

MARIA REGINA CARVALHO MACIEIRA LOPES

**USO DAS METODOLOGIAS PROMETHEE E F-PROMETHEE
NA AVALIAÇÃO DE CLIENTES**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Ciências, Curso de
Pós-Graduação em Métodos Numéricos em
Engenharia – Programação Matemática, Setores de
Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal
do Paraná.**

Orientadora: Prof. Dra. Neida Maria Patias Volpi

CURITIBA

2005

Dedico este trabalho aos meus pais, Dona Anna e
“Seu” Macieira, e ao meu esposo Mauro.

AGRADECIMENTOS

À professora Dra Neida Maria Patias Volpi pela orientação e comprometimento com a realização deste trabalho.

Aos professores Anselmo Chaves Neto, Celso Carnieri, Liliansa Madalena Gramani Cumin, Maria Teresinha Arns Steiner, Neida Maria Patias Volpi, Volmir Eugênio Wilhem, pelos ensinamentos recebidos durante o curso.

Aos colegas do mestrado, em especial à amiga Sirlei Cavassin.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram com a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

SUMÁRIO.....	v
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE GRÁFICOS.....	ix
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SIGLAS	xi
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Estrutura do Trabalho	3
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1 Conjuntos Difusos	4
2.1.2 Operações com Conjuntos Difusos	8
2.1.3 Alguns Conceitos Referentes aos Conjuntos Difusos	12
2.1.4 Relações Difusas	16
2.1.5 Número Difuso	20
2.1.5.1 Número L-R Difuso.....	21
2.1.5.2 Operações com Números L-R Difusos	24
2.1.6 Variáveis Lingüísticas	26
2.1.7 Proposição (ou Regra) Difusa	28
2. 1.8 Sistemas de Inferência Difusa	29
2. 1.8.1 Módulo de Fuzificação	29
2. 1.8.2 Módulo Base de Regras.....	30
2. 1.8.3 Módulo Máquina de Inferência	32
2. 1.8.4 Módulo de Defuzificação	35
2.2 Metodologia Multicritério	39
2.2.1 PROMETHEE	40
2.2.2 F- PROMETHEE.....	46
3 ESTUDO DE CASO	50
3.1 Implementação do PROMETHEE II.....	53
3.2 Implementação do F-PROMETHEE	57

3.2.1 Avaliação dos Pesos dos Critérios para Uso no PROMETHEE e F-PROMETHEE	
II.....	58
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	65
4.1 Ordenações Obtidas nas Metodologias PROMETHEE e F-PROMETHEE	67
5 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
ANEXOS	80

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DO CONJUNTO NÚMEROS NÃO NEGATIVOS MENORES QUE 10 NO UNIVERSO DOS R^+	5
FIGURA 2.2 – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DO CONJUNTO DIFUSO INTEIROS POSITIVOS PRÓXIMOS DE 6 NO UNIVERSO DOS Z^+	6
FIGURA 2.3 – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA μ_A E FUNÇÃO CARACTERÍSTICA C_A	6
FIGURA 2.4 – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DO CONJUNTO DIFUSO PESSOAS JOVENS.....	7
FIGURA 2.5 – EXEMPLO DE INTERSECÇÃO USANDO T-NORMA PRODUTO ALGÉBRICO.....	9
FIGURA 2.6 – EXEMPLOS DE INTERSECÇÃO E UNIÃO DE CONJUNTOS DIFUSOS	12
FIGURA 2.7 – FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DO CONJUNTO B E SEU COMPLEMENTO \bar{B}	13
FIGURA 2.8 – EXEMPLO DE CONJUNTO SUPORTE.....	14
FIGURA 2.9 - EXEMPLO DE CONJUNTOS α - NÍVEIS.....	15
FIGURA 2.10 – EXEMPLOS DE CONJUNTOS CONVEXOS.....	16
FIGURA 2.11 - EXEMPLO DE COMPOSIÇÃO DE RELAÇÃO DIFUSA.....	19
FIGURA 2.12 – EXEMPLO DE NÚMERO DIFUSO M.....	20
FIGURA 2.13 – EXEMPLO DE NÚMERO L-R DIFUSO.....	22
FIGURA 2.14 - REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO DIFUSO TRAPEZOIDAL.....	23
FIGURA 2.15 - REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO DIFUSO TRIANGULAR.....	23
FIGURA 2.16 – EXEMPLO DA SOMA DE DOIS NÚMEROS DIFUSOS.....	24
FIGURA 2.17 – EXEMPLO DE ELEMENTO OPOSTO ($-M$).....	25
FIGURA 2.18 – EXEMPLO DA MULTIPLICAÇÃO DE UM ESCALAR POR UM NÚMERO DIFUSO.....	26
FIGURA 2.19 – EXEMPLO DE VARIÁVEL LINGÜÍSTICA.....	27
FIGURA 2.20 - ESTRUTURA DE UM SISTEMA DE INFERÊNCIA.....	29
FIGURA 2.21 - REPRESENTAÇÃO DAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS PARA AS VARIÁVEIS: TEMPERATURA, PRESSÃO E FLUXO.....	30
FIGURA 2.22 – MÉTODO MANDANI DE INFERÊNCIA.....	33
FIGURA 2.23 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO CENTRO DE ÁREA.....	35
FIGURA 2.24 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO MÉDIA DOS MÁXIMOS.....	36

FIGURA 2.25 – REPRESENTAÇÃO DO MÉTODO CENTRO DOS MÁXIMOS.....	37
FIGURA 2.26 – EXEMPLO DE SISTEMA DE INFERÊNCIA DIFUSA CONSTRUÍDO NO <i>FUZZY LOGICAL TOOLBOX</i> DO <i>MATLAB</i>	38
FIGURA 2.27 – EXEMPLOS DE FUNÇÕES DE PREFERÊNCIA.....	41
FIGURA 2.28 - RESULTADO OBTIDO PELA CLASSIFICAÇÃO PARCIAL (PROMETHEE I) OBTIDO NO <i>SOFTWARE DECISION LAB</i>	44
FIGURA 2.29 - RESULTADO OBTIDO PELA CLASSIFICAÇÃO COMPLETA (PROMETHEE II).....	45
FIGURA 3.1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA PARA CRITÉRIO COMPROMETIMENTO DO CAPITAL CIRCULANTE LÍQUIDO.....	58
FIGURA 3.2 – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DE ENTRADA OBJETIVO (1).....	60
FIGURA 3.3 – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DE ENTRADA OBJETIVO (2).....	61
FIGURA 3.4 – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DE ENTRADA OBJETIVO (3).....	61
FIGURA 3.5 – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DE SAÍDA PESO.....	62
FIGURA 3.6 – OBTENÇÃO DA VARIÁVEL DE SAÍDA PESO PARA O CRITÉRIO 3.....	63
FIGURA 4.1 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA COM $\tilde{d}(a_r, a_s)$ TOTALMENTE INSERIDO NA REGIÃO DE PREFERÊNCIA RELATIVA.....	65
FIGURA 4.2 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA COM $\tilde{d}(a_r, a_s)$ PARCIALMENTE INSERIDA NA REGIÃO DE PREFERÊNCIA RELATIVA (CASO1).....	66
FIGURA 4.3 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA COM $\tilde{d}(a_r, a_s)$ PARCIALMENTE INSERIDA NA REGIÃO DE PREFERÊNCIA RELATIVA (CASO2).....	66
FIGURA 4.4 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA PARA CRITÉRIO COMPROMETIMENTO DA RENDA LÍQUIDA.....	67

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 4.1 – GRÁFICO DE DISPERSÃO ENTRE PROMETHEE E F-PROMETHEE (CENÁRIO1).	69
GRÁFICO 4.2 - HISTOGRAMA DA DIFERENÇA ENTRE AS ORDENAÇÕES OBTIDAS NO PROMETHEE E F-PROMETHEE (CENÁRIO 1).....	70
GRÁFICO 4.3 – GRÁFICO DE DISPERSÃO ENTRE PROMETHEE E F-PROMETHEE (CENÁRIO 1).....	72
GRÁFICO 4.4 – HISTOGRAMA DA DIFERENÇA ENTRE AS ORDENAÇÕES OBTIDAS NO PROMETHEE E F-PROMETHEE (CENÁRIO 2).....	72
GRÁFICO 4.5 – HISTOGRAMA DA DIFERENÇA ENTRE AS ORDENAÇÕES DOS CLIENTES PARA A METODOLOGIA PROMETHEE NOS CENÁRIOS 1 E 2.....	75
GRÁFICO 4.5 – HISTOGRAMA DA DIFERENÇA ENTRE AS ORDENAÇÕES DOS CLIENTES PARA A METODOLOGIA F-PROMETHEE NOS CENÁRIOS 1 E 2.....	75

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – IMAGENS DA FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA DO CONJUNTO DIFUSO NUMERAIS PRÓXIMOS DE 6.....	5
TABELA 2.2 – INTERSECÇÃO ENTRE OS CONJUNTOS A E B.....	10
TABELA 2.3 – UNIÃO ENTRE OS CONJUNTOS A E B.....	11
TABELA 2.4 – DOMÍNIO DAS VARIÁVEIS DO SISTEMA.....	30
TABELA 2.5 – REGRAS DE FLUXO PARA AS VARIÁVEIS DE ENTRADA.....	32
TABELA 2.6 – REGRAS ATINGIDAS PARA AS VARIÁVEIS DE ENTRADA DO EXEMPLO.....	34
TABELA 3.1 - BANCO SOCIAL – CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO	52
TABELA 3.2 – VALORES DE REFERÊNCIA PARA OS CRITÉRIOS CONSIDERADOS.....	55
TABELA 3.3 – LIMITE DE INDIFERENÇA E PREFERÊNCIA PARA A FUNÇÃO DE PREFERÊNCIA <i>V-SHAPE I</i>	56
TABELA 3.4 – RELAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS E OS OBJETIVOS DO BANCO SOCIAL.....	59
TABELA 3.5 – VALORES DE ENTRADA E DE SAÍDA DO SISTEMA REFERENTES AO CÁLCULO DOS PESOS.....	63
TABELA 4.1 – ORDENAÇÃO DE ALGUNS CLIENTES OBTIDA NO PROMETHEE E F-PROMETHEE NO PRIMEIRO CENÁRIO.....	68
TABELA 4.2 – ORDENAÇÃO DE ALGUNS CLIENTES OBTIDA NO PROMETHEE E F-PROMETHEE NO SEGUNDO CENÁRIO	71
TABELA 4.3 – COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DE SPEARMAN PARA AS ORDENAÇÕES.....	73
TABELA 4.4 – COEFICIENTES VARIAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA NOS CRITÉRIOS DIFUSOS.....	73

LISTA DE SIGLAS

PROMETHEE- *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*

F-PROMETHEE- *Fuzzy Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*

AHP- *Analytic Hierarchy Process*

ELECTRE - *Elimination et Choix Traduisant la Réalité*

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com dados do Banco Social do Paraná, entidade que gerencia um programa de crédito orientado, criado pelo Governo do Estado do Paraná. O objetivo do trabalho foi desenvolver e estudar comparativamente as metodologias multicritério PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*(PROMETHEE) e F-PROMETHEE (F refere-se a *Fuzzy*) na avaliação dos proponentes ao crédito da Unidade de Guarapuava. O PROMETHEE pertence à família dos métodos de subordinação desenvolvidos com a finalidade de auxiliar no processo de tomada de decisão. Através dos *PROMETHEE's* I e II obtêm-se, respectivamente, as classificações parcial e completa de um conjunto finito de alternativas, avaliadas segundo k critérios. Considerando que na classificação dos clientes proponentes ao crédito, o peso dado aos critérios de interesse é expresso em termos qualitativos (alto, médio e baixo) e que os critérios quantitativos carregam imprecisões, a análise multicritério através do método *PROMETHEE* pode ser estendida usando a teoria dos conjuntos difusos. No *F-PROMETHEE*, os dados de entrada são tratados como números difusos e no desenvolvimento do método é usada a aritmética para tais números. Essa abordagem introduz uma nova informação ao processo de decisão podendo resultar em um *ranking* mais realista das alternativas já que leva em consideração a imprecisão dos dados.

Palavras-chave: *PROMETHEE*, metodologia multicritério, *Fuzzy Sets*, crédito orientado.

ABSTRACT

This work has been developed with a data from the Banco Social do Paraná, which manages a program of oriented credit, sponsored by the government of Paraná State. The objective of this work was to develop and study comparatively the multicriteria methodologies PROMETHEE and F-PROMETHEE in the evaluation of the credit applicants of city of Guarapuava. PROMETHEE belongs to the family of the outranking methods developed with the goal to help the process of decision-making. Throughout PROMETHEE's I and II, partial and complete pre-orders of a finite set of alternatives are obtained, respectively, evaluated according k criteria. Considering that, in the classification of credit applicants, the weight given to the criteria of interest is expressed in qualitative terms (high, medium and low) and that the quantitative criteria have imprecision, multicriteria analysis through PROMETHEE can be extended using the theory of fuzzy sets. In the F-PROMETHEE, entry data are treated as fuzzy numbers and the arithmetic for such numbers is used in the method's development. This approach brings new information to the decision process, which can result a more realistic ranking of the alternatives, once the imprecision of data is taken into consideration.

Key words: *PROMETHEE*, multicriteria methodology, *Fuzzy Sets*.

1 INTRODUÇÃO

Muitos processos de decisão no mundo real são desenvolvidos em ambientes de incerteza. Na classificação de pacientes como depressivos, ou de pessoas como idosas, por exemplo, os termos *depressivo* e *idoso* são vagos, pois não podem ser precisamente definidos. Surgem questões como: A pessoa com 50 anos pertence ao conjunto dos idosos? Aquele paciente pertence ao conjunto de pessoas depressivas? Poderíamos forçar uma resposta “sim” (1) ou “não” (0), usando a teoria clássica de conjuntos, entretanto, a pertinência ou não-pertinência impõem limites muito rígidos, podendo haver perda de informações já que existem graus de velhice, assim como graus de depressão. Admitindo que a pessoa com 50 anos seja considerada idosa, uma pessoa com 80 anos, claramente também é idosa, porém com grau muito maior.

A fim de introduzir um tratamento matemático a essas imprecisões Lotfi Asker Zadeh, em 1965, introduziu a Teoria de Conjuntos Difusos, (também referida como Teoria de Conjuntos Nebulosos e em alguns casos como Teoria das Possibilidades). Em termos simples essa teoria é uma generalização da teoria clássica por admitir graus de pertinência entre 0 e 1 e fornecer meios de representação e de manipulação de variáveis dadas na linguagem natural. O autor procurou ainda estabelecer a diferença entre a incerteza aleatória e a incerteza difusa. A incerteza de origem aleatória está relacionada à ocorrência de um evento e, uma vez que o evento tenha ocorrido desaparece a incerteza. Podemos, por exemplo, calcular a probabilidade de chuva para amanhã. Entretanto, nessa informação não é possível reconhecer com que intensidade o evento ocorrerá. A medida de quão forte estará chovendo é uma incerteza nebulosa.

Por muito tempo as idéias de Zadeh permaneceram incompreendidas até que, em meados dos anos 80, no Reino Unido, E. Mandani as utilizou para projetar um controlador difuso de um motor a vapor.

Anos depois, no Japão, as estratégias usadas por operadores do metrô de Sendai foram convertidas em regras difusas para controlar a velocidade no trajeto e a frenagem próxima às estações.

Desde então, as aplicações se multiplicaram em diversas áreas: na economia, na medicina, nas tomadas de decisão, nos processos industriais, etc. Em especial, na Análise de Sistemas e na Gestão Empresarial têm surgido alguns trabalhos, como o de WEBER (1993), com o objetivo de analisar e estabelecer padrões para concessão de crédito utilizando a teoria difusa. Isso porque, a análise de crédito está inserida em um cenário

complexo e carregado de incertezas. Basicamente, é comum a concessão ou não de crédito dar-se a partir da análise de questionários que podem conter informações imprecisas. Vale ressaltar que, no tratamento dessas incertezas, em geral, são utilizadas técnicas estatísticas como a Análise de Discriminante Múltipla, em que a variável dependente é a probabilidade de inadimplência do cliente e, as variáveis independentes são os fatores associados à força financeira de seu empreendimento, e à sua capacidade de liquidação da dívida.

Este trabalho foi desenvolvido com dados da Unidade de Guarapuava do Banco Social do Paraná, entidade que gerencia um programa de crédito orientado, criado pelo Governo do Estado do Paraná. Esse programa é destinado a microempreendedores, formais ou informais, sem acesso ao sistema financeiro tradicional.

O objetivo do trabalho foi desenvolver e estudar comparativamente as metodologias multicritério PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*(PROMETHEE) e F-PROMETHEE (F refere-se a *Fuzzy*) na avaliação dos proponentes ao crédito no Banco Social do Paraná.

O PROMETHEE pertence à família dos métodos de subordinação da escola francesa, desenvolvidos com a finalidade de auxiliar no processo de tomada de decisão. Através dos PROMETHEE's I e II obtêm-se, respectivamente, as classificações parcial e completa de um conjunto finito de alternativas, avaliadas segundo k critérios.

Considerando que na classificação dos clientes proponentes ao crédito, o peso dado aos critérios de interesse é expresso em termos qualitativos (alto, médio e baixo) e que os critérios quantitativos carregam imprecisões, a análise multicritério através do método PROMETHEE pode ser estendida usando a teoria dos conjuntos difusos. No F-PROMETHEE, os dados de entrada são tratados como números difusos e no desenvolvimento do método é usada a aritmética para tais números. Essa abordagem introduz uma nova informação ao processo de decisão podendo resultar em um *ranking* mais realista das alternativas já que leva em consideração a imprecisão dos dados.

Apesar de este trabalho usar os dados do Banco Social, a metodologia utilizada pode ser indicada para qualquer situação em que se deseja avaliar clientes para fins de uso de recursos de uma empresa.

1.1 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. Além desta introdução, o Capítulo 2 apresenta primeiramente um estudo sobre a Teoria de Conjuntos Nebulosos, incluindo definições, propriedades, operações e o sistema de inferência Mandani, aplicado ao estudo de caso. Na seqüência, é abordada a metodologia multicritério PROMETHEE nas versões: clássica e difusa.

No Capítulo 3, é apresentado o Banco Social do Paraná e as metodologias PROMETHEE e F-PROMETHEE aplicadas à classificação de clientes proponentes ao crédito.

O Capítulo 4 traz a apresentação e análise dos resultados obtidos.

Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais do trabalho e as recomendações para pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo inicialmente são levantados alguns conceitos relacionados à teoria de conjuntos difusos como definições, propriedades e operações. O sistema matemático que emprega conceitos dessa teoria para modelar a informação imprecisa contidas em frases expressas na linguagem natural, é denominado sistema difuso. De forma geral, esses sistemas são constituídos de quatro módulos, tratados neste trabalho: (1) módulo de fuzificação em que as variáveis de entrada apresentadas em valores numéricos são convertidas para conjuntos difusos; (2) módulo base de regras constituído de sentenças condicionais do tipo SE <condição> ENTÃO <consequência>; (3) módulo de inferência, responsável pelo processamento das regras e; (4) módulo de defuzificação que converterá os conjuntos de saída do sistema novamente em valores numéricos.

Na seqüência do trabalho é apresentada a metodologia multicritério PROMETHEE nas versões clássica e difusa. Na versão difusa as entradas do algoritmo do PROMETHEE são dadas como números difusos triangulares que representam quantidades imprecisas. O processamento do método é realizado utilizando a aritmética para os números L-R difusos proposta por DUBOIS e PRADE (1978).

2.1 Conjuntos Difusos

Na teoria clássica de conjuntos a noção de pertinência é bem definida: elementos pertencem ou não pertencem a um dado conjunto. Essa teoria está baseada na função característica:

$$\mu_A : U \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

onde U é o conjunto universo, ou universo do discurso, A e x são, respectivamente, subconjunto e elemento de U .

Exemplo 2.1: Seja A um conjunto no universo $U = \mathbb{R}^+$ dos números não negativos definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^+ / x < 10\}$$

A função de pertinência $\mu_A(x)$ é dada por:

$$\mu_A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 10 \\ 0 & \text{se } x \geq 10 \end{cases} \quad \text{com a representação gráfica apresentada na figura 2.1}$$

Neste caso, é possível identificar sem dificuldade, os elementos que pertencem ao conjunto A, entretanto, há situações em que a pertinência não é claramente definida.

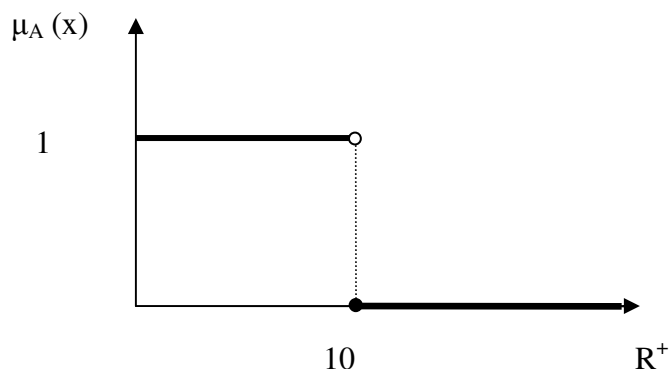


Figura 2.1 – Função de pertinência do conjunto *números não negativos menores que 10*, no universo dos R^+

Agora, considerando em outro exemplo (2.2), o conjunto dos *inteiros positivos próximos de 6*, não seria correto afirmar que o numeral 4 não pertence a esse conjunto, isto é, $\mu_A(4) = 0$ e o numeral cinco pertence ao conjunto ($\mu_A(5) = 1$). Dependendo do contexto em que o problema está sendo analisado, há necessidade de graduar a pertinência desses elementos. A tabela 2.1 apresenta uma possibilidade e a figura 2.2 sua representação gráfica. Dessa forma, os numerais 4 e 5 pertencem parcialmente ao conjunto dos *inteiros próximos de 6* com diferentes graus.

Tabela 2.1 – Imagens da função de pertinência do conjunto difuso *numerais próximos de 6*

X	3	4	5	6	7	8	9
$\mu_A(x)$	0.2	0.4	0.8	1.0	0.8	0.4	0.2

Informalmente, um conjunto difuso é uma classe de objetos para o qual não há uma fronteira bem definida entre aqueles que pertencem a um conjunto e aqueles que não pertencem. Dessa forma, na teoria difusa ocorre um *relaxamento* no conceito de pertinência da teoria clássica, já que $\mu_A(x)$ assume valores no intervalo $[0,1]$ e não somente 0 ou 1.

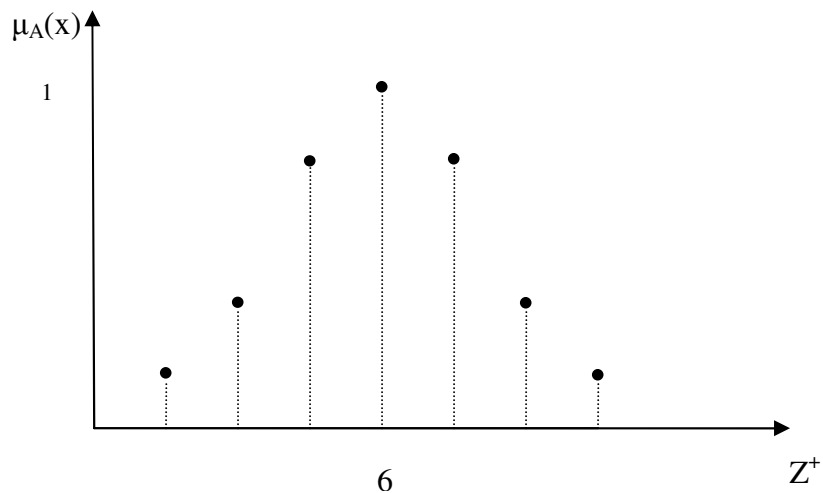


Figura 2.2 – Função de pertinência do conjunto difuso *inteiros positivos próximos de 6*, no Universo dos Z^+

Na figura 2.3 são apresentadas a função de pertinência $\mu_A(x)$ de um conjunto difuso e a função característica clássica denotada por C_A .

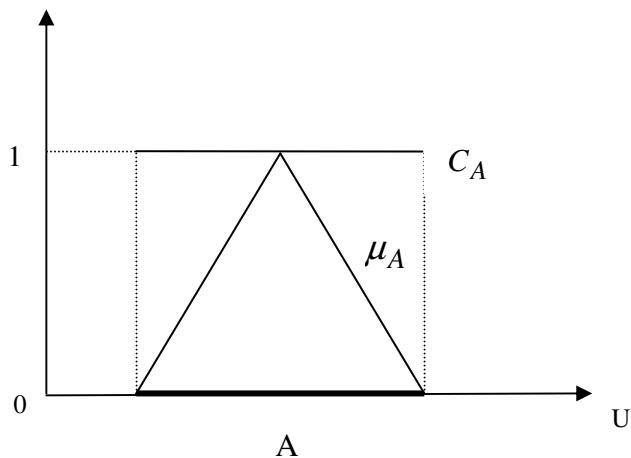


Figura 2.3 – Função de pertinência μ_A e função característica C_A

Formalmente foi proposto por ZADEH (1970, p.143) a seguinte definição:

Definição 2.1: O subconjunto difuso A em um conjunto universo U , é caracterizado pelo conjunto de pares ordenados

$$A = \left\{ (x, \mu_A(x)) \right\} \quad x \in U$$

onde a função μ_A é chamada grau de pertinência e associa a cada elemento $x \in U$ um número real $\mu_A(x)$ no intervalo $[0, 1]$.

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

Um e zero representam, respectivamente, a pertinência máxima e não pertinência do elemento ao conjunto difuso.

Quando o conjunto difuso é discreto, A também pode ser denotado por:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i$$

onde o símbolo ($/$) associa o elemento do conjunto à sua função de pertinência e o símbolo (\sum) refere-se ao conectivo “ou”. Em geral, não são listados os elementos com pertinência nula. O exemplo 2.2, anteriormente apresentado, teria a seguinte notação:

$$A = \{0.2/3 + 0.4/4 + 0.8/5 + 1.0/6 + 0.8/7 + 0.4/8 + 0.2/9\}$$

ou

$$A = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.8), (6, 1.0), (7, 0.8), (8, 0.4), (9, 0.2)\}$$

Sendo o conjunto difuso contínuo, A é denotado por:

$$A = \int_x \mu_A(x) / x$$

Neste caso, podemos considerar o conjunto de *pessoas jovens* representado na figura 2.4.

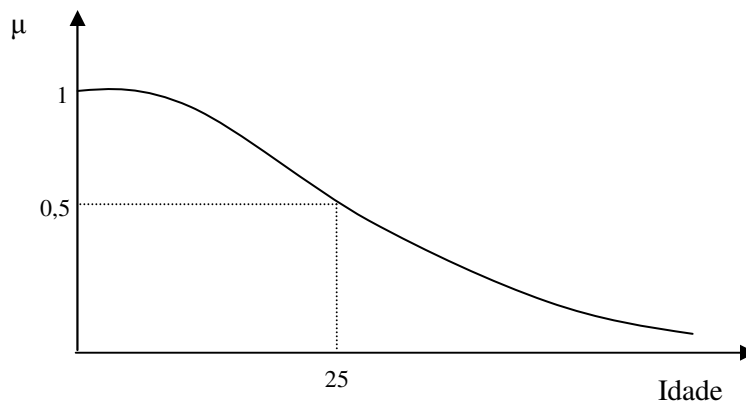


Figura 2.4 – Função de pertinência do conjunto difuso *pessoas jovens*
Fonte: SAKAWA, 1993, p.9

2.1.2 Operações com Conjuntos Difusos

As operações básicas com conjuntos difusos, intersecção e união são definidas de forma similar às operações com conjuntos clássicos e dependem da norma considerada. Na teoria dos conjuntos difusos, as normas mais utilizadas são as normas triangulares (norma- t) e as co-normas triangulares (norma- s) definidas abaixo (NGUYEN e WALKER, 1997, p.69):

Definição 2.2: *Uma norma triangular é uma função definida no produto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$, $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, tal que $\forall x, y, z, w \in [0,1]$ e que satisfazem as propriedades:*

- i) *Comutativa:* $x \mathbf{t} y = y \mathbf{t} x$;
- ii) *Associativa:* $x \mathbf{t} (y \mathbf{t} z) = (x \mathbf{t} y) \mathbf{t} z$;
- iii) *Condições Monotônicas:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$, então $x \mathbf{t} w \leq y \mathbf{t} z$; e
- iv) *Condição de Contorno:* $x \mathbf{t} 0 = 0$ e $1 \mathbf{t} x = x$.

Alguns exemplos de normas- t encontrados na literatura são:

$$x \mathbf{t} y = xy \quad (\text{produto algébrico})$$

$$x \mathbf{t} y = \begin{cases} x, & \text{se } y = 1 \\ y, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

$$x \mathbf{t} y = \min \{x, y\}$$

Definição 2.3: *Uma norma- s , também chamada de co-norma t , é uma função definida no produto cartesiano $[0,1] \times [0,1]$, $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, que satisfaz as propriedades (i) a (iii) acima e:*

$$\text{iv) Condição de Contorno: } x \mathbf{s} 0 = x \quad \text{e} \quad 1 \mathbf{s} x = 1$$

Como exemplos de norma- s tem-se:

$$x \mathbf{s} y = x + y - xy \quad (\text{soma algébrica})$$

$$x \mathbf{s} y = \max \{x, y\}$$

As normas t e s permitem maior flexibilidade para o projetista dos sistemas difusos. No trabalho de MATTOS et al (2005), no qual é proposto um sistema difuso para controle da assistência respiratória em neonatos, na avaliação das regras foi realizado um estudo

comparativo entre dois tipos de normas-t: min e produto algébrico (figura 2.5). Chegou-se à conclusão de que o produto algébrico era o que mais se aproximava do raciocínio do especialista (médico), e, portanto, adaptava-se melhor ao problema modelado.

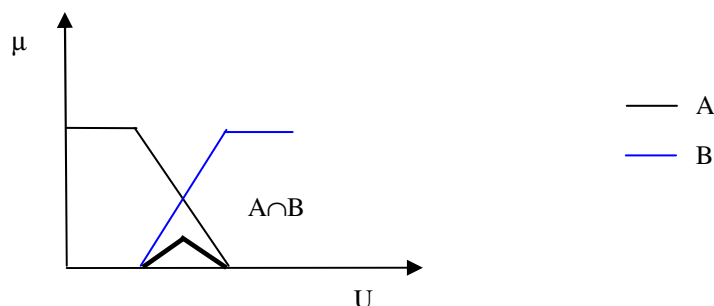


Figura 2.5 – Exemplo de intersecção usando t-norma produto algébrico

Neste trabalho será utilizada a norma-t **min** e a norma-s **max**. Essas normas são uma extensão das definições de intersecção e união no caso clássico.

Para o caso clássico sendo A e B dois conjuntos contidos no universo do discurso U, a **intersecção** $A \cap B$ é o conjunto de todos os elementos x em U que são membros de A e B simultaneamente, isto é:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Os elementos do conjunto A podem ser caracterizados pela função de pertinência:

$$\mu_A : U \rightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

De forma equivalente, podem ser caracterizados os elementos do conjunto B.

A noção de intersecção dos conjuntos está relacionada com o conectivo lógico “E”. Dessa forma, se A representa o conjunto dos homens altos e B o conjunto dos homens gordos, $A \cap B$ é o conjunto dos homens que são gordos e altos simultaneamente.

A tabela 2.2 apresenta a operação de intersecção clássica executada entre os elementos de A e B.

Observa-se que $A \cap B$ é o maior subconjunto do universo do discurso U contido em A e B ao mesmo tempo e, portanto, sempre menor ou igual aos conjuntos individuais. Logo, pode-se considerar que a função de pertinência de $A \cap B$ assume o valor **mínimo** entre as funções de pertinência dos dois conjuntos:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

ou utilizando o símbolo de conjunção (\wedge)

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Tabela 2.2 – Intersecção entre os conjuntos A e B

$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_{A \cap B}$	Pertinência
0	0	0	não-membro
0	1	0	não-membro
1	0	0	não-membro
1	1	1	Membro

Fonte: SHAW e SIMÕES, 1999 p. 26

No caso dos conjuntos difusos utiliza-se o mesmo raciocínio, mas com os valores das funções de pertinência dados no intervalo $[0,1]$. Assim, sendo **A e B conjuntos difusos** e U o conjunto universo comum a ambos, a intersecção $A \cap B$ é dada por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Exemplo 2.3: Seja $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e os conjuntos

$$A = \{0.2/x_1 + 0.3/x_2 + 0.4/x_3 + 1/x_4 + 0.1/x_5\}$$

$$B = \{0.3/x_1 + 0.6/x_2 + 0.2/x_3 + 1/x_4 + 0.2/x_5\} \text{ então}$$

$$A \cap B = \{0.2/x_1 + 0.3/x_2 + 0.2/x_3 + 1/x_4 + 0.1/x_5\}$$

A união $A \cup B$ dos conjuntos A e B, contidos no universo do discurso U é definida no caso clássico como o conjunto de todos os elementos x que pertencem ao conjunto A ou B ou a ambos. Formalmente tem-se:

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Os conjuntos individuais A e B podem ser caracterizados pelas suas funções de pertinência, μ_A e μ_B , respectivamente.

A operação de união de dois conjuntos está associada ao conectivo lógico “OU”. Como anteriormente definido, se:

$$A = \{\text{homens altos}\} \text{ e } B = \{\text{homens gordos}\}, \text{ então}$$

$A \cup B = \{\text{homens altos ou homens gordos}\}$ representa o conjunto dos homens altos ou gordos.

A tabela 2.3 apresenta a operação de união executada entre os elementos de A e de B:

Tabela 2.3 – União entre os conjuntos A e B

$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_{A \cup B}(x)$	Pertinência
0	0	0	não-membro
0	1	1	membro
1	0	1	membro
1	1	1	membro

Fonte: SHAW e SIMÕES, 1999 p. 28

Observa-se que a união é o menor subconjunto do universo do discurso U contendo A e B, portanto, sempre maior ou igual aos os conjuntos individuais. Dessa forma, a função de pertinência de $A \cup B$ é representada pelo **máximo** entre as funções de pertinência dos dois conjuntos:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

ou utilizando o símbolo de disjunção (\vee)

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Como na intersecção, no caso da união de conjuntos nebulosos utiliza-se o mesmo raciocínio para os conjuntos clássicos, porém com os valores das funções de pertinência dados no intervalo $[0,1]$.

Exemplo 2.4: Utilizando A e B do exemplo 2.3

$$A \cup B = \{0.3/x_1 + 0.6/x_2 + 0.4/x_3 + 1/x_4 + 0.2/x_5\}$$

A figura 2.6 apresenta um exemplo de Intersecção e União de dois conjuntos difusos usando os operadores min e max.

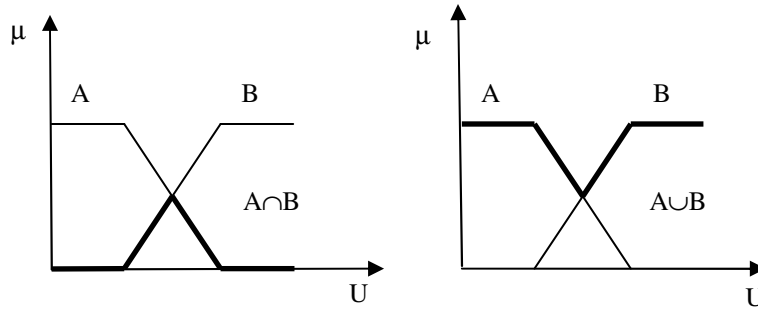


Figura 2.6 – Exemplos de intersecção e união de conjuntos difusos

2.1.3 Alguns Conceitos Referentes aos Conjuntos Difusos

Nesta seção serão levantadas as definições consideradas importantes para o desenvolvimento do trabalho. Assim, considerando os conjuntos difusos A e B , definidos no universo do discurso U , tem-se:

Definição 2.4: O conjunto difuso A é **vazio** se e somente se sua função de pertinência é nula para todo x pertencente a U , isto é:

$$A = \emptyset \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

Definição 2.5: Os conjuntos A e B são **iguais** se e somente se suas funções de pertinência são iguais, isto é, para cada elemento x de U :

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in U$$

Definição 2.6: A é **subconjunto** de B se e somente se a função de pertinência de A é menor do que a de B para todo x em U , isto é:

$$A \subseteq B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in U$$

Definição 2.7: O **complemento** de A , denominado \bar{A} , é um conjunto dos elementos $x \in U$ em que a função de pertinência de \bar{A} é dada por:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Exemplo 2.5: Seja $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e

$$A = \{0.2/x_1 + 0.3/x_2 + 0.4/x_3 + 1/x_4\} \quad \text{então}$$

$$\bar{A} = \{0.8/x_1 + 0.7/x_2 + 0.6/x_3 + 1/x_5\}^1$$

Na figura 2.7 estão representados os conjuntos genéricos B e seu complementar \bar{B} .

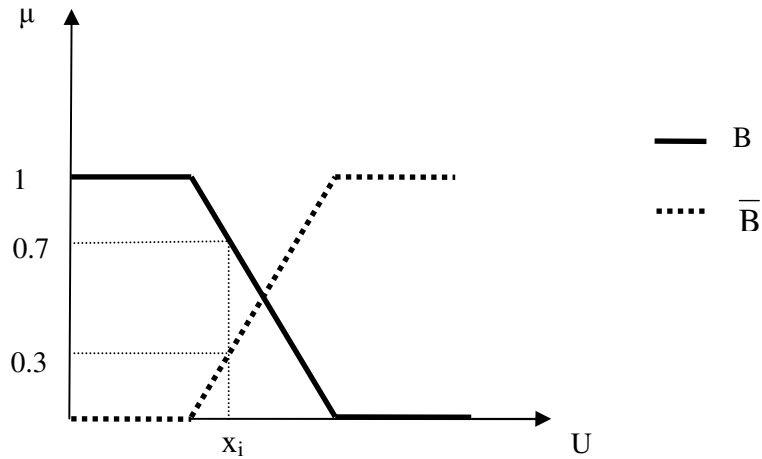


Figura 2.7 – Função de pertinência do conjunto B e seu complemento \bar{B}

Nos conjuntos clássicos valem as leis $B \cap \bar{B} = \emptyset$ e $B \cup \bar{B} = U$ entretanto, para os conjuntos difusos observa-se que:

(1) O conjunto B e seu complementar, \bar{B} , são não disjuntos, isto é, a intersecção entre ambos não é necessariamente o conjunto vazio:

$$B \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

Esta é uma conseqüência devida às imprecisões inerentes aos conjuntos difusos. Na figura 2.7 verifica-se que o elemento x_i pertence ao conjunto B com grau 0.7 e também pertence ao complementar \bar{B} com grau 0.3.

Vale ressaltar que quando os conjuntos são complementares os valores das funções de pertinência de seus elementos devem somar 1. Entretanto, em contraste com a teoria das probabilidades, quando os conjuntos não são complementares um elemento pode pertencer a diversos conjuntos difusos, sem que a soma de suas funções de pertinência totalize 1 (ORTEGA, 2001, p.23).

(2) A União de um conjunto difuso e seu complemento não é igual necessariamente ao universo do discurso:

¹ Como comentado anteriormente, os elementos com pertinência nula, x_5 em A e x_4 em \bar{A} são omitidos do conjunto.

$$B \cup \bar{B} \neq U \quad \text{pois}$$

B e \bar{B} não preenchem completamente o universo do discurso U já que a pertinência da união dos dois conjuntos pode não ser 1.

Definição 2.8: O **suporte**, $\text{supp}(A)$, de um conjunto difuso A é o subconjunto clássico dos elementos $x \in U$ cuja função de pertinência é não nula.

$$\text{supp}(A) = \{x \in U / \mu_A(x) > 0\}$$

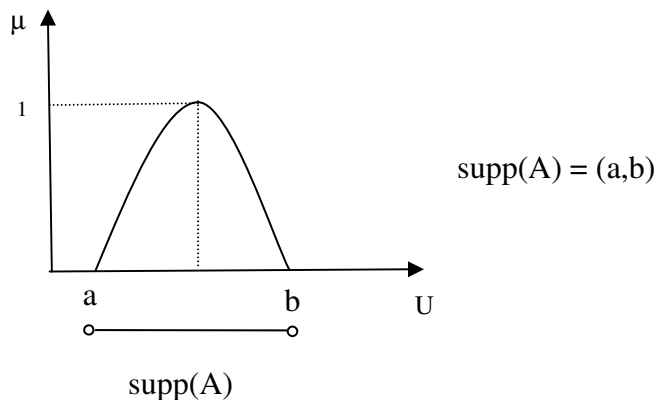


Figura 2.8 – Exemplo de conjunto suporte

Definição 2.9: O α - nível de um conjunto difuso A é o conjunto clássico A_α formado pelos elementos de A cujas funções de pertinência excedem o nível α :

$$A_\alpha = \{x \in A / \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1]$$

Em particular, quando $\alpha = 1$, o conjunto α - nível é formado por elementos com a pertinência máxima em A . E ainda, se $\alpha_1 > \alpha_2$ então $A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}$.

Na figura 2.9, por exemplo, se $\alpha_1 = 0.8$ $\alpha_2 = 0.3$ e $A = [1,6]$ então:

$$A_{0.8} = \{x \in A / \mu(x) \geq 0.8\} = [3,4] \quad \text{e} \quad A_{0.3} = \{x \in A / \mu(x) \geq 0.3\} = [2,5]$$

$$\text{logo, } A_{0.8} \subset A_{0.3}$$

Uma conseqüência disso é que o conjunto difuso A pode ser descrito pela união de todos os conjuntos clássico α - níveis: $A = \bigcup A_\alpha$. Esse fato é muito importante por

permitir na teoria difusa a utilização de resultados (teoremas, lemas etc) já desenvolvidos na teoria clássica (ORTEGA, 2001, p.25).

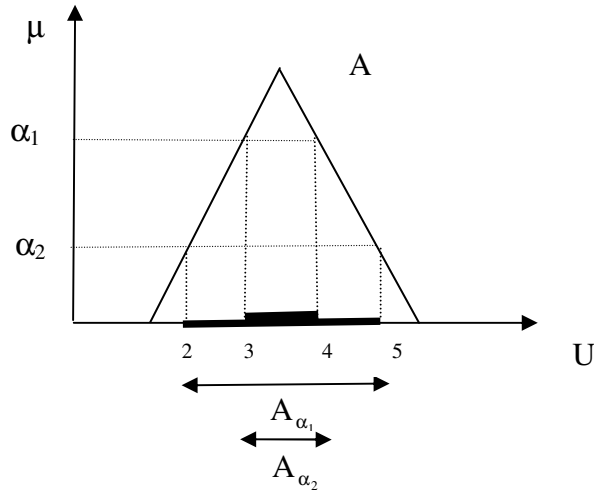


Figura 2.9 - Exemplo de conjuntos α - níveis

Exemplo 2.6: Seja $A = \{0.2/3 + 0.4/5 + 0.6/7 + 1/9\}$, então A pode ser representado pela união dos conjuntos α - níveis:

$$A_{0.2} = \{0.2/3 + 0.4/5 + 0.6/7 + 1/9\}$$

$$A_{0.4} = \{0.4/5 + 0.6/7 + 1/9\}$$

$$A_{0.6} = \{0.6/7 + 1/9\}$$

$$A_1 = \{1/9\}$$

Definição 2.10: A **altura** de um conjunto difuso A , denotada por $\text{hgt}(A)$ é o maior valor de sua função de pertinência:

$$\text{hgt}(A) = \max_{x_i \in A} \{\mu_A(x_i)\}$$

Os conjuntos com altura igual a 1 são chamados **normais** ou **normalizados** e aqueles cuja altura é inferior a 1 são chamados **subnormais**.

Definição 2.11: A **cardinalidade**, $\text{Card}(A)$, de um conjunto difuso A é definida como:

$$\text{Card}(A) = \sum_{x_i \in U} \mu_A(x_i)$$

Exemplo 2.7: A cardinalidade do conjunto $A = \{0,2/3 + 0,4/5 + 0,6/7 + 1/9\}$ é:

$$\text{Card}(A) = 2,2$$

Observa-se que na teoria clássica o somatório das funções de pertinência dos elementos de um conjunto fornece exatamente seu número de elementos, já nos conjuntos difusos isso não ocorre, pois os elementos pertencem ao conjunto com *graus* de pertinência.

A cardinalidade é um conceito utilizado em processos de defuzzificação quando se calcula, por exemplo, a média dos maiores valores de função de pertinência do conjunto de saída do sistema difuso. (PEDRYCS e GOMIDE, 1998, p.16)

Definição 2.12: Um conjunto difuso A é convexo se e somente se:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in U \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

Vale ressaltar que esta definição não implica que a função de pertinência μ_A seja convexa². A figura 2.10 apresenta exemplo de dois conjuntos difusos convexos. Observa-se que no segundo conjunto a função de pertinência é não convexa.

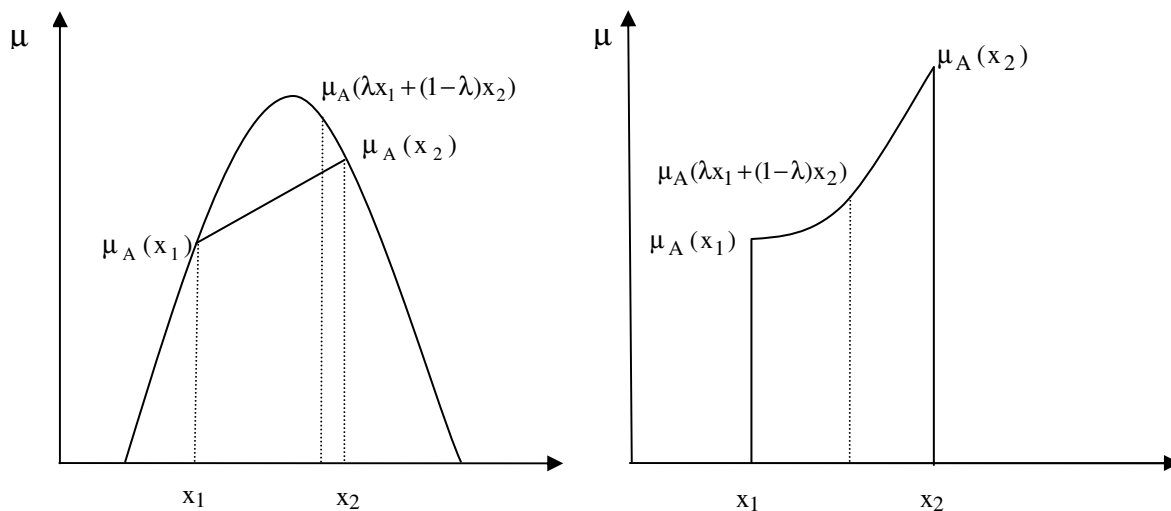


Figura 2.10 – Exemplos de conjuntos convexos

2.1.4 Relações Difusas

Uma relação (R) descreve a inter-relação entre elementos de dois ou mais conjuntos. A relação difusa, assim como nos conjuntos difusos é uma generalização da relação

² Na teoria clássica a função f é convexa se $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta = 1$

clássica. Assim, a relação binária **clássica** entre dois conjuntos A e B, por exemplo, pode ser representada como uma função que mapeia um par ordenado (x,y) de $A \times B$ para 0 quando a relação não é satisfeita ou para 1 quando é satisfeita, isto é, $R : A \times B \rightarrow \{0,1\}$. Já a relação binária **difusa** entre A e B conjuntos difusos é definida como uma função que mapeia um par ordenado (x,y) em $A \times B$ para o seu grau na relação, que é um número no intervalo [0,1]. Se considerarmos a relação *empatia entre duas pessoas*, segundo a teoria clássica temos que ela existe (1) ou não existe (0). Para a relação difusa são considerados graus de empatia entre as duas pessoas desde 0, se a relação não se aplica, até 1 se a relação se aplica totalmente.

Quando as relações binárias difusas são definidas em universos discretos é conveniente expressá-las na forma matricial, como apresentado no exemplo 2.8.

Exemplo 2.8: Sejam $A = \{3,5,7\}$ e $B = \{1,2,3\}$ e a relação $R : A \times B \rightarrow [0,1]$ “x é muito maior que y” cuja função de pertinência, $\mu_R(x,y)$, é dada por:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq y \\ (1 + (y - x)^{-2})^{-1} & \text{se } x > y \end{cases}$$

A matriz relacional deve ser construída de forma que cada elemento da matriz é representado pelo valor de pertinência associado ao par (x_i, y_i) :

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.80	0.50	0.00
x_2	0.94	0.90	0.80
x_3	0.97	0.96	0.94

Outros exemplos de funções de pertinência de relação binária difusa definida em $R \times R$ são (PREDRYCZ e GOMIDE, 1998, 87):

- x é muito menor que y: $\mu_R(x,y) = \exp(-|y - x|)$

- x aproximadamente igual a y: $\mu_R(x,y) = \exp\left\{\frac{|x - y|}{\alpha}\right\} \quad \alpha > 0$

Generalizando, a relação difusa sobre n objetos (x_1, \dots, x_n) cujos domínios são U_1, \dots, U_n , respectivamente, é definida por uma função que mapeia o ponto (x_1, \dots, x_n) em $U_1 \times \dots \times U_n$ para um número no intervalo [0,1], isto é:

$$R : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$$

2.1.4.1 Composição de Relações Difusas

Vamos introduzir esta seção com um exemplo citado no trabalho de ORTEGA (2001, p.31). Seja a matriz relacional $R(s,d)$ do conjunto de sintomas $A = \{\text{cefaléia } (s_1), \text{ febre } (s_2), \text{ tosse } (s_3)\}$ e do conjunto das doenças $B = \{\text{endocardite } (d_1), \text{ pneumonia } (d_2), \text{ coqueluche } (d_3), \text{ tuberculose } (d_4), \text{ gripe } (d_5)\}$ dada por:

$$\mu_{R(s,d)} = \begin{bmatrix} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ s_1 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.8 \\ s_2 & 0.9 & 1.0 & 0.3 & 1.0 & 0.2 \\ s_3 & 0.2 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Segundo essa matriz, não existe relação direta entre a cefaléia e a endocardite, no entanto, há grande possibilidade do paciente que apresentou febre estar com tuberculose, já que a relação entre o sintoma e a doença é 1.

Agora suponhamos que um paciente apresentou os sintomas: cefaléia, febre e tosse. Para agregar o quadro clínico do paciente às informações da matriz relacional, é necessário que se faça a composição de relações difusas.

As composições mais utilizadas são:

$$\text{Composição max - min : } \mu_B(y) = \max\{\min(\mu_A(x), \mu_R(x,y))\}$$

$$\text{Composição max - produto : } \mu_B(y) = \max\{\min(\mu_A(x) \cdot \mu_R(x,y))\}$$

onde A e B são, respectivamente, subconjuntos de $U_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $U_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ e R a relação difusa conhecida, definida em $U_1 \times U_2$.

Utilizando a composição max-min para o exemplo e, considerando que o paciente em questão apresenta a pertinência em A (conjunto dos sintomas) dada pelo vetor $s = [0.0 \ 0.7 \ 1.0]$, o grau de pertinência desse paciente em B (conjunto das doenças) será dado por:

$$\mu_B(d) = \max_s \{\min(\mu_A(s), \mu_R(s,d))\} \quad \forall d$$

A operação de disjunção usando o operador (min) é semelhante à regra de multiplicação de matrizes em que um vetor linha e um vetor coluna são combinados.

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.8 \\ 0.9 & 1.0 & 0.3 & 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.7 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Assim, consideramos o vetor de sintomas representado na primeira matriz e combinamos com a doença a ser analisada. O vetor de sintomas representa as condições do paciente e as colunas na segunda matriz representam a importância daquele sintoma em cada doença. A operação final dada por $\mu_B(d) = \max_s \{\min(\mu_A(s), \mu_R(s,d))\}$ indica a possibilidade de o paciente ter cada uma das doenças.

$$\text{para } d = 1 \quad \mu_B(d_1) = \max\{\min\{0.0, 0.0\}, \min\{0.7, 0.9\}, \min\{1.0, 0.2\}\} = 0.7$$

$$\text{para } d = 2 \quad \mu_B(d_2) = \max\{\min\{0.0, 0.0\}, \min\{0.7, 1.0\}, \min\{1.0, 0.7\}\} = 0.7$$

$$\text{para } d = 3 \quad \mu_B(d_3) = \max\{\min\{0.0, 0.3\}, \min\{0.7, 0.3\}, \min\{1.0, 0.7\}\} = 0.7$$

$$\text{para } d = 4 \quad \mu_B(d_4) = \max\{\min\{0.0, 0.0\}, \min\{0.7, 1.0\}, \min\{1.0, 1.0\}\} = 1.0$$

$$\text{para } d = 5 \quad \mu_B(d_5) = \max\{\min\{0.0, 0.8\}, \min\{0.7, 0.2\}, \min\{1.0, 0.1\}\} = 0.2$$

O que significa que há uma possibilidade de 0,7 do paciente ter as doenças endocardite, pneumonia ou coqueluche, a possibilidade de 1,0 de ter tuberculose e de 0,2 de ter gripe.

Assim no exemplo apresentado, sendo $R(s,d)$ conhecida foi determinada a resposta do sistema $\mu_B(d)$ a partir de uma excitação $\mu_A(s)$ (figura 2.11).

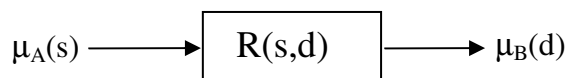


Figura 2.11 - Exemplo de composição de relação difusa

SHAW e SIMÕES (1999, p.42) apresentam uma analogia entre a relação difusa e a função de transferência das transformadas de LAPLACE, bastante interessante. Segundo os autores em:

$$Y(s) = U(s).Z(s) \quad (\text{transformada de LAPLACE})$$

$Y(s)$, a transformada da saída, é análoga à $\mu_B(y)$;

$U(s)$, a transformada da entrada, é análoga à $\mu_A(x)$ e;

$Z(s)$, a função de transferência, é análoga à relação $\mu_R(x,y)$.

Dessa forma, a relação difusa é tanto formalmente como funcionalmente análoga à função de transferência de um sistema linear, sendo esse fato a base do uso de técnicas difusas para a modelagem de sistemas e processos complexos.

2.1.5 Número Difuso

O número difuso é um particular conjunto difuso utilizado para representar quantidades imprecisas.

Formalmente, tem-se:

Definição 2.13: Um número difuso M (figura 2.12) é um conjunto convexo normalizado ($\text{hgt}(M) = 1$) definido em \mathbb{R} , cuja função de pertinência μ_M é:

- i) constante em $(-\infty, c)$: $\mu_M(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, c)$
- ii) estritamente crescente em $[c, a]$
- iii) constante em $[a, b]$: $\mu_M(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$
- iv) estritamente decrescente em $[b, d]$
- v) constante em $(d, +\infty)$: $\mu_M(x) = 0 \quad \forall x \in (d, +\infty]$

a, b, c e d são reais; m é o valor principal do intervalo $[a, b]$ (DUBOIS e PRADE, 1978, p.613).

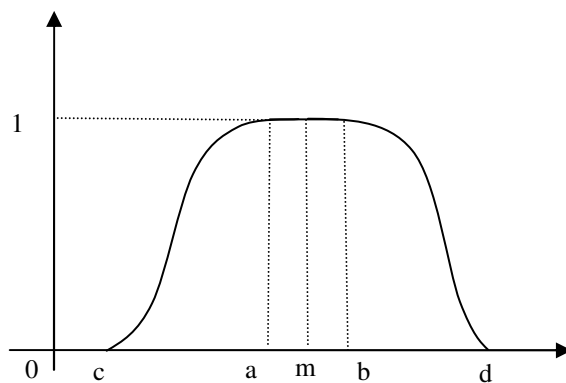


Figura 2.12 – Exemplo de número difuso M

Observa-se que:

- o suporte de M , $\text{supp}(M) = \{x : \mu_M(x) > 0\}$, é limitado;

- os α -cortes de M são em intervalos fechados (NGUYEN,WALKER, 1997, p.45);
- se $a = b = c = d$ então M é um número clássico, e
- se $a = b$ então M é a representação de um número difuso “aproximadamente a ”.

ZADEH (FILEV e YAGER (1997, p.137) introduziu operações com números difusos baseadas no Princípio da Extensão. O Princípio da Extensão permite a generalização de conceitos matemáticos da teoria clássica para a teoria de conjuntos difusos. Segundo a definição apresentada pelo autor, se \perp denota uma operação aritmética binária (adição, subtração, multiplicação, divisão) e M e N são números difusos com funções de pertinência $\mu_M(x)$ e $\mu_N(y)$, então a função de pertinência do número difuso $T = M \perp N$ é dada por:

$$T(z) = \max_{z=x \perp y} \min\{\mu_M(x), \mu_N(y)\}$$

Para a adição, por exemplo, sendo M e N os conjuntos difusos³:

$$M = \{0.33/7 + 0.66/8 + 1/9 + 0.5/10\}$$

$$N = \{0.5/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.6/12 + 0.4/13 + 0.2/14\}$$

Aplicando o operador min nas combinações (x,y) e em seguida o operador max sobre os valores em repetição:

$$T = \{0.33/16 + 0.5/17 + 0.66/18 + 1/19 + 0.8/20 + 0.6/21 + 0.5/22 + 0.4/23 + 0.2/24\}$$

Essas operações envolvem grande esforço computacional e, por esse motivo, DUBOIS e PRADE (1978, p.618) introduziram o conceito de números L-R difusos, substituindo-as por operações baseadas em intervalo.

2.1.5.1 Número L-R Difuso

Um número L-R difuso, denotado por $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$, obedece à definição 2.13 e é construído com uma função de pertinência L aplicada a todo $x \leq m$ e uma função de pertinência R aplicada a todo $x \geq m$ (figura 2.13), tal que:

³ Exemplo extraído do artigo: *Operations on fuzzy numbers via fuzzy reasoning* (FILEV e YAGER, 1996, p.138)

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m, \quad \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x \geq m, \quad \beta > 0 \end{cases}$$

onde m é o valor principal do número difuso e α e β são os comprimentos dos intervalos esquerdo e direito, respectivamente, representados na figura 2.13.

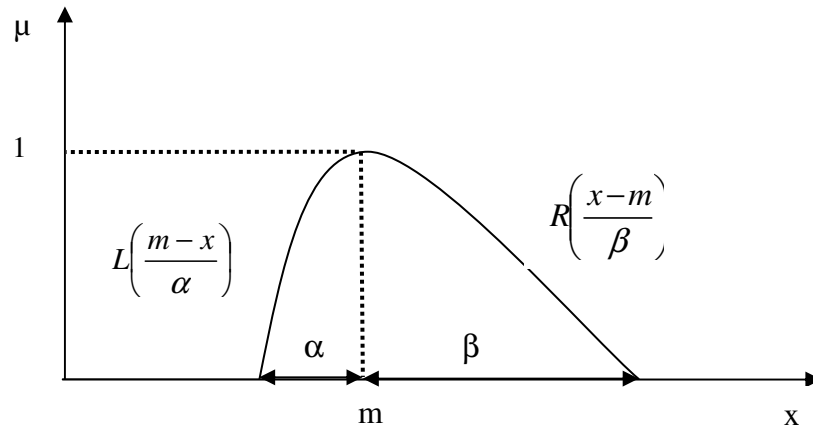


Figura 2.13 – Exemplo de número L-R difuso
Fonte: SAKAWA, 1993, p.2

Na forma L-R a representação de um número difuso pode ser trapezoidal, triangular, retangular, gaussiana, entre outras. As formas trapezoidal e triangular são as mais utilizadas pela simplicidade e possibilidade de assimetria em relação a \underline{m} .

O número difuso trapezoidal (figura 2.14) é caracterizado por quatro parâmetros $M = (m_l, m_u, \alpha, \beta)$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 0 & x \leq (m_l - \alpha) \quad \text{ou} \quad x \geq (m_u + \beta) \\ 1 - \frac{m_l - x}{\alpha} & (m_l - \alpha) < x < m_l \\ 1 & m_l \leq x \leq m_u \\ 1 - \frac{x - m_u}{\beta} & m_u < x \leq (m_u + \beta) \end{cases}$$

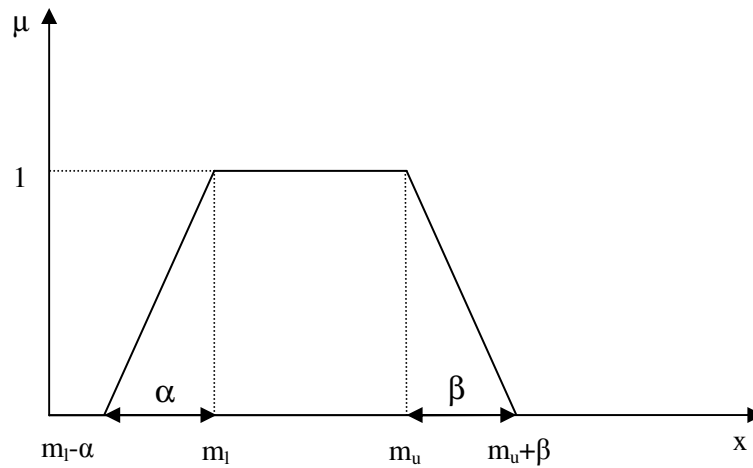


Figura 2.14 - Representação de um número difuso trapezoidal

A forma triangular (figura 2.15) é um caso particular da forma trapezoidal em que $m_l = m_u = m$, cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{\alpha} & (m-\alpha) < x \leq m \\ 1 - \frac{x-m}{\beta} & m < x \leq (m+\beta) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

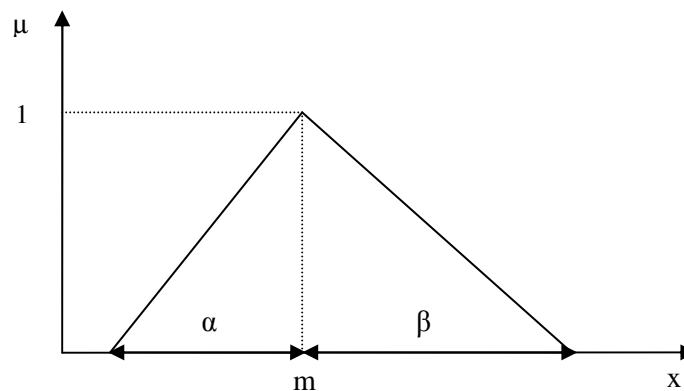


Figura 2.15 - Representação de um número difuso triangular

Se o valor principal m estiver centralizado, isto é $\alpha = \beta$, a função fica:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{m-x}{\alpha} \right| & (m-\alpha) < x < m+\alpha \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quando $m_l = m_u = m$ e $\alpha = \beta = 0$, M é um número clássico representado por $M = (m, 0, 0)$

2.1.5.2 Operações com Números L-R Difusos

Considerando os números L-R difusos $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ e $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ são definidas as operações (PEDRYCZ e GOMIDE, 1998,143):

1. Adição

$$M \oplus N = (m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR}$$

Exemplo 2.9: Para $M = (4, 3, 1)$ e $N = (3, 1, 3)$ então $M \oplus N = (7, 4, 4)$ conforme figura 2.16

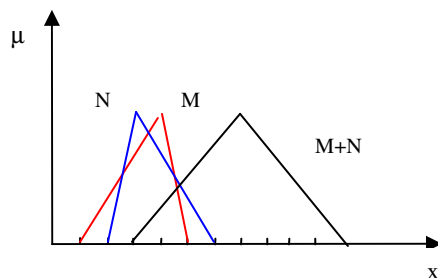


Figura 2.16 – Exemplo da soma de dois números difusos

2. Elemento Oposto

$$-M = -(m, \alpha, \beta)_{LR} = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$$

Exemplo 2.10: Para $M = (4, 3, 1)$ então $-M = (-4, 1, 3)$ conforme figura 2.17

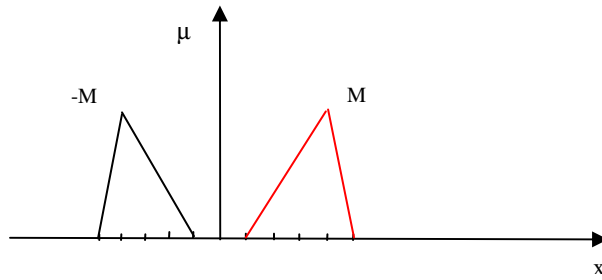


Figura 2.17 – Exemplo de elemento oposto ($-M$)

3. Subtração

$$M \ominus N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \ominus (n, \gamma, \delta)_{RL} = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

Esta operação é a soma de M com o elemento oposto de N .

4. Multiplicação

Definição 2.15: O número difuso M é dito positivo (negativo) se a função de pertinência $\mu_M(x)$ satisfaz:

$$\mu_M(x) = 0 \quad \text{para todo } x < 0 \quad (x > 0)$$

Dessa forma, a multiplicação de números difusos é definida para os casos:

Se $M > 0$ e $N > 0$ então

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \cong (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)_{LR}$$

Se $M > 0$ e $N < 0$ então

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{RL} \otimes (n, \gamma, \delta)_{RL} \cong (mn, m\alpha - n\delta, m\beta - n\gamma)_{RL}$$

Se $M < 0$ e $N > 0$ então

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{RL} \otimes (n, \gamma, \delta)_{RL} \cong (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{RL}$$

Se $M < 0$ e $N < 0$ então

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \cong (mn, -n\beta - m\delta, -n\alpha - m\gamma)_{RL}$$

Observa-se que as fórmulas da multiplicação são definições através de aproximações e levam em consideração que os intervalos em relação ao valor principal do número difuso são pequenos. (PEDRYCZ e GOMIDE, 1998,143).

5. Multiplicação por escalar (λ)

Se o escalar $\lambda > 0$ então

$$\lambda M = \lambda(m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR}$$

Se o escalar $\lambda < 0$ então

$$\lambda M = \lambda(m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL}$$

Exemplo 2.11: Sejam $M = (4,3,1)$ e $\lambda_1 = 2$ então $\lambda_1 M = (8,6,2)$ conforme representado na figura 2.18. Caso $\lambda_2 = -1$ então $\lambda_2 M = (-4,1,3)$

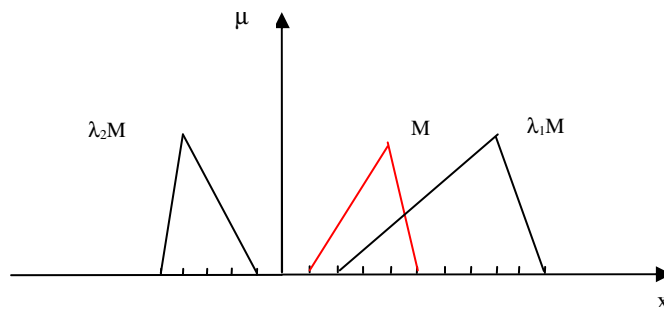


Figura 2.18 – Exemplo da multiplicação de um escalar por um número difuso

6. Inverso de M

$$M^{-1} = (m, \alpha, \beta)_{LR}^{-1} \cong (m^{-1}, \beta m^{-2}, \alpha m^{-2})_{RL}, \quad m \neq 0$$

7. Divisão

$$M \oslash N = M \otimes N^{-1} = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{RL}^{-1} \cong \left(\frac{m}{n}, \frac{\delta m + \alpha n}{n^2}, \frac{\gamma m + \beta n}{n^2} \right)_{LR}, \quad n \neq 0$$

2.1.6 Variáveis Lingüísticas

As variáveis lingüísticas são variáveis que assumem valores expressos qualitativamente na linguagem natural através de termos lingüísticos como “alto”, “forte”, “quente” e quantitativamente pelas funções de pertinência de conjuntos difusos (ORTEGA, 2001, p.51).

A variável *Temperatura*, por exemplo, pode assumir os **valores lingüísticos**: *baixa*, *média*, *alta*, descritas pelos três conjuntos difusos ilustrados na figura 2.19.

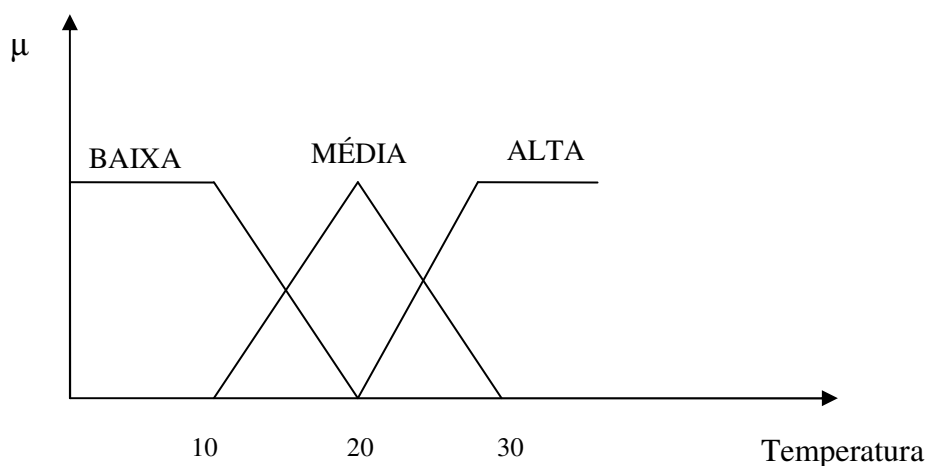


Figura 2.19 – Exemplo de variável linguística

Formalmente, uma variável linguística é caracterizada pela quintupla $(X, T(X), U, G, M)$. Relacionado ao exemplo dado, X é o nome da variável (temperatura), $T(X)$ é o conjunto de termos (alta, média, baixa), U é o domínio, ou universo do discurso, de X (temperatura variando de 0 a 40° C), G é a regra sintática para gerar os valores de X e M é a regra semântica que associa a cada valor gerado por G um conjunto difuso em U .

A definição da função de pertinência para variáveis linguísticas não obedece a regras rígidas; a única condição é que varie entre 0 e 1. O tipo de função pode ser definido do ponto de vista da simplicidade, conveniência, eficiência, etc. Observe que no exemplo citado (figura 2.19) foram utilizadas as formas trapezoidal e triangular para representar os conjuntos difusos associados aos termos linguísticos baixa, média e alta.

Quanto à quantidade de conjuntos difusos que representam as variáveis linguísticas, sabe-se que quanto maior o número de conjuntos maior a precisão, entretanto, a demanda computacional também é mais significativa (SHAW e SIMÕES, 1999, p.46). Voltando ao exemplo poderíamos, se fosse conveniente, utilizar os modificadores: *muito*, *levemente*, *extremamente* e construir os conjuntos difusos: *muito* baixa, baixa, média, *levemente* alta, alta e *extremamente* alta para representar a variável Temperatura.

A fim de se trabalhar com estas variáveis são utilizados sistemas de inferência difusa, que através de uma base de regras mapeiam os conjuntos de entrada do sistema para um conjunto de saída. Existem vários métodos de inferência como: Mandani, Takagi-Sugeno, Larsen, Kosko-Mizumoto, etc., escolhidos de acordo com o problema a ser analisado. Neste trabalho foi utilizado o método Mandani, descrito nas próximas seções.

As proposições difusas, definidas a seguir, servem como base de regras para esses sistemas.

2.1.7 Proposição (ou Regra) Difusa

Uma frase da forma: “**x é A₁**”, onde x é uma variável lingüística e A₁ é um conjunto definido no universo de discurso U, é chamado de proposição difusa (TANSCHKEIT, 1998).

As proposições difusas podem ser classificadas como condicionais ou incondicionais. São de interesse deste trabalho as proposições condicionais que têm a forma:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{SE} \ x \ \acute{e} \ A_1 & \mathbf{ENT\tilde{A}O} \ y \ \acute{e} \ B_1 \\ \text{(antecedente)} & \text{(conseqüente)} \end{array}$$

em que x e y são variáveis lingüísticas definidas nos universos de discurso U₁ e U₂, respectivamente, e, A₁ e B₁ os valores (predicativos) assumidos por essas variáveis.

Exemplo 2.12: Se a temperatura corpórea é alta então o estado é febril.

Observa-se que a proposição envolve uma relação R(x,y) entre os conjuntos difusos A e B.

A primeira sentença da proposição, “x é A₁”, é chamada **antecedente** ou **premissa**. A segunda sentença, “y é B₁”, é chamada **conseqüente** ou **conclusão**.

Genericamente, quando se têm vários antecedentes e conseqüentes, a coleção de regras pode ser combinada através de conectivos lógicos como E e OU, estabelecendo uma composição de relações difusas:

$$\mathbf{SE} \ (x_1 \ \acute{e} \ A_1) \ \mathbf{E} \ (x_2 \ \acute{e} \ A_2) \ \mathbf{E} \ \dots \ (x_m \ \acute{e} \ A_m) \ \mathbf{ENT\tilde{A}O} \ (y_1 \ \acute{e} \ B_1) \ \mathbf{E} \ (y_2 \ \acute{e} \ B_2) \ \mathbf{E} \ \dots \ (y_n \ \acute{e} \ B_n)$$

Nos sistemas de inferência difusa os antecedentes descrevem o conjunto das variáveis de entrada e os conseqüentes o conjunto das variáveis de saída. No exemplo 2.13 é apresentada uma proposição com 2 entradas e uma saída.

Exemplo 2.13:

SE a infra-estrutura é boa **E** a localização é excelente **ENT\tilde{A}O** o empreendimento é viável.

2. 1.8 Sistemas de Inferência Difusa

Os sistemas de inferência difusa são responsáveis pela valoração das proposições difusas e da forma como são combinadas a fim de produzir a saída.

A estrutura geral de um sistema de inferência difusa é composta pelos módulos: fuzificação, base de regras, máquina de inferência e defuzificação, conforme apresentado na figura 2.20. Na seqüência, cada módulo será estudado separadamente.

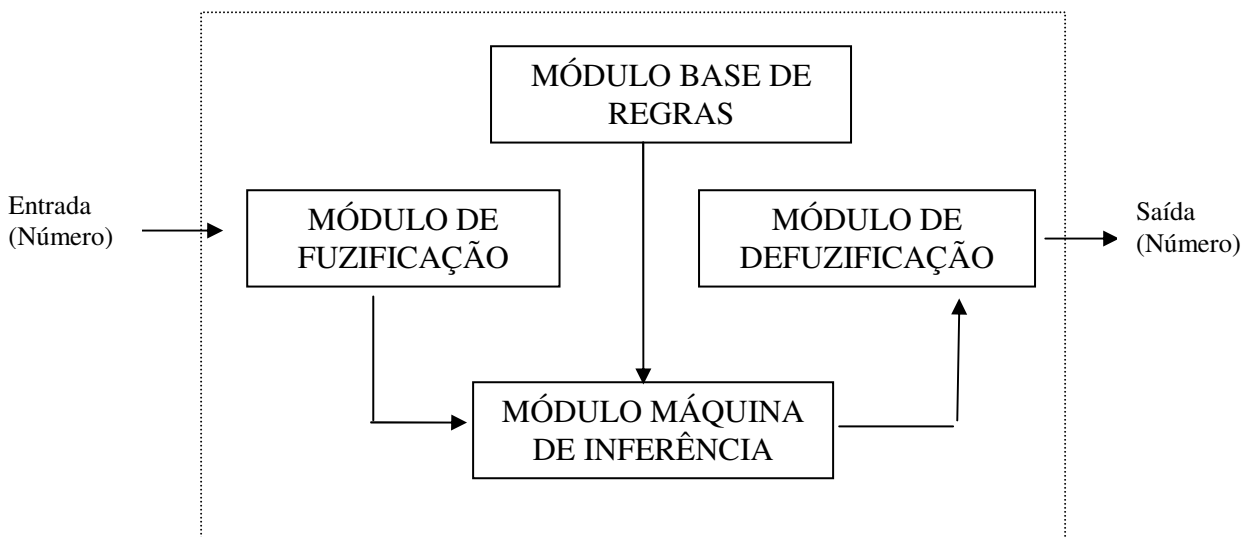


Figura 2.20 - Estrutura de um sistema de inferência

2.1.8.1 Módulo de Fuzificação

No **módulo de fuzificação** os valores de entrada do sistema são convertidos em conjuntos difusos.

As variáveis que compõem o sistema são “particionadas” em intervalos que serão utilizados na definição das proposições difusas. Nessas partições são construídas funções de pertinência cujos formatos dependem do problema em questão. Como já mencionado, os formatos mais utilizados para essas funções são o triangular e o trapezoidal por serem gerados com facilidade. Técnicas especiais usando redes neurais também podem ser utilizadas para identificar a posição e a forma dessas funções.

Na definição do número de partições do domínio de cada variável deve ser levado em consideração que, muitas partições podem resultar em um número grande de parâmetros a ser ajustado, enquanto que um número reduzido de partições, podem não representar bem o conjunto de dados.

A tabela 2.4 ilustra um exemplo dos valores de duas variáveis de entrada (temperatura e pressão) e de uma variável de saída (fluxo) em unidades arbitrárias.

Tabela 2.4 – Domínio das variáveis do sistema

	BAIXO (BA)	MÉDIO (ME)	ALTO (AL)
Temperatura	0-22	15-30	25-50
Pressão	1-2	1,5-6	4-7
Fluxo	10-15	12-20	17-30

Na figura 2.21 estas variáveis são representadas graficamente como conjuntos difusos cujas funções de pertinência têm a forma triangular.

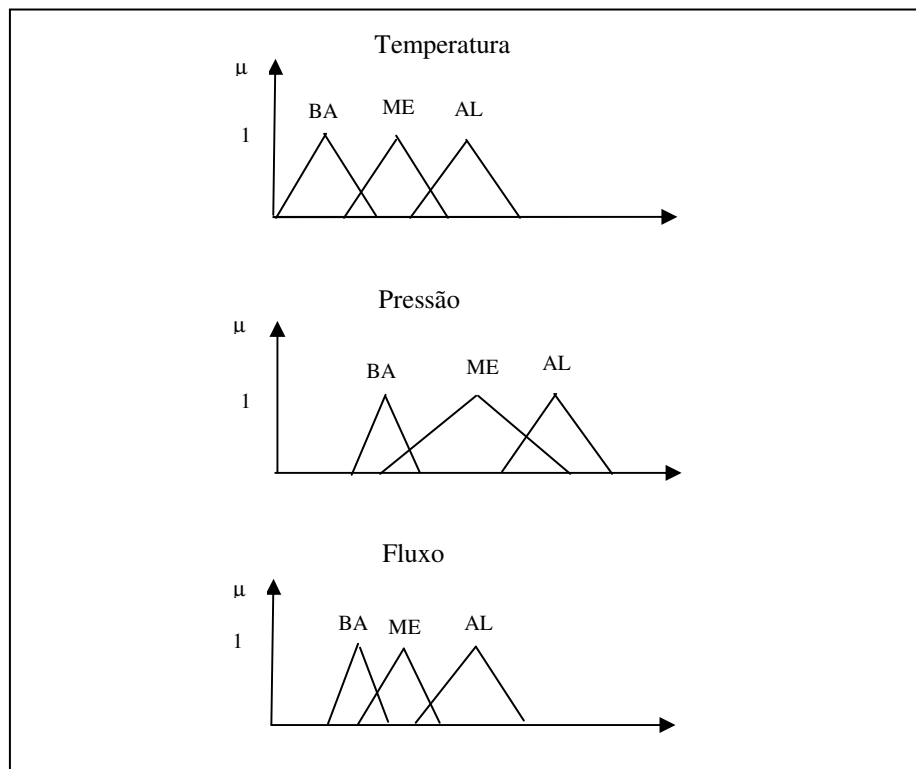


Figura 2.21 - Representação das funções de pertinência dos conjuntos difusos para as variáveis: temperatura, pressão e fluxo

2.1.8.2 Módulo Base de Regras

No **módulo base de regras** definem-se as proposições difusas que serão avaliadas para compor a variável de saída.

A quantidade de regras dependerá do número de conjuntos difusos que compõem cada variável de entrada. Em geral, são usadas duas ou mais regras para compor o conjunto de saída.

A definição dessas regras constitui aspecto fundamental no desempenho de um sistema de inferência e devem ser construídas com auxílio do especialista. Entretanto, extrai-las de especialistas na forma de sentenças do tipo "SE...ENTÃO" pode não ser uma tarefa fácil, por mais que estes sejam conhecedores do problema a ser tratado. De fato, sempre irá surgir a dúvida se o conjunto de regras representa bem o problema abordado. Esse conjunto pode, por exemplo, conter redundâncias, isto é, regras desnecessárias. Uma maneira de saber se uma regra pode ser eliminada, é testar o sistema com e sem a regra. Se a resposta não é afetada, a regra pode ser removida.

Quanto ao processamento, as regras nos sistemas difusos são avaliadas paralelamente, não importando a ordem em que são apresentadas. Essa operação paralela é que confere aos controladores difusos a velocidade de processamento. Um controlador difuso industrial de 03 entradas, 01 saída, e 80 regras pode levar menos de um milissegundo para varrer a estrutura de regras (SHAW e SIMÕES, 1999, p.58).

Voltando ao exemplo citado, há duas variáveis de entrada (temperatura e pressão) compostas cada uma de três subconjuntos difusos referentes aos termos: baixo, médio e alto, resultando em nove regras. A combinação entre as variáveis de entrada implica nas proposições:

“Se temperatura é baixa e pressão é baixa então fluxo é baixo”

“Se temperatura é média e pressão é média então fluxo é médio”

“Se temperatura é alta e pressão é alta então fluxo é alto”

⋮

O resumo de todas as regras é apresentado na tabela 2.5

Analisando os valores de entrada: temperatura aproximadamente igual a 18 e pressão aproximadamente igual a 5, verifica-se que a temperatura está nas faixas “baixa e média” e a pressão nas faixas “média e alta” (tabela 2.4). As combinações destas faixas determinam as proposições atingidas, 2, 3, 5, 6 (tabela 2.5):

Proposição 2: **Se** temperatura é baixa **E** pressão é média **Então** fluxo é médio

Proposição 3: **Se** temperatura é baixa **E** pressão é alta **Então** fluxo é médio

Proposição 5: **Se** temperatura é média **E** pressão é média **Então** fluxo é médio

Proposição 6: Se temperatura é média E pressão é alta **Então** fluxo é alto

Observa-se que cada proposição gera um conjunto de saída. A agregação desses conjuntos fornecerá a saída para a variável fluxo, tratada no módulo máquina de inferência.

Tabela 2.5 – Regras de Fluxo para as variáveis de entrada

Fluxo		Temperatura		
		BA	ME	AL
Pressão	BA	(1)BA	(4)BA	(7)ME
	ME	(2)ME	(5)ME	(8)AL
	AL	(3)ME	(6)AL	(9)AL

2.1.8.3 Módulo Máquina de Inferência

O **módulo máquina de inferência** consiste em interpretar os valores de entrada baseado no sistema de regras e, através da superposição dos consequentes das regras atingidas, determinar o conjunto ou valor de saída.

Nesse processo são realizadas as operações com conjuntos difusos que dependem do operador lógico utilizado na combinação das proposições. Como anteriormente citado, podem ser adotadas as funções de mínimo para o operador E e máximo para o operador OU:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \text{onde } A \text{ e } B \text{ são conjuntos difusos}$$

O método Mandani de inferência, de interesse desse trabalho, utiliza o processo chamado max-min, em duas etapas:

1) Na primeira etapa, cada regra atingida: “Se x é A_i Então y é B_j ”, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ é expressa como a relação difusa R_{ij} :

$$R_{ij} = A_i \times B_j \quad (\text{produto cartesiano dos conjuntos difusos } A_i \text{ e } B_j)$$

cuja função de pertinência é dada pela aplicação do operador min:

$$R_{ij}(x, y) = A_i(x) \wedge B_j(y) = \min\{\mu_{A_i}(x), \mu_{B_j}(y)\}$$

2) Na segunda etapa, ocorre a agregação dos conjuntos da etapa anterior, realizada através do operador max:

$R = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} R_{ij}$ sendo a função de pertinência da relação dada por:

$$\mu_R(x, y) = \bigvee_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} (A_i(x) \wedge B_j(y)) = \max \left\{ \mu_{R_{ij}}(x, y) \right\}$$

A figura 2.22 apresenta o método Mandani de inferência para duas entradas e uma saída. Neste caso, duas regras (ou proposições) do tipo: “**Se** x é A_i **E** y é B_j **Então** z é C_k ” foram atingidas. Cada proposição tem uma região de saída, C_k cuja altura é dada pelo mínimo dos valores das funções de pertinência de A_i e B_j . Na seqüência, essas saídas são agregadas em um conjunto difuso para representar a região de saída (C) do sistema de inferência.

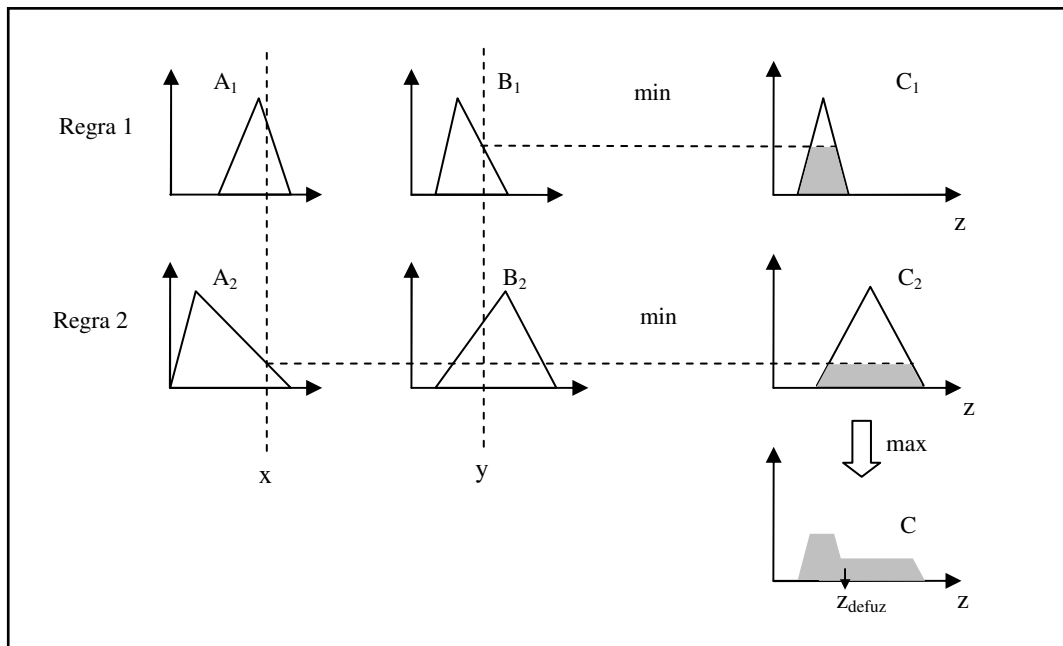


Figura 2.22 – Método Mandani de inferência

Para o exemplo do fluxo, na primeira etapa, sendo a temperatura aproximadamente igual a 18 e pressão aproximadamente igual a 5, devido ao domínio das variáveis (tabela 2.5) são quatro as proposições atingidas, destacadas na tabela 2.6.

Os conjuntos difusos para essas variáveis foram definidos na forma triangular conforme figura 2.19, sendo a função de pertinência que os representa dada por:

$$\mu(x) = 1 - \left| \frac{x - m}{\alpha} \right|, \text{ conforme definido na seção 2.1.5.1.}$$

Tabela 2.6 – Regras atingidas para as variáveis de entrada do exemplo

Fluxo		Temperatura		
		BA	ME	AL
Pressão	BA	(1)BA	(4)BA	(7)ME
	ME	(2)ME	(5)ME	(8)AL
	AL	(3)ME	(6)AL	(9)AL

Para as proposições atingidas tem-se:

$$\text{Proposição 2: Temperatura BA} \Rightarrow \mu_T(x) = 1 - \left| \frac{x - m}{\alpha} \right| = 1 - \left| \frac{18 - 11}{11} \right| = 0,36$$

$$\text{Pressão ME} \Rightarrow \mu_P(x) = 1 - \left| \frac{5 - 3,75}{2,25} \right| = 0,44$$

Usando o operador lógico E, o valor da função de pertinência de saída para esta regra é:

$$\mu_{T \cap P}(x) = \min\{0,36; 0,44\} = 0,36$$

Para as demais proposições atingidas tem-se:

$$\text{Proposição 3: Temperatura BA} \Rightarrow \mu_T(x) = 0,36 \text{ (já calculado)}$$

$$\text{Pressão AL} \Rightarrow \mu_P(x) = 1 - \left| \frac{5 - 5,5}{1,5} \right| = 0,67$$

$$\mu_{T \cap P} = \min\{0,36; 0,67\} = 0,36$$

$$\text{Proposição 5: Temperatura ME} \Rightarrow \mu_T(x) = 1 - \left| \frac{x - m}{\alpha} \right| = 1 - \left| \frac{18 - 22,5}{7,5} \right| = 0,40$$

$$\text{Pressão ME} \Rightarrow \mu_P(x) = 0,44 \text{ (já calculado)}$$

$$\mu_{T \cap P} = \min\{0,40; 0,44\} = 0,40$$

$$\text{Proposição 6: Temperatura ME} \Rightarrow \mu_T(x) = 0,40 \text{ (já calculado)}$$

$$\text{Pressão AL} \Rightarrow \mu_P(x) = 0,67 \text{ (já calculado)}$$

$$\mu_{T \cap P} = \min\{0,67; 0,40\} = 0,40$$

Na segunda etapa do Método Mandani os resultados obtidos para cada proposição são agregados formando a região difusa de saída. O valor da função de pertinência para a variável de saída é obtido pela união entre os conjuntos difusos resultantes das operações anteriores, isto é:

$$\text{Max } \{0,36; 0,36; 0,40; 0,40\} = 0,40$$

O valor numérico de saída para a variável fluxo é obtido pelo módulo de inferência tratado na seqüência.

2.1.8.4 Módulo de Defuzificação

O **módulo de defuzificação** é o processo de conversão do conjunto difuso de saída em um número que melhor represente esse conjunto.

Existem vários métodos de defuzificação, dos quais destacam-se:

- Método da Defuzificação pelo Centro de Área ou Centro de Gravidade (*Centróide Average – CA*);
- Método de Defuzificação pela Média do Máximo; e
- Centro dos Máximos (*Maximum Center Average – MCA*)

O método da **Defuzificação pelo Centro de Gravidade (*Centróide Average – CA*)**, representado na figura 2.23, é um dos mais utilizados sendo dado por:

$$z_{\text{defuz}} = \frac{\sum_{i=1}^m z_i \mu(z_i)}{\text{Card}(C)}$$

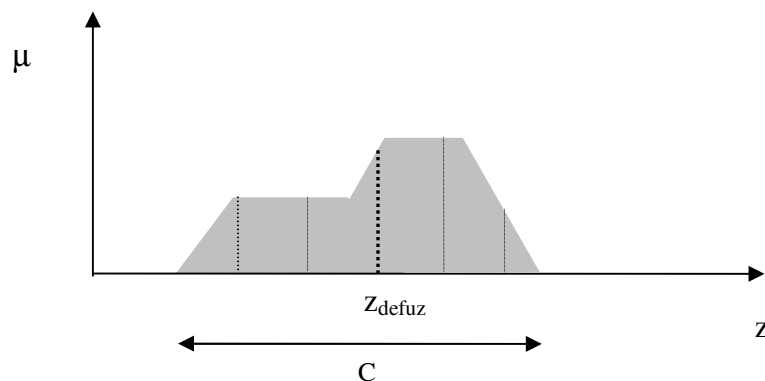


Figura 2.23 – Representação do método Centro de Área

Este método apresenta alguns problemas: um deles é devido à possibilidade de não ocorrer sobreposição das funções de pertinência, não havendo significado físico para cálculo do centro de área, o outro é devido ao esforço computacional exigido na integração numérica (SHAW e SIMÕES, 2001, p.52).

O método **Defuzificação pela Média dos Máximos**, é a média de todos os elementos do conjunto de saída C que tenham os maiores valores de pertinência, sendo calculado por:

$$z_{\text{defuz}} = \frac{\sum_{j=1}^M z_j}{\text{Card}(C)}$$

onde z_j é o elemento para o qual a função de saída tem um máximo local e $\text{Card}(C)$ é a cardinalidade (número de elementos) do conjunto C (MIZUMOTO, 1995, p.9). A figura 2.24 apresenta um exemplo desse método.

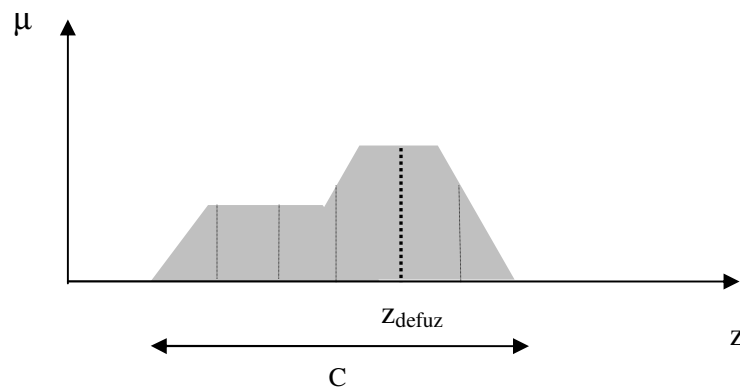


Figura 2.24 – Representação do método Média dos Máximos

Na defuzificação pelo **Método das Alturas ou Centro dos Máximos**, inicialmente as funções de pertinência do conjunto são transformadas em conseqüentes clássicos através da função *singleton* representada por uma linha vertical que passa pelo centro de gravidade de cada conjunto difuso (figura 2.25). Uma vez que esta função intercepta o eixo dos x em um único ponto, o cálculo de z_{defuz} (centro dos máximos) é reduzido ao cálculo da média ponderada de z_i para cada *singleton* e seu grau de participação (altura hgt_i). A principal vantagem desse método é a redução do custo computacional.

$$z_{\text{defuz}} = \frac{\text{hgt}_1 \cdot z_1 + \text{hgt}_2 \cdot z_2 + \dots + \text{hgt}_n \cdot z_n}{\text{hgt}_1 + \text{hgt}_2 + \dots + \text{hgt}_n}$$

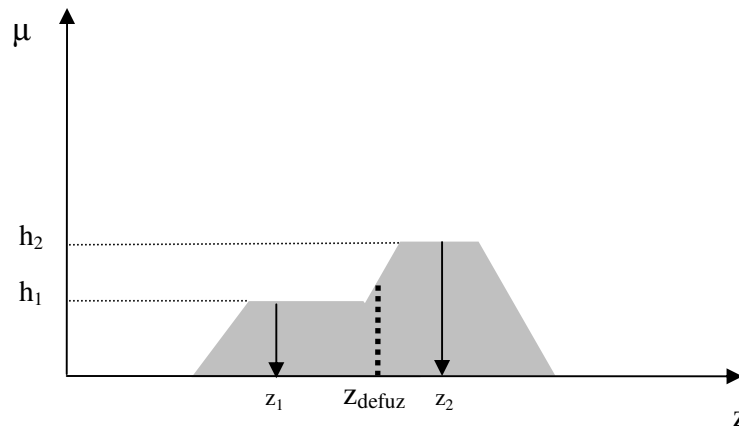


Figura 2.25 – Representação do método Centro dos Máximos

O sistema difuso de inferência apresentado nesta seção (2.1.8) pode ser construído usando o *software MatLab*. No *Fuzzy Logical Toolbox* do *Matlab* são disponibilizados os módulos: editor básico do sistema, em que são definidas suas variáveis de entrada e saída, o método de inferência e o método de defuzzificação; o editor de função de preferência que contém uma biblioteca de funções de pertinência (trapezoidal, triangular, gaussiana, etc) e o editor de regras. O *software* possui uma interface gráfica que permite visualizar as regras atingidas de acordo com os valores de entrada e ainda um visualizador de superfície em que são representadas as variáveis de entrada e saída do sistema.

Voltando ao exemplo tratado nesta seção, a figura 2.26 apresenta a tela do visualizador de regras do *Fuzzy Logical Toolbox* do *Matlab*. Para os valores temperatura igual a 18 e pressão 5 na terceira coluna da figura estão representados conjuntos de saída da regras atingidas (2, 3, 5, 6), obtidos pela utilização do operador min. Ao final, a agregação desses conjuntos, através do operador max, fornece o conjunto difuso de saída da variável fluxo (final da coluna 3). Através da defuzzificação pelo método centro de área foi obtido o valor dessa variável, $\text{fluxo} = 20.8$.

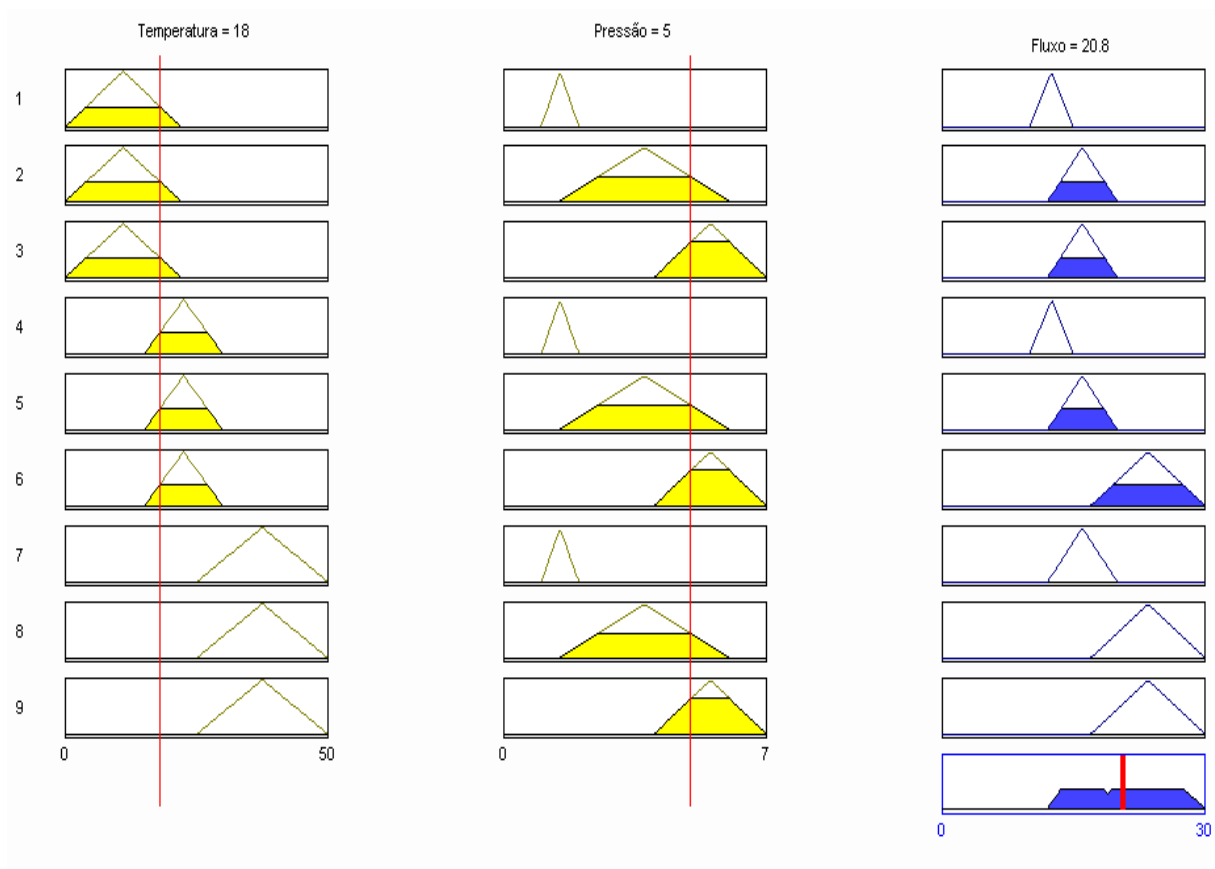


Figura 2.26 – Exemplo de sistema de inferência difusa construído no *Fuzzy Logical Toolbox* do *Matlab*

2.2 Metodologia Multicritério

Muitos problemas de decisão nas áreas econômica, industrial, financeira e política envolvem múltiplos critérios. Ninguém compra um carro baseado somente no preço (critério financeiro). O conforto, a qualidade, o desempenho e o prestígio são levados em consideração. Além disso, ninguém reage da mesma forma, e cada um escolhe de acordo com seu gosto pessoal.

O problema de seleção ou classificação de alternativas submetido a múltiplos critérios não é tarefa fácil; a busca da solução frequentemente ocorre em ambiente em que os critérios são conflitantes e o ganho em um critério pode causar a perda em outro. Por esse motivo os métodos de avaliação multicritério não apresentam uma solução ótima e sim a solução de melhor compromisso.

Um problema de multicritério é formulado por:

$$\text{Max-dominate } f(x) = \{f_1(a), f_2(a), \dots, f_k(a) / a \in A\}$$

onde A representa um conjunto de ações (alternativas) e f_j , $j = 1, \dots, k$ os critérios a serem maximizados. Cada critério é uma aplicação de A em \mathfrak{R} (ou em outro conjunto ordenado).

De modo geral, problemas de decisão podem ser discretos, quando tratam de um número finito de alternativas, ou contínuo, quando as alternativas são explicitadas pelas suas restrições. Entre as metodologias multicritério discretas destacam-se o AHP (*Analytic Hierarchy Process*) originário da escola americana e as famílias ELECTRE (*Elimination and Choice Translating Reality*) e PROMETHE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*), provenientes da escola francesa (GOMES, 2002, p.67). Em especial, o PROMETHEE, de interesse deste trabalho, é um método que pertence à família dos métodos de subordinação, destacado pela sua simplicidade e clareza. Entende-se por método de subordinação aquele que utiliza relações de superação em que, a cada par de alternativas (ações), é associado um índice de concordância e um índice de discordância (GOMES, 2002, p.126).

Nos processos de avaliação, o julgamento de valor empregado nem sempre pode ser expresso de forma segura e precisa. Por esse motivo, tem sido incluída às metodologias multicritério a teoria de conjuntos difusos. Os trabalhos apresentados na literatura tratam dessa inclusão de diversas maneiras, de acordo com o problema tratado. Neste trabalho, é utilizada a proposta de GELDEMANN et al (2000) apresentada na seqüência.

2.2.1 PROMETHEE

O PROMETHEE é um método de subordinação, introduzido por B. Roy (BRANS; MARESCHAL; VINCKE, 1986, p.228) que tem por finalidade oferecer ao decisor a classificação de um conjunto de alternativas, avaliadas segundo k critérios.

Seja A o conjunto de alternativas, para cada ação (alternativa) $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$, $f_j(a_i)$ é uma avaliação dessa ação segundo o critério j, $j = 1, \dots, k$. Essas avaliações podem ser representadas na matriz M:

$$M = \begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & & f_k(a_n) \end{bmatrix}$$

A partir de M, uma **avaliação aos pares** é efetuada, seguindo o algoritmo:

(1) Especificar para cada critério f_j uma função de preferência generalizada (P_j) tal que:

$$P_j : A \times A \rightarrow [0,1]$$

Na comparação entre as alternativas a_r e a_s , pertencentes ao conjunto A, tem-se:

$$P_j(a_r, a_s) = P(d(a_r, a_s)) = P(f(a_r) - f(a_s)) \text{ que representa a intensidade com que a}$$

alternativa (ou ação) a_r é preferível a a_s segundo o critério j, tal que:

- i) Se $P_j(a_r, a_s) = 0$ não há preferência de a_r em relação a a_s ;
- ii) Se $P_j(a_r, a_s) \sim 0$ há fraca preferência de a_r em relação a a_s ;
- iii) Se $P_j(a_r, a_s) \sim 1$ há forte preferência de a_r em relação a a_s ; e
- iv) Se $P_j(a_r, a_s) = 1$ há estrita preferência de a_r em relação a a_s .

Se o critério precisa ser maximizado, usa-se $d(a_r, a_s) = f(a_r) - f(a_s)$ para definir a função de preferência. No caso de minimização do critério a função de preferência será dada por $d(a_r, a_s) = f(a_s) - f(a_r)$.

BRANS e MARESCHAL (1986, p.229) apresentam seis tipos de função de preferência (figura 2.27) e seus respectivos significados. O avaliador pode ainda com a ajuda de um especialista modelar outras funções de preferência.

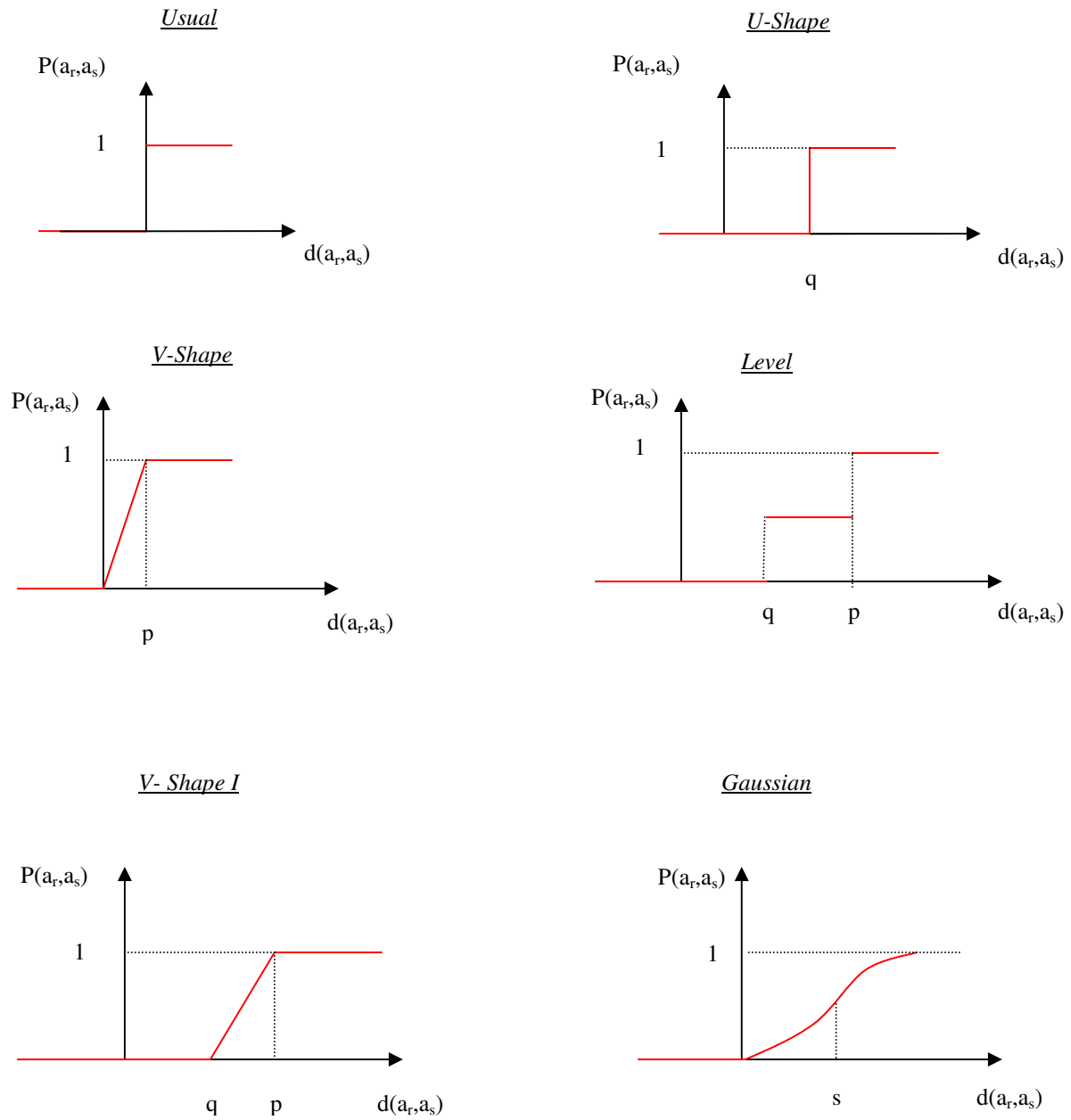


Figura 2.27 – Exemplos de funções de preferência

Na função de preferência *Usual* há indiferença entre as alternativas a_r e a_s se e somente se $f(a_r) = f(a_s)$. Quando as avaliações são diferentes o avaliador tem preferência estrita pela alternativa que possui melhor avaliação.

Na função de preferência *U-Shape* as alternativas são indiferentes sob o ponto de vista do avaliador se não excedem o limite de indiferença q . Caso contrário, há preferência estrita pela alternativa a_r .

Na função de preferência *V-Shape*, p é o limite de preferência estrita e, se a diferença entre as alternativas for menor do que esse limite, então a preferência pela alternativa a_r aumenta linearmente com a diferença $d(a_r, a_s)$. Quando a diferença é maior do que p há preferência estrita pela alternativa a_r .

Na função de preferência *Level* o avaliador deve definir o limite de indiferença q e o limite de preferência p tal que: se $d(a_r, a_s)$ é menor do que q então há indiferença entre as alternativas; se $d(a_r, a_s)$ está entre q e p há fraca preferência por a_r e; se $d(a_r, a_s)$ é maior do que p então a alternativa a_r é preferível à alternativa a_s .

Na função de preferência *V-Shape I* o avaliador considera que sua preferência aumenta linearmente da indiferença para a estrita preferência entre os limites p e q .

Na função de preferência *Gaussian* é necessário apenas que o avaliador defina o parâmetro s que indica o valor a partir do qual há mudança na concavidade na curva de preferência.

(2) Definir o vetor de pesos $w = [w_1, w_2, \dots, w_k]$ que são as medidas de **importância de cada critério**. Essa avaliação é feita pelo decisor ou por um grupo de especialistas. Pode ocorrer que os pesos sejam todos iguais, se os critérios tiverem a mesma importância.

(3) Calcular para todos os pares de alternativas o índice de preferência ponderada π , que indica o **percentual de preferência** da alternativa a_r em relação à alternativa a_s , levando em consideração os pesos atribuídos a cada critério.

$$\pi : A \times A \rightarrow [0,1]$$

$$\pi(a_r, a_s) = \sum_{j=1}^k P_j(a_r, a_s) \cdot w_j$$

As propriedades do índice de preferência ponderada são:

$$\text{i) } \pi(a_r, a_r) = 0$$

$$\text{ii) } 0 \leq \pi(a_r, a_s) \leq 1 \quad \forall a_r, a_s \in A$$

(4) Calcular o índice de preferência positivo que representa a média de preferência de qualquer alternativa a_r sobre **todas as alternativas** do conjunto A :

$$\phi^+ : A \rightarrow [0,1]$$

$$\phi^+(a_r) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a_r, x)$$

Quanto maior $\phi^+(a_r)$, melhor a alternativa.

(5) Calcular o índice de preferência negativo que representa a média de preferência de todas as alternativas sobre a alternativa a_r :

$$\phi^- : A \rightarrow [0,1]$$

$$\phi^-(a_r) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a_r)$$

Quanto menor $\phi^-(a_r)$, melhor a alternativa.

(6) Como saída do algoritmo, tem-se a classificação parcial (PROMETHEE I) e a classificação completa (PROMETHEE II).

A classificação parcial das alternativas é obtida a partir dos índices de preferência positivo e negativo, da seguinte forma:

$$a_r P a_s \quad \text{se} \quad \begin{cases} \phi^+(a_r) > \phi^+(a_s) \quad \text{e} \quad \phi^-(a_r) < \phi^-(a_s) \\ \text{ou} \\ \phi^+(a_r) = \phi^+(a_s) \quad \text{e} \quad \phi^-(a_r) < \phi^-(a_s) \\ \text{ou} \\ \phi^+(a_r) > \phi^+(a_s) \quad \text{e} \quad \phi^-(a_r) = \phi^-(a_s) \end{cases}$$

$$a_r I a_s \quad \text{se} \quad \begin{cases} \phi^+(a_r) = \phi^+(a_s) \quad \text{e} \\ \phi^-(a_r) = \phi^-(a_s) \end{cases}$$

$a_r J a_s$ caso contrário

onde P, I e J representam respectivamente, preferível, indiferente e incomparável.

A figura 2.28 ilustra um exemplo de classificação parcial mostrado por LOPES et al. (2004). Observa-se que as alternativas 3 e 2 são incomparáveis, e que as mesmas sobreclassificam as alternativas 1 e 4.

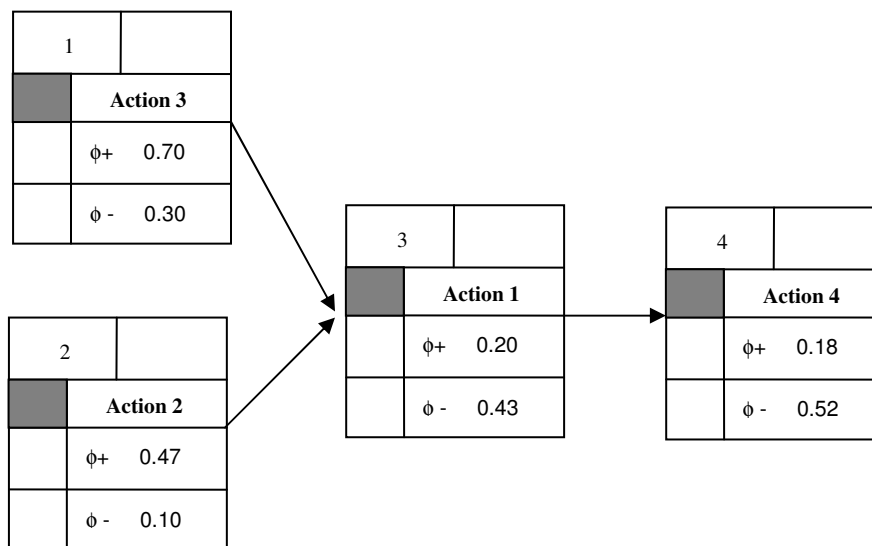


Figura 2.28 - Resultado obtido pela classificação parcial (PROMETHEE I) obtido no *software Decision Lab*⁴

⁴ *Software* criado por BRANS e MARECHAL para avaliação de alternativas através do PROMETHEE

A classificação completa das alternativas é obtida através do índice líquido de preferência (ϕ) calculado pela diferença entre os índices de preferência positivo e negativo:

$$\begin{aligned} \phi &: A \rightarrow R \\ \phi(a_r) &= \phi^+(a_r) - \phi^-(a_r) \end{aligned} \quad (1)$$

Se $\phi(a_r) > \phi(a_s)$ então a alternativa a_r é preferível à alternativa a_s

Se $\phi(a_r) = \phi(a_s)$ então a alternativa a_r é indiferente à alternativa a_s

Para o exemplo apresentado, a classificação completa é mostrada graficamente na figura 2.29. Apesar de a classificação total (ordenação) fornecer ao avaliador uma visão mais clara do resultado procurado, sem incomparabilidades há perda de informações devido à diferença (1) calculada. Neste caso, a escolha seria pela alternativa 3, porém, de acordo com o PROMETHEE I (figura 2.28), a alternativa 2 também seria uma opção viável.

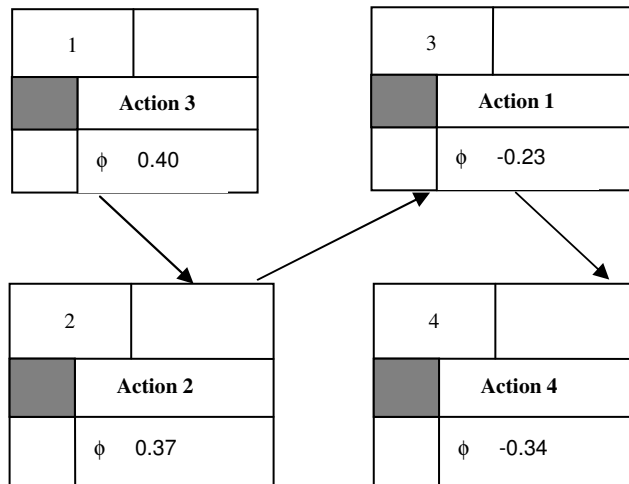


Figura 2.29 - Resultado obtido pela classificação completa (PROMETHEE II)

2.2.2 F- PROMETHEE

Na literatura há diversas sugestões para o emprego da teoria de conjuntos difusos em problemas de multicritério. No trabalho de PETROVIC e RADOJEVIC (1997), os autores propõem que, em vez de escolher entre as seis funções de preferência apresentadas na figura 2.27, aquelas que representarão cada critério, o avaliador expresse a estrutura de preferência em linguagem natural como: “pequena diferença”, “média diferença” e “grande diferença”. Isso porque, os parâmetros (p e q) utilizados nas funções de preferência, nem sempre são facilmente determinados pelo decisor. Dessa forma, é sugerido pelos autores, que para cada critério um sistema difuso de preferência seja desenvolvido.

TÉNO e MARESCHAL (1997) na classificação de quatro processos de fabricação propõem uma versão do PROMETHEE utilizando as operações aritméticas com intervalos. Neste caso, na matriz de entrada (M) as avaliações são dadas como $f_{kj}(a_i) = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ onde \underline{a}_i e \bar{a}_i são, respectivamente, o limite inferior e superior do intervalo e representam o menor e o maior valor obtido por f em a_i .

GOUMAS e LYGEROU (2000) apresentam a matriz M com as avaliações representadas por números difusos triangulares. Os pesos dos critérios, bem como os parâmetros p (limite de preferência) e q (limite de indiferença), são considerados números clássicos (não difusos). Os autores avaliam no trabalho, as diferenças apresentadas nas ordenações obtidas pelo PROMETHEE clássico e o PROMETHEE com entradas difusas.

GELDEMANN et al (2000) também utilizam números difusos para representar as avaliações de quatro técnicas de produção de ferro segundo onze critérios, porém neste caso, **os pesos dos critérios são tratados como variáveis lingüísticas**. Segundo esses autores, o algoritmo do método PROMETHEE pode ser reescrito da seguinte forma:

(1) Especificar para cada critério f_j uma função de preferência.

Em geral, as funções de preferência *V-Shape* e *V-Shape I* são as mais utilizadas. No caso clássico, a função *V-Shape I* é expressada no PROMETHEE como:

$$P_j(a_r, a_s) = \begin{cases} 0 & d(a_r, a_s) \leq q \\ \frac{d(a_r, a_s) - q}{p - q} & q \leq d(a_r, a_s) \leq p \\ 1 & d(a_r, a_s) \geq p \end{cases}$$

em que $d(a_r, a_s)$ é a diferença na performance das ações a_r e a_s e q e p os limites de indiferença e de preferência de a_r sobre a_s .

Para o F-PROMETHEE, em que as avaliações são números difusos triangulares, a função de preferência difusa *V Shape I*, denotada por $\tilde{P}_j(a_r, a_s)$ é apresentada GOUMAS e LYGEROU (2000) como⁵:

$$\tilde{P}_j(a_r, a_s) = \begin{cases} 0 & m^d - \alpha^d \leq q \\ \frac{(m^d, \alpha^d, \beta^d) - q}{p - q} & q \leq m^d - \alpha^d \quad \text{e} \quad m^d + \beta^d \leq p \\ 1 & m^d + \beta^d \geq p \end{cases}$$

em que $(m^d, \alpha^d, \beta^d) = \tilde{f}_k(a_r) - \tilde{f}_k(a_s) = \tilde{d}(a_r, a_s)$ e p e q são os números clássicos $(p, 0, 0)$ e $(q, 0, 0)$.

Já GELDEMANN et al (2000) apresenta a função *V Shape I* como:

$$\tilde{P}_j(a_r, a_s) = (P_j(m); P_j(m) - P_j(m - \alpha); P_j(m + \beta) - P_j(m))$$

onde $P_j(m)$, $P_j(m - \alpha)$ e $P_j(m + \beta)$ são, respectivamente, os valores clássicos referentes ao número principal, vértice esquerdo e vértice direito da base do número triangular.

⁵ O símbolo \sim será usado para indicar que o número é difuso e a notação com sobrescrito como por exemplo, (m^d, α^d, β^d) para indicar em qual operação foi obtido: $d(a_r, a_s) = \tilde{f}_k(a_r) - \tilde{f}_k(a_s) = (m^d, \alpha^d, \beta^d)$.

(2) Calcular para todas as alternativas a função preferência ponderada, π , como:

$$\tilde{\pi} : A \times A \rightarrow [0,1]$$

$$\tilde{\pi}(a_r, a_s) = \sum_{j=1}^k w_j \cdot \tilde{P}_j(a_r, a_s)$$

em que w_j , representado como $(w_j, 0, 0)$, $w_j > 0$, é o peso defuzzificado associado a cada critério. Reescrevendo a função π :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(a_r, a_s) &= \sum_{j=1}^k w_j \cdot \tilde{P}_j(a_r, a_s) \\ &= \sum_{j=1}^k \left((w_j, 0, 0) \cdot (m^P, \alpha^P, \beta^P) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (w_j m^P, w_j \alpha^P, w_j \beta^P) = (m^{\tilde{\pi}}, \alpha^{\tilde{\pi}}, \beta^{\tilde{\pi}}) \end{aligned}$$

(3) Obter os índices de preferência $\tilde{\phi}^+(a_r)$ e $\tilde{\phi}^-(a_r)$ calculados por:

$$\tilde{\phi}^+(a_r) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \tilde{\pi}(a_r, x) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}^-(a_r) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \tilde{\pi}(x, a_r)$$

O índice líquido de preferência $\tilde{\phi}(a_r)$ é o número difuso $(m^\phi, \alpha^\phi, \beta^\phi)$, resultante da diferença entre os índices positivo e negativo.

(4) Ordenar as alternativas. Nesta fase, é necessário que se faça a defuzzificação dos resultados. Se $x = (m^\phi, \alpha^\phi, \beta^\phi)$, é o índice de preferência associado a alguma alternativa, então pelo Método do Centro de Gravidade, tem-se:

$$x_{\text{defuz}} = \frac{\int_c \mu(x) dx}{\int_c \mu(x) dx} \quad \text{onde} \quad C = [m^\phi - \alpha^\phi, m^\phi + \beta^\phi]$$

$$x_{\text{defuz}} = \frac{\int_{m-\alpha}^m x \left(1 - \frac{m-x}{\alpha}\right) dx + \int_m^{m+\beta} x \left(1 - \frac{x-m}{\beta}\right) dx}{\int_{m-\alpha}^m \left(1 - \frac{m-x}{\alpha}\right) dx + \int_m^{m+\beta} \left(1 - \frac{x-m}{\beta}\right) dx}$$

$$x_{\text{defuz}} = \frac{1}{3}(3m - \alpha + \beta)$$

O número $\frac{1}{3}(3m - \alpha + \beta)$ é também chamado de índice de YAGER (GOUMAS e LYGEROU , 2000) denotado por $F(m, \alpha, \beta)$.

3 ESTUDO DE CASO

O **Banco Social** é a entidade que gerencia um programa de crédito orientado, criado pelo Governo do Estado do Paraná através da parceria entre a Secretaria de Estado da Fazenda, a Secretaria de Estado do Emprego e Relações de Trabalho – SERT, a Secretaria do Estado da Criança e Assuntos da família – SECR, as Prefeituras Municipais e o Serviço de Apoio às Micro e Pequenas Empresas no Paraná – SEBRAE/PR.

Destinado a setores com pouco ou nenhum acesso ao sistema financeiro como os microempreendedores, formais ou informais, artesãos e prestadores de serviços, o Banco Social tem como objetivos principais:

- estimular a geração de emprego e renda;
- despertar a capacidade empreendedora; e
- promover a inclusão do cliente no sistema financeiro.

O programa diferencia-se do crédito tradicional pelo volume de recursos emprestado, e pela tecnologia de crédito utilizada que é baseada fundamentalmente em empréstimos de curto prazo e de pequeno valor.

Para obter o cadastro no banco é preciso que o pretendente ao empréstimo atenda às exigências:

- ter experiência na atividade, há mais de seis meses, no setor formal ou informal;
- residir há mais de dois anos no município e ter endereço fixo;
- não apresentar restrições no Serviço de Proteção ao Crédito (SPC); e
- não ter tido receita bruta maior do que R\$ 120.000,00 no exercício (ano) anterior ao do pedido do financiamento.

A taxa de juros dos empréstimos é de 1,5% ao mês nas modalidades:

- Capital de Giro: até R\$ 2000,00 a ser pago no prazo de 1 a 6 meses;
- Investimento Fixo: até R\$ 5000,00 a ser pago no prazo de 1 a 12 meses; e
- Investimento Misto: até R\$ 5000,00 a ser pago no prazo de 1 a 18 meses.

A avaliação das propostas de financiamento é realizada em três etapas: na primeira etapa é analisado o questionário respondido pelo proponente que contém informações pessoais, sobre seu negócio, e sobre o avalista (anexo 1); na segunda etapa o agente de crédito do Banco visita o empreendimento e dá o seu parecer sobre a concessão do crédito. Na última etapa, para a avaliação final é composto um comitê de crédito com representantes dos parceiros inicialmente citados. A periodicidade das reuniões do comitê de crédito é de acordo com a demanda. Existe uma clientela diária, porém muitos

candidatos não atendem às exigências do Banco. A média mensal dos candidatos selecionados é de 5 clientes.

A avaliação das propostas é baseada nos cinco C's do Crédito: Caráter, Capital, Condições, Capacidade e Colateral. Esses critérios foram estabelecidos pelos autores WESTON e BRIGHAM, em 1972, sendo:

1) **Caráter**: refere-se à determinação de alguém em honrar seus compromissos. Está ligado à honestidade, idoneidade e reputação sendo dado pelo histórico do solicitante quanto ao cumprimento de suas obrigações financeiras, contratuais e morais.

No Banco Social, as informações quanto ao caráter do proponente ao empréstimo são obtidas pelo agente de crédito em entrevista com fornecedores e clientela em geral, e pela análise de empréstimos anteriores. Os solicitantes deste estudo eram pretendentes ao primeiro crédito e nada que os desabonasse foi levantado pelo agente, sendo todos classificados como idôneos. Por esse motivo, esse critério foi desconsiderado na avaliação através do PROMETHEE.

2) **Capital**: refere-se à situação econômico-financeira e patrimonial do cliente e a sua capacidade (bens e recursos) de saldar seus débitos.

No Banco Social avalia-se também o Capital Humano. Dessa forma tem-se para o critério capital, as subdivisões: **Capital Humano** (Idade, Escolaridade e Capacidade Empreendedora) e **Patrimônio do Empreendedor**.

3) **Condições**: diz respeito aos fatores externos e macroeconômicos que podem afetar o desempenho da empresa como interferências governamentais, conjuntura nacional e internacional, concorrência, variações de mercado.

No Banco Social esse critério foi adequado às próprias **condições do negócio**. São consideradas as características do empreendimento classificadas como: Tempo de Existência do Negócio, Localização, Infra-estrutura e Geração de Emprego.

4) **Capacidade**: refere-se à capacidade de pagamento do empréstimo. Esta é a definição considerada pelo Banco Social avaliada no Demonstrativo de Resultados do negócio. Entretanto, vale ressaltar que para alguns autores, este critério está relacionado aos fatores

que possibilitarão gerar a capacidade de pagamento como: tradição, formação, capacidade instalada, recursos humanos e grau de tecnologia.

5) **Colateral**: refere-se à capacidade do cliente de oferecer garantias adicionais para respaldar o débito. Segundo WESTON & BRIGHAM (2000, p. 441) este item é representado pelos ativos que os clientes podem oferecer como garantia a fim de obter crédito. Estas garantias são classificadas como reais (hipoteca, duplicata, caução, etc) ou pessoais (aval, carta de crédito, carta de fiança).

O colateral no banco Social é medido pelas condições do avalista: Tempo de Emprego e Comprometimento da Renda Líquida Mensal.

Na tabela 3.1 consta o resumo dos critérios e sub-critérios apresentados. Para a ordenação dos proponentes ao crédito será utilizada a metodologia PROMETHEE nas versões clássica e difusa. A utilização do PROMETHEE na versão difusa é justificada pela dificuldade na determinação dos pesos dos critérios considerados e, pela imprecisão nos dados dos clientes levantados através dos questionários e das avaliações do agente de crédito.

Tabela 3.1 Banco Social – critérios de avaliação

Critério		Sub-Critério
Capital	Humano	Idade
		Escolaridade
		Capacidade Empreendedora
Condições	Financeiro	Patrimônio do Empreendedor
		Tempo de Existência do Negócio
		Localização
		Infra-estrutura
		Geração de Emprego
Capacidade		Comprometimento do Capital Circulante Líquido
Colateral		Tempo de Emprego do Avalista
		Comprometimento da Renda Líquida Mensal

3.1 Implementação do PROMETHEE II

Os dados apresentados neste trabalho referem-se aos 70 proponentes ao empréstimo da unidade de Guarapuava (PR), que compõem o conjunto de alternativas $A = \{a_1, \dots, a_{70}\}$. Para a ordenação desses clientes considerou-se os onze sub-critérios citados na tabela 3.1. Na tabela 3.2 constam os valores de referência, definidos pelo avaliador, que representam a situação ideal para cada critério. Os valores de referência foram definidos baseados nos argumentos:

1) Idade: O padrão ficou entre 30 a 40 anos porque, segundo o avaliador, o proponente nesta faixa de idade deve ter certa clareza quanto ao ramo de atividade que deseja atuar somado à alguma experiência profissional.

Para esse critério foi tomado como ótimo o valor médio do intervalo: 35 anos. Dessa forma, na escolha entre dois clientes a opção foi feita por aquele mais próximo do valor médio. A avaliação de entrada para esse critério foi: $f_1(a_i) = |I(a_i) - 35|$ onde $I(a_i)$ é idade do cliente a_i e o objetivo foi $\min_{a_i \in A} f_1(a_i)$

2) Escolaridade: Definido de acordo com o perfil das pessoas que procuram o Banco Social, refere-se a pelo menos o ensino médio completo. Para esse critério, na matriz de entrada tem-se: $f_2(a_i)$. Quanto maior a escolaridade, melhor o cliente, logo o objetivo foi $\max_{a_i \in A} f_2(a_i)$.

3) Capacidade Empreendedora: Foi medida em um escala de conceitos de 0 a 5, sendo 3 o conceito mínimo satisfatório. A avaliação da capacidade empreendedora do cliente está baseada na evolução de seu empreendimento. O proponente deve responder às questões:

- Por que e como começou o negócio?
- Quais foram as maiores dificuldades enfrentadas e conquistas obtidas?
- Quais as metas a serem atingidas?
- Qual a avaliação hoje de seu negócio?

Para esse critério raciocínio análogo ao critério anterior foi usado com o objetivo:

$$\max_{a_i \in A} f_3(a_i)$$

4) Patrimônio: O patrimônio não é a garantia do empréstimo, mas é também uma medida da evolução do negócio. Entende-se como patrimônio o somatório do valor dos imóveis,

carros, maquinários e material de escritório, pertencentes ao proponente. Nesse critério, o objetivo foi minimizar a diferença em relação ao valor de referência estabelecido (R\$ 50000) e, assim, confirmar a natureza social do Banco. Diferentemente do sistema financeiro tradicional, o proponente ao empréstimo com patrimônio de R\$ 100000, por exemplo, não é considerado “melhor” que aquele com patrimônio de R\$ 80000 por estar mais distante do valor padrão estabelecido. Logo, as entradas para esse critério foram $f_4(a_i) = |PC(a_i) - 50000|$ onde $PC(a_i)$ é o patrimônio do cliente e pretendeu-se $\min_{a_i \in A} f_4(a_i)$.

5) Tempo de Existência do Negócio: Apesar da exigência do Banco ser de 06 meses, o padrão foi definido em 05 anos, tempo em que se espera que o negócio já existente tenha adquirido alguma estabilidade. Assim como no critério anterior, são valorizadas as menores diferenças em relação ao valor de referência. Na matriz de entrada foram computadas as avaliações: $f_5(a_i) = |TN(a_i) - 5|$ onde TN refere-se ao tempo de existência do negócio cujo objetivo foi $\min_{a_i \in A} f_5(a_i)$.

6) Localização: Foi medida em uma escala de conceitos de 0 a 5, levando em consideração o fluxo de pedestres e veículos, público alvo e compatibilidade com a região de atuação do negócio. Pretendeu-se: $\max_{a_i \in A} f_6(a_i)$

7) Infra-estrutura: Medida em escala de conceitos de 0 a 10, foi definido o padrão mínimo de 07. O critério Infra-estrutura está relacionado à capacidade física e de pessoal do negócio. Em visita ao empreendimento o agente de crédito verifica os sistemas de organização, procedimentos administrativos, funções e processos de produção. O objetivo para esse critério foi $\max_{a_i \in A} f_7(a_i)$.

8) Geração de Emprego: Como boa parcela dos proponentes ao solicitar o empréstimo tem objetivos de ampliação do negócio, o padrão foi estabelecido como o mínimo de 02 empregos a serem gerados. Para esse critério pretendeu-se: $\max_{a_i \in A} f_8(a_i)$.

9) Comprometimento do Capital Circulante Líquido: O proponente pode comprometer até 30% do Capital Circulante Líquido(CCL). O $CCL = TAC - TPC$ onde TAC é Total do Ativo Circulante e TPC o Total do Passivo Circulante.

O Ativo Circulante é composto pelos itens: Valor em Caixa e Bancos, Valores a Receber, Estoques.

O Passivo Circulante é composto por: fornecedores a pagar, impostos a pagar, empréstimos/financiamentos a pagar, salários, despesas a prazo.

Pretendeu-se minimizar o percentual do Comprometimento do Capital Circulante Líquido: $\min_{a_i \in A} f_9(a_i)$.

10) Tempo de Emprego do Avalista: É desejável que o avalista possua alguma estabilidade financeira e por esse motivo o tempo mínimo de emprego estabelecido foi de 05 anos. Para esse critério, foi considerado: $\max_{a_i \in A} f_{10}(a_i)$.

11) Comprometimento da Renda Líquida do Avalista: Assim como no nono critério a porcentagem máxima da renda do avalista a ser comprometida deve ser de 30% e pretendeu-se $\min_{a_i \in A} f_{11}(a_i)$.

A tabela 3.2 apresenta um resumo dos valores de referência para cada critério considerado.

Tabela 3.2 – Valores de referência para os critérios considerados

Sub-Critérios		Valores de Referência
1	Idade	30 a 40 anos
2	Escolaridade	11 anos
3	Capacidade Empreendedora	Conceito 3
4	Patrimônio do Empreendedor	R\$ 50000,00
5	Tempo de Existência do Negócio	05 anos
6	Localização	Conceito 3,5
7	Infra-estrutura	Conceito 7
8	Geração de Emprego	2 postos
9	Comprometimento do Capital Circulante Líquido	Até 30% do CCL
10	Tempo de Emprego do Avalista	05 anos
11	Comprometimento da Renda Líquida do Avalista	Até 30% da RL

Observa-se que os proponentes que se encontravam fora dos padrões mínimos estabelecidos não foram descartados. Em geral, costuma-se incluí-los com penalizações, entretanto, esse procedimento não foi adotado no trabalho.

As avaliações dos onze critérios estabelecidos de cada um dos 70 proponentes, encontram-se no anexo 2.

A função de preferência utilizada para todos os critérios foi a *V-Shape I* com parâmetros p e q , conforme tabela 3.3. Esses valores foram obtidos através da consulta de especialistas na área.

Tabela 3.3 – Limites de indiferença e preferência para a função de preferência *V-Shape I*

Critérios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Limite de Indiferença (q)	1	1	0.5	2000	1	0.5	0.5	0	2	2	2
Limite de Preferência (p)	7	4	1.0	10000	5	1.0	1.0	1	5	5	5

Segundo essa tabela, para o **primeiro critério**, que se pretende minimizar, se a diferença $d(a_1, a_2) = -(f_1(a_1) - f_1(a_2)) = -(|I(a_1) - 35| - |I(a_2) - 35|)$ for menor ou igual ao limite de indiferença (q) não há preferência entre os clientes a_1 e a_2 . Isto é, não há preferência entre os clientes cujas idades são, respectivamente, 34 e 36 anos. Entre (p) e (q), a preferência por a_1 cresce linearmente com o aumento de (d) e, se essa diferença for igual ou superior ao limite de preferência (p), então, há preferência estrita pelo cliente 1. O cliente com 30 anos tem preferência relativa ao cliente com 43 anos e o mesmo cliente têm preferência estrita ao cliente com 50 anos.

Já para o **oitavo critério**, que se pretende maximizar, o cálculo é feito por $d(a_1, a_2) = f_8(a_1) - f_8(a_2)$.

Com relação aos pesos, foram considerados dois cenários. O primeiro cenário estabelece o mesmo peso para todos os critérios, isto é, todos os itens avaliados pelo Banco são considerados igualmente importantes. No segundo cenário, o vetor de pesos utilizado foi aquele obtido no sistema de inferência difuso, apresentado na seqüência.

3.2 Implementação do F-PROMETHEE

No F-PROMETHEE as avaliações de entrada dos 70 proponentes ao crédito nos critérios 1 (Idade), 2 (Escolaridade), 5 (Tempo Existência do Negócio) e 10 (Tempo de Emprego do Avalista) foram consideradas como números clássicos. Nos demais critérios: 3 (Capacidade Empreendedora), 4 (Patrimônio), 6 (Localização), 7 (Infra-estrutura), 8 (Geração de Emprego), 9 (Comprometimento do Capital Circulante Líquido) e 11 (Comprometimento da Renda Líquida do Avalista) as avaliações foram representadas por números difusos triangulares. Isso porque, tanto as avaliações obtidas através de conceitos atribuídos pelo agente de crédito (critério 3, critério 6, critério 7), quanto as obtidas nos questionários (critério 4, critério 8, critério 9 e critério 11) carregam imprecisões. As novas entradas do F-PROMETHEE foram determinados através das variações em relação ao valor de entrada do PROMETHEE clássico:

- - 5% e +10% para o critério 3;
- - 15% e +5% para o critério 4;
- - 5% e +10% para o critério 6;
- - 10% e +15% para o critério 7;
- - 1 e +1 para o critério 8;
- - 10% e +15% para o critério 9; e
- - 10% e 15% para o critério 11.

Dessa forma, o cliente 2 cuja avaliação de entrada no PROMETHEE para o critério patrimônio (4) foi $f_4(a_2) = R\$30000$, passou a ser no F-PROMETHEE, no qual é considerada a imprecisão desse dado, $\tilde{f}_4(a_2) = (30000, 4500, 1500)$. Isso significa que o patrimônio de R\$30000 pode ser visto com algo entre R\$25500 e R\$31500.

A função de preferência utilizada para todos os critérios foi a *V-Shape I*, testada nas duas sugestões apresentadas na seção 2.2.2. Os parâmetros p e q considerados foram os mesmos do PROMETHEE clássico e a diferença $\tilde{d}(a_r, a_s)$ obtida pela operação $\tilde{d}(a_r, a_s) = \tilde{f}_k(a_r) - \tilde{f}_k(a_s)$.

Para exemplificar a situação vamos analisar o critério a ser minimizado comprometimento do capital circulante líquido (9), nas duas funções de preferência.

Neste critério, ao compararmos os clientes 7 e 11, o valor da função de preferência apresentada por GOUMAS e LYGEROU é obtido através dos cálculos:

$$\tilde{d}(a_7, a_{11}) = -(\tilde{f}_9(a_7) - \tilde{f}_9(a_{11})) = (3.270, 0.842, 1.006)$$

$$q = 2 \quad \text{e} \quad p = 5 \quad (\text{tabela 3.3})$$

$$m - \alpha > q \quad \text{e} \quad m + \beta < p \quad \text{logo}$$

$$\tilde{P}_9(a_7, a_{11}) = \frac{(m^d, \alpha^d, \beta^d) - q}{p - q} = \frac{1}{3}((3.270, 0.842, 1.006) - (2, 0, 0)) = (0.42, 0.28, 0.34)$$

Para a função apresentada por GELDEMANN et al (2000), neste caso, o mesmo valor é obtido por:

$$\tilde{P}_j(a_r, a_s) = (P_j(m); P_j(m) - P_j(m - \alpha); P_j(m + \beta) - P_j(m))$$

$$\tilde{P}_9(a_7, a_{11}) = (P_9(3.270), (P_9(3.270) - P_9(0.842)), (P_9(1.006) - P_9(3.270)))$$

$$\tilde{P}_9(a_7, a_{11}) = (0.42, 0.28, 0.34)$$

Assim, no critério 9 o cliente a_7 sobreclassifica o cliente a_{11} com grau 0.441; valor obtido pela defuzificação de $\tilde{P}(a_7, a_{11})$. A função de preferência desse critério é apresentada na figura 3.1.

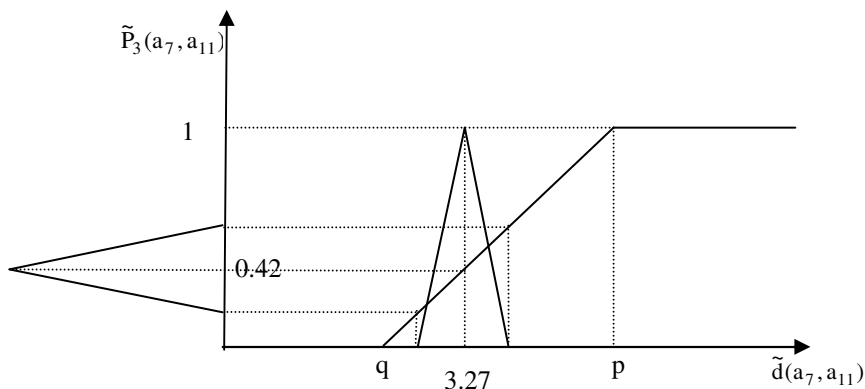


Figura 3.1 – Representação gráfica da função de preferência para critério comprometimento do capital circulante líquido

3.2.1 Avaliação dos Pesos dos Critérios para Uso no PROMETHEE e F-PROMETHEE II

Os pesos dos critérios, conforme comentado anteriormente, no cenário 1 foram considerados todos iguais. No **cenário 2** os pesos foram relacionados aos três principais

objetivos do Banco Social através dos termos lingüísticos “alta”(A), “média”(M) e “baixa”(B). Esses objetivos são:

- (1) estimular a geração de emprego e renda;
- (2) despertar a capacidade empreendedora; e
- (3) promover a inclusão do cliente no sistema financeiro.

A tabela 3.4 ilustra essa relação.

Tabela 3.4 – Relação entre os critérios e os objetivos do Banco Social

		Critérios										
Objetivos do Banco Social		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	B	B	A	B	B	M	A	A	A	B	B
	2	A	A	A	B	B	A	A	A	B	B	B
	3	B	M	A	B	A	A	A	M	A	A	A

Segundo essa tabela, na opinião do avaliador há forte relação entre o critério capacidade empreendedora (3) e os três principais objetivos do banco. Já a idade (1) do proponente não está diretamente ligada à geração de emprego e renda e à sua inclusão no sistema financeiro.

Para obtenção dos pesos finais foi construído um sistema de inferência no *software Matlab* cujas variáveis de entrada foram as avaliações de cada critério segundo os três objetivos do banco e a variável de saída, o peso. As figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 ilustram a representações gráficas das funções de pertinência dessas variáveis. Para o objetivo 1 (estimular a geração de emprego e renda), por exemplo, o valor $x = 0.3$ pertence ao conjunto difuso “baixa” com grau de pertinência $\mu_b(0.3) = 0,25$ e também pertence ao conjunto difuso “média” com $\mu_m(0.3) = 0,5$.

Objetivo 1:

$$\text{baixa} \begin{cases} \mu_b(x) = 1 & \text{se } x = 0 \\ \mu_b(x) = 2.5(0.4 - x) & \text{se } 0 < x \leq 0.4 \\ \mu_b(x) = 0 & \text{se } x > 0.4 \end{cases}$$

$$\text{média} \begin{cases} \mu_m(x) = 0 & \text{se } x < 0.1 \text{ ou } x > 0.9 \\ \mu_m(x) = 2.5(x - 0.1) & \text{se } 0.1 < x < 0.5 \\ \mu_m(x) = 2.5(0.9 - x) & \text{se } 0.5 \leq x \leq 0.9 \end{cases}$$

$$\text{alta} \begin{cases} \mu_a(x) = 0 & \text{se } x \leq 0.6 \\ \mu_a(x) = 2.5(x - 0.6) & \text{se } 0.6 < x < 1 \\ \mu_a(x) = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

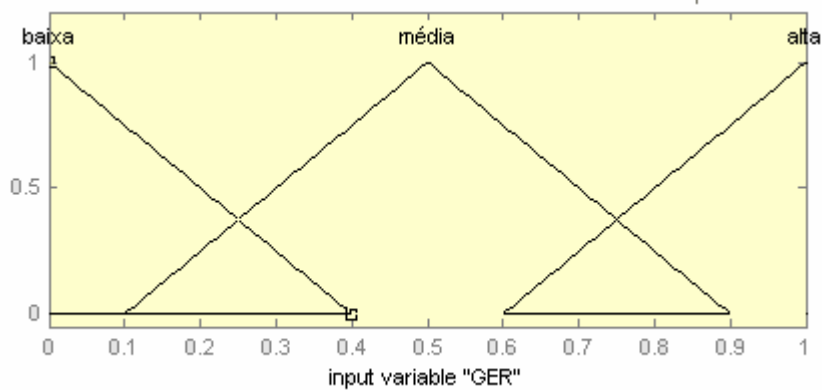


Figura 3.2 – Representação da variável de entrada objetivo (1)

Objetivo 2:

$$\text{baixa} \begin{cases} \mu_b(x) = 1 & \text{se } x = 0 \\ \mu_b(x) = 2.5(0.4 - x) & \text{se } 0 < x \leq 0.4 \\ \mu_b(x) = 0 & \text{se } x > 0.4 \end{cases}$$

$$\text{média} \begin{cases} \mu_m(x) = 0 & \text{se } x < 0.1 \text{ ou } x > 0.9 \\ \mu_m(x) = 2(x - 0.1) & \text{se } 0.1 < x < 0.6 \\ \mu_m(x) = 3.3\bar{3}(0.9 - x) & \text{se } 0.6 \leq x \leq 0.9 \end{cases}$$

$$\text{alta} \begin{cases} \mu_a(x) = 0 & \text{se } x \leq 0.6 \\ \mu_a(x) = 2.5(x - 0.6) & \text{se } 0.6 < x < 1 \\ \mu_a(x) = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

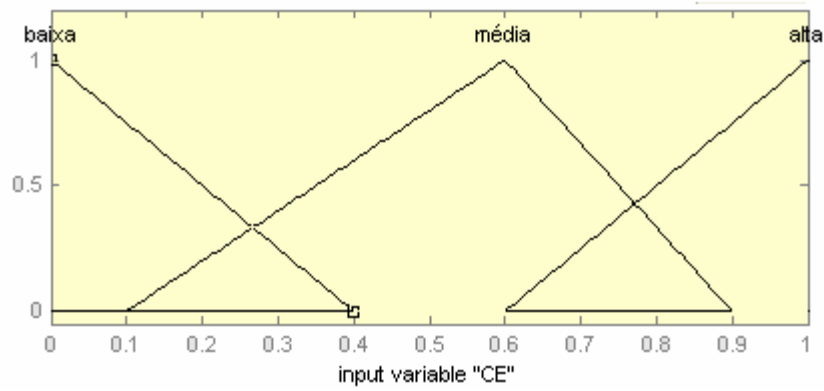


Figura 3.3 – Representação da variável de entrada objetivo (2)

Objetivo 3:

$$\text{baixa} \begin{cases} \mu_b(x) = 1 & \text{se } x = 0 \\ \mu_b(x) = 2(0.5 - x) & \text{se } 0 < x \leq 0.5 \\ \mu_b(x) = 0 & \text{se } x > 0.5 \end{cases}$$

$$\text{média} \begin{cases} \mu_m(x) = 0 & \text{se } x < 0.1 \text{ ou } x > 0.9 \\ \mu_m(x) = 2.5(x - 0.1) & \text{se } 0.1 < x < 0.5 \\ \mu_m(x) = 2.5(0.9 - x) & \text{se } 0.5 \leq x \leq 0.9 \end{cases}$$

$$\text{alta} \begin{cases} \mu_a(x) = 0 & \text{se } x \leq 0.5 \\ \mu_a(x) = 2(x - 0.5) & \text{se } 0.5 < x < 1 \\ \mu_a(x) = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

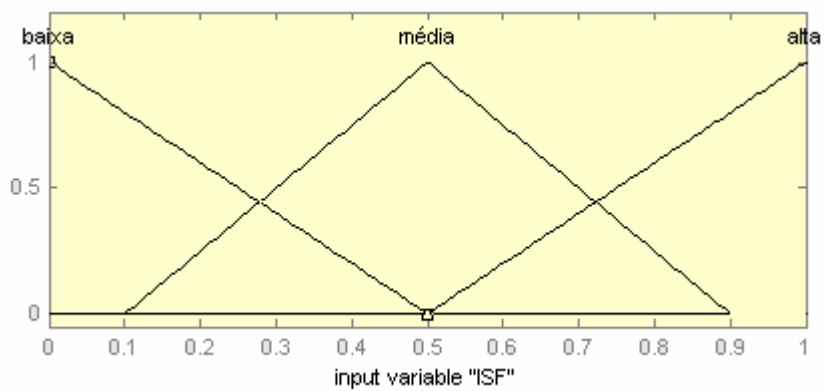


Figura 3.4 – Representação da variável de entrada objetivo (3)

Peso:

$$\text{baixo} \begin{cases} \mu_b(x) = 1 & \text{se } x = 0 \\ \mu_b(x) = 2(0.5 - x) & \text{se } 0 < x \leq 0.5 \\ \mu_b(x) = 0 & \text{se } x > 0.5 \end{cases}$$

$$\text{médio} \begin{cases} \mu_m(x) = 0 & \text{se } x < 0.1 \text{ ou } x > 0.9 \\ \mu_m(x) = 2.5(x - 0.1) & \text{se } 0.1 < x < 0.5 \\ \mu_m(x) = 2.5(0.9 - x) & \text{se } 0.5 \leq x \leq 0.9 \end{cases}$$

$$\text{alta} \begin{cases} \mu_a(x) = 0 & \text{se } x = 0.5 \\ \mu_a(x) = 2(x - 0.5) & \text{se } 0.5 < x < 1 \\ \mu_a(x) = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

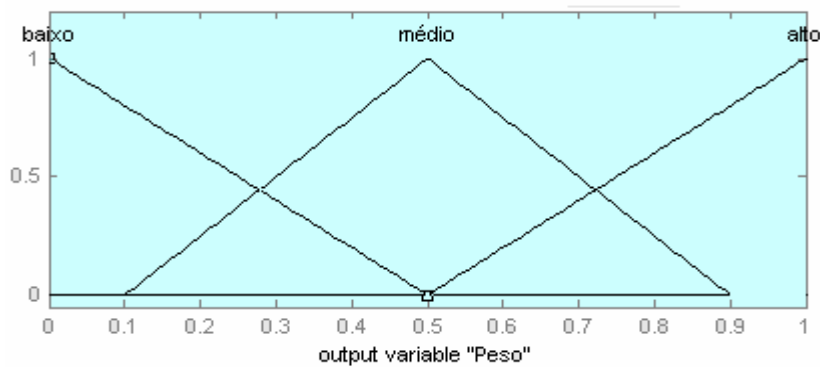


Figura 3.5 – Representação da variável de saída peso

A base de regras constituída de 27 proposições, determinadas com a ajuda do especialista (agente de crédito), são apresentadas no anexo 3. Nenhuma regra foi descartada.

Na tabela 3.5 constam os valores de entrada, definidos pelo especialista e os valores de saída obtidos através do sistema de inferência. O procedimento do sistema consiste em, dados os valores de entrada dos objetivos (1, 2 e 3) de um determinado critério, são identificados os conjuntos difusos a que pertencem e o grau de pertinência, segundo as funções apresentadas nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4. A partir das regras estabelecidas, o peso é inferido pelo método de Mandani e a resposta clássica obtida pelo método Centro de Gravidade.

Assim, para o critério 3, por exemplo, que apresenta forte relação com os objetivos do banco, 0,8; 0,9 e 0,8, respectivamente, a estimativa para seu peso obtida nesse sistema é $w_3 = 0.649$, conforme figura 3.5.

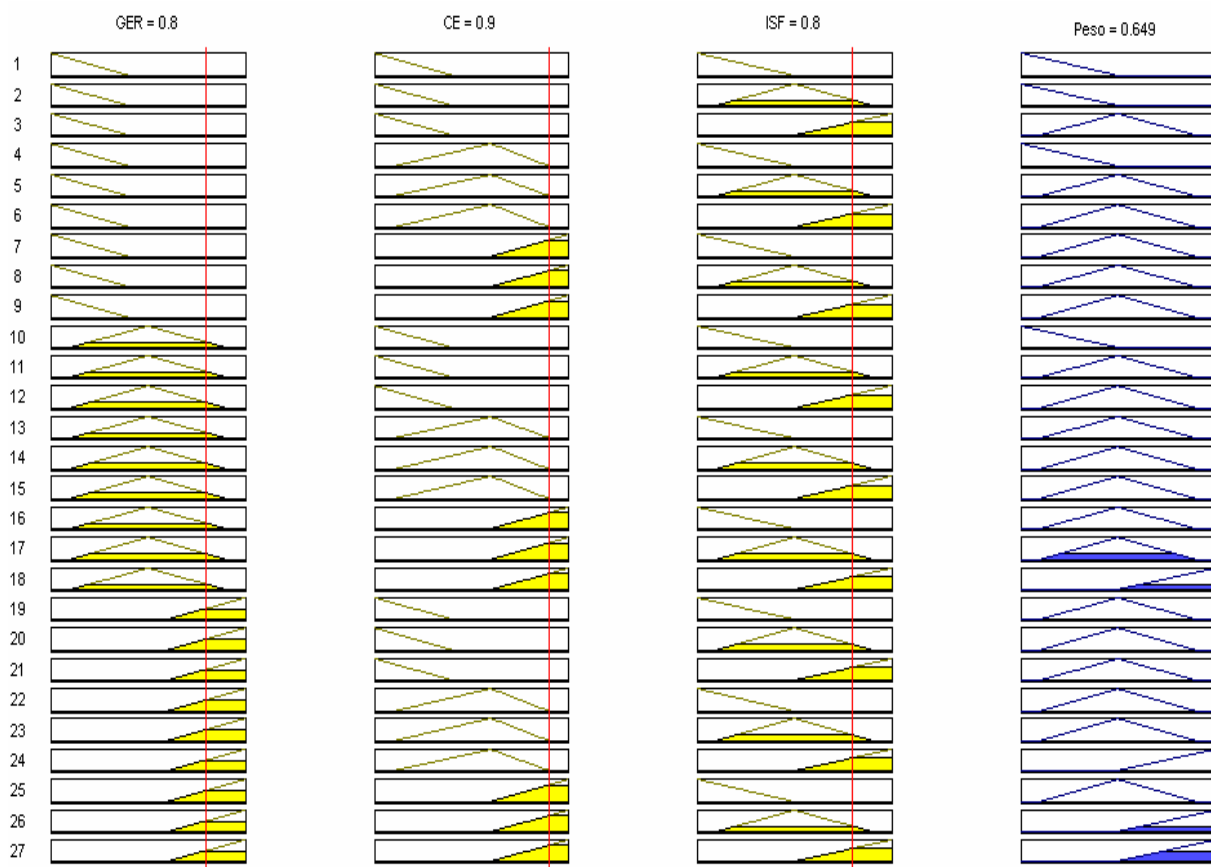


Figura 3.6 – Obtenção da variável de saída peso para o critério 3

A tabela 3.5 apresenta os resultados dos pesos obtidos para os onze critérios considerados.

Tabela 3.5 – Valores de entrada e de saída do sistema referentes ao cálculo dos pesos

Critérios	Objetivos			Pesos	Pesos Normalizados	Classificação
	1	2	3			
1	0.3	0.9	0.3	0.5	0.08	5°
2	0.3	0.9	0.7	0.58	0.10	3°
3	0.8	0.9	0.8	0.649	0.11	2°
4	0.3	0.2	0.4	0.451	0.08	5°
5	0.3	0.3	0.8	0.444	0.07	6°
6	0.5	0.7	0.8	0.544	0.09	4°
7	0.8	0.8	0.8	0.649	0.11	2°
8	0.9	0.9	0.5	0.828	0.14	1°
9	0.8	0.2	0.9	0.538	0.08	5°
10	0.3	0.3	0.8	0.444	0.07	6°
11	0.3	0.3	0.8	0.444	0.07	6°

De acordo com a tabela, a ordem de importância dos critérios é: em 1º lugar a geração de emprego, em 2º lugar a capacidade empreendedora e a infra-estrutura, em 3º lugar a escolaridade, em 4º lugar a localização, em 5º lugar, a idade, o patrimônio e o comprometimento do capital circulante líquido e, em 6ºo lugar o tempo de existência do negócio, o tempo de emprego do avalista e o comprometimento da renda líquida do avalista.

O algoritmo F-PROMETHEE descrito por GELDEMANN et al (2000), apresentado na seção 2.2.2 foi aplicado para avaliação dos clientes. Os relatórios obtidos no programa desenvolvido no *software Mathematica* encontram-se no anexo 4.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, na ordenação dos 70 proponentes ao crédito do Banco Social, foi utilizada a função de preferência *V-Shape I* difusa proposta por GOUMAS e LYGEROU (2000), apresentada no capítulo 3.

$$\tilde{P}_j(a_r, a_s) = \begin{cases} 0 & m^d - \alpha^d \leq q \\ \frac{(m^d, \alpha^d, \beta^d) - q}{p - q} & q \leq m^d - \alpha^d \quad \text{e} \quad m^d + \beta^d \leq p \\ 1 & m^d + \beta^d \geq p \end{cases}$$

O valor dessa função é um número triangular difuso somente no caso em que $\tilde{d}(a_r, a_s)$ estiver totalmente contido na região de preferência relativa, conforme mostra a figura 4.1. Se o vértice (da base) desse número triangular ($m^d - \alpha^d$) estiver à esquerda do limite de indiferença (q) ou o vértice da base ($m^d + \beta^d$) estiver à direita do limite de preferência (p) os valores da função de preferência são, respectivamente, $\tilde{P}_j(a_r, a_s) = (0,0,0)$ ou $\tilde{P}_j(a_r, a_s) = (1,0,0)$. Nestes casos, o que era preferência relativa no PROMETHEE clássico passa a ser preferência absoluta no F-PROMETHEE. As figuras 4.2 e 4.3 mostram, respectivamente, as duas situações.

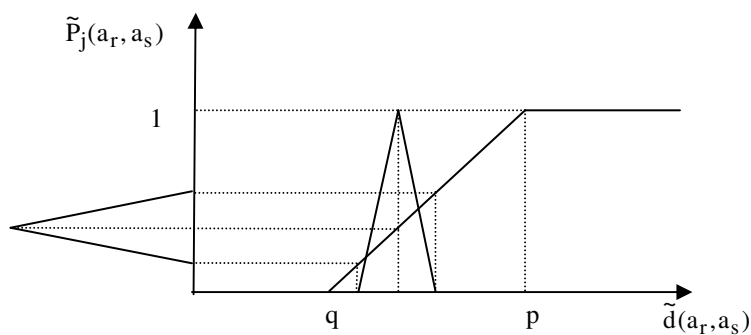


Figura 4.1 – Representação gráfica da função de preferência com $\tilde{d}(a_r, a_s)$ totalmente inserido na região de preferência relativa

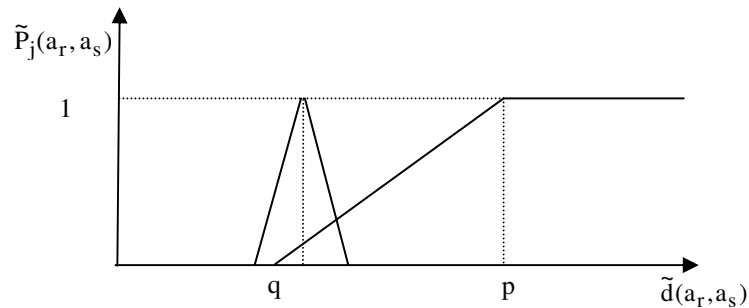


Figura 4.2 – Representação gráfica da função de preferência com $\tilde{d}(a_r, a_s)$ parcialmente inserida na região de preferência relativa (caso 1)

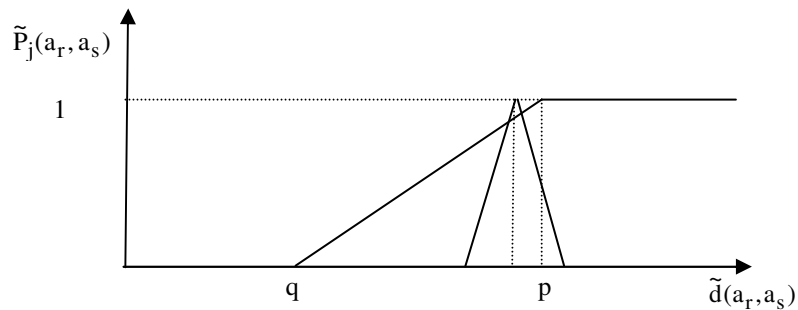


Figura 4.3 – Representação gráfica da função de preferência com $\tilde{d}(a_r, a_s)$ parcialmente inserida na região de preferência relativa (caso 2)

No teste realizado com esta função de preferência verificou-se que grande parte dos dados tratados neste trabalho caíam nestas situações, isto é, $\tilde{d}(a_r, a_s)$ não estava totalmente contida na região de preferência relativa fazendo com que os valores da função de preferência obtidos nos critérios difusos fossem 0 ou 1. Acreditamos que dessa forma estariam sendo desconsideradas as imprecisões inerentes ao problema e, por esse motivo optou-se por utilizar a função de preferência *V-Shape I* difusa, apresentada por GELDEMANN et al (2000):

$$\tilde{P}_j(a_r, a_s) = (P_j(m); P_j(m) - P_j(m - \alpha); P_j(m + \beta) - P_j(m))$$

Segundo essa função, são considerados os valores 0 ou 1 somente nos casos em que $\tilde{d}(a_r, a_s)$ está totalmente fora da região de preferência relativa, à esquerda ou à direita,

respectivamente. Para os casos apresentados nas figuras 4.2 e 4.3, as preferências entre os cliente a_r e a_s é graduada entre 0 e 1. No critério comprometimento da renda líquida, por exemplo, há uma preferência relativa de 0.23, valor obtido pela defuzificação de $\tilde{P}_{11}(a_{67}, a_{69})$, do cliente 67 em relação ao cliente 69. Nesse critério a avaliação de entrada do cliente 67 é (14.09, 1.409, 2.1135) e do cliente 69 é (14.69, 1.469, 2.035).

Como $\tilde{d}(a_{67}, a_{69})$ não está totalmente contida na região de preferência relativa, conforme apresentado na figura 4.4, se utilizássemos a função de preferência anterior, sugerida GOUMAS e LYGEROU, esse valor seria nulo, indicando que não há preferência do cliente 67 em relação ao cliente 69.

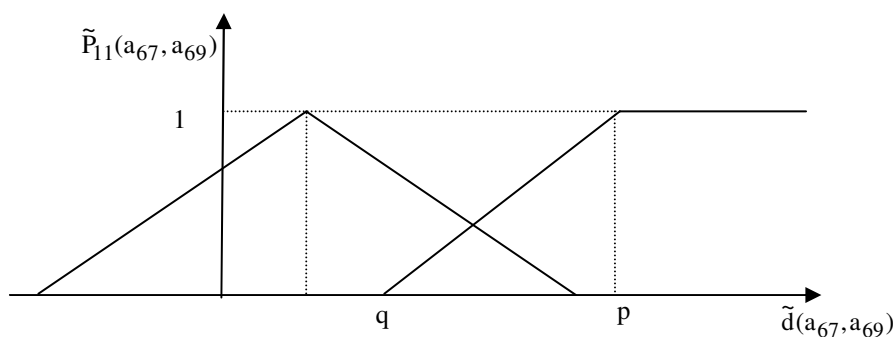


Figura 4.4 – Representação gráfica da função de preferência para critério comprometimento da renda líquida

Vale ressaltar que no F-PROMETHEE, se considerarmos as entradas como números difusos $(m, 0, 0)$ os valores das funções de preferência são os mesmos que os do PROMETHEE clássico.

Observa-se também que apesar do índice YAGER de um número difuso triangular (m, α, β) , com $\alpha = \beta$ ser igual ao seu valor principal (m) o valor da função de preferência não é o mesmo do PROMETHEE clássico, já que a $\tilde{d}(a_r, a_s)$ pode ser um número difuso não totalmente inserido na região de preferência estrita.

4.1 Ordenações Obtidas nas Metodologias PROMETHEE e F-PROMETHEE

Os resultados obtidos na ordenação dos 70 proponentes ao crédito nas metodologias PROMETHEE e F-PROMETHEE são apresentados no anexo 4. Na tabela 4.1 constam as classificações de alguns clientes considerando pesos iguais para todos os critérios (cenário

1). Vale ressaltar que o cenário 1 foi utilizado como referência para análise nas eventuais alterações nas ordenações, quando se modifica o vetor dos pesos. Na prática, sabe-se que pode haver diferenças entre os pesos dos critérios que, no caso desta aplicação, são determinados de acordo com os objetivos do Banco Social.

Tabela 4.1 – Ordenação de alguns clientes obtidas no PROMETHEE e F-PROMETHEE no primeiro cenário

Ordem	PROMETHEE		F-PROMETHEE	
	Cliente	ϕ	Cliente	ϕ
1°	8	5.153309	8	4.689395
2°	10	4.396932	10	4.325552
3°	3	3.777874	16	3.046642
4°	22	3.368973	22	2.944073
5°	16	3.220254	3	2.891564
6°	13	2.798937	13	2.426174
7°	1	2.770266	1	2.404533
8°	44	2.455725	24	2.372869
9°	42	2.427343	44	2.157248
10°	24	2.31814	42	2.116283
41	70	-0.46171	33	-0.37526
42	46	-0.51650	67	-0.44026
43	36	-0.63912	36	-0.44422
44	56	-0.74286	37	-0.53856
45	33	-0.78326	11	-0.81214
46	37	-0.87202	56	-0.82456
47	49	-0.88996	23	-0.9801
48	34	-0.97329	49	-0.98943
49	11	-1.07717	70	-0.99369
55°	21	-1.51128	26	-1.4494
56°	55	-1.9178	55	-1.47395
57°	63	-2.07638	19	-1.55928
58°	38	-2.07973	38	-1.57042
59°	26	-2.12831	27	-1.6159
60°	27	-2.13295	35	-1.78698
61°	6	-2.14522	29	-1.98765
62°	19	-2.15514	5	-2.02415
63°	35	-2.16087	21	-2.02875
64°	5	-2.16415	63	-2.04025
65°	61	-2.28857	6	-2.29041
66°	29	-2.31548	58	-2.34145
67°	43	-2.57208	62	-2.39024
68°	62	-2.73176	43	-2.61983
69°	58	-2.77667	59	-2.6578
70°	59	-3.09553	61	-2.75412

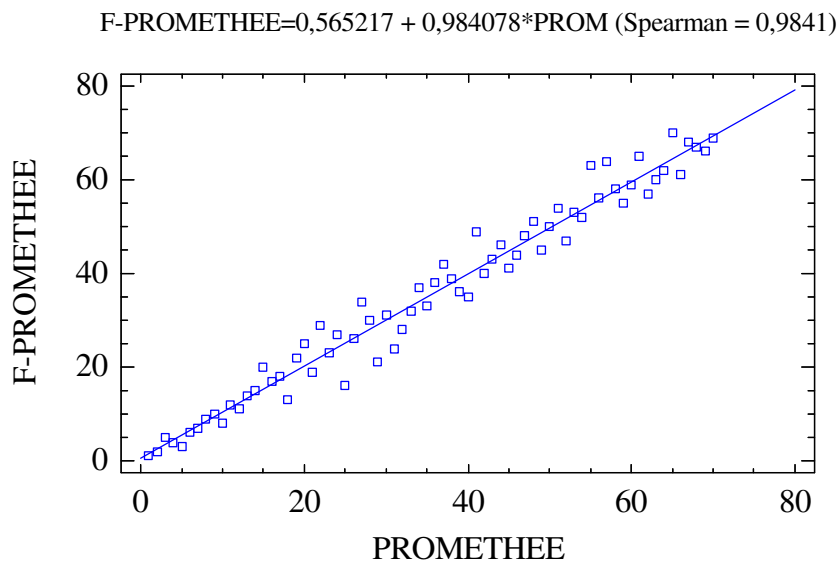
Neste cenário, doze clientes, dos quais alguns estão destacados na tabela 4.1, mantiveram as mesmas colocações nas duas metodologias.

Através do gráfico 4.1, que apresenta a dispersão dos resultados obtidos nas duas metodologias, verifica-se que há forte correlação linear entre o PROMETHEE e o F-PROMETHEE. O coeficiente de correlação calculado foi o de Spearman, indicado para estudar a correlação entre classificações, dado por:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Onde d_i é a diferença entre os postos de cada elemento segundo cada classificação (COSTA NETO, 2002, p.186)

Gráfico 4.1 – Gráfico de Dispersão entre PROMETHEE e F-PROMETHEE (cenário 1)

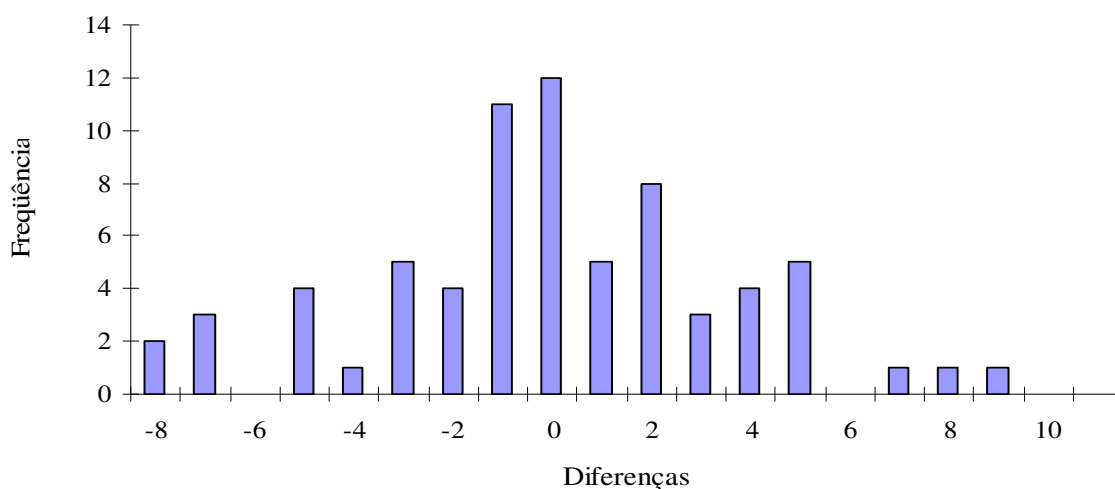


Entretanto, ocorreram diferenças pontuais consideráveis. Esses deslocamentos foram avaliados calculando-se as diferenças entre **todas as ordenações** (Anexo 5) nos dois métodos, isto é, a posição do PROMETHEE clássico subtraída da posição do F-PROMETHEE. No gráfico 4.2 é mostrado o histograma da distribuição de frequência dessas diferenças. Verifica-se que a grande maioria dos clientes teve alteração de até uma posição.

As maiores alterações ocorreram para os clientes 21 e 70 que caíram 8 posições cada um e o cliente 4 que subiu 9 posições no F-PROMETHEE. Dependendo da restrição imposta pelo Banco quanto ao número de clientes que deverão ser contemplados com o

empréstimo, essas alterações podem acarretar sérias implicações. Em uma situação em que haja capital suficiente para fornecer empréstimo para 55 clientes, por exemplo, o cliente 21, classificado no PROMETHEE na quinquagésima quinta posição, perderia o benefício, segundo a ordenação obtida no F-PROMETHEE.

Gráfico 4.2 – Histograma da diferença entre as ordenações obtidas no PROMETHEE e F-PROMETHEE (cenário1)



No segundo cenário em que maior importância é dada ao critério geração de emprego (8), seguido da capacidade empreendedora (3) e infra-estrutura (7), mesmo com a alteração no vetor dos pesos, os clientes 3, 8, 10, 16 e 22 mantiveram-se nas cinco primeiras posições (tabela 4.2).

Isso se deve ao fato desses clientes, de maneira geral, possuírem índices melhores em todos os critérios quando comparados aos demais. Assim, independentemente do cenário e da metodologia utilizada devem ser contemplados com o empréstimo.

Assim como no cenário anterior há forte correlação entre as ordenações obtidas nas duas metodologias (gráfico 4.3). Entretanto, o índice de Spearman é significativamente menor devido à maior importância atribuída aos critérios difusos.

Para as alterações de posição observa-se no histograma apresentado no gráfico 5.4 que neste cenário 06 clientes mantiveram suas posições em relação ao PROMETHEE clássico.

Tabela 4.2 – Ordenação de alguns clientes obtidas no PROMETHEE e F-PROMETHEE no segundo cenário

Ordem	PROMETHEE		F-PROMETHEE	
	Cliente	ϕ	Cliente	ϕ
1°	8	0.472418	10	0.430848
2°	10	0.436826	8	0.417032
3°	3	0.410241	3	0.301159
4°	22	0.306721	16	0.271404
5°	16	0.298115	22	0.247007
6°	13	0.276472	24	0.246578
7°	42	0.272436	13	0.230528
8°	1	0.254758	42	0.227121
25°	68	0.049188	4	0.035697
26°	47	0.035263	68	0.030103
27°	40	0.026979	45	0.030055
28°	39	0.010044	30	0.018843
29°	60	-0.00423	17	0.016314
30°	31	-0.00776	40	0.0106
31°	17	-0.01262	54	0.003139
32°	20	-0.01519	47	-0.00212
33°	30	-0.01551	39	-0.00573
34°	70	-0.01647	14	-0.01189
35°	64	-0.03824	46	-0.01616
36°	49	-0.04026	60	-0.01616
37°	34	-0.04419	9	-0.02436
38°	56	-0.04446	15	-0.03006
39°	9	-0.04531	31	-0.03147
40°	46	-0.04733	64	-0.0418
41°	67	-0.04837	36	-0.04229
42°	15	-0.05108	33	-0.04871
43°	4	-0.05131	56	-0.05786
44°	54	-0.05592	49	-0.05961
45°	21	-0.05982	67	-0.07038
46°	14	-0.06741	70	-0.07903
47°	36	-0.07323	11	-0.08188
48°	2	-0.08573	52	-0.08481
49°	52	-0.0917	34	-0.08718
66°	62	-0.24856	62	-0.20016
67°	29	-0.25067	43	-0.20175
68°	19	-0.2779	19	-0.20176
69°	58	-0.28267	58	-0.22413
70°	59	-0.30997	59	-0.2518

Gráfico 4.3 – Gráfico de Dispersão entre PROMETHEE e F-PROMETHEE (cenário 2)

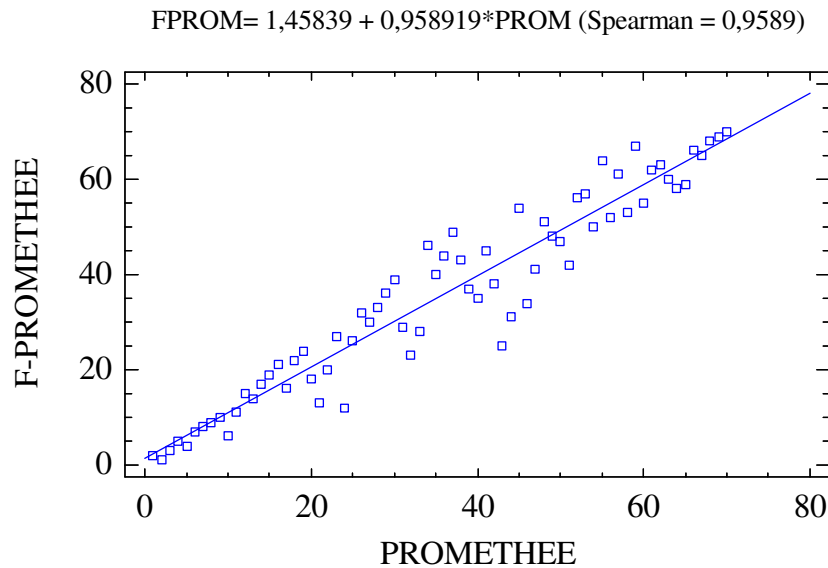
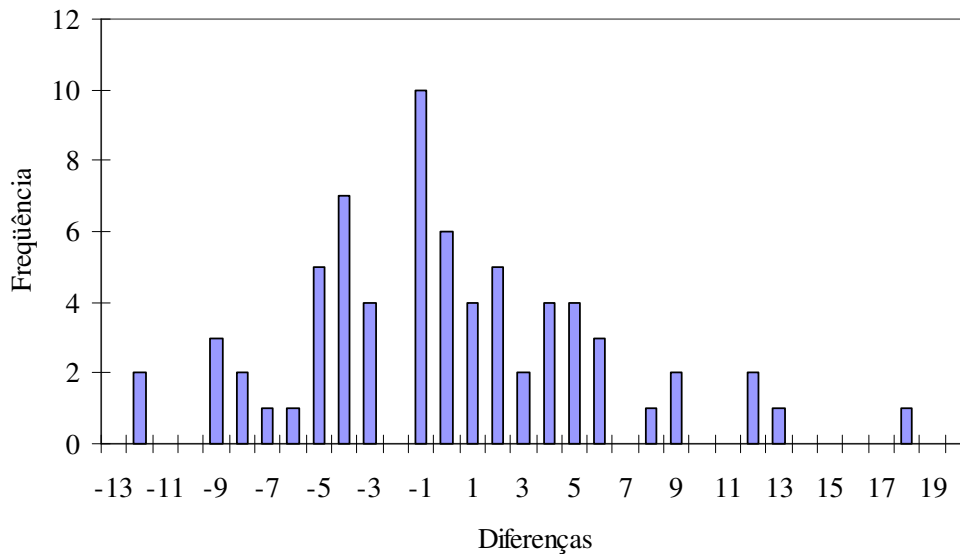


Gráfico 4.4 – Histograma da diferença entre as ordenações obtidas no PROMETHEE e F-PROMETHEE (cenário 2)



As maiores alterações ocorreram na ordenação dos clientes 34 e 70 que caíram 12 posições no F-PROMETHEE e o cliente 4 que subiu 18 posições.

A mudança de posição de um cliente é influenciada pela alteração de posição dos demais clientes. Entretanto, os casos mais extremos devem ser analisados.

A fim de levantar quais critérios difusos mais influenciaram nestas alterações foram realizadas, para este cenário, simulações incorporando um critério difuso de cada vez ao F-

PROMETHEE e mantendo os demais critérios representados por números clássicos. Cada ordenação obtida foi comparada à ordenação resultante do PROMETHEE clássico através do cálculo do índice de correlação de Spearman (tabela 4.3).

Tabela 4.3 – Coeficientes de correlação de Spearman para as ordenações

CRITÉRIO DIFUSO	Spearman
Capacidade Empreendedora (3)	0,9973
Patrimônio (4)	0,9998
Localização (6)	0,9986
Infra-estrutura (7)	0,9886
Geração de Emprego (8)	0,9637
Comprometimento do CCL (9)	0,9996
Comprometimento da RL (11)	0,9996

O resultado das correlações indica que os critérios geração de emprego e infra-estrutura foram os que mais contribuíram para as diferenças nas ordenações do PROMETHEE e F-PROMETHEE. Esses critérios são os primeiros colocados na ordem de importância obtida pelo sistema de inferência, conforme apresentado na seção 3.2.1 (tabela 3.5). Além dos pesos dos critérios a variabilidade dos dados também pode influenciar na ordenação. Para cada um dos critérios difusos foi calculado o coeficiente de variação (cv) das avaliações de entrada apresentadas no anexo 2. O coeficiente de variação é definido como o quociente entre o desvio padrão e a média: $cv(X) = \frac{S_x}{\bar{X}}$. A tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 4.4 – Coeficientes variação dos dados de entrada nos critérios difusos

CRITÉRIO DIFUSO	Coeficiente de Variação (%)
Capacidade Empreendedora (3)	23
Patrimônio (4)	103
Localização (6)	26
Infra-estrutura (7)	12
Geração de Emprego (8)	103
Comprometimento do CCL (9)	64
Comprometimento da RL (11)	42

Nesses critérios a alteração de posição do cliente número 4 foi ocasionada pelo fato da preferência nula no PROMETHEE clássico passar a ser uma preferência relativa no F-PROMETHEE. Isso ocorreu no caso em que as diferenças $\tilde{d}(a_r, a_s)$ resultaram em números difusos cujos vértices $(m+\beta)$ estavam inseridos na região de preferência relativa. No oitavo critério, por exemplo, a preferência do cliente a_4 em relação ao cliente a_8 passou de $P_8(a_4, a_8) = 0$ no PROMETHEE para $\tilde{P}_8(a_4, a_8) = 0.3$ no F-PROMETHEE.

Ao compararmos o cliente número 4 com o cliente número 3 cuja posição é a mesma nas duas metodologias, verifica-se que houve no F-PROMETHEE um decréscimo do índice de preferência ponderada desse cliente em relação ao cliente 4, ou seja, $\pi(3,4) = 0.55$ passou para $\tilde{\pi}(3,4) = 0.44$. Já o percentual de preferência do cliente 4 em relação ao cliente 3, que foi de $\pi(4,3) = 0.26$ no PROMETHEE aumentou para $\tilde{\pi}(4,3) = 0.35$ no F-PROMETHEE. Essas alterações combinadas com os percentuais de preferência dos demais clientes em relação ao cliente 4 resultaram na mudança de seu desempenho geral.

Para os clientes 34 e 70 que caíram de posição, o índice Yager da preferência estrita diminuiu nos critérios difusos em que o número $\tilde{d}(a_r, a_s)$ não estava totalmente inserido na região de preferência estrita. O valor da função de preferência no critério geração de emprego passou de $P_8(a_{34}, a_4) = 1$ no PROMETHEE para $\tilde{P}_8(a_{34}, a_4) = 0.67$ no F-PROMETHEE.

Em uma análise complementar, foi verificada a sensibilidade de cada metodologia à alteração nos pesos. Através dos gráficos 4.5 e 4.6 verifica-se que apenas 14 clientes no PROMETHEE clássico e 4 clientes no F-PROMETHEE, conservaram suas posições. Isso porque que o resultado da ordenação é fortemente influenciado pelo grau de importância dado ao critério. Se consideramos alterações de até duas posições, o F-PROMETHEE é mais sensível à mudança nos pesos em relação ao PROMETHEE clássico, já que ocorreram 14 alterações na primeira metodologia e 36 na segunda.

Gráfico 4.5 – Histograma da diferença entre as ordenações dos clientes para a metodologia PROMETHEE nos cenários 1 e 2

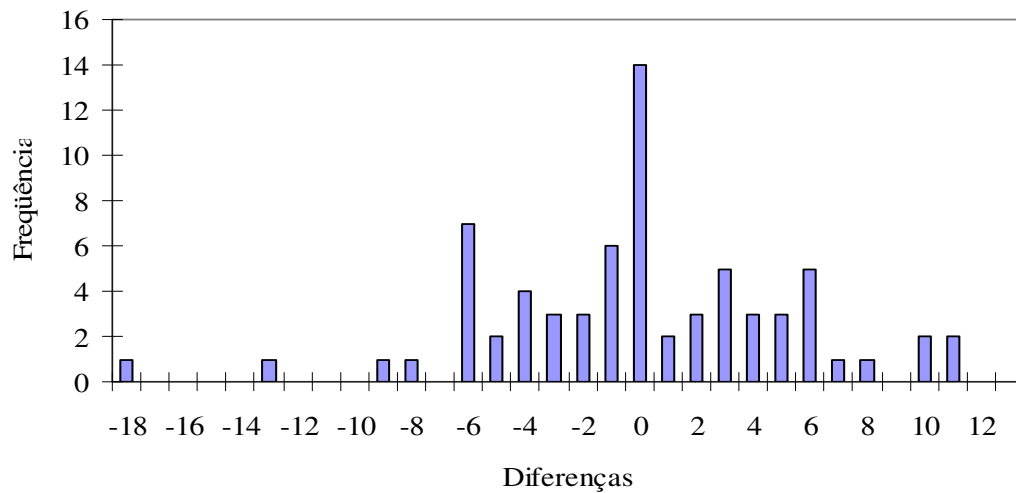
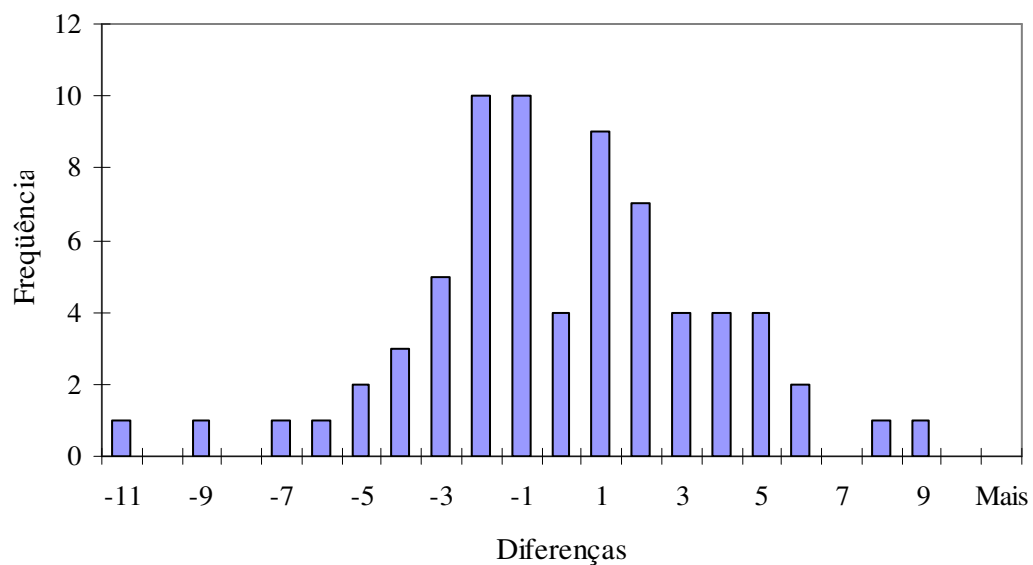


Gráfico 4.6 – Histograma da diferença entre as ordenações dos clientes para a metodologia F-PROMETHEE nos cenários 1 e 2



5 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Inicialmente, conclui-se que a metodologia PROMETHEE é uma ferramenta que pode ser utilizada nas tomadas de decisão referentes às linhas de empréstimos do Banco Social do Paraná. Isso porque essa metodologia é bem adaptada a problemas em que um número finito de alternativas deve ser ordenado, considerando critérios conflitantes. O uso do PROMETHEE é uma tentativa de sistematizar o processo de escolha dos proponentes ao crédito, tornando-a mais impessoal e técnica. Essa classificação é mais interessante na situação em que o montante disponível para os empréstimos é limitado, podendo ser realizada periodicamente, apenas alimentando o banco de dados da entidade a cada entrada de um novo cliente. Uma variável a ser considerada é o tempo de permanência desse cliente no banco de dados, já que as informações levantadas nos questionários e nas avaliações do agente de crédito podem tornar-se obsoletas.

Outros métodos de sobreclassificação como o AHP e ELECTRE também são adequados ao problema. A escolha do método é, antes de mais nada, uma questão de conforto e confiança por parte do decisor que deseja utilizar a ferramenta de apoio. Entretanto, o PROMETHEE destaca-se pela sua simplicidade, que lhe confere rapidez computacional, e pela sua clareza já que, apesar da dificuldade, poucos parâmetros devem ser estabelecidos e todos têm significado real. Outra vantagem pode ser o fato do método ser parcialmente compensatório, isto é, o mau desempenho em um critério não é totalmente encoberto pelo alto desempenho em outro critério.

A análise multicritério através do PROMETHEE pode ser estendida ao tratamento de dados que carregam imprecisões. Neste trabalho, o tratamento das incertezas, representadas por números difusos triangulares, foi realizado sem que ocorresse modificação na estrutura original dos cálculos. Apenas a adaptação da matemática para esses números ao desenvolvimento do algoritmo do PROMETHEE clássico foi necessária.

Além do tratamento das avaliações de entrada do PROMETHEE como dados imprecisos, a inclusão da teoria de conjuntos difusos ao problema multicritério torna-se atraente devido à dificuldade na escolha dos parâmetros de decisão, que são os pesos dos critérios e os limites de indiferença (q) e preferência (p). Em especial, a representação dos pesos como variáveis lingüísticas vêm auxiliar o decisor já que são estabelecidos em linguagem natural. Através da construção do sistema de inferência é possível traduzir essas informações verbais imprecisas para uma forma numérica utilizável pelo computador.

Na aplicação proposta neste trabalho, os parâmetros (p) e (q) não foram considerados como números difusos a fim de evitar a multiplicação entre esses números. Isso porque a multiplicação entre os números difusos triangulares não necessariamente gera um número triangular. Neste caso, é possível que informações relevantes sejam perdidas tornando o processo mais obscuro.

Ao compararmos as duas metodologias, verificou-se que, para o conjunto de dados tratados, há diferenças pontuais nas ordenações obtidas que podem penalizar alguns clientes. Nas duas metodologias houve alteração nas ordenações quando o vetor dos pesos foi modificado, entretanto, o F-PROMETHEE mostrou-se mais sensível à mudança de cenário.

De forma geral, os resultados nas duas metodologias são altamente relacionados, conforme verificado através dos índices de correlação de Spearman calculados. A vantagem do F-PROMETHEE é o fato de levar em consideração a imprecisão dos dados de entrada, inerente ao problema tratado e permitir entradas através de informações lingüísticas.

Como sugestões de novos trabalhos a serem somados aos resultados já obtidos destacam-se:

- Utilizar metodologias que fazem parte do “estado da arte” da análise de crédito como Análise de Discriminante Múltipla e *Data Mining*, a fim de comparar os resultados obtidos;
- Utilizar as metodologias citadas: AHP e ELECTRE nas versões clássica e difusa;
- Avaliar a inclusão de novos critérios ao problema; e
- Representar alguns critérios como: capacidade empreendedora e localização na forma de variáveis lingüísticas

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBALHO, V. M. S. **Sistemas Baseados em Conhecimento e Lógica Difusa para Simulação do Processo Chuva-Vazão**. Rio de Janeiro, 2001, 104f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- BRANS, J. P.; MARESCHAL, B.; VINCKE, P. *How to select and how to rank projects: The PROMETHEE Method*. *European Journal of Operational Research*, 24, 228-238.1986.
- COSTA, N. **Estatística**. 2ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2002.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. *Operations on Difuso Numbers*. *International Journal of Systems Science*, v. 9, n. 06, 613-626, 1978.
- FILEV, D., P.; YAGER, R. R. *Operations on Difuso Nunbers via Difuso Reasoning*. *Difuso Sets and Systems*, 91, 137-142, 1997.
- GELDERMANN, J.; SPENGLER, T.; RENTZ, O. *Difuso Outraking for Environmental Assessment. Case Study: Iron and Steel Making Study*. *Difuso Sets and Systems*, 115, 45-65, 2000.
- GOICOECHEA, A; HANSEN, D. R; DUCKSTEIN. L. *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*. New York: Wiley, 1982.
- GOMES, L. F. A. M.; GOMES, C. F. S.; ALMEIDA, A. T. **Tomada de Decisão Gerencial–Enfoque Multicritério**. São Paulo: Atlas, 2002.
- GOUMAS, M.;LYGEROU, V. *An Extension of the PROMETHEE Method for Decision Making in Difuso Environment: Ranking of Alternative Energy Exploration Projects*. *European Journal of Operational Research*, 123, 606-613, 2000.
- LOPES, M.R.C.; CAVASSIN, S. A., VOLPI, N. M. P. **Aplicações da Metodologia PROMETHEE na Tomada de Decisão**. Seminário de Pesquisa e Semana de Iniciação Científica, 16, 2004, Guarapuava. **Anais...** Guarapuava: UNICENTRO, 2004.
- MATTOS, M. C.; NASSARZ, S. M.; SOUZA, E. C.; STRADA, P. F. **Raciocínio Difuso no Desenvolvimento de um Sistema para Controle da Assistência Respiratória em Neonatos**. Disponível em: < [ttp://www.hu.ufsc.br/IX_CIBS/trabalhos/arquivos/214.pdf](http://www.hu.ufsc.br/IX_CIBS/trabalhos/arquivos/214.pdf)> Acesso em: 01 fevereiro 2005.
- MUZIMOTO, M. *Improvement of fuzzy control methods*. In: LI, H.; GUPTA, M. *Fuzzy Logic and Intelligent Systems*. USA:Hardcover, 1995, p.1-17.
- NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. *A fisrt course in difuso logic*. USA, CRC PRESS, 1997.

- ORTEGA, N. R. S. **Aplicação da Teoria de Conjuntos Difuso a Problemas da Biomedicina**. 2001,152p. Tese (Doutorado em Ciências). Instituto de Física, Universidade de São Paulo.
- PREDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An Introduction to Difuso Sets: Analysis and Design*. USA: 1998.
- RADOJEVIC, D.; PETROVIC, S. *A Difuso Approach to Preference Structure in Multicriteria Ranking*. *International Transactions in Operational Research*, v. 04, n. 5/6, 419-430, 1997.
- RIBACIONKA, F. **Sistemas Computacionais Baseados em Lógica Difuso**. São Paulo, 1999. 115f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Universidade Mackenzie.
- SAKAWA, M. *Difuso Sets and Interactive Multiobjective Optimizator*. New York: Plenum Press, 1993.
- SHAW, I.;SIMÕES, M. **Controle e Modelagem Fuzzy**. 1.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.
- TANSCHKEIT, R.. **Lógica Difusa, Raciocínio Aproximado e Mecanismos de Inferência**. In: Encontro Nacional de Automática, 17, 1998, Natal. **Anais...**Natal, 1998 v.1, p.46-55.
- TENO, J.F.; MARESCHAL, B. *An Interval Version of PROMETHEE for the Comparison of Building Products Design with Ill-Defined Data on Environmental Quality*. *European Journal of Operational Research*, 109, 522-529, 1997.
- ZADEH, L. A.; BELLMAN, R. E. *Decision-Making In A Difuso Enviroment*. *Management Science*, Usa, v.17, n.4, 141-164, dez.1970.
- WEBER, R. **Sistema Especialista Difuso para Análise de Crédito**. 1993,78p. Tese (Doutorado em Engenharia). Universidade Federal de Santa Catarina.
- WESTON, J. F.; BRIGHAM, E. F. **Fundamentos da Gestão Financeira**. Tradução de Sidney Stancatti. São Paulo: Makron, 2000.

ANEXOS