

Juarez Siedlecki Andrade

**LAGRANGEANO AUMENTADO APLICADO A
PROBLEMAS DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS**

Curitiba

2006

Juarez Siedlecki Andrade

LAGRANGEANO AUMENTADO APLICADO A PROBLEMAS DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, curso de pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, concentração em Programação Matemática, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Luiz Carlos Matioli.

Curitiba
2006

Termo de Aprovação
JUAREZ SIEDLECKI ANDRADE

**LAGRANGEANO AUMENTADO APLICADO A
PROBLEMAS DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de concentração em Programação Matemática, no Programa de pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela banca examinadora formada pelos professores:

Orientador: _____.

Prof. Luiz Carlos Matioli, Dr. Eng.
Departamento de Matemática, UFPR.

Examinadores: _____.

Prof. Celso Carnieri, D.Sc.
Departamento de Matemática, UFPR.

Prof. Luiz Antonio Ribeiro de Santana, D. Sc.
Departamento de Matemática, UFPR.

Prof^a. Cleonice Fátima Bracciali, Ph.d
Departamento de Ciências de Computação e Estatística, UNESP.

Curitiba, 06 de outubro de 2006.

A Deus e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Sou eternamente grato a muitas pessoas que passaram pela minha vida e contribuíram com o meu crescimento. Especialmente aquelas que aqui contribuíram de forma decisiva para a realização deste trabalho.

Meu especial agradecimento ao meu orientador e grande mestre, Professor Luiz Carlos Matioli, por seu incentivo, compreensão e especial dedicação. Mostrando-se sempre uma pessoa muito receptiva e profissional compreendendo minhas falhas e mostrando o caminho certo a ser seguido.

Sou muito grato à minha colega de programa e grande amiga, Débora Cíntia Marcilio, por toda sua ajuda teórica e emocional decisivas na elaboração deste trabalho e também a amiga e colega de programa Ana Paula.

No programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia existiram pessoas que contribuíram grandemente com meu progresso principalmente os professores com os quais tive a oportunidade de estudar. Especial agradecimento a Maristela, Professor Celso e o Professor Anselmo.

É com muito apreço que também agradeço fortemente a minha família: Vilson, Inês, Elizia, Jonas, Jaime e Duda pelo carinho e amor incondicional dedicado a mim.

Finalmente, agradeço de todo o meu coração às pessoas citadas acima e a todos aqueles que contribuíram direta e indiretamente na realização deste trabalho e por ventura tenha esquecido de citar.

SUMÁRIO

Lista de Figuras.....	9
Lista de Tabelas.....	10
Resumo.....	11
Abstract.....	12
Introdução.....	13
1. Conceitos Fundamentais.....	16
1.1 Conceitos e Definições Básicas em Finanças.....	16
1.1.1 Mercado de Ações.....	16
1.1.2 Investidor.....	16
1.1.3 Bolsa de Valores de São Paulo - BOVESPA.....	17
1.1.4 Índice Bovespa - Ibovespa.....	17
1.1.5 Composição de Carteiras.....	19
1.2 Conceitos e Definições Matemáticas.....	19
1.2.1 Matriz e Vetor.....	20
1.2.2 Funções.....	22
1.2.3 Convexidade.....	23
1.3 Conceitos e Definições Estatísticas.....	24
1.3.1 Variável Aleatória.....	24
1.3.2 Esperança Matemática, Média ou Retorno Esperado.....	25
1.3.3 Variância.....	25
1.3.4 Desvio Padrão – Risco.....	25

1.3.5 Covariância.....	27
2. Modelos	29
2.1 Condições de Otimalidade para Problemas de Minimização Irrestrita.....	29
2.2 Condições de Otimalidade para Problemas de Minimização Restrita.....	33
2.3 Forma Geral de um Modelo Matemático Quadrático.....	34
2.4	Região
Viável.....	35
2.5 Restrições Ativas.....	36
2.6	Penalidade Quadrática
Clássica.....	37
2.7 Função Penalidade Quadrática Pura.....	39
2.8 Penalidade e Lagrangeano Aumentado.....	40
2.9 Algoritmo de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática.....	42
2.10 Região de Confiança.....	43
2.11 Algoritmo de Região de Confiança.....	44
3. Modelos Aplicados em Finanças.....	46
3.1 Modelo da Média Variância ou Modelo de Markowitz.....	46
3.2 O Problema da Composição de Carteira de Investimento.....	47
3.3	<i>Matlab</i> e
Finanças.....	50
3.4 Pontos sobre a Implementação.....	50
4. Testes Computacionais e Discussão dos Resultados.....	52
4.1	Resíduos ou Erros nos
dados.....	52
4.2 Comparação LAPQ e QuadProg Por Erro Relativo.....	54
4.3 Construindo a Fronteira Eficiente.....	58
4.4 Detalhamento dos Pesos de Uma Carteira.....	59
4.5 Diversificação e Comportamento do Risco.....	62

5. Conclusões, Considerações Finais e Trabalhos Futuros.....	64
Referencias Bibliográficas.....	66

LISTA DE FIGURAS

1. Representação Pontos e Restrições.....	36
2. Função Quadrática e sua Derivada.....	38
3. Quadrática e sua Conjugada.....	39
4. Distribuição dos pesos de uma carteira.....	54
5. Comparativo Tempo Execução.....	57
6. Fronteira Eficiente.....	59
7. Composição da Carteira com 25 ações avaliadas.....	61
8. Evolução do risco com a Diversificação.....	63

LISTA DE TABELAS

1. Retornos Acesita PN (ACES4).....	26
2. Carteira do Ibovespa.....	48
3. Retornos diários (%) das ações.....	53
4. Comparativo Erro <i>quadprog</i> com LAPQ.....	55
5. Comparação de otimização para carteira com 8 Ações.....	56
6. Ações isoladas e carteira ótima.....	58
7. Composição de carteira com 25 ações.....	60
8. Quantidade por ação.....	62

RESUMO

Neste trabalho, sugere-se uma aplicação para o Método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática ao problema de compor carteiras de investimentos, conforme formulação proposta por Markowitz [1].

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x$$

$$\text{s. a } \begin{aligned} \sum x &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, x \in \mathbf{R}^n$$

Os Métodos de Lagrangeano Aumentado partem normalmente de funções de penalização $\theta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, estritamente convexas e crescentes, que são combinadas com multiplicadores de Lagrange para compor termos de penalização com os formatos:

$$(y, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++} \rightarrow p(y, \mu) = \mu\theta(y) \text{ e } (y, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++} \rightarrow p(y, \mu) = \theta(\mu y).$$

Aqui se utiliza no algoritmo de Lagrangeano Aumentado uma função de penalização θ , definida por $y \in \mathbf{R} \rightarrow \theta(y) = \frac{1}{2}y^2 + y$, sendo θ estritamente convexa, porém não crescente em todo o seu domínio. Neste caso, em que as penalidades são quadráticas, os multiplicadores gerados pelo algoritmo de Lagrangeano Aumentado podem ser negativos. Este problema é contornado aumentando-se o parâmetro de penalidade, conforme mostrado por Matioli [2].

É muito importante salientar que a composição de carteiras de investimentos com a aplicação do Método do Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática (LAPQ), aqui proposta, consiste de uma ferramenta de avaliação para o investidor que baseada em uma série histórica encontra uma solução ótima. Portanto, não visa

substituir em momento algum o conhecimento e a capacidade de análise do investidor ou do agente responsável pelo investimento, mas sim contribuir no processo de tomada de decisão.

ABSTRACT

In this work, we propose an application for the Augmented Lagrangian Method with Quadratic Penalty for the problem of composed portfolio selection, conform as the formulation proposed by Markowitz [1].

$$\mathbf{min} \quad \frac{1}{2} x^T Q x$$

$$\mathbf{s. a} \quad \begin{aligned} \sum x &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

where,

$$Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, x \in \mathbf{R}^n$$

The Augmented Lagrangian Method normally starts with penalization functions $\theta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, strictly convex and increasing, which are combined with Lagrange multipliers of to compose terms of penalization as following:

$$(y, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++} \rightarrow p(y, \mu) = \mu \theta(y) \text{ e } (y, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{++} \rightarrow p(y, \mu) = \theta(\mu y).$$

Here, in the Augmented Lagrangian algorithm, we use the penalization function θ , defined by $y \in \mathbf{R} \rightarrow \theta(y) = \frac{1}{2} y^2 + y$, θ strictly convex, however it is not increasing in all its domain. In this case, where the penalties are quadratic, the multipliers generated by the algorithm of Augmented Lagrangean can be negative. This problem is solved by increasing the penalty parameter, as shown by Matioli [2].

It is very important to point out that the composition of portfolio selection with the application of the Augmented Lagrangian Method with Quadratic Penalty (LAPQ), considered here, consists of a tool of evaluation for the investor which's based on a historical series finds an optimal solution. Therefore, this approach does not aim at any moment to substitute the knowledge and the capacity of analysis of either the investor or

the responsible agent for the investment, but to contribute in the process of decision taking.

INTRODUÇÃO

Praticamente todos os investimentos estão sujeitos a fatores que podem não produzir o resultado esperado ao que pode ser denominado risco. O presente trabalho traz uma proposta de aplicação de algoritmos de otimização ao problema de finanças, baseado na Teoria Moderna de Investimentos apresentada por Harry Markowitz [1].

Segundo Martinez [3], a otimização consiste em encontrar os mínimos e os máximos de uma função de várias variáveis, definida numa determinada região do espaço multidimensional. A linguagem utilizada pela otimização para expressar os problemas é conhecida como programação matemática, que trata do estudo de problemas de otimização e o desenvolvimento de métodos para resolvê-los.

O problema geral de otimização (sem restrição no número de variáveis) é expresso em programação matemática como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \\ & \quad \quad \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

A função f é chamada de função objetivo e as funções h e g são as restrições do problema. O conjunto formado pelas restrições é chamado de conjunto viável. Dependendo das características da função objetivo, das restrições e do conjunto viável, têm-se os diferentes problemas de otimização.

Os métodos de Lagrangeano Aumentado constituem uma metodologia bastante utilizada para resolver problemas de programação não-linear. Eles são baseados nos métodos de penalização, compondo uma classe de métodos robustos aplicados a

problemas de pequeno e grande porte. Originalmente, foram aplicados em problemas com restrições de igualdade e posteriormente generalizados para problemas com restrições de desigualdade. Neste trabalho, estes métodos serão aplicados em problemas com restrições de desigualdade.

A metodologia dos métodos de Lagrangeano Aumentado ou, de maneira mais geral, dos métodos de penalização é bastante simples. Consiste em transformar o problema restrito em uma seqüência de subproblemas irrestritos, formados pela função objetivo do problema original acrescida a um múltiplo das restrições. Eles são iterativos e a cada iteração resolve-se o subproblema irrestrito gerado e atualiza-se os multiplicadores e o parâmetro de penalização.

Grande parte dos artigos existentes na literatura estão fundamentados na Teoria Moderna de Investimentos proposta por Harry Markowitz [1]. O qual revolucionou o mundo de finanças ao introduzir novos elementos, tais como: O Risco, com a formulação do modelo de Média-variância e o conceito de Fronteira Eficiente, dentre outros. É importante ressaltar que este estudo aplica-se a composições que seguem um *benchmark* (índice de referência). Neste trabalho será utilizado o Ibovespa da Bolsa de Valores São Paulo.

Logo, a peculiaridade deste trabalho será a implementação do método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática ao problema de compor carteiras de investimentos com restrições de desigualdades. Para os testes numéricos o modelo analisado foi implementado no *software Matlab* e comparado com uma rotina pronta de otimização do próprio *Matlab*.

Descrição por Capítulos

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, cujos assuntos abordados são descritos a seguir:

No capítulo 1 são introduzidos alguns conceitos fundamentais de mercado de ações, além de definições matemáticas e estatísticas que freqüentemente serão empregadas ao longo do trabalho.

No capítulo 2 apresenta-se o formato geral de problema de minimização restrita e irrestrita, além da forma geral de um modelo quadrático. Ainda, é feita uma breve revisão das condições de otimalidade relativas a estes problemas. Finalmente propõe-se a utilização do método Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática para a resolução de problemas quadráticos. Através dessa metodologia exibimos que, sejam asseguradas algumas hipóteses, se a função Lagrangeano associada ao problema original é estritamente convexa (convexa), então a matriz hessiana da função Lagrangeano Aumentado é definida positiva (semidefinida positiva), logo satisfaz a condição de otimalidade suficiente de segunda ordem, conforme Marcilio [18]. E, portanto, como o problema de compor carteiras de investimentos satisfaz estas condições, é possível aplicar essa metodologia.

Já no capítulo 3, é apresentada uma descrição mais detalhada do problema de compor carteiras de investimentos, e o modelo proposto por Markowitz [1] para resolver o referido problema. Além disso, são abordados pontos sobre a implementação computacional do Método Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática.

No capítulo 4, são apresentados os testes numéricos realizados com o Método do Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática. Ainda, são discutidos e apresentados os resultados obtidos, além da validação de tais resultados por meio de comparação do erro relativo dos resultados obtidos com a rotina pronta *quadprog* do software *Matlab*.

Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões obtidas por meio deste trabalho, além de sugestões para possíveis linhas de estudos e trabalhos futuros.

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo são tratados três pontos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho que são os conceitos básicos de finanças, matemáticos e estatísticos.

1.1 Conceitos e Definições Básicas em Finanças

Na seqüência serão definidos alguns termos que serão empregados no decorrer deste trabalho.

1.1.1 Mercado de Ações

Uma ação é a menor parcela do patrimônio de uma empresa. Para que uma empresa tenha suas ações negociadas no mercado, é necessário que esta seja uma companhia do tipo Sociedade Anônima (S.A). Para tanto, esta empresa deve cumprir uma série de exigências, conforme a legislação de cada país e estando sujeita às sanções da legislação em questão.

Neste contexto, insere-se o mercado de ações com um importante papel na economia de um país. Representando uma oportunidade de investimentos, e contribuindo com o crescimento da economia.

1.1.2 Investidor

É o indivíduo que possui recursos, geralmente em papel moeda, e deseja obter um retorno ao longo do tempo, geralmente buscando o maior retorno possível entre inúmeras possibilidades de aplicação do capital.

O problema para o investidor em ações vai além, pois segundo Securato [4] as ações se encontram na ponta da Curva de Mercado de Capitais que relaciona o retorno ao risco do investimento, ou seja, o investimento em ações é tido como um investimento de alto risco.

Desta forma o problema do investidor é decidir em quais papéis investir e quanto deve investir em cada, de forma que esteja exposto ao menor risco possível.

1.1.3 Bolsa de Valores de São Paulo – BOVESPA

A BOVESPA data sua fundação de 23 de agosto de 1890, sendo criada para atuar na prestação de serviços ao mercado de capitais e à economia brasileira. Até a década de 60, a BOVESPA era uma entidade oficial corporativa vinculada à secretaria de finanças do governo estadual, e composta por corretores nomeados pelo poder público. A partir de 1965/66 com a implementação das reformas do sistema financeiro nacional e do mercado de capitais, a BOVESPA transformou-se em associação civil sem fins lucrativos, com autonomia administrativa, financeira e patrimonial. Assim, o corretor individual de fundos públicos foi substituído pela da sociedade corretora, que é uma empresa constituída sob a forma de sociedade por ações nominativas ou por cotas de responsabilidade limitada.

A BOVESPA é uma entidade auto-reguladora operando sob a supervisão da Comissão de Valores Mobiliários – CVM, que é o órgão responsável pela fiscalização, visando manter a transparência e a credibilidade da instituição junto aos investidores brasileiros e estrangeiros.

Atualmente, a BOVESPA é o maior centro de negociação com ações da América Latina, destaque este que culminou com um acordo histórico para a integração de todas as bolsas brasileiras em torno de um único mercado de valores - o da BOVESPA.

1.1.4 Índice Bovespa - Ibovespa

O Ibovespa é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Sua relevância advém do fato de o Ibovespa retratar o

comportamento dos principais papéis negociados na BOVESPA e também de sua tradição, pois o índice manteve a integridade de sua série histórica e não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação, em 1968.

O Ibovespa é o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 2/1/1968, a partir de uma aplicação hipotética, conforme [38]. Supõe-se não ter sido efetuado nenhum investimento adicional desde então, considerando-se somente os ajustes efetuados em decorrência da distribuição de proventos pelas empresas emissoras (tais como reinversão de dividendos recebidos e do valor apurado com a venda de direitos de subscrição, e manutenção em carteira das ações recebidas em bonificação). Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto da distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes.

Extremamente confiável e com uma metodologia de fácil acompanhamento pelo mercado, o Ibovespa representa fielmente o comportamento médio das principais ações transacionadas, e o perfil das negociações a vista observadas nos pregões da BOVESPA.

A finalidade básica do Ibovespa é a de servir como indicador médio do comportamento do mercado. Para tanto, sua composição procura aproximar-se o mais possível da real configuração das negociações a vista (lote-padrão) na BOVESPA.

Em termos de liquidez, as ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado a vista (lote-padrão) da BOVESPA.

A BOVESPA calcula seu índice em tempo real, considerando os preços dos últimos negócios efetuados no mercado a vista (lote-padrão) com ações componentes de sua carteira. Sua divulgação é feita pela rede de difusão da BOVESPA e também retransmitida por uma série de *Vendors*, sendo possível, dessa forma, acompanhar *on-line* seu comportamento em qualquer parte do Brasil ou do mundo.

Para que a representatividade do Ibovespa mantenha-se ao longo do tempo, sua carteira é reavaliada ao final de cada quadrimestre, utilizando-se os procedimentos e critérios previstos na sua metodologia. Nas reavaliações, identificam-se as alterações

na participação relativa de cada ação no índice, bem como sua permanência ou exclusão, e a inclusão de novos papéis. A carteira teórica do Ibovespa tem vigência de quatro meses, vigorando para os períodos de janeiro a abril, maio a agosto e setembro a dezembro. Pelos motivos supra citados utiliza-se neste trabalho o Ibovespa como índice referência ou *benchmark*.

1.1.5 Composição de Carteiras

Na década de 50 o economista Harry Markowitz [1] revolucionou o mundo das finanças ao introduzir os conceitos estatísticos na formulação de problemas de finanças. A diversificação de investimentos foi vista como uma forma de minimizar os riscos e maximizar os lucros de um investimento. Assim, compor uma carteira é: Alocar vários ativos de forma a se obter um máximo retorno com o mínimo risco.

Neste trabalho se utiliza carteiras compostas por ações da BOVESPA, observando sempre as ações de maior liquidez. Ações estas que, normalmente, compõem a carteira teórica do Ibovespa.

As Carteiras de Investimento podem ser classificadas como Ativas ou Passivas. Uma Carteira Ativa é a denominação adotada para as carteiras que são compostas visando superar a rentabilidade do *benchmark*, ou seja, é teoricamente uma forma mais agressiva de composição de Carteira. As Carteiras Passivas objetivam acompanhar da melhor maneira possível o *benchmark* tendo um retorno o mais próximo possível deste índice.

Neste trabalho utiliza-se uma série histórica de dados e um índice de referência ou *benchmark* neste caso, conforme citado anteriormente, o Ibovespa. A formulação dos dados é feita se utilizando de ferramentas estatísticas conforme introduzido por Markowitz [1].

1.2 Conceitos e Definições Matemáticas

Neste item, serão revistos alguns conceitos básicos e definições que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Inicia-se introduzindo sistemas de equações lineares, matrizes, vetores, gradientes e matrizes hessianas. São revisadas algumas propriedades de matrizes, bem como funções convexas, sendo estas muito importantes em otimização.

1.2.1 Matriz e Vetor

Inicia-se definindo uma Equação Linear de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n sendo uma expressão que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, a_2, \dots, a_n e b são constantes reais. As variáveis $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ na equação linear são chamadas de incógnitas.

Um conjunto finito de equações lineares nessas variáveis é chamado de sistema linear. Dado um sistema linear arbitrário com m equações e n incógnitas é possível escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

sendo $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ as incógnitas e $a_{i,j}$ e $b_i, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ constantes reais.

Uma Matriz é um conjunto de números reais ou complexos dispostos em linhas e colunas. O tamanho de uma matriz pode ser descrito pelo número de linhas e colunas que ela contém. Geralmente as matrizes são denotadas por letras maiúsculas. Uma matriz em $\mathbf{R}_{m \times n}$ será indicada por:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1.2.1.1)$$

$$a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn}$$

onde m é o número de linhas e n o número de colunas da mesma. Neste trabalho serão utilizadas somente matrizes reais.

$A^T = (a_{ji})$ é a matriz Transposta de A , e a matriz Inversa de A , neste caso quando $m = n$, é denotada por A^{-1} .

Uma matriz que contém somente uma coluna é chamada de vetor coluna, assim como a matriz que contém somente uma linha é chamada de vetor linha. Nessa dissertação é utilizado somente com vetores colunas, denotados por letras minúsculas.

Um vetor $x \in \mathbf{R}^n$ será indicado por:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

onde $x_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ é a j -ésima componente do vetor x .

O vetor $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ é o vetor transposto de x dado na relação acima.

Considere o sistema de m equações lineares e n incógnitas, apresentado na relação (1.2.1.1), pode-se reescrever as m equações desse sistema por uma única equação matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

As constantes reais a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ compõem a matriz A e b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ o vetor b e assim pode-se escrever essas equações lineares matricialmente, ou seja, $Ax = b$.

A seguir serão apresentadas algumas notações e definições relacionadas a matrizes e vetores que serão utilizadas ao longo do texto.

O produto escalar entre dois vetores x e y em \mathbf{R}^n é definido por:

$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \cdot y_i = x^t \cdot y \quad (1.2.1.2)$$

A norma Euclidiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é definida por:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^t \cdot x} \quad (1.2.1.3)$$

Uma matriz quadrada é dita Simétrica se $A = A^T$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j .

Definição: Seja A uma matriz real simétrica. Diz-se que A semidefinida positiva se,

$$x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.1.4)$$

A é dita definida positiva se

$$x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x \neq 0. \quad (1.2.1.5)$$

1.2.2 Funções

As funções com as quais serão trabalhadas serão definidas no \mathbb{R}^n com valores em \mathbb{R} , isto é, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição: Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \text{dom } f$. A derivada direcional de f em x na direção $d \in \mathbb{R}^n$ é definida por:

$$f'(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \quad (1.2.2.1)$$

O vetor das derivadas parciais de f em um ponto x é denominado de vetor Gradiente, e indicado por:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.2.2.2)$$

A matriz das derivadas parciais de segunda ordem de f em um ponto x é denominada de Matriz Hessiana, e indicada por:

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.2.2.3)$$

O conjunto de várias funções a valores reais g_1, g_2, \dots, g_m em \mathbb{R}^n , pode ser visto como uma função vetorial g . Essa função determina o vetor g definido por $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, desta forma,

$$g(x)^T = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)] \quad (1.2.2.4)$$

Supomos que g seja contínua com derivadas parciais contínuas. A matriz das derivadas parciais de g denomina-se Matriz Jacobiana e será indicada por:

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.2.2.5)$$

1.2.3 Convexidade

A convexidade de um problema é muito importante em otimização, pois está relacionada com o conceito de mínimo global. O termo convexo pode ser usado tanto para conjunto quanto para funções. Conforme [10] e [11].

Definição: O conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado convexo se para todo $x_1, x_2 \in S$ e todo $\alpha \in [0,1]$, tem-se:

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in S.$$

Geometricamente, esta definição significa que se escolhermos dois pontos quaisquer em S e os unirmos por um segmento de reta, todos os pontos desse segmento devem estar em S .

Definição: Considere S um subconjunto não vazio e convexo do \mathbb{R}^n . A função $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa sobre S , se para todo $x_1, x_2 \in S$ e todo $\alpha \in [0, 1]$ se verifica:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (1.2.3.1)$$

Se a desigualdade em (1.2.3.1) é estrita a função é chamada de estritamente convexa.

Definição: Uma função é dita de classe C^1 se possui derivadas contínuas de ordem 1. De uma maneira geral uma função é de classe C^k se possui derivadas contínuas até ordem k .

Teorema: Se $f \in C^1$, então (i) e (ii) abaixo são equivalentes, e se $f \in C^2$ então (i), (ii) e (iii) abaixo são equivalentes.

(i) f é convexa;

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x) \cdot (y - x)$;

(iii) $\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, isto é, simétrica e semidefinida positiva.

1.3 Conceitos e Definições Estatísticas

Neste item introduziremos os conceitos básicos de estatística aplicados na modelagem da composição de carteiras de investimento, tais como: variável aleatória, esperança matemática, variância, desvio padrão e covariância.

1.3.1 Variável Aleatória

É a função que associa a todo evento de um determinado espaço um único número real. Uma variável aleatória discreta assume valores em um conjunto

enumerável, podendo o conjunto ser finito ou infinito e ser representada da seguinte forma:

$$X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

O conjunto de valores definido por $p(X = x_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$, é chamado de Distribuição de Probabilidade da variável aleatória X . Para a variável aleatória discreta a função associada a estes valores é conhecida como Função de Probabilidade.

1.3.2 Esperança Matemática, Média ou Retorno Esperado

A esperança matemática ou média caracteriza o centro da distribuição de probabilidade da variável aleatória. Para o caso discreto pode ser definida da seguinte forma:

$$E(X) = \mu_x = \mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Neste trabalho, a esperança matemática ou média caracterizará o retorno esperado de um ativo ou carteira, onde a variável aleatória X será determinada pelos métodos implementados e a probabilidade $p(x)$, pela média aritmética da série de dados dos retornos associados a x .

1.3.3 Variância

A variância é a medida que indica o grau de dispersão ou concentração das probabilidades em torno da média. Para a variável aleatória discreta, ela é definida como:

$$V(X) = \text{VAR}(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Assim, quanto menor a variância maior o grau de concentração de probabilidades em torno da média. Analogamente, quanto maior a variância, menor o grau de concentração das probabilidades em torno da média.

1.3.4 Desvio Padrão – Risco

A variância como medida de dispersão apresenta a desvantagem de possuir dimensão diferente que as dos dados originais, pois ela representa a unidade da

variável ao quadrado, o que não é conveniente para a análise deste trabalho. Isso pode ser contornado calculando-se o Desvio Padrão, como definido a seguir:

$$\sigma_x = \sqrt{\text{VAR}(X)}$$

Neste trabalho o desvio padrão será utilizado para medir o risco da carteira, conforme sugerido por Markowitz [1] no Modelo da Média Variância.

Exemplo:

Seja a série apresentada na tabela 1 a seguir que trata dos preços e retornos diários do ativo Acesita PN (ACES4) negociado na Bovespa. Na coluna apresenta-se o número de observações diárias, na segunda coluna as datas correspondentes as observações, na terceira coluna os preços que correspondem às cotações de fechamento, ou seja, ao último negócio do dia. Finalmente na quarta coluna a variação do retorno diário da ação.

Tabela 1 – Retornos Acesita PN (ACES4)

i	Data	Preço (R\$)	Retorno (%)
1	29/06/2006	38,47	1,24
2	28/06/2006	38,00	1,23
3	27/06/2006	37,54	-0,71
4	26/06/2006	37,81	0,32
5	23/06/2006	37,69	0,24
6	22/06/2006	37,60	0,27
7	21/06/2006	37,50	0,00
8	20/06/2006	37,50	-0,27
9	19/06/2006	37,60	0,27

Aplicando as definições estatísticas apresentadas anteriormente e considerando a janela de 9 dias do ativo Acesita PN dada na tabela 1 acima, tem-se que a variável aleatória é dada pelos retornos diários do ativo. Pode-se calcular a esperança matemática ou retorno esperado da seguinte forma:

$$E(X) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 0,2877$$

Calculando a variância obtém-se:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,3984$$

Encontrando o desvio padrão ou risco, tem-se:

$$\sigma_x = \sqrt{\text{VAR}(X)} = 0,6312$$

Interpretando os resultados obtidos, o ativo Acesita PN tem um retorno esperado de 0,28 % ao dia, com um risco associado de 0,63%. Esses resultados estão estritamente relacionados com a janela considerada. Se ao invés de 9 dias fossem considerados 5 ou 50 dias os resultados seriam outros. Uma janela pequena fornece resultados mais sensíveis ao retorno e ao risco no curto prazo. Por sua vez, uma janela maior absorve grandes variações isoladas e fornece informações para prazos mais longos.

1.3.5 Covariância

A Covariância representada por $\text{COV}(X,Y)$ indica o grau de dependência entre as variáveis aleatórias discretas X e Y . É definida como:

$$\text{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Se as variáveis aleatórias X e Y forem independentes, então

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Assim, temos que

$$\text{COV}(X,Y) = 0$$

isto é, se X e Y são independentes então a covariância entre X e Y é zero, ver Barry James [21].

Por outro lado a recíproca não é verdadeira, ou seja, se a covariância entre duas variáveis X e Y é zero, isto não implica necessariamente que X e Y sejam independentes.

Seja $X = x$ um vetor de n variáveis aleatórias. Definimos uma matriz de covariâncias como:

$$Q = \text{COV}(X_i, X_j) = \text{COV}(X_{ij}) = \begin{pmatrix} \text{COV}(X_{11}) & \text{COV}(X_{12}) & \dots & \text{COV}(X_{1n}) \\ \text{COV}(X_{21}) & \text{COV}(X_{22}) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{COV}(X_{n1}) & \dots & \dots & \text{COV}(X_{nn}) \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

onde, $\text{COV}(X_{ij}) = \text{VAR}(X)$ para $i = j$, isto é, a diagonal da matriz de covariâncias é formada pelas n variâncias e, conseqüentemente, existem $n(n-1)/2$ covariâncias fora da diagonal.

Uma propriedade importante da matriz de covariâncias é a simetria, isto é, $\text{COV}(X_i, X_j) = \text{COV}(X_j, X_i)$ para $i \neq j$.

A matriz de covariância é definida positiva conforme Johnson e Wichner [20], isto é,

$$x^T Q x > 0, \forall x \neq 0 \quad (1.3.5.1)$$

2. MODELOS

Neste capítulo serão apresentados os problemas de minimização restrita e irrestrita e as condições de otimalidade para os problemas quadráticos. As condições de otimalidade são relações entre as derivadas da função objetivo e as derivadas das funções que definem as restrições. As condições necessárias devem ser obrigatoriamente satisfeitas por minimizadores, enquanto as condições suficientes, quando satisfeitas, asseguram que o ponto em questão é um minimizador local ou global dependendo de o problema ser ou não convexo.

Inicia-se com a minimização irrestrita, que é um caso particular do problema geral de programação não linear. Veremos os tipos de minimizadores e as condições de otimalidade para esse tipo de problema. A seguir, apresentamos a minimização restrita, e veremos que se o problema satisfaz uma condição de qualificação, há ainda, uma extensão ao caso irrestrito.

Ainda apresenta-se a descrição da forma geral de um modelo quadrático que se constitui em um caso particular da minimização restrita.

2.1 Condições de Otimalidade para Problemas de Minimização Irrestrita

A formulação matemática de um problema de minimização irrestrita é a seguinte:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

sendo $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continuamente diferenciável, chamada de função objetivo.

No processo de minimização irrestrita, podem-se obter como solução vários tipos de minimizadores. A seguir veremos como se pode reconhecê-los. Lembramos que aqui todas as definições a seguir são análogas para o processo de maximização, ou seja, maximizar f é equivalente a minimizar $-f$.

Definição: Um ponto $x^* \in \mathbf{R}^n$ é um minimizador local de f se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$.

Definição: Um ponto $x^* \in \mathbf{R}^n$ é um minimizador local estrito de f se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $x \neq x^*$ e $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$.

Definição: Um ponto $x^* \in \mathbf{R}^n$ é um minimizador global de f se, e somente se, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

Definição: Um ponto $x^* \in \mathbf{R}^n$ é um minimizador global estrito de f se, e somente se, $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$ tal que $x \neq x^*$.

A partir das definições, dadas acima, pode se ter a impressão de que a única forma de achar um minimizador é analisando todos os pontos de sua vizinhança, certificando-se que nenhum deles tem um valor de função objetivo menor. Entretanto, quando a função f é suave, existem maneiras mais práticas e eficientes de identificar minimizadores. Em particular, se f é continuamente diferenciável até segunda ordem, é possível dizer se um ponto x^* é um minimizador local, examinando o vetor gradiente $\nabla f(x^*)$ e a matriz $\nabla^2 f(x^*)$ no ponto.

A seguir será apresentado um resultado baseado na série de Taylor, uma ferramenta fundamental utilizada para o estudo de minimização de funções.

Teorema: Suponha que $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tem derivadas contínuas pelo menos até segunda ordem, e que $\rho \in \mathbf{R}^n$. Então, tem-se que

$$f(x + \rho) = f(x) + \nabla f(x + t\rho)^t \rho + \frac{1}{2} \rho^t \nabla^2 f(x + t\rho) \rho,$$

para algum $t \in (0,1)$.

Prova: Ver [13].

Teorema: (*Condição Necessária de Primeira Ordem*) Se x^* é um minimizador local e f é continuamente diferenciável numa vizinhança de x^* , então $\nabla f(x^*) = 0$.

Prova: Ver [13].

Se $\nabla f(x^*) = 0$, x^* é chamado de ponto estacionário da função f , podendo ser um ponto de máximo, mínimo ou de sela.

Para os teoremas seguintes serão usadas as definições de matriz definida positiva (1.2.1.5).

Teorema: (*Condição Necessária de Segunda Ordem*) Se x^* é um minimizador local de f e ∇f é contínua numa vizinhança de x^* , então $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é semi-definida positiva.

Prova: Ver [13].

Teorema: (*Condição Suficiente de Segunda Ordem*) Suponha que $\nabla^2 f$ é contínua numa vizinhança de x^* e que $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é positiva definida. Então x^* é um minimizador local estrito de f .

Prova: Ver [13].

Teorema: Quando f é convexa, um minimizador local x^* é um minimizador global de f . Se f é continuamente diferenciável e convexa, então um ponto estacionário x^* é um minimizador global de f .

Prova: Ver [13].

As condições necessárias de otimalidade devem ser obrigatoriamente satisfeitas por minimizadores, enquanto as condições suficientes, quando satisfeitas, asseguram que o ponto em consideração é um minimizador local. A garantia de que o ponto é um minimizador global, em geral, é muito mais complicada.

Os algoritmos utilizados para encontrar soluções do problema (2.1.1), são quase sempre iterativos, iniciam com um ponto dado x^0 e determinam uma direção d^k . Escolhem-se direções ao longo das quais é possível fazer decrescer o valor da função objetivo, portanto espera-se que o ponto encontrado seja um minimizador local. Assim as direções $d \in \mathbf{R}^n$ tais que $\nabla f(x^*)^T d < 0$, são chamadas de direções de descida a partir do ponto x , ou seja, as direções que formam um ângulo maior que 90 graus com o vetor gradiente da função objetivo. Ao longo dessa direção, calcula-se um comprimento do passo λ^k que permita uma redução razoável no valor da função objetivo. Logo, resolve-se um subproblema para encontrar o comprimento do passo:

Dada uma função $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, um ponto x e uma direção de descida $d \in \mathbf{R}^n$, encontrar $\lambda \geq 0$ (se existir) tal que

$$f(x + \lambda d) < f(x).$$

Geralmente o critério de parada desses algoritmos é a condição de otimalidade de primeira ordem, isto é, o algoritmo para quando um ponto estacionário da função objetivo é encontrado.

Os algoritmos geram, portanto, uma seqüência (x^k) em \mathbf{R}^n com uma seqüência associada $(f(x^k))$ de valores reais monótona decrescente [3]. O processo a seguir é um modelo geral de algoritmo para resolver o problema (2.1.1):

Algoritmo: Minimização Irrestrita

Dado $x^0 \in \mathbf{R}^n$

Para $k = 0$

Enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

Escolha uma direção $d^k \in \mathbf{R}^n$ tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$;

Calcule o comprimento do passo $\lambda^k > 0$ tal que

$$f(x^k + \lambda^k d^k) < f(x^k);$$

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$$

$$k = k + 1$$

Existem na literatura vários métodos para a escolha da direção d^k a ser tomada, assim como também existem várias metodologias para a determinação do comprimento do passo λ^k . Como, por exemplo, para a escolha da direção tem-se o método de Cauchy que usa o oposto do gradiente da função objetivo como direção:

$$d^k = -\nabla f(x^k).$$

Esse é um dos métodos mais conhecidos e também um dos mais antigos, que resolvem o problema irrestrito.

Outra escolha usual da direção d^k é a direção de Newton:

$$d^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k).$$

Como será apresentado esta direção está bem definida se a matriz hessiana da função f for não singular.

Para a determinação do comprimento do passo λ^k , existem vários métodos, denominados métodos de busca unidirecional, os quais garantem que o decréscimo no valor da função seja proporcional ao comprimento do passo na direção d^k . Para exemplificar podem-se citar dois métodos de busca unidirecional: busca exata e a busca de Armijo.

Uma discussão mais detalhada, sobre esse assunto, pode ser encontrada em [3] e [14].

2.2 Condições de Otimalidade para Problemas de Minimização Restrita

O problema geral de programação não linear diferenciável com restrições de igualdade e de desigualdade, é:

$$\begin{aligned} \min f(x) & \qquad \qquad \qquad (2.2.1) \\ \text{sujeito a } h_i(x) = 0, \quad i \in \mathbf{E} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathbf{I} \\ x_i \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

onde $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ e $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, e $\mathbf{E} = 1, 2, \dots, p$ e $\mathbf{I} = 1, 2, \dots, m$ são dois conjuntos finitos de índices, sendo que o conjunto \mathbf{E} corresponde as restrições de igualdade e o conjunto \mathbf{I} corresponde as restrições de desigualdade.

Se o problema satisfaz uma Condição de Qualificação, há uma extensão ao caso geral da condição necessária de otimalidade no caso irrestrito visto anteriormente. Esta extensão consiste na condição de otimalidade conhecida como Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Se a condição de qualificação não for satisfeita não podemos garantir que as condições de otimalidade são realmente necessárias [14]. Para minimalidade de um dado ponto.

Definição: Conjunto viável Ω é o conjunto de pontos x que satisfazem as restrições de igualdade e desigualdade, ou seja,

$$\Omega = \{ x \mid h_i(x) = 0, i \in \mathbf{E}; g_i(x) \leq 0, i \in \mathbf{I} \}$$

Define-se a função Lagrangeano para o problema (2.2.1) como:

$$l(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^t h(x) + \mu^t g(x)$$

onde, λ e μ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade e desigualdades respectivamente.

Definição: Conjunto ativo $\mathbf{A}(x)$ para algum ponto viável x é a união dos índices referentes as restrições de igualdade e os índices referentes as restrições de desigualdade que estão satisfeitas na igualdade no ponto x , isto é,

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{E} \cup \{i \in \mathbf{I} \mid g_i(x) = 0\}$$

Definição: (LICQ) - Dado o ponto x^* e um conjunto ativo $\mathbf{A}(x^*)$ definido acima, dizemos que a condição de qualificação de independência linear é satisfeita se os gradientes das restrições, pertencentes ao conjunto ativo, são linearmente independentes.

Teorema: KKT - Suponha que x^* é solução local de (2.2.1) e que satisfaz a condição de qualificação (LICQ). Então existem vetores de multiplicadores de Lagrange λ^* e μ^* , com componentes λ_i^* , $i \in \mathbf{E}$ e μ_i^* , $i \in \mathbf{I}$, tais que as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{aligned} \nabla_x l(x^*, \lambda^*) &= 0, && \text{Estacionaridade} \\ h_i(x^*) &= 0 \quad \forall i \in \mathbf{E}, && \text{Viabilidade primal} \\ g_i(x^*) &\leq 0 \quad \forall i \in \mathbf{I}, && \text{Viabilidade primal} \\ \mu_i^* &\geq 0 \quad \forall i \in \mathbf{I}, && \text{Viabilidade dual} \\ \mu_i^* g_i(x^*) &= 0 \quad \forall i \in \mathbf{I}. && \text{Complementaridade} \end{aligned}$$

Prova: Ver [15].

2.3 Forma Geral de um Modelo Matemático Quadrático

Um modelo quadrático tradicional constitui um problema não linear que pode ser resolvido por métodos de otimização. De forma geral um modelo quadrático tem por objetivo minimizar (min) uma função chamada de função objetivo, sujeita a (s.a) restrições de igualdades e/ou desigualdades, como descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x && \text{(2.3.1)} \\ \text{s. a} \quad & A x \leq b \\ & B x = d \\ & m \leq x \leq n \end{aligned}$$

onde

$$Q \in \mathbf{R}^{n \times n}; A \in \mathbf{R}^{p \times n}; B \in \mathbf{R}^{q \times n}; c \in \mathbf{R}^n; b \in \mathbf{R}^p;$$

$$d \in \mathbf{R}^q; l, u, x \in \mathbf{R}^n$$

com $p + q = m$

O modelo na forma de minimização equivale a um problema de maximização (max) uma vez que $\min f(x) = - [\max f(x)]$. De uma forma geral existe uma série de problemas reais que podem ser formulados como modelos quadráticos.

Observe no modelo (2.3.1) que o total de restrições lineares de igualdade e desigualdade é m . Além disso, existem n restrições de caixa (restrições sobre as variáveis do problema).

2.4 Região Viável

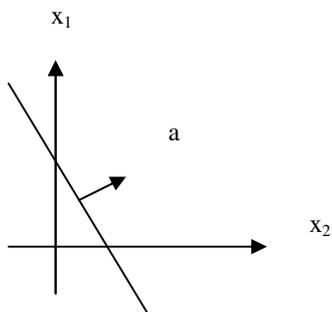
Para o problema (2.3.1), a região viável é definida como $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b, Bx = d, l \leq x \leq u\}$.

Definindo-se $a_i^t = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, então $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i^t x \leq b_i, x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m\}$.

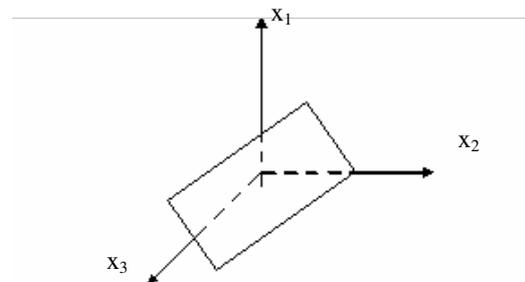
Cada uma das m desigualdades $a_i^t x \leq b_i$ para $i=1, 2, \dots, m$, define em \mathbf{R}^n um semi-espaço.

Exemplos:

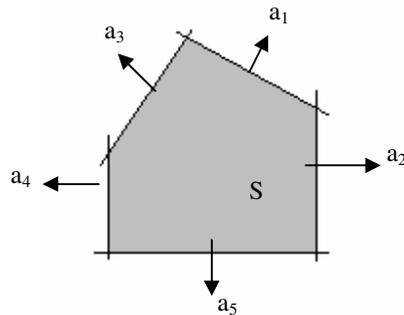
i) Para o \mathbf{R}^2



ii) Para o \mathbf{R}^3



iii) Para o $\mathbf{R}^{2 \times 5}$



A região S consiste na interseção de m semi-espacos. Portanto, S é um poliedro em \mathbf{R}^n .

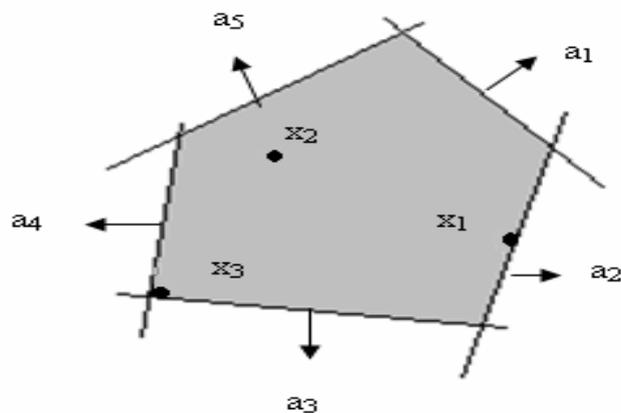
2.5 Restrições Ativas

Dado um ponto $x \in S$, pode-se associar um número inteiro $r(x)$ com $0 \leq r(x) \leq m$, que corresponde a quantas restrições satisfazem $a_i^t x = b_i$. Estas restrições denominam-se de restrições ativas em x .

Considerando $M = \{1, 2, \dots, m\}$ o conjunto de índice das restrições, define-se $r(x)$ como o conjunto dos índices das restrições ativas em x , assim $r(x) = \{i \in M \mid a_i^t x = b_i\}$.

Para uma melhor compreensão, apresenta-se abaixo um exemplo que ilustra este caso:

Figura 1 – Representação Pontos e Restrições



$$M = \{1,2,3,4,5\}$$

$$r(x_1) = 1 \quad I(x_1) = \{2\}$$

$$r(x_2) = 0 \quad I(x_2) = \emptyset$$

$$r(x_3) = 2 \quad I(x_3) = \{3,4\}$$

Nas próximas seções, apresentam-se métodos conhecidos na literatura para a resolução do problema quadrático (2.3.1).

2.6 Penalidade Quadrática Clássica

Os métodos de penalização são procedimentos que resolvem problemas restritos, como (2.3.1), através de uma seqüência de problemas irrestritos.

Os algoritmos determinados pelos métodos de penalização são iterativos e cada iteração consiste em resolver um subproblema irrestrito, formado pela função objetivo somada a um múltiplo das restrições, e atualização do parâmetro de penalidade. As funções dos subproblemas irrestritos. Recebem o nome de funções penalizadas.

A função de penalidade proposta por Rockafellar [5] para o parâmetro de penalidade $r > 0$, tem a seguinte forma:

$$y \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}_+ \rightarrow p(y, \mu) = \frac{1}{2r} (\max\{0, ry + u\}^2 - u^2)$$

ou equivalentemente

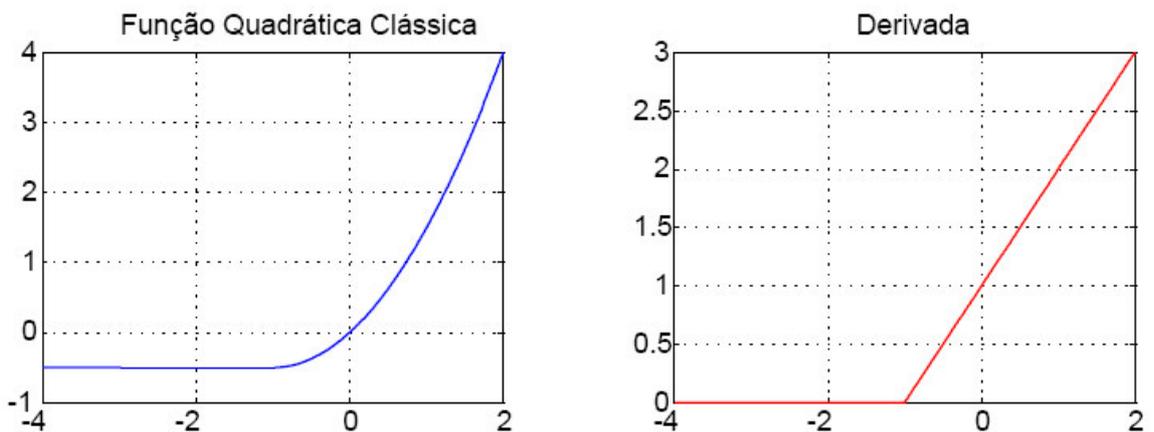
$$p(y, \mu) = \begin{cases} \frac{r}{2}y^2 + \mu y, & \text{se } y \geq -\frac{\mu}{r} \\ -\frac{\mu^2}{2r}, & \text{se } y < -\frac{\mu}{r} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Para $\mu \in \mathfrak{R}^+$ fixo a derivada em (2.6.1) tem a forma

$$p'(y, \mu) = \begin{cases} r \cdot y + \mu, & \text{se } y \geq -\frac{\mu}{r} \\ 0, & \text{se } y < -\frac{\mu}{r} \end{cases} \quad (2.6.2)$$

As figuras abaixo mostram o gráfico da função p de (2.6.1) e da função p' de (2.6.2) para o caso em que $r = \mu = 1$.

Figura 2 – Função Quadrática e sua Derivada



Como a função de Rockafellar não possui segunda derivada no ponto $y = -\frac{\mu}{r}$ podemos ter dificuldades ao usar métodos que utilizem derivada de ordem 2, como é o caso por exemplo, do método de Newton e o método de Região de confiança.

Neste trabalho se utiliza uma penalidade quadrática que possui derivada de segunda ordem, proposta por Matioli [2], apresentada na próxima seção.

2.7 Função Penalidade Quadrática Pura

A função de penalidade θ a ser usada no algoritmo de Lagrangeano Aumentado é definida como

$$y \in \mathbb{R} \rightarrow \theta(y) = \frac{1}{2}y^2 + y \quad (2.7.1)$$

Nota-se que (2.7.1) é uma aproximação de Taylor de ordem 2 das funções $\theta(y) = e^y - 1$ e $\theta(y) = -\ln(1 - y)$ no ponto $y = 0$. A função $\theta(y) = e^y - 1$ é utilizada por [16] e $\theta(y) = -\ln(1 - y)$ utilizada por [2].

A função conjugada é definida como

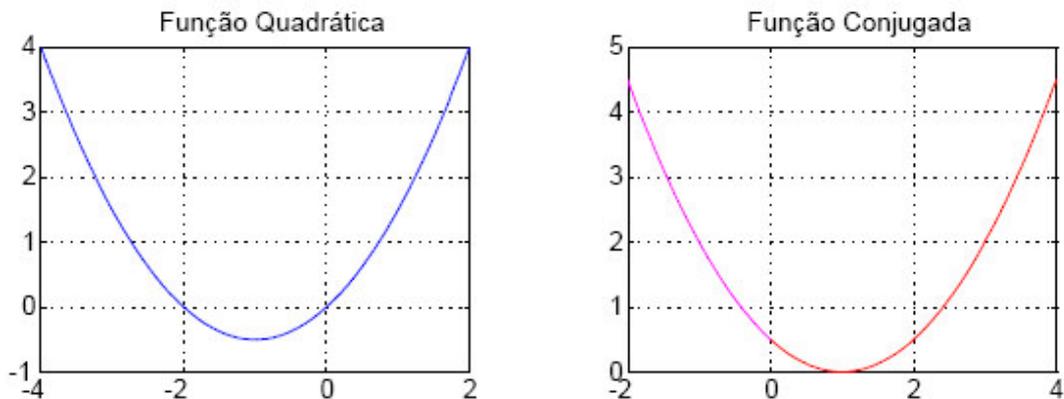
$$s \in \mathfrak{X}^n \rightarrow f^*(s) = \sup_x \{x^T s - f(x) \mid x \in \mathfrak{X}^n\}. \quad (2.7.2)$$

Para a conjugada da função θ dada na relação (2.7.1) tem-se

$$s \in \mathfrak{X} \rightarrow \theta^*(s) = \frac{1}{2}(s - 1)^2 \quad (2.7.3)$$

As figuras abaixo mostram o gráfico da função θ (2.7.1) e da função θ^* (2.7.3).

Figura 3 - Quadrática e sua Conjugada



Observa-se que θ não é crescente em todo seu domínio, pois no intervalo $(-\infty, -1)$ é decrescente e no intervalo $(-1, \infty)$ é crescente. O que acarreta derivadas direcionais negativas.

A função θ apresentada em (2.7.1) não satisfaz todas as propriedades, que em geral são exigidas na literatura para funções de penalidade. Por exemplo, ela não é estritamente crescente. Isto poderia acarretar problemas no algoritmo de Lagrangeano Aumentado gerando multiplicadores negativos. No entanto, em [2] o autor mostra que isto é contornável apenas com a atualização do parâmetro de penalidade.

2.8 Penalidade e Lagrangeano Aumentado

Aqui será abordada uma importante classe de métodos para programação não-linear que são os métodos baseados em penalidades. O princípio básico desses métodos é converter um problema relativamente difícil em um problema de mais fácil solução, utilizando procedimentos que resolvem problemas restritos através de uma seqüência de problemas irrestritos.

Os algoritmos determinados por esses métodos são iterativos e cada iteração consiste em resolver subproblemas formados pela função objetivo do problema original acrescida a um múltiplo das restrições, e atualização do parâmetro de penalidade.

Inicia-se apresentando funções de penalidade, definindo-as, e indicando uma metodologia para a construção dessas. As funções de penalidades serão utilizadas no método de Lagrangeano Aumentado.

O método de Lagrangeano Aumentado na sua forma original foi introduzido para resolver problemas com restrições de igualdade e posteriormente generalizados para problemas com restrições de desigualdade.

Conforme Martinez [3], este método tem como um dos principais objetivos reverter o mal condicionamento proveniente dos métodos de penalidades clássicos, como por exemplo, as penalidades barreira logarítmica e barreira inversa muito conhecidas na literatura de programação linear.

Antes de apresentar o método de Lagrangeano Aumentado, define-se a penalidade que será utilizada. Na literatura existem várias metodologias de penalização para os métodos de Lagrangeano Aumentado.

Neste trabalho será utilizada a metodologia definida em [2], ou seja, a função de penalidade utilizada é definida como:

$$(y, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_+ \mapsto p(y, \mu) = \theta(\mu y) = \frac{1}{2}(\mu y)^2 + \mu y \quad (2.8.1)$$

em que θ é dada pela relação (2.7.1).

Portanto, se θ é dada por (2.7.1) e p é dada na relação (2.8.1) a penalidade a ser utilizada no algoritmo de Lagrangeano Aumentado terá a forma:

$$(y, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}_+ \mapsto p(y, \mu) = \frac{1}{2}\mu^2 y^2 + \mu y. \quad (2.8.2)$$

Na seqüência apresenta-se a definição das funções Lagrangeana e Lagrangeano Aumentado.

A função Lagrangeana associada ao problema é:

$$(x, \mu) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^m \mapsto l(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x)$$

A função Lagrangeano Aumentado associada ao problema é:

$$(x, \mu, r) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^m \times \mathbf{R}_{++} \mapsto l(x, \mu, r) = f(x) + r \sum_{i=1}^m p\left(\frac{g_i(x)}{r}, \mu_i\right)$$

Fixando $\mu > 0$ e $r > 0$, a condição de estacionaridade para L é:

$$\nabla_x L(x, \mu, r) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m p'\left(\frac{g_i(x)}{r}, \mu_i\right) \nabla g_i(x) = 0$$

definindo-se

$$\mu_i = p'\left(\frac{g_i(x)}{r}, \mu_i\right), \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2.8.3)$$

tem-se

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x) = 0 \text{ ou } \nabla l(x, \mu) = 0$$

a qual é a condição de estacionaridade de K.K.T.

Desta forma, no algoritmo de Lagrangeano Aumentado apresentado a seguir os multiplicadores de Lagrange (ou de KKT) serão atualizados como na relação (2.8.3), pois isto força o algoritmo a gerar pontos que satisfaçam a condição de estacionaridade de KKT, sendo que as demais condições de KKT serão satisfeitas na solução.

2.9 Algoritmo de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática

A seguir será apresentado o algoritmo de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática conforme descrito na seção anterior.

Algoritmo 2.9.1: Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática (LAPQ)

Dados $\mu^0 \geq 0$, $\gamma > 1$, $\alpha > 1$ e $r^0 > 0$

Faça $k = 0$

repita

encontre

$$x^+ \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathfrak{X}^n} \left\{ f(x) + r^k \sum_{i=1}^m p\left(\frac{g_i(x)}{r^k}, \mu_i^k\right) \right\}$$

atualize

$$\mu_i^+ = p' \left(\frac{g_i(x^+)}{r^k}, \mu_i^k \right) \quad i=1, 2, \dots, m$$

se $\mu_i^+ \geq 0$

$$x^{k+1} = x^+$$

$$\mu_i^{k+1} = \mu_i^+$$

$$r^{k+1} = \frac{r^k}{\alpha}$$

senão

$$r_i^{k+1} = \gamma \cdot r_i^k$$

$$k = k + 1$$

em que p é dada na seção (2.8).

Cada iteração do algoritmo (2.9.1) consiste em formar subproblemas irrestritos, que podem ser resolvidos por qualquer método de minimização irrestrita. Para resolver o subproblema

$$x^+ \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + r^k \sum_{i=1}^m p \left(\frac{g_i(x)}{r^k}, \mu_i^k \right) \right\}$$

foi implementado o método de Região de Confiança baseado no algoritmo Hook em [17], (ver também capítulo 4 de [13]).

Sobre a atualização dos parâmetros μ e r destaca-se que:

- Se $\mu^+ \geq 0$, atualiza-se o ponto corrente e o multiplicador de Lagrange para a próxima iteração, reduz-se o parâmetro de penalidade r ;
- Se $\mu^+ < 0$, mantém-se o ponto, aumenta-se o valor do parâmetro de penalidade r .

Para resolver a seqüência de subproblemas gerada pelo algoritmo do Lagrangeano Aumentado será usado o Método de Região de Confiança que será visto a seguir.

2.10 Região de Confiança

Os métodos de Região de Confiança são utilizados, na maioria dos casos, em problemas irrestritos. São iterativos e a cada iteração é construído um modelo quadrático da função que é minimizada em uma região que se confia no modelo.

Considere o problema de minimização irrestrito com função objetivo f . Desta forma, a aproximação quadrática de f próximo ao ponto x^k , tem a forma:

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla^t f(x^k) (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^t \nabla^2 f(x^k) (x - x^k)$$

se $h = (x - x^k)$, $g^k = \nabla f(x^k)$ e $H^k = \nabla^2 f(x^k)$, tem-se

$$f(x) \approx m^k(h) = f(x^k) + g_k^t h + \frac{1}{2} h^t H^k h$$

Como o modelo quadrático $m^k(h)$ deixa de ser representativo a medida que x se afasta de x^k , pode-se confiar na aproximação de $f(x)$ por $m^k(h)$ numa vizinhança de x^k , ou seja, no conjunto $\{x \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } \|h\| \leq \Delta\}$ onde $\Delta > 0$ e $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em \mathbf{R}^n . No entanto, se o valor de f no minimizador de m^k não é suficientemente menor que $f(x^k)$, o raio Δ é reduzido e define-se um novo subproblema com o domínio menor.

Antes de escrever o algoritmo definem-se alguns termos.

Para verificar se o modelo está bom, tem-se que olhar a taxa de variação ϕ , que é a razão entre a variação em f e a variação em m^k .

- variação em $f = \text{ARED} = \Delta f = f(x^k) - f(x^{k+1})$
- variação em $m^k = \text{PRED} = \Delta m^k = m^k(0) - m^k(x^{k+1})$
- taxa de variação = $\phi = \frac{\text{ARED}}{\text{PRED}}$

Uma metodologia clássica para decidir quando o modelo está bom ou ruim é a seguinte:

- Se a taxa de variação for menor que $\frac{1}{4}$ o modelo está ruim, deve-se reduzir a região e manter o modelo para a iteração corrente.
- Se a taxa de variação estiver entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ o modelo está razoável, mantêm-se a região e constrói-se um novo modelo para a próxima iteração.
- Se a taxa de variação for maior que $\frac{3}{4}$ o modelo está bom, deve-se aumentar a região e construir um novo modelo para a próxima iteração.

2.11 Algoritmo de Região de Confiança

Na seção anterior (2.10), se descreveu de forma geral os métodos de região de confiança, que constrói um modelo quadrático da função que é minimizada em uma região na qual se confia no modelo. Assim, abaixo é exibido o algoritmo de região de confiança utilizado neste trabalho.

Dados $x^0 \in \mathbf{R}^n$, $\Delta^0 \in \mathbf{R}$

$K=0$

Calcular $f(x^k), \nabla f(x^k), \nabla^2 f(x^k)$

Resolver $h^k \in \operatorname{argmin}\{f(x^k) + \nabla^t f(x^k)h + \frac{1}{2} \nabla^2 f(x^k)h^2: h \in \mathbf{R}^n \text{ e } \|h\| \leq \Delta^k\}$

Repetir

Calcular $\varphi = \frac{\mathbf{ARED}}{\mathbf{PRED}}$

Se $\varphi < \frac{1}{4}$

$$\Delta = \frac{\Delta^k}{2}$$

senão

se $\varphi > \frac{3}{4}$

$$\Delta = 2\Delta^k$$

fim se

$$x^{k+1} = x^k + h^k$$

$k=k+1$

fim senão

até a convergência.

Para resolver o subproblema quadrático gerado no algoritmo (2.11) foi utilizado o algoritmo Hook apresentado em Dennis e Schanabel [17] (ver também Nocedal [13]).

3. MODELOS APLICADOS EM FINANÇAS

A abordagem clássica de média variância foi inicialmente proposta por H. Markowitz na década de 50. Posteriormente esta abordagem lhe valeu o Prêmio Nobel de economia em 1990. Esta ferramenta quantitativa permite ao investidor alocar os seus recursos entre diferentes ativos financeiros, compondo sua carteira de forma a obter uma solução de compromisso ótima entre retorno e risco. Essa teoria é desenvolvida seguindo a premissa de que os investidores avaliariam suas carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado, sendo essas as únicas duas variáveis de decisão para a seleção de ativos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, os investidores sempre escolheriam a de maior retorno, quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor risco. Com base nessas duas hipóteses a “Teoria Moderna de Carteiras”, estabelece entre outros resultados, a fronteira eficiente para as carteiras de investimento.

3.1 Modelo da Média Variância ou Modelo de Markowitz

O Modelo da Média Variância revolucionou a teoria moderna de investimentos ao propor uma solução matemática para a composição de *portfolios*.

Markowitz verificou que o retorno esperado de um investimento poderia ser visto como a esperança matemática e o risco do investimento associado ao desvio padrão de uma distribuição normal. Agrupando-se o risco em uma matriz de covariâncias Q chegou-se a seguinte modelagem:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{s. a} \quad & e^T x_i = 1 \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

onde

$$\begin{aligned} Q &\in \mathbf{R}^{n \times n} \\ x, e &\in \mathbf{R}^n \\ Q &\text{ definida positiva} \end{aligned}$$

Neste caso, X é a variável aleatória e suas componentes representam o percentual investido em cada ativo. Assim, a soma de todos os percentuais investidos será igual ao montante total inicial investido. É importante salientar que este modelo considera uma série de retornos passados dos ativos para formular a matriz de covariâncias. Portanto, pressupõe-se que o passado se repita de alguma forma no futuro.

Observa-se que o modelo da Média Variância pode ser visto como um caso particular do modelo (2.3.1). Para confirmar isto basta tomar em (2.3.1) o vetor c e a matriz A nulos, a matriz B um vetor cujas componentes são iguais a 1 (um), u é o limite superior para x e é igual a infinito (não existe limite superior para o vetor x) e l é o limite

inferior e é igual a 0 (zero). Utiliza-se a seguinte notação: Para $x \in \mathbf{R}^n$ escreve-se $x \geq 0$, o que significa que $x_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

É importante ressaltar ainda que o Modelo da Média Variância serviu posteriormente de base para uma série de importantes estudos, donde se desenvolveram outros importantes conceitos amplamente utilizados atualmente, como, por exemplo, o beta de um ativo introduzido por Sharpe [6].

3.2 O Problema da Composição de Carteira de Investimento

Hipoteticamente, um investidor possui um capital inicial disponível para investimento no mercado de capitais, mais especificamente em ações da bolsa de valores. A próxima etapa é decidir em quais ativos da Bovespa investir. Aqui se considera apenas os 54 ativos de maior liquidez, isto é, as ações que compõem o Ibovespa.

A tabela 2 a seguir representa a carteira teórica do Ibovespa de 31/07/2006, Bovespa [19], em que na primeira coluna é apresentada a sigla das 54 ações que compõem a carteira em ordem decrescente de representatividade. Na segunda coluna é apresentado o nome de cada empresa a qual se refere a ação. Já na terceira coluna é descrito o tipo da ação e finalmente na última coluna a participação em porcentagem de cada ação na composição da carteira.

Tabela 2 – Carteira do Ibovespa

Código	Ação	Tipo	Participação (%)
VALE5	VALE R DOCE	PNA N1	12,5880
PETR4	PETROBRAS	PN	11,6076
USIM5	USIMINAS	PNA	5,6122
TNLP4	TELEMAR	PN	5,3219
CSNA3	SID NACIONAL	ON ED	4,0037
BBDC4	BRADESCO	PN N1	3,9945
GGBR4	GERDAU	PN N1	3,1716
ITAU4	ITAUBANCO	PN N1	2,9932
BRKM5	BRASKEM	PNA N1	2,9234
EBTP4	EMBRATEL PAR	PN *	2,8101
VALE3	VALE R DOCE	ON N1	2,4365
NETC4	NET	PN N2	2,3141

CMIG4	CEMIG	PN * N1	2,2794
ELET6	ELETROBRAS	PNB*	2,2228
PETR3	PETROBRAS	ON	2,2191
ARCE3	ARCELOR BR	ON N1	1,6538
ITSA4	ITAUSA	PN EJ N1	1,6224
BRTO4	BRASIL TELEC	PN * N1	1,6137
UBBR11	UNIBANCO	UNT N1	1,5496
VIVO4	VIVO	PN	1,5256
SDIA4	SADIA S/A	PN N1	1,3993
CPLE6	COPEL	PNB*	1,3499
EMBR3	EMBRAER	ON EJ NM	1,3154
AMBV4	AMBEV	PN *ES	1,2843
BRAP4	BRADESPAR	PN N1	1,2505
GOAU4	GERDAU MET	PN N1	1,2051
VCPA4	V C P	PN N1	1,1094
ELET3	ELETROBRAS	ON *	1,0854
ARCZ6	ARACRUZ	PNB EJ N1	1,0408
TNLP3	TELEMAR	ON	0,8888
PRGA3	PERDIGAO S/A	ON NM	0,8764
CCRO3	CCR RODOVIAS	ON NM	0,8737
SBSP3	SABESP	ON * NM	0,8665
TCSL4	TIM PART S/A	PN *	0,8526
BBAS3	BRASIL	ON NM	0,8489
TMAR5	TELEMAR N L	PNA	0,8105
CLSC6	CELESC	PNB N2	0,7955
BRTP4	BRASIL T PAR	PN * N1	0,7306
PTIP4	IPIRANGA PET	PN EJ	0,6515
LIGT3	LIGHT S/A	ON * NM	0,6113
KLBN4	KLABIN S/A	PN N1	0,5825
BRTP3	BRASIL T PAR	ON * N1	0,5820
ACES4	ACESITA	PN	0,5434
TRPL4	TRAN PAULIST	PN * N1	0,5371
TMCP4	TELEMIG PART	PN *	0,5118
CRUZ3	SOUZA CRUZ	ON EJ	0,5088
TLPP4	TELESP	PN	0,5020
ELPL4	ELETROPAULO	PN * N2	0,4440
CGAS5	COMGAS	PNA*	0,3909
CESP4	CESP	PN *	0,3376
TCSL3	TIM PART S/A	ON *	0,3236
CMIG3	CEMIG	ON * N1	0,2120
CTAX4	CONTAX	PN	0,1826
CTAX3	CONTAX	ON	0,0323

(*) Ações em lotes de mil

Dentre os ativos integrantes do Ibovespa seleciona-se *portfolios* que apresentam uma boa porcentagem de representatividade em termos de liquidez, sendo este o critério a ser utilizado aqui para as ações que compõem o Ibovespa.

Com base no modelo matemático quadrático apresentado no capítulo 2 busca-se decidir quanto investir em cada ativo, minimizando-se os riscos e maximizando-se o retorno.

De maneira geral, o problema a ser resolvido neste trabalho é formulado como descrito abaixo:

$$\mathbf{min} \quad f(x) \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{s. a} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0,$$

onde

$$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

$$b \in \mathbf{R}^m$$

$$x \in \mathbf{R}^n.$$

Sendo que a função objetivo f quadrática é originada das covariâncias dos ativos. As restrições são lineares de desigualdade em que n representa o número de ativos que compõem a carteira e m o número de restrições do problema.

3.3 *Matlab* e Finanças

No mundo financeiro, é imprescindível ter a capacidade de simular e prever riscos frente à freqüente oscilação e instabilidade do mercado, como já mencionado na introdução deste trabalho. Isto exige o desenvolvimento de sistemas computacionais cada vez mais flexíveis que implementem, com eficiência e rapidez, modelos inovadores que forneçam informações confiáveis para análise e tomada de decisão.

Além disso, para que o patrimônio intelectual e as séries históricas de dados das empresas não sejam perdidos, estes novos sistemas devem ter alta integração com sistemas operacionais e bancos de dados vigentes.

É neste contexto que se insere a plataforma *Matlab*[®], desenvolvida pela MathWorks [39], é baseada em um ambiente integrado de “Modelagem, Simulação, Visualização e Desenvolvimento, Teste e Implementação”. Esta plataforma fornece recursos para suprir essas necessidades por meio de funções matemáticas e estatísticas, capacidades gráficas interativas, programação e integração com sistemas externos. Motivos pelos quais a implementação foi efetuada em *Matlab*[®].

3.4 Pontos sobre a Implementação

Dadas as justificativas, conforme detalhado na seção (3.3), para a escolha do pacote *Matlab* para a implementação do Método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática. Nesta seção são abordados alguns pontos importantes relativos ao detalhamento do processo de implementação do algoritmo.

Relembrando o problema (3.2.1) para a composição de carteira ao qual esta sendo tratado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) && (3.4.1) \\
 \text{s. a} \quad & Ax \leq b \\
 & x \geq 0,
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 f: \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R} \\
 A &\in \mathbf{R}^{m \times n} \\
 b &\in \mathbf{R}^m \\
 x &\in \mathbf{R}^n
 \end{aligned}$$

A é matriz de pesos das ações.
b é o vetor de restrições.

Assim, o primeiro passo no algoritmo é calcular a matriz de covariância para a qual os dados (observações históricas dos retornos de cada ação) são fornecidos através de arquivos de texto. Após, obtida a função a ser minimizada são tratadas as

restrições que estão formuladas exatamente como no problema (3.4.1), isto é, são consideradas apenas as restrições de desigualdade do tipo $Ax \leq b$.

Na forma geral na qual foram realizados os testes são empregadas duas restrições relativas ao peso dos ativos e n restrições relativas a não negatividade ($x \geq 0$) da variável, ou seja, utilizou-se nos testes $n+2$ restrições lineares. Esta estrutura não é rígida, logo o modelo aceita ainda outras restrições que por ventura se deseja incluir, como, por exemplo, restrições de retorno.

O algoritmo está subdividido em rotinas com finalidades específicas, com uma rotina principal que faz o gerenciamento chamando as funções para entrada de dados, avaliação da função penalizada, avaliação do problema de região de confiança e saída de dados com apresentação gráfica dos resultados.

4. TESTES COMPUTACIONAIS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo confirma-se a escolha do pacote computacional desenvolvido pela empresa MathWorks [39], utilizado para implementar o algoritmo do Método Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática e a rotina escolhida para a realização dos testes comparativos. Bem como os resultados obtidos.

São apresentados ainda os testes computacionais realizados com o algoritmo implementado do Método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática (LAPQ), além dos testes realizados com a rotina interna do programa *Matlab*[®] denominada *quadprog* (que resolve um problema não linear com restrição de desigualdade). Assim, tanto o LAPQ quanto o *quadprog* são empregados para resolver o Modelo da Média Variância com Restrições de Desigualdade, gerado pelo problema de compor carteiras de investimento.

4.1 Resíduos ou Erros nos Dados

A coleta de dados foi realizada diretamente do sítio Infomoney [7], selecionando-se e trabalhando-se com um ativo ou ação por vez, efetuando-se uma checagem minuciosa para que cada dado colhido estivesse realmente associado ao dia correto no tempo associado. Durante esta manipulação e criação do banco de dados, a partir do sítio, eventualmente pode ter ocorrido algum equívoco ou mudança de posição de um determinado retorno que poderia ser considerado um erro.

Porém, isso não interfere no trabalho uma vez que o objetivo é discutir a validade da implementação do Algoritmo de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática aplicado à resolução do problema de compor Carteiras de Investimento. Desta forma, mesmo que se tenha alguma distorção nos dados de entrada ela se manterá em qualquer teste que for feito no momento da comparação das rotinas, uma vez que as entradas são sempre as mesmas, o que se espera apresentarem exatamente os mesmos resultados ótimos.

Por exemplo, sejam os dados de entrada os retornos de três empresas apresentados na tabela 3 a seguir. Na primeira coluna são apresentadas as datas de cada observação, na segunda, terceira e quarta colunas os retornos diários percentuais das ações VALE5, PETR4 e USIM5, respectivamente.

Tabela 3 – Retornos diários (%) das ações

DATA	VALE5	PETR4	USIM5
01/8/2006	0,23	0,25	-3,07

31/7/2006	-1,61	-0,44	-0,65
28/7/2006	2,95	0,80	0,65
27/7/2006	0,56	1,20	3,31
26/7/2006	-1,41	0,48	-0,11
25/7/2006	2,42	0,99	0,83
24/7/2006	2,18	3,74	-0,51
21/7/2006	-1,81	-0,83	-1,83
20/7/2006	-4,03	-2,98	-3,84
19/7/2006	5,65	3,07	5,24
18/7/2006	0,19	0,12	0,59

O passo seguinte é o cálculo da covariância entre as três ações, o que dá origem à matriz de covariância, apresentada abaixo.

$$\text{COV}(\text{VALE5}, \text{PETR4}, \text{USIM5}) = \begin{pmatrix} 6,6510 & 3,7686 & 4,8522 \\ 3,7686 & 2,9836 & 2,8761 \\ 4,8522 & 2,8761 & 6,1867 \end{pmatrix}$$

Calculadas as covariâncias entre as ações, obtém-se dados suficientes para efetuar a minimização, uma vez que o interesse é minimizar o risco e o único dado de entrada utilizado é a matriz de covariância, de acordo com o modelo da média variância apresentado no capítulo 3.

Observe que o fato da minimização ser executada a partir da matriz de covariância elimina qualquer erro advindo de equívoco ou erro na coleta inicial dos dados (tabela 3), uma vez que os dados estão consolidados na matriz de covariância. Chega-se então à seguinte solução ou composição da carteira.

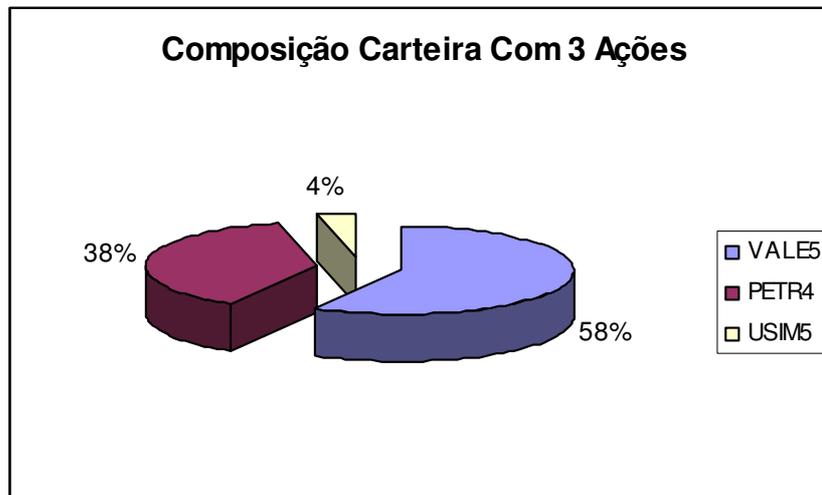
$$\text{VALE5} = 0,58;$$

$$\text{PETR4} = 0,38;$$

$$\text{USIM5} = 0,04;$$

Ainda, visualizando de outra forma, o resultado da composição da carteira verifica-se na figura 4 a seguir a distribuição gráfica dos pesos de cada ação que compõe a carteira.

Figura 4 – Distribuição dos pesos de uma carteira



Calculando o retorno esperado e o risco da carteira ótima, obtém-se:

Retorno = 0,33 %;

Risco = 3,74 %

Assim, tem-se que investindo 58% dos recursos na ação da Vale do Rio Doce VALE5, 38% na ação da Petrobras PETR4 e 4% na ação da Usiminas USIM5, tem-se a expectativa de retorno de 0,33% ao dia com um risco associado de 3,74% ao dia.

4.2 Comparação LAPQ e *quadprog* Por Erro Relativo

Os dados utilizados para os testes são as séries históricas dos retornos das ações negociadas na Bovespa. Estes dados foram retirados do sítio Infomoney [7] na Internet, e referem-se ao período, dependendo da ação, de 01/01/1990 à 01/08/2006, o que representa uma série que vai de 1.300 a 4.000 dados históricos analisados de cada ação. Estes dados representam a variação diária do retorno percentual de cada ação negociada na BOVESPA neste período.

Existem atualmente aproximadamente 560 ações negociadas na BOVESPA, entre unitárias (negociadas por unidade) e em lote de mil, sendo que a atual carteira teórica que compõe o Ibovespa, atualizada em 31/07/2006, é composta por 54 ações onde 35 são unitárias e 19 são em lotes de mil.

Para efeitos de análise e comparação dos resultados, um propósito específico a ser tratado é validar a proposta de aplicação do método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática (LAPQ) para resolver um problema de programação não-linear. Assim, utilizando-se das séries de dados históricos dos retornos das ações negociadas na Bovespa, são formuladas várias carteiras com diferentes quantidades de ações avaliadas (variáveis do problema) que são resolvidas empregando, além do LAPQ também a rotina *quadprog* do *Matlab* para validação da metodologia proposta, observando o grau de erro considerado na implementação do LAPQ.

A tabela 4 a seguir apresenta na primeira coluna o número de variáveis do problema testado. Na segunda e terceira colunas apresentamos o resultado da somatória dos pesos de cada carteira composta pelo *quadprog* e LAPQ, respectivamente. Na quarta coluna é exibido o erro relativo na comparação do LAPQ com o *quadprog*.

Tabela 4 – Comparativo Erro *quadprog* com LAPQ

Num Var	Resultado QuadProg	Resultado LAPQ	Erro
2	1,00000	1,00000	9,E-12
3	1,00000	1,00000	8,E-12
4	1,00000	1,00000	2,E-11
5	1,00000	1,00000	3,E-11
6	1,00000	1,00000	3,E-11
7	1,00000	1,00000	3,E-11
8	1,00000	1,00000	4,E-11
9	1,00000	1,00000	5,E-11
10	1,00000	1,00000	5,E-11
11	1,00000	1,00000	6,E-11
12	1,00000	1,00000	7,E-11
13	1,00000	1,00000	7,E-11
14	1,00000	1,00000	7,E-11
15	1,00000	1,00000	8,E-11
16	1,00000	1,00000	1,E-10
17	1,00000	1,00000	1,E-10
18	1,00000	1,00000	1,E-10
19	1,00000	1,00000	1,E-10
20	1,00000	1,00000	1,E-10
25	1,00000	1,00000	2,E-10
30	1,00000	1,00000	2,E-10
35	1,00000	1,00000	3,E-10

40	1,00000	1,00000	3,E-10
45	1,00000	1,00000	3,E-10
47	1,00000	1,00000	2,E-10

Dos resultados obtidos pelas simulações e apresentados na tabela 4, acima, se verifica que o maior erro relativo quando se compara o LAPQ com o *quadprog*, fica na casa de $1 \cdot 10^{-10}$ que é menor que o erro considerado na implementação estipulado em $1 \cdot 10^{-5}$.

Apresenta-se a seguir a tabela 5 com a comparação do erro para o percentual apresentado dentro de uma carteira de investimento. É possível comparar se o percentual estimado de compra pelo LAPQ para a ação VALE5 é o mesmo estimado pelo *quadprog* para a mesma ação VALE5. A tabela 5 apresenta na primeira coluna as ações que compõem a carteira, na segunda e terceira colunas os percentuais para cada ação pelo *quadprog* e LAPQ respectivamente, finalmente na quarta coluna o erro relativo entre o resultado do *quadprog* e o LAPQ.

Tabela 5 – Comparação de otimização para carteira com 8 Ações

AÇÕES	QUADPROG	LAPQ	ERRO
VALE5	26,45%	26,45%	1,E-05
PETR4	19,27%	19,27%	8,E-06
USIM5	0,00%	0,00%	0,E+00
TNLP4	0,00%	0,00%	0,E+00
CSNA3	11,82%	11,82%	5,E-06
BBDC4	18,60%	18,60%	1,E-05
GGBR4	6,87%	6,87%	9,E-05
ITAU4	16,98%	16,98%	3,E-06

No resultado apresentado na tabela 5 acima e em todos os demais testes que chegaram à 50 ações ou variáveis o erro do percentual estipulado para cada ativo manteve-se dentro do limite de $1 \cdot 10^{-5}$ que foi o erro considerado na implementação do algoritmo. Assim, tomando como exemplo a ação VALE5 da Companhia Vale do Rio Doce pela otimização tanto do LAPQ quanto do *quadprog* o percentual investido seria exatamente o mesmo 26,45%, o que se repete com todas as ações ou ativos analisados, conforme o esperado.

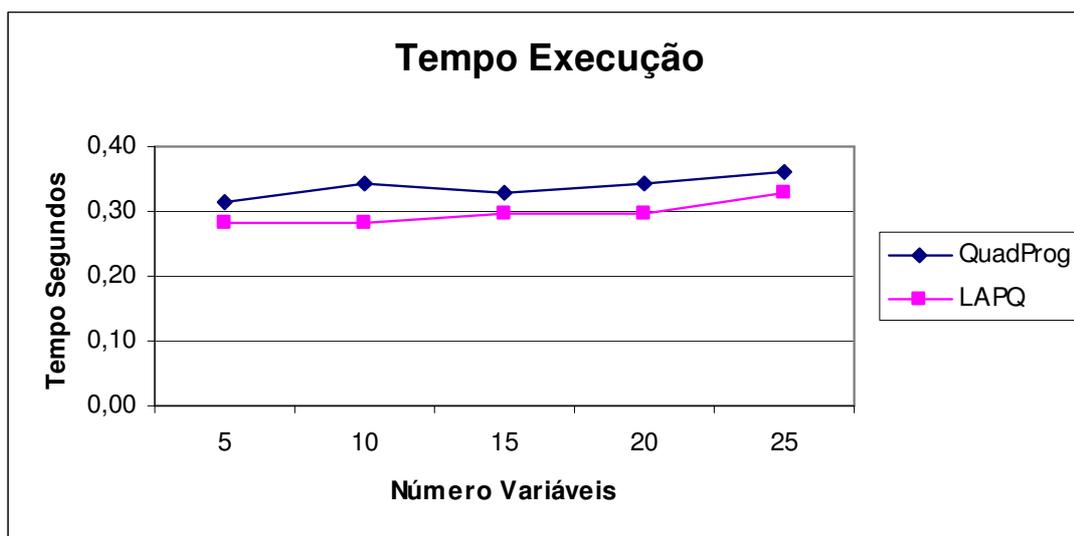
Com as evidências apresentadas acima se pode assumir validada a implementação do algoritmo do LAPQ para a finalidade proposta de resolver o

problema de compor carteiras de investimento, uma vez que a demonstração teórica do algoritmo já foi apresentada por Jussiani e Matioli [8].

Uma outra análise estabelecida foi comparar, no gráfico da figura 5, a seguir, os tempos de execução demandados por cada uma das rotinas. É muito importante ressaltar que esta comparação só foi possível devido à utilização de um mesmo computador com configuração fixa (Athlon XP 3100; 512 MB, 80 G, ambiente Windows XP) para todos os testes.

Assim, no gráfico a seguir é apresentada a comparação com relação ao tempo de execução, sendo que no eixo x aparece o número de variáveis trabalhadas e no eixo y o tempo de execução em segundos.

Figura 5 – Comparativo Tempo Execução



Do gráfico, figura 5, pode-se verificar que o tempo em milésimos de segundos demandados pelo LAPQ, nos testes realizados, se manteve bastante próximo do tempo do *quadprog*, isto é, o LAPQ tende a resolver de forma tão ágil e veloz um mesmo problema quanto o *quadprog*. Isso pode ser devido a diversos fatores. Porém, o mais importante pode ser a penalidade quadrática aplicada ao Lagrangeano Aumentado e a estrutura objetiva da rotina programada, que ainda pode ser mais elaborada, algo que não estava no objetivo fundamental deste trabalho.

4.3 Construindo a Fronteira Eficiente

Conforme já mencionado na introdução deste trabalho, além do modelo da Média Variância, Markowitz [1] também estabeleceu o conceito de Fronteira Eficiente, que de forma simplificada é a combinação entre dois ou mais ativos de forma a gerar o menor risco para um retorno dado, ou o maior retorno para um risco dado. Assim consegue-se um menor risco para a carteira ao investir um percentual em cada ação do que se investisse tudo em uma única ação. Veja a seguir na tabela 6 as informações relativas à análise de cinco ações, onde na primeira coluna aparecem os nomes das ações e na última linha a composição das cinco ações denominada carteira ótima. Na segunda coluna são apresentados os retornos de cada ação e da carteira ótima e finalmente na terceira coluna apresenta-se os riscos de cada ação e da carteira ótima.

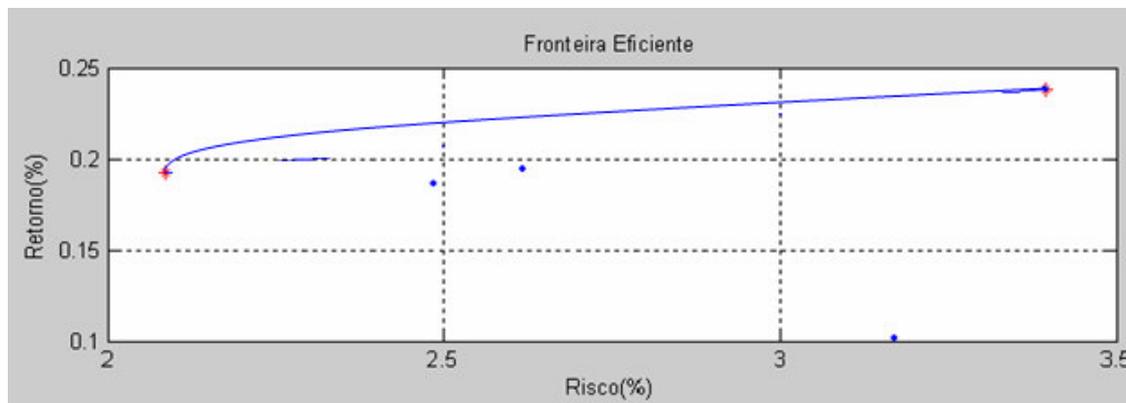
Tabela 6 – Ações isoladas e carteira ótima

Ações	Retorno (%)	Risco (%)
VALE5	0,19	2,62
PETR4	0,19	2,49
USIM5	0,24	3,39
TNLP4	0,10	3,17
CSNA3	0,25	2,91
CARTEIRA ÓTIMA	0,20	2,03

Da tabela 6 verifica-se que se todo o investimento fosse feito na ação VALE5 da companhia Vale do Rio Doce o retorno esperado seria de 0,19% ao dia com risco de 2,62%. Ao tempo que se o investidor decidir investir tudo na ação PETR4 da Petrobras teria a mesma expectativa de retorno de 0,19% porém com um risco menor de 2,49% que obviamente pela análise puramente numérica é mais atrativo, pois o risco é menor. Agora, verifica-se que na última linha aparece o resultado da otimização onde as ações estão otimizadas de forma a obter o menor risco com o maior retorno, assim conseguiu-se chegar a um risco de 2,03% bem menor que os das ações VALE5 e PETR4 individualmente.

Abaixo, na figura 6, é apresentado o gráfico da curva da Fronteira Eficiente desta carteira e os pontos isolados representam a relação risco retorno de cada ação de forma isolada. Já o ponto vermelho (2.03, 0.2) da curva indica o ponto ótimo.

Figura 6 – Fronteira Eficiente



A figura 6, da fronteira eficiente, indica quais são os melhores retornos para os riscos estabelecidos pelo investidor. De forma que qualquer ponto sobre a curva representa uma composição que tem o máximo retorno para o mínimo risco ou de maneira análoga o mínimo risco para o retorno estabelecido.

4.4 Detalhamento dos Pesos de Uma Carteira

Realizada a verificação da metodologia proposta, por comparação relativa do erro, e considerada aceitável. Nesta seção, parte-se para o detalhamento de uma carteira de ações a partir de ações que compõem o Ibovespa. Propõe-se então a inclusão de mais uma opção que é considerar o capital total a ser investido e os preços de fechamento de cada ação ou lote de ação, de forma que a carteira composta possa ser avaliada na forma de representatividade monetária

Toma-se como exemplo um investidor com capital de R\$ 100.000,00 para investimento. Inicialmente, baseado no conhecimento do investidor, selecionou-se 25 ações de empresas que atuam em segmentos diferenciados de atividades tais como telecomunicações, transportes, petróleo, etc. Para decidir em quais ações deve investir e quanto deve investir em cada uma delas, resolve-se o problema não linear utilizando o LAQP e chega-se ao resultado expresso na tabela 7.

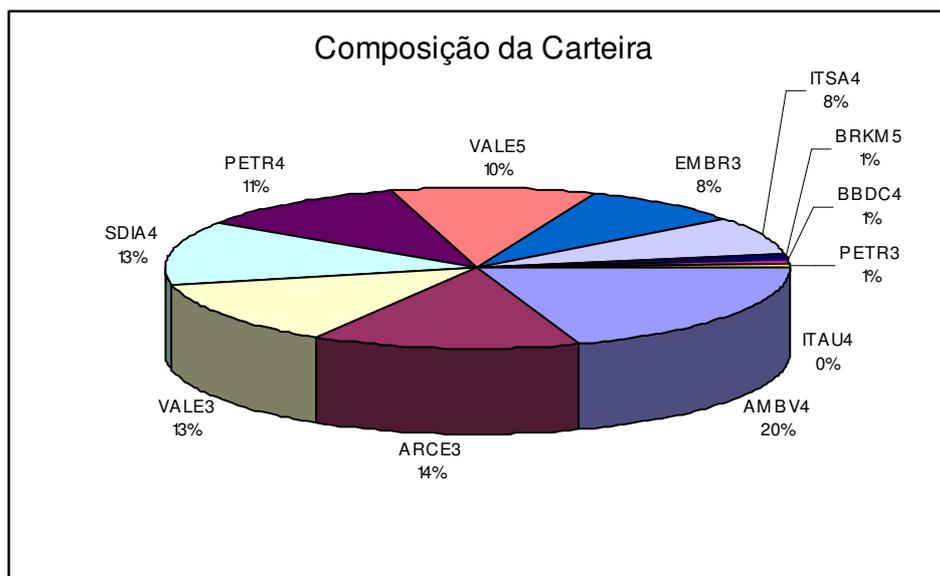
Tabela 7 – Composição de carteira com 25 ações

N	Ação	Tipo	Participação	R\$
1	Vale Rio Doce (PNA N1)	AMBV4	19,7%	R\$ 19.695,75
2	Petrobras PN (PETR4)	ARCE3	13,8%	R\$ 13.782,52
3	Usiminas PNA (USIM5)	VALE3	13,3%	R\$ 13.295,18
4	Telemar PN (TNLP4)	SDIA4	12,8%	R\$ 12.777,87
5	Sid Nacional ON (CSNA3)	PETR4	11,1%	R\$ 11.101,90
6	Bradesco PN N1 (BBDC4)	VALE5	10,4%	R\$ 10.417,10
7	Gerdau PN N1 (GGBR4)	EMBR3	8,2%	R\$ 8.241,92
8	Itaubanco PN N1 (ITAU4)	ITSA4	7,8%	R\$ 7.794,49
9	Braskem PNA N1 (BRKM5)	BRKM5	1,1%	R\$ 1.147,75
10	Embratel PN (EBTP4)	BBDC4	1,0%	R\$ 1.005,16
11	Vale Rio Doce ON N1 (VALE3)	PETR3	0,6%	R\$ 608,24
12	Net PN N2 (NETC4)	ITAU4	0,1%	R\$ 132,12
13	Cemig PN N1 (CMIG4)	USIM5	0,0%	R\$ 0,00
14	Eletrobras PNB (ELET6)	TNLP4	0,0%	R\$ 0,00
15	Petrobras ON (PETR3)	CSNA3	0,0%	R\$ 0,00
16	Arcelor BR ON N1 (ARCE3)	GGBR4	0,0%	R\$ 0,00
17	Itausa PN N1 (ITSA4)	EBTP4	0,0%	R\$ 0,00
18	Brasil Telecom PN N1 (BRTO4)	NETC4	0,0%	R\$ 0,00
19	Unibanco UNT N1 (UBBR11)	CMIG4	0,0%	R\$ 0,00
20	Vivo Part PN (VIVO4)	ELET6	0,0%	R\$ 0,00
21	Sadia PN N1 (SDIA4)	BRTO4	0,0%	R\$ 0,00
22	Copel PNB (CPLE6)	UBBR11	0,0%	R\$ 0,00
23	Embraer ON NM (EMBR3)	VIVO4	0,0%	R\$ 0,00
24	AmBev PN (AMBV4)	CPLE6	0,0%	R\$ 0,00
25	Bradespar PN N1 (BRAP4)	BRAP4	0,0%	R\$ 0,00

Na tabela 7, a composição da carteira é exibida na ordem decrescente de percentual de forma a facilitar a visualização dos resultados. A primeira coluna traz o número correspondente a cada ação avaliada; já na segunda coluna tem-se o nome da empresa e na terceira o nome da ação correspondente; na quarta coluna são apresentados os percentuais para compra de cada ação; e na quinta coluna, o valor correspondente em moeda a ser investido em cada ação dado o capital inicial de R\$ 100.000,00. Para esta carteira o retorno esperado está estimado em 0,15% e o risco em 1,34% ao dia. É importante salientar que, aqui, o período escolhido foi o diário, mas se poderia projetar mensalmente ou anualmente bastando para tanto utilizar os dados de entrada no mesmo período.

A seguir, na figura 7, é apresentado o gráfico que mostra a divisão das ações dentro da carteira. De acordo com o resultado obtido na tabela 7, observa-se que dentre os 25 ativos avaliados 9 ações representariam a composição da carteira efetivamente.

Figura 7 – Composição da Carteira com 25 ações avaliadas



Como já citado anteriormente, cada ação tem um preço de compra associado por unidade ou em lotes de mil ações. Dessa forma, apresenta-se a seguir, na tabela 8, as quantidades a serem adquiridas de cada ativo.

Tabela 8 – Quantidade por ação

N	Ação	Tipo	Preço/R\$	Quantidade
1	AmBev PN (AMBV4)	AMBV4	R\$ 875,00	22,5
2	Arcelor BR ON N1 (ARCE3)	ARCE3	R\$ 36,20	380,7
3	Vale Rio Doce ON N1 (VALE3)	VALE3	R\$ 50,40	263,8
4	Sadia PN N1 (SDIA4)	SDIA4	R\$ 6,00	2129,6
5	Petrobras PN (PETR4)	PETR4	R\$ 45,01	246,7
6	Vale Do Rio Doce (PNA N1)	VALE5	R\$ 43,40	240,0
7	Embraer ON NM (EMBR3)	EMBR3	R\$ 18,65	441,9
8	Itausa PN N1 (ITSA4)	ITSA4	R\$ 8,75	890,8
9	Braskem PNA N1 (BRKM5)	BRKM5	R\$ 11,10	103,4
10	Bradesco PN N1 (BBDC4)	BBDC4	R\$ 71,96	14,0

11	Petrobras ON (PETR3)	PETR3	R\$ 50,12	12,1
12	Itaubanco PN N1 (ITAU4)	ITAU4	R\$ 64,19	2,1

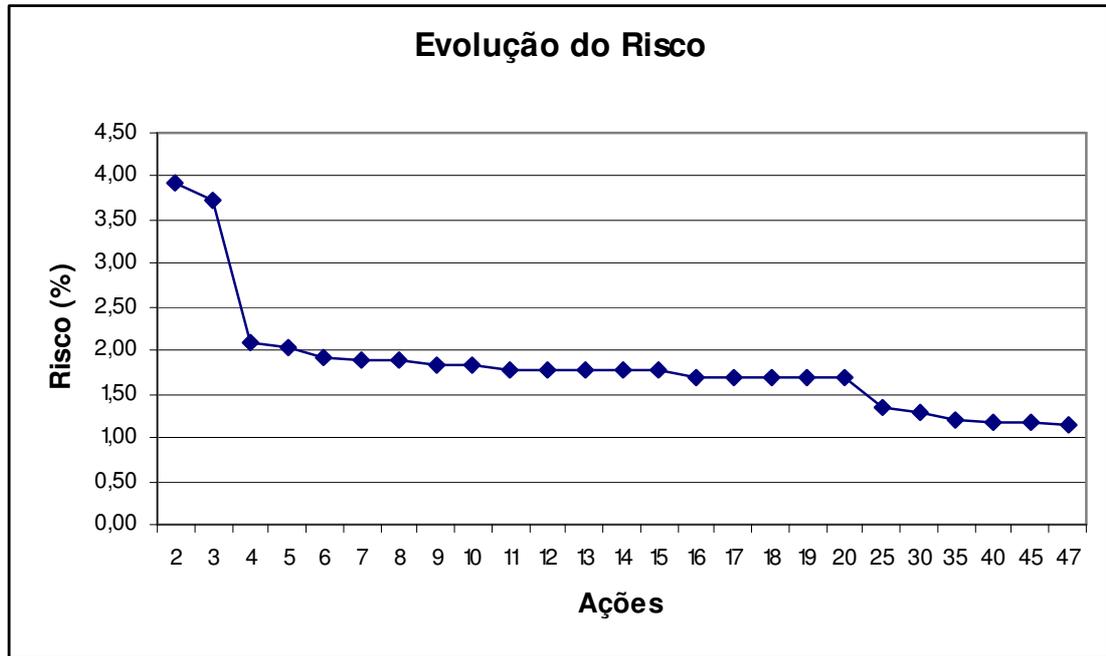
Na tabela 8 tem-se na primeira coluna a quantidade de ações; na segunda o nome da empresa a qual a ação se refere; já na terceira coluna aparece o nome (sigla) da ação; na quarta coluna o preço unitário ou lote de cada ação (considerando o preço de fechamento em 01/08/06) e finalmente na quinta coluna a quantidade de unidades ou lotes de ações a serem adquiridos.

O objetivo aqui é justamente exibir a relação entre os percentuais da composição associada ao valor monetário do investimento. Neste caso, se considera todas as variáveis contínuas e assim chega-se a quantidades, não necessariamente inteiras. Por exemplo, a primeira linha da tabela indica a compra de 22,5 ações da Ambev, ou seja, admite-se aqui a compra fracionada de ações da Ambev.

4.5 Diversificação e Comportamento do Risco

A verificação numérica do conceito de que a diversificação dos investimentos minimiza os riscos é outro fator importante que merece destaque. O gráfico da figura 8 a seguir mostra o comportamento do risco à medida que se aumenta a quantidade de ações ou variáveis do problema.

Figura 8 – Evolução do risco com a Diversificação



Do gráfico da figura 8, apresentado anteriormente, se verifica que quando o problema ou a carteira é composta por dois ativos ou ações temos um risco associado de 3,92%, e à medida que são acrescentadas novas variáveis ou possibilidades de ações à carteira o risco diminui. Quando são analisadas mais de 35 ações o risco atinge o patamar de 1,16% e permanece praticamente estável. De maneira análoga com a diversificação o retorno também se reduz à medida que são acrescentadas mais opções à carteira. Porém, a sua taxa de redução, pelo menos nos casos estudados, ocorre com menor intensidade.

Por exemplo, o risco reduziu 70,4% (de 3,92% para 1,16%) ao tempo que o retorno reduziu em 55,4% (de 0,34% para 0,15%). Desta forma, pode-se verificar que numericamente existe uma boa vantagem, pois se obtém maior redução do risco com uma redução menor no retorno.

5. CONCLUSÕES, CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS.

A aplicação do método do Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática diferenciável de segunda ordem ao problema de compor uma carteira de investimento, produziu os mesmos resultados, considerando-se o erro relativo, que uma rotina padrão para resolução de um problema não linear com restrição de desigualdade, neste caso a rotina *quadprog* do *Matlab*. Esse ponto verifica o principal objetivo deste trabalho que consiste em propor nova aplicação ao Método do Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática ao problema de compor carteiras de investimento.

Para confirmar essa aplicação se validou os resultados, conforme análise exposta no capítulo 4, por meio da comparação do erro relativo. Ainda avaliou-se o desempenho do algoritmo em termos de tempo de execução, que se mostrou sutilmente superior nos testes realizados.

Ao construir a fronteira eficiente se verificou graficamente de uma maneira de fácil visualização, que o binômio risco retorno da solução ótima do problema é sempre menor que o risco ou retorno de cada ação individual. Além disso, tem-se que os pontos sobre a fronteira indicam a composição ótima da carteira para um determinado risco ou retorno dado.

Um outro ponto que merece ser destacado é a verificação da premissa do modelo de Markowitz [1], “diversificando os investimentos diminuí-se o risco”. Isso pode ser verificado à medida que se variou o número de ativos analisados, mantendo-se sempre os mesmos ativos e se acrescentado outros a estes. Assim, quando se varia a quantidade de ações de duas para quarenta, verificou-se que o risco diminuiu 69% ao tempo que o retorno reduziu-se em 54%.

Alguns pontos que poderiam surgir como continuação deste trabalho, dentre inúmeros resultados que podem ser obtidos. Uma questão interessante é oferecer uma nova metodologia para resolver o problema de decidir qual o período ótimo para a reotimização de uma carteira, pois qualquer investidor gostaria muito de saber quando

comprar ou vender obtendo o máximo retorno. Atualmente existem análises gráficas para este tipo de decisão.

Outro estudo viável seria utilizar programação inteira para, a partir da resposta ótima obtida com variáveis contínuas, decidir exatamente as quantidades de lotes fechados nos quais deve ser investido.

Exemplificando melhor este caso. Ao aplicar um método com variáveis contínuas como o LAPQ ou *quadprog* a resposta ótima encontrada fornece determinados percentuais que devem ser investidos para cada ação. Porém como as ações não são negociadas de forma fracionada, mas apenas de forma unitária ou em lote de mil. O percentual indicado na resposta ótima com variáveis contínuas pode indicar um valor x para investir na ação A, que é diferente do valor y que custa cada unidade da ação A. Dada esta situação qual é a alternativa de menor risco aumentar ou reduzir o valor de x ?

Estas e outras questões ficam para trabalhos que pretendemos desenvolver em um futuro próximo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons.

[2] MATIOLI, L. C. **Uma nova Metodologia para Construção de Funções de Penalização para Algoritmo de Lagrangeano Aumentado**. Santa Catarina, Tese Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

[3] MARTÍNEZ, J. M.; SANTOS, S. A. Métodos Computacionais de Otimização. Rio de Janeiro: 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1995.

[4] SECURATO, J. R. Decisões Financeiras em Condições de Risco. São Paulo: Atlas, 1996.

[5] ROCKAFELLAR, R. T. Convex Analysis. New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[6] SHARPE, W. T.; ALEXANDER, G. J. Investments. Pentice Hall: Fourth Edition, 1990.

[7] INFOMONEY. Cotações. Histórico. Apresenta cotações históricas de diversas ações. Disponível em: <<http://www.infomoney.com.br>>. Acesso em: 20 de agosto 2006.

[8] JUSSIANI, L. F. **Desempenho do Método de Lagrangeano Aumentado com Penalidade Quadrática**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2004.

[9] ASSUNÇÃO, H. G. V. de; COSTA, O. L.V. Modelos de Rastreamento em Carteiras de Investimento. Resenha BM&F – N.º 142.

- [10] HIRIART-URRUTY, J-B.; LEMARECHAL, C. Convex Analysis and Minimization Algorithms I. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [11] FRIEDLANDER, A. Elementos de Programação Não-Linear. Editora da Unicamp, 1994.
- [12] FRIETZSCHE, H. Programação Não-Linear Análise e Métodos. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1977.
- [13] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [14] GONZAGA, C. C. Um Curso de Programação Não Linear. Notas de Aula, 2004.
- [15] BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. New York: John Wiley, 2nd edition, 1993.
- [16] BERTSEKAS, D. P. Constrained Optimization and Lagrange Multipliers. New York: Academic Press, 1992.
- [17] DENNIS, J. E.; SCHNABEL, R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1983.
- [18] MARCILIO, D. C. **Lagrangeano Aumentado Aplicado na Resolução de Subproblemas Gerados pelo Método de Programação Quadrática Seqüencial.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2006.

[19] BOLSA DE VALORES DE SÃO PAULO. Mercado. Informe Técnico. Índices. Índice Bovespa. Carteira Teórica. Apresenta composição da carteira teórica do Ibovespa. Disponível em: <<http://www.bovespa.com.br>>. Acesso em: 12 de agosto 2006.

[20] JOHNSON, WICHNER. Applied Multivariate Statistical Analysis. 2nd Edição.

[21] BARRY, R. J. Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2ª Edição, 2002.

[22] DUNDER, C. **Portfolios Eficientes Incluindo Opções**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, 1998.

[23] STERN, J. M.; PEREIRA, C. A. B.; RIBEIRO, C. O.; DUNDER, C.; NAKANO, F.; LAURETTO, M. Otimização e Processos Estocásticos Aplicados à Economia e Finanças. IME-USP.

[24] DEMBO, R. S. Stochastic Optimization, in Annals of Operation Research. J. Birge and J-B Wets (eds), pp.63-80, 1991.

[25] FONSECA, M.; ALCINO, R. Álgebra Linear Aplicada a Finanças, Economia e Econometria. Editora Manole, 2003.

[26] HAUGEN, R. A. Modern Investment Theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.

[27] BOLSAONE. Manual. Ações. Apresenta um manual de investimentos. Disponível em: <<http://www.bolsaone.com>>. Acesso em: 13 de junho 2006.

[28] GAZETA MERCANTIL. Cadastro. Senha. Acesso a informações e análise de retornos de ações. Disponível em: <<http://www.gazetamercantil.com.br>>. Acesso em: 25 de maio 2006.

[29] ROLL, R. A Mean/Variance Analyses of Tracking Error. In The Journal of Portfolio Management Summer, 1992.

[30] RUDOLF, M.; WOLTER, H. J.; ZEMMERMANN, H. A Linear Model for Tracking Error Minimization. In Journal of Banking & Finance, pp. 85-103, 1999.

[31] VARGA, G. Índice de Sharpe e Outros Indicadores de Desempenho Aplicados a Fundos de Ações Brasileiros. Revista de Administração Contemporânea, Vol. 5, nº 3, 215-245.

[32] ESPINOZA, Y. C. R. **Um Teorema de Equivalência entre Métodos Lagrangeano Aumentado e Algoritmos de Pontos Proximais**. Santa Catarina, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1998.

[33] GONZAGA, C. C. Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear. Rio de Janeiro: 17º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1989.

[34] GONZAGA, C. C. Path Following Methods for Linear Programming. SIAM Review, 34(2): pp.167-227, 1992.

[35] LIMA, E. L. Curso de Análise. Rio de Janeiro: IMPA, 3.a edição, Vol. 2, 1989.

[36] MINOUX, M. Mathematical Programming. John Wiley & Sons Ltd, 1986.

[37] ROCKAFELLAR, R. T. The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 12: pp.555-562, 1973.

[38] COINVALORES. Aprendizado. Índice Bovespa Definição e Metodologia. Apresenta detalhamento da Metodologia de Cálculo do Ibovespa. Disponível em: <<http://www.coinvalores.com.br>>. Acesso em: 06 de maio 2006.

[39] THE MATHWORKS. Home. Apresenta os softwares desenvolvidos. Disponível em: <<http://www.mathworks.com>>. Acesso em: 28 de julho 2006.