

Fábio Alligueri Dos Santos Silva

# Formação de Padrões Espaciais em Osciladores Acoplados

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

**Curitiba**

2010

# Agradecimentos

A Deus por ter criado um mundo cognoscível e por ter guiado e iluminado minha vida.

À minha mãe, Edna Sueli, por tudo o que ela me concedeu.

À minha esposa, Mirian Raquel, pela paciência, apoio, companherismo e incentivo.

Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação, dedicação e paciência.

Ao professor Dr. Sergio Lopes, pela colaboração.

Ao professor Dr. Carlos de Carvalho, pelo suporte computacional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos os amigos e colegas de pós-graduação.

Ao restante da minha família e amigos, que mesmo não participando diretamente deste trabalho fazem tudo valer a pena.

*Nunca se afaste de seus sonhos, pois se eles se forem, você continuará vivendo, mas terá deixado de existir.*

Charles Chaplin

## Resumo

Neste trabalho nós investigamos numericamente e analiticamente a formação de padrões espaciais em redes unidimensionais de osciladores não-lineares acoplados. O acoplamento entre os osciladores é não-local, ou seja, são consideradas as interações entre osciladores de acordo com sua distância mútua na rede. Variando um parâmetro de alcance nós recaímos, como casos particulares, nos casos de acoplamento difusivo (local) e de campo médio (global). Inicialmente estudamos sob que condições um padrão espacialmente homogêneo torna-se não homogêneo (instabilidade de Turing), usando a teoria linear da estabilidade de modos normais no espaço de Fourier. Os padrões espaciais propriamente ditos surgem da saturação dessa instabilidade quando consideramos as não-linearidades. Como exemplo, investigamos a formação de padrões numa rede de equações de Meinhardt-Gierer acopladas, que descrevem a interação entre duas espécies químicas, um ativador e um inibidor, o primeiro sofrendo um processo auto-catalítico.

# Abstract

In this work we investigated numerically and analytically the formation of spatial patterns in one-dimensional lattices of coupled nonlinear oscillators. The coupling among oscillators is non-local, i.e. we considered the interactions between a pair of oscillators with respect to their mutual distance along the lattice. On varying a range parameter we obtained, as particular cases, the diffusive (local) and mean-field (global) couplings. Initially we studied under which conditions a spatially homogeneous pattern becomes non-homogeneous (Turing instability), using the linear stability theory for normal modes in Fourier space. The spatial patterns themselves arise from the saturation of this instability when we consider the nonlinearities. As an example, we investigated pattern formation in a lattice of coupled Meinhardt-Gierer equations, which describe the interaction between an activator and an inhibitor chemical species, the former undergoing an auto-catalytic process.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 Teoria de Turing</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Instabilidade de Turing . . . . .	8
2.2.1 Análise de Estabilidade e Linearização . . . . .	11
<b>3 Acoplamento Não-Local</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução . . . . .	20
3.2 Acoplamento do Tipo lei de Potência . . . . .	21
3.2.1 Casos Particulares . . . . .	23
3.3 Análise de Estabilidade . . . . .	24

3.3.1	Sistema Isolado . . . . .	25
3.3.2	Sistema Acoplado . . . . .	25
3.4	Propriedades Básicas da Função $\sigma(s, \alpha, N)$ . . . . .	27
3.4.1	Limites de $\sigma(s, \alpha, N)$ . . . . .	28
3.5	Casos Particulares e a Função $\sigma(s, \alpha, N)$ . . . . .	29
3.5.1	Caso Local . . . . .	30
3.5.2	Caso Global . . . . .	30
3.6	Instabilidade de Turing e Formação de Padrões . . . . .	32
3.6.1	Caso Local . . . . .	36
3.6.2	Caso Global . . . . .	37
3.6.3	Caso $\alpha=1$ . . . . .	39
3.6.4	Área no Espaço de Parâmetros $(P, Q)$ . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Modelo Não-Linear para Reação Química</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Equações de Meinhardt-Gierer . . . . .	45
4.3	Análise de Estabilidade . . . . .	48
4.3.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	48

4.3.2	Linearização . . . . .	49
4.3.3	Equivalência com o Sistema Linear Genérico . . . . .	51
4.4	Condições de Instabilidade para as Equações de Meinhardt-Gierer . .	53
4.4.1	Caso geral . . . . .	53
4.4.2	Caso Local . . . . .	54
4.4.3	Caso Global . . . . .	54
4.4.4	Caso $\alpha = 1$ . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Simulações Numéricas do Modelo de Meinhardt-Gierer</b>	<b>56</b>
5.1	Introdução . . . . .	56
5.2	Método . . . . .	57
5.2.1	Exemplo 1 . . . . .	58
5.2.2	Exemplo 2 . . . . .	58
5.3	Caso Local . . . . .	60
5.3.1	Exemplo 1 . . . . .	60
5.3.2	Exemplo 2 . . . . .	63
5.4	Caso Global . . . . .	65
5.4.1	Exemplo 1 . . . . .	65

5.4.2	Exemplo 2 . . . . .	68
5.5	Caso $\alpha = 1$ . . . . .	69
5.5.1	Exemplo 1 . . . . .	69
5.5.2	Exemplo 2 . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>76</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>
	<b>Apêndice A: Estabilidade Linear e Linearização</b>	<b>83</b>
.1	Estabilidade Linear . . . . .	83
.1.1	Classificação dos Pontos de Equilíbrio . . . . .	85
.2	Linearização . . . . .	86

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de formação de padrões na pelagem de animais - figura (a) e (b) - e na escama de peixes, figura (c), figuras retiradas de [8]. . . . .	3
1.2	Superfícies de conchas também podem apresentar a formação de padrões, figuras retiradas de [11]. . . . .	4
1.3	O tema formação de padrões também pode ser encontrado no contexto da química. Um exemplo é a reação de Belousov-Zhabotinsky, nesta reação é possível observar a formação de padrões espaciais espiralados, figura retirada de [11]. . . . .	5
2.1	A discretização é feita dividindo o espaço $N$ em intervalos iguais com comprimento $\Delta$ (esta figura foi adaptada de [8]). . . . .	8
2.2	Representação de uma rede com acoplamento difusivo, cada sítio interage unicamente com seus vizinhos. . . . .	11
2.3	Representação gráfica de um ponto de sela; somente duas direções no espaço de fase são estáveis. . . . .	13

2.4	Representação de uma rede com acoplamento local e condições de contorno periódicas, as setas representam as conexões entre os elementos da rede. . . . .	14
2.5	Representação gráfica das condições de instabilidade, com escolhas adequadas dos parâmetros é possível obter a instabilidade de Turing. . . . .	18
2.6	Perfil de quais modos normais são instáveis e quais são estáveis na presença de acoplamento. . . . .	19
3.1	Representação do acoplamento global de uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, apenas as ligações do sítio 1 são mostradas. . . . .	22
3.2	Função $\sigma$ em função da variável $s$ para vários valores de $\alpha$ , com o aumentar do alcance do acoplamento a curva $\sigma(s)$ deixa de ser uma constante e se aproxima de uma função senoidal. . . . .	27
3.3	Função $\sigma_0$ em função do número de sítios que compõe a rede $N$ . . . . .	31
3.4	Máximo de $\sigma - \sigma_{max}$ - em função do alcance do acoplamento $\alpha$ para vários valores de $N$ . . . . .	33
3.5	Máximo de $\sigma - \sigma_{max}$ - em função do número de células que compõe o sistema ( $N$ ) para vários valores de $\alpha$ . . . . .	34

3.6	Representação dos modos normais que satisfazem a relação (3.36) para $\alpha$ pequeno, modos incluídos na área sombreada são instáveis na presença do acoplamento. Nesta configuração existe uma grande sensibilidade em relação aos valores de $\sigma_+$ e $\sigma_-$ . Na figura (a) muitos modos são estáveis, ao contrário a figura (b), na qual a maior parte se encontra em um estado instável. . . . .	35
3.7	Representação dos modos normais que satisfazem a relação (3.36) para $\alpha$ grande, modos incluídos na área sombreada são instáveis na presença do acoplamento. É possível observar que para as duas situações escolhidas o número de modos normais instáveis e estáveis são comparáveis.	36
3.8	Representação gráfica do número de modos normais que satisfazem a condição (3.36). Se esta relação é atendida então todos os modos normais (com exceção do modo $s=0$ ) são instáveis - figura (a); caso contrário todos os modos normais são estáveis - figura (b). . . . .	38
3.9	Condições que definem a instabilidade de Turing no espaço de parâmetros para o caso de acoplamento global, $N = 101$ . . . . .	39
3.10	Condições que definem a instabilidade de Turing no espaço de parâmetros para o caso $\alpha = 1$ , $N = 101$ . . . . .	40
3.11	Representação dos modos normais instáveis na presença de acoplamento para o caso $\alpha = 1$ (os quais se encontram na área sombreada). O número de modos instáveis ou estáveis é extremamente dependente do valor de $\sigma_+$ e $\sigma_-$ , se comparado com o caso local. Na figura (a) os valores destes parâmetros estabelecem um situação com poucos modos normais instáveis. Por outro lado na figura (b) o número de modos em um estado instável é maior. . . . .	41

3.12	Comparação, no espaço de parâmetros, das condições necessárias para se obter a instabilidade de Turing para os casos particulares calculados. A seta indica o aumento da área de instabilidade, o qual acontece quando majoramos o alcance do acoplamento $\alpha$ . . . . .	43
4.1	Diagrama explicativo da dinâmica das equações de Meinhardt-Geirer.	47
4.2	Condições obtidas da análise de estabilidade do ponto de equilíbrio $(a_1, h_1)$ . . . . .	52
5.1	Para a primeira configuração o ponto de equilíbrio $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$ é um foco estável. . . . .	59
5.2	Para a segunda configuração o ponto fixo $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$ novamente é um foco estável. . . . .	59
5.3	Representação gráfica da situação de estabilidade no sistema ( $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,019$ ), a perturbação adicionada é amortecida e a rede assume uma configuração uniforme. Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor.	61
5.4	Para $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,016$ a rede é instável. Porém seu estado, no espaço de parâmetros, está localizado próximo á fronteira de estabilidade. Nesta situação a perturbação adicionada se difunde pelo sistema ocasionando pequenas oscilações nos valores de $a$ (figura (a)) e $h$ (figura (b)). . . . .	61

5.5	Para $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,005$ o estado da rede, no espaço de parâmetros, se encontra mais afastado da fronteira de estabilidade. Aqui a perturbação inicial se espalha pelo sistema ocasionando grandes oscilações nos valores de $a$ (figura (a)) e $h$ (figura (b)). . . . .	62
5.6	Para a segunda configuração aplicada ao caso local, os valores $D_h = 2$ e $D_a = 0,08$ fornecem uma situação de estabilidade para a rede, representada aqui pela variação temporal da concentração do ativador.	64
5.7	Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso difusivo aplicado ao exemplo 2. Nesta situação a perturbação no estado uniforme origina grandes oscilações nos valores de $a$ (figura (a)) e $h$ (figura (b)). . . . .	64
5.8	Condição que define a instabilidade de Turing no espaço $(D_a, D_h)$ para o caso de acoplamento global. . . . .	66
5.9	Representação gráfica de uma situação de estabilidade - plotamos apenas a variação temporal do ativador - conseguida ao se aplicar a primeira configuração ao caso global ( $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,009$ ). . . . .	66
5.10	É possível obter a instabilidade de Turing através da aplicação da primeira configuração ao caso global - $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,005$ . Entretanto, neste caso não existe a formação de padrões. Na figura (a) e (b) mostramos a evolução temporal do ativador e do inibidor respectivamente. Para esta situação a perturbação adicionada ao estado de equilíbrio aumenta exponencialmente com o tempo, ocasionando uma divergência no sistema. . . . .	67
5.11	Condição que define a instabilidade de Turing no espaço $(D_a, D_h)$ para o caso de acoplamento global - conjunto de valores 2. . . . .	68

5.12	Se ao aplicar o segundo conjunto de valores ao caso global considerarmos $D_h = 2$ não será possível obter nem mesmo a instabilidade de Turing, isto é, o sistema sempre será estável na presença do acoplamento; como exemplifica a figura acima, na qual $D_a = 0,05$ - mostramos apenas a variação temporal da concentração do inibidor. . . . .	69
5.13	Situação de estabilidade para o caso $\alpha = 1$ ; usamos o exemplo 1, $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,02$ - plotamos apenas a variação temporal de $a$ . . .	70
5.14	Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso particular $\alpha = 1$ aplicado ao primeiro conjunto de valores, $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,01$ , na figura (a) e (b) mostramos a evolução temporal do ativador e do inibidor respectivamente. . . . .	70
5.15	Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso particular $\alpha = 1$ aplicado ao exemplo 1 ( $D_h = 0,2$ e $D_a = 0,005$ ). . . . .	71
5.16	Na figura acima mostramos a situação na qual fazemos $\alpha = 1$ no exemplo 1 ( $D_h = 0,2$ e $D_h = 0,005$ ). Neste caso há um grande número de modos normais instáveis (que se encontram na área mais escura), conseqüentemente também poderemos ter uma grande quantidade de sítios em um estado de instabilidade. . . . .	72
5.17	Situação de estabilidade resultante do caso $\alpha = 1$ combinado com o segundo conjunto de parâmetros - utilizamos $D_h = 2$ e $D_a = 0,08$ e mostramos apenas a variação temporal de $h$ . . . . .	73
5.18	Situação de instabilidade conseguida com o exemplo 2 aplicado ao caso $\alpha = 1$ , usamos $D_h = 2$ e $D_a = 0,0605$ . Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor. . . . .	73

5.19	<p>Outra situação de instabilidade conseguida com o segundo conjunto valores aplicado ao caso <math>\alpha = 1</math>, usamos <math>D_h = 2</math> e <math>D_a = 0,04</math>. Aqui o sistema está afastado da fronteira de estabilidade, o que resulta em padrão final diferente em relação ao caso anterior. Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor. . . . .</p>	74
5.20	<p>Mostramos na figura acima a segunda configuração aplicada ao caso <math>\alpha = 1</math> (<math>D_h = 2</math> e <math>D_a = 0,04</math>). Nesta situação, para qual <math>\sigma_+ = 11,4</math> e <math>\sigma_- = 0,54</math>, existe uma proporcionalidade no número de modos estáveis e instáveis (que se encontram na área mais escura) no sistema. Nossa hipótese é que consequentemente também teremos uma certa proporcionalidade entre o número de sítios estáveis e instáveis na rede.</p>	75
1	<p>Diagrama das classificações de um ponto fixo em função do traço <math>T</math> e do determinante <math>\Delta</math> da matriz jacobiana. . . . .</p>	87

# Capítulo 1

## Introdução

Fenômenos nos quais ocorrem a formação de padrões são encontrados em inúmeros processos naturais. Podemos citar uma grande quantidade de contextos nos quais acontecem menção a este tema. Um exemplo é a biologia; em estudos de padrões na pelagem de animais (determinadas espécies são dotadas de padrões específicos de pelagem), na escamas de peixes e até mesmo na superfície de conchas [1] - figuras (1.1) e (1.2). Dentro da própria Biologia também podemos fazer alusão a investigações relacionadas à morfogênese, que é o estudo da forma dos seres vivos, na qual o fato de um simples embrião se transformar em uma estrutura complexa e auto-organizada, como um ser vivo, é algo ainda não totalmente esclarecido [2].

Do mesmo modo, fora da área biológica também existe grande interesse na pesquisa destes fenômenos. Um exemplo é o estudo de formação de padrões em reações químicas, como os que ocorrem na reação de Belousov-Zhabotinsky. Nesta reação vários elementos químicos são colocados a reagir espontaneamente, com o decorrer do tempo é possível observar a formação de padrões espaciais em meio à mistura [3], figura (1.3). Na realidade, o tema formação de padrões também ocorre em outras áreas, como medicina (estudo de padrões formado por tumores) [4], física (padrões em crescimento auto-organizado de cristais) [5], entre outras.

Na busca de repostas para as dúvidas levantadas pelo tema formação de padrões, em especial as relacionadas à morfogênese, Alan Turing foi o primeiro a propor um mecanismo que explicava o surgimento destes estados [6]. Ele sugeriu que a estrutura de um ser vivo era resultado de uma série de processos físico-químicos e, assim, através deste raciocínio criou uma teoria que esclarecia várias questões relacionadas ao surgimento de padrões complexos a partir de estruturas homogêneas.

Na teoria de Alan Turing, um sistema, no qual acontece uma determinada reação química, que se encontra em um estado inicialmente estável e uniforme; pode apresentar a formação de padrões [7]. Apesar de aparentar ser um juízo paradoxal, isto acontece - dadas certas condições - quando adicionamos uma interação difusiva entre as partes que compõe o sistema. Na realidade, esta interação origina uma quebra de estabilidade, chamada de instabilidade de Turing, no sistema. Deste modo,



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1: Exemplo de formação de padrões na pelagem de animais - figura (a) e (b) - e na escama de peixes, figura (c), figuras retiradas de [8].

devido ao surgimento desta instabilidade, qualquer perturbação no estado inicial se difundirá pelo sistema formando o estado heterogêneo final.

A teoria de Turing, apesar de ser uma teoria predominantemente linear, explicou alguns pontos básicos da formação de padrões. Com o passar do tempo modelos não lineares, que consideravam interações mais complexas entre os elementos químicos em questão, foram sugeridos. Um exemplo é o modelo denominado Brusselator sugerido por Prigogine para explicar qualitativamente a reação química de Belousov-Zabotinski [9]. Outro exemplo é o modelo para morfogênese proposto por proposto por Meinhardt-Gierer chamado de sistema ativador-inibidor [10], o qual inclusive será estudado neste trabalho.

Nesta dissertação, temos como objetivo aplicar as hipóteses centrais do mecanismo desenvolvido por Turing a uma interação mais geral do que a sugerida por ele. Na teoria de Turing é a difusão das espécies químicas através do sistema que ocasiona a transição na estabilidade. Aqui, propomos uma interação do tipo não local e estudamos as possibilidades de se obter a quebra de estabilidade e a formação de padrões nesta nova situação.

A interação não local que propomos utilizar no desenvolvimento desta dissertação é o acoplamento do tipo lei de potência. Neste tipo de interação o acoplamento entre os elementos que compõe o sistema depende da distância, sendo a

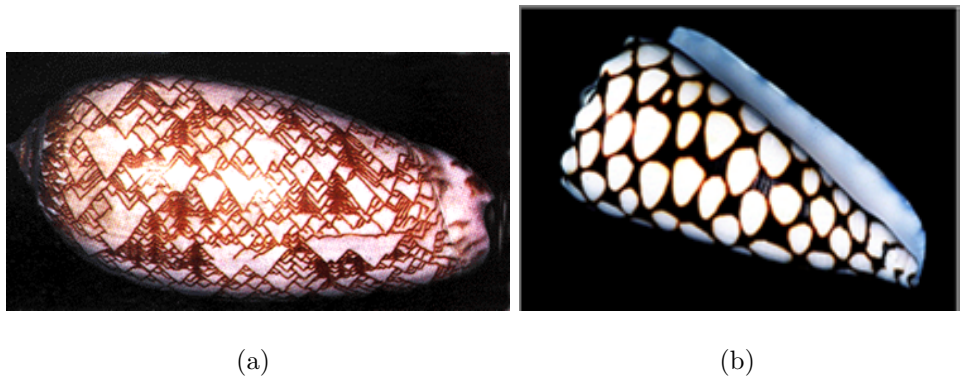


Figura 1.2: Superfícies de conchas também podem apresentar a formação de padrões, figuras retiradas de [11].



Figura 1.3: O tema formação de padrões também pode ser encontrado no contexto da química. Um exemplo é a reação de Belousov-Zhabotinsky, nesta reação é possível observar a formação de padrões espaciais espiralados, figura retirada de [11].

intensidade da interação variável e regulada por uma lei de potência [12, 13, 14]. Tal interação é encontrada, por exemplo, em arquiteturas de redes neurais [15] e em resultados da discretização de algumas equações diferenciais parciais de físico-química [16].

Assim primeiramente, no capítulo 2, desenvolvemos a teoria de Turing em um espaço unidimensional e discreto, apresentando, ao mesmo tempo, os seus argumentos principais. Essencialmente, estudamos o mecanismo de reação-difusão proposto por ele e escrevemos as condições que o sistema deve satisfazer para que ocorra a instabilidade de Turing e a formação de padrões.

No capítulo 3 aplicamos, através do uso das conjecturas de Turing, a teoria de formação de padrões para um acoplamento do tipo lei de potência. Mostramos que interação difusiva é um caso particular deste tipo de interação, e calculamos as condições necessárias para se obter a quebra de estabilidade e a formação do estado heterogêneo final.

A seguir, no capítulo 4, com a finalidade de demonstrar os resultados obtidos, aplicamos toda a teoria desenvolvida para caso não local a um modelo de reação química - conhecido como modelo de Meinhardt-Gierer. Neste capítulo, basicamente

provaremos que é possível escrever as condições necessárias à formação de padrões em função dos parâmetros do referido modelo.

Para corroborar nossas conclusões analíticas, no capítulo 5 simulamos numericamente uma rede unidimensional. Supomos, para realizar a simulação, que em cada célula desta rede ocorrerá uma reação química de Meihardt-Gierer; ao mesmo tempo assumimos que cada sítio irá interagir com os outros que compõe o sistema através de um acoplamento do tipo lei de potência.

Por fim, apresentamos as conclusões deste trabalho no capítulo 6.

# Capítulo 2

## Teoria de Turing

### 2.1 Introdução

Turing, através de sua pesquisa sobre morfogênese [2], foi um dos pioneiros na investigação da formação de padrões espaço-temporais. Ele propôs um mecanismo baseado na competição de duas espécies químicas que se difundem no espaço, estas chamadas de ativador e inibidor, que explicou a concepção destes estados.

Em sua teoria, Turing sugere que padrões espaciais estacionários surgem de um estado inicialmente homogêneo e estável. Estes estados heterogêneos nascem devido ao surgimento de uma instabilidade nas equações que governam as reações, a qual é causada pela difusão de partículas no sistema. Em outras palavras, ele se utiliza de dois processos distintos para explicar a formação de padrões. O primeiro é a própria dinâmica química que acontece isoladamente em cada ponto do espaço (o que deve ocorrer de forma não linear); e o segundo é o acoplamento entre estas reações através da difusão das partículas reagentes.

Através deste modelo, freqüentemente chamado de reação-difusão, é possível demonstrar que pequenas perturbações no estado uniforme do sistema - na qual os

valores das espécies químicas são constantes no espaço e no tempo - podem ser amplificadas tanto espacialmente quanto temporalmente (chegando a um ponto de saturação devido a não linearidade do sistema) formando o estado heterogêneo final. Esta instabilidade forçada pela difusão, conhecida por instabilidade de Turing, acontece para certos valores dos parâmetros como; por exemplo, coeficientes de difusão e reação, e será esclarecida a seguir.

## 2.2 Instabilidade de Turing

Para explicar, quantitativamente, a teoria criada por Turing consideraremos, inicialmente, que o espaço em que o modelo é desenvolvido é discreto e unidimensional, ou seja, o espaço é dividido em  $N$  partes igualmente espaçadas por um intervalo  $\Delta$ . Estas partes são representadas e analisadas como pontos geométricos. Adicionalmente a isto, associamos a cada sítio um índice  $K$  como mostrado pela figura (2.1), resultando, assim, em uma rede unidimensional.

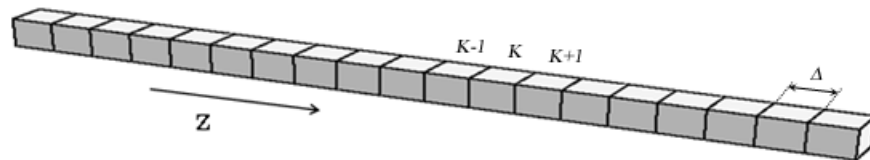


Figura 2.1: A discretização é feita dividindo o espaço  $N$  em intervalos iguais com comprimento  $\Delta$  (esta figura foi adaptada de [8]).

Dadas estas hipóteses, outra suposição utilizada é que a reação de cada célula isolada - a competição entre ativador e inibidor - é governada pelo seguinte sistema dinâmico, do tipo oscilador químico,

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = X(x_k(t), y_k(t)) \\ \dot{y}_k(t) = Y(x_k(t), y_k(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo  $X$  e  $Y$  duas funções genéricas de  $x_k(t)$  e  $y_k(t)$ , as quais representam as concentrações do ativador e do inibidor respectivamente.

Por outro lado, como já discutido, estas reações entre o inibidor e o ativador não se dão de forma isolada, mas sim, de maneira acoplada, com uma interação entre as células, podendo esta interação se dar de várias maneiras. O acoplamento proposto por Turing é alcançado considerando resultados bem conhecidos da Físico-Química. O primeiro é a equação da continuidade [18]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}_i) = F_i(\rho_i, \rho_j), \quad (2.2)$$

sendo  $\rho_i$  a densidade de partículas,  $\vec{u}_i$  o vetor velocidade do fluido e  $F_i(\rho_i, \rho_j)$  uma função relacionada com a evolução temporal do ativador e inibidor.

A segunda relação a ser utilizada é a lei de Fick [19]

$$\vec{J}_i = -D_i \nabla [w_i(z, t)], \quad (2.3)$$

na qual o fluxo de partículas é proporcional ao gradiente de concentração  $w_i$  e  $D_i$  (aqui supomos  $D_i \geq 0$ ) é o coeficiente de difusão da espécie química em questão.

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.3) e lembrando ser o espaço unidimensional (a rede é descrita na coordenada  $z$ ), chegamos a seguinte equação <sup>1</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_k(z, t)}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 x_k(z, t)}{\partial z^2} + f_x(x_k, y_k) \\ \frac{\partial y_k(z, t)}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 y_k(z, t)}{\partial z^2} + f_y(x_k, y_k) \end{cases}, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Um resultado adicional é utilizado ao se combinar a equações as quais nos referimos, é preciso lembrar que as relações entre as concentrações e as densidades das partículas do modelo são dadas por:

$$\begin{cases} x_i = \frac{m_x \rho_x}{m_t} \\ y_i = \frac{m_y \rho_y}{m_t} \end{cases}, \quad (2.4)$$

na qual  $m_t = m_x \rho_x + m_y \rho_y$  é a massa total do sistema.

na qual conjecturamos:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \alpha_x F(x, y) = X(x, y) \\ f_y(x, y) = \alpha_y F(x, y) = Y(x, y) \end{cases}, \quad (2.6)$$

assim

$$\begin{cases} \frac{\partial x_k(z, t)}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 x_k(z, t)}{\partial z^2} + X(x_k, y_k) \\ \frac{\partial y_k(z, t)}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 y_k(z, t)}{\partial z^2} + Y(x_k, y_k) \end{cases}. \quad (2.7)$$

Esta relação é a reprodução matemática da evolução temporal de duas espécies químicas reagentes que se difundem pelo sistema, conhecida também como equação de reação-difusão. Este é o mecanismo formador dos padrões proposto por Alan Turing e este tipo de interação é o ponto central da teoria desenvolvida por ele.

Entretanto, como já elucidado, supomos o espaço, além de unidimensional, também discreto. Portando, temos de discretizar as variáveis espaciais na equação (2.7), isto pode ser feito através de

$$\frac{\partial w_k}{\partial z} = \frac{w_{k+1} + w_{k-1}}{\Delta}, \quad (2.8)$$

na qual  $\Delta$  é a distância entre os centros dos sítios na rede - figura (2.1), seguindo o mesmo raciocínio, para a derivada segunda, é possível provar que:

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta^2}. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação anterior na equação (2.7) e definindo dois novos parâmetros:

$$\mu = \frac{2D_x}{\Delta^2}, \quad \nu = \frac{2D_y}{\Delta^2}; \quad (2.10)$$

temos a equação de reação difusão para um espaço discreto e unidimensional:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(z, t)}{dt} = X(x_k, y_k) + \mu \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{2} \\ \frac{dy_k(z, t)}{dt} = Y(x_k, y_k) + \nu \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{2} \end{cases}, \quad (2.11)$$

esta é a relação que utilizaremos para explicitar a essência da teoria de Turing.

A fim de compreender melhor a situação é necessário entendermos mais a fundo a equação anterior. Como já apontado previamente, se consideramos os coeficientes de difusão nulos, obteremos a equação (2.1); a qual, por sua vez, representa

a reação química em cada célula tomada isoladamente. Assim, matematicamente, o termo difusivo é o responsável pela conectividade entre as células da rede, figura (2.2). Este tipo de interação é bem conhecido na literatura [17] e é chamado de acoplamento de primeiros vizinhos.

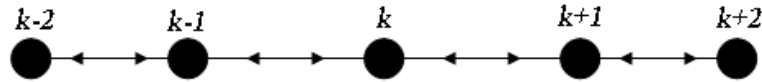


Figura 2.2: Representação de uma rede com acoplamento difusivo, cada sítio interage unicamente com seus vizinhos.

Na interação difusiva cada sítio da rede interage apenas com os sítios vizinhos, por este motivo também é denominado como acoplamento local. No nosso caso, uma rede unidimensional, cada sítio  $k$  é influenciado e influencia a célula  $k+1$  e  $k-1$  como mostrado pela figura (2.2).

### 2.2.1 Análise de Estabilidade e Linearização

Na estrutura sugerida por Turing cada célula isolada se encontra inicialmente em um estado estável com valores das concentrações iguais às outras, um estado uniforme e de equilíbrio. Este estado inicial, também chamado de estado homogêneo, é definido como sendo o ponto de equilíbrio das equações que regem a dinâmica do sistema, no nosso caso o conjunto de equações (2.1). O padrão estacionário surge devido a pequenas flutuações neste estado, a qual cresce com a perda de estabilidade causada pela difusão. Nesta seção estudaremos esta instabilidade.

Para examinarmos a rede acoplada, é necessária uma análise preliminar da estabilidade dos sítios tomados isoladamente, e só após isto exploraremos a instabilidade criada com interação entre as células.

A análise de estabilidade é realizada através da linearização do sistema nas

proximidades de seus pontos de equilíbrio (estado homogêneo). Seguimos o seguinte procedimento; linearizamos as equações que regem a dinâmica do modelo nas vizinhanças de seus pontos fixos e utilizamos a análise linear de estabilidade - desenvolvida no apêndice A - para identificar os intervalos de instabilidade e estabilidade do sistema.

## O Sistema Isolado

O primeiro passo é linearizar as equações das células sem considerar o acoplamento. Para isto utilizamos o procedimento de linearização apontado no apêndice A; assim, é possível provar que as equações linearizadas admitem a forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(z,t)}{dt} = ax_k + by_k \\ \frac{dy_k(z,t)}{dt} = cx_k + dy_k \end{cases} \quad (2.12)$$

cujo ponto de equilíbrio é;

$$(x^*, y^*) = (0, 0). \quad (2.13)$$

A matriz jacobiana do sistema pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

- os elementos da matriz A são definidos no apêndice A. Levando-se em conta os resultados de análise de estabilidade, as condições para que as células tomadas isoladamente sejam estáveis são:

$$\begin{cases} q = \text{Det}(A) = ad - bc > 0 \\ p = \text{tr}(A) = a + d < 0 \end{cases}, \quad (2.15)$$

para que o estado seja instável as condições são:

$$\begin{cases} q = \text{Det}(A) = ad - bc > 0 \\ p = \text{tr}(A) = a + d > 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Outra hipótese possível de acontecer é:

$$q = \text{Det}(A) = ad - bc < 0, \quad (2.17)$$

aqui o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Entretanto, se o ponto fixo é uma sela figura (2.3), o sistema pode ser considerado instável. Isto acontece devido ao fato de, para esta condição, existir somente duas direções em que as trajetórias se aproximam da origem no espaço de fase, implicando, portanto, na baixa probabilidade do estado do sistema tender ao ponto de equilíbrio.

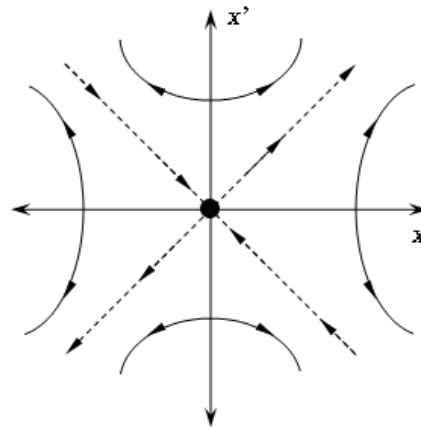


Figura 2.3: Representação gráfica de um ponto de sela; somente duas direções no espaço de fase são estáveis.

Como já explicitado, a teoria de Turing pressupõe que o ponto de equilíbrio é estável sem a presença de acoplamento, logo, supomos que a inequação (2.15) é satisfeita.

## O Sistema Acoplado

Iremos agora, como um segundo passo, estudar em que situações as interações entre os sítios ocasionam a perda de estabilidade, para isto linearizamos as

equações acopladas obtendo

$$\begin{cases} \frac{dx_k(z,t)}{dt} = ax_k + by_k + \mu \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{2} \\ \frac{dy_k(z,t)}{dt} = cx_k + dy_k + \nu \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{2} \end{cases} \quad (2.18)$$

Além disso, supomos condições de contorno periódicas para a rede, isto é, conjecturamos que a rede seja periódica espacialmente e com período  $N$  -  $N$  é o número de sítios que compõe o sistema, o que é representado matematicamente por;

$$\begin{cases} x_k(z,t) = x_{k \pm N}(z,t) \\ y_k(z,t) = y_{k \pm N}(z,t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Uma rede com esta particularidade é mostrada na figura (2.4); ela tem uma configuração circular devido às condições de contorno periódicas, e seus elementos interagem apenas com seus vizinhos mais próximos.

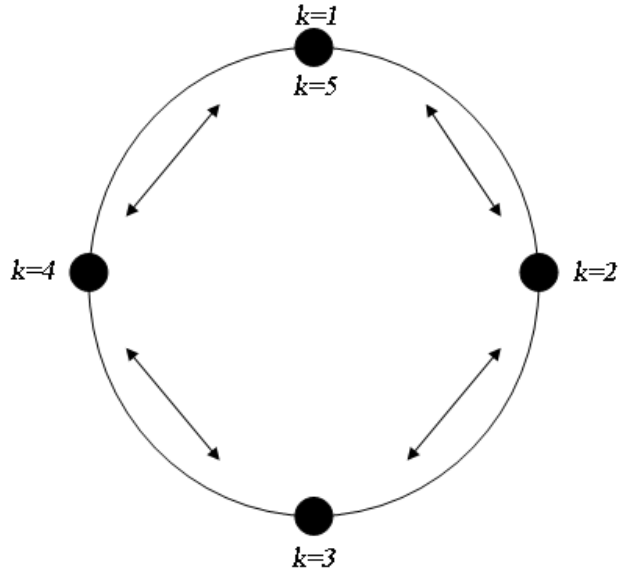


Figura 2.4: Representação de uma rede com acoplamento local e condições de contorno periódicas, as setas representam as conexões entre os elementos da rede.

Desta maneira a forma mais adequada de realizar o estudo da estabilidade é usando a análise de modos normais. Isto é feito aplicando a transformada discreta

de Fourier, a saber,

$$\begin{cases} x_k(z, t) = \sum_l \xi_l(l, t) e^{ilk} \\ y_k(z, t) = \sum_l \eta_l(l, t) e^{ilk} \end{cases}, \quad (2.20)$$

sendo  $\xi_l$  e  $\eta_l$  os coeficientes discretos de Fourier.

Substituindo a equação (2.19) na equação (2.20) é possível mostrar que

$$l = \frac{2\pi s}{N}; \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.21)$$

Portanto é possível rotular os modos normais através da variável de  $s$  e escrever a equação (2.20) como:

$$\begin{cases} x_k(z, t) = \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s(s, t) e^{\frac{2\pi isk}{N}} \\ y_k(z, t) = \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s(s, t) e^{\frac{2\pi isk}{N}} \end{cases}. \quad (2.22)$$

Estas equações obedecem a relação de ortogonalidade

$$\sum_{k=1}^N e^{\frac{2\pi ik(s-s')}{N}} = \begin{cases} N, & \text{se } (s-s') = 0 \\ 0 & \text{(caso contrário)} \end{cases} \quad (2.23)$$

Aplicando a transformada discreta de Fourier ao sistema linear acoplado, equação (2.18), obtemos as equações transformadas:

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^{N-1} \dot{\xi}_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} = a \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + b \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + \frac{\mu}{2} \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} \left[ e^{\frac{2\pi is}{N}} + e^{\frac{-2\pi is}{N}} - 2 \right] \\ \sum_{s=0}^{N-1} \dot{\eta}_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} = d \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + c \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + \frac{\nu}{2} \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} \left[ e^{\frac{2\pi is}{N}} + e^{\frac{-2\pi is}{N}} - 2 \right] \end{cases}.$$

Desta maneira

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s = \left[ a - 2\mu \text{sen}^2 \left( \frac{\pi s}{N} \right) \right] \xi_s + b \eta_s \\ \dot{\eta}_s = \left[ d - 2\nu \text{sen}^2 \left( \frac{\pi s}{N} \right) \right] \eta_s + c \xi_s \end{cases}, \quad (2.24)$$

sendo  $\xi_s$  e  $\eta_s$  as transformadas discretas de Fourier, de  $x_k$  e  $y_k$  respectivamente, introduzimos também as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{sen}^2 \left( \frac{\pi s}{N} \right) \Rightarrow 0 \leq \sigma \leq 1 \\ a_\sigma &= a - 2\mu\sigma \\ d_\sigma &= d - 2\nu\sigma \end{aligned}, \quad (2.25)$$

desta maneira podemos escrever a dinâmica dos modos normais de uma forma mais simples

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s = a_\sigma \xi_s + b \eta_s \\ \dot{\eta}_s = c \xi_s + d_\sigma \eta_s \end{cases} . \quad (2.26)$$

Estas equações tem um ponto de equilíbrio em  $(\xi_s, \eta_s) = (0, 0)$  o qual equivale ao ponto  $(x_k, y_k) = (0, 0)$  nas equações em  $x_k$  e  $y_k$ , isto é,

$$(\xi_s, \eta_s) = (0, 0) \Rightarrow (x_k, y_k) = (0, 0) \forall s. \quad (2.27)$$

Agora seguimos o mesmo raciocínio utilizado no sistema isolado, definimos a matriz jacobiana  $A'$  como:

$$A' = \begin{pmatrix} a_\sigma & b \\ c & d_\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

assim usando a teoria linear podemos determinar as condições de estabilidade do sistema acoplado próximo ao ponto fixo. Para que exista estabilidade elas são;

$$\begin{cases} q_\sigma = Det(A') = a_\sigma d_\sigma - bc > 0 \\ p_\sigma = tr(A') = a_\sigma + d_\sigma < 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

para a instabilidade são:

$$\begin{cases} q_\sigma = Det(A') = a_\sigma d_\sigma - bc > 0 \\ p_\sigma = tr(A') = a_\sigma + d_\sigma > 0 \end{cases}. \quad (2.30)$$

Novamente, como ocorreu para o caso isolado, o ponto fixo é uma sela se

$$q_\sigma = Det(A') = a_\sigma d_\sigma - bc < 0. \quad (2.31)$$

Como já exposto anteriormente, na análise das células isoladas, a condição (2.15), na qual o sistema é estável sem a presença de acoplamento é suposta satisfeita.

Neste momento é preciso lembrar a conjectura central de Turing, em sua teoria ele assume que a difusão pode causar uma perda de estabilidade no sistema. Portanto, é preciso determinar em que situações isto pode ocorrer.

É possível mostrar que se o sistema isolado é estável, a relação

$$p_\sigma = a_\sigma + d_\sigma < 0 \quad (2.32)$$

também é satisfeita, isto é,

$$p < 0 \Rightarrow p_\sigma < 0. \quad (2.33)$$

Em um primeiro momento, através das inequações (2.29) e (2.33) é possível concluir que o sistema acoplado não será instável como pressupõe Turing - pois se  $p_\sigma < 0$ , condição de estabilidade, a relação (2.30) nunca será satisfeita. Entretanto, como já colocado, se o ponto fixo é um ponto de sela então também pode ser considerado instável. Deste modo, a única maneira do sistema acoplado ser instável é se:

$$q_\sigma = 4\mu\nu\sigma^2 - 2\sigma(a\nu + d\mu) + q < 0. \quad (2.34)$$

Conseqüentemente, a mudança de sinal da função  $q_s$  representa uma espécie de bifurcação (linear) de Turing [6], resta colocar esta bifurcação de uma maneira mais adequada.

Para isto, identificamos a equação  $q_s = 0$  como uma espécie de curva marginal, ela determina a transição estável-instável do sistema, sua solução é:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{4(\mu\nu)} \left\{ a\nu - d\mu \pm \sqrt{a^2\nu^2 + 2avd\mu + d^2\mu^2 - 4\mu\nu q} \right\}, \quad \mu\nu > 0, \quad (2.35)$$

a qual através das definições

$$Q = \frac{ad - bc}{\mu\nu}, \quad P = \frac{a}{\mu} + \frac{d}{\nu}, \quad (2.36)$$

pode ser colocada como:

$$\sigma_\pm = \frac{1}{4} \left\{ P \pm \sqrt{P^2 - 4Q} \right\}. \quad (2.37)$$

Resolvendo a inequação (2.34) para  $\sigma$  temos:

$$\sigma_- < \sigma < \sigma_+, \quad (2.38)$$

entretanto  $\sigma$  também obedece a - equação (2.25):

$$0 \leq \sigma \leq 1. \quad (2.39)$$

Combinando a equação (2.37) com as inequações (2.38) e (2.39) obtemos uma primeira condição de instabilidade do sistema acoplado:

$$0 \leq \sigma_- \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P - \sqrt{P^2 - 4Q} \leq 4 \quad (2.40)$$

esta inequação pode ser resolvida para  $P$

$$\begin{cases} Q > 0 \\ P > 2\sqrt{Q}, \quad 0 \leq P \leq 4, \\ P > \frac{Q}{2} + 2, \quad P > 4 \end{cases} \quad (2.41)$$

estas relações são a representação no espaço de parâmetros, no qual as variáveis de controle escolhidas são  $P$  e  $Q$ , das regiões nas quais o sistema é estável ou instável, o que é mostrado graficamente pela figura (2.5).

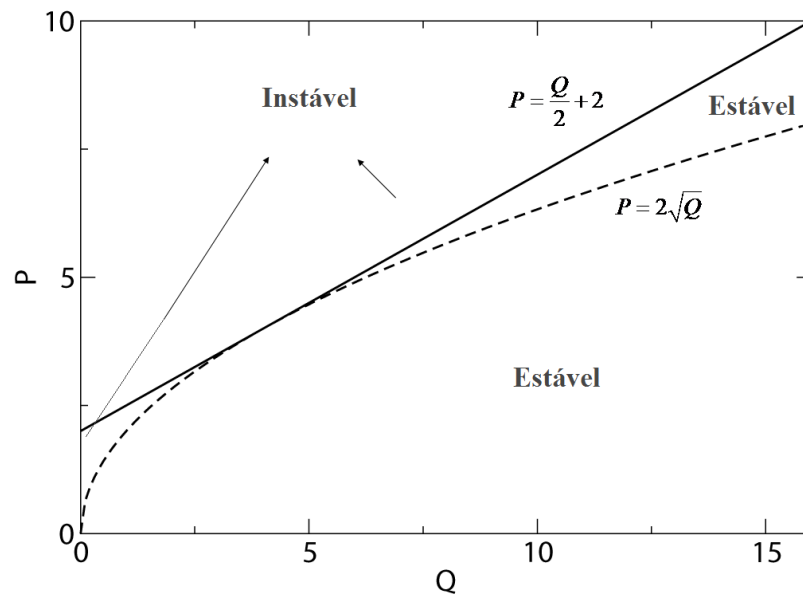


Figura 2.5: Representação gráfica das condições de instabilidade, com escolhas adequadas dos parâmetros é possível obter a instabilidade de Turing.

Outra condição é obtida através da relação (2.39) ajustada com a definição de  $\sigma(s, N)$ :

$$\sigma(s, N) = \text{sen}^2 \left( \frac{\pi s}{N} \right), \quad (2.42)$$

com estas duas relações é possível concluir que modos normais localizados entre  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  são instáveis na presença de acoplamento, da mesma forma que modos normais fora deste intervalo são estáveis, situação mostrada pela figura (2.6). Pela mesma figura é possível concluir que modos próximos a  $s \cong N/2$  são estáveis e modos pertencentes a regiões intermediárias são instáveis [6].

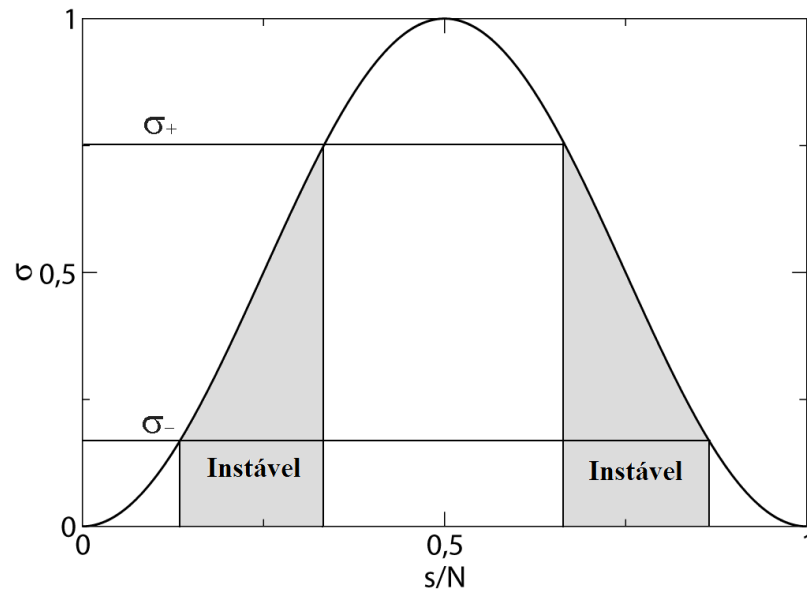


Figura 2.6: Perfil de quais modos normais são instáveis e quais são estáveis na presença de acoplamento.

Na realidade, esta condição mostra bem como acontece a formação de padrões na rede. Como temos modos estáveis e modos instáveis, com a inserção de uma pequena perturbação em um estado inicialmente uniforme, estes ocasionarão uma amplificação na flutuação colocada; por outro lado, aqueles permanecerão constantemente no estado inicial; formando assim uma configuração heterogênea.

# Capítulo 3

## Acoplamento Não-Local

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior desenvolvemos os mecanismos fundamentais da Teoria desenvolvida por Turing. Provamos basicamente que a formação de padrões em um sistema estável e homogêneo se deve à interação difusiva entre os sítios que compõe o sistema. Este tipo de interação, conhecida como acoplamento de primeiros vizinhos, é baseada na idéia que uma dada célula apenas interaja com seus vizinhos mais próximos.

Entretanto uma questão deve ser levantada, uma rede com algum outro tipo de acoplamento comporta a formação de padrões? Em outras palavras, em um sistema com uma configuração diferente da proposta por Turing é possível desenvolver o mesmo mecanismo? Estas são as perguntas as quais responderemos a seguir.

Neste capítulo, essencialmente, sugerimos uma interação não local entre os sítios da rede e analisamos em que situações este modelo apresenta instabilidade de Turing e a formação de padrões.

## 3.2 Acoplamento do Tipo lei de Potência

Há diversas maneiras de acoplar elementos de uma rede e estabelecer conexões entre eles. Como já visto, a teoria de Turing se baseia em um acoplamento local, também chamado de primeiros vizinhos ou difusivo. Aqui, vamos propor um acoplamento não local (no qual cada elemento da rede interage não apenas com seu vizinho mais próximo, mas pode se conectar com várias outras células que compõe o sistema), aplicar as mesmas hipóteses de Turing e analisar se há ou não a formação de padrões para este tipo de interação.

A interação não-local a ser utilizada é do tipo lei de potência. Neste tipo de acoplamento um dado sítio interage com todos os outros elementos da rede, entretanto a magnitude da conexão depende da distância entre os sítios. Na realidade, esta configuração pressupõe que a intensidade do acoplamento diminui com a distância entre os sítios seguindo uma lei de potência.

O acoplamento do tipo lei de potência é utilizado em arquiteturas de redes neurais com produção de informação e também é encontrado como solução na discretização de equações diferenciais parciais que modelam reações químicas [12, 20].

Assim para uma rede unidimensional composta por  $N$  sítios -  $N$  é um número impar - espaçados por uma distância  $r$ , a representação matemática deste tipo de conectividade é dada por:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = X(x_k, y_k) - \mu x_k + \frac{\mu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{x_{k-r} + x_{k+r}}{r^\alpha} \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = Y(x_k, y_k) - \nu y_k + \frac{\nu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{y_{k-r} + y_{k+r}}{r^\alpha} \end{cases}, \quad (3.1)$$

sendo

$$\kappa_0(\alpha) = 2 \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} \quad (3.2)$$

um fator de normalização,

$$N' = \frac{N - 1}{2} \quad (3.3)$$

e  $\alpha$  representa o alcance do acoplamento (quanto maior o valor de  $\alpha$ , menor é o alcance da interação).

Como queremos aplicar os mesmos pressupostos usados por Turing, seguimos os procedimentos utilizados por ele, assim também supomos que a rede obedece a condições de contorno periódicas, isto é,

$$\begin{cases} x_k(z, t) = x_{k \pm N}(z, t) \\ y_k(z, t) = y_{k \pm N}(z, t) \end{cases}, \quad (3.4)$$

um exemplo desta rede é mostrado pela figura (3.1).

Vale salientar que este tipo de conexão entre os sítios é uma generalização do acoplamento difusivo - na realidade, como mostraremos na seção seguinte, este é um caso particular daquele.

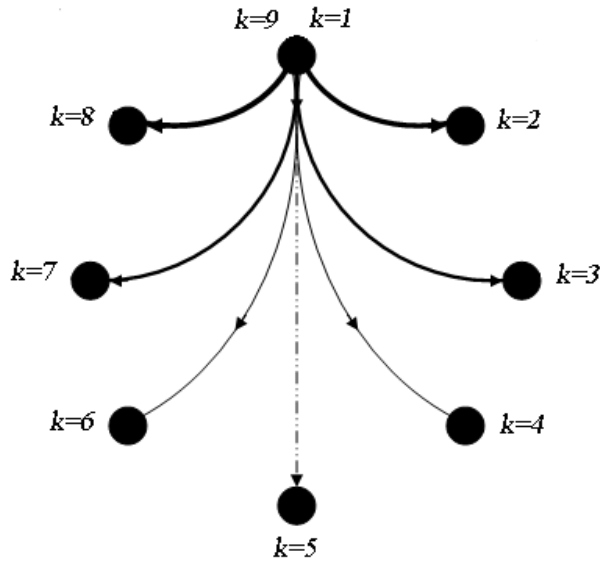


Figura 3.1: Representação do acoplamento global de uma rede unidimensional com condições de contorno periódicas, apenas as ligações do sítio 1 são mostradas.

### 3.2.1 Casos Particulares

#### Caso Local

Vamos provar agora que se fizermos o limite de  $\alpha$  tendendo ao infinito na equação (3.1) obteremos novamente o acoplamento difusivo utilizado por Turing. Para expor este caso extremo identificamos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \kappa_0(\alpha) = 2 \quad (3.5)$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{N'} \frac{x_{k-r} + x_{k+r}}{r^\alpha} = x_{k-1} + x_{k+1}. \quad (3.6)$$

Assim o conjunto de equações (3.1) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(z,t)}{dt} = X(x_k, y_k) + \mu \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{2} \\ \frac{dy_k(z,t)}{dt} = Y(x_k, y_k) + \nu \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{2} \end{cases}, \quad (3.7)$$

estas equações são as mesmas encontradas no acoplamento do tipo primeiros vizinhos.

Conseqüentemente, qualquer que sejam os resultados alcançados pela interação não local escolhida, ela sempre deverá ser equivalente ao caso local quando tomarmos o limite feito anteriormente. Comparação que continuamente será realizada no decorrer do desenvolvimento do modelo.

#### Caso Global

Outro caso limite interessante do acoplamento do tipo lei de potência surge quando fazemos  $\alpha$  igual a zero, assim, com as identidades

$$\kappa_0(\alpha = 0) = N - 1 \quad (3.8)$$

e

$$\sum_{r=1}^{N'} \frac{x_{k-r} + x_{k+r}}{r^\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \sum_{r=1}^{N'} x_{k-r} + x_{k+r} \quad (3.9)$$

substituídas no sistema (3.1) obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = X(x_k, y_k) - \mu x_k + \left(\frac{\mu}{N-1}\right) \sum_{r=1}^{N'} (x_{k-r} + x_{k+r}) \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = Y(x_k, y_k) - \nu y_k + \left(\frac{\nu}{N-1}\right) \sum_{r=1}^{N'} (y_{k-r} + y_{k+r}) \end{cases} \quad (3.10)$$

Nesta equação os termos

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{r=1}^{N'} x_{k-r} + x_{k+r} = \left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N x_r = \tilde{x}_k = \langle x \rangle_{r \neq k} \\ \left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{r=1}^{N'} y_{k-r} + y_{k+r} = \left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N y_r = \tilde{y}_k = \langle y \rangle_{r \neq k} \end{cases} \quad (3.11)$$

mostram que, neste caso fronteira, o valor futuro de  $x_k(t)$  e  $y_k(t)$  depende da média dos estados dos demais elementos da rede. Podemos chegar a esta conclusão ao observar que os somatórios nas equações (3.11) são realizados sobre todos os sítios que compõe o sistema, com exceção da célula  $k$ ; ao final estas somas são divididas pelo número de sítios ( $N-1$ ) incluídos nos somatórios (uma média aritmética, a qual denotamos  $\tilde{x}_k$  e  $\tilde{y}_k$ ). Devido a estas peculiaridades este tipo de interação é chamado de acoplamento de campo médio, ou acoplamento global. Com estas considerações podemos escrever as equações (3.10) como:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = X(x_k, y_k) + \mu(\tilde{x}_k - x_k) \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = Y(x_k, y_k) + \nu(\tilde{y}_k - y_k) \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.3 Análise de Estabilidade

Nosso objetivo neste trabalho é aplicar a teoria desenvolvida por Turing a outro tipo de interação, em outras palavras, queremos mostrar que é possível obter a instabilidade de Turing e a formação de padrões para o acoplamento do tipo lei de potência. Sendo assim, temos de fazer a análise de estabilidade do sistema isolado e do sistema acoplado e observar se realmente é possível obter os mesmos resultados alcançados anteriormente.

Para fazer esta análise de estabilidade seguimos o mesmo procedimento

empregado no capítulo anterior, ou seja, linearizamos o sistema de equações nas proximidades de seus pontos de equilíbrio (estado homogêneo) e, após isto, aplicamos as condições de estabilidade da teoria linear - os algoritmos usados se encontram desenvolvidos no apêndice A. Desta maneira as equações linearizadas são:

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = (a - \mu)x_k + by_k + \frac{\mu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{x_{k-r} + x_{k+r}}{r^\alpha} \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = (d - \nu)y_k + cx_k + \frac{\nu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{y_{k-r} + y_{k+r}}{r^\alpha} \end{cases} . \quad (3.13)$$

### 3.3.1 Sistema Isolado

Visando encontrar as condições que fornecem a instabilidade de Turing no acoplamento não local, partimos das mesmas hipóteses utilizadas por ele na interação difusiva. Logo, vamos supor que cada sítio tomado isoladamente se encontra no mesmo estado estável que os outros, isto é, vamos supor que cada sítio se encontra no estado homogêneo definido no capítulo 2. As relações que o sistema deve obedecer para satisfazer estas particularidades já foram calculadas anteriormente, e são representadas pelo conjunto de inequações (2.15), a saber,

$$\begin{cases} q = ad - bc > 0 \\ p = a + d < 0 \end{cases} . \quad (3.14)$$

### 3.3.2 Sistema Acoplado

Adotando a mesma metodologia utilizada no caso local, temos de desacoplar o conjunto de equações (3.13); para isto usamos novamente a transformada discreta de Fourier

$$\begin{cases} x_k(z, t) = \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s(s, t) e^{\frac{2\pi i s k}{N}} \\ y_k(z, t) = \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s(s, t) e^{\frac{2\pi i s k}{N}} \end{cases} , \quad (3.15)$$

a qual aplicada ao sistema (3.13) nos dá:

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^{N-1} \dot{\xi}_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} = (a - \mu) \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + b \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + \\ \frac{\mu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{N'} \xi_s \left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \left( e^{\frac{2\pi is(k-r)}{N}} + e^{\frac{2\pi is(k+r)}{N}} \right) \\ \sum_{s=0}^{N-1} \dot{\eta}_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} = (d - \nu) \sum_{s=0}^{N-1} \eta_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + c \sum_{s=0}^{N-1} \xi_s e^{\frac{2\pi isk}{N}} + \\ \frac{\nu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{r=1}^{N'} \eta_s \left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \left( e^{\frac{2\pi is(k-r)}{N}} + e^{\frac{2\pi is(k+r)}{N}} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_s = \left\{ a - \mu \left[ 1 - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \left( e^{\frac{2\pi isr}{N}} + e^{\frac{-2\pi isr}{N}} \right) \right] \right\} \xi_s + b\eta_s \\ \dot{\eta}_s = \left\{ d - \nu \left[ 1 - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \left( e^{\frac{2\pi isr}{N}} + e^{\frac{-2\pi isr}{N}} \right) \right] \right\} \eta_s + c\xi_s \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s = \left[ a - 2\mu \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi sr}{N}\right)}{r^\alpha} \right) \right] \xi_s + b\eta_s \\ \dot{\eta}_s = \left[ d - 2\nu \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi sr}{N}\right)}{r^\alpha} \right) \right] \eta_s + c\xi_s \end{cases} \quad (3.16)$$

Estas equações são bem mais complexas que as encontradas por Turing. Entretanto é possível, e desejável, conseguir relações parecidas com as obtidas por ele. Esta situação é alcançada através de algumas mudanças de notação, elas são:

$$\sigma(s, \alpha, N) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi sr}{N}\right)}{r^\alpha} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{cases} a_\sigma = a - 2\mu\sigma(s, \alpha, N) \\ d_\sigma = d - 2\nu\sigma(s, \alpha, N) \end{cases} \quad (3.18)$$

Logo as relações (3.16) se tornam

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s = a_\sigma \xi_s + b\eta_s \\ \dot{\eta}_s = c\xi_s + d_\sigma \eta_s \end{cases} \quad (3.19)$$

Este conjunto de equações é muito semelhante ao obtido no caso difusivo. A única exceção é a função  $\sigma(s, \alpha, N)$ , a qual no capítulo anterior era uma função senoidal, que, por sua vez, tem comportamentos e limites bem conhecidos. Assim, como uma etapa preliminar, é preciso estudar as propriedades básicas desta nova função antes de realizar a análise de estabilidade.

### 3.4 Propriedades Básicas da Função $\sigma(s, \alpha, N)$

A função  $\sigma(s, \alpha, N)$  encontrada aqui é mais complicada que a função achada no caso local; pois além de ser uma função de três variáveis, ela deve obedecer aos limites apontados no começo deste capítulo. Algumas das suas propriedades são mostradas pela figura (3.2), na qual plotamos  $\sigma$  como função de  $s$  para vários valores de  $\alpha$  ( $N=1001$ ).

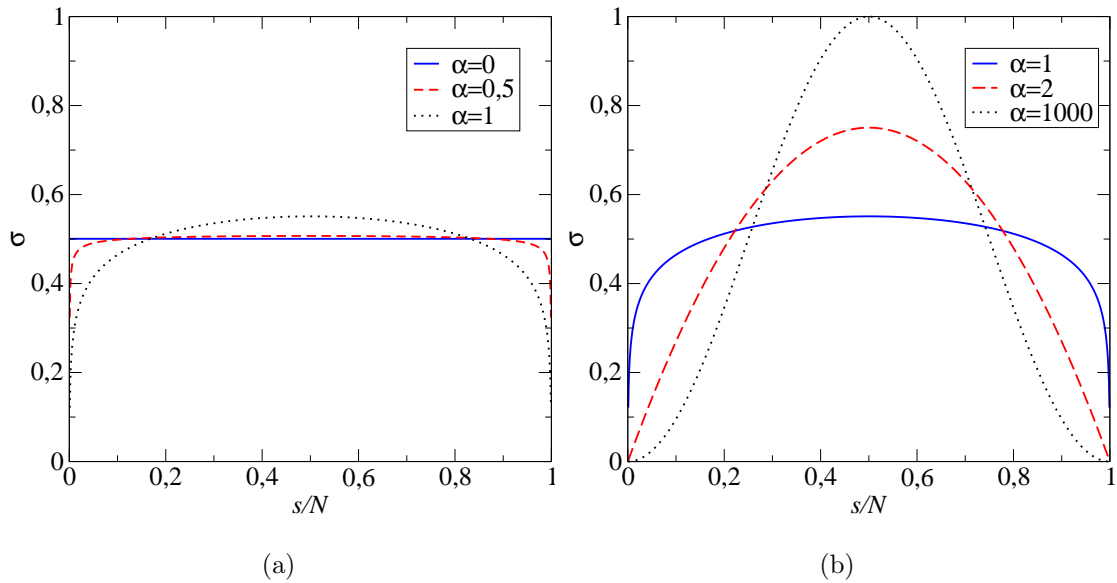


Figura 3.2: Função  $\sigma$  em função da variável  $s$  para vários valores de  $\alpha$ , com o aumentar do alcance do acoplamento a curva  $\sigma(s)$  deixa de ser uma constante e se aproxima de uma função senoidal.

Notemos por estas figuras, situação a qual também mostraremos mais a frente, que quando  $\alpha = 0$  o gráfico da função  $\sigma$  é uma reta, se  $\alpha$  é pequeno a curva  $\sigma(s)$  é quase uma constante, porém curvada em sua extremidades (figura (3.2)(a)). Para  $\alpha$  intermediário o gráfico de  $\sigma$  lembra uma função senoidal, figura (3.2)(b). A conclusão é; na medida em que aumentamos o valor de  $\alpha$  a função  $\sigma$  deixa de ser uma constante e gradualmente se aproxima de uma curva senoidal (que não por um acaso é a mesma obtida no caso difusivo). Apesar de esta ser uma análise gráfica este resultado tem fundamento e se deve ao fato de a função  $\sigma$  ter de obedecer aos casos limites, global e local, e será de grande uso posteriormente.

### 3.4.1 Limites de $\sigma(s, \alpha, N)$

Para calcular as condições de estabilidade é preciso determinar os limites da função  $\sigma$ , no caso difusivo estes limites eram bem conhecidos, naquela situação  $\sigma$  obedecia:

$$0 \leq \sigma_{Difusivo} = \sigma(s, \alpha = \infty, N) \leq 1.$$

Aqui como primeiro passo, vamos provar que o máximo,  $\sigma_{max}$ , e o mínimo,  $\sigma_{min}$ , da função  $\sigma(s, \alpha, N)$  se encontram no intervalo  $[0,1]$ . Além disto, como um segundo passo, provaremos que o mínimo da função  $\sigma$  é zero, isto é, mostraremos que se definirmos

$$\sigma_{min} \leq \sigma(\alpha, s, N) \leq \sigma_{max}, \quad (3.20)$$

então

$$0 \leq \sigma(\alpha, s, N) \leq 1 \quad (3.21)$$

e

$$\sigma_{min} = 0, \quad 0 \leq \sigma_{max} \leq 1. \quad (3.22)$$

Para isto utilizamos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2\pi r s}{N}\right) \leq 1,$$

assim

$$\sum_{r=1}^{N'} \frac{-1}{r^\alpha} \leq \sum_{r=1}^{N'} \frac{\cos\left(\frac{2\pi sr}{N}\right)}{r^\alpha} \leq \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha}. \quad (3.23)$$

Aplicando o limite superior da inequação anterior na equação (3.17) e lembrando a definição de  $\kappa_0(\alpha)$ , obtemos a primeira relação:

$$\sigma(s, \alpha, N) \geq \sigma_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(s, \alpha, N) \geq 0. \quad (3.24)$$

Se aplicarmos o limite inferior da inequação (3.23) na equação (3.17) temos;

$$\sigma(s, \alpha, N) \leq \sigma_s = \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{(-1)}{r^\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma(s, \alpha, N) \leq 1. \quad (3.25)$$

Logo a função  $\sigma$  e seus máximos e mínimos realmente se encontram no intervalo  $[0,1]$  para qualquer que seja  $\alpha$  e  $s$ , com  $N$  inteiro e ímpar. Entretanto resta provar que:  $\sigma_{min} = 0$ , isto é feito através da equação (3.17) que para  $s=0$  nos fornece:

$$\sigma(s = 0, \alpha, N) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{(1)}{r^\alpha} = 0,$$

como

$$0 \leq \sigma_{min}(\alpha, s, N) \leq 1,$$

assim,

$$0 \leq \sigma_{min} \leq 1, \quad \sigma(s = 0, \alpha, N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{min}(\alpha, N) = 0.$$

Resumidamente temos;

$$0 \leq \sigma(s, \alpha, N) \leq \sigma_{max}, \quad 0 \leq \sigma_{max}(s) \leq 1. \quad (3.26)$$

Estas são as relações que utilizaremos no cálculo das condições de estabilidade do sistema acoplado.

### 3.5 Casos Particulares e a Função $\sigma(s, \alpha, N)$

Além das propriedades discutidas anteriormente, a função  $\sigma(s, \alpha, N)$  também deve obedecer aos casos limites discutidos no início do capítulo, ou seja, deve assumir formas particulares para o caso local e global.

### 3.5.1 Caso Local

Como já provado, se aplicarmos o limite de  $\alpha$  tendendo a infinito ao acoplamento do tipo lei de potência voltaremos novamente ao caso local. Agora discutiremos o mesmo limite aplicado à função  $\sigma(s, \alpha, N)$ . Provaremos que é possível obter a mesma relação encontrada no capítulo anterior,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(s, \alpha, N) = \text{sen}^2 \left( \frac{\pi s}{N} \right), \quad (3.27)$$

para isto utilizamos a equação (3.17) e a identidade (3.5)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sigma(s, \alpha, N) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{\cos \left( \frac{2\pi sr}{N} \right)}{r^\alpha} \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi s}{N} \right). \quad (3.28)$$

Como  $2\text{sen}^2(a/2) = 1 - \cos(a)$  verificamos a igualdade proposta. Portanto realmente a função  $\sigma$  assume a forma do caso local no limite de  $\alpha$  tendendo ao infinito, o que também pode ser visto na figura (3.2), para  $\alpha$  grande.

### 3.5.2 Caso Global

Para o caso global os cálculos matemáticos são um pouco mais elaborados. Contudo, neste caso, também é possível obter uma forma simples para a função  $\sigma$ . Como

$$\sigma(s, \alpha = 0, N) = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^{N'} \cos \left( \frac{2\pi sr}{N} \right) \right\}. \quad (3.29)$$

Empregamos a seguinte identidade [21, 22]

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\text{sen} \left( \frac{x}{2} \right)} \right\}, \quad x \neq 0. \quad (3.30)$$

Transladando o início do somatório para  $k=1$  e usando a seguinte notação:  $x = 2\pi s/N$ ,  $n = N' = \frac{N-1}{2}$  e  $k=r$  na equação (3.30) escrevemos:

$$I = \sum_{r=1}^{N'} \cos \left( \frac{2\pi sr}{N} \right) = -1 + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi s}{N} \right)}{\text{sen} \left( \frac{\pi s}{N} \right)} \right]; \quad s \neq 0, N \neq \infty. \quad (3.31)$$

Substituindo a relação (3.31) na definição de  $\sigma$  - equação (3.17) - e com seu valor em  $s=0$  temos:

$$\sigma_0 = \sigma(s, \alpha = 0, N) = \begin{cases} 0, s = 0 \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{N-1} \left[ 1 - \frac{\text{sen}(\pi s)}{\text{sen}\left(\frac{\pi s}{N}\right)} \right] \right\}; s \neq 0, N \neq \infty \end{cases} \quad (3.32)$$

A equação acima tem uma forma mais simples comparada ao caso geral, porém é possível simplificá-la ainda mais. Para isto é preciso lembrar que a variável  $s$  é definida somente para números inteiros pertencentes ao intervalo  $[0, N-1]$ . De modo que o termo  $\text{sen}(\pi s)$  é sempre nulo na equação (3.32). Portanto, com este resultado, a forma final da função  $\sigma$  para  $\alpha$  igual a zero é:

$$\sigma_0(s, N) = \sigma(s, \alpha = 0, N) = \begin{cases} 0, s = 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{N}{N-1} \right); s \neq 0, N \neq \infty \end{cases} \quad (3.33)$$

Esta função é uma constante em relação a  $s$ . Sua única dependência é em  $N$ , a qual é mostrada pela figura(3.3).

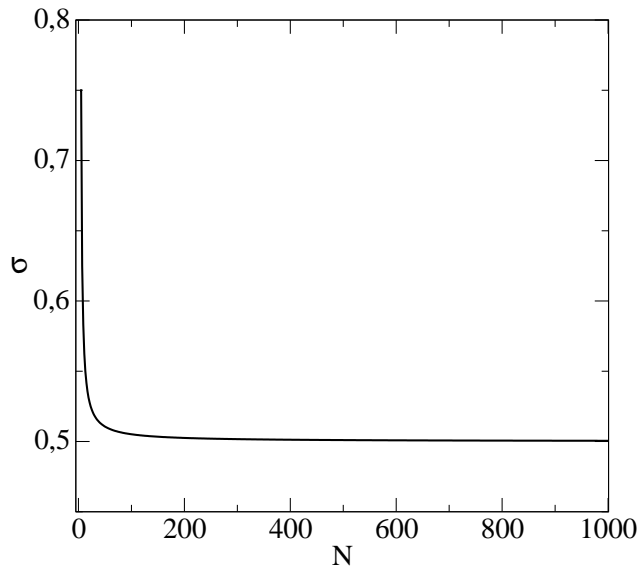


Figura 3.3: Função  $\sigma_0$  em função do número de sítios que compõe a rede  $N$ .

## 3.6 Instabilidade de Turing e Formação de Padrões

Como já estudamos algumas propriedades básicas da função  $\sigma$ , podemos, agora, realizar a análise de estabilidade das equações transformadas. Partimos então da relação (3.14), condição para que os sítios tomados isoladamente sejam estáveis, a qual é suposta ser satisfeita.

Por outro lado o objetivo também é buscar as condições que tornam o sistema acoplado instável. Só assim determinaremos se realmente é possível obter a instabilidade de Turing neste tipo de interação.

Neste momento vale ressaltar a seguinte implicação: como as equações transformadas encontradas para a interação não local são semelhantes às obtidas por Turing - com exceção da função  $\sigma$  cujas propriedades básicas já foram discutidas, os cálculos a serem realizados serão muito parecidos com os do capítulo anterior.

Um exemplo é o ponto de equilíbrio das equações linearizadas, o qual é o mesmo encontrado anteriormente e se localiza em  $(\xi_s, \eta_s) = (0, 0)$ , equivalente ao ponto  $(x_k, y_k) = (0, 0)$  nas equações em  $x_k$  e  $y_k$ .

Agora definimos novamente a matriz jacobiana  $A'$  das equações transformadas,

$$A' = \begin{pmatrix} a_\sigma(\alpha, s, N) & b \\ c & d_\sigma(\alpha, s, N) \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

esta matriz não é a mesma do caso difusivo devido à dependência em  $\sigma(s, \alpha, N)$  que  $a_\sigma$  e  $d_\sigma$  tem.

Seguindo o mesmo procedimento do caso local, é possível mostrar que se a relação (3.14) é atendida, então a única forma de o sistema acoplado ser instável é se seu ponto fixo for um ponto de sela. Deste modo temos:

$$q_\sigma = \text{Det}(A') = a_\sigma d_\sigma - bc = 4\mu\nu\sigma^2 - 2\sigma(a\nu + d\mu) + q < 0 \quad (3.35)$$

cujas solução é:

$$\sigma_- < \sigma < \sigma_+, \quad (3.36)$$

sendo

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{4} \left\{ P \pm \sqrt{P^2 - 4Q} \right\} \quad (3.37)$$

e

$$Q = \frac{ad - bc}{\mu\nu}, \quad P = \frac{a}{\mu} + \frac{d}{\nu}. \quad (3.38)$$

Comparando a inequação (3.36) com inequações (3.26) temos que

$$0 \leq \sigma_- \leq \sigma_{max} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P - \sqrt{P^2 - 4Q} \leq 4\sigma_{max}, \quad (3.39)$$

sendo  $\sigma_{max}$  o máximo da função  $\sigma$ . Alguns valores desta função são mostrados pelas figuras (3.4) e (3.5), nas quais  $\sigma_{max}$  se encontra em função de  $\alpha$  e  $N$  respectivamente.

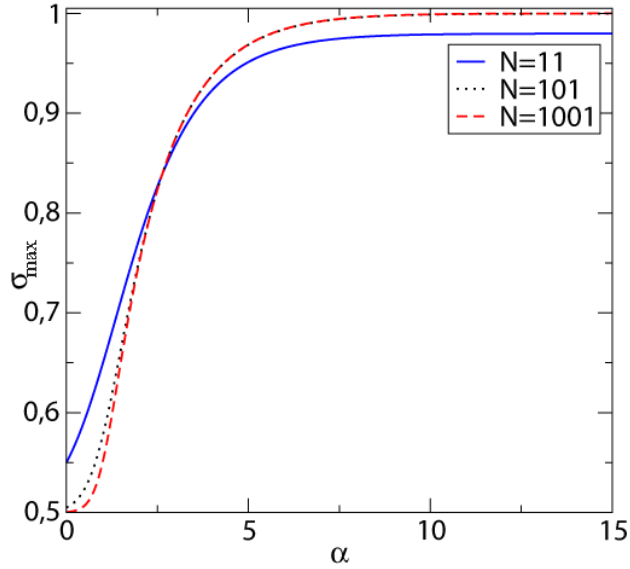


Figura 3.4: Máximo de  $\sigma$  -  $\sigma_{max}$  - em função do alcance do acoplamento  $\alpha$  para vários valores de  $N$ .

Resolvendo a inequação (3.39) para  $P$  obtemos:

$$\begin{cases} Q > 0 \\ P > 2\sqrt{Q}, & 0 \leq P \leq 4\sigma_{max} \\ P > \frac{Q}{2\sigma_{max}} + 2\sigma_{max}, & P > 4\sigma_{max} \end{cases} \quad (3.40)$$

Estas são relações que o sistema deve atender para que o sistema acoplado seja instável, isto é, são as condições necessárias para que se consiga a instabilidade de Turing. Portanto concluímos que realmente é possível conseguir uma quebra de estabilidade na interação não local.

Todavia, apesar de existir esta transição na estabilidade, nos resta ainda responder a uma pergunta: o acoplamento do tipo lei de potência admite a formação de padrões? Se admite, para quais valores de  $\alpha$  ocorrerá o desenvolvimento do estado heterogêneo?

Assim como no caso local, esta questão é respondida analisando a inequação (3.36) e a dependência de  $\sigma$  em relação a  $\alpha$ . Logo, fazendo este estudo, concluímos que modos normais localizados entre  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  são instáveis na presença do acoplamento; da mesma maneira que modos normais fora deste intervalo são estáveis, como mostrado pelas figuras (3.6) e (3.7). No entanto, pelas mesmas figuras é possível observar que o número de modos normais instáveis e estáveis depende em muito do valor do parâmetro  $\alpha$  e dos valores de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ . Um exemplo disto também é bem caracterizado pela figura (3.6). Nesta figura notamos que para  $\alpha$

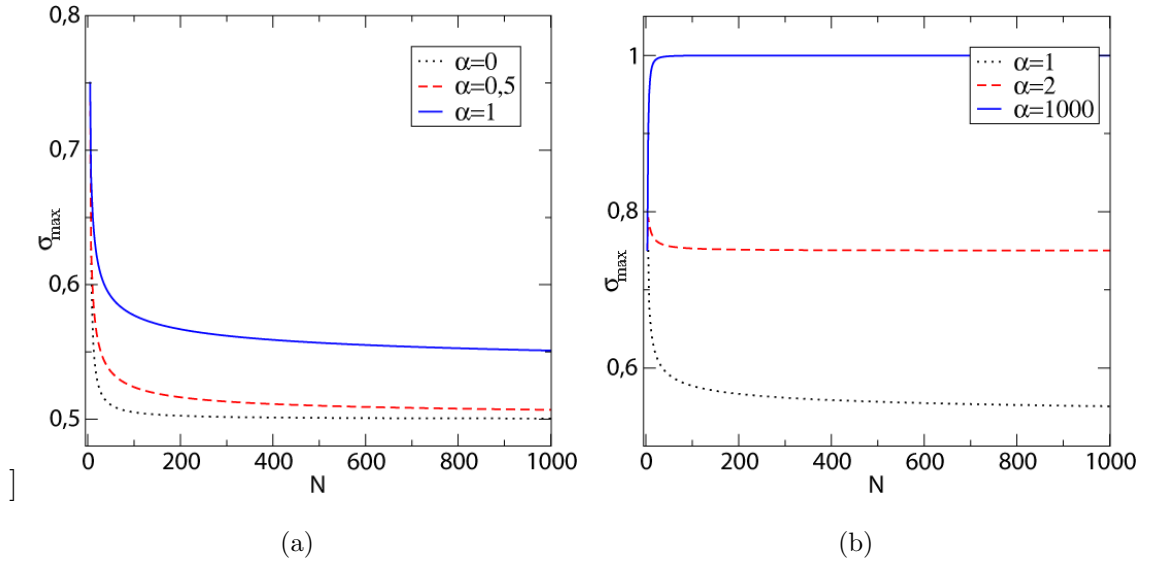


Figura 3.5: Máximo de  $\sigma$  -  $\sigma_{\max}$  - em função do número de células que compõe o sistema ( $N$ ) para vários valores de  $\alpha$ .

pequeno, dependendo da escolha dos valores de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , podemos obter, ou um grande número de modos normais instáveis (figura(3.6)(b)), ou um grande número de modos normais estáveis, figura(3.7)(a). Isto se deve ao fato de que para estes casos a curva  $\sigma(s)$  é quase uma constante. Esta falta de proporcionalidade entre estes números pode ocasionar diferenças em relação ao formato dos padrões finais desenvolvidos no sistema, se confrontado com o caso difusivo. Um caso limite desta situação é o caso global que trataremos mais a frente.

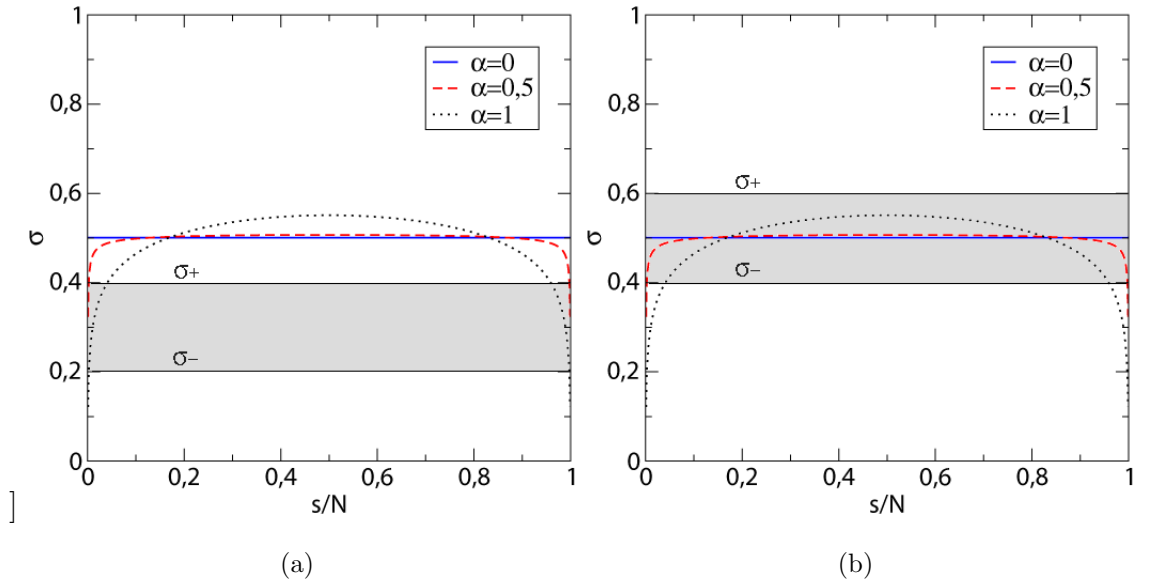


Figura 3.6: Representação dos modos normais que satisfazem a relação (3.36) para  $\alpha$  pequeno, modos incluídos na área sombreada são instáveis na presença do acoplamento. Nesta configuração existe uma grande sensibilidade em relação aos valores de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ . Na figura (a) muitos modos são estáveis, ao contrário a figura (b), na qual a maior parte se encontra em um estado instável.

Para valores de  $\alpha$  grande a curva  $\sigma(s)$  se aproxima da curva de  $\text{sen}^2(\pi s/N)$ . Neste caso temos uma menor sensibilidade do número de modos normais estáveis e instáveis em relação aos valores de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , como é exemplificado pela figura (3.7). A implicação é que sempre teremos, com exceção de casos extremos, o número de modos normais instáveis e estáveis comparáveis. Como decorrência desta implicação podemos ter diferenças em relação ao formato dos padrões finais desenvolvidos no

sistema, quando comparamos esta situação como a do caso do parágrafo anterior.

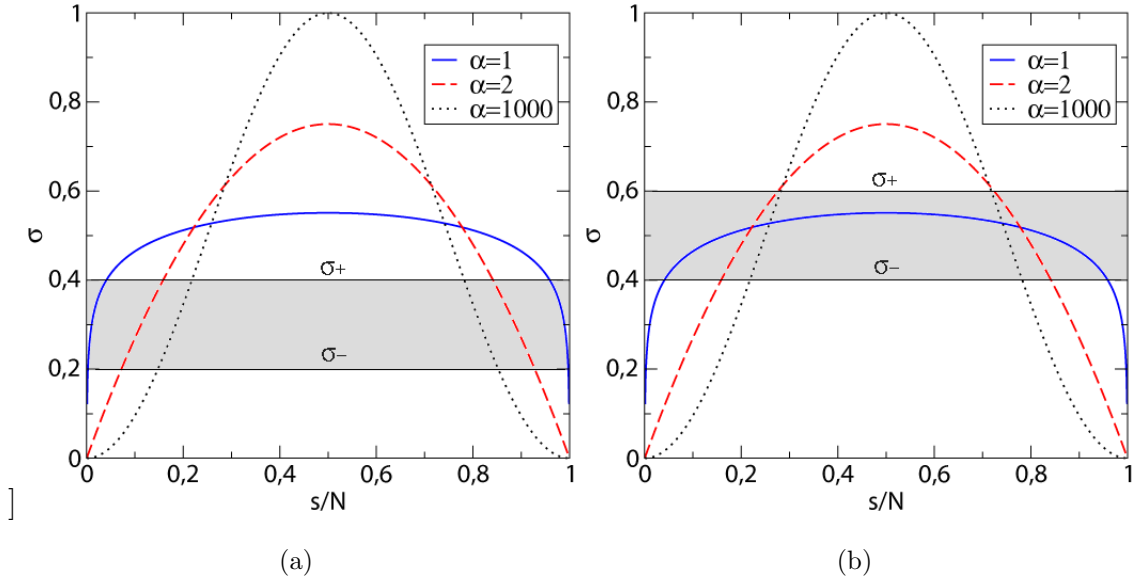


Figura 3.7: Representação dos modos normais que satisfazem a relação (3.36) para  $\alpha$  grande, modos incluídos na área sombreada são instáveis na presença do acoplamento. É possível observar que para as duas situações escolhidas o número de modos normais instáveis e estáveis são comparáveis.

As duas situações expostas acima serão discutidas também a seguir, tanto em casos particulares quanto na aplicação direta da teoria em equações não-lineares (capítulo 5).

### 3.6.1 Caso Local

Comparando o conjunto de inequações (3.40) com as encontradas no caso difusivo é possível observar uma diferença: aqui há uma dependência das condições de instabilidade em relação ao máximo da função  $\sigma$ . Entretanto, como já mostramos até agora, no caso de  $\alpha$  tendendo a infinito o acoplamento do tipo lei de potência se resume ao caso local. Para mostrar outra vez esta conexão observamos, que tanto

pela figura (3.4) quanto pela figura (3.5) a seguinte identidade é válida:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_{max} = 1.$$

Substituindo esta equação em (3.40) encontramos:

$$\begin{cases} Q > 0 \\ P > 2\sqrt{Q}, & 0 \leq P \leq 4, \\ P > \frac{Q}{2} + 2, & P > 4 \end{cases} \quad (3.41)$$

que são as condições de instabilidade obtidas no caso difusivo.

### 3.6.2 Caso Global

No caso global encontramos algumas diferenças em relação aos outros casos. Aqui, como já discutido, o gráfico da função  $\sigma$  é uma constante em relação a  $s$ . Este fato implica que a inequação (3.40) não pode ser usada diretamente nesta ocasião, pois  $\sigma_{max}(s) = \sigma_0(s) = \text{constante}$ , assim a única condição que podemos aplicar a este caso é a relação (3.36), logo:

$$\sigma_- < \sigma_0 < \sigma_+ \quad \Rightarrow \quad P - \sqrt{P^2 - 4Q} < 4\sigma_0 < P + \sqrt{P^2 - 4Q},$$

a qual resolvida para  $P$  no dá:

$$P > \frac{Q}{2\sigma_0} + 2\sigma_0. \quad (3.42)$$

Esta é a condição para que o sistema seja instável na presença do acoplamento global. Porém, vale ressaltar que para este caso apesar de ser possível obter a instabilidade de Turing, não há formação de padrões. Explicaremos este fato qualitativamente.

Primeiramente notemos que de acordo com os valores de  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  e  $\sigma_0$  a inequação (3.36) é ou não obedecida. Graficamente podemos observar pela figura (3.8) que se ela é satisfeita, então, (devido ao fato de  $\sigma$  ser uma constante) todos os modos normais são instáveis, como mostrado pela figura (3.8)(a), com a presença

da interação não local (com exceção talvez do ponto  $s=0$ , para o qual  $\sigma_0=0$ ). Da mesma maneira realizamos o raciocínio inverso, se a inequação (3.36) não é atendida então todos os modos normais são estáveis com a presença de acoplamento, como exposto pela figura (3.8)(b). Isto implica uma espécie de sincronização, pois, ou todos os modos normais são instáveis ou todos são estáveis. Esta situação também será explorada no capítulo 5, quando aplicaremos esta teoria a modelos não lineares.

Após estas considerações, é possível calcular as condições de instabilidade

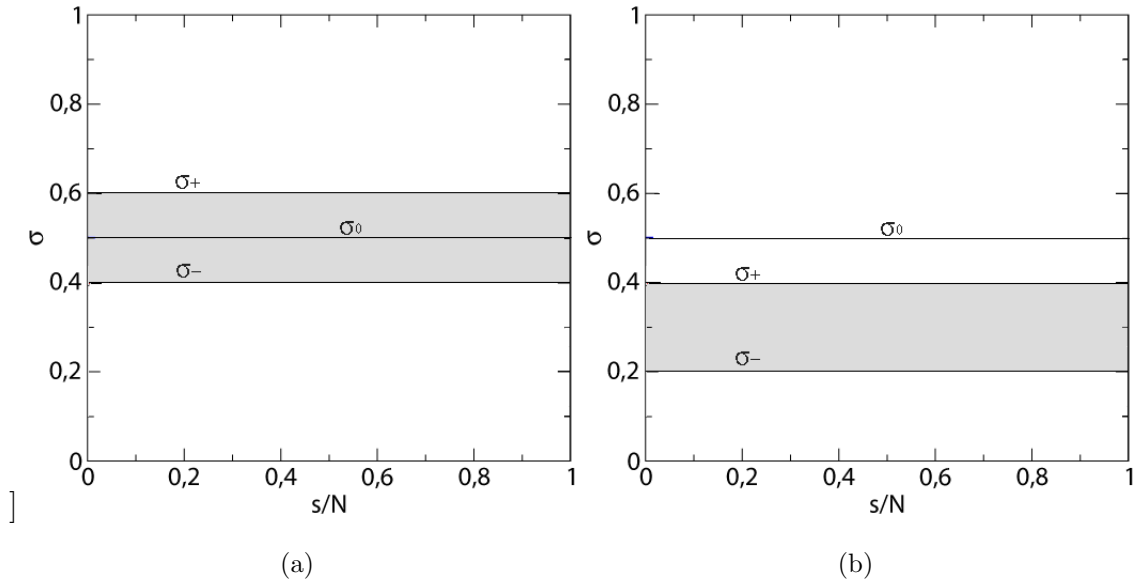


Figura 3.8: Representação gráfica do número de modos normais que satisfazem a condição (3.36). Se esta relação é atendida então todos os modos normais (com exceção do modo  $s=0$ ) são instáveis - figura (a); caso contrário todos os modos normais são estáveis - figura (b).

para uma situação específica do caso global, para isto fazemos  $N=101$  e assim obtemos, pela equação (3.33),  $\sigma_0(\alpha = 1) \simeq 1/2$ . Com este valor substituído na inequação (3.42) a relação a ser satisfeita para que ocorra a instabilidade de Turing é:

$$P > Q + 1, \quad (3.43)$$

a qual é mostrada pela figura (3.9).

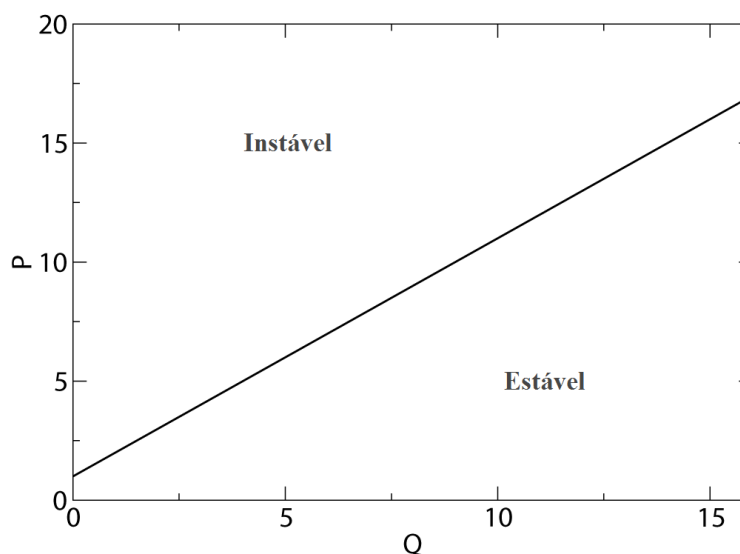


Figura 3.9: Condições que definem a instabilidade de Turing no espaço de parâmetros para o caso de acoplamento global,  $N = 101$ .

### 3.6.3 Caso $\alpha=1$

Com o intuito de confrontar resultados, aplicaremos as condições de estabilidade a outro caso particular e, após isto, discutiremos eventuais diferenças encontradas em relação às situações já estudadas. Também pretendendo encontrar e expor comportamentos diferentes, escolhemos uma situação intermediária, o caso  $\alpha = 1$ . Para este caso calcularemos as condições que determinam a instabilidade de Turing e analisaremos graficamente as circunstâncias em que poderá haver a formação de padrões.

Estimamos numericamente que  $\sigma_{max}(\alpha = 1) \simeq 0.55$ , para  $N=101$ , esta estimativa também pode ser feita de maneira qualitativa através da figura (3.5). Substituindo este valor no conjunto de inequações (3.40) encontramos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q > 0 \\ P > 2\sqrt{Q}, \quad 0 \leq P \leq 2, 20 \\ P > \left(\frac{9}{10}\right)Q + \left(\frac{11}{10}\right), \quad P > 2, 20 \end{array} \right. , \quad (3.44)$$

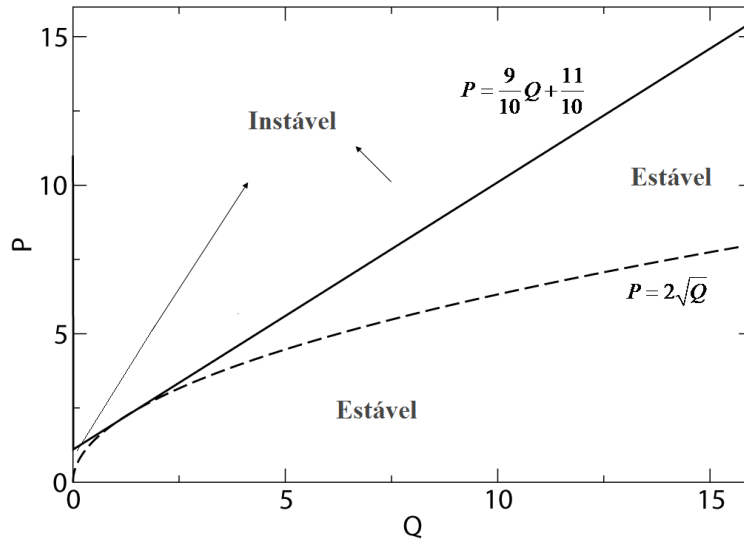


Figura 3.10: Condições que definem a instabilidade de Turing no espaço de parâmetros para o caso  $\alpha = 1$ ,  $N = 101$ .

que são as condições a serem satisfeitas para se obter a instabilidade de Turing e são mostradas pela figura (3.10). Em relação à formação de padrões a sua ocorrência é possível; mas devido à forma achatada da curva  $\sigma(s)$  para este caso os padrões encontrados aqui podem ser padrões diferentes se comparados aos do caso local. Isto pode acontecer devido ao fato de termos uma maior sensibilidade no número de modos normais instáveis e estáveis no sistema em relação aos valores  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , quando comparamos este caso com o caso local, situação indicada pela figura (3.11).

### 3.6.4 Área no Espaço de Parâmetros $(P, Q)$

Até este momento obtivemos as condições de instabilidade de três situações específicas, o caso global, o caso local e o caso intermediário  $\alpha = 1$ . Para estas três configurações também discutimos sobre a possibilidade da formação de padrões na rede, usando para isto a forma que curva  $\sigma(s)$  assume em cada ocasião.

Agora iremos tratar sobre o que acontece especificamente no espaço de parâmetros com a variação de  $\alpha$ , isto é, discutiremos a dependência das condições calculadas, necessárias para se obter a instabilidade de Turing, em relação ao alcance do acoplamento.

Como já demonstrado, existem dois casos limites e opostos para o acoplamento do tipo lei de potência, eles são o caso local e o global. As condições que definem a quebra de estabilidade para estes casos são definidos pelas relações (3.41) e (3.42) respectivamente. Situações intermediárias são determinadas pelo conjunto de inequações (3.40). Neste momento podemos nos perguntar: o que acontece com as condições de instabilidade se aumentarmos gradualmente o valor de  $\alpha$  entre os casos limites (ou pelo menos de zero a um valor bem alto)?

Esta pergunta é respondida se observarmos que a dependência das relações

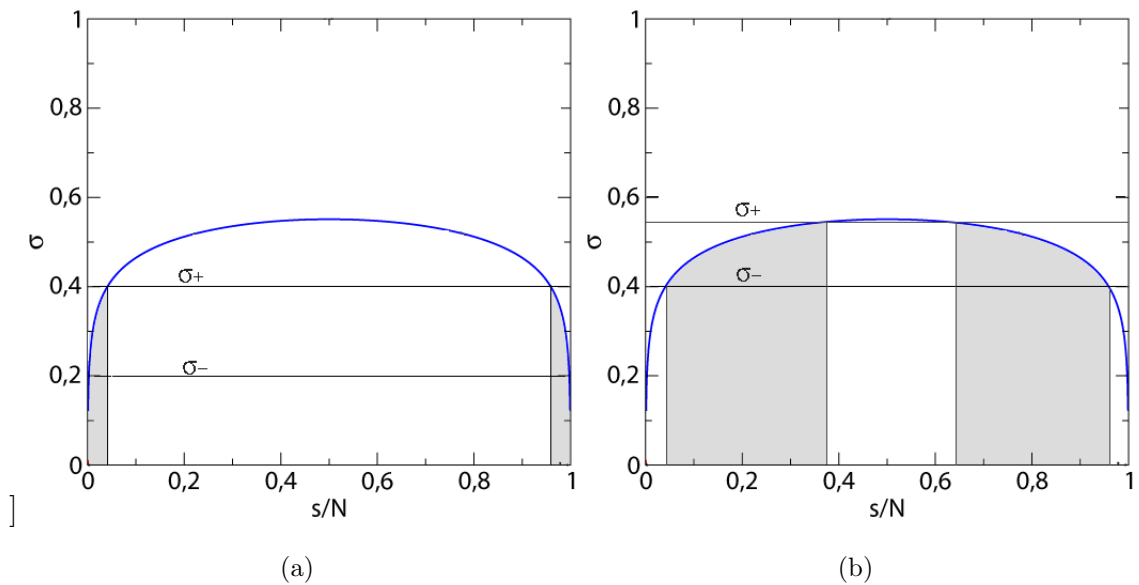


Figura 3.11: Representação dos modos normais instáveis na presença de acoplamento para o caso  $\alpha = 1$  (os quais se encontram na área sombreada). O número de modos instáveis ou estáveis é extremamente dependente do valor de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , se comparado com o caso local. Na figura (a) os valores destes parâmetros estabelecem um situação com poucos modos normais instáveis. Por outro lado na figura (b) o número de modos em um estado instável é maior.

de instabilidade em relação a  $\alpha$  são determinadas por  $\sigma_{max}$ , nos resta determinar então como  $\sigma_{max}$  varia em função de  $\alpha$  - o que pode ser feito de maneira qualitativa pelas figuras (3.4) e (3.5). Logo, considerando  $N=101$  (de maneira que por (3.33),  $\sigma_0(\alpha = 1) \simeq 1/2$ , pois a finalidade aqui é comparar usando a situação já sugerida no caso global). Pela figura (3.4) é possível notar, que de acordo com que variamos  $\alpha$  no intervalo  $[0, \infty)$  o máximo da função  $\sigma$  varia de maneira equivalente no intervalo  $[1/2, 1)$ , e esta variação se dá maneira direta - ao aumentar  $\alpha$ ,  $\sigma_{max}$  também aumenta e vice e versa. Portanto, os intervalos de validade das curvas das condições (3.40) mudam com alteração de  $\alpha$ . Esta mudança se dá de forma que com o aumentar de  $\alpha$  a área, no espaço de parâmetros  $(P, Q)$ , que define condições de instabilidade também aumenta, como mostrado pela figura (3.12). Na mesma figura podemos observar que o caso local é a situação na qual esta área é máxima, em outras palavras, a interação difusiva é ocasião que fornece o maior conjunto de valores para obtenção da quebra de estabilidade. Ao mesmo tempo, é possível verificar, também pela figura (3.12), que a área de instabilidade é mínima para o caso global, ou seja, o acoplamento de campo médio fornece o menor conjunto de valores no espaço de parâmetros para se obter a instabilidade de Turing.

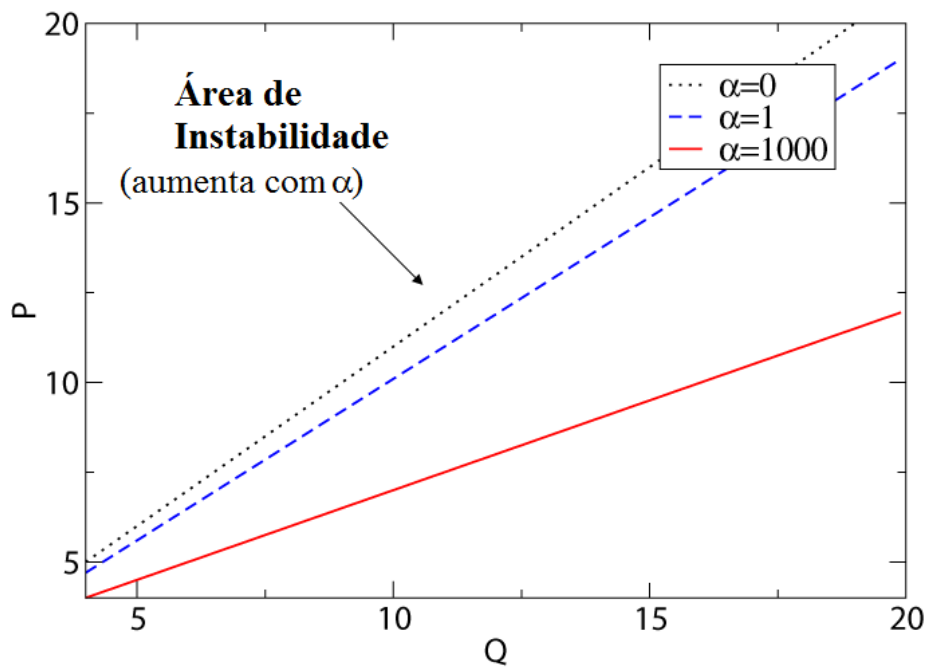


Figura 3.12: Comparação, no espaço de parâmetros, das condições necessárias para se obter a instabilidade de Turing para os casos particulares calculados. A seta indica o aumento da área de instabilidade, o qual acontece quando majoramos o alcance do acoplamento  $\alpha$ .

# Capítulo 4

## Modelo Não-Linear para Reação Química

### 4.1 Introdução

Em resumo, até agora buscamos as condições que fornecem a instabilidade de Turing e formação de padrões em duas circunstâncias específicas. A primeira delas, a interação difusiva, sugerida pelo próprio Turing, é a base de nosso estudo. A segunda, a generalização proposta neste trabalho, admite a formação de padrões, mas em situações particulares.

Por outro lado, as hipóteses fundamentais as quais empregamos foram aplicadas a reações químicas genéricas. Além disto, a análise destas equações foi principalmente baseada em uma teoria linear. Deste modo é possível que alguns comportamentos não tenham entrado no nosso estudo.

Por estes motivos agora utilizaremos um modelo não linear, criado por Meinhardt e Gierer, para descrever a competição entre o ativador e o inibidor. Aplicaremos a este modelo todas as conjecturas utilizadas para o caso das equações

genéricas e mostraremos tanto analiticamente (neste capítulo) quanto numericamente - no próximo capítulo - que realmente é possível obter tanto a instabilidade de Turing quanto a formação de padrões usando o sistema de Meinhardt-Gierer.

## 4.2 Equações de Meinhardt-Gierer

Até este momento supomos que as equações que regem a dinâmica de cada célula  $k$  que compõe o sistema eram de uma reação química genérica, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = X(x_k, y_k) \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = Y(x_k, y_k). \end{cases}$$

Fizemos isto, devido ao fato de a maior parte da teoria desenvolvida se basear na linearização destas relações. Porém, ao se fazer a aproximação linear alguns aspectos podem ser perdidos e não estudados. Um exemplo é o ponto de saturação que existe para a concentração do ativador e do inibidor ao se considerar equações não-lineares. Este ponto limita a divergência dos valores das variáveis envolvidas quando o sistema é instável; o que não acontece quando o estudo é feito através de equações lineares. Além disto, é importante aplicar a teoria geral desenvolvida nos capítulos anteriores a uma situação em particular.

Portanto, devido a estes argumentos, vamos agora aplicar todo o mecanismo estudado a um modelo de reação química não-linear. Escolhemos um conjunto de equações que reproduzem a competição de uma espécie química ativadora  $a$  com uma espécie química inibidora  $h$  (assim como imaginado por Turing). Este modelo proposto por Meinhardt-Gierer em 1972 [10] contém uma variedade de comportamentos que serão úteis na elucidação de alguns pontos cruciais da formação de padrões. Ele é representado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = \frac{\rho_a a^2}{(1+k_a a^2)h} - \mu_a a + \sigma_a = f(a, h) \\ \frac{dh(t)}{dt} = \rho_h a^2 - \mu_h h + \sigma_h = g(a, h) \end{cases}, \quad (4.1)$$

sendo  $a$  e  $h$  as concentrações do ativador e inibidor respectivamente, e  $\rho_a, \rho_h, k_a, \mu_a, \mu_h, \sigma_a$  e  $\sigma_h$  são parâmetros cujos seus significados daremos a seguir.

O modelo de Meinhardt-Gierer supõe que o ativador é uma espécie química auto-catalítica. Esta afirmação é descrita pelo termo  $\rho_a a^2 [(1 + k_a a^2)h]^{-1}$ ; pois segundo ele a concentração do ativador depende diretamente do seu próprio valor, representando assim um auto-crescimento. Além disso, este termo reproduz a oposição realizada pelo inibidor, visto que a presença de  $h$  no denominador ocasiona um abrandamento na criação de partículas ativadoras. Outra atenuação no fator auto-catalítico também é causada pelo próprio ativador, esta diminuição está sujeito ao valor da constante de saturação  $k_a$ . As quantidades  $\mu_a$  e  $\mu_h$  representam a degradação do ativador e do inibidor respectivamente, a qual é relacionada diretamente com o valor de  $a$  e  $h$ . O termo  $\sigma_a$  faz o papel da produção espontânea do ativador, da mesma maneira que  $\sigma_h$  simboliza a criação espontânea do inibidor - ambos não dependem dos valores de  $a$  e  $h$ ;  $\sigma_a$  também é o responsável pelo início da autocatálise do ativador quando seu valor é pequeno. A quantidade  $\rho_a a^2$  representa o acionamento do inibidor devido à presença do ativador e é crucial para que exista uma espécie de competição entre estas duas substâncias químicas. Um diagrama destas explicações pode ser visto através da figura (4.1).

Como vimos, as equações de Meinhardt-Gierer reproduzem os pontos essenciais de uma competição entre duas espécies químicas, que denotamos ativador e inibidor. Nestas equações o ativador é dotado de um auto-crescimento enquanto o inibidor é permanentemente acionado com a presença da substância ativadora. No entanto, como veremos mais a frente, para que exista a formação de padrões, além de termos de considerar a interação entre as células, a substância inibidora deve ter um alto coeficiente de acoplamento, de forma que qualquer alteração na rede se espalhe rapidamente.

O objetivo principal aqui é aplicar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores ao modelo Meinhardt-Gierer. Logo, consideraremos que o sistema a ser estudado é uma rede unidimensional, composta por  $N$  sítios ( $N$  é um número ímpar)

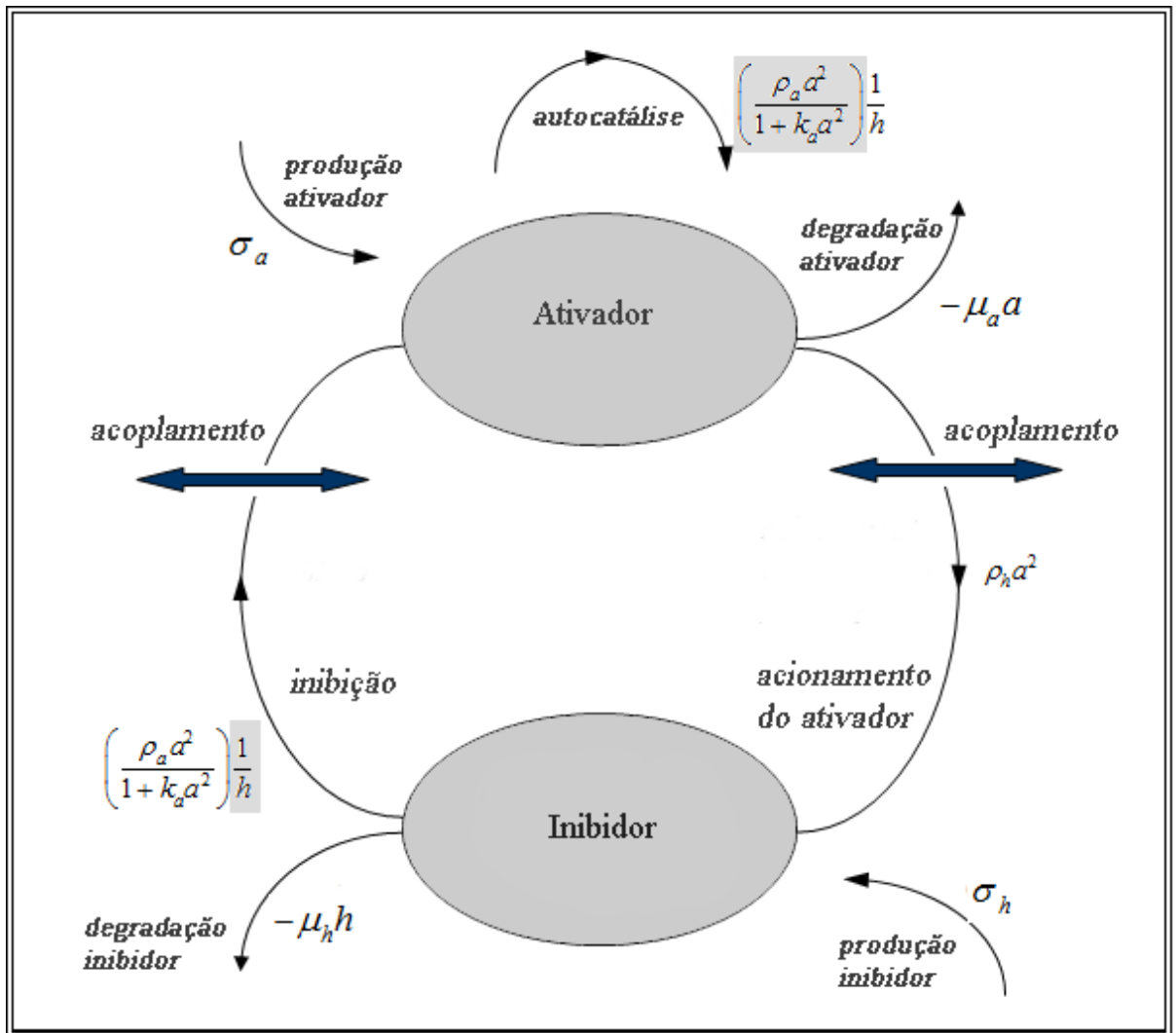


Figura 4.1: Diagrama explicativo da dinâmica das equações de Meinhardt-Geierer.

e com condições de contorno periódicas. Em cada célula desta rede ocorrerá uma reação química cuja dinâmica será governada pelas relações de Meinhardt-Gierer. Assumimos, também, que cada elemento da rede interage com os outros através de uma lei de potência. Assim, poderemos rever todos os casos particulares já calculados; o que inclui o próprio caso difusivo proposto por Turing. O sistema é representado

por:

$$\begin{cases} \frac{da_k(r,t)}{dt} = \rho_a a_k^2 [(1 + k_a a_k^2) h_k]^{-1} - \mu_a a_k + \sigma_a - D_a a_k + \frac{D_a}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (a_{k-r} + a_{k+r}) \\ \frac{dh_k(r,t)}{dt} = \rho_h a_k^2 - \mu_h h_k + \sigma_h - D_h h_k + \frac{D_h}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (h_{k-r} + h_{k+r}) \end{cases}, \quad (4.2)$$

sendo  $D_a$  e  $D_h$  constantes que determinam a intensidade do acoplamento.

## 4.3 Análise de Estabilidade

### 4.3.1 Pontos de Equilíbrio

O primeiro passo da análise da estabilidade é encontrar os pontos de equilíbrio das equações envolvidas, em outras palavras, temos que definir qual é o estado homogêneo para este modelo. Seguindo as definições propostas no apêndice A temos que os pontos fixos do sistema desacoplado são dados por:

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = f(a^*, h^*) = 0 \\ \frac{dh(t)}{dt} = g(a^*, h^*) = 0 \end{cases},$$

o que equivale à

$$\begin{cases} 0 = \frac{\rho_a a^{*2}}{(1+k_a a^{*2})h^*} - \mu_a a^* + \sigma_a = f(a^*, h^*) \\ 0 = \rho_h a^{*2} - \mu_h h^* + \sigma_h = g(a^*, h^*) \end{cases}. \quad (4.3)$$

Nossa análise é feita supondo, por simplicidade, que  $\sigma_a = \sigma_h = k_a = 0$ , isto é, conjecturamos que não há criação espontânea de moléculas de  $a$  e  $h$ , e que o abrandamento da autocatálise do ativador é realizado unicamente pelo inibidor. Com estas considerações podemos escrever:

$$\begin{cases} a^{*2} (a^* \mu_a \rho_h - \rho_a \mu_h) = 0 \\ h = \rho_h a^{*2} \mu_h^{-1} \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema, obtemos dois pontos de equilíbrio. O primeiro

$$\begin{cases} a_0^* = 0 \\ h_0^* = 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

é uma solução trivial, na qual as concentrações de  $a$  e  $h$  são nulas, e não será considerada. O segundo,

$$a_1^* = \frac{\rho_a \mu_h}{\rho_h \mu_a}, \quad h_1^* = \frac{\rho_a^2 \mu_h}{\rho_h \mu_a^2}, \quad (4.5)$$

é o resultado que utilizaremos [23]. Resta agora linearizar (4.1) e obter as condições de estabilidade e instabilidade.

### 4.3.2 Linearização

O próximo passo é linearizar o conjunto de equações (4.1); para assim além de realizar a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio calculado, comparar as equações linearizadas com as obtidas em capítulos anteriores. Adotamos então o procedimento descrito no apêndice A e calcularmos a matriz jacobiana do sistema simplificado ( $\sigma_a = \sigma_h = k_a = 0$ ):

$$J(a^*, h^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_{(a^*, h^*)} & \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{(a^*, h^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial a} \Big|_{(a^*, h^*)} & \frac{\partial g}{\partial h} \Big|_{(a^*, h^*)} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Como - já considerando a simplificação -

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2\rho_a a}{h} - \mu_a, \quad \frac{\partial f}{\partial h} = \frac{-\rho_a a^2}{h^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 2\rho_h a \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial h} = -\mu_h. \quad (4.7)$$

A matriz jacobiana no ponto de equilíbrio é:

$$J(a_1^*, h_1^*) = J_1 = \begin{pmatrix} \mu_a & \frac{-\mu_a^2}{\rho_a} \\ \frac{2\rho_a \mu_h}{\mu_a} & -\mu_h \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Através desta matriz podemos determinar os intervalos de estabilidade e instabilidade do ponto de equilíbrio.

## Estabilidade

Para que o ponto de equilíbrio encontrado seja estável ele deve obedecer às seguintes condições:

$$Tr [J(a_1^*, h_1^*)] < 0 \quad (4.9)$$

e

$$Det [J(a_1^*, h_1^*)] > 0. \quad (4.10)$$

Aplicando (4.8) em (4.9) temos:

$$\mu_a - \mu_h < 0, \quad (4.11)$$

assim como (4.8) em (4.10) fornece;

$$\mu_a \mu_h > 0. \quad (4.12)$$

Também podemos determinar se o ponto fixo será um foco estável (as trajetórias convergem assintoticamente para o ponto fixo) ou um nó estável (as trajetórias convergem exponencialmente para o ponto fixo), para isto empregamos novamente os resultados do apêndice A. Se a seguinte inequação é satisfeita, então o ponto fixo é um foco estável;

$$Tr (J_1)^2 - 4Det (J_1) < 0, \quad (4.13)$$

a qual aplicada em (4.8) resulta:

$$\mu_a^2 + \mu_h^2 < 6\mu_a\mu_h. \quad (4.14)$$

Esta inequação pode ser resolvida para  $\mu_a$ :

$$\mu_h (3 - 2\sqrt{2}) < \mu_a < \mu_h (3 + 2\sqrt{2}). \quad (4.15)$$

Da mesma maneira, para que o ponto de equilíbrio seja um nó estável deve obedecer à seguinte relação:

$$Tr (J_1)^2 - 4Det (J_1) > 0, \quad (4.16)$$

de (4.8) em (4.16) obtemos;

$$\mu_a^2 + \mu_h^2 > 6\mu_a\mu_h, \quad (4.17)$$

resolvendo esta inequação para  $\mu_a$  temos:

$$\mu_h(3 - 2\sqrt{2}) > \mu_a, \quad \mu_h(3 + 2\sqrt{2}) < \mu_a. \quad (4.18)$$

As relações (4.11), (4.15) e (4.18) são condições de estabilidade e se encontram expostas na figura (4.2).

### Instabilidade

Para que o ponto de equilíbrio  $(a_1, h_1)$  seja instável as relações a serem satisfeitas são as relações (4.12) e:

$$Tr [J(a_1^*, h_1^*)] > 0, \quad (4.19)$$

a qual aplicada ao nosso caso origina;

$$\mu_a - \mu_h > 0. \quad (4.20)$$

A condição para que o sistema seja um foco instável também é dada pela inequação (4.15). Do mesmo modo, para que o ponto de equilíbrio seja um nó instável deve atender a inequação (4.18). Estas condições são ilustradas na figura (4.2).

### 4.3.3 Equivalência com o Sistema Linear Genérico

A matriz jacobiana (4.8) define a linearização do sistema próximo ao ponto de equilíbrio  $(a_1, h_1)$ , portanto, através dela, podemos escrever as equações linearizadas correspondentes ao modelo de Meinhardt-Gierer no ponto fixo considerado. Estas equações são:

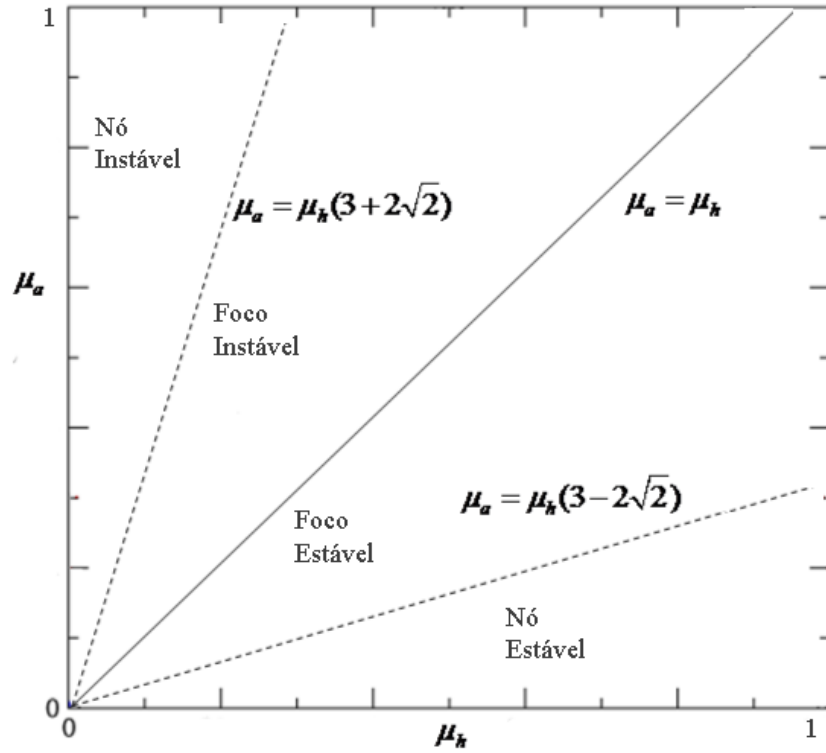


Figura 4.2: Condições obtidas da análise de estabilidade do ponto de equilíbrio  $(a_1, h_1)$ .

$$\begin{cases} \frac{da_k(r,t)}{dt} = (\mu_a - D_a)a_k + \left(-\frac{\mu_a^2}{\rho_a}\right)h_k + \frac{D_a}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (a_{k-r} + a_{k+r}) \\ \frac{dh_k(r,t)}{dt} = -(\mu_h + D_h)h_k + \left(\frac{2\rho_a\mu_h}{\mu_a}\right)a_k + \frac{D_h}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (h_{k-r} + h_{k+r}) \end{cases} \quad (4.21)$$

Desta forma podemos comparar as relações acima com as encontradas no caso genérico, equação (3.13),

$$\begin{cases} \frac{dx_k(r,t)}{dt} = (A - \mu)x_k + By_k + \frac{\mu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (x_{k-r} + x_{k+r}) \\ \frac{dy_k(r,t)}{dt} = (D - \nu)y_k + Cx_k + \frac{\nu}{\kappa_0(\alpha)} \sum_{r=1}^{N'} \frac{1}{r^\alpha} (y_{k-r} + y_{k+r}) \end{cases}, \quad (4.22)$$

e assim identificar as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} x = a, \quad y = h, \quad A = \mu_a, \quad B = -\frac{\mu_a^2}{\rho_a}, \\ C = 2\rho_a \frac{\mu_h}{\mu_a}, \quad D = -\mu_h, \quad \mu = D_a \quad e \quad \nu = D_h. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Conseqüentemente, devido a estas igualdades, também escrevemos:

$$P = \frac{\mu_a}{D_a} - \frac{\mu_h}{D_h} = \frac{\mu_a D_h - \mu_h D_a}{D_a D_h} \quad e \quad Q = \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h}. \quad (4.24)$$

Com estas conexões podemos obter as condições necessárias para instabilidade de Turing - as quais já foram determinadas para o caso genérico - em função dos parâmetros das equações de Meinhardt-Gierer.

## 4.4 Condições de Instabilidade para as Equações de Meinhardt-Gierer

### 4.4.1 Caso geral

Como já conseguimos as principais equivalências entre os termos da teoria linear desenvolvida no capítulo anterior e as equações de Meinhardt-Gierer, agora podemos escrever todas as condições de instabilidade do sistema acoplado para este modelo, logo, através da relação (3.40) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q > 0 \\ P > 2\sqrt{Q}, \quad 0 \leq P \leq 4\sigma_{max} \\ P > \frac{Q}{2\sigma_{max}} + 2\sigma_{max}, \quad P > 4\sigma_{max} \end{array} \right. ,$$

assim de (4.24),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h} > 0 \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > 2D_a D_h \sqrt{\frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h}} \\ \text{se } 0 \leq \mu_a D_h - \mu_h D_a \leq (4\sigma_{max}) D_a D_h \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > \left(\frac{1}{2\sigma_{max}}\right) \mu_a \mu_h + (2\sigma_{max}) D_a D_h \\ \text{se } \mu_a D_h - \mu_h D_a > 4(\sigma_{max}) D_a D_h \end{array} \right. . \quad (4.25)$$

Estas relações são as condições necessárias para se obter a instabilidade de Turing no acoplamento do tipo lei de potência. Em seções posteriores aplicaremos estas condições a situações mais específicas, nas quais alguns resultados interessantes poderão ser obtidos.

#### 4.4.2 Caso Local

Partindo da condição para que o sistema linear seja instável na presença do acoplamento difusivo, equação (3.41), e substituindo as relações (4.23) e (4.24) nesta condição achamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h} > 0 \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > 2D_a D_h \sqrt{\frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h}}, \quad 0 \leq \mu_a D_h - \mu_h D_a \leq 4D_a D_h \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > \left(\frac{1}{2}\right) \mu_a \mu_h + 2D_a D_h, \quad \mu_a D_h - \mu_h D_a > 4D_a D_h \end{array} \right. . \quad (4.26)$$

Estas são as condições que utilizaremos nas simulações numéricas a serem realizadas no capítulo seguinte.

#### 4.4.3 Caso Global

Para o caso global a relação que fornece a instabilidade de Turing é a equação (3.42):

$$P > \frac{Q}{2\sigma_0} + 2\sigma_0,$$

portanto,

$$\mu_a D_h - \mu_h D_a > \left( \frac{1}{2\sigma_0} \right) \mu_a \mu_h + (2\sigma_0) D_a D_h, \quad (4.27)$$

esta inequação pode ser simplificada se fizermos a suposição que  $N=101$  (o mesmo valor de  $N$  utilizado no exemplo do capítulo 3), neste caso a condição é:

$$P > Q + 1$$

o que implica

$$\mu_a D_h - \mu_h D_a > \mu_a \mu_h + D_a D_h. \quad (4.28)$$

Esta é a situação a qual usaremos nas simulações numéricas apontadas no capítulo seguinte.

#### 4.4.4 Caso $\alpha = 1$

Para o caso particular  $\alpha = 1$ , também conjecturamos que  $N=101$ , desta maneira as equações (3.44) resultam em;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h} > 0 \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > 2D_a D_h \sqrt{\frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h}}, \quad 0 \leq \mu_a D_h - \mu_h D_a \leq \left(\frac{22}{10}\right) D_a D_h \\ \mu_a D_h - \mu_h D_a > \left(\frac{9}{10}\right) \mu_a \mu_h + \left(\frac{11}{10}\right) D_a D_h, \quad \mu_a D_h - \mu_h D_a > \left(\frac{22}{10}\right) D_a D_h \end{array} \right. . \quad (4.29)$$

Estas condições serão exploradas mais a fundo a seguir.

# Capítulo 5

## Simulações Numéricas do Modelo de Meinhardt-Gierer

### 5.1 Introdução

Agora aplicaremos as condições de instabilidade obtidas para o modelo de Meinhardt-Gierer em situações mais específicas, ou seja, atribuiremos valores aos parâmetros do sistema. Após isto, faremos a simulação numérica destas configurações e, assim, mostraremos em que circunstâncias ocorrem a formação de padrões e a instabilidade de Turing, tendo como objetivo complementar a busca dos significados físico-químicos das relações encontradas.

## 5.2 Método

Para simular numericamente casos anteriores, utilizaremos um integrador numérico chamado de Lsoda [24]. Nossa meta é simular as equações acopladas computacionalmente e mostrar que os resultados numéricos concordam com os analíticos, além de discutir outros resultados que surgirem.

A simulação numérica será feita para duas situações, cada uma com um conjunto de valores dos parâmetros da equação de Meinhardt-Gierer diferentes. Deste modo será possível estudar a variação das condições necessárias para se conseguir a instabilidade de Turing e a formação de padrões em duas circunstâncias distintas.

Independentemente da configuração escolhida para realizar a simulação, temos que recordar que na teoria de Turing todos os sítios da rede, inicialmente, devem se encontrar no mesmo estado de equilíbrio. Em outras palavras, o sistema precisa estar em um estado homogêneo que é estável sem a presença do acoplamento. Também é necessário lembrar que a instabilidade de Turing surge com a interação entre os sítios da rede; e a formação de padrões se deve a uma pequena perturbação no estado homogêneo inicial, a qual cresce devido à instabilidade criada com o acoplamento.

Logo, para atender estes pressupostos, vamos considerar que cada célula, tomada de maneira isolada, se encontra necessariamente no estado de equilíbrio definido pela relação (4.5), a saber,

$$a_1^* = \frac{\rho_a \mu_h}{\rho_h \mu_a}, \quad h_1^* = \frac{\rho_a^2 \mu_h}{\rho_h \mu_a^2}, \quad (5.1)$$

isto é, este ponto fixo representará o estado uniforme inicial do sistema.

Da mesma maneira, cada célula isolada também necessita estar obrigatoriamente em um estado estável, conseqüentemente as condições (4.14) e (4.15) devem ser satisfeitas;

$$\mu_a - \mu_h < 0 \quad (5.2)$$

e

$$\mu_a \mu_h > 0. \quad (5.3)$$

As inequações (5.1), (5.2) e (5.3) são as condições básicas que qualquer conjunto de valores escolhido para os parâmetros do sistema deve atender.

Feito estas considerações, iremos propor os dois conjuntos de valores para as constantes do modelo de Meinhardt- Gierer, os quais chamaremos a partir de agora de exemplo 1 e exemplo 2. Para cada conjunto calcularemos as condições de instabilidade e simularemos computacionalmente a rede.

### 5.2.1 Exemplo 1

O primeiro conjunto de valores para os parâmetros que utilizamos é o proposto por Meinhardt e Koch em [10], na qual temos,

$$\mu_a = 0,01, \quad \mu_h = 0,02, \quad \rho_a = 0,01 \quad e \quad \rho_h = 0,02. \quad (5.4)$$

Substituindo estas quantidades na equação (4.8), observamos que o ponto de equilíbrio é definido por  $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$ . Ao mesmo tempo é possível observar, pelas relações (4.14), (4.15) e (4.18) (as quais são condições de estabilidade) que para esta situação o ponto fixo é um foco estável - o estado do sítio desacoplado converge oscilatoriamente para o ponto fixo, como mostrado pela figura (5.1).

### 5.2.2 Exemplo 2

A segunda configuração escolhida é definida por:

$$\mu_a = 1, \quad \mu_h = 2, \quad \rho_a = 1 \quad e \quad \rho_h = 2, \quad (5.5)$$

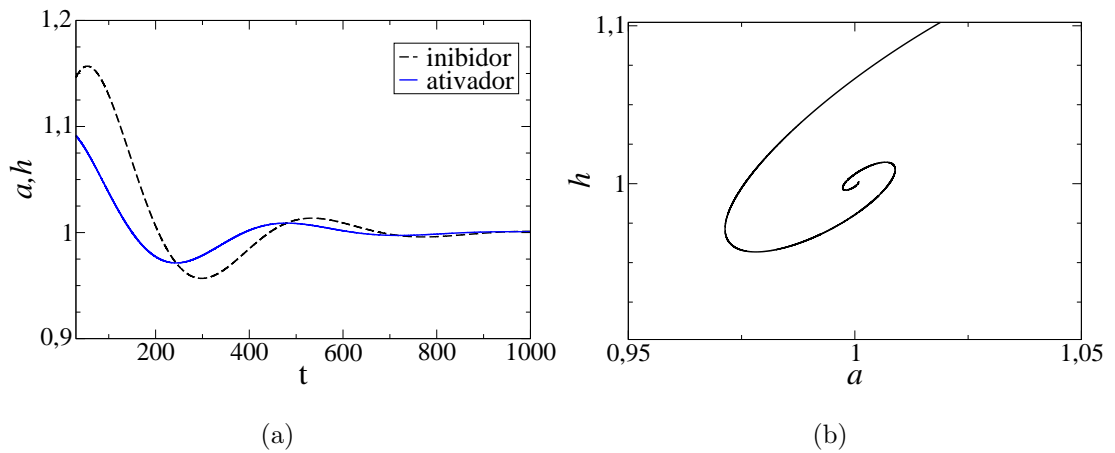


Figura 5.1: Para a primeira configuração o ponto de equilíbrio  $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$  é um foco estável.

esta situação apesar de diferente da primeira, fornece o mesmo ponto fixo, ou seja, aqui novamente  $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$ . Aplicando o conjunto de valores desta configuração às relações na estabilidade outra vez obtemos a condição de foco estável para o ponto de equilíbrio - vide figura (5.2).

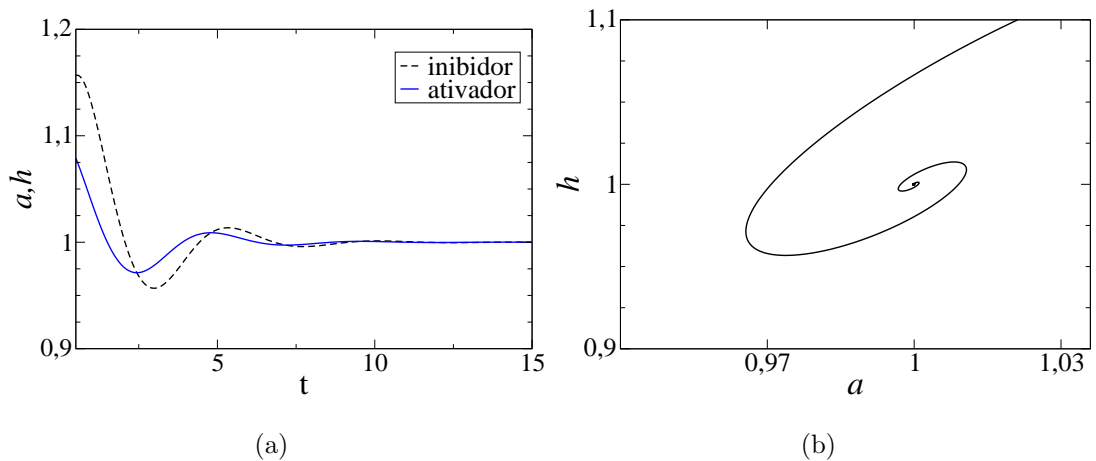


Figura 5.2: Para a segunda configuração o ponto fixo  $(a_1^*, h_1^*) = (1, 1)$  novamente é um foco estável.

Como um próximo passo agora simularemos numericamente o sistema acoplado usando estas configurações. O objetivo é, em cada caso discutido nos

capítulos anteriores, expor numericamente a instabilidade de Turing e a formação de padrões. A rede será simulada com o número de sítios  $N=101$  em todas as situações. A perturbação no estado uniforme inicial do sistema, no qual cada sítio se encontra no estado  $[a_k(t=0), h_k(t=0)] = (0, 9; 0, 9)$ , será feita da seguinte maneira: alteraremos o valor da concentração do inibidor dos sítios  $k=49$  e  $k=48$  para  $h(t=0) = 0,95$  e do sítio  $k=50$  para  $h(t=0) = 0,99$ . É interessante ressaltar que a alteração no estado homogêneo inicial é realizada somente para uma das espécies químicas e para três sítios da rede - pois a perturbação deve ser considerada pequena.

## 5.3 Caso Local

O caso difusivo, que é o modelo inicialmente proposto por Turing, apresenta a quebra de instabilidade e a formação de padrões para as duas circunstâncias. Entretanto, como mostraremos, a "intensidade" dos padrões depende dos valores das constantes  $D_a$  e  $D_h$ .

### 5.3.1 Exemplo 1

Aplicando ao primeiro exemplo as condições que fornecem a instabilidade de Turing para esta ocasião, sistema (4.26), temos;

$$\begin{cases} (D_h - 2D_a) > 10^{-2} + 200D_aD_h, & (D_h - 2D_a) > 400D_aD_h \\ (D_h - 2D_a) > \frac{2\sqrt{2}D_aD_h}{\sqrt{D_aD_h}}, & 0 \leq (D_h - 2D_a) \leq 400D_aD_h \end{cases} . \quad (5.6)$$

Para facilitar nossa análise optamos por atribuir um valor numérico a outra constante do modelo, supomos agora  $D_h = 0,2$ , valor também usado em [10]. Ou seja, escolhemos como parâmetro de controle a constante de acoplamento  $D_a$ . Assim, é possível encontrar para que valor de  $D_a$  ocorre a transição para a instabilidade

no sistema e, ao mesmo tempo, investigar para que valor de  $D_a$  há a formação de padrões.

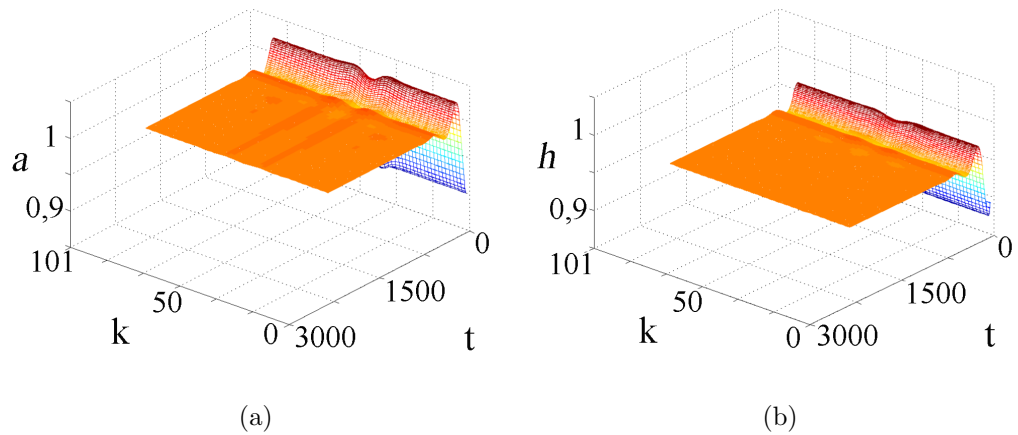


Figura 5.3: Representação gráfica da situação de estabilidade no sistema ( $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,019$ ), a perturbação adicionada é amortecida e a rede assume uma configuração uniforme. Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor.

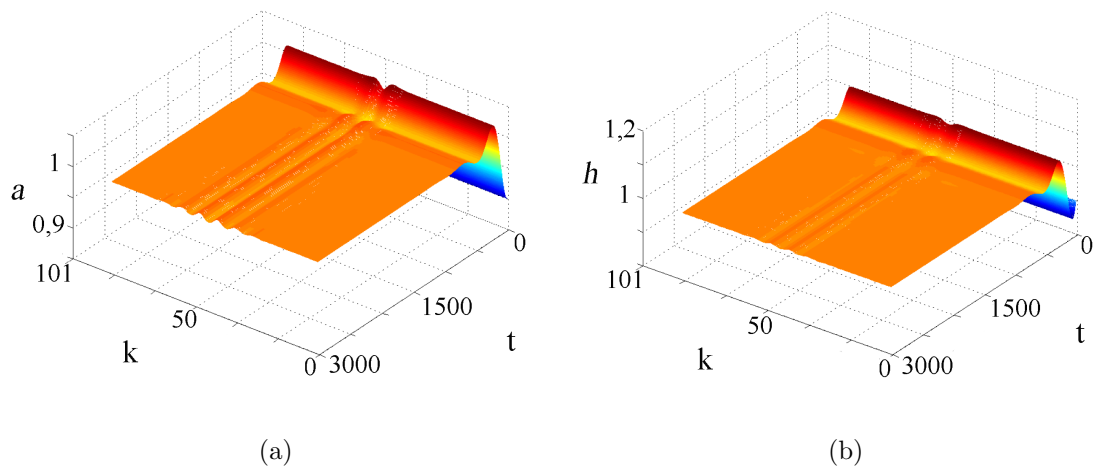


Figura 5.4: Para  $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,016$  a rede é instável. Porém seu estado, no espaço de parâmetros, está localizado próximo á fronteira de estabilidade. Nesta situação a perturbação adicionada se difunde pelo sistema ocasionando pequenas oscilações nos valores de  $a$  (figura (a)) e  $h$  (figura (b)).

Através do conjunto de inequações (5.6) e da sua combinação com o valor de  $D_h$ , mostra-se que a transição na estabilidade acontece aproximadamente em  $D_a = 0,019$ . Temos que para este valor, tanto numericamente quanto analiticamente, a rede é estável na presença do acoplamento, como mostrado pela figura (5.3). Logo, após um transiente, a perturbação adicionada é amortecida e todos os valores das concentrações de  $a$  e  $h$  tendem para o valor de equilíbrio  $(a_1, h_1)$ .

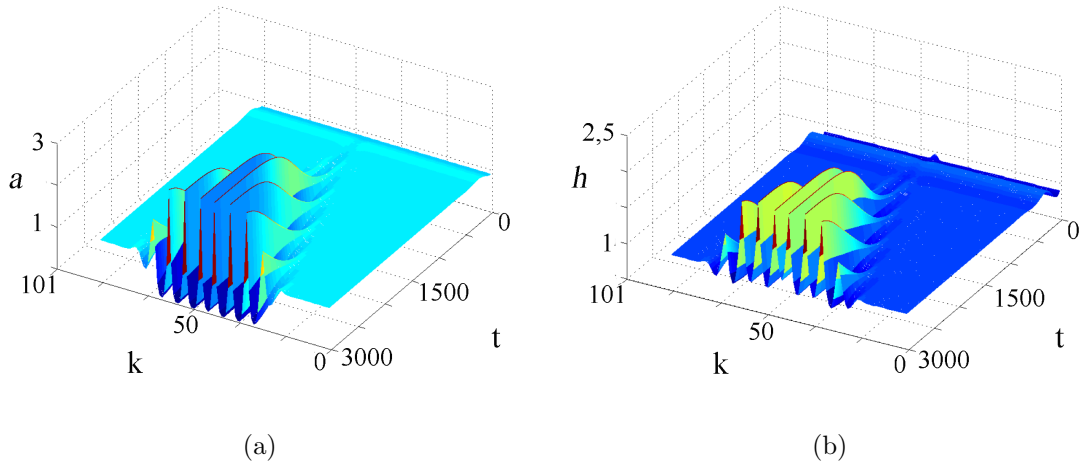


Figura 5.5: Para  $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,005$  o estado da rede, no espaço de parâmetros, se encontra mais afastado da fronteira de estabilidade. Aqui a perturbação inicial se espalha pelo sistema ocasionando grandes oscilações nos valores de  $a$  (figura (a)) e  $h$  (figura (b)).

Para  $D_a = 0,016$  o ponto fixo já é instável. Conseqüentemente, a perturbação no estado uniforme do sistema se difunde pela rede e ocasiona pequenas oscilações nos valores de  $a$  e  $h$  - vide figura (5.4), já formando assim um padrão espacial. Entretanto, se fizermos  $D_a = 0,005$ , valor proposto em [10], a alteração no estado inicial novamente se espalhará pela rede, porém ela originará uma oscilação de maior amplitude nos valores de  $a$  e  $h$ , formando um padrão mais bem definido que a situação anterior; como mostrado pela figura (5.5).

A diferença entre os dois últimos casos apresentados está relacionado com o ponto que representa o estado do sistema no espaço de parâmetros. Para a

primeira situação, na qual  $D_a = 0,016$ , o ponto citado está localizado próximo a curva marginal definida pelas inequações (5.6), isto é, o sistema está próximo a fronteira de estabilidade. Já na segunda situação, na qual  $D_a = 0,005$ , ele se localiza mais afastado da curva que define a transição na estabilidade, conseqüentemente, as amplitudes de oscilação das variáveis  $a$  e  $h$  serão maiores neste caso.

Outra conclusão, relacionado com a interação entre as células da rede, é que o inibidor tem de ter um coeficiente de difusão maior do que o do seu antagonista para que exista a instabilidade de Turing. Esta situação será também encontrada nos casos ulteriores e é facilmente explicada. Como apenas o ativador é suposto ser uma substância auto-catalítica; o inibidor deve se difundir mais rapidamente pelo sistema para que a competição entre as duas espécies químicas seja garantida.

### 5.3.2 Exemplo 2

Substituindo os valores que definem a segunda configuração, equações (5.5), nas relações (4.26) obtemos;

$$\begin{cases} (D_h - 2D_a) > 1 + 2D_a D_h, & (D_h - 2D_a) > 4D_a D_h \\ (D_h - 2D_a) > \frac{2\sqrt{2}D_a D_h}{\sqrt{D_a D_h}}, & 0 \leq (D_h - 2D_a) \leq 4D_a D_h \end{cases} \quad (5.7)$$

Do mesmo modo como ocorreu no primeiro exemplo, escolhemos como parâmetro de controle a constante de acoplamento  $D_a$ , fazemos então para esta configuração  $D_h = 2$ . Neste caso, a passagem para a instabilidade de Turing acontece aproximadamente em  $D_a = 0,08$ , valor para qual a rede é estável - para  $D_a = 0,07$  o sistema já passa a ser instável. Aqui, da mesma maneira que ocorreu no primeiro conjunto de valores, para que exista a quebra de estabilidade o coeficiente de difusão do inibidor deve ser maior que a do ativador. Na figura (5.6) expomos a situação de estabilidade obtida com  $D_a = 0,08$ . Devido ao fato de o estado uniforme ser estável a perturbação não consegue se difundir pela rede e, assim, o sistema após um certo

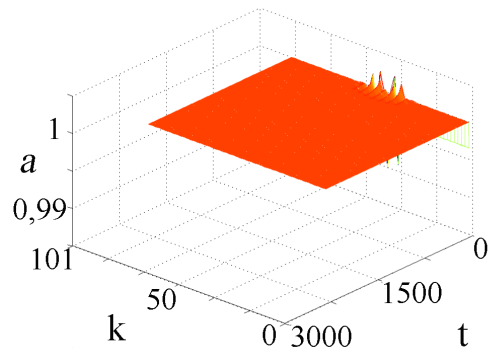


Figura 5.6: Para a segunda configuração aplicada ao caso local, os valores  $D_h = 2$  e  $D_a = 0,08$  fornecem uma situação de estabilidade para a rede, representada aqui pela variação temporal da concentração do ativador.

transiente tende ao valor definido por  $(a_1, h_1)$ .

Na figura (5.7) mostramos a situação de instabilidade, alcançada com  $D_a = 0,07$ . Nesta ocasião a perturbação se propaga pela rede formando o estado heterogêneo final.

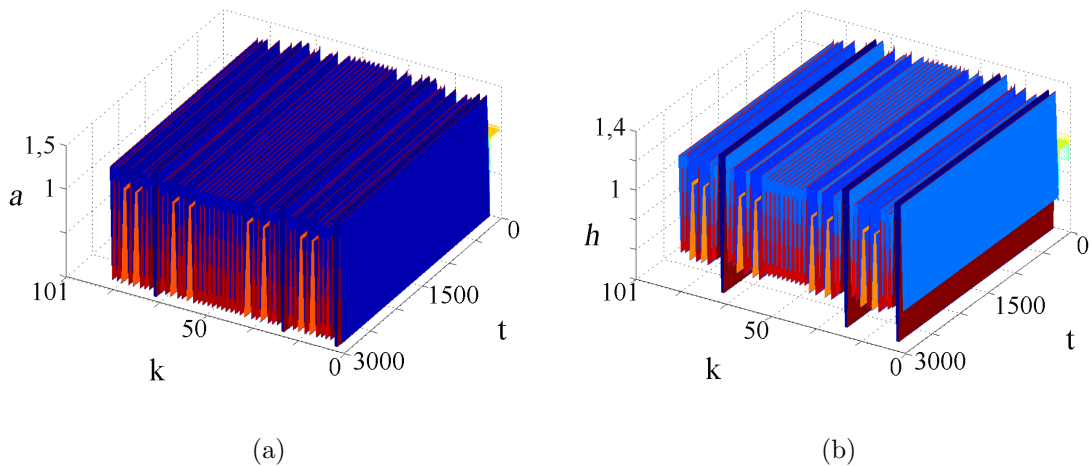


Figura 5.7: Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso difusivo aplicado ao exemplo 2. Nesta situação a perturbação no estado uniforme origina grandes oscilações nos valores de  $a$  (figura (a)) e  $h$  (figura (b)).

## 5.4 Caso Global

Para o caso global já mostramos, no capítulo 3, que não há a formação de padrões. Agora demonstraremos de forma numérica que esta conclusão realmente é válida. Do mesmo modo, mostraremos que existem situações em que não é possível obter nem mesmo a instabilidade de Turing.

### 5.4.1 Exemplo 1

Para este conjunto de valores temos, através da inequação (4.28), que a condição de instabilidade se traduz em:

$$\frac{(\mu_a D_h - \mu_h D_a)}{D_a D_h} > \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h} + 1 \Rightarrow (D_h - 2D_a) > 2.10^{-2} + 100D_a D_h,$$

esta inequação pode ser resolvida para  $D_a$  - escolhido como parâmetro de controle - e fornece, consideramos apenas os resultados que satisfazem  $D_a > 0$  e  $D_h > 0$ :

$$D_a < \frac{50D_h - 1}{5000D_h + 100}, \quad (5.8)$$

condição demonstrada pela figura (5.8).

Nesta ocasião supomos outra vez, como feito no caso local, que  $D_h = 0,2$ . Conseqüentemente, pela figura (5.8) e pela inequação (5.8), podemos observar que a transição na estabilidade ocorre aproximadamente em  $D_a = 0,009$ . Ou seja, temos que para  $D_a = 0,009$  o estado homogêneo inicial é estável, figura (5.9), mas quando fazemos, por exemplo,  $D_a = 0,005$  - valor também utilizado no caso local - ele se torna instável, figura (5.10).

Aqui novamente concluímos que a relação  $D_h > D_a$  tem de ser atendida para que ocorra a instabilidade de Turing, em outras palavras, a interação entre os

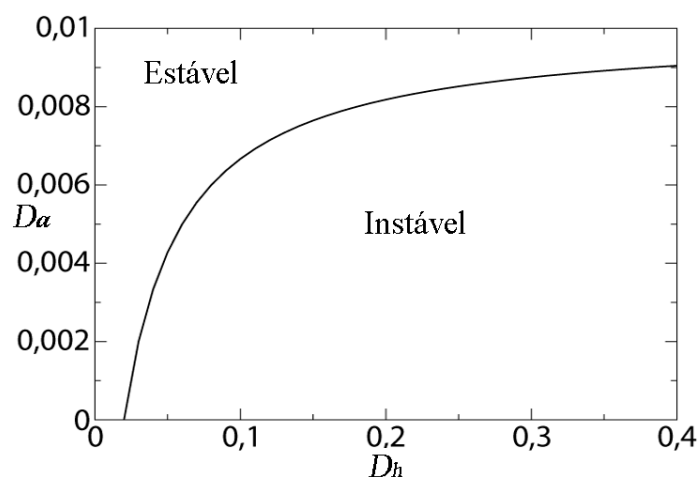


Figura 5.8: Condição que define a instabilidade de Turing no espaço  $(D_a, D_h)$  para o caso de acoplamento global.

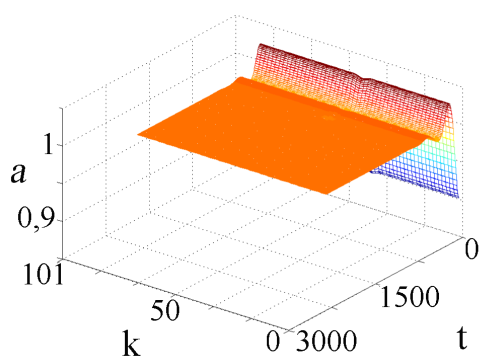


Figura 5.9: Representação gráfica de uma situação de estabilidade - plotamos apenas a variação temporal do ativador - conseguida ao se aplicar a primeira configuração ao caso global ( $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,009$ ).

sítios deve ser maior na variável  $h$  no que na variável  $a$ . Outra questão a ser discutida é o fato de não existir padrões para este caso. Pela figura (5.10), a qual mostra uma situação de instabilidade é possível observar que no local onde foi adicionada a perturbação há uma grande variação das concentrações do ativado e do inibidor em relação ao estado de equilíbrio. Esta variação, em relação ao estado homogêneo, se dá de maneira ilimitada e a perturbação cresce exponencialmente com o tempo (ela

não chega a um ponto de saturação como em outros casos). O resultado é que não temos a formação de um padrão estacionário; mas uma situação de divergência no sistema. Isto ocorre, como já exposto, devido aos valores  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , que são para este caso 0,89 e 0,05 respectivamente. Como  $\sigma(s \neq 0)_{\alpha=0} = 0,50$ , todos os modos (com exceção de  $\sigma(s = 0)_{\alpha=0} = 0$ ) satisfazem a relação (3.36)

$$\sigma_- < \sigma < \sigma_+,$$

isto é, todos os modos normais são instáveis com a presença de acoplamento.

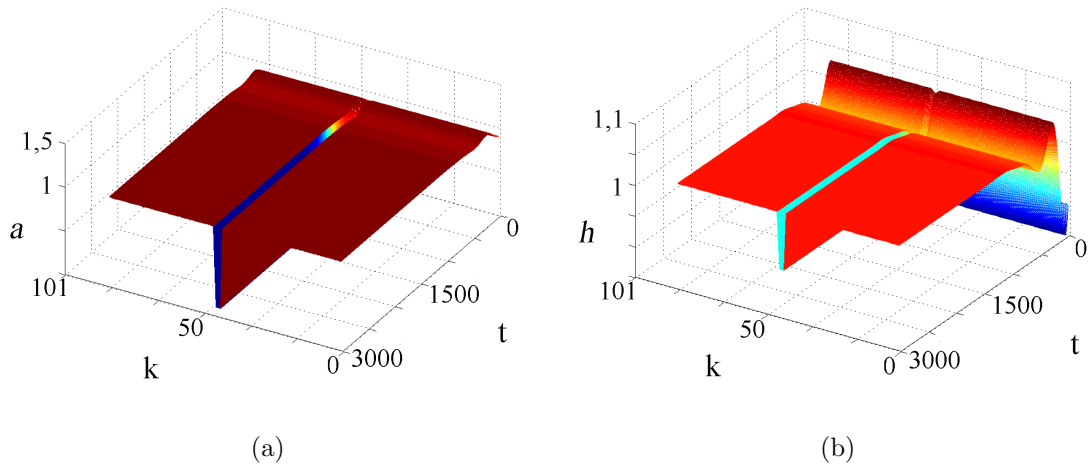


Figura 5.10: É possível obter a instabilidade de Turing através da aplicação da primeira configuração ao caso global -  $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,005$ . Entretanto, neste caso não existe a formação de padrões. Na figura (a) e (b) mostramos a evolução temporal do ativador e do inibidor respectivamente. Para esta situação a perturbação adicionada ao estado de equilíbrio aumenta exponencialmente com o tempo, ocasionando uma divergência no sistema.

### 5.4.2 Exemplo 2

Aplicando a condição (4.28) ao exemplo 2 temos que as relações de instabilidade tornam-se:

$$\frac{(\mu_a D_h - \mu_h D_a)}{D_a D_h} > \frac{\mu_a \mu_h}{D_a D_h} + 1 \Rightarrow (D_h - 2D_a) > 2 + (D_a D_h),$$

a qual resolvida para  $D_a$  fornece:

$$D_a < \frac{D_h - 2}{D_h + 2}, \quad (5.9)$$

a curva marginal que define a mudança de estabilidade é mostrada pela figura (5.11).

Neste caso ocorre uma situação interessante, para  $D_h = 2$  (valor que

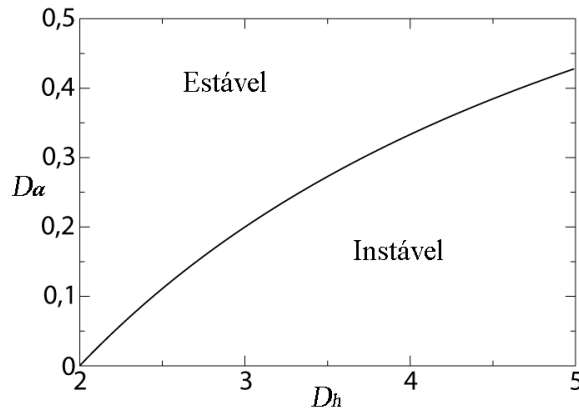


Figura 5.11: Condição que define a instabilidade de Turing no espaço  $(D_a, D_h)$  para o caso de acoplamento global - conjunto de valores 2.

usamos no acoplamento local e utilizaremos na seção seguinte quando fazemos  $\alpha = 1$ ) a inequação (5.9) fornece como resultado  $D_a < 0$ . Ou seja, se fizermos  $D_h = 2$  a constante de acoplamento do ativador deve ter um valor negativo para que ocorra a quebra de estabilidade - como mostrado também pela figura (5.11). Entretanto, como já colocado pela relação (2.3), supomos que tanto  $D_h > 0$  quanto  $D_a > 0$ , desta maneira  $D_a < 0$  não pode ser considerado. Conseqüentemente, a conclusão é que para  $D_h = 2$  não há instabilidade de Turing, o sistema sempre será estável com a presença do acoplamento - como exemplificado pela figura (5.12).

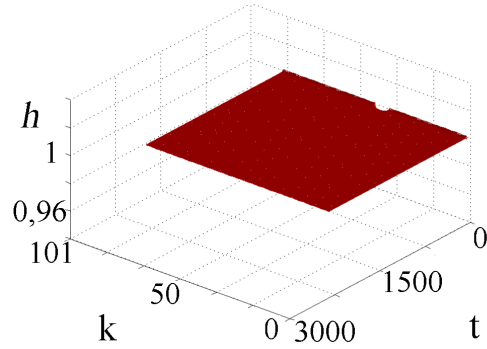


Figura 5.12: Se ao aplicar o segundo conjunto de valores ao caso global considerarmos  $D_h = 2$  não será possível obter nem mesmo a instabilidade de Turing, isto é, o sistema sempre será estável na presença do acoplamento; como exemplifica a figura acima, na qual  $D_a = 0,05$  - mostramos apenas a variação temporal da concentração do inibidor.

## 5.5 Caso $\alpha = 1$

### 5.5.1 Exemplo 1

Para o caso particular  $\alpha = 1$  aplicado à primeira configuração as condições (4.29) se transformam em:

$$\begin{cases} (D_h - 2D_a) > 1,8 \times 10^{-2} + 110D_aD_h, & (D_h - 2D_a) > 220D_aD_h \\ (D_h - 2D_a) > \frac{2\sqrt{2}D_aD_h}{\sqrt{D_aD_h}}, & 0 \leq (D_h - 2D_a) \leq 220D_aD_h \end{cases} \quad (5.10)$$

Da mesma maneira que fizemos até agora, tanto no caso local quanto no global, vamos assumir novamente que para este exemplo  $D_h = 0,2$ . Com esta atribuição, a mudança de estabilidade ocorre para  $D_a = 0,02$ . Na realidade, para  $D_a = 0,02$  o sistema ainda se encontra em um estado de estabilidade - vide figura (5.13). Mas se o valor de  $D_a$  for alterado para 0,01 a estabilidade é quebrada e a rede passa a ser instável, como exposto pela figura (5.14).

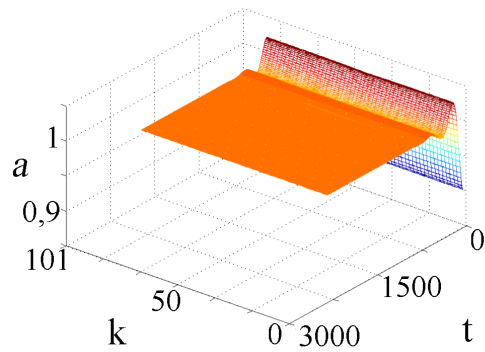


Figura 5.13: Situação de estabilidade para o caso  $\alpha = 1$ ; usamos o exemplo 1,  $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,02$  - plotamos apenas a variação temporal de  $a$ .

Neste caso temos duas situações interessantes. A primeira, já discutida em circunstâncias anteriores, é que novamente a constante de acoplamento da substância inibidora deve ter um valor maior do que a do seu opositor para que ocorra a instabilidade de Turing. A segunda está relacionada com a forma do padrão resultante.

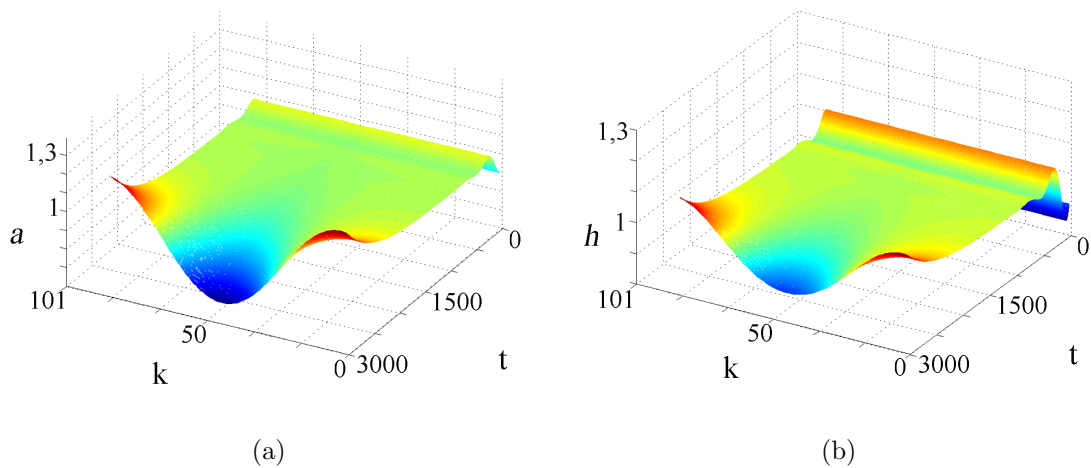


Figura 5.14: Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso particular  $\alpha = 1$  aplicado ao primeiro conjunto de valores,  $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,01$ , na figura (a) e (b) mostramos a evolução temporal do ativador e do inibidor respectivamente.

Podemos observar pela figura (5.14) que para esta ocasião, o padrão formado é diferente se comparado ao caso difusivo - aqui temos um grande número de sítios em um estado de instabilidade. Isto acontece mesmo se o valor da constante de acoplamento do ativador for diminuído para  $D_a = 0,005$  - o que, no espaço de parâmetros, causa um aumento na distância do estado do sistema em relação à curva marginal definida pelo sistema (5.10), como é exposto pela figura (5.15). Esta diferença pode estar ligada aos valores de  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  e sua relação com o número de modos estáveis e instáveis no sistema. Tomemos como exemplo o caso em que  $D_a = 0,005$ , no qual  $\sigma_+ = 0,89$  e  $\sigma_- = 0,056$ . Nesta situação temos, como mostrado pela figura (5.16), um grande número de modos normais no intervalo  $(\sigma_-, \sigma_+)$  e que portanto são instáveis - a quantidade de modos instáveis é muito maior que a de modos estáveis. Nossa hipótese é que conseqüentemente também teremos um grande número de sítios instáveis, ocasionando assim algumas diferenças em relação a formação do padrão final, quando comparamos este caso com o difusivo.

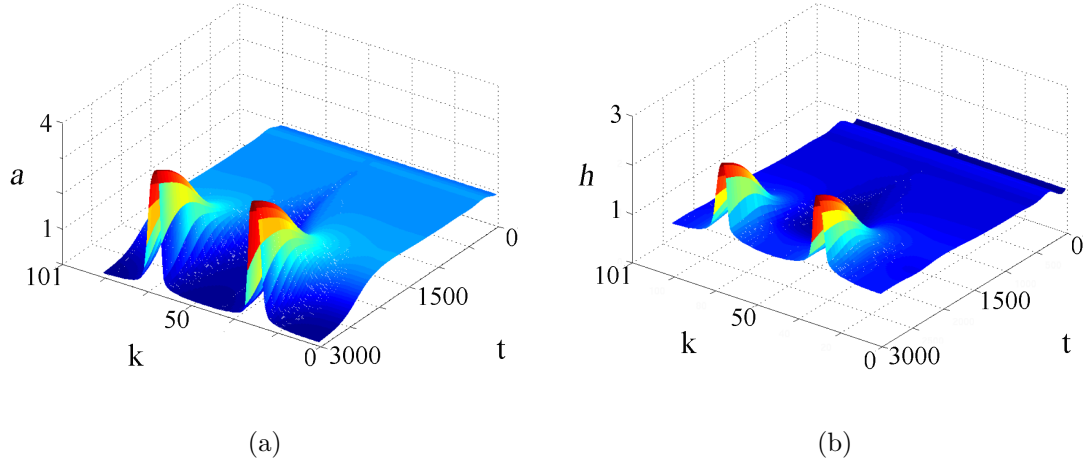


Figura 5.15: Representação de uma circunstância de instabilidade conseguida para o caso particular  $\alpha = 1$  aplicado ao exemplo 1 ( $D_h = 0,2$  e  $D_a = 0,005$ ).

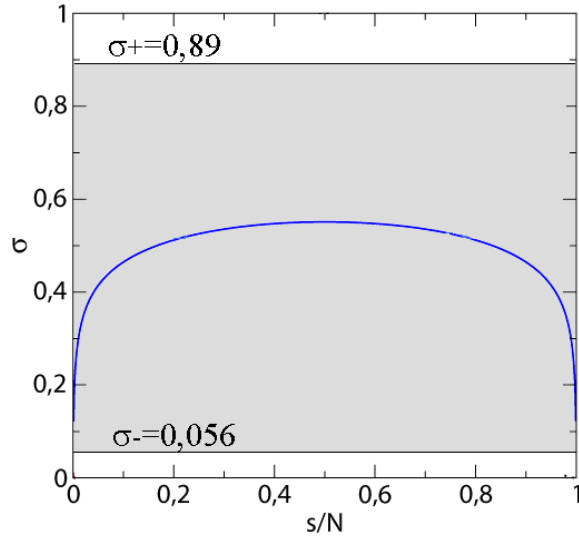


Figura 5.16: Na figura acima mostramos a situação na qual fazemos  $\alpha = 1$  no exemplo 1 ( $D_h = 0,2$  e  $D_h = 0,005$ ). Neste caso há um grande número de modos normais instáveis (que se encontram na área mais escura), conseqüentemente também poderemos ter uma grande quantidade de sítios em um estado de instabilidade.

### 5.5.2 Exemplo 2

Aplicando as condições de instabilidade (4.29) ao segundo conjunto de valores temos;

$$\begin{cases} (D_h - 2D_a) > (18/10) + (11/10) D_a D_h, & (D_h - 2D_a) > (22/10) D_a D_h \\ (D_h - 2D_a) > \frac{2\sqrt{2}D_a D_h}{\sqrt{D_a D_h}}, & 0 \leq (D_h - 2D_a) \leq (22/10) D_a D_h \end{cases} \quad (5.11)$$

Escolhendo novamente para esta situação  $D_h = 2$ , a quebra de estabilidade ocorre aproximadamente em  $D_a = 0,08$ , quando sistema deixa de ser estável e passa a ser instável. Mostramos na figura (5.17) a situação de estabilidade,  $D_a = 0,08$ , na qual o estado final é o mesmo estado uniforme inicial. Para  $D_a = 0,0605$  temos uma situação de instabilidade, assim a alteração feita no estado uniforme inicial já ocasiona oscilações nos valores de  $a$  e  $h$ , como demonstrado pela figura (5.18). Se fizermos  $D_a = 0,04$  o sistema continua instável. Porém, no espaço de parâmetros,

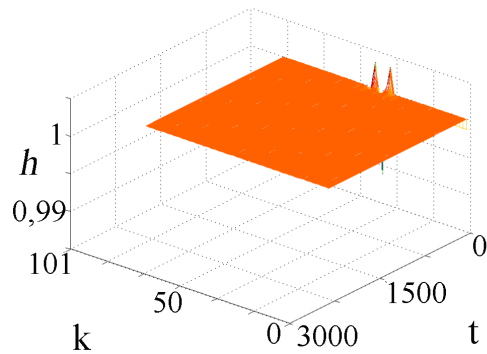


Figura 5.17: Situação de estabilidade resultante do caso  $\alpha = 1$  combinado com o segundo conjunto de parâmetros - utilizamos  $D_h = 2$  e  $D_a = 0,08$  e mostramos apenas a variação temporal de  $h$ .

o ponto que representa o estado da rede se localiza mais afastado da curva crítica definida pelo sistema (5.11), quando comparado com o caso anterior. Nesta ocasião a perturbação se espalha rapidamente pela rede formando um padrão diferente em relação a situação precedente, figura (5.19).

Aqui temos novamente de atentar para o tema formação de padrões.

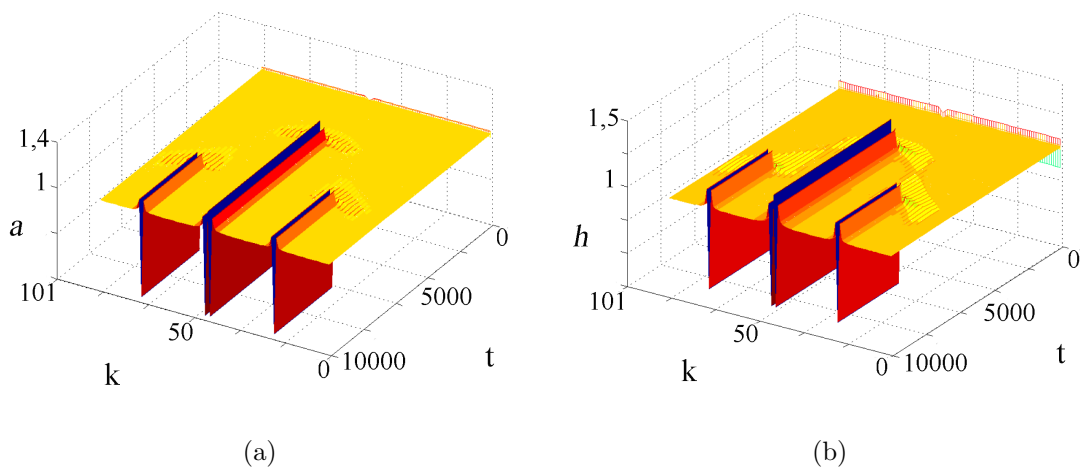


Figura 5.18: Situação de instabilidade conseguida com o exemplo 2 aplicado ao caso  $\alpha = 1$ , usamos  $D_h = 2$  e  $D_a = 0,0605$ . Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor.

Neste caso, é possível observar pelas figuras (5.18) e (5.19) que a forma do padrão é diferente do exemplo anterior, figuras (5.14) e (5.15) (temos aqui uma certa proporção entre o número de sítios estáveis e instáveis na rede). Como já colocado, propomos como hipótese que esta diferença pode estar ligada à quantidade de modos normais instáveis e estáveis no sistema. Por exemplo, para  $D_a = 0,04$  temos  $\sigma_+ = 11,4$  e  $\sigma_- = 0,54$ , desta maneira, como podemos observar pela figura (5.20), existe uma proporcionalidade entre os números de modos estáveis e instáveis; o que também pode implicar em uma certa proporcionalidade no número de sítios estáveis e instáveis na rede. Outro resultado importante a ser lembrado é o fato de novamente encontrarmos como condição para que ocorra a instabilidade de Turing a relação  $D_a < D_h$ .

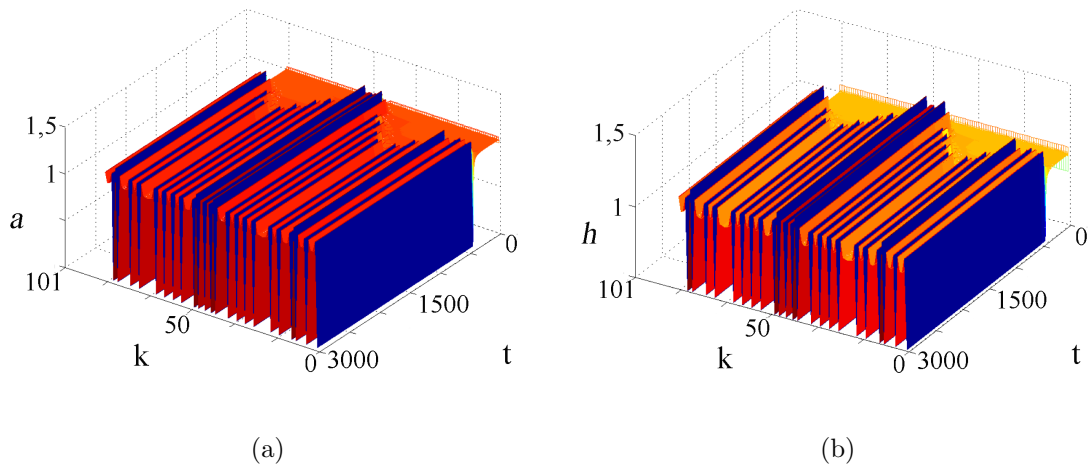


Figura 5.19: Outra situação de instabilidade conseguida com o segundo conjunto valores aplicado ao caso  $\alpha = 1$ , usamos  $D_h = 2$  e  $D_a = 0,04$ . Aqui o sistema está afastado da fronteira de estabilidade, o que resulta em padrão final diferente em relação ao caso anterior. Na figura (a) mostramos a evolução temporal do ativador e na figura (b) a evolução temporal do inibidor.

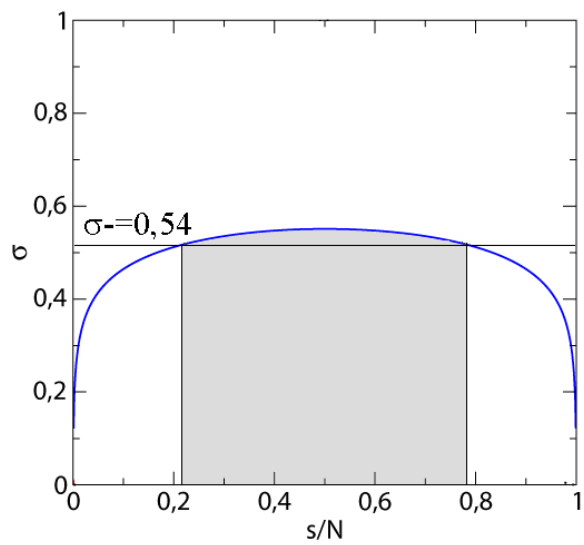


Figura 5.20: Mostramos na figura acima a segunda configuração aplicada ao caso  $\alpha = 1$  ( $D_h = 2$  e  $D_a = 0,04$ ). Nesta situação, para qual  $\sigma_+ = 11,4$  e  $\sigma_- = 0,54$ , existe uma proporcionalidade no número de modos estáveis e instáveis (que se encontram na área mais escura) no sistema. Nossa hipótese é que conseqüentemente também teremos uma certa proporcionalidade entre o número de sítios estáveis e instáveis na rede.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, tínhamos como objetivo aplicar as conjecturas centrais da teoria de Turing, desenvolvida para esclarecer a questão da formação de padrões espaço-temporais, em uma circunstância mais geral que a concebida por ele.

Deste modo, como ponto de partida, no capítulo 2 evidenciamos estes pontos principais. Mostramos, essencialmente, que um sistema em um estado inicialmente homogêneo e estável pode apresentar a formação de padrões. Isto ocorre devido à inclusão de uma dinâmica difusiva entre os sítios que compõe o sistema, a qual ocasiona uma quebra de estabilidade tornando o sistema instável. Conseqüentemente, qualquer alteração que ocorra no estado uniforme inicial do sistema se difundirá pelo sistema formando o estado heterogêneo final.

A seguir, no capítulo 3, propomos uma interação diferente da reativa-difusiva utilizada por Turing, sugerindo uma interação não-local. Na realidade, aplicamos as mesmas hipóteses empregadas por Turing a um acoplamento do tipo lei de potência. Para este caso provamos analiticamente que é possível obter, dependendo das circunstâncias, tanto instabilidade de Turing quanto a formação de estados heterogêneos. Também comprovamos, no capítulo 3, que a interação proposta se transforma no próprio caso desenvolvido por Turing quando tomamos o limite

de  $\alpha \rightarrow \infty$ , isto é, mostramos que a interação difusiva é uma situação particular do acoplamento do tipo lei de potência. Assim, por ser um caso geral, estudamos mais a fundo três situações distintas dentro desta nova interação. Sendo a primeira a própria interação difusiva. A segunda, que é outro caso limite do acoplamento do tipo lei de potência, é a interação global. O terceiro caso particular estudado é uma situação intermediária entre os casos anteriores na qual temos  $\alpha = 1$ .

Com o intuito de evidenciar os resultados analíticos e encontrar novas decorrências, sugerimos também um modelo para a reação química - conhecido como modelo de Meinhardt-Gierer - o qual rege uma espécie de competição entre duas substâncias antagonistas, chamadas de ativador e inibidor. Calculamos o ponto de equilíbrio que define o estado homogêneo do sistema e encontramos as condições para que ele seja estável. Em seguida, já considerando o acoplamento do tipo lei de potência, mostramos ser possível escrever as condições necessárias para se obter a instabilidade de Turing em função das constantes deste modelo. Também no capítulo 4 escrevemos estas condições para todos os casos particulares estudados até então. Por último, escolhemos dois conjuntos de valores para os parâmetros das equações de Meinhardt-Gierer e as simulações numéricas dos casos particulares sugeridos.

No caso difusivo, provamos que, ao se fazer o limite apropriado, os resultados de nossa generalização sempre concordam com os do modelo desenvolvido por Turing. Mostramos ainda que o caso difusivo é o que fornece o maior conjunto de valores que resultam na instabilidade de Turing. Explicamos tal conclusão levando em consideração o espaço de parâmetros; verificamos que a área a qual define os valores que implicam na transição na estabilidade é máxima na interação difusiva. Vimos, ao mesmo tempo, através da simulação numérica, que a amplitude de oscilação dos valores de  $a$  e  $h$  em relação ao estado uniforme - que acontece quando há a formação de um padrão - depende do conjunto de parâmetros escolhidos. Se a escolha representa um ponto próximo à curva marginal que concebe a quebra de estabilidade no sistema, as oscilações no estado uniforme são pequenas. Entretanto se o ponto escolhido representa uma condição distante da fronteira de estabilidade,

teremos grandes oscilações no estado uniforme.

Sobre o caso global vimos que ele também admite a instabilidade de Turing. Não admitindo, porém, a formação de padrões. Verificamos que este efeito está relacionado com forma da função  $\sigma_0$ ; a qual neste caso é função apenas do número de sítios da rede, sendo uma constante em relação a  $s$ . O resultado é que ou todos os modos normais  $s$  serão instáveis na presença do acoplamento ou todos serão estáveis - com exceção de  $s = 0$ , visto que  $\sigma_0(s = 0) = 0$ . Desta maneira, apesar de podermos ter uma situação de instabilidade no sistema, não teremos a formação de padrões. Provamos, além disso, que para o caso global existem situações nas quais não é possível obter nem mesmo a instabilidade de Turing, ou seja, a rede sempre é estável na presença do acoplamento. Outro resultado mostrado é que embora a interação global proporcione, em determinadas situações, a quebra de instabilidade, ela é a situação que apresenta o menor conjunto de valores que implicam nesta transição. Comprovamos esta conclusão no espaço de parâmetros, na qual verificamos que a área que define as condições para a instabilidade de Turing é um mínimo para  $\alpha = 0$ .

O caso particular  $\alpha = 1$ , um caso intermediário, também admite a instabilidade de Turing. Entretanto, em relação ao desenvolvimento de um estado heterogêneo final ele pode apresentar comportamentos diferentes quando comparado aos casos anteriores. Podemos ter tanto um padrão formado por uma grande quantidade de sítios instáveis, quanto um padrão no qual o número de sítios estáveis e instáveis são pelo menos comparáveis. Colocamos como hipótese que estas alterações em relação à forma do padrão final estão ligadas ao número de modos normais estáveis e instáveis no sistema. Basicamente sugerimos que se a diferença entre o número de modos normais instáveis e estáveis for grande, esta diferença será representada no padrão (se, por exemplo, temos uma grande quantidade de modos normais instáveis, também teremos uma grande quantidade de sítios instáveis na rede e vice e versa). Porém se a quantidade de modos normais instáveis e estáveis for comparável, teremos um padrão no qual a quantidade de sítios estáveis e instáveis também é comparável. Mas como a formação de padrões é um fenômeno também não-linear, e a análise

de modos foi realizada apenas através da linearização das equações, esta proposta necessita ser estudada mais a fundo.

Outro resultado importante obtido está relacionado com os valores das constantes de acoplamento  $D_a$  e  $D_h$ . Em todas as situações simuladas no capítulo 5 foi possível observar que a relação  $D_h > D_a$  é uma espécie de condição para que ocorra instabilidade de Turing. Isto pode ser explicado através do seguinte raciocínio: como a substância ativadora é uma espécie química dotada de um fator auto-catalítico, o que não ocorre com a substância inibidora; então, para que a reação química seja garantida, esta deve ter um coeficiente de acoplamento maior do que aquela. Esta conclusão está de acordo com os resultados encontrados na literatura para a interação difusiva [1]. Citamos por exemplo o resultado obtido em [10], o qual fornece como condição  $Dh \gg Da$ , um resultado que apesar de aproximado concorda com o encontrado neste trabalho.

# Bibliografia

- [1] MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**, 3.ed., Springer, 2002, Vol. II , p. 74-84.
- [2] TURING, A. M. **The Chemical Basis of Morphogenesis**, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641, 1952, p. 37-72.
- [3] STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics And Chaos**, Perseus Books Publishing, 1994.
- [4] <<http://www.ufv.br/dpf/silvio.pdf>>. Acesso em: 07/12/2009.
- [5] Gollub, J. P. **Pattern formation in nonequilibrium physics**, Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2, 1999, p. 396-403.
- [6] JACKSON, E. A. **Perspectives of Nonlinear Dynamics**, Cambridge University Press, 1991, Vol. II , p. 240-246.
- [7] GIERER. A. **Generation of biological patterns and form: some physical, mathematical, and logical aspects.**, Progress in Biophysics and Molecular Biology, No. 37, 1981, p. 1-47.
- [8] <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo5/modulo4/topico3.php>>. Acesso em: 07/12/2009.

- [9] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**, 2.ed., Editora Livraria da Física, 2006, p. 526-532.
- [10] MEINHARDT, H.; KOCH, J.A. **Biological Pattern Formation: from Basic Mechanisms to Complex Structures**, Reviews of Modern Physics, Vol. 66, No. 4, 1994, p. 1481-1502.
- [11] <<http://order.ph.utexas.edu/Camazine.pdf>>. Acesso em: 25/01/2010.
- [12] Viana, R. L.; Grebogi, C.; Pinto, S. E. de S.; Lopes, S. R.; Batista, A. M.; Kurths, J. **Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems**, Physica D, 206, 2005, p. 94-108.
- [13] Anteneodo, C.; Pinto, S. E. de S.; Batista, A. M.; Viana, R. L. **Analytical results for coupled map lattices with long-range interactions**, Phys. Rev. E, 68, 2003, 045202(R).
- [14] Viana, R. L.; Grebogi, C.; Pinto, S. E. de S.; Lopes, S. R.; Batista, A. M.; Kurths, J. **Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex systems**, Phys. Rev. E, 68, 2003, 067204.
- [15] Nozawa, H. **A Neural Network Model as a Globally Coupled Map and Applications Based on Chaos**, Chaos 2, 1992, p. 377-386.
- [16] Gade, P. M.; Hu, C. -K. **Synchronization and coherence in thermodynamic coupled map lattices with intermediate-range coupling**, Phys. Rev. E , 60, 1999, 4966.
- [17] Szmoski, R. M. Dissertação de Mestrado: Análise da Dinâmica de Partículas Brownianas Interagentes a Partir de Redes de Mapas Acoplados, UEPG, 2009.
- [18] Chen F. F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion**, 4.ed., Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 59
- [19] Altmann, E. G. Dissertação de Mestrado: Tempo de Retorno em Sistemas Dinâmicos, USP, 2004.

- [20] Anteneodo, C.; Pinto, S. E. de S.; Batista, A. M.; Viana, R. L. **Chaos synchronization in long-range coupled map lattices**, Phys. Lett. A, Vol. 326, 2004, p. 227-233.
- [21] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series, and Products**, 5.ed., Academic Press, 1994, p. 36.
- [22] PRUDNIKOV, A. P. **Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions**, 4.ed., Gordon and Breach Publishers, 1998.
- [23] BRITTON, N. F. **Essential Mathematical Biology**, 3.ed., Springer, 2005, cap.7.
- [24] HINDMARCH, A. C. **ODEPACK: a systematized collection of ODE solvers, in Scientific Computing**, IMACS Transactions on Scientific Computation, Vol. 1, 1983, p. 55-64.
- [25] FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C. **Caos uma Introdução**, 2.ed., Editora Edgard Blücher, 1995, p. 27-36.
- [26] <<http://www.apmaths.uwo.ca/~mkarttu/turing-interjournal.pdf>>. Acesso em: 07/12/2009.
- [27] LEPPÄNEN, T. **The Theory of Turing Pattern Formation**, Imperial College Press, 2005, cap.11, p.190-227.
- [28] LEPPÄNEN, T.; KARTTUNEN, M.; BARRIO, R.A.; KASKI, K. **Turing Systems as Models of Complex Pattern Formation**, Brazilian Journal of Physics, No.2A, Vol.34, 2004, p. 368-372.
- [29] RUAN, S. **Diffusion-Driven Instability in Gierer-Meinhardt Model of Morphogenesis**, Natural Resource modeling, No.2, Vol. 11, 1998, p.131-142.

# Apêndice A: Estabilidade Linear e Linearização

## .1 Estabilidade Linear

Seja o sistema linear - seguimos aqui os calculos apresentados em [3] e [25]:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by = f(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy = g(x, y) \end{cases} . \quad (1)$$

Os pontos de equilíbrio deste sistema são definidos pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \dot{y} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases} , \quad (2)$$

a qual aplicada a equação (1) nos fornece como solução  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

Agora, para realizar análise de estabilidade deste ponto fixo, suponha que o sistema (1) admita uma solução do tipo:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda t} y_0 \end{cases} , \quad (3)$$

que substituída na equação (1) se transforma,

$$\begin{cases} (a - \lambda)x_0 + by_0 = 0 \\ cx_0 + (d - \lambda)y_0 = 0 \end{cases} . \quad (4)$$

Este sistema tem uma solução trivial dada por:  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Essa solução mostra que tomamos como condição inicial a origem, o sistema sempre permanecerá neste ponto para qualquer que seja o valor de  $t$ .

Para encontrar as soluções não triviais das equações determinadas por (4) de uma maneira mais adequada, definimos também a matriz jacobiana do sistema;

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Assim podemos escrever o conjunto de equações (1) em notação vetorial;

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = J\vec{x}(t), \quad (6)$$

sendo

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, com esta nova notação, as equações (4) podem ser escritas em forma de matriz:

$$(J - \lambda I)\vec{x}_0 = 0, \quad (7)$$

na qual  $I$  é a matriz identidade e  $\lambda$  e  $\vec{x}_0$  são os autovalores e autovetores da matriz jacobiana respectivamente.

Como nosso objetivo aqui é estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema proposto, a qual é determinada pelo valor dos autovalores da matriz jacobiana, logo escrevemos a equação que fornece a solução em  $\lambda$  como;

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow \\ (a - \lambda)(d - \lambda) - bc &= 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \quad (8)$$

esta relação é conhecida como equação característica do sistema, sendo  $T$  e  $\Delta$  o traço e o determinante da matriz jacobiana respectivamente.

A equação (8) tem a seguinte solução:

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (9)$$

A partir deste resultado podemos realizar a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio e classificar os possíveis comportamentos admissíveis pelo sistema.

### **.1.1 Classificação dos Pontos de Equilíbrio**

Como já exposto, a análise de estabilidade do sistema pode ser realizada através do estudo dos sinais dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , os quais são funções do traço  $T$  e do determinante  $\Delta$  da matriz jacobiana. Na realidade, discutiremos apenas três possíveis classificações de um ponto de equilíbrio, e esta discussão será feita a seguir.

#### **Ponto de Equilíbrio Estável**

Se  $T < 0$  e  $\Delta > 0$  então pela equação (9) os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  terão a sua parte real maior que zero. Deste modo temos uma situação de estabilidade, visto que as trajetórias do sistema se aproximam do ponto de equilíbrio. Entretanto esta aproximação pode se dar de duas maneiras diferentes. Se  $T^2 - 4\Delta > 0$  então os autovalores serão números reais e a aproximação se dará exponencialmente, nesta situação o ponto de equilíbrio é um nó estável. Do mesmo modo, se  $T^2 - 4\Delta < 0$ , o autovalor será um número com a parte imaginária não nula, assim, as trajetórias se aproximarão do ponto de equilíbrio de maneira oscilatória, neste caso o ponto fixo é considerado um foco estável.

## Ponto de Equilíbrio Instável

Se  $T > 0$  e  $\Delta > 0$ , então teremos uma situação de estabilidade, pois os autovalores terão a sua parte real necessariamente menor que zero. O que pela equação (3) ocasiona uma divergência das trajetórias em relação ao ponto de equilíbrio. Aqui, também temos uma situação parecida com a que ocorreu no caso de estabilidade; se  $T^2 - 4\Delta > 0$ , o ponto fixo será um nó instável -as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio exponencialmente. Porém se  $T^2 - 4\Delta < 0$  o ponto fixo é considerado um foco instável e as trajetórias se afastam do ponto de fixo oscilatoriamente.

## Ponto de Equilíbrio Sela

Se  $\Delta < 0$  então pela equação (9) os autovalores são reais e tem sinais opostos. Deste modo, pela solução proposta no começo deste capítulo, equação (3), no espaço de fase teremos uma direção de aproximação do ponto de equilíbrio e outra de afastamento. Nesta situação dizemos que o ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

Na figura (1) temos um diagrama que explica de maneira visual os resultados discutidos.

## .2 Linearização

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}, \quad (10)$$

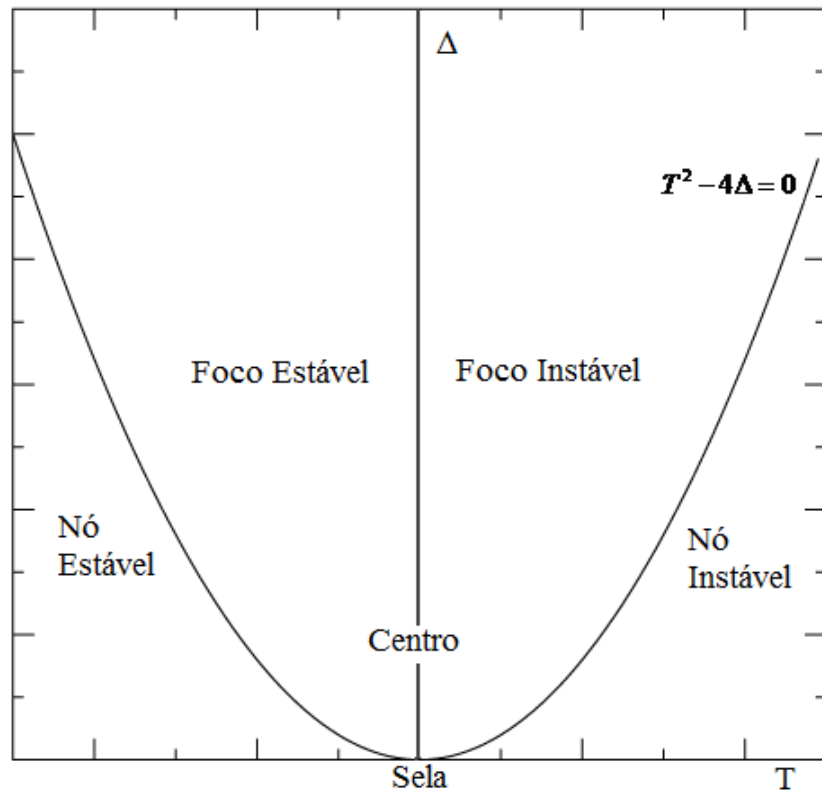


Figura 1: Diagrama das classificações de um ponto fixo em função do traço  $T$  e do determinante  $\Delta$  da matriz jacobiana.

a qual supomos ter um ponto de equilíbrio  $P = (x^*, y^*)$ .

Para realizar a análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear, estudamos este sistema apenas nas proximidades deste ponto. Para fazer este estudo então analisamos a variação temporal de uma pequena perturbação no ponto de fixo, isto é, considerando  $\delta x$  e  $\delta y$  a perturbação em  $x$  e em  $y$  respectivamente, escrevemos:

$$\begin{cases} x = x^* + \delta x \\ y = y^* + \delta y \end{cases}.$$

Fazendo  $\delta x = u$  e  $\delta y = v$ , expandimos as funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  em série de Taylor nas proximidades do ponto de equilíbrio, para assim determinar a citada

evolução temporal das alterações no ponto fixo.

$$\begin{cases} \dot{u} = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} + v \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} + O(u^2, v^2) \\ \dot{v} = g(x^*, y^*) + u \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} + v \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} + O(u^2, v^2) \end{cases} . \quad (11)$$

Como supomos as perturbações  $\delta x$  e  $\delta y$  pequenas podemos desprezar os termos de ordem quadrática. Como também, no ponto de equilíbrio,  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ , escrevemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{(x^*, y^*)} & \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{(x^*, y^*)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Agora usando a definição da matriz jacobiana, equação (5), podemos escrever as equações que determinam a evolução temporal das perturbações como:

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases} . \quad (13)$$

Esta é uma equação linear, desta maneira a análise de estabilidade do respectivo ponto de equilíbrio pode ser feito através da própria análise desenvolvida no começo deste capítulo.