right) \cdot 100$$

$V_o$  = volume observado da árvore

$V_e$  = volume estimado da árvore

O teste da troca de sinais nada mais é do que uma comprovação analítica da distribuição gráfica dos resíduos. Através deste, segundo DRAPER & SMITH<sup>9</sup>, comprova-se se está havendo ou não um arranjo aleatório dos sinais dos resíduos. Para isso foi anotado na distribuição residual o número de sinais positivos ( $n_1$ ), número de sinais negativos ( $n_2$ ), e o número de trocas de sinais ( $u$ ) ocorridos ao longo da linha média dos resíduos. Para qualquer seqüência de sinais pode-se encontrar a probabilidade que o valor observado  $u$  (ou um valor menor) ocorra. Baseando-se no nível de probabilidade pode-se verificar se está ocorrendo um arranjo aleatório ou não de sinais de resíduos. Para encontrar a probabilidade foi utilizada a "tabela para testar a aleatoriedade de grupos em seqüências alternativas" descrita em DRAPER & SMITH<sup>9</sup> e usada para valores de  $n_1 \leq 10$  e  $n_1 \leq n_2 \leq 10$ . Quando  $n_1 > 10$  e  $n_2 > 10$ , valores exatos não são necessários, visto que uma aproximação normal para a distribuição real prove uma precisão satisfatória. Neste caso, a média e a variância podem ser estimadas por:

$$\mu = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$$

$$\sigma^2 = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}$$

O valor correspondente na distribuição  $Z$  é calculado por:

$$Z = (u - \mu + 1/2) / \sigma$$

A probabilidade foi encontrada ao entrar-se na tabela da distribuição Z, com o valor achado pela fórmula imediatamente anterior. Comparou-se a probabilidade encontrada com um valor pré-indicado ( $\alpha = 0,05$ ), rejeitando-se a idéia do arranjo aleatório se  $p(u < u_{\text{observado}}) < 0,05$ .

A probabilidade foi obtida para todos os dados na distribuição de resíduos. Encontrou-se também, uma probabilidade para cada classe de diâmetro, analisando assim se houve tendenciosidade para o geral ou em alguma classe específica.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

##### 4.1. CURVAS DE FORMA GENÉRICAS

Os valores da série média de quocientes naturais e das séries médias de quocientes naturais transformados, provenientes dos dados de medidas relativas originais captadas das 237 árvores, estão registrados no Quadro 2.

QUADRO 2. Séries originais médias de quocientes naturais e de quocientes naturais transformados para o total dos dados

$x (h_i/h)$	$\bar{\kappa}_{0,ih}/0,1$	$y$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$
0,0	1,341	0,0	1,341	1,341
0,025	1,230	0,05	1,263	1,197
0,1	1,000	0,2	1,123	0,877
0,2	0,926	0,4	1,187	0,665
0,3	0,849	0,6	1,261	0,437
0,4	0,766	0,8	1,316	0,216
0,5	0,674	1,0	1,348	0,000
0,6	0,550			
0,7	0,412			
0,8	0,261			
0,9	0,123			
0,975	0,033			
1,0	0,000			

Através do método gráfico exposto em 3.5.3 os quatro modelos parabólicos que descrevem as curvas de forma transformadas foram ajustadas e resultaram nas seguintes equações:

$$ASy_1 = 1,341 (1 + 6,63778 y)^{-0,21} \quad 0 \leq y \leq 0,2$$

$$ADy_1 = 1,341 (1 + 0,99495 y)^{-0,34} \quad 0 \leq y \leq 0,2$$

$$ASy_2 = 1,348 - 0,30546 (1 - y)^{1,37} \quad 0,2 \leq y \leq 1,0$$

$$ADy_2 = 1,09625 (1 - y) \quad 0,2 \leq y \leq 1,0$$

A Figura 4 mostra a representação gráfica das duas curvas de forma genérica descritas pelas equações anteriores.

Intencionando analisar se as equações de forma descrevem adequadamente as séries médias somadas e subtraídas de quocientes naturais transformados, estes foram estimados pelas mesmas e posteriormente comparados aos valores originais, através do resíduo individual em percentagem ou seja:

$$RES \% = \{ (\bar{A}y - \hat{A}y) / \bar{A}y \} \cdot 100$$

onde:

$\bar{A}y$  = quociente natural transformado original médio

$\hat{A}y$  = quociente natural transformado ajustado

Ao examinar-se os valores dos resíduos individuais tanto para a série  $ASy$  como para a série  $ADy$ , apresentados no Quadro 3, observa-se que o maior valor de resíduo individual é 1,39 por cento referente a  $AD_{0,8}$ . Nota-se então que as equações de forma ajustadas graficamente fornecem estimativas convincentes dos quocientes de forma transformados médios.

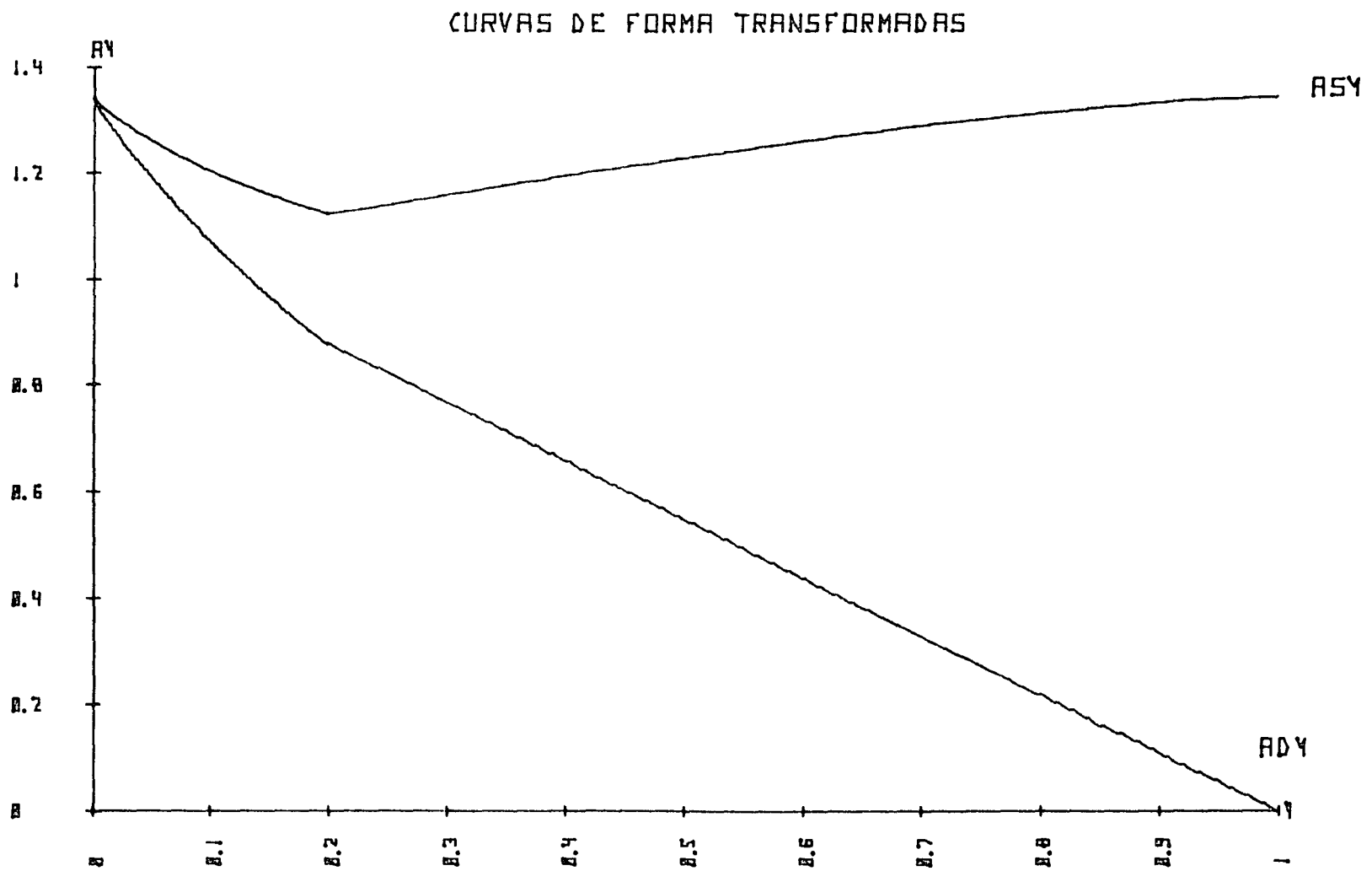


Figura 4. Curvas de forma transformadas genéricas

QUADRO 3. Séries originais médias de quocientes naturais transformados e as respectivas séries de quocientes ajustados com os correspondentes valores de resíduos individuais em percentagem.

$y$	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%	$\overline{AD}_y$	$\hat{AD}_y$	RES%
0,0	1,341	1,341	0,0	1,341	1,341	0,0
0,05	1,263	1,263	0,0	1,197	1,197	0,0
0,2	1,123	1,123	0,0	0,877	0,877	0,0
0,4	1,187	1,196	-0,76	0,665	0,658	1,05
0,6	1,261	1,261	0,0	0,437	0,438	-0,23
0,8	1,316	1,314	0,15	0,216	0,219	-1,39
1,0	1,348	1,348	0,0	0,000	0,000	0,0

#### 4.2. ESTRATIFICAÇÃO DOS DADOS EM FUNÇÃO DO FATOR DE FORMA NATURAL

##### 4.2.1. CLASSES DE FATOR DE FORMA

Ao ser efetuado o cálculo do fator de forma natural, como descrito em 2.3, com o intuito de se fazer uma análise preliminar sobre o comportamento da forma do tronco para o conjunto de dados, observou-se uma variação acentuada no referido fator de redução. A amplitude alcançada pelo fator de forma natural foi de 0,338 a 0,615. Devido a este facto, o uso de curvas de forma genéricas nas estimativas de volumes totais e parciais para toda extensão dos dados não satisfaz a necessidade de se obter valores residuais aceitáveis para os referidos volumes. Houve necessidade de uma divisão em classes de

fator de forma, efetuando-se assim os ajustes das equações que descrevem as curvas transformadas, para cada uma dessas classes.

Geralmente, quando uma divisão em classes é feita, toma-se um número dessas com a mesma amplitude. No presente estudo foi feita uma estratificação de maneira diversa. Inicialmente, os dados foram rearranjados obedecendo uma ordem crescente de fator de forma. Trabalhou-se então com as equações de forma genéricas e estimou-se os volumes totais para todas as árvores através dessas. Estabeleceu-se um resíduo individual no volume de  $\pm 7\%$  como limite para estratificação. Os fatores de forma das duas árvores que apresentaram desvio no volume correspondente aos limites pré-estabelecidos foram considerados os extremos desta primeira classe de forma construída. Em seguida, equações de forma foram ajustadas para as árvores que possuem fator de forma compreendido entre o limite inferior para a generalidade dos dados, ou seja 0,338, e o limite inferior da primeira classe de fator de forma obtida. Concomitantemente outro conjunto de quatro equações de forma foi ajustado para árvores com fator de forma compreendido entre o limite superior da primeira classe montada e o limite superior para generalidade dos dados, ou seja, 0,615. Estimou-se os volumes totais das árvores correspondentes aos respectivos limites para os quais os dois conjuntos de equações foram ajustados e, novamente, um resíduo individual absoluto de 7% entrou como fator de decisão na delimitação da amplitude de classe de fator de forma. O procedimento foi repetido, resultando em 5 classes de forma:

Classe		Amplitude de fator de forma natural
1	-	0,338 a 0,403
2	-	0,404 a 0,454
3	-	0,455 a 0,522
4	--	0,523 a 0,569
5	-	0,570 a 0,615

A cada uma dessas classes corresponde um conjunto de equações que descrevem as curvas de forma em séries relativas transformadas. O Quadro 4 apresenta para cada estrato as respectivas séries médias originais de quocientes naturais e de quocientes naturais transformados, os quais possibilitaram o ajuste gráfico das 20 equações de forma apresentados no Quadro 5 e cujas representações gráficas para as curvas  $ASy$  e  $ADy$  estão descritas pelas Figuras 5 e 6. Estas permitem a visualização de cada curva de forma em comparação as dos demais estratos, dando condições de analisar a posição relativa de cada uma dessas em gráfico cartesiano. No que diz respeito a série  $ASy$ , como visto na Figura 5, entre 0 e 0,05h, nota-se que os valores dos quocientes ajustados diminuem à medida que a classe de fator de forma aumenta, porém há uma inversão quanto a esse aspecto entre a 4.<sup>a</sup> e 5.<sup>a</sup> classe. Em pontos intermediários a 0,05 e 0,2h as curvas se cruzam e a partir daí observa-se que para classes de fatores de forma maiores, são encontrados valores mais elevados de quocientes. Isto permite afirmar que classes de fatores de forma grandes tendem a mostrar valores de quocientes transformados somados mais homogêneos ou em outras palavras, que apresentam amplitudes menores entre eles. Quanto a série  $ADy$ , como mostrado na Figura 6, a medida que a classe de fator de forma aumenta, há uma tendência de diminuição dos

QUADRO 4. Séries originais de quocientes naturais e de quocientes naturais transformados por classe de fator de forma

$x$	CLASSES DE FATOR DE FORMA														
	1			2			3			4			5		
	$\bar{k}_{0,ih/0,1}$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$	$\bar{k}_{0,ih/0,1}$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$	$\bar{k}_{0,ih/0,1}$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$	$\bar{k}_{0,ih/0,1}$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$	$\bar{k}_{0,ih/0,1}$	$\bar{A}S_y$	$\bar{A}D_y$
0,0	1,428	1,428	1,428	1,407	1,407	1,407	1,341	1,341	1,341	1,274	1,274	1,274	1,295	1,295	1,295
0,025	1,288	1,306	1,270	1,274	1,293	1,255	1,280	1,263	1,197	1,185	1,226	1,144	1,197	1,254	1,140
0,1	1,000	1,068	0,932	1,000	1,074	0,926	1,000	1,123	0,877	1,000	1,153	0,847	1,000	1,200	0,800
0,2	0,898	1,058	0,738	0,912	1,097	0,727	0,926	1,187	0,665	0,939	1,250	0,628	0,961	1,333	0,589
0,3	0,795	1,096	0,494	0,818	1,150	0,486	0,849	1,261	0,437	0,876	1,343	0,409	0,908	1,448	0,368
0,4	0,691	1,135	0,247	0,722	1,203	0,241	0,766	1,316	0,216	0,805	1,410	0,200	0,844	1,507	0,181
0,5	0,582	1,164	0,000	0,619	1,238	0,000	0,674	1,348	0,000	0,719	1,438	0,000	0,767	1,534	0,000
0,6	0,444			0,481			0,550			0,605			0,663		
0,7	0,301			0,332			0,412			0,467			0,540		
0,8	0,160			0,185			0,261			0,311			0,372		
0,9	0,068			0,074			0,123			0,153			0,200		
0,975	0,018			0,019			0,033			0,041			0,057		
1,0	0,000			0,000			0,000			0,000			0,000		

QUADRO 5. Conjunto de equações de forma ajustadas para cada classe de fator de forma

CLASSE	SÉRIE AS <sub>y</sub>	SÉRIE AD <sub>y</sub>
1	$AS_{y1} = 1,428 (1 + 3,74137 y)^{-0,52}$ $AS_{y2} = 1,168 - 0,10733 (1 - y)^{0,50}$	$AD_{y1} = 1,428 (1 + 1,44577 y)^{-1,68}$ $AD_{y2} = 1,14439 (1 - y)^{0,92}$
2	$AS_{y1} = 1,407 (1 + 4,23715 y)^{-0,44}$ $AS_{y2} = 1,238 - 0,20048 (1 - y)^{0,90}$	$AD_{y1} = 1,407 (1 + 1,35022 y)^{-1,75}$ $AD_{y2} = 1,13702 (1 - y)^{0,93}$
3	$AS_{y1} = 1,341 (1 + 6,63778 y)^{-0,21}$ $AS_{y2} = 1,348 - 0,30546 (1 - y)^{1,37}$	$AD_{y1} = 1,341 (1 + 0,99495 y)^{-2,34}$ $AD_{y2} = 1,09625 (1 - y)$
4	$AS_{y1} = 1,274 (1 + 12,40690 y)^{-0,08}$ $AS_{y2} = 1,438 - 0,40547 (1 - y)^{1,58}$	$AD_{y1} = 1,274 (1 + 0,76424 y)^{-2,87}$ $AD_{y2} = 1,07063 (1 - y)^{1,05}$
5	$AS_{y1} = 1,295 (1 + 17,94777 y)^{-0,05}$ $AS_{y2} = 1,534 - 0,51724 (1 - y)^{1,96}$	$AD_{y1} = 1,295 (1 + 0,82608 y)^{-3,15}$ $AD_{y2} = 1,02714 (1 - y)^{1,12}$

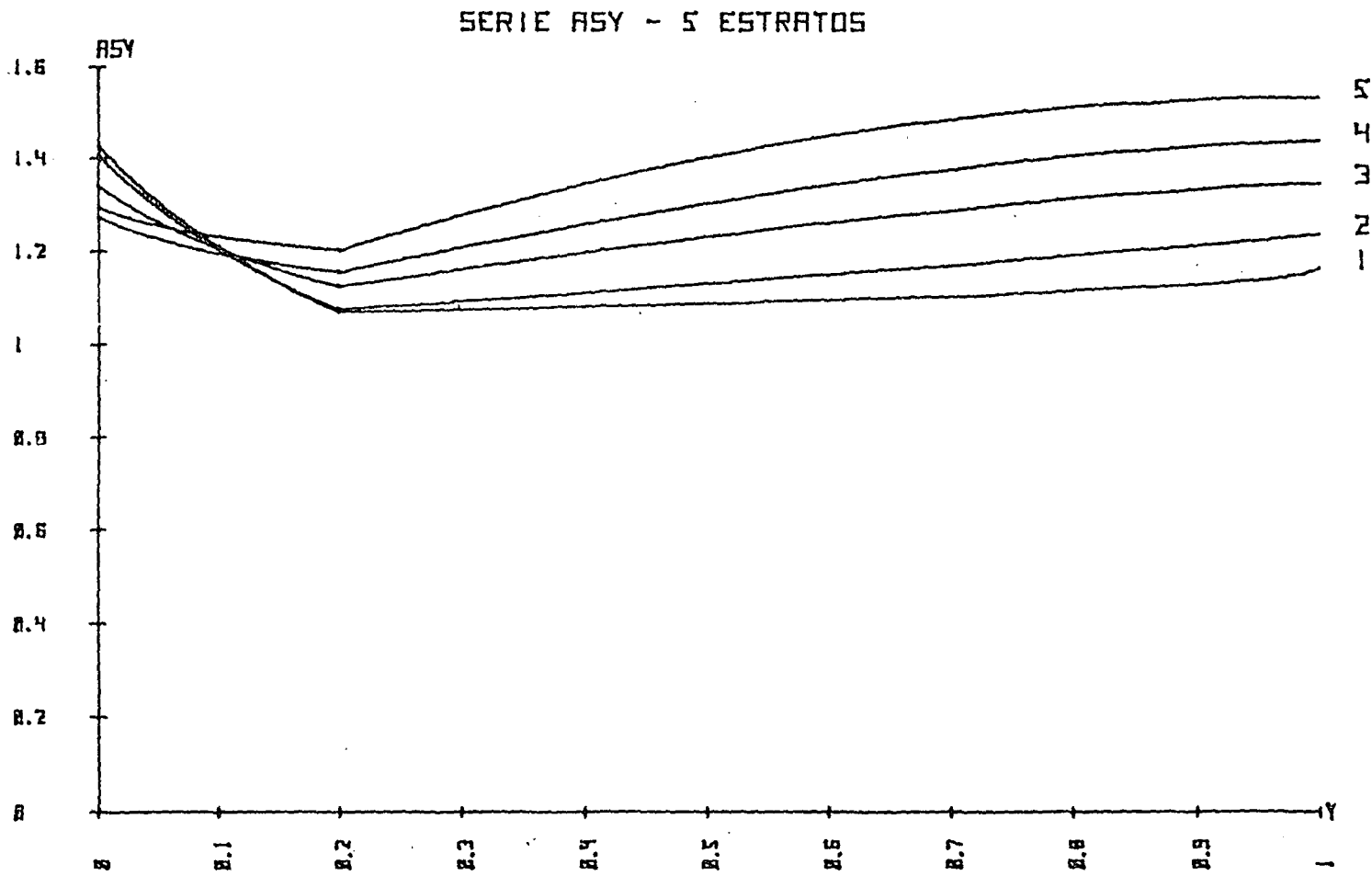


Figura 5. Curvas que descrevem a sêrie ASy para as 5 classes de fator de forma

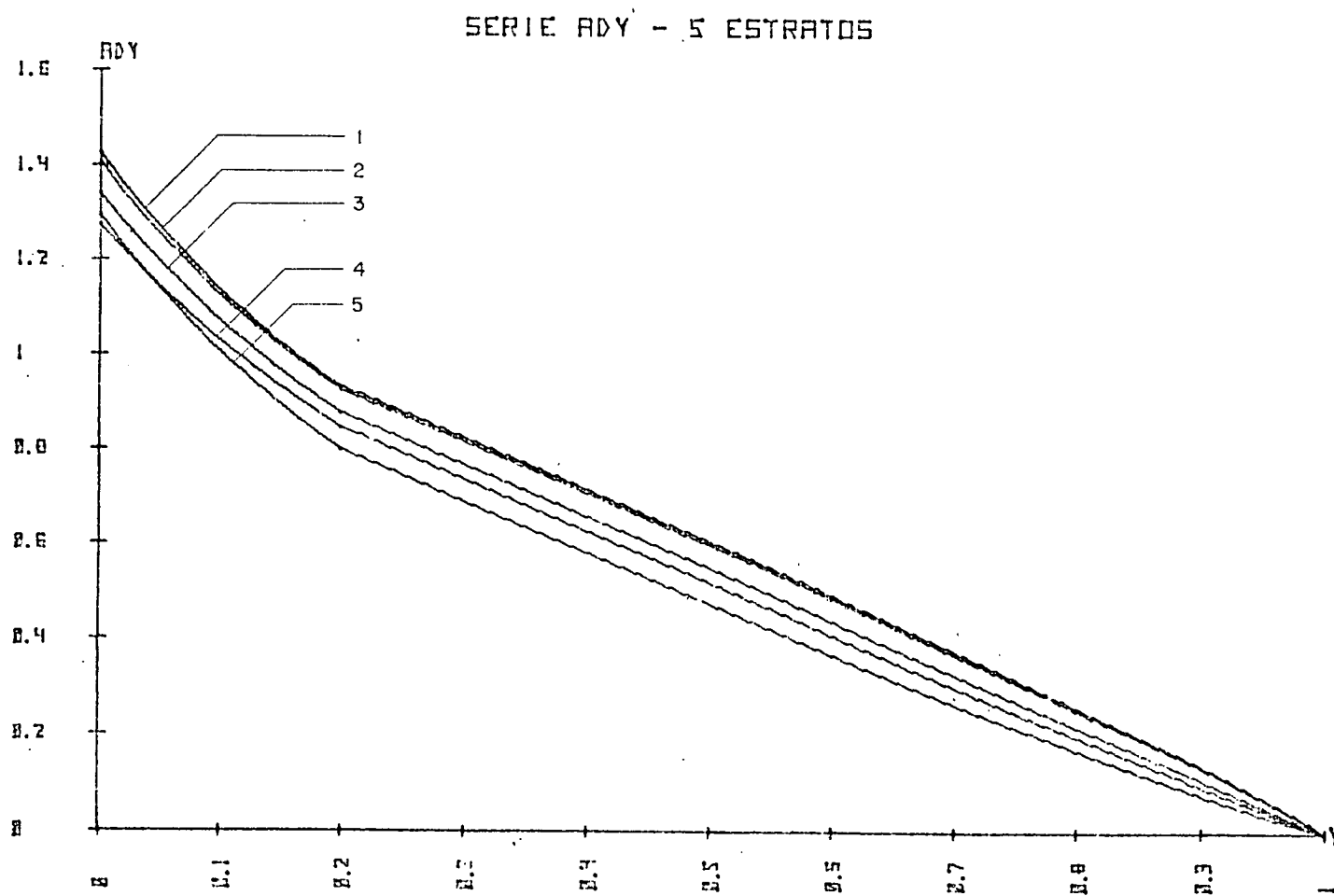


Figura 6. Curvas que descrevem a série ADy para as 5 classes de fator de forma

valores de quocientes de forma transformados subtraídos ao longo da curva.

Analogamente ao apresentado no item 4.1, foi realizado, para as séries de quocientes transformados condizentes com as 5 classes de fator de forma, a comparação dos valores reais com os estimados em forma de resíduos individuais em percentagem. Os baixos valores residuais tanto para série ASy como para ADy em todos os estratos, como especificados nos Quadros 6 e 7, vieram reiterar o fato de que as equações de forma propostas no trabalho mostram-se adequadas para estimarem as séries de quocientes médios a que estas correspondem.

#### 4.2.2. FUNÇÕES DE FATOR DE FORMA

Devido ao fato de que utilizou-se vários conjuntos de equações de forma deve-se saber qual foi o mais adequado para cada árvore específica. Obviamente então necessita-se ter o conhecimento do fator de forma da árvore para que se possa entrar na classe de fator de forma conveniente e utilizar-se o conjunto de equações compatível. Como o fator de forma não pode ser obtido diretamente e as variáveis que entram em seu cálculo não são facilmente tomadas na árvore, recorreu-se à funções que estimam o fator de forma. Testou-se sete modelos descritos na literatura, separados em dois grupos:

No primeiro grupo foram utilizados modelos que apresentam variáveis independentes básicas facilmente mensuráveis no decorrer do inventário florestal, quais sejam diâmetro a altura do peito e altura total, assim:

QUADRO 6. Séries  $AS_y$  originais médias para as 5 classes de forma com os respectivos valores estimados e os resíduos individuais em percentagem

$y$	C L A S S E S   D E   F A T O R   D E   F O R M A														
	1			2			3			4			5		
	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%	$\overline{AS}_y$	$\hat{AS}_y$	RES%
0,0	1,428	1,428	0,0	1,407	1,407	0,0	1,341	1,341	0,0	1,274	1,274	0,0	1,295	1,295	0,0
0,05	1,306	1,306	0,0	1,293	1,293	0,0	1,263	1,263	0,0	1,226	1,226	0,0	1,254	1,254	0,0
0,2	1,068	1,068	0,0	1,074	1,074	0,0	1,123	1,123	0,0	1,153	1,153	0,0	1,200	1,200	0,0
0,4	1,058	1,081	-2,2	1,097	1,111	-1,3	1,187	1,196	-0,76	1,250	1,257	-0,6	1,333	1,344	-0,8
0,6	1,096	1,096	0,0	1,150	1,150	0,0	1,261	1,261	0,0	1,343	1,343	0,0	1,448	1,448	0,0
0,8	1,135	1,116	1,7	1,203	1,191	1,0	1,316	1,314	0,15	1,410	1,406	0,3	1,507	1,512	-0,3
1,0	1,164	1,164	0,0	1,238	1,238	0,0	1,348	1,348	0,0	1,438	1,438	0,0	1,534	1,534	0,0

QUADRO 7. Séries  $AD_y$  originais médias para as 5 classes de forma com os respectivos valores estimados e os resíduos individuais em percentagem

C L A S S E S   D E   F A T O R   D E   F O R M A															
1			2			3			4			5			
$y$	$\overline{AD}_y$	$\widehat{AD}_y$	RES%	$\overline{AD}_y$	$\widehat{AD}_y$	RES%	$\overline{AD}_y$	$\widehat{AD}_y$	RES%	$\overline{AD}_y$	$\widehat{AD}_y$	RES%	$\overline{AD}_y$	$\widehat{AD}_y$	RES%
0,0	1,428	1,428	0,0	1,407	1,407	0,0	1,341	1,341	0,0	1,274	1,274	0,0	1,295	1,295	0,0
0,05	1,270	1,270	0,0	1,255	1,255	0,0	1,197	1,197	0,0	1,144	1,144	0,0	1,140	1,140	0,0
0,2	0,932	0,932	0,0	0,926	0,926	0,0	0,877	0,877	0,0	0,847	0,847	0,0	0,800	0,800	0,0
0,4	0,738	0,715	3,1	0,727	0,707	2,7	0,665	0,658	1,05	0,628	0,626	0,3	0,589	0,580	1,5
0,6	0,494	0,493	0,2	0,486	0,485	0,2	0,437	0,438	-0,23	0,409	0,409	0,0	0,368	0,368	0,0
0,8	0,247	0,260	-5,2	0,241	0,254	-5,4	0,216	0,219	-1,39	0,200	0,197	1,5	0,181	0,169	6,6
1,0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,0	0,000	0,000	0,0

- 1)  $\lambda_{0,1} = b_0 + b_1 d + b_2 d^2$
- 2)  $\lambda_{0,2} = b_0 + b_1 h + b_2 h/d$
- 3)  $\lambda_{0,3} = b_0 + b_1 1/h + b_2 1/d^2 + b_3 1/d^2 h$
- 4)  $\log \lambda_{0,1} = b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h$

No segundo grupo foram utilizados modelos que possuem o quociente natural no meio do tronco como variável independente, ou seja:

- 5)  $\lambda_{0,1} = b_0 + b_1 \kappa_{0,5} h / 0,1$
- 6)  $\lambda_{0,1} = b_0 + b_1 \kappa_{0,5}^2 h / 0,1$
- 7)  $\lambda_{0,1} = b_0 + b_1 \kappa_{0,5} h / 0,1 + b_2 \kappa_{0,5}^2 h / 0,1$

Para cada grupo o critério para a escolha do melhor modelo, foi feito através do coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e do erro padrão de estimativa em percentagem ( $syx\%$ ) oriundos da técnica de regressão que foi empregada.

O Quadro 8 apresenta as correlações simples entre o fator de forma natural e o logarítmo deste com as variáveis independentes em estudo.

Em concordância com a literatura, verificou-se que o grau de associação entre o fator de forma natural e o quociente natural ao meio do tronco apresenta-se alto, excedendo a 0,90. HEGER<sup>14</sup>, trabalhando com *Pinus elliottii*, encontrou correlações simples muito baixas entre  $\lambda_{0,1}$  e o DAP e entre  $\lambda_{0,1}$  e a altura, respectivamente 0,179 e 0,121. Comparando-se os valores de correlações simples obtidos nesta pesquisa com os imediatamente anteriores, verificou-se que estes foram relativamente altos, principalmente a correlação simples entre  $\lambda_{0,1}$  e h, ou seja 0,7238.

QUADRO 8. Coeficientes de correlação simples entre fator de forma natural e sua transformação logarítmica com as variáveis independentes estudadas

VARIÁVEIS	$\lambda_{0,1}$	$\log \lambda_{0,1}$
d	0,4021	0,3992
d <sup>2</sup>	0,3659	0,3654
1/d <sup>2</sup>	- 0,3747	- 0,3687
log d	0,4199	0,4151
h	0,7238	0,7175
1/h	- 0,7338	- 0,7304
log h	0,7367	0,7316
h/d	0,3689	0,3681
1/d <sup>2</sup> h	- 0,4469	- 0,4423
$\kappa_{0,5h/0,1}$	0,9443	-
$\kappa_{0,5h/0,1}^2$	0,9514	-

#### 4.2.2.1. FATOR DE FORMA NATURAL COMO FUNÇÃO DO DAP E ALTURA TOTAL

No Quadro 9 tem-se as equações ajustadas para o fator de forma natural em função do diâmetro e altura. Pode-se observar que as equações 2, 3 e 4 mostram valores de erro padrão de estimativa em percentagem satisfatórios, visto que estes são menores do que 10% e podem ser considerados baixos. Porém todas as equações apresentam valores do coeficiente de determinação não muito altos, o que indica que não se mostram completamente adequados quanto ao aspecto ajuste. Tentou-se localizar e focar as condições que levaram a obtenção destes valo

res de  $R^2$ , já que na prática necessita-se estimar o fator de forma através destas funções cujas variáveis possam ser conseguidas facilmente no campo e visto que a literatura especializada consultada não oferece outro tipo de alternativa satisfatória em termos de praticidade. Como os dados originais não foram coletados com o intuito de ajustar equações de fator de forma, preferiu-se acreditar que a concentração de árvores em classes mais centrais de diâmetro e altura simultaneamente, impediu um ajuste mais consistente das equações. Para melhorar o ajuste, necessitar-se-ia coletar dados sistematicamente para as variáveis independentes básicas, ou seja, obter um mesmo número de árvores em todas as classes de diâmetro e altura ao mesmo tempo.

A equação escolhida, através dos critérios mencionados no subitem 4.2.2, como a mais indicada para ser usada na entrada da classe de forma conveniente foi a número 4. A Figura 7 mostra a representação gráfica da equação 4 por classe de diâmetro.

#### 4.2.2.2. FATOR DE FORMA NATURAL COMO FUNÇÃO DO QUOCIENTE NATURAL AO MEIO DO TRONCO

São muito difundidas na Europa funções de fator de forma natural em que estes são estimados através do quociente natural ao meio do tronco. Devido a alta correlação entre as duas variáveis, estas funções apresentam resultados realmente muito bons na estimativa do fator de forma. Como esta é uma alternativa ao menos teórica para tentar solucionar o problema de entrada na classe de forma adequada a cada árvore, foram

QUADRO 9. Equações de regressão, para fator de forma natural utilizando DAP e altura como variáveis independentes básicas

MO-DELO	COEFICIENTES	R <sup>2</sup>	$\Delta yx$	$\Delta yx\%$	I%	F
1	b <sub>0</sub> = 0,323233005 b <sub>1</sub> = 0,012402163 b <sub>2</sub> = -0,000203751	0,1886	0,051444915	10,78	-	27,19**
	b <sub>0</sub> = 0,273490478					
2	b <sub>1</sub> = 0,00942064 b <sub>2</sub> = 0,086853308	0,5812	0,036952849	7,74	-	162,48**
	b <sub>0</sub> = 0,641925398					
3	b <sub>1</sub> = -2,505414703 b <sub>2</sub> = 7,18347421 b <sub>3</sub> = -9,73787117	0,5791	0,037128368	7,78	-	106,89**
	b <sub>0</sub> = -0,638658356	0,5962	0,033636646	-	7,74	172,84**
4	b <sub>1</sub> = -0,152785483 b <sub>2</sub> = 0,443546528					

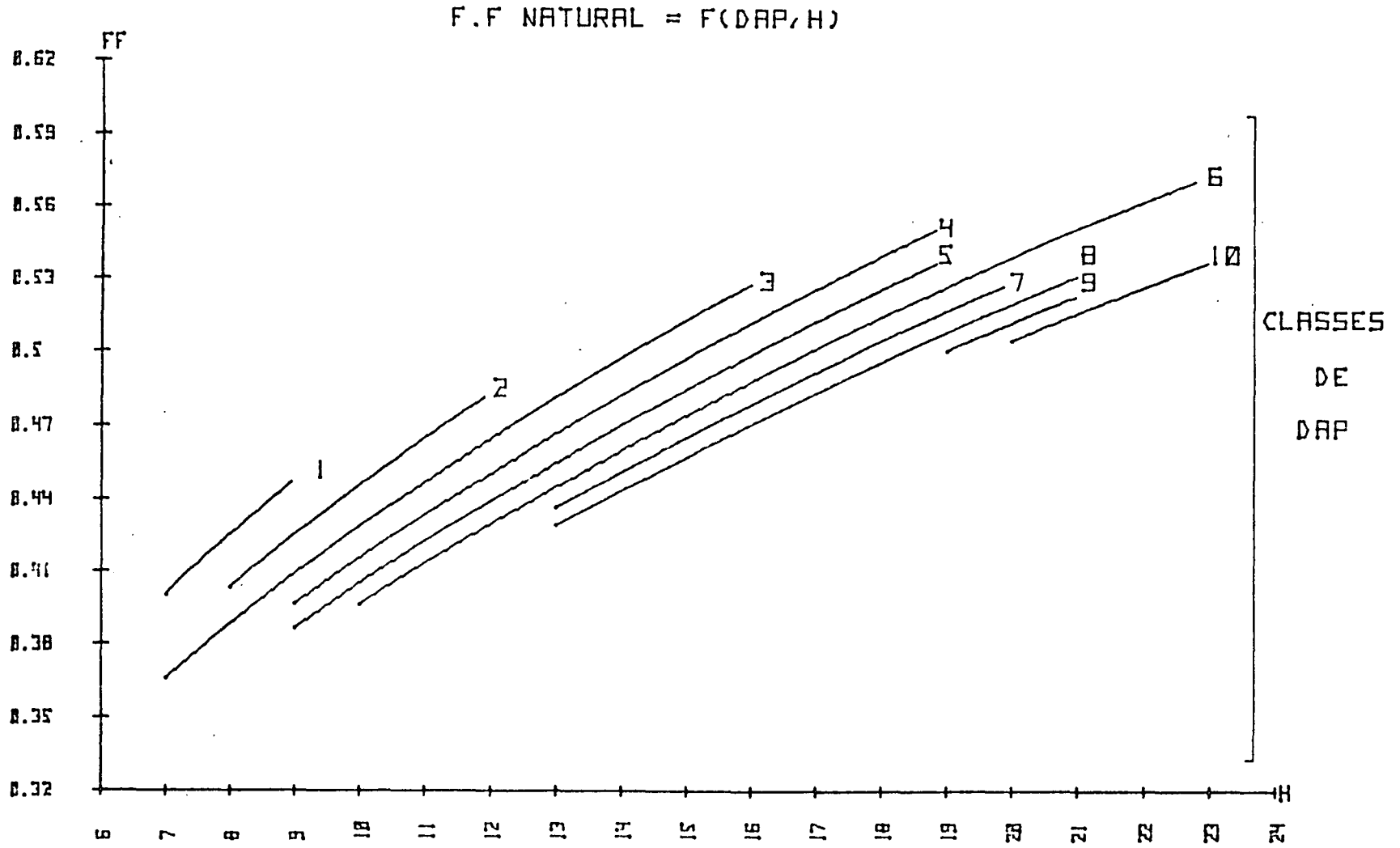


Figura 7. Representação gráfica da equação de fator de forma nº 4 para cada classe de diâmetro

testados os três modelos enumerados anteriormente, os quais foram propostos por PRODAN<sup>28</sup>.

QUADRO 10. Equações de regressão para fator de forma natural utilizando o quociente natural ao meio do tronco como variável independente básica

MO-DELO	COEFICIENTES	R <sup>2</sup>	<i>s<sub>y</sub>x</i>	<i>s<sub>y</sub>x</i> %	F
5	b <sub>0</sub> = 0,056799561 b <sub>1</sub> = 0,623984498	0,8917	0,018747096	3,93	5883,53**
	b <sub>0</sub> = 0,254576493				
6	b <sub>1</sub> = 0,482602620	0,9052	0,017551634	3,68	2242,65**
	b <sub>0</sub> = 0,36167033				
7	b <sub>1</sub> = -0,33375447 b <sub>2</sub> = 0,73790174	0,9068	0,017418432	3,65	1140,84**

Através dos resultados exibidos no quadro 10 poder-se-ia supor que as 3 equações teriam condições de ser usadas, particularmente as equações 6 e 7. Porém o teste da troca de sinais dos resíduos, como descrito em 3.6.4.2, comprovou que apenas a equação número 7 não é tendenciosa, já que foi conseguida uma probabilidade cumulativa acima de 0,05. Foram analisados os resíduos de fator de forma natural em percentagem em relação aos valores observados de fator de forma. O teste de troca de sinais de resíduos forneceu os seguintes valores para a equação de número 7:

- número de trocas de sinais ( $u$ ) = 110
- número de sinais positivos ( $n_1$ ) = 120
- número de sinais negativos ( $n_2$ ) = 117
- média ( $\mu$ ) = 119,48
- desvio padrão ( $\sigma$ ) = 7,68
- valor de  $Z$  = -1,17
- probabilidade cumulativa = 0,1210

Na Figura 8 vê-se a tendência dos pontos de  $\lambda_{0,1}$  versus  $\kappa_{0,5h}/0,1$  e o traçado da curva descrita pela equação parabólica número 7. Esta seria a função ideal para ser usada nas estimativas de fator de forma natural, porém a limitação de necessitar-se medir diâmetros ao meio do tronco através de aparelhos óticos restringe muito seu campo de ação e induz a voltar-se para equações que estimem razoavelmente bem o fator de forma através de diâmetro a altura do peito e altura total.

#### 4.3. ESTIMATIVAS DE VOLUMES TOTAIS E PARCIAIS

Com a intenção de exemplificar a estimativa de volume total individual através da integração de curvas de forma transformadas, tomou-se os seguintes dados referentes a uma árvore de *Pinus taeda*, quais sejam:

fator de forma natural = 0,482

classe de fator de forma = 3

$d_{0,1h}$  = 0,21m

$h$  = 16,5m

$V_{\text{HOHENADL}}$  = 0,2753151m<sup>3</sup>

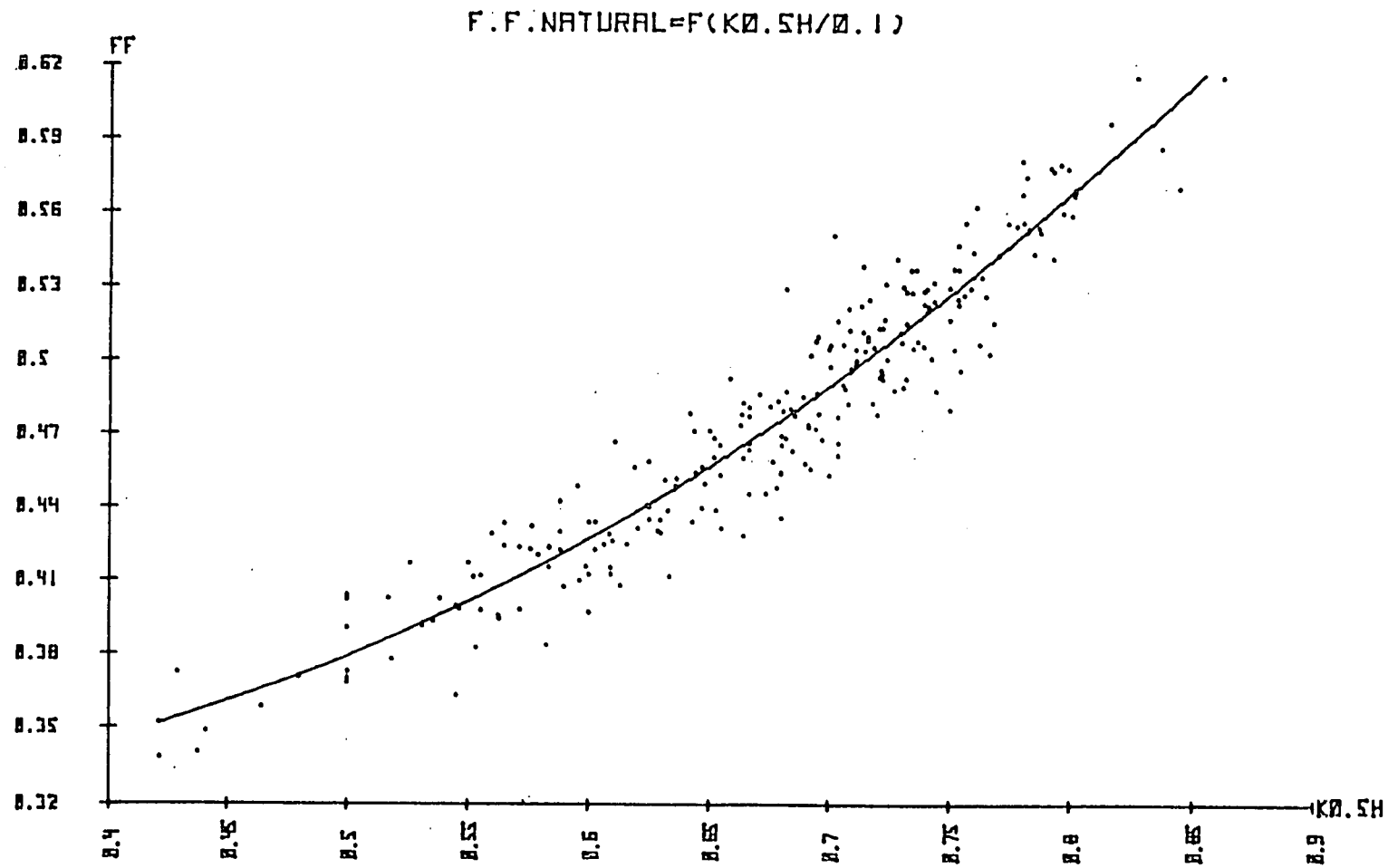


Figura 8. Tendência dos pontos e traçado da curva que descreve o fator de forma natural em função de  $\kappa_{0,5h}/0,1$

O volume estimado, como explicado em 3.6.1, é:

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,21^2 \cdot 16,5 \left\{ \int_0^{0,2} \{ 1,341 (1 + 6,63778y)^{-0,21} \}^2 dy + \right. \\ \left. + \int_{0,2}^{1,0} \{ 1,348 - 0,30546 (1-y)^{1,37} \}^2 dy \right\}$$

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \left\{ \int_0^{0,2} \{ 1,798281 (1 + 6,63778 y)^{-0,42} \} dy + \right. \\ \left. + \int_{0,2}^1 \{ 1,817104 - 0,8235202 (1-y)^{1,37} + 0,0933058 (1-y)^{2,74} \} dy \right\}$$

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \left\{ \frac{1,798281}{6,63778 \cdot 0,58} \left\{ (1 + 6,63778 y)^{0,58} \right\}_0^{0,2} + \right. \\ \left. + 1,817104 \left\{ y \right\}_{0,2}^1 - \frac{0,8235202}{2,37} \left\{ (1-y)^{2,37} \right\}_{0,2}^1 + \right. \\ \left. + \frac{0,0933058}{3,74} \left\{ (1-y)^{3,74} \right\}_{0,2}^1 \right\}$$

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \left\{ 0,4670966 (1 + 6,63778 y)^{0,58} \right\}_0^{0,2} + \\ + 1,817104 \left\{ y \right\}_{0,2}^1 - 0,3474769 (1-y)^{2,37} \left\{ \right\}_{0,2}^1 + \\ + 0,0249481 \left\{ (1-y)^{2,74} \right\}_{0,2}^1 \right\}$$

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \{ 0,2953489 + 1,4536832 + 0,2047619 - 0,0108291 \}$$

$$V_{EST} = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \cdot 1,9429649 = 0,2775987 \text{ m}^3$$

O resíduo individual em percentagem é igual a:

$$RES \% = \{ (0,27531511 - 0,2775987) / 0,27531511 \} \cdot 100 = -0,82\%$$

Trabalhando-se com todo o conjunto de dados, analisou-se os resíduos de volume total individual em percentagem em relação aos valores de DAP. A Figura 9 mostra a distribuição gráfica destes resíduos, a qual visualmente parece não apresentar tendenciosidade. A comprovação desta afirmativa foi feita através do teste da troca de sinais dos resíduos. Os valores obtidos deste teste estão apresentados no Quadro 11, que além de mostrar a probabilidade cumulativa, para distribuição geral, também o faz por classe de diâmetro. Verificou-se que os valores de probabilidade tanto para o geral como por classe de DAP estão acima de 0,05, constatando-se assim a não tendenciosidade em nenhuma das circunstâncias. Obteve-se uma percentagem média dos desvios para o volume individual total igual a 3,3%, o que permite afirmar que somente através de estratificações por fator de forma pode-se conseguir valor tão baixo.

Como metodologia para estimar valores parciais através de equações que descrevem as curvas de forma transformadas foi desenvolvida no presente estudo, torna-se importante a exemplificação da mesma. Para isso, usou-se os dados da árvore utilizada anteriormente para demonstração da estimativa de volume total. Estimou-se neste exemplo, o volume parcial da base até 20 por cento da altura total da árvore referente a primeira seção de Hohenadl. Neste caso, como explanado em 3.6.2, deve-se integrar de 0,0h a 0,4h a série  $AS_y$  e somá-la a integração da série  $AD_y$  para esse mesmo intervalo, a fim de obter-se o volume por:

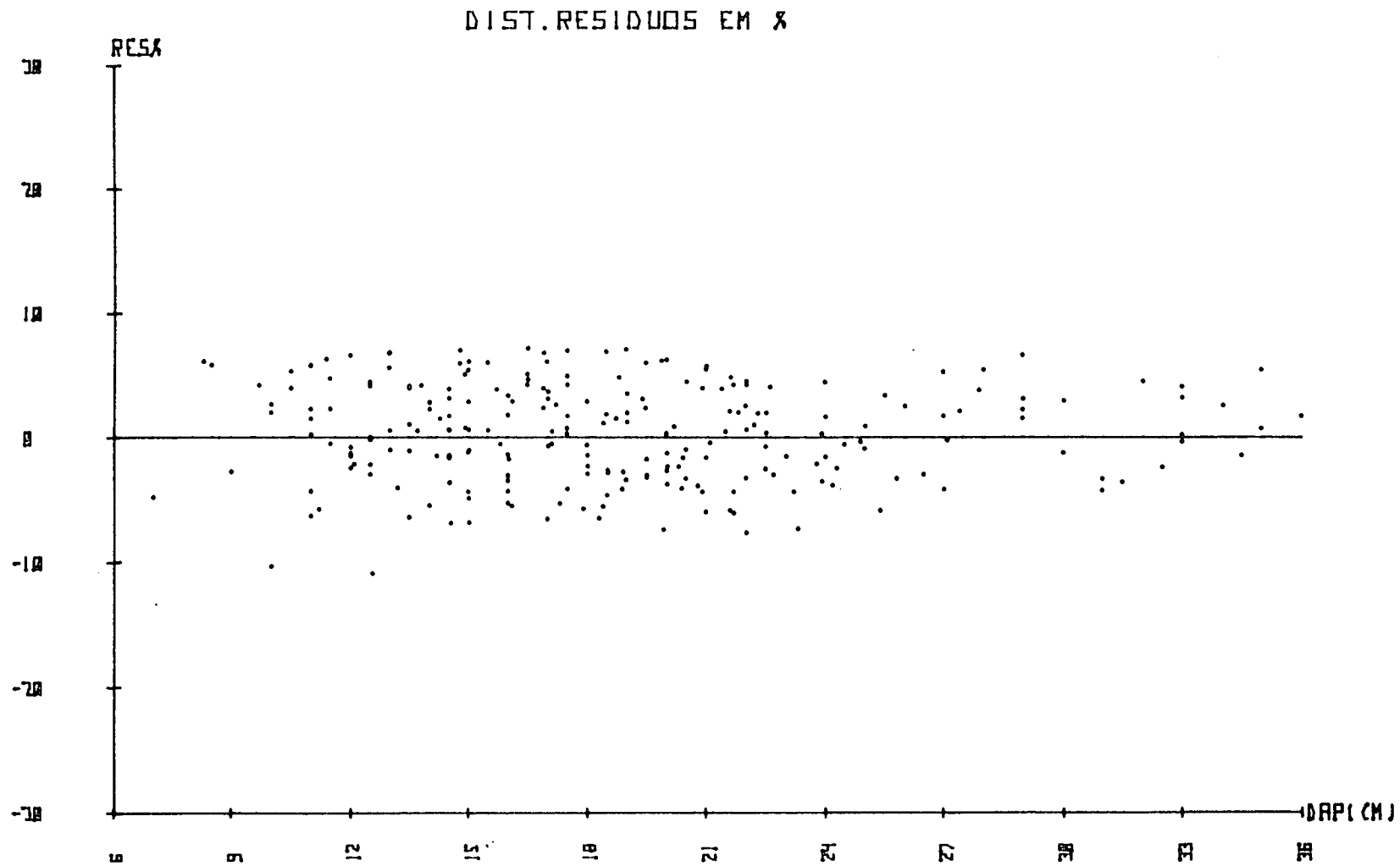


Figura 9. Distribuição dos resíduos de volumes totais em percentagem em relação aos valores de DAP

QUADRO 11. Resultados do teste da troca de sinais por classe de diâmetro e para distribuição geral dos resíduos.

CLASSE DE DAP	u	n1	n2	$\mu$	$\sigma$	Z	PROBABILIDADE CUMULATIVA
1 e 2	14	15	7	10,54	1,97	2,010	0,978
3	22	25	22	24,40	3,38	-0,562	0,288
4	18	28	19	23,64	3,26	-1,270	0,102
5	22	19	27	23,30	3,25	-0,246	0,401
6	15	18	16	17,94	2,86	-0,853	0,198
7	10	5	9	7,43	1,64	1,872	0,969
8	5	9	2	4,27	0,86	1,430	0,924
9	5	2	5	-	-	-	1,000
10	4	7	2	-	-	-	0,583
GERAL	115	128	109	118,7	7,63	-0,419	0,337

$$\begin{aligned}
V(0,4-0,0) &= \frac{\pi}{16} \cdot 0,21^2 \cdot 16,5 \cdot \left\{ \int_0^{0,2} \{1,341(1+6,63778y)^{-0,21}\}^2 dy + \right. \\
&+ \int_{0,2}^{0,4} \{1,348 - 0,30546(1-y)^{1,37}\}^2 dy + \int_0^{0,2} \{1,341(1+0,99495y)^{-2,34}\}^2 dy + \\
&+ \int_{0,2}^{0,4} \{1,09625(1-y)\}^2 dy \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(0,4-0,0) &= \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \left\{ \frac{1,341^2}{6,63778 \cdot 0,58} \{ (1+6,63778y)^{0,58} \}_{0,2}^+ + \right. \\
&+ 1,348^2 \{y\}_{0,2}^{0,4} - \frac{2 \cdot 1,348 \cdot 0,30546}{2,37} \{ (1-y)^{2,37} \}_{0,2}^{0,4} + \frac{0,30546}{3,74} \{ (1-y)^{3,74} \}_{0,2}^{0,4} + \\
&+ \frac{1,341}{0,99495 \cdot (-3,68)} \{ (1+0,99495y)^{-3,68} \}_0^{0,2} + \frac{1,09625^2}{3} \{ (1-y)^3 \}_{0,2}^{0,4} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(0,4-0,0) &= \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \left\{ 0,4670966 \{ (1+6,63778y)^{0,58} \}_0^{0,2} + \right. \\
&+ 1,817104 \{y\}_{0,2}^{0,4} - 0,3474769 \{ (1-y)^{2,37} \}_{0,2}^{0,4} + 0,0249481 \{ (1-y)^{3,74} \} - \\
&- 0,4911436 \{ (1+0,99495y)^{-3,68} \}_0^{0,2} + 0,40058 \{ (1-y)^3 \}_{0,2}^{0,4} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(0,4-0,0) &= \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \{ 0,2953489 + 0,3634208 + 0,1012133 - \\
&- 0,0071366 + 0,2392789 - 0,1185717 \}
\end{aligned}$$

$$V(0,4-0,0) = \frac{\pi}{16} \cdot 0,0441 \cdot 16,5 \cdot 0,8735536 = 0,1248079 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{PADRÃO}} = 0,114299 \text{ m}^3$$

O resíduo individual em percentagem é igual a:

$$\text{RES\%} = \{ (0,114299 - 0,1248079) / 0,114299 \} \cdot 100 = - 9,2\%$$

É importante ressaltar que a maioria dos trabalhos em que equações de forma são desenvolvidos nada mencionam sobre a precisão das estimativas parciais. Atentando para este problema procurou-se estimar, para as quatro primeiras seções de Hohenadl acumulativamente, a percentagem média dos desvios, para se ter uma idéia da referida precisão de volumes parciais. O resultado das percentagens médias de desvios para os volumes da base da árvore até: 20, 40, 60 e 80 por cento da altura total são respectivamente: 7,2%; 10,6%; 9,4% e 6,4%, as quais podem ser consideradas satisfatórias levando-se em conta, segundo SPURR<sup>30</sup>, um limite de 10% para variação do volume estimado em relação ao padrão.

Como a medição do diâmetro sem casca a um décimo da altura da árvore no campo não é conveniente, ajustou-se a seguinte equação linear, em que  $d_{0,1h}$  é função do DAP:

$$d_{0,1h} = 0,897530239 d - 0,859437796$$

onde:

$$R^2 = 0,961585845$$

$$s_{yx} = 1,069429257$$

$$F = 5882,5366^{**}$$

A Figura 10 mostra a tendência dos pontos e o traçado da equação que estima  $d_{0,1h}$  em função do DAP.

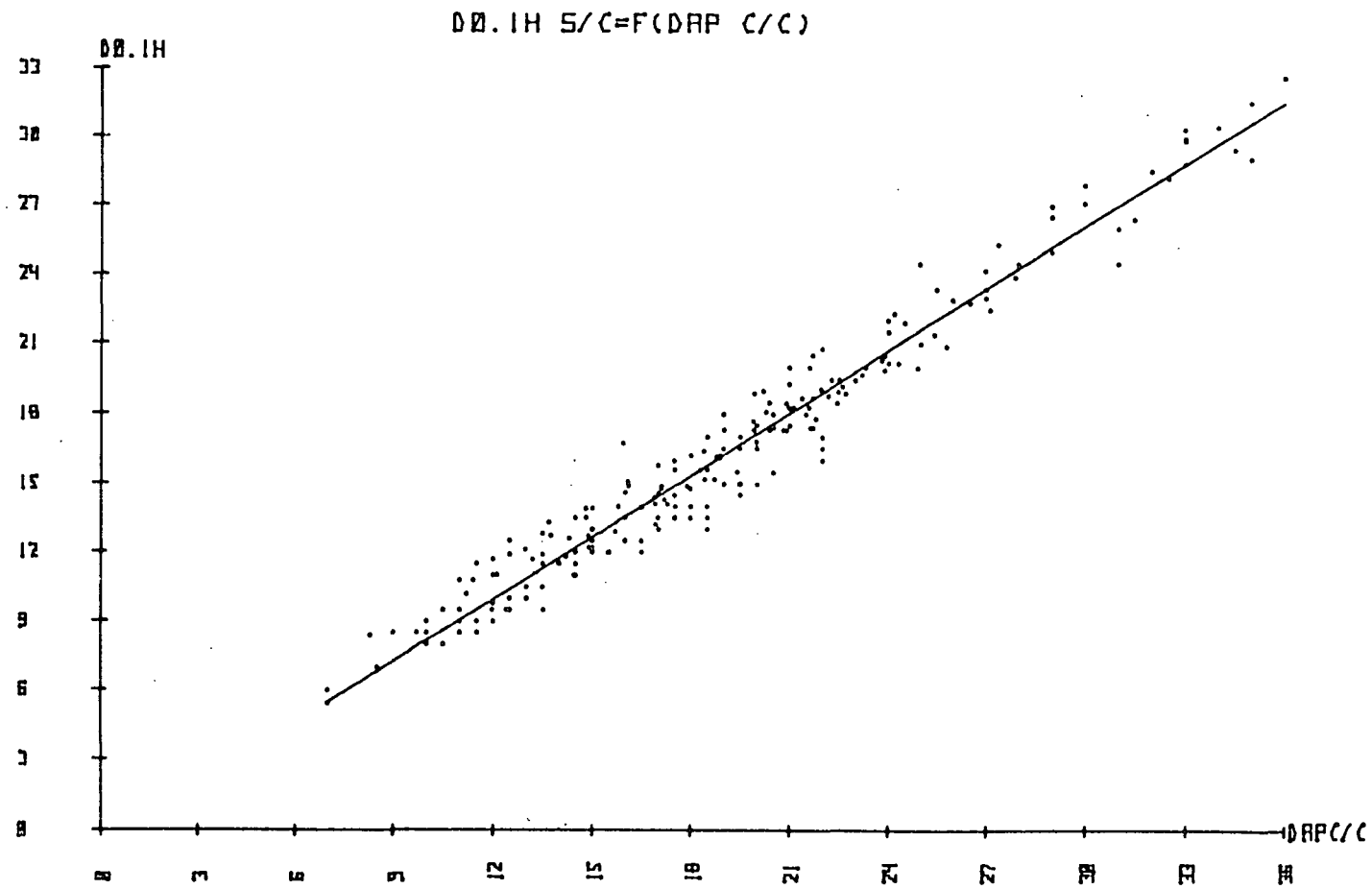


Figura 10. Tendência dos pontos e traçado da equação da reta que estima diâmetro sem casca a um décimo da altura da árvore em função do DAP

## 5. CONCLUSÕES

Pelo apresentado nos Quadros 6 e 7, vê-se que as funções de forma propostas estimaram apropriadamente os quocientes de forma naturais transformados médios. A equação que descreve a série  $ASy_2$ , a qual foi modificada, descreveu também a série média de quocientes somados, entre 0,2h e 1,0h, em todos os estratos, que o resíduo individual máximo apresentado em termos absolutos foi 2,2% para  $AS_{0,4}$ , na primeira classe de forma. Isto mostra que a alteração realizada no modelo inicial não diminuiu sua capacidade de descrever de maneira apropriada a referida série de quocientes e pode ser utilizado sem problemas.

Apesar de todo desenvolvimento e sofisticação que tem sido alcançado com as pesquisas em equações de forma, estas apresentam seu campo de ação restrito a determinadas condições. Por isto, quando ocorre uma variação acentuada no fator de forma para os povoamentos florestais em estudo, fatalmente uma estratificação por essa variável é necessária, já que uma equação, ou como neste trabalho um conjunto de equações genéricas, não preenche a necessidade de se obter estimativas convincentes de volumes totais e parciais.

A exigência de se estratificar em classes de fator de forma leva ao problema de se achar modelos que o estimem de maneira adequada através de variáveis independentes de

fácil obtenção. Os modelos encontrados na literatura não satisfazem completamente, sob diferentes aspectos, uns por não se ajustarem de maneira inteiramente adequadas aos dados e outros por apresentarem o fator de forma em função de variáveis de difícil obtenção no campo. Estudos para indicar o melhor modo de se realizar a amostragem dos dados a serem usados para ajustar tais equações de fator de forma e o desenvolvimento de outros modelos mais adequados às condições brasileiras de trabalho são de grande importância.

Nas estimativas de volumes parciais não se utiliza apenas integrações das equações que descrevem a curva  $AS_y$  como feito em estimativas de volumes totais. Houve necessidade então de desenvolver a metodologia para avaliar volumes de partes do tronco utilizando combinadamente integrações das séries  $AS_y$  e  $AD_y$ . Percentagens médias de desvios em torno de 10% ou valores menores a esse para volumes correspondentes a 20, 40, 60 e 80 por cento da altura total das árvores mostrou que a metodologia gerada está correta.

## 6. RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo básico dar continuidade ao estudo de curvas de forma em séries de quocientes naturais transformados. Para isto foram coletados dados em povoamentos de *Pinus taeda* L. localizados no município de Guarapuava, Estado do Paraná.

No estudo foram utilizadas 237 árvores de *Pinus taeda* L., obtidas em povoamentos com idades variando entre 7 a 14 anos, à exceção da idade de 9 anos. Após o abate das árvores, foram tomadas medidas do DAP com casca e sem casca, da altura total e dos diâmetros sem casca na base e a cada décimo da altura.

Inicialmente, para a generalidade dos dados, foram ajustadas graficamente quatro equações parabólicas, que descrevem as séries transformadas somadas ( $ASy$ ) e subtraídas ( $ADy$ ) de quocientes de forma verdadeiros simétricos em relação à metade da altura do tronco. Devido a grande variação do fator de forma natural (0,338 a 0,615), estratificou-se os dados em função desse, obtendo-se 5 classes, para as quais foram ajustados 5 conjuntos de funções de forma transformadas. As classes de forma não apresentam mesma amplitude. O critério usado para estratificação, a partir das equações genéricas, foi o de estabelecer para cada conjunto de equações de forma um limite arbitrário de  $\pm 7\%$  de resíduo individual no

volume total. As séries médias de quocientes naturais transformados foram ajustadas adequadamente para todas as classes de forma, através do método gráfico mencionado.

Para a entrada na classe de forma apropriada houve a necessidade de se ajustar equações de fator de forma, através da técnica de regressão. Sete modelos encontrados na literatura foram testados, sendo que 4 destes incluíram DAP e altura total e os outros 3 o quociente de forma  $\kappa_{0,5h}/0,1$  como variáveis independentes básicas. Estatisticamente, a equação parabólica que usa  $\kappa_{0,5h}/0,1$  apresentou os melhores resultados:  $s_{yx}$  (3,65%),  $R^2$  (0,9070) e foi considerada não tendenciosa através do teste da troca de sinais dos resíduos em percentagem, analisado em relação a  $\lambda_{0,1}$  observado. Na prática, porém, recomenda-se o uso da melhor equação em que  $\lambda_{0,1}$  é dado como função do DAP e h, a qual apresentou um  $s_{yx}$  de 7,74% e um  $R^2$  de 0,5963, devido a um ajuste não completamente adequado do modelo. Para um melhor ajuste, recomenda-se uma coleta sistemática dos dados, baseada na tomada de um mesmo número de árvores amostrais por classe de DAP e altura simultaneamente.

Os volumes totais individuais das árvores foram estimados através da integração até 1,0h das equações que descrevem a série ASy. Comparou-se os mesmos com os respectivos volumes de HOHENADL, através da porcentagem média dos desvios, a qual apresentou um valor de 3,3 por cento e através da análise de resíduos, em que plotou-se a distribuição dos mesmos em relação aos diâmetros e altura do peito. Pode-se observar a não tendenciosidade tanto visualmente, quanto através do teste da troca de sinais (ou da probabilidade

cumulativa) para a generalidade dos dados para cada classe de diâmetro.

Foi desenvolvida a metodologia para estimar volumes parciais, a qual é feita combinando integrações, até o ponto relativo desejado, das equações que descrevem as séries  $ASy$  e  $ADy$ . Para todas as árvores estimou-se volumes de 20, 40, 60 e 80% da altura total, comparando-os em seguida com os volumes padrões e alcançando percentagem médias de desvios respectivamente iguais a 7,2; 10,6; 9,4; 6,4 por cento.

## SUMMARY

The main objective of this research was to give continuity to the study of Taper Functions using series of natural transformed quotients.

The data for this research were obtained from *Pinus taeda* L. in man made stands located in the county of Guaraçuva, State of Paraná. It were used 237 trees obtained in stands with ages ranging from 7 to 14 years, but only 9 years old. It were measured from every felled tree: the dbhob, dbhib, total height, diameters inside bark at the base, and at every tenth of the height.

Initially it were graphycally fitted four parabolic equations for the whole set of data. These equations should describe the transformed series added ( $ASy$ ) and subtracted ( $ADy$ ) of true form quocient symetrics in relation to the half of the stem. The data were stratified due to the large variation of the natural form factor (0,338 to 0,615), in 5 form classes with unequal class interval. The average series of transformed natural quotients were adequately fitted for all 5 form classes, by using the foregoing graphic method.

To use the aproprate form class, it was necessaty to fit form factor equations using regression techniques. Seven mathematical models were tested, from which 4 included

DBH and total height, and 3 included the form quotient  $\kappa_{0,5h}/0,1$  as basic independent variables. Statistically, the parabolic equation which uses  $\kappa_{0,5h}/0,1$  presented the best unbiased result, with  $s_{xy} \%$  equal to 3,65%, and  $R^2$  equal to 0,9070. Meanwhile, for practical purposes, it is recommendable to use the best equation in which  $\lambda_{0,1}$  is estimated as a function of dbh and height which presented a  $s_{xy} \%$  equal to 7,74% and the  $R^2$  equal to 0,5963. For a best fit of this last equation it is advisable that the data should be systematically sampled with the same number of samples trees by diameter and height class simultaneously.

The individual total volumes of the trees were estimated by integration of the equations which describe the  $ASy$  series until  $1,0h$ . These volumes were compared with the respective HOHENADL volumes through the mean percent of deviations, which presented a value of 3,3%, and through the analyses of residuals, plotting the residuals on dbh. It could be observed that the estimated values were unbiased, as visually in the graphic, as from the results of the cumulative probability test.

Finally it was developed a methodology to estimate partial volumes which consists in combining integrations of the equations which describe the  $ASy$  and  $ADy$  series, until the desired relative point. It was estimated the volumes until 20%, 40%, 60% and 80% of the total height for every tree. These values were compared with their standard volumes obtaining mean percent of deviations respectively equal to 7,2%, 10,6%, 9,4% and 6,4%.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANUCHIN, N.P. Forest mensuration. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1970. 494 p.
2. ARENHS, S. A mathematical expression of stem and volume for loblolly pine in southern Brazil. Stillwater, 1980. 59 p. Dissertação. Mestrado. Oklahoma State University.
3. ASSMANN, E. The principles of forest yield study. Oxford, Pergamon Press, 1970. 506 p.
4. BAKER, F. The construction of taper curver. J. Agric. Res., 30(7): 609-624, 1925.
5. BEHRE, C.E. Preliminary notes on studies of tree form. J. For., 21: 507-511, 1923.
6. BRUCE, D.; CURTIS, R.O. & VANCOEVERING, C. Development of a system of taper and volume tables for red alder. For. Sci., 14(3): 339-350, 1968.
7. DEMAERSCHALK, J.P. Converting volume equations to compatible taper equations. For. Sci., 18(3): 241-245, 1972.
8. \_\_\_\_\_. Integrated systems for estimation of tree taper and volume. Can. J. For. Res., 3: 90-94, 1973.
9. DRAPER, N.R. & SMITH, H. Applied regression analysis. New York, John Wiley, 1966. 407 p.
10. FRIES, J. & MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. Proc. Advisory group of Forest Stat. Conf. IUFRO, Paper nº 9, Estocolmo. 1965.
11. GOMES, A.M. de A. Medição dos arvoredos. Lisboa. Livraria Sá da Costa, 1957. 413 p.
12. GRAY, H.R. The form and taper of forest-tree stems. Imp. For. Inst. Paper, Oxford Univ., 32, 1956. 75 p.
13. GROSENBAUGH, L.R. Tree form: definition, interpolation, extrapolation. For. Chron., 42(4): 444-457, 1966.

14. HEGER, L. A trial of Hohenadl's method of stem form and stem volume estimation. For. Chron., 41: 466-475, 1965.
15. HOSOKAWA, R.T. Contribuição para definir a sucessão de cortes dos povoamentos objetivando a persistência de rendas nas empresas florestais. B. APEF, Curitiba, 1, 1980. 96 p.
16. HUSCH, B. Forest mensuration and statistics. New York, Ronald Press, 1963. 474 p.
17. \_\_\_\_\_.; MILLER, C.I. & BEERS, T.W. Forest mensuration. 2.ed. New York, Ronald Press, 1971. 410 p.
18. KOZAK, A. & SMITH, J.H.G. Critical analysis of multivariate techniques for estimating tree taper suggests that simpler methods are best. For. Chron., 42(4): 458-463, 1966.
19. \_\_\_\_\_.; MUNRO, D.D. & SMITH, J.H.G. Taper functions and their application in forest inventory. For. Chron., 45(4): 278-283, 1969.
20. LARSSON, P.R. Stem form development of forest trees. For. Sci. Monogr., 5, 1963. 42 p.
21. LIU, C.J. Log volume estimation with spline approximation. For. Sci., 26(3): 361-369, 1980.
22. \_\_\_\_\_. & KEISTER, T.D. Southern pine stem form defined through principal component analysis. Can. J. For. Res., 8: 188-197, 1978.
23. LCETSCH, F.; ZÖHER, F. & HALLER, K.E. Forest inventory. Munique, BLV, 1973. v.2, 468 p.
24. MATTE, L. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. For. Chron., 25(1): 21-31, 1949.
25. PÉLLICO NETTO, S. Die Forstinventuren in Brasilien; neue entwicklungen und ihr Beitrag für eine geregelte Forstwirtschaft. Freiburg, 1979. 232 p. Tese. Doutorado. Albert Ludwigs Universität.
26. PETERS, R. Konstruktion eines Massentafelmodells dargestellt am Beispiel der Baumarte *Araucaria araucana* (Mol) C. Koch. Freiburg, 1971. 95 p. Tese. Doutorado. Albert Ludwigs Universität.
27. PREUSSNER, K. Eine neue Schaftkurvengleichung und ihre anwendung. Wissenschaft.Zeit. de Tech. Univ. Dresden, 23(1): 305-309, 1974.
28. PRODAN, M. Holzmesslehre. Frankfurt am Main, J.D. Sauerländer's, 1965. 644 p.

29. SILVA, J.A. Schaftkurvenuntersuchungen an fichte  
(*Picea abies*), tanne (*Abies alba*), rotkiefer (*Pinus*  
*silvestris*) und pechkiefer (*Pinus taeda*). Wien, 1976.  
Tese. Doutorado. Bodenkultur Universität.
30. SPURR, S.H. Forest inventory. New York, Ronald Press,  
1952. 476 p.

A P Ê N D I C E

QUADRO 12. Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem, em ordem crescente de DAP

ARV.	DAP	VT. OBS.	VT. EST.	RESIDUO	RESIDUO%
1	7.0	0.01167336	0.01222327	-0.00054991	-4.7
2	8.3	0.02289811	0.02150270	0.00139541	6.1
3	8.5	0.01211022	0.01140498	0.00070523	5.8
4	9.0	0.02522238	0.02590959	-0.00068721	-2.7
5	9.7	0.02273355	0.02177839	0.00095516	4.2
6	10.0	0.01607075	0.01772472	-0.00165396	-10.3
7	10.0	0.02320458	0.02273568	0.00046889	2.0
8	10.0	0.03811565	0.03708183	0.00103383	2.7
9	10.5	0.01990984	0.01805608	0.00185376	5.3
10	10.5	0.02739580	0.02630731	0.00108849	4.0
11	11.0	0.02128169	0.02004637	0.00123532	5.8
12	11.0	0.02161157	0.02253776	-0.00092619	-4.3
13	11.0	0.02159451	0.02153907	0.00005544	0.3
14	11.0	0.04192910	0.04095434	0.00097476	2.3
15	11.0	0.02593224	0.02756339	-0.00163115	-6.3
16	11.0	0.02918026	0.02873842	0.00044184	1.5
17	11.0	0.04020592	0.03707344	0.00313248	5.8
18	11.2	0.04465441	0.04723263	-0.00257822	-5.8
19	11.4	0.04412476	0.04134070	0.00278406	6.3
20	11.5	0.01995036	0.02004637	-0.00009602	-0.5
21	11.5	0.04907476	0.04792613	0.00114863	2.3
22	11.5	0.02136281	0.02034245	0.00102036	4.8
23	12.0	0.02261946	0.02291014	-0.00029068	-1.3
24	12.0	0.03520543	0.03288413	0.00232130	6.6
25	12.0	0.03148187	0.03224257	-0.00076070	-2.4
26	12.0	0.04958948	0.05031607	-0.00072659	-1.5
27	12.0	0.05909329	0.05953487	-0.00044158	-0.7
28	12.1	0.04436430	0.04529084	-0.00092654	-2.1
29	12.5	0.02206138	0.02446282	-0.00240145	-10.9
30	12.5	0.02806652	0.02769487	0.00037165	1.3
31	12.5	0.03373442	0.03444926	-0.00071483	-2.1
32	12.5	0.02804258	0.02810099	-0.00005841	-0.2
33	12.5	0.04822851	0.04606346	0.00216505	4.5
34	12.5	0.03556685	0.03662403	-0.00105718	-3.0
35	12.5	0.06271560	0.06266813	0.00004747	0.1
36	13.0	0.03215616	0.03034651	0.00180965	5.6
37	13.0	0.02403607	0.02279160	0.00124447	6.8
38	13.0	0.03148479	0.03179931	-0.00031452	-1.0
39	13.0	0.03414711	0.03396316	0.00018395	0.5
40	13.0	0.06342416	0.05916666	0.00425750	6.7
41	13.2	0.07050118	0.07328227	-0.00278109	-3.9
42	13.5	0.02840098	0.02869888	-0.00029790	-1.0
43	13.5	0.06667921	0.06403958	0.00263963	4.0
44	13.5	0.04310378	0.04584584	-0.00274206	-6.4
45	13.5	0.06334975	0.06266813	0.00068161	1.1
46	13.5	0.08577327	0.08223906	0.00353421	4.1
47	13.7	0.07126772	0.07085776	0.00040996	0.6
48	13.8	0.07579300	0.07260797	0.00318503	4.2
49	14.0	0.05139328	0.04993983	0.00145345	2.8
50	14.0	0.05169958	0.05448968	-0.00279010	-5.4

QUADRO 12. Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem, em ordem crescente de DAP (Continuação)

ARV.	DAP	VT.OBS.	VT. EST.	RESIDUO	RESIDUO%
51	14.0	0.07950609	0.07769825	0.00180784	2.3
52	14.2	0.08063573	0.08180495	-0.00116922	-1.5
53	14.3	0.07750952	0.07631440	0.00119512	1.5
54	14.5	0.04056812	0.04117846	-0.00061033	-1.5
55	14.5	0.05219240	0.05294586	-0.00075346	-1.4
56	14.5	0.05293707	0.05256824	0.00036883	0.7
57	14.5	0.04282613	0.04205459	0.00077154	1.8
58	14.5	0.05416889	0.05246887	0.00170002	3.1
59	14.5	0.08525633	0.09108223	-0.00582591	-6.8
60	14.5	0.04772072	0.04944434	-0.00172362	-3.6
61	14.5	0.06373699	0.06601099	-0.00227400	-3.6
62	14.5	0.08381568	0.08515086	-0.00133518	-1.6
63	14.5	0.07861283	0.07971639	-0.00110356	-1.4
64	14.5	0.06829070	0.06785745	0.00043324	0.6
65	14.5	0.06800320	0.06537389	0.00262932	3.9
66	14.8	0.07779465	0.07231936	0.00547529	7.0
67	14.8	0.09020737	0.08482468	0.00538269	6.0
68	14.9	0.06517750	0.06464565	0.00053185	0.8
69	14.9	0.09215275	0.08744505	0.00470770	5.1
70	15.0	0.04551382	0.04603536	-0.00052154	-1.1
71	15.0	0.06021509	0.05848507	0.00173003	2.9
72	15.0	0.05399412	0.05103790	0.00295622	5.5
73	15.0	0.05805751	0.06199379	-0.00393628	-6.8
74	15.0	0.06889380	0.07221037	-0.00331657	-4.8
75	15.0	0.08765033	0.09139999	-0.00374965	-4.3
76	15.0	0.06472268	0.06537389	-0.00065120	-1.0
77	15.0	0.09473055	0.08897349	0.00575705	6.1
78	15.0	0.13165170	0.13085027	0.00080142	0.6
79	15.5	0.05278658	0.05246887	0.00031771	0.6
80	15.5	0.10115811	0.09503935	0.00611876	6.0
81	15.7	0.11291119	0.10856014	0.00435105	3.9
82	15.8	0.09001729	0.09047660	-0.00045931	-0.5
83	16.0	0.12674880	0.12840864	-0.00165984	-1.3
84	16.0	0.05166315	0.05072156	0.00094158	1.8
85	16.0	0.06106314	0.05900263	0.00206050	3.4
86	16.0	0.08195306	0.08621525	-0.00426218	-5.2
87	16.0	0.08862433	0.09239460	-0.00377027	-4.3
88	16.0	0.05708574	0.05901332	-0.00192758	-3.4
89	16.0	0.09157626	0.09433189	-0.00275564	-3.0
90	16.0	0.10941777	0.11124548	-0.00182770	-1.7
91	16.1	0.10808517	0.10498209	0.00310308	2.9
92	16.1	0.10361614	0.10925897	-0.00564283	-5.4
93	16.5	0.06241125	0.05947916	0.00293209	4.7
94	16.5	0.05132850	0.04912994	0.00219856	4.3
95	16.5	0.05855143	0.05434453	0.00420690	7.2
96	16.5	0.13168603	0.12487267	0.00681336	5.2
97	16.9	0.13599588	0.13273062	0.00326526	2.4
98	16.9	0.12184967	0.11699179	0.00485788	4.0
99	16.9	0.14946805	0.13922990	0.01023816	6.8
100	17.0	0.07478553	0.07244281	0.00234272	3.1

QUADRO 12. Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem, em ordem crescente de DAP (Continuação)

ARV.	DAP	VT. OBS.	VT. EST.	RESIDUO	RESIDUO%
101	17.0	0.09465932	0.08896574	0.00569359	6.0
102	17.0	0.05934304	0.06318407	-0.00384104	-6.5
103	17.0	0.12365685	0.11904716	0.00460970	3.7
104	17.0	0.11363001	0.11435546	-0.00072546	-0.6
105	17.1	0.10367143	0.10417716	-0.00050573	-0.5
106	17.1	0.09910868	0.09860531	0.00050337	0.5
107	17.2	0.17092681	0.16639600	0.00453281	2.7
108	17.3	0.15062340	0.15854414	-0.00792074	-5.3
109	17.5	0.05952527	0.05906521	0.00046006	0.8
110	17.5	0.05648891	0.05369565	0.00279326	4.9
111	17.5	0.06922496	0.06442299	0.00480197	6.9
112	17.5	0.10185960	0.10157019	0.00028942	0.3
113	17.5	0.07529742	0.07401290	0.00128451	1.7
114	17.5	0.10220100	0.10637849	-0.00417749	-4.1
115	17.5	0.13162414	0.12598665	0.00563749	4.3
116	17.9	0.18160878	0.19197688	-0.01036810	-5.7
117	18.0	0.05741258	0.05774676	-0.00033418	-0.6
118	18.0	0.06197374	0.06338746	-0.00141372	-2.3
119	18.0	0.08158755	0.07920679	0.00238076	2.9
120	18.0	0.11253696	0.11413786	-0.00160090	-1.4
121	18.0	0.16233104	0.16697853	-0.00464749	-2.9
122	18.3	0.19560078	0.20810048	-0.01249970	-6.4
123	18.4	0.11715352	0.11581840	0.00133511	1.1
124	18.4	0.19042765	0.20089523	-0.01046759	-5.5
125	18.5	0.05686984	0.05947916	-0.00260932	-4.6
126	18.5	0.06364780	0.05925230	0.00439550	6.9
127	18.5	0.06338196	0.06218008	0.00120188	1.9
128	18.5	0.19066953	0.19594051	-0.00527098	-2.8
129	18.5	0.15686489	0.16090087	-0.00403598	-2.6
130	18.7	0.17685964	0.17414742	0.00271222	1.5
131	18.8	0.20093962	0.19123098	0.00970864	4.8
132	18.9	0.10195660	0.10475098	-0.00279438	-2.7
133	18.9	0.12983425	0.13516326	-0.00532901	-4.1
134	19.0	0.11320486	0.11698245	-0.00377760	-3.3
135	19.0	0.0778346	0.07229375	0.00548971	7.1
136	19.0	0.16396714	0.16068791	0.00327923	2.0
137	19.0	0.17426926	0.16810428	0.00616499	3.5
138	19.0	0.15000719	0.14807741	0.00192978	1.3
139	19.4	0.20172614	0.19549434	0.00623180	3.1
140	19.5	0.06384578	0.06496510	-0.00111932	-1.8
141	19.5	0.07612691	0.07159419	0.00453272	6.0
142	19.5	0.08343749	0.08148326	0.00195423	2.3
143	19.5	0.20576833	0.21220542	-0.00643709	-3.1
144	19.5	0.15858979	0.16337627	-0.00478648	-3.0
145	19.9	0.13621371	0.12788760	0.00832611	6.1
146	19.9	0.26070140	0.27993897	-0.01923757	-7.4
147	20.0	0.15040313	0.14102624	0.00937688	6.2
148	20.0	0.09688467	0.09912442	-0.00223975	-2.3
149	20.0	0.11671633	0.11633332	0.00038301	0.3
150	20.0	0.16823209	0.17449059	-0.00625850	-3.7

QUADRO 12. Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem, em ordem crescente de DAP (Continuação)

ARY.	DAP	YT.OBS.	YT. EST.	RESIDUO	RESIDUO%
151	20.0	0.15257114	0.15655817	-0.00398703	-2.6
152	20.0	0.19947020	0.20186091	-0.00239071	-1.2
153	20.2	0.18332772	0.18175958	0.00156814	0.9
154	20.3	0.11346077	0.11611476	-0.00265400	-2.3
155	20.4	0.15312364	0.15929353	-0.00616989	-4.0
156	20.4	0.23606596	0.23969060	-0.00362464	-1.5
157	20.5	0.09329591	0.09629313	-0.00299722	-3.2
158	20.5	0.14529131	0.14668884	-0.00139752	-1.0
159	20.5	0.25231580	0.24103187	0.01128394	4.5
160	20.8	0.23824405	0.24738121	-0.00913716	-3.8
161	20.9	0.27534249	0.28728750	-0.01194501	-4.3
162	20.9	0.24418775	0.23456353	0.00962422	3.9
163	21.0	0.16578894	0.15669851	0.00909043	5.5
164	21.0	0.20744313	0.21974415	-0.01230102	-5.9
165	21.0	0.18409716	0.18693513	-0.00283797	-1.5
166	21.0	0.17087039	0.16097839	0.00989200	5.8
167	21.1	0.28866096	0.28971484	-0.00105388	-0.4
168	21.4	0.31154223	0.29952316	0.01201907	3.9
169	21.5	0.12724542	0.12664077	0.00060465	0.5
170	21.6	0.13708150	0.13422520	0.00285630	2.1
171	21.6	0.18459496	0.19532814	-0.01073318	-5.8
172	21.6	0.23180584	0.22061077	0.01119507	4.8
173	21.7	0.26886359	0.25747518	0.01138841	4.2
174	21.7	0.41225979	0.43015286	-0.01789308	-4.3
175	21.7	0.26071787	0.27634778	-0.01562991	-6.0
176	21.8	0.25607403	0.25103191	0.00504212	2.0
177	22.0	0.08387655	0.09025583	-0.00637928	-7.6
178	22.0	0.09325809	0.09625442	-0.00299632	-3.2
179	22.0	0.09689379	0.09277193	0.00412185	4.3
180	22.0	0.28008377	0.26738469	0.01269908	4.5
181	22.0	0.25961415	0.25310396	0.00651019	2.5
182	22.0	0.33495181	0.33297553	0.00197629	0.6
183	22.2	0.30735970	0.30424885	0.00311085	1.0
184	22.3	0.31881045	0.31267103	0.00613942	1.9
185	22.5	0.27931652	0.27819762	0.00111890	0.4
186	22.5	0.30674077	0.31429953	-0.00755876	-2.5
187	22.5	0.25549472	0.25730220	-0.00180748	-0.7
188	22.5	0.28698953	0.28142449	0.00556505	1.9
189	22.6	0.34548285	0.33154230	0.01394055	4.0
190	22.7	0.26894946	0.27689772	-0.00794825	-3.0
191	23.0	0.24954201	0.24915973	-0.00361772	-1.5
192	23.2	0.32711002	0.34118303	-0.01407301	-4.3
193	23.3	0.34388225	0.36894795	-0.02506570	-7.3
194	23.8	0.34761518	0.35473605	-0.00712087	-2.0
195	23.9	0.34799702	0.35996056	-0.01196354	-3.4
196	23.9	0.34543334	0.34428602	0.00114732	0.3
197	24.0	0.29525170	0.28215760	0.01309410	4.4
198	24.0	0.34717783	0.35238018	-0.00520235	-1.5
199	24.0	0.35530444	0.34950221	0.00580222	1.6
200	24.2	0.32222694	0.33436944	-0.01214249	-3.8

QUADRO 12. Volume padrão total com o respectivo volume estimado, resíduo e resíduo em percentagem, em ordem crescente de DAP (Continuação)

ARV.	DAP	VT.OBS.	VT.EST.	RESIDUO	RESIDUOX
201	24.3	0.39007435	0.39988654	-0.00981219	-2.5
202	24.5	0.28756758	0.28909472	-0.00152714	-0.5
203	24.9	0.34330277	0.34432872	-0.00102595	-0.3
204	25.0	0.27531511	0.27759867	-0.00228355	-0.8
205	25.0	0.35359506	0.35036317	0.00323190	0.9
206	25.4	0.42207730	0.44660900	-0.02453170	-5.8
207	25.5	0.34166727	0.33005297	0.01161429	3.4
208	25.8	0.36796166	0.37975702	-0.01179535	-3.2
209	26.0	0.24593389	0.23971575	0.00621814	2.5
210	26.5	0.40875037	0.42077380	-0.01202343	-2.9
211	27.0	0.35156095	0.33299251	0.01856844	5.3
212	27.0	0.40218811	0.41885567	-0.01666756	-4.1
213	27.0	0.43449030	0.42679596	0.00769434	1.8
214	27.1	0.43517047	0.43579103	-0.00062057	-0.1
215	27.4	0.26581602	0.26025055	0.00556546	2.1
216	27.9	0.47587264	0.45762521	0.01824743	3.8
217	28.0	0.42879839	0.40532210	0.02347629	5.5
218	29.0	0.56086801	0.55189164	0.00897638	1.6
219	29.0	0.54536935	0.53313804	0.01223131	2.2
220	29.0	0.52679812	0.51025661	0.01634152	3.1
221	29.0	0.64655123	0.60350672	0.04304451	6.7
222	30.0	0.62535912	0.63253251	-0.00717339	-1.1
223	30.0	0.56019379	0.54354456	0.01663922	3.0
224	31.0	0.59187414	0.61665676	-0.02478261	-4.2
225	31.0	0.50294361	0.51927897	-0.01633536	-3.2
226	31.5	0.61410712	0.63577677	-0.02166965	-3.5
227	32.0	0.67796760	0.64763581	0.03033179	4.5
228	32.5	0.62530370	0.64014081	-0.01483711	-2.4
229	33.0	0.73104098	0.73328986	-0.00224888	-0.3
230	33.0	0.76074872	0.75888399	0.00186473	0.2
231	33.0	0.80713188	0.78106102	0.02607086	3.2
232	33.0	0.71915805	0.68982085	0.02933721	4.1
233	34.0	0.83227642	0.81090476	0.02137167	2.6
234	34.5	0.78467417	0.79588499	-0.01121082	-1.4
235	35.0	0.65929666	0.65451712	0.00477954	0.7
236	35.0	0.81268821	0.76844359	0.04424463	5.4
237	36.0	0.94894175	0.93251941	0.01642234	1.7