ANA CRISTINA CORRÊA MUNARETTO

# *DA TEORIA DE RETICULADOS À GEOMETRIA ALGÉBRICA FUZZY*

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

CURITIBA

2005

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# PARECER DA BANCA EXAMINADORA

EM REUNIÃO A BANCA DELIBEROU PELA APROVAÇÃO DA CANDIDATA ANA CRISTINA CORRÊA MUNARETTO E FEZ SUGESTÕES PARA O MELHORAMENTO DO TEXTO NA VERSÃO FINAL.

A BANCA AINDA CONSIDEROU A APRESENTAÇÃO ESCLARECEDORA, DEMONSTRANDO A MATURIDADE MATEMÁTICA QUE SE ESPERA NUM PROGRAMA DE MESTRADO.

Curitiba, 05 de agosto de 2005.

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes
Presidente

Prof. Dr. Ricardo Bianconi
Titular

Profª Dra. Soraya Rosana Torres Kudri
Titular

Prof. Dr. Alexandre L. Trovon de Carvalho
Suplente

UFPR
Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMAT

# ATA DA 6ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos cinco dias do mês de agosto de 2005, no Anfiteatro B - Prédio PC/ET, Universidade Federal do Paraná, foi instalada pelo Professor Marcelo Muniz Silva Alves, Vice-Coordenador do PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, a Banca Examinadora para a Sexta Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Estiveram presentes ao Ato, além do Vice-Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, aprovada "Ad Referendum" pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, ficou constituída pelos professores: Dr. Ricardo Bianconi, do IME-USP; Dra. Soraya Rosana Torres Kudri, do Departamento de Matemática da UFPR; Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho, do Departamento de Matemática da UFPR; e Dr. José Carlos Cifuentes, do Departamento de Matemática da UFPR, orientador da dissertação a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dez horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando a candidata **Ana Cristina Corrêa Munaretto** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "Da Teoria de Reticulados à Geometria Algébrica Fuzzy". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de argüição pelos membros participantes. Após a argüição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho da pós-graduanda.

A banca considerou que a pós-graduanda fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a argüição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 05 de agosto de 2005.

Bianconi

Prof. Dr. José Carlos Cifuentes
Presidente

Prof. Dr. Ricardo Bianconi
Titular

Soraya Rosana Torres Kudri

Alexandre Luis T. Carvalho

Profª Dra. Soraya R. Torres Kudri
Titular

Prof. Dr. Alexandre L. T. de Carvalho
Suplente

# Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu marido Nego que sempre acreditou em mim e compreendeu os momentos em que precisei estar ausente, apoiando-me e incentivando-me.

# Agradecimentos

Agradeço ao professor José Carlos Cifuentes pela dedicação, disponibilidade, e pelos valiosos ensinamentos em todas as etapas, não apenas deste trabalho, mas de toda a minha caminhada acadêmica.

# Sumário

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar as variedades algébricas *fuzzy* finito valuadas e mostrar que, como no caso clássico, elas podem ser expressas como uma união finita de variedades algébricas *fuzzy* irredutíveis. Para este propósito é desenvolvido, a partir da teoria de reticulados, a álgebra comutativa *fuzzy*, a qual, usando conceitos *fuzzy* de primalidade, radicais e decomposição primária de ideais, é a base da geometria algébrica *fuzzy*.

Palavras-Chave: Teoria dos Reticulados, Álgebra *Fuzzy*, Geometria Algébrica *Fuzzy*.

# Abstract

The aim of this work is to study the finite valued *fuzzy* algebraic varieties and to show that, as in the classical case, they can be expressed as a finite union of irreducible *fuzzy* algebraic varieties. For this purpose it is developed, from lattice theory, the *fuzzy* commutative algebra, which, by using *fuzzy* concepts of primality, radicals and primary decomposition of ideals, is the basis of *fuzzy* algebraic geometry.

Keywords: Lattice Theory, *Fuzzy* Algebra, *Fuzzy* Algebraic Geometry.

# Capítulo 1

# Introdução

A Teoria de Reticulados, capítulo importante da teoria de ordens parciais (ou conjuntos parcialmente ordenados), é o fundamento de uma das generalizações mais promissoras da matemática contemporânea em suas diversas áreas como Álgebra, Topologia, Análise, Geometria. Essa nova matemática, conhecida como *Matemática Fuzzy*, ou difusa, desenvolveu-se, como no caso da matemática clássica nos séculos XIX e XX, a partir de uma teoria de conjuntos devidamente generalizada, chamada também de *fuzzy*.

A generalização da teoria de conjuntos clássica para a teoria de conjuntos *fuzzy* baseia-se na possibilidade de expressar todo subconjunto de um conjunto dado como uma função definida nesse conjunto, a qual é chamada *função característica*.

Seja $X$ um conjunto, então, o conjunto de partes de $X$ é dado por $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$. Em $\mathcal{P}(X)$ podemos definir diversas operações como união, interseção, complementar, diferença, etc., satisfazendo algumas relações como, por exemplo, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $\quad A \setminus B = A \cap B^c$, dentre outras.

$\mathcal{P}(X)$ pode ser considerado, também, como um conjunto parcialmente ordenado com respeito à ordem dada pela inclusão: $A \subseteq B$. Por outro lado, existe uma relação íntima entre subconjuntos de $X$ e as chamadas de *funções características em X*.

Dado $A \subseteq X$, define-se a função característica de $A$ como $\lambda_A : X \longrightarrow \{0,1\}$:

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Chamando de $2^X$ ao conjunto das funções $f : X \longrightarrow \{0,1\}$, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & 2^X \\ & A & \longmapsto & \lambda_A \end{array}$$

é uma bijeção. De fato, dada $f : X \longrightarrow \{0,1\}$, temos que $f = \lambda_A$ para $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Mais ainda, essa bijeção $\lambda$ é um isomorfismo a respeito de estruturas similares em $\mathcal{P}(X)$ e $2^X$, a saber:

| $\mathcal{P}(X)$ | $2^X$ |
|---|---|
| união | $\lambda_A \cup \lambda_B = \lambda_{A\cup B}$ |
| interseção | $\lambda_A \cap \lambda_B = \lambda_{A\cap B}$ |
| complementar | $(\lambda_A)^c = \lambda_{A^c}$ |

onde, para cada $x \in X$,

$\lambda_{A\cup B}(x) = max\{\lambda_A(x), \lambda_B(x)\}$

$\lambda_{A\cap B}(x) = min\{\lambda_A(x), \lambda_B(x)\}$

$\lambda_{A^c}(x) = 1 - \lambda_A(x)$.

Também, podemos definir $\lambda_A \leq \lambda_B \Leftrightarrow \forall x \in X, \lambda_A(x) \leq \lambda_B(x)$ e teremos $\lambda_A \leq \lambda_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

L. A. ZADEH, em 1965, generalizou as funções características permitindo que tomassem valores em conjuntos diferentes do $\{0,1\}$, por exemplo, em $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, ou no intervalo unitário real $[0,1]$, isto é, $f : X \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ou

$f : X \longrightarrow [0,1]$, as quais podem ser chamadas de *funções características generalizadas*.

Chamando de $3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e de $I = [0,1]$, ZADEH, propôs estudar o conjunto $3^X$ ou $I^X$ como conjuntos generalizados de "partes" de $X$, onde definimos para cada $x \in X$:

$(f \cup g)(x) = max\{f(x), g(x)\}$

$(f \cap g)(x) = min\{f(x), g(x)\}$

$(f^c)(x) = 1 - f(x)$

$X(x) = 1$

$\emptyset(x) = 0$, e

$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$.

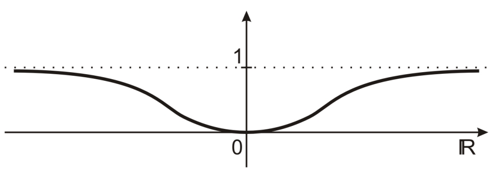
Pode-se observar que, em geral, $f \cup f^c \neq X$ e $f \cap f^c \neq \emptyset$.

Uma pergunta natural pode ser formulada: Dada $f : X \longrightarrow [0,1]$ que tipo de "subconjunto" de $X$ é representado por $f$?

Esta pergunta pode ser reformulada da seguinte maneira: Que tipo de "subconjunto" $A$ de $X$ teria $f$ como função característica generalizada?

De fato, para cada $x \in X$ temos que se $x \in A$, então, $f(x) = 1$, e se $x \notin A$, então, $f(x) = 0$. Mas, $f(x)$ pode assumir valores diferentes de 0 e 1, isto é, $f(x) = t$ com $0 < t < 1$.

Por exemplo, se $X = \mathbb{R}$ e $A$ denota o "subconjunto" de $\mathbb{R}$ dos números $x$ tal que $\mid x \mid$ é "grande", então, tal subconjunto pode ser representado pela função seguinte; onde o grau de "grandeza" de um número $x \in \mathbb{R}$ é dado por $A(x)$, sendo, então, a "grandeza" de um número uma tendência.




É freqüente dizer que $t$ é o *grau de pertinência* de $x$ ao "subconjunto" $A$

representado por $f$.

Portanto, como a definição de "novos" subconjuntos de $X$ pode ser ambígua, ZADEH os considera através de suas funções características generalizadas. Então, um conjunto generalizado de partes de $X$, pode ser dado por $\mathcal{P}_I(X) = \{f \mid f : X \longrightarrow [0,1]\}(= 2^I)$.

Se $f \in \mathcal{P}_I(X)$ e $imf \subseteq \{0,1\}$, diremos que $f$ é um *subconjunto nítido* de $X$ e pode ser interpretado como a função característica do subconjunto $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$.

Em geral, os elementos de $\mathcal{P}_I(X)$ são chamados de *subconjuntos fuzzy de $X$ com valores em $I$*, ou *$I$-subconjuntos de $X$*.

Em 1967, J. A. GOGUEN generalizou a idéia de ZADEH substituindo $I$ por um reticulado $L$ satisfazendo algumas condições mínimas, por exemplo, a existência de um máximo 1 e um mínimo 0 em $L$ e a propriedade de distributividade das operações de $L$, dentre outras.

As operações de $L$ a que fazemos referência (e que definiremos com detalhe no Capítulo 2) são as de supremo $\vee$ e ínfimo $\wedge$, através das quais poderão ser definidas em $\mathcal{P}_L(X)(= \{f \mid f : X \longrightarrow L\})$ operações adequadas de união e interseção de $L$-subconjuntos de $X$, permitindo o desenvolvimento de uma teoria de subconjuntos *fuzzy*.

Aplicações à Topologia, Álgebra, Análise, etc., começam a ser desenvolvidas a partir de 1968, constituindo-se em áreas de pesquisa denominadas *Topologia Fuzzy, Álgebra Fuzzy, Análise Fuzzy*, etc.

Em particular, a Álgebra *Fuzzy* começa com a estruturação da teoria de *(sub)grupos fuzzy* a partir de 1971 com A. ROSENFELD. Nessa teoria, dado um grupo $(G, *)$, um subgrupo *fuzzy* de $G$ com valores num reticulado $L$ é um $L$-subconjunto $f$ de $G$, isto é, $f : G \longrightarrow L$, tal que para todo $x, y \in G, f(x * y) \geq f(x) \wedge f(y)$. Detalharemos esta construção, no caso da teoria de anéis, no Capítulo 3.

A teoria de $L$-variedades algébricas, isto é, a extensão da teoria dos conjuntos algébricos ao caso *fuzzy*, objeto principal desta dissertação, foi desenvolvida pela primeira vez por J.N. MORDESON a partir de 1993. No artigo original é considerado apenas o caso de $L = [0, 1]$.

A seguir, descreveremos brevemente o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 2 definimos as operações de um reticulado $L$ que, como mencionamos acima, nos permitirão desenvolver a teoria de subconjuntos *fuzzy* com valores em $L$, os quais, também são estudados neste capítulo. Ainda no Capítulo 2 introduzimos as involuções reversas, que são funções num reticulado que generalizam o complementar de uma álgebra de Boole. Estas funções nos permitirão definir, no Capítulo 7, as variedades algébricas *fuzzy*, principal objeto da geometria algébrica *fuzzy*.

Aliás, a intenção deste trabalho é estudar essas variedades e mostrar que, assim como no caso clássico, as variedades algébricas *fuzzy* finito valuadas, podem ser expressas como uma união finita de variedades algébricas *fuzzy* irredutíveis.

O Capítulo 3 está dedicado a desenvolver os fundamentos da Álgebra Comutativa *Fuzzy*, considerada a base, como no caso clássico, da Geometria Algébrica *Fuzzy*. Para tanto, são definidos os conceitos de subanel *fuzzy* e de ideal *fuzzy* de um anel.

As valorizações $p$-ádicas e as valorizações de Krull também são apresentadas no Capítulo 3, pois estas são exemplos interessantes de ideais *fuzzy*.

No Capítulo 4 discutimos algumas variantes da noção de primalidade para ideais *fuzzy*. Todas elas, no caso clássico, equivalem ao fato do ideal ser primo. Neste capítulo, o resultado principal é uma proposição que caracteriza os ideais *fuzzy* primos, caracterização que será usada muitas vezes no decorrer do texto.

No Capítulo 5 são introduzidos dois tipos de radicais de um ideal *fuzzy*, com os quais estão relacionadas noções correspondentes de ideais *fuzzy* primários. A finalidade principal deste capítulo é encontrar condições para que estes radicais coincidam. Esse resultado será utilizado no Capítulo 7 para estabelecer o correspondente teorema dos zeros de Hilbert para ideais *fuzzy*.

No Capítulo 6 é desenvolvida a teoria da representação primária para ideais *fuzzy*, ferramenta importante para o estudo das variedades algébricas *fuzzy*. O resultado principal deste capítulo exige restringir o estudo da álgebra comutativa *fuzzy* para o caso em que o reticulado $L$ é totalmente ordenado. Esse resultado estabelece o fato de todo ideal *fuzzy* finito valuado num anel Noetheriano ter uma representação primária *fuzzy*. Neste Capítulo também sugerimos a possibilidade de ampliar o estudo da decomposição primária *fuzzy* para o caso de $L$-ideais infinito valuados, mostrando como exemplos importantes dessa situação as valorizações $p$-ádicas.

O Capítulo 7 é o principal desta dissertação. Nele são definidos os conceitos de *variedade algébrica fuzzy* correspondente a um ideal finito valuado de um anel de polinômios, e de ideal de um subconjunto *fuzzy* também finito valuado do espaço afim correspondente. Para eles são demonstrados, por exemplo, o teorema dos zeros de Hilbert e, como resultado principal, o teorema de decomposição de uma variedade algébrica *fuzzy* como união finita de variedades algébricas *fuzzy* irredutíveis, resultados que exigem, do reticulado $L$, ser totalmente ordenado.

Nesse capítulo também é demonstrado, para o caso de $L$ finito (não necessariamente totalmente ordenado), o correspondente teorema de caracterização de anéis Noetherianos para cadeias enumeráveis de ideais *fuzzy*, o que nos permitirá demonstrar, ainda no caso de $L$ finito, o teorema de decomposição mencionado sem o pressuposto do teorema dos zeros de Hilbert. Esse resultado generaliza perfeitamente o caso clássico. De fato, o uso do teorema dos zeros de Hilbert, que não é necessário no caso clássico, exige do corpo sobre o qual está definido o anel de polinômios ser algebricamente fechado.

Nas *Considerações Finais* são esboçados alguns problemas que merecerão a nossa atenção futura, em especial, são destacados os teoremas de caracterização dos $L$-ideais primos, $L$-primários e $\mathcal{R}$-primários, todos eles desenvolvidos no texto como $L$-ideais bi-valuados, assim como dos $L$-ideais maximais, $w$-maximais e irredutíveis, introduzidos aqui, mostrando que todos eles seguem o mesmo padrão, o que sugere um resultado profundo de natureza lógica por trás desses teoremas.

É importante ressaltar que cada capítulo começa com a descrição da situação clássica correspondente, a fim de motivar os conceitos *fuzzy* que serão introduzidos.

Por outro lado, a respeito da lógica subjacente à teoria desenvolvida aqui, podemos dizer que ela é clássica, isto é, os objetos *fuzzy* são tratados, do ponto de vista lógico, classicamente.

Finalmente, devemos destacar também, as contribuições que esta dissertação trás: 1) ela cumpre uma função didática para o estudo dessa nova área do conhecimento matemático, pois, os diversos conceitos novos são introduzidos em forma auto-contida, mais ainda, não existindo referências em português para este estudo; 2) o estudo das valorizações $p$-ádicas e das valorizações de Krull como ideais *fuzzy*, ao que nos consta, não aparece na literatura, sendo eles fonte importante de exemplos e contra-exemplos para diversos conceitos aqui analisados, em especial, para o estudo da possibilidade de decomposição primária de ideais *fuzzy* infinito valuados; 3) também é uma novidade o teorema de caracterização, para $L$ finito, de anéis Noetherianos em termos de suas cadeias enumeráveis de ideais *fuzzy*, do qual decorre o correspondente teorema de decomposição de variedades *fuzzy*, análogo ao caso clássico.

# Capítulo 2

# Teoria de Subconjuntos *Fuzzy*

## 2.1 Reticulados

Um *reticulado* é um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$, onde quaisquer dois elementos $x, y \in L$ tem supremo e ínfimo.

$\leq$ é uma ordem parcial no sentido que:

i) $\forall x \in L, x \leq x$ (reflexividade)

ii) $\forall x, y, z \in L, x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividade)

iii) $\forall x, y \in L, x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetria).

Se $L$ também satisfaz:

iv) Linearidade ou conexidade: $\forall x, y \in L, x \leq y$ ou $y \leq x$,

diremos que $\leq$ é uma ordem total e $L$ é totalmente ordenado. Às vezes, se diz também que $L$ é uma cadeia. Nesse caso, dados $x, y \in L$, com $x \leq y$, temos que existem $max\{x, y\} = y$ e $min\{x, y\} = x$.

O conceito de supremo envolvido na definição de reticulado é o seguinte:

Seja $(L, \leq)$ uma ordem parcial e $A \subseteq L$. Um elemento $z \in L$ é dito *cota superior de* $A$ se $\forall x \in A : x \leq z$. $z$ é dito *supremo de* $A$ se $z$ é a menor das cotas superiores de $A$, isto é,

i) $z$ é cota superior;

ii) se $y$ é outra cota superior, então, $z \leq y$.

Prova-se que o supremo de $A$, no caso de existir, é único, e denota-se por $z = supA$.

No caso particular de $A = \{a, b\}$, denotamos por $sup\{a, b\} = a \vee b$. Em geral, se $A = \{a_i\}$, então, denotaremos $supA = \bigvee a_i$.

Analogamente, define-se o ínfimo de $A$, tendo, então, $inf\{a, b\} = a \wedge b$ e $inf\{a_i\} = \bigwedge a_i$.

Se num reticulado $L$, todo subconjunto tem supremo e ínfimo, diremos que o reticulado é *completo*. Se todo subconjunto tem apenas supremo, diremos que $L$ é *sup-completo*. Analogamente, define-se um reticulado *inf-completo*.

Num reticulado completo $L$ existe $1 = supL$ e $0 = infL$, que, às vezes, denotaremos por $1_L$ e $0_L$, respectivamente.

Podemos observar que um reticulado $L$ pode ser considerado como uma estrutura algébrica $(L, \vee, \wedge)$ sendo $a \vee b = sup\{a, b\}$ e $a \wedge b = inf\{a, b\}$.

Prova-se facilmente que num reticulado, as operações $\vee$ e $\wedge$ são sempre comutativas e associativas, porém, nem sempre alguma delas é distributiva a respeito da outra.

Um reticulado é dito *distributivo* se $\vee$ e $\wedge$ são distributivas uma a respeito da outra, isto é, para todo $a, b, c \in L$:

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad$ e

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Casos particulares de reticulados distributivos com 1 e 0 são as *Álgebras de Boole*.

Um reticulado $L$ é uma *álgebra de Boole* se:

i) $L$ é distributivo;

ii) existe $1, 0 \in L \quad (0 \neq 1)$;

iii) $L$ é complementado, isto é, em $L$ há uma operação $' : L \longrightarrow L$, satisfazendo:

$a \vee a' = 1$

$a \wedge a' = 0$

($a'$ é chamado de complemento de $a$)

Por exemplo, $\mathcal{P}(X)$ é uma álgebra de Boole para todo conjunto $X \neq \emptyset$, onde $1 = X$, $0 = \emptyset$ e para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, $A' = A^c$.

Em particular, se $X = \{a\}$, então, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, X\} = \{0, 1\}$ sendo a menor álgebra de Boole.

Numa álgebra de Boole são satisfeitas as seguintes propriedades:

$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

$(a \vee b)' = a' \wedge b'$ e $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

**Proposição 2.1.1** *Se $L$ é uma álgebra de Boole, então, a função $' : L \longrightarrow L$ (complementar) satisfaz, para $a, b \in L$:*

*i) $a'' = a$*

*ii) $a \leq b \Leftrightarrow a' \geq b'$*

**Demonstração:**

i) Sabemos que $a' \vee a'' = 1$ e $a' \wedge a'' = 0$. Por outro lado, $a = a \wedge 1$ e $a = a \vee 0$, então, $a = a \wedge 1 = a \wedge (a' \vee a'') = (a \wedge a') \vee (a \wedge a'') = 0 \vee (a \wedge a'') = a \wedge a''$, donde $a \leq a''$.

Analogamente, prova-se que $a'' \leq a$, portanto, $a = a''$.

ii) $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow (a \wedge b)' = a' \Leftrightarrow a' \vee b' = a' \Leftrightarrow a' \geq b'$. $\square$

Uma função $' : L \longrightarrow L$, onde $L$ é um reticulado, que satisfaz as propriedades i e ii da proposição anterior, será chamada de *involução reversa* (forma abreviada de "involução com reversão de ordem"). É conseqüência da propriedade i, que toda involução reversa é uma bijeção e coincide com sua inversa.

Um exemplo importante de involução reversa acontece naturalmente no intervalo real $L = [0, 1]$. Ela é definida por $x' = 1 - x$ para todo $x \in L$.

O significado algébrico de uma involução reversa é o seguinte: se $L$ é um reticulado cuja ordem é $\leq$, então, definindo o *dual de* $L$ como o próprio $L$ com a ordem $a \leq^d b \Leftrightarrow b \leq a$, temos que $(L, \leq^d)$ é também um reticulado com supremo e ínfimo dados por:

$$a \vee^d b = a \wedge b \text{ e } a \wedge^d b = a \vee b.$$

Neste caso, uma involução reversa $' : L \longrightarrow L$ é um isomorfismo de reticulados $' : (L, \leq) \longrightarrow (L, \leq^d)$, ou seja, é uma bijeção que satisfaz:

$$(a \vee b)' = a' \vee^d b' \text{ e } (a \wedge b)' = a' \wedge^d b'.$$

Vale a pena comentar que essas relações são válidas também para um número finito de termos, isto é,

$$(a_1 \vee ... \vee a_n)' = a_1' \vee^d ... \vee^d a_n'$$

e

$$(a_1 \wedge ... \wedge a_n)' = a_1' \wedge^d ... \wedge^d a_n',$$

não estando garantidas sua aplicação a um número infinito de termos.

As involuções reversas serão usadas exaustivamente no Capítulo 7.

$L$ denotará sempre um reticulado distributivo e completo: $< L, \leq, \vee, \wedge >$, com $1 = supL$ e $0 = infL$.

As álgebras de Boole da forma $\mathcal{P}(X)$ são reticulados distributivos completos com $1 = X$ e $0 = \emptyset$.

Todo conjunto totalmente ordenado é um reticulado, onde:

$$x \vee y = max\{x, y\}$$
$$x \wedge y = min\{x, y\}.$$

Mais do que isto, é um reticulado distributivo.

Um conjunto totalmente ordenado nem sempre é completo como reticulado.

Por exemplo, $(\mathbb{N}, \leq)$ não é sup-completo, embora, seja inf-completo (devido à propriedade de Boa Ordem). $(\mathbb{N}, \leq)$ pode ser completado da seguinte maneira: $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$, onde define-se $x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Neste caso, se $A$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, temos que $supA = \infty$.

$$0 \xmapsto[x<\infty]{\mathbb{N}} \infty$$

Num reticulado, $\{\leq\}$ e $\{\vee, \wedge\}$ são interdefiníveis no seguinte sentido:
i) Dado $\leq$, define-se $x \vee y = sup\{x, y\}$, $\quad x \wedge y = inf\{x, y\}$ (o supremo e o ínfimo a respeito da ordem);
ii) Dados $\vee$, $\wedge$, define-se $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

## 2.2 Subconjuntos *Fuzzy* de um Conjunto

Seja $L$ um reticulado (distributivo e completo) e $X$ um conjunto qualquer; um *subconjunto fuzzy de $X$ com valores em $L$*, ou um *$L$-subconjunto de $X$* é uma função $A : X \longrightarrow L$.

Se $imA \subseteq \{0, 1\}$, dizemos que $A$ é um *subconjunto nítido ou clássico de $X$*. Nesse caso, podemos identificar $A$ com o subconjunto $\{x \in X \mid A(x) = 1\}$. Em particular, a função $X : X \longrightarrow L$ dada por $X(x) = 1\ \forall x$, e a função $\emptyset : X \longrightarrow L$ dada por $\emptyset(x) = 0\ \forall x$, podem ser identificados com os subconjuntos $X$ e $\emptyset$.

Definimos o *conjunto generalizado de partes de $X$* como $\mathcal{P}_L(X) = X^L = \{A \mid A : X \longrightarrow L\}$.

**Proposição 2.2.1** *$\mathcal{P}_L(X)$ é um reticulado distributivo e completo a respeito das seguintes operações:*

*Para $A, B \in \mathcal{P}_L(X)$,*

*i) Ordem:*

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X : A(x) \leq B(x)$

*ii) União:*

$A \cup B : X \longrightarrow L$

$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$

*iii) Interseção:*

$A \cap B : X \longrightarrow L$

$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$

*iv) Elementos máximo e mínimo:*

$1 = X$

$0 = \emptyset.$

**Demonstração:**

i) Distributividade de $\mathcal{P}_L(X)$:

$(A \cup (B \cap C))(x) = A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) = (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))(x)$.

ii) Analogamente, mostra-se que: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

ii) Completude de $\mathcal{P}_L(X)$:

Se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}_L(X)$, define-se,

$\bigcup_{i \in I} A_i : X \longrightarrow L$, mediante $(\bigcup_{i \in I} A_i)(x) = \bigvee_{i \in I} A_i(x)$ e

$\bigcap_{i \in I} A_i : X \longrightarrow L$, mediante $(\bigcap_{i \in I} A_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} A_i(x)$.

Prova-se facilmente que $sup\{A_i\}_{i \in I} = \bigcup_{i \in I} A_i$ e que $inf\{A_i\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

$\square$

Pode-se provar facilmente que:

1) Se $L$ é uma álgebra de Boole, então, $\mathcal{P}_L(X)$ também é uma álgebra de Boole.

Basta definir o *complementar* $A'$ de um $L$-subconjunto $A$ de $X$ mediante $A'(x) = A(x)'$, para todo $x \in X$.

2) Se $L$ tiver involução reversa, então, $\mathcal{P}_L(X)$ também terá.

Com efeito, se $c : L \longrightarrow L$ é uma involução reversa em $L$, definindo $C : \mathcal{P}_L(X) \longrightarrow \mathcal{P}_L(X)$ por $C(A)(x) = c(A(x))$ para todo $x \in X$, temos que $C$ é uma involução reversa em $\mathcal{P}_L(X)$.

Terminaremos esta seção definindo o suporte conjuntista de um $L$-subconjunto.

Seja $X$ um conjunto e $A \in \mathcal{P}_L(X)$, definimos o *suporte conjuntista de* $A$ como

$$supp(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\} = \{x \in X \mid A(x) \neq 0\}.$$

## 2.3 Pontos *Fuzzy*

No caso clássico, onde $L = \{0, 1\}$, temos que $\mathcal{P}_L(X) = \mathcal{P}(X)$. Nesse caso, os elementos $a \in X$, podem ser vistos como os elementos unitários $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$. Então, se quisermos descobrir quais são os elementos *fuzzy* ou pontos *fuzzy* de $X$, devemos caracterizar os elementos unitários de $\mathcal{P}(X)$ em termos de uma propriedade reticular e averiguar quais são os correspondentes de $\mathcal{P}_L(X)$.

**Proposição 2.3.1** *Seja $X$ um conjunto e $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \neq \emptyset$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

*a) Existe $a \in X$ tal que $A = \{a\}$;*

*b) $A \subseteq (B \cup C) \Rightarrow A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$*

**Demonstração:**

$(a \Rightarrow b)$ é trivial. Se $A = \{a\}$, então, $A \subseteq B \cup C \Rightarrow \{a\} \subseteq B \cup C \Rightarrow a \in B \cup C \Rightarrow a \in B$ ou $a \in C \Rightarrow \{a\} \subseteq B$ ou $\{a\} \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$.

$(b \Rightarrow a)$ Suponhamos $A$ não unitário de $X$, então, existem $a, b \in A$ com $a \neq b$. Tomemos $B = A \backslash \{a\}$ e $C = A \backslash \{b\}$. Então, de fato, $A \subseteq B \cup C$, mas $A \nsubseteq B$ e $A \nsubseteq C$. Isso contradiz b. $\square$

**Definição 2.3.1** *Seja $L$ um reticulado e $a \in L$ com $a \neq 0$. $a$ será dito um elemento co-primo de $L$ se satisfizer: $a \leq b \vee c \Rightarrow a \leq b$ ou $a \leq c$. $a \neq 1$ é dito elemento primo se $b \wedge c \leq a \Rightarrow b \leq a$ ou $c \leq a$.*

Os elementos co-primos de $\mathcal{P}(X)$ são exatamente os subconjuntos unitários de $X$. Isso sugere definir como elementos *fuzzy* de $X$ os elementos co-primos de $\mathcal{P}_L(X)$, que chamaremos de *pontos fuzzy de $X$*. Num reticulado totalmente ordenado, todo elemento $a \neq 0$ é co-primo e todo elemento $a \neq 1$ é primo.

Temos como exemplo de elementos primos num reticulado os seguintes:

1) Seja $R$ um anel (comutativo e com unidade) e $L$ a coleção de todos os ideais de $R$. $L$ é um reticulado (completo, porém, não distributivo) a respeito das seguintes operações:

Para $A, B \in L$

$A \wedge B = A \cap B$

$A \vee B = \langle A \cup B \rangle$, ideal gerado pela união

$1_L = R$

$0_L = \{0\}$.

Prova-se que $A \in L$ é um elemento primo do reticulado se, e somente se, $A$ é um ideal primo (próprio) de $R$. De fato, a condição de um ideal $A$ ser primo equivale a: para todo $I$ e $J$ ideais, $I \cap J \subseteq A \Rightarrow I \subseteq A$ ou $J \subseteq A$.

2)$(\mathbb{N}, |)$ onde,

$a \mid b \Leftrightarrow a$ divide $b$

$a \vee b = mmc\{a, b\}$

$a \wedge b = mdc\{a, b\}$

$1_L = 0_{\mathbb{N}}$

$0_L = 1_{\mathbb{N}}$.

Prova-se que os elementos primos do reticulado (distributivo, porém, não completo) $(\mathbb{N}, |)$ são os números primos. Com efeito, a condição $mdc\{a, b\} \mid p \Rightarrow a \mid p$ ou $b \mid p$ caracteriza o fato de $p$ ser um número primo.

Pode-se provar que os elementos primos de $\mathcal{P}(X)$ são os subconjuntos da forma $X \setminus \{a\}$ com $a \in X$.

**Definição 2.3.2** *Seja $L$ um reticulado e $X$ um conjunto $\neq \emptyset$. Para $x \in X$ e $a \in L$, definimos o L-subconjunto: $x_a : X \longrightarrow L$ por*

$$x_a(z) = \begin{cases} a, & z = x \\ 0, & z \neq x. \end{cases}$$

**Proposição 2.3.2** *Seja $A \in \mathcal{P}_L(X)$, então, $A$ é um elemento co-primo $\Leftrightarrow$ existe $x \in X$ e $p \in L$ com $p$ co-primo, tal que $A = x_p$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Seja $A$ co-primo de $\mathcal{P}_L(X)$. Então, $A \neq \emptyset$ e se $A \subseteq B \cup C$, então, $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$.

Caso 1) Suponhamos $A \neq x_p$, $x$ e $p$ quaisquer. Neste caso, existem $a, b \in L \setminus \{0\}$ com $a \neq b$ e $z_1, z_2 \in X$ tal que $A(z_1) = a$ e $A(z_2) = b$.

Sejam $B$ e $C$ tais que: $B(x) = A(x)$, para $x \neq z_1$ e $B(z_1) = 0$; $C(x) = A(x)$ para $x \neq z_2$ e $C(z_2) = 0$. Assim, temos que $A \subseteq B \cup C$, mas, $A(z_1) > B(z_1)$, logo, $A \not\subseteq B$. E ainda $A(z_2) > C(z_2)$, logo, $A \not\subseteq C$. Isso contradiz a hipótese.

Caso 2) Suponhamos $A = x_p$, onde $x \in L$ e $p \in L$ com $p \neq 0$, $p$ não co-primo, isto é,

$$A(z) = \begin{cases} p, & z = x \\ 0, & z \neq x. \end{cases}$$

Como $p$ não é co-primo, existem $b$ e $c$, tais que $p \leq b \vee c$, mas $p \nleq b$ e $p \nleq c$. Sejam $B = x_b$ e $C = x_c$. Assim, $A \subseteq B \cup C$, mas $A(x) = p \nleq b = B(x)$, logo, $A \nsubseteq B$ e $A(x) = p \nleq c = C(x)$, logo, $A \nsubseteq C$. Portanto, $A$ não é co-primo, o que contradiz a hipótese.

($\Leftarrow$) Seja $A = x_p$ onde $p$ é co-primo e suponhamos $A \subseteq B \cup C$, então, $\forall y : A(y) \leq (B \cup C)(y) = B(y) \vee C(y)$, em particular, $A(x) \leq B(x) \vee C(x)$, isto é, $p \leq B(x) \vee C(x)$. Como $p$ é co-primo, $p \leq B(x)$ ou $p \leq C(x)$. Assim, temos que, $\forall z$, $A(z) \leq B(z)$ ou $\forall x$, $A(z) \leq C(z)$, isto é, $A \subseteq B$ ou $A \subseteq C$. Portanto, $A$ é co-primo. $\square$

No caso clássico, para $L = \{0, 1\}$, os co-primos de $L$ reduzem-se a 1. Nesse caso, os co-primos de $\mathcal{P}(X)$ são da forma $x_1 : X \longrightarrow \{0, 1\}$ dados por

$$x_1(z) = \begin{cases} 1, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$$

que é a função característica do subconjunto unitário $\{x\}$.

Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado, todo elemento $a \in L \setminus \{0\}$ é co-primo em $L$, portanto, os elementos co-primos de $\mathcal{P}_L(X)$ são todos os $L$-subconjuntos da forma $x_a$ com $x \in X$ e $a \in L \setminus \{0\}$.

**Definição 2.3.3** *a) Para o desenvolvimento da álgebra fuzzy, nós adotaremos como ponto fuzzy de $X$ com valores em $L$, ou $L$-ponto de $X$, todo $L$-subconjunto da forma $x_a$ com $x \in X$ e $a \in L$, $a \neq 0$, independentemente de $a$ ser co-primo ou não.*

*b) Se $x_a$ é um L-ponto de $X$ e $A$ é um L-subconjunto de $X$, então, diremos que $x_a$ pertence a $A$, e escreveremos $x_a \in A$, se $x_a \subseteq A$ (como L-subconjuntos), isto é, $\forall z \in X$: $x_a(z) \leq A(z)$, o que se reduz a $a \leq A(x)$.*

**Definição 2.3.4** *Para $A \in \mathcal{P}_L(X)$ e $t \in L$, definimos o subconjunto de $X$ de nível $t$ como $A_t = \{x \in X \mid A(x) \geq t\}$.*

Observa-se que $A_t$ é um subconjunto clássico de $X$. Por exemplo, $A_0 = \{x \in X \mid A(x) \geq 0\} = X$ e $A_1 = \{x \in X \mid A(x) \geq 1\} = \{x \in X \mid A(x) = 1\}$ = parte nítida de $A$. Além disso, é fácil ver que para todo $t \in L$, $(\bigcap A_i)_t = \bigcap (A_i)_t$, o que não acontece necessariamente com a união.

**Proposição 2.3.3** *Para todo $A, B \in \mathcal{P}_L(X)$, $A = B \Leftrightarrow \forall t \in L,\ A_t = B_t$.*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$) É óbvio.
($\Leftarrow$) Suponhamos $A \neq B$, isto é, existe $z \in X$ tal que $A(z) \neq B(z)$, logo, pela antisimetria da ordem, $A(z) \not\leq B(z)$ ou $B(z) \not\leq A(z)$. Suponhamos $A(z) \not\leq B(z)$ e tomemos $t = A(z)$, então, temos que $z \in A_t$ mas, $z \notin B_t$, uma contradição com a hipótese. $\square$

É conveniente generalizar a definição 2.3.2 no seguinte sentido:

**Definição 2.3.5** *Se $Y \subseteq X$ e $a \in L$, define-se os L-subconjuntos*

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases} \quad e \quad a^Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ a, & x \notin Y. \end{cases}$$

Em particular, se $Y = \{x\}$, então, $a_Y = x_a$. Além disso, para todo $Y \subseteq X$, $1_Y$ (que não deve ser confundido com o elemento máximo $1_L$ de um reticulado $L$) é a função característica $\lambda_Y$ de $Y$, e para todo $a \in L$, $a_X$ é a função constante $a$ sobre $X$. Aliás, se $a, b \in L$ com $a > b$ e $Y \subseteq X$, então, o $L$-subconjunto $A(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ b, & x \notin Y \end{cases}$ pode ser expresso como $A = a_Y \cup b_X$; em particular, $a^Y = 1_Y \cup a_X$.

**Proposição 2.3.4** *a) Para todo $A \in \mathcal{P}_L(X)$, $A = \bigcup_{a \in L} a_{A_a}$.*
*b) Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado e satisfaz a condição: "Para todo $a \in L$ existe $a^+ \in L$ tal que $a < a^+$ e se $a \leq b \leq a^+$, então, $b = a$ ou $b = a^+$", então, para todo $A \in \mathcal{P}_L(X), A = \bigcap_{a \in L} a^{A_{a^+}}$.*

**Demonstração:**

a) Provaremos que para todo $x \in X, \bigvee_{a \in L} a_{A_a}(x) = A(x)$. Seja $x \in X$. Observe que $a_{A_a}(x) = \begin{cases} a, & x \in A_a \\ 0, & x \notin A_a \end{cases} = \begin{cases} a, & A(x) \geq a \\ 0, & A(x) \ngeq a \end{cases} \leq A(x)$.

Por outro lado, tomando $a = A(x)$, temos que $a_{A_a}(x) = a = A(x)$, pois, $A(x) \geq a$. Portanto, $\bigvee_{a \in L} a_{A_a}(x) = A(x)$.

b) Provaremos que para todo $x \in X, \bigwedge_{a \in L} a^{A_{a^+}}(x) = A(x)$.

Seja $x \in X$, observa-se que $a^{A_{a^+}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_{a^+} \\ a, & x \notin A_{a^+} \end{cases} = \begin{cases} 1, & A(x) \geq a^+ \\ a, & A(x) \ngeq a^+ \end{cases}$

$= \begin{cases} 1, & A(x) \geq a^+ \\ a, & A(x) < a^+ \end{cases} = \begin{cases} 1, & A(x) \geq a^+ \\ a, & A(x) \leq a \end{cases} \geq A(x)$.

Por outro lado, tomando $a = A(x)$, temos que $a^{A_{a^+}}(x) = a = A(x)$, pois, $A(x) \leq a$. $\square$

Um exemplo de reticulado que satisfaz a condição dada na parte b da proposição anterior é $L = \mathbb{N}$. Por outro lado, o intervalo real $[0, 1]$ não satisfaz essa propriedade.

Uma rediscussão da Proposição 2.3.4 (b) será necessária no estudo da decomposição primária de ideais *fuzzy* que faremos no Capítulo 6.

Finalizaremos esta seção comentando uma outra definição de ponto *fuzzy* usada, por exemplo, na Topologia *Fuzzy* que é a seguinte: Se $X$ é um espaço e $L$ é um reticulado, define-se $L$-ponto de $X$, todo $L$-subconjunto de $X$ da forma $x_p : X \longrightarrow L$ (a notação usada é a mesma), onde $x \in X$ e $p \in L$, $p$ primo, dado por $x_p(y) = \begin{cases} p, & \text{se } y = x \\ 1, & \text{se } y \neq x \end{cases}$, isto é, na nossa notação, $x_p = p^{X \setminus \{x\}}$ segundo a Definição 2.3.5.

Neste caso, a pertinência de um $L$-ponto $x_p$ a um $L$-subconjunto $A$ de $X$ é dada por $x_p \in A \Leftrightarrow A(x) \not\leq p$ ($\Leftrightarrow A \not\subseteq x_p$).

Esta definição, no caso clássico, corresponde ao seguinte: com $L = \{0, 1\}$, o único elemento primo de $L$ é 0, logo, $x_p = x_0$ corresponde ao subconjunto $X \setminus \{x\}$ que não é um ponto clássico.

Se o reticulado $L$ tiver uma involução reversa $c : L \longrightarrow L$, então, dado que $c$ é um isomorfismo de $L$ com seu dual, teremos que um elemento $p \in L$ será primo para a ordem $\leq$ de $L$ se e somente se $c(p)$ é co-primo para a ordem dual $\leq^d$ de $L$. Isso significará que os elementos primos e co-primos de $\mathcal{P}_L(X)$ poderão ser trocados uns pelos outros para certos efeitos, principalmente aqueles que não envolvam supremos ou ínfimos de coleções infinitas, pois, uma involução reversa pode não preservá-los.

## 2.4 Imagem Direta e Imagem Inversa de $L$-Subconjuntos

Sejam $X$ e $Y$ conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

Se $A \in \mathcal{P}_L(X)$, que forma deve ter $f[A] \in \mathcal{P}_L(Y)$?

No caso clássico, $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$. Como expressar, então, no caso clássico, $f[A]$ como função característica $f[A] : Y \longrightarrow \{0, 1\}$?

Devemos definir $f[A](y)$ para todo $y \in Y$.

Caso 1) $y \in f[A]$, isto é, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, existe $x \in X$ com $A(x) = 1$ e $x \in f^{-1}(y)$. Neste caso, $f[A](y) = 1 = A(x)$.

Caso 2) $y \in imf \setminus f[A]$, isto é, existe $x \in X$ com $x \notin A$ e $f(x) = y$, ou seja, $x \in X$ com $A(x) = 0$ e $x \in f^{-1}(y)$. Neste caso, $f[A](y) = 0 = A(x)$.

Caso 3) $y \notin imf$, logo, não existe $x \in X$ com $f(x) = y$, ou seja, não existe $x \in X$ com $x \in f^{-1}(y)$. Neste caso, $f[A](y) = 0$.

Nos casos 1 e 2, onde $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, podem existir vários $x \in f^{-1}(y)$, no entanto, $f[A](y)$ coincide com $A(x)$. Daí, é sugerida a seguinte definição:

$$f[A](y) = \begin{cases} A(x) & , \quad x \in f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Como generalizar isso ao caso *fuzzy*?

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função e seja $A \in \mathcal{P}_L(X)$, isto é, $A : X \longrightarrow L$.

Devemos definir $f[A] \in \mathcal{P}_L(Y)$, isto é, $f[A] : Y \longrightarrow L$.

Como $Y$ e $f$ são clássicos, dado $y \in Y$, temos dois casos: $y \in imf$ ou $y \notin imf$. O problema é que, para $y$ dado, com $y \in imf$, podem existir vários $x$ com $x \in f^{-1}(y)$ e com $A(x)$ diferentes, que no caso clássico não se dá. Definimos:

$$f[A](y) = \begin{cases} \bigvee\{A(x) \mid \ x \in f^{-1}(y)\} & , \quad \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Observa-se que a definição anterior pode ser abreviada por $f[A](y) = \bigvee\{A(x) \mid x \in f^{-1}(y)\}$, pois em todo reticulado $\bigvee \emptyset = 0$.

Uma das propriedades da imagem direta que usaremos, cuja prova é trivial, é a seguinte: $A \subseteq B \Rightarrow f[A] \subseteq f[B]$.

Também é possível definir, para $L$-subconjuntos $B$ de $Y$, o conceito de *imagem inversa* através de uma função $f : X \longrightarrow Y$.

Vejamos: Como $B$ é uma função $B : Y \longrightarrow L$ e $f : X \longrightarrow Y$, podemos definir a composta $B \circ f : X \longrightarrow L$ que resulta ser um $L$-subconjunto de $X$. Esse $L$-subconjuto será adotado como definição da imagem inversa de $B$ através de $f$, isto é: $\forall x \in X,\ f^{-1}[B](x) = B(f(x))$.

# Capítulo 3

# Álgebra *Fuzzy*

## 3.1 Subestruturas Clássicas como Funções Características

Dada uma estrutura algébrica $E$ (clássica), com $''*''$ uma operação binária, as subestruturas de $E$ são certos subconjuntos $A$ de $E$ que são fechados para $''*''$, isto é, $x, y \in A \Rightarrow x*y \in A$, ou $A*A \subseteq A$, onde $A*A = \{x*y \mid x, y \in A\}$.

Em geral, define-se $A * B = \{x * y \mid x \in A,\ y \in B\} = \{x * y \mid (x, y) \in A \times B\}$.

Como expressar $A * B$ como função característica?

Consideramos $''*''$ como uma função

$$\begin{array}{rccc} f_* : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y. \end{array}$$

Neste caso, para $A, B \subseteq E,\ A * B = \{x * y \mid (x, y) \in A \times B\} = \{f_*(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\} = f_*[A \times B]$.

A discussão anterior permite generalizar a noção de "produto" de dois $L$-subconjuntos de $E$ para o caso *fuzzy*: Se $(E, *)$ é uma estrutura clássica e $A, B \in \mathcal{P}_L(E)$, então, define-se $A * B \in \mathcal{P}_L(E)$ da seguinte maneira: $A * B : E \longrightarrow L$, $A * B = f_*[A \times B]$, isto é, $(A * B)(z) = f_*[A \times B](z) = \bigvee\{(A \times B)(x, y) \mid (x, y) \in f_*^{-1}(z)\} = \bigvee\{(A \times B)(x, y) \mid f_*(x, y) = z\} = \bigvee\{(A \times B)(x, y) \mid x * y = z\}$. Finalmente, é fácil ver que $A \times B$, como função característica, pode ser expresso como: $(A \times B)(z) = A(x) \wedge B(y)$ para $z = (x, y)$.

**Definição 3.1.1** *(Caso Fuzzy)* $(A * B)(z) = \bigvee\{A(x) \wedge B(y) \mid x * y = z\}$.

## 3.2 Subestruturas *Fuzzy*

Seja $(E, *)$ uma estrutura com $*$ uma operação binária em $E$ e $A \in \mathcal{P}_L(E)$. Dizemos que $A$ é *L-subestrutura de E* se $A * A \subseteq A$.

**Proposição 3.2.1** *Se $x_p$ e $y_q$ são L-pontos de E, então, $x_p * y_q = (x * y)_{p \wedge q}$.*

**Demonstração:**

Temos que, $(x_p * y_q)(z) = \bigvee\{x_p(a) \wedge y_q(b) \mid a * b = z\}$. Logo,

$$(x_p * y_q)(z) = \begin{cases} p \wedge q, & \text{se } x * y = z \\ 0, & \text{se } x * y \neq z \end{cases} = (x * y)_{p \wedge q}(z).$$

Portanto, $x_p * y_q = (x * y)_{p \wedge q}$. $\square$

**Proposição 3.2.2** *Se $A \in \mathcal{P}_L(E)$, são equivalentes:*

*i)* $A * A \subseteq A$

*ii)* $\forall x, y \in E, \forall p, q \in L: \; x_p, \; y_q \in A \Rightarrow x_p * y_q \in A$

*iii)* $\forall x, y \in E: \; A(x * y) \geq A(x) \wedge A(y)$

**Demonstração:**

(i$\Rightarrow$ii) $x_p \in A, \; y_q \in A \Rightarrow p \leq A(x)$ e $q \leq A(y) \Rightarrow p \wedge q \leq A(x) \wedge A(y) \leq$

$(A * A)(x * y) \leq A(x * y) \Rightarrow (x * y)_{p \wedge q} \in A \Rightarrow x_p * y_q \in A$.

(ii⇒i) Devemos provar que $\forall z \in E$, $(A*A)(z) \leq A(z)$, isto é, $\bigvee\{A(x) \wedge A(y) \mid x * y = z\} \leq A(z)$. Para tanto, basta provar que $\forall x, y \in E$ com $x * y = z$, temos $A(x) \wedge A(y) \leq A(z)$.

Sejam $x, y \in E$ com $x*y = z$, e consideremos $p = A(x)$ e $q = A(y)$, então, obviamente, $x_p \in A$ e $y_q \in A$, logo, por (ii), $x_p * y_q \in A$, isto é, $(x*y)_{p \wedge q} \in A$, ou seja, $p \wedge q \leq A(x * y)$, donde, $A(x) \wedge A(y) \leq A(z)$.

(i⇒iii) Suponhamos que $A * A \subseteq A$, isto é, $(A * A)(z) \leq A(z)\ \forall z$. Sejam $x, y \in E$ e seja $w = x * y$. Assim, $(A * A)(w) = \bigvee\{A(x) \wedge A(y) \mid x * y = w\} \leq A(w)$. Então, $A(x) \wedge A(y) \leq A(w) = A(x * y)$.

(iii⇒i) Seja $z \in E$.

Caso 1) Se não existem $x$ e $y$ com $x * y = z$, então, $(A * A)(z) = \bigvee \emptyset = 0 \leq A(z)$.

Caso 2) Se existe um par $(x, y) \in E \times E$ tal que $x * y = z$, então, temos que, para qualquer um desses pares, $A(x) \wedge A(y) \leq A(x * y)$. Daí, $(A * A)(z) = \bigvee\{A(x) \wedge A(y) \mid x * y = z\} \leq A(x * y) = A(z)$. Portanto, $A * A \subseteq A$. $\square$

Podemos adaptar a construção anterior para operações unárias definidas em $E$. Neste caso, se $f : E \longrightarrow E$ é uma operação unária em $E$ e $x_p$ é um $L$-ponto de $E$, prova-se facilmente que a imagem direta $f[x_p]$ é também um $L$-ponto de $E$ dado por $f[x_p] = (f(x))_p$ que abreviaremos por $f(x)_p$.

**Proposição 3.2.3** *Seja $E$ um conjunto, $A \in \mathcal{P}_L(E)$ e $f : E \longrightarrow E$ (operação unária), então, são equivalentes:*

*i)* $f[A] \subseteq A$

*ii)* $\forall x \in E, \forall p \in L :\ x_p \in A \Rightarrow f(x_p) \in A$, *onde* $f(x_p) = f[x_p]$

*iii)* $\forall x \in E : A(f(x)) \geq A(x)$.

**Demonstração:**

(i⇒ii) Suponhamos $f[A] \subseteq A$ e sejam $x \in E, p \in L$ tais que $x_p \in A$, isto é, $x_p \subseteq A$, daí, $f[x_p] \subseteq f[A]$, logo, $f[x_p] \subseteq A$, ou seja, $f(x_p) \in A$.

(ii⇒i) Temos que $f[A](z) = \bigvee\{A(y) \mid y \in f^{-1}(z)\}$. Se $f^{-1}(z) = \emptyset$, então, $f[A](z) = 0 \leq A(z)$. Se $f^{-1}(z) \neq \emptyset$, então, $\forall y \in f^{-1}(z)$, chamemos de $p_y = A(y)$, então, $y_{p_y} \in A$. Portanto, por (ii), $f(y_{p_y}) \in A$, isto é, $f(y)_{p_y} \in A$, ou seja, $p_y \leq A(f(y)) = A(z)$. Daí, $f[A](z) = \bigvee\{A(y) \mid y \in f^{-1}(z)\} = \bigvee\{p_y \mid y \in f^{-1}(z)\} \leq A(z)$.

(i⇒iii) Suponhamos $f[A] \subseteq A$ e seja $x \in E$, então, $A(f(x)) \geq f[A](f(x)) = \bigvee\{A(y) \mid y \in f^{-1}(f(x))\} \geq A(x)$, pois, $y = x \in f^{-1}(f(x))$.

(iii⇒i) Seja $z \in E$.

Caso 1) Se $z \notin imf$, então, $f[A](z) = 0 \leq A(z)$.

Caso 2) Se $z \in imf$, então, existe $x \in E$ tal que $f(x) = z$. Logo, pela hipótese, para todo $x \in f^{-1}(z)$, $A(z) = A(f(x)) \geq A(x)$, portanto, $f[A](z) = \bigvee\{A(x) \mid x \in f^{-1}(z)\} \leq A(z)$. □

**Corolário 3.2.3.1** *Se $f$ for uma involução, isto é, $f(f(x)) = x$, ou $f \circ f = id_E$, então, $\forall x \in E$, $A(f(x)) = A(x)$.*

**Demonstração:**

Já temos, pela proposição anterior, que $A(f(x)) \geq A(x)$. Além disso, temos que, $A(x) = A(f(f(x))) \geq A(f(x))$. Logo, $A(f(x)) = A(x)$. □

São casos particulares de operações unárias, por exemplo, a operação de oposto num anel e a operação de inverso num corpo (ou, em geral, num grupo). Nestes casos, como as operações mencionadas são involuções, temos que, se $A$ é $L$-subconjunto de $E$, o fato de $A$ ser fechado para essas operações significa que para todo $x \in E$, $A(-x) = A(x)$ ou $A(x^{-1}) = A(x)$, respectivamente.

Outras operações unárias aparecem em espaços vetoriais ou em módulos: Se $E$ é um tal espaço (ou módulo) sobre um corpo (ou anel) $R$, para cada $a \in R$, temos a operação unária $f_a : E \longrightarrow E$ dada por $f_a(x) = ax$. Neste caso, o fato de um $L$-subconjunto $A$ ser fechado para o produto por escalares de $R$ pode ser expresso como: $\forall x \in E, \forall a \in R: \; A(ax) \geq A(x)$.

Finalmente, é possível obter uma generalização da Proposição 3.2.2 para operações $n$-árias definidas em $E$.

Se $E$ está munido de uma operação $n$-ária $f(x_1, ..., x_n)$, então, são equivalentes:

a) $f(A, ..., A) \subseteq A$, onde $\forall z \in E: \; f(A, ..., A)(z) = \bigvee\{A(x_1) \wedge ... \wedge A(x_n) \mid f(x_1, ..., x_n) = z\}$

b) $\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \forall p_1, \ldots, p_n \in L: \; (x_1)_{p_1}, ..., (x_n)_{p_n} \in A \Rightarrow f((x_1)_{p_1}, ..., (x_n)_{p_n}) \in A$

c) $\forall x_1, \ldots, x_n \in E: \; A(f(x_1, ..., x_n)) \geq A(x_1) \wedge ... \wedge A(x_n)$.

Prova-se facilmente que $f((x_1)_{p_1}, \ldots, (x_n)_{p_n}) = f(x_1, \ldots, x_n)_{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n}$.

## 3.3 $L$-Subanéis e $L$-Ideais de um Anel

**Definição 3.3.1** *Seja $R$ um anel (comutativo ou não) e $A$ um $L$-subconjunto de $R$. Diremos que $A$ é um $L$-subanel de $R$ se:*

*i)* $A + A \subseteq A$

*ii)* $-A \subseteq A$,

*iii)* $A \cdot A \subseteq A$

*sendo "$+$", "$-$" e "$\cdot$" as operações de adição, oposto e multiplicação do anel $R$.*

Formas equivalentes das condições dadas acima são:

i) $\forall x, y \in R : A(x + y) \geq A(x) \wedge A(y)$

ii) $\forall x \in R : A(-x) \geq A(x)$

iii) $\forall x, y \in R : A(x \cdot y) \geq A(x) \wedge A(y)$.

Como $-(-x) = x$, temos que $A(x) = A(-(-x)) \geq A(-x)$. Logo, podemos substituir (ii) por $\forall x \in R : A(-x) = A(x)$.

**Definição 3.3.2** *Diremos que $A$ é um $L$-ideal a esquerda de $R$, se:*

*i)* $A + A \subseteq A$

*ii)* $-A \subseteq A$

*iii)* $R \cdot A \subseteq A$.

**Proposição 3.3.1** $R \cdot A \subseteq A \Leftrightarrow \forall x, y \in R,\ A(x \cdot y) \geq A(y)$

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Temos que, $A(z) \geq (R \cdot A)(z) = \bigvee\{R(x) \wedge A(y) \mid x \cdot y = z\} = \bigvee\{A(y) \mid x \cdot y = z\}$, pois $R(x) = 1$. Logo, $A(z) \geq A(y)$, onde $z = x \cdot y$. Portanto, $A(x \cdot y) \geq A(y)$.

($\Leftarrow$) $(R \cdot A)(z) = \bigvee\{R(x) \wedge A(y) \mid x \cdot y = z\} = \bigvee\{A(y) \mid x \cdot y = z\} \leq \bigvee\{A(x \cdot y) \mid x \cdot y = z\} = A(z)$. Logo, $(R \cdot A) \subseteq A$. $\square$

Podemos substituir, então, (iii) da Definição 3.3.2 por:

iii') $\forall x, y \in R,\ A(x \cdot y) \geq A(y)$.

Podemos observar ainda, o seguinte: Se para cada $x \in R$, definimos a função $f_x : R \longrightarrow R$ dada por $f_x(y) = x \cdot y$, então, a condição $A(x \cdot y) \geq A(y)$ equivale a $A(f_x(y)) \geq A(y)$, o qual ainda equivale a $f_x[A] \subseteq A$. Portanto, (iii') pode ser substituída por:

iii") $\forall x \in R : f_x[A] \subseteq A$.

Analogamente, define-se $L$-ideal a direita de $R$, tendo como condição (iii) $A \cdot R \subseteq A$, isto é, $\forall x, y \in R, A(x \cdot y) \geq A(x)$.

**Definição 3.3.3** *Se $R$ for comutativo, $A$ é um $L$-ideal de $R$ se $\forall x, y \in R$:*
*i) $A(x+y) \geq A(x) \wedge A(y)$*
*ii) $A(-x) = A(x)$*
*iii) $A(x \cdot y) \geq A(x) \vee A(y)$, (isto é, $A(x \cdot y) \geq A(x)$ e $A(x \cdot y) \geq A(y)$).*

Pode ser demonstrado facilmente que as condições (i) e (ii) da definição anterior equivalem a: $\forall x, y \in R, A(x-y) \geq A(x) \wedge A(y)$.

Exemplos triviais de $L$-ideais são as funções constantes $f_a : R \longrightarrow L$, para todo $a \in L$, onde $f_a(x) = a$. Observa-se que $f_a = a_R$ na notação da Definição 2.3.5.

Por outro lado, prova-se facilmente que se $J$ é um ideal (clássico) de $R$, então, a função característica $1_J$ $(= \lambda_J)$ de $J$ é um $L$-ideal de $R$.

É fácil ver que se $R$ e $S$ são anéis com $R \subseteq S$ e $A$ é um $L$-ideal de $S$, então, $A|_R$ é um $L$-ideal de $R$.

**Proposição 3.3.2** *Sejam $R$ um anel com unidade e $I$ um $L$-ideal a esquerda de $R$. Então:*
*i) $\forall x \in R : I(1) \leq I(x) \leq I(0)$*
*ii) Se $R$ é um corpo, então,* $I(x) = \begin{cases} I(0), & \textit{se } x = 0 \\ I(1), & \textit{se } x \neq 0 \end{cases}$

**Demonstração:**
i) Como $I$ é um $L$-ideal a esquerda, temos que $\forall x, y \in R,\ I(y \cdot x) \geq I(x)$. Assim, $I(x \cdot 1) \geq I(1)$, isto é, $I(x) \geq I(1)$, e também, $I(0 \cdot x) \geq I(x)$, isto é, $I(0) \geq I(x)$.
ii) Se $R$ é um corpo, então, para todo $x \neq 0$, existe $x^{-1}$ tal que, $x^{-1} \cdot x = 1$. Então, $I(1) = I(x^{-1} \cdot x) \geq I(x)$, isto é, $I(1) \geq I(x)$. Logo, $I(x) = I(1)\ \forall x \neq 0$. $\square$

Reparemos que, apesar de $0 \in I$ quando $I$ é um ideal clássico, não necessariamente teremos $I(0) = 1$ para $I$ um ideal *fuzzy*.

**Proposição 3.3.3** *Seja $R$ um anel e $I$ um $L$-ideal a esquerda de $R$, então,*

*a) Se $x$ é um elemento inversível de $R$, então, $I(x) = I(x^{-1}) = I(1)$*

*b) Se $x$ e $y$ são associados, então, $I(x) = I(y)$.*

**Demonstração:**

a) Como $x$ é inversível, existe $x^{-1} \in R$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, logo, $I(1) = I(x^{-1} \cdot x) \geq I(x) \geq I(1)$, portanto, $I(x) = I(1)$. Analogamente, $I(x^{-1}) = I(1)$.

b) Se $x$ e $y$ são associados, então, $R \cdot x = R \cdot y$, onde $R \cdot x = \{rx \mid r \in R\}$. Daí, como $y \in R \cdot y$, temos que $y \in R \cdot x$, donde $y = rx$ para algum $r \in R$. Portanto, $I(y) = I(rx) \geq I(x)$. Analogamente, prova-se que $I(x) \geq I(y)$, donde, $I(x) = I(y)$. $\square$

**Proposição 3.3.4** *Seja $R$ um anel comutativo com unidade e seja $A$ um $L$-subconjunto de $R$, então, $A$ é um $L$-ideal de $R \Leftrightarrow \forall r \in L : A_r$ é um ideal clássico de $R$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos $A$ um $L$-ideal de $R$ e sejam $r \in L$ e $x, y \in A_r$, então, $A(x) \geq r$ e $A(y) \geq r$, logo, $A(x - y) \geq A(x) \wedge A(y) \geq r$, daí, $x - y \in A_r$.

Se $x \in A_r$ e $a \in R$, então, $A(a \cdot x) \geq A(x) \geq r$, donde, $a \cdot x \in A_r$. Isso prova que $A_r$ é um ideal clássico de $R$.

($\Leftarrow$) Suponhamos a hipótese e sejam $x, y \in R$. Consideremos $r = A(x) \wedge A(y) \in L$, então, $A(x) \geq r$ e $A(y) \geq r$, isto é, $x, y \in A_r$. Logo, como $A_r$ é um ideal de $R$, $x - y \in R$, ou seja, $A(x - y) \geq r = A(x) \wedge A(y)$. Agora, considerando $s = A(x)$, temos que $x \in A_s$, logo, como $A_s$ é um ideal, $x \cdot y \in A_s$, donde, $A(x \cdot y) \geq s = A(x)$. Analogamente, prova-se que $A(x \cdot y) \geq A(y)$, o que implica $A(x \cdot y) \geq A(x) \vee A(y)$. $\square$

Por aplicação da proposição anterior podemos verificar que os seguintes são exemplos de ideais *fuzzy*:

1) $R = \mathbb{Z},\ L = \{0, a, b, c, 1\},\ p,\ q$ números primos $> 1$

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in (pq) \\ a, & x \in (p) \setminus (pq) \\ b, & x \in (q) \setminus (pq) \\ c, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 1 & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \\ & c \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Assim, $A$ é um $L$-ideal de $\mathbb{Z}$.

2) $R = \mathbb{Z},\ L = [0, 1],\ b < a < 1,\ p$ número primo $> 1$

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ a, & x \in (p) \setminus \{0\} \\ b, & \mathbb{Z} \setminus (p) \end{cases}$$

$A$ é um $L$-ideal de $\mathbb{Z}$.

3) $R = \mathbb{Z},\ L = [0, 1],\ p$ número primo $> 1$. Para cada $x \in \mathbb{Z},\ x \neq 0$, definimos $n_x =$ o menor $n$ tal que $x \notin (p^n)$

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n_x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

$A$ é um $L$-ideal de $\mathbb{Z}$ com $\bigcap_n (p^n) = \{0\}$.

Observe que ... $\subsetneq (p^{n+1}) \subsetneq (p^n) \subsetneq ... \subsetneq (p^2) \subsetneq (p) \subsetneq \mathbb{Z} = (p^0)$.

4) Generalização (do exemplo 3): Seja $R$ um anel qualquer e $L = [0, 1]$. Suponha que existe uma cadeia enumerável descendente de ideais que não é estacionária. $P_1 \supsetneq P_2 \supsetneq ...$ e seja $P = \bigcap P_n$. Para $x \in R$, $x \notin P$, define-se $n_x =$ o menor $n$ tal que $x \notin P_n$.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in P \\ 1 - \dfrac{1}{n_x}, & x \notin P \end{cases}$$

$A$ é um $L$-ideal de $R$.

Observe que esse $L$-ideal $A$ de $R$ pode ser expresso na forma:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in R \setminus P_1 \\ \vdots & \\ 1 - \frac{1}{n_x}, & \text{se } x \in P_{n_x - 1} \setminus P_{n_x} \\ \vdots & \\ 1, & \text{se } x \in P = \bigcap P_n \end{cases}.$$

5) $R$ um anel, $L$ um reticulado com $|L| \geq 3$, $I \subsetneq J \subsetneq R$ ideais, $a \in L$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ a, & x \in J \setminus I \\ 0, & x \in R \setminus J \end{cases}$$

$A$ é um $L$-ideal de $R$.

6) Generalização (dos exemplos 2 e 5): Seja $R$ um anel e $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq ... \subsetneq I_n \subsetneq R$ ideais de $R$. Seja $L$ um reticulado com pelo menos $n+1$ elementos em cadeia: $a_0 < a_1 < ... < a_n$.

$$A(x) = \begin{cases} a_0, & x \in R \setminus I_n \\ \vdots & \\ a_{n-1}, & x \in I_2 \setminus I_1 \\ a_n, & x \in I_1 \end{cases}$$

$A$ é um $L$-ideal de $R$.

Este último exemplo pode ser também generalizado para o caso de uma cadeia infinita de ideais encaixados de $R$ e de correspondentes elementos de $L$, como no exemplo 4.

Observe que se $J$ é um ideal de $R$ com $J \subsetneq R$, e $a \in L$ com $0 < a < 1$, então, os $L$-subconjuntos $a_J$ e $a^J$ são $L$-ideais de $R$ pois são casos particulares do exemplo 6 para $n = 1$. Este fato será demonstrado em forma direta na Proposição 3.3.6.

A seguir, descreveremos outros tipos de subestruturas *fuzzy* de estruturas que aparecem usualmente na álgebra.

I) Grupos:

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo (não necessariamente abeliano) e $A$ um $L$-subconjunto de $G$, isto é, $A : G \longrightarrow L$. Diremos que $A$ é um $L$-*subgrupo* de $G$, se:

i) $A \cdot A \subseteq A$

ii) $A^{-1} \subseteq A$

isto é, $\forall x, y \in G$,

i) $A(x \cdot y) \geq A(x) \wedge A(y)$

ii) $A(x^{-1}) = A(x),\ \text{pois},\ (x^{-1})^{-1} = x.$

II) Corpos:

Sejam $(K, +, \cdot)$ um corpo e $A$ um $L$-subconjunto de $K$. Diremos que $A$ é um $L$-*subcorpo* de $K$, se:

i) $A + A \subseteq A$

ii) $-A \subseteq A$

iii) $A \cdot A \subseteq A$

iv) $(A^*)^{-1} \subseteq A^*$, onde, $A^* = A|_{K \setminus \{0\}}$,

isto é, $\forall x, y \in K$,

i) $A(x + y) \geq A(x) \wedge A(y)$

ii) $A(-x) = A(x)$

iii) $A(x \cdot y) \geq A(x) \wedge A(y)$

iv) $\forall x \neq 0 : A(x^{-1}) = A(x)$.

III) Módulos:

Seja $M$ um $R$-módulo, onde $R$ é um anel não necessariamente comutativo. Um $L$-subconjunto $A$ ($A : M \longrightarrow L$) de $M$ será dito um $L$-*submódulo* *a esquerda de* $M$, se:

i) $A + A \subseteq A$

ii) $-A \subseteq A$

iii) $R \cdot A \subseteq A$,

isto é, $\forall x, y \in M$ e $\forall a \in R$,

i) $A(x + y) \geq A(x) \wedge A(y)$

ii) $A(-x) = A(x)$

iii) $A(ax) \geq A(x)$.

Analogamente, define-se *L-submódulo a direita.*

É fácil ver que as condições (i), (ii) e (iii) que definem um $L$-submódulo, podem ser substituídas pela seguinte: $\forall x, y \in M$ e $\forall a, b \in R, A(ax + by) \geq A(x) \wedge A(y)$.

Para finalizar esta seção discutiremos brevemente a operação infinitária de interseção de $L$-ideais.

**Proposição 3.3.5** *Seja* $R$ *um anel comutativo com unidade e seja* $\{J_i\}_{i \in I}$ *uma família de* $L$*-ideais de* $R$*. Então,* $J = \bigcap_{i \in I} J_i$ *é um* $L$*-ideal e* $R$*.*

**Demonstração:**

i) $J(x + y) \geq J(x) \wedge J(y)$:

$J(x + y) = (\bigcap_{i \in I} J_i)(x + y) = \bigwedge_{i \in I} J_i(x + y) \geq \bigwedge_{i \in I}(J_i(x) \wedge J_i(y)) = \bigwedge_{i \in I} J_i(x) \wedge \bigwedge_{i \in I} J_i(y) = (\bigcap_{i \in I} J_i)(x) \wedge (\bigcap_{i \in I} J_i)(y) = J(x) \wedge J(y)$.

ii) $J(-x) = J(x)$:

$J(-x) = (\bigcap J_i)(-x) = \bigwedge J_i(-x) = \bigwedge J_i(x) = (\bigcap J_i)(x) = J(x)$.

iii) $J(xy) \geq J(x) \vee J(y)$:

Basta provar que $J(xy) \geq J(x)$ e $J(xy) \geq J(y)$. Com efeito, $J(xy) = (\bigcap J_i)(xy) = \bigwedge J_i(xy) \geq \bigwedge J_i(x) = (\bigcap J_i)(x) = J(x)$. Analogamente, prova-se a outra desigualdade. $\square$

Usando o fato da proposição anterior é possível, como no caso clássico, definir o conceito de "ideal gerado por um $L$-subconjunto".

**Definição 3.3.4** *Se $R$ é um anel comutativo com unidade e $S$ é um $L$-subconjunto de $R$, $S \neq \emptyset$, define-se o $L$-ideal gerado por $S$ como $\langle S \rangle = \bigcap \{J \mid J$ é $L$-ideal de $R$ e $S \subseteq J\}$.*

É fácil ver que $S \subseteq \langle S \rangle$ e que se $J$ é um $L$-ideal de $R$, então, $\langle J \rangle = J$.

**Proposição 3.3.6** *Se $J$ é um ideal de $R$, então, $a_J$ e $a^J$ são $L$-ideais de $R$.*

**Demonstração:**

Vejamos o primeiro caso, o outro é totalmente análogo.

i) $a_J(x+y) \geq a_J(x) \wedge a_J(y)$:

Se $x, y \in J$, então, $a_J(x) = a$ e $a_J(y) = a$. Além disso, $x + y \in J$, donde $a_J(x+y) = a$ e a desigualdade é válida.

Se $x \notin J$ ou $y \notin J$, então, $a_J(x) = 0$ ou $a_J(y) = 0$, donde, a desigualdade é válida.

ii) $a_J(xy) \geq a_J(x) \vee a_J(y)$:

Se $x \in J$ ou $y \in J$, então, $xy \in J$ e $a_J(xy) = a \geq a_J(x) \vee a_J(y)$.

Se $x, y \notin J$, então, $a_J(x) = 0 = a_J(y)$, donde a desigualdade também é válida.

iii) $a_J(-x) = a_J(x)$:

É óbvio, pois, $x \in J \Leftrightarrow -x \in J$. $\square$

**Proposição 3.3.7** *a) Se $S \subseteq R$ e $a \in L$, então, $\langle a_S \rangle = a_{\langle S \rangle}$. Em particular, $\langle x_a \rangle = a_{(x)}$, onde $(x)$ é o ideal principal gerado por $x$.*

*b) Se $S \subseteq R$ e $a \in L$, então, $\left\langle a^S \right\rangle = a^{\langle S \rangle}$.*

**Demonstração:** a) Se $z \in R$, então, $\langle a_S \rangle (z) = (\bigcap\{J \mid J$ é $L$-ideal e $a_S \subseteq J\})(z) = \bigwedge\{J(z) \mid J$ é $L$-ideal e $a_S \subseteq J\}$.

Se $z \in \langle S \rangle$, então, $z = r_1x_1 + ... + r_nx_n$ com $x_k \in S$ e $r_k \in R$ para $k = 1, ..., n$, logo, $J(z) = J(r_1x_1 + ... + r_nx_n) \geq J(x_1) \wedge ... \wedge J(x_n) \geq a \wedge ... \wedge a = a$. Tomando $J = a_{\langle S \rangle}$ temos que $J$ é um $L$-ideal de $R$ e $a_S \subseteq J$, além disso, $J(z) = a$, logo, $\langle a_S \rangle (z) = \bigwedge\{J(z) \mid J$ é $L$-ideal e $a_S \subseteq J\} = a = a_{\langle S \rangle}(z)$.

Se $z \notin \langle S \rangle$, então, tomando $J = 1_{\langle S \rangle}$ temos que $J$ é um $L$-ideal de $R$, $a_S \subseteq J$ e $J(z) = 0$. Logo, $\langle a_S \rangle (z) = \bigwedge\{J(z) \mid J$ é $L$-ideal e $a_S \subseteq J\} = 0 = a_{\langle S \rangle}(z)$.

b) Seja $x \in R$.

Se $x \in \langle S \rangle$, então, $x = s_1x_1 + ... + s_nx_n$ com $s_k \in R$, $x_k \in S$ e $a^{\langle S \rangle}(x) = 1$.

Provaremos que $\left\langle a^S \right\rangle (x) = 1$ sendo $\left\langle a^S \right\rangle = \bigcap\{J \mid J$ é $L$-ideal e $a^S \subseteq J\}$. Com efeito, $\left\langle a^S \right\rangle (x) = \bigwedge\{J(x) \mid J$ é $L$-ideal e $a^S \subseteq J\}$, por outro lado, $J(x) = J(s_1x_1 + ... + s_nx_n) \geq J(x_1) \wedge ... \wedge J(x_n) \geq a^S(x_1) \wedge ... \wedge a^S(x_n) = 1 \wedge ... \wedge 1 = 1$, donde, $J(x) = 1$, resultando $\left\langle a^S \right\rangle (x) = 1$.

Se $x \notin \langle S \rangle$, então, $a^{\langle S \rangle}(x) = a$. Além disso, $\left\langle a^S \right\rangle (x) = \bigwedge\{J(x) \mid J$ é $L$-ideal e $a^S \subseteq J\}$. Como $x \notin \langle S \rangle$, temos que $x \notin S$, logo, $a^S(x) = a$, daí, $J(x) \geq a$. Para provar que $\left\langle a^S \right\rangle (x) = a$, basta exibir um $L$-ideal $J$ tal que $a^S \subseteq J$ e $J(x) = a$. Com efeito, tomando $J = a^{\langle S \rangle}$, temos o resultado. $\square$

## 3.4 Valorizações como Ideais *Fuzzy*

### 3.4.1 Valorizações $p$-ádicas em $\mathbb{Z}$

Consideremos $p > 1$ um inteiro primo e seja $L = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ o conjunto totalmente ordenado $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ onde $x < \infty$ $\forall x \in \mathbb{N}$.

$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \infty$

Observa-se que $L$ é completo.

Se $x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, então, pelo teorema fundamental da aritmética (existência e unicidade da decomposição em produto de primos), existe um único $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $x = p^{\nu} \cdot z$, onde $p$ não divide $z$. A partir desse fato, podemos definir uma função $\nu_p : \mathbb{Z} \longrightarrow L$ dada por $\nu_p(x) = \begin{cases} \nu, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Observa-se que, tal como foi definido, $\nu_p$ é um $L$-subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Na seguinte proposição, convenciona-se que $\forall z \in L,\ z + \infty = \infty + z = \infty$ e que $\infty + \infty = \infty$.

**Proposição 3.4.1** *A função $\nu_p$ tem as seguintes propriedades $\forall x, y \in \mathbb{Z}$:*
*i)* $\nu_p(x + y) \geq min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$
*ii)* $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$
*iii)* $\nu_p(-x) = \nu_p(x)$.

**Demonstração:**
i) Se $x = 0$, então, $\nu_p(x) = \infty$ e $min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\} = min\{\infty, \nu_p(y)\} = \nu_p(y)$. Logo, $\nu_p(x + y) = \nu_p(y) = min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.

Suponhamos, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Se $x + y = 0$, então, (i) é satisfeita trivialmente. Se $x + y \neq 0$, então, $x = p^{\nu} \cdot z$, $y = p^{\omega} \cdot t$ e podemos supor $\nu \geq \omega$, então, $x+y = p^{\nu} \cdot z + p^{\omega} \cdot t = p^{\omega} \cdot (p^{\nu-\omega} \cdot z + t)$. De fato, se $\nu > \omega$, $p$ não divide $(p^{\nu-\omega} \cdot z + t)$, pois se $p \mid (p^{\nu-\omega} \cdot z + t)$, como também $p \mid p^{\nu-\omega} \cdot z$, teríamos que $p \mid t$, o qual não é verdade. Nesse caso, $\nu_p(x + y) = \omega = min\{\nu, \omega\} = min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.

Finalmente, se $\nu = \omega$, então, $x + y = p^{\nu} \cdot (z + t)$. Nesse caso, ainda poderíamos ter que $p \mid (z + t)$, portanto, $z + t = p^r \cdot k$ com $r \geq 0$ e $p$ não divide $k$, donde $x + y = p^{\nu+r} \cdot k$. Assim, $\nu_p(x + y) = \nu + r \geq \nu = min\{\nu, \omega\} = min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.
ii) Se $x = 0$, então, $x \cdot y = 0$, logo, $\nu_p(xy) = \infty = \infty + \nu_p(y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$.

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então, $x = p^\nu \cdot z$, $y = p^\omega \cdot t$, donde, $xy = p^{\nu+\omega} \cdot (zt)$, portanto, $\nu_p(xy) = \nu + \omega = \nu_p(x) + \nu_p(y)$. De fato, como $p$ não divide $z$ e $p$ não divide $t$, temos que $p$ não divide $zt$.

iii) Se $x = 0$, é trivial.

Se $x \neq 0$, $x = p^\nu \cdot z$, então, $-x = -p^\nu \cdot z = p^\nu \cdot (-z)$, donde $\nu_p(-x) = \nu = \nu_p(x)$. $\square$

**Corolário 3.4.1.1** *$\nu_p(xy) \geq \nu_p(x)$, donde $\nu_p(xy) \geq max\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$*

**Demonstração:**

Como $\nu_p(x) \geq 0 \ \ (\nu_p : \mathbb{Z} \longrightarrow L = \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, temos que $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y) \geq \nu_p(x)$ (mesmo no caso em que $\nu_p(x) = \infty$). $\square$

Como conseqüência temos que $\nu_p$ não somente é um $L$-subconjunto de $\mathbb{Z}$, senão também, um $L$-ideal de $\mathbb{Z}$. A função $\nu_p$ é chamada de *valorização $p$-ádica* em $\mathbb{Z}$.

Observe que a valorização $p$-ádica $\nu_p$ pode ser expressa como

$$\nu_p(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Z} \setminus (p) \\ 1, & \text{se } x \in (p) \setminus (p^2) \\ \vdots & \\ \nu, & \text{se } x \in (p^\nu) \setminus (p^{\nu+1}) \\ \vdots & \\ \infty, & \text{se } x \in \{0\} = \bigcap_{\nu \geq 0} (p^\nu) \end{cases}.$$

Observe, também, que esta forma de expressar a valorização $\nu_p$ generaliza o exemplo 6 da página 33, para o caso de $R = \mathbb{Z}$ e um número infinito de ideais encaixados.

Na álgebra clássica as valorizações $p$-ádicas têm a seguinte importância:

Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade e $\mathbb{Q}$ é seu corpo de frações, podemos estender $\nu_p$ a $\mathbb{Q}$ da seguinte maneira:

Seja $x = n/m \in \mathbb{Q}$, define-se $\nu_p(x) = \begin{cases} \infty & \text{, se } n = 0 \\ \nu_p(n) - \nu_p(m) & \text{, se } n \neq 0. \end{cases}$

Uma motivação para essa definição é a seguinte:

$$x = \frac{n}{m} = \frac{p^\nu \cdot z}{p^\omega \cdot t} = p^{\nu - \omega}\left(\frac{z}{t}\right).$$

A partir daí, é possível definir $\|\cdot\|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\|x\|_p = e^{-\nu_p(x)}$, a qual é uma norma chamada de norma *p-ádica* em $\mathbb{Q}$. Mais ainda, é uma ultranorma ou norma não arquimediana no sentido de que, ao invés de satisfazer apenas a desigualdade triangular, satisfaz a desigualdade mais forte:

$$\|x + y\|_p \leq max\{\|x\|_p, \|y\|_p\} \quad (\leq \|x\|_p + \|y\|_p).$$

Assim como $\mathbb{R}$ resulta de completar o espaço $\mathbb{Q}$ a respeito da norma dada pelo valor absoluto, podemos obter novos completamentos de $\mathbb{Q}$ a respeito das normas $p$-ádicas obtendo os chamados de *corpos p-ádicos* $\mathbb{Q}_p$.

### 3.4.2 Valorizações de Krull

As valorizações $p$-ádicas de $\mathbb{Q}$ podem ser generalizadas da seguinte maneira:

**Definição 3.4.1** *Seja $K$ um corpo e $(\Gamma, +)$ um grupo abeliano totalmente ordenado. Uma valorização de Krull sobre $K$ é uma função $\nu : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ tal que:*

*i)* $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

*ii)* $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$

*iii)* $\nu(x + y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

A respeito das valorizações de Krull podemos observar:

1) Por ii, temos que $\nu$ é um homomorfismo entre os grupos $(K^*, \cdot)$ e $(\Gamma, +)$,

onde $K^* = K \setminus \{0\}$.

2) $\Gamma \cup \{\infty\}$ é um conjunto totalmente ordenado onde consideramos $x < \infty\ \forall x \in \Gamma$. Além disso, adotaremos a seguinte convenção: $x + \infty = \infty + x = \infty\ \forall x \in \Gamma$ e $\infty + \infty = \infty$.

3) $\nu(1) = 0$, pois, $\nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1)$.

4) $\nu(-1) = 0$. Com efeito, como $\Gamma$ é um grupo abeliano totalmente ordenado, temos que: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Caso contrário, teríamos que: $x > 0$, então, pela lei de compatibilidade, $x + x > 0 + x = x > 0$, ie, $2x > 0$, ou, $x < 0$, então, $x + x < 0 + x = x < 0$, ie, $2x < 0$.

Logo, $0 = \nu(1) = \nu((-1) \cdot (-1)) = \nu(-1) + \nu(-1)$. Então, $2\nu(-1) = 0$, donde, $\nu(-1) = 0$.

5) $\nu(-x) = \nu(x)$. Com efeito, $\nu(-x) = \nu((-1) \cdot x) = \nu(-1) + \nu(x) = 0 + \nu(x) = \nu(x)$.

6) $\nu(x) - \nu(y) = \nu(\frac{x}{y})$. Com efeito, de $\nu(wy) = \nu(w) + \nu(y)$ obtemos que $\nu(wy) - \nu(y) = \nu(x)$. Chamando de $x = wy$, então, $w = \frac{x}{y}$. Substituindo, $\nu(x) - \nu(y) = \nu(\frac{x}{y})$.

**Proposição 3.4.2** *Se $\nu$ é uma valorização de Krull de $K$, então, $A_\nu = \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$ é um subanel de $K$ e $\nu\,|_{A_\nu}$ é um $L$-ideal de $A_\nu$ onde $L = \Gamma^+ \cup \{\infty\}$ sendo $\Gamma^+ = \{a \in \Gamma \mid a \geq 0\}$.*

**Demonstração:**

a) $A_\nu$ é um subanel de $K$:

i) $A_\nu \neq \emptyset$. De fato, $\nu(0) = \infty \geq 0$, portanto, $0 \in A_\nu$.

ii) $x, y \in A_\nu \Rightarrow x - y \in A_\nu$. Com efeito, sejam $x, y \in A_\nu$, então, $\nu(x) \geq 0$ e $\nu(y) \geq 0$. Logo, $\nu(x - y) \geq min\{\nu(x), \nu(-y)\} = min\{\nu(x), \nu(y)\} \geq 0$. Portanto, $x - y \in A_\nu$.

iii) $x, y \in A_\nu \Rightarrow x \cdot y \in A_\nu$. De fato, sejam $x, y \in A_\nu$, então, $\nu(x) \geq 0$ e $\nu(y) \geq 0$. Logo, $\nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \geq 0 + 0 = 0$. Portanto, $x \cdot y \in A_\nu$.

Mais ainda, é fácil ver que $1 \in A_\nu$, pois, $\nu(1) = 0$.

b) $\nu|_{A_\nu}$ é um $L$-ideal de $A_\nu$: De fato, chamando de $\mu = \nu|_{A_\nu}$, temos que $\mu : A_\nu \longrightarrow L\ (= \Gamma^+ \cup \{\infty\})$ e satisfaz: $\mu(x+y) = \nu(x+y) \geq min\{\nu(x), \nu(y)\} = min\{\mu(x), \mu(y)\}$. Também, $\mu(-x) = \nu(-x) = \nu(x) = \mu(x)$ e $\mu(x \cdot y) = \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \geq \nu(x) = \mu(x)$. Analogamente, $\mu(x \cdot y) \geq \mu(y)$, donde, $\mu(x \cdot y) \geq max\{\mu(x), \mu(y)\}$. $\square$

**Proposição 3.4.3** *Para todo $x \in K^*$, $x$ é uma unidade de $A_\nu \Leftrightarrow \nu(x) = 0$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$): Seja $x$ uma unidade de $A_\nu$. Então, existe $y \in A_\nu$ tal que $x \cdot y = 1$. Assim, temos que $\nu(x) \geq 0$, $\nu(y) \geq 0$ e $0 = \nu(1) = \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \geq \nu(x) + 0 = \nu(x) \geq 0$. Logo, $0 \geq \nu(x) \geq 0$, isto é, $\nu(x) = 0$.

($\Leftarrow$): Seja $x \in K^*$ tal que $\nu(x) = 0\ (\neq \infty)$. Logo, $x \in A_\nu$. Então, se $y \in K^*$ é tal que $x \cdot y = 1$, temos que $y \in A_\nu$. Com efeito, $\nu(y) = 0 + \nu(y) = \nu(x) + \nu(y) = \nu(x \cdot y) = \nu(1) = 0$, isto é, $\nu(y) = 0$, donde, $y \in A_\nu$. Portanto, $x$ é uma unidade de $A_\nu$. $\square$

Observe que a proposição anterior diz que o suporte conjuntista de $\nu$, em $A_\nu$, é $supp(\nu) = \{x \in A_\nu \mid \nu(x) > 0\} = \{x \in A_\nu \mid x$ não é uma unidade de $A_\nu\}$.

Na teoria de valorizações de Krull, prova-se que $supp(\nu)$ é o único ideal maximal de $A_\nu$.

**Definição 3.4.2** *Sejam $K$ um corpo e $A$ um subanel de $K$, e portanto, um domínio de integridade. $A$ é dito Anel de Valorização de $K$ se para todo $x \in K^*$, $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.*

**Proposição 3.4.4** *Se $\nu$ é uma valorização de Krull sobre $K$, então, $A_\nu = \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização de $K$.*

**Demonstração:**

Seja $x \in K^*$. Então, temos que: $\nu(x^{-1}) = \nu(\frac{1}{x}) = \nu(1) - \nu(x) = 0 - \nu(x) = -\nu(x)$, isto é, $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$.

Se $\nu(x) \geq 0$, então, $x \in A_\nu$. Se $\nu(x) < 0$, então, $\nu(x^{-1}) > 0$, então, $x^{-1} \in A_\nu$. Logo, $x \in A_\nu$ ou $x^{-1} \in A_\nu$. $\square$

**Proposição 3.4.5** *$A_\nu$ é um domínio de integridade cujo corpo de frações é $K$ e tal que para todo $x \in K$ se $x = \frac{a}{b}$ com $a, b \in A_\nu$ e $b \neq 0$, temos que $\nu(x) = \mu(a) - \mu(b)$ onde $\mu = \nu|_{A_\nu}$.*

**Demonstração:**

Obviamente, $A_\nu$ é um domínio por ser subanel de um corpo. Por outro lado, chamando de $K(A_\nu)$ o corpo de frações de $A_\nu$, temos que $K(A_\nu) \subseteq K$ (pois o corpo de frações de $A$ é o menor subcorpo de $K$ que contém $A$). Resta provar que $K \subseteq K(A_\nu)$.

Seja $x \in K$. Se $x = 0$, então, $x \in K(A_\nu)$. Se $x \neq 0$, então, como $A_\nu$ é um anel de valorização de $K$, temos que $x \in A_\nu$ ou $x^{-1} \in A_\nu$.

Se $x \in A_\nu$, então, $x \in K(A_\nu)$. Se $x^{-1} \in A_\nu$, então, $x = (x^{-1})^{-1} = \frac{1}{x^{-1}} \in K(A_\nu)$, pois, $1, x^{-1} \in A_\nu$. $\square$

Na teoria das valorizações de Krull, se $K = \mathbb{Q}$ e $\nu_p$ é a valorização $p$-ádica correspondente, temos que o anel de valorização $A_{\nu_p}$ é dado por $A_{\nu_p} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ não divide } b\}$, que corresponde ao anel local $\mathbb{Z}_{(p)}$. Nesse caso, $\nu_p|_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ é um $L$-ideal de $\mathbb{Z}_{(p)}$, sendo $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Observa-se que $\mathbb{Z}$ não é um anel de valorização de $\mathbb{Q}$, mas, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}$, para todo número primo $p$.

# Capítulo 4

# Primalidade na Teoria de Ideais *Fuzzy*

Neste e nos próximos capítulos, todos os anéis serão comutativos com unidade.

## 4.1 Motivação: O Caso Clássico

Seja $R$ um anel e $P$ um ideal próprio de $R$. Dizemos que $P$ é um *ideal primo* de $R$ se $\forall x, y \in P: \ xy \in P \Rightarrow x \in P$ ou $y \in P$.

**Proposição 4.1.1** *Seja $P$ um ideal de $R$, então, $P$ é primo $\Leftrightarrow \forall A, B$ ideais de $R$: $A \cdot B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$, onde $A \cdot B = \{ab \mid a \in A$ e $b \in B\}$*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$): Suponhamos $P$ primo e $A, B$ ideais de $R$, tais que $A \cdot B \subseteq P$. Suponhamos, por absurdo, que $A \not\subseteq P$ e $B \not\subseteq P$, isto é, existem $x \in A$ e $y \in B$ com $x \notin P$ e $y \notin P$, então, como $P$ é primo, temos que $xy \notin P$, mas, $xy \in A \cdot B \subseteq P$. Uma contradição.
($\Leftarrow$): Suponhamos a hipótese e sejam $x, y \in R$ com $xy \in P$. Consideremos os

ideais principais $A = (x)$ e $B = (y)$. Afirmamos que $A \cdot B \subseteq P$. Com efeito, se $z \in A \cdot B$, existem $a \in A$ e $b \in B$, tais que $z = ab = (rx) \cdot (sy) = (rs) \cdot (xy)$ para certos $r, s \in R$, logo, $z \in P$, pois, $xy \in P$. Portanto, pela hipótese, $(x) \subseteq P$ ou $(y) \subseteq P$, e isso implica que $x \in P$ ou $y \in P$, isto é, $P$ é primo. $\square$

## 4.2 $L$-Ideais Primos, Completamente Primos, Fracamente Completamente Primos e $L$-Primos

**Definição 4.2.1** *Sejam $R$ um anel, $L$ um reticulado e $P$ um $L$-ideal de $R$. Diremos que $P$ é um $L$-ideal primo se $P$ não é constante e $\forall A, B$ $L$-ideais de $R$, temos:*

$$A \cdot B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P \text{ ou } B \subseteq P.$$

Lembrar que $A \cdot B$ é o $L$-subconjunto de $R$ dado por $(A \cdot B)(z) = \bigvee\{A(x) \wedge B(y) \mid x \cdot y = z\}$.

**Definição 4.2.2** *Sejam $R$ um anel e $P$ um $L$-ideal de $R$. Diremos que $P$ é um $L$-ideal completamente primo se $P$ não é constante e $\forall x_p, y_q$ $L$-pontos de $R$, temos:*

$$x_p \cdot y_q \in P \Rightarrow x_p \in P \text{ ou } y_q \in P.$$

**Definição 4.2.3** *Sejam $R$ um anel e $P$ um $L$-ideal de $R$. Diremos que $P$ é um $L$-ideal fracamente completamente primo se $P$ não é constante e $\forall x, y \in R:$*

$$P(xy) = P(x) \vee P(y).$$

Lembremos que por $P$ ser um $L$-ideal, temos que $P(xy) \geq P(x) \vee P(y)$.

**Definição 4.2.4** *Sejam $R$ um anel e $P$ um $L$-ideal de $R$. Diremos que $P$ é um $L$-ideal $L$-primo se $P$ não é constante e $\forall x,\ y \in R$,*

$$P(xy) = P(x) \text{ ou } P(xy) = P(y).$$

Observa-se que:

1) No caso clássico, as quatro definições são equivalentes a $P$ ser primo.

2) Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado, então, as Definições 4.2.3 e 4.2.4 são equivalentes, isto é, um $L$-ideal é fracamente completamente primo se e só se é $L$-primo.

**Lema 4.1** *Sejam $A$ e $B$ $L$-subconjuntos de $R$, então, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in R, \forall a \in L : x_a \in A \Rightarrow x_a \in B$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Sejam $x \in R$ e $a \in L$ e suponha $x_a \in A$, então, $a \leq A(x) \leq B(x)$, logo, $x_a \in B$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in R$ e suponha $A(x) = a$. Então, $x_a \in A$, logo, por hipótese, $x_a \in B$. Daí, $a \leq B(x)$, donde $A(x) \leq B(x)$, portanto, $A \subseteq B$. $\square$

**Proposição 4.2.1** *Se $P$ é um $L$-ideal de $R$, então:*

*a) $P$ é Primo $\Leftrightarrow$ $P$ é Completamente Primo*

*b) $P$ é Completamente Primo $\Rightarrow$ $P$ é Fracamente Completamente Primo.*

**Demonstração:**

a) Primo $\Rightarrow$ Completamente Primo:

Seja $P$ um $L$-ideal primo e sejam $x_p, y_q$ tais que $x_p \cdot y_q \in P$, isto é, $(x \cdot y)_{p \wedge q} \in P$, o que significa $p \wedge q \leq P(xy)$. Definimos $A = p_{(x)}$ e $B = q_{(y)}$ (ver Definição 2.3.5). Assim definidos, $A$ e $B$ são $L$-ideais pela Proposição 3.3.6.

Vamos ver que $A \cdot B \subseteq P$. Com efeito, $(A \cdot B)(z) = \bigvee\{A(z_1) \wedge B(z_2) \mid z_1 \cdot z_2 = z\}$. Se acontecer que $A(z_1) = 0$ ou $A(z_2) = 0$ com $z = z_1 \cdot z_2$, então, $A(z_1) \wedge B(z_2) = 0 \leq P(z)$. Se $A(z_1) \neq 0$ e $A(z_2) \neq 0$, então, $A(z_1) = p$, $A(z_2) = q$ e existem $r$ e $s$, tais que, $z_1 = rx$ e $z_2 = sy$. Então, $z = z_1 \cdot z_2 = rx \cdot sy = rs \cdot xy$. Assim, $A(z_1) \wedge B(z_2) = p \wedge q \leq P(xy) \leq P(z)$. Logo, $A \cdot B \subseteq P$ e, pela hipótese, $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$, isto é, $\forall z \in R : \; A(z) \leq P(z)$ ou $\forall z \in R : \; B(z) \leq P(z)$, em particular, $p = A(x) \leq P(x)$ ou $q = B(y) \leq P(y)$, isto é, $x_p \in P$ ou $y_q \in P$.

Completamente Primo $\Rightarrow$ Primo:

Suponhamos $P$ não constante e completamente primo. Sejam $A$, $B$ $L$-ideais de $R$ tais que $A \cdot B \subseteq P$.

Afirmação 1: $\forall x_a \in A$ e $\forall y_b \in B$, temos que $x_a \cdot y_b \in A \cdot B$.

Com efeito, $a \wedge b \leq A(x) \wedge B(y) \leq \bigvee\{A(z) \wedge B(w) \mid z \cdot w = x \cdot y\} = (A \cdot B)(x \cdot y)$. Daí, $(x \cdot y)_{a \wedge b} \in A \cdot B$, isto é, $x_a \cdot y_b \in A \cdot B$.

Afirmação 2: $\forall x_a \in A : x_a \in P$ ou $\forall y_b \in B : y_b \in P$.

De fato, suponhamos que exista $x_a \in A$ com $x_a \notin P$. Seja $y_b \in B$, então, pela afirmação 1, $x_a \cdot y_b \in A \cdot B \subseteq P$, isto é, $x_a \cdot y_b \in P$, logo, como $P$ é completamente primo $x_a \in P$ ou $y_b \in P$, mas, $x_a \notin P$, portanto, $y_b \in P$.

Agora, pelo Lema 4.1, concluímos que $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$, isto é, $P$ é primo.

b) Completamente Primo $\Rightarrow$ Fracamente Completamente Primo:

Como $P$ é um $L$-ideal, temos que $P(x \cdot y) \geq P(x) \vee P(y)$. Basta provar que $P(x \cdot y) \leq P(x) \vee P(y)$. Sejam $x, y \in R$ e consideremos $z = x \cdot y$. Se $P(z) = 0$, então, $P(x \cdot y) = P(z) = 0 \leq P(x) \vee P(y)$. Se $P(z) = p$, com $p \neq 0$, então, consideremos o ponto *fuzzy* $z_p = (x \cdot y)_p = (x \cdot y)_{p \wedge p} = x_p \cdot y_p$. Observa-se que $x_p \cdot y_p \in P$, pois, $p = P(z) = P(x \cdot y)$. Logo, pela hipótese, $x_p \in P$ ou $y_p \in P$, isto é, $p \leq P(x)$ ou $p \leq P(y)$, isto é, $P(xy) \leq P(x)$ ou

$P(xy) \leq P(y)$, donde $P(xy) \leq P(x) \vee P(y)$. $\square$

Seja $R$ um anel e $A : R \longrightarrow L$ um $L$-ideal de $R$, sabemos que para todo $x \in R: \ A(1) \leq A(x) \leq A(0)$. Tomando $t = A(0)$, temos que $A_t = \{x \in R \mid A(x) \geq A(0)\} = \{x \in R \mid A(x) = A(0)\}$. Tal subconjunto de nível $A(0)$ será chamado de *suporte algébrico de* $A$ e denotado por $I_A$, isto é, $I_A = A_{A(0)}$.

Por exemplo, se $J$ é um $L$-ideal clássico de $R$, então, para todo $a \neq 1$, $I_{a^J} = J$ e para todo $a \neq 0$, $I_{a_J} = J$.

**Proposição 4.2.2** *Seja $R$ um anel e $A$ um $L$-ideal de $R$.*
*1) Se $A$ é um $L$-ideal primo, então, $I_A$ é um ideal primo clássico de $R$.*
*2) Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado e $A$ é um $L$-ideal fracamente completamente primo de $R$ (ou um $L$-ideal $L$-primo), em particular se $A$ é um $L$-ideal primo, então, $\forall t \in L, \ A_t$ é um ideal primo clássico de $R$.*

**Demonstração:**
1) Sejam $x, y$ tais que $xy \in I_A$, isto é, $A(xy) = A(0)$. Queremos mostrar que $x \in I_A$ ou $y \in I_A$. Chamando $a = A(0)$, definimos: $B = a_{(x)}$ e $C = a_{(y)}$.

Assim, pela Proposição 3.3.6, $B$ e $C$ são, $L$-ideais de $R$ e $B \cdot C \subseteq A$. Com efeito, $(B \cdot C)(z) = \bigvee\{B(b) \wedge C(c) \mid bc = z\}$. Sejam $b, c$ tais que $bc = z$. Se $B(b) = 0$ ou $C(c) = 0$, então, $B(b) \wedge C(c) \leq A(z)$. Se $B(b) = a = C(c)$, então, $B(b) \wedge C(c) = a$, e, nesse caso, $b \in (x)$ e $c \in (y)$, isto é, $b = rx$ e $c = sy$, logo, $bc = (rs)(xy)$. Assim, $A(bc) \geq A(xy) = A(0) = a$, daí, $B(b) \wedge C(c) \leq A(bc)$, isto é, $(B \cdot C)(z) \leq A(z)$. Agora, como $A$ é um $L$-ideal primo, $B \subseteq A$ ou $C \subseteq A$. Se $B \subseteq A$, então, $B(x) \leq A(x)$, mas, $B(x) = a = A(0)$, pois, $x \in (x)$, portanto, $A(0) \leq A(x) \leq A(0)$, donde, $A(x) = A(0)$, isto é, $x \in I_A$. Analogamente, se $C \subseteq A$, obtemos, $y \in I_A$.
2) Sejam $x, y \in R$ tais que $xy \in A_t$, então, $A(xy) \geq t$. Como $A$ é fracamente completamente primo, $A(xy) = A(x) \vee A(y)$, logo, $A(x) \vee A(y) \geq t$.

Portanto, como $L$ é totalmente ordenado, temos que $A(x) \vee A(y) = A(x)$ ou $A(x) \vee A(y) = A(y)$, isto é, $A(x) \geq t$ ou $A(y) \geq t$, isto é, $x \in A_t$ ou $y \in A_t$.

$\square$

A seguinte proposição é um teorema de caracterização dos $L$-ideais primos de um anel $R$ e é o protótipo de uma série de outras caracterizações de conceitos como $L$-ideal "$L$-primário", "$\mathcal{R}$-primário" e "irredutível" dentre outros.

**Proposição 4.2.3** *Seja $P$ um $L$-ideal de $R$. Então, $P$ é um $L$-ideal primo de $R$ se, e somente se, $P(0) = 1$, $I_P$ é um ideal primo de $R$ e $imP = \{1,\ c\}$, onde $c$ $(\neq 1)$ é um elemento primo de $L$.*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$): Suponhamos que $P$ é um $L$-ideal primo de $R$. Pela proposição anterior, $I_P$ é um ideal primo de $R$.

Suponhamos que $P(0) < 1$. Como $P$ é não constante, existe $y \in R$ tal que $P(y) < P(0)$. Sejam $A$ e $B$ $L$-subconjuntos de $R$, definidos por: $A = 1_{I_P}$ e $B = P(0)_R$. Assim, $A$ e $B$ são $L$-ideais de $R$ e $A \cdot B \subseteq P$. Com efeito, temos que $(A \cdot B)(z) = \bigvee\{A(a) \wedge B(b) \mid ab = z\}$, então, sejam $a, b$ tais que $ab = z$. Se $a \in I_P$, então, $z \in I_P$, ie, $P(z) = P(0)$. Por outro lado, $A(a) = 1$ e $B(b) = P(0)$. Logo, $A(a) \wedge B(b) = 1 \wedge P(0) = P(0) = P(z)$. Agora, se $a \notin I_P$, então, $A(a) = 0$. Logo, $A(a) \wedge B(b) = 0 \leq P(z)$. Portanto, $(A \cdot B)(z) \leq P(z)\ \forall z \in R$. No entanto, $A \nsubseteq P$ e $B \nsubseteq P$, pois, $B(y) = P(0) > P(y)$ e, se $x \in I_P$, então, $P(x) = P(0) < 1 = A(x)$. Uma contradição, pois, $P$ é um $L$-ideal primo. Portanto, $P(0) = 1$.

Provaremos, agora, que $imP = \{1,\ c\}$. Como $P$ é não constante, existe $c \in L$ com $c \neq 1$ $(= P(0))$ tal que $P(x) = c$ para algum $x \in R \setminus I_P$. Seja

$y \in R \setminus I_P$. Provaremos que $P(y) = P(x)$. Consideremos os $L$-ideais $1_{(x)}$ e $c_R$. Observa-se que $1_{(x)} \not\subseteq P$, pois, $1_{(x)}(x) = 1 > c = P(x)$. Além disso, $1_{(x)} \cdot c_R \subseteq P$. Com efeito, $(1_{(x)} \cdot c_R)(z) = \bigvee\{1_{(x)}(a) \wedge c_R(b) \mid ab = z\}$, logo, se $a \in (x)$, então, $a = xk$, então, $z = xkb$, logo, $P(z) \geq P(x) = c$. Por outro lado, $1_{(x)}(a) = 1$, então, $1_{(x)}(a) \wedge c_R(b) = 1 \wedge c = c \leq P(z)$. Agora, se $a \notin (x)$, então, $1_{(x)}(a) = 0$, donde, $1_{(x)}(a) \wedge c_R(b) = 0 \leq P(z)$. Podemos concluir que, como $P$ é um $L$-ideal primo, $c_R \subseteq P$, isto é, $P(x) = c = c_R(y) \leq P(y)$. Similarmente, $P(y) \leq P(x)$. Assim, $P(x) = c \; \forall x \in R \setminus I_P$.

Vamos mostrar, agora, que $c$ é um elemento primo de $L$. Suponhamos que $c$ não é um elemento primo de $L$. Então, existem $a, b \in L$ tais que $a \not\leq c$, $b \not\leq c$ e $a \wedge b \leq c$. Assim, $a_R$ e $b_R$ são $L$-ideais de $R$ com $a_R \not\subseteq P$ e $b_R \not\subseteq P$. No entanto, $a_R \cdot b_R = (a \wedge b)_R \subseteq P$. Isso contradiz o fato de que $P$ é um $L$-ideal primo de $R$. Assim, $c$ é um elemento primo de$R$.

($\Leftarrow$): Suponhamos que $P$ satisfaz as condições dadas. Então, $P$ não é constante. Suponhamos que existem $A$ e $B$ $L$-ideais de $R$ tais que $A \cdot B \subseteq P$, mas, $A \not\subseteq P$ e $B \not\subseteq P$. Então, existem $x, y \in R$ tais que $A(x) \not\leq P(x)$ e $B(y) \not\leq P(y)$, donde $P(x) \neq 1$ e $P(y) \neq 1$. Como $P(z) \leq P(0) = 1 \; \forall z \in R$, então, temos que: $P(x) = P(y) = c$, resultando que $x, y \in R \setminus I_P$, $A(x) \not\leq c$ e $B(y) \not\leq c$. Como $x, y \in R \setminus I_P$ e $I_P$ é um ideal primo de $R$, então, $xy \notin I_P$, isto é, $P(xy) = c$. Assim, temos que, $A(x) \wedge B(y) \leq (A \cdot B)(xy) \leq P(xy) = c$ e, como $c$ é um elemento primo de $L$, então, $A(x) \leq c = P(x)$ ou $B(y) \leq c = P(y)$. Uma contradição. Logo, $P$ é um $L$-ideal primo de $R$. $\square$

**Corolário 4.2.3.1** *Se $P$ é um $L$-ideal primo de $R$, então,*

$$P(z) = \begin{cases} 1, & se \; z \in I_P \\ c, & se \; z \in R \setminus I_P, \end{cases}$$

*isto é, $P = c^{I_P}$, onde $c$ é um elemento primo de $L$.* $\square$

Observe que se $L$ é um reticulado totalmente ordenado, então, todo $c \in L \setminus \{1\}$ é um elemento primo de $L$.

**Corolário 4.2.3.2** *Todo L-ideal primo é L-primo.*

**Demonstração:**

Seja $P$ um $L$-ideal primo de $R$. Então, $P(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \in I_P \\ c, & \text{se } z \notin I_P \end{cases}$, onde $c$ é um elemento primo de $L$. Sejam $x, y \in R$. Provaremos que $P(xy) = P(x)$ ou $P(xy) = P(y)$. Se $P(x) = 1$ ou $P(y) = 1$, então, $P(xy) \geq P(x) \vee P(y) = 1$, isto é, $P(xy) = 1$, logo, $P(xy) = P(x)$ ou $P(xy) = P(y)$. Suponhamos $P(x) = c = P(y)$, então, $x, y \notin I_P$, daí, como $P$ é primo, $xy \notin I_P$, logo, $P(xy) = c$, donde, $P(xy) = P(x) = P(y)$. $\square$

**Proposição 4.2.4** *Se $A$ é um L-ideal L-primo de R, então, $imA$ é uma cadeia de L com mínimo $A(1)$ e máximo $A(0)$.*

**Demonstração:**

Sejam $x, y \in R$, então, como $A(xy) = A(x)$ ou $A(xy) = A(y)$, temos que $A(x) \geq A(x) \vee A(y)$ ou $A(y) \geq A(x) \vee A(y)$, donde, $A(x) \geq A(y)$ ou $A(y) \geq A(x)$, isto é, $imA$ é uma cadeia.

Finalmente, é óbvio que $A(1) = min(imA)$ e $A(0) = max(imA)$, pois, para todo $x \in R$, $A(1) \leq A(x) \leq A(0)$. $\square$

Terminaremos este capítulo com uma propriedade de finitude.

**Proposição 4.2.5** *Se $A$ é um L-ideal de um domínio de ideais principais (DIP) D tal que o seu suporte algébrico $I_A \neq \{0\}$, então, $imA$ é finita.*

**Demonstração:**

Como $I_A$ é um ideal não nulo de $D$ e $D$ é *DIP*, então, existe $a \in R$ com $a \neq 0$ tal que $I_A = (a)$.

Seja $x \in D$. Provaremos que $A(x) = A(d)$ para algum $d|a$. Consideremos o ideal $(x, a) = \{k_1x + k_2a \mid k_1, k_2 \in D\} = (x) + (a)$. Como $D$ é *DIP*, existe $d \in D$ tal que $(x, a) = (d)$.

i) Como $a \in (x, a)$, então, $a \in (d)$, isto é, $d \mid a$.

ii) Como $x + a \in (x, a)$, então, $x + a = dj$ para algum $j \in D$, ie, $x = dj - a$. Então, $A(x) = A(dj - a) \geq A(dj) \wedge A(a) \geq A(d) \wedge A(0) = A(d)$, ie, $A(x) \geq A(d)$.

iii) Como $d \in (d)$, então, $d \in (x, a)$, logo, existem $r, s \in D$ tais que $d = rx + sa$, donde, $A(d) = A(rx + sa) \geq A(rx) \wedge A(sa) \geq A(x) \wedge A(a) = A(x) \wedge A(0) = A(x)$, isto é, $A(d) \geq A(x)$.

Assim, para $x \in D$, existe $d \in D$ tal que $A(x) = A(d)$ e $d \mid a$, isto é, $imA \subseteq \{A(d) \mid d \mid a\}$.

i) Se $I_A = D$, então, $A(x) = A(0)\ \forall x$, logo, $imA$ é finita.

ii) Se $I_A \neq D$, então, $a$ não é uma unidade de $D$. Como todo *DIP* é um domínio de fatoração única e $a \neq 0$, então, $a = u \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$, onde $u$ é uma unidade e $p_i$ é irredutível para todo $i = 1, ..., n$.

Assim, se $d$ é um divisor de $a$, então, $d$ é uma combinação dos irredutíveis $p_k$ a menos de seus associados, mas, se $\alpha$ e $\beta$ são associados, então, $A(\alpha) = A(\beta)$. Assim, o conjunto $\{A(d) \mid d \mid a\}$ possui um número finito de elementos, ie, $imA$ é finita. $\square$

A condição de termos $I_A \neq \{0\}$ é essencial, pois os $L$-ideais $\nu_p$ (valorizações $p$-ádicas) de $\mathbb{Z}$ têm suporte $I_{\nu_p} = \{0\}$ e $im\, \nu_p = L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

# Capítulo 5

# $L$-Radicais e $\mathcal{R}$-Radicais de $L$-Ideais

## 5.1 Motivação: Ideais Primários Clássicos e Radicais

**Definição 5.1.1** *Se $R$ é um anel e $I$ é um ideal próprio de $R$, dizemos que $I$ é um ideal primário se*

$$ab \in I \ e \ a \notin I \Rightarrow \exists n > 0 \mid b^n \in I.$$

**Definição 5.1.2** *Seja $R$ um anel e $N$ um ideal de $R$. O radical de $N$, denotado por $\sqrt{N}$, consiste de todos os elementos $a \in R$ tal que $a^n \in N$ para algum $n > 0$.*

Observa-se que $I$ é primário se e somente se $ab \in I$ e $a \notin I \Rightarrow b \in \sqrt{I}$.

**Proposição 5.1.1** *Seja $N$ um ideal de $R$, então,*
*1) $\sqrt{N}$ é um ideal de $R$ com $N \subseteq \sqrt{N}$.*
*2) $\sqrt{N} = \bigcap\{I \subseteq R \mid I$ é um ideal primo e $N \subseteq I\}$.*

**Demonstração:**

1) Só provaremos que se $x, y \in \sqrt{N}$, então, $x - y \in \sqrt{N}$.

Suponhamos $x, y \in \sqrt{N}$, isto é, $x^n, y^m \in N$ para certos $n, m > 0$. Portanto, usando a fórmula do binômio de Newton, prova-se que $(x-y)^{n+m-1} \in N$, donde, $x - y \in \sqrt{N}$. Com efeito,

$$(x-y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} x^{n+m-1-k}(-y)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} x^{n+(m-1)-k}(-y)^k +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n+m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} x^{n+m-1-k}(-y)^k =$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} x^{(m-1)-k}(-y)^k +$$

$$+ y^m \sum_{k=m}^{n+m-1} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k \end{pmatrix} (-1)^k x^{n+m-1-k} y^{k-m} \in N.$$

2) $\subseteq$: Seja $x \in \sqrt{N}$ e seja $I$ um ideal primo com $N \subseteq I$, então, $x^n \in N$ para algum $n > 0$, daí, $x^n \in I$ e, como $I$ é primo, $x \in I$.

$\supseteq$: Suponhamos que $x \in I$ para todo ideal primo $I$ tal que $N \subseteq I$ e, pelo absurdo, $x \notin \sqrt{N}$, isto é, $\forall n > 0 : x^n \notin N$.

Seja $\mathcal{F} = \{A \subseteq R \mid A \text{ é um ideal, } N \subseteq A \text{ e } \forall n > 0 : x^n \notin A\}$. De fato, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois, $N \in \mathcal{F}$.

Vejamos que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese do lema de Zorn:

Seja $\{A_i\} \subseteq \mathcal{F}$ uma cadeia. Provaremos que $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$. Com efeito, como $\{A_i\}$ é uma cadeia, temos que $\bigcup A_i$ é um ideal, além disso, obviamente, $N \subseteq \bigcup A_i$. Finalmente, se existisse $n > 0$ com $x^n \in \bigcup A_i$, teríamos que

$x^n \in A_j$ para algum $j$, o que é impossível. Portanto, $\forall n > 0 : x^n \notin \bigcup A_i$. Em conseqüência, existe um elemento maximal $M \in \mathcal{F}$.

Afirmação: $M$ é primo.

Seja $ab \in M$ e suponhamos que $a \notin M$ e $b \notin M$. Então, chamando de $I = \langle M \cup \{a\}\rangle$ e $J = \langle M \cup \{b\}\rangle$, temos que $M \subsetneq I$ e $M \subsetneq J$, donde, $I, J \notin \mathcal{F}$, o que implica que existem $n, m > 0$ tais que $x^n \in I$ e $x^m \in J$, isto é, $x^n = z + ra$ e $x^m = w + sb$ com $z, w \in M$ e $r, s \in R$, daí, $x^{n+m} = (z+ra)(w+sb) = (zw+zsb+wra)+rsab \in \langle M \cup \{ab\}\rangle$, mas, como $ab \in M$, temos que $\langle M \cup \{ab\}\rangle = M$ e assim, temos que $x^{n+m} \in M$, uma contradição.

Finalmente, como $x$ está em todo ideal primo que contém $N$, temos que $x \in M$, uma contradição. $\square$

**Proposição 5.1.2** *Se $N$ é um ideal primário de $R$, então, $\sqrt{N}$ é um ideal primo.*

**Demonstração:**

Suponhamos $ab \in \sqrt{N}$ com $a, b \notin \sqrt{N}$, isto é, existe $n > 0$ tal que $(ab)^n \in N$, ou seja, $a^n b^n \in N$ e, $\forall m, k > 0 : a^m \notin N$ e $b^k \notin N$, em particular, $a^n \notin N$, donde, por ser $N$ primário, existe $r > 0$ tal que $(b^n)^r \in N$, isto é, $b^{nr} \in N$, uma contradição. $\square$

## 5.2 $L$-Ideais Primários

**Definição 5.2.1** *Seja $R$ um anel e $I$ um $L$-ideal de $R$. Então, $I$ é dito um $L$-ideal primário se*

$$I(ab) > I(a) \Rightarrow \exists n > 0 \mid I(b^n) \geq I(ab).$$

Essa definição generaliza o caso clássico, pois, se $I$ é um ideal clássico, então, em termos de sua função característica, $ab \in I$ e $a \notin I \Rightarrow I(ab) = 1$ e

$I(a) = 0 \Rightarrow I(ab) > I(a) \Rightarrow \exists n > 0 \mid I(b^n) \geq I(ab) = 1 \Rightarrow \exists n > 0 \mid I(b^n) = 1 \Rightarrow \exists n > 0 \mid b^n \in I$.

Toda função constante $I(x) = \alpha \in L$ é um $L$-ideal primário, pois, a premissa $I(ab) > I(a)$ é sempre falsa, logo, qualquer implicação é verdadeira, em particular, $\exists n > 0 \mid I(b^n) \geq I(ab)$.

Exigiremos que um $L$-ideal primário seja não constante.

**Proposição 5.2.1** *a) Seja $L$ totalmente ordenado, então, todo $L$-ideal fracamente completamente primo (f.c.p.) é primário.*
*b) Todo $L$-ideal $L$-primo é primário.*

**Demonstração:**
a) Seja $I$ um $L$-ideal f.c.p., isto é, $\forall x, y \in R,\ I(xy) = I(x) \vee I(y)$. Suponhamos $I(ab) > I(a)$, isto é, $I(a) \vee I(b) > I(a)$. Então, como $L$ é totalmente ordenado, $I(a) \vee I(b) = I(b)$, isto é, $I(b) = I(ab)$. Portanto, basta tomar $n = 1$.
b) Seja $I$ um $L$-ideal $L$-primo, isto é, $\forall x, y \in R,\ I(xy) = I(x)$ ou $I(xy) = I(y)$. Suponhamos $I(ab) > I(a)$, então, $I(ab) = I(b)$. Portanto, basta tomar $n = 1$. $\square$

O recíproco não é verdade. Vejamos um contra-exemplo: Sejam $R = \mathbb{Z}$ e $I = \nu_p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a valorização $p$-ádica.

Vejamos que $\nu_p$ é primário, mas, não é f.c.p. (nem $L$-primo, pois, sendo $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ totalmente ordenado, esses conceitos são equivalentes):

Suponhamos $\nu_p(ab) > \nu_p(a)$, em particular, $a \neq 0$.
Se $b = 0$, então, $\forall n \geq 1,\ b^n = 0$ e $\nu_p(b^n) = \nu_p(ab) = \infty$.
Se $b \neq 0$, então, $ab \neq 0$ e $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$, portanto, assumindo $\nu_p(ab) > \nu_p(a)$, teremos, $\nu_p(b) > 0$, o que implica, $p \mid b$, isto é, $b = p^r d$ com $r > 0$ e $p$ não divide $d$. Daí, $ab = ap^r d = p^{r+s} cd$, onde $p$ não divide $c$. Então,

$\nu_p(ab) = r + s$. Devemos achar $n > 0$ tal que $\nu_p(b^n) \geq \nu_p(ab)$. Temos que $b^n = p^{rn}d^n$, então, $\nu_p(b^n) = rn$. Queremos $n$ tal que $rn \geq r+s$. Então, basta tomar $n \geq \frac{r+s}{r}$. Logo, $\nu_p$ é primário.

Vamos ver, agora, que $\nu_p$ não é f.c.p. Seja $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \neq 0$ e $p \mid x$. Temos que $\nu_p(x^2) = \nu_p(x) + \nu_p(x) = 2\nu_p(x)$. Suponhamos, por absurdo, que $\nu_p$ é f.c.p. Então, $\nu_p(x^2) = \nu_p(x) \vee \nu_p(x) = \nu_p(x)$, isto é, $2\nu_p(x) = \nu_p(x)$, logo, $\nu_p(x) = 0$, donde, $p$ não divide $x$. Uma contradição.

**Proposição 5.2.2** *Seja $\nu : K \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ uma valorização de Krull. Se $\Gamma$ é um grupo ordenado arquimediano, então, $\nu|_{A_\nu}$ é um ideal fuzzy primário.*

**Demonstração:**

Chamemos de $\mu = \nu|_{A_\nu}$.

Vejamos que $\mu$ é primário:

Sejam $a, b \in A_\nu$. Se $a = 0$ ou $b = 0$, é trivial. Suponhamos $a \neq 0$ e $b \neq 0$ tais que $\mu(ab) > \mu(a)$, então, $\mu(a) + \mu(b) = \mu(ab) > \mu(a)$, isto é, $\mu(b) > 0$. Por outro lado, $\mu(ab) > 0$, pois, $\mu(ab) > \mu(a) \geq 0$.

Assim, como $\Gamma$ é arquimediano, existe $n \geq 1$ tal que $n\mu(b) \geq \mu(ab)$, isto é, $\mu(b^n) \geq \mu(ab)$. Portanto, $\nu|_{A_\nu}$ é um $L$-ideal primário. $\square$

Prova-se facilmente, imitando o caso de $\nu_p$, que se $\nu$ é uma valorização de Krull não-nula, então, $\nu|_{A_\nu}$ não é um $L$-ideal f.c.p. de $A_\nu$.

## 5.3 Diversos Radicais de $L$-Ideais

Daqui em diante, precisaremos supor, em alguns casos, hipóteses adicionais sobre o reticulado $L$.

**Definição 5.3.1** *a) Um reticulado totalmente ordenado $L$ é dito denso se para todo $a, b \in L$ com $a < b$, existe $c \in L$ tal que $a < c < b$.*

*b) Um reticulado completo $L$ é dito infinitamente distributivo se para todo $a \in L$ e para toda família $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq L$, temos:*

$$a \vee (\bigwedge_{i\in I} b_i) = \bigwedge_{i\in I}(a \vee b_i)$$

$$a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge b_i).$$

É fácil ver que num reticulado infinitamente distributivo são satisfeitas as seguintes leis:

$$\bigvee_{i,j}(a_i \wedge b_j) = (\bigvee_i a_i) \wedge (\bigvee_j b_j)$$

$$\bigwedge_{i,j}(a_i \vee b_j) = (\bigwedge_i a_i) \vee (\bigwedge_j b_j).$$

Por outro lado, todo reticulado totalmente ordenado é infinitamente distributivo.

A seguir consideraremos $A$ um $L$-ideal próprio de $R$.

Definimos $\mathcal{P}_A$ como a família de todos os $L$-ideias primos $P$ de $R$ tais que $A \subseteq P$ e $I_A \subseteq I_P$.

**Definição 5.3.2** *O $L$-radical de $A$, denotado por $\sqrt{A}$, é definido por:*

$$\sqrt{A} = \bigcap\{P \mid P \in \mathcal{P}_A\}.$$

Observe que se $\mathcal{P}_A = \emptyset$, então, $\sqrt{A} = R$. Obviamente, $\sqrt{A}$ é um $L$-ideal de $R$ e $A \subseteq \sqrt{A}$. Por outro lado, é fácil demonstrar que $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$, e que se $A$ e $B$ são $L$-ideais com $A(0) = 1 = B(0)$, então, $\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$. Observe também que se $L = \{0, 1\}$, então, o $L$-radical de $A$ coincide com o radical clássico de $A$. Porém, se $L \neq \{0, 1\}$ e $A$ é um ideal clássico de $R$, não é imediato que $\sqrt{A}$ coincide com o radical clássico de $A$.

**Proposição 5.3.1** *Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado denso e $A$ é um $L$-ideal não constante, então, $\mathcal{P}_A \neq \emptyset$.*

**Demonstração:**

Como $A$ é não constante, existe $x \in R$ tal que $A(x) \neq A(0)$, mais especificamente, $A(x) < A(0)$. Como $L$ é denso, existe $a \in L$ tal que $A(x) < a < A(0)$, daí, $A_a = \{z \in R \mid A(z) \geq a\} \neq R$, pois, $x \notin A_a$. Portanto, existe um ideal primo próprio $J$ de $R$ com $A_a \subseteq J$. Seja $P$ o $L$-ideal $a^J$, isto é, $P(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \in J \\ a, & \text{se } z \notin J \end{cases}$, então, é fácil ver que $P$ é um $L$-ideal primo de $R$ e que $A \subseteq P$ e $I_A \subseteq I_P$. Portanto, $P \in \mathcal{P}_A$. $\square$

Vejamos que as hipóteses da proposição anterior não são necessárias para que $\mathcal{P}_A \neq \emptyset$. Por exemplo, se $R = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $A = \nu_p$ com $p$ primo, mostraremos que $\sqrt{\nu_p} = 1_{(p)}$ $(= (p))$, onde $(p)$ é o ideal principal gerado por $p$.

Observa-se que $\sqrt{\nu_p} = \bigcap\{P \mid \nu_p \subseteq P \text{ e } I_{\nu_p} \subseteq I_P\}$. De fato, a condição $I_{\nu_p} \subseteq I_P$ é satisfeita, pois, $I_{\nu_p} = \{0\}$, logo, $\sqrt{\nu_p} = \bigcap\{P \mid \nu_p \subseteq P\}$. Por outro lado, como $P$ é um $L$-ideal primo de $\mathbb{Z}$ e $1_L = \infty$, temos que, devido a Proposição 4.2.3, $P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x \in J \\ m, & \text{se } x \notin J \end{cases}$, onde $J$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Nessas condições existe um primo $q$ tal que $J = (q)$, donde $P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x \in (q) \\ m, & \text{se } x \notin (q) \end{cases}$.

Mais ainda, se exigirmos que $\nu_p \subseteq P$, então, necessariamente, $q = p$. Com efeito, temos que $\forall x \in \mathbb{Z},\ \nu_p(x) \leq P(x)$, em particular, tomando $x = p^{m+1}$ temos que $\nu_p(x) = m+1$, donde $P(x) = \infty$, ie, $x = p^{m+1} \in (q)$, o que implica $q \mid p$, ie, $q = p$.

Resumindo, temos que se $P$ é um $L$-ideal primo que contém $\nu_p$, então,
$$P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x \in (p) \\ m, & \text{se } x \notin (p) \end{cases}.$$

Finalmente, $1_{(p)}(x) = \begin{cases} \infty, & x \in (p) \\ 0, & x \notin (p) \end{cases}$, donde, $1_{(p)} \subseteq P$ para todo $P$ como acima, concluindo que $\sqrt{\nu_p} = 1_{(p)}$.

**Definição 5.3.3** *O L-subconjunto $\mathcal{R}(A)$, definido por*

$$\mathcal{R}(A)(x) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} A(x^n)$$

*$\forall x \in R$, é chamado de $\mathcal{R}$-radical de $A$.*

É fácil ver que se $L = \{0, 1\}$, então, o $\mathcal{R}$-radical de $A$ coincide com o radical clássico de $A$. Mais ainda, se $L$ é qualquer e $A$ é um ideal clássico de $R$, então, o $\mathcal{R}$-radical de $A$ coincide com o radical clássico de $A$.

Exemplo: Sejam $R = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $A = \nu_p$ com $p$ primo. Provaremos que $\mathcal{R}(\nu_p) = 1_{(p)}$ $(= (p))$. Com efeito, se $x \in (p)$, então, $x = kp$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, logo, $\nu_p(x) \neq 0$ e $\mathcal{R}(\nu_p)(x) = \bigvee_{n \geq 0} \nu_p(x^n) = \bigvee_{n \geq 0} n.\nu_p(x) = (\bigvee_{n \geq 0} n).\nu_p(x) = \infty.\nu_p(x) = \infty = 1_L = 1_{(p)}(x)$. Se $x \notin (p)$, então, $p$ não divide $x$, logo, $\nu_p(x) = 0$ e $\mathcal{R}(\nu_p)(x) = \bigvee_{n \geq 0} \nu_p(x^n) = \bigvee_{n \geq 0} n.\nu_p(x) = 0 = 1_{(p)}(x)$.

**Proposição 5.3.2** *Se $A$ é um L-ideal de $R$, então, $A \subseteq \mathcal{R}(A) \subseteq \sqrt{A}$.*

**Demonstração:**

Com efeito, $A(x) \leq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} A(x^n) = \mathcal{R}(A)(x)$ $\forall x \in R$, logo, $A \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Suponhamos $\mathcal{P}_A \neq \emptyset$ e seja $P \in \mathcal{P}_A$, ie, $P$ é um $L$-ideal primo com $A \subseteq P$ e $I_A \subseteq I_P$. Assim, $imP = \{1, a\}$, onde $a$ $(\neq 1)$ é um elemento primo de $L$.

Sejam $x \in R$ e $n \in \mathbb{N}$.

• Se $P(x^n) = 1$, então, $x^n \in I_P$. Como $I_P$ é um ideal primo de $R$, então, $x \in I_P$, ie, $P(x) = 1$. Logo, $P(x^n) = P(x)$.

• Se $P(x^n) = a$, então, $P(x) = a$, pois, caso contrário, teríamos que $P(x) = 1$, ie, $x \in I_P$, donde, $x^n \in I_P$ e assim, $P(x^n) = 1$. Uma contradição.

Portanto, $P(x) = P(x^n) \geq A(x^n)$, pois, $A \subseteq P$. Logo, $\forall x \in R$, $\mathcal{R}(A)(x) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} A(x) \leq P(x)$. Finalmente, como essa relação é válida, $\forall P \in \mathcal{P}_A$, temos que $\mathcal{R}(A) \subseteq \bigcap_{P \in \mathcal{P}_A} P$. Logo, $\mathcal{R}(A) \subseteq \sqrt{A}$. $\square$

**Proposição 5.3.3** *Se $A$ é um $L$-ideal de $R$ e $L$ é infinitamente distributivo, em particular, se $L$ é totalmente ordenado, então, $\mathcal{R}(A)$ é um $L$-ideal de $R$.*

**Demonstração:**

Sejam $x, y \in R$. Obviamente, $\mathcal{R}(A)(-x) = \mathcal{R}(A)(x)$.

Para provarmos que $\mathcal{R}(A)(xy) \geq \mathcal{R}(A)(x) \vee \mathcal{R}(A)(y)$, basta provar, em virtude de $R$ ser comutativo, que $\mathcal{R}(A)(xy) \geq \mathcal{R}(A)(x)$. Com efeito, $\mathcal{R}(A)(xy) = \bigvee_{n \geq 0} A((xy)^n) = \bigvee_{n \geq 0} A(x^n y^n) \geq \bigvee_{n \geq 0} A(x^n) = \mathcal{R}(A)(x)$.

Resta provar que $\mathcal{R}(A)(x+y) \geq \mathcal{R}(A)(x) \wedge \mathcal{R}(A)(y)$. Sejam $m, n \geq 0$, então, pela fórmula do binômio de Newton,

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ k \end{pmatrix} x^{m+n-k} y^k =$$

$$x^m \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} m+n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k + y^n \sum_{k=n+1}^{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ k \end{pmatrix} x^{m+n-k} y^{k-n}.$$

Portanto, $A((x+y)^{m+n}) \geq A(x^m) \wedge A(y^n)$, donde, $\mathcal{R}(A)(x+y) = \bigvee_{l \geq 0} A((x+y)^l) = \bigvee_{m,n \geq 0} A((x+y)^{m+n}) \geq \bigvee_{m,n \geq 0} (A(x^m) \wedge A(y^n))$. Por ser $L$ infinitamente distributivo, concluímos que $\mathcal{R}(A)(x+y) \geq \bigvee_{m \geq 0} A(x^m) \wedge \bigvee_{n \geq 0} A(y^n) = \mathcal{R}(A)(x) \wedge \mathcal{R}(A)(y)$. $\square$

Uma outra propriedade do $\mathcal{R}$-radical facilmente demonstrável é a seguinte: se $A$ e $B$ são $L$-ideais, então, $\mathcal{R}(A \cap B) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

**Lema 5.1** *i) Se $J$ é um ideal clássico de $R$ e $a \in L \setminus \{1\}$ é primo, então, $\sqrt{a^J} = a^{\sqrt{J}}$*

*ii) Se $J$ é um ideal clássico de $R$ e $a \in L$, então, $\sqrt{a_J} \supseteq a_{\sqrt{J}}$.*

**Demonstração:**

i) Seja $x \in R$ tal que $x \notin \sqrt{J}$, então, por definição, $(a^{\sqrt{J}})(x) = a$, além disso, existe um ideal primo $Q$ de $R$ com $J \subseteq Q$ tal que $x \notin Q$. Seja $P = a^Q$, então, temos que $P$ é um $L$-ideal primo de $R$, $a^J \subseteq P$ e $J \subseteq I_P = Q$. Daí, $a = a^J(x) \leq (\sqrt{a^J})(x) \leq a$, ie, $(\sqrt{a^J})(x) = a$.

Agora, seja $x \in \sqrt{J}$. Então, $(a^{\sqrt{J}})(x) = 1$. Seja $P$ um $L$-ideal primo de $R$ tal que $a^J \subseteq P$ e $J \subseteq I_P$. Como $x \in \sqrt{J}$, então, existe $n > 0$ tal que $x^n \in J$, o que implica que $x^n \in I_P$. Daí, como $I_P$ é primo, $x \in I_P$, isto é, $P(x) = P(0) = 1$, donde, $(\sqrt{a^J})(x) = 1$.

ii) Se $x \notin \sqrt{J}$, então, $a_{\sqrt{J}}(x) = 0 \leq (\sqrt{a_J})(x)$. Agora, se $x \in \sqrt{J}$, então, $a_{\sqrt{J}}(x) = a$. Além disso, se $P$ é um $L$-ideal primo com $a_J \subseteq P$ e $J \subseteq I_P$, temos que $I_P$ é primo, donde, $\sqrt{J} \subseteq I_P$, logo, $x \in I_P$, ou seja, $P(x) = P(0) = 1$. Isso implica que $\sqrt{a_J}(x) = 1$. Assim, $a_{\sqrt{J}}(x) = a \leq 1 = (\sqrt{a_J})(x)$. $\square$

Observa-se que a igualdade da parte ii é válida se, e somente se, $a = 1$.

Na seqüência veremos que os diversos conceitos de radical de um $L$-ideal permitem definir correspondentes conceitos de ideais primários *fuzzy*.

**Definição 5.3.4** *Seja $J$ um $L$-ideal não constante de $R$, então,*

*a) $J$ é dito um $L$-ideal $L$-primário de $R$, se para todo $A, B$ $L$-ideais de $R$ temos:*

$$A \cdot B \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J \text{ ou } B \subseteq \sqrt{J}.$$

*b) $J$ é dito $\mathcal{R}$-primário se para todo $A, B$ $L$-ideais:*

$$A \cdot B \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J \text{ ou } B \subseteq \mathcal{R}(J).$$

**Lema 5.2** *Seja $L$ um reticulado totalmente ordenado denso e $J$ um $L$-ideal não constante de $R$. Seja $x \in R$ tal que $J(1) < J(x)$. Então, $(\sqrt{J})(1) < J(x)$.*

**Demonstração:** Seja $m \in L$ tal que $J(1) < m < J(x)$. Então, $J_m$ é um ideal próprio de $R$, pois, $1 \notin J_m$. Seja $P$ um ideal primo de $R$ tal que $J_m \subseteq P$, $P \neq R$ e seja $A(x) = \begin{cases} 1, & x \in P \\ m, & x \notin P \end{cases}$, ie, $A = m^P$. Assim, $A$ é um $L$-ideal primo de $R$. Além disso, $A \in \mathcal{P}_J$. Então, $(\sqrt{J})(1) \leq A(1) = m < J(x)$. $\square$

**Lema 5.3** *Seja $L$ um reticulado totalmente ordenado e $J$ um $L$-ideal de $R$ tal que $imJ = \{1, a\}$ com $a \in L \setminus \{1\}$. Então, $I_{\sqrt{J}} = \sqrt{I_J}$.*

**Demonstração:**
($\subseteq$) Seja $x \in I_{\sqrt{J}}$, isto é, $(\sqrt{J})(x) = 1$ e seja $B$ um ideal primo de $R$ tal que $I_J \subseteq B$. Consideremos o $L$-ideal próprio $A(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ a, & x \notin B \end{cases}$. Assim, temos que $J \subseteq A$ e $I_J \subseteq I_A = B$, ou seja, $A \in \mathcal{P}_J$. Daí, $(\sqrt{J})(x) \leq A(x)$, donde, $A(x) = 1$, ou seja, $x \in I_A = B$, logo, $x \in \sqrt{I_J}$.
($\supseteq$) Seja $x \in \sqrt{I_J}$, então, existe $n > 0$ tal que $x^n \in I_J$, isto é, $J(x^n) = 1$. Como $imJ = \{1, a\}$, então, $J(x) = 1$, ou seja $x \in I_J$. Seja $P$ um $L$-ideal primo de $R$ tal que $J \subseteq P$ e $I_J \subseteq I_P$. Então, $P(x) = 1$. Portanto, $(\sqrt{J})(x) = 1$, isto é, $x \in I_{\sqrt{J}}$. $\square$

A seguir, enunciaremos algumas propriedades dos diversos $L$-ideais primários definidos acima.

**Proposição 5.3.4** *Seja $L$ um reticulado totalmente ordenado denso e seja $J$ um $L$-ideal de $R$. Então, $J$ é $L$-primário $\Leftrightarrow$ $J(0) = 1$, $I_J$ é um ideal primário de $R$ e $imJ = \{1, a\}$ com $a \in L \setminus \{1\}$, isto é, $J = a^{I_J}$.*

**Demonstração:**
($\Rightarrow$) Suponhamos que $J$ é um $L$-ideal $L$-primário e $J(0) = b < 1$. Seja $J(1) = a$. Como $J$ é não constante, então, $a < b$, ie, $J(1) < J(0)$, logo, pelo

Lema 5.2 $(\sqrt{J})(1) < J(0) = b$. Seja $m \in L$ tal que $b < m \leq 1$ e sejam $A, B$ $L$-subconjuntos de $R$ tal que $A(x) = \begin{cases} m, & x \in I_J \\ a, & x \notin I_J \end{cases}$ e $B = b_R$. Então, $A$ e $B$ são $L$-ideais de $R$. Provaremos que $A \cdot B \subseteq J$.

Seja $x \in R$. Se $x \in I_J$, então, $J(x) = J(0) = b$ e $(A \cdot B)(x) = \{A(y) \wedge B(z) \mid y \cdot z = x\} = \{A(y) \wedge b \mid y \cdot z = x\} \leq b = J(x)$. Se $x \notin I_J$, então, $A(x) = a < b$. Logo, $(A \cdot B)(x) = a = J(1) \leq J(x)$.

Portanto, $A \cdot B \subseteq J$, mas, $A \not\subseteq J$, pois, $J(0) = b < m = A(0)$ e $B \not\subseteq \sqrt{J}$, pois, $(\sqrt{J})(1) < b = B(1)$. Uma contradição, logo, $J(0) = 1$.

Provaremos, agora, que $imJ = \{1, a\}$, com $a \in L \setminus \{1\}$. Como $J$ é não constante, existe $a \neq 1$ tal que $J(1) = a$. Suponhamos que existe $b \in L$, com $a < b < 1$ tal que $b \in imJ$. Seja $z \in R$ tal que $J(z) = b$. Então, pelo Lema 5.2, $(\sqrt{J})(1) < J(z)$. Sejam $A, B$ $L$-subconjuntos de $R$ tal que $A(x) = \begin{cases} 1, & x \in J_b \\ a, & x \notin J_b \end{cases}$ e $B = b_R$. Então, $A$ e $B$ são $L$-ideais de $R$. Além disso, $A \cdot B \subseteq J$. Mas, $A \not\subseteq J$, pois, $J(z) = b < 1 = A(z)$ e $B \not\subseteq \sqrt{J}$, pois, $(\sqrt{J})(1) < J(z) = b = B(1)$. Uma contradição, portanto, $imJ = \{1, a\}$.

Resta provar que $I_J$ é um ideal primário de $R$. Sejam $S, T$ ideais de $R$ tal que $S \cdot T \subseteq I_J$. Consideremos os $L$-ideais $A = 1_S$ e $B = 1_T$. Então, $A \cdot B \subseteq J$. De fato, $(A \cdot B)(z) = \{1_S(x) \wedge 1_T(y) \mid x \cdot y = z\}$. Assim, $(A \cdot B)(z) = 0$ ou $(A \cdot B)(z) = 1$. Se $(A \cdot B)(z) = 0$, então, $(A \cdot B)(z) \leq J(z)$. Se $(A \cdot B)(z) = 1$, então, $z = x \cdot y$ onde $x \in S$ e $y \in T$, logo, $z \in I_J$, isto é, $J(z) = 1$.

Agora, como $J$ é $L$-primário, $A \subseteq J$ ou $B \subseteq \sqrt{J}$. Se $A \subseteq J$, então, $S \subseteq I_J$. Se $B \subseteq \sqrt{J}$ , então, $T \subseteq I_{\sqrt{J}} = \sqrt{I_J}$. Logo, $I_J$ é um ideal primário de $R$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos $J$ como na hipótese. Sejam $A, B$ $L$-ideais de $R$ tais que $A \cdot B \subseteq J$. Suponhamos que $A \not\subseteq J$ e $B \not\subseteq \sqrt{J}$. Então, existem $x, y \in R$ tais que $A(x) > J(x)$ e $B(y) > (\sqrt{J})(y)$. Como $J(0) = 1 = (\sqrt{J})(0)$, então,

$x \notin I_J$ e $y \notin I_{\sqrt{J}}$. Como $\sqrt{I_J} = I_{\sqrt{J}}$, então, $y \notin \sqrt{I_J}$. Assim, $x \cdot y \notin I_J$, ou seja, $J(x \cdot y) = a$. Portanto, $J(x) = a$ e $J(y) = a$, logo, $A(x) > a$ e $B(y) > a$, isto é, $A(x) \wedge B(y) > a$, pois $L$ é totalmente ordenado. Por outro lado, $a = J(x \cdot y) \geq (A \cdot B)(x \cdot y) \geq A(x) \wedge B(y)$, ie, $A(x) \wedge B(y) \leq a$. Uma contradição. Portanto, $J$ é um $L$-ideal $L$-primário de $R$. $\square$

Observe, na proposição anterior, que como $L$ é totalmente ordenado e $a \neq 1$, então, $a$ é um elemento primo de $L$.

**Proposição 5.3.5** *Seja $J$ um $L$-ideal de $R$, então, $J$ é $\mathcal{R}$-primário $\Leftrightarrow J(0) = 1, I_J$ é um ideal primário de $R$ e $imJ = \{1, c\}$, isto é, $J = c^{I_J}$, onde $c \in L \setminus \{1\}$ e $c$ é um elemento primo de $L$.*

**Demonstração:**

$(\Rightarrow)$ Suponhamos $J$ $\mathcal{R}$-primário. Provaremos primeiro que $|imJ| = 2$. De fato, como $J$ é não constante, $|imJ| \geq 2$. Seja $x \notin I_J$ e seja $c = J(x)$, então, $J(1) \leq c < 1$. Chamando de $a = J(1)$ consideremos os $L$-ideais $A = a_{(x)}$ e $B = c_R$.

Afirmação: $A \cdot B = a_{(x)} \cdot c_R \subseteq J$.

Com efeito, seja $z \in R$, então, $(A \cdot B)(z) = \bigvee\{A(z_1) \wedge B(z_2) \mid z_1 \cdot z_2 = z\} = \bigvee\{A(z_1) \wedge c \mid z_1 \cdot z_2 = z\}$.

Se $z_1 \in (x)$, então, $z \in (x)$ e $A(z_1) = 1$, donde, $A(z_1) \wedge c = c = J(x) \leq J(z)$. Se $z_1 \notin (x)$, então, $A(z_1) = a = J(1) \leq J(z)$, portanto, $(A \cdot B)(z) \leq J(z)$, ie, $A \cdot B \subseteq J$.

Por outro lado, $A \nsubseteq J$, pois, $A(x) = 1 > c = J(x)$. Logo, como $J$ é $\mathcal{R}$-primário, devemos ter $B \subseteq \mathcal{R}(J)$. Portanto, $J(x) = c = B(1) \leq \mathcal{R}(J)(1) = \bigvee J(1) = a$, resultando $c = a$, o que implica $J(x) = J(1)$. Daí, $imJ = \{J(1), J(0)\}$.

Provaremos, agora, que $J(0) = 1$. Suponhamos $J(0) = b < 1$ e sejam $A = b_R$ e $B = 1_{I_J}$. Provaremos que $A \cdot B \subseteq J$. Seja $x \in R$, então, $(A \cdot B)(x) = \bigvee\{A(x_1) \wedge B(x_2) \mid x_1 \cdot x_2 = x\} = \bigvee\{b \wedge B(x_2) \mid x_1 \cdot x_2 = x\}$. Se $x_2 \in I_J$, então, $x \in I_J$ e $B(x_2) = 1$, donde, $b \wedge B(x_2) = b \leq J(0) = J(x)$. Se $x_2 \notin I_J$, então, $b \wedge B(x_2) = b \wedge 0 = 0 \leq J(x)$. Resulta, então, que $(A \cdot B)(x) \leq J(x)$.

Afirmação: $A \nsubseteq J$ e $B \nsubseteq \mathcal{R}(J)$.

Isso seria uma contradição, pois, $J$ é $\mathcal{R}$-primário, donde, $J(0) = b = 1$.

Com efeito, $A(1) = b = J(0) > J(1)$, donde, $A \nsubseteq J$. Além disso, $B(0) = 1 > b = J(0) = \mathcal{R}(J)(0)$, donde, $B \nsubseteq \mathcal{R}(J)$.

A seguir, demonstraremos que $c$ $(= J(1))$ é um elemento primo de $L$.

Sejam $a, b \in L$ tais que $a \wedge b \leq c$ e consideremos os $L$-ideais (constantes) $a_R$ e $b_R$. É fácil ver que $b_R \cdot a_R \subseteq J$, portanto, como $J$ é $\mathcal{R}$-primário, temos que $b_R \subseteq J$ ou $a_R \subseteq \mathcal{R}(J)$. Se $b_R \subseteq J$, então, $b = b_R(1) \leq J(1) = c$. Se $a_R \subseteq \mathcal{R}(J)$, então, $a = a_R(1) \leq \mathcal{R}(J)(1) = J(1) = c$.

Resta provar que $I_J$ é um ideal primário de $R$.

Sejam $x, y \in R$ tais que $xy \in I_J$, ie, $J(xy) = J(0) = 1$. Consideremos os $L$-ideais $1_{(x)}$ e $1_{(y)}$. Prova-se facilmente que $1_{(x)} \cdot 1_{(y)} \subseteq J$, portanto, como $J$ é $\mathcal{R}$-primário, temos que $1_{(x)} \subseteq J$ ou $1_{(y)} \subseteq \mathcal{R}(J)$. Se $1_{(x)} \subseteq J$, então, $1 = 1_{(x)}(x) \leq J(x)$, donde $J(x) = 1$ e $x \in I_J$. Se $1_{(y)} \subseteq \mathcal{R}(J)$, então, $1 = 1_{(y)}(y) \leq \mathcal{R}(J)(y)$, donde, $\bigvee_{n \geq 0} J(y^n) = 1$ e, como $J$ é finito valuado, necessariamente, existe $n \geq 0$ com $n \neq 0$, pois, $J(1) < J(0) = 1$, tal que $J(y^n) = 1$, ie, $y^n \in I_J$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $J$ satisfaz as condições dadas.

Sejam $A, B$ $L$-ideais de $R$ tal que $A \cdot B \subseteq J$. Suponhamos, pelo absurdo, que $A \nsubseteq J$ e $B \nsubseteq \mathcal{R}(J)$. Então, existem $x, y \in R$ tais que $A(x) \nleq J(x)$ e $B(y) \nleq \mathcal{R}(J)(y)$. Assim, $x \notin I_J$, pois se $J(x) = 1$, então, teríamos,

$A(x) \leq J(x)$. Da mesma forma, $y \notin I_{\mathcal{R}(J)} = \sqrt{I_J}$ (sendo válida esta igualdade por ser $imJ$ finita). E, portanto, como $I_J$ é primário, $xy \notin I_J$, ie, $J(xy) = c$.

Agora, temos que $A(x) \wedge B(y) \leq (A \cdot B)(xy) \leq J(xy) = c$. Como $c$ é um elemento primo e $A(x) \not\leq J(x) = c$, então, $B(y) \leq c$. Mas, $y \notin \sqrt{I_J}$, isto é, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y^n \notin I_J$, donde, $J(y^n) = c \; \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{R}(J)(y) = c \geq B(y)$, uma contradição. Portanto, $A \subseteq J$ ou $B \subseteq \mathcal{R}(J)$, isto é, $J$ é um $L$-ideal $\mathcal{R}$-primário de $R$. $\square$

**Corolário 5.3.5.1** *Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado denso, então, $J$ é $L$-primário $\Leftrightarrow$ $J$ é $\mathcal{R}$-primário.* $\square$

**Proposição 5.3.6** *Todo $L$-ideal $\mathcal{R}$-primário é primário.*

**Demonstração:**

Seja $J$ $\mathcal{R}$-primário e sejam $x, y \in R$ tais que $J(xy) > J(x)$, então, $J(xy) = 1$ e $J(x) = c$ com $c \in L \setminus \{1\}$, $c$ elemento primo de $L$.

Por outro lado, como $I_J = \{z \in R \mid J(z) = J(0) = 1\}$, temos que $xy \in I_J$, logo, como $I_J$ é primário e $x \notin I_J$, existe $n > 0$ tal que $y^n \in I_J$, isto é, $J(y^n) = 1 = J(xy)$. $\square$

Vejamos que o recíproco, em geral, não é verdade. Para tanto, consideremos $R = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $J = \nu_p$ com $p$ primo. Sabemos que $\nu_p$ é primário, mas, obviamente, não é $\mathcal{R}$-primário, pois, $im\nu_p = L$.

Por outro lado, para os mesmos $R$ e $L$ dados acima, se $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq 0$ e $n \geq 1$, e $p$ é primo, então, o $L$-ideal $J = m^{(p^n)}$ é $\mathcal{R}$-primário (e, portanto, também primário) de $R$, pois, $(p^n)$ é primário.

**Proposição 5.3.7** *a) Se $L$ é um reticulado totalmente ordenado denso e $J$ é um $L$-ideal $L$-primário de $R$, então, $\sqrt{J}$ é um $L$-ideal primo de $R$.*

*b) Se $J$ é um $L$-ideal $\mathcal{R}$-primário de $R$, então, $\mathcal{R}(J)$ é um $L$-ideal primo de $R$.*

**Demonstração:**

a) Pela Proposição 5.3.4, $J(0) = 1$, $I_J$ é um ideal primário de $R$ e $imJ = \{1, a\}$ com $a \neq 1$, ie, $J = a^{I_J}$. Portanto, como $I_{\sqrt{J}} = \sqrt{I_J}$ e $\sqrt{I_J}$ é um ideal primo por ser $I_J$ primário, temos que $I_{\sqrt{J}}$ é um ideal primo de $R$. Além disso, $\sqrt{J} = \sqrt{a^{I_J}} = a^{\sqrt{I_J}}$, o que implica que $\sqrt{J}$ é um $L$-ideal primo pela Proposição 4.2.3.

b) Seja $J$ um $L$-ideal $\mathcal{R}$-primário de $R$. Então, pela Proposição 5.3.5, temos que $J = c^{I_J}$, onde $c \neq 1$ é um elemento primo de $L$ e $I_J$ é um ideal primário de $R$.

Afirmação: $\mathcal{R}(J) = c^{\sqrt{I_J}}$.

Com efeito, se $x \in \sqrt{I_J}$, então, existe $n > 0$ tal que $x^n \in I_J$, ie, $J(x^n) = 1$, logo, $\mathcal{R}(J)(x) = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} J(x^m) = 1 = c^{\sqrt{I_J}}(x)$. Se $x \notin \sqrt{I_J}$, então, $\forall n > 0$, $x^n \notin I_J$, ie, $\forall n > 0$, $J(x^n) = c$, donde, $\mathcal{R}(J)(x) = c = c^{\sqrt{I_J}}(x)$.

Em conseqüência, pela Proposição 4.2.3, temos que $\mathcal{R}(J)$ é um $L$-ideal primo de $R$, pois, sendo $I_J$ primário, temos que $\sqrt{I_J}$ é primo. $\square$

As duas proposições seguintes reforçam a importância do $\mathcal{R}$-radical como próximo do radical clássico.

**Proposição 5.3.8** *Se $A$ é um $L$-ideal de $R$, então,*

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup \{x_a \mid x \in R, a \in L \ e \ \exists n \geq 0 : (x_a)^n \in A\}.$$

*Repare que $(x_a)^n = x_a \cdot \ldots \cdot x_a = (x^n)_a$.*

**Demonstração:**

$\supseteq$: Sejam $x \in R$ e $a \in L$ tal que $\exists n \geq 0 : (x_a)^n \in A$, ie, $(x^n)_a \in A$, então,

$A(x^n) \geq a$, logo, $\mathcal{R}(A)(x) = \bigvee_{m\geq 0} A(x^m) \geq A(x^n) \geq a$, ie, $x_a \in \mathcal{R}(A)$, daí, $\bigcup\{x_a \mid x \in R, a \in L$ e $\exists n \geq 0 : (x_a)^n \in A\} \subseteq \mathcal{R}(A)$.

$\subseteq$: Consideremos $y \in R$ e seja $a_n = A(y^n)$ para todo $n \geq 0$, então, $(y^n)_{a_n} \in A$, ie, $(y_{a_n})^n \in A$. Assim, $\mathcal{R}(A)(y) = \bigvee_{n\geq 0} A(y^n) = \bigvee_{n\geq 0} a_n = \bigvee_{n\geq 0} y_{a_n}(y) = (\bigcup_{n\geq 0} y_{a_n})(y) \leq (\bigcup\{x_a \mid x \in R, a \in L$ e $\exists n \geq 0 : (x_a)^n \in A\})(y)$. Portanto, $\mathcal{R}(A) \subseteq \bigcup\{x_a \mid x \in R, a \in L$ e $\exists n \geq 0 : (x_a)^n \in A\}$. $\square$

**Proposição 5.3.9** *Se $J$ é um $L$-ideal não constante de $R$, então, $J$ é $\mathcal{R}$-primário $\Leftrightarrow \forall x, y \in R, \forall a, b \in L$, temos que se $x_a \cdot y_b \in J$, e $x_a \notin J$, então, $\exists n > 0 \mid (y_b)^n \in J$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$): Suponhamos que $J$ é $\mathcal{R}$-primário. Então, pela Proposição 5.3.5, $J(0) = 1$, $I_J$ é um ideal primário de $R$ e $imJ = \{1, c\}$ onde $c$ é um elemento primo de $L \setminus \{1\}$.

Sejam $x, y \in R$ e $a, b \in L$ tais que $x_a \cdot y_b \in J$ e $x_a \notin J$, isto é, $a \nleq J(x)$, logo, $x \notin I_J$, pois, $J(0) = 1$. Daí, $c = J(x) \ngeq a$. Suponhamos, por absurdo, que $\forall n > 0$, $(y_b)^n \notin J$, então, $\forall n > 0$, $y^n \notin I_J$, donde, por ser $I_J$ primário, $xy \notin I_J$, isto é, $J(xy) = c$. Mas, $(x_a \cdot y_b)(xy) = a \wedge b$, ou seja, $a \wedge b = (x_a \cdot y_b)(xy) \leq J(xy) = c$. Agora, como $c$ é um elemento primo, então, $a \leq c$ ou $b \leq c$, mas, como $a \nleq c$ temos $b \leq c$. Seja $n > 0$, então, $(y_b)^n(y^n) = b \leq c = J(y^n)$, pois, $y^n \in I_J$, isto é, $(y_b)^n \in J$, uma contradição.

($\Leftarrow$): Suponhamos que $\forall x, y \in R$ e $\forall a, b \in L$ com $x_a \cdot y_b \in J$ e $x_a \notin J$ existe $n > 0$ tal que $(y_b)^n \in J$. Vamos mostrar que $J(0) = 1$, $I_J$ é um $L$-ideal primário de $R$ e $imJ = \{1, c\}$ onde $c \in L \setminus \{1\}$ e $c$ um elemento primo de $L$, donde, pela Proposição 5.3.5, teremos que $J$ é $\mathcal{R}$-primário.

Suponhamos que $J(0) = a < 1$. Como $J$ não é constante, existe $x \in R$ tal que $J(x) < J(0)$. Temos que $x_a \cdot 0_1 = (x \cdot 0)_{a\wedge 1} = 0_a \in J$, pois, $J(0) = a$.

Mas, $x_a \notin J$, pois, $J(x) < J(0) = a$. Por outro lado, $\forall n > 0$, $(0_1)^n = (0^n)_1 = 0_1 \notin J$, pois, $J(0) = a < 1$, uma contradição. Logo, $J(0) = 1$.

Sejam $x, y \in J$ com $xy \in I_J$, isto é, $J(xy) = 1$. Queremos mostrar que $x \in I_J$ ou $\exists n > 0$ tal que $y^n \in I_J$. Suponhamos que $x \notin I_J$, logo, $J(x) < 1$ e, portanto, $x_1 \notin J$. Mas, $x_1 \cdot y_1 = (xy)_1 \in J$, pois, $J(xy) = 1$, logo, pela hipótese, existe $n > 0$ tal que $(y_1)^n \in J$, isto é, $J(y^n) = 1$, ou seja, $y^n \in I_J$.

Como $J(0) = 1$, e $J$ é não constante, então, $J(1) = c$ com $c < 1$. Agora seja $x \in R$ tal que $J(x) < 1$. Provaremos que $J(x) = c$. Chamando $a = J(x)$, temos, $c = J(1) \leq J(x) = a$, donde, $c \leq a$. Por outro lado, temos que $x_1 \cdot 1_a = x_a \in J$, pois, $J(x) = a$. Mas, $x_1 \notin J$, pois, $1 > a = J(x)$, logo, existe $n > 0$ tal que $(1_a)^n \in J$, ou seja, $1_a \in J$. Assim, $a \leq J(1) = c$, donde, $a = c$, portanto $imJ = \{1, c\}$ onde $c \in J \setminus \{1\}$.

Resta mostrar que $c$ é um elemento primo de $L$. Sejam $a, b \in L$ tais que $a \wedge b \leq c$. Então, $1_a \cdot 1_b \in J$, pois, $J(1) = c \geq a \wedge b$. Suponhamos que $a \nleq c$, então, $1_a \notin J$, logo, existe $n > 0$ tal que $(1_b)^n \in J$, isto é $1_b \in J$, ou seja, $b \leq J(1) = c$, portanto, $c$ é um elemento primo de $L$. $\square$

No que resta deste capítulo, demonstraremos que, sob certas condições sobre o reticulado $L$ e sobre o $L$-ideal $A$, o $L$-radical de $A$ e o $\mathcal{R}$-radical de $A$ coincidem.

**Definição 5.3.5** *Um conjunto parcialmente ordenado $(\sum, \leq)$ diz-se que satisfaz a condição de cadeia ascendente se toda seqüência crescente em $\sum$ é estacionária, isso significa que se $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k \leq ...$ é uma seqüência cresecente em $\sum$, existe $n$ tal que $x_k = x_n$ para todo $k \geq n$.*

**Lema 5.4** *Seja $(\sum, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, então, são equivalentes:*

*i)* $\sum$ *satisfaz a condição de cadeia ascendente;*

*ii) todo subconjunto não vazio de* $\sum$ *tem um elemento maximal.*

**Demonstração:**

(i $\Rightarrow$ ii): Suponhamos que (ii) é falso, ou seja, existe um subconjunto $N \subseteq \sum$ tal que $N \neq \emptyset$ e não tem elemento maximal. Seja $x_1 \in N$, então, $x_1$ não é maximal de $N$, logo, existe $x_2 \in N$ tal que $x_1 < x_2$. Também, $x_2$ não é maximal de $N$ pela suposição. Assim, existe $x_3 \in N$ tal que $x_1 < x_2 < x_3$. Nesse processo construímos uma seqüência crescente não estacionária em $\sum$, o que contradiz (i).

(ii $\Rightarrow$ i): Se $x_1 \leq x_2 \leq ...$ é uma seqüência crescente em $\sum$, então, o conjunto $N = \{x_k \mid k \geq 1\}$ é não vazio e tem elemento maximal, digamos, $x_n$. Logo, a seqüência é estacionária. $\square$

**Definição 5.3.6** *Sejam* $A$ *um* $L$*-subconjunto de* $R$. *Diremos que* $A$ *tem a propriedade do supremo se* $imA$ *satisfaz a condição de cadeia ascendente.*

Seja $A$ um $L$-ideal de $R$ e $a \in L$. Chamemos de $\mathcal{Q}^a = \{P_a \mid P \in \mathcal{P}_A\}$ e $\mathcal{Q}_a = \{I \mid I$ é um ideal primo e $A_a \subseteq I\}$. Observa-se que $\bigcap \mathcal{Q}_a = \sqrt{A_a}$ e que $\bigcap \mathcal{Q}^a = \bigcap\{P_a \mid P \in \mathcal{P}_A\} = (\bigcap\{P \mid P \in \mathcal{P}_A\})_a = (\sqrt{A})_a$.

**Lema 5.5** *Suponhamos que* $L$ *é totalmente ordenado, e* $A$ *é um* $L$*-ideal de* $R$ *com* $A(0) = 1$ *e com a propriedade do supremo. Então,* $\forall\, a \in L$, $\mathcal{Q}^a = \mathcal{Q}_a$.

**Demonstração:**

Seja $P_a \in \mathcal{Q}^a$. Então, $P \in \mathcal{P}_A$, isto é, $P$ é um $L$-ideal primo e $A \subseteq P$, em particular, $A_a \subseteq P_a$. Logo, como $imP = \{1, c\}$, temos, $P_a = R$ ou $P_a = I_P$. Portanto, $P_a \in \mathcal{Q}_a$. Assim, $\mathcal{Q}^a \subseteq \mathcal{Q}_a$.

Seja $I \in \mathcal{Q}_a$, ie, $I$ é um ideal primo de $R$ e $A_a \subseteq I$. Seja $P$ tal que $P(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I \\ b, & \text{se } x \notin I \end{cases}$, ie, $P = b^I$, onde $b = \bigvee\{A(x) \mid x \notin I\}$. Como $A$ tem a propriedade do supremo e $L$ é totalmente ordenado, então, $b = A(y)$ para algum $y \notin I$, daí, $y \notin A_a$, ie, $A(y) < a$. Logo, $A(y) = b < a \leq 1$. Assim, $P$ é um $L$-ideal de $R$ com $I_P = P_a = I$. Como $L$ é totalmente ordenado, $b$ é um elemento primo, logo, $P$ é um $L$-ideal primo de $R$. É fácil ver que $A \subseteq P$ e $I_A \subseteq A_a \subseteq I = I_P$. Portanto, $P \in \mathcal{P}_A$, logo, $P_a = I \in \mathcal{Q}^a$, donde $\mathcal{Q}_a \subseteq \mathcal{Q}^a$. $\square$

**Corolário 5.3.9.1** *Suponhamos que $L$ é totalmente ordenado e $A$ tem a propriedade do supremo. Então, $\forall a \in L$, $(\sqrt{A})_a = \sqrt{A_a}$.* $\square$

**Lema 5.6** *Suponha que $L$ é totalmente ordenado e $A$ tem a propriedade do supremo. Então, $\forall a \in L$, $\mathcal{R}(A)_a = \sqrt{A_a}$.*

**Demonstração:**

Suponhamos que $x \in \mathcal{R}(A)_a$. Então, $\mathcal{R}(A)(x) \geq a$, ie, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A(x^n) \geq a$. Logo, como $A$ tem a propriedade do supremo e $L$ é totalmente ordenado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A(x^k) \geq a$, ie, $x^k \in A_a$. Então, $x \in \sqrt{A_a}$.

Suponhamos que $x \in \sqrt{A_a}$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^k \in A_a$, ie, $A(x^k) \geq a$. Logo, $\mathcal{R}(A)(x) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} A(x^n) \geq A(x^k) \geq a$, ie, $x \in \mathcal{R}(A)_a$. $\square$

**Proposição 5.3.10** *Suponha que $L$ é totalmente ordenado, $A$ tem a propriedade do supremo e $A(0) = 1$, então, $\mathcal{R}(A) = \sqrt{A}$.*

**Demonstração:**

Basta mostrar que $\forall a \in L$, $\mathcal{R}(A)_a = (\sqrt{A})_a$.

Pelo Lema 5.6, temos que $\mathcal{R}(A)_a = \sqrt{A_a}$, e pelo Corolário 5.3.9.1, $\sqrt{A_a} = (\sqrt{A})_a$. Portanto, $\mathcal{R}(A) = \sqrt{A}$. $\square$

O exemplo das valorizações $p$-ádicas $\nu_p$ que tem mesmo $L$-radical e $\mathcal{R}$-radical, mostra que as hipóteses da proposição anterior não são necessárias para essa igualdade. Com efeito, apesar de termos, para o caso citado, $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (totalmente ordenado) e $\nu_p(0) = \infty$ $(= 1_L)$, temos que $\nu_p$ não tem a propriedade do supremo, ie, $im(\nu_p)$ $(= L)$ não satisfaz a propriedade de cadeia ascendente.

# Capítulo 6

# $L$-Representação $\mathcal{R}$-Primária

## 6.1 Motivação: Representação Primária Clássica e Anéis Noetherianos

**Definição 6.1.1** *Sejam $R$ um anel e $I$ um ideal de $R$. Uma representação primária de $I$ é uma expressão de $I$ como uma interseção finita de ideais primários, ie, $I = q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_n$, onde cada $q_i$ é um ideal primário.*

*Uma representação primária $I = q_1 \cap \ldots \cap q_n$ é dita reduzida, minimal ou irredundante se:*
*i) os radicais $\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_n}$ são distintos;*
*ii) $q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} q_j$ para $i = 1, \ldots, n$.*

**Proposição 6.1.1** *Toda representação primária pode ser reduzida a uma minimal.*

**Demonstração:**

Suponhamos $I = q_1 \cap \ldots \cap q_n$ onde cada $q_i$ é primário.

Suponhamos que $\sqrt{q_j} = \sqrt{q_k} = P$. Provaremos que $\sqrt{q_j \cap q_k} = P$ e que $q_j \cap q_k$ é primário. Temos que $\sqrt{q_j \cap q_k} = \sqrt{q_j} \cap \sqrt{q_k} = P \cap P = P$. Além disso, suponhamos que $xy \in q_j \cap q_k$ e $y \notin q_j \cap q_k$, assim, $xy \in q_j$ e $xy \in q_k$, sendo que $y \notin q_j$ ou $y \notin q_k$.

Suponhamos que $y \notin q_j$, então, existe $m > 0$ tal que $x^m \in q_j$, isto é, $x \in \sqrt{q_j} = \sqrt{q_k}$. Logo, existe $n > 0$ tal que $x^n \in q_k$, daí, $x^{max\{m,n\}} \in q_j \cap q_k$. Podemos escrever, então, $I = q_1 \cap \ldots \cap q_r$ onde cada $q_i$ possui radical diferente de $q_j$ para $j \neq i$, $j = 1, ..., r$.

Finalmente, se algum $q_i \supseteq \bigcap_{j \neq i} q_j$, basta eliminar $q_i$ da expressão $I = q_1 \cap \ldots \cap q_r$. $\square$

**Definição 6.1.2** *Sejam $R$ um anel e $I$ um ideal de $R$. $I$ é dito irredutível se cada vez que $I = J \cap K$ com $J$ e $K$ ideais, temos que $I = J$ ou $I = K$, caso contrário, $I$ é dito redutível.*

**Definição 6.1.3** *Dizemos que $R$ é um Anel Noetheriano se toda seqüência ascendente de ideais em $R$ é estacionária.*

**Proposição 6.1.2** *$R$ é Noetheriano $\Leftrightarrow$ toda coleção $\mathcal{S} \neq \emptyset$ de ideais de $R$ tem elemento maximal.*

**Demonstração:** É conseqüênia imediata do Lema 5.4. $\square$

**Lema 6.1** *Se $R$ é Noetheriano, todo ideal $I$ de $R$ pode ser decomposto como interseção finita de ideais irredutíveis.*

**Demonstração:**

Suponhamos que exista algum ideal de $R$ que não admita tal representação e consideremos a família: $\mathcal{S} = \{I \subseteq R \mid I$ é um ideal de $R$ e não admite uma representação finita em irredutíveis$\} \neq \emptyset$. Em particular, todo elemento de $\mathcal{S}$ é redutível. Como $R$ é Noetheriano, $\mathcal{S}$ possui um elemento maximal $M \in \mathcal{S}$. Assim, $M = K \cap J$ com $M \neq K$ e $M \neq J$. Como $M$ é maximal e $M \subseteq K$ e $M \subseteq J$, $K, J \notin \mathcal{S}$, então, eles admitem uma representação em irredutíveis, o que implica que $M$ também possui. Uma contradição. $\square$

**Lema 6.2** *Seja $R$ um anel Noetheriano. Se o ideal zero é irredutível, então é primário.*

**Demonstração:**

Suponhamos $(0)$ irredutível e $xy \in (0)$ com $y \notin (0)$, isto é, $xy = 0$ e $y \neq 0$. Devemos provar que alguma potência de $x$ é zero.

Para cada $a \in R$, definimos $Ann(a) = \{z \in R \mid za = 0\}$. Prova-se facilmente que $Ann(a)$ é um ideal de $R$. Consideremos os ideais:
$Ann(x) \subseteq Ann(x^2) \subseteq \ldots$

Como $R$ é Noetheriano, existe $n > 0$ tal que $Ann(x^n) = Ann(x^{n+1}) = \ldots$ Afirmamos que $(x^n) \cap (y) = (0)$. Com efeito, se $z \in (x^n) \cap (y)$, então, $z = x^n a$ e $z = yb$, onde $a, b \in R$. Logo, $zx = ybx = 0$, pois, $xy = 0$. Portanto, $x^{n+1}a = x(x^n a) = xz = 0$, isto é, $a \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$. Assim, $ax^n = 0$, donde, $z = ax^n = 0$.

Em conseqüência, como $(0)$ é irredutível, temos que $(x^n) = (0)$ ou $(y) = (0)$. Mas, $y \neq 0$, donde, $(x^n) = (0)$, portanto, $x^n = 0$. $\square$

**Lema 6.3** *Se $R$ é Noetheriano, então, todo ideal irredutível de $R$ é primário.*

**Demonstração:**

Seja $I$ um ideal irredutível de $R$ e consideremos o anel quociente $R/I$. Provaremos que o ideal zero de $R/I$ é irredutível:

Suponhamos $(\overline{0}) = J \cap K$ em $R/I$, então, considerando a projeção $\pi : R \longrightarrow R/I$, temos que $I = \pi^{-1}(\overline{0}) = \pi^{-1}(J \cap K) = \pi^{-1}(J) \cap \pi^{-1}(K)$. Portanto, como $I$ é irredutível em $R$, $I = \pi^{-1}(J)$ ou $I = \pi^{-1}(K)$, donde, $(\overline{0}) = \pi(I) = \pi(\pi^{-1}(J)) = J$ ou $(\overline{0}) = \pi(I) = \pi(\pi^{-1}(K)) = K$, ie, $(\overline{0})$ é irredutível.

Pelo lema anterior, temos que $(\overline{0})$ é primário. Provaremos agora, que $I$ é primário:

Se $xy \in I$ e $y \notin I$, então, $\overline{xy} = \overline{0}$ e $\overline{y} \neq \overline{0}$, isto é, $\overline{xy} \in (\overline{0})$ e $\overline{y} \notin (\overline{0})$, daí, como $(\overline{0})$ é primário, existe $n > 0$ tal que $\overline{x}^n \in (\overline{0})$, donde, $\overline{x}^n = \overline{0}$, isto é, $\overline{x^n} = \overline{0}$, resultando que $x^n \in I$. $\square$

**Proposição 6.1.3** *Se $R$ é Noetheriano, então, todo ideal de $R$ admite decomposição primária (minimal).* $\square$

## 6.2 $L$-Representação $\mathcal{R}$-Primária

**Definição 6.2.1** *Seja $A$ um $L$-ideal de $R$. Uma representação de $A$ como uma interseção finita, $A = J_1 \cap \ldots \cap J_n$, de $L$-ideais $\mathcal{R}$-primários de $R$ é chamada uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita de $A$. Essa representação é chamada irredundante se $J_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} J_j$ para $i = 1, \ldots, n$ e os $\mathcal{R}$-radicais $\mathcal{R}(J_1), \ldots, \mathcal{R}(J_n)$ são distintos.*

A definição anterior é motivada pelo caso clássico onde, como no caso dos anéis Noetherianos, a decomposição primária de ideais se dá num número finito de termos. No entanto, no caso *fuzzy* há exemplos relevantes de decomposição $\mathcal{R}$-primária infinita como veremos a seguir.

Se $R = \mathbb{Z}$ e $L = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, então, o $L$-ideal $\nu_p$, onde $p$ é um número primo, admite a seguinte decomposição $\mathcal{R}$-primária infinita: $\nu_p = \bigcap_{n \geq 0} n^{(p^{n+1})}$. O fato dos $L$-ideais $n^{(p^{n+1})}$ serem $\mathcal{R}$-primários foi discutido no Capítulo 5.

Com efeito, se $x = 0$, então, $\nu_p(x) = \infty$ e para todo $n$, $n^{(p^{n+1})}(x) = \infty$ $(= 1_L)$, pois, $0 \in (p^{n+1})$, logo, $\bigcap_{n\geq 0} n^{(p^{n+1})}(x) = \bigwedge_{n\geq 0} \infty = \infty = \nu_p(x)$.

Se $x = m \in \mathbb{N}$, então, $\nu_p(x) = \nu$ sendo $\nu$ o maior número natural tal que $x \in (p^\nu)$, logo, $\bigcap_{n\geq 0} n^{(p^{n+1})}(x) = \bigcap_{n=0}^{\nu-1} n^{(p^{n+1})}(x) \cap \bigcap_{n\geq \nu} n^{(p^{n+1})}(x) = \infty \wedge ... \wedge \infty \wedge \nu \wedge (\nu+1) \wedge ... = \nu = \nu_p(x)$.

Este exemplo sugere a seguinte definição:

**Definição 6.2.2** *Seja $A$ um $L$-ideal de $R$. Uma representação de $A$ como uma interseção $A = \bigcap_{i\in I} J_i$ de $L$-ideais $\mathcal{R}$-primários de $R$ é chamada uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária de $A$. Essa representação é chamada irredundante se $J_i \not\supseteq \bigcap_{j\neq i} J_j$ para todo $i \in I$ e se $i \neq j$, então, $\mathcal{R}(J_i) \neq \mathcal{R}(J_j)$.*

**Lema 6.4** *Suponhamos que $J$ é um ideal de $R$ tal que $J$ é uma interseção finita de ideais primários. Então, para todo $a \in L$ com $a \neq 1$ e $a$ um elemento primo, o $L$-ideal $a^J$ definido por $a^J(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in J \\ a & se\ x \notin J \end{cases}$ é uma interseção finita de $L$-ideais $\mathcal{R}$-primários.*

**Demonstração:**

Suponhamos $J = \bigcap J_i$ onde os $J_i$'s são ideais primários de $R$.

- se $x \in J$, então, $a^J(x) = 1$, por outro lado, $x \in \bigcap J_i$, isto é, $x \in J_i$ $\forall i$. Assim, $a^{J_i}(x) = 1$ $\forall i$, ou seja, $(\bigcap a^{J_i})(x) = \bigwedge a^{J_i}(x) = 1$,
- se $x \notin J$, então, $a^{J_i}(x) = a$, e, por outro lado, existe $i$ tal que $x \notin J_i$, ie, $a^{J_i}(x) = a$, logo, $(\bigcap a^{J_i})(x) = \bigwedge a^{J_i}(x) = a$.

Portanto, temos que $a^J = \bigcap a^{J_i}$.

Por outro lado, $I_{a^{J_i}} = J_i$ onde $J_i$ é primário, $a^{J_i}(0) = 1$ e *im* $a^{J_i} = \{1, a\}$. Logo, pela Proposição 5.3.5, $a^{J_i}$ é $\mathcal{R}$-primário. $\square$

**Lema 6.5** *i) Seja $A$ um $L$-ideal de $R$ com $A(0) = 1$ e $imA = \{A(1) = a_0 < a_1 < ... < a_r < ... < A(0)\}$. Então, $A = \bigcap_{i \geq 0} a_i^{A_{a_{i+1}}} = a_0^{A_{a_1}} \cap ... \cap a_{r-1}^{A_{a_r}} \cap ...$.*
*ii) Seja $A$ um $L$-ideal de $R$ com $A(0) = 1$, $imA = \{A(1) < ... < a_r < ... < a_1 < a_0 = A(0)\}$ e com $\bigwedge_{r \geq 0} a_r = A(1)$, então, $A = \bigcap_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-1}}}$.*

**Demonstração:**

i) Seja $x \in R$ e suponhamos $A(x) = a_k$, $k \geq 0$. Então, $x \in A_{a_k} \subsetneq A_{a_{k-1}} \subsetneq ... \subsetneq A_{a_1}$ e $x \notin A_{a_j}$ para $j \geq k+1$, donde, $a_i^{A_{a_{i+1}}} = 1$ para $i = 0, ..., k-1$ e $a_i^{A_{a_{i+1}}} = a_i$ para $i \geq k$. Portanto, $(\bigcap_{i \geq 0} a_i^{A_{a_{i+1}}})(x) = \bigwedge_{i \geq 0} a_i^{A_{a_{i+1}}}(x) = 1 \wedge ... \wedge 1 \wedge a_k \wedge a_{k+1} \wedge ... \wedge a_{r-1} \wedge ... = a_k = A(x)$. Se $A(x) = A(0)$, então, $A(x) \geq a_i$, $\forall i \geq 0$, logo, $a_i^{A_{a_{i+1}}}(x) = 1$, $\forall i \geq 0$, donde, $(\bigcap_{i \geq 0} a_i^{A_{a_{i+1}}})(x) = \bigwedge_{i \geq 0} a_i^{A_{a_{i+1}}}(x) = 1 = A(0) = A(x)$.
ii) Seja $x \in R$ e suponhamos $A(x) = a_k$, $k \geq 1$. Então, $x \in A_{a_k} \subsetneq A_{a_{k+1}} \subsetneq ... \subsetneq A_{A(1)}$ e $x \notin A_{a_i}$ para $i = 0, ..., k-1$, donde, $a_i^{A_{a_{i-1}}}(x) = 1$ para $i \geq k+1$ e $a_i^{A_{a_{i-1}}}(x) = a_i$ para $i = 1, ..., k$. Portanto, $(\bigcap_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-1}}})(x) = \bigwedge_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-1}}}(x) = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_k \wedge 1 \wedge ... \wedge 1 \wedge ... = a_k = A(x)$. Se $A(x) = a_0 = A(0)$, então, $x \in A_{a_k}$ $\forall k \geq 0$, logo, $(\bigcap_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-1}}})(x) = \bigwedge_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-1}}}(x) = \bigwedge_{i \geq 1} 1 = 1 = A(0) = A(x)$.

Finalmente, se $A(x) = A(1)$, então, $A(x) < a_k$, $\forall k \geq 0$, logo, $x \notin A_{a_k}$, $\forall k \geq 0$, donde, $a_i^{A_{a_{i-1}}}(x) = a_i$, $\forall i \geq 1$, portanto, $(\bigcap_{i \geq 1} a_i^{A_{a_{i-i}}})(x) = \bigwedge_{i \geq 1} a_i = A(1) = A(x)$. □

**Corolário 6.2.0.1** *Se $A$ é um $L$-ideal finito valuado de $R$ com $A(0) = 1$ e $imA = \{a_0 < a_1 < ... < a_r\}$, então, $A = \bigcap_{i=0}^{r-1} a_i^{A_{a_{i+1}}}$.* □

**Proposição 6.2.1** *Suponhamos que $L$ é totalmente ordenado. Se cada ideal de $R$ tem uma representação primária, então, cada $L$-ideal $A$ de $R$ tal que $A(0) = 1$ e $A$ é finito valuado, tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita.*

**Demonstração:**

Suponhamos que cada ideal de $R$ tem uma representação primária.

Seja $imA = \{a_0, \ldots, a_{r-1}, a_r = 1\}$ com $a_0 < a_1 < \ldots < a_{r-1} < 1$. Então, $I_A = A_{a_r} \subsetneq A_{a_{r-1}} \subsetneq \ldots \subsetneq A_{a_0} = R$.

Pelo Corolário 6.2.0.1, temos que $A = a_0^{A_{a_1}} \cap ... \cap a_{r-1}^{A_{a_r}}$. Como cada $A_{a_i}$ tem uma representação primária, pelo Lema 6.4, temos que os $L$-ideais $a_0^{A_{a_1}}, ..., a_{r-1}^{A_{a_r}}$ têm uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita, assim, $A$ tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita. $\square$

**Corolário 6.2.1.1** *Suponhamos que $L$ é totalmente ordenado e $R$ é um anel Noetheriano. Então, todo $L$-ideal $A$ de $R$ tal que $A(0) = 1$ e $A$ é finito valuado tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita.* $\square$

Pode-se demonstrar a seguinte proposição.

**Proposição 6.2.2** *Seja $A$ um $L$-ideal de $R$. Se $A$ tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária, então, $A$ tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária irredundante.* $\square$

# Capítulo 7

# $L$-Variedades Algébricas

## 7.1 Motivação: Conjuntos Algébricos em Espaços Afins

Sejam $K$ um corpo e $C$ um corpo algebricamente fechado tal que $K \subseteq C$, e denotemos com $A^n(C)$ o conjunto $C \times C \times ... \times C$ $(= C^n)$ sem estrutura alguma. $A^n(C)$ é chamado *espaço afim sobre* $C$ e seus elementos são chamados *pontos*.
$A^1(C)$ é a reta afim sobre $C$
$A^2(C)$ é o plano afim sobre $C$

Denotamos com $K[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios em $n$ variáveis com coeficientes em $K$.

**Definição 7.1.1** *Dado um subconjunto* $S \subseteq A^n(C)$*, definimos* $\mathcal{I}(S) = \{f(x_1, ..., x_n) \in K[x_1, ..., x_n] \mid \forall(a_1, ..., a_n) \in S : f(a_1, ..., a_n) = 0\}$*. Assim,* $\mathcal{I}(S) \subseteq K[x_1, ..., x_n]$*.*

**Definição 7.1.2** *Seja* $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$*, definimos* $\mathcal{V}(J) = \{(a_1, ..., a_n) \in A^n(C) \mid \forall f \in J : f(a_1, ..., a_n) = 0\}$*. Assim,* $\mathcal{V}(J) \subseteq A^n(C)$*.*

Propriedades:

1) Para todo $S \subseteq A^n(C), \mathcal{I}(S)$ é um ideal de $K[x_1, ..., x_n]$. Em particular, $\mathcal{I}(A^n(C)) = \{0\}$ e $\mathcal{I}(\emptyset) = K[x_1, ..., x_n]$.

2) Se $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$ e $\langle J \rangle$ é o ideal gerado por $J$, então, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\langle J \rangle)$.

3) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \mathcal{I}(S_1) \supseteq \mathcal{I}(S_2)$

$J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow \mathcal{V}(J_1) \supseteq \mathcal{V}(J_2)$.

4) Para todo $S \subseteq A^n(C)$, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(S)) \supseteq S$.

Para todo $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) \supseteq J$.

**Proposição 7.1.1** *Se $J$ é um ideal de $K[x_1, ..., x_n]$, então, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\sqrt{J})$.*

**Demonstração:**

Como $J \subseteq \sqrt{J}$, então, $\mathcal{V}(J) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{J})$.

Seja $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{V}(J)$, isto é, $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $f \in J$, e seja $g \in \sqrt{J}$, isto é, $g^m \in J$ para algum $m > 0$. Daí, $g^m(a_1, ..., a_n) = (g(a_1, ..., a_n))^m = 0$, logo, $g(a_1, ..., a_n) = 0$ e, portanto, $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{V}(\sqrt{J})$.

□

Para $J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$, o conjunto $\mathcal{V}(J)$ é chamado de *conjunto dos zeros de $J$*.

**Definição 7.1.3** *Um subconjunto $S \subseteq A^n(C)$ é dito um conjunto algébrico ou variedade algébrica se $\mathcal{V}(\mathcal{I}(S)) = S$.*

Em outras palavras, $S$ é um conjunto algébrico se existe um ideal $I$ de $K[x_1, ..., x_n]$ tal que $S = \mathcal{V}(I)$, isto é, se $S$ é o conjunto dos zeros de algum ideal.

Observa-se que se $V_1$ e $V_2$ são conjuntos algébricos, então, $V_1 \cap V_2$ também é, pois, $V_1 \cap V_2 = \mathcal{V}(J_1) \cap \mathcal{V}(J_2) = \mathcal{V}(J_1 \cup J_2)$ para certos $J_1$ e $J_2$ ideais de $K[x_1, ..., x_n]$.

**Proposição 7.1.2** .

*i)* $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \mathcal{V}(J) \quad \forall J \subseteq K[x_1, ..., x_n]$

*ii)* $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(S))) = \mathcal{I}(S) \quad \forall S \subseteq A^n(C)$.

**Demonstração:**

i) Como $J \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ pela propriedade 4, então, $\mathcal{V}(J) \supseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$ pela propriedade 3. Por outro lado, $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$ pela propriedade 4, portanto, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \mathcal{V}(J)$.

ii) Análoga a (i). $\square$

**Corolário 7.1.2.1** *Chamando de $S_{ALG}$ a coleção de subconjuntos algébricos de $A^n(C)$, então, a operação $\mathcal{I}\mid_{S_{ALG}}$ é injetiva, isto é, se $V_1, V_2 \in S_{ALG}$, então, $\mathcal{I}(V_1) = \mathcal{I}(V_2) \Rightarrow V_1 = V_2$.*

**Demonstração:**

Como $V_1$ e $V_2$ são subconjuntos algébricos de $A^n(C)$, existem ideais $J_1$ e $J_2$ de $K[x_1, ..., x_n]$ tais que $V_1 = \mathcal{V}(J_1)$ e $V_2 = \mathcal{V}(J_2)$. Portanto, $\mathcal{I}(V_1) = \mathcal{I}(V_2) \Rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_2)) \Rightarrow J_1 = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1))) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_2))) = J_2$. $\square$

Observe que se $V$ é um subconjunto algébrico de $A^n(C)$, então, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V)) = V$ (pois, $V = \mathcal{V}(J)$ para algum $J$). E se $J$ é o ideal de algum subconjunto de $A^n(C)$, então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$ (pois, $J = \mathcal{I}(S)$ para algum $S$).

**Definição 7.1.4** *Seja $R$ um anel (comutativo com unidade) e $I$ um ideal de $R$. Dizemos que $I$ é um ideal radical se $\sqrt{I} = I$.*

**Proposição 7.1.3** *Para todo $S \subseteq A^n(C)$, o ideal $\mathcal{I}(S)$ é um ideal radical de $K[x_1, ..., x_n]$.*

**Demonstração:**

Basta provar que $\sqrt{\mathcal{I}(S)} \subseteq \mathcal{I}(S)$.

Seja $f \in \sqrt{\mathcal{I}(S)}$, isto é, existe $m > 0$ tal que $f^m \in \mathcal{I}(S)$, isto é, $\forall (a_1, ..., a_n) \in S$, $f^m(a_1, ..., a_n) = (f(a_1, ..., a_n))^m = 0$. Daí, $f(a_1, ..., a_n) = 0$. Portanto, $f \in \mathcal{I}(S)$. $\square$

O recíproco da proposição anterior, isto é, se todo ideal radical de $K[x_1, ..., x_n]$ é o ideal de algum subconjunto de $A^n(C)$, será estabelecido como verdadeiro para $K$ um corpo algebricamente fechado, e em decorrência do chamado Teorema dos Zeros de Hilbert.

Observa-se que a coleção de ideais de $K[x_1, ..., x_n]$ que são ideais de algum subconjunto de $A^n(C)$, constituem a imagem do operador $\mathcal{I} : \mathcal{P}(A^n(C)) \longrightarrow \mathcal{P}(K[x_1, ..., x_n])$, que denotaremos por $im\mathcal{I}$. Portanto, se chamamos de $I_{RAD}$ a coleção de todos os ideais radicais de $K[x_1, ..., x_n]$, a proposição anterior mostra que $im\mathcal{I} \subseteq I_{RAD}$. Mais ainda, prova-se facilmente que a operação $\mathcal{V}|_{im\mathcal{I}}$ é injetiva.

**Proposição 7.1.4** *Se $J$ é um ideal de $K[x_1, ..., x_n]$, então, $\sqrt{J} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ (repare que já tínhamos $J \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ sendo que $J \subseteq \sqrt{J}$).*

**Demonstração:**

Seja $f \in \sqrt{J}$, isto é, $f^m \in J$ para algum $m > 0$, e seja $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{V}(J)$, isto é, para todo $g \in J$, $g(a_1, ..., a_n) = 0$, em particular, $f^m(a_1, ..., a_n) = (f(a_1, ..., a_n))^m = 0$, logo, $f(a_1, ..., a_n) = 0$, isto é, $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$. $\square$

**Definição 7.1.5** *Um conjunto algébrico $V$ é dito redutível (em $A^n(C)$) se $V = V_1 \cup V_2$ com $V_1$ e $V_2$ conjuntos algébricos e $V_1 \neq V$, $V_2 \neq V$. $V$ é dito irredutível, caso contrário.*

**Proposição 7.1.5** *Seja $V$ um conjunto algébrico, então, $V$ é irredutível* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}(V)$ *é um ideal primo.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos $\mathcal{I}(V)$ não primo e sejam $f, g \in K[x_1, ..., x_n]$ tais que $fg \in \mathcal{I}(V)$, mas, $f \notin \mathcal{I}(V)$ e $g \notin \mathcal{I}(V)$.

Afirmação: $V = (V \cap \mathcal{V}(\{f\})) \cup (V \cap \mathcal{V}(\{g\}))$. Com efeito, $(V \cap \mathcal{V}(\{f\})) \cup (V \cap \mathcal{V}(\{g\})) = V \cap (\mathcal{V}(\{f\}) \cup \mathcal{V}(\{g\})) = V \cap \mathcal{V}(\{fg\}) = V$.

Assim, $V$ seria redutível, pois, $V \cap \mathcal{V}(\{f\})$ e $V \cap \mathcal{V}(\{g\})$ são algébricos e $V \cap \mathcal{V}(\{f\}) \subsetneq V$ e $V \cap \mathcal{V}(\{g\}) \subsetneq V$, pois, $f, g \notin \mathcal{I}(V)$.

($\Rightarrow$) Suponhamos $V$ redutível, isto é, $V = V_1 \cup V_2$ com $V_1, V_2$ conjuntos algébricos e $V_1 \subsetneq V, V_2 \subsetneq V$. Daí, como a operação $\mathcal{I}$ é injetiva sobre conjuntos algébricos, temos que $\mathcal{I}(V_1) \supsetneq \mathcal{I}(V)$ e $\mathcal{I}(V_2) \supsetneq \mathcal{I}(V)$, logo, existem $f \in \mathcal{I}(V_1), g \in \mathcal{I}(V_2)$ tais que $f, g \notin \mathcal{I}(V)$.

Afirmação: $fg \in \mathcal{I}(V)$.

Com efeito, se $(a_1, ..., a_n) \in V$, então, $(a_1, ..., a_n) \in V_1$ ou $(a_1, ..., a_n) \in V_2$, logo, $f(a_1, ..., a_n) = 0$ ou $g(a_1, ..., a_n) = 0$, donde, $(fg)(a_1, ..., a_n) = 0$. Isso implica que $\mathcal{I}(V)$ não é primo. $\square$

## 7.2 Teorema Central: Versão Clássica

Nesta seção provaremos o nosso teorema central de decomposição de conjuntos algébricos como união finita de conjuntos algébricos irredutíveis. Veremos depois que esse teorema pode ser estendido sem mudanças para o caso de $L$-variedades quando $L$ é finito.

**Lema 7.1** *Se $\mathcal{W}$ é uma coleção não vazia de conjuntos algébricos em $A^n(C)$, então, existe um elemento minimal em $\mathcal{W}$.*

**Demonstração:**

Consideremos $\mathcal{S} = \{\mathcal{I}(V) \mid V \in \mathcal{W}\}$ e seja $\mathcal{I}(V_0)$ um elemento maximal em $\mathcal{S}$, o qual existe por ser $K[x_1, ..., x_n]$ Noetheriano em decorrência da Proposição 6.1.2. Prova-se facilmente que $V_0$ é minimal em $\mathcal{W}$. $\square$

**Proposição 7.2.1 (Teorema de Decomposição de Conj. Algébricos)** *Seja $V$ um conjunto algébrico em $A^n(C)$. Então, existem únicos $V_1, ..., V_n$ conjuntos algébricos irredutíveis tais que $V = V_1 \cup ... \cup V_n$ e $V_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$ para todo $i$.*

**Demonstração:**

Seja $\mathcal{W} = \{V \subseteq A^n(C) \mid V$ é algébrico e não é união finita de conjuntos algébricos irredutíveis$\}$. Provaremos que $\mathcal{W} = \emptyset$.

Se $\mathcal{W} \neq \emptyset$, então, pelo lema anterior, existe $V_0 \in \mathcal{W}$ minimal. Como $V_0 \in \mathcal{W}$, em particular, $V_0$ não é irredutível, isto é, $V_0$ é redutível, o que significa que $V_0 = V_1 \cup V_2$ com $V_1$ e $V_2$ algébricos e $V_1 \subsetneq V_0$ e $V_2 \subsetneq V_0$. Como $V_0$ é minimal, teremos que $V_1, V_2 \notin \mathcal{W}$, portanto, $V_1$ e $V_2$ admitem uma decomposição em número finito de algébricos irredutíveis, uma contradição.

Em conseqüência, todo conjunto algébrico admite tal decomposição. Agora, se tivermos que $V_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$ para algum $i$, então, podemos eliminar $V_i$ da decomposição, uma vez que $V_i \cup (\bigcup_{j \neq i} V_j) = \bigcup_{j \neq i} V_j$.

Para provar a unicidade, suponhamos $V = V_1 \cup ... \cup V_n = W_1 \cup ... \cup W_r$, então, para cada $i$, $V_i = V_i \cap V = V_i \cap (W_1 \cup ... \cup W_r) = (V_i \cap W_1) \cup ... \cup (V_i \cap W_r)$. Logo, como $V_i$ é irredutível, $V_i = V_i \cap W_s$ para algum $s$, isto é, $V_i \subseteq W_s$. Por outro lado, para esse $s$, teremos que $W_s \subseteq V_k$ para algum $k$. Portanto, $V_i \subseteq V_k$, o que implica $i = k$, pois, se $i \neq k$ teríamos $V_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$, daí, $V_i = W_s$. $\square$

## 7.3 O Teorema dos Zeros de Hilbert

Na seção anterior foi demonstrado, para o caso clássico, o teorema de decomposição de conjuntos algébricos como união finita de algébricos irredutíveis. Nessa prova não usou-se nenhuma hipótese adicional sobre o corpo $K$, apenas o fato de $K[x_1, ..., x_n]$ ser um anel Noetheriano.

A finalidade principal deste capítulo final é demonstrar esse teorema de decomposição para as $L$-variedades algébricas que definiremos na Seção 7.4.

Veremos que se $L$ for um reticulado finito, então, a prova desse resultado imita exatamente o caso clássico. Porém, se $L$ não for finito, a demonstração aqui apresentada só será possível para $K$ algebricamente fechado e, nesse caso, precisaremos do chamado Teorema dos Zeros de Hilbert que é motivo desta seção.

**Proposição 7.3.1 (Teorema dos Zeros de Hilbert - Versão Fraca)** . *Seja $K$ um corpo algebricamente fechado e seja $I$ um ideal próprio do anel $K[x_1, ..., x_n]$, então, $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

**Demonstração** (esboço):

Podemos assumir que $I$ é um ideal maximal de $K[x_1, ..., x_n]$, pois, sendo $I$ próprio, existe algum ideal maximal que o contém.

Como $I$ é maximal, temos que $L = K[x_1, ..., x_n]/I$ é um corpo e $K$ pode ser mergulhado em $L$ como subcorpo através do monomorfismo $\varphi : K \longrightarrow L$ dado por $\varphi(a) = a + I$. Podemos supor, então, que $K \subseteq L$.

Na seguinte afirmação, que não será aqui provada, usa-se o fato de $K$ ser um corpo algebricamente fechado.

Afirmação: $K = L$.

Podemos concluir que para cada indeterminada $x_k$, existe $a_k \in K$ tal que $x_k + I = a_k$, isto é, $x_k - a_k \in I$.

Consideremos o ideal $J = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ de $K[x_1, ..., x_n]$. Sabe-se que $J$ é maximal, logo, como $J \subseteq I$ e $I$ é maximal, temos que $I = J = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$, donde, $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{V}(I)$, o que significa que $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. $\square$

Na proposição seguinte, usaremos o fato de $K[x_1, ..., x_n]$ ser um anel Noetheriano.

**Proposição 7.3.2 (Teorema dos Zeros de Hilbert - Versão Forte)** . *Seja $K$ um corpo algebricamente fechado e $I$ um ideal de $K[x_1, ..., x_n]$, então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.*

**Demonstração:**

Já foi provado que $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Agora, como $K[x_1, ..., x_n]$ é um anel Noetheriano e $I$ é um ideal, então, $I$ é finitamente gerado, isto é, $I = (f_1, ..., f_m)$ para certos $f_k \in K[x_1, ..., x_n]$.

Seja $g \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(f_1, ..., f_m))$ e consideremos o ideal $J = (f_1, ..., f_m, x_{n+1}g - 1) \subseteq K[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]$.

Observa-se que $\mathcal{V}(J) \subseteq A^{n+1}(C)$ e que $\mathcal{V}(J) = \emptyset$, pois, $g$ anula-se em todo ponto que anula $f_1, ..., f_m$ e, nesse caso, o polinômio $x_{n+1}g - 1$ não se anula.

Daí, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (versão fraca), $J$ não é próprio, isto é, $J = K[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]$, em particular, $1 \in J$, donde, existem polinômios $h_1, ..., h_m, h_{m+1}$ em $K[x_1, ..., x_n, x_{n+1}]$ tais que $1 = h_1 f_1 + ... + h_m f_m + h_{m+1}(x_{n+1}g - 1) = h_1 f_1 + ... + h_m f_m + h_{m+1}x_{n+1}(g - \frac{1}{x_{n+1}})$.

Chamando de $y = \frac{1}{x_{n+1}}$, ou seja, $x_{n+1} = \frac{1}{y}$, existe $N \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $y^N = g_1 f_1 + ... + g_m f_m + g_{m+1}(g - y)$ em $K[x_1, ..., x_n, y]$.

Finalmente, substituindo $y$ por $g = g(x_1, ..., x_n)$, temos que $g^N = g_1' f_1 + ... + g_m' f_m$ em $K[x_1, ..., x_n]$, donde, $g^N \in (f_1, ..., f_m) = I$, daí, $g \in \sqrt{I}$. $\square$

Terminaremos esta seção observando que se $I$ for um ideal primo de $K[x_1, ..., x_n]$, então, $\sqrt{I} = I$, portanto, para esse caso, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = I$.

## 7.4 $L$-Variedades Algébricas

Denotamos por $R$ o anel de polinômios $K[x_1, ..., x_n]$, onde $K$ é um corpo. Sejam $C$ um corpo algebricamente fechado contendo $K$, $L$ um reticulado e $c$ uma involução reversa de $L$. Como observado no Capítulo 2, $c$ é uma bijeção, mais ainda, é fácil ver que devido ao fato de ser uma involução, temos que $c^{-1} = c$.

**Proposição 7.4.1** *Seja $c : L \longrightarrow L$ uma função, então, são equivalentes:*
*a) $c$ é uma involução reversa, isto é,*

*i) $\forall a, b \in L,\ a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$;*

*ii) $\forall a \in L,\ c(c(a)) = a$.*

*b) $c$ é estritamente decrescente, isto é, $\forall a, b \in L,\ a < b \Rightarrow c(a) > c(b)$; $c(0) = 1$, $c(1) = 0$ e $\forall a \in L,\ c(c(a)) = a$.*

**Demonstração:**
$(a \Rightarrow b)$: Suponhamos $a < b$, então, por (i), $c(a) \geq c(b)$. Se $c(a) = c(b)$, teríamos que $a = c(c(a)) = c(c(b)) = b$, o que contradiz a hipótese, logo, $c(a) > c(b)$.

Suponhamos agora, que $c(0) < 1$, então, $0 = c(c(0)) > c(1)$, o que é impossível. Portanto, $c(0) = 1$. Analogamente, prova-se que $c(1) = 0$.
$(b \Rightarrow a)$: Só temos que provar (i).

Suponhamos $a \leq b$, então, se $a < b$, teremos $c(a) > c(b)$ e, se $a = b$, teremos $c(a) = c(b)$, logo, $c(a) \geq c(b)$. $\square$

Seja $\chi$ um $L$-subconjunto finito valuado de $A^n(C)$, digamos, $im\chi = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$, onde, $a_0 < a_1 < ... < a_m$. Consideremos, para cada $i = 0, ..., m$, o subconjunto de nível $a_i$, $\chi_{a_i} = \{x \in A^n(C) \mid \chi(x) \geq a_i\} \subseteq A^n(C)$. Se $a_i < a_j$, então, $\chi_{a_i} \supsetneqq \chi_{a_j}$. A inclusão própria é devido a que $a_i, a_j \in im\chi$. Temos, então, $\chi_{a_m} \subsetneqq \chi_{a_{m-1}} \subsetneqq ... \subsetneqq \chi_{a_0} = A^n(C)$ (sendo subconjuntos clássicos de $A^n(C)$). Daí, concluímos que

$$\mathcal{I}(\chi_{a_m}) \supseteq \mathcal{I}(\chi_{a_{m-1}}) \supseteq ... \supseteq \mathcal{I}(A^n(C)) = \{0\},$$

onde não necessariamente as inclusões são próprias.

**Definição 7.4.1** *Definimos o L-subconjunto $\mathcal{I}(\chi)$ de $R$, por:*

$$\mathcal{I}(\chi)(f) = \begin{cases} c(a_m), & se\ f \in R \setminus \mathcal{I}(\chi_{a_m}); \\ c(a_i), & se\ f \in \mathcal{I}(\chi_{a_{i+1}}) \setminus \mathcal{I}(\chi_{a_i}),\ i = 1, ..., m-1; \\ c(a_0), & se\ f \in \mathcal{I}(\chi_{a_1}). \end{cases}$$

*Se $m = 0$, então, definimos* $\mathcal{I}(\chi)(f) = \begin{cases} 1, & se\ f = 0 \\ c(a_0), & se\ f \neq 0 \end{cases}$.

Prova-se facilmente que $\mathcal{I}(\chi)$ é um $L$-ideal (finito valuado) de $R$ ($= K[x_1, ..., x_n]$).

**Definição 7.4.2** *Seja $J$ um L-ideal finito valuado de $R$, digamos, $imJ = \{b_0, b_1, ..., b_m\}$, onde $b_0 < b_1 < ... < b_m$. Definimos o L-subconjunto $\mathcal{V}(J)$ de $A^n(C)$, por:*

$$\mathcal{V}(J)(z) = \begin{cases} c(b_m), & se\ z \in A^n(C) \setminus \mathcal{V}(J_{b_m}); \\ c(b_i), & se\ z \in \mathcal{V}(J_{b_{i+1}}) \setminus \mathcal{V}(J_{b_i}),\ i = 1, ..., m-1; \\ c(b_0), & se\ z \in \mathcal{V}(J_{b_1}). \end{cases}$$

Um $L$-subconjunto finito valuado $\chi$ de $A^n(C)$ é chamado de *$L$-subconjunto algébrico ou $L$-variedade algébrica* se $\chi = \mathcal{V}(J)$ para algum $L$-ideal $J$ finito valuado de $R$.

A seguir, mostraremos que o teorema clássico de decomposição de conjuntos algébricos pode ser estendido para $L$-variedades algébricas *mutatis mutandis* para o caso de $L$ ser um reticulado finito e não necessariamente totalmente ordenado. Para tanto, precisamos caracterizar os anéis Noetherianos em termos da condição de cadeia ascendente para $L$-ideais.

Seja $R$ um anel Noetheriano e seja $\mathcal{S}$ uma coleção não vazia de $L$-ideais (ordenada por inclusão). Em geral, $\mathcal{S}$ não tem um elemento maximal como no caso clássico (ver Proposição 6.1.2). Na teoria geral de ordens parciais, se $(E, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado onde toda cadeia em $E$ tem cota superior, então, $E$ tem algum elemento maximal. Em particular, uma forma de provar que $\mathcal{S}$ tem um elemento maximal seria mostrar que toda cadeia de $L$-ideais em $\mathcal{S}$ tem cota superior (não só as cadeias enumeráveis). No caso clássico, usam-se apenas as cadeias enumeráveis pelo fato de $R$ ser Noetheriano. Seja, então, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e seja $I_0 \in \mathcal{S}$. Se $I_0$ for maximal, não há nada a provar, senão, seja $\mathcal{S}_1 = \{I \in \mathcal{S} \mid I_0 \subsetneq I\} \neq \emptyset$. Seja $I_1 \in \mathcal{S}_1$. Se $I_1$ for maximal, ok, senão, tomamos o conjunto $\mathcal{S}_2$ e assim, construímos uma cadeia enumerável de $L$-ideais $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq ....$ Mas, o fato de $R$ ser Noetheriano não garante que esta cadeia seja estacionária. Com efeito, para cada $t \in L$, consideremos os ideais clássicos de nível $t$, $(I_0)_t \subseteq (I_1)_t \subseteq (I_2)_t \subseteq ....$ Tomemos $t = t_1$. Por ser $R$ Noetheriano, existe $n_1$ tal que a cadeia pára em $(I_{n_1})_{t_1}$. Tomemos $t = t_2$, então, existe $n_2$ tal que a cadeia correspondente pára em $(I_{n_2})_{t_2}$, ou seja,

$(I_0)_{t_1} \subseteq (I_1)_{t_1} \subseteq ... \subseteq (I_{n_1})_{t_1} = (I_{n_1+1})_{t_1} = ...$

$(I_0)_{t_2} \subseteq (I_1)_{t_2} \subseteq ... \subseteq (I_{n_2})_{t_2} = (I_{n_2+1})_{t_2} = ...,$

isto é,

$(I_n)_{t_1} = (I_{n+1})_{t_1}\ \forall n \geq n_1$

$(I_n)_{t_2} = (I_{n+1})_{t_2}\ \forall n \geq n_2.$

Agora, para que a cadeia original de $L$-ideais seja estacionária, deve existir $m$ tal que $\forall n \geq m$, $I_n = I_{n+1}$. Isto poderia ser provado se $\forall t \in L$ : $(I_n)_t = (I_{n+1})_t$. Se $L$ for finito, digamos $L = \{t_1, ..., t_r\}$, então, tomando $m = max\{n_1, ..., n_r\}$, podemos garantir a prova. Com estas observações, temos estabelecido a seguinte proposição:

**Proposição 7.4.2** *Se $L$ é finito e $R$ é Noetheriano, então, toda cadeia enumerável monótona crescente de $L$-ideais é estacionária. Aliás, para $L$ finito, $R$ é Noetheriano se, e somente se, toda cadeia enumerável monótona crescente de $L$-ideais é estacionária.* □

**Definição 7.4.3** *Seja $V$ uma $L$-variedade algébrica. Então, $V$ é dita irredutível se para quaisquer $L$-variedades $V_1$ e $V_2$ com $V = V_1 \cup V_2$, temos que $V = V_1$ ou $V = V_2$. Caso contrário, $V$ é dita redutível.*

**Lema 7.2** *Seja $L$ um reticulado finito e seja $\mathcal{W}$ uma coleção não vazia de $L$-variedades algébricas em $A^n(C)$, então, existe um elemento minimal em $\mathcal{W}$.*

**Demonstração:**

Consideremos $\mathcal{S} = \{\mathcal{I}(\chi) \mid \chi \in \mathcal{W}\}$ e seja $\mathcal{I}(\chi_0)$ um elemento maximal em $\mathcal{S}$, o qual existe por ser $K[x_1, ..., x_n]$ Noetheriano em decorrência das Proposições 6.1.2 e 7.4.2. Prova-se facilmente que $\chi_0$ é minimal em $\mathcal{W}$. □

**Proposição 7.4.3 (Decomp. de $L$-Varied. Algébricas para $L$ finito)** *Seja $\chi$ uma $L$-variedade algébrica em $A^n(C)$. Então, existem únicas $\chi_1, ..., \chi_n$ $L$-variedades algébricas irredutíveis tais que $\chi = \chi_1 \cup ... \cup \chi_n$ e $\chi_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} \chi_j$ para todo $i$.*

**Demonstração:**

Seja $\mathcal{W} = \{\chi \mid \chi$ é $L$-variedade algébrica e não é união finita de $L$-variedades algébricas irredutíveis$\}$. Provaremos que $\mathcal{W} = \emptyset$.

Se $\mathcal{W} \neq \emptyset$, então, pelo lema anterior, existe $\chi_0 \in \mathcal{W}$ minimal. Como $\chi_0 \in \mathcal{W}$, em particular, $\chi_0$ não é irredutível, isto é, $\chi_0$ é redutível, o que significa que $\chi_0 = \chi_1 \cup \chi_2$ com $\chi_1$ e $\chi_2$ $L$-variedades algébricas e $\chi_1 \subsetneq \chi_0$ e $\chi_2 \subsetneq \chi_0$. Como $\chi_0$ é minimal, teremos que $\chi_1, \chi_2 \notin \mathcal{W}$, portanto, $\chi_1$ e $\chi_2$ admitem uma decomposição em número finito de $L$-variedades algébricas irredutíveis, uma contradição.

Em conseqüência, toda $L$-variedade algébrica admite tal decomposição. Agora, se tivermos que $\chi_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} \chi_j$ para algum $i$, então, podemos eliminar $\chi_i$ da decomposição, uma vez que $\chi_i \cup (\bigcup_{j \neq i} \chi_j) = \bigcup_{j \neq i} \chi_j$.

Para provar a unicidade, suponhamos $\chi = \chi_1 \cup ... \cup \chi_n = W_1 \cup ... \cup W_r$, então, para cada $i$, $\chi_i = \chi_i \cap \chi = \chi_i \cap (W_1 \cup ... \cup W_r) = (\chi_i \cap W_1) \cup ... \cup (\chi_i \cap W_r)$. Logo, como $\chi_i$ é irredutível, $\chi_i = \chi_i \cap W_s$ para algum $s$, isto é, $\chi_i \subseteq W_s$. Por outro lado, para esse $s$, teremos que $W_s \subseteq \chi_k$ para algum $k$. Portanto, $\chi_i \subseteq \chi_k$, o que implica $i = k$, pois, se $i \neq k$ teríamos $\chi_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} \chi_j$, daí, $\chi_i = W_s$. $\square$

## 7.5 Teorema Central: Versão *Fuzzy*

Nesta última seção consideraremos $L$ um reticulado totalmente ordenado e $K$ um corpo algébricamente fechado.

**Proposição 7.5.1** *Seja $\chi$ como na Definição 7.4.1. Então:*

*1)* $\mathcal{I}(\chi)_{c(a_i)} = \mathcal{I}(\chi_{a_{i+1}})$ *para* $i = 0, 1, ..., m-1$;

*2) se* $c(a_{i+1}) < b < c(a_i)$, *então,* $\mathcal{I}(\chi)_b = \mathcal{I}(\chi_{c(b)})$ *para* $i = 0, 1, ..., m-1$.

**Demonstração:**

1) $f \in \mathcal{I}(\chi)_{c(a_i)} \Leftrightarrow \mathcal{I}(\chi)(f) \geq c(a_i) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(\chi_{a_{i+1}})$ por definição.

2) $f \in \mathcal{I}(\chi)_b \Leftrightarrow \mathcal{I}(\chi)(f) \geq b \Leftrightarrow \mathcal{I}(\chi)(f) \geq c(a_i) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(\chi)_{c(a_i)} \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(\chi_{a_{i+1}}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}(\chi_{c(b)})$, pois, $\chi_{a_{i+1}} = \{x \in R \mid \chi(x) \geq a_{i+1}\} = \{x \in R \mid \chi(x) \geq c(b)\} = \chi_{c(b)}$. $\square$

**Proposição 7.5.2** *Seja $J$ como na Definição 7.4.2. Então:*

*1)* $\mathcal{V}(J)_{c(b_i)} = \mathcal{V}(J_{b_{i+1}})$ *para* $i = 0, 1, ..., m-1$;

*2) se* $c(b_{i+1}) < a < c(b_i)$, *então,* $\mathcal{V}(J)_a = \mathcal{V}(J_{c(a)})$ *para* $i = 0, 1, ..., m-1$.

**Demonstração:**

1) $z \in \mathcal{V}(J)_{c(b_i)} \Leftrightarrow \mathcal{V}(J)(z) \geq c(b_i) \Leftrightarrow z \in \mathcal{V}(J_{b_{i+1}})$ por definição.

2) $z \in \mathcal{V}(J)_a \Leftrightarrow \mathcal{V}(J)(z) \geq a \Leftrightarrow \mathcal{V}(J)(z) \geq c(b_i) \Leftrightarrow z \in \mathcal{V}(J)_{c(b_i)} \Leftrightarrow z \in \mathcal{V}(J_{b_{i+1}}) \Leftrightarrow z \in \mathcal{V}(J_{c(a)})$, desde que $J_{b_{i+1}} = J_{c(a)}$.$\square$

**Lema 7.3** *Sejam $\chi$ e $J$ como na Definições 7.4.1 e 7.4.2, então,*

*1)* $\forall b \in L,\ \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_b = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_b))$

*2)* $\forall a \in L,\ \mathcal{V}(\mathcal{I}(\chi))_a = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\chi_a))$.

**Demonstração:**

1) Pela Proposição 7.5.2 (1), temos que $\mathcal{V}(J_{b_{i+1}}) = \mathcal{V}(J)_{c(b_i)}$ para $i = 0, 1, ...,$ $m-1$.

i) Primeiro provaremos que a proposição é válida para $b = b_i,\ i = 1, ..., m$.

a) Suponhamos que $c(b_i) \in im\mathcal{V}(J)$. Seja $a_{m-i} = c(b_i)$ para $i = 0, ..., m$. Então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b_i)}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{a_{m-i}}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{c(a_{m-i-1})}$, pela Proposição 7.5.1

(1), mas, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{c(a_{m-i-1})} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_{i+1}}$, pois, $c(a_{m-(i+1)}) = b_{i+1}$. Portanto, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_{b_{i+1}})) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_{i+1}}$.

b) Suponhamos que $c(b_i) \notin im\mathcal{V}(J)$, então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b_i)}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{c(c(b_i))} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_i}$. Agora, como $c(b_i) \notin im\mathcal{V}(J)$, então, $b_i = c(c(b_i)) \notin im\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$, donde, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))(z) \geq b_i \Leftrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))(z) \geq b_{i+1}$.

Assim, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_{b_{i+1}})) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b_i)}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_i} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_{i+1}}$.

Portanto, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{b_i} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_{b_i}))$, para $i = 1, ..., m$.

ii) Seja $0 \leq b \leq b_0$. Então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_b)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(R)) = \mathcal{I}(\emptyset) = R = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_b$, pois, $b_0$ é o menor valor da $imJ$.

iii) Seja $b_m < b \leq 1$. Então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_b)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\emptyset)) = \mathcal{I}(A^n(C)) = \emptyset = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_b$, pois, $b_m$ é o maior valor na $imJ$.

iv) Para qualquer outro $b$, temos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_b)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b)}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_b$, pelas Proposições 7.5.1 (2) e 7.5.2 (2).

2) É análogo. □

**Proposição 7.5.3** *Seja $J$ como na Definição 7.4.2. Então, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \mathcal{V}(J)$.*

**Demonstração:**

Basta provar que $\forall a \in L,\ \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_a = \mathcal{V}(J)_a$.

Seja $a \in L$. Se $a = c(b_i)$, para $i = 0, ..., m-1$, temos que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_{c(b_i)} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b_i)})) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_{b_{i+1}}))) = \mathcal{V}(J_{b_{i+1}}) = \mathcal{V}(J)_{c(b_i)}$.

Se $c(b_{i+1}) < a < c(b_i)$, então, pelo Lema 7.3 (2) e pela Proposição 7.5.2 (2), $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_a = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_a)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_{c(a)}))) = \mathcal{V}(J_{c(a)}) = \mathcal{V}(J)_a$.

Se $0 < a < c(b)$, temos que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_a = A^n(C) = \mathcal{V}(J)_a$.

Finalmente, se $c(b_0) < a \leq 1$, então, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_a = \emptyset = \mathcal{V}(J)_a$. □

**Proposição 7.5.4** *Seja $\chi$ um $L$-subconjunto de $A^n(C)$. Então, $\chi$ é uma $L$-variedade algébrica se, e somente se, $\chi$ é finito valuado e $\forall a \in im\chi$, $\chi_a$ é* *um conjunto algébrico em $A^n(C)$.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos $\chi$ uma $L$-variedade algébrica, isto é, $\chi = \mathcal{V}(J)$ para algum $L$-ideal $J$ finito valuado de $R$. Isso implica que para todo $a \in im\chi$, existe $b \in imJ$ tal que $a = c(b)$.

Seja $a \in im\chi$, então, $a = c(b_i)$ para algum $i = 0, ..., m$. Se $i \neq m$, temos que $\chi_a = \mathcal{V}(J)_{c(b_i)} = \mathcal{V}(J_{b_{i+1}})$ o qual é um conjunto algébrico em $A^n(C)$. Se $i = m$, então, $\chi_a = \mathcal{V}(J)_{c(b_m)} = A^n(C) = \mathcal{V}(\{0\})$ que também é um conjunto algébrico.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\chi$ finito valuado e $\chi_a$ um conjunto algébrico $\forall a \in im\chi$. Então, para cada $a \in im\chi$, existe um ideal $A^a$ de $R$ tal que $\chi_a = \mathcal{V}(A^a)$. Por outro lado, $\mathcal{V}(A^a) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(A^a)))$. Então, chamando de $J^a = \mathcal{I}(\mathcal{V}(A^a))$, temos que $\chi_a = \mathcal{V}(J^a)$. É fácil ver que se $a, a' \in im\chi$ com $a < a'$, então, $J^a \subseteq J^{a'}$.

Seja $im\chi = \{a_0 < ... < a_m\}$. Definimos o $L$-subconjunto $J$ de $R$ por:

$$J(f) = \begin{cases} c(a_m), & f \in R \setminus J^{a_m} \\ c(a_i), & f \in J^{a_{i+1}} \setminus J^{a_i},\ i = 1, ..., m-1 \\ c(a_0), & f \in J^{a_1} \end{cases}$$

De fato, $J$ é um $L$-ideal de $R$.

Resta provar que $\chi = \mathcal{V}(J)$. Para tanto, basta provar que se $a \in im\chi$, $\mathcal{V}(J)_a = \chi_a$. Seja $a \in im\chi$, isto é, $a = a_i$ para $i = 0, ..., m$. Se $i \neq 0$, temos que $\mathcal{V}(J)_{a_i} = \mathcal{V}(J)_{c(c(a_i))} = \mathcal{V}(J_{c(a_{i-1})}) = \mathcal{V}(J^{a_i}) = \chi_{a_i}$. Se $i = 0$, temos $\mathcal{V}(J)_{a_0} = A^n(C) = \chi_{a_0}$. $\square$

**Proposição 7.5.5** *Seja $V$ uma $L$-variedade algébrica não constante. Então, $V$ é irredutível $\Leftrightarrow$ $imV = \{0, a\}$ com $a > 0$ e $V_a$ é irredutível.*

**Demonstração:**

($\Rightarrow$) Suponhamos $V$ irredutível com $imV = \{a_0, ..., a_m\}$ e $a_0 < ... < a_m$

e, suponhamos $m \geq 2$. Definimos os $L$-subconjuntos $V_1$ e $V_2$ de $A^n(C)$ mediante: $V_1(z) = \begin{cases} a_m, & z \in V_{a_m} \\ a_{m-2}, & z \in V_{a_{m-1}} \setminus V_{a_m} \\ V(z), & z \notin V_{a_{m-1}} \end{cases}$ $V_2(z) = \begin{cases} a_{m-1}, & z \in V_{a_m} \\ V(z), & z \notin V_{a_m} \end{cases}$.

Pela Proposição 7.5.4, $V_1$ e $V_2$ são $L$-variedades algébricas.

Afirmação: $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \subsetneq V$ e $V_2 \subsetneq V$. Isso contradiria o fato de $V$ ser irredutível.

Seja $z \in A^n(C)$. Se $z \in V_{a_m}$, então, $(V_1 \cup V_2)(z) = V_1(z) \vee V_2(z) = a_m \vee a_{m-1} = a_m = V(z)$. Se $z \in V_{a_{m-1}} \setminus V_{a_m}$, então, $(V_1 \cup V_2)(z) = V_1(z) \vee V_2(z) = a_{m-2} \vee V(z) = V(z)$. Agora, se $z \notin V_{a_{m-1}}$, então, $(V_1 \cup V_2)(z) = V_1(z) \vee V_2(z) = V(z) \vee V(z) = V(z)$. Portanto, $V = V_1 \cup V_2$.

Tomando $z \in V_{a_{m-1}} \setminus V_{a_m}$, temos que $V(z) \geq a_{m-1}$, mas, $V_1(z) = a_{m-2}$, donde, $V_1 \subsetneq V$. Por outro lado, se $z \in V_{a_m}$, temos que $V(z) = a_m$, mas $V_2(z) = a_{m-1}$, donde, $V_2 \subsetneq V$.

Concluímos, então, que $m < 2$, donde, como $V$ é não constante, $m = 1$, resultando que $imV = \{a_0, a_1\}$.

Provaremos agora que $a_0 = 0$. Suponhamos $a_0 > 0$ e definimos os $L$-subconjuntos $V_1$ e $V_2$ como $V_1(z) = \begin{cases} a_1, & z \in V_{a_1} \\ 0, & z \notin V_{a_1} \end{cases}$ e $V_2(z) = a_0 \ \forall z$. Pela Proposição 7.5.4, temos que $V_1$ e $V_2$ são $L$-variedades algébricas. Provaremos que $V = V_1 \cup V_2$ com $V_1 \subsetneq V$ e $V_2 \subsetneq V$. Com efeito, se $z \in V_{a_1}$, então, $(V_1 \cup V_2)(z) = V_1(z) \vee V_2(z) = a_1 \vee a_0 = a_1 = V(z)$. Se $z \notin V_{a_1}$, então, $(V_1 \cup V_2)(z) = V_1(z) \vee V_2(z) = 0 \vee a_0 = a_0 = V(z)$. Daí, $V = V_1 \cup V_2$. Por outro lado, tomando $z \notin V_1$, temos $V(z) = a_0 > 0 = V_1(z)$, donde $V_1 \subsetneq V$; e, tomando $z \in V_{a_1}$, temos $V(z) = a_1 > a_0 = V_2(z)$, donde, $V_2 \subsetneq V$. Concluímos que $V$ é redutível, uma contradição. Portanto, $a_0 = 0$, donde $imV = \{0, a(= a_1)\}$. Resta provar que $V_a$ é irredutível.

Suponhamos $V_a = G \cup H$, onde $G$ e $H$ são conjuntos algébricos e $G \subsetneq V_a$ e $H \subsetneq V_a$. Definimos os $L$-subconjuntos $V_1$ e $V_2$ da seguinte maneira: $V_1 = a_G$ e $V_2 = a_H$. É fácil ver que $V_1$ e $V_2$ são $L$-variedades algébricas com $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \subsetneq V$ e $V_2 \subsetneq V$, o que contradiz a irredutibilidade de $V$.

($\Leftarrow$) Suponhamos a hipótese e suponhamos que $V = V_1 \cup V_2$ com $V_1$ e $V_2$ $L$-variedades algébricas. Provaremos que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

Tomando $a$ como na hipótese, temos que $V_a = (V_1 \cup V_2)_a = (V_1)_a \cup (V_2)_a$, pois $L$ é totalmente ordenado. Além disso, pela Proposição 7.5.4, temos que $(V_1)_a$ e $(V_2)_a$ são conjuntos algébricos. Portanto, como $V_a$ é irredutível, temos que $V_a = (V_1)_a$ ou $V_a = (V_2)_a$. Podemos supor $V_a = (V_1)_a$. Provaremos que $V = V_1$.

Obviamente, $V_1 \subseteq V$. Suponhamos que existe $z \in A^n(C)$ tal que $V(z) \not\leq V_1(z)$, ie, $V(z) > V_1(z)$, então, necessariamente, $V(z) = a$, donde, $z \in V_a$, ie, $z \in (V_1)_a$, o que implica $V_1(z) \geq a$, resultando, $V_1(z) \geq V(z) > V_1(z)$, uma contradição. $\square$

**Proposição 7.5.6** *Seja $J$ um $L$-ideal finito valuado não constante de $R$. Então, $\mathcal{V}(J)$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ é primo.*

**Demonstração:**

($\Leftarrow$) Suponhamos $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ $L$-ideal primo. Então, $im\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \{b, 1\}$, $b < 1$. Logo, como $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \mathcal{V}(J)$, temos que $im\mathcal{V}(J) = im\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \{0, c(b)\}$. Agora, pela Proposição 7.5.2 (1), $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_{c(b)} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1)$. Mas, pela hipótese, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ é um $L$-ideal primo de $R$, logo, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1 = I_{\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))}$ é um ideal primo de $R$. Por outro lado, pela Proposição 7.5.1 (1), $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1 = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_{c(0)} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)_{c(b)})$, donde, pela Proposição 7.1.5, $\mathcal{V}(J)_{c(b)}$ é irredutível.

Finalmente, como $im\mathcal{V}(J) = \{0, c(b)\}$ e $\mathcal{V}(J)_{c(b)}$ é irredutível, então, pela Proposição 7.5.5, $\mathcal{V}(J)$ é irredutível.

($\Rightarrow$) Suponhamos $\mathcal{V}(J)$ irredutível, isto é, $im\mathcal{V}(J) = \{0, a\}$ com $a > 0$ e $\mathcal{V}(J)_a$ irredutível. Daí, $im\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \{c(a), 1\}$. Agora, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))$, donde, $\mathcal{V}(J)_a = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_a = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)))_{c(c(a))} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1)$. Portanto, como $\mathcal{V}(J)_a$ é irredutível, temos que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1)$ é irredutível, donde, pela Proposição 7.1.5, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1))$ é um ideal primo, mas, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1)))) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1$ pelo Lema 7.3 (1), logo, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1$ é primo, isto é, $I_{\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))}$ é primo.

Finalmente, como $im\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \{c(a), 1\}$ com $c(a) < 1$ e $L$ é totalmente ordenado, temos que $c(a)$ é um elemento primo de $L$, o que implica, pela Proposição 4.2.3, que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ é primo. $\square$

A seguinte proposição é o Teorema dos Zeros de Hilbert para $L$-ideais finito valuados de $K[x_1, ..., x_n]$.

**Proposição 7.5.7** *Seja $J$ um $L$-ideal finito valuado de $R$ com $J(0) = 1$. Então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$.*

**Demonstração:**

Pelo Corolário 5.3.9.1, $(\sqrt{J})_a = \sqrt{J_a}$, $\forall a \in L$, pois, sendo $J$ finito valuado, tem a propriedade do supremo, mas, $\sqrt{J_a} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_a))$ e, pelo Lema 7.3 (1), $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_a)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_a$. Portanto, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$. $\square$

Para demonstrar o nosso resultado principal (Proposição 7.5.10), precisamos ainda das seguintes duas proposições.

**Proposição 7.5.8** *Se $J$ é um $L$-ideal primo não constante de $R$, então, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$.*

**Demonstração:**

Como $J$ é um $L$-ideal primo não constante, temos pela Proposição 4.2.3, que $imJ = \{b, 1\}$ com $b < 1$ e $I_J = J_1$ é um ideal primo de $R$. Nesse caso, $\forall z \in A^n(C),\ \mathcal{V}(J)(z) = \begin{cases} c(1), & z \in A^n(C) \setminus \mathcal{V}(J_1) \\ c(b), & z \in \mathcal{V}(J_1) \end{cases}$.

i) Suponhamos $J_1 \neq (0)$. Neste caso, $\mathcal{V}(J_1) \neq A^n(C)$ e $im\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = imJ = \{b, 1\}$. Pelo Lema 7.3 (1), temos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1 = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1))$ e, pelo fato de $J_1$ ser um ideal primo cássico, temos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_1)) = J_1$. Assim, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_1 = J_1$. Por outro lado, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_b = R = J_b$. A partir daí, prova-se facilmente que $\forall a \in L,\ \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))_a = J_a$, donde, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$.

ii) Se $J_1 = (0)$, então, $\mathcal{V}(J_1) = A^n(C)$ e resulta $\mathcal{V}(J)(z) = c(b),\ \forall z \in A^n(C)$, donde, $im\mathcal{V}(J) = \{c(b)\}$ e, pela Definição 7.4.1, $\forall f \in R,\ \mathcal{I}(\mathcal{V}(J))(f) = \begin{cases} 1, & f = 0 \\ c(c(b)), & f \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & f = 0 \\ b, & f \neq 0 \end{cases} = J(f)$, ie, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = J$. $\square$

**Lema 7.4** *a) Se $I$ e $J$ são $L$-ideais de $R$ tais que $imI = \{b_0, ..., b_m\}$, onde, $b_0 < ... < b_m = 1$ e $imJ = \{b, 1\}$, onde, $b < 1$, então, $\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$.*
*b) Se $V$ e $W$ são $L$-variedades algébricas tal que $imV = \{a_0, ..., a_n\}$ onde $0 = a_0 < ... < a_n$ e $imW = \{0, a\}$, onde, $0 < a \leq a_n$, então, $\mathcal{I}(V \cup W) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)$.*

**Demonstração:**

a) Para provar a parte (a) deste lema, mostraremos que $\mathcal{V}(I \cap J)_a = (\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J))_a$ para todo $a \in L$.

Primeiro, suponhamos que $a \notin c(imI \cup imJ)$, então, $c(a) \notin imI \cup imJ$, o que implica que $c(a) \notin im(I \cap J)$, pois, $L$ é totalmente ordenado. Portanto, $\mathcal{V}(I \cap J)_a = \mathcal{V}((I \cap J)_{c(a)}) = \mathcal{V}(I_{c(a)} \cap J_{c(a)}) = \mathcal{V}(I_{c(a)}) \cup \mathcal{V}(J_{c(a)}) = \mathcal{V}(I)_a \cup \mathcal{V}(J)_a = (\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J))_a$, sendo esta última igualdade válida por ser $L$ totalmente ordenado.

Agora, suponhamos $a = c(d)$ para $d \in imI \cup imJ$.

Suponhamos primeiro que $d \in imI$, isto é, $d = b_j$ para algum $j = 0, ..., m$. Para mostrar que $\mathcal{V}(I \cap J)_{c(d)} = (\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J))_{c(d)}$, devemos ainda separar em vários casos. Vamos mostrar apenas um deles como ilustração, os demais verificam-se de forma análoga. Suponhamos que $b_i \leq b < b_{i+1} \leq b_j < 1$ e que $b_j \in im(I \cap J)$. Neste caso, temos que, $\mathcal{V}(I \cap J)_{c(b_j)} = \mathcal{V}((I \cap J)_{b_{j^*+1}})$, onde $j^*$ é o menor inteiro $\geq j$ tal que $b_{j^*+1} \in im(I \cap J)$. Então, $(I \cap J)_{b_{j*+1}} = (I \cap J)_{b_{j+1}}$, logo, $\mathcal{V}(I \cap J)_{c(b_j)} = \mathcal{V}((I \cap J)_{b_{j+1}}) = \mathcal{V}(I_{b_{j+1}} \cap J_{b_{j+1}}) = \mathcal{V}(I_{b_{j+1}}) \cup \mathcal{V}(J_{b_{j+1}}) = \mathcal{V}(I)_{c(b_j)} \cup \mathcal{V}(J_1) = \mathcal{V}(I)_{c(b_j)} \cup \mathcal{V}(J)_{c(b)} = \mathcal{V}(I)_{c(b_j)} \cup \mathcal{V}(J)_{c(b_j)}$ (pois, $0 = c(1) < c(b_j)) = (\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J))_{c(b_j)}$.

b) Assim como na parte (a), o caminho para a prova é mostrar que $\mathcal{I}(V \cup W)_b = (\mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W))_b$, para todo $b \in L$.

Vamos analisar, a modo de ilustração, o caso em que $b = c(a_j)$ para algum $j = 0, ..., n$ com $a_j \notin im(V \cup W)$ e $0 < a_j < a_i < a \leq a_{i+1}$. Assim, $(V \cup W)_{a_j} = (V \cup W)_{a_{j+1}}$. Portanto, $\mathcal{I}(V \cup W)_{c(a_j)} = \mathcal{I}((V \cup W)_{a_j}) = \mathcal{I}((V \cup W)_{a_{j+1}}) = \mathcal{I}(V_{a_{j+1}} \cup W_{a_{j+1}}) = \mathcal{I}(V_{a_{j+1}}) \cap \mathcal{I}(W_{a_{j+1}}) = \mathcal{I}(V)_{c(a_j)} \cap \mathcal{I}(W_a) = \mathcal{I}(V)_{c(a_j)} \cap \mathcal{I}(W)_{c(0)} = \mathcal{I}(V)_{c(a_j)} \cap \mathcal{I}(W)_{c(a_j)} = (\mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W))_{c(a_j)}$. $\square$

**Proposição 7.5.9** *a) Se $I$ e $J$ são $L$-ideais finito valuados de $R$ com $I(0) = J(0) = 1$, então, $\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$.*
*b) Se $V$ e $W$ são $L$-variedades algébricas em $A^n(C)$ tal que $0 \in imV \cap imW$, então, $\mathcal{I}(V \cup W) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)$.*

**Demonstração:**

a) Suponhamos que $imJ = \{b_0, ..., b_r\}$ com $b_0 < ... < b_r$. Para cada $i = 0, ..., r-1$, definimos os $L$-ideais $J_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in J_{b_{i+1}} \\ b_i, & x \notin J_{b_{i+1}} \end{cases}$, isto é, $J_i = b_i^{J_{b_{i+1}}}$. Logo, pelo Corolário 6.2.0.1, temos que $J = \bigcap_{i=0}^{r-1} b_i^{J_{b_{i+1}}} = \bigcap_{i=0}^{r-1} J_i$. Portanto, pelo Lema 7.4 (a), $\mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(I \cap \bigcap_{i=0}^{r-1} J_i) = \mathcal{V}(I) \cup \bigcup_{i=0}^{r-1} \mathcal{V}(J_i) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(\bigcap_{i=0}^{r-1} J_i) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$.

b) Suponhamos que $imV = \{a_0 < ... < a_n\}$ e $imW = \{b_0 < ... < b_m\}$. Podemos supor $b_m \leq a_n$. Para cada $i = 0, ..., m-1$ definimos os $L$-subconjuntos $W_i(x) = \begin{cases} b_{i+1}, & x \in W_{b_{i+1}} \\ 0, & x \notin W_{b_{i+1}} \end{cases}$, ou seja, $W_i = (b_{i+1})_{W_{b_{i+1}}}$. Logo, pela Proposição 2.3.4 (a), devidamente adaptada, temos que $W = \bigcup_{i=0}^{m-1}(b_{i+1})_{W_{b_{i+1}}} = \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i$. Portanto, $0 \in imW_i$ para todo $i$, e cada $W_i$ é uma $L$-variedade algébrica em $A^n(C)$ pela Proposição 7.5.4.

Finalmente, pelo Lema 7.4 (b), temos que $\mathcal{I}(V \cup W) = \mathcal{I}(V \cup \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i) = \mathcal{I}(V) \cap \bigcap_{i=0}^{m-1} \mathcal{I}(W_i) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(\bigcup_{i=0}^{m-1} W_i) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)$. $\square$

**Proposição 7.5.10** *Seja $V$ uma $L$-variedade algébrica com $0 \in imV$. Então, $V$ pode ser decomposta como união finita de $L$-variedades algébricas irredutíveis em forma única onde nenhuma delas está contida na união das outras.*

**Demonstração:**

Por definição, $V = \mathcal{V}(J)$ onde $J$ é um $L$-ideal finito valuado de $R$. Daí, pela Definição 7.4.2, temos $J(0) = 1$, pois, $0 \in imV$. Pela Proposição 7.5.7, temos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$ e como observado no Capítulo 6, Corolário 6.2.1.1 e Proposição 6.2.2, $J$ tem uma $L$-representação $\mathcal{R}$-primária finita irreduntante, isto é, $J = q_1 \cap ... \cap q_r$, donde pela Proposição 5.3.10, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J} = \mathcal{R}(J) = \mathcal{R}(q_1 \cap ... \cap q_r) = \mathcal{R}(q_1) \cap ... \cap \mathcal{R}(q_r) = \sqrt{q_1} \cap ... \cap \sqrt{q_r}$. Chamando de $\pi_i = \sqrt{q_i}$, temos, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \pi_1 \cap ... \cap \pi_r$ sendo $\pi_i$ um $L$-ideal primo de $R$ já que $q_i$ é $\mathcal{R}$-primário (Proposição 5.3.7).

Portanto, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))) = \mathcal{V}(\sqrt{J}) = \mathcal{V}(\pi_1 \cap ... \cap \pi_r) = \mathcal{V}(\pi_1) \cup ... \cup \mathcal{V}(\pi_r)$.

Por outro lado, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\pi_i))$ é primo, pois, $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\pi_i)) = \sqrt{\pi_i} = \sqrt{\sqrt{q_i}} = \sqrt{q_i} = \pi_i$, logo, pela Proposição 7.5.6, $\mathcal{V}(\pi_i)$ é irredutível.

Temos, então, uma decomposição de $V$ como união finita de $L$-variedades irredutíveis.

Suponhamos, agora, que $\mathcal{V}(\pi_i) \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{V}(\pi_j)$, então, $\pi_i = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\pi_i)) \supseteq \mathcal{I}(\bigcup_{j \neq i} \mathcal{V}(\pi_j)) = \bigcap_{j \neq i} \mathcal{I}(\mathcal{V}(\pi_j)) = \bigcap_{j \neq i} \pi_j$, o que contradiz a irredundância da decomposição $\mathcal{R}$-primária de $\sqrt{J}$.

Resta provar que a decomposição é única. Suponhamos $V = V_1 \cup ... \cup V_s$ onde cada $V_i$ é uma $L$-variedade algébrica irredutível e não está contida na união das outras. Então, pela Proposição 7.5.6, $\mathcal{I}(V_i)$ é um $L$-ideal primo, donde, a representação $\sqrt{J} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(V_1 \cup ... \cup V_s) = \mathcal{I}(V_1) \cap ... \cap \mathcal{I}(V_s)$ deve ser irredundante. Em conseqüência, como $\sqrt{J} = \pi_1 \cap ... \cap \pi_r$, devemos ter $r = s$ e, a menos da ordem, $\mathcal{I}(V_i) = \pi_i$, donde, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V_i)) = \mathcal{V}(\pi_i)$.

Finalmente, como $V_i$ é uma $L$-variedade algébrica $V_i = \mathcal{V}(J_i)$, portanto, $\mathcal{V}(\mathcal{I}(V_i)) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(J_i))) = \mathcal{V}(J_i) = V_i$, o que implica, $V_i = \mathcal{V}(\pi_i)$. $\square$

# Considerações Finais

Com este trabalho, achamos ter demonstrado que a Álgebra *Fuzzy*, especialmente a Álgebra Comutativa *Fuzzy*, é uma área do conhecimento matemático ainda em construção, e com grandes possibilidades de desenvolvimento futuro. Aliás, a literatura existente nesse campo só aparece com uma freqüência significativa a partir de 1990. Essa área e sua correlata a Geometria Algébrica *Fuzzy* tem feito generalizações impressionantes de diversos conceitos e teorias clássicas, como os conceitos de ideais primos, primários, etc, e as teorias de decomposição primária de ideais, dentre outros. Porém, há poucos resultados na direção de reinterpretar fenômenos clássicos em termos de conceitos *fuzzy*. Nessa direção, esta dissertação dá uma contribuição ao propor reinterpretar as valorizações $p$-ádicas em $\mathbb{Z}$ e as valorizações de Krull em termos de ideais *fuzzy* com valores num certo reticulado. Mais ainda, como foi sugerido no Capítulo 6, esse exemplo sugere um desenvolvimento futuro de uma teoria de decomposição primária infinita, assunto que só faz sentido de um ponto de vista *fuzzy*.

Por outro lado, a teoria desenvolvida sugere alguns outros problemas para serem abordados na pesquisa subseqüênte. Aqui nos referiremos a um deles que resulta de observar um certo padrão de comportamento de diversos tipos de ideais *fuzzy* estudados neste trabalho e outros similares que introduziremos a seguir.

As seguintes definições reúnem conceitos já introduzidos antes e alguns outros novos.

**Definição A:** *Seja $L$ um reticulado (podemos supor infinitamente distributivo e completo) e seja $c \in L$.*

*1) $c$ é dito elemento primo de $L$ se $c \neq 1$ e para todo $a, b \in L$, $a \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ou $b \leq c$.*

*2) $c$ é dito elemento irredutível de $L$ se $c \neq 1$ e para todo $a, b \in L$, $c = a \wedge b \Rightarrow c = a$ ou $c = b$.*

*3) $c$ é dito elemento maximal de $L$ se $c \neq 1$ e para todo $a \in L$, $c \leq a \leq 1 \Rightarrow a = c$ ou $a = 1$.*

**Definição B:** *Seja $R$ um anel (comutativo com unidade) e seja $J$ um L-ideal não constante de $R$.*

*1) $J$ é dito um L-ideal primo se para todo $A, B$ L-ideais de $R$, $A \cdot B \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J$ ou $B \subseteq J$.*

*2) $J$ é dito um L-ideal irredutível se para todo $A, B$ L-ideais de $R$, $J = A \cap B \Rightarrow J = A$ ou $J = B$.*

*3) $J$ é dito um L-ideal L-primário se para todo $A, B$ L-ideais de $R$, $A \cdot B \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J$ ou $B \subseteq \sqrt{J}$.*

*4) $J$ é dito um L-ideal $\mathcal{R}$-primário de $R$ se para todo $A, B$ L-ideais de $R$, $A \cdot B \subseteq J \Rightarrow A \subseteq J$ ou $B \subseteq \mathcal{R}(J)$.*

*5) $J$ é dito um L-ideal maximal de $R$ se $J$ é maximal entre os L-ideais não constantes de $R$ a respeito da inclusão, isto é, se para todo L-ideal $A$ de $R$, $J \subseteq A \subseteq R \Rightarrow A = J$ ou $A = R$.*

*6) $J$ é dito um L-ideal fracamente maximal (abreviadamente, w-maximal) se para todo L-ideal $A$ de $R$, $J \subseteq A \subseteq R \Rightarrow I_A = I_J$ ou $A = R$.*

Com essas definições, são demonstrados diversos teoremas de caracterização desses tipos de ideais em termos de certos ideais bi-valuados, como enunciaremos a seguir. Repare no padrão por trás dessas caracterizações.

**Teorema:** *Seja $J$ um $L$-ideal não constante de $R$, então:*

*a) $J$ é um $L$-ideal primo $\Leftrightarrow J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal primo de $R$ e $c$ um elemento primo de $L$.*

*b) Supondo $L$ totalmente ordenado: $J$ é um $L$-ideal irredutível $\Leftrightarrow J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal irredutível de $R$ e $c \in L\backslash\{1\}$ (repare que por ser $L$ totalmente ordenado, tal elemento $c$ é irredutível).*

*c) Supondo $L$ totalmente ordenado e denso: $J$ é um $L$-ideal $L$-primário $\Leftrightarrow$ $J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal primário de $R$ e $c \in L \setminus \{1\}$ (repare que por ser $L$ totalmente ordenado, tal elemento $c$ é primo).*

*d) $J$ é um $L$-ideal $\mathcal{R}$-primário $\Leftrightarrow J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal primário de $R$ e $c$ um elemento primo de $L$.*

*e) $J$ é um $L$-ideal maximal $\Leftrightarrow J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal maximal de $R$ e $c$ um elemento maximal de $L$.*

*f) $J$ é um $L$-ideal $w$-maximal $\Leftrightarrow J = c^{I_J}$ com $I_J$ um ideal maximal de $R$ e $c \in L \setminus \{1\}$.*

**Demonstração:** Só provaremos o item (b) a modo de ilustração(os itens (a), (c) e (d) foram demonstrados no texto).

($\Rightarrow$) Seja $J$ um $L$-ideal irredutível de $R$ e suponhamos que $J(0) < 1$. Sejam $A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I_J \\ J(x), & \text{se } x \notin I_J \end{cases}$ e $B = J(0)_R$. Assim, $A$ e $B$ são $L$-ideais de $R$. Além disso, temos que $A \supsetneq J$ e $B \supsetneq J$, pois, se $x \in I_J$, então, $A(x) = 1 > J(0) \geq J(x)$ e, se $x \notin I_J$, então, $A(x) = J(x)$. Também $B(x) = J(0) \geq J(x)\ \forall x \in R$. Por ser $J$ não constante, temos que $B \neq J$.

Afirmação: $A \cap B = J$.

Se $x \in I_J$, então, $J(x) = J(0)$. Além disso, $A(x) = 1$ e $B(x) = J(0)$, ou seja, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = J(0) = J(x)$.

Se $x \notin I_J$, então, $A(x) = J(x)$ e $B(x) = J(0)$, mas, $J(x) < J(0)$, logo, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = A(x) = J(x)$.

Uma contradição, pois $J$ é irredutível, logo, $J(0) = 1$.

Agora, como $J$ é não constante, existe $a \in L \setminus \{1\}$ tal que $\{a, 1\} \subseteq imJ$. Suponhamos que existe $c \in L \setminus \{1, a\}$, digamos $c < a$ tal que $\{c, a, 1\} \subseteq imJ$. Então, existem $z, w \in R$ tais que $J(z) = a$ e $J(w) = c$. Sejam $A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in J_a \\ J(x), & \text{se } x \notin J_a \end{cases}$ e $B(x) = \begin{cases} J(x), & \text{se } x \in J_a \\ a, & \text{se } x \notin J_a \end{cases}$. Assim, $A$ e $B$ são $L$-ideais de $R$. Além disso, $A \supsetneq J$ e $B \supsetneq J$. Com efeito, se $x \in J_a$, então, $A(x) = 1 \geq J(x)$ e $B(x) = J(x)$. Se, $x \notin J_a$, então, $A(x) = J(x)$ e $B(x) = a \geq J(x)$. No entanto, $A \neq J$ e $B \neq J$, pois, $z \in J_a$, logo, $A(z) = 1 > a = J(z)$ e $w \notin J_a$, logo, $B(w) = a > c = J(w)$. Finalmente, temos que $A \cap B = J$. Com efeito, se $x \in J_a$, então, $A(x) = 1$ e $B(x) = J(x)$, logo, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = J(x)$. Se $x \notin J_a$, então, $A(x) = J(x)$ e $B(x) = a$, mas, como $x \notin J_a$, então, $J(x) < a$, portanto, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = J(x)$. Uma contradição. Logo, $imJ = \{a, 1\}$.

Resta provar que $I_J$ é irredutível. De fato, se $I_J$ não é irredutível, então, existem $J_1, J_2$ ideais de $R$ tal que $J_1 \supsetneq I_J$, $J_2 \supsetneq I_J$ e $J_1 \cap J_2 = I_J$. Sejam $A, B$ tais que $A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in J_1 \\ a, & \text{se } x \notin J_1 \end{cases}$ e $B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in J_2 \\ a, & \text{se } x \notin J_2 \end{cases}$, isto é, $A = a^{J_1}$ e $B = a^{J_2}$. Assim, $A, B$ são $L$-ideais de $R$. Também, temos que $A \supsetneq J$ e $B \supsetneq J$. Com efeito, se $x \in J_1$, então, $A(x) = 1 \geq J(x)$. Se $x \notin J_1$, então, $x \notin I_J$, isto é, $A(x) = a$ e $J(x) = a$ (uma vez que $imJ = \{1, a\}$), logo, $A(x) \geq J(x)$. Mas, como $J_1 \neq I_J$, então, existe $z \in J_1$ tal que $z \notin I_J$, ou seja, $J(z) = a < 1 = A(z)$. Analogamente, $B \supsetneq J$. No entanto, $A \cap B = J$, o que seria uma contradição. De fato, se $x \in J_1$ e $x \in J_2$, então, $x \in I_J$, logo, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = 1 \wedge 1 = 1 = J(x)$. Se $x \notin J_1$ ou $x \notin J_2$, então, $x \notin I_J$. Isto significa que $J(x) = a$ e $A(x) = a$ ou $B(x) = a$. Assim, $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = a = J(x)$. Portanto, $I_J$ é irredutível.

$(\Leftarrow)$ É fácil ver que $J$ é um $L$-ideal de $R$.

Suponhamos, por absurdo, que existam $A, B$ $L$-ideais de $R$ tais que $A \supsetneq J$, $B \supsetneq J$ e $A \cap B = J$. Então, existem $z, w \in R$ tais que $A(z) > J(z)$ e $B(w) > J(w)$. Assim, $z, w \notin I_J$. Sejam $J_1 = \langle I_J \cup \{z\} \rangle$ e $J_2 = \langle I_J \cup \{w\} \rangle$. Então, $J_1 \supsetneq I_J$ e $J_2 \supsetneq I_J$.

Seja $r \in J_1 \cap J_2$, então, $r = a_1 + a_2 z = a_3 + a_4 w$, onde $a_1,\ a_3 \in I_J$ e $a_2,\ a_4 \in R$. Assim, $a_1 - a_3 = a_4 w - a_2 z \in I_J$, pois o suporte algébrico de $J$ é um ideal de $R$. Portanto, $J(a_1 - a_3) = J(a_4 w - a_2 z) = 1$. Temos, por hipótese, que $A(a_4 w - a_2 z) \geq J(a_4 w - a_2 z) = 1$, donde, $A(a_4 w - a_2 z) = 1$. Mas, $A(a_4 w) = A(a_4 w - a_2 z + a_2 z) \geq A(a_4 w - a_2 z) \wedge A(a_2 z) = 1 \wedge A(a_2 z) = A(a_2 z)$. Da mesma forma, temos que $A(a_2 z) \geq A(a_4 w)$, ou seja, temos que $A(a_4 w) = A(a_2 z)$. Analogamente, $B(a_4 w) = B(a_2 z)$. Assim, $A(a_4 w) = A(a_2 z) \geq A(z) > J(z) = a$ e $B(a_2 z) = B(a_4 w) \geq B(w) > J(w) = a$. Agora, como $A \cap B = J$, temos que $A(a_2 z) \wedge B(a_2 z) = J(a_2 z)$, ou seja, $J(a_2 z) = 1$, donde, $a_2 z \in I_J$. Mas, isto significa que $r = a_1 + a_2 z \in I_J$, isto é, $J_1 \cap J_2 \subseteq I_J$. Como, $I_J \subseteq J_1 \cap J_2$, então, $J_1 \cap J_2 = J$. Uma contradição, pois, $I_J$ é irredutível. $\square$

Os enunciados do teorema anterior sugerem um comportamente padrão que possivelmente tenha um caráter lógico, o qual será motivo de uma pesquisa mais aprofundada.

Na teoria *fuzzy*, o conceito de $L$-ideal $w$-maximal adquire maior importância que o de $L$-ideal maximal pelo fato de muitos reticulados usados na teoria não terem elementos maximais, como é o caso do intervalo $[0, 1]$ e outros reticulados totalmente ordenados densos. Mais ainda, prova-se que se $A$ é um

$L$-ideal próprio de $R$, existe um $L$-ideal $w$-maximal $J$ de $R$ tal que $A \subseteq J$.

# Bibliografia


[1] BALBES, R.; DWINGER, P.; *Distributive Lattices.* University of Missouri Press, 1974.

[2] GOGUEN, J. A.; *L-fuzzy sets.* J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145 - 174.

[3] MORDESON, J. N.; *Fuzzy algebraic varieties.* Rocky Mountain J. Math. 23 (1993) 1361 - 1377.

[4] MORDESON, J. N.; *Fuzzy algebraic varieties II, Advances in Fuzzy Theory and Technology Vol I.* (1993) (Edited by Paul Wang) 9- 21.

[5] MORDESON, J.N.; MALIK, D. S. *Fuzzy Commutative Algebra.* Creighton University: World Scientific, 1998.

[6] ROSENFELD, A.; *Fuzzy groups.* J. Math. Anal. Appl. 35 (1971) 512 - 517.

[7] ZADEH, L., A.; *Fuzzy sets.* Inform. and Contr. 8 (1965) 338 - 353.